

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 51

Übungsaufgaben

AUFGABE 51.1. Es sei (M, d) ein metrischer Raum, $P \in M$ ein Punkt und es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Es sei $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine streng wachsende Funktion. Zeige, dass f in P genau dann ein lokales Maximum besitzt, wenn $h \circ f$ ein lokales Maximum in P besitzt.

AUFGABE 51.2. Es seien L und M metrische Räume und es sei $\varphi: L \rightarrow M$ eine stetige Abbildung. Es sei

$$\varphi(P) = Q$$

und es sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die im Punkt $Q \in M$ ein lokales Extremum besitzt. Zeige, dass

$$f \circ \varphi$$

in P ein lokales Extremum besitzt.

AUFGABE 51.3. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zeige, dass eine von 0 verschiedene lineare Abbildung $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ keine lokalen Extrema besitzt. Gilt dies auch für unendlichdimensionale Vektorräume? Braucht man dazu Differentialrechnung?

AUFGABE 51.4.*

Es sei f ein Polynom in zwei Variablen der Bauart

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \sum_{(r_1, r_2) \in \mathbb{N}^2, r_1 + r_2 \geq 3} a_{(r_1, r_2)} x^{r_1} y^{r_2}.$$

Zeige ohne Differentialrechnung, dass f im Nullpunkt ein isoliertes lokales Minimum besitzt. Bestimme in Abhängigkeit der Koeffizienten $a_{(r_1, r_2)}$ ein $\epsilon > 0$ derart, dass die Einschränkung von f auf $U(0, \epsilon)$ außerhalb des Nullpunktes echt positiv ist.

AUFGABE 51.5. Berechne den Gradienten der Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 y - z^3 x e^{xyz},$$

in jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^3$.

AUFGABE 51.6. Berechne den Gradienten der Funktion

$$f: G \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto \frac{xyz - z^2}{\ln(xy) + z^2},$$

in jedem Punkt $P \in G$ mit $G = \mathbb{R}_{>1} \times \mathbb{R}_{>1} \times \mathbb{R}$

AUFGABE 51.7. Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge, $P \in G$ ein Punkt und $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ eine in P differenzierbare Funktion. Zeige, dass f und $(Df)_P$ im Punkt P den gleichen Gradienten besitzen.

AUFGABE 51.8. Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge, $P \in G$ ein Punkt und $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ eine in P differenzierbare Funktion. Zeige, dass ein Vektor $v \in V$ genau dann zum Kern von $(Df)_P$ gehört, wenn er orthogonal zum Gradienten $\text{Grad } f(P)$ ist.

AUFGABE 51.9. Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2.$$

AUFGABE 51.10.*

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy^2 - x.$$

AUFGABE 51.11. Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2y - y^2 + x.$$

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 51.12. (4 Punkte)

Berechne den Anstieg der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2y - x + y^3,$$

im Punkt $P = (1, 1)$ in Richtung des Winkels $\alpha \in [0, 2\pi]$. Für welchen Winkel ist der Anstieg maximal?

AUFGABE 51.13. (5 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x + \sin(y) - xz.$$

- (1) Bestimme den Gradienten G von f im Punkt $P = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarprodukts $\langle -, - \rangle$.
- (2) Es sei

$$E = \{(x, y, z) \mid 2x - y + 3z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

und es sei $g = f|_E$ die Einschränkung von f auf E . Bestimme den Gradienten \tilde{G} von g bezüglich der Einschränkung des Standardskalarprodukts auf E .

- (3) Zeige, dass \tilde{G} die orthogonale Projektion von G auf E ist.

AUFGABE 51.14. (4 Punkte)

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy^3 - xy + \sin y.$$

AUFGABE 51.15. (5 Punkte)

Bestimme die kritischen Punkte zur Funktion

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 6y^3 - 6x^2y + 8y^2$$

aus Beispiel 51.5.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5