贈閱

第一卷

第五期

第五期目錄

傅仲嘉先生一封信

本刊第三期曾載有李森林君『關於圓內接四邊形之一定理』一文．李君爲武大高材生，好學愼思，研究幾何，輒有所得，每爲普通教本中所未見．李君以曾否見諸他書爲詢，自維學識淺陋，見聞不周，加之課事冗忙，未克遍查典籍，不敢遽下斷語．因以質之吾友北平師大教授傅仲嘉先生，承其不棄，惠錫鴻文，對玆問題作系統的討論．爰亟爲披露以饗讀者，並弁諸篇首，以示敬重，兼誌謝忱，——編者．

乙閣兄：

前承　寵聘，任以貴社撰述，搜索枯腸，方愧無以塞責．頃又渥被　佳命，使與貴校李君討論其所發現之定理，益令謭陋慚怍！使終緘口爲文陋計，既負　足下殷殷謬賞之盛情，又不足證實區區擁護貴刊之微意．謹草此候　教，欲以兩塞其責．倘承斧政而布之通訊討論之欄，亦所願也，不敢請耳．有如萬一，眞以之禍梨棗，則爲中等學校讀者之便利計，不得不條列而詳陳之．門下見之，得毋笑其迂闊乎？

(1)．本節所論之點，不拘在幾度空間．

(1·1)．設 A_1, A_2, A_3 爲三點．每去一點 A_i 則其餘二點 A_j, A_k 必有一重心 M_i（即 $A_j A_k$ 之中點）．聯 $A_i M_i$．如此之線凡三，會於一點 M'，將每 $A_i M_i$ 內分爲 $A_i M' : M' M_i = 2:1$，稱爲 A_1, A_2, A_3 三點之重心．

(1·2)．設有四點 A_1, A_2, A_3, A_4．每去一點 A_i，則餘三點必

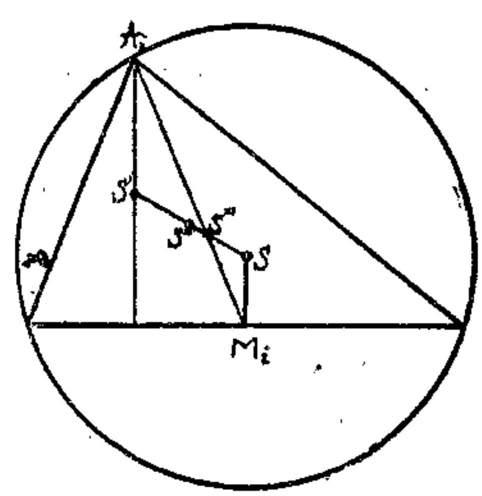
有一重心 M_i' 如(1·1)所云者．聯 $A_i M_i$．如此之線凡四，會於一點 M''，將每 $A_i M_i'$ 內分為 $A_i M'' : M'' M_i' = 3 : 1$，稱為 A_1, A_2, A_3, A_4 之重心．

(1·3)． 循此以往，設 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 為任意 n 點．每去一點 A_i，則其餘 $(n-1)$ 點必有一重心 M_i^{n-3}．聯 $A_i M_i^{n-3}$．如此之線凡 n，會於一點 M^{n-2}，將每 $A_i M_i^{n-3}$ 內分為 $A_i M^{n-2} : M^{n-2} M_i^{n-3} = n-1 : 1$，稱為 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之重心．

(1·4)． 設 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 為任意 n 點．此 n 點中任意 r 點必有一重心 B，其餘 $(n-r)$ 點必有一重心 C．聯 BC．如此之線凡 $C^n_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ 會於一點 G，即 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之重心，此點將每 BC 內分為 $BG : GC = n-r : r$．

(2)． 本節所論之點限在一平面上，

(2·1)． 設 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 三邊之中點為 M_1, M_2, M_3，外心為 S，垂心為 S'，九點圓心為 S''，重心為 S'''，則 $\Delta A_1 A_2 A_3 \backsim \Delta M_1 M_2 M_3$．$A_1, A_2, A_3, S', S, S'''$ 之對應點為 $M_1, M_2, M_3, S, S'', S'''$，相似比為 $2 : -1$，相似中心為 S'''；故 S, S''', S'', S' 共線，$SS' = 2 \cdot SS'' = 3 \cdot SS'''$．此即通常所稱為 Euler's 定理者也．



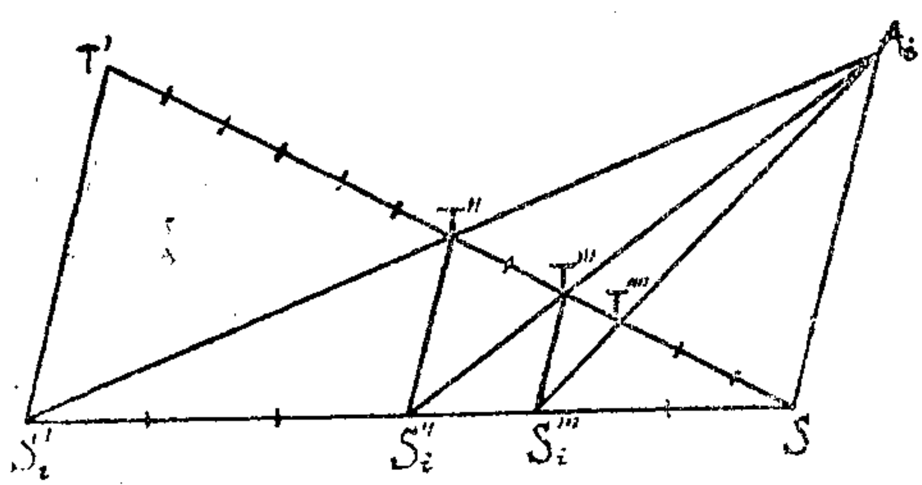
(2·2)． 設 A_1, A_2, A_3, A_4 四點共圓．每去一點 A_i，則餘三點必有一外心 S，垂心 S_i'，九點圓心 S_i''，重心 S_i'''．此四 S_i' 共一 ⊙T'，四 S_i'' 共一

$\odot T''$ (其圓心 T' 即四九點圓所會之點), 四 S_i''' 共一 $\odot T'''$. 此等圓心 T', T'', T''', 與 A_1, A_2, A_3, A_4 四點之重心 T'''' 及外心 S 順次排列於一直線上,

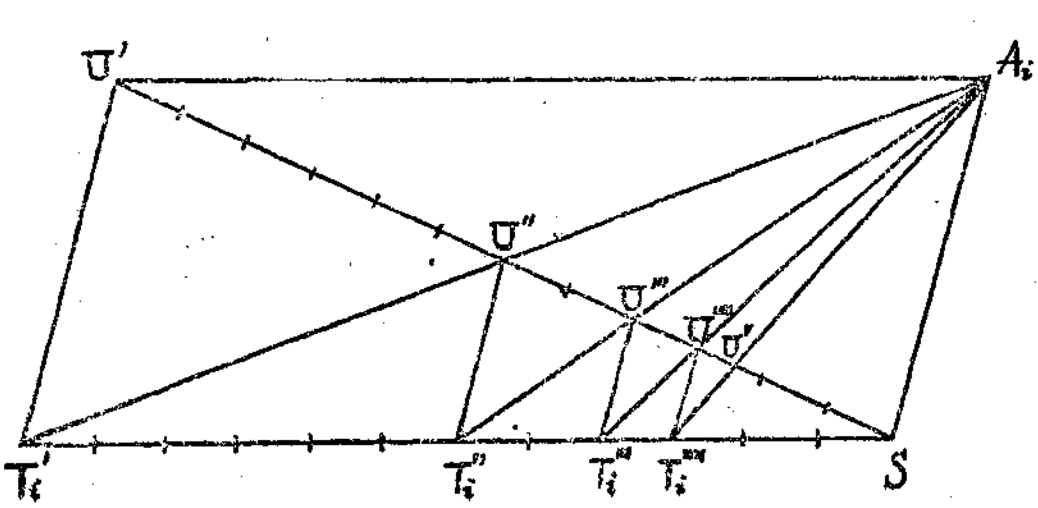
且 $$ST'=2\cdot ST''=3\cdot ST'''=4\cdot ST'''';$$

各圓半徑之關係爲

$$T'S_i'=2\cdot T''S_i''=3\cdot T'''S_i'''=SA_i.$$



(2·3). 設 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 五點共圓. 每去一點 A_i 則餘四點必有對應之 T_i', T_i'', T_i''', T_i'''' 如(2·2)所云者. 據(2·2)甚易證



五 T_i' 點共一 $\odot U'$, 五 $\odot T_i'$ 會於 U';

五 T_i'' 點共一 $\odot U''$, 五 $\odot T_i''$ 會於 U'';

五 T_i''' 點共一 $\odot U'''$, 五 $\odot T_i'''$ 會於 U''';

五 T_i'''' 點共一 $\odot U''''$, 五 $\odot T_i''''$ 會於 U'''';

且此等圓心 U', U'', U''', U'''' 與 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 五點之重心 U^v 及外心 S 順次排列於一直綫上其關係爲

$$SU'=2\cdot SU''=3\cdot SU'''=4\cdot SU''''=5\cdot SU^v;$$

各半徑之關係爲

$$U'T_i'=2\cdot U''T_i''=3\cdot U'''T_i'''=4\cdot U''''T_i''''=SA_i.$$

(2·4). 襲用此種記法,順次推而廣之,則關於 n 個共圓點所產生此類之共圓點與共點圓其性質及關係何若,可不言而喻矣.

(2·5). Coolidge, Circle and Sphere, Ch. I, Th. 166 所論係 S'', T'', U'', …. 一系. Durell, Modern Geometry, ex. 10, P. 53 所論係 S', T' U', …. 一系.

(3). 設 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 爲 $\odot S$ 上任意 n 個點,其重心爲 G. 設其中 A_i, A_j 二點之中點爲 B_{ij}, 其餘 $(n-2)$ 點之重心爲 C_{ij}. 聯 $B_{ij}C_{ij}$. 如此之線凡 $C_2^n=\frac{n(n-1)}{2}$, 每線各被 G 內分爲 $B_{ij}G:GC=n-2:2$.

故若將 SG 延長之至 L, 令 $SG:GL=n-2:2$, 則據(1·4)可知

$$\Delta GSB_{ij} \backsim \Delta GLC_{ij},$$

$$LC_{ij} \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{2}{n-1}\cdot B_{ij}S \perp A_iA_j$$

(3·1). 當 $n=3$ 時,(3)之 B_{ij} 即(2·1)之 M_k, C_{ij} 即 A_k, L 即 S',

而(3)之效用厥爲「三高線會於一點」.

(3·2). 當 $n=4$ 時,(3)之 L 即(2·2)之 T'', B_{ij} 即 $A_i\ A_j$ 之中點, C_{ij} 即 $A_k\ A_l$ 之中點,而(3)之效用厥爲「由 $A_i\ A_j$ 之中點 B_{ij} 向 $A_k\ A_l$ 作垂線,如此之線凡六,會於一點 L. 此點即四九點圓相會之點,亦即四九點圓心所在圓之圓心. 其他性質見(2·2).」來示所稱李君發現之定理載於貴刊第三期者,意者其即此歟?

(3·3). 當 $n=5$ 時,(3)之 L 即(2·3)之 U'''. 其效用自亦可表之曰:「同圓上有五點,由每三點之重心向其餘二點之聯線作垂線,則如此十垂線會於一點 U''',其性質見(2·3).」

(3·4). 當 $n=6$, 7…時, L 之爲 V'''', W', …自不言而喻. 因

$$\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}:\frac{1}{n}=2:n-2$$

乃恒等式也.

(4). 本節所論之點限在三度空間內.

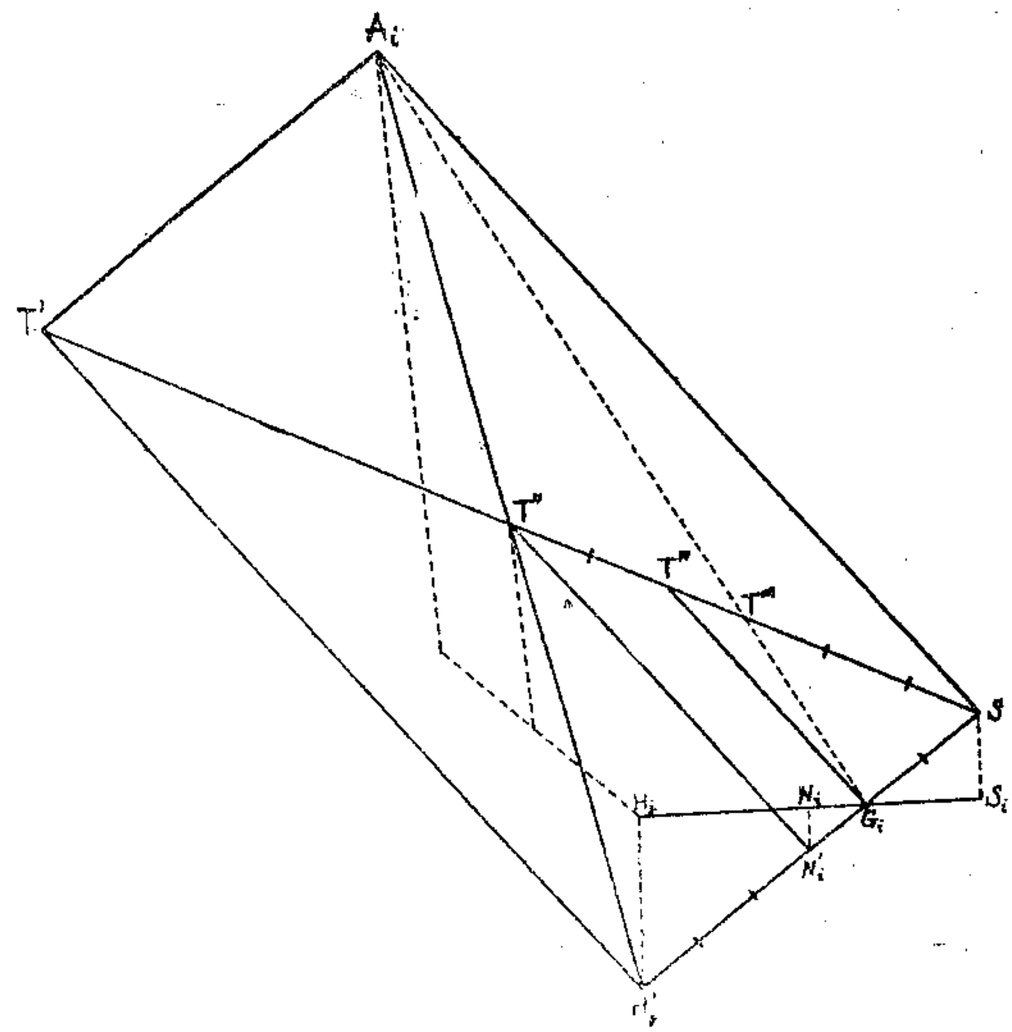
(4·1). 設 $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ 爲一四面體. 每去一點 A_i, 則其餘三點有一重心 G_i, 垂心 H_i, 外心 S_i, 九點圓心 N_i. 設四面體之外心爲 S, 重心爲 T'''', $G_1\ G_2\ G_3\ G_4$ 之外心爲 T'''. 則因 T'''' 內分 $A_i\ G_i$ 爲 $A_i T'''' : T''''G_i = 3:1$ 吾人知 T'''' 亦內分 ST''' 爲 $ST'''' : T''''T''' = 3:1$. 故若於 ST''' 之延長線上取 T'', T' 令

$$ST' = 2\cdot ST'' = 3\cdot ST''' = 4\cdot ST'''';$$

於 SG_i 之延長線上取 N_i', H_i' 令

$$SH_i' = 2\cdot SN_i' = 3\cdot SG_i;$$

則 $$H_i\ H_i' \parallel N_i\ N_i' \parallel S\ S_i \perp A_j\ A_k\ A_l \text{ 平面},$$



且 $$H_i H_i' = 4 \cdot N_i N_i' = 2 \cdot S S_i \ ,$$

$$H_i' T_i' \stackrel{\parallel}{=} 2 \cdot N_i' T'' \stackrel{\parallel}{=} 3 \cdot G_i T''' \stackrel{\parallel}{=} S A_i \ .$$

由此可知四 H_i' 共一球 T', 四 N_i' 共一球 T'', 四 G_i 共一球 T''', 其球心 T', T'', T''',之位置及半徑 $T'H_i'$, $T''N_i'$, $T'''G_i$ 之長悉如上述.

此 T'' 卽 Coolidge 所稱爲 Centre of associated hyperboloid 者也。(Coolidge 所謂不知用何法可避免用 hyperboloid 以研究此初等問題者,用上法似可避免焉.)

(4·2). 設 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 爲共球五點，無四點在一平面上者．則每去一點 A_i，其餘四點必有對應之球 $T_i', T_i'', T_i''', T_i''''$．設五點之重心爲 U^v，球心爲 S，則(用(2·3)之圖)

五球心 T_i' 在一球 U' 上，五球 T_i' 會於 U' 點；

五球心 T_i'' 在一球 U'' 上，五球 T_i'' 會於 U'' 點；

五球心 T_i''' 在一球 U''' 上，五球 T_i''' 會於 U''' 點；

五球心 T_i'''' 在一球 U'''' 上，五球 T_i'''' 會於 U'''' 點；

諸球心 U', U'', U''', U'''' 之位置與各半徑之長悉如(2·3)所述．

(4·3). 此法顯然易於推而論及 n 個共球點：每於同球上取 n 點 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，無四點在一平面上者，吾人必可配以一球 z 及一點 Z

(a) 該點 Z 即該球 z 之心．

(b) z 之半徑爲任意指定之長 R.

(c) 每去一點 A_i，其餘(n−1)個 A 點有一應配之球 y_i，如此之 n 個 y 球皆會於 Z 點．

(d) 如此 n 個 y 球之心皆在 z 球上．

(4·4). Coolidge, Circle and Sphere, Ch. V, Th. 38 所論乃指 $R=\frac{1}{3}SA_i$ 言，即 $T''', U''', \cdots$ 一系也．(原書 one-half 一字想係 onethird 之誤)．

(5) 設 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 爲球 S 上任意 n 個點，無四點在一平面上者，其重心爲 G．而 B_j，C_{ij} 及各點之定義仍如(3)，則

$$\Delta GSB_j \backsim \Delta GLC_{ij},$$

$$LC_{ij} \perp \frac{2}{n-2} B_{ij}S,\ B_{ij}S \perp A_iA_j,$$

LC_{ij} 與 A_iA_j 線之方向互相垂直.

(5˙1). 當 $n=4$ 時, C_{ij} 即 A_kA_l 之中點. 故(5)之效用爲「由四面體每稜之中點向其對稜作垂面,則六垂面會於一點 L, 即(4˙1)之 T''.」

此點 Salmon's Analytic Geometry of Three Dimensions, Art. 142, exs. 3—5, 已詳論之.

(5˙2). 當 $n=5$ 時, C_{ij} 即 $\Delta A_kA_lA_m$ 之重心. 故(5)之效用爲「由球內接五點形每三點之重心向其餘二點之聯線作垂面,則此十垂面必會於一點 L, 即(4˙2)之 U'''.」

(5˙3). 六點及以後之 L 爲 V'''', W^v, ... 其理亦如(3˙4).

(6). 遵此道以論四度空間共 hypersphere 點,或更高度空間同類問題,但將數目增加,語法變易可耳. 非貴刊所願載,不備論.

據以上所論,則李君所發現之定理殆即(3˙2),而(3˙2)則(3)之特例而(5˙1)之極限情形也. (5˙1)既經前人明白言之,而况(3˙2)乎? 區區之意以爲事理之爲吾輩耳目心思所及者,大抵皆已成爲前輩之常識. 况吾之得而談論,貫穿,而擴充之者哉! 雖然,以李君之好學深思,終當發前人之所未發耳.

李君傑作尙未拜讀,僅據來示奉答如上. 其說皆得之各書中者,種但貫穿而排次之耳. 若夫說之不精,語之不詳,則剿襲之過也. 幸 教政之!

弟傅種孫拜覆 二十二年四月十日.

級數之一種

心士

級數 $f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n)$,

或表以 $\sum_{m=1}^{n} f(m)$,

其 n 項之和已書如上式,本無待另求.尋常所謂"級數求和",係指在可能情形之下,另覓一 n 之函數,其價値與原級數 n 項之和相等,而其計算之方法,初不隨 n 之加大而增其煩重.例如

$$1+2+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1),$$

左方計算用加法 n+1 次,若 n 加大,次數當然增多,反之,右方計算用加法一次乘法二次,方法固定,不隨 n 改變.

上述 n 之另一函數,並不是任何級數所皆有的.因此"級數求和"的問題,實際上並不重在方法的問題,而重在"有或沒有"的問題.本篇所討論之一種級數,其第 m 項之數爲 m 之有理整函數.

引定理1. 設 $f(x)$ 爲 x 之 p 次有理整函數,則必可令

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x(x+1)+\cdots\cdots+a_px(x+1)\cdots(x+p-1),$$

$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_p$ 爲 p+1 個常數.

證: 以 x 除 $f(x)$,設其餘數爲 a_0,商爲 $f_1(x)$.再以 x+1 除 $f_1(x)$,餘數爲 a_1,商爲 $f_2(x)$.如是陸續用 x, x+1, x+2, ……, x+p−1 除之,其餘數陸續爲 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}$,商陸續爲 $f_1(x)$,

$f_2(x)$, $f_3(x)$, ……, $f_p(x)$. 因 $f(x)$ 之次數為 p, 其商之次數遞次減一,直至 $f_p(x)$其次數應為零,故 $f_p(x)$ 應是常數. 今既有

$$f(x) \equiv a_0+x\,f_1(x),$$
$$f_1(x) \equiv a_1+(x+1)f_2(x),$$
$$f_2(x) \equiv a_2+(x+2)f_3(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_{p-1}(x) \equiv a_{p-1}+(x+p-1)f_p(x);$$

再令 $$f_p(x) = a_p,$$

陸續消去 $f_1(x)$, $f_2(x)$, ……, $f_p(x)$,即可得

$$f(x) \equiv a_0+a_1x+a_2x(x+1)+\cdots+a_px(x+1)\cdots(x+p-1).$$

引定理2. r 為任何正整數,則

$$\sum_{m=1}^{n} m(m+1)\cdots(m+r-1)=\frac{1}{r+1}\,n(n+1)\cdots(n+r-1)(n+r).$$

級數之第 m 項為 m 之 r 次有理整函數,其 n 項之和為 n 之 r+1 次有理整函數.

證: 於恒等式

$$m(m+1)\cdots(m+r-1)$$
$$\equiv \frac{1}{r+1}\Big\{m(m+1)\cdots(m+r-1)(m+r)-(m-1)m\cdots(m+r-1)\Big\}$$

中,陸續令 m 等於 1, 2, …, (n−1), n 得以下諸式:

$$1\cdot 2\cdots r \quad = \frac{1}{r+1}\Big\{1\cdot 2\cdots r(r+1)-0\Big\},$$
$$2\cdot 3\cdots r+1 = \frac{1}{r+1}\Big\{2\cdot 3\cdots(r+1)(r+2)-1\cdot 2\cdots r(r+1)\Big\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n-1)n\cdots(n+r-2)=\frac{1}{r+1}\Big\{(n-1)\,n\cdots(n+r-2)\,(n+r-1)$$

$$-(n-2)\,(n-1)\cdots(n+r-2)\Big\}$$

$$n(n+1)\cdots(n+r-1)=\frac{1}{r+1}\Big\{n\,(n+1)\cdots(n+r-1)\,(n+r)$$

$$-(n-1)\,n\cdots(n+r-2)\Big\}$$

此 n 等式之和即為

$$\sum_{m=1}^{n} m\,(m+1)\cdots(m+r-1)=\frac{1}{r+1}n\,(n+1)\cdots(n+r-1)(n+r)$$

定理: 設 $f(m)$ 為 m 之有理整函數,其次數為 p,則級數

$$\sum_{m=1}^{n} f(m)$$

亦為項數 n 之有理整函數,其次數為 $p+1$.

證: 從引定理 1

$$f(m)\equiv a_0+a_1m+a_2m(m+1)+\cdots+a_pm(m+1)\cdots(m+p-1),$$

$$\therefore\ \sum_{m=1}^{n} f(m)\equiv na_0+a_1\sum_{m=1}^{n} m+a_2\sum_{m=1}^{n} m(m+1)$$

$$+\cdots\cdots+a_p\sum_{m=1}^{n} m(m+1)\cdots(m+p-1).$$

更從引定理 2,知右方每項均為 n 之有理整函數,最末項 n 之最高次數為 $p+1$,故諸項之和之次數亦為 $p+1$.

舉例. $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} m^4=1^4+2^4+\cdots\cdots+n^4=\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)$

算法: 如前求得 $a_0=0$, $a_1=-1$, $a_2=7$, $a_3=-6$, $a_4=1$, 其式如下:

$$
\begin{array}{l|l}
m & \underline{m^4 \cdots\cdots\cdots 0} \\
m+1 & \underline{m^3 \cdots\cdots\cdots -1} \\
m+2 & \underline{m^2-m+1 \cdots 7} \\
m+3 & \underline{m-3 \cdots\cdots -6} \\
 & 1 \cdots\cdots\cdots\cdots 1
\end{array}
$$

$$\therefore \sum_{m=1}^{n} m^4 = -\sum_{m=1}^{n} m + 7\sum_{m=1}^{n} m(m+1) - 6\sum_{m=1}^{n} m(m+1)(m+2)$$

$$+\sum_{m=1}^{n} m(m+1)(m+2)(m+3).$$

$$\sum_{m=1}^{n} m = \frac{1}{2} n(n+1),$$

$$\sum_{m=1}^{n} m(m+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2),$$

$$\sum_{m=1}^{n} m(m+1)(m+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3),$$

$$\sum_{m=1}^{n} m(m+1)(m+2)(m+3) = \frac{1}{5} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4);$$

$$\therefore \sum_{m=1}^{n} m^4 = n(n+1)\Big\{-\frac{1}{2} + \frac{7}{3}(n+2) - \frac{3}{2}(n+2)(n+3)$$

$$+\frac{1}{5}(n+2)(n+3)(n+4)\Big\}$$

$$= \frac{1}{30} n(n+1)\Big\{-15 + 70(n+2) - 45(n+2)(n+3)$$

$$+6(n+2)(n+3)(n+4)\Big\}$$

$$= \frac{1}{30} n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1).$$

不等式淺說

(續)

蕭文燦

4. 高次不等式．不等式之形狀如

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots\cdots(x-a_n)>0\cdots\cdots\cdots(1)$$

或 $$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots\cdots(x-a_n)<0\cdots\cdots\cdots(2)$$

者，曰高次不等式． 吾人可假設 $a_1>a_2>a_3\cdots\cdots>a_n$，不致失其一般性． 其解法如次:

(1) $x>a_1$ 時，各因數均爲正，故(1)式成立，(2)式則否．

(2) $a_1>x>a_2$ 時，第一因數爲負，餘皆爲正，故(2)式成立而(1)式則否．

(3) $a_2>x>a_3$ 時，前兩因數爲負，餘皆爲正，故(1)式成立而(2)式則否．

(4) 一般言之，$a_n>x>a_{n+1}$ 時 $(n+1\leq m)$，前 n 個因數爲負，餘均爲正，故 n 爲偶數時，(1)式成立；n 爲奇數時，(2)式成立．

(5) 最後 $x<a_m$ 時，所有因數均爲負，故 m 爲偶數時(1)式成立，m 爲奇數時則(2)式成立．

5. 分數不等式．不等式之分母含有未知數者曰分數不等式． 此種不等式，若以分母最低公倍之平方乘其兩端，恒可變爲如上節所述高次不等式之形而解之．

例 1. 解 $\frac{x^2-8x+15}{x^2-10x+24}>0$.

(解) 以分母之平方乘其兩端,得式分括之,

$$(x-6)(x-5)(x-4)(x-3)>0.$$

由前節知所求之解為 $x>6,\quad 5>x>4,\quad x<3$.

例 2. 解 $\frac{a(x-1)}{x-2}>1,\quad a\neq 0$.

(解) 原式如前例可化為

$$(a-1)(x-2)\left(x-\frac{a-2}{a-1}\right)>0,$$

(1) 設 $a>1$. 此時 $\frac{a-2}{a-1}$ 之值小於2,故所求之解為 $x\vee$ 及 $x<\frac{a-2}{a-1}$.

(2) 設 $a=1$. 此時原式可化為 $\frac{1}{x-2}>0$,故 $x>2$,

(3) 設 $a<1$,則 $(x-2)\left(x-\frac{a-2}{a-1}\right)<0$,此時若 $a>0$,則 $\frac{a-2}{a-1}$ 之值小於2,而所求之解為 $\frac{a-2}{a-1}>x>2$;若 $a<0$,則 $2>x>\frac{a-2}{a-1}$

(6) 無理不等式. 不等式中含有未知數之無理式者曰無理不等式. 解此種不等式時,應注意次列各端:

(1) 就原式先決定未知數之範圍. 例如 $\sqrt{3-x}>x$ 中之 x 必小於3,否則左方成虛數,無所謂大小也.

(2) 凡根號前無符號之項,概設為正,故如 $-\sqrt{2x-5}>0$ 或 $\sqrt{2x-5}<0$ 之式不能成立.

(3) 無理不等式,非必有解者,如2之例即其一,此外尚有求得之解覆驗時概不合者,不足為奇.

例 1. 解 $\sqrt{5x+1}-\sqrt{2x-1}>\sqrt{7x}$,

(解) 先就原式考之,知 $x>\frac{1}{2}$. 次依基本定理IX兩邊平方之,得

$$5x+1+2x-1-2\sqrt{(5x+1)(2x-1)}>7x,$$

即
$$-2\sqrt{(5x+1)(2x-1)}>0,$$

爲不合理;故此不等式不能成立.

例 2. 解 $\sqrt{m-x}>x$.

(解) 先設 $m>0$, 則必 $m-x>0$, 因之 $x<m$.

本款當 $x\leq 0$ 時,恒可成立,故今就 $0<x<m$ 之數值內更求一精確之限. 因$x>0$,依基本定理IX將設式兩邊平方而整理之,得

$$x^2+x-m<0.$$

由本章3節知 x 之値在 $x^2+x-m=0$ 兩根之間時,此不等式可以成立. 此二根各爲

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{1+4m}}{2},\quad x_2=\frac{-1+\sqrt{1+4m}}{2},$$

就中 x_1 爲負,x_2 爲正. 吾人須比較 x_2 及 m 二數之大小,始能決定 x 之範圍. 今

$$m-x_2=\frac{2m+1-\sqrt{1+4m}}{2}=\frac{2m^2}{2m+1+\sqrt{1+4m}}>0,$$

故知原式成立,祇要 $x<\frac{-1+\sqrt{1+4m}}{2}$.

次設 $m\leq 0$, 則在 $x\leq 0$ 且 x 之絕對値大於 m 之絕對値時,原式均可成立,此甚易証,不多贅.

7. 聯立不等式. 有兩個以上之不等式而求其成立時之共通界限,即謂之解聯立不等式. 此與等式不同之處,即聯立不等式可以只含一個未知數, 而聯立方程式必須含有二個以上之未知數也. 解此種不等式時,必注意基本定理 IV,V 各條.

(a) 含一未知數者.

例 1. 解 $\begin{cases} x^2+2x-15>0, \\ (x-6)(x+7)<0. \end{cases}$

(解) 依本章 3 節先求第一式之界限為 $-5>x>3$, 次求得第二式之界限為 $-7<x<6$, 故此二式同時成立之界限為

$$6>x>3 \quad 及 \quad -5>x>-7.$$

(別解) 將所設不等式邊邊相乘, 依各因子中第二數之大小序列之得

$$(x-6)(x-3)(x+5)(x+7)<0,$$

依本章 4 節亦得如上之解.

(b) 含兩個未知數者.

例2. 解 $\begin{cases} 3x+2y>4, \\ x-6y>-5. \end{cases}$

(解) 3倍第一式與第二式邊邊相加而解之得 $x>\frac{7}{10}$. 次由原式得

$$\frac{x+5}{6}>y>\frac{4-3x}{2}.$$

此其意蓋謂當 x 取任何大於 $\frac{7}{10}$ 之值時, y 之值介於相當兩數之間,所設不等式即可成立. 例如 $x=1$, 則 $1>y>\frac{1}{2}$, 將上之結果聯立書之, 即為本例之解(以後倣此):

$$x > \frac{7}{10}, \qquad \frac{x+5}{6} > y > \frac{4-3x}{2}.$$

(別解)　由第一式得　$x > \frac{4-2y}{3}$,

由第二式得　$x > 6y-5$,

此際 y 取任意值時, $\frac{4-2y}{3}$ 與 $6y-5$ 兩者[illegible]大,有討論之必要.

(1)　設　$\frac{4-2y}{3} > 6y-5$, 則得 $y < \frac{19}{20}$,　$x > \frac{4-2y}{3}$.

(2)　設　$\frac{4-2y}{3} = 6y-5$, 則得 $y = \frac{19}{20}$,　$x > \frac{7}{10}$,

(3)　設　$\frac{4-2y}{3} < 6y-5$, 則得 $y > \frac{19}{20}$,　$x > 6y-5$,

故本例不等式成立時, x,y 之限値如下:

$$\begin{cases} y < \frac{19}{20}, \\ x > \frac{4-2y}{3}; \end{cases} \text{或} \begin{cases} y = \frac{19}{20}, \\ x > \frac{7}{10}; \end{cases} \text{或} \begin{cases} y > \frac{19}{20}, \\ x > 6y-5. \end{cases}$$

(c)　有一式爲方程式者.

例 3,　解　$\begin{cases} 3x+5y=9, \cdots\cdots\cdots(1) \\ x-2y>3 \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(解)　由(1)式 x, y 間之關係已定,故將此等 x 與 y 之值選出其合於(2)式者,即此組不等式之解也,

由(1)得　$x = \frac{9-5y}{3}$,……………(3)

代入(2)後整理之得　$y<0$……………(4)

依(4)之範圍取 y, 代入(3)以定 x 之値,則此等之值,即爲所求.

若二倍(1)式,五倍(2)式,邊邊相加而整理之,得

$$x > 3, \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

又由(1)得

$$y = \frac{9-3x}{5}. \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

依(5)之範圍取 x, 代入(6)以定 y 之值,則此等之值,亦爲所求.

故本例之解爲

$$\begin{cases} x > 3, \\ y = \dfrac{9-3x}{5}; \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} y < 0, \\ x = \dfrac{9-5y}{3}; \end{cases}$$

二者形異而實同.

(別解) 將(2)式改書爲

$$x-2y=3+k, \quad (k>0)$$

與(1)式聯立解之,得

$$x=3+\frac{5k}{11},$$
$$y=-\frac{3k}{11}.$$

任與 k 以正值,所得 x,y 之值均爲本例之解.　　(待續)

點對稱與線對稱之應用

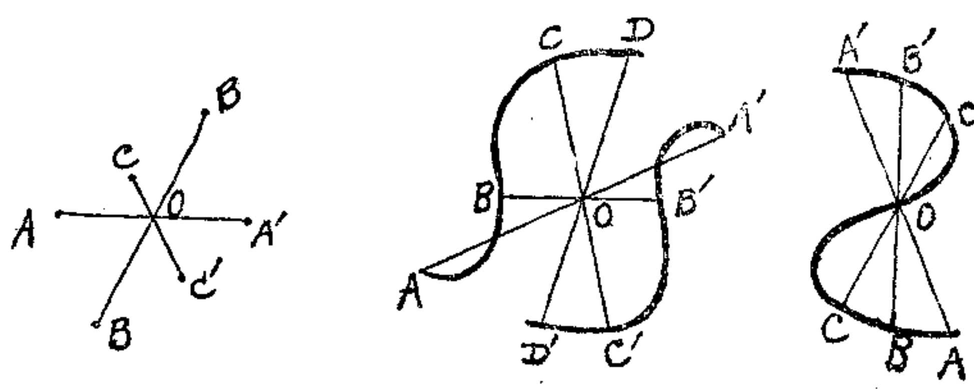
夏伯初

解初等幾何學問題時，應用對稱之處甚多．玆篇乃譯自日人白井傳三郎所著軌跡及作圖講義第四篇之一二兩章，取其解釋簡要示例精當，可為中等學生他山之助，特介紹登載於此．譯者不敢深信譯筆與原著十分契合，讀者神而明之，勿以詞害意，則幸甚矣．

I 點對稱

1.定義

在通過一定點之直線上，由其點互相反向有等距離之二點，謂之關於此定點而對稱．



若一羣圖形之一部分，對於其他部分所有點關於某定點之對稱點，悉在其本身上，則此圖形謂之關於某定點而對稱．此定点謂之對稱中心．

上圖中 A 與 A'，B 與 B'，均為關於定點 O 而對稱．

點對稱之定義,又可述之如次:

某圖形在一定點之周圍,廻轉2直角,恰與原位置完全重合時,其圖形謂之關於其定點而對稱.

適合於此第二定義之圖形,必滿足第一定義,逆而言之,適合第一定義之圖形,亦必滿足第二定義,故此二種定義完全相同.但解實際問題時,根據第二定義較為簡便.

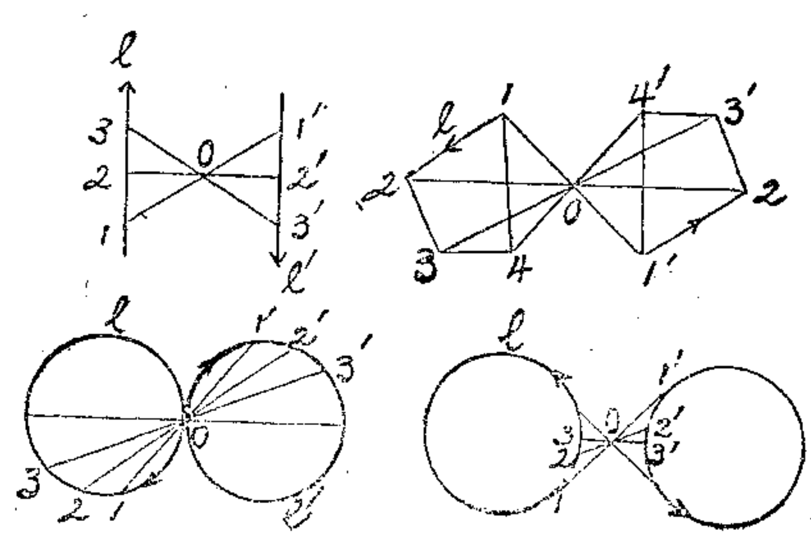
(例1) 圓心為對稱中心,由第一定義解釋,其理甚明.

(例2) 平行四邊形於其對角線之交點周圍廻轉2直角時,相對頂點交換位置,而與原位置全合,故由第二定義,知平行四邊形為關於其對角線之交點而對稱.

2.基本定理

〔定理一〕 二動點常關於定點o而對稱時,此二點之軌跡l與l′,亦關於o而對稱.

此由定義,即可得知。

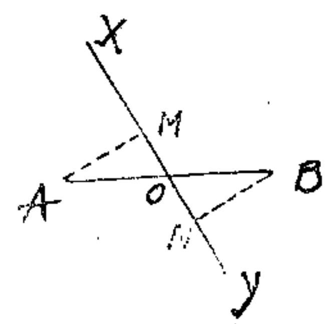


〔系〕 (a) l 爲直綫時，l′ 爲與其平行之直線．

(b) l 爲多角形時，l′ 爲與之合同之多角形．

(c) l 爲圓周時，l′ 爲與之相等圓周，二圓之中心，亦關於 O 而對稱．

〔定理二〕通過對稱中心之任意直綫，距任意一對對稱點有等距．



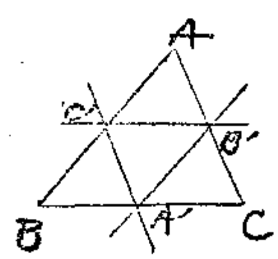
如圖 O 爲某對稱圖形之中心，此圖形上之一對對稱點爲 A,B 時，由A,B 至通過 O 點之任意直綫 XY 之距離 AM 與 BM 必相等，因兩三角形 AOM 與 BOM 爲合同形．

3.應用問題(略解)

(1) 作關於一定點而對稱於定直綫或多角形或圓周之圖．

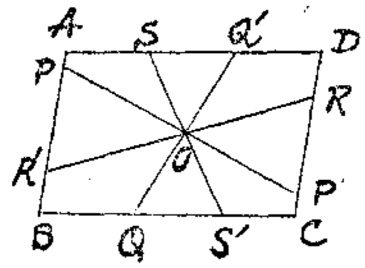
直接應用上系，作圖法已見前圖，茲從略．

(2) 求距三定點有等距離之直綫．



直接應用定理 2，設三定點爲 A，B，C．BC，CA，AB 之中點爲 A′，B′，C′．則則三直綫A′ B′，B′ C′ C′ A′ 均爲所求．

(3) 求作平行四邊形．設其中心 O 爲一定，而各邊又各通過一定點 P，Q，R，S．



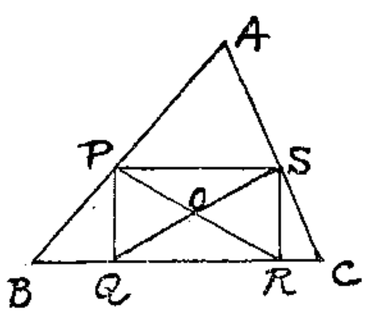
假設所求之平行四邊形 ABCD 已作

得,則 A B 上 P 之對稱點 P′ 必在 C D 邊之上.

同理 Q 之對稱點 Q′, 在 D A 上, S 之對稱點 S′ 在 B C 上, R 之對稱點 R′ 在 AB 上,故決定 P′, Q′, R′, S′, 即易得解答.

(4) 三角形 A B C 內一點 O 一定, 求作以 O 爲中心內接於此三角形之平行四邊形,

設 P Q R S 爲所求,則 P S 爲關於 O 點而與 Q R 對稱之直線.



故定 P S 甚易.

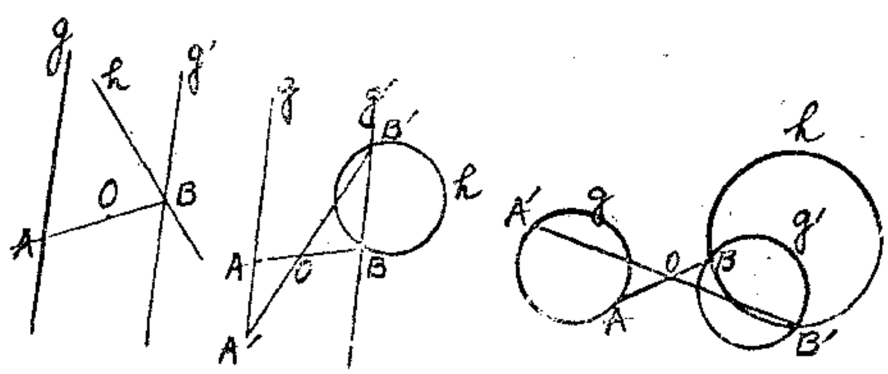
P S 決定後,即可決定 Q R.

(注意) 由 O 之位置之不同而有不能之時,讀者自行研究可也.

(5) 通一定點作直線,二等分所設之平行四邊形.

通過中心者,即爲所求之直線.

(6) 二線 g, h 設爲直線或圓,求作直線過定點 O 與 g, h 各交於 A, B, 且令 OA = OB.



第一圖 g, h 均爲直線, 第二圖 g 爲直線, h 爲圓周, 第三

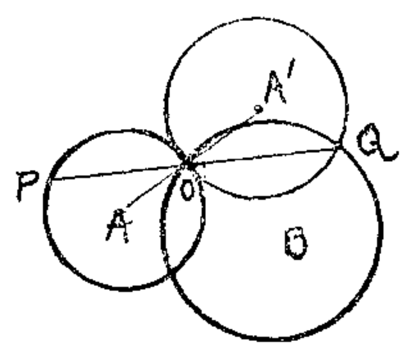
圖 g, h 均爲圓周，三種均由軌跡之交決定 B 點，因之 A B 可定。

無論在何種情形，先作關於 O, g 之對稱線 g′, 求其與 h 之交點。

B 點只限於 h 與 g′ 之共通點，又由 h 與 g′ 之相互位置可定解答之數。

(7) 通過相交二圓之一交點作直線，令其爲兩圓所截取之弦相等。

此不過如前問第三之特別情形，卽關於交點 O, 作一圓 A 之對稱圓 A′. (此時 O 在外切 A 圓之等圓上) 此圓與他圓 B 之交點爲 Q, 則通過 Q 與 O 之直線 P O Q, 卽爲所求之直線。

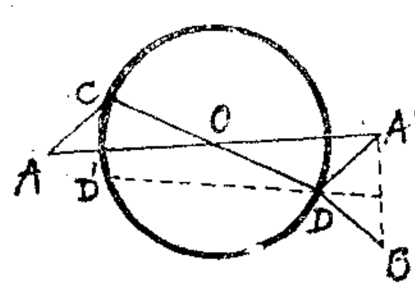


(8) 設已知圓 O 及二點 A, B, 求作一直徑 C D 適合於次之條件：

(第一) $CA=DB$;　(第二) $CA:DB=$ 定比；

(第三) $CA\perp DB$;　(第四) $CA\parallel DB$.

先假定問題已解，將此圖繞 O 點廻轉 2 直角，可知 A 與關於 O 之對稱位置 A′ 相重，則 A C 與 A′ D 相重合。



故解第一問題，在圓周上求距 A′, B 有等距離之點而決定 D. 因之可得所求之直徑. 一般有二解。

又解第二問題，須在圓周上求距 A′ 與 B 之比爲定比之點

D. 即須作 Apollonius 圓可解.

又解第三問題時,須在圓周上求 D 點,令 A′D∥AC, 因之 ∠ADB 爲直角,即以 A′B 爲直徑作圓可解.

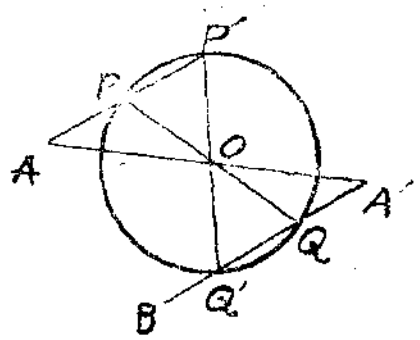
又解第四問題時,須 A′D 與 BD 成一直線,取通過 A′ 與 B 之直線與圓周之交點,即爲 D 點.

以上四問題,一般皆有二解. 如斯推想之同類問題尙多,而所求之圖形,須回轉2直角求之. 此處如能領會,卽得解題之要諦,茲就第四種示其答案如次:

(解析) 假定所求之直徑 PQ 已作得,幷設關於 O 點 A 之對稱點爲 A′.

∵ △APO＝△A′QO, ∴ ∠APO＝∠A′QO, A′Q∥AP. 但 BQ∥AP,

故 A′Q 與 BQ 在同一直線上.



(作圖) 取關於 O 點 A 之對稱點 A′, 過 A′, B 作直線, 與圓周之交點設爲 Q. 再作直徑 PQ, 卽爲所求.

(証明) △APO≡△A′QO, ∴ ∠APO＝∠A′QO,

A′Q∥AP, 即 BQ∥AP.

(討論) 問題之成立, 固不論 A, B 之位置, 但 A′B 或其延長線與圓之相交, 爲十分必要之條件. 故其解答數如次:

A′B 與圓相交, 有二解. 卽圖示之 PQ, P′Q′. 若 AB 與圓相切, 只有一解. 若不相交, 即無解.

亞波羅里斯

Appolonius (260—200 B. C.)

瘦桐

亞波羅里斯是希臘的大幾何學家，並且是古代三大算學家之一．生平事蹟，歷史記載不詳，大約在西曆紀元前260年生於 Perga 地方，曾在亞歷山大利亞大學修學及講學有年．據 Pappus 的批評，說他"爲人好虛榮，多妬嫉，動輙損毀他人的名譽".相傳他與和他同時代一位算學家名叫歐拉托尊斯(Eratosthenes)的，有 Epsilon 及 Beta 的綽號．依 Dr. Gow 之考証，大概是因爲亞歷山大利亞大學的教室，編有號數，他在第5教室授課，歐氏則在第2教室授課，而希臘字母第5字恰爲 Epsilon，第2字適爲 Beta 的緣故．

氏在 Pamphylia 的 Pergamum 居住有數年，該處倣照亞歷山大利亞大學的規模，也辦了一所大學．但不久仍回亞歷山大利亞，爾後即未再遊他邦，死時約在西歷紀元前200年，去亞幾默德之死期不遠．

使氏名垂不朽的，卽其名著"圓錐曲線"一書．此書不僅包羅當時已知之學說，冶爲一爐，而且增補之處特多，乃希臘幾何學第一流創作．出版之後，舉世奉爲圭臬，前此一般所用教本，沒有能勝過牠的．他的証明雖然繁長，然而編次之適宜，証法之正確，實有萬古不磨的價值．

書中所載命題,約四百條,分爲八卷.首四卷的希臘文原本至今還保存着. 第九世紀時,有人將此書之前七卷,譯爲阿剌伯文,可惜那時第八卷已經失傳,這部譯作至今還在.

首四卷所論,爲圓錐曲線的原理,就中最前三卷,是把歐幾里得的著述作爲藍本的.氏先立圓錐之定義,次研究其各種平面截口,分爲橢圓,拋物線及雙曲線三類.除了少數關於拋物線性質的定理以外,近代教科書中所載關於圓錐曲線的定理,在這三卷中,幾乎都包括了.有人說這幾卷書中所載的材料,許多是從亞幾默德未發表的論著內竊取而來的,但是經 Heiberg 氏的考証,纔知道這話是不對的.第四卷論調和分割,及圓錐曲線羣之交點.第五卷先述極大極小的理論,應用此理論去求圓錐曲線上任意一點的曲率中心,及此等曲線之漸伸線,此外并討論自一點向一圓錐曲線所作法線,爲數若干.第六卷論相似圓錐曲綫.第七八兩卷討論關於圓錐曲綫之配徑的理論.按第八卷已經遺失,此係根據1710年 E. Halley 氏所想像重編者而言.

亞氏對於天文物理等科,亦有著作傳世,茲不具錄.Chasles 在他的 Apercu historique 中,曾謂亞幾默德與亞波羅里斯同爲古代最有才能的幾何學家,亞幾默德開微積分之先河,而亞波羅里斯則立位形幾何之基礎,確係名論. Cantor 則稱讚亞氏所用方法之完備,謂後人縱有所貢獻,也逃不出他的範圍,由此可想見他的著述之盡善盡美了!亞氏肖像,世無傳者,本期封面所刊,乃夏伯丹君幻想其儀容而作者,合併聲明.

初等算學教授法

David Eugene Smith 原著

道彌選譯

I. 代數之沿革

1. 埃及之代數 代數之由來甚古. 所謂方程式者,代數之一部份,亦舊有之概念也. 溯自最古之算學論叢中,阿美斯 Ahmes (註一)之紙本已論及簡易方程式,但符號與名詞皆非今日所採用者耳. 有所謂『漢算法』 han Computation (註二)者,卽一元一次方程式之解法也. 加法,減法,相等及未知數之符號亦皆已用之. 該紙本之第二十四頁阿美斯所舉之例爲:『漢,其七分之一及其本身成十九.』若用近代符號寫出卽

$$\frac{x}{7}+x=19.$$

又如第三十四頁所舉較複雜之例爲:"漢,其$\frac{2}{3}$,其$\frac{1}{2}$,其$\frac{1}{7}$,及其本身成 3 3 ". 卽

$$\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x+x=33.$$

雖然,阿美斯並未有近代方程式解法之觀念. 中古時期有所謂借位法者 Rule of false position, 先猜得一答數,後求其差數,再變化所得之數,此法實始於彼,(註三). 關於等差級數,阿美斯略有著述,而於等比級數則僅舉一例題而已.

(註一) 阿美斯約在1700 B. C. 以前,其著作寫於一種粗紙上,謂之 Papyrus. 爲最古之算學書籍.

(註二) han. 或稱 heap 卽未知數之意.

(註三) 參看 Cajori 算學史 P.13. 或 Gow 希臘算學史 P.18

2. 希臘之代數. 據吾人所知,埃及代數之進步甚鮮. 降而至於希臘,所謂黃金時代以後,遂顯其重要. 因希臘人之思想,偏於形象,故成有系統之幾何名著,且旁及其他種算學. 如由幾何圖形而發現或證明前 n 個奇數之和為 n^2,又用幾何圖與開平方根相參照:皆其例也. 有所謂形數(Figurate numbers)者,其內容即研究幾何學矣.

歐幾里得之幾何原本(註一)(約300B.C.)中有 $(a+b)^2$ 之公式及由幾何所得用幾何所證之簡易代數關係. 嗣後歐幾里得及其繼起者由幾何圖形之正方形,得 x^2+2ax 之配方法,即必須加 a^2. 又以幾何方法求二次方程式如 $ax-x^2=b$, $ax+x^2=b$ 等形式,以及聯立方程式如 $x+y=a; xy=b$ 等形式之解答.

希臘人之舊說,常以為算學不能有甚大之進步. 在歐幾里得時之希臘人,曾承認一個變數之一次二次及三次乘方,因此等均能用直線,正方形,及立方體表出,而於一變數之四次乘方則不承認,蓋因第四元已超乎經驗空間之外也.

在歐幾里得以前,代數似已發端. 有第馬銳達(Thymaridas)者,其身世渺不可考,曾解少數之簡易方程式,且為最先用"已知"或"已定"及"未知"或"未定"等字者,而於二次方程式之認識,似乎在亞歷山大利亞派 Alexandrian School 之先. 亞里斯多德 Aristotle 曾以字母代未知數,但在問題之敘述中,而非在方程式中也.

耶蘇降生以前算學最大之進步,係由於希羅 Heron of Alexandria, 約在紀元前一百年. 彼為後人闢純粹幾何之門徑, 毅然說明一直線之四次乘方,又曾解二次方程式,幾已達到虛數根矣. 厥後純粹幾何之研究漸行衰落, 新說興起, 是為希臘算學轉變之樞紐.

此新學說之重要著述者為戴分托 Diophantus,亦亞歷山大利亞學派中之一人,約在第四世紀之前半,其著作幾全部為代數,乃專論代數之第一部著述. 戴分托始創簡單符號以代表未知數,減法及相等. 平方及立方亦均有符號, 而四次五次及六

(註一) Euclid's Elements of Geometry 明末徐光啟譯為幾何原本.

次乘法則各有名稱，故戴分托之算式代表法，已與近代所採者，相去不甚遠矣．其解題法可取一例而改用近代符號以說明之如下．

"求兩數，其和爲 20，其平方之爲差 80．"

以 $x+10$ 及 $10-x$ 代此二數．

平方得 $x^2+20x+100$，及 $x^2+100-20x$．

其差爲 $40x=80$．

故 $x=2$．

結果得大數爲 12，小數爲 8．"

此法中雖不涉及負數之困難，實與近代方法極相似矣．再用現代寫法，即爲

$$(20-x)^2-x^2=80$$

$$\therefore\ 400-40x=80$$

$$\therefore\ 320=40x$$

$$\therefore\ 8=x \quad 及 \quad 20-x=12;$$

由此可見戴分托對於一次方程式知之甚稔，而解二次方程式則純用拙法．彼云"$84x^2-7x=7$，故 $x=\frac{1}{3}$"，只得其二根中之一而已，其於負數則完全未知．故其著作只論及一次及二次方程式，又一個簡易三次方程式而已．其重要之論文則爲二次無定方程式，因此無定方程式稱之爲戴分托式 Diophantine．其著作中最重要之部份，雖降至十八世紀時代數家所用之幾何圖形，仍莫不以爲引證也．總之，希臘人之著述，已有一次及二次方程式之解法，並能將二次方程式之正根用幾何法表出．又有一次及二次無定方程式之解法．

3．東方之代數．遠在戴分托以後，又遠離希臘民族之東方，代數亦有相當之演進．印度算學家阿羅巴達 Aryabhata（約476B.C.）在戴分托之著作而後，對於代數曾有貢獻，但不如希臘之猛進。直至第九世紀方有顯著之進步．

當回教主阿耳曼蘇 Al-Mansur（712－775）在位時，決在回教徒治下建一新都於底格里斯河畔，新城謂之白格得 Bagdad．既成，耶蘇教徒來自西方，佛教徒來自

東方．凡各方之學者皆聚於此．當時回教徒頗以自豪，果遂成爲文化之中心矣．及其子阿耳曼滿 Al-Mamum 主教時，正當第九世紀之初葉，有由中亞細亞卡勒森 Kharezm 省來之算學家阿耳格瓦樂密 Al-Khowarazmi，其第一著作即爲代數，將窕分托所著之內容，歸於方程式之一類，對此科學始定今名．彼謂 Ilm al-jabr wa'l muqabalah 即"恢復之科學及方程式"之意．(至十三世紀拉丁語爲 ludus algebrae almucgrabalocque，至十六世紀之英語爲 algiebar and almwachabel． 至近代英語謂之 algebra．) 其著作對於算術更爲重要． algoritmi 一字(由Al-Khowarazmi而來)久成爲"數之科學"之同義字．至近代遂變爲 algorism，亦猶"Euclid"一字爲初等幾何之同義字也．

阿耳格瓦樂密以科學態度討論一次及二次方程式，分爲六類，頗與舊算術中分百分法爲各類相似．用近代寫法此六類爲：$ax=bx$，$ax^2=c$，$bx=c$，$x^2+bx=c$，$x^2+c=bx$，$x^2=bx+c^2$，可見當時未能得其普通形式 $ax^2+bx+c=0$．至其問題之敘述與解法，可於下文窺其一班．

例如一個平方及該數之十個方根共成三十九；即云，何數之平方再加其本身的十倍即爲三十九(註一)則解法爲；在此例中，取方根之個數之半得五，五自乘得積二十五，再加三十九得六十四，六十四開平方得八，由八減根之個數之半，即五，得三，即所求之根．(註二)

此解法只有方法而無解釋， 若用現代解 $x^2+px+q=0$ 所習見之公式 $x=-\frac{p}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}$ 求之，則所得者只其一根而已．然於二根均爲正實數時，如方程式 $x^2+21=10x$ 則承認有二根存在；但實際上常用者仍僅一根耳．

4．十六世紀之代數． 由阿耳格瓦樂密至十六世紀，凡七百餘年，只見有少數三次方程式之解法，代數之進步可謂甚緩；其經過乃由埃及而希臘，由希臘而

(註一) 即$x^2+10x=39$．

(註二) 各步驟可用下法寫明：$\frac{1}{2}\cdot10=5$，$\times5\cdot5=25$，$25+39=64$，$\sqrt{64}=8$，$8-5=3$．

波斯,再由波斯而至義大利之北部.

至一五四五年卡登 Cardan (1501－1576) 之名著"Ars magna"刊行於嫩堡 Nuernberg,遂得三次方程式之完備解法. 彼曾解 $x^3+px=q$ 形式之方程式,其他三次方程式,則可化至此形式而解之,彼雖聲明未假借前人之所得,然大概非獨立之發明.

至於卡登,達塔格利亞Tartaglia (1499－1577) 弗樂 Ferro (1465－1526) 及費奥利 Fiori 諸人之相互主張,此處毋庸具論. 惟卡登似得達塔格利亞三次方程式解法之薪傳,允守秘密,而終於發表. 總之,在十六世紀中葉,三次方程已有解法,且同時佛老雷 Ferrari (1512－1565) 又得四次方程式之解法矣.

此後算學家對於代數總以求前四次方程式之通解爲見地. 故重要之進步爲(1)符號之採用 (2)高次數值方程式近似根之求法,(3)運算方法之簡易化,(4)代數方式 (註一)之研究. 今以初等代數爲限,故僅論及三次方程式而已.

5. 符號之變遷 如上所述,可見符號於代數之重要. 其歷史可分爲三時期,即文詞時期,省略時期及符號時期也.文詞代數常將方程式用字句寫出,如阿耳格瓦樂密所爲. 省略代數則用縮寫文字,如戴分托之多數習題是也. 符號代數則採用任何簡寫之符號,如今日之初等代數是也.

符號之變遷甚緩,如居格 Chuquet (1484) 之方根號爲 $\mathrm{R}^4.10$.再三變更而至尋常所用之$\sqrt[4]{10}$,更變至$10^{1/4}$, 此皆中學教本中所可習見者, 可見其迂緩之歷程矣. 又如由卡登之

Cubus P 6. rebus aequalis 20 卽 $x^3+6x=20$,

經過韋他 Vieta 之

1C－8Q＋16N aequ.40 卽 $x^3-8x^2+16x=40$,

及笛卡兒 Descartes 之

$x^2 \propto ax-bb$, 卽 $x^2=ax-b^2$,

(註一) algebraic forms. 依科學名詞審查會譯爲代數方式.

又胡達 Hudde 之

$$x^3 \infty qx \cdot r, \text{ 即 } x^3=qx+r$$

亦一遙遠迂迴之途徑也．簡單之符號亦如此，如×代表乘法，笛卡兒則用更簡之一點以代之．＝代表相等，x^{-n}代表$\frac{1}{x^n}$皆由苦思而後得者(註一)． 又如÷符號，在算學書中亦不一致． 又如小數點之記法，亦有三種之多（註二），則符號變遷之迂緩可知，且降至今日，仍在未定之時期也．

法人韋池曾有符號代數鼻祖之榮譽，此今日所公認者．其代數之第一部著作爲"In artem analyticam isagoge"，於一九一五年刊行於世．賴桑 Laisant 譽其貢獻曰："堪稱爲現代代數之鼻祖者，厥爲韋他．彼以簡明之手段將未知數用字母代表以便書寫，復以同法施之於已知數，又告成功． 從此，由求値而得運算之方法．從此，算學中函數之觀念侵入於科學，而建立後代進展之根源．"

6．數之系統 代數之數之系統不易明瞭，爲其進步之最大障礙．最初之自然數爲正整數．今以日常所遇之問題而論，如 $x+b=c$，此處 $c>b$，而 $c-b$ 爲 a 之倍數，如 $3x+2=11$，則凡正整數足以可用．但若如下形式，即 $ax=b$ 內 b 非 a 之倍數，如 $3x=1$ 或 2，或 5，則必須另一種數，如單位分數，眞分數，假分數，帶分數等等．發現此種數之努力，已歷數世紀之久． 復次，問題中若必須解方程式如 $x^n=a$，而 a 非 n 次乘方，如 $x^2=2$，則又須一種新數，即無理實數，希臘時用幾何方法以解釋平方根及立方根，即已感到此點．

至如 $x+a=b$ 之方程式，若 $a>b$ 如 $x+5=2$ 者，算學家爲之大惑不解者數百年之久，蓋因未達到負數之領域也．至一六三七年，以笛卡兒之天才，完全頴悟代數與幾何之"一一對應關係One-to-one Corres pondance"，負數始由想像而入於實用．

再其次，則爲求 $x^2+a=0$ 形式之方程式之解答．如方程式$x^2+4=0$ 將如何解

（註一）可參看本刊第一卷．第一期"算學中常用記號之起源"一文．

（註二）如 $2\frac{1}{2}$，美國通常寫爲 2.5，英國則爲 2·5，大陸派則爲 2,5．

之，仍然待決之問題也．藉曰 $x=\sqrt{-1}$ 或 $2\sqrt{-1}$ 或 $\pm 2\sqrt{-1}$， 則非了解 $\sqrt{-1}$ 符號之意義，不能解釋．迨十八世紀之末，符號 $a+b\sqrt{-1}$ 之解釋，漸臻進境．挪威人魏廋爾 Caspar Wessel（1745－1828）於一七九七年，發表複數之論文於皇家科學院之雜誌上，又發表丹麥文之書信，始胃出現代之解釋．然直至一八三二年，高斯 Gauss 發表其關於此論題之巨製後，複數圖表法之理論，方爲算學界所通曉．雖其圖表法之簡易有如負數，然初等教科書之編者，似仍不欲以此爲教材也．

初等代數之目的，只在能求數值方程式之近似解，以其謂之爲代數的問題，不若謂之爲算術的問題也．凡高於四次之普通方程式，在代數上已証明其無法求解，換言之，即用代數之尋常運算，能解方程式

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0,$$

而不能解方程式

$$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0.$$

然其任何數值方程式之實根之近似值，却可求得，已足供實用之目的．如方程式

$$x^5+12x^4+59x^3+150x^2+210x-207=0,$$

可求得其一根爲

$$0.638605803+$$

但不能用代數運算以得一公式而解此方程式，如解二次方程式

$$x^2+px+q=0$$

然．此求近似值之簡易法，英人霍納 Horner 發表於一八一九年．英國中學代數中卽稱之爲"霍納法"．而外國之著者似尚少注意其價值也．

世　外　奇　談

（續）

A Square 原著　　乙　閣　譯

9. 彩色普及的議案

不過在技術方面的退步，大有一日千里之勢．

視覺認識法，因爲再用不着了，所以都不練習；對于幾何學，靜力學，動力學和其他同類科目的研究，人們都認爲是多此一舉，縱令在大學裏面，也都視爲無足輕重的課程．其次觸覺認識法，在小學內面，也很快的受了同樣命運的支配．于是等邊階級聲稱學校既無應用標本的必要，那從罪犯內面提出一部作爲敎育標本的慣例，自應取消，從此他們的人口，日見增加，他們的氣燄，也就一發而不可復制了．

年復一年，兵士和工人階級竟開始爲更激烈的宣言——而且居然言之成理——認爲他們和那最高級的多邊人士，並無若何分別，應受平等的待遇，因爲他們利用彩色的簡單辯認方法，對於人生一切疑難問題，無論在靜的方面或動的方面，都能措置裕如．他們對於視覺認識法的自然退化，尙不滿意，幷且大膽地要求明令取消一切『貴族專利的技術』，舉凡研究視覺認識法，算學，以及觸覺認識法的一切設備，都要附帶撤廢．過了不久，他們又極力主張以爲彩色乃第二上帝，他既然不願人類有等級之分，法律也應該順其意旨而行，所以從今以後，無論何人，不論其所在之階級如何，都應認爲絕對的平等，享受同樣的權利．

這班革黨首領，看見高等階級人們的態度，有些猶豫，於是更進一步，提出最後的要求，爲了尊重彩色起見，不論那一階級的人，一概都要着色，元老和婦女也不能在例外．有人說元老和婦女們，都沒有邊，如何能分別着色呢？對於這一層他們很巧妙的答覆說，上帝的意旨，是要每一個人的前身（卽口與眼所在之半邊）和他的後身有所區別．於是召集一個非常國民大會，二元世界各處都有代表到場，在會議中

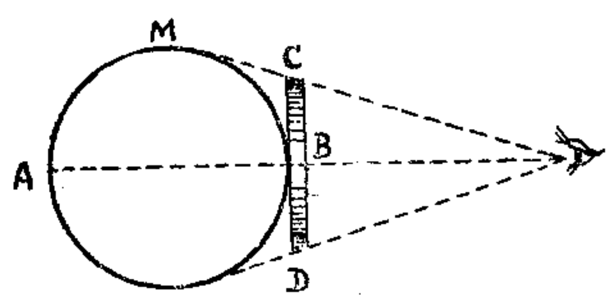
他們提出議案，主張凡屬婦女，前半段應塗紅色，後半段塗綠色．元老們也塗上同樣兩色，那以口眼為中點之半個圓周塗紅，其餘半個圓周塗綠．

這個提議，可算是盡了陰險狡譎的能事，不過後台老板，並不是等腰人士——這種政治的陰謀，像他們那種沒有腦子的人連看都看不透，那里還有當軍師的分兒——而却是一個不正當的圓形．本來這不正當的圓形，在小的時候就該處死的，不知道怎樣他竟爾倖逃法網，這一來却害了數百萬無辜生靈，眞是二元世界國度的一番刼運．

議案的第一種目的，是想引誘各階級的婦女們加入彩色革命的陣線內．因為他們規定婦女所塗的二種顏色，和元老們一樣，於是在相當位置，婦女和元老簡直看起來是一樣的，可以接受人們對於元老們的敬禮．婦女都是有虛榮心的，這一來正投其所好，無疑地是要歸順他們了．

不過婦女和元老在這提案情形之下何以看起來簡直是一樣，讀者們也許一時想不出來，所以少不得要說幾句話來解釋明白．

試設想有一位婦女，依照新法裝飾起來，前身（即眼口所在的那一頭）塗紅，後身抹綠．從側面看去，你所見的顯然是一條半紅半綠的直線．



再設想有一位元老，他的口在圖中M點的地方前半圓周 AMB 塗了紅色後半圓周塗了綠色，剛好以直徑AB為界．這時如果你把眼睛放在AB直徑所在的直線上去瞻仰這位大人物，你所看見的一定是一條直線（CBD），其中一半（CB）為紅，一半（BD）為綠．固然CD全線之長，也許比成人婦女身量為短，而且兩端很快的暗下去；但是由彩色的相同，在那一瞬之間使你得到相同的印像，來不及想到其他種種．加之彩色革命當時，視覺認識法已為社會人士所唾棄，再兼婦女們想要假冒元老，行動之際，很快的都學會了把她們兩端擺動，叫旁面的人看起來，好樣兩端也是很快的暗下去

一般，讀者諸君試想一想，這彩色普及運動，是不是使我們有錯認元老爲少婦的危險呢？

這種現象，在婦女方面當然是表示十分願意的．她們料定了這種錯認是必有的，而且很是高興．在家庭內她們的丈夫和兄弟們談起政治上及宗教上的秘密，本不許她們與聞的，現在她們也可以聽聽，甚至可以假借元老名義，發表命令．在外面的時候，因爲她們沒有別的雜色，紅綠相配，特別醒目，一般人們乍見之下，沒有不錯認爲元老而加以敬禮的，因此元老們吃虧的地方，正是婦女們占便宜的地方．至於爲了她們舉動輕狂，行爲不檢，足使元老們代人受謗，損失威嚴，馴至國家法紀蕩焉無存，關於這類事情，婦女們決不稍爲顧及．縱令是元老家庭內的婦女們，對於彩色普及運動，也沒有一個不贊成的．

這個議案的第二目的，是想令元老階級逐漸自趨於毀滅之途．原來一班民衆智識退化的時候，元老們仍舊保存了他們固有的聰明才力．他們從小的時候在那沒有色彩的家庭內弄慣了，視覺認識的技能，以及因此而得的種種便利，都還保持得住．所以一直到彩色普及議案提出的日子，元老們不但保留了他們自已的清白身分，而且更顯出他們領袖羣倫的能力．

因此我上面所說的這議案的創造者那詭計多端的惡徒，決意一舉兩得，一方面逼迫統治階級承認着色，以降低他們的身分，同時因爲他們清白家庭，從此受了彩色的污染，練習視覺認識法的機會就漸淺了，自然而然他們的智識是要退步的．在這種情形之下，家人父子彼此不相信任，元老們的嬰孩，要分別誰是父親，誰是母親，已經不是容易解決的問題，最壞不過的，是母親們都想要冒充元老，結果孩子們稚弱的心靈受了朦蔽，對於一切觀察，都不能置信．從此元老階級的智力，就會一天一天的衰敗，貴族政治可以完全打倒而我們享受特權之正人階級，便可塌台了．

10. 彩色之亂及其平息

彩色普及運動，紛擾有三年之久，就那最後一瞬的情形觀察起來，好像勝利一定屬於他們了．

一隊多邊兵士，是私人的部隊，和革命黨人起了衝突，被那等腰軍隊殺得一乾二凈——這時正方階級和五邊階級，還保守着中立．最壞不過的，有幾位最能幹的元老，爲了夫妻反目，竟死於非命．原因是有許多貴族家庭的婦女，受了政爭的刺激，請求她們的家主對於彩色普及議案，放棄反對意見；呼籲無靈，殺機陡起，家主固無論矣，幼稚何辜，亦遭毒手，屠殺既畢，一身相殉，美滿家庭，轉瞬即已烟消雲散．據史乘所載，在此三年紛亂之中，元老之死於家庭衝突者，不下二十三之數，眞是慘不可言．

此時元老們對於降服或決裂，尙自猶疑不決，正當千鈞一髮之際，忽然發生一樁意外的小事件，頓使滿天風雲爲之變色．此事雖小，然而却是那時的政治家所永不能忘而且求之不得的，因爲正是這種小事，對於引起民衆的同情，有不可思議的魔力．

事情是這樣的；一個下級的等腰三角形，頂角至多也不過四度左右，在搶一家店的時候，身上偶然濺着許多顏料，於是自己裝飾起來（也有說是他自已請別人替他裝飾的，傳說不一），塗上十二邊形那十二種顏色．打扮停當之後，他走到街上，商假冒高級人士的聲音，去和一位姑娘談話．這位姑娘是一個多邊貴族的孤女，從前他曾向她求過愛，但是遭了拒絕．此番談話之後，他一方面繼續用着欺騙的手段，居然一帆風順，着着成功，此中細情，一言難盡，姑且不表；另一方面，女家戚屬也太漫不經心，沒有識出他的破綻，他這場好事，竟自如願以償．此不幸之姑娘，後來纔知道受了騙，便自殺了．

這個悲慘的消息傳播出去，遠近都知道了，一般婦女的心情，大受刺激．一方面同情於這可憐的犧牲者，同時又想到她們本身和她們的姊妹兒女將來有受同樣欺騙的可能，於是她們對於彩色普及議案的態度，爲之一變，公開的承認反對該議案的婦女，已經不在少數；其餘的婦女，祇要略加刺激，便可取同樣的態度．元老們得着這個好機會，就迅速地召集了一個非常國民大會；在這個會場內，除了平常的警備隊以外，他們還請了很多的反對派婦女到場．

在這個空前盛會之中，元老的首領名叫太極的起立發言。會場內有十二萬等腰階級的人，喧聲聒耳，有如怒潮。但是他宣稱元老們從今日起，要表示讓步，服從大衆意見，預備接收彩色普及議案。這話一說出去叫囂之聲，立即變爲鼓掌歡呼。這時顏線已被亂黨們舉爲首領，太極把他請到會場正中，代表他的黨徒接受政權。接着太極有一段冗長的演說，眞算得是一篇大文章，差不多講了半天，很有詳細記載的必要。

他擺出一副大公無私的面目，宣稱他們旣然最後決定允許服從新的政體，很願意把這個問題作一番最後的觀察，看看究竟他的劣點和優點如何。他漸漸提到商人，職業者，和紳士們所處地位的危險，此時等腰羣衆喧聲又起，可是他一句話又使他們安靜下去，說雖然有這些壞處，但是只要大家贊成，他總願意接受這個議案的。不過他的話說過之後，除了等腰羣衆以外，其餘在場的人，顯然都受了感動，對於這個議案，大部持中立或反對的態度。

轉過來他向着工人們說話。他說工友們的權利是不可忽略的，所以如果他們打算服從議案，至少應該澈底的觀察一下將來的結果如何。有許多工友們將要歸入正人階級，其餘的本身雖沒有希望，可是子孫的上進是可以預料的。這種榮耀的奢望，從此要犧牲了。彩色普及之後，所有等級都泯滅了；邪正可以混淆起來；一切發展停止，自然退化；幾代之後，工人將要變爲兵士，或且流爲罪犯；政權落在人數最多的罪犯階級手內，他們的數目，現時已經超過工人總數，如果長此以往不加取締，恐怕所有各階級的人數總計起來，都要瞠乎其後了。

此時工人隊伍裏發出贊成的呼聲，顯見他的話已經奏效，顏線慌得手足無措，想要走上前去和他們說話，但是被衛隊圍住，不許聲張。於是太極用懇切的口吻，向婦女們作最後的呼籲，他大聲疾呼，說如果議案通過了，從此婚姻就會有危險，婦女的尊榮，怕要喪失；處處充滿着欺詐，誑騙和虛僞；家庭的幸福將與國家的法令同其命運，全部歸於毀滅之途。說到這裏，他喊着道：『那時我們就死到臨頭了！』

這句話是預定好了的暗號，說完之後，衛隊們就一湧而上，把顏線登時刺死；正

人階級立時把隊伍排開，讓出路來，使婦女們在元老的指導之下，後身向前移動，對着那等腰亂黨刺將過去．可憐這班下流們，死了還不知道是怎樣死的；這時工人們照樣也將隊伍排開，一隊隊衛兵把會場出路把住，圍得水洩不通．

這一番大屠殺，經過時間却是很短．在元老們熟悉的指揮之下，差不多每個婦女都是馬到功成，而且擊動迅速，尖端毫不受傷，可以預備再擧．不用過不着她們再費事，那班烏合的等腰亂黨們把他們自己都收拾了．他們既然驚惶失措，又沒有首領，前面受着無形的刺擊，後路又被衛隊切斷，於是劣性畢露，彼此殘殺起來，他們的命運就此註定了．自家人也當做敵人看待，半點鐘之內，這一大羣的暴徒一個生存的也沒有了，七八萬具罪犯的屍首，縱橫遍地，秩序立時恢復起來．

元老們得了勝利之後，仍自急切地做肅清工作．工人們一律赦免，祇辦了幾個爲首倡亂的，以示懲戒．正三角形軍隊立時出動搜尋，凡遇有不正的三角形，祇要証據確鑿，不必經過社會局衛生科的精密檢查，就以軍法從事．等腰家庭，一一都搜索過好幾遍，這種工作，繼續有一年之久；在這個時期內，所有城鎮鄉村內過剩的下級人口，一律肅清．在亂黨得勢的時候，學校用的標本都取消了，所有關於制裁不正當人們的法律都失去效力，而他們的生產率又高，因此發生下級人口過剩的現象，經過此番淘汰，各級人口的平衡纔恢復了．

從此以後，不消說彩色是不許用了，更不准收藏起來．除了元老們或有資格的科學教員以外，如有言及彩色者，一律重罰．祇有在大學裏面，最高班次的教授們爲了要說明算學上深奧的問題，稍爲用點彩色，尙在允許之列．這種最高班次，只有極少數的人纔可得其門而入，我個人却沒有這樣的幸運，所以這些話，也不過是道聽塗說而已．

此外的地方，再找不出有顏料的存在．製造的方法，祇有現時那位元老首領一人知道，等到他臨終的時候，纔傳授給繼承尊位的人，此外誰也學不到．全世界內祇有一個顏料製造廠，因爲恐怕秘密洩漏，內面的工人一年一換，舊的殺死之後，纔換新的進來．彩色普及運動，迄今已成陳迹，然而貴族中人，緬懷往事，猶自談虎

色變,戰慄不已,可見其駭人之深矣.

❀ ❀ ❀ ❀ ❀ ❀

荷奈二氏代數書中之錯誤一則

蔡心耜君投稿

在 Hall and Knight 二氏之高等代數中 167 頁第 3 例之証明不合理,茲說明於下,願讀者指正焉.

該証先設$(3+\sqrt{7})^n$為整數I與分數f之和,似不合理.蓋 $3+\sqrt{7}$ 既含有根號,則 n 為任何正整數時,$(3+\sqrt{7})^n$均可化為 $A+B\sqrt{7}$ 之形,為無理數無疑.但書中所設為整數與分數之和,乃有理數;無理數豈能等于有理數乎?此其錯$(3-\sqrt{7})$誤之一.

次,該書又謂"Now $3-\sqrt{7}$ is positive and less than one, therefore $(3-\sqrt{7})^n$ is a proper fraction,,誠然,$3-\sqrt{7}$為正,且小於一,但吾人豈能因此卽謂$(3-\sqrt{7})^n$為眞分數?$(3-\sqrt{7})^n$為眞分數,必當且僅當 $3-\sqrt{7}$為眞分數時故今但證明 $3-\sqrt{7}$ 之決不能為眞分數如下:

假設$3-\sqrt{7}$為眞分數,則可令 $3-\sqrt{7}=\frac{r}{s}$; r,s 為互質之兩正整數,且 $r<s$,由此得

$$\frac{3s-r}{s}=\sqrt{7}. \qquad (1)$$

因 3s 為 s 之倍數,r 與 s 為互質,故 $3s-r$ 顯然非 s 之倍數,上式左端自不能為正整數,其平方亦然.但(1)式兩端平方之結果,與前說互相矛盾,是知$3-\sqrt{7}$決不能為眞分數,此其錯誤之二.

現行書中類此之錯誤,不勝枚擧,閱者須隨時注意,方可免為其所誤.

問題欄

本欄之目的,在徵集關於中等算學範圍內之種種問題,不拘科目,不限難易,以供讀者之研究,藉收觀摩之效. 凡本刊讀者,皆可提出問題,及解決本欄內所提出之問題. 無論出題或解題,概依收到之先後,次第編號發表,而出題者及解題者之姓名及所在學校或住址,均隨題披露. 數人同解一題,解法同時則擇尤發表,解法異時則分段刊登. 來稿務祈繕寫清楚,姓名住址尤須明晰. 至解題時所用圖形,務請用黑色墨水精確作好,連帶寄下.

晚到之解答

4. 安徽省立第一中等職業學校高中部湯燧生君.

5. 湯燧生君.

7. 安徽省立第一中等職業學校高中部房琳,湖北省立高級中學曾憲昌,私立武昌張楚中學皮亦雄諸君.

8. 房琳,湖北省立高級中學馮靈波兩君.

9. 房琳,曾憲昌,上海江灣立達學園顧善楚諸君.

10. 房琳,曾憲昌,馮靈波,河南省立第一女子中學校李瑞珍諸君.

問題已解決者

11. 二項式定理爲

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n,$$

當 $n=1$ 時,含有 $n-1$ 爲因數之各係數均爲 0, 故

$$a+b=a+a^\circ b+ab^\circ+b,$$

即 $$a+b=2(a+b),$$

$\therefore \qquad 1=2.$

試指出其錯誤之所在.

解 (湖北省立女子師範楊淑珍):

二項式定理應爲

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots$$

$$+{}_nC_{n-2}a^2b^{n-2}+{}_nC_{n-1}ab^{n-1}+{}_nC_nb^n.$$

然當 $n=1$ 時, ${}_1C_r\ (r>1)$ 皆不能存在,故祇能至 ${}_nC_1$ 爲止.

卽 $\qquad (a+b)^1={}_1C_0a^1+{}_1C_1a^0b,$

亦卽 $\qquad a+b=a+b$, 由是自不能得 $1=2$.

編者按此題亦可從 $(a+b)^n$ 之項數爲 $n+1$ 看出. 當 $n=1$ 時, 祇有2項, 而原題有4項, 故誤.

(本題解者尚有湖北省立高級中學馮靈波, 劉後利, 湖北省立師範汪心洞, 河南省立第一女子中學李瑞珍, 私立武昌張楚中學皮亦雄諸君, 惟皆說理不完, 不另錄).

12. 某人於某年元月一日向甲銀行借銀800元, 於是年終還銀500元, 又次年終還銀500元, 其結本利付訖, 問年利率幾何?(限用算術解答)

解 (湖北省立高級中學曾憲昌):

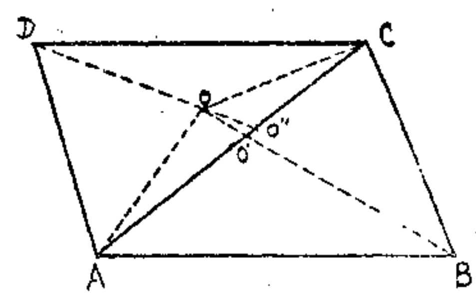
若用單利計算, 則800元二年之利息等於1600元一年之利息. 但因第一年還去銀500元故應少付500元在一年之利息, 卽銀行所得純利爲1600－500＝1100元在一年之利息; 但該行所得利銀爲1000－800＝200元; 故1100在一年所得之利爲200元, 由是年利率當爲 $\frac{200}{1100}$ 卽 $\frac{2}{11}$.

13. 在四邊形ABCD內求一點O, 令OA, OB, OC, OD分此四邊形爲四等分.

解 (私立武昌張楚中學皮亦雄):

設有O點存在，則 ABCD 非爲平行四邊形不可，而O點即爲兩對角線之交點；故在任意四邊形時，此題爲不可能.

證：連接AC與BO及DO之延長線交於O',O''. 因△OBA＝△OBC且共底邊OB而反向，故O'爲AC之中點；同樣O''亦爲AC之中點．故O',O''同爲AC之中點，因而O不可不爲AC之中點，同理O亦必爲BD之中點，即兩對角線互相平分，因而ABCD爲一平行四邊形.

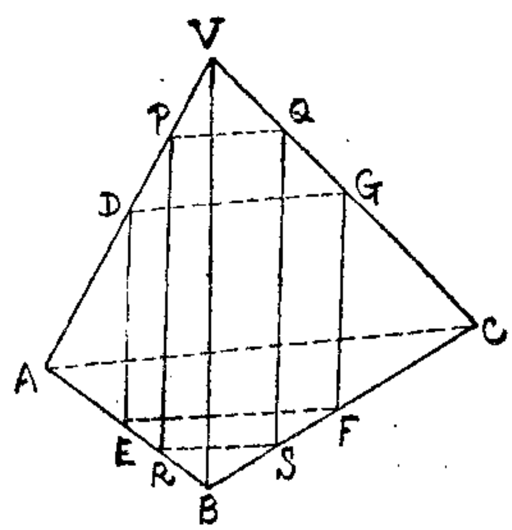


編者按此題可參看趙繚匯數學辭典第516頁240題.

14. 四面體以平行於其二對稜之平面截之，則其截口爲平行四邊形，此截口當平面通過其他兩對稜之中點時爲最大.

解（私立武昌張楚中學皮亦雄）：

四面體 V—ABC 以平行於其二對稜VB,AC之平面截之，則其平面與四面體之各面相交，故其截口爲四邊形，設爲DEFG，則因其平行於AC，故EF ∥ AC. 同樣DG ∥ AC，由是可知EF ∥ DG，同理DE ∥ GF，故DEFG爲一平行四邊形.



又若D,E,F,G爲VA, AB, BC, VC之中點，則▱PQRS: □DEFG ＝ PQ·QS:DG·GF（□PQRS爲其他之平面平行該兩對稜之截口）.

但 PQ:DG＝VQ:VG, QS:GF＝CQ:CG,

故 PQ·QS:DG·GF＝VQ·CQ:VG·CG.

但 VQ·CQ＜VG·CG,

因 VQ＋CQ＝VC＝定長，兩者之積以相等時爲最大也.

故 $PQ\cdot QS<DG\cdot GF$，因之□DEFG為截口中之最大者．

15．　一漏酒壺，滿盛酒後四人飲之，六日而盡；五人飲之，五日而盡．　問一人飲之，幾日可盡？（限用算術解答）

解　（湖北省立女子師範楊淑珍）：

設以1人每日能飲之酒量作單位計算，則4人在6日內所飲之酒量為 $4\times6=24$，5人在5日內所飲之酒量為 $5\times5=25$，故在 $6-5=1$ 日內漏去之酒量為 $25-24=1$，故酒壺內原有之酒量為 $24+6=30$．故若以1人飲之，則因每日須漏去1人所飲之量，故須 $30\div(1+1)=15$ 日而盡．

16．　一漏水缸，以水注入之，若開六水管，則三時可滿，開四管則五時可滿，問開二管則幾時可滿？（限用算術解答）

解　（湖北省立女子師範楊淑珍）：

設以1管每時能注入之水量作單位計算，則6管在3時內所注入之水量為 $3\times6=18$，4管在5時內所注入之水量為 $4\times5=20$，故在 $5-3=2$ 時內漏去之水量為 $20-18=2$，由是可知在1時內漏去之水量應為1，從而缸之容水量為 $18-3=15$．故若開2管，則因每時須漏去1管所注入之水量，故須 $15\div(2-1)=15$ 時方可注滿．

（上兩題解者尚有河南省立第一女子中學校李瑞珍，江西省立陶業學校王雍容，安徽第一職業學校方子異，湖北省立高級中學曾憲昌，湖北省立第一中學劉福堂，余家瑛，湖北省立師範汪心渭，私立武昌張楚中學周定勛，湖北省立實驗學校賀德駿及武昌讀者意柏諸君，解法同不另錄．）

提出之問題

提出者國立武漢大學李思源．

23．　兩線束 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$；$b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots b_n$ 各通過兩定點A，B，且 $a_1\,b_1$，$a_2\,b_2$，$a_3\,b_3$，$\cdots\cdots a_n\,b_n$ 交於通過A，B兩點之圓周上，則聯 $a_i\,b_j$ 與 $a_j\,b_i$ 之諸直線皆通過一定點．（$i=1,2,3,\cdots n$；$j=1,2,3,\cdots n$，但 $i\neq j$．）

24. 求於已知角內一定點P作二直綫交此角之兩邊於A, B, 使有

PA=PB,

且 $\angle APB$=定角.

國立中央大學入學試驗算學試題

二十年入學題

（編者按中央大學廿一年度未招新生，此乃廿年度試題.）

（A）

小代數

1. 試解下列方程式

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=12.$$

解：令$x^2+\frac{1}{x^2}=y$，則原方節式卽變爲

$$y^2+4y-12=0,$$

$$y=2\text{或}-6,$$

由是 $x=1$(重根)，-1(重根)，$\pm(1+\sqrt{2})i$，$\pm(1-\sqrt{2})i$，

2. 試解下列聯立方程式：

$$x(y+z-x)=39-2x^2$$

$$y(x+z-y)=52-2y^2$$

$$z(x+y-z)=78-2z^2$$

解：將上三式相加化簡卽得

$$(x+y+z)^2=169$$

$$\therefore\quad x+y+z=13\text{或}-13$$

若 $x+y+z=13$，則 $y+z-x=13-2x$，

代入第一方程得 $x=3$，同樣得 $y=4, z=6$.

若 $x+y+z=-13$，則 $y+z-x=-13-2x$，

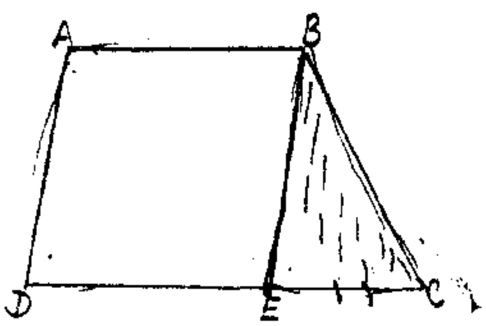
代入第一方程得 $x=-3$，同樣 $y=-4$，$z=-6$，

由是得 x,y,z 之兩組值爲 $\pm3,\pm4,\pm6$，但須同取上號或下號．

(B)

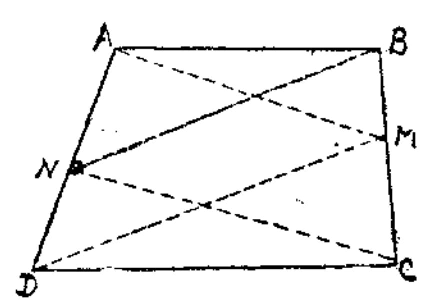
平面幾何

1. 設已知一梯形各邊之長，試作此梯形．



解：設梯形ABCD爲已作，再過B作BE∥AD交DC於E，則EC＝DC，AB,之差，BE＝AD，由是 △BCE 爲一定，故可作，故用解析法而本題解矣．

2. 設ABCD爲一梯形，M爲BC邊上之一點（BC與AD爲不平行之兩邊）；茲由M點引MA，MD兩直線，並由B點引一直線與MD平行，由C點引一直線與MA平行．試證如此所引與MD及MA平行之兩直線同交AD邊於一公共點



解：設自B作BN∥MD交AD於N，吾人祇証C，N之聯線平行MA足矣．將AD，BC作爲一退縮圓錐曲線（Degenerate conic），ABNCDM爲其內接六邊形（Inscribed hexagon），則由著名之巴斯加(Pascal)定理甚易推得CN∥MA．欲純粹用初等幾何証本題，讀者可參看傅種孫，韓桂叢所譯之幾何原理(商務版) P. 41，第14節，定理21．

(C)

三　角

1. 設在一三角形中，已知其二角爲 30° 及 45°，並此二角之夾邊爲 100 米尺，試求；1° 此三角形之他二邊之長；2° 此三角形之面積．

（此題甚易，故未解.）

2. 設 m 及 n 為已知之二數，試由下列二關係

$$\frac{\operatorname{Sin} A+\operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin}(A+B)}=m, \qquad \frac{\operatorname{Cos} A-\operatorname{Cos} B}{\operatorname{Sin}(A-B)}=n,$$

求出 $\operatorname{Sin}\frac{A+B}{2}$, $\operatorname{Cos}\frac{A+B}{2}$, $\tan\frac{A+B}{2}$, $\operatorname{Sin}\frac{A-B}{2}$, $\operatorname{Cos}\frac{A-B}{2}$, $\tan\frac{A-B}{2}$ 之值.

解：原二式可化為

$$\frac{2\operatorname{Sin}\frac{A+B}{2}\operatorname{Cos}\frac{A-B}{2}}{2\operatorname{Sin}\frac{A+B}{2}\operatorname{Cos}\frac{A+B}{2}}=m, \qquad \frac{-2\operatorname{Sin}\frac{A+B}{2}\operatorname{Sin}\frac{A-B}{2}}{2\operatorname{Sin}\frac{A-B}{2}\operatorname{Cos}\frac{A-B}{2}}=n;$$

卽

$$\frac{\operatorname{Cos}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{A+B}{2}}=m\cdots\cdots(1) \qquad \frac{-\operatorname{Sin}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{A-B}{2}}=n\cdots\cdots(2)$$

將(1)×(2)卽得

$$\tan\frac{A+B}{2}=-mn,$$

由是 $\operatorname{Cos}\frac{A+B}{2}=\frac{1}{\pm\sqrt{1+m^2n^2}}$, $\operatorname{Sin}\frac{A+B}{2}=\pm\frac{mn}{\sqrt{1+m^2n^2}}$.

再由(1)，卽得

$$\operatorname{Cos}\frac{A-B}{2}=\pm\frac{m}{\sqrt{1+m^2n^2}},$$

由是 $\operatorname{Sin}\frac{A-B}{2}=\pm\frac{\sqrt{1+m^2(n^2-1)}}{\sqrt{1+m^2n^2}}$, $\tan\frac{A-B}{2}=\frac{\pm\sqrt{1+m^2(n^2-1)}}{m}$.

（D）

大代數

1. 試解下列聯立方程式

$$(m+1)x+y=m, \quad 3x+(m-1)y=2;$$

並因 m 所能取之各值而分別討論之.

解:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} m & 1 \\ 2 & m-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 3 & m-1 \end{vmatrix}}=\frac{m^2-m-2}{m^2-4},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} m+1 & m \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 3 & m-1 \end{vmatrix}}=\frac{-m+2}{m^2-4}.$$

A. 當$m \neq 2, -2$時, x, y各有一有限之值.

B. 當$m=2$時,上之兩方程式相同,由是x,y之值不定,

C. 當$m=-2$時, x,y之值俱爲無限大.

(E)

解析幾何

1. 設已知A,B兩點,在正坐標系中,A點之坐標爲$(x_1,y_1,)$,B點之坐標爲$(x_2,y_2,)$,試求以AB爲直徑之圓之方程式.

解; 設P點在此圓周上,其坐標爲(x,y),則PA與PB互爲垂直,由是得

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0,$$

此即所求之方程式也.