

大學用書

# 普通物理學

(上)

嚴濟慈編著

正中書局印行

大學用書  
普通物理學  
(上)

嚴濟慈 編著

正中書局印行



版權所有  
翻印必究

中華民國三十六年十月初版

普通物理學

(共二册)

上册 定價國幣壹拾肆元

(精裝本定價另加五元)

(外埠酌加運費匯費)

編	著	者	嚴	濟	慈
發	行	人	吳	秉	常
印	刷	所	正	中	書
發	行	所	正	中	書

(2222)

校整：向謙

滬·本

5/1-0.075

## 致 讀 者

法國話問人學什麼，不說「你讀什麼？」或「你研究什麼？」；而說「你做什麼？」依此說法，你們是在做物理，不是讀物理，更不是讀我寫的這本普通物理學。

你們做你們的物理。一本理想的書，亦祇有輔導作用，何況我這率爾操觚之作？偶爾翻閱，知道有些什麼問題，略有途徑可循，引起思路，自作探討，如斯而已。倘能增加讀者對於物理之興趣與好奇，那已是著者之奢望了。千萬不可咬文嚼字去讀，因為科學書籍根本不是一種經典，只是我們今日對於自然之了解的一個階段。隨時隨地，不斷改進。你們對我這書，某些地方，讀去或不知所云，或很費力纔知道要說什麼；那可能我亦沒有了解，難以寫得清楚，或竟寫錯了。千萬不要為書所誤。倘肯指出，寫信問我，那是歡迎得很。

物理學上所討論的，都是實在的事物。可以看到它，撫摩它，測量它，計算它，利用它。對於一切物理量，不但要能用一個數字和單位表示出來，用一件儀器或一個方法測量出來，而且要能深刻體認。譬如五卡路里熱量或五安培電流，我們要能認識它，如同認識五萬元國幣一樣；不但能數它，還知道能買幾斗米或幾尺布。

物理學上得有許多公式，切莫以背記公式為能事。記得幾個公式，湊來湊去，或許可以解答習題，應付考試。習題做不出，自然沒有

懂；但是做得來，並不一定就懂物理；此於算學，亦有同樣情形。最好從自然界到實驗室裏，去做你的物理。

物理和算學有根本不同之處。舉一個簡單的例來說。半徑是算學上的名詞，直徑纔是實在的物理量。我們所遇到圓的面或體，要量而能量的，都是直徑，不是半徑。實際上，祇有拿起兩腳規，要畫個圓的時候，纔碰到半徑。

物理學家做實驗，到沒有方法量的時候，方不得已用算學公式。真確的算學公式，在物理學家看來，倒是近似而已。有一球形物體於此，其重量依公式為  $\frac{4}{3}\pi r^3\rho$ 。但在事實上，難有一個合乎幾何學定義的圓球物體，你量十次直徑，可以各不相同。又從物理常數表查得密度  $\rho$  之值，是否可以代表目前物體之密度，也是問題。所以一個物理學家，一定直接用天平稱它，來求重量。雖所用天平，不甚精密，亦所樂為。要在知道所稱得的重量，不精確或不可靠到某程度。能知道不可靠的程度，就是知道可靠到什麼程度。

算學首要推理嚴正，他非所計；物理則要結果可靠，合乎事實。至於工程，那要應用安全，合乎經濟，各有其立足點，各有其嚴密處。無以讀算學之心情，去讀物理；反之，能有一些工程觀念，到是好事。

物理是實驗科學之母。其應用，直接或間接，對於現代文明之貢獻，已頗可觀。我們做物理，無論其為物理而物理，或為研習他種學術之準備，宜力求有益民生造福人類。

嚴濟慈

民國三十六年七月七日，寫於昆明玉龍堆

# 目 次

第一章 物理量	§§ 1.-11. ... ..	1								
1. 長度之單位	2. 質量之單位	3. 時間之單位	4. 厘米·克·秒絕對單位制	5. 我國度量衡制與英國制	6. 物理測量之通性	7. 純量與向量	8. 向量之合成與分解	9. 向量之分析式表示	10. 向量之矩	11. 物理量之因次
第二章 運動學	§§ 12.-22. ... ..	14								
12. 質點	13. 運動之相對性	14. 軌道——運動方程式	15. 速度	16. 加速度	17. 直線運動	18. 圓周運動	19. 曲線運動之加速度	20. 簡諧運動	21. 移動	22. 轉動
第三章 自由墮體	§§ 23.-25. ... ..	32								
23. 墮體運動第一定律	24. 墮體運動第二定律	25. 自由墮體之加速度								
第四章 動力學之基本定律	§§ 26.-32. ... ..									
26. 牛頓之運動第一定律	27. 牛頓之運動第二定律	28. 重力	29. 力學之基本單位	30. 牛頓之運動第三定律	31. 衝量	32. 動量不滅定理				
第五章 質點在重力場內之運動	§§ 33.-37. ... ..	51								
33. 拋體運動	34. 在光滑斜面上之下滑	35. 阿特武德機	36. 摩擦	37. 在粗糙斜面上之下滑						
第六章 功與能	§§ 38.-47. ... ..	68								

38. 功 39. 重力所作之功 40. 物體反抗摩擦力所作之功 41. 功之單位 42. 功率 43. 能——功能定理 44. 功能定理之應用 45. 重點在光滑鉛直圓周上之運動——擺 46. 微小擺動——擺之等時性 47. 向心力與離心力
- 第七章 天體運動與萬有引力 §§ 48.-52. ... .. 85
48. 行星運動定律 49. 萬有引力 50. 月球之運動 51. 萬有引力常數之測定 52. 地面上各點之重力加速度
- 第八章 物體之平衡 §§ 53.-65. ... .. 92
53. 質點之平衡 54. 合力與平衡力 55. 外力與內力 56. 物體之平衡條件 57. 力之可傳性 58. 固體所受諸力之圖化 59. 兩個作用點不同而會聚之力之合力 60. 兩平行力之合力 61. 力偶 62. 諸平行力之合力 63. 重心 64. 物體平衡之分析式 65. 靜力學問題演算之步驟
- 第九章 固體繞軸之轉動 §§ 66.-75. ... .. 110
66. 轉動之力學的觀念 67. 轉動定律 68. 轉動慣量 69. 衝量矩與角動量 70. 轉動能 71. 移動與轉動公式之比較 72. 複擺 73. 瞬時軸 74. 滾動摩擦 75. 迴轉儀
- 第十章 簡單機械 §§ 76.-81. ... .. 130
76. 機械 77. 機械效率 78. 簡單機械 79. 槓桿類機械 80. 斜面類機械 81. 精密天平
- 第十一章 固體之彈性 §§ 82.-91. ... .. 140
82. 彈性 83. 形變 84. 形變與所受力之關係——虎克定律 85. 線之拉長 86. 超過彈性限度之形變 87. 彈性後效 88. 梁之彎曲 89. 桿之扭轉 90. 利用形變為量力之具 91. 兩體之正直碰撞

第十二章 彈性力與簡諧運動 §§ 92.-97. ... ..	152
92. 彈性力所引起之振動 93. 彈簧振子 94. 扭擺 95. 方位相同簡諧運動之組合 96. 兩個正交簡諧運動之組合 97. 阻尼振動	
第十三章 物質之組成 §§ 98.-105. ... ..	164
98. 物態 99. 物質之剖分 100. 原子量 101. <u>阿佛加特羅</u> 之假設 102. 分子之數 103. 分子之質量 104. 分子之大小 105. 晶體內原子之排列	
第十四章 流體之平衡 §§ 106.-119. ... ..	170
106. 流體 107. 流體平衡之必要條件 108. 流體內各點之壓力 109. 壓力之單位 110. 壓力之量度 111. 壓力之傳遞—— <u>巴斯噶原理</u> 112. 大氣壓力 113. 氣壓表 114. 大氣壓力與天氣 115. 流體之浮力—— <u>阿基米得原理</u> 116. 物體之浮沈 117. 密度與比重 118. 比重之測法 119. 比重表	
第十五章 流體之彈性 §§ 120.-126. ... ..	188
120. 液體之壓縮 121. 氣體之壓縮—— <u>波義耳定律</u> 122. 氣體之等溫壓縮係數 123. 壓力計 124. 旋動抽氣機 125. 氣體壓縮所需之功 126. 壓氣唧筒	
第十六章 流體之運動 §§ 127.-134. ... ..	198
127. 流動 128. <u>斐奴禮定理</u> 129. <u>斐奴禮定理之應用</u> 130. 流體之滯性 131. 管中液流 132. 唧筒 133. 天然水能之利用 134. 自來水	
第十七章 分子運動與分子力 §§ 135.-144. ... ..	211
135. 擴散 136. 滲透 137. <u>勃朗運動</u> 138. 分子力 139. 表面張力 140. 毛細管作用 141. 氣體之分子運動 142. 氣體之壓力 143. 氣體	



分子之動能——馬克斯威爾定律 144. 氣體之混合——道爾頓定律

## 第十八章 溫度與熱量 §§ 145.-155. ... ..228

145. 溫度 146. 熱量 147. 熱量之單位 148. 比熱 149. 溫度計  
150. 標準氣體溫度計 151. 氣體之壓力係數 152. 絕對溫度 153. 幾個溫度數字 154. 燃燒熱 155. 熱之工作當量

## 第十九章 物體之膨脹 §§ 156.-163. ... ..238

156. 固體之膨脹 157. 液體之膨脹 158. 水之反常膨脹 159. 氣體之膨脹——給呂薩克定律 160. 氣體膨脹係數與壓力係數之關係——理想氣體 161. 理想氣體之氣體方程式 162. 氣體之自由膨脹 163. 范德瓦方程式

## 第二十章 比熱 §§ 164.-169. ... ..254

164. 比熱之測定 165. 量熱器 166. 固體及液體之比熱 167. 氣體之比熱 168. 氣體之絕熱變化 169. 氣體之絕熱壓縮係數

## 第二十一章 物態之變化 §§ 170.-185. ... ..265

170. 物態變化之種類 171. 融解時體積之變更 172. 壓力對於融點之影響 173. 融解熱 174. 汽化 175. 飽和蒸汽 176. 飽和氣壓  
177. 汽化熱 178. 大氣中之水蒸氣 179. 製冷器 180. 沸騰  
181. 溶液之汽化與凝固 182. 昇華 183. 三態平衡點 184. 氣體之液化 185. 空氣之液化

## 第二十二章 熱之傳遞 §§ 186.-189. ... ..293

186. 傳導 187. 對流 188. 輻射 189 黑體之輻射

## 第二十三章 熱機 §§ 190.-192. ... ..301

190. 往復蒸汽機 191. 蒸汽輪機 192. 內燃機

## 第二十四章 熱力學定律 §§ 193.-205. ... .. 311

193. 力學功能定理之推廣 194. 熱力學第一定律 195. 永動機之不可能 196. 熱力學第一定律之未盡處 197. 可逆變化 198. 熱力學第二定律 199. 雙熱源變化 200. 熱機之效率 201. 雙熱源可逆循環——賈祿循環 202. 雙熱源可逆循環之效率——賈祿定理 203. 熱力學之絕對計溫法 204. 用絕對溫度表示熱機效率 205. 熱之變質——熵

## 第二十五章 波動 §§ 206.-222. ... .. 329

206. 振動之意義 207. 波動 208. 水波 209. 波之傳播 210. 郝更斯原理 211. 波之反射 212. 波之折射 213. 波之干涉 214. 縱波之傳播速度 215. 傳播縱波時壓力之變化 216. 氣柱振動 217. 倍振 218. 橫波之傳播速度 219. 絛線振動 220. 駐波 221. 反射波之相 222. 波動中能之傳遞——反距離平方定律

## 第二十六章 聲學 §§ 223.-238. ... .. 354

223. 聲 224. 聲之速度 225. 聲之波長 226. 聲之性質 227. 聲之反射 228. 聲之折射 229. 聲之干涉 230. 拍音 231. 共鳴 232. 聲之駐波 233. 聲之繞射 234. 板之振動 235. 音之諧和 236. 語言與四聲 237. 聲之杜伯拉效應 238. 物體運動較音速為快時之情形

# 第一章 物理量

物理範圍，至爲廣泛；廣義言之，一切自然現象，無不屬於物理學研究之範圍。吾人觀察事物，於紛紜萬狀之中，知其有共同之點，抽象爲之立名，具體爲之度量，而後吾人之智識，漸趨於精確之境。譬如‘物體’一辭，必經人類思想長時期之努力，方能抽象的說出，以代表山川牛馬之一切占有空間者。至於山高，河闊以及日月之距離，認識其有一公性——長度——爲可量者，則又更進一步矣。

長度，量也；時間，量也，體積與速度，亦量也。體積之量，可由長度之量推導而來；速度之量，可由長度與時間之二量推導而來。然則宇宙間究有多少基本而獨立之量？

吾人研究物質在空間與時間中之變化。時，長，質三者不能由他量推導而來，亦不能相互推導而出，實爲獨立之量。以時間，長度及質量三者（加上溫度），即可導出物理學上一切之量，如重量，熱量，電量等，故稱時間，長度及質量三者爲基本量。

各種量度之法，不外聚同類之二量而比較之。各種之量，皆須規定其單位，庶測量所得之結果，方可以數字作明顯之記載。基本量之單位稱爲基本單位。

§1. 長度之單位 單位可以任意選定，惟既選定之後，大家即須遵守。帝王之手與足，曾爲古代之長度單位，其具體可資比較，實

有足多者，惜長生乏術，難以永垂不朽耳。

法國人取通過巴黎之子午線，自地球北極至赤道間距離之一千萬分之一為長度標準，稱為米(meter)。此不過米之明文定義耳，尚須具體的加以實現。浦達(Borda)曾製成一鉑棒(platinum bar)，保存之，以為標準。則即將來子午線之測量更為精確時，當知通過各地之子午線之長，亦或有不同，法國人仍將以米為單位而表示其長度。米之為米，一成不易，此實一嚴正的科學態度與行動也！

1875年在巴黎召集世界度量衡會議，決定以米為國際長度標準，乃於1880年用90%的鉑與10%的銻(iridium)之合金，製成橫截面為X形之棒(圖1)31 在其

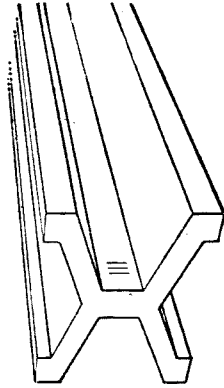


圖1. 國際標準米

溝內面之兩端，各刻橫線三條，以為比較長度之用。並選其中長度與浦達所造之鉑棒最相近者(第六號棒)，保存於巴黎國際度量衡局，以為國際標準米(international standard meter)，而稱浦達之鉑棒為米原器(Meter of the Archives)。其餘之30根鉑銻合金棒，分發世界各國，以為標準。我國於民國八年，亦曾由國際度量衡局供給一鉑銻合金棒，以為尺之標準。

米為吾人任意規定之長度標準，設因某種偶然的擾亂，以致一切之標準悉被毀滅，則勢難重行恢復精密無誤。故為防患未然計，此單位又另以他種長度表出之。

自然界有一自然之尺度，即光波是。麥克遜(Michelson)於1894

年，選定鎘(cadmium)之紅色光譜線，與國祭標準米相比較，一米之內，有 1,553,164.13 光波，即其波長為  $643,846.96 \times 10^{-9}$  米。於是不特波長有標準，而米亦有保障矣。

物理上所遇之長度，有遠較米為大或小者，則記載時必有冗長之數字，雖於米之上冠以“什”“佰”“仟”，米之下冠以“分”“厘”“毫”等字，猶感不足，則另立輔助單位之名稱。

在光學中，光波波長之單位，常用埃(Ångström)單位及 X 單位，1 埃單位 =  $10^{-10}$  米，而 1 X 單位 =  $10^{-13}$  米。欲記載非常遙遠之距離，如天文學中所用者，則以光波在一年中進行之路程，為長度之單位，稱為光年(light year)，1 光年 =  $946.08 \times 10^{13}$  米。人類智識之廣闊，就長度言，為何如者！

§2. 質量之單位 質量單位選定之經過，一如長度。法國人初取一升(1,000 立方厘米)純水在其密度最大時(4°C. 及 760 厘米汞高氣壓)為質量之單位，此亦不過一明文之定義耳。浦達又製一鉑圓柱以實現之。法國政府即以此鉑圓柱作為質量之標準，其所含之質量稱為仟克(kilogram)或公斤，為質量之單位。雖後知此仟克之質量實等於 1.000027 升之水，吾人即謂一升水之質量為 0.999973 仟克。

1875年國祭度量衡會議，決定此仟克之鉑圓柱為質量之國祭單位，而尊稱之為仟克原器(Kilogram of the Archives, 圖 2)。復照製 40 根鉑圓柱，分發各國，以為標準。

長度與質量之標準單位，含有如是之任意性，正是科學之嚴密處！至此等原器之如何謹慎保藏，無微不至，自不待言。



圖 2. 仟克原器

§ 3. 時間之單位 地球轉動而分晝夜，吾人即以此週期現象作為時間之單位。在地球上某處，沿子午線觀察恆星，至其第二次經過中天，相隔之時間，稱為 1 恆星日 (sideral day)。該恆星經過地球上各處天頂之時刻不同，世界各國公約以英國格林尼治 (Greenwich) 為計時之起點，於其地上畫子午線，作為原始子午線 (prime meridian)，即格林尼治之經度為零也 (圖 3)。



圖 3. 原始子午線

吾人生活於地球上，與恆星太陽特有最密切之關係，即以地球對於太陽一週轉所需之時間作為標準。凡地面上某處子午線之觀察者 (圖 4)，見太陽連續二次達中天所歷之時間，即今日正午至明日正午，稱為一太陽日 (solar day)。因地球公轉一次，其對太陽

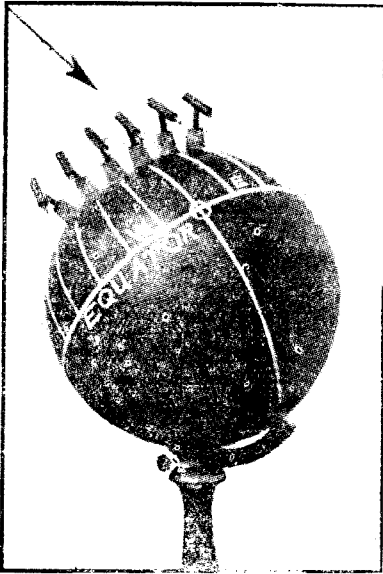


圖 4. 子午線觀測

之自轉次數，較其對恆星之自轉次數，恰少一次，故太陽日與恆星日長短不同（地球若恆以同一之面向太陽，則當其公轉一次時，對於太陽似無自轉，但對於恆星，則恰已自轉一周矣）。

當地球繞太陽運行時，與太陽之距離，時在變更，其公轉之速度，距太陽愈近而愈大。且地球循行之軌道與地球赤道面並不一致，故一年中太陽日之長短不等（例如十二月二十五日比九月十三日約長50秒）。若

就一年中太陽日之平均數作為一日，則稱為**平均太陽日** (mean solar day)，即吾人之時間的標準單位。1日再等分為24小時，1小時為60分，1分為60秒；1秒即為平均太陽日之 $\frac{1}{86,400}$ 。

一恆星日等於平均太陽日之23小時56分41秒。

平均太陽日，亦非絕對不變之值。由天文之觀察，知平均太陽日以極長之週期而有數秒之變遷。

各地天文臺中均有精密之鐘，常與子午儀觀測結果比較，加以校正，而報告時間。

§ 4. 厘米·克·秒絕對單位制 科學上用長度，質量及時間三者為基本量，而導出其他一切物理量之單位，稱為**絕對單位制**。蓋吾

人亦可取長度，時間及力 (force) 爲三種基本量，而導出其他一切量之單位，成一系統，一樣合乎邏輯也。

長度之標準單位爲米，質量之標準單位爲仟克，時間之標準單位爲平均太陽日，既如上所述。物理學上恆用米之  $\frac{1}{100}$  爲厘米，作長度之單位；仟克之  $\frac{1}{1,000}$  爲克，作質量之單位；平均太陽日之  $\frac{1}{86,400}$  爲秒，作時間之單位。因此而成之系統，稱爲厘米·克·秒絕對單位制 (centimeter-gram-second absolute unit system)，或簡稱 C. G. S. 制，爲國際科學界所公用。

§ 5. 我國度量衡制與英國制 我國自民國成立以來，度量衡即採用國際制度，惟爲便於商賈起見，定  $\frac{1}{3}$  米爲 1 市尺， $\frac{1}{2}$  仟克爲 1 市斤，及 1 立特 (liter) 爲 1 升。

在英制中，則以呎 (foot) 爲長度之單位，磅 (pound) 爲質量之單位，秒 爲時間之單位。由此而成之單位系統，在工程上應用甚廣；蓋單位之國際化，爲時已晚。電學之應用，較力學，熱學者發展爲晚，故英制在電學中即未自成系統。

$$1 \text{ 呎} = 30.48 \text{ 厘米},$$

$$1 \text{ 磅} = 453.59 \text{ 克}.$$

§ 6. 物理測量之通性 吾人於各種物理量，既定單位，以資比較，即可從事測量。

測量所得者爲一數目，然與算學問題中之數目不同。測量所得者爲一近似值，並非確定值。設吾人欲測之量爲  $x$ ，但測量所得者爲  $a$ ，則  $x$  與  $a$  之關係爲：



$$a - \epsilon < x < a + \epsilon,$$

爲一非確定值，吾人僅能約計其大小( $\epsilon$  對於  $a$ ，通常爲極小)。

測量不能得確定值之原由有二：一因所用儀器及所根據之方法，未臻完善；二則因所欲測之量，本身即不確定，如欲測一棒之長，其兩端不平，又不互相平行。

測量結果中相對誤差(relative error)，實較絕對誤差(absolute error)更爲重要。如測 1 米之長，得 1.02 米；測 1 厘米，得 1.2 厘米：前者之絕對誤差爲 2 厘米，後者爲 0.2 厘米；前者之相對誤差爲  $\frac{2}{100}$ ，後者爲  $\frac{2}{10}$ ，故前者之測量實較後者精確十倍。

測量之結果常有小數，吾人應知有效數字(significant figure)之意義。如有一結果爲 4.3238，但小數第二位已不可靠，則第三，第四位留之何用，宜記爲 4.32。若能知其決不至大於 4.34 及小於 4.3 時，則宜記爲  $4.32 \pm 0.02$ ，以表出測得之數之可能誤差。

§7. 純量與向量 物理量可分爲二大類，即純量與向量是。某類之量，祇須記載其數值及單位，即可完全表明之者，例如體積，質量，溫度等，稱爲純量(scalar quantity)。有物理量，若僅記載其數值及單位，每嫌不足，而須說明其方位與方向者，例如速度是，稱爲向量(vector quantity)。若僅述火車速度之快慢，而不言其前進之方向，則吾人必不能完全明瞭其運動之狀況，故尚須記載其運動之方向，例如與東西向所成之角度爲若干。

向量恆可以箭矢表示(圖 5)。矢身之長，表向量之值(長度與向量值或爲相等或爲正比)；箭矢所在之直線，表向量之方位；在同一

方位(直線)上,尚可分正負二向,如 $\vec{A} = -\vec{B}$ ,即向量 $\vec{A}$ 與向量 $\vec{B}$ ,大小相同,方位相同,而方向相反;有時須指明向量所在之點,如 $O$ 及 $O'$ 是,稱為向量之原點。故向量之元有四:即原點,方位,方向與其值是也。

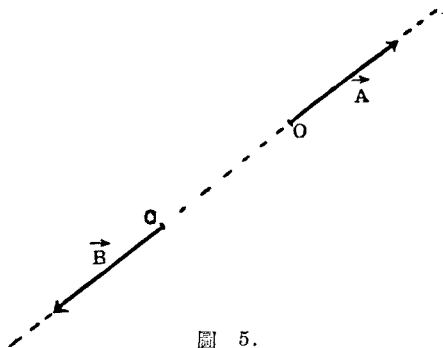


圖 5.

§ 8. 向量之合成與分解 向量之相加,非僅加其數值,且須顯及其方位與方向,普通之代數加法,僅可應用於純量;若向量之合併,則以圖形表示,最為明顯。

欲求數個向量之和,可將各矢之首,與他矢之尾次第脚接,然後自第一矢之首,作一直線以達最後一矢之末,即得所求之向量和。如圖 6,

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4,$$

$\vec{V}$  即為  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$  及  $\vec{V}_4$  之向量和亦稱幾何和,或合成量(resultant)。此種方法不拘向量個數之多寡及其是否同在一平面上。

如兩向量  $\vec{V}_1$  及  $\vec{V}_2$  (圖 7), 其間所成之角為  $\theta$ , 則兩者之合成量  $\vec{V}$ , 即為以  $\vec{V}_1$  及  $\vec{V}_2$  為兩邊所成之平行四邊形之對角線, 其值為

$$V^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2 \cos \theta.$$

反之,任一向量  $\vec{V}$ , 可在任意二相交之直線上分解為  $\vec{V}_1$  及  $\vec{V}_2$ , 即以  $\vec{V}$  為對角線, 於二直線上作平行四邊形, 於是  $\vec{V}_1$  及  $\vec{V}_2$  稱為  $\vec{V}$  之分向量(components)。

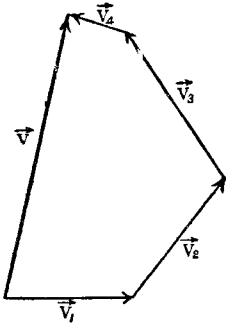


圖 6. 諸向量之合成量

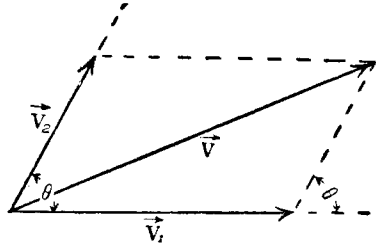


圖 7. 兩向量之和

若求  $\vec{V}_1$  及  $\vec{V}_2$  兩向量之差，即  $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$ ，可先作向量  $-\vec{V}_2$ ，再與  $\vec{V}_1$  合併即得。如圖 8 所示，

$$\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2.$$

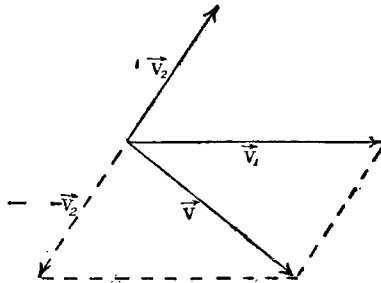


圖 8. 兩向量之差

§ 9. 向量之分析式表示 取  $Oxy$  兩正交之坐標軸，向量  $\vec{V}$  與  $Ox$  軸成  $\theta$  角，則可以向量  $\vec{V}$  在  $Ox, Oy$  軸上之分向量  $\vec{X}, \vec{Y}$  代表之 (圖 9)，其值為：

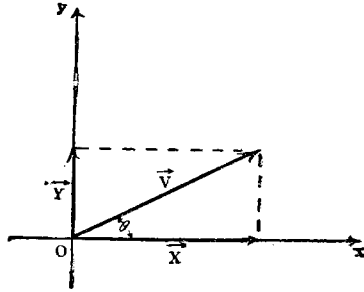


圖 9. 分 向 量

$$\begin{cases} X = V \cos \theta, \\ Y = V \sin \theta. \end{cases}$$

設有  $n$  個向量  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n$ , 與  $Ox$  軸各成  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  角, 則有:

$$\begin{cases} X_1 = V_1 \cos \theta_1, & X_2 = V_2 \cos \theta_2, & \dots, & X_n = V_n \cos \theta_n, \\ Y_1 = V_1 \sin \theta_1, & Y_2 = V_2 \sin \theta_2, & \dots, & Y_n = V_n \sin \theta_n. \end{cases}$$

於是, 其和  $\vec{V}$  在  $Ox, Oy$  軸之分向量爲:

$$\begin{cases} X = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum V_i \cos \theta_i, \\ Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \sum V_i \sin \theta_i, \end{cases}$$

而有

$$V = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

及

$$\tan \theta = \frac{Y}{X},$$

即得合成量之值  $V$  及其方位角  $\theta$ .

以上結果, 極易推廣於三度空間.

§ 10. 向量之矩 設有向量  $\vec{V}$  及一點  $O$  (圖 10), 向量  $\vec{V}$  對於  $O$  點之矩 (moment) 爲一向量  $\vec{T}$ : 其原點爲  $O$ ; 其量等於  $V$  與自  $O$  至  $\vec{V}$  之距離  $r$  之乘積, 即  $rV$ ; 其方位正交於  $O$  與  $\vec{V}$  所成之平面; 其方向則依右螺旋釘法則, 即  $\vec{V}$  之方向爲螺旋釘轉動之方向時, 則螺旋釘前進之方向爲矩  $\vec{T}$  之方向. 故任一向量  $\vec{V}$  對於其上各點之矩恆爲零 (因  $r=0$ ).

向量  $\vec{V}$  對於  $\Delta$  軸之矩, 卽爲對於軸上任意一點  $O$  之矩  $T$  在軸上之正射影  $L$ . 故向量對於某軸之矩爲零, 則必與該軸相交或互相平行.

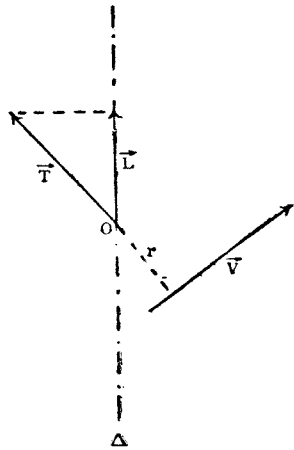


圖 10. 向量之矩

矩之觀念, 在力學上甚爲重要.

§ 11. 物理量之因次 物理學上一切之量, 俱可由三種基本量卽長度, 質量與時間推導而出, 稱爲導出量 (derived quantity), 如面積, 速度是. 導出量所用之單位, 亦可由厘米, 克, 秒三者表出, 而成此三種單位幂次相乘積之形式, 如面積之單位爲 (厘米<sup>2</sup>), 速度之單位爲 (厘米/秒) 等.

某物理量或其單位之因次 (dimension) 云者, 乃指組成此單位之各基本單位之乘幂 (power) 而言, 如  $M^\alpha L^\beta T^\gamma$  中之  $\alpha, \beta$  及  $\gamma$  是,  $M, L, T$  各表質量, 長度及時間三基本量之因次.  $\alpha, \beta, \gamma$  或爲正數, 或爲負數, 亦可爲零. 例如面積因次  $A$  爲長度因次之 2 乘幂, 速度因次  $V$  爲長度因次之 1 乘幂及時間因次之 -1 乘幂; 卽

$$[A]=[L]^2,$$

$$[V]=[L][T]^{-1}.$$

此種方程式，稱為因次公式(dimensional formula)。

物理學上所得之關係式，其兩端所含諸項之因次必相同，恆可藉此以檢驗此關係式之有無錯誤。又單位在各制中改換時，亦可應用因次公式以求之。

例如已知重力加速度為 981 厘米/秒<sup>2</sup>，試求其值，以呎/分<sup>2</sup>計。

重力加速度之因次為  $LT^{-2}$ ，今改作  $L'T'^{-2}$ ，而  $L = \frac{1}{30.48}L'$ ，

$T = \frac{1}{60}T'$ ，故有

$$\begin{aligned} 981 \text{ 厘米/秒}^2 &= 981 \times \frac{1}{30.48} \times \left(\frac{1}{60}\right)^{-2} \text{ 呎/分}^2 \\ &= 115,920 \text{ 呎/分}^2. \end{aligned}$$

## 習 題 一

1. 有四個向量，其值同為 5，連續之兩向量間成  $30^\circ$  角，求其和。
2. 分解一值為 6 之向量成二分向量，一分向量之值須等於 8，且與原向量成  $60^\circ$  角，求他一分向量。
3. 有互相平行而方向相反之兩向量  $\vec{V}_1$  及  $\vec{V}_2$ ，其值同為 8，原點各為 A 及 B。AB 直線與  $\vec{V}_1$  及  $\vec{V}_2$  成  $45^\circ$  角，AB 之長為 3。求  $\vec{V}_1$  及  $\vec{V}_2$  對於 AB 線上任意一點之矩之和。
4. 有三向量，其值各為 2, 3, 4。已知其和為零，求此三向量間

所成之角。

5. 試證同原點之兩向量對於任意一點之矩之和，等於兩向量之和對於該點之矩。

6. 一光年之距離，等於光在一年內所行之距離。光之速度為  $3 \times 10^{10}$  厘米/秒，問一光年等於若干哩？

7. 水之密度為 1，問一立方呎水之質量等於多少磅？

## 第二章 運動學

凡物體變易其位置時，或快或慢，吾人統稱之曰**運動**(motion)。但僅言物體運動之情狀與時間之關係，而不言其所以然之故，則稱爲**運動學**(kinematics)。幾何學討論點，線，面及體，間亦言其運動，但不摻入時間觀念。

§ 12. **質點** 物體由無數之質點(particles)集合而成。在物理學上對一物體，但言其位置與質量，而不計其形狀，大小時，亦可視作質點。是以質點固不必小至何種程度也。論天體運動，則地球可視爲一質點；談原子構造，則原子之內尚有若干質點。質點在空間之位置，如幾何學上之點，可以其在某坐標系中之坐標表示之。

§ 13. **運動之相對性** 物體運動之情狀，恆視觀察者之地位而異。靜坐於車廂內之乘客，自車上觀之，覺爲靜止；然自地面上觀之，則見其隨車前進。屋宇建築，自地面上觀之，亦皆爲靜止。如吾人之言日月出沒，則地球爲靜止，實則地球自轉公轉，晝夜不息。是以欲敘述質點或物體之運動，必先確定觀察者之位置，即究竟以何組物體爲靜止，而取作坐標系。在天文學及天體力學中，研究衛星，行星等之運動，乃取固定之恆星羣爲坐標系。在物理學中，常以地面或實驗室內之牆及桌爲靜止，所述之運動，即係對於此等靜止物體而言，故吾人記載物體各時間之位置所用之坐標系，乃爲固定於地面上者。



§ 14. 軌道——運動方程式 一運動質點所經之曲線，稱曰軌道 (trajectory). 若軌道為一直線，則此質點之運動，稱為直線運動 (rectilinear motion); 若軌道非一直線，則為曲線運動 (curvilinear motion).

質點運動時，其位置隨時間而變。設此點對於比較系統之坐標為  $x, y, z$ ，則此三數為時間  $t$  之函數，即：

$$x=f(t), \quad y=g(t), \quad z=h(t),$$

是為運動方程式。

若軌道為已知，可以下法定動點之位置：

在曲線軌道 ( $C$ ) 上 (圖 11)，選一進行之方向 (圖中箭頭表之)，稱為正方向。又取一點  $O$ ，為曲線上之原點。

曲線任一點  $M$  之位置，可由一數  $s$  而定，此  $s$  之值即表  $OM$  弧之長。至其號之正負，則視由  $O$  至  $M$  進行之方向為正或負而定，此數  $s$  稱為  $M$  點之弧坐標。  $s$  為時間  $t$  之函數，即

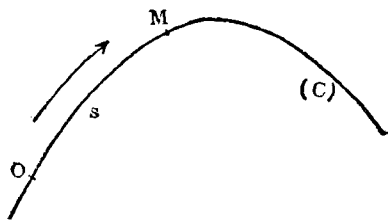


圖 11. 軌道

$$s=F(t),$$

稱為軌道上之運動方程式。

§ 15. 速度 設  $M$  為質點在  $t$  時之位置， $M'$  為其後  $t + \Delta t$  時之位置 (圖 12)。於是在  $\Delta t$  時間內，質點之位移 (displacement) 為  $\widehat{MM'}$ 。

在  $MM'$  弦上作一向量  $\overrightarrow{MQ}$ ，與  $\overrightarrow{MM'}$  同方向，其值為  $\frac{MM'}{\Delta t}$ 。此向量  $\overrightarrow{MQ}$  稱為該質點在  $\Delta t$  時間內之平均速度 (mean or average velocity)。蓋質點在  $t$  及  $t + \Delta t$  時間內，沿軌道  $(C)$  之實際運動，平均

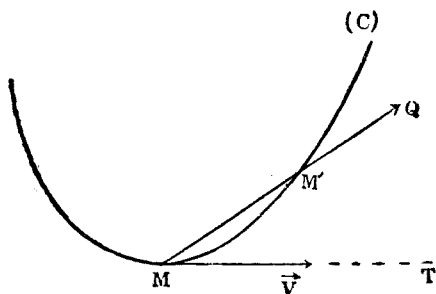


圖 12. 速度

言之，可視為沿  $MM'$  弦之方向，以每單位時間，作  $\frac{MM'}{\Delta t}$  之位移而進行也。

如  $\Delta t$  時甚短，縮小以至於零，直線  $MM'$  之極限位置成為在軌道  $(C)$  上  $M$  點之切線  $MT$ 。  $\overrightarrow{MQ}$  之值亦有一極限為

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\widehat{MM'}}{\Delta t}.$$

此向量  $\vec{v}$  稱為質點  $M$  在  $t$  時之瞬時速度 (instantaneous velocity)，或簡稱速度 (velocity)。其大小與位置，通常隨時變更。若  $v$  之值為常數，則稱為勻速運動 (uniform motion)。

速度既為向量，故其合成與分解，均遵向量算法行之 (§§ 8 及 9)。

日常生活中，速度一詞，常用以表示速度向量之值，蓋通常對此向量之方位與方向，或已明顯而不注意及之也，例如常言火車之速度，飛機之速度。其實略去方向單言數值時，應稱快慢 (speed)。快慢為純量。速度與快慢之單位，在 C. G. S. 制為每秒厘米 (centimeter

per second), 可以厘米/秒表示之. 在實際生活中, 常用公里/小時或哩/小時等.

例 1. 有三級塔, 第一級頂, 第二級頂及第三級頂, 離地面之高各為 8.55, 14.65 及 19.55 米. 物體從塔頂自由墮下, 於 1 秒, 1.5 秒及 2 秒後經過第二級頂, 第一級頂以達地面. 求每秒所增加之速度.

$$\text{墮體在第三級塔之平均速度爲 } \frac{19.55 - 14.65}{1} = 4.90 \text{ 米/秒,}$$

可視為下墮後 0.5 秒時之速度;

$$\text{墮體在第二級塔之平均速度爲 } \frac{14.65 - 8.55}{1.5 - 1} = 12.20 \text{ 米/秒,}$$

可視為下墮後 1.25 秒時之速度;

$$\text{墮體在第一級塔之平均速度爲 } \frac{8.55}{2 - 1.5} = 17.10 \text{ 米/秒,}$$

可視為下墮後 1.75 秒時之速度.

是墮體於第三級與第二級塔間, 在  $1.25 - 0.5 = 0.75$  秒時內所增加之速度為  $12.20 - 4.90 = 7.30$  米/秒, 即每秒所增加之速度為  $\frac{7.30}{0.75} = 9.73$  米/秒. 又墮體於第二級與第一級塔間, 在  $1.75 - 1.25 = 0.5$  秒時內所增加之速度為  $17.10 - 12.20 = 4.90$  米/秒, 即每秒所增加之速度為  $\frac{4.90}{0.5} = 9.80$  米/秒.

故墮體在第三, 第二級塔間與在第二, 第一級塔間, 每秒所增加之速度可視為相等, 即每秒所增加之速度為每秒 9.80 米, 或曰墮體所增加之速度為每秒每秒 9.80 米.

例 2. 帆船之快慢, 為每小時 4 哩, 欲與河岸成直角渡過河面, 水流速度為每小時 2 哩. 求開船時應取之方向. 歷時 10 分, 帆船始渡過河面, 求河闊. 帆船在渡河中, 見上游有一汽艇, 在其垂直方向以每小時 8 哩之速度駛來, 求汽艇之速度.

設向量  $\vec{v}_1$  表水流之速度,  $\vec{v}$  表帆船之快慢及其應取之方向,  $\vec{v}_2$  表帆船渡河中實

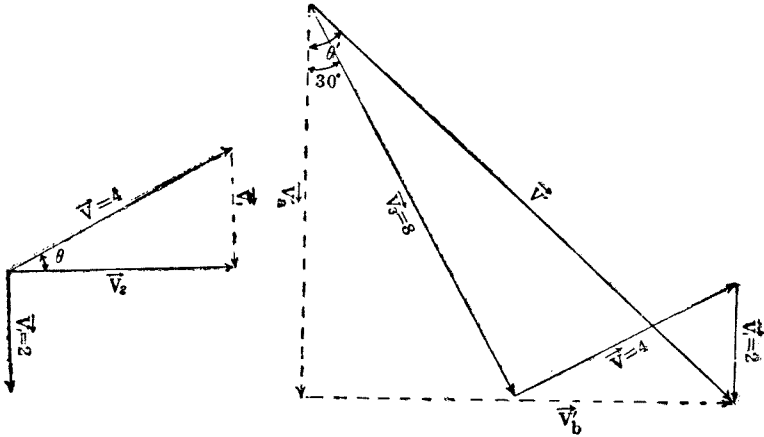


圖 13.

際之速度(圖 13),則有

$$\vec{V}_2 = \vec{V} + \vec{V}_1.$$

已知  $\vec{V}_2$  與  $\vec{V}_1$  正交,故  $\vec{V}$  與  $\vec{V}_2$  間所成之角為

$$\theta = \sin^{-1} \frac{2}{4} = \sin^{-1} \frac{1}{2} = 30^\circ,$$

即帆船應逆流而行,與水流成  $30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$  之角。

$\vec{V}_2$  之值,為  $4 \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} = 3.46$  哩/小時。故河闊為  $3.46 \times \frac{10}{60} = 0.58$  哩。

汽船對於帆船之速度為  $\vec{V}_3$ ,帆船對於水之速度為  $\vec{V}$ ,水對於河岸之速度為  $\vec{V}_1$ ,故汽船對於河岸之速度為  $\vec{V}'$ ,即為  $\vec{V}_3$ ,  $\vec{V}$  及  $\vec{V}_1$  之合成向量。由圖可得  $\vec{V}'$  之沿河岸與垂直於河岸之分向量  $\vec{V}'_a$  與  $\vec{V}'_b$ ,及其與河岸所成之角  $\theta'$ ,為:

$$V'_a = 8 \cos 30^\circ + 4 \cos 120^\circ + 2 = 6.93 \text{ 哩/小時,}$$

$$V'_b = 8 \sin 30^\circ + 4 \sin 120^\circ = 7.46 \text{ 哩/小時,}$$

$$V' = \sqrt{(V'_a)^2 + (V'_b)^2} = \sqrt{(6.93)^2 + (7.46)^2} = 10.18 \text{ 哩/小時,}$$

$$\theta' = \tan^{-1} \frac{V'_b}{V'_a} = \tan^{-1} \frac{7.46}{6.93} = \tan^{-1} 1.077 = 47^\circ.13.$$

故汽艇順流與河岸成  $47^{\circ}.13$  角，以每小時 10.18 哩之速度前進。

§ 16. 加速度 物體在單位時間內所增加之速度，稱為加速度 (acceleration)。

設  $M$  為質點在  $t$  時之位置，其速度為  $\vec{V}$ ； $M'$  為其後  $t + \Delta t$  時之位置，其速度為  $\vec{V}'$ 。速度  $\vec{V}'$  可視為  $\vec{V}$  與所增加之  $\Delta\vec{V}$  合併而得 (圖 14)。

在過  $M$  點，與  $\Delta\vec{V}$  平行之直線上，作向量  $\vec{MJ}$ ，其值為  $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ 。此向量  $\vec{MJ}$  稱為該質點在  $\Delta t$  時間內之平均加速度 (average acceleration)。

如  $\Delta t$  時間甚短，縮小以至於零，則向量  $\vec{MJ}$  之方位與其值皆有極限，此極限向量

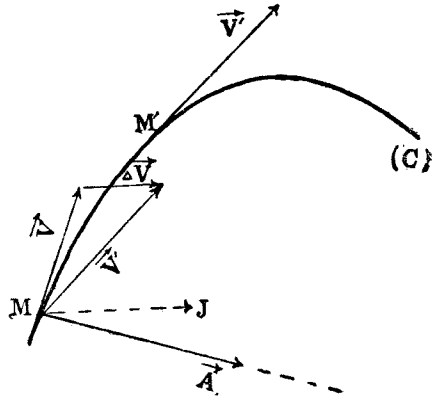


圖 14. 加速度

$$\vec{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t},$$

稱為質點  $M$  在  $t$  時之瞬時加速度 (instantaneous acceleration)，或簡稱加速度。

在曲線運動中，雖有時速度之值不變，但其方向常改，故必有加速度。加速度常向軌道曲線之曲率中心所在之一方。

加速度有大小，有方向，亦為向量；故其合成與分解，均遵向量算法之規定。

在 C. G. S. 制, 速度之單位為每秒厘米, 故加速度之單位為每秒每秒厘米 (centimeter per second per second), 可以厘米/秒<sup>2</sup> 表之。

## 習 題 二

1. 飛行家林德勃 (Lindbergh) 於 1927 年初次飛過大西洋, 由紐約到巴黎相距 3,630 哩, 共費 33.5 小時. 問其平均快慢為每小時幾哩? 又為每秒幾厘米?

2. 船向北行, 水向西流, 開船一小時後, 船已去有  $10\sqrt{3}$  公里之遠, 方向在北方之西邊  $30^\circ$ . 求船及水流之速度.

3. 船之速度為 6 公里/小時, 水流之速度為 4 公里/小時. 設船之進行方向與水流垂直, 求船之實在速度與所走路線. 若河闊為  $\frac{1}{2}$  公里, 問須若干分鐘, 可由此岸渡至彼岸?

4. 某物體之加速度為 24 哩/小時<sup>2</sup>, 問化為 C. G. S. 制單位, 其數值如何?

5. 一質點之原始速度向東, 為 12 厘米/秒; 5 秒之後, 其速度向南為 10 厘米/秒. 試求其平均加速度 (數值及方向).

6. 甲乙二舟, 甲以每小時 10 哩之速度向東航行, 乙以每小時 15 哩向南航行. 問自乙舟之人觀之, 甲舟之速度為何? 又自甲舟之人觀之, 乙舟之速度為何?

7. 質點在半徑為 10 米之圓周上運動, 自  $A$  至  $D$ , 歷時 4 秒,  $AD$  弧長 80 厘米, 求質點在  $AD$  間之平均速度.

細考質點在  $AD$  間之運動, 知其經過  $B, C$  二點, 自  $A$  至  $B$  費時

$1\frac{1}{2}$  秒；自  $B$  至  $C$  費時  $\frac{1}{2}$  秒；自  $C$  至  $D$  費時 2 秒。而  $AB$ ,  $BC$  及  $CD$  三弧之長，各為 28.5, 9.5 及 42 厘米。求質點在  $AB$ ,  $BC$  及  $CD$  間之平均速度。

將  $AB$ ,  $BC$  及  $CD$  間之平均速度平均之，再與  $AD$  間之平均速度相比較。

(注意：平均速度宜同時求其數值與方向。)

8. 一人向東而行，其速度為 50 米/分，覺風自南方吹來。若其速度增至 75 米/分，則覺風自東南方吹來。求風之速度。

§ 17. 直線運動 質點之軌道為一直線，必其速度之方位始終不變，此速度之方位即為軌道直線。於軌道直線上，取質點之初位置  $O$  為原點，質點  $M$  在軌道上任何時之位置，可以  $OM$  之距



離  $s$  定之。

圖 15. 直線運動

勻速直線運動 直線運動中，質點之速度，其數值  $v$  一定不變時，稱為勻速直線運動。依定義， $v = s/t$ ，即得運動方程式

$$s = vt,$$

故行程與時間成正比。

勻加速直線運動 直線運動中，質點之加速度，若為常數  $a$ ，稱為勻加速直線運動。

設  $v_0$  為其初速度，依定義，有

$$a = \frac{v - v_0}{t},$$

故

$$v = v_0 + at.$$

在  $t$  時間內，質點之速度，既為均勻的增加，其平均速度，遂為  $\frac{v+v_0}{2}$ ；而質點所行之路程，乃其平均速度與時間之乘積。故有

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

是為勻加速運動之方程式。

若初速度  $v_0 = 0$ ，則

$$v = at,$$

$$s = \frac{1}{2} a t^2,$$

即速度與時間成正比，而行程與時間之平方成正比。若將上二式中之  $t$  消去，即得

$$v^2 = 2as,$$

是為速度  $v$  與行程  $s$  之關係式，可由此而知質點到達各處時之速度。

§ 18. 圓周運動 質點之軌道，若為一圓周時，稱為圓周運動 (circular motion)。

命  $O$  為軌道圓周之心， $r$  為其半徑。質點  $M$  在  $t$  時之位置，可以  $AM$  弧長  $s$  表之， $A$  為計弧之起點。 $M$  在圓周上之位置，亦可以半徑  $OM$  與一定方向之  $OA$  線所成之角  $\theta$  表之。因  $r$  為常定，故在圓周運動中，變化者僅為  $\theta$  角。是以質點之位移，可單獨以此角

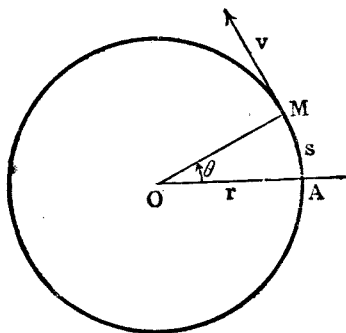


圖 16. 圓周運動



度之變化描述之。質點在圓周上之位置變遷愈速，則  $\theta$  角之變化亦愈速。

$\theta$  與  $s$  之關係爲

$$s = r\theta,$$

因此，質點在圓周上之速度

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = r \frac{\Delta \theta}{\Delta t}.$$

吾人稱  $\frac{\Delta \theta}{\Delta t}$  爲平均角速度，其極限  $\omega$  稱爲角速度 (angular velocity)。

蓋  $\omega$  爲  $\theta$  角變化之速度，即  $\theta$  角在一秒鐘內所增加之值也。其單位爲每秒徑，可以徑/秒表之。

故有：

$$v = r\omega.$$

吾人在此特稱速度  $v$  爲線速度 (linear velocity)，以與角速度  $\omega$  相對照。

通常角速度  $\omega$  亦隨時間而變，可相仿而得角加速度

$$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}.$$

又質點  $M$  沿切線方向之加速度，稱爲切線加速度 (tangential acceleration)，即單位時間內  $v$  之增加值，故其值爲  $r\alpha$ ，即

$$a_T = r\alpha.$$

勻速圓周運動 若質點在圓周上，其速度  $v$  之大小不變，而有

$$\theta = \omega t,$$

則質點每繞圓一周， $\theta$  角之值即增加  $2\pi$ ，二周後增加  $4\pi$ ，等等。質點

經過一周後重復回到  $M$  點時，其運動之一切情狀，均與初經  $M$  時完全相同。此種周而復始之運動，稱為週期運動 (periodic motion)。其繞圓一周所需之時間

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

稱為週期 (period)。任何週期運動，皆可為量時之用。

在此特例的勻速圓周運動中，其速度  $v$  之值雖為一定，而其方向，在圓周上各點不同，仍不免為一種加速運動 (§ 5)。可進而求其加速度如次：

設  $M, M'$  為質點在  $t$  及  $t + \Delta t$  時之位置； $\vec{MV}$  及  $\vec{M'V'}$  為質點在  $M$  及  $M'$  點之速度，其值同為  $v$ ； $\vec{\Delta V}$  為自  $M$  至  $M'$  時質點之增加速度，如圖 17 所示，有

$$\Delta v = v \Delta \theta.$$

因此加速度  $\vec{A}$  依定義為  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta V}}{\Delta t}$ ，

當  $\Delta t \rightarrow 0$  時，其極限方位，即為沿半徑  $MO$ ，而向圓心；其值為

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = v \cdot \omega = \frac{v^2}{r},$$

或  $a = \omega^2 r$ 。

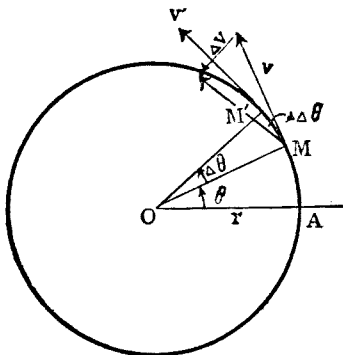


圖 17. 勻速圓周運動

故質點在圓周上作勻速運動，即有一向心而值為  $v^2/r$  之加速度。此純粹為運動學上之結果。

例。有一半徑為 2 米之飛輪，在正常狀態下，作每分鐘 80 轉之勻速運動。當開動時，由靜止起，速度與時間成正比而增加，以達至

正常之勻速度，共歷 90 秒之久，問其加速度如何？

取米為長度之單位，徑為角之單位，秒為時之單位。在正常狀態下，勻角速度為  $\frac{160\pi}{60} = 8.38$  徑/秒；飛輪周上一點  $M$  之線速度為  $8.38 \times 2 = 16.76$  米/秒。角加速度為零； $M$  點之加速度垂直於飛輪之周，其值為  $8.38^2 \times 2 = 140.45$  米/秒<sup>2</sup>。

當開動時，即由靜止而達勻速運動之時間，角加速度  $\alpha$  為常數，因角速度  $\omega$  與時間成正比也。 $\alpha = \frac{8.38}{90} = 0.093$  徑/秒<sup>2</sup>。飛輪周上之  $M$  點，其沿切線方向之加速度為常數，等於  $0.093 \times 2 = 0.19$  米/秒<sup>2</sup>，其與輪周垂直方向之加速度，從 0 起而增至最後值為 140.45 米/秒<sup>2</sup>，與經過之時間的平方成比例，因  $\omega$  與此時間成比例也。故  $M$  點之加速度向量，起始極與切線相近，漸趨向而終達於沿飛輪之半徑方位。

§ 19. 曲線運動之加速度 在上節勻速圓周運動中，吾人知質點之加速度，沿半徑而向心，其值為  $v^2/r$ 。在一般之圓周運動中，吾人又知質點之加速度  $\vec{A}$ ，其沿切線方向之分加速度值為

$$a_T = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

但任何圓周運動，在瞬時間內，恆可視為一勻速的與一非勻速的兩圓周運動之和，可知一般之圓周運動，其沿半徑之分加速度必為

$$a_N = \frac{v^2}{r}.$$

此等結果，推之於任何曲線運動，亦皆真確。因在曲線上一點之附近，可視為與其曲率圓周相合。故質點在軌道曲線  $(C)$  上之  $M$  點 (圖 18)，其速度之值為  $v$ ，則其

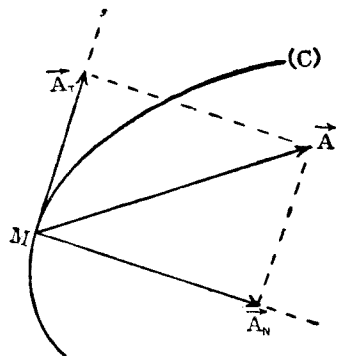


圖 18. 切線及法線加速度

加速度  $\vec{A}$  在切線上及在法線上之分加速度為:

$$\begin{cases} A_T = -\frac{v^2}{\rho}, \\ A_N = -\frac{v^2}{\rho}. \end{cases}$$

$\rho$  表曲率半徑。  $\vec{A}_T$  稱為切線加速度 (tangential acceleration),  $\vec{A}_N$  稱為法線加速度 (normal acceleration).

§ 20 簡諧運動 設一點  $M$  在圓周上作勻速運動,  $M_0$  為其初位置 (圖 19), 則在  $t$  時  $OM$  與定直線  $OX$  所成之角為

$$\theta = \omega t + \theta_0.$$

又設  $P$  為  $M$  點在通過圓心之定直線  $OX$  上之正射影。當  $M$  點在圓周上繞轉時,  $P$  即跟隨在  $OX$  線上  $DD'$  直徑內往返運動。此  $P$  點之運動

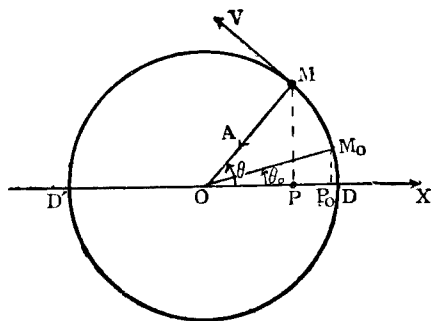


圖 19.  $P$  點之簡諧運動

稱為簡諧運動 (simple harmonic motion). 凡與  $P$  相同之運動, 皆稱為簡諧運動。

$P$  點在  $OX$  軸上之位置, 可以其坐標  $x$  表之。於是

$$x = \overrightarrow{OP} = OM \cos \theta = r \cos(\omega t + \theta_0)$$

為簡諧運動之方程式。

$P$  點之速度, 即為  $M$  之速度  $\vec{V}$  在  $OX$  上之射影, 有

$$v = \overline{MV} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\omega r \sin \theta = -\omega r \sin(\omega t + \theta_0).$$

同樣， $P$  點之加速度，即為  $M$  之加速度  $\vec{A}$  在  $OX$  上之射影，有

$$\begin{aligned} a &= \overline{MA} \cdot \cos(\pi + \theta) = -\omega^2 r \cos \theta \\ &= -\omega^2 r \cos(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 x. \end{aligned}$$

故在簡諧運動中，加速度與位移成正比，而方向相反；此為簡諧運動之特徵。反之，凡質點之加速度與位移成正比，而方向相反時，吾人即可知其必作簡諧運動。

動點  $P$  在  $OX$  上  $DD'$  之間，作無數次的往復運動。當  $\omega t$  增加  $2\pi$ ，即當  $t$  增加  $\frac{2\pi}{\omega} = T$  時， $x$  再有同前之值，即動點回復其原位置；而速度與加速度亦復如是，故簡諧運動為週期運動。

週期為  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ，又  $\frac{1}{T} = N$ ，乃表單位時間內週期之數，稱為頻率 (frequency)。 $P$  點之最大位移  $OD$  ( $=r$ ) 稱為振幅 (amplitude)。 $DD'$  ( $=2r$ ) 稱為全振幅。 $(\omega t + \theta_0)$  角乃在  $t$  時簡諧運動之相 (phase)， $\theta_0$  為初相 (epoch)。

### 習 題 三

1. 作直線運動之質點，其在各時刻之位置如下：

時 間 (秒)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
與原點之距離 (厘米)	3	4	9	18	31	48	69	94	123	156

試以時間為橫坐標，距離為縱坐標，作圖以表示之。求在各秒內之平均速度與加速度，並求其運動方程式。

2. 火車由靜止開動，於最初 10 秒鐘內，前進 100 碼。求其加速度及第 10 秒鐘之速度。

3. 一物體以每秒每秒 2 厘米之勻加速度，由靜止開始運動，須歷若干時間，始能得每秒 30 厘米之速度？又從開始起至此時止，共行若干路程？

4. 一物體之速度為每秒 100 厘米，受每秒每秒 2 厘米之減速度作用。問若干時後方始停止？又至停止為止，共進行若干遠？

5.  $M, M'$  二點各在互相平行之二直線  $D, D'$  上，作勻加速度運動，其加速度各為  $a$  及  $a'$ 。求  $MM'$  之中點之運動。

6. 有一小蟲，在時鐘之分針上爬行，由鐘心出發，每秒 0.1 毫米。5 分鐘外，求蟲之速度。

7. 火車以每小時 50 哩前進，今於 8 秒鐘內，令其完全停止。假設其減速度為常數，求其在 8 秒鐘內所行之距離。

8. 一年為  $365\frac{1}{4}$  日。地球與太陽間之距離為  $149.5 \times 10^6$  仟米。假設地球之軌道為一正圓，試求地球對於太陽之加速度。

9. 汽車在半徑 2,000 米之圓周上行動，速度為每小時 15 仟米。前有障礙物，車作勻減速運動，行 75 米後停止。求車在減速期前與減速期間之加速度。

10. 有一簡諧運動，振幅為 3 厘米，週期為  $\frac{1}{2}$  秒。試以圖表示其位移，速度及加速度，與時間之關係。

11. 作簡諧運動之某物體，其振幅為 3 呎，最大之速度為每秒 5 呎。求其週期及最大之加速度。

12. 甲乙二人自  $A, B$  兩地同時相向而行，甲每時可行 6 公里，乙每時可行 4 公里。今有一信鴿以每時 20 公里之速度，在甲乙二人

頭上往復飛行，直待二人相遇時停止。設  $A, B$  兩地相距 50 公里，問信鴿飛行之路程共若干公里？

§ 21. 移動 關於固體之運動，今僅舉其簡單而最重要之二例討論之，即移動與轉動是也。

於固體內任意取  $A, B$  二點，當固體運動時， $AB$  線段之方位不變，則其運動稱為移動(translation)。

如圖 20，平行六面體代表任意之固體，當移動時，其稜  $AB, AC, AD$  各保持一定之方位，即  $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2$ ， $AC \parallel A_1C_1 \parallel A_2C_2, \dots$ ；其頂點  $A$  作一軌道  $S, B$  作一軌道  $S'$ ，……；所有各點之軌道皆為相等之曲線。在任何時間  $t$ ，體上所有各點之速度皆相等，如  $\vec{AV} = \vec{BW} = \dots$ 。因此，體上一切點之加速度亦皆相等。

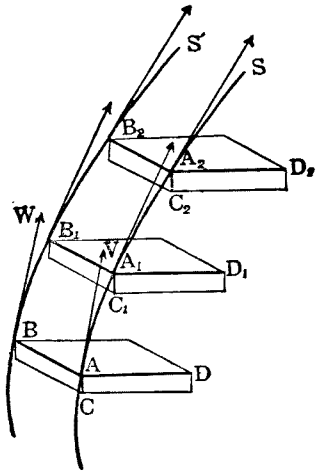


圖 20. 移動

故固體之移動，可以其體上任何一點(或取一特別有意義之點)之運動代表之。

固體移動時，體上各點之軌道為直線者，稱直線移動；體上各點之軌道為曲線者，稱曲線移動。

桌之抽屜，隨槽進退；物體自由下墮，皆直線移動之例也。

火車頭同邊兩輪上連繫之軸的運動，乃圓移動。軸上所有諸點，作相等之圓軌道，其速度與加速度在任何時間皆相等。

§ 22. 轉動 有一固體在運動中，若體上與某軸  $\Delta$  相合之點不

動，則此固體係繞  $\Delta$  軸作轉動 (rotation)。若固體不與此軸相交，僅須設想此體附於較大而與此軸相交之一體上。

當固體繞軸轉動時，體上各點之軌道皆為圓周。圓周之平面與軸正交，而諸圓心即在此軸上。是體上各點如  $M$  (圖 21)，皆作圓周運動，圓周運動已在 § 18 論及。

假設  $\theta$  為半徑  $CM$  與其初位置  $CM_0$  所成之角。當  $M_0$  抵  $M$  時，固體上一切之點皆轉過  $\theta$  角。故  $M$  點之角速度  $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$  亦為體上其他一切點之角速度，於是稱  $\omega$  為固體轉動之角速度。

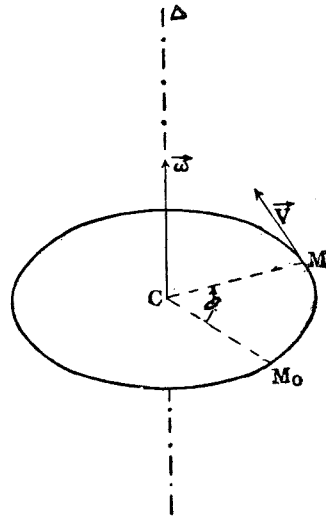


圖 21. 轉動

固體繞軸轉動，可有向前向後兩種，須作正負之別，尋常以右螺旋釘法則定之。取螺旋釘前進之方向為軸  $\Delta$  之正向，物體轉動之方向與右螺旋釘轉動之方向相同時，為正轉動；反之，為負轉動。依轉動之為正或負，於軸  $\Delta$  之正向或負向，作一向量，其長度表角速度  $\omega$  之大小，即為角速度向量。

當固體轉動時，體上各點距轉動軸  $\Delta$  愈遠者，其速度亦愈大。例如  $M$  點之速度向量：其原點在  $M$ ；其值為  $CM \times |\omega|$ ；其方位與  $MC$  及  $\Delta$  所成之平面正交；其方向視  $t$  時  $\omega$  之為正或負，而在  $\theta$  之增或減的方向上。故固體上一點之速度，為角速度向量  $\omega$  對於該點之矩



(§ 10).

地球繞軸自轉，即固體轉動之一例。其自轉一周之時間為一恆星日，即較尋常之平均太陽日少 235.91 秒。因轉動為等速，故其角速度為：

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60 - 235.91} = 7.29 \times 10^{-5} \text{ 徑/秒.}$$

此轉動由西而東，其角速度  $\omega$  較鐘表之時針角速度之半稍大。

### 習 題 四

1. 腳踏車後輪之半徑為 40 厘米，其軸上齒輪之半徑為 8 厘米，腳踏板上齒輪之半徑為 24 厘米。某人騎此車，每小時行 15 公里，問每分鐘須踏幾轉？

2. 汽車每小時行 30 哩，其前輪之直徑  $DD'$  為 16 吋，問輪轉每分鐘多少次？輪心之速度為何？在某瞬時， $D$  點與路面相接觸，則  $D'$  點自然在輪之最高處，求  $D$  及  $D'$  點此時之速度。

3. 有一圓周，在一 2 倍半徑之定圓周內滾動而不滑移。求動圓周上任一點之軌道。

### 第三章 自由墮體

在上章之運動學中，吾人曾從速度，加速度等定義，僅用算學演繹方法，得出若干結果，此可為吾人討論物體實際運動之借鏡。日常生活中，如走路，行車，以及原動機之轉動，在正常狀態下，均為勻速運動；惟有在初開動與將停止之短時間內，始為加速運動（在減速運動中，加速度為負）；且在此短時間內，每可假設其加速度為常數，而為勻加速運動。

在地面上，自然界中，物體之運動，實可謂直接或間接均與墮體（falling body）有關，故先研究墮體之運動，即「蘋果下落」問題。在本章中，吾人研究蘋果之如何下落，以為明白蘋果為何下落之準備。

§ 23. 墮體運動第一定律 空中物體皆向地面下落；自靜止而下落之物體，必沿鉛垂方向；此乃幾千年來有目共睹之事實。但一塊磚與一塊鉛，下落是否一樣快慢？此一問題，在十六世紀之末，尙且議論紛紜，莫衷一是。意人伽利略（Galileo, 1564—1642）曰：「不要空談幻想，讓我們去實驗來解決」。曾攜數個不同之金屬球和一個象牙球，直上比薩斜塔（leaning tower of Pisa）塔頂。實驗結果，此數個不同物質之球，居然可謂為同時落到地面。

比薩斜塔因此成為世界上最早之物理實驗室，而伽利略推為現代科學之鼻祖。此在我國明神宗萬曆年間事，距吾人實頗近也！

一片羽毛，空中下落，吾人每覺其特別遲緩者，實以其受空氣影響特大之故；否則，與磚頭鉛球下落一樣快慢。此點於若干年後，由英人牛頓(Newton, 1642—1727)將一枚銅元與一片羽毛，同置於長而封閉之玻璃管中，抽去管中空氣實驗以證明之。抽氣機之發明，固在伽利略死後三四十年也。

因得墮體運動第一定律：

若無空氣影響，一切物體，無論其形狀大小及屬何種物質，在某處由靜止自由落下，其快慢均同。

§ 24. 墮體運動第二定律 由於墮體運動第一定律之結果，吾人無須分別墮體之為磚頭，抑為鉛球，「墮體」一名，在物理學上方有意義。但墮體運動為勻速運動歟？為勻加速運動歟？抑為其他運動歟？經伽利略實驗研究，得墮體運動第二定律：

物體自由下墮，為勻加速直線運動。

研究墮體運動之困難，在其下墮過速，不易精確觀測。例如從五丈高之七層塔頂下落，不到 2 秒鐘即可着地；而在伽利略當年計時之具，尙是銅壺滴漏。伽利略因此用不自由墮體來做實驗。

何謂不自由墮體？可於下述二例見之。

斜面墮體 物體置於斜面上，因受斜面擋住，失卻自由，不復能依其本性，沿鉛垂方向下墮，而僅能沿斜面滑下。從斜面滑下，較之自由下墮，要慢得多。因靜止於斜度極小或竟成水平之面上之物體，始終靜止。而斜面與水平成正交時，則斜面墮體又即為自由墮體，故伽利略乃從事下述斜面墮體實驗，以推得自由墮體運動定律。

設  $MN$  為一極光滑之斜面(圖 22)，將物體輕置於其上，任其由

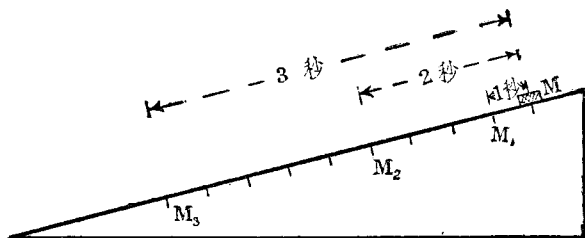


圖 22. 斜面墮體運動

靜止狀態沿斜面坡線下滑，測得在 1, 2, 3, ……秒鐘內，所行之路程  $MM_1, MM_2, MM_3, \dots$  各為：

$$MM_1 = 1MM_1, \quad \text{即} \quad MM_1 \times 1^2;$$

$$MM_2 = 4MM_1, \quad \text{即} \quad MM_1 \times 2^2;$$

$$MM_3 = 9MM_1, \quad \text{即} \quad MM_1 \times 3^2;$$

$$\dots\dots\dots,$$

與時間之平方成正比，可見運動為勻加速的 (§ 17)，其勻加速度為每秒每秒  $\frac{1}{2}MM_1$ 。

改變斜面之斜度，再作同樣之實驗，知物體在任何斜度之斜面上滑下，皆為勻加速運動，惟其加速度乃隨斜面之斜度而增大。

當斜面斜度增加成  $90^\circ$  時，斜面與水平面正交，在此面上之物體，成為自由墮體。由此可知自由墮體亦必為勻加速運動。

又取另一光滑平面  $M$ ，平放而連接於斜面  $L$  之後 (圖 23)，則物體由斜面滑下後將繼續運行於平面之上。實驗測知物體在水平面上仍為直線運動，其路程則與時間成正比，乃為勻速運動 (§ 17)。

連接墮體  $P_1$  與  $P_2$  兩物以細繩連懸於固定滑車  $A$  上 (圖 24)。

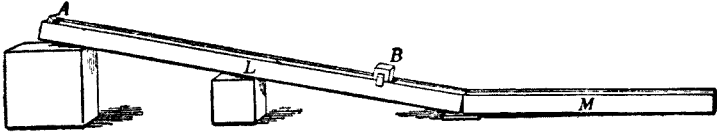


圖 23.

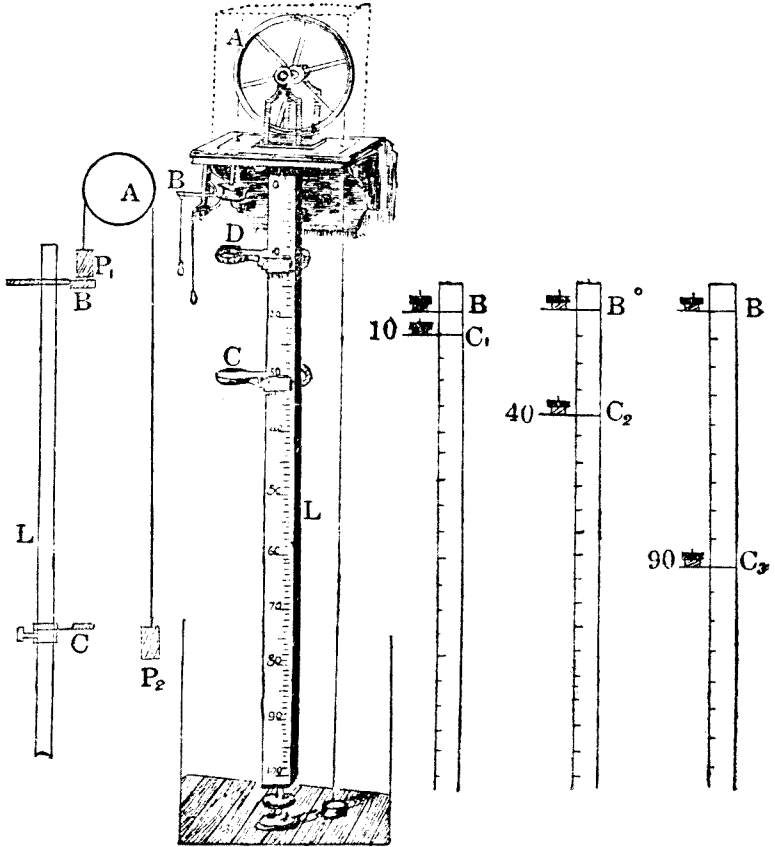


圖 24. 阿特武德機

則  $P_1$  雖仍可下墮，因被  $P_2$  牽扯，其下墮為非自由者。此種裝置稱為阿特武德機 (Atwood's machine)。

設  $P_1$  與  $P_2$  之質量相同，於  $P_1$  上加一質量為  $m$  之小物體，則  $P_1$  與  $m$  下降， $P_2$  上升。由靜止起， $P_1$  與  $m$  在 1, 2, 3, 4, ……秒鐘內，下降之距離為  $BC_1, BC_2, BC_3, BC_4, \dots$ ，實驗測得：

$$BC_1 = 1 BC_1, \quad \text{即} \quad BC_1 \times 1^2;$$

$$BC_2 = 4 BC_1, \quad \text{即} \quad BC_1 \times 2^2;$$

$$BC_3 = 9 BC_1, \quad \text{即} \quad BC_1 \times 3^2;$$

$$BC_4 = 16 BC_1, \quad \text{即} \quad BC_1 \times 4^2;$$

$$\dots\dots\dots,$$

乃距離與時間之平方成正比，可見其為勻加速運動 (§17)。其勻加速度為每秒每秒  $\frac{1}{2} BC_1$ 。

變更所加入之物體  $m$  之質量而繼續實驗之，則知下降皆為勻加速運動，惟其加速度則隨所加物體之質量  $m$  而增大。

在下降  $t$  時後，忽將所加物體  $m$  輕快取去，不使  $P_1$  受任何擾亂，則  $P_1$  繼續下降。但從此時起，下降之距離，乃與時間成正比，而為勻速運動 (§17)。

又若所加物體  $m$  之質量，大過  $P_1$  甚多倍，則  $m$  與  $P_1$  之下降情形將與自由墮體相近，因此時  $P_2$  之牽扯作用，比較甚微故也。實驗結果知  $m$  與  $P_1$  之下降仍為勻加速運動；因可斷定：物體自由墮下，為勻加速運動。

§ 25. 自由墮體之加速度 自由墮體之為勻加速運動，已如上

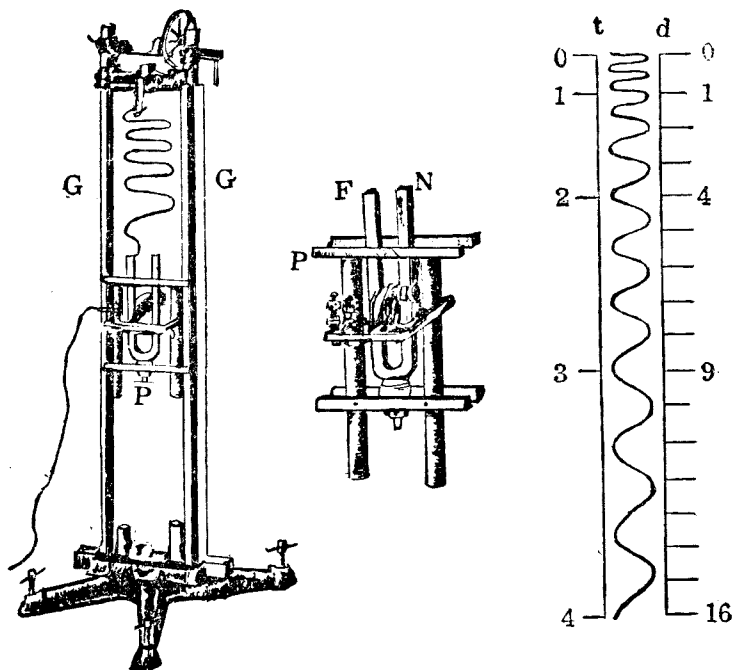


圖 25. 自由墮體實驗

節所述，現在實驗技術進步，不難在室內直接證明，並測定其加速度。

如圖 25，即為考究自由墮體運動儀器之一種。金屬架 *P* 裝有音叉 *F*，可沿長約 120 厘米之兩鉛直導軌 (guide) *GG'* 而降落。音叉之一端，附有小針 *N*。當叉及架開始下墜時，即通電流，以激動音叉，則此小針在後面粉板上，描繪波形曲線。每一全波，即音叉振動一次。是針端在粉板上，不但記錄其所經過各點之位置，且表示其經過各該點之時間。故量此曲線上某兩波間之距離，且知音叉每秒之振動次數，則可知在各時間內，叉與架降落之距離，而證明其為勻加速運

動，並求得自由墮體之加速度。

自由墮體之加速度，約爲 980 厘米/秒<sup>2</sup> 或 32.2 呎/秒<sup>2</sup>，通常以  $g$  表之。

## 習 題 五

1. 自塔頂落下之球，於 6 秒時觸地，求塔高及球抵地時之速度。
2. 由一井口落石，5 秒後聞石擊水聲，求井口至水面深度（聲之速度爲每秒 331 米）。
3. 一石以每秒 30 呎之速度，向上投射，求其能達之高度及復落至地面共歷之時間。
4. 鉛直拋上之物體，通過 178 厘米高處時，其速度爲向上每秒 110 厘米。問係以何速度上拋該物體？
5. 音叉之一端附有一筆尖，旁置一鉛直之玻璃板，板上塗有煤煙。音叉自由下墮時，其筆尖恰在此板上畫一波狀曲線。設在 120 厘米之距離內（自靜止位置下落），共有 85 個全波。求音叉之振動頻率。



## 第四章 動力學之基本定律

在上章所述墮體運動中，吾人僅言其位置與速度隨時間而變更，未述及其所以變更之故。此種位置與速度之變更，有目共睹，量長計時，即可求出其關係。但其原因輒不能直接察出，雖有時亦不難理會得之。此種原因，若發源於吾人本身之體內，則猶易察覺。例如運用吾人之筋肉，每可干涉物體之運動，或使靜物運動，或使動物靜止，或任意變更其運動之快慢與方向。在此一切情形之中，似有主宰者焉；蓋即吾人所稱爲筋力者是也。

故使物體變更其靜止或運動情狀之原因爲力。墨子有言：「力者物之所由奮也」。吾人將在下面說出‘力’與‘奮’之數量關係。

### § 26. 牛頓之運動第一定律

物體若不受外力之作用，則靜者恆靜，動者恆沿直線作勻速運動。

‘不受外力之作用’等於言‘若無特別原因’，靜止之物體，自然沒有理由應向東動而不向西，亦沒有理由應向南動而不向北，所以只好繼續不動。前進之物體，沒有理由左轉，亦沒有理由右轉；沒有理由加速，亦沒有理由改慢；所以只好繼續勻速前進。此種一仍舊貫之本性，稱爲物之慣性。牛頓第一定律，亦稱爲慣性原理（principle of inertia）。

靜止亦可視為一種運動，只是其速度為零而已。牛頓第一定律，實不過為力之定義，即：變更物體運動速度之大小或方向之原因為力(force)。

依照墨子之意，靜止之物體，不動不奮，沿直線作勻速運動之物體，動而不奮。

### § 27. 牛頓之運動第二定律

靜止或運動之物體，受力之作用，則產生加速度；所產生之加速度，沿所加之力之方向，其大小與力之大小成正比。

故墨子之所謂‘奮’，即‘加速’之意。

設  $\vec{A}$  為某物體受力  $\vec{F}$  之作用而產生之加速度，則依牛頓第二定律，有

$$\frac{\vec{F}}{\vec{A}} = m,$$

$m$  為一常數，表示該物體之某一種特性， $m$  究有何物理意義？

**質量之定義** 吾人固可將任何物體寶藏起來，以其所含之物質，作為質量之單位，如巴黎國際度量衡局所保存之‘仟克原器’。但吾人如何能知另一物體之質量，為該單位質量之若干倍？

設以一力  $\vec{F}$  先後加於單位質量及另一物體之上，而產生之加速度為  $\vec{A}$  及  $\vec{A}'$ ， $\vec{A}$  為  $\vec{A}'$  之  $n$  倍，則依牛頓第二定律，有

$$\frac{\vec{F}}{\vec{A}} = m, \quad \frac{\vec{F}}{\vec{A}'} = m', \quad \text{而} \quad \frac{\vec{A}}{\vec{A}'} = \frac{m'}{m} = n;$$

若取單位質量之比例常數  $m'$  為 1，則其他所有物體之比例常數  $m$  皆

爲完全確定，即  $\frac{1}{m} = n$ ，故此係數  $m$  乃各物體特具之值，稱爲物體之質量 (mass)。是以某物體之質量云者，即以同一之力，先後施於該物體及單位質量，所生之加速度之反比也。

故有：

$$\vec{F} = m\vec{A},$$

是爲動力學之基本式，式中  $\vec{F}$  表所加之力， $m$  表物體之質量， $\vec{A}$  表物體所得之加速度。

一物體同時受數力之作用，所得之加速度，乃此物體受每一力之作用時，所得之加速度之幾何和。故同受  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  諸力之物體，所得之加速度，與受一等於此諸力之幾何和之單力，所得之加速度相同。若對於物體之某一位置，此諸力之幾何和爲零，則加速度亦爲零；更若物體在此位置，無初速度，則在此點靜止，而處於平衡之狀態中。

故力  $\vec{F}$  與加速度  $\vec{A}$  同爲向量，而質量  $m$  爲一純量。

**力之量度** 物體受力之作用，則於力之作用方向上，得一加速度，其大小與力成正比。故加速度之大小，即可爲力之強弱之量度。以作用於單位質量之物體上，產生單位加速度之力，爲力之單位，稱爲力之絕對單位 (absolute unit of force)。

在 C. G. S. 制，質量之單位用克，加速度之單位用每秒每秒厘米，故作用於質量 1 克之物體上，發生每秒每秒 1 厘米之加速度之力，爲力之絕對單位，特名之曰達因 (dyne)。

在英國之呎·磅·秒制，力之單位爲磅達 (poundal)。依定義，1 磅

達之力加於 1 磅質量之物體，其所生之加速度為 1 呎/秒<sup>2</sup>。

§ 28. **重力** 自由墮體，無論其質量如何，恆以一定不變之加速度  $g$ ，沿鉛垂方向下降，已如 § 25 所述。由是可知，凡在地面上之物體，均受有沿鉛垂方向而一定不變之力之作用，是曰**重力** (gravity)。所謂物體之**重量** (weight)，即該物體所受之**重力**。故質量  $m$  克之物體所受之**重力**，或其**重量**，為

$$W = mg \text{ 達因.}$$

單位質量所受之**重力**，其數值為  $\frac{W}{m}$  即  $g$ ，稱為**重力之強度** (intensity of gravity)。

在同一地點， $g$  之值為常數，故物體之**重量**與其**質量**成正比，**質量**相等者**重量**亦相等。

**重力之強度**隨地而異，故一物體之**重量**，隨所在地而略有不同。但**重量**相等之兩物體，移在任何地區，其**重量**將仍相等，因此兩物體之**質量**相等故也。**質量**表示物質之**慣性**，固有確定不變之值。

**力之重力單位** 單位質量之物體所受之**重力**，亦可作為**力**之**量度**之標準，是為**力之重力單位** (gravitational unit of force)。

與質量  $W$  克物體所受**重力**相等之**力**，曰  $W$  **克重** (gram-weight)。有時並將此‘重’字亦略去不用，僅稱曰‘ $W$  克之**力**’。此時之‘克’，已非**質量**之單位，而為**力**之單位，須注意之。

**重力**之**強度**既隨地而異，則**力**之**重力單位**，將在各地而略有不同，此在工業上及日常生活中無妨。

又**重力單位**與**絕對單位**之關係如下：

$$1 \text{ 克重} = 980 \text{ 達因}, \text{ 或 } 1 \text{ 達因} = \frac{1}{980} \text{ 克重},$$

可見 1 達因之力甚為微小，約合 1 毫克之重量耳。

我國各地之重力加速度，於民國二十二至二十八年間，由國立北平研究院物理學研究所魯若愚張鴻吉等測定。茲錄其重要城市之值於下：

地名	經度	緯度	高度(米)	$g$ (厘米/秒 <sup>2</sup> )
南 京	118°45'	32°03'.6	270	979.442
北 平	116°23'.7	39°55'.8	46	980.122
上 海	121°25'.7	31°11'.5	7	979.426
天 津	117°12'	30°09'	9	980.094
漢 口	114°17'	30°33'	19	979.359
重 慶	105°35'	29°54'	196	979.152
廣 州	112°53'	23°06'	23	978.831
張 家 口	114°49'	40°48'	735	979.985
大 同	114°15'	40°08'	1,070	979.836
太 原	112°24'	37°47'	796	979.686
濟 南	117°00'	36°41'	20	979.858
開 封	114°21'	34°48'	60	979.661
安 慶	117°02'	30°31'	27	979.537
南 昌	115°53'	28°40'	22	979.208
杭 州	120°11'	30°14'	87	979.335
長 沙	112°59'	28°12'	41	979.163
瀋 陽	116°14'	28°02'	25	979.162
南 寧	108°03'	22°43'	65	978.764
昆 明	102°41'	25°02'	1,896	978.367

§ 29. 力學之基本單位 運動學中，僅有長度與時間；力學研究，又得二新量，即力與質量是。為便於測量計，吾人為此等新量選

定單位，且與長度及時間之單位相連繫，已如上述。

質量與力之二單位，非獨立無關者，因此二量間有一關係式為  $\vec{F} = m\vec{A}$ 。若選其一為基本單位，則其他便為導出單位。故在力學上有二種基本單位制：即長·時·質量制，與長·時·力制。第一種稱為科學度量衡制，第二種稱為工業度量衡制。

在科學度量衡制，若取厘米為長度之單位，秒為時間之單位，克為質量之單位，稱厘米·克·秒絕對單位制。力之單位乃由  $\vec{F} = m\vec{A}$  關係式推出，稱為達因，即施於質量 1 克之物體上，得加速度每秒每秒 1 厘米之力也 (§ 27)。若取米為長度之單位，秒為時間之單位，噸為質量之單位，稱米·噸·秒絕對單位制 (M. T. S. absolute system)。力之單位稱為斯戴 (sthene, 'sn')，即施於質量 1 噸之物體，得加速度每秒每秒 1 米之力也。故 1 斯戴 =  $10^5$  達因。

科學度量衡制不因地而異，此其較工業制為優之點，故為科學家所採用。

工業度量衡制以米為長度之單位，秒為時間之單位，仟克為力之單位。所謂仟克，即巴黎‘仟克原器’之重，幾等於一升水於其最大密度時，在巴黎所衡之重。質量之單位，則由下式

$$m = \frac{W}{g}$$

導出。若  $W = g = 9.81$ ，則  $m = 1$ ，質量之單位因此為 9.81 升水之質量。

C. G. S. 制在科學上採用頗早，惟其單位，厘米與克，在日常生活，實嫌過小，因而有工業制之產生。在工業發達之今日，以仟克為

力之單位，亦或尙嫌其小，故 M. T. S. 制爲合科學而切實用之度量衡制，法國於 1919 年四月二日以法律公布之。

## 習 題 六

1. 求力之因次。
2. 有 4 克及 9 克二力，其方向相交成  $30^\circ$  角，求此二力之合力。
3. 一橫繫之繩長 8 米，在其中點懸重 5 仟克之物，繩之中點，遂較其兩端降低 5 厘米，求繩之張力。
4. 設有三力，其值各爲 100, 150 及 200 克，同時作用於一靜止之物體上，物體仍舊不動。求此三力之方向間所成之角。
5. 問一磅達等於多少達因？
6. 將一力分解成二分力，使其一分力與原來之力，大小相等而成正交，求其他一分力。
7. 帆船向正東駛行，帆面與船身成  $30^\circ$  角，風自東北向西南吹來，帆面所受之風力爲 500 公斤，求使船前進之有效風力。
8. 有一物體，重 60 公斤，其速度爲每小時 4.5 公里。今欲令其在 5 秒鐘內停止，問所加之力應爲若干公斤？
9. 有二物體，其質量各爲 40 克及 200 克。今施以同大之力，歷 20 秒後，較大之體之速度爲每秒 100 厘米，問此力若干？較小之體之速度爲何？兩體在此時間內，各行多遠？
10. 上海及北平之重力加速度，各爲 979.436 及 980.122 厘米/秒<sup>2</sup>。一噸之物，在北平與上海，重量要差多少達因？
11. 施力於 100 磅之物，使其由靜止而運動，經 100 呎後其速度

達每分 1,000 呎。求此力。

12. 以 10 磅重之力作用於一物體，於 10 秒鐘內，使其移動 2,000 呎之遠，求此物體之質量。

### § 30. 牛頓之運動第三定律

凡有一作用(action)，必有一大小相等而方向相反之反作用(reaction)。

此種說法，殊欠明白，常引起初學者「作用與反作用既相等而相反，何以物體尚能運動？」之疑問。今申述如次：

有  $A, B$  兩體， $A$  體施一作用於  $B$ ，此作用可以力  $\vec{F}$  表之，則  $B$  體必同時以反作用施諸  $A$ ，此反作用可以力  $\vec{F}'$  表之， $\vec{F}$  與  $\vec{F}'$  大小相同而方向相反。是  $\vec{F}$  加於  $B$  之身上， $\vec{F}'$  加於  $A$  之身上。 $B$  受  $\vec{F}$  力而變



圖 26. 作用與反作用

動， $A$  受  $\vec{F}'$  力亦起變動。 $B$  之變動，或顯而易見， $A$  之變動，或測而難知，雖可甚相懸殊，要視  $A, B$  兩體之質量，……等情形而定，然吾人不能即認反作用  $\vec{F}'$  為不存在也。如  $A$  為地球， $B$  為蘋果，蘋果受地球之引力而下墜，地球亦同時受蘋果之引力，而不因蘋果之引力而起吾人所可感覺之絲毫運動者，則因地球與蘋果二者之質量，大小有天壤之別也。

施力者與受力者不能為同一之質點，即力不能施於其本身，故「雖有大力，不能自舉其身」。



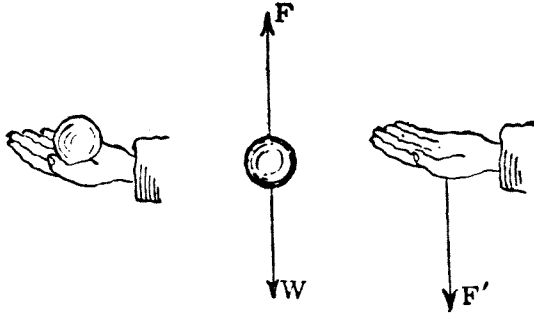


圖 27.

例。伸手空中，手掌托住質量為 100 克之物體，求手掌所受之力。

物體靜止於手掌上，其加速度為零，此時所受諸力之和必為零。物體一受向下之重力  $W$ ，二受手掌向上之托力  $F$ ，而有

$$F + W = 0,$$

即  $F = -W = -100g = -100 \times 980 = -98,000$  達因。

手掌施作用  $F'$  於物體，則物體同時施反作用於手掌，而有

$$F' = -F = 98,000 \text{ 達因},$$

即手掌所受之力也。

§ 31. 衝量 有時物體受力  $\vec{F}$  作用之時間  $\theta$  甚短，難於測量。吾人只能觀察  $\vec{F}$  力作用前與作用後物體運動所起之變化，而在  $\theta$  時間內之運動，則非吾人所能研究矣，且亦不必研究。何以言不必研究？蓋  $\theta$  時間既甚短，物體之速度為有限，則在短時間  $\theta$  內，物體之位移甚微，可略而不計；換言之，在  $\theta$  時間內，物體可視為未動。

命  $\vec{V}$  為物體受力  $\vec{F}$  作用前之速度， $\vec{V}'$  為受力  $\vec{F}$  作用後之速度，則依牛頓第二定律，有

$$\vec{F} = m \frac{\vec{V}' - \vec{V}}{\theta},$$

即

$$\vec{F}\theta = m\vec{V}' - m\vec{V}.$$

物體之質量  $m$  與其速度  $\vec{V}$  之乘積，稱為動量 (momentum)。則上式右端代表物體受  $\vec{F}$  力作用  $\theta$  時，所起之動量變化，為可測量者。 $\theta$  時間既甚短，則必  $\vec{F}$  力極大，其乘積  $\vec{F} \times \theta$  方能產生可量之效果；而  $\vec{F}$  極大之力，亦如  $\theta$  極短之時間，非吾人所易測量者。此種極大而作用時間極短之力，曰衝力 (impulsive force)；其與作用時間  $\theta$  之乘積  $F\theta$ ，曰衝量 (impulse)。故衝量等於動量之變化。

注意：凡涉及衝力之問題，其他普通之力，如重力等，在衝力作用之  $\theta$  時間內，皆可略而不計。

例。重  $\frac{1}{3}$  磅之壘球，以每秒 80 呎之速度飛來，被壘棒擊回，以每秒 130 呎之速度於相反之方向飛去。若壘球與壘棒接觸之時間為 0.01 秒，求此打擊之衝力。

取球飛去之方向為正向，則打擊前球之速度為  $v_1 = -80$ ，打擊後球之速度為  $v_2 = 130$ ，於是  $v_2 - v_1 = 210$ ，其動量之變化為  $m(v_2 - v_1) = 70$ ，即打擊之衝量。故衝力為

$$F = \frac{m(v_2 - v_1)}{\theta} = \frac{70}{0.01} = 7,000 \text{ 磅達，或 } 217 \text{ 磅重。}$$

§ 32. 動量不減定理 設有兩物體  $A$  與  $B$  互相作用。依據牛頓第三定律， $A$  施於  $B$  之作用力，必與  $B$  施於  $A$  之反作用力，相等而相反。此二力同時開始作用，亦同時停止作用，故其衝量相等而相反。因此  $A$  與  $B$  之動量變化，亦必相等而相反，即

$$m_1(\vec{V}'_1 - \vec{V}_1) = -m_2(\vec{V}'_2 - \vec{V}_2),$$

或 
$$m_1 \vec{V}_1' + m_2 \vec{V}_2' = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2.$$

上式右端表在受互相作用前兩物體之動量之和，左端表既受互相作用後兩物體之動量之和，而兩者相等。

故一羣物體，若自成一系統，不受系統外之外力作用，而僅有系統內諸物體間之互相作用時，則此羣物體之動量之和為一定不變。是為動量不減定理 (principle of conservation of momentum)。

若該系統內僅有一物體，則動量不減定理即為慣性原理。

如發砲時，純為內力作用，即炸藥爆發時所生巨量氣體之壓力，使砲彈以速度  $v_1$  前進，砲身則以速度  $v_2$  後退，即所謂反坐 (recoil) 是也。此兩速度之比，等於砲與彈兩者質量之反比。故砲彈所行甚遠，而砲身反坐甚小。又火箭 (rocket) 者，即賴箭中燃燒之氣體猛烈衝出時之反坐作用而前進者也。

## 習 題 七

1. 求衝量之因次。
2. 質量為 250 克之物體，在 10 秒鐘內受力之繼續作用，而得 8 厘米/秒之速度。求作用力之大小。
3. 質量為 5 克之物體，其速度為每秒 20 米。若在其運動之反對方面，施以 300 達因之力，則物體歷若干秒鐘而靜止？
4. 以每秒 10 厘米之速度，作勻速運動之物體，因受 4.5 達因之力作用，於 10 秒鐘後，其速度變成每秒 30 厘米。求其質量。
5. 砲內裝砲彈處和砲口間之距離為 190 厘米，砲彈由砲口射

出之出口速度爲每秒 600 米。假設火藥壓砲彈之力，由爆發以至砲彈離砲口時均爲一樣，求：

- (1) 砲彈經過砲管之時間；
- (2) 彈在管中之加速度；
- (3) 若砲彈之質量爲 2 仟克，求火藥壓砲彈之力。

6. 重 128 磅之人，立於升降機中，當機以 10 呎/秒<sup>2</sup> 之加速度上升時，問其所施於機底之力如何？若機以 10 呎/秒<sup>2</sup> 之加速度下降，則此方若何？

7. 砲重 50 噸，彈重 200 磅，以每秒 1,000 呎之速度放出，求砲之反坐速度。

8. 兩物體之質量各爲 200 克及 2,000 克，在光滑之冰面上，同以每秒 20 米之速度，在一直線上作相向之運動。(1) 求在碰撞前兩體動量之和；(2) 碰撞時，如恰能合成一體，求碰撞後之速度；(3) 求碰撞時之衝量。

9. 重 1,000 噸之隕石，以每秒 1,000 公里之速度落到地面，地球之變動如何？(地球之質量爲  $5.97 \times 10^{27}$  克。)

## 第五章 質點在重力場內之運動

在地面上，物體皆受重力之作用。重力之強度，在一區域內為常數，其方向為鉛直向下，故重力為恆力(constant force)，物體在重力場內之運動，可作為在恆力場內之運動之一例。

此種運動係平面的，即常在初速度  $\vec{v}_0$  與重力  $\vec{W}$  所成之平面內運動。

§ 33. 拋體運動 拋出之物體，或作直線運動，或作曲線運動，全視其初速度  $\vec{v}_0$  之方位而定。若初速度  $\vec{v}_0$  與重力  $\vec{W}$  平行，則為直線運動；否則，為曲線運動。

直線運動 物體  $M$  由  $M_0$  處以初速度  $\vec{v}_0$  鉛直拋出。取過  $M_0$  點之向上鉛垂線為坐標軸， $M_0$  為原點(圖 28)。

$$W = ma = -mg,$$

即  $a = -g,$

故為勻加速直線運動。 $M$  點在  $t$  時之速度及其行程，由 § 17，為：

$$v = v_0 - gt,$$

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

由此二式，消去時間  $t$ ，又得



圖 28.

$$v^2 - v_0^2 = 2gs.$$

**討論** 若  $v_0 \leq 0$ , 即物體自  $M_0$  點初向下擲, 或由靜止墮下,  $v$  常為負, 但其絕對值恆增, 即物體  $M$  由  $M_0$  向下作勻加速運動。

若  $v_0 > 0$ , 即物自  $M_0$  點向上直拋。於  $t < \frac{v_0}{g}$  時,  $v > 0$ , 即  $M$  續向上升。至  $t_1 = \frac{v_0}{g}$  時,  $v = 0$ , 在此時  $M$  達最高位置為  $M_1$ , 其高度為

$$h_1 = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

是後復由  $M_1$  自由下墮, 故當  $t < t_1$  時, 此點作勻減速運動, 由  $M_0$  以達於最高點  $M_1$ ; 繼後由  $M_1$  以勻加速運動下墮。物體下墮經過各點時之速度, 與上升時經過各該點之速度, 絕對值相等。

**曲線運動** 設軌道之平面為  $xOy$ , 此平面乃由初速度  $\vec{V}_0$  及重力

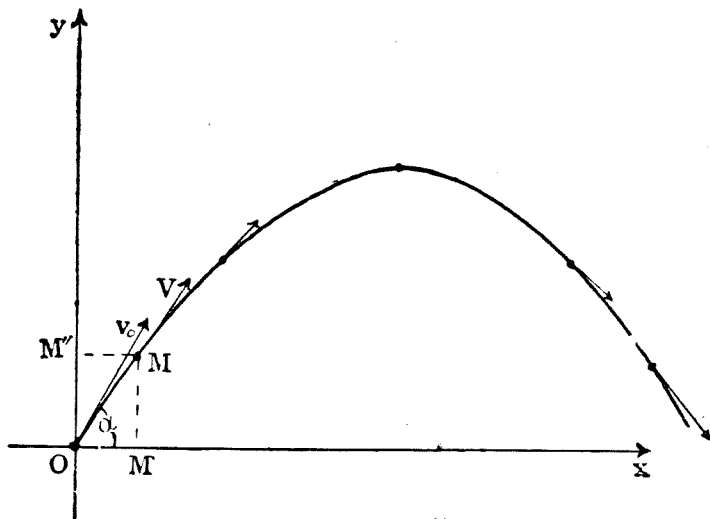


圖 29. 拋體曲線運動

$\vec{W}$  之方位所定。取  $M_0$  爲原點  $O$ ,  $Oy$  爲向上鉛直線,  $Ox$  與  $\vec{V}_0$  在  $Oy$  軸之同一邊。如是初速度向量  $\vec{V}_0$  與  $Ox$  軸所成  $\alpha$  角, 在  $-\frac{\pi}{2}$  及  $+\frac{\pi}{2}$  之間, 而初速度之分量, 在水平方向爲  $v_0 \cos \alpha$ , 在鉛直方向爲  $v_0 \sin \alpha$  (圖 29)。

$M$  點在平面上之運動, 可以其在  $Ox$ ,  $Oy$  軸上之射影  $M'$  及  $M''$  之運動定之。

$M$  在  $Ox$  上之射影  $M'$  之加速度爲零, 其運動爲勻速, 而此勻速度爲  $v_0 \cos \alpha$ 。因此  $M'$  之運動方程式爲

$$x = v_0 t \cos \alpha.$$

$M$  在  $Oy$  上之射影  $M''$ , 以初速度  $v_0 \sin \alpha$  從  $O$  拋起, 且受重力作用而有  $-g$  之加速度, 其在  $Oy$  軸上之運動方程式爲

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

於是  $M$  點在  $xOy$  平面上之運動方程式爲:

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha, \\ y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

欲求  $M$  點之軌道, 只須於此二式中消去  $t$ , 即得

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

是爲拋物線之方程式。故  $M$  點之軌道爲拋物線, 其軸乃鉛直的, 如圖 30。

若論  $M$  點之速度  $\vec{V}$ , 則以其在  $Ox$  及  $Oy$  軸上之分速度爲

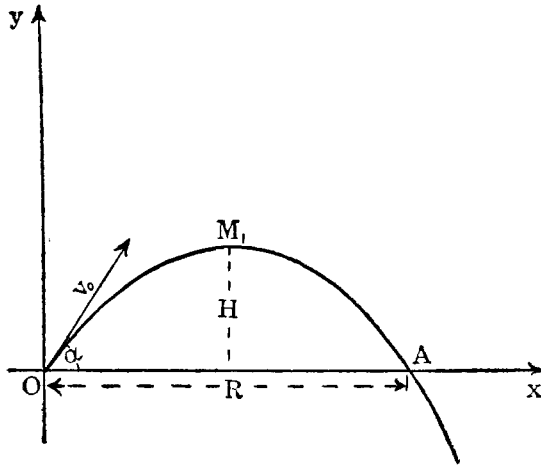


圖 30. 拋體軌道

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha, \\ v_y = v_0 \sin \alpha - gt, \end{cases}$$

而得

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 - 2v_0gt \sin \alpha + g^2t^2,$$

即

$$v^2 = v_0^2 - 2gy.$$

現依初速度  $\vec{V}_0$  之各種情形，而討論  $M$  點之運動：

若  $\alpha < 0$ ，即物體初向下拋，所作之拋物線弧將不含其頂點。

若  $\alpha = 0$ ，即物體平拋，其初位置  $O$  即為拋物線軌道之頂點。

若  $\alpha > 0$ ，即物體初向上拋，至  $t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$  時，達最高點  $M_1$ ，而

後下降，又復達到過  $O$  點之水平面上  $A$  點。 $A$  稱為着地點，所需之時間為



$$T = 2t_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

着地點  $A$  與拋出點  $O$  之距離

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g},$$

稱爲射程 (range). 拋物線頂點  $M_1$  之高度

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g},$$

稱爲射高.

若拋體之初速度  $\vec{V}_0$  之大小  $v_0$  爲一定, 則取射角  $\alpha = 45^\circ$  時, 可得最長之射程爲  $v_0^2/g$ , 至欲得最大之射高, 應取射角  $\alpha = 90^\circ$ , 即向上直射也. 最大之射高爲  $v_0^2/2g$ .

**空氣阻力之影響** 以上所述, 係假設拋體在真空裏. 若在空氣中, 則拋體受有空氣之阻力. 拋體之速度愈大者, 所遇空氣之阻力亦愈大, 故空氣之阻力爲拋體之速度  $v$  之增加的函數. 空氣之阻力, 隨拋體之速度而逐漸增加, 到達某一時間, 將等於拋體之重量. 從此時起, 拋體在空中所受之總力爲零, 勻速下降, 此勻速度爲拋體在空氣中之極限速度.

拋體在空氣中之軌道, 不復爲一拋物線, 而係具一鉛直的幾近線 (asymptote) 之曲線, 如圖 31 所示. 其所能達之射高及射程, 均較上面計算得者爲小.

飛行家用降落傘由高空跳下, 於着地前, 早成爲勻速運動. 傘面愈大, 此極限之勻速度愈小.

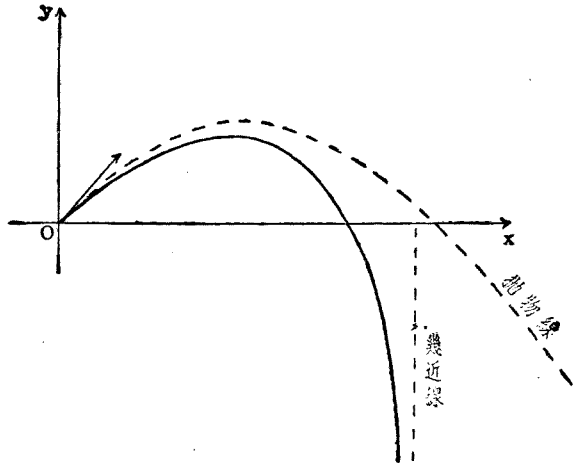


圖 31. 空氣中之拋體軌道

## 習題八

1. 自塔頂落下之球,4秒鐘後着地.求塔之高及球着地時之速度.
2. 有球重 50 克,用力 40 仟克,以 0.01 秒之時間,垂直向上拋出.問經幾秒後,始落回原處,及其落回原處時之速度?
3. 一玩技者將三球以一手輪流向上拋射,恆有二球在空中,一球留手內.若每球上升之高皆達 122.5 厘米,求各球留於手內之時間.
4. 有砲一尊,位於高 60 米之山上,砲身與水平線成  $45^\circ$  角.發砲時,砲彈離砲口之速度為每秒 800 米.不計空氣阻力,求砲彈落到地面之處及其速度.

5. 一飛機距地面 3,500 米,其速度為每小時 350 千米,正對某陣地水平飛行。設欲炸毀該陣地,問飛機應飛至何處,將炸彈擲下,方能中的?

§ 34. 在光滑斜面上之下滑 物體  $M$  在光滑之斜面上,其初速度係沿斜面之坡線或為零,則  $M$  將沿斜面之坡線而滑動。

物體在斜面上受二力之作用,即其重量  $W$  與斜面施於物體之力  $P'$  (圖 32)。

因斜面為光滑的,不給物體運動以任何摩擦阻力,則其所施於物

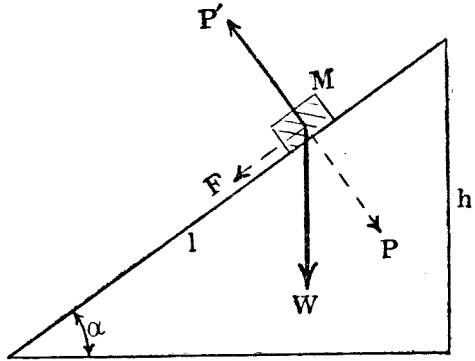


圖 32. 光滑斜面上之滑動

體之力  $P'$ ,必與物體之運動方向成正交,即與斜面正交。因物體不離開斜面,即在與斜面正交方向上之加速度為零,則在此方向上諸力之分力和必為 0,即

$$P' + P = P' + mg \cos \alpha = 0,$$

故

$$P' = -P = -mg \cos \alpha.$$

$P$  為物體對於斜面之壓力,  $P'$  為斜面對於物體之反作用,相等而相反。

物體沿斜面之運動,係由於分力  $F$  之作用,有

$$F = ma = mg \sin \alpha,$$

得 
$$a = g \sin \alpha \left[ \sin \alpha = \frac{h}{l} \right]$$

爲一常數，故作勻加速運動。其加速度  $a$  常較自由墮體之加速度爲小 (§ 24)。斜度愈小， $a$  亦愈小。

物體在斜面上由靜止下滑  $l$  長時之速度  $v$ ，爲 (§ 17)

$$v^2 = 2al = 2gl \sin \alpha = 2gh,$$

適與自由物體鉛直下墮  $h$  高後之速度相等，而與斜度  $\alpha$  無關。

故物體沿任何斜度之光滑斜面或光滑曲線(曲線可視爲由無數斜度不同之短斜面組合而成)下落，所得之速度，與自由墮體下落等高者相同。如圖 33，物體自  $A$  沿曲線至  $B$ ，或沿斜面至  $C$ ，或自由下

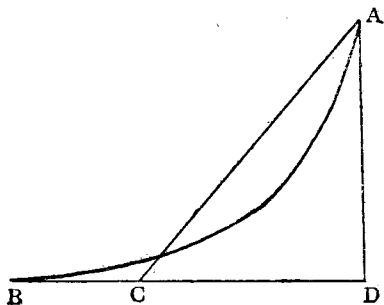


圖 33.

墮至  $D$ ，所得之速度皆相同，而下降所需之時間則各異。

§ 35. 阿特武德機 此爲一細繩跨過光滑固定滑車，而於繩之兩端，懸重體  $W_1$  及  $W_2$  者，吾人已於 § 24 言及之。設  $W_1 > W_2$  (圖

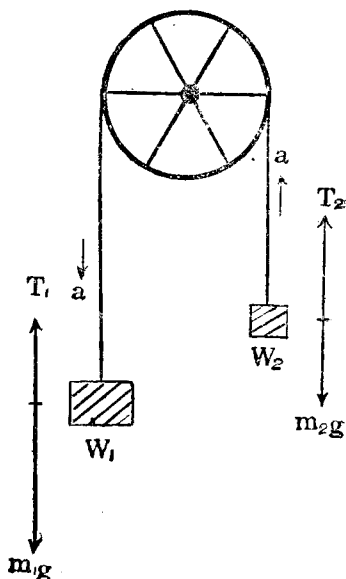


圖 34

34), 則  $W_1$  下降, 而  $W_2$  上升, 試求其運動。

爲簡單計, 假設繩與滑車之質量, 可略而不計。

若將二重體及細繩作爲一系統, 則此系統之總質量爲  $m_1 + m_2$ , 而該系統所受之力之總和爲  $W_1 - W_2$ , 故其下降之加速度爲:

$$a = \frac{W_1 - W_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g.$$

更佳之解法, 乃將  $W_1, W_2$  隔離, 使各自成一系統。加於重體  $W_1$  之力有二: 一爲其重量  $W_1$  向下, 一爲繩之張力  $T_1$  向上, 此二力之合力爲  $W_1 - T_1$ 。命  $W_1$  向下之加速度爲  $a_1$ 。依照牛頓第二定律, 有

$$W_1 - T_1 = m_1 a_1.$$

加於重體  $W_2$  之力亦有二, 即  $W_2$  與  $T_2$  是也。惟  $W_2$  既上升, 故  $T_2$  必大於  $W_2$ , 而有

$$T_2 - W_2 = m_2 a_2,$$

$a_2$  爲重體  $W_2$  上升之加速度。

但細繩常被拉直, 且固定滑車爲光滑的, 則繩兩端之張力  $T_1$  及  $T_2$  相等, 即

$$T_1 = T_2,$$

可同以  $T$  表之。又繩爲不可伸長者, 則有

$$a_1 = a_2,$$

可同以  $a$  表之。

自此四方程式, 求得

$$a = \frac{W_1 - W_2}{m_1 + m_2} = \frac{1 - m_2/m_1}{1 + m_2/m_1} g,$$

及

$$T = \frac{2m_2}{1 + m_2/m_1} g.$$

$a$  爲常數，故爲勻加速運動。若  $m_2/m_1$  愈近於 1，則  $a$  愈小；若  $m_2/m_1$  愈小，則  $a$  愈近於  $g$  (§ 24)。

§ 36. 摩擦 重物在水平面上，用力方能推動(圖 35 甲)；在傾斜不大之坡上，亦能靜止(圖 35 乙)。凡此皆表示重體與他物體之面

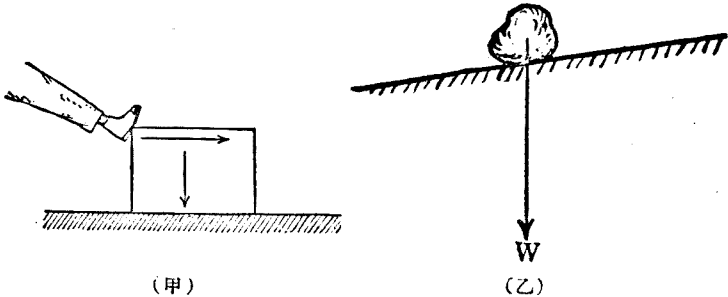


圖 35.

相接觸時，重力之外，尙有其他之力，以阻礙其運動。若以顯微鏡細觀此等接觸面，將現凹凸不平之處，深淺疏密，各有不同，以致兩體間之作用及反作用，不復與其接觸面正交，而成所謂摩擦 (friction) 現象。

**靜摩擦定律** 重物置於平面上，將平面逐漸豎起，至與水平線成某一斜度  $\phi$  角時，重物方開始向下滑動(圖 36 甲)。

當斜度  $\alpha < \phi$  時，重物  $M$  始終處於平衡狀態中。互相平衡之力，爲物體之重量  $\vec{W}$ ，與斜面對於物體之反作用  $\vec{R}$ 。 $\vec{R}$  可分解爲沿斜面向上之力  $\vec{F}$  與正交於斜面之力  $\vec{P}$ ；同樣， $\vec{W}$  亦可分解爲  $\vec{F}$  及  $\vec{P}$  二分力(圖 36 乙)，而有

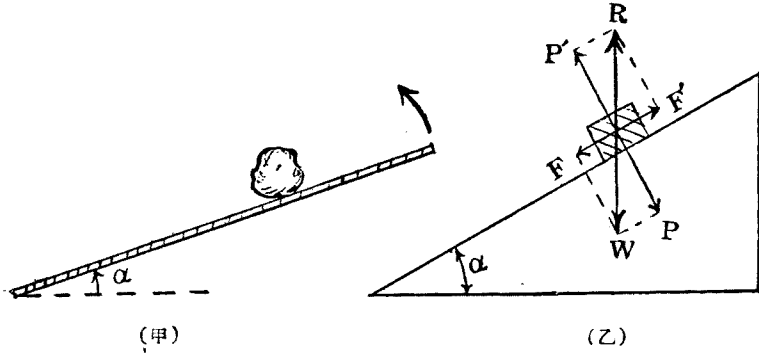


圖 36.

$$\vec{P} = -\vec{P}' \quad \text{及} \quad \vec{F} = -\vec{F}'.$$

$\vec{P}$  與  $\vec{P}'$  相等而相反，此重物之所以不離開斜面也。 $\vec{F}$  將使物體沿斜面下滑，而  $\vec{F}'$  反對之，此所以當  $\alpha < \phi$  時，因二者恆相等，而適相抵消也。常有

$$\frac{F'}{P'} = \frac{F}{P} = \tan \alpha.$$

$\vec{F}'$  稱為摩擦 force (frictional force).

當  $\alpha = \phi$  時，則物體失去平衡開始下滑，即表示

$$\vec{F} > -\vec{F}';$$

但吾人仍有

$$\vec{P} = -\vec{P}',$$

$$\frac{\vec{F}}{\vec{P}} = \tan \phi.$$

由是可知摩擦力  $\vec{F}'$  之值，有一不可超越之限，為

$$P' \tan \phi.$$

$\alpha$  角之極限值  $\phi$ ，稱為摩擦角或休止角 (limiting angle of repose)；其正切  $\mu = \tan \phi$ ，稱為摩擦係數 (coefficient of friction)。

由實驗知  $\phi$  角與重體和斜面接觸處之面積的大小無關，只與二接觸面之物質及其性質有關。如斜面愈平滑， $\phi$  角愈小。又若斜面為金屬所製，擦油其上，使之光滑，則  $\phi$  可減小。

若斜面為完全光滑， $\phi$  角幾近於零，摩擦力可以略而不計，則反作用  $\vec{R}$  將與斜面正交。此種斜面，稱為完全滑面 (perfectly smooth surface)。反之，如  $\phi$  近於  $90^\circ$ ，則  $\mu$  幾等於無窮大，此種接觸面稱為完全粗面 (perfectly rough surface)。在完全粗面上之物體，施以任何大力，亦不能滑動 (slide)，只可發生滾動 (roll)。以上兩種乃為理想之接觸面，實際上所經驗者，均在此二種之間，既非完全滑面，亦非完全粗面。

例如木塊  $W$ ，重 2 公斤，置於水平之桌面上 (圖 37)。沿桌面拉之，當彈簧秤表示 0.7 公斤之力時，木塊開始滑動。則木塊在桌面上之摩擦係數為  $\frac{0.7}{2} = 0.35$ 。

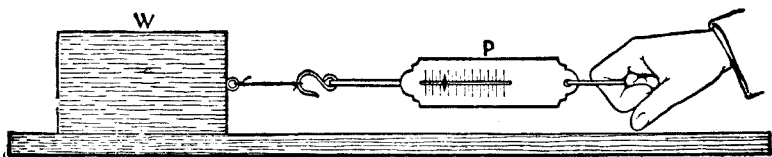


圖 37.

茲將數種物體之摩擦係數，表列於下：



表 2. 摩擦係數

	$\mu$
木 與 木 (乾 的)	0.25 至 0.5
木 與 木 (潤 的)	0.05 至 0.2
皮 與 木	0.3 至 0.4
木 與 金 屬	0.3 至 0.6
金 屬 與 金 屬 (乾 的)	0.15 至 0.2
金 屬 與 金 屬 (溼 的)	0.3
皮 與 金 屬 (乾 的)	0.56
皮 與 金 屬 (上 油 的)	0.15
鐵 與 石	0.3 至 0.7
光 滑 平 面 (最 佳 結 果)	0.03 至 0.036

**動摩擦定律** 物體  $M$  棲止於另一物體上時,所受之摩擦力  $\vec{F}$  常小於  $\mu \vec{P}'$ , 既如上述; 但當  $M$  一經滑動之後, 情形又復如何? 依據實驗得動摩擦定律如下:

1. 分力  $\vec{F}$  與物體  $M$  之速度向量, 在同一直線上, 而方向相反;
2.  $F$  之數值常等於  $\mu \cdot P'$ .

分力  $\vec{P}'$  每隨物體之位置而變, 故  $\vec{F}$  之值亦因之而變, 但  $F/P'$  之比, 常等於摩擦係數  $\mu$ .

§ 37. 在粗糙斜面上之  
下滑 吾人繼續 § 34 討論物體在斜面上之滑動, 並假設其摩擦係數為  $\mu$ .

物體  $M$  沿粗糙斜面之坡線滑移, 除重量之分力  $\vec{F}$  外, 尚有摩擦力  $\vec{F}'$  (圖 38), 此兩

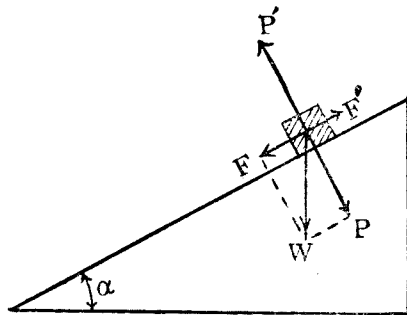


圖 38.

力之合力爲

$$\begin{aligned} F - F' &= mg \sin \alpha - \mu P' = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha \\ &= mg (\sin \alpha - \tan \phi \cos \alpha) = mg \frac{\sin(\alpha - \phi)}{\cos \phi}, \end{aligned}$$

故其加速度爲

$$a = g \frac{\sin(\alpha - \phi)}{\cos \phi}.$$

此時  $\vec{P}'$  與  $\vec{F}'$  之合力  $\vec{R}$ ，即斜面對於  $M$  體之反作用，其值爲

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{P'^2 + F'^2} = P' \sqrt{1 + \mu^2} = P' \sec \phi = P \sec \phi \\ &= W \frac{\cos \alpha}{\cos \phi}, \end{aligned}$$

非等於物體之重量  $W$ ，此屬當然者，因物體非在平衡靜止中也。

至物體  $M$  沿斜面之運動，當依其初速度之情形及斜面之斜度角  $\alpha$  之大小而定。

第一情形——初速度爲零。若  $\alpha \leq \phi$ ，物體始終不動（即圖36甲所示情形）。

若  $\alpha > \phi$ ，則物體將以上得之加速度  $a$  勻加速下滑。但可注意其速度，與自由墮下等高者（§34）不同，以其有摩擦力故也。

第二情形——初速度向下。物體  $M$  初向下滑。由

$$F - F' = mg \frac{\sin(\alpha - \phi)}{\cos \phi}$$

可知：

若  $\alpha < \phi$ ，則  $F < F'$ ，物體所受之合力向上，其加速度  $\frac{g \sin(\alpha - \phi)}{\cos \phi}$

爲負，物體以勻減速運動下滑，至  $t_1$  時速度爲零，從此後物體平衡捷

止。命  $v_0$  爲初速度，得

$$t_1 = \frac{v_0 \cos \phi}{g \sin(\phi - \alpha)}$$

若  $\alpha > \phi$ ，則  $F > F'$ ，物體以勻加速度  $a$  無限下滑。

若  $\alpha = \phi$ ，則  $F = F'$ ， $a = 0$ ，物體以勻速下滑。

第三情形——初速度向上。物體  $M$  初向上動。因  $\vec{F}'$  常與速度之方向相反，故此時與  $\vec{F}$  同爲向下（圖 39），有

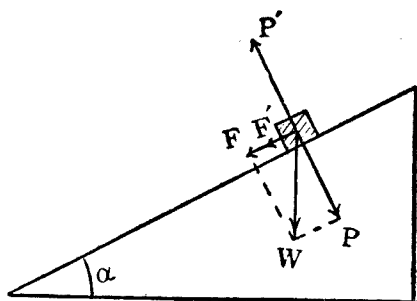


圖 39.

$$F + F' = mg \frac{\sin(\alpha + \phi)}{\cos \phi}$$

故物體以勻減速度

$$a' = g \frac{\sin(\alpha + \phi)}{\cos \phi}$$

向上滑動，至

$$t_1 = \frac{v_0 \cos \phi}{g \sin(\alpha + \phi)}$$

時，其速度爲零，復得第一情形。若  $\alpha \leq \phi$ ，物體此後棲止不動；若  $\alpha > \phi$ ，物體從此後改以加速度  $a = g \frac{\sin(\alpha - \phi)}{\cos \phi}$  勻加速而下滑。

## 習 題 九

1. 立在磅秤上之人，忽然蹲下，問秤所指示之重量應作何變

更。當其忽然站起時，其所生之影響又若何？

2. 一物體以每秒 2,000 厘米之速度，自地面與水平成  $30^\circ$  角，向上斜拋，問達最高點之時間及高度為若干？重復落至地面之時間及距離若干？

3. 一槍彈之出口速度為每秒 60 米，以  $40^\circ$  之仰角射出，得水平射程為 320 米。求因空氣阻力而減少之射程。

4. 以繩跨過固定滑車舉重，所用之繩，其張力若達 200 磅，即將斷裂。今舉 180 磅之重物，而繩忽斷，求繩斷時重物之加速度。

5. 阿特武德機之二重體，一為 50 克，一為 100 克。求其加速度及繩之張力。

6. 有一重物  $W_1 = 100$  克，置於一斜度為  $45^\circ$  之粗糙斜面上，與  $W_1$  連接之繩跨過固定滑車，而於其他端，懸一重物  $W_2 = 20$  克。 $W_1$  與斜面之摩擦係數為 0.3。若  $W_2$  以每秒 500 厘米之初速度下降，求其 3 秒鐘後之位置。

7. 有高射砲，其砲彈之出口速度為每秒 1,200 米。有敵機水平相向而來，知其速度為每小時 360 公里，離地面 2 公里。當敵機之仰角為  $30^\circ$  時，高射砲開砲射擊，問應取何射角？若敵機此時係水平退去，則應取何射角？

8. 雨滴之質量為 0.1 克，因空氣之阻力，落地前已成勻速運動，其勻速度為每秒 500 厘米。假設空氣之阻力，與雨滴速度之平方成正比，求雨滴速度為每秒 400 厘米時之加速度。

9. 一鳥翱翔空中，其質量為 2 仟克，在某瞬間離地面 19.6 米，方以每秒 5 米之速度水平向前進，忽為一 30 克之槍彈所擊中。此時

彈之速度爲每秒 300 米，亦沿水平向射來，且與鳥之前進同向。彈在鳥之腹中，卽不射出。問該鳥經若干時間而落地，又着地之點與被擊之點二者間之水平距離爲若干？

10. 一列車自山坡上滑下，其初速度爲零，歷一公里而至山腳，其後卽在平地上順勢繼續前進。設山坡之傾度爲 1 : 100，車輪與鐵軌間之摩擦係數爲 0.01，問車在平地上，可前進若干距離，方始停止？又何時之速度爲最大，其值爲何？

11. 兩物體  $M_1$  與  $M_2$ ，其質量爲 80 克及 100 克，各止於一光滑之斜面上，斜面之斜度各爲  $30^\circ$  及  $60^\circ$ 。兩斜面之交線爲一水平線，在此交線上置一滑車，一繩跨過此滑車而將  $M_1$  與  $M_2$  相連接。求  $M_1$  與  $M_2$  之加速度及繩之張力。由靜止開始運動後第二秒鐘之末，繩忽燒斷，問  $M_1$  升至何處方再下滑？

12. 跨過固定滑車之繩之兩端，各懸重物  $W_1$  及一滑車；於此第二滑車之上再跨一繩，兩端各懸重物  $W_2$  及  $W_3$ 。設  $W_1, W_2, W_3$  之重各爲 200, 100 及 50 克，求此三重物之加速度。

## 第六章 功與能

§ 38. 功 耕田織布，都稱做工，但負重而立，終日不動，勞則勞矣，決無人願予以任何報酬，因其無益，直帶枷之囚犯耳。故物理學上之所謂工作或功(work)，一須用力，二須受力之物體移位。背磚上樓，背 40 磚上樓一層，與背 20 磚上樓二層，可視為工作相等，是工作與所施之力及物體受力所起之位移，各成正比。

倘位移與力在同一直線上(圖 40)，即可以其乘積，為工作或功之量度。

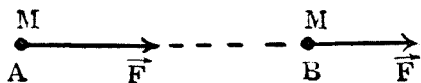


圖 40.

若位移不在力之作用線上，如馬拉車，車沿路面前進，而馬所施之拉力，近於轅之方向，與路面成斜交(圖 41)。此交角愈大，馬愈費力；若成  $90^\circ$ ，車不前進矣。故馬

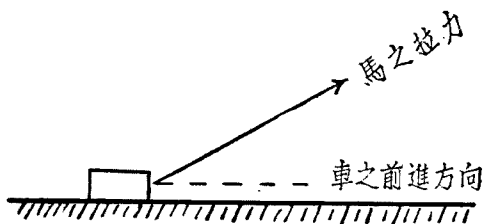


圖 41.

之拉力，其做工之有效部分，僅為其在車前進之方向上之正射影。

明乎此，吾人可下功之定義如次：

設有力  $\vec{F}$ ，作用於一物體上，當物體由  $M$  移至  $M'$  時，此力對於

物體所作之功爲

$$W = F \cdot MM' \cdot \cos \theta,$$

$\theta$  表力  $\vec{F}$  與位移  $\overrightarrow{MM'}$  兩向量間所成之角(圖 42).

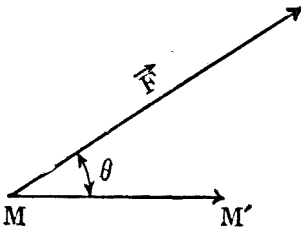


圖 42. 功之定義

$F \cos \theta$  爲力在  $MM'$  上之正射影, 故功可視爲位移與力在位移上之正射影之乘積. 又  $MM' \cos \theta$  爲位移在力之作用線上之正射影, 故功亦可視爲力與位移在力之作用線上之正射影之乘積.

當  $\theta$  爲銳角時, 力幫助物體之運動, 功爲正量, 則謂之爲力對於物體所作之功 (work done by a force upon a body). 若  $\theta$  爲鈍角, 力阻礙物體之運動, 功爲負量, 卽力對於物體所作之功爲負, 此時可謂之爲物體反抗力之作用所作之功 (work done against a force by a body). 故力所作之負功, 與物體反抗力之作用所作之正功相同. 又物體反抗力之作用所作之負功, 與力對於物體所作之正功相同. 總之, 功有正負大小之分, 在空間無方向可言, 故爲純量, 可用代數法則處理之.

一般而論, 物體受力作用, 自  $M$  至  $M'$  所經軌道爲曲線  $(C)$ , 在軌道上各點如  $M$ ,

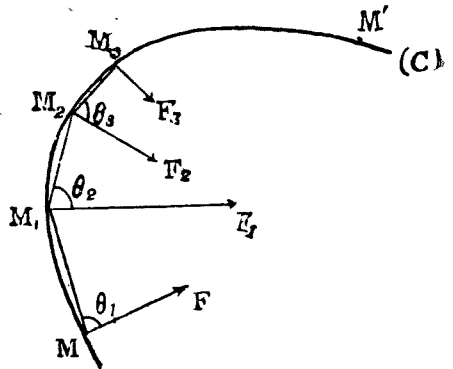


圖 43.

$M_1, M_2, M_3$  等, 力又隨地而變, 爲  $\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  等(圖 43), 則力沿軌道( $C$ ), 自  $M$  至  $M'$ , 對於物體所作之功, 依定義, 爲

$$\begin{aligned} W &= F \cdot MM_1 \cdot \cos \theta_1 + F_1 \cdot M_1M_2 \cdot \cos \theta_2 \\ &\quad + F_2 \cdot M_2M_3 \cdot \cos \theta_3 \\ &\quad + \dots\dots \\ &= \Sigma F \cdot MM_1 \cdot \cos \theta_1. \end{aligned}$$

§ 39. 重力所作之功 地面上一區域內, 重力之強度爲常數,

其方向爲鉛垂向下。物體在重力場內, 自  $M$  至  $M'$  沿軌道( $C$ ), 重力所作之功(圖 44)爲

$$\begin{aligned} W &= \Sigma F \cdot MM_1 \cdot \cos \theta_1 \\ &= mg \Sigma MM_1 \cos \theta_1 \\ &= mg(h - h'). \end{aligned}$$

與所經之軌道無關, 其值僅繫於初終之位置, 即  $M$  與  $M'$  之高度  $h$  與  $h'$  也。

§ 40. 物體反抗摩擦力所作之功 依據 § 38 功之定義, 在平地運貨, 重力常在鉛

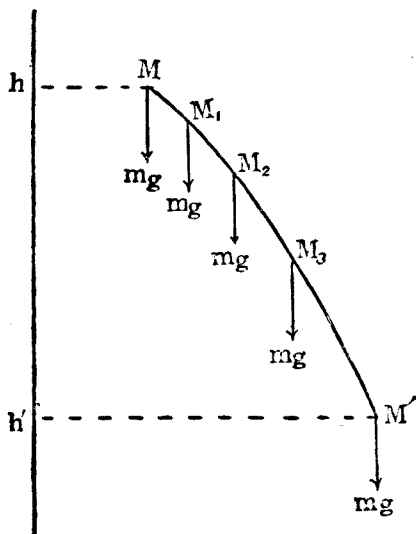


圖 44. 重力之功

垂方向, 與貨物運行之方向正交, 將無工作可言。

若地面爲完全滑面, 此說甚是。貨物一經推動, 即將由其慣性, 前進不已。但實際馬車在馬路上, 與火車在鐵軌上行走, 車輪與路面及鐵軌間, 均有摩擦力。不但須用力勝過此摩擦力, 貨物始能推動,



且須刻刻用此力，無時或停，貨物方能以勻速前進，否則，摩擦力即將使車停止下來。故運貨所需之功，即為反抗摩擦力所作之功。火車在鐵軌上之摩擦係數約為 0.005，\* 載重千噸之列車，須用力 5 噸以拉之，車行 1 公里之功，將為 5 噸—公里，乃火車頭蒸汽機所作也。

§ 41. 功之單位 功為由力與長度導出之量。力之單位及長之單位既定，則功之單位隨之而生。

在 C.G.S. 制中，以 1 達因之力，作用於物體，使其在力之作用線上，進行 1 厘米之路程時之功，曰 1 爾格(erg)。此單位甚小。在實用上，取爾格之一千萬倍( $10^7$ )為功之單位，是曰焦耳(joule)。

在工業度量衡制，力之單位為仟克，長之單位為米，功之單位即此二單位連結而名之，曰仟克米(kilogram-meter)。

同理，在英制中，功之單位為呎磅(foot-pound)。

§ 42. 功率 有力就能做工。苟不限定時間，每個人可與火車頭做同樣多之功，譬如 1,000,000 仟克米，不過火車頭做之，只要一秒鐘，人需數天而已。所以表示機器之做工本領，莫善於在單位時間內所作之功，稱為功率(power)，以  $P$  表之，即

$$P = \frac{W}{t}.$$

在 C.G.S. 制中，功率之單位，小得可笑，只可用來表示螞蟻之工作本領。故在實用上，以每秒作一焦耳之功為功之單位，曰瓦特(watt)。其千倍曰仟瓦特(kilowatt)。

---

\* 此為滾動摩擦係數，較之 § 36 所述滑動摩擦係數，要小得多，後當論及。

功率之單位，除瓦特及仟瓦特而外，尚有一種，曰馬力\* (horse-power)，亦甚常用，為每秒能作 550 呎磅之功率。其與瓦特之關係為

$$1 \text{ 馬力} = 746 \text{ 瓦特}.$$

在工業上，有以瓦特時 (watt-hour) 及仟瓦特時 (kilowatt-hour) 為功之單位，雖在某些範圍內，頗為通用，亦覺方便，總有先後倒置之嫌。

茲將幾種機器功率之數值等級列後：

人	0.01 馬力
馬	1 馬力
火車頭	1,500 馬力
電燈廠發電機	5,000 馬力
郵船蒸汽機	100,000 馬力

由上表觀之，倘令我四萬萬五千萬全體同胞徒手工作，將僅等於數十隻之郵船耳，可不速謀工業化乎？

§ 43. 能——功能定理 當重體下落，由高為  $h$  之  $M$  點至高為  $h'$  之  $M'$  點時，重力對此物體所作之功 (§ 39) 為

$$W = mg(h - h').$$

重力對此物體，做了工作，此物體接受之，有何用處與變化？稍加思考，當憶物體在  $M$  時速度為  $v$ ，到  $M'$  時變成  $v'$ ，而且二速度之間，有如下之關係 (§ 33)：

$$v'^2 - v^2 = 2g(h - h').$$

由此二式，即得

---

\* horse-power 為功率之單位，非力；譯作馬力，殊屬欠當，但已甚通用。

$$W = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2.$$

是功  $W$  代表  $\frac{1}{2}mv^2$  之一量，在物體從  $M$  到  $M'$  時之增加；稱  $\frac{1}{2}mv^2$  之一量，為物體之動能 (kinetic energy)。則  $\frac{1}{2}mv^2$  為物體在  $M$  時之動能， $\frac{1}{2}mv'^2$  為物體在  $M'$  時之動能。故重力所作之功，即使物體增加其動能。是為功能定理。

動能  $\frac{1}{2}mv^2$ ，內含速度之平方，由動而來，斯誠然矣。但何以稱做能？所能何事？

能做工。如物體從高  $h$  靜止下落，其動能為  $\frac{1}{2}mv^2 (= mgh)$ 。碰到人，或須打破頭；碰到地，若為彈性體，則反躍仍可升高  $h$ 。當其升高  $h$  也，物體反抗重力而作功，苟非以其蘊蓄有動能  $\frac{1}{2}mv^2$  之故，決不能自動上升，將賴吾人為之提攜。

又從上述功之二式，有

$$W = mg(h - h') = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2,$$

可書成

$$\frac{1}{2}mv'^2 + mgh' = \frac{1}{2}mv^2 + mgh.$$

則當物體自  $M$  運動至  $M'$  時， $h$  變為  $h'$ ， $v$  變為  $v'$ ，但亦有其不變者在，即

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

之一量是也。 $E$  稱為物體之總能或簡稱能 (energy)。

在  $M$  點，在  $M'$  點，以及在軌道上之任何一點， $E$  之值均相同，而為恆定，是為能之不滅原理 (principle of conservation of energy)

能  $E$  之一部為動能  $\frac{1}{2}mv^2$ ，其他一部  $mgh$  稱為位能 (potential energy)，以其僅與物體所在之位置有關也。

物體在運動中，其能既為常量，則位能減，動能增；動能減，位能增，增減之量，且必相等 (圖 45)。

能之大小，即以其可作之功測之，故能之單位，完全與功之單位相同。

上述之功能定理與能之不滅原理，雖在重力場內求得，即在任何力場之下，無摩擦阻力作用時，

亦常真確。推而可適用於其他物理範圍，如熱學，電磁學等，故為物理學上之基本定律。

一切之機械，必須由外界供給相當之能，始克作功。能之供給，一旦斷絕，機械即停止運轉。古人欲造一器，不必供給以能，亦可自

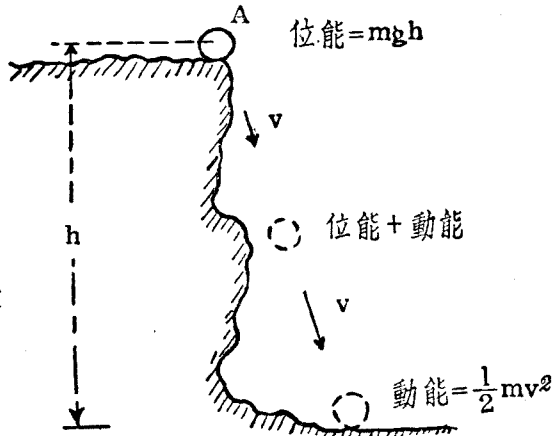


圖 45.

轉不息，繼續做功，如是之運動，曰永久運動。由能之不滅原理，可知其為妄想，事實上絕不可能。

## 習 題 十

1. 求功，動能及位能之因次。

2. 問 1 呎磅等於多少焦耳？1 焦耳等於多少千克米？1 仟瓦時等於多少焦耳？

3. 高 10 米之瀑布，每秒鐘流下之水量，為 14,000 升。用此瀑布可以轉動若干匹馬力之機械？

4. 重 100 磅之砲彈，以每秒 2,000 呎之速度射出，求其動能。又如砲身重 20 噸，求其反坐之動能。

5. 質量 20 克之彈丸，以每秒 80 米之速度中的，穿入的內有 5 厘米之深，求的之平均阻力。

6. 一鎗彈之質量為 30 克，以每秒 200 米之速度，射過木板，板之厚為 1 厘米，其離板而出之速度為每秒 150 米。求木板中之平均阻力，及彈留板中之時間。此後該鎗彈，若復射入同質之木塊中，則能深入若干厘米？

7. 以卵擊石，喻其必碎也；但卵若落於棉絮之中，則可不碎，試言其何以碎，何以不碎之故？

§44. 功能定理之應用 功能定理乃由力學之基本定律——牛頓第二定律——推演而得；有時直接用來研究物體之運動，甚為便利。應用功能定理，須先計功。

功之計算，有下列三種不同之情形：

1. 力與動點之位置及速度有關時(如物體在空中運動,而不能忽略空氣阻力),功之計算,須先知軌道與速度.換言之,即須全知物體之運動情狀,方能計功.在此情形下,功能定理自無助於吾人之探討.

2. 力只與動點之位置有關時(如下節重點在光滑鉛直圓周上之運動),則在力場內,功之計算僅須先知軌道即可.故已知軌道時,即可應用功能定理,以求動點在軌道上各點之速度,而定其運動.

3. 若功之計算,只與動點之初位置及終位置有關,而無關於其所經之軌道時(如 § 33 拋體運動),則應用功能定理,即可求得動點在各位置之速度,而研究其運動 (§ 43).

§ 45. 重點在光滑鉛直圓周上之運動——擺 有一質點  $M$ , 在鉛直面內之光滑圓周上運動,可設想其為圓管內之一小球,或套於圓周上之一小環,亦可設想  $M$  點繫於線(長  $l$ )之一端,而他端則固定於  $O$  點.如最後之裝置者,稱為單擺(simple pendulum).

當  $M$  點在其初位置  $M_0$  時,以在鉛直圓周之切線方向之初速度  $v_0$  拋起(圖 46).在此情形下,  $M$  受有二力:一為重力  $mg$ , 垂直向下;一為線之反作用力  $N$ , 其方向為  $MO$ .

以  $O$  為原點,取  $Oy$  軸垂直向上.一因軌道已知,再因無摩擦阻力,反作用力與圓周正交而不作功,故功能定理,足為研究此運動之助.依據功能定理所得之關係,與在重力場內,一自由物體之情形完全相同,即

$$v^2 - v_0^2 = 2g(y_0 - y),$$

或

$$v^2 = -2g(y - c),$$

式內之

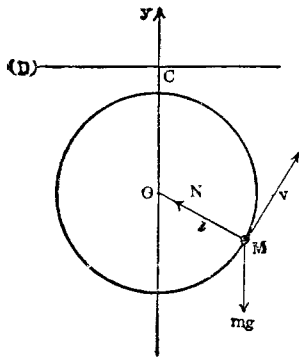
$$c = \frac{v_0^2}{2g} + y_0,$$

爲運動初情形(即初位置與初速度)所定。

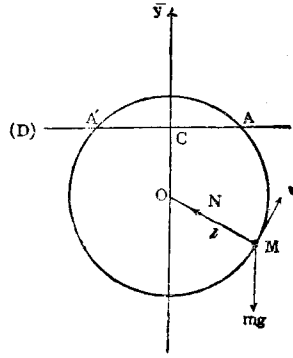
作一水平直線(D),其高爲 $c$ 。視(D)與圓周相割與否,而可分爲下列之兩情形:

第一情形(圖 46 甲) (D)不與圓周相割,即 $c > l$ ,或

$$\frac{v_0^2}{2g} + y_0 > l \quad \text{或} \quad v_0^2 > 2g(l - y_0).$$



(甲)



(乙)

圖 46.

在此情形,  $M$  之速度  $v$  永不爲零,其絕對值由極小  $\sqrt{2g(c-l)}$  變至極大  $\sqrt{2g(c+l)}$ ,動點常循圓周之一方向而轉動,爲旋轉(revolution)運動。其速度與自由墮體從水平面(D)靜止下落者相同。

第二情形(圖 46 乙) (D)與圓周相割於  $A$  及  $A'$  二點,即 $c < l$ 或 $v_0^2 < 2g(l - y_0)$ 。設動點從  $M_0$  先向下拋, $M$  點在圓周上運動至  $A'$

時，速度爲零，復下降至最低點  $M_1$ ，更上升以至於  $A$ ，速度又爲零，復向後下降。如是往復運動稱爲擺動。一完全擺動乃由  $A$  至  $A'$ ，復由  $A'$  至  $A$ ，如是往返一次所需之時間曰擺動週期。此擺動週期顯然與擺長  $l$  及重力之強度  $g$  有關係，且隨運動初情形（即  $A$  與  $A'$  兩點在圓周上之位置）而異。

§ 46. 微小擺動——擺之等時性 繼續討論上節重點在垂直圓周上之運動。將重點  $M$  拉開至  $M_0$ ，與其鉛垂之平衡位置成微小之角  $\theta_0$ （小於  $5^\circ$ ）而輕放之，如是初速度  $v_0 = 0$ 。於是初位置  $M_0$  便與上節所述（ $D$ ）與圓周相交之點  $A$  或  $A'$  情形相同，故重點  $M$  將在  $M_0M_0'$  弧上擺動（圖 47）。

使重點沿切線方向而運動之力，僅爲重量  $mg$  之分力  $F = mgsin\theta$ ，故重點之切線加速度  $a$

$$爲 \quad a = -\frac{mgsin\theta}{m} = -\frac{g}{l}x,$$

式中  $x$  表自  $M$  至鉛垂線之橫距離。當  $\theta \leq 5^\circ$ ， $x$  與  $MO'$  弧相差小於  $\frac{1}{3}\%$ ，故  $x$  可視爲等於  $M$  之位移。於是單擺之加速度與其位移成正比，而方向則與之相反，故其運動爲簡諧運動（§ 20），其週期爲

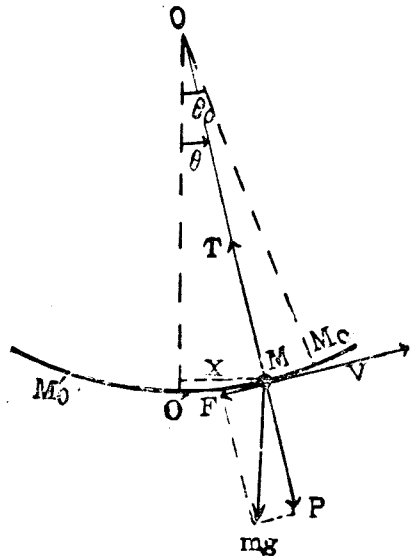


圖 47. 單擺



$$T = 2\pi \sqrt{-\frac{x}{a}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

因  $T$  不含  $\theta_0$ ，故微小擺動之週期與擺幅無關，於是稱微小之擺動具等時性 (isochronism)，故恆為計時之具。

若在某處作單擺實驗，自擺之長度及其週期，即可測定該地之重力加速度。較之直接從墮體運動實驗測  $g$ ，既為容易，亦更精確。

線的張力  $N$  之計算 線對於重點所施之力  $N$ ，由  $M$  向  $O$ 。在法線  $MO$  方向上，重點之運動方程式 (§ 19) 為

$$m \frac{v^2}{l} = N - mg \cos \theta.$$

因  $y = -l \cos \theta$ ，  $y_0 = -l \cos \theta_0$ ，

得  $v^2 = -2g(y - y_0) = 2gl(\cos \theta - \cos \theta_0)$ 。

以之代入上式，故有

$$\begin{aligned} N &= 2mg(\cos \theta - \cos \theta_0) + mg \cos \theta \\ &= 3mg \left( \cos \theta - \frac{2}{3} \cos \theta_0 \right). \end{aligned}$$

例。將長  $l = 100 \text{ cm}$  之細線之一端，固定於  $O$  點，他端懸一重體，其質量為  $m = 100 \text{ 克}$ 。使此重體在水平面上作勻速之圓周運動。圓周之半徑  $r = 60 \text{ cm}$  (圖 48)。求重體之週期及線之張力 (此種裝置，稱為錐擺，conical pendulum)。

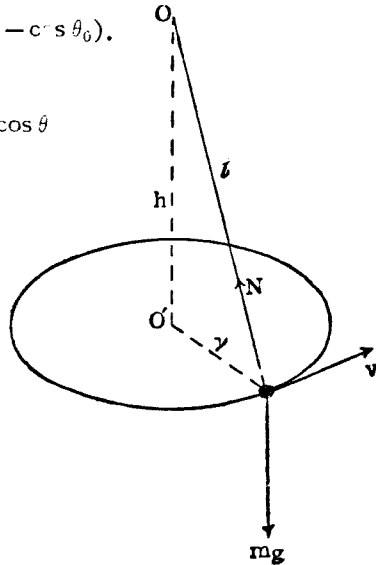


圖 48. 錐 擺

命  $O'$  爲軌道水平圓周之心，則  $OO'$  之距離爲  $h = \sqrt{l^2 - r^2} = 80\text{cm}$ 。

又命  $V$  及  $H$  爲線之張力  $N$  在垂直及水平方向之分力，則有

$$V = \frac{h}{l} N, \quad H = \frac{r}{l} N.$$

在垂直方向，重體之加速度爲零；在水平沿圓周之半徑方向，重體之加速度爲  $v^2/r$ ，故有

$$V = mg,$$

及

$$m \frac{v^2}{r} = H,$$

從此四方程式，得

$$N = \frac{l}{h} V = \frac{l}{h} \cdot mg = \frac{100 \times 100 \times 980}{80} = 122,500 \text{ 達因}.$$

及

$$v^2 = \frac{r}{m} H = \frac{r^2}{ml} N = \frac{r^2}{h} g,$$

或

$$\omega = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{g}{h}}.$$

故錐擺之週期爲

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{80}{980}} = 1.79 \text{ 秒}.$$

若起始所給與重體之速度  $v$  太大（即大於  $r \sqrt{\frac{g}{h}}$ ），則重體上升， $r$  因而增大，到  $r = v \sqrt{\frac{h}{g}}$  時重體始作勻速圓周運動。反之，若初速度太小，則重體略爲下沉後，再作勻速圓周運動。

§ 47. 向心力與離心力 在第一章運動學 §18—19 論勻速圓周運動及曲線運動中，當質點之速度爲  $v$  時，其沿圓周半徑或曲率半徑上之加速度爲向心之  $v^2/r$ ，此乃純粹運動學上之結果。質點既有此向心之加速度  $v^2/r$ ，則所受外加諸力在此半徑方向上之諸分力合併，必得一力，其值爲

$$f = m \frac{v^2}{r},$$

且恆向心，此力曰**向心力**(centripetal force)。是向心力不是質點所受諸力中之某一個實在的力，乃是質點所受諸力之和在圓周半徑或曲線曲率半徑上之分力。

如上節單擺之向心力為

$$m \frac{v^2}{l} = N - mg \cos \theta,$$

乃重力  $mg$  與線之張力  $N$  在線上之分力之和，雖與線之張力同一方向，而非相等，兩者並非同一物也。

又如上節之例，錐擺之向心力為

$$m \frac{v^2}{r} = H,$$

乃質點所受重力  $mg$  與線之張力  $N$  之和，與線之張力且不同方向矣，更無論其數值。

吾人又常稱與向心力相等而相反之一力，為**離心力**(centrifugal force)。在軌道曲線之法線上，依據牛頓第二定律，有

$$\begin{aligned} m \frac{v^2}{l} = \text{向心力} &= F_{1,n} + F_{2,n} + \cdots + F_{k,n} \\ &= \text{質點所受諸力在法線上的分力之和。} \end{aligned}$$

依定義，離心力等於負的向心力，上式又可書成：

$$\text{離心力} + (F_{1,n} + F_{2,n} + \cdots + F_{k,n}) = 0.$$

此一式表示離心力與質點實在所受諸力在法線上的分力之和相平衡，是將動力學問題變為靜力學問題而已。所以一個動的物體，可以作為靜觀（靜指靜止及勻速直線運動而言），只須於此物體實在所受

諸力之外，再添上一個足以代表或發生此運動之力(向心力)之相反者，或說可以消滅此運動之力(離心力)。加上離心力，物體即恢復其慣性，靜止或作勻速直線運動，故離心力為慣性力(force of inertia)。

在此

離心力 + 物體實在所受諸力

所成之平衡的力系中，任何一力，即等於其餘之力之幾何和而相反。

例 1. 圓場跑馬，騎士與馬必身向內傾(圖 49)。

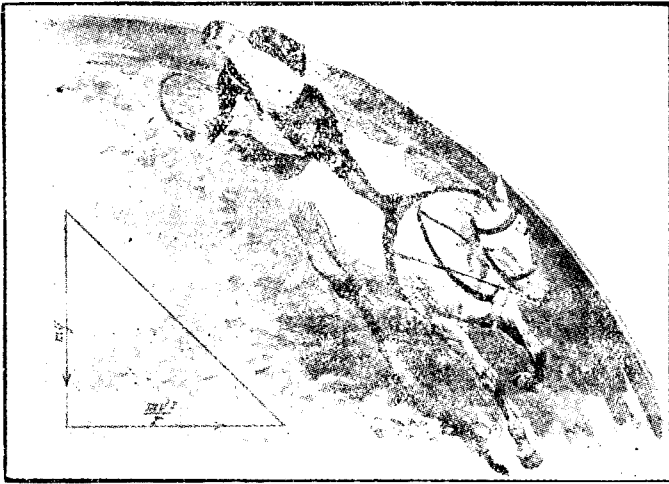


圖 49.

馬與騎士之重量  $mg$  添上離心力  $m\frac{v^2}{r}$ ，即得與此二者相平衡之力——地面對馬及騎士之反作用  $N$ 。騎士與馬對地之作用力為： $-N$ ，故向內傾斜，與垂直方向成  $\phi$  角，而有

$$\tan \phi = \frac{v^2}{gr}.$$

速度愈大，圓場半徑愈小，則傾斜愈甚。

地面對騎士及馬之反作用，與上節錐擺例中繩之張力，完全相同。

例 2. 火車行駛於彎曲之鐵軌上，亦必向內傾斜，如騎士與馬然。地面對於火車之反作用力，與地面正交，方為安全。故築鐵道路基須與水平面成傾斜角  $\phi$  (圖 50)，善駛車者到此地，調整火車之速度  $v$  使合於

$$v^2 = rg \tan \phi$$

之條件。

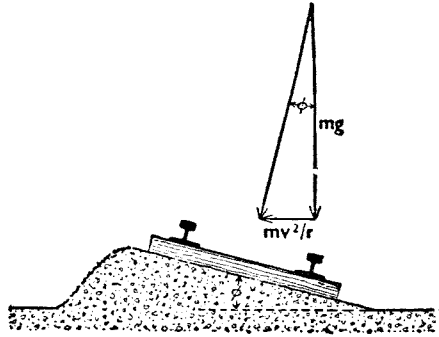


圖 50.

## 習 題 十 一

1. 重 500 克之物體，沿高 90 厘米之斜面，由靜止而下滑，達於最低點時之速度為每秒 150 厘米，求其運動中損失之能。

2. 天津與濟南之重力加速度，各為 980.094 及 979.858 厘米/秒<sup>2</sup>。若將在天津校準之鐘，移至濟南，每日要快或慢多少？

3. 有水一桶，桶上無蓋，令其在一垂直圓周上旋轉，圓周之半徑為 3 米。問須旋轉多快，水方不致流出？

4. 一繩僅能支持 5 仟克之重量而不斷者，今以之旋轉一質量為 200 克之物體於一水平之圓周上，每秒 3 周。問繩之長度，不超過何值時，方無危險？

5. 火車以每小時 35 哩之速度，在曲度半徑為 500 呎之軌道上轉彎，路基之斜度為 4°。問此時車中所懸掛之電燈與車之地板作何角度？若懸掛之電燈與車之地板垂直，求車此時開行之速度。

6. 火車在半徑為 900 呎之水平軌道上轉彎，設車之重心離軌道高 72 吋，兩輪間之距離為 53 吋。問車達某速度，即將有出軌之危險？

7. 甲乙兩人同坐於一水平圓板之上，甲坐於中心，乙坐於邊緣，以一繩連接之。圓板之半徑為 5 米，甲乙二人之體重各為 60 及 40 公斤，圓板之摩擦係數為 0.2。圓板繞其中心軸旋轉。求乙感不穩時，圓板之轉動速度。此時甲之情形如何？甲乙兩人，易位而坐，求乙感不穩時之圓板旋轉速度，問此時甲之情形又如何？

8. 單擺之長為 2 米，擺幅為 2 厘米。試求擺體離其靜止位置為 1 厘米時之速度及加速度，並求自靜止位置至此所歷之時間。

## 第七章 天體運動與萬有引力

日月昇沒，天體間有相對運動，或為原人所認識。古代雖有日動地動之爭，要無認天體皆靜止者，我國星圖之製，為時甚早。哥白尼 (Copernicus, 1473—1543) 首倡地為球形，繞軸自轉，並繞日運行而公轉，成圓周軌道，一反向來行星與太陽繞地而行之學說，然未有完善之證據也。

§ 48. 行星運動定律 泰照·勃勒 (Tycho Brahé, 1546—1601) 畢生觀察行星之位置，紀錄汗牛充棟。刻卜勒 (Kepler, 1571—1630) 將泰氏紀錄數據 (data)，加以詳細分析，求出行星運動三定律 (laws of planetary motion)：

1. 各行星繞太陽依橢圓軌道運行，太陽之位置為橢圓之一焦點。
2. 連太陽與行星之向徑 (radius vector)，在等時間內，恆掃過相等之面積。
3. 行星週期之平方，各與其橢圓軌道長軸之立方成正比。

此三定律乃完全屬於運動學之範圍。

§ 49. 萬有引力 半世紀後，牛頓以其所倡說之力學基本定律，根據刻卜勒行星運動定律之結果，推求行星與太陽間應有之力。

研究結果：由刻卜勒第二定律，知太陽施於行星之力，必為中心

力(central force),即其作用常在太陽與行星之連接線上,而向太陽。又由刻卜勒第一與第三定律,知此力必與太陽行星間之距離  $d$  之平方成反比。

力恆與質量成正比。又太陽對行星之引力必與行星對太陽之引力相等而相反,故此力必與太陽及行星之質量  $m_1$  及  $m_2$  之乘積成正比,於是

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}.$$

是為萬有引力定律(law of universal gravitation),式中  $G$  為比例常數,其值由所選用之單位而定,稱為萬有引力常數(gravitational constant)。

引力何稱萬有? 蓋牛頓推廣之,宇宙間任何兩物體,皆互相吸引,其引力與兩者之質量乘積為正比,與其間之距離之平方為反比。如蘋果落地為地球所吸引,而重力實為萬有引力而起。設  $M$  為地球之質量,  $R$  為其半徑,則在地面上質量為  $m$  之物體,所受地球之引力為

$$F = G \frac{mM}{R^2} = mg,$$

即

$$g = \frac{GM}{R^2}.$$

故知地球之質量  $M$ , 或能測定萬有引力常數  $G$ , 為刻不容緩之事。

由泰照·勃勒搜集事實, 刻卜勒分析成律, 牛頓創設理論,立萬有引力之說,新近愛因斯坦(Einstein)更為之解釋。此最足表示科學研究之方法,與其發展之步驟。豐功偉蹟,先後輝映,洵盛事也!



## § 50. 月球之運動

由萬有引力，可推出行星運動之刻卜勒定律，而刻卜勒定律乃實際觀測之結果。故萬有引力說之根基，已甚穩固。吾人言月球之運動，以為萬有引力說之實證。

月球之軌道為一極近於圓之橢圓，其與地球之平均距離計為  $r =$

384,400 公里。命  $m$  及  $M$  各為月球與地球之質量，則地球對於月球之引力為

$$F = G \frac{mM}{r^2};$$

月球在其軌道上，向心之加速度為

$$\frac{v^2}{r} = r\omega^2.$$

因此，有

$$G \frac{mM}{r^2} = mr\omega^2,$$

即

$$a^2 = \frac{GM}{r^3}.$$

但，依上節，

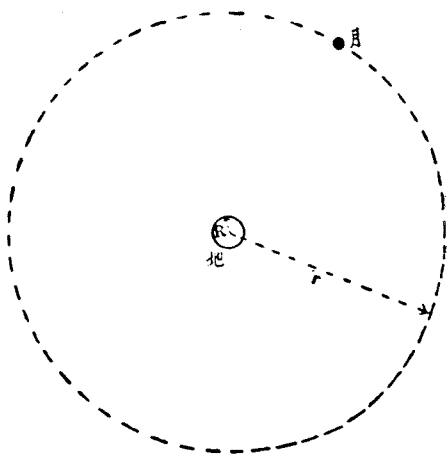


圖 51. 月球之運動

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad (\text{地球之半徑 } R = 6,367 \text{ 公里}),$$

故  $\omega^2 = g \frac{R^2}{r^3}.$

命  $T$  為月球運行之週期，則有

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{gR^2}},$$

是  $T^2$  與  $r^3$  成正比，即刻卜勒第三定律也。以  $r, R, g$  之值代入，得

$$T = 27.4 \text{ 日},$$

與實測月球繞地球一周之時間為二十七日八小時甚相接近。

§ 51. 萬有引力常數之測定 1798年卡文狄需 (Cavendish) 首作實驗以求測定萬有引力常數  $G$  之值，亦即在實驗室中，作萬有引力定律直接之證明。

其法用一扭秤，為一細棒之兩端，各附一小鉛球  $A$  及  $B$ ，以細而長之銀絲懸之，使能轉動自如者(圖 52)。安置重 158 公斤之二大鉛球於  $A, B$  之旁，如  $P$  及  $Q$ ，或  $P'$  及  $Q'$ 。  $P$  與  $A$ ，及  $Q$  與  $B$ ，所生之兩引力，組成力偶，以使扭秤扭轉。由扭轉角及其扭轉常數

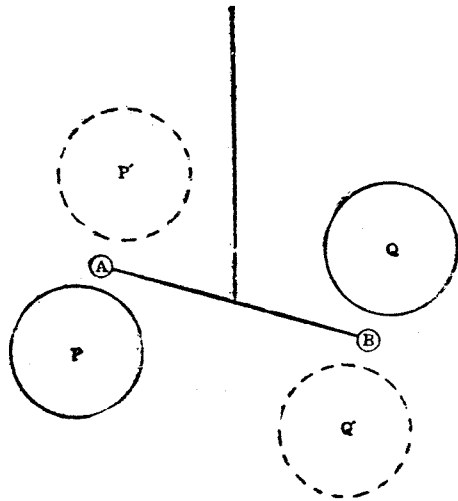


圖 52. 萬有引力常數之測定

(constant of torsion) 即可計得引力之大小。如是方程式  $F = G \frac{mM}{r^2}$  中  $m, M, r$  及  $F$  均可量得，而  $G$  之值遂得測定，為

$$G = 6.6579 \times 10^{-8} \text{ 厘米克秒, 絕對單位,}$$

即兩個一克質量之物體，相距 1 厘米時之引力，為  $6.6579 \times 10^{-8}$  達因。其小幾不可想像，故普通兩物體間之萬有引力，可以忽略不計。幸而如此，否則力學之複雜情形，將為如何！

地球之質量 既測定  $G$  之值，則由 §49

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

之關係，即得地球之質量為

$$M = 6.0 \times 10^{27} \text{ 克.}$$

故常稱卡文狄需實驗為‘稱地球’。

地球之質量與其體積之比，為地球之平均密度，因可算得為 5.5 克/厘米<sup>3</sup>。

地殼巖石之密度，常小於 3，因此可斷言地球內部必含有較重之物質，其密度大於 5.5，此亦為極自然而合理之結果，因地球全部初為液體，則較重之物質，自必沈在地球之中部。

§52. 地面上各點之重力加速度 晝夜之分，乃因地球於繞日公轉之外，尚有自轉。因地球自轉之故，在地面上各點  $M$  所生之離心力  $f$  為  $m \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$ ，式中  $T$  為地球自轉之週期，即一恆星日也（圖 53）。地球對於  $M$  點之萬有引力為  $F$ ，係向地心  $O$ 。故地面上  $M$  點之重力  $W$ ，實為引力  $F$  與離心力  $f$  之合成力。是重力  $W$ ，因地球

自轉之故，不正向地心矣。

在緯度( $\phi$ 角表緯度) $45^\circ$ 之處，其重力方向與赤道面相交之點，距地心約為 11.2 公里。

$$\text{離心力 } f = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} = \frac{4\pi^2 mR}{T^2} \cos \phi,$$

隨  $M$  點之緯度而變，在南北兩極為零；在赤道上最大，質量 1 克之物體，其離心力為 3.36 達因。故在赤道上單以此原因，重力加速度較在兩極小 3.36 厘米/秒<sup>2</sup>。

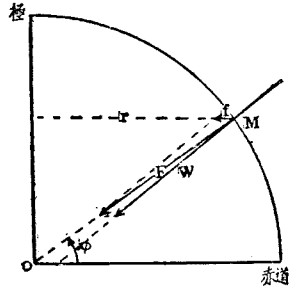


圖 53. 重力之方向

又因地球非正圓球，乃一扁橢圓球體(oblate spheroid)，兩極之半徑較之赤道上者要短 21.2 公里。在赤道上對質量 1 克之物體之萬有引力  $F$ ，較之在兩極上者要小 1.6 達因。因此之故，在赤道上之重力加速度，又要較在兩極上小 1.6 厘米/秒<sup>2</sup>。

即在同一緯度之處，又因地面拔海之高低，與地形山谷之起伏，皆足使  $g$  之值略有不同。

在地面上各點之重力加速度，可以公式(Clairaut)

$$g = 980.6056 - 2.5028 \cos 2\phi - 0.000003 h$$

表之，式中  $\phi$  為緯度， $h$  為海拔(以厘米為單位)。

## 習 題 十 二

1. 問地球自轉週期為何值時，則在地球赤道上之物，將無重量？

2. 火星之年為687日,求火星距太陽與地球距太陽兩者之比.
3. 天文學上之質量單位,係使萬有引力之比例常數  $G$  等於 1 者,問 1 天文單位質量等於若干克?
4. 地球距太陽,約為一萬萬五千萬公里,求太陽之質量.
5. 有一小物體,掠過大鐵球之表面而繞之,沿其一大圓周運動,不即不離,繞行不息,求其繞行之週期(鐵之密度為  $7.5$  克/厘米<sup>3</sup>).

## 第八章 物體之平衡

§ 53. 質點之平衡 由慣性原理 (§ 26), 一靜止質點之平衡, 其必要與充分條件 (necessary and sufficient conditions), 為施於此點之諸力之幾何和為零, 即

$$\Sigma F = 0.$$

由此可知:

若質點受有二力而平衡, 則此二力必相等而相反。

若質點受有三力而平衡, 則 (1) 三力必同在一平面上; (2) 三力

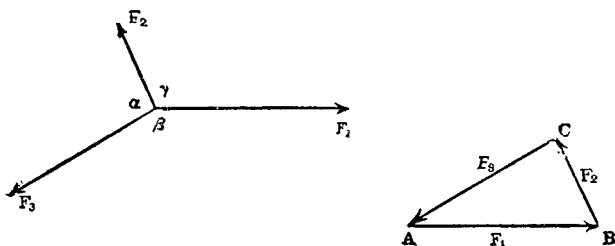


圖 54. 三力之平衡

中之任一力, 不在其他二力所成之角內; (3) 三力中任一力之強度, 與其餘二力所成之角之正弦成比例, 即

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_3}{\sin \gamma}.$$

設質點所受之  $n$  力, 在  $Ox, Oy, Oz$  軸上之分力, 各為  $X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; \dots;$  及  $X_n, Y_n, Z_n$ , 則質點平衡條件之分析式為:

$$\Sigma X=0, \quad \Sigma Y=0, \quad \Sigma Z=0.$$

§ 54. 合力與平衡力 物體受  $n$  力之作用而保持平衡，則此  $n$  力必成爲等於零之系統。其中之任一力，可視爲其餘  $n-1$  力之平衡力(equilibrant)，而與其餘  $n-1$  力之合力(resultant)相等而相反。如圖 55,  $\vec{F}_3$  爲  $\vec{F}_1$  與  $\vec{F}_2$  之平衡力，相等而相反於  $\vec{F}_1$  及  $\vec{F}_2$  之合力  $\vec{F}$ 。

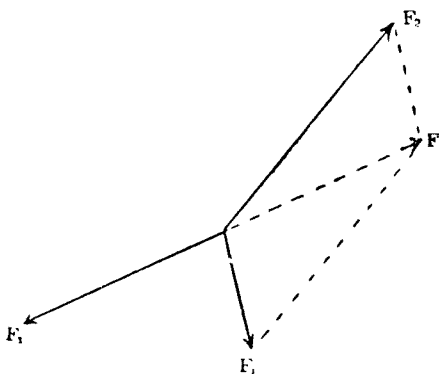


圖 55. 平 衡 力

§ 55. 外力與內力  
物體由無數之質點而成。設有  $n$  質點  $M_1, M_2, \dots, M_n$  所成之一系(system)，施於此系中任一點，譬如  $M_1$  之力，可分爲二類：其

一爲系外之質點施於  $M_1$  上之作用（如重力，電磁作用與反作用等），稱爲外力(external forces)；其一爲系內之其他  $n-1$  質點  $M_2, M_3, \dots, M_n$  施於  $M_1$  點上之作用，稱爲內力(internal forces)。

例如一流體內，內力乃分子間兩兩之相互作用，即分子力。對於固體，此等分子力之作用，保持分子間之距離，使其有固定之形狀。

據作用與反作用原理，內力兩兩相等而相反，以向量表之，則內力向量所成之系恆等於零。

§ 56. 物體之平衡條件 設有物體爲  $n$  質點所成之一系，在平衡中。若以  $(S_e)$  表物體所受外力向量之系， $(S_i)$  表內力向量之系，再以  $(S)$  表施於物體所有之點上，內力及外力向量所成之系。

在平衡中， $(S)$ 系等於零，但 $(S_i)$ 恆等於零，則 $(S_e)$ 系亦必等於零。

故欲質點所成之物體保持平衡，其所受之諸外力，須為一等於零之向量之系。

例。設杯內盛水，置於桌上。水之質點所成之系，在平衡中，施於此系上之外力計有：水分子之重量，杯壁之反作用力，及空氣在水面上之壓力。此諸外力所成之系等於零。

設再就杯之質點所成之系而論，則外力為：杯之分子之重量，水在其所接觸之杯壁上之壓力，空氣在其所接觸之杯壁上之壓力，桌在杯底上之反作用力。此諸力所成之系必等於零。

設更以杯與水作一系統而論，則外力為：杯與水之分子之重量，空氣之壓力，及桌之反作用力。至水對於杯之內壁之壓力，與杯對於水之反作用力，則為內力而非外力矣。

如是更換質點系之畫分，可將原一系之內力，變成他一系之外力。應用各系之平衡條件，每可求出或量得其中之內力。

§ 57. 力之可傳性 於固體內任意之  $A, B$  二點(圖 56 甲)，在其連接線上，各施相等而相反之力  $P$  及  $Q$ ，吾人知物體之運動情狀，將不受任何影響。

因此之故，沿物體之  $AB$  線，作用於  $A$  點之力  $P$ ，可視為作用於  $B$  點上(圖 56 乙)，即加於固體之力，其作用點可視為在其作用線上之任何一點，而不必限於力與體面接觸之處。此原則稱為力之可傳

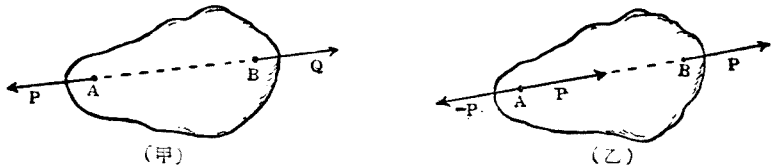


圖 56. 力之可傳性



性(transmissibility of force).

藉力之可傳性，固體所受諸力始得而簡化。

§ 58. 固體所受諸力之簡化 物體之各點每受有數個力；但此數力既同作用於一點上，可合成爲單一之力。故物體之每一點，可視爲只受一力。

1. 物體各點皆受一力。此物體所受之諸力，可簡化成在物體內不在一直線上之任意三點之三力。

$A, B, C$  爲在物體內之任意三點，不在一直線上者(圖 57)。設  $F$  爲物體內任一點  $M$  所受之力，可在  $MA, MB, MC$  連接線上分解爲  $f_1', f_2', f_3'$  三分力，將其傳至  $A, B, C$  點成爲  $f_1, f_2, f_3$ 。

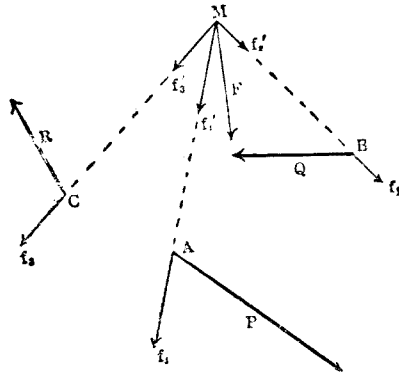
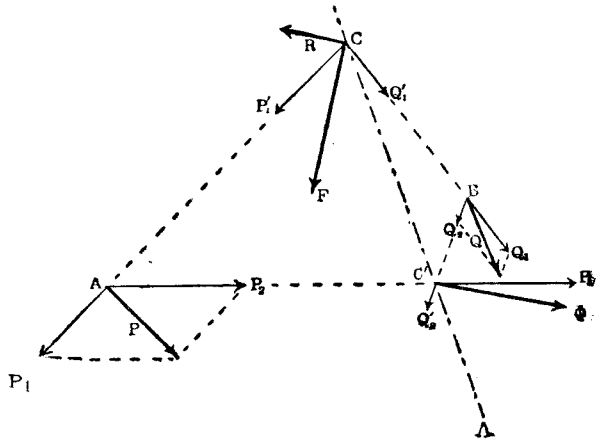


圖 57. 簡化爲  $P, Q, R$  三力

應用此種辦法於物體所受諸  $n$  力之每一力上，則得施於  $A, B, C$  三

點上之力，如  $f_1, f_2, f_3$ ，各有  $n$  個。再在  $A, B, C$  合成之，則得三力  $P, Q, R$ ，可以代替物體所受之諸  $n$  力，而不改變物體之運動情狀。

2. 設物體所受諸力，已簡化成施於  $A, B, C$  三點之三力  $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ 。 $C$  點及  $\vec{P}$  力，與  $C$  點及  $\vec{Q}$  力所成之兩平面，相交於直線  $\Delta$  (圖 58)。乃於  $\Delta$  直線任取一點  $C'$ ，將在  $A$  點之  $\vec{P}$  力，沿  $AC, AC'$  線分解成  $\vec{P}_1$

圖 58. 簡化為  $F, \Phi$  二力

及  $\vec{P}_2$ ，各傳至  $C$  及  $C'$  點，為  $\vec{P}'_1$  及  $\vec{P}'_2$ ；同樣將在  $B$  點之力  $\vec{Q}$ ，沿  $BC, BC'$  線分解成  $\vec{Q}_1$  及  $\vec{Q}_2$ ，各傳至  $C$  及  $C'$  點為  $\vec{Q}'_1$  及  $\vec{Q}'_2$ 。在  $C$  點將  $\vec{R}, \vec{P}'_1$  及  $\vec{Q}'_1$  三力合成得  $\vec{F}$ ，在  $C'$  點將  $\vec{P}'_2$  及  $\vec{Q}'_2$  合成得  $\vec{\Phi}$ 。

由是在  $C$  及  $C'$  二點之二力  $\vec{F}$  及  $\vec{\Phi}$ ，可代替物體所受諸力，而不變其運動之情狀。 $C'$  為任意選擇之一點。在普通情形中，此  $\vec{F}$  及  $\vec{\Phi}$  兩力，既不會聚，亦不相平行。

故物體所受之諸力，可簡化成二力，其一力之作用點，可為物體內任意選擇之一點。

§ 59. 兩個作用點不同而會聚之力之合力 設  $\vec{P}$  及  $\vec{Q}$  為施於物體之兩力，其作用點各為  $A$  及  $B$ ，或由物體所受諸力簡化而成。延長  $\vec{P}$  及  $\vec{Q}$  之作用線，若相交於  $O$  點（圖 59），將  $\vec{P}$  及  $\vec{Q}$  傳至  $O$  點，則依平行四邊形定律，即得合力  $\vec{F}$ 。合力  $\vec{F}$  可視為作用於  $AB$  連接線之上之

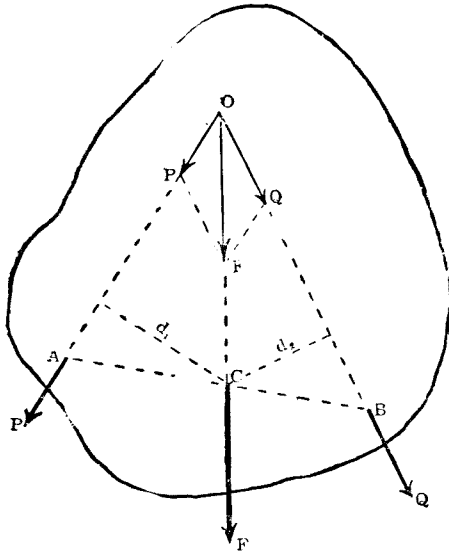


圖 59. 兩會聚力之合力

○點,而有

$$\frac{AC}{CE} = \frac{\vec{Q}}{\vec{P}} = \frac{d_1}{d_2},$$

$d_1$  及  $d_2$  表自  $C$  至  $\vec{P}$  及  $\vec{Q}$  之距離, 即  $\vec{P}$  及  $\vec{Q}$  對於  $C$  點之矩相等而相反。

§ 60. 兩平行力之合力 設  $\vec{P}, \vec{Q}$  為施於物體內  $A, B$  二點之二力, 互相平行, 或由物體所受諸力簡化而得。

1. 兩平行力為同向者(圖 60):

沿  $AB$  連接線, 加上相等而相反之二力  $\vec{H}_1$  及  $\vec{H}_2$  於  $A$  及  $B$  點, 物體運動之情狀將不受任何改變。在  $A$  及  $B$  點各將  $\vec{P}$  與  $\vec{H}_1, \vec{Q}$  與  $\vec{H}_2$  合成, 遂得  $\vec{P}$  及  $\vec{Q}$  不相平行之兩力, 可代替物體原來所受之兩平行力

$\vec{P}$  及  $\vec{Q}$ .

$\vec{P}$  及  $\vec{Q}$  之合力之求法，已於上節言之。將  $\vec{P}$  及  $\vec{Q}$  傳至交點  $O$  後，復各分解還原為  $\vec{H}_1$  與  $\vec{P}$ ，及  $\vec{H}_2$  與  $\vec{Q}$ 。在  $O$  點  $\vec{H}_1$  與  $\vec{H}_2$  相等而相反，互相抵消。只剩  $\vec{P}$ ， $\vec{Q}$  二力作用於平行之  $OC$  線上。

故  $A$ 、 $B$  二點之兩平行力  $\vec{P}$  及  $\vec{Q}$  之合力  $\vec{F}$ ，仍為一平行力，其大小為

$$F = P + Q,$$

作用於  $AB$  連接線上之  $C$  點，而有

$$\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P}$$

之關係，以定  $C$  點在  $AB$  連接線上之位置。 $C$  稱為  $\vec{P}$  及  $\vec{Q}$  兩平行力之心 (center)。故  $\vec{P}$  及  $\vec{Q}$  對於其心之矩 (§ 10) 相等而相反，換言之， $\vec{P}$  及  $\vec{Q}$  對於其心之矩之和為零。

## 2. 兩平行力為異向者 (圖 61):

命  $P$  及  $Q$  表兩力之強度之絕對值，且設  $P > Q$ 。於  $AB$  連接線之延長線上取  $C$  點，使合

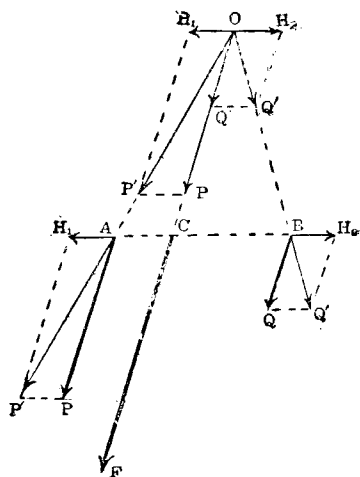


圖 60. 同向二平行力之合力

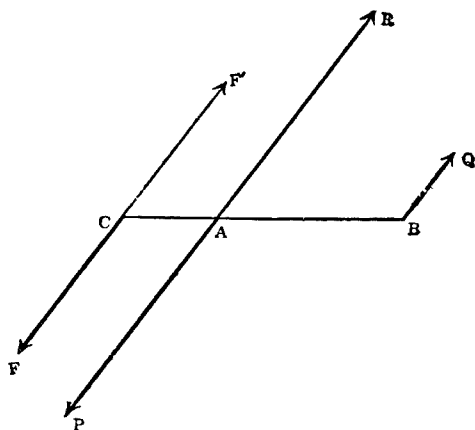


圖 61. 異向二平行力之合力

$$\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P},$$

是  $C$  點將在較大力  $P$  之作用點  $A$  之一邊。

乃於  $C$  點，加上相等而相反之二力  $F$  及  $F'$ ，其方向與原來之兩力  $P, Q$  平行，其強度為

$$F' = P - Q,$$

將使物體之運動情狀不受任何改變。

$Q$  及  $F'$  二同向之平行力之合力，由本節 1. 知為

$$R = Q + F' = Q + P - Q = P,$$

而其作用點適為  $A$ ，因從  $\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P}$ ，有  $\frac{AC}{AB} = \frac{Q}{P - Q} = \frac{Q}{F'}$  故也。

是  $R$  與  $P$  相等而相反，遂相抵消。

故  $\vec{F}$  為異向之兩平行力  $\vec{P}$  及  $\vec{Q}$  之合力。 $C$  稱為此二平行力之心。

異向兩平行力  $\vec{P}$  及  $\vec{Q}$ ，對於其心之矩之和為零。

注意：若以異向兩平行力之  $\vec{Q}$  為負，線段如  $AC, CB$  亦分正負，則本節 1. 與 2. 二情形下， $\vec{P}$  及  $\vec{Q}$  之合力  $\vec{F}$  之強度與其施力點  $C$  之位置，可以同一之代數式表示之。

§ 61. 力偶 若上節所論之兩平行力  $\vec{F}$  及  $\vec{Q}$ ，其方向相反，而大小適又相等（圖 62），則合力之大小為零，而其作用點不復存在（或云在無窮遠）。稱此兩力成一力偶（couple）。

$\vec{P}$  及  $\vec{Q}$  對於其面上任何一點之矩之和，均等於  $rp$  而為一定，稱為力偶之矩（moment of couple），用表力偶之強度。  $r$  表兩力間之距

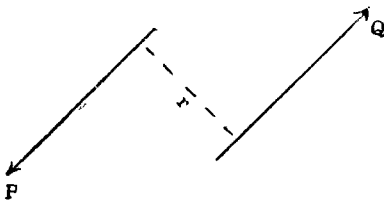


圖 62. 力 偶

離，稱為力偶之臂（arm of couple）。

§ 62. 諸平行力之合力 欲求  $n$  個平行力之合力（圖 63），可先求其中二力之合力，而後求此合力與另一力之合力，如是逐步推求。所得結果，普通為一合力  $\vec{F}$ ，與諸力平行，其作用點稱為諸平

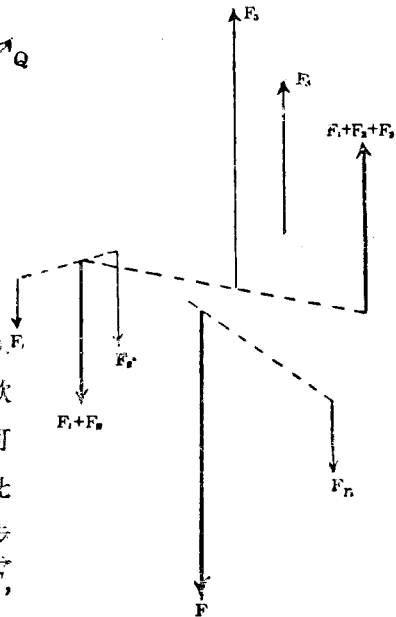


圖 63. 諸平行力之合力

行力之心。有時則爲一力偶。

§ 63. 重心 物體內各部分所受之重力，皆鉛垂向下，互相平行。此諸平行力必有一合力，即物體之重量是，其心稱爲物體之重心 (center of gravity)。重心雖可不在物體之內，如鐵環，但對於物體，其位置則爲一定。

均勻物體 (homogeneous body) 之重心之位置，僅與其幾何體狀有關，不因物質之爲何而異，故每可由物體之對稱情形而決定之。若物體有一對稱心，則此對稱心即爲重心；若物體有一對稱軸，則重心必在此對稱軸上。

物體之重心可由實驗求之。用繩繫於物體上之一點而懸之，則繩成鉛垂，鉛垂線之延長當通過物體之重心。再換物體之他一點而懸之，作鉛垂之延長線。此前後兩延長線之交點，即物體之重心。

§ 64. 物體平衡之分析式 物體所受之力，其數不論多少，由 § 58 知恆可簡化成二力，如作用於  $C$  點之  $\vec{F}$ ，及作用於  $C'$  點之  $\vec{\phi}$ ， $C'$  爲可任意選擇者。

再於  $C'$  點，加上與  $\vec{F}$  成力偶之力  $\vec{P}$ ，及與  $\vec{P}$  相等而相反之力  $\vec{P}'$ ，物體運動情狀將不受任何改變 (圖 64)。再將  $C'$  點之  $\vec{\phi}$  及  $\vec{P}'$  兩力合成，得  $\vec{R}$  力。

故物體所受諸力，可簡化成一力偶及作用於任意一

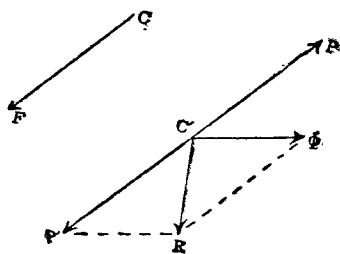


圖 64.

點  $C'$  之單力  $\vec{R}$ 。

命  $X, Y, Z$  爲  $R$  在  $Ox, Oy, Oz$  軸上之分力,  $L, M, N$  爲力偶之矩在  $Ox, Oy, Oz$  軸上之分矩(即對於  $Ox, Oy, Oz$  三軸之矩, §10), 則物體平衡之條件, 爲單力  $\vec{R} = 0$  及力偶之矩等於零, 即

$$\begin{cases} X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 0, \\ Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = 0, \\ Z = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n = 0, \\ L = L_1 + L_2 + \cdots + L_n = 0, \\ M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = 0, \\ N = N_1 + N_2 + \cdots + N_n = 0, \end{cases}$$

式中,  $X_n, Y_n, Z_n$  爲所施於物體之外力  $\vec{F}_n$  之分力,  $L_n, M_n, N_n$  爲其分矩。

特例 I. 物體所受諸外力, 已簡化成兩力者:

物體平衡時, 此二力必同在其作用點之連接線上, 相等而相反 (圖 65)。

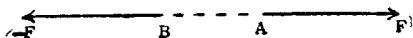


圖 65.

特例 II. 物體所受諸外力, 已簡化成三力者:

物體平衡時, 此三力必同在一平面上。

設  $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$  爲此三力, 於  $\vec{R}$  之作用線上任取一點  $O$ , 則  $\vec{R}$  對於  $O$  之矩爲零, 而  $\vec{P}$  及  $\vec{Q}$  對於  $O$  點之力矩必須相等而相反。但  $\vec{P}$  對於  $O$  點之力矩, 乃垂直於  $O$  點及  $\vec{P}$  所成之平面; 而  $\vec{Q}$  對於  $O$  點之力矩乃垂



直於  $O$  點及  $\vec{Q}$  所成之平面；是此兩平面，必相疊合，即  $O$  點在  $\vec{P}$  與  $\vec{Q}$  所成之平面上。  $O$  為  $\vec{R}$  上之任意一點，故必  $\vec{R}$  全在  $\vec{P}$  與  $\vec{Q}$  所成之平面上，即  $\vec{P}$ 、 $\vec{Q}$ 、 $\vec{R}$  三力同在一平面上。

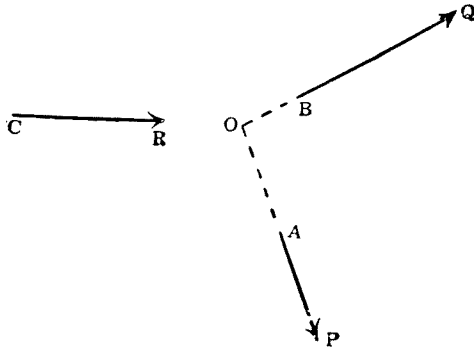


圖 66.

1. 若三力非相平行者，則必同交於一點。

設  $\vec{P}$ 、 $\vec{Q}$  二力之作用線相交於  $O$  點(圖 66)， $\vec{P}$  及  $\vec{Q}$  對於  $O$  點之矩各為零，則  $\vec{R}$  對於  $O$  點之矩亦必為零，即  $O$  在  $\vec{R}$

之作用線上。故  $\vec{P}$ 、 $\vec{Q}$ 、 $\vec{R}$  三力同交於一點。

於是其平衡條件，完全與 § 53 相同，即

$$\begin{cases} X = \sum X_1 = 0, \\ Y = \sum Y_1 = 0, \\ Z = \sum Z_1 = 0. \end{cases}$$

2. 若三力為互相平行者：

三力之中必有二者同向，第三者反向，反向之力居於兩同向者之間(圖 67)，其大小等於兩同向者之和。

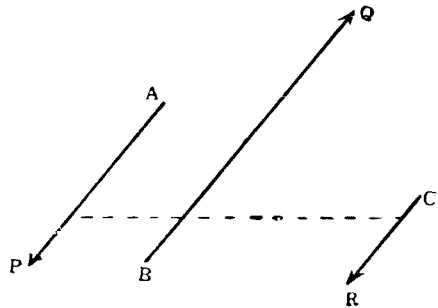


圖 67.

反向之力，與兩同向力間之任一截線相交，成二線段。此兩線段

之長，與兩同向力之強度成反比。因惟如此，三平行力對於任何一點之矩之和方爲零。

§ 65. 靜力學問題演算之步驟 討論物體之平衡，爲靜力學問題，於土木工程應用甚廣。演算靜力學問題時，可取下述之步驟：

1. 作一簡圖，表出物體在各點所受之外力。外力有知其大小及方向者，有僅知其方向者。如物體之重量，乃一鉛垂之力，作用於物體之重心；連於物體之繩所施於物體之力，係沿繩之方向；至於物體與其他光滑物體接觸所受之力，則與接觸面成正交。

倘遇數個物體互相接觸，或藉繩互相牽引之時，往往先將物體一一畫分，各自成一系統，然後再表出各個系統所受之力，則內力往往成爲外力 (§ 55)。

2. 取正交軸  $Oxyz$ 。求諸外力在坐標軸上之分力，而令

$$\Sigma X_1 = 0, \quad \Sigma Y_1 = 0, \quad \Sigma Z_1 = 0.$$

此三方程式即表物體所受諸外力之合力等於零。

所取之坐標軸，以與多數之外力正交或平行者爲便利。如是，則各分力之值較爲簡單。

3. 取原點  $O$ 。求諸外力對於原點  $O$  之矩，而命向一方旋轉者爲正，向他方旋轉者爲負。平衡之第二條件爲諸外力之矩之和等於零，即

$$\Sigma L_1 = 0, \quad \Sigma M_1 = 0, \quad \Sigma N_1 = 0.$$

所取之原點，以在未知之力或數力之作用線上者爲佳；如是常可使所得之方程式不含未知之力或不必要之力。

例 1. 有均勻之細桿，長爲  $2l = 100$  cm，重  $W = 150$  g，置於平放

之勺內；一端可在勺底溜動，他端露於勺外。勺成半圓球形，其半徑為  $R = 40 \text{ cm}$ 。假設桿與勺間無摩擦作用，求桿之平衡位置及勺對於桿之反作用力。

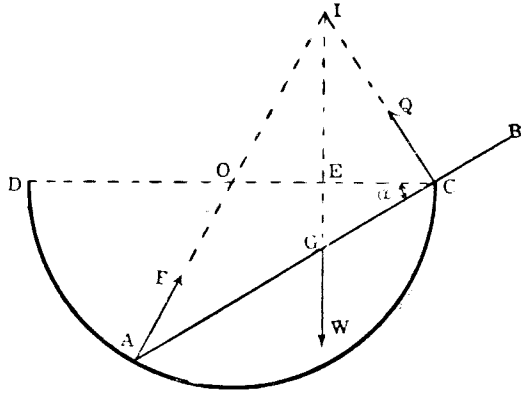


圖 68.

細桿之一端  $A$ ，可在勺底溜動，其上之一點  $C$ ，可在勺邊滑動。細桿所受之外力有三。1. 細桿之重量  $W$ ，係鉛垂的，作用於桿之中點  $G$  即重心上；2. 勺底  $A$  點對於細桿之反作用力  $P$ ，因無摩擦，必通過勺心  $O$ ；3. 勺邊對於細桿  $C$  點之反作用力  $Q$ ，因無摩擦，必與細桿  $AB$  正交。

細桿平衡，則其所受之三外力，必同在一平面上。此平面即為過勺心  $O$  之鉛垂平面，因重量  $W$  為垂直，而  $P$  力通過勺心  $O$  故也。

細桿在此鉛垂平面上之平衡位置，可以其與勺之水平直徑  $CD$  所成之角  $\alpha$  表之。欲求定  $\alpha$  角之方程式，只須寫出  $P, Q, W$  三力同交於一點  $I$  之幾何條件。譬如說： $CI$  與  $CG$  在  $CD$  直徑上之正射影同為  $CE$ 。

因  $CI$  與  $AC$  正交，故  $I$  點在表勺之圓周上，而有：

$$CE = CI \sin \alpha = AI \sin^2 \alpha = 2R \sin^2 \alpha,$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad CE = CG \cos \alpha &= (AC - AG) \cos \alpha = (CD \cos \alpha - l) \cos \alpha \\ &= (2R \cos \alpha - l) \cos \alpha. \end{aligned}$$

因此,得

$$4R \cos^2 \alpha - l \cos \alpha - 2R = 0.$$

$$\text{故} \quad \cos \alpha = \frac{l}{8R} + \frac{1}{8R} \sqrt{l^2 + 32R^2} = \frac{50}{8 \times 40} + \frac{\sqrt{50^2 + 32 \times 40^2}}{8 \times 40} = 0.8806,$$

$$\text{即} \quad \alpha = 28^\circ 17'.$$

求勻對於細桿之反作用力  $P$  及  $Q$ , 乃取  $AB$  及其垂直線為軸, 將三力投影其上, 得

$$P \cos \alpha - W \sin \alpha = 0,$$

$$\text{及} \quad Q + P \sin \alpha - W \cos \alpha = 0;$$

$$\text{於是} \quad P = W \tan \alpha = 150 \tan 28^\circ 17' = 80.7 \text{ 克},$$

$$Q = W \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} = \frac{150 \cos 56^\circ 34'}{\cos 28^\circ 17'} = 93.8 \text{ 克}.$$

**例 2.** 物體  $A$  及  $B$  繫於繩之兩端, 各棲止於一光滑斜面上, 保持平衡, 繩則跨過一毫無摩擦阻力之固定滑車 (圖 69). 兩斜面之傾角各為  $\alpha_1 = 45^\circ$  及  $\alpha_2 = 60^\circ$ . 設  $A$  體之重  $W_1 = 2 \text{ kg}$ , 求  $B$  體之重  $W_2$ , 繩之張力, 及兩斜面對於  $A, B$  兩體之反作用力.

命  $T$  為繩之張力,  $N_1$  及  $N_2$  為斜面對於  $A$  及  $B$  二體之反作用力, 因無摩擦作用,  $N_1$  及  $N_2$  各與斜面正交. 將  $A, B$  兩體畫分, 使各自成一系統.  $A$  體所受之力有三: 一為其重量  $W_1$ , 一為繩之張力  $T$ , 一為斜面之反作用力  $N_1$ . 同理  $B$  體亦受有三力為  $W_2, T$  及  $N_2$ .

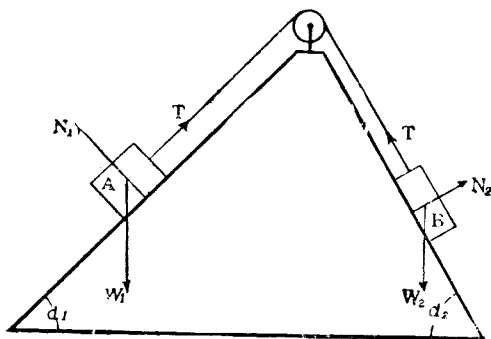


圖 69.

沿斜面及其正交之方向上,寫出  $A$  體之平衡條件爲:

$$W_1 \sin \alpha_1 - T = 0, \quad N_1 - W_1 \cos \alpha_1 = 0.$$

同樣,  $B$  體之平衡條件爲:

$$W_2 \sin \alpha_2 - T = 0, \quad N_2 - W_2 \cos \alpha_2 = 0.$$

由此得

$$T = W_1 \sin \alpha_1 = 2 \sin 45^\circ = \sqrt{2} = 1.414 \text{ kg},$$

$$N_1 = W_1 \cos \alpha_1 = 2 \cos 45^\circ = \sqrt{2} = 1.414 \text{ kg},$$

$$W_2 = \frac{W_1 \sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{2 \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} = 1.633 \text{ kT},$$

$$N_2 = W_2 \cos \alpha_2 = W_1 \frac{\sin \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{2 \sin 45^\circ}{\tan 60^\circ} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.816 \text{ kg}.$$

**例 3.** 有起重機, 機臂重  $W = 200$  磅, 起重  $F' = 2,500$  磅. 當機臂與垂直方向向上成  $45^\circ$ , 鍊與水平方向向下成  $15^\circ$  時, 求機架對於機臂下端之反作用力及鍊之張力.

將重物, 機臂, 鍊及滑車作為一系統, 並設滑車之大小與鍊之重量為可忽略不計者. 在此系統內 (圖 70), 所受之外力有四:

1. 為機架對於機臂之下端  $A$  之反作用力  $R$ , 其方向為未知;
2. 機臂之重量  $W$ , 鉛垂向下, 作用於機臂之中點 (即重心) 上;
3. 重物之重量  $F'$ , 在機臂上端  $B$  之鉛垂線上;
4. 鍊之張力  $T$ , 沿鍊作用於機臂之上端  $B$ .

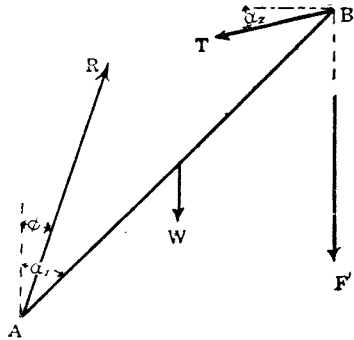


圖 70.

設  $X, Y$  為  $R$  在水平及鉛垂方向之分力. 在此二方向上, 有:

$$X - T \cos \alpha_2 = 0, \quad Y - T \sin \alpha_2 - W - F' = 0,$$

又求諸力對於  $A$  點之矩, 有

$$-\frac{W}{2} \sin \alpha_1 + F' \sin \alpha_1 - T \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = 0.$$

由此三式解之，得

$$T = \left( -\frac{W}{2} + F' \right) \frac{\sin \alpha_1}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)} = (100 + 2,500) \frac{\sin 45^\circ}{\cos(45^\circ + 15^\circ)} = 368 \text{ 磅};$$

$$X = \left( -\frac{W}{2} + F' \right) \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_2}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)} = 368 \cos 15^\circ = 355 \text{ 磅},$$

$$Y = F' + W + \left( -\frac{W}{2} + F' \right) \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)} = 2,700 + 368 \sin 15^\circ = 2,795 \text{ 磅};$$

及  $R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(355)^2 + (2,795)^2} = 2,817 \text{ 磅}.$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{X}{Y} = \tan^{-1} \frac{355}{2,795} = 7^\circ 15'.$$

### 習題十三

1. 正方形由二對角線等分成四個三角形，去其一，求所餘部分之重心。

2. 棒長 4 米，用相距 2 米之兩支架支住，在其二端各懸 20 及 30 仟克重之物體，須如何放在支架上，始能使兩支點上受到相等之力作用？

3. 一物體重 4 公斤，放在板上，如將板之一端舉高，當板面傾斜成爲  $30^\circ$  時，物體即將滑動。如將板之傾斜增加至  $60^\circ$ ，以水平方向用手推住物體，使不下墮，求手所用之力。

4. 一木橫臥地上，於其一端用力 100 磅即可略爲舉起；在他端舉之，需力 140 磅，方能略爲舉起，求木之重。若於其中點略舉一端，需力多少？

5. 一物體之質量爲 100 克，以等長而相同之三線懸之。三線

之一端同繫於物體之一點上，其他一端則分繫於三鉤，三鉤位在一水平正三角形之頂點。三角形之邊與懸線等長。求各線中之張力。

6. 梯長 20 呎，分成 19 步，重 20 磅，斜倚於牆，而與之成  $30^\circ$  角。今有重 140 磅之人向上至第 14 步時，梯開始滑動，求梯與地面之摩擦係數。

7. 一木柱長 12 呎，重 40 磅，上細而下粗，其二端截面面積之比為 1 : 2，斜靠於光滑之牆頂，突出牆外之長為 3 呎，與地面成  $60^\circ$  角。求地面所受木柱之力。

8. 有兩玻璃珠，半徑為 2 厘米，各重 80 克，靜止於光滑之半球形碗中，碗之半徑為 9 厘米。求兩珠間及各珠與碗壁間之作用力。

9. 有一門，寬 3 呎，高 8 呎，重 90 磅，其鉸鏈距門之上下邊各為 1 呎。設其重量為兩鉸鏈所平均支持，問兩鉸鏈所受之力各為若干？

10. 有二木梯，各長 10 呎，重 20 磅，於其上端用鉸鏈連接，而於距下端 1 呎之處，以 4 呎之繩互相連接，成安全梯，然後豎立於光滑之地板上。設有體重 150 磅之人，坐在梯頂，求繩之張力及鉸鏈對於兩分梯之作用力。

11. 有正方桌，缺其一腳，置重物於缺腳之角上，當其重為桌重之 2 倍時，桌即傾斜，求地面之摩擦係數。

## 第九章 固體繞軸之轉動

物體繞一固定之軸而轉動，整個物體之位置，可以一變數——旋轉角  $\theta$  ——表示之，因而有角速度  $\omega$  及角加速度  $\alpha$ ，均可以在轉動軸上之向量表示之。吾人亦知物體內各點運動之軌道為圓周，及各點速度與加速度之值 (§22)。至於使物體轉動之原因，及其與物體角加速度之關係，則在運動學中未有論及。物體既由無數之質點而成，整個物體之運動，當為此無數質點之運動之集成。質點運動，受第四章所述力學基本定律之支配，則固體轉動定律，亦當能由力學基本定律推導而得。

§66. 轉動之力學的觀念 軸上之點，完全固定，自不待言。物體上其他各點，亦非自由者，如過軸之任何平面上各點，在此平面內，不復能作任何運動矣。在此等平面內，施以任何大力，對於物體之轉動，將不生絲毫影響。如力  $F$  與軸相交 (圖 71)，則可將其作用點傳至軸上，而為軸之反作用力所抵消。即與軸平行之力如  $F'$  者，亦可分解成二力，各與軸相交，而傳至軸上任意二點  $O$  及  $O'$ 。凡此之力，僅足以增加軸之反

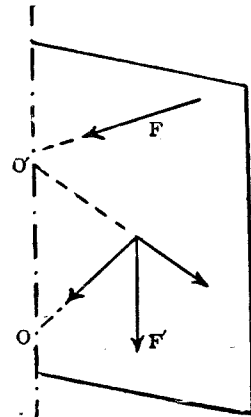


圖 71.



作用而已。此種與軸在同一平面上之力，其對於軸之矩恆為零。故凡對於旋轉軸，其矩為零之力，於轉動不起作用。

開門關門，必須用一不完全在門平面上之力。

設有一均勻之細棒，繞通過其一端  $O$  之軸而轉動，其角加速度為  $\alpha$  (圖 72 甲)。

將細棒分為若干小部分，如  $m_1, m_2, m_3, \dots$  等，此等小部分，各作以  $O$  為心之圓周運動，其加速度各為  $\alpha r_1, \alpha r_2, \alpha r_3, \dots$  等， $r_1, r_2,$

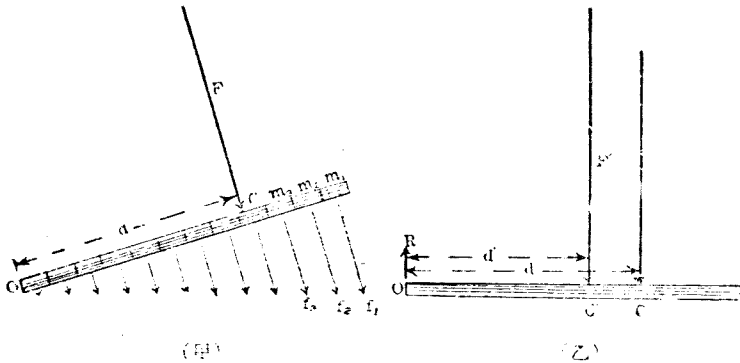


圖 72.

$r_3, \dots$  等表  $m_1, m_2, m_3, \dots$  等至  $O$  軸之距離，則依牛頓第二定律，須有力  $f_1, f_2, f_3, \dots$  等，各為：

$$f_1 = m_1 \alpha r_1, \quad f_2 = m_2 \alpha r_2, \quad f_3 = m_3 \alpha r_3, \quad \dots$$

此等力皆互相平行，可有一合力  $F$  為

$$F = f_1 + f_2 + f_3 + \dots,$$

作用於  $f_1, f_2, f_3, \dots$  等平行力之心  $C$  上 (§ 62).  $C$  至  $O$  點之距離  $d$  為

$$\vec{d} = \frac{f_1 r_1 + f_2 r + f_3 r + \dots}{F},$$

$$\begin{aligned} \text{即 } Fd &= m_1 r_1^2 \alpha + m_2 r_2^2 \alpha + m_3 r_3^2 \alpha + \dots \\ &= \alpha (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots) \\ &= \alpha \Sigma m_1 r_1^2. \end{aligned}$$

是使細棒轉動得角加速度  $\alpha$ ，必須施一力  $F$ ，其對於旋轉軸之矩為  $Fd$  者。

$F$  力為  $f_1, f_2, f_3, \dots$  諸平行力合併而來，其位置與大小，完全確定，而為惟一者。倘用他一平行之力  $F'$ ，作用於  $C'$  點， $C'$  與  $O$  間之距離為  $d' = Fd/F'$ ，能得轉動之同樣結果否（圖 72 乙）？

$\vec{F}'$  力與  $\vec{F}$  力，大小地位，均不相同，自非相等。 $\vec{F}$  與  $\vec{F}'$  之差，即  $\vec{F} - \vec{F}' = \vec{F} + (-\vec{F}')$ ，為施於  $O$  點之  $\vec{R}$  力（§ 59），其值為  $R = F' - F$ 。但  $\vec{R}$  力經過軸上  $O$  點，將為軸之反作用力所抵消，與轉動無關。單就物體繞軸之轉動而言， $\vec{F}'$  力與  $\vec{F}$  力將有相同之效用。

由  $d'$  與  $d$  之關係（ $d' = Fd/F'$ ），吾人知  $\vec{F}'$  及  $\vec{F}$  對於旋轉軸之矩相等。

由此觀之，對於旋轉軸之矩相等之兩力，先後施於繞軸轉動之同一物體上，得相等之角加速度。

實際上  $\vec{F}'$  力作用於細棒上之  $C'$  點時，立即分解為  $\vec{F}$  與  $\vec{L}'$  二力， $\vec{L}'$  與  $\vec{R}$  相等而相反，增加軸之反作用。 $\vec{F}$  復分解而分配於  $m_1, m_2, m_3, \dots$  各小部分上，成為  $f_1, f_2, f_3, \dots$  等，以得物體轉動之  $\alpha$  角加速度。此完全由於力在剛體內之可傳性（§ 57），即所謂剛體之剛性也。

又如有一細環（圖 73），繞通過其心  $O$  而垂直於環面之軸轉動。

將細環等分爲若干小部分，如  $m_1, m_2, m_3, \dots$  等，其加速度同爲  $\alpha r$ 。依據牛頓第二定律，應有力  $f_1 = m_1 \alpha r, f_2 = m_2 \alpha r, f_3 = m_3 \alpha r, \dots$ ，各作用於  $m_1, m_2, m_3, \dots$  上。

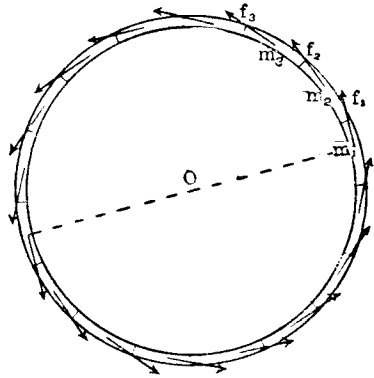


圖 73.

此等力之方位及方向各不相同，不能依代數相加，其在任何軸上之分力之和且將爲零。但  $f_1, f_2, f_3, \dots$  中，成對相等而相反，即成

爲若干力偶，其力矩爲  $2rf_1, 2rf_2, \dots$  等，可以相加。即

$$2rf_1 = (m_1 + m_1')r^2\alpha, \quad 2rf_2 = (m_2 + m_2')r^2\alpha, \quad \dots$$

相加得總力矩

$$\begin{aligned} T &= m_1 r^2 \alpha + m_2 r^2 \alpha + \dots + m_1' r^2 \alpha + m_2' r^2 \alpha + \dots \\ &= \alpha r^2 \Sigma m_i = Mr^2 \alpha, \end{aligned}$$

$M$  爲細環之質量。

若將此環捶得更細，即使其半徑加大，質量不變，則使其轉動得角加速度  $\alpha$  之力矩，必須更大。

當細棒與細環繞軸轉動時， $m_1, m_2, m_3, \dots$  各部分，除其沿軌道切線上之加速度  $\alpha r$  外，尚有在半徑上之向心加速度  $\omega^2 r$ ，即須有向心力  $m_1 \omega^2 r_1, m_2 \omega^2 r_2, \dots$  等。此等向心力以剛體剛性之故，均傳至旋轉軸上，增加或減少軸之反作用力。

§ 67. 轉動定律 固體繞一固定之軸  $\Delta$  而轉動，設  $\alpha$  爲其角加速度，則其各質點如  $m_1, m_2, m_3, \dots$  各繞軸作圓周運動，其切線加速

度爲

$$a_1 = \alpha r_1, \quad a_2 = \alpha r_2, \quad a_3 = \alpha r_3, \quad \dots;$$

所受之力爲

$$f_1 = m_1 \alpha r_1, \quad f_2 = m_2 \alpha r_2, \quad f_3 = m_3 \alpha r_3, \quad \dots;$$

此等力對於旋轉軸  $\Delta$  之矩各爲:

$$L_1 = f_1 r_1 = m_1 \alpha r_1^2,$$

$$L_2 = f_2 r_2 = m_2 \alpha r_2^2,$$

$$L_3 = f_3 r_3 = m_3 \alpha r_3^2,$$

$$\dots\dots\dots,$$

此等力矩, 均在  $\Delta$  軸上,

可以相加, 得總矩爲

$$\begin{aligned} L &= m_1 \alpha r_1^2 + m_2 \alpha r_2^2 \\ &\quad + m_3 \alpha r_3^2 + \dots\dots\dots \\ &= \alpha \sum m_i r_i^2. \end{aligned}$$

命  $I = \sum m_i r_i^2$ , 則有

$$L = I \alpha,$$

是爲物體繞軸轉動之方程式,  $L$  爲所受外力對於旋轉軸之總矩。

物體繞軸轉動之情狀, 完全由此一式決定。若所加之力對於  $\Delta$  軸之矩爲零, 即  $L = 0$ , 則物體或靜止, 或作勻速轉動。

求軸對於旋轉體之反作用力, 自然非此一方程式所能解決, 吾人將於後 § 72 之複擺中論及。

§ 68. 轉動慣量 前二節中, 所遇

$$I = \sum m r^2$$

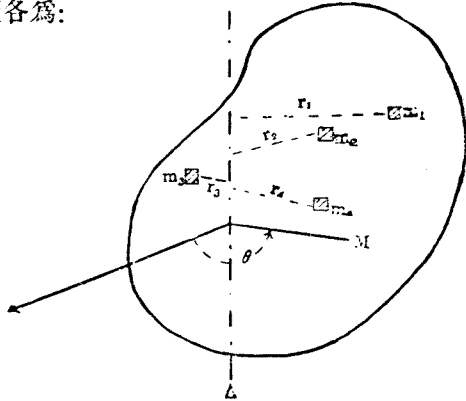


圖 74.

之一量，為物體上各點之質量與其至轉動軸之距離平方之相乘積之和，稱為轉動慣量 (moment of inertia)。此乃一純量，且恆為正。倘轉動軸更換，則物體之轉動慣量顯然改變，故言某物體之轉動慣量時，恆須指明其轉動軸。

命  $\Delta_G$  為與  $\Delta$  平行而通過物體重心之軸 (圖 75)， $d$  為  $\Delta_G$  與  $\Delta$  間之距離， $I_G$  為物體對於  $\Delta_G$  軸之轉動慣量。吾人可證明對於  $\Delta$  軸，物體之轉動慣量為

$$I_{\Delta} = I_G + Md^2.$$

轉動慣量為力矩與其所生之角加速度之比，一如質量為力與其所生之加速度之比然。

任何物體之轉動慣量，皆可由實驗測定，有規則而均勻之體，其轉動慣量可用積分學求之。茲將常遇物體之轉動慣量，表列於後 (見次頁)，以備參考：

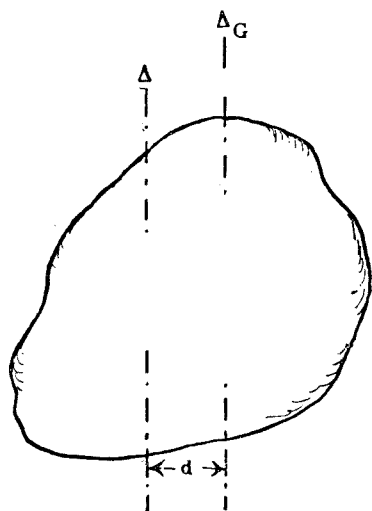


圖 75.

由其定義及該表觀之，物體之轉動慣量，可視作質量與某一相當長度之平方之乘積，即

$$I = Mk^2,$$

$k$  稱為迴轉半徑 (radius of gyration)。例如圓球對於通過其心之軸

之迴轉半徑為  $\sqrt{\frac{2}{5}} a$ 。

表 3. 均勻物體之轉動慣量

物體 ( $M$ 表其質量)	轉動軸之位置	轉動慣量
桿 (長 $l$ )	通過一端, 垂直於桿長	$\frac{1}{3} Ml^2$
桿 (長 $l$ )	通過桿中心, 垂直於桿長	$\frac{1}{12} Ml^2$
圓片 (半徑 $a$ )	通過中心, 垂直於圓面	$\frac{1}{2} Ma^2$
圓柱體 (半徑 $a$ , 長 $l$ )	與柱體之軸重合	$\frac{1}{2} Ma^2$
圓柱體 (半徑 $a$ , 長 $l$ )	通過中心, 垂直於柱體之軸	$M\left(\frac{a^2}{4} + \frac{l^2}{12}\right)$
圓球 (半徑 $a$ )	通過球心	$\frac{2}{5} Ma^2$

§ 69. 衝量矩與角動量 若力矩  $L$  作用之時間  $t$  甚短, 則乘積  $Lt$  稱為衝量矩 (moment of impulse).

$$\text{由} \quad L = I\alpha,$$

$$\text{得} \quad Lt = I\alpha t.$$

命  $\omega$  表在  $t$  時之角速度,  $\omega_0$  表初角速度, 則  $\alpha t = \omega - \omega_0$ , 於是

$$Lt = I\omega - I\omega_0.$$

$I\omega$  為轉動慣量與角速度之乘積, 稱為角動量 (angular momentum), 以其與動量  $mv$  表面形式相似之故也; 實則為動量之矩, 應稱動量矩 (moment of momentum). 故衝量矩等於動量矩之變化.

如所加之力矩為零, 則

$$I\omega = I\omega_0 = \text{常數}.$$

在此情形下, 倘轉動慣量驟然變小, 則角速度增大.

例如有一小凳, 可以光滑轉動, 人立其上, 兩手執啞鈴平伸, 他人

推之轉動。轉動後忽將兩手下垂，則轉動加快(圖 76)。

靜立於凳上之人，自行開始將其身體之某部向右轉動時，則他部必將向左轉動，以保持其動量矩之恆為零。

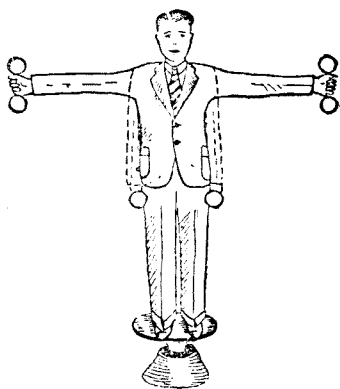


圖 76.

§70. 轉動能 固體受  $F$  力之作用，繞軸而轉動，固體各質點之動能為

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2, \quad \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2, \quad \dots\dots$$

所有各質點之動能之和，為該固體轉動時之動能，稱轉動能(kinetic energy of a rotating body)，即

$$\Sigma \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \Sigma m_1 r_1^2 = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

又當固體轉過  $\theta$  角時， $F$  力所作之功為

$$F \cdot r\theta = Fr \cdot \theta = L\theta,$$

即力矩  $L$ ，當角移  $\theta$  時，所作之功為  $L\theta$ 。

惟  $L = I\alpha$ ，而  $2\alpha\theta = \omega^2 - \omega_0^2$ ，

故有 
$$L\theta = \frac{1}{2} I \omega^2 - \frac{1}{2} I \omega_0^2,$$

即力矩所作之功，等於固體轉動能之增加，是轉動之功能定律也。

衝擊擺 設有一固體  $M$ ，可繞  $\Delta$  軸轉動，此軸與圖之平面正交(圖 77)。一動點  $P$ ，其質量為  $m$ ，以速度  $v$  與在平衡位置靜止之固體

$M$  相撞，且即留住在此體內，於是此固體及動點，將以角速度  $\omega$  開始旋轉。試求  $v$  與  $\omega$  之關係。

先論固體  $M$  及動點  $P$  所成之系統，對於  $\Delta$  軸之動量矩之和。在碰撞前，固體靜止， $P$  之動量為  $mv$ ，而其動量之矩為  $mv d$ 。碰撞後，全系統繞  $\Delta$  旋轉，則  $M$  體之動量矩為  $I\omega$ ， $P$  點之動量矩為  $m\omega d^2$ 。故在碰撞前後，動量矩之改變為

$$I\omega + m\omega d^2 - mv d.$$

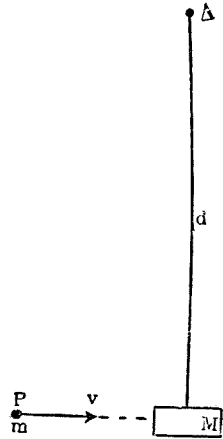


圖 77. 衝擊擺

再論衝量矩：當碰撞時， $M$  與  $P$  間之衝力，係內衝力，互相抵消； $\Delta$  軸之反作用為一外衝力，但與  $\Delta$  軸相交，其矩為零。因此，有

$$(I + md^2)\omega - mv d = 0,$$

即

$$v = \omega \frac{I + md^2}{md}.$$

由  $\omega$  之大小，可以知動點  $P$  之速度。此即通常用以測定鎗彈之初速度的衝擊擺 (ballistic pendulum, 圖 78) 之原理。

實際上， $\omega$  之值乃由觀測  $M$  旋轉升高所能達到之最大擺角  $\theta_m$  而得。由功能定律，有

$$\frac{1}{2}(I + md^2)\omega^2 = (\bar{M} + m)gd(1 - \cos \theta_m);$$

與上式消去  $\omega$ ，因得



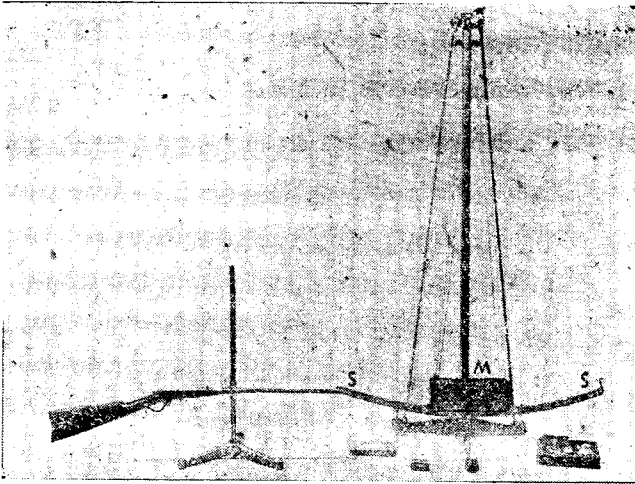


圖 78. 用衝擊擺以測定鎗彈之速度

$$v = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{2gy(M+m)(I+md^2)(1-\cos\theta_m)}{d}}$$

§71. 移動與轉動公式之比較 轉動與移動所得諸公式,形式上完全相似,有如下表:

移 動	質量移動與轉動之關係 $r =$ 質點與軸之距離	轉 動
位 移 ( $s$ )	$s = r\theta$	角 移 ( $\theta$ )
線 速 度 ( $V$ )		角 速 度 ( $\omega$ )
$V = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$	$V = r\omega$	$\omega = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$
線 加 速 度 ( $a$ )		角 加 速 度 ( $\alpha$ )
$a = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$	$a = r\alpha$	$\alpha = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$

等加速移動關係：—		等加速轉動關係：—
$V = V_0 + at$		$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$s = V_0 t + \frac{1}{2} at^2$		$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$
$V^2 = V_0^2 + 2as$		$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$
質 量 ( $m$ )	$I = mr^2$	轉動慣量 ( $I$ )
力 ( $F$ )	$\mathcal{I} = Fr$	力 矩 ( $\mathcal{I}$ )
移動定律: $F = ma$		轉動定律: $\mathcal{I} = I\alpha$
衝 量 ( $Ft$ )	$\mathcal{I}t = (Ft)r$	衝 量 矩 ( $\mathcal{I}t$ )
動 量 ( $mV$ )	$I\omega = (mV)r$	角 動 量 ( $I\omega$ )
$Ft = m(V - V_0)$		$\mathcal{I}t = I(\omega - \omega_0)$
動能 = $\frac{1}{2} mV^2$	$\frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} mV^2$	轉動能 = $\frac{1}{2} I\omega^2$

但物體轉動，係由質點移動推演而來，同是根據力學之基本定律所得。切勿以上面之列表，轉動與移動有似分庭抗禮，而認為各有所本也。

§ 72. 複擺 受重力作用，而繞一水平軸旋轉之固體，稱為複擺 (compound pendulum)。

取懸軸為  $Oz$  軸，正交於懸軸而含重心  $G$  之鉛垂面，為  $xOy$  平面， $Ox$  軸鉛垂向下 (圖 79)。

$\theta$  表  $OG$  與  $Ox$  間之角， $d$  為  $OG$  之長， $M$  為複擺之質量，運動之方程式為

$$I\alpha = -Mgd \sin \theta,$$

即

$$\alpha = -\frac{Mgd}{I} \sin \theta;$$

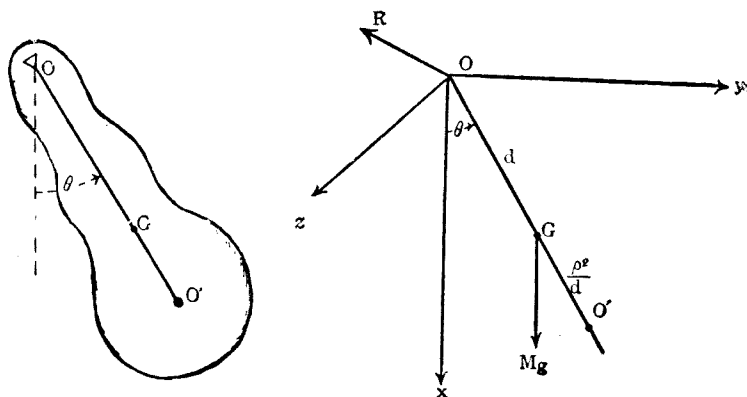


圖 79. 複 擺

完全與單擺 (§ 46) 之運動方程式

$$\frac{a}{l} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

相似，即可知複擺之週期為

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mdg}}$$

若取單擺之長為

$$l = \frac{I}{Md} = \frac{k^2}{d}, \quad (k \text{ 為複擺之迴轉半徑})$$

則與複擺之週期相同，稱為同步擺。

今於  $OG$  之延長線上，取  $OO' = l$ ，得  $O'$  點。則就週期而言，複擺之運動，宛若其質量全集中於此  $O'$  點者。 $O'$  稱為擺動心 (center of oscillation)。

命  $\rho$  為複擺對於重心  $G$  之迴轉半徑，則有 (§ 68)

$$k^2 = r^2 + d^2,$$

因之

$$l = \frac{k^2}{d} = d + \frac{\rho^2}{d},$$

是見

$$GO' = \frac{\rho^2}{d}.$$

由此,有

$$OG \cdot GO' = \rho^2$$

之關係,即若複擺倒懸於通過  $O'$  點而平行於  $Oz$  之軸,則其擺動心將適為  $O$  點. 順懸倒懸,週期相同;換言之, $O$  與  $O'$  可互相調換.

於  $O$  及  $O'$  點,各裝懸軸之擺,稱為可逆複擺 (reversible pendulum). 應用此理,以可逆複擺測量重力加速度,甚為準確. 因  $O, O'$  二點間之距離,完全確定而易量,較之單擺之或以線長加擺錘半徑為擺長者,更無可訾議也.

**擺軸之反作用力** 若複擺以  $xOy$  平面為對稱平面,則擺軸對於擺之反作用力  $R$ ,即在該平面上,作用於懸點  $O$ . 命  $R$  在  $OG$  及其正交線上之分力為  $P$  及  $Q$ .

擺,除  $R$  外,受有重力  $Mg$ ,作用於重心  $G$  上. 重心  $G$  之軌道為圓周,有沿  $GO$  向心之加速度  $\omega^2 d$ ,及垂直於  $GO$  之加速度  $\alpha d$ . 故重心  $G$  之運動方程式為:

$$Mg \cos \theta + P = -M\omega^2 d,$$

$$-Mg \sin \theta + Q = M\alpha d;$$

由此,得

$$P = -M\omega^2 d - Mg \cos \theta,$$

$$Q = M\alpha d + Mg \sin \theta.$$

但 
$$\alpha = -\frac{gd}{k^2} \sin \theta;$$

又由功能定律,

$$\frac{1}{2} I \omega^2 - \frac{1}{2} I \omega_0^2 = Mgd(\cos \theta - \cos \theta_0),$$

即 
$$\omega^2 = \frac{2gd}{k^2} \cos \theta + \omega_0^2 - \frac{2gd}{k^2} \cos \theta_0;$$

以  $\alpha$  及  $\omega^2$  之值, 代入  $P$  及  $Q$  式內, 得:

$$P = -Mg \left( 1 + \frac{2d^2}{k^2} \right) \cos \theta - Md \left( \omega_0^2 - \frac{2gd}{k^2} \cos \theta_0 \right)$$

$$Q = Mg \left( 1 - \frac{d^2}{k^2} \right) \sin \theta = Mg \cdot \frac{\rho^2}{k^2} \sin \theta.$$

若  $\rho=0$ , 即為單擺之情形時,  $Q=0$ , 反作用力  $R$  沿  $OG$  方向, 即單擺之線之張力。

§ 73. 瞬時軸 轉動之物體, 其轉動軸有時非固定不變者, 例如沿地面轉動之車輪, 其輪軸係以一速度而前進。

車輪沿地面轉動前進, 在每一瞬時間, 輪上各點均以輪與地面之接觸點為中心而旋轉, 故通過此點而與輪軸平行

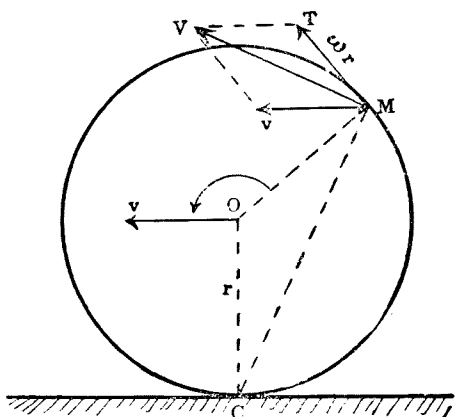


圖 80.

之直線，稱為轉動之瞬時軸 (instantaneous axis of rotation)。

輪周上一點  $M$  (圖 80)，以角速度  $\omega$  繞輪軸轉動，而有沿切線  $MT$  之速度  $\omega r$ ；輪軸又以水平速度  $v$  前進；故  $M$  點之速度  $V$ ，為  $\omega r$  及  $v$  之合併速度。

車輪在地面旋轉一周之時間為  $2\pi/\omega$ ，在此時間之內，輪上各點 (包括輪軸在內) 皆前進  $2\pi r$ ，故輪軸前進之速度

$$v = \frac{2\pi r}{\frac{2\pi}{\omega}} = \omega r.$$

則  $MTV$  與  $MOC$  兩三角形相似，有

$$\frac{V}{\omega r} = \frac{MC}{r},$$

即  $V = \omega \cdot \overline{MC}$ ,

且  $\vec{V} \perp \overline{MC}$ .

故輪之運動可視為繞瞬時軸  $C$  而旋轉，其角速度仍為輪繞輪軸之角速度  $\omega$ 。

§74. 滾動摩擦 在地面上曳重物，需力頗大；若將物體置於轆子 (roller) 上而曳之，則所需之力，可小得多。由是可知滾動摩擦 (rolling friction) 較滑動摩擦為小。

車輪為人類最重要發明之一，

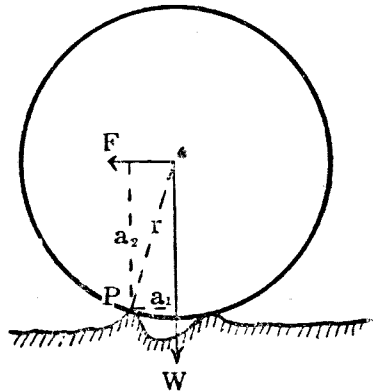


圖 81.

乃以滾動摩擦代替滑動摩擦者。崎嶇道上，輪徑愈大，其所遇之阻礙，愈易越過，如圖 81 所示。欲使車輪向左前進，輪之全部必繞  $P$  點轉動，故拉力  $F$  對於此點之力矩  $F a_2$ ，至少必須與重力  $W$  所生之力矩  $W a_1$  相等，即

$$F \geq W \frac{a_1}{\sqrt{r^2 - a_1^2}}$$

輪之半徑  $r$  愈大者，所需之拉力愈小。

輪緣之外，常護以橡膠之胎，其效用在遇微小之障礙物，胎即被壓凹陷，而於越過此等障礙物時，車身可不致上下起伏，工作之消耗，較之堅硬之輪緣者為少。

在現代機器中，旋轉軸之裝置，所用軸承 (bearing) 多採球軸承 (ball bearing)，滾動摩擦甚小，較之普通軸承為優；因在普通軸承中，軸之接觸處  $C$ ，仍帶滑動也 (圖 82)。

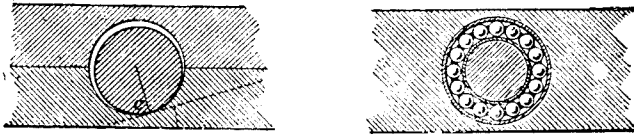


圖 82. 軸 承

§ 75. 迴轉儀 倘固體之重心適在轉動軸上，除重量外，又無其他外力之作用，則固體必以勻角速度繼續轉動 (§ 69)，其轉動軸之方位，雖未經吾人加以限制，在空間中亦將為固定。

迴轉儀為一邊緣特重之輪盤 (使其轉動慣量特大)，可繞通過其心之軸而旋轉，以有支點之兩圓環，支而懸之，稱為萬全懸掛 (gimbal bearings)，如圖 83 所示。在此種裝置中，旋軸可居任何方位，但常通

過一定點，即固體之重心。故迴轉儀爲繞一定點而轉動之固體。

迴轉儀一經轉動，其轉動軸之方位不變，恆指定向。應用此理，作爲迴轉羅盤。迴轉羅盤在航海與飛行之應用，有二大利益。其一不受船內或飛機上鋼鐵部分之擾亂，其二地磁之偏角，即所謂錯向者，可以免除。

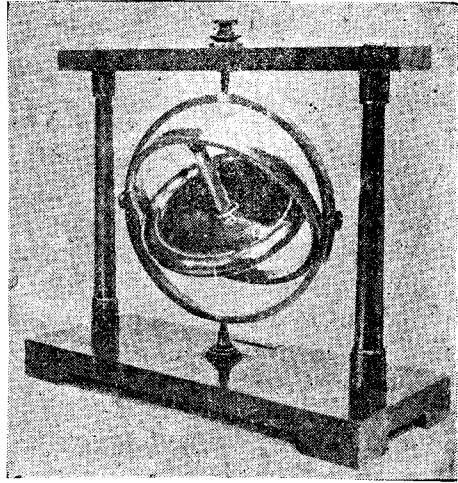


圖 83. 迴轉儀

當迴轉儀極速轉動時，於其軸之一端，懸一重物（懸體之重，對迴轉儀言，爲不大者）。則迴轉儀之轉動軸，並不下倒，而繞鉛垂線作進動 (precession)。倘懸於軸之他一端，進動方向相反。

此種進動，初視或覺奇異，其理亦頗簡單。因固體繞軸  $Oa$  自轉，其重心不在軸之支點  $O$  上時（圖 84），則重量對於與  $Oa$  軸正交之水平軸  $Ob$  有力矩爲  $L = Mgl \sin \alpha$ ， $\alpha$  表  $Oa$  軸與鉛垂線所成之角。在短時間  $t$  內，此力矩使固體在  $Ob$  軸上增加角動量，其值等於  $Lt$  (§ 69)，與原來在  $Oa$  上固體之自轉角動量  $I\omega$  相合併，即得總角動量，在  $OR$  方向。於是在  $t$  時間內，迴轉儀之軸，在  $aOb$  平面內轉過  $\theta$  角爲

$$\theta = \frac{Lt}{I\omega} = \frac{Mgl t \sin \alpha}{I\omega}.$$



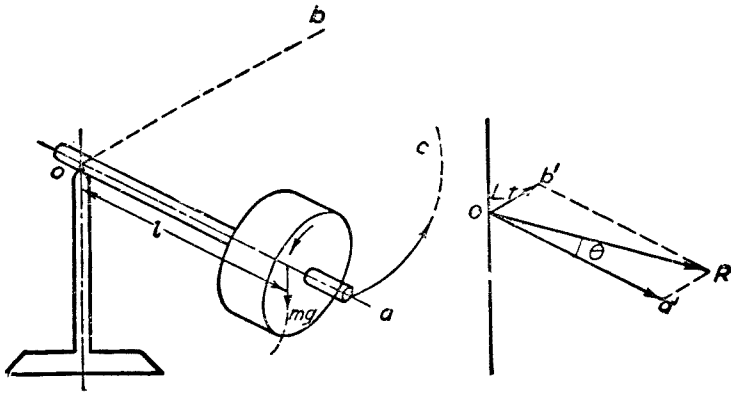


圖 84.

$\theta$  角在水平面上之正射影  $\psi$  ( $\psi = \theta \sin \alpha$ ), 稱進動角. 乃得平均進動角速度為

$$\Omega = \frac{\psi}{t} = \frac{Mgl \sin^2 \alpha}{I\omega}.$$

迴轉儀之轉動慣量既大, 自轉極速, 故其進動常為甚緩之旋轉.

今若施一橫力, 以期增加進動之角速度, 其結果則不然. 蓋此橫力所成之力矩, 與  $Oa$  及  $Ob$  正交, 其所生之角加速度亦與  $Oa$  正交, 於是迴轉儀之軸升起. 反之, 若施一橫力以期減小進動速度, 則其結果乃使迴轉儀之軸降落.

又若施一縱力, 意欲迫使迴轉儀之軸降落, 其結果亦不然. 蓋此縱力所生之力矩, 與迴轉儀之重量力矩一樣, 均使迴轉儀進動而已. 反之, 若施一縱力, 欲令迴轉儀之軸升起, 其結果則減小迴轉儀之進動, 或使其作反向之進動.

凡上所述, 顯示迴轉儀對於外加力矩之反作用, 此等反作用, 為

值甚大。根據此理，迴轉儀又可為穩定火車，輪船及飛機等之用。

## 習題十四

1. 求轉動能及動量矩之因次。

2. 有一物體，質量為 200 克，沿一水平圓周而轉動，每分鐘 12 轉，圓周之半徑為 40 厘米。今使一 4,000 達因之力，以阻止其運動，力之方向恆與其運動之方向相反。問經若干時後，該物體始完全靜止？又問自施力之時起，該物體共轉幾周，方完全靜止？

3. 有一質量為 2,500 克之環，其內外直徑各為 200 及 210 厘米，轉動於通過其中心而正交之軸線，每分鐘 40 次。今加一力於其邊上，令其在一分鐘內，完全停止運動。求此力之值。

4. 有一輪軸，重 50 仟克，其軸及輪之半徑各為 4 及 25 厘米，輪之厚與軸之長各為 3 及 100 厘米。求此輪軸對於其中心軸線之迴轉半徑。

將此輪軸橫支於水平位置，軸上繞繩，繩之自由端懸一重物  $W = 20$  仟克，由靜止下降。求重物落下之加速度及繩之張力。

5. 有長 1 米之桿，重 1 仟克，於離端 10 厘米之處，安置刀口而懸之，求其擺動週期與擺動心。

6. 鎗彈之質量為 20 克，以每秒 500 米之速度水平射入一木塊中，木塊之質量為 2 仟克，以 2 米長而無重量之繩懸於空中。若鎗彈留於木塊之中，則木塊懸線將因而轉過何角度？

7. 設鞦韆之二繩極硬，可視之為二棒，運動時毫不彎曲，同繞一水平軸而擺。人立於踏板之上。應作若何運動，方能使鞦韆之擺動

加強?此時動能之增加,自必由於人之運動,試計算每次擺動中所能增加之能量.

8. 一金屬圓板之質量為 8 仟克,半徑為 30 厘米,直立於地面上滾動,每分鐘滾動 15 轉. 求: (1) 圓心對於地面之線速度; (2) 周緣上最高之點對於地面之速度; (3) 周緣上最低之點對於地面之速度; (4) 圓板之轉動能.

9. 一圓柱形之砲彈,半徑為 15 厘米,質量為 20 仟克,順其柱軸之方向而射出,其直線前進速度為每秒 600 米,同時於每秒鐘內繞其柱軸轉動 6 次. 求砲彈之動能.

10. 有一圓柱體,重 25 仟克,半徑為 5 厘米. 在一傾斜角為  $10^\circ$  之光滑斜面上由靜止而滾下,求其加速度. 若此圓柱體係空心的(大小及質量與前相同),則其滾下之加速度為何?

## 第十章 簡單機械

§ 76. 機械 吾人在日常生活中，利用力學結果，發明機械，以爲作功之具。工業上之機械，可分爲原動機械與工作機械兩種。原動機械乃將自然界中原有之任何形式的能量，變爲一種合乎吾人所需形式之能量，如風車，蒸汽機，水力發電機及電動機等皆屬之。人與馬亦爲原動機械。工作機械則將自原動機械供給之能量，變爲吾人所需完成之工作，如車床，鑽床，刨床等，以及運輸機，起重機，壓力機等皆屬之。

§ 77. 機械效率 機械所輸出之能或其所完成之功，恆小於吾人輸入於機械中者，因在機械動作中，常消耗一部分之能或功，以抵抗摩擦阻力，而化成無效之熱。輸出與輸入之功  $W_o$  與  $W_i$  之比，恆小於 1，通常以百分數表之，稱爲機械效率 (mechanical efficiency)，即

$$e = \frac{W_o}{W_i}.$$

§ 78. 簡單機械 一切機械均由若干簡單之基本機件組合而成，即所謂簡單機械 (simple machine) 是也。此種簡單機械，實不過力之變換而已。通常用小力，求大力，所增加之倍數  $n$ ，由機械之構造而定，稱爲機械利益 (mechanical advantage)。吾人所用力，其作用之距離，亦必  $n$  倍於機械所得力之作用距離，如是兩功相等。故用

小力,得大力,實以大移動變小移動換來,天下事固無不勞而獲者也!

簡單機械,可分為二大類,即槓桿類及斜面類。槓桿類機械,除槓桿本身外,有輪軸及滑車等;斜面類機械,則除斜面本身外,有尖劈及螺旋等。

§ 79. 槓桿類機械 凡物體之能繞一軸或一點轉動者,皆可視作槓桿。所謂槓桿者,通常有三力作用於其上,其中之一力,乃反作用力,作用於該軸或該點上。此定軸或定點,稱為支點。其他之二力,係自槓桿體外加於槓桿之上,因之於槓桿支點處,即發生反作用力,其量等於外加二力之合力,而方向相反,槓桿得以平衡。此外加二力對於支點之矩適相等而相反 (§ 59)。因之,此二力大小之比 (即槓桿之機械利益),即等於自支點至二力之垂直距離 (稱為槓桿之臂) 之反比。

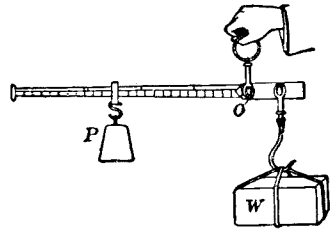
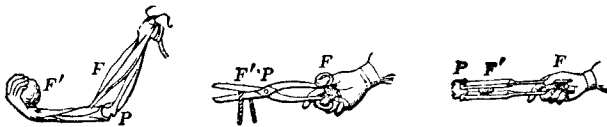


圖 85. 稱

槓桿 吾人日常生活所用之器具中,有逕名為槓桿者乃為本節所述槓桿類機械最直接之應用。如稱(圖 85)。

槓桿之支點可在二外力着力點之間,稱為雙臂槓桿,如剪與鉗等是。亦可在二着力點之外,稱為單臂槓桿,如鉗與鑷等是(圖 86)。



人臂

剪

鉗

圖 86.

人臂猶一槓也，且為單臂槓。

槓之二臂不必在一直線上，稱為彎曲槓，如鎚與起重曲槓等是。

**輪軸** 在許多情形中，槓之形式化作輪狀，稱為輪軸，如井上

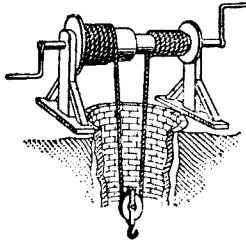


圖 87. 轆轤

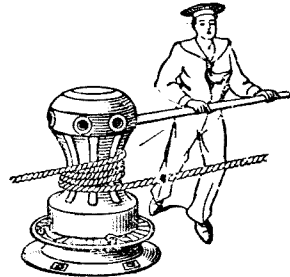


圖 88. 絞盤

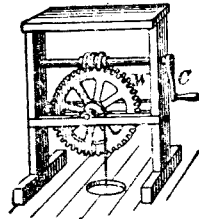
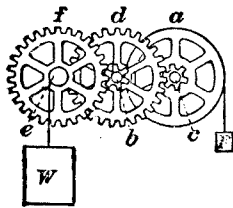


圖 89. 齒輪

汲水之轆轤(圖 87)與船上之絞盤(圖 88)，齒輪(圖 89)亦為輪軸的一種，在機器上應用尤廣。

**滑車** 滑車為工業上重要槓類機械之一。定滑車用以改變力之方向或傳遞轉動(如發動機之皮帶傳遞)。滑車之軸不固定者稱為動滑車。動滑車常在滑車組中用之。

如圖 90 所示，為三個動滑車與三個定滑車所成之滑車組。吾人

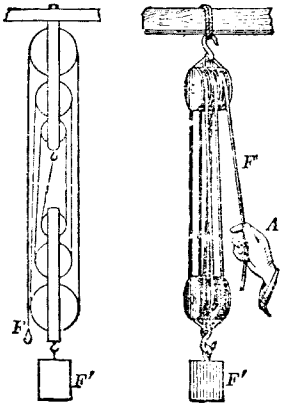


圖 90. 滑車組

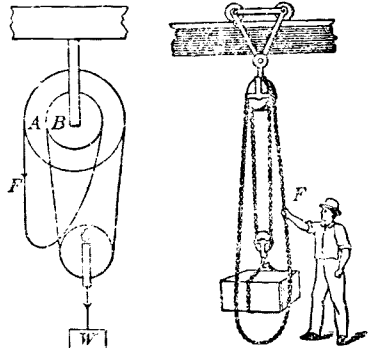


圖 91. 差動滑車

考察滑車組之平衡情形時，最簡便者可視繩索中各段之張力皆為相等，而此張力，即等於繩之自由端所受之作用力  $F$ 。由滑車組所得之力  $F'$  與所用之力  $F$  之比，在本圖之例為 6。

差動滑車(differential pulley, 圖 91)為另一種形式不同之滑車組。半徑  $r_1$  及  $r_2$  不相等之二輪  $A$  及  $B$ ，互相固結，成一定滑車。一繩(無自由端之鏈)繞過二輪之緣，下懸一動滑車，以舉重物  $W$ 。重物  $W$  與在繩中所用之力  $F$  維持平衡，情形如次：

因動滑車上之  $W$  力向下作用，故繩內向上之張力為  $W/2$ 。因之定滑車受二力矩之作用，其值為  $\frac{1}{2}r_1W$  及  $-\frac{1}{2}r_2W$ ；此二力矩之和為  $\frac{1}{2}W(r_1 - r_2)$ ，使定滑車向右轉動。欲維持平衡，須加一向左轉動而等值之力矩以抵消之。此力矩即由  $F$  供給，其值為  $r_1F$ 。於是得

$$F = \frac{1}{2} W \frac{r_1 - r_2}{r_1} .$$

若半徑  $r_1$  與  $r_2$  相差無幾，則  $F$  可遠較  $W$  為小。

§ 30. 斜面類機械 沿傾斜角為  $\phi$  之斜面

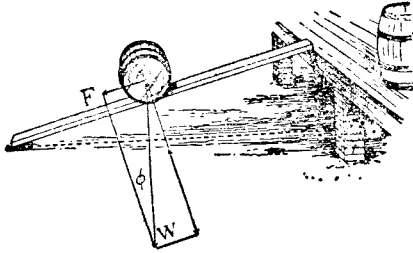


圖 92. 斜 面

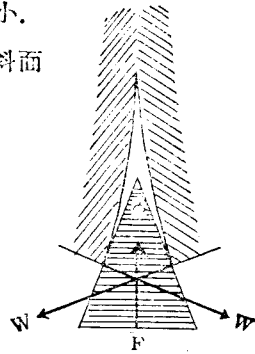


圖 93. 尖 劈

(圖 92)，用力  $F$  即可維持重為  $W$  之物體於平衡，而有：

$$\frac{W}{F} = \frac{1}{\sin \phi} .$$

**尖劈** 尖劈為斜面類之簡單機械，其作用原理如圖 93 所示。命  $F$  為在尖劈底上所用之力， $W$  為尖劈兩側面上之力， $F$  及  $W$  各與底面及側面正交。則當平衡時，有

$$F = 2W \sin \frac{\phi}{2} ,$$

$\phi$  為尖劈之角，尖角  $\phi$  愈銳，則尖劈二側之力，愈較所用推動尖劈之力  $F$  為大。分劈木柴時所以用斧者，即此故也。利刃易割，亦即以此。

**螺旋** 螺旋可視為捲合之斜面。實際上運用螺旋時，常同時兼用槓桿，以增強其利益；例如螺旋壓榨器（圖 94），有翅螺旋以及闊頭螺旋，其頂上有刻槽，可以納入螺旋起子，亦有槓桿作用。

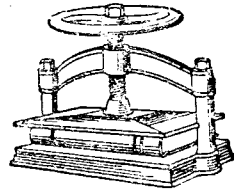


圖 94. 螺旋壓榨器



命螺旋頭之半徑爲  $r$ ，施力  $F$  於其周緣之切線上。螺旋受此力之作用，而轉過一周時，其所作之功爲  $2\pi rF$ 。此項工作由螺旋尖端及螺紋之傳遞，而達於所欲克制之障礙。螺旋轉過一周時，前進之路程等於螺紋之螺距  $s$ （即相鄰二螺紋間之距離）。命螺旋前進時所加於障礙之力爲  $W$ ，則所作之功爲  $Ws$ 。按功能原理，此工作應與加於螺旋頭上之工作相等，故有

$$2\pi rF = Ws,$$

或

$$W = \frac{2\pi r}{s} F.$$

若螺距  $s$  愈小，且作用於螺旋頭上轉力之臂  $r$  愈長，則從螺旋所能得出之力愈大。

許多螺旋，除螺旋作用外，尚兼有尖劈作用，如鑽木螺釘及木材鑽孔機等皆是。其螺旋之直徑，自尖端以上，逐漸增加。木材鑽孔機之主要作用，僅其前部爲螺旋，用以深入木中；上部極峭之螺紋，每有鋒利之緣，形同刀口，以挖大尖端所鑽成之孔。

§ 81. 精密天平 實驗室所用精密天平之構造，爲一等臂之槓桿，在其兩端各懸重體，而得平衡，則此兩體之重量相等。

圖 95 示一精密天平。天平之主要部分爲一輕質之秤梁。梁之中點及兩端，各有磨琢極精之刀口 (knife edge)。居中之刀口，棲止於柱上端鋼質或瑪瑙之平板上，其接觸點即爲支點，而爲秤梁轉動之軸。至於兩端之刀口，各懸有等重之秤盤。自盤之懸點至支點之距離，稱爲梁臂。秤梁之下，置有止動設備  $A$ ，可以用螺旋  $H$  旋轉而上下之。天平不用或更換砝碼時，可旋轉  $H$  使止動設備  $A$  上升，如是則三刀口均與平板脫離，以保護其尖鋒。秤梁中間懸一指針  $N$ ，能擺動於一標度之前。秤箱之右上方有一桿，可用以移置游碼 (rider) 於梁上。此游碼重十毫克，梁之右臂刻有十分度，自內而外，故置游碼

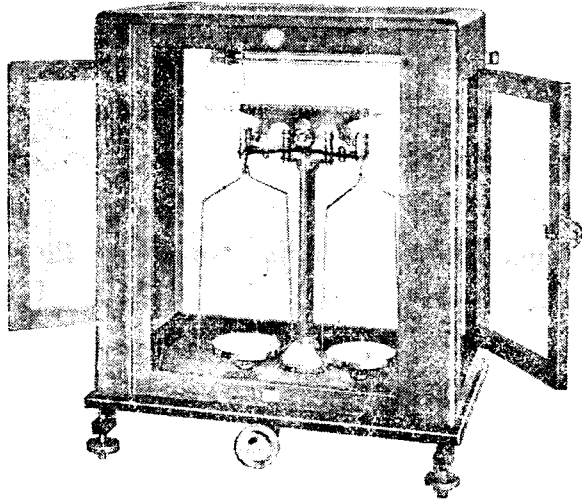


圖 95 精密天平

於一分度上，則等於右盤中加重一毫克，餘類推。欲用 10 毫克或更小之砝碼時，均可以游碼代之。稱箱之下，以三個螺旋支托之，故使用天平之時，先調整此三螺旋，以使秤梁完全水平。

使用天平，須定天平停止所在之點。欲測定停點，不必俟秤完全靜止。尋常測停點之方法如次：先旋轉  $H$  以放下止動設備  $A$ ，而使秤得自由擺動，如是誌指針之左右回轉點，即其左右最大之偏傾，以偏傾於中心之左者為負，右為正。因空氣及其他之摩擦阻力之故，秤之擺動，將漸次挫抑；故所誌之總次數須為奇數，例如有方誌二次，則左方誌三次，得此諸值後，停止其擺動，將左方之平均數與右方之平均數相加，除以 2，即得所求之停點。若兩盤均空，所得之停點稱為零點 (zero point)，加上重物與砝碼，使兩盤所荷之重相等，則其停點將與零點同。惟當稱衡時，欲使停點與零點完全融合，甚費手續，且非必要；故尋常多由停點與零點相差之值，及秤之靈敏度 (sensitivity) 以決定物重之小數尾數。靈敏度者指當右盤增重一毫克時，指針所偏傾之標度數也。例如某秤之零點為  $-0.5$ ，稱某物時右盤共加砝碼 15.121 克，其停點則為  $+1.5$ ；今若其靈敏度為

3.0, 則知右盤尚需再加  $\frac{1.5 - (-0.5)}{3} = 0.67$  毫克, 方能使停點與零點完全吻合; 故物之實重為  $15.121 + 0.00067 = 15.12167$  克. 各靈敏天平之靈敏度, 常視所稱物重之大小而略有差異; 故計算之時, 所用靈敏度之值, 須與所稱之重相當. 經常多先作實驗, 以求稱之靈敏度與所稱之重之關係而用之.

**複稱法** 使用天平, 常藉複稱法 (method of double weighing), 以免除秤臂不等長所生之誤差. 此法先將物體置於左盤, 砝碼置於右盤, 得物體之重  $W_1$ ; 再將物體置於右盤, 砝碼置於左盤, 復得物體之重  $W_2$ . 於是即以

$$W = \sqrt{W_1 W_2} \quad \text{或} \quad W = \frac{W_1 + W_2}{2}$$

作物體之重.

亦可以任何另一較重之物體置於左盤, 砝碼置於右盤, 以求停點. 再將要衡之物體置於砝碼所在之右盤, 而將砝碼取去若干, 復測停點. 則取去之砝碼, 加上由停點相差而來之小數尾數, 即為物體之重. 如是秤臂等長與否, 不生影響. 此即曹植稱象之法也.

**砝碼之校正** 稱衡所得之結果, 其精密程度, 首視所用各砝碼之準確程度如何而定. 故在使用天平之前, 須先將所用砝碼悉行校正之. 尋常砝碼匣中, 有 100, 50, 20, 20, 10, 10, 5, 2, 2, 1 克各砝碼, 及準確的較輕之 500, 200, 100, 50, 20 毫克等砝碼. 如是吾人僅需重 100 克之標準砝碼一枚, 即足以校正匣中所有大小砝碼全幅. 校正之法如下:

令  $A$  (約 100 克),  $B$  (約 50 克),  $C, D$  (各約 20 克),  $E, F$  (各約 10 克) 代表各砝碼之實值.  $M$  代表一標準之 100 克砝碼. 先以  $A$  與  $M$  相衡而得其差  $m$ , 再依次求  $A$  與  $B, C, D, E$  四者之差  $a$ ;  $B$  與  $C, D, E$  三者之差  $b$ ;  $C$  與  $D$  之差  $c$ ;  $D$  與  $E, F$  兩碼之差  $d$ ; 暨  $E$  與  $F$  之差  $e$ . 所得結果, 可列為六個方程式:

$$100 = A + m;$$

$$A = B + C + D + E + a;$$

$$B = C + D + E + b;$$

$$C = D + c;$$

$$D = E + F + d;$$

$$E = F + e.$$

聯解此六方程式，即得  $A, B, C, D, E$  及  $F$  之實值。匣中其他較小之  $5, 2, 2, 1$  克各砝碼，亦可同樣校正。

欲作極精密之權衡時，各砝碼及物體所受之空氣之浮力，亦須計及，加以改正。惟此項應改正之值甚小，尋常時多可忽視之。

## 習題十五

1. 解釋鋤與犁之簡單機械。

2. 我國桿秤，桿重 10 兩，載物之盤重 15 兩，錘重 50 兩。提繩與懸盤相距 4 寸，桿之重心與懸盤相距 7 寸。問桿上標度應從何處開始？又 10 斤之標度應刻在何處？

3. 用滑車組吊物，手拉下一尺時，重物上升一寸，如欲拉上 200 斤之重物，應用力多少？

4. 水手四人，絞盤拔錨，軸徑 4 寸，絞盤之臂各長 5 尺 2 寸。如每人用 124 斤重之力，方可拔起，問錨重多少？

5. 設有輕桿一條，其重量為可不計者。其兩端刀口之距離為  $2l$ ，中間之刀口較兩端刀口略高  $h$ 。今懸重量相差少許之  $W_1$  及  $W_2$  兩重體於桿端，問桿與水平方向成何角度？自此結果，以申論天平之靈敏度，隨所權之重量之增加而減小。

6. 一靈敏天平，其臂等長，惟其盤之重略有差異。設由左右複稱法所得之重量為  $W_1$  及  $W_2$ ，求物之實重及兩盤重量之差。

7. 有一物體重 100 磅，沿斜面推上。斜面之長為 10 米，高 3

米。物體與斜面間之摩擦係數為 0.25。問以何最小之力，即可將物推上？求其機械利益及效率。

今若以 100 磅之力，沿斜面推之使上，問經若干時，可達斜面之頂？求其效率與功率。又若以 200 磅之力推之，再求其效率與功率。

問用最小之力推上時，功率為何？

8. 有牛推磨，每 2 分鐘一轉。磨石重 500 磅，半徑為 3 呎，磨之摩擦係數為 0.4。求牛之功率。

## 第十一章 固體之彈性

§ 82. **彈性** 本章以前所討論之物體，皆假設其為剛體。剛體僅可視為一種理想之固體，蓋無論若何剛強之固體，受外力之作用，其內部各點之相互位置，均略有改變。如所加之力不過大，則此外力撤去之後，一切物體均可完全恢復其原來之形狀與大小，此種回復性，稱為物體之**彈性**(elasticity)。是彈性乃物體之通性也。

§ 83. **形變** 固體受外力之作用而變形，其體積與形狀，均有若干之改變。此種改變，簡稱**形變**(strain)。單純之形變，可分為**容變**(volume-strain)及**切變**(shearing-strain)兩種。前者祇有體積之變更，而無形狀之改變，例如置圓球於壓力頗大之流體中，球雖縮小但仍不失其為球形；後者則僅有形狀之改變，而無體積之增減，例如加相等而相反之兩力，於一長方形物體  $ABCD$  之二對面 (圖 96)，則物體之形狀，將變成如虛線  $ABC'D'$  所示。

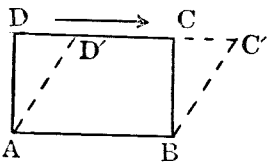


圖 96.

通常之形變多非單純者，如線之拉長及桿之壓縮，其形狀與體積同時均有改變。蓋當線被拉長時，截面積減少；而當桿被壓縮時，截面積則增大也。至於梁之彎曲，或桿之扭轉，其形變較線之拉長或桿之壓縮更為繁複。彎曲之梁，其下半部顯被伸長，上半部則被壓縮，

同時其截面積亦有增減。桿被扭轉，各點均有切變，且其大小，各點又不相同。

固體隨所受外力之增強，而呈更為顯著之形變。形變不過甚時，每於外力撤去，隨即消滅，此種形變稱為彈性形變。若繼續增加外力，將有一時，雖撤去外力，固體不復能完全恢復其原來之體狀，留有永久形變。如金屬之可錘可展，皆以其有永久形變故。

已超過彈性形變，在永久形變境界之後，倘再加強外力，終至破裂。從永久形變開始，到破裂程度，有的過程甚長，如金屬是；有的甚短，如玻璃等物是，即通常所謂很脆的。

俗稱橡膠等物之易於變形者，為富於彈性；甚脆之物如玻璃等，為非彈性體。嚴格言之，一切固體，在某種限度內，皆為彈性體；超過此限度後，皆非彈性體。

§ 84. 形變與所受力之關係——虎克定律 在彈性限度之內，固體之形變，與所受之力成正比，是為虎克定律(Hooke's law)。

今再申說施於固體上之力，及其所生形變之量度。

力施於固體上，即以力之可傳性(§ 57)，均勻分配於固體之各質點上。每單位面積所受之力稱為壓力(pressure)。在固體，壓力不必即與體面成正交；成正交者稱正壓力(normal pressure)。

固體所生之形變，必與其原形之大小成比例。如於長度  $l$  之長變  $\Delta l$ ，吾人言單位長之長變  $\frac{\Delta l}{l}$ ；體積  $v$  之容變  $\Delta v$ ，吾人言單位體積之容變  $\frac{\Delta v}{v}$ ，更可代表事實。

故有

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{k} \cdot \frac{F}{s} = \frac{P}{k},$$

式中  $s$  爲固體受力  $F$  之正截面面積。比例常數  $k$  稱爲容變彈性係數 (bulk-modulus)。

再論切變。設有一長方六面體，固定平臥於一面上 (圖 97)。在與此相對之面上，平行施力  $F$ ，此力將均勻的分布於其面上，每單位面積

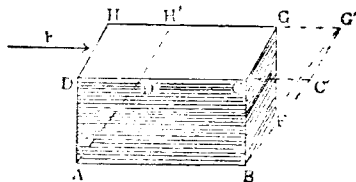


圖 97. 形變

所受之力稱切力 (shear)。此長方六面體受切力之作用，其截面成爲平行四邊形。形變  $DD'$  顯然與高  $AD$  成比例，故以  $AD$  與  $AD'$  所成之角  $\phi$  表示切變，最爲適當，而有

$$\phi = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{F}{s},$$

$s$  表受  $F$  力之矩形  $DCGH$  之面積。比例常數  $\alpha$  稱爲切變彈性係數 (shear-modulus or modulus of rigidity)。

§ 85. 線之拉長 設有線長  $l$ ，截面積爲  $s$ ，其上端固定於一點，下端以力  $F$  拉之，得伸長  $\Delta l$ ，爲

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{s},$$

$$\text{或} \quad \Delta l = \frac{lF}{Es},$$

式中  $E$  爲比例常數，稱爲長變彈性係數 (stretch-modulus)，亦稱楊氏係

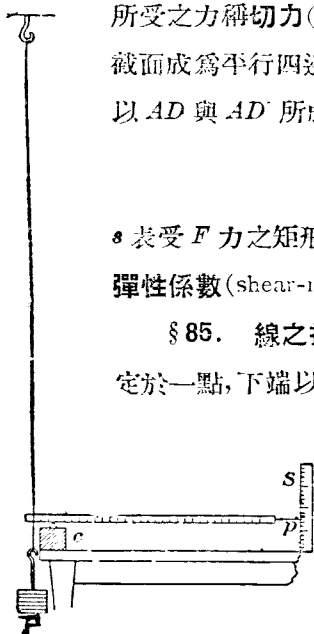


圖 98. 線之拉長



數(Young's modulus).

此等彈性係數  $k$ ,  $\alpha$  及  $E$  之單位, 在 C. C. S. 制中為達因/厘米<sup>2</sup>, 其數值甚大, 故在工程上常以仟克/毫米<sup>2</sup>表之。

表 4. 物質之彈性係數(達因/厘米<sup>2</sup>)

物 質	$k$ (容 度)	$\alpha$ (切 變)	$E$ (長 變)
鉛	$7 \times 10^{11}$	$2.5 \times 10^{11}$	$7 \times 10^{11}$
黃 銅	$10 \times 10^{11}$	$3 \times 10^{11}$	$9 \times 10^{11}$
銀	$10.5 \times 10^{11}$	$2.8 \times 10^{11}$	$7.7 \times 10^{11}$
鐵	$15 \times 10^{11}$	$8 \times 10^{11}$	$20 \times 10^{11}$
鎂	$4 \times 10^{11}$	$2 \times 10^{11}$	$1 \times 10^{11}$
銅	$10 \times 10^{11}$	$8 \times 10^{11}$	$23 \times 10^{11}$
玻 璃	$3 \times 10^{11}$	$3.3 \times 10^{11}$	$8 \times 10^{11}$
水晶絲	$3.7 \times 10^{11}$	$3 \times 10^{11}$	$5.6 \times 10^{11}$
木			0.9至 $1.7 \times 10^{11}$

在尋常狀態中, 金屬為無數極小之晶體錯亂湊聚而成。現可製成單晶體金屬, 係將此無數小晶體, 按規排列, 成一整體。此種單晶體金屬線, 有非常之可伸長性, 用手拉之, 極易拉成原長之二倍。

§ 86. 超過彈性限度之形變 超過彈性限度之形變情形, 可以線之拉長為例, 述之如次:

增加拉線之力, 起始線之伸長與拉力成正比, 如圖 99 所示之  $OP$  直線段。此後, 線之伸長之增加, 較比例於拉力者略多, 以達於  $P'$  點。在  $P$  點之前之情形中, 若撤去拉力, 線即恢復其原來之長度, 故所生形變為彈性形變。若在  $P$  點之後, 雖撤去拉力, 亦不能恢復原長, 即

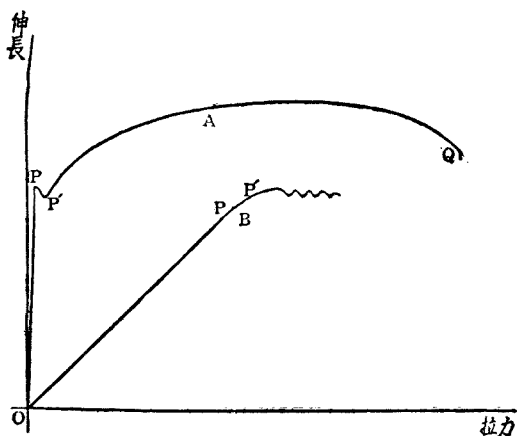


圖 99. 線之伸長與拉力 (B 曲線所用拉力之比例尺較 A 曲線大 100 倍)

有永久形變矣。P 點表彈性限度，稱為屈服點 (yield point)。

過 P' 點後，拉力稍再增加，線之長變激增；蓋固體內部組織開始變化，線之截面顯著縮小，其甚處有如被勒而生勒痕。至 Q 點，終乃拉斷。在脆體，P 與 Q 點甚為接近。

此等材料強弱之試驗結果，在工程上應用之重要，自不待言。

§ 87. 彈性後效 在彈性限度以內，雖無永久形變，惟多種物體須經長久之時間，方能完全回復其原狀，此種情形，稱為彈性後效 (elastic after-effect)。橡皮，玻璃及含混雜分子之物質，為有彈性後效之較著者；至於晶體物質，例如水晶等，則鮮有此弊。上等儀器之懸絲，多用水晶絲 (quartz fiber)，即為此故。

§ 88. 梁之彎曲 梁長  $l$ ，寬  $b$ ，厚  $d$ ，兩端置於支架之刀口上 (圖 100)，於其中點施力  $F$ ，則梁彎下，可以其中心之撓曲 (deflection) 表示梁之形變。命撓曲為  $y$ ，則由實驗或理論，均得

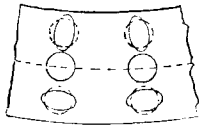
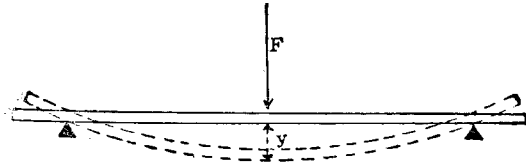


圖 100. 梁 之 彎 曲

$$y = \frac{l^3 F}{4Ebd^3}$$

式中  $E$  爲楊氏係數。

細加分析彎曲之梁，其內部有受壓力，有受拉力（拉力即爲負的壓力），彎曲裏面一邊之部分受壓縮，外面一邊之部分被拉長，此兩部分之間，有一層彎曲後長度不變。

§ 89. 桿之扭轉 夾桿之一端，而於其他端施以力矩  $L$ ，則桿被扭轉。桿內與軸平行之直線，皆被扭成螺旋曲線。桿底之扭轉角  $\theta$  爲

$$\theta = \frac{2lL}{\pi\alpha r^4}$$

式中  $l$  表桿長， $r$  爲桿之半徑， $\alpha$  爲切變彈性係數。此公式首由庫倫 (Coulomb) 實驗求得，亦可由理論證之如次：

先假定桿爲甚薄之空心圓柱，其外半徑爲  $r$ ，內半徑爲  $r_1$ 。如是當所加於一端之力矩爲  $L_1$ ，此端之扭角爲  $\theta$  時，則  $A$  點被扭至  $A'$  點，

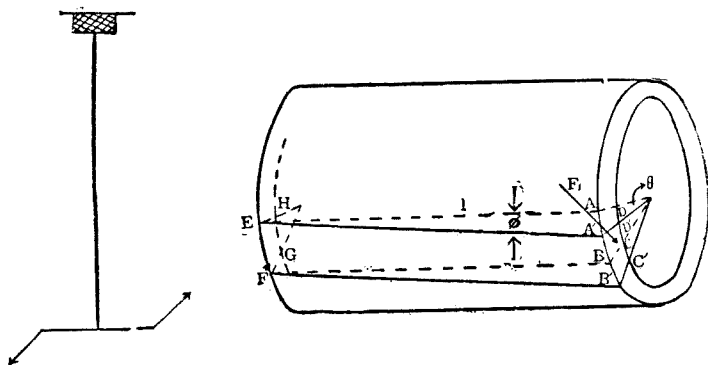


圖 101. 桿之扭轉

$EFGHABCD$  六面體切變而成  $EFGH'A'B'C'D'$  體，切變角為

$$\phi = \frac{r+r_1}{2} \cdot \frac{\theta}{l}.$$

於是有

$$\phi = \frac{F_1}{\alpha s} = \frac{2L_1}{s(r+r_1)\alpha},$$

式中  $s$  表空心圓柱之截面面積，即  $s = \pi(r^2 - r_1^2)$ ，而  $L_1$  表  $F_1$  對於柱軸之矩，乃得

$$L_1 = \frac{\pi(r^2 - r_1^2)(r+r_1)^2 \alpha \phi}{4l}.$$

因  $r$  與  $r_1$  相差甚微，則  $(r+r_1)^2$  幾等於  $2(r^2 + r_1^2)$ ，而  $L_1$  可書作

$$L_1 = \frac{\pi \alpha \phi}{2l} (r^4 - r_1^4).$$

桿係實心，可先分成爲無數甚薄之空心柱體，其內外半徑乃由  $O$  逐漸增加至  $r$ ，如是扭轉實心柱體一端  $\theta$  角，所需之總力矩爲

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots$$

$$= \frac{\pi \alpha^2}{2l} [(r^4 - r_1^4) + (r_1^4 - r_2^4) + (r_2^4 - r_3^4) + \dots] = \frac{\pi \alpha r^4 \theta}{2l},$$

故 
$$\theta = \frac{2lL}{\pi \alpha r^4}.$$

扭轉角  $\theta$  與桿之半徑之四次方成反比，故極微之力矩，每可使細絲得可量之扭轉角。

知所施之力矩  $L$ ，量扭轉角  $\theta$ ，應用上式，即可測定物質之切變係數，如圖 102 之裝置。

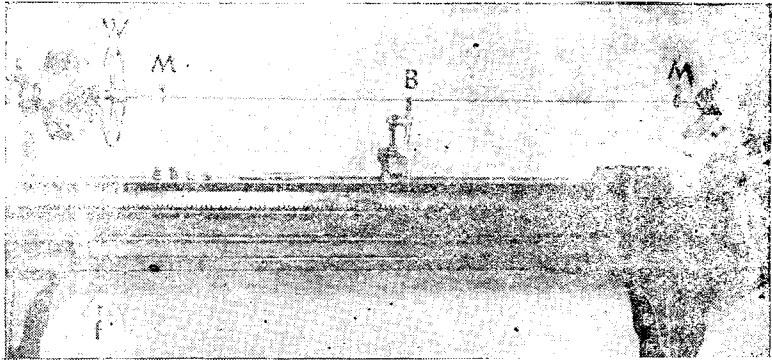


圖 102. 測定切變係數之裝置

§90. 利用形變為量力之具 固體受外力而變形，如線之拉長，梁之彎曲，桿之扭轉。固體變形後，又呈平衡狀態，是必因其形變，發展與外力相等而相反之力，此等力稱為彈性力 (elastic force)。在彈性限度內，彈性力與形變成正比。

固體受外加之力之作用，而起形變，即其分子間之相對位置略

有改變，因而發生分子力，此等分子力總合之結果表現於外者，即為與外加之力相等而相反之平衡力。故彈性力為分子力。

如在梁之彎曲情形中 (§88, 圖 100)，壓縮部分之分子力為壓力，伸長部分為張力，此等分子力係沿梁長之方向，但其合力則與外加之力  $F$  相等而相反，即與梁正交。

固體受力作用後之變形，既經吾人詳細研究；反之，即可以其形變為量力之工具。最常見者為彈簧秤，即以彈簧之伸長或縮短，表示物體之重量。

扭秤 (torsion balance) 為量微小力矩或力之利器。如在 §51 卡文狄雷實驗中所用之扭秤，設銀絲 (銀之切變係數為  $2.8 \times 10^{11}$  達因/厘米<sup>2</sup>) 長 6 米，其半徑為 0.5 毫米，細棒之長為 150 厘米，並設一分之扭轉角即可量出者；則此扭秤所能量出之最小力矩為

$$L = \frac{\pi \alpha r^4}{2l} \theta = \frac{3.1416 \times 2.8 \times 10^{11} \times (0.5)^4 \times 10^{-4}}{2 \times 600 \times 60 \times 57.3} = 1.3 \text{ 達因-厘米},$$

及最小力為

$$F = \frac{1.3}{75} = 0.017 \text{ 達因} = 0.02 \text{ 毫克}.$$

如此靈敏之扭秤，倘非裝置在真空中，自將無法使用耳。

§91. 兩體之正直碰撞 在運動中之兩物體，例如檯球，碰撞之時，兩體將各生一瞬時之力加諸他體，因此兩者之速度均有改變，茲討論正直碰撞之情形。

設兩球沿其心之連接線而移動，其質量各為  $m_1$  及  $m_2$ ；在其碰撞之前，速度各為  $u_1$  及  $u_2$ ，碰撞之後，各為  $v_1$  及  $v_2$  (圖 103)。在兩者碰撞之短時間內， $m_1$  所加於  $m_2$  之力與  $m_2$  所加於  $m_1$

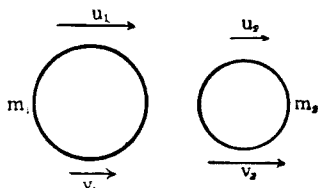


圖 103. 正直碰撞

之力，相等而相反；此兩力所作用之時間又復相同，故兩球動量之變更，亦為相等而相反，即

$$m_1(v_1 - u_1) = -m_2(v_2 - u_2),$$

或

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2.$$

此即動量不減定理 (§ 32).

設  $u_1$  及  $u_2$  為已知，則欲求兩球碰撞後之速度  $v_1$  及  $v_2$ ，須有另一方程式。此第二關係，牛頓由實驗結果，斷定：二物體碰撞之後，其分開之速度  $(v_2 - v_1)$ ，與其在碰撞前之移近速度  $(u_1 - u_2)$  之比，為一常數。此常數與物體之質量及速度無關，僅視物體之彈性而定。牛頓稱此常數為復形係數 (coefficient of restitution)，茲以  $e$  代表之。如是碰撞之第二關係為

$$v_2 - v_1 = e(u_1 - u_2).$$

由此兩方程式，即可求得  $v_1$  及  $v_2$ 。

欲明復形係數之意義，可將兩體碰撞之時間分為壓縮與復形兩期而考究之。在第一時期內，兩體開始接觸，互相壓縮，其速度因而變更，至兩體之壓縮達極大之值時，兩者瞬時速度乃為相同。經過此時期後，兩體漸回復其原形，其互加之復形力 (forces of restitution) 乃使兩者之速度再變，漸行分開。由是言之，碰撞之後，兩體分開速度之大小，係由其復形力而定。若復形力為零，例如物體為極軟之泥土，則碰撞之後兩體將不分开。此種碰撞，稱為完全無彈性的碰撞 (perfectly inelastic impact)。換言之，完全無彈性的碰撞，其特徵為  $v_2 = v_1$ ，故其復形係數  $e$  為零。若復形力之值與壓縮力相等，則碰撞之後，兩體分開之速度與其移近之速度相等。此種碰撞，稱為完全彈

性的碰撞(perfectly elastic impact),而其特徵則復形係數為 1. 尋常物體碰撞,其復形係數介於 0 與 1 之間,故既非完全彈性的,亦非完全無彈性的.

如相碰之物體之一,原係靜止,即  $u_2 = 0$ , 其質量  $m_2$  又甚大,則碰撞後,其速度亦變為零,如有

$$e = -\frac{v_1}{u_1},$$

可為測定復形係數之用.

## 習 題 十 六

1. 有銅桿長 5 米,直徑 1 厘米,今施以 2,000 公斤之力,伸長 1.14 厘米. 求此銅桿之楊氏彈性係數.

2. 鋼之抗壓強度為每方吋 60,000 磅. 今有一鋼柱,為安全起見,其所容許之最大壓力僅為其抗壓強度之五分之一,問鋼柱之高度,不應超過何值(鋼之密度為 7.8 克/厘米<sup>3</sup>)? 設鋼柱之頂已受有壓力為每方吋 10,000 磅,求柱之最高度.

3. 2,000 立方公尺之水受每方厘米 500 公斤之壓力時,其容積減為 1,962 立方公尺,求水之容變彈性係數.

4. 加於一立方塊兩對面之切力各為 1,000 克,若立方之邊長各為 20 厘米,而兩對面之相對位移為 1 厘米,求切變及切變彈性係數.

5. 有一松木梁,長 5 米,寬 40 厘米,厚 45 厘米,其中心撓曲 1.2 厘米,求梁中間所載之重(松木之楊氏彈性係數為  $1.2 \times 10^{11}$  達



因/厘米<sup>2</sup>).

6. 有圓鐵管, 其內半徑為 1 吋, 管厚  $\frac{1}{4}$  吋, 長 5 呎, 今夾住其一端, 而於他端扭轉之, 若所施之力矩為  $\sim$  磅呎, 求扭轉角. 若管係鉛製, 則在上述情形下, 將扭轉何角?

7. 有水晶懸絲長 60 厘米, 半徑為 0.2 毫米, 使其扭轉  $90^\circ$  時, 求應施之扭力之矩.

8. 當兩檯球正碰之時, 其一之速度為每秒 15 厘米, 其他則靜止. 設兩者之復形係數為 0.9, 求碰撞後兩球之速度.

9. 有小球自 15 米之高處落下着地, 遂即跳回, 第三次回跳之高度為 4 米, 求球之復形係數.

10. 當兩光滑之球斜碰之時, 沿其心之連接線方向之速度變更, 與兩球正碰情形相同; 至與此正交方向之速度, 則不因兩者之碰撞而稍變. 設有一光滑之球, 與一光滑之平面斜撞, 求其反跳之方向與反跳之速度. 此可稱為動點之反射.

## 第十二章 彈性力與簡諧運動

§ 92. 彈性力所引起之振動 物體受外力而變形,依虎克定律,形變與所受之力成正比. 物體變形,由其內部分子間相互作用,發展彈性力,以求回復原形. 此彈性力與外加之力相等而相反,亦即與其形變成正比,而與形變之方向相反. 是由彈性力所引起物體之加速度,均與其位移成正比而異號,故物體將作簡諧運動(§ 20). 如簧片及游絲之振動皆是. 吾人於此舉下列兩例.

§ 93. 彈簧振子 懸彈簧之一端於架上,在其他端懸一物體  $W$ , 物體之質量為  $M$  (圖 104), 於是彈簧遂伸長  $x_0$ . 若所加之重量不過大, 則彈簧之伸長  $x_0$  與其所懸之重量  $Mg$  係作正比, 即

$$Mg = cx_0,$$

式中  $c$  為彈簧之張力常數(force constant), 此即彈簧伸長 1 厘米所需之力也.

當彈簧已達平衡狀態後, 略將  $W$  向下拉動, 旋即放之, 則  $W$  將往返振動於其平衡位置之上下. 在任何時刻, 彈簧中之彈性力  $F$ , 與其伸長  $x$  (即  $W$  與其平衡位置之距離) 成正比而異號, 作用於  $W$  上, 使其向平衡位置回復; 故有

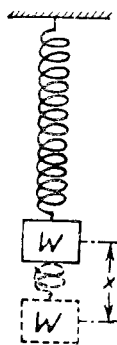


圖 104. 彈簧振子

$$F = -cx.$$

設彈簧本身之質量甚微，可以略而不計，則受  $F$  之作用之質量僅為  $M$ ，故其加速度  $a$  為

$$a = \frac{F}{M} = -\frac{c}{M}x.$$

此公式表示  $W$  之運動為一簡諧運動，其週期 (§ 20) 為

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{x_0}{g}}.$$

若  $M = 100$  克， $x_0 = 2$  厘米，即彈簧之張力常數為  $c = 50$  克/厘米  $= 49,000$  達因/厘米，則其振動之週期為

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{100}{49,000}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{980}} = 0.28 \text{ 秒}.$$

§ 94. 扭擺 夾桿或線之一端，而其他端固定於一可以旋轉之圓柱或他種物體。今若將圓柱扭轉而放去之，則柱將以桿之彈性扭力作用，擺動於其平衡位置之左右；此種裝置，名為扭擺 (torsional pendulum, 圖 105)。

桿之扭轉力矩，常與其扭轉角成正比而異號；故當柱扭轉，而與其平衡位置作  $\theta$  角時，使柱向平衡位置回復之轉動力矩為

$$L = -c\theta,$$

式中  $c$  稱為桿之扭轉常數 (constant of torsion)。

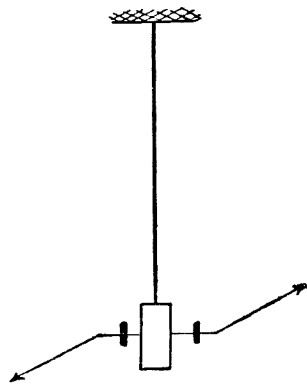


圖 105. 扭擺

命  $I$  表柱之轉動慣量，則其在任何時刻之角加速度  $\alpha$  爲

$$\alpha = -\frac{L}{I} = -\frac{c}{I}\theta,$$

式中  $c$  與  $I$  既爲常數，故柱之運動爲簡諧運動，其週期爲

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{c}}.$$

例如在卡文狄需實驗中，如 § 90 所假設之數據，則扭秤之扭轉常數爲

$$c = 4,469 \text{ 達因-厘米/徑};$$

又設扭秤之轉動慣量爲 40,000 克-厘米<sup>2</sup>，則扭秤之週期爲

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{40,000}{4,469}} = 18.8 \text{ 秒}.$$

利用扭擺，可以比較不規則物體之轉動慣量。設所欲求物體之轉動慣量爲  $I_x$ ，添裝於扭擺之轉動體上，再求扭擺之週期  $T_1$ ，將爲

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I + I_x}{c}}.$$

由上兩式，即得

$$\frac{I_x}{I} = \left(\frac{T_1}{T}\right)^2 - 1 = \frac{T_1^2 - T^2}{T^2}.$$

若轉動體如圓柱之轉動慣量  $I$  可由其半徑及質量  $M$  計算得之，則  $I_x$  之值可由上式求出。反之，若添裝之物體之轉動慣量  $I_x$  爲已知，則可由上法測定扭擺之轉動慣量  $I$ 。

測定扭擺之週期  $T$  及其轉動慣量  $I$ ，則得扭轉常數

$$c = \frac{4\pi^2 I}{T^2};$$

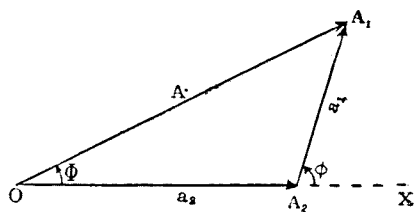
由此可得切變係數

$$\alpha = \frac{2tL}{\pi r^4 \theta} = \frac{2tc}{\pi r^4}$$

之值。此為切變彈性係數之動的測定法，§89所述，乃係靜的測定法。

§85. 方位相同簡諧運動之組合 簡諧運動可以圓周運動在一直徑上之射影，或正弦曲綫，表示其在任何時刻之位移，已如第二章運動學中 §20 所述。

設有某物體沿  $OX$  方向作簡諧運動，其週期為  $T$ ，振幅為  $a_1$ 。當此物體之位相為  $\phi$  時，復有另一同週期之簡諧運動施諸此物體上，此第二之簡諧運動，方向相同，亦在  $OX$  上，而其振幅則為  $a_2$ 。於是當第二運動之位相為  $\omega t$  時，第一運動之位相已為  $(\omega t + \phi)$ ，故  $\phi$  乃兩者之位相差。此兩運動



所生之總位移遂為

圖 106. 方位相同兩簡諧運動之組合

$$x = a_1 \sin(\omega t + \phi) + a_2 \sin \omega t,$$

可書成

$$\begin{aligned} x &= (a_1 \cos \phi + a_2) \sin \omega t + a_1 \sin \phi \cos \omega t \\ &= A \sin(\omega t + \Phi), \end{aligned}$$

即

$$A \cos \Phi = a_1 \cos \phi + a_2,$$

$$A \sin \Phi = a_1 \sin \phi.$$

由此，得

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \phi,$$

$$\tan \Phi = \frac{a_1 \sin \phi}{a_1 \cos \phi + a_2}$$

由此觀之，此兩簡諧運動之和，仍為一簡諧運動，週期亦同為  $T$ 。且此兩簡諧運動，可以向量  $\vec{OA_2}$  及  $\vec{A_2A_1}$  表之（圖 106），兩向量間之角即其位相差，如是兩向量之和  $\vec{OA_1}$ ，即代表兩簡諧運動之和的簡諧運動。

此種組合之結果，顯然可推廣於二個以上之同位同週期運動。

若兩簡諧運動之位相差  $\phi = 0$ ，則  $A$  之值等於  $a_1 + a_2$ ，且為最大。若  $\phi = 180^\circ$ ，則  $A$  之值等於  $a_1 - a_2$ ，且為最小。又如  $a_1 = a_2$  則為零。換言之，兩簡諧運動同相時，合成之振幅最大，兩者相生；反相時，合成之振幅最小，兩者相尅，此即所謂干涉（interference）。

凡現象之能發生干涉者，吾人可斷定其必為週期現象。若該現象係運動，即為週期運動。

兩簡諧運動之週期若不相同，則其位相  $\phi$ ，將隨時間而變；其組合之和，不復為簡諧運動，有時且可不是週期運動。圖 107 示  $A$  及  $B$  兩簡諧運動之和  $C$ ， $A$  之頻率為  $B$  之二倍，其初相差為  $30^\circ$ 。

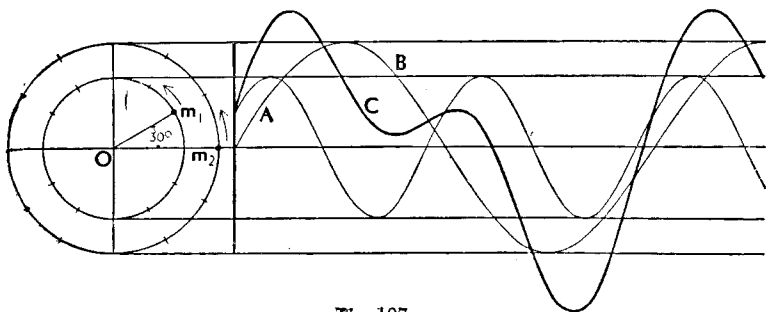


圖 107.

拍 兩簡諧運動之頻率  $N_1$  及  $N_2$  不同，但相差甚微，即  $N_2 - N_1$  遠較  $N_1$  或  $N_2$  為小，則仍可以上述之組合法則討論之。

設  $x_1 = a_1 \sin 2\pi N_1 t,$

$$x_2 = a_2 \sin(2\pi N_2 t + \psi),$$

又命  $N_2 = N_1 + \epsilon.$  ( $\epsilon$  為極小之整數)

吾人可將  $x_2$  書成

$$x_2 = a_2 \sin[2\pi N_1 t + (2\pi \epsilon t + \psi)],$$

即第二簡諧運動可視為與第一簡諧運動有相同之頻率  $N_1$ , 惟其初相

$$\phi = 2\pi \epsilon t + \psi,$$

亦隨時間極緩變遷耳。於是兩者之和, 仍可視為一簡諧運動, 惟其振幅  $A$ , 亦隨時間而為週期的變化, 即

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(2\pi \epsilon t + \psi).$$

此種現象, 稱為拍(beat). 拍之週期  $T$  為

$$2\pi \epsilon T = 2\pi, \quad \text{即} \quad T = \frac{1}{\epsilon};$$

或拍之頻率(beat frequency)  $N$ , 為

$$N = \frac{1}{T} = \epsilon = N_2 - N_1.$$

圖 108 示頻率為 9 及 8 之兩簡諧運動之拍。

§96. 兩個正交簡諧運動之組合 設此兩簡諧運動各在  $Ox, Oy$  二正交軸上, 振

幅為  $a$  及  $b$ , 週期同為  $T$ , 則第一運動所生之位移為

$$x = a \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

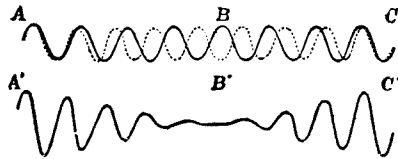


圖 108. 拍

第二運動所生之位移為

$$y = b \cos\left(2\pi \frac{t}{T} - \phi\right).$$

此兩方程式合併視之，即為組合運動之方程式。消去  $t$ ，即得其軌道之方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos \phi = \sin^2 \phi,$$

是為一橢圓內接於矩形

$x = \pm a$  及  $y = \pm b$ 。

欲求此橢圓，可先以  $2a$  及  $2b$  為邊作一矩形。次在矩形之上及左以  $a$  及  $b$  為半徑作二圓如圖 109。將兩圓各分為若干等弧，順序標記。物體在各時刻之位置，顯然係位於通過  $a, a'; b, b'; c, c'; \dots$  各點之縱橫直線之交點上。故聯接此等交點，即得物體所

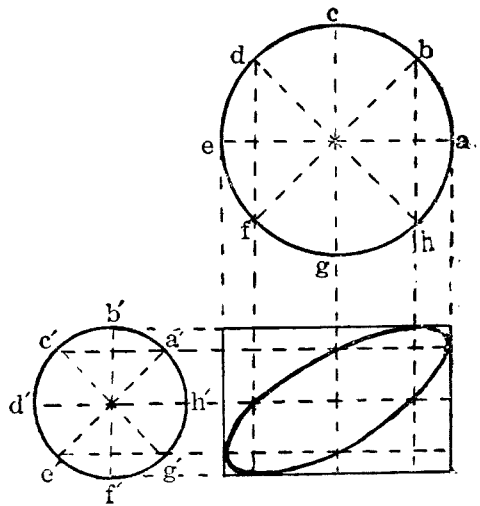


圖 109. 正交簡諧運動之組合

經之橢圓軌道。圖 109 示當  $\phi = 45^\circ$  時之軌道。

如  $\phi = 0$ ，則軌道為一直線；倘  $\phi = 90^\circ$ ，又  $a = b$ ，則為圓。軌道形狀依  $\phi$  之值而定，有如圖 110 之 (a), (b), (c), (d) 及 (e) 所示。

以上所述，係就週期相同之兩正交簡諧運動而言。若兩運動之週期為 2 : 1，則所得者將如圖 111 及 112 所示之曲線。



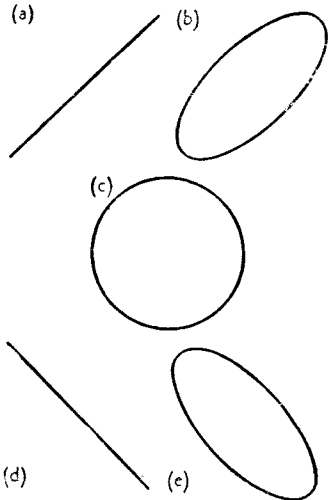


圖 110. 正交簡諧運動之組合圖形  
 (a)  $\phi=0^\circ$ ; (b)  $\phi=45^\circ$ ;  
 (c)  $\phi=90^\circ$ ; (d)  $\phi=180^\circ$ ;  
 (e)  $\phi=135^\circ$

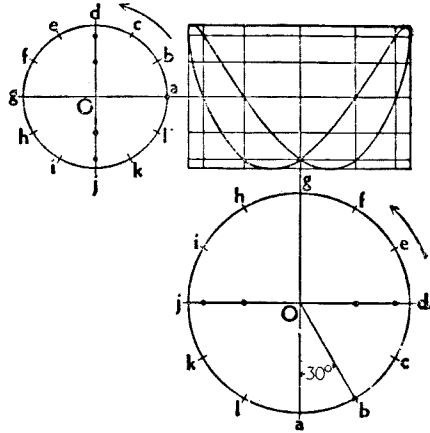


圖 111. 正交簡諧運動之組合  
 週期為 2:1,  $\phi=30^\circ$ .

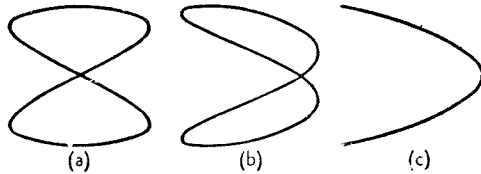


圖 112. 正交簡諧運動之組合 週數為 2:1,  
 (a)  $\phi=0^\circ$ ; (b)  $\phi=45^\circ$ ; (c)  $\phi=90^\circ$ .

在兩音叉之一端，各黏一小鏡，將音叉之振動方向互成直角(圖 113). 然後令自第一叉端之鏡所反射之光線，復經第二叉端之鏡所反射，使映現於幕上；則幕上光點之運動，即為兩音叉簡諧振動之組

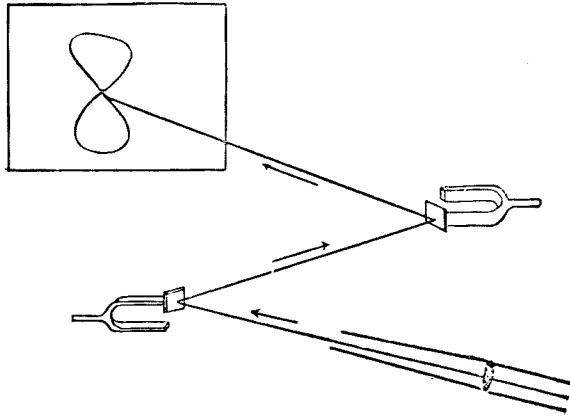


圖 113.

合。將見幕上所呈現之曲線，與圖 110 及 112 所示者相似 (Lissajous 圖)，或更複雜，視兩音叉之頻率之比而定。

§ 97. 阻尼振動 各種振動，恆因摩擦阻力，其振幅逐漸減小，不久完全停止，稱為阻尼振動 (damped vibration)。

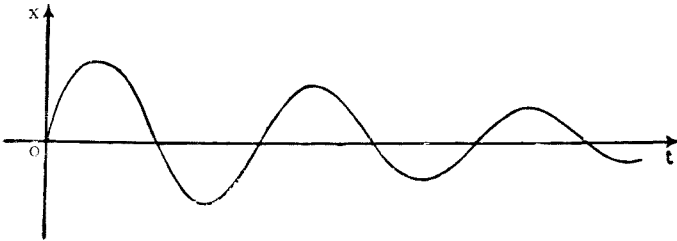


圖 114. 阻尼振動

阻尼振動之位移，可以方程式

$$x = ae^{-\lambda t} \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

表示之(圖 114), 即簡諧運動之振幅中, 含有一個與時遞減之  $e^{-\lambda t}$  因子, 每經一振動, 振幅減小  $e^{-\lambda T}$  倍,  $\lambda$  愈大, 阻尼愈甚, 停止愈快。

因此之故, 鐘擺多有推動裝置(escapement), 推動輪  $D$  (圖 115), 賴懸重或彈簧之力, 依矢向轉動, 於每週期內, 予擺以一小推動, 以補償摩擦阻力之阻尼作用, 使其振動不止。

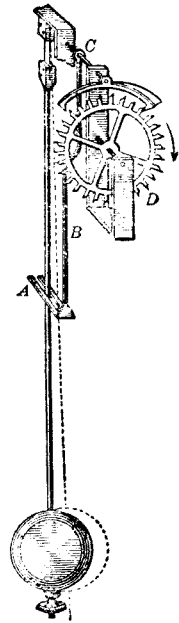


圖 115. 擺之推動輪

### 習題十七

1. 在一垂直彈簧之下, 懸以 100 克之質量, 然後任其振動。若振動週期為 0.62 秒, 問在其平衡位置, 彈簧之伸長若干? 又若懸於其上之質量為 50 克或 200 克, 則彈簧振動之週期為何?

2. 今有彈簧二根, 長同為 1 米, 其週期各為 0.8 及 0.7 秒, 共懸一均勻之橫桿, 桿長 1.5 米, 重 2.8 仟克。一彈簧之懸接點為桿之端, 求他一彈簧之懸接點, 使桿成水平之位置, 而二彈簧之長又復相等。

3. 一秤盤懸於垂直彈簧之下而作簡諧振動。若振動之週期為 1 秒, 求其振幅之最大限度, 須置在盤中之小物不致離開盤面而跳動。

4. 有一扭擺, 係一 2 米長之銅絲, 與一黃銅圓柱而成。柱高 8 厘米, 半徑 2 厘米。黃銅之密度為 8.5 克/厘米<sup>3</sup>。用 20 克一厘米之力矩, 可使扭擺扭轉 90° 角, 求扭擺之週期。

5. 有一扭擺，擺錘為一球，其週期為 2.4 秒。今於擺錘球上套一黃銅環。環重 100 克，其半徑為 2.5 厘米，則扭擺之週期為 2.8 秒。求擺錘球之轉動慣量。

6. 有兩個同位及週期相同之簡諧運動，其組合之振幅為 10 厘米，組合之位相與第一運動之位相差  $30^\circ$  角。若第一運動之振幅為 8 厘米，求第二運動之振幅，及第一第二兩運動間之位相差。

7. 設上題之兩簡諧運動，週期各為 10.0 及 1.01 秒。求其組合運動振幅之最大值與最小值，及其振幅二次達最大值相隔之時間。

8. 有兩正交簡諧運動，其週期及振幅之比同為 2:3，試依位相差之值，繪圖以求物體作此組合運動時之軌道。

9. 一金屬線之長為 4 米，截面面積為  $\frac{1}{2}$  毫米<sup>2</sup>，其下端懸 1 克之物體而擺動，求其週期。設若易以 500 克之懸體，其週期因之延長 0.0004 秒，求此金屬線之長變彈性係數。

10. 設有運動之物體，其軌道為一橢圓，橢圓之長軸及短軸，各為  $2a$  及  $2b$ ，週期為  $T$ 。求該物體在長軸及短軸上之正射影之運動，並求該物體在各位置之加速度與其所受之力。

11. 懸重 100 克於垂直彈簧之自由端，彈簧伸長 2 厘米，求此懸重對於拉長彈簧 2 厘米所作之功。

欲將彈簧伸長 2 厘米，可先懸重 50 克，待其伸長平衡後，再加重 50 克，如是懸重對於彈簧所作之功為何？

亦可分作三步，先懸重 25 克，加重 25 克，再加重 50 克，彈簧之總伸長將仍是 2 厘米。問如此懸重，對於彈簧所作之功為何？

若用手輕拉彈簧，所用之力漸漸增大，隨時僅足勝過彈簧之彈

性力，而使伸長得以進行，此種手續，在物理學上稱為可逆。拉長彈簧 2 厘米時，吾人所作之功為何？（可逆手續所作之功為最小，其值亦即等於彈簧之彈性力所作之功。）

## 第十三章 物質之組成

§ 98. 物態 物體可分為固體、液體及氣體三種。此三種之狀態，稱為物體之三態。變更物體之形狀或其體積時，物體即行反抗，其所顯之抵抗力，大有不同；外表上即可依此，區分物態。

**固體** 對於形狀及體積之變更，所起之抵抗力俱大，故變形頗難，壓縮性頗小。

**液體** 對於變形毫無反抗，即有之亦甚微；而對於變更其體積所起之抵抗力則頗大。故液體可任意變形，可注入於任何形式之容器中。壓縮性通常雖較固體為顯，但仍屬微小。

**氣體** 對於變形及體積之擴大，不起反抗，惟壓縮時則具抵抗力，但遠較固體、液體為微弱。故氣體亦如液體，可以任意變形。氣體之特性，一方面既易壓縮，而他方面復能自行擴張，故恆布於其可達空間之全部。

嚴格言之，惟晶體始足稱為固體。其餘類似固體者——例如火漆、瀝青等物，若變形力歷久不除，或稍加熱，則其特性有似液體。豆腐之應稱為固體或液體，將無定論，凡此足見物體三態之分，並無明顯確

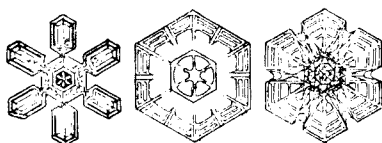


圖 116. 雪之結晶

界限也。

巖鹽，水晶之爲晶體，固無論矣。‘雪花六出’人所習見(圖 116)，卽純粹之金屬，如銅，鐵，金，銀，錫等，在顯微鏡下觀察，可知其皆爲晶體。

§ 99. 物質之剖分 拉鉗成絲，可細至 0.8 微米 (micron)，捶金成葉，可薄至 0.1 微米。取單純之固體，液體或氣體而剖分之，惟見其大小形狀與原來者有別，其各種特性，固未失亦未變也。今以人羣比擬之，將一大羣之人，分爲若干團體，再由各團體分爲若干小團體，則各團體及小團體之普通情形，與原來之人羣，亦初無區別也。但若按此更行繼續剖分，終必至每一小團體中僅剩一人而止，蓋此時已達極限，無可再往下分者矣。物質之剖分亦然，終必至一極限，若欲原來物質之本性不生變化，則至此極限，卽爲剖分終點，而不能再進。此種極限在人羣爲個人，在物質爲分子及原子，卽吾人認爲組成物質之基礎者也。物質種類之不同，卽由分子種類之有異。

物質之外表雖似連續，而其組成實非連續者。紀元前約四百年希臘哲人德謨頡利圖 (Democritus) 卽倡是說，但在當年只是玄想而已，係一人或一學派之意見，並無充分之科學根據也。

前此無根據之原子說，至道爾頓 (Dalton) 始得鞏固之基礎。

§ 100. 原子量 十九世紀初葉，多數化合物之特性，漸次闡明。由化學分析之結果，知：(1) 凡化合物不論因何方法而成，組成該化合物之元素重量之比，常爲一定。例如一定量水中，所含氫與氧之重量之比常爲 1.008 : 8，此爲定比定律。(2) 凡含有甲乙二元素之化合物，不只一種時，與一定量之甲元素化合之乙元素之重量，常成一定

之簡單比，此為倍比定律。

由此可知甲乙二元素化合時，即由一個或數個之甲元素原子與一個或數個之乙元素原子相結合，各元素之原子，皆有一定之質量。單個原子之質量，吾人雖無法加以直接測定，但各元素原子之比較的或相對的質量，則由其化合時所需一定之重量而知之。故每一元素原子，可給以一數，以代表其相對質量，稱為原子量。如命氧之原子量為 16，則氫之原子量為 1.008，炭之原子量為 12.005 等。

元素之分子，由其一個或數個之原子集合而成，元素之分子量即為原子量之整倍數。

§ 101. 阿佛加特羅之假設 經道爾頓 (Dalton) 及給呂薩克 (Gay Lussac) 等之研究，吾人又知在一化學變化之內，原物質及生成物質皆為氣體時，不但其重量有一定之關係，若於同溫同壓之下測之，則其體積亦常為整數之比。例如一體積之氫與同體積之氯化合，而得二體積之鹽酸氣。

各種氣體，因溫度或壓力之改變，膨脹或壓縮又復相同。凡此皆足徵各氣體之組成，有其數量上相類之處，阿佛加特羅 (Avogadro) 乃為之假設，曰：「凡氣體在同溫同壓之下，同體積中所含分子之數目相等。」

因同體積氣體之分子數，既為相同，則各氣體分子量之比，即為其密度之比，有：

$$\frac{m}{m'} = \frac{d}{d'};$$

氧之分子量為  $m' = 32$ ，密度  $d' = 0.001429$ ，於是



$$m = \frac{32d}{0.001429} = 22.414 \times 10^3 d,$$

即各種氣體之分子量，等於其密度之  $22.4 \times 10^3$  倍。

故任何氣體一克分子 (gram molecule) 之體積，皆與一克分子之氧所占之體積相同，在標準溫度與壓力下，為  $22.414 \times 10^3$  立方厘米即 22.4 升。此共同之體積

$$V = 22.414 \text{ 升}$$

稱為分子容 (molecular volume)。

§ 102. 分子之數 各種氣體，在標準溫度與壓力下，每一分子容內，有相同個數之分子，此分子之數  $N$ ，稱為阿佛加特羅數 (Avogadro's number)。

由各種不同之實驗，皆得相合之結果，為

$$N = 6.064 \times 10^{23};$$

即每一立方厘米內，分子之數目為

$$n = 2.705 \times 10^{19}.$$

分子之數，數字之大，殊難想像。即令我國全體同胞，來數一立方厘米內之氣體分子，每秒鐘可數二個，每日工作 8 小時，要數三千餘年矣！

§ 103. 分子之質量 既知阿佛加特羅數及各種氣體之克分子量，即可得分子之質量。

例如氧之克分子為 32 克，故氧分子之質量為

$$5.3 \times 10^{-23} \text{ 克};$$

他若氫分子之質量，又僅為氧之十六分之一耳。

§ 104. 分子之大小 由氣體之分子容,及阿佛加特羅數,即可估計氣體分子之大小爲

$$3.3 \times 10^{-7} \text{ 厘米.}$$

此爲其值之最大限度也,實際上分子之直徑,較此值要小得多.

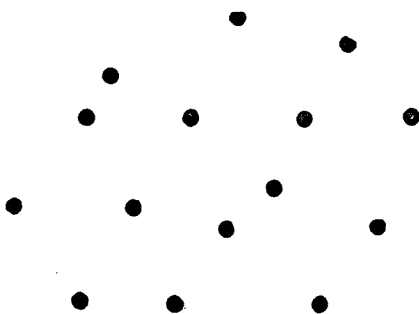
分子雖小,倘將一立方厘米內之分子而串連之,將可圍繞地球二千餘匝!

由氫及氧之分子質量,得水分子之質量爲  $2.98 \times 10^{-23}$  克,每立方厘米內,有水分子  $3.36 \times 10^{22}$  個,則水分子之直徑不能超過  $1.44 \times 10^{-7}$  厘米.

由實驗測知各種氣體分子之直徑,有如下表:

氫	$2.46 \times 10^{-8}$ 厘米	氫	$3.36 \times 10^{-5}$ 厘米
氦	$2.18 \times 10^{-8}$ 厘米	氯	$4.96 \times 10^{-8}$ 厘米
氮	$3.50 \times 10^{-8}$ 厘米	汞	$2.80 \times 10^{-8}$ 厘米
氧	$3.38 \times 10^{-8}$ 厘米		

從上表觀之,可知氣體分子,實較由阿佛加特羅數及分子容估計得來者,要小十倍左右;即二分子間之平均距離,約爲分子直徑之二十倍(圖 117),就比例言,每個分子在氣體中所占之空間,較之吾人獨居一室,猶多多也.



若能將一立方厘米

圖 117. 氣體分子之大小與其間之空隙之比例圖

之氧壓縮，使其分子互相密接，將不過一立方毫米耳。

§ 105. 晶體內原子之排列 晶體內各種原子，恆呈極有規則之排列。例如鹽之氯與鈉原子(圖 118)，各相間隔，居於立方體格之隅，黑者代表氯原子，白者代表鈉原子。\*如是，晶體中之所謂分子，又不若液體與氣體在化學中所討論者之具體而有意義矣。

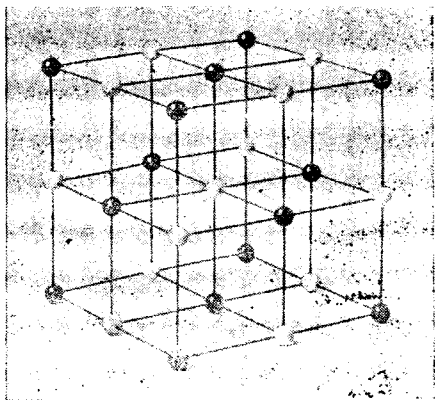


圖 118. 鹽之結晶模型

---

\* 此等原子，實際上為游子。

## 第十四章 流體之平衡

§ 105. 流體 流體 (fluid) 包括液體及氣體而言, 以其皆有極大之流動性故, 與固體之不易變其形狀者迥異. 液體雖易流動, 隨容器而改變其形狀, 惟其體積則不易變更; 氣體不但易於流動, 且極易改變其體積, 常瀰滿於容器之內.

§ 107. 流體平衡之必要條件 流體富於流動性, 即其切變彈性係數 (§ 84) 為零或甚微. 如有平行於流體體面之任何微小切力, 流體將呈極大之切變, 而流動不已. 故流體平衡之必要條件, 為所受外力與流體體面成正交.

盛液體於開口之容器中 (圖 119), 其上面與空氣接觸者, 稱為液體之自由面 (free surface). 在自由面上液體各點所受之外力為重力, 重力乃為鉛垂者, 故靜止液體之自由面, 必為水平面.

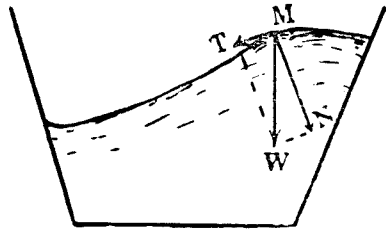


圖 119. 水之自由面

因此可知, 密度不同之兩種液體, 在同一容器內靜止而不混合時, 其接觸面亦必成水平.

容器之底及壁上各點對於流體之作用力, 恆必在各點與容器之面正交, 自不待言. 故吾人於流體常言其每單位面積所受之力, 稱為

壓力。靜止流體面上之壓力，恆為正交壓力。

§ 108. 流體內各點之壓力 設在靜止流體中之任一點，畫出一小球(或小立方體)，如圖 120。此小球面上各點所受之力，均與球面正交，通過球之中心者。惟此球雖四面受有壓力，然仍得保持其球形，故知球面上各點所受之壓力必係相同。設想球無限縮小，則球面

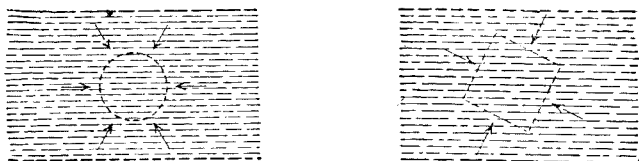


圖 120. 流體內之壓力

各方向之壓力即等於球中心點之壓力。由是觀之，在靜止流體中某點之壓力，不論其方向為何，均係相等。換言之，在靜止流體中一點，作一小平面，無論所作之小平面之方位如何，其所受之力悉同。故吾人於靜止流體，可言流體內某點之壓力。

靜止流體內各點之壓力，皆相等乎？抑或何種關係？

茲先考察在流體表面下深度相等之  $A$  及  $B$  兩點之壓力(圖 121 甲)，以  $AB$  為軸線，作一小正圓柱體。此柱體曲面上各點所受之壓力，顯與  $AB$  軸線悉成直角，不致影響柱體在其軸線方向之運動，其重量亦復如是。柱體既為靜止，兩底面積又復相同，故在其兩端  $A$  及  $B$  兩點之壓力必相等。由是觀之，距表面深度相同之點，其壓力係相等。

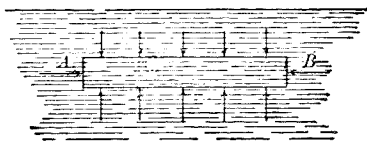


圖 121. (甲)

次考察在液體中，深度不同，而在一鉛垂線上之  $B$  及  $C$  兩點之壓力（圖 121 乙），以  $BC$  為軸線，作一小正圓柱體。令在  $B$  點之壓力為  $P_1$ ，而在  $C$  點之壓力為  $P_2$ 。此小柱體曲面各部所受之壓力，顯與  $BC$  軸線皆成直角，且互相抵消，故此柱體之靜止，係由其兩端之垂直壓力  $P_1$  及  $P_2$ ，與其重量三者所構成。若柱體之截面積為  $a$ ，長為  $h$ ，每單位體積所含之質量為  $\rho$ （即流體之密度），則有

$$P_2 a = P_1 a + g \rho a h,$$

即

$$P_2 = P_1 + \rho h g,$$

故

$$P_2 - P_1 = \rho h g.$$

由此觀之，在靜止流體中，深度相差為  $h$  之  $R$  與  $S$  兩點間之壓力之差，即等於以單位面積為截面，以  $h$  為高之液體柱之重。

又因  $B$  及  $C$  各與其在同水平線上之點，有相等之壓力，則  $B$  與  $C$  為在同一鉛垂線上之限制，乃非必要者，即任何二點離流體表面

之深度相差  $h$  者，皆有上述之壓力差  $P_2 - P_1$ ，所以修築河堤，堤基必須較上層特別加厚（圖 122）。

氣體之密度，如是其小，在普通容器內，氣體各點之壓力，可作為相同。

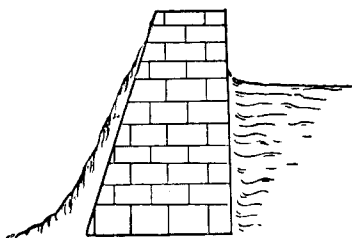


圖 122

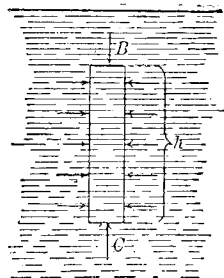


圖 121. (乙)

### § 109. 壓力之單位 壓力

既為每單位面積所受之力，故其單位，在 C.G.S. 制為達因/厘米<sup>2</sup>，稱爲巴(bar)。惟巴之單位甚小，常以百萬巴(megabar)為壓力之單位。吾人亦可用(克/厘米<sup>2</sup>)或(磅/呎<sup>2</sup>)等表之。

在流體中兩點之壓力差，既與其高度差成正比，故有時為簡便起見，亦用高若干之某種液體(例如汞或水)表示某點之壓力。用此種單位時，意謂該點壓力之值，係與高若干之液柱所生於其底面之壓力相等。例如言大氣壓力為76厘米汞高時，意即指大氣壓力之值，等於

$$76 \times 13.6 = 1,034 \text{ 克/厘米}^2,$$

或 
$$76 \times 13.6 \times 980 = 1,015 \times 10^5 \text{ 巴。}$$

尋常之標準大氣壓力，常規定為76厘米汞高(見後 § 112)，此值亦常用為壓力之單位。例如，言某壓力為三個大氣壓(atmosphere)，意即云其壓力為標準大氣壓力之三倍。對小於一大氣壓之壓力，即半真空，常用若干毫米汞或厘米水表之。

§ 110. 壓力之量度 最簡單之壓力計，為開端壓力計(open end manometer)，如圖 123。此器為一 U 形之玻璃管，其一端開向大氣，他端 A 則與欲量之壓力連接。因兩端壓力之不同，故兩管中之液體，遂呈不等之高度。

設管中液體之密度為  $\rho$ ，其兩頭高度差為  $h$ ，左管 A 點要量之壓力為  $p$ ，自 A 至 C' 點之流體之密度為  $\rho'$ ，右管上(即 B 點)之壓力為  $B$  (例如大氣壓力)。在 C' 點之壓力，係等於 A 點之壓力加以高 AC' 流體之壓力，即  $p + \rho' h' g$ ；在 C 點之壓力，則等於 B 點上

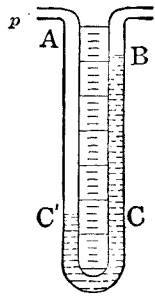


圖 123. 開端壓力計

之壓力  $B$  加以高  $BC$  液體之壓力，即  $B + \rho hg$ ，故有

$$p + \rho' h' g = B + \rho hg,$$

或

$$p = B + (\rho h - \rho' h') g.$$

如左管中之流體係氣體，其密度  $\rho'$  可略而不計，如是則  $A$  點之壓力等於  $B$  上之壓力加以高  $h$  液柱所生之壓力，即

$$p = B + \rho hg.$$

此種壓力計中之液體常用汞，蓋因汞之密度頗大，故測定壓力時，不必用甚長之管。水與油亦可用作測壓液體，惟所能測定之壓力較小耳。

欲量較大之壓力時，可將上式液體壓力計之開端封閉，而成所謂閉端之  $U$  管壓力計 (closed-end manometer) 者。當  $A$  點之壓力  $p$  增大時，液體向右管上升，而在閉端內所剩餘之氣體，遂被壓縮。其所生之反作用 (即  $B$  中之壓力)，係與  $B$  中氣體之容積成反比 (見後 § 121)，故兩管中之液體高度差，不必達甚大之值，即可量得頗大之壓力。此種儀器之計算法，在後 § 123 詳述之。

§ 111. 壓力之傳遞——巴斯噶原理 在靜止之流體中，任何兩點之壓力差，僅視兩點之深度差及液體之密度而定，故流體中任何一點之壓力增加後，如流體為不可壓縮而其密度不變者，則在其中他點之壓力亦隨之有同值之增加；換言之，在流體中之壓力，係向各方作整個的傳遞。此即所謂巴斯噶原理 (Pascal's principle) 也。

普通液體之壓縮率極微，故此原理可應用於任何液體。至於氣體雖係可以壓縮者，但其密度在尋常壓力之下均甚小，故在不過大之容積內，氣體之壓力各點亦均相同。總之，在尋常情形之下，液體



及氣體均可應用此原理。

**水壓機** 水壓機 (hydraulic press) 為巴斯噶原理之一種應用，以自較小之力而得較大之力之機器。其主要部分為一大筒及大活

塞  $P$ ，與一小筒及小活

塞  $p$ ；兩筒相通，其中則儲以

液體如水之類。如大活

塞之面積為  $A$ ，小活

塞之面積為  $a$ ，所加於小活

塞之力為  $f$ ，則液體中之壓

力為  $p = \frac{f}{a}$ ，故依巴斯

噶原理，大活塞所受之

總力遂為  $F = pA = f \frac{A}{a}$ 。

圖 124 示水壓機結構之

大概。

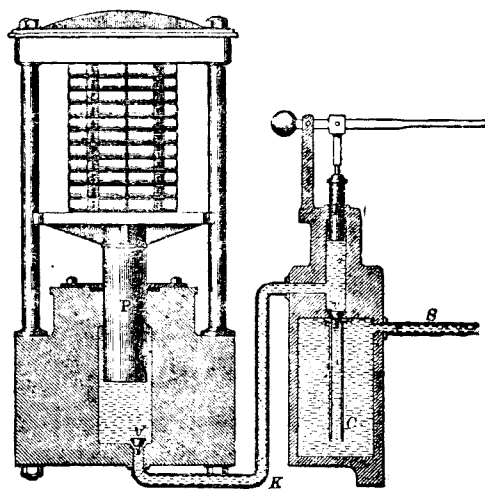


圖 124. 水 壓 機

§ 112. **大氣壓力** 地球周圍之全部空氣，曰大氣。空氣雖極易流動，以受重力之故，附着而包圍於地球之四周，非瀰滿整個天空者。在地面上，大氣之壓力曰大氣壓力 (atmospheric pressure)。

1643 年托里拆利 (Torricelli) 倒置一滿貯汞之長玻璃管，使其開端沒入汞池中，管內之汞隨而下降，管之上部則為真空。無論管是否直立，管中汞柱較管外汞面約高 76 厘米 (圖 125)。此 76 厘米汞柱即代表大氣壓力，約為  $1,033.6$  克/厘米<sup>2</sup>。

今日科學界公認，當大氣壓力等於在緯度 45 度之海平面處，溫

度為  $0^{\circ}\text{C}$ ., 高 76 厘米汞柱所生之壓力時, 其值為標準大氣壓。此標準數值稱為一大氣壓 (atmosphere)。

托里拆利 既得其實驗之正確說明, 巴斯噶 聞之, 乃以為如 托里拆利 管中之汞柱, 果係由管外空氣之壓力所支持, 則在離地面較高之處, 其壓力必較低, 故如將管移至高山上, 其中汞高應降低, 此結論經其友人代作實驗亦得證實。

在同一地, 因高度不同而有氣壓之變化如次:

高度 (米)	氣壓 (毫米汞)
0 (海面)	760
500	714
1,000	671
2,000	592
4,000	461

是大氣壓之減小, 並不與高度成比例, 蓋空氣密度亦愈高而愈稀。故飛行至高空, 每感呼吸困難, 須攜備氧氣。

§ 113. 氣壓表 托里拆利 管為最早且最簡單之氣壓表。今日所常見之準確氣壓表, 即係 托里拆利 管附以標度與游標 (vernier), 以便於直接指示管中汞高者。福廷氣壓表 (Fortin's barometer), 其汞池之底係屬皮製, 棲止於一螺釘上。若將螺釘旋轉, 即可令池中之

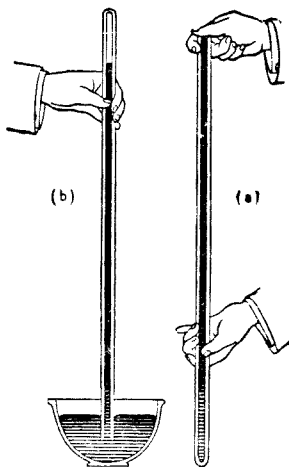


圖 125. 大氣壓力

汞平面與標度之零點相吻合，此兩者是否符合，可由一象牙指針指示之。蓋若無此種設備，則池中之汞平面，將隨汞柱之升降而變更，故在讀氣壓表之前，宜先調節螺釘，使指針與其自汞池面所反射之影，適相遇合，次移動上部之游標，使與汞柱頂端相合。然後由標度及游標之位置，讀得其準確之高度。

此種氣壓表所示之值，通常須加以溫度之改正。蓋一方面汞之密度隨溫度而變，因而影響其汞柱之高；他一方面，標度用黃銅製成，亦隨溫度而變長。故氣壓表中均附一小溫度計。

爲便於攜帶而又無須十分精確時，可用無液氣壓表(aneroid barometer)。其主要部分爲一金屬匣(圖127)，上有薄蓋，其中之空氣則已抽去。如是大氣壓之增減，可使匣蓋之彎曲變更；彎曲變更之多寡，經數個槓桿將其放大之後，乃轉動一指針於一圓標度上，而自圓標度之刻度，即可直接讀出其壓力。此種氣壓表須時常與汞質氣壓表比較，以糾正其誤差。

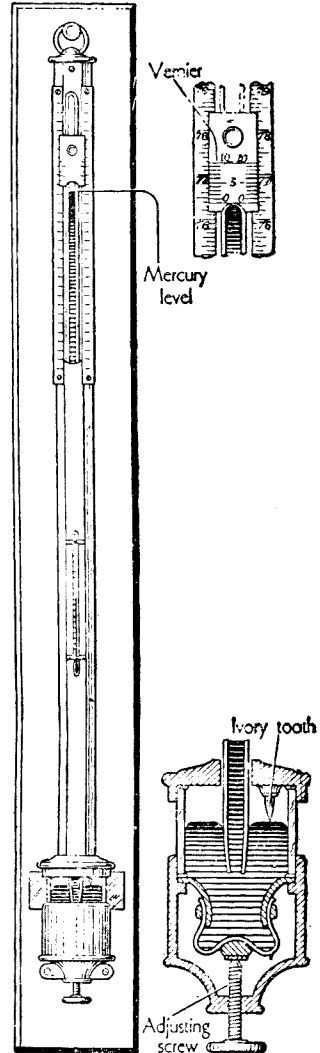


圖 126. 氣 壓 表

大氣壓力既隨高度而異，故攜帶無液氣壓表登山，由氣壓之減低，即可知山之高度，因此之故，無液氣壓表又常稱高度表。

§ 114. 大氣壓力與天氣 天氣變化，情形異常複雜，大氣壓力不過其重要因素之一耳。

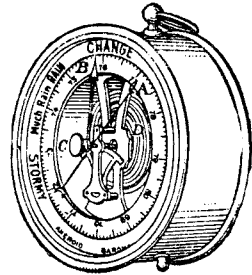


圖 127. 無液氣壓表

大氣壓力，因時而異，隨地而變。其差異之原因，不外氣層厚薄之改變，及其平均密度之增減二者。當大氣中水蒸汽過多之時，因水蒸汽之密度較稀於空氣，大氣壓力遂以減小。故氣壓表汞柱之降落，可視作大氣中水蒸汽增多，為將雨之象徵。反之，陰雨之日，大氣壓力增加，有轉晴之望。

將各地同時之大氣壓力紀錄，繪製圖表，將壓力相同之點連接，得等壓線。有時此項等壓線成爲關閉之曲線，如圖 128 所示，則 A 點

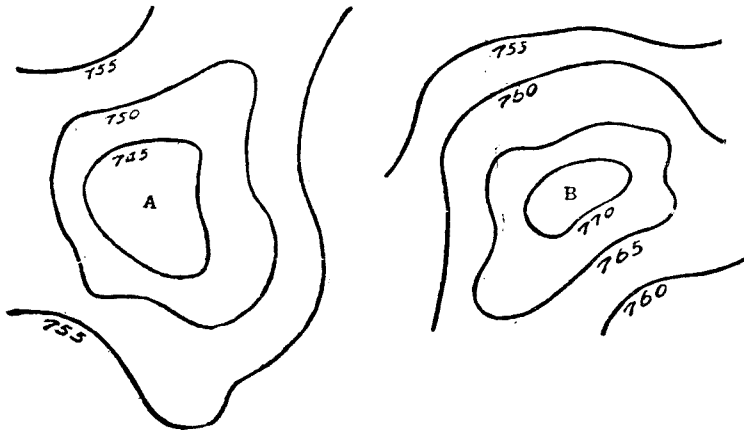


圖 128. 大氣之等壓線

之氣壓較其四圍各地為低，稱低氣壓區；反之，若  $B$  點，稱為高氣壓區。旋風 (cyclone) 係自低氣壓區之外圍，向內吹刮，反旋風則自高氣壓區向外吹刮。故彙集多處之氣壓報告，颶風之將成及其移動之方向，每可一目瞭然。生命財產因此種報告及預測，而得免於損失者非尠。

§ 115. **流體之浮力——阿基米得原理** 試於靜止流體內，任取其一部分而論，其周圍之部分對於此一部分，均有壓力作用，如圖 129 所示。至各點所受之壓力，並不相同，視其深度如何而定。但全體所受壓力之合力，則與此一部分之重量相等，否則不成其為平衡。故任何部分所受之總壓力，恆與其重量相等，而方向則相反。設想將此一部分之流體取出，另以同一形狀之別種物體代替之，周圍對此所成之壓力，仍不稍變。故在流體內之物體，莫不受有一向上作用之力，通稱曰浮力 (buoyancy)。浮力之作用點，為與此物體同一形狀流體之重心，稱為浮力中心 (center of buoyancy)。浮力之大小，即等於與物體同體積之流體之重量。

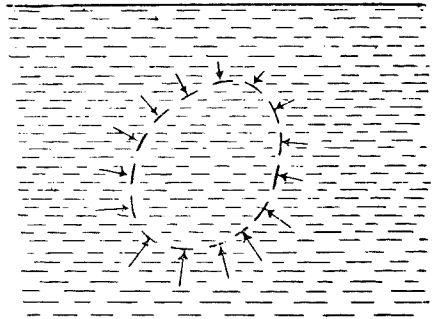


圖 129. 浮力

物體所受之浮力，適與重力反向，故在流體中時，似失去其一部分之重量；所失去之重量，即等於與物體同體積之流體之重量，為阿基米得 (Archimedes, 287—212 B. C.) 所發見，稱為阿基米得原理。

吾人於此有可注意者，即為物體浸於流體中，對於流體之反作用是也。如圖 130，物體懸於獨立之架上，將物體浸入天平盤上水杯中時，將見秤盤下降，以有浸入水中之物體對於水之反作用力故。此反作用力，自然與水對於物體之浮力，相等而相反。

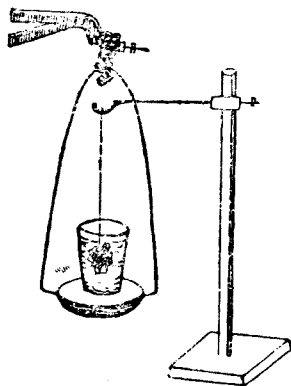


圖 130.

氣體之密度甚小，在普通情形下，其浮力不著。但若浸在氣體中之物體，其體積頗大而密度亦小者，則氣體之浮力，不容漠視。如氣球即藉空氣浮力而上升。又用天平權衡體積大而密度小之物體時，宜作空氣浮力之改正。

§ 116. 物體之浮沈 固體之密度較小於流體者，若以之投入流體之中，假令全部浸沒，則其所受之浮力將較大於其重量。於是固體受有向上之力，推之使離流體而出，直至留在流體中者所受之浮力與其重量相等而止。於是固體浮於流體之中。若固體之密度為  $\rho$ ，流體之密度為  $\rho'$ ，則固體體積  $v$  之浸入流體中之部分  $v'$  為

$$v' = \frac{\rho}{\rho'} v.$$

固體之浮於流體中也，流體之密度愈小者，則被浸入愈深。故船舶在淡水中之排水量，較之在密度稍大之海水中者為深。吾人在海水中，亦易於浮起。

魚類體內具有魚鰾，為一充有空氣之氣囊。若口內含水，由脣之壓力壓縮魚鰾中之空氣，使魚體重量大於其所排開之水重，即漸下

沈；若吐出口內之水，以解除魚鰾所受之壓力，使鰾內空氣膨脹，則魚身重量小於其所排開之水重，乃漸上浮。

潛水艇 (submarine) 之浮沈，則藉其有氣室之設備。欲使艇沈入水中，可引水入氣室，至全艇之重量與所排開之水重相等，艇就隱浮於水面下，再利用水平舵，以調節其在水中之位置。如欲使艇浮出水面，可將壓縮空氣 (compressed air) 打入氣室，將水迫出，艇就上浮。

固體浮泊時，在其各種可能之位置中，祇有一個為穩定平衡，重力恆作用於物體全部之重心  $G$ ，浮力作用於物體中之另一點  $B$  (圖 131)，即液體被擠開部分之重心所在之處 (浮力中心)。通常此二力組成一力矩，使物體轉至另一位置。僅當  $G$  與  $B$  之連接線為鉛垂時，平衡方為可能，但此時尚可或為穩定平衡，或為不穩定平衡。

浮體在任一浮泊之位置運動時，液體為其所擠開之部分之形狀，將隨之而變 (但體積則始終維持常定)，故浮力中心  $B$  將因之遷移。在浮體中可作一直線，即聯接重心與其平衡時浮力中心所成者。在其他不平衡位置，浮力之合力與此直線之交點  $M$  稱為定傾中心。定傾中心之位置在浮體重心  $G$  之上時，浮體為穩定平衡 (圖 131 甲)；

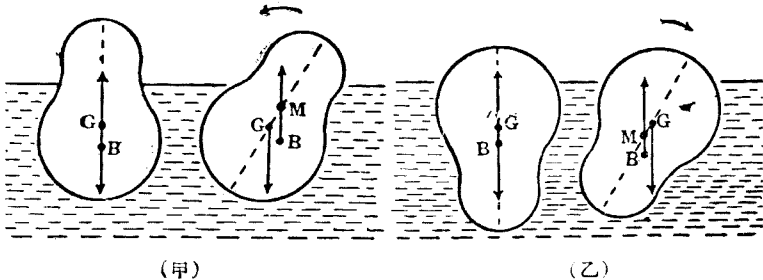


圖 131.

在  $G$  之下時，爲不穩定平衡(圖 131 乙)，浮體若離開其平衡位置，則在前種情形中，浮體將自行返至原位；而在後種情形中，雖離開極微，浮體將更行傾轉，而倒止於其穩定位置。此項情形，觀圖自明。

§ 117. 密度與比重 物體每一單位體積質量，稱之爲密度 (density)，或稱比質 (specific mass)，即

$$\rho = \frac{m}{v},$$

$m$  表物體之質量， $v$  表其體積。

權衡物體之質量，有靈敏之天平，但吾人無直接測量體積之精密儀器，倘依此定義去測物體之密度，將費力而不討好。

各種物質之質量，對於同體積  $4^{\circ}\text{C}$ . 之水之質量之比，稱爲比重 (specific gravity)。

設以  $s$  表比重，則有

$$s = \frac{\rho}{\rho'},$$

$\rho'$  表水在  $4^{\circ}\text{C}$ . 時之密度，水在  $4^{\circ}\text{C}$ . 時密度最大，惟與在普通室溫下，相差無幾。水在  $15^{\circ}\text{C}$ . 時之密度與其在  $4^{\circ}\text{C}$ . 時之密度之比 0.999125，故即以物體之質量，與同體積同溫度之水之質量之比，作爲比重，在實用上，亦夠精確。

如是，僅須一次測定水在  $4^{\circ}\text{C}$ . 時之密度  $\rho'$ ，即可由物質之比重，知其密度。

在米突制之創造者之原意，是要使一仟克恰是一立方公寸之水在  $4^{\circ}\text{C}$ . 時之重，惟造成之‘仟克原器’尊爲標準質量之後，知其質比一立方公寸之水在  $4^{\circ}\text{C}$ . 時要多 20 毫克，因之水在  $4^{\circ}\text{C}$ . 時之密度爲



$$\rho' = 0.99998,$$

在實用上，吾人可將 $\rho'$ 當作 1. 故在 C.G.S. 制中，就數值言，密度與比重相等。

§ 118. 比重之測法 物體之體積雖不易精密測量，但‘與之同體積’一事，倒是容易實現，尤其是用水與之同體積。

如求流體之比重，用比重瓶 (specific gravity bottle)，即一帶頸之瓶，頸上刻有指標者，先衡空瓶，次裝流體至指標衡之；再裝水至指標衡之；即得。

若求固體之比重，先衡固體；次裝水入比重瓶至指標衡之；勿要把水倒去，即將固體裝入，再把在指標上面多餘之水取去後衡之；即得。

凡此皆是利用同體積，根據比重定義，直接測定。

按阿基米得原理，物體在水中所失之重，即等於同體積之水之重。如是將固體浸入水中衡之，即是求其體積，故可應用阿基米得原理，為比重之測定。傳說阿基米得就是因為要測皇冠之比重，而發見此一原理。

法將固體先在空中衡之，再浸入水中衡之，則固體之重與其在水中所失去之重之比，即為其比重。

若測液體之比重，則用任何固體先後浸入水與此液體中衡之。在液體中所失之重與在水中所失之重之比，即為液體之比重。

§ 119. 比重表 上節所述比重之測法，均需一天平，天平非常之物，故測量牛乳，酒精，硫酸等物，可用比重表 (hydrometer)。比重表有兩式：一為定容式 (constant volume)；一為定重式 (constant

表 5. 常用物質之比重

物 質	比 重	物 質	比 重
鋁	2.7	二硫化碳( $\text{CS}_2$ )(0°C.)	1.263
銅	8.9	木精( $\text{CH}_3\text{OH}$ )(0°C.)	0.81
金	19.32	酒精( $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ )(20°C.)	0.789
鋼	7.8 (約)	醇精[( $\text{C}_2\text{H}_5$ ) <sub>2</sub> O](20°C.)	0.715
銀 鐵	7.87	甘油	1.26
鎳 鐵	7.2	汽油(0°C.)	0.68 (約)
鉛	11.37	煤油	0.79 (約)
鑲	8.30	機器油	0.90 (約)
鉑	21.37	海水(平均值)	1.026
銀	10.53	錄(Hg)(20°C.)	13.596
錫	7.29	氫(A)(0°C. 76 厘米汞高)	$1.783 \times 10^{-3}$
鋅	7.10	氯( $\text{Cl}_2$ )(同上)	$3.214 \times 10^{-3}$
黃 銅	8.5 (約)	氫( $\text{H}_2$ )(同上)	$0.0899 \times 10^{-3}$
白 蠟	0.85(約)	氦(He)(同上)	$0.1785 \times 10^{-3}$
水 晶	2.65	氮( $\text{N}_2$ )(同上)	$1.256 \times 10^{-3}$
冰	0.917	氧( $\text{O}_2$ )(同上)	$1.430 \times 10^{-3}$
金 剛 鑽	3.52	二氧化碳( $\text{CO}_2$ )(同上)	$1.974 \times 10^{-3}$
玻 璃	2.6 (約)	二氧化硫( $\text{SO}_2$ )(同上)	$2.95 \times 10^{-3}$
雲 母 片	2.8 (約)	氨( $\text{NH}_3$ )(氧化硫)	$0.761 \times 10^{-3}$
鹽	2.15	空氣(同上)	$1.293 \times 10^{-3}$

weight). 定容式比重表略如圖 132 所示. 此表有一空心柱體, 其下端為裝有汞或鉛球之錐體; 柱體上部有一細管, 管頂則載有一盤, 其

中可置砝碼，置此表於液體中，在盤中加以適當之砝碼  $W$ ，使表沈入液體，適達細管上所刻之指標處，此時液體之浮力等於表重  $w$  與砝碼  $W$  之和。若表在水中沈至指標處所需之砝碼為  $W_0$ ，則液體之比重為

$$s = \frac{W_0 + w}{W + w}$$

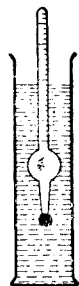


圖 133. 定重式比重表

定重式比重表略如圖 133 所示。此表多由玻璃管製成，管之中部略大，其下端則盛較重之物體，如汞或鉛球之類，以使管可在液中安穩浮立。在器上部之細管，附有標度，故自液面在細管上之位置，即可直接讀得液體比重之值，較之定容式比重表更為方便。定容式比重表已被淘汰殆盡。

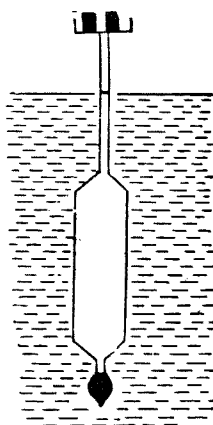


圖 132. 定容式比重表

## 習 題 十 八

1. 說明‘水漲船高’。
2. 一人右手提水一桶，左手提魚一尾。桶與水重 40 斤，魚重 3 斤，其比重為 1。如將魚放入桶內水中，求右手提桶之力。若魚之比重不等於 1，提桶之力，有無改變？
3. 一水槽在一斜面上下滑，斜面之傾角為  $\alpha$ ，槽底與斜面間無摩擦阻力。槽中半儲以水，問水平將若干？

若槽底與斜面間之摩擦阻力，使水槽沿斜面勻速下滑，則槽中

水面又何若？

4. 設有一等邊三角形之平面，直立浸入水中，底邊在下，與水平面平行，則面上各點皆受水之壓力作用，求此等壓力之合力之作用點（稱為液體靜壓力中心）。又若其底邊在上，仍為水平，則壓力中心又在何處？

5. 一稜柱體之截面為直角三角形，其直角二邊之長為 60 及 90 厘米。今橫置稜柱體以抵住 60 厘米深之水，則其比重為若干，方可不致為水所傾倒？

6. 一物在空中重 343 克，在水中重 290 克，縛於一木塊之上而同在水中，則兩者之重為 50 克。若木塊單獨在空氣中時為 100 克，求木塊之比重。

7. 一立方體木塊，每邊長 50 厘米，其比重為 0.3，浮於水中。若欲將此木塊壓至水底，水深 2 米，求所需作之功。

8. 有鉛片（鉛之比重為 2.7）在一液體中，逐漸自行下沉，經 1 秒鐘落至液體之底。知液體之深為 3 米，求其比重。

9. 有一鐵質之圓柱狀浮筒，其外直徑為 1 米，長為 2 米，筒壁之厚為 0.5 厘米，鐵之比重為 7.8，求浮筒垂直浮在水面上之部分。

若浮筒之底為鏈與錨相連，全部沒入水中，求鏈之張力。

10. 有一定容式之比重計，在比重為 0.6 之液中，沉入一定之深度，今若沈之於水中，使其達至同樣深度，則需加重 100 克。求此比重計之重量。

11. 有一水壓機，其大小圓筒之直徑各為 4 呎與 4 吋。因摩擦阻力之故，小活塞上須加 15 磅之重量，方能舉起大活塞；而舉 2 噸

之重量時，摩擦力較無負荷時且大二倍半，問小活塞上應加重多少，方能舉起 2 噸之重？求此水壓機之機械利益。

12. 馬得堡半球 (Magdeburg hemisphere) 之直徑為 10 厘米，其中空氣抽去後，要將兩半球分開，須用力多少？

## 第十五章 流體之彈性

§ 120. 液體之壓縮 液體對於純粹變形之力，如切力，雖無抵抗；然對於其體積之改變則有之。設有液體儲於堅固之圓筒狀容器中(圖 134)，其長為  $l$ ，截面面積為  $s$ ，為一活動之活塞所關閉。

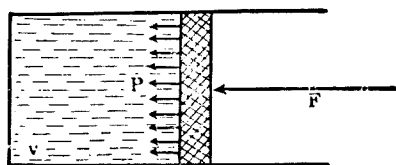


圖 134.

施力  $F$  於活塞上，以壓縮器內之液體，活塞因而向

內移動  $\Delta l$ ，液體之體積即減少  $\Delta V = s \Delta l$ ，每單位體積之縮小為  $\frac{\Delta V}{V}$ ，

係由於所受之壓力  $p = \frac{F}{s}$ ，乃有

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{p}{k},$$

$k$  稱為液體之壓縮係數(在固體，即為容變彈性係數)。壓縮係數愈大之液體，愈難壓縮，其倒數表液體之可壓縮性，稱為壓縮率 (compressibility)。

當施壓力於活塞上時，經液體之傳遞，容器之四壁皆受同值之壓力，故容器須極堅固者。就其值之大小階級言，液體之壓縮係數，約為固體容變彈性係數之十分之一。

表 6 液體之壓縮率

物 質	壓縮率 ( / 大氣壓)
酒精 (ethyl alcohol)	$10.70 \times 10^{-5}$
醇精 (ether)	$19.10 \times 10^{-5}$
汞	$0.39 \times 10^{-5}$
水	$4.69 \times 10^{-5}$

例. 壓縮水使其體積減少千分之一, 求所需之壓力.

$$p = k \frac{\Delta V}{V} = 0.001k = \frac{0.001}{4.89 \times 10^{-5}} = 20.5 \text{ 大氣壓}$$

$$= 21.2 \text{ 仟克/厘米}^2.$$

在 2 公里深之海底, 始有此壓力, 水之密度方增加千分之一. 在水壓機 (§ 111) 中, 壓力不超過每平方厘米 20 公斤時, 故可不計水之壓縮性.

§ 121. 氣體之壓縮——波義耳定律 氣體受壓力作用時, 不僅變形, 且有極顯著之收縮, 故氣體之壓縮率, 遠較固體及液體為大.

取一截面均勻之曲玻璃管, 長端開口, 短端封閉, 如圖 135(甲), 將汞逐漸注入管中, 至長短兩管支內之汞面  $A$  及  $B$  在同一水平面時, 閉管內空氣所受之壓力適為一大氣壓. 繼續將汞注入, 短管支內汞面  $B$  繼續上升, 不若長管支內  $A$  上升之多, 如圖 135(乙) 所示. 此時短管支內空氣體積縮小, 所受之壓力等於  $\left(1 + \frac{h}{76}\right)$  大氣壓,  $h$  表長短兩管內汞面高度之差. 隨時記錄  $A$  及  $B$  兩汞面之位置, 即知短管支內空氣之體積及其所受之壓力.

欲使短管支內空氣所受之壓力小於大氣壓, 可將曲管之彎曲部分, 代以橡皮管; 即用兩根直玻璃管, 而以橡皮管連接之, 如圖 135

(丙)所示。上下移動長管，即可使表面  $A$  或高或低於表面  $B$ 。若  $A$  面低於  $B$  面  $h$ ，此時短管支內空氣所受之壓力為  $(1 - \frac{h}{76})$  大氣壓。

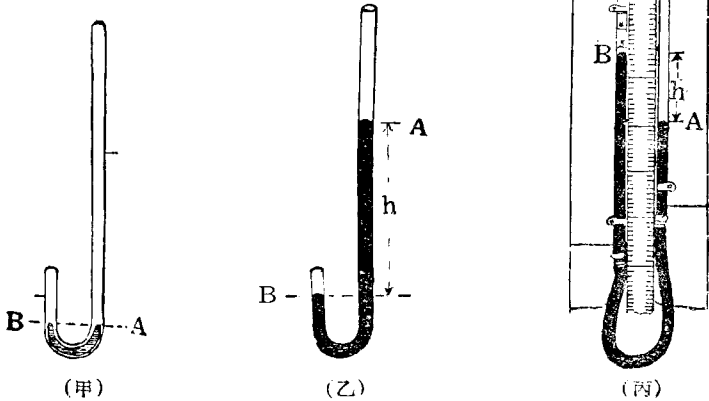


圖 135. 氣體之壓縮

由此等實驗結果，波義耳 (Boyle) 於 1662 年，推得定律：  
若溫度不變，氣體之體積  $V$  與所受之壓力  $P$  成反比，即

$$PV = C,$$

$C$  為一常數。

密度乃與體積成反比者，由此可知氣體之密度，在溫度不變時，與其所受之壓力成正比。

此定律在十四年後，復為馬利粵脫 (Mariotte) 所獨立發現，故常稱為波義耳—馬利粵脫 定律 (Boyle-Mariotte's law)。在尋常之壓力下，固頗準確，惟壓力頗大時，此定律僅係近似。例如當空氣所受之壓力，自 1 大氣壓增至 78 大氣壓時，則  $PV$  乘積漸減，至約為原值之



百分之九十八，此後若再增大壓力，則  $PV$  又反漸增，迄  $P$  達 3,000 大氣壓時， $PV$  之乘積約增至原值之 4.2 倍。其他各種氣體，亦均非完全遵循波義耳定律。

§ 122. 氣體之等溫壓縮係數 凡物體之狀態變遷時，其溫度始終保持不變者，稱為等溫過程。波義耳定律即係等溫過程中之結果，今從波義耳定律可推出氣體之壓縮係數。

設氣體之壓力為  $P$ ，體積為  $V$ ，今增加壓力  $\Delta P$ ，使其體積減小  $\Delta V$ ，如是有

$$PV = (P + \Delta P)(V - \Delta V) = PV - P\Delta V + V\Delta P - \Delta P\Delta V,$$

式中  $\Delta P\Delta V$  一項對於  $\Delta P$  或  $\Delta V$ ，更為微小，可略而不計，故成：

$$P\Delta V = V\Delta P.$$

但依壓縮係數  $k$  之定義，為

$$k = \frac{\frac{\Delta P}{\Delta V}}{\frac{\Delta V}{V}} = V \frac{\Delta P}{\Delta V},$$

故得

$$k = P.$$

所以氣體之壓縮係數，即等於其所受之壓力。但此僅對合乎波義耳定律之氣體，在等溫過程中，方為正確。

是氣體之壓縮係數，不為常數。此即表示已壓縮之氣體，愈壓縮後，愈難壓之事實也。

在標準情況下，空氣之壓縮係數為 1 大氣壓（因其所受之壓力為一大氣壓），即須增加 1 大氣壓之壓力，始可壓縮空氣到原來體積之二分之一。

§ 123. 壓力計 在波義耳實驗中 (§ 121)，閉管支內之氣體體

積，隨所受之壓力而變，觀其體積，即可知其所受壓力之大小，故可為測量壓力之具。圖 136 所示，實即為一種壓力計，此種裝置，稱為閉端壓力計 (closed-end manometer)，以別於 §110 所述之開端壓力計。

設當管之開端與大氣通接時，兩管中汞柱高之差為  $h_0$ ，而在閉管上之氣體柱長為  $x_0$  (圖 136)。今將開端連接於要量壓力之處，壓力因而增加為  $P$ ，則閉端之氣柱長將減為  $x$ ，而  $x$  與  $P$  之關係，甚易知為

$$(P+h)x = (B+h_0)x_0,$$

式中  $B$  表大氣壓力， $h$  為此時兩管中汞柱高之差。但

$$h = h_0 - 2(x_0 - x),$$

於是

$$[P + h_0 - 2(x_0 - x)]x = (B + h_0)x_0,$$

故

$$P = (B + h_0) \frac{x_0}{x} - h_0 + 2(x_0 - x).$$

如兩管中汞柱高之差原始為零，即  $h_0 = 0$ ，則  $x$  與  $P$  之關係更為簡單，而成

$$P = B \frac{x_0}{x} + 2(x_0 - x).$$

故用閉端壓力計，來量較大氣壓力為大之壓力時，不必如開端壓力計之須具有甚長之開管。

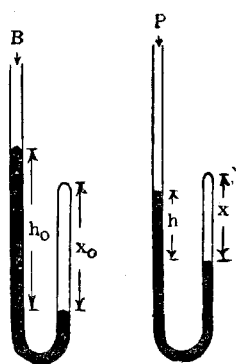


圖 136. 閉端壓力計

若欲量低於大氣壓之壓力，則閉管端自然不必留有氣體，如圖 137 所示。將此壓力計之開端連接於正在抽氣中之儀器上，儀器中之壓力減低至某程度時，閉管之汞柱脫離管端而開始下降，若達真空，則壓力計兩管之汞面相平。

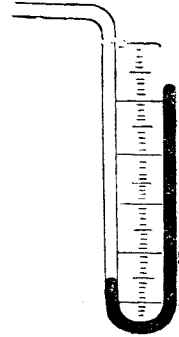


圖 137.

在工業上每須量極大之壓力，如蒸汽機之蒸汽壓力等，上述各種壓力計自不適用，則有金屬壓力表(圖 138)。其主要部分為一彎成環形之銅管，截面

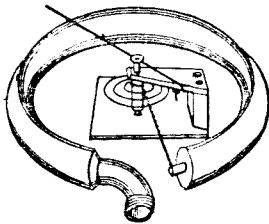


圖 138. 金屬壓力表

為橢圓形，一端開口，固定於表盒上，以便於欲量之壓力連接，他一端封閉可以移動。當銅管內壓力加大時，其截面變形，漸成圓面，因而環之直徑加大，管之閉端移動。藉鏈之助，此小移動使指針在標度上移轉，即可直接讀出壓力。

§ 124. 旋動抽氣機 抽氣機之用途，為減低容器中之空氣或其他氣體之壓力。在物理學中，能產生低氣壓之抽氣機，尤屬重要。一塵不染，萬物無存之空間，稱為真空，不過是理想之境界，但空間中一切氣體已抽去其絕大部分者，常亦稱真空，故有高度真空與低度真空之分。

抽氣機形式之最簡單者為唧筒抽氣機，約可得數厘米汞高之真空，在今日實驗室中已少用之矣。

欲產生真空達 0.1 毫米汞高者，通常用旋動抽氣機(rotary air pump)，略如圖 139 所示。在一圓筒之金屬體 A 中，有一偏心之圓

柱體  $B$ ，可繞其柱軸而轉動。圓筒之外滿注以油，以防漏氣。

圓柱體上具有二滑動桿  $l$  及  $l'$ ，藉一彈簧之助而緊壓於  $A$  之內壁。 $C$  管通接於欲抽空之容器， $D$  為出口，有一活瓣以司啓閉。圓柱轉動時，圓筒內  $C$  與  $l$  間之空間繼續增大，容器中之空氣即被吸入，同時  $D$  與  $l'$  間之空間縮小，空氣即被壓由  $D$  向外流出。每轉過半周後，情形又復相同，與  $D$  相連之容器，因之漸成真空。

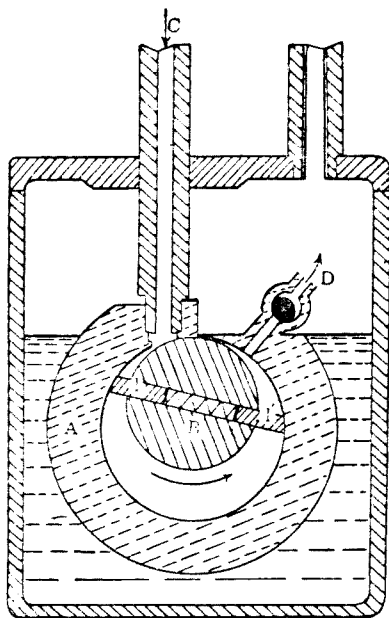


圖 139. 旋動抽氣機

欲得較旋動抽氣機可達者更高度之真空，可用汞汽擴散抽氣機 (mercury diffusion pump) 連接於所要抽空之容器及旋動抽氣機之間。

§ 125. 氣體壓縮所需之功 在 § 120 所述液體之壓縮中，用力  $F$  將活塞推進  $\Delta l$ ，則液體體積變小  $\Delta V$ ，所作之功顯然為

$$F \Delta l = P \Delta V.$$

當液體體積由  $V_1$  壓縮至  $V_2$ ， $V_2$  與  $V_1$  相差不大，在此過程中所作之功即為

$$W = P(V_1 - V_2).$$

但若圓筒內(圖134)為氣體時, 氣體之壓力將隨其體積之縮小, 而逐漸增加. 在體積為  $V$  時, 所用之壓力  $P_1$  須略大於  $\frac{C}{V}$  (§121, 波義耳定律) 方可壓縮, 至  $V_1 = \frac{C}{P_1}$  時不復

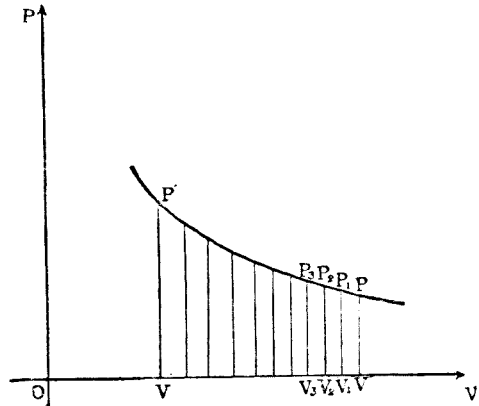


圖 140.

能前進, 必須再加大所用之壓力  $P_2$ , 至體積壓縮為  $V_2 = \frac{C}{P_2}$  時又不能前進, 必須再加大所用之壓力, 如是以往, 終至最後用壓力  $P' (= \frac{C}{V'})$  將氣體之體積壓縮成  $V'$  時, 所需之總功為

$$W = P_1(V - V_1) + P_2(V_1 - V_2) + P_3(V_2 - V_3) + \dots,$$

即壓容圖(圖 140)中之  $P-V$  曲線與  $V$  軸在  $V$  及  $V'$  兩縱線間所包圍之面積也. 其近似值為

$$W = \frac{1}{2}(P + P')(V - V').$$

上述方法使氣體由  $V$  壓縮至  $V'$ , 稱為可逆手續, 以其所用之壓力隨時僅足以勝過氣體之壓力, 而使壓縮得以進行而已, 故所作之功實為最小. 吾人自可即施壓力  $P'$ , 其值為

$$P' = \frac{C}{V'}$$

者，一直將氣體自體積  $V$  壓縮至  $V'$ ，則所作之功爲

$$W' = P'(V - V'),$$

較之可逆手續所作之功  $W$  爲大，不免有所浪費矣（參閱第十二章，習題十七之題 11.）。

§ 126. 壓氣唧筒 壓氣唧筒(compression pump)乃使氣體壓入容器內，俗稱打氣筒。其作用與活門裝置，恰與空氣唧筒相反，如圖 141 所示， $C$  爲圓筒， $P$  爲活塞， $V$  與  $W$  爲祇能向下與向外開放之活門。當活塞向上提時，活門  $W$  被容器  $R$  內之空氣壓向內閉，活門  $V$  被筒外空氣推開，空氣流入圓筒內；活塞下壓時，活塞下之空氣受壓，活門  $V$  壓閉，而活門  $W$  被推開，空氣遂由圓筒壓入容器內。如是上下移動活塞，容器內空氣及其壓力繼續增加，以成壓縮空氣。打氣者所用之力，隨容器內空氣之壓力而增加，故活塞之面積不能太大。

鐵匠所用之風箱，即是壓氣唧筒原理。人力車，腳踏車與汽車之橡皮輪胎，以及足球膽內之充氣，都用壓氣唧筒。

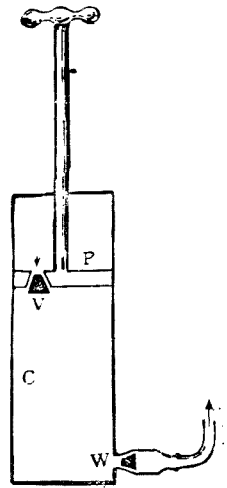


圖 141. 壓氣唧筒

## 習題十九

1. 壓縮 100 立方厘米之水銀，使其體積減小千分之一，求所需之壓力及所作之功。
2. 取粗細均勻之玻璃管，垂直插入水銀盆中，管露出水銀面

20 厘米，然後以指密封管口，漸漸將管提上，當管內之空氣柱長 21 厘米時，求管內外水銀面高度之差。

3. 空氣之密度為每立方厘米 0.001293 克，打氣入足球，球重增加 2.5 克，球膽之直徑為 10 厘米，求打氣時所作之功。

4. 有氣壓表之長度為 85 厘米，其管中水銀面上因含有微量之空氣，當精確氣壓表為 760 毫米時，此氣壓表讀為 745 毫米，若此表所示之氣壓為 720 毫米時，求真確之值。

5. 有珍珠泉，氣泡升至水面時，體積為在井底時之 1.4 倍，求井深。

6. 有水銀 200 克，裝在開端 U 形壓力計內，壓力計之管之內直徑為 1 厘米，管內水銀柱受擾動後，即對於其原來之靜止位置發生簡諧振動，求其週期。

7. 唧筒式抽氣機鐘罩內之容積為  $R$ ，唧筒以及其連通管之容積為  $B$ ，空氣原來之密度為  $d$ ，試證已抽  $n$  次後之密度為

$$d_n = \left( \frac{R}{R+B} \right)^n d,$$

並求此時鐘罩內之壓力。

8. 一圓筒形之潛水鐘高 2.5 米，橫截面積為 4 米<sup>2</sup>，沈入水中，直至其頂沒在水面下 8 米之處，水面上之大氣壓為 76 厘米，問須有若干空氣壓入鐘內方可使鐘內無水侵入？此時鐘內氣壓計所示何值？

## 第十六章 流體之運動

§ 127. 流動 由上章所述，吾人知靜止之流體，其自由面爲水平面，流體內各點之壓力，由其深度而定，深度相同之各點，壓力相等。倘此等條件不能保持，則起運動。如水之就下，卽以其自由面非水平者。又如水平之自來水管中，水亦流動，則以其各點壓力有差之故，水由壓力大處，流向小處。

流動開始後，若存在之壓力差不變，且流體之供給不斷，則其流動將成穩定狀態，而爲定流(steady flow)，卽在空間中，各點之速度及其壓力均有定值，不隨時間而變。本章所討論者均屬定流。

流體中之流線(stream line)者，爲到處與流動質點之流動方向相合之線。故在定流中，流線爲流動質點軌道之圖形。在流體中，經過一小形閉合曲線上各點之所有流線，可組成一**流管**(tube of flow) (圖 142)。

流體無有自流管之側流出或流入者，亦無在一處繼續囤積者，故每單位時間內，同一流管中，恆有一定之流體流過其各截面，卽所謂

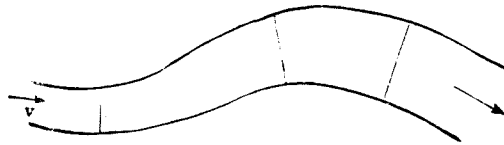


圖 142. 流 管



連續條件(condition of continuity)也。

以此之故，流管決不能在流體內任何一點自行起始，或自行終止。流管必起於流體界面之一處，而趨向於其界面之另一處。若在流體中，流管自成一通路，無起點亦無終點，則為漩渦。

每單位時間內，流過各截面流體之量，正比於各該截面之面積  $s$ ，以及流過各該截面時之速度  $v$ ，故按連續條件，在同一流管之內，有

$$sv = \text{常數},$$

稱為流量。

由此可知一簡單之事實，即管內之流體，在最狹處，流過最速。

一切之流體，皆有其內摩擦之作用，以致流動之情形多少受其影響。在許多情形中，此項影響頗小，可略而不計，吾人所假設之無摩擦流體稱為理想流體者即此；至於真正之流體，則稱為黏滯流體以別之。今先述理想流體。

§ 128. 斐奴禮定理 作穩定流動之理想流體，毫無摩擦阻力，則當一定質量  $m$  之流體，在流動中，其能量不至有所變更。

設  $S$  為流管中之某一截面，其距一水平面之高度為  $h$ ，此處之流體速度為  $v$ ，壓力為  $p$ 。如是當  $m$  質量之流體流入該截面時，動能為  $\frac{1}{2}mv^2$ ，位能為  $mgh$ ；除此兩者外，因此處之壓力為  $p$ ，尚有將此質量壓迫入於壓力為  $p$  之處所需作之功為  $p \frac{m}{\rho}$ ， $\rho$  表密度，此功亦即用以增加流體之內能，可謂流體位能之另一種。故流體之總能量為

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh + p \frac{m}{\rho} = \text{常數},$$

即 
$$\frac{v^2}{2g} + h + \frac{p}{\rho g} = \text{常數},$$

此式表明流體之速度，壓力與高度三者間之關係。此關係首由裴奴禮(Bernoulli)於1738年發現，稱為裴奴禮定理。

細觀此關係式中之三項，皆為長度(頭)之因次。吾人稱  $v^2/2g$  一項為速度頭(velocity head)，此等於流體靜止下落得速度  $v$  時所經之高度； $p/\rho g$  一項為壓力頭(pressure head)，蓋其即為靜止流體柱所施流體靜壓力為  $p$  時之高度 (§108)； $h$  稱為水頭。故流體內，速度頭，壓力頭及水頭三者之和，乃為常定。

若  $v=0$ ，則上式為

$$h + \frac{p}{\rho g} = \text{常數},$$

完全與流體靜壓力符合 (§108)。

§129. 裴奴禮定理之應用 今述裴奴禮定理應用之例數則於後：

1. 若液流為水平向，即  $h$  之值不變，則有

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p = \text{常數}.$$

如圖 143，在水櫃  $R$  之下旁裝一橫管  $T$ ， $T$  之截面在  $B$  處突然

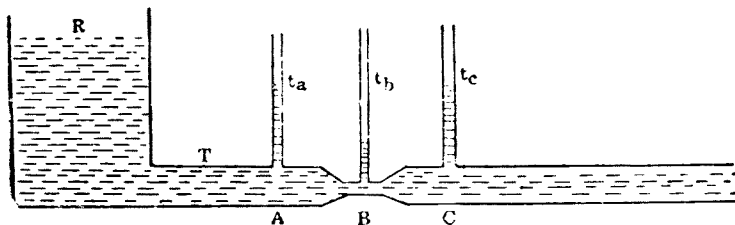


圖 143.

縮小。在  $T$  管之  $A, B, C$  三處各裝細管  $t_a, t_b$  及  $t_c$ ，則其中水柱之高度即示各點之壓力。先以水門閉塞  $T$  管之開端，如是水不流動，各細管中之水柱均與水櫃中水面同高。一行開啓水門，任水流動，即見  $t_a$  與  $t_c$  兩管之水柱均較  $t_b$  中者為高，此即因在  $B$  點之截面積特小，水流較速，因而其壓力較低也。

故在一水平管中，管身較狹之處，壓力亦較小。在廣泛之液流中，此理可應用於各流管上。下述各器，皆本此理而成。

**水流抽氣機** (aspirator, 圖 144), 受有壓力之水, 由自來水管流入一下口狹小之管中, 自此小口流出後, 在空中經過一短距離, 復流入一較廣之管中, 而由下口流出。水由上管小口流出, 其截面較小口猶為細狹, 故其附近壓力特低, 周圍之空氣即被吸引, 隨水流出。抽氣機之側管, 通接於欲抽空之容器。抽氣機中空氣稀薄後, 容器中之空氣即流入機內。但抽氣機之內部恆充滿飽和之水汽, 故抽氣之作用為此項汽壓所限制(在平常室內溫度, 其值為 10 至 20 毫米汞)。

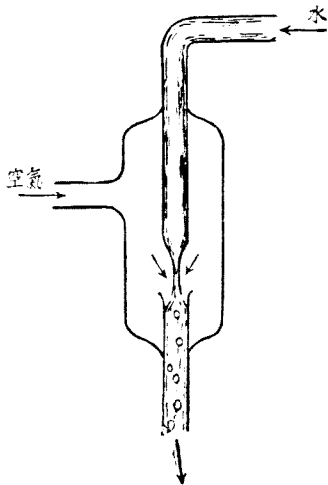


圖 144. 水流抽氣機

**噴霧器** (atomizer, 圖 145), 空氣氣流自一狹小之管口噴出。另一管與此氣流正交者, 插入欲噴之液(如水或漆)中, 此管之上端亦具有細小之口。管口四周之空氣被氣流帶動, 其速度較他處為大, 而他處之壓力為大氣壓力, 故此處之空

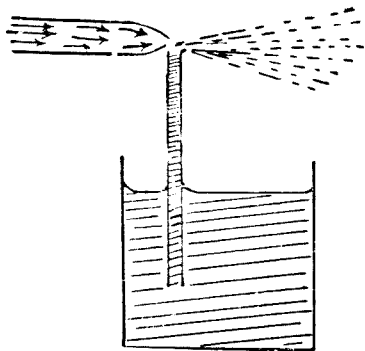


圖 145. 噴霧器

遠較稀疏，因此，翼上之空氣其速度較翼下者為大，而壓力則較小，機翼感受一浮力，飛機藉以上升。機身與翼板之輪廓，若與空氣流線形狀相合，阻力將大見減小，即所謂流線型也。

紙鳶之騰空，推進機之前進，風車之轉動，皆可以同理說明之。不特此也，帆與舵以及鳥類之翼，其作用亦正復相同。

兩船平行前進(圖147)。

氣壓力較大氣壓力為小，液面上亦為大氣壓力，液體因之被壓上升管中，為空氣所吹散，作霧狀而隨之噴出管外。

煙囪之通氣作用，亦與噴霧器之理相似，有風時較無風時為佳。

翼板 為一彎曲板，在空氣中運動，翼之周圍即生氣流，如圖146所示。翼上空氣流線密集，翼下則

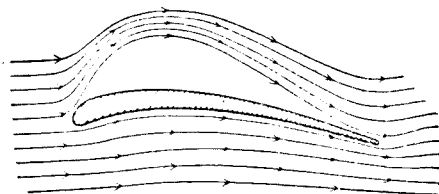


圖 146. 翼板

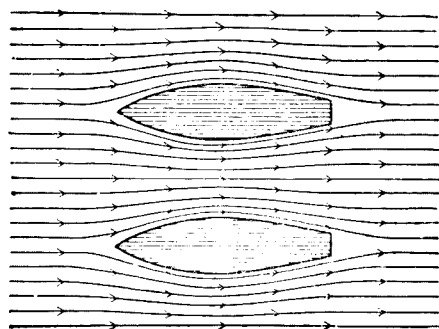


圖 147. 兩船平行前進

其間水流流線較為叢密，壓力特小，有互相吸引之勢，苟非船伏特別注意，極易碰撞。

2. 一容器儲密度為  $\rho$  之液體，其液面下  $h$  處有一出口，液體由此射出(圖 148)。液面上及出口處均為大氣壓力，即  $p = B$ 。

命出口處之水頭為零，則液面之水頭為  $h$ ，若容器頗大，液體射出時，液面下降甚緩，可設液面下降之速度為零。又命  $v$  為出口處液體射出之速度，則由裴奴禮定理，得

$$\frac{F_1}{\rho g} + h = \frac{F_2}{\rho g} + \frac{v^2}{2g},$$

即 
$$v = \sqrt{2gh}$$

此結果於 1643 年為托里拆利所發現即所謂托里拆利定律 (Torricelli's law)也。

液體射出之速度，與自由墮體靜止下降  $h$  高度後之速度相同，故出口處之速度即等於液面之水頭。液面逐漸下降，射出之速度亦隨而逐漸減小。

出口處若有導管鉛直向上，則液體上射將重行至  $h$  之高度，此似當然之事也。

虹吸 (siphon) (圖 149)，係一 U 形之管，可令液體自一貯器中流至較低之處， $C, D$  兩管支長短不等，以短管支  $C$  浸入貯器液面下，在長管  $D$  開口  $A$ ，將管中之空氣吸出，則液體因受大氣壓力之壓

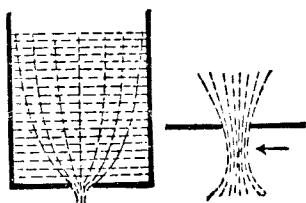


圖 148.

迫，上升管中，經過其最高點  $T$  後，自行流出。流出之速度，由托里拆利定律，知為：

$$v = \sqrt{2g(h_1 - h)},$$

$h_1$  及  $h$  各為貯器液面及虹吸長管開口之高度。

3. 一容器內儲壓力為  $p$  之氣體，器壁上有一小孔，器外之壓力為  $p'$ ，較器內者為小。容器內部之氣體靜止，而在小孔附近者，則以速度  $v$  射出(圖 150)。

設  $p$  與  $p'$  及其差均頗大，則雖非水平方向流出， $h$  之值或有不同，亦可略而不計。由裴奴禮定理，得

$$p = p' + \frac{1}{2}\rho v^2,$$

或

$$v = \sqrt{\frac{2(p - p')}{\rho}}.$$

壓力差  $p - p'$  相同時，各種氣體之流出速度，將反比於其密度之平方根，故可用此法以測定氣體之密度。

§ 130. **流體之滯性** 於流體中，設想兩平面互相平行，面積同為  $s$ ，其間之距離為  $d$ ，一平面為固定者；於他一平面上加力  $F$ ，為平行於此平面者。流體之切變係數為零云者，其切變角  $\theta$  將繼續增加，

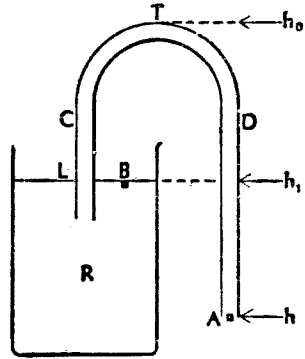


圖 149. 虹 吸

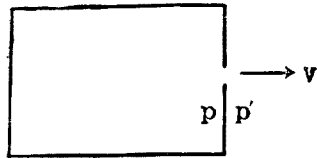


圖 150.

無有已時(極限角為 $90^\circ$ )\*. 惟切變角增加之快慢, 各種流體大有不同, 表示此種切變快慢之特性, 稱為流體之滯性(viscosity). 設此平面 $A$ 受 $F$ 力之作用, 以速度 $v$ 滑動前進, 每單位時間內所生之切變為 $v/d$ . 切力 $F/s$ 與切變角速度 $v/d$ 之比, 稱為滯性係數, 即

$$\mu = \frac{\frac{F}{s}}{\frac{v}{d}} = \frac{Fd}{vs}$$

滯性亦稱**流體摩擦**(fluid friction). 蓋在滯性流體中, 流面為 $A$ , 流動前進, 即在其面上感受阻力, 與 $F$ 相等而相反, 其值為 $-\mu vs/d$ .

例 有長為 $l$ 之圓柱體, 直立於一圓筒內, 可繞圓柱之軸而轉動(圖 151). 圓柱及其軸之半徑各為 $R$ 及 $r$ , 圓筒之半徑為 $R'$ . 繩之一端固定於軸上一點, 圍繞若干匝後, 跨過固定滑車而下垂, 懸一重物 $W$ . 當 $W$ 下降, 則圓柱體作勻加速轉動,  $W$ 之下降亦為勻加速運動.

若筒內注滿滯性液體(如甘油), 則重物 $W$ 由靜止下降, 不久即成為勻速運動, 蓋當重物下降達速度 $v$ 後, 其重量 $W$ 對於圓柱轉動軸之力矩, 與液體在圓柱曲面上之摩擦力之力矩, 相等相反而相消也.

圓柱曲面上各點之速度為 $vR'/r$ , 所受液體之摩擦阻力為

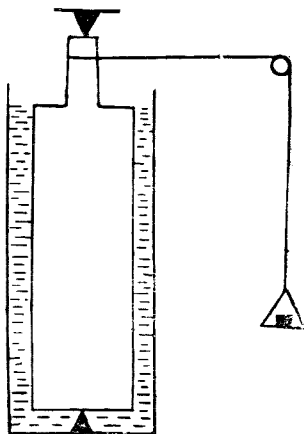


圖 151

$$\mu \cdot v \frac{R}{r} \cdot \frac{2\pi Rl}{R' - R} = \frac{2\pi\mu v R^2 l}{r(R' - R)}$$

\* 在固體之切變係數為 $\alpha$ 者, 切變角達 $\theta = \frac{dF}{\alpha s}$ 之值後, 即停止增加. 切變係數為無窮大者, 其切變角為零, 方無切變之可言.

對於圓柱轉動軸之力矩為

$$\frac{2\pi\mu v R^3 l}{r(R' - R)}$$

故有

$$Wr = \frac{2\pi\mu v R^3 l}{r(R' - R)},$$

即

$$v = \frac{r^2(R' - R)W}{2\pi\mu R l},$$

此可為測量滯性係數之一法。

表 7. 滯性係數 (克/厘米-秒)

酒 精 (ethyl alcohol)	0.012
醇 精 (ether)	0.026
甘 油 (glycerin)	8.3
油 (滑潤機器用)	1
汞	0.016
水	0.01
空 氣	0.00018

表 7 之滯性係數，係指各物質在 20°C. 者。油質之滯性係數，常隨溫度之增加而減小，惟若壓力增大，則又呈顯著之增加。用油作滑潤液之功效，似完全由其滯性係數之大小而定，故其與溫度及壓力之關係，在實用上頗為重要。

§ 131. 管中液流 自來水或煤氣在均勻之管中流動，以流體之有滯性故，其截面上各點之速度，並不相同，可由理論推得

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (r^2 - x^2),$$

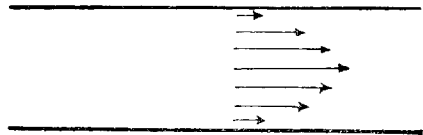


圖 152. 管中液流各點之速度



式中  $l$  表管長,  $p_1$  及  $p_2$  表兩端之壓力,  $x$  為該點離管之中心軸之距離,  $\mu$  為滯性係數. 靠管壁 ( $x=r$ ) 之流速為零, 自管壁至管心速度漸增, 在管心 ( $x=0$ ) 最大 (圖 152). 故流體在管中, 成為若干同軸之薄圓筒, 大小密套, 鱗比滑流而出.

由截面各點之流速, 可得每秒鐘內流過各截面之流體體積, 即流量, 為

$$V = \frac{\pi r^4}{8\mu l} (p_1 - p_2),$$

此為泊謨葉定律 (Poiseuille's law). 由細管之流量, 亦可測定滯性係數.

管中各點之壓力, 將成均勻遞降, 如圖 153 所示, 此完全由於液體滯性所致. 否則, 若為理想流體,  $A, B, C, D, E$  各點之壓力應皆相

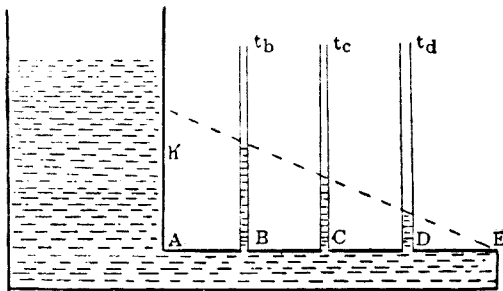


圖 153.

等, 即細管  $t_B, t_C, t_D$  中之水柱之高應同為  $h'$ . 是由管之  $A$  端至  $E$  端共損耗頭  $h'$ , 稱為耗失頭 (lost head).

§ 132. 唧筒 唧筒為吸取液體送至高處之機器, 與虹吸相反, 宜不斷供給工作. 可分為吸收唧筒與壓迫唧筒兩類.

吸收唧筒 (lift pump), 略如圖 154 所示。圓筒中有活塞  $P$ , 活塞及筒底各有向上開之活門  $a$  及  $b$ 。當活塞開始向上移動時,  $a$  被活塞外空氣所阻止而關閉, 在活塞下空氣壓力減小, 水遂推開  $b$  而上升筒中; 當活塞向下移動時,  $b$  被壓迫而關閉,  $a$  則向上開, 水即流至活塞之上; 如是活塞再向上移動時, 即攜其上之水使自  $S$  流出。吸收唧筒所舉之水, 在理論上, 其高度可達 34 呎, 即大氣壓力之水柱高; 但在實際上, 則遠在此值之下。故欲將水舉至 34 呎高度以上, 宜用壓迫唧筒。

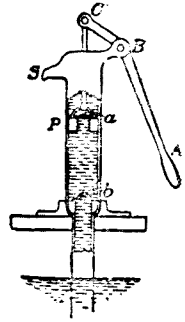


圖 154. 吸收唧筒

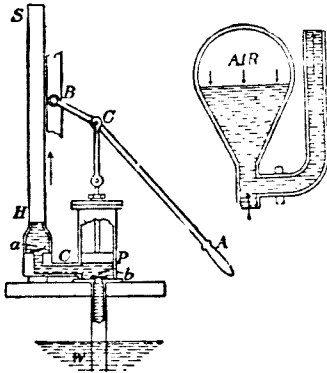


圖 155. 壓迫唧筒

壓迫唧筒 (force pump), 亦稱輸筒, 與吸收唧筒構造不同之點, 在於活門  $a$  不設在活塞上, 而在於筒旁。當活塞向上移動時,  $a$  關閉而  $b$  開放, 水乃流入筒內; 當活塞向下移動時,  $b$  閉而  $a$  被推開, 水遂被擠入輸送管  $HS$  中。為求水流之連續, 恆於輸送管上裝一氣室, 藉室內壓縮空氣之壓力, 可使活塞上移時, 水仍由輸送管中繼續流動不息。

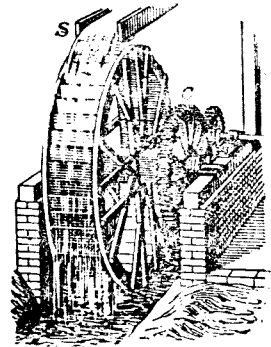


圖 156. 水車

§133. 天然水能之利用 河水或瀑布之水頭  $h$ ，每秒之流量為  $m$ ，則有功率  $mgh$  之天然富源在焉，吾人可利用之以發生能。如我國各地鄉鎮磨坊所用之水車(圖 156)，以及新式水電廠之水輪機(water turbine)，皆由高處落下之水，衝擊翼板，使輪旋轉而成原動機械，一經建置，維持費用甚省。

§134. 自來水 城市中之自來水(圖 157)乃將河或湖  $a$  中之

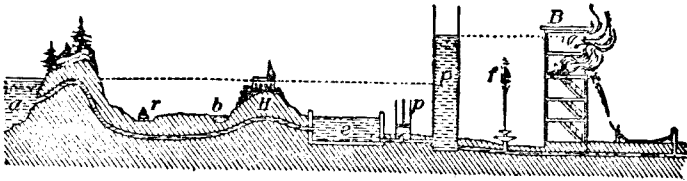


圖 157 自來水

水導入水池  $c$ ，經過過濾消毒之後，用唧筒  $p$  壓入水塔  $P$ ，再用自來水管分送至全市各處，以供使用。

## 習 題 二 十

1. 自來水管在地窖中，其水壓為每方吋 50 磅，問在樓上距地窖 45 呎之處自來水之水壓為何？在此處開啟水管，求水流出之速度。實際上水流出之速度為每秒 18 呎，求自來水管中每呎所耗失之水壓。樓上水管開啓與關閉時，地窖中之壓力計所指示，相差多少？

2. 水桶之高為 1 米，滿盛以水，置在桌上，桌高 80 厘米。桶壁近底處有一漏孔，孔之面積為 0.8 厘米<sup>2</sup>，問用何力擋住此孔，水方不外流？若任水外流，將於何處落地。

3. 有玻璃管直徑為 3.8 厘米，長 16 厘米，套在直徑為 3.4 厘

米之長玻璃管外，兩管之間，塗滿甘油。今以每秒 5 厘米之速度將管抽出，問須用力多少？

4. 有水管長 100 米，一端與水池池面連接，他端有一水門。設管中水流之速度，因水門之關閉，自每秒 2 米之值減至為零，求水管裝置之斜度。

5. 試述本生燈(Bunsen burner)構造之原理。

6. 有一大水槽，旁接細管，水自管中源源流出。設細管之長為 50 厘米，半徑為 5 毫米，管口在水面下之距離為 70 厘米，求一小時內由此管流出之水量。

## 第十七章 分子運動與分子力

物質由分子或原子而組成，分子與分子間之空隙，就分子而言，海闊天空，故分子在物體中非靜止者，固體中分子相擠較密，晶體之原子且各有定位，但仍可於其定位之左右振動，以液體之易變形，可知其分子已不拘於一定之位置，而能彼此滑動，若在氣體，則分子移動尤易，容器之內，幾乎無遠不屆。

下述若干現象，可使吾人確信分子運動，永無寧息。

§ 135. 擴散 日常簡單之觀察，即可知氣體分子係迅速運動不息者，例如在室之一隅放出氨 (ammonia) 或他種富有刺激嗅覺之氣體，不久全室將充滿臭味，此即表示在短時內頗多之氨氣分子，已能行到室之遠處。

又若將氫氣裝於 (圖 158) 所示之上球，以二氧化碳充滿下球，開啓活門，以使兩球連通，約歷一日後，分析兩球中之氣體，其成分完全相同。此種結果似可驚異，因二氧化碳較氫氣約重二十二倍，而仍能自下流上，與氫混和，此無他，各分子之運動使然耳。此種現象，稱為擴散 (diffusion)。

液體之擴散現象，亦顯而易見。例如盛清水於杯中，而徐以玻管注入濃度頗大之硫酸銅溶液於杯底，

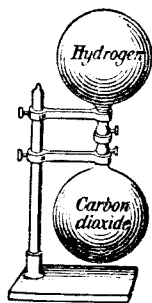


圖 158.

使兩者不相混合，則見杯中初呈一極明顯之分界線，縱使無外界之擾動，杯底之藍色溶液，將漸與杯中之清水混合，歷若干時間後，杯之上下已盡為均勻之淺藍色矣。硫酸銅之密度較清水為大，似應沉在底部，今乃呈此種現象，是即表示在溶液中之分子，實亦在運動不息也。

麝香在堂，滿室為香。

§ 136. 滲透 有許多薄膜，雖無可見之細孔，亦可任液體擴散無阻。例如以橡皮膜隔離水與酒精，酒精可通過橡皮膜，而水則不能。能任一種液體通過，而不任他種液體通過之膜（例如橡皮膜），稱為半透膜（semi-permeable membrane）。此種穿過半透膜之擴散現象，遂稱為滲透（osmosis）。

今如張一半透膜之袋，例如膀胱，於玻璃管下端（圖 159）。在管外杯中盛以水，而在管中袋內盛以糖溶液，則歷若干時間後，將見水在管中上升至一定高度而止。是管中溶液之壓力，實較大於管外杯中之水之壓力，此壓力差可由管中液體之濃度及其高度計算之，稱為滲透壓力（osmotic pressure）。

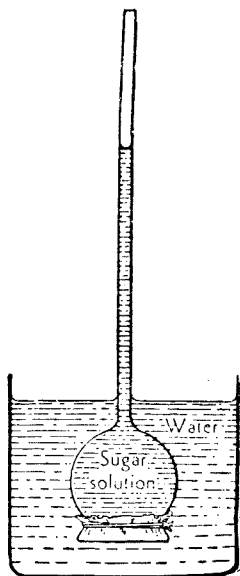


圖 159. 滲透

滲透壓力亦由分子運動所致。蓋水分子既能自由通過半透膜，而在袋內之糖分子則不能；且每單位體積之水分子數目，在袋外者較在袋內為多，故水分子自袋外穿過袋膜

而入袋內者，較自袋內穿過袋膜而出者為多；於是袋內水溶液逐漸增加，袋內壓力隨之增大，以至於出入袋膜之水分子數目相等之時而後止。

§ 137. 勃朗運動 關於分子運動之證據，最醒目者推勃朗運動(Brownian movement)，為英國植物學家勃朗所發現。

試以高倍之顯微鏡，窺稀薄之墨汁溶液或膠體金溶液，每可察見墨汁中之碳粒或金溶液中金粒，且可見其繼續作不規則而劇烈之曲折運動(圖 160)。此現象之解釋，略如下述。

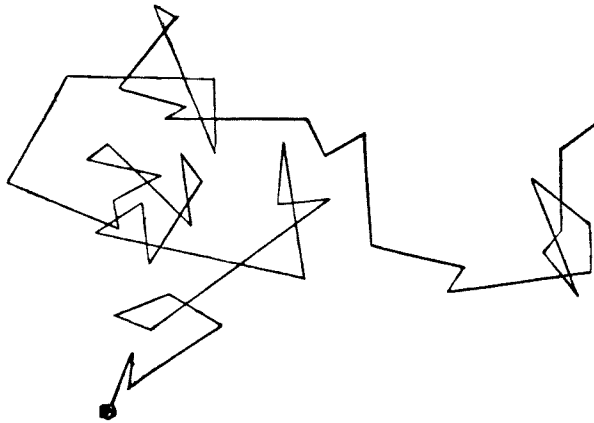


圖 160. 勃朗運動

試設想一非常龐大而易於推動之物體，其周圍有大羣之人，任意不斷加以推擊，因衆人推擊之方向，漫無一定，而物體所受推擊之次數又非常之多，故其不規則性可彼此相消，物體將僅稍稍搖擺不離原位。試再設想一頗小之物體，推擊之人仍密集如前，則因物體之表面頗小，其所受推擊之次數亦遠較前者為少，推擊次數既少，則其

不規則性，即不復能彼此抵消。於是物體所受之力倏而此方較強，倏而彼方較強，物體因之曲折運動。物體愈小而愈輕者，運動愈見活潑。

吾人在顯微鏡下所見之微粒，作勃朗運動者，相當於設想中之小物體，而微粒浮游於其中之媒質之分子，則相當於推擊此小物體之人羣。微粒極小，其所受推擊之次數頗為不定，分子運動既漫無定向，則其推擊微粒時，自亦毫無規則。微粒之曲折運動，即由是以生。微粒愈小，運動愈烈。

分子之小，非顯微鏡所能窺見。吾人在勃朗運動中所見者，雖為微粒之運動，非直接分子之運動，然實反映芸芸分子無規則而不停之亂動，活躍眼前矣。

§ 138. 分子力 分子與分子之間，有相互作用之力。此種作用力，僅顯於隣接之分子，遠者弱可不計。故每分子之周圍，各有其作用圈 (sphere of action)。作用圈內之分子，皆對該分子施作用，而該分子之作用，亦僅及於圈內之其他分子。同種分子間互引之力，稱為內黏力 (cohesion)；異種分子間之引力，稱為外黏力 (adhesion)。

試以人類社會之進化喻物態：氣體之分子，宛如原人，不知父母，無論朋友，終日亂跑，除偶與同類碰撞外，不知有他。液體之分子，社會意義已較進步，可謂游牧之民，成羣遷徙，相互間有團結力。若固體之分子，則已入耕稼時代，有家可居，日出而作，日入而息，離家不遠，井然為有規則之生活，知應守之秩序，其團結力更強。

§ 139. 表面張力 分子力在物體之分子羣中，互相抵消，故必於分子羣之周界處，始得表現。

液體之自由面，似由薄層之表皮而成，徐置鋼針於水面，常能浮



泊不沈，即此薄層表面之彈性力，支住鋼針之重。此種薄層表面之力，稱為**表面張力**(surface tension)。

表面張力，即液體分子之內黏力之表現。分子之在液體中者，為其他分子所圍繞，各方所受之力，平均相等，而彼此相消；但分子之在液面者則不然(圖 161)。在液面  $A$  處之分子，其下半部受液內分子之吸引，但在其上半部則無此種引力，故在

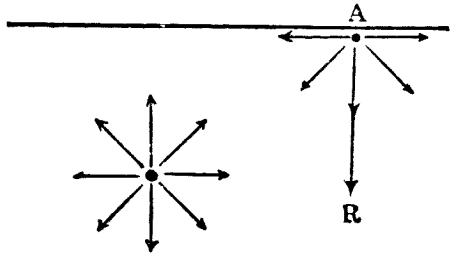


圖 161.

$A$  處之分子所受其他分子之作用，有一合力  $R$ ，垂直於表面而向液內，此即使液體表面有縮小之傾向之原因也。

若於薄膜表面上，畫一裂紋  $AB$ (圖 162)，則裂紋二邊各顯張力，且與裂紋之長成比例。此力將使裂紋愈來愈長，終至薄膜消滅。

如在一金屬環上，繫一潔淨之線環，浸之於肥皂水中而取出，然後以潔淨之針端，於線環內之薄膜穿一小孔，則膜之表面張力互相

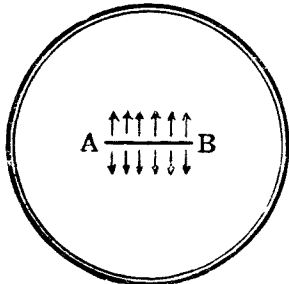


圖 162.

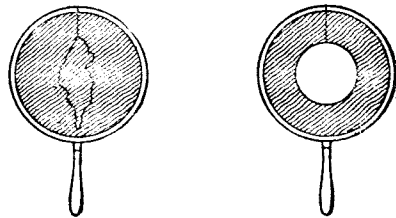


圖 163 表面張力。

牽引，而使線環呈一圓形，(如圖 163)。

**表面張力之量度** 表面張力作用於表面周界上，與周界之長度成正比。取 U 形之細金屬線，掛於天平之一端，將其垂直浸入液中，開邊向下，再慢慢舉起，則線與液面之間，將有一層液膜。此膜之表面張力，係將線向下牽拉(圖 164)。此牽拉之力  $F = Tl$ ，可由天平稱出， $l$  表橫線之長。但薄膜有前後兩層，故天平所稱得之力實為

$$F = 2Tl,$$

式中  $T$  稱為液體之表面張力係數，以達因/厘米表之。

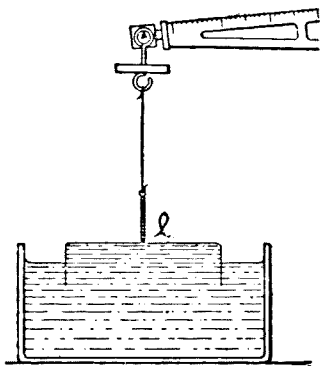


圖 164. 表面張力之量度

**由於表面張力而成之壓力** 細考肥皂泡等液體之表面張力，尤饒趣味。液體恆欲自行收縮，以成最小之表面，但為泡中密閉氣體之壓力所反抗。欲求其平衡情形，可取泡面上任一大圓，視泡為兩半球所合成，而計算此兩半球藉表面張力互相結合之總力(圖 165)。

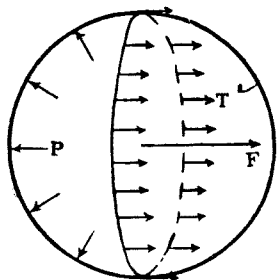


圖 165.

兩半球接觸界線之長為  $2\pi r$ ， $r$  表泡之半徑。因泡有內外兩層，故每半球表面張力之總力為

$$F = 4\pi rT,$$

可視為作用於球心者。此表面張力之總力  $F$  為泡內氣體所施於泡面每單位面積上之壓力  $P$  所平衡。

半球泡面上之總壓力顯然在其對稱線上，將球面上各部分之壓力在此對稱線上之分量相加即得總壓力之值為  $P\pi r^2$ ，與  $F$  相等而相反，於是有

$$P\pi r^2 = 4\pi rT,$$

即

$$P = \frac{4T}{r}.$$

但泡外亦有氣體壓力，在尋常情況下，即為大氣壓力，故上式所得之壓力  $P$ ，實為泡內外氣體壓力之差，泡內壓力大於泡外壓力。

從此式得一初似奇異之結果，即肥皂泡平衡時，半徑愈小者泡內氣體之壓力愈大。驟視之，此似與吾人之經驗相反。蓋將空氣吹入時，泡必隨之脹大，但事實上，此時脹大者為泡內密閉空氣之體積，其內壓力則因之減小也。若減小後，泡內壓力與泡外壓力之差，尚大於  $\frac{4T}{r}$  時，則泡擠破。

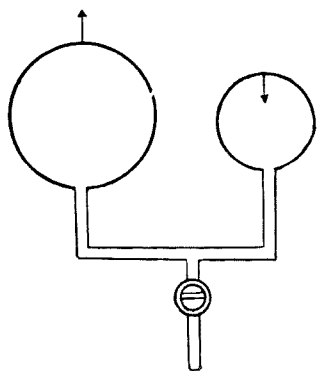


圖 166.

下述之實驗即可示明此理。將半徑不同之兩肥皂泡，為一管所連通之（圖 166），則小者縮而大者脹，直至小泡在管端僅剩一帽頂，其曲率與大泡相等而止。初時小泡內之氣壓，較大泡內為高，故小泡中之空氣源源流入大泡，直至兩泡內之氣壓相等而止。故液體表面，成一曲面而平衡，其曲率半徑為  $r$  時，表面凹處  $A$  點之壓力  $P_A$ ，大於表面凸處  $B$  點之壓力  $P_B$ （圖 167）。表面為單層者，有

$$P_A - P_B = \frac{2T}{r};$$

表面為雙層者，則有

$$P_A - P_B = \frac{4T}{r}.$$

水在毛細管中，液面下（即在水液內）之壓力，較在液面上者為小。汞在毛細管中則反是，因其液

面成凸面向外，故液面下（即在汞液內）之壓力，較在液面上者為大。

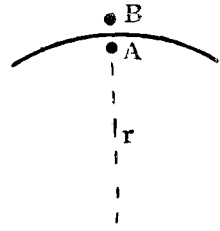


圖 167.

表 8. 表面張力係數

液	體	$T$ (達因/厘米)
酒	精	22.3
醇	精	19.3
	水	73
	汞	527
橄	欖油	33

§ 140. 毛細管作用 插一開端之細玻璃管於水中，則見管中之水較高於管外之水平面，成一水柱，管徑愈小者，水之上升愈高；汞則反是，不升而反降（圖 168）。且管內之汞面變成凸形，而管內之水面則係作凹形。此種毛細管現象（capillarity），亦係表面張力所致。

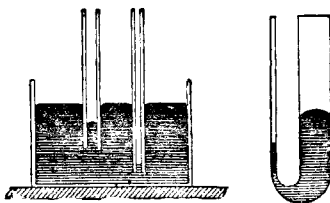


圖 168. 毛細管現象

管中液體面與管壁所成之角 $\alpha$ ，稱為毛細管之接觸角（angle of contact）。水或他種溼潤玻璃管之液體，其接觸角 $\alpha$ 為銳角，汞與他種不溼潤

玻管之液體，則爲鈍角。水與玻璃之接觸角爲 $0^\circ$ ，而汞與玻璃之接觸角爲 $139^\circ$ 。

欲知 $\alpha$ 角之爲銳或爲鈍，請討論液體與固體間之外黏力及液體之內黏力。

設 $O$ 爲液體與固體接觸之點，而以 $P$ 及 $Q$ 各表在此點分子所受之外黏力與內黏力， $R$ 表此二力之合力，恆與平衡之自由液面正交。如 $Q$ 小於 $P$ ，則 $R$ 之方向將如圖 169(甲)，而液面之曲度爲凹向外，

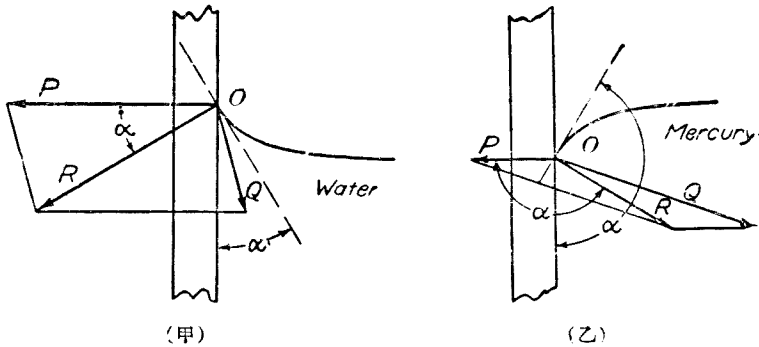


圖 169.

接觸角遂爲銳角，此水在細玻管中之情形也。故水與玻璃之外黏力較水與水之內黏力爲大，而水能溼潤玻璃。如 $Q$ 大於 $P$ ，則 $R$ 之方向將如圖 169(乙)，而液面之曲度爲凸向外，接觸角遂爲鈍角，此汞在細玻管中之情形也。故汞與玻璃之外黏力，較汞與汞之內黏力爲小，而汞不能溼潤玻璃。

由接觸角 $\alpha$ 之值，即知液面之曲率半徑爲

$$r = -\frac{d}{2\cos\alpha},$$

式中  $d$  表毛細管之直徑。

液體在毛細管中升高或下降之高度  $h$  (圖 170), 可由液面上下兩點  $A$  及  $B$  之壓力差 (§ 139) 求之, 即

$$P_A - P_B = \frac{2T}{r} = \frac{4T\cos\alpha}{d}.$$

又由靜止液體之壓力 (§ 108), 有

$$P_A - P_B = \rho gh,$$

$\rho$  表液體之密度。於是得

$$h = \frac{4T\cos\alpha}{g\rho d}.$$

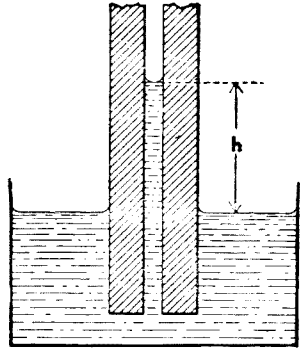


圖 170.

測毛細管中液柱之高  $h$  及液面之接觸角  $\alpha$ , 即可求得表面張力係數, 較之上節所述直接量度, 方便而精確多矣。

滴管 實驗室中常用滴管, 如圖 171. 液體由管之細口 (直徑為  $d$ ) 流出, 漸成袋狀, 至其重量等於表面張力時, 始成滴滴下。每滴之質量皆有一定, 為

$$m = \frac{\pi d T}{g},$$

故滴管實可作天平用之。數若干滴之液體而稱之, 即可求得其表面



圖 171. 滴管

張力係數，其簡單為何如者！

油滴着水，即因油與水間之毛細管作用，而自行擴張，浮蔽水面，成一極薄之膜。吾人可利用此項現象，以估計油分子之大小。若置一極小之油滴於廣闊平靜無波之水面，任其自行擴張，油仍不能滿蔽水面之全部。油之擴張，自有其限度，蓋此時油膜之厚薄，已與其分子之直徑相埒，不能再行展薄也。自油滴之體積，與其在水面上所擴張而成之面積，可知油分子之直徑，必小於  $10^{-6}$  厘米。

植物由根吸收液汁而上升莖葉，除由於滲透作用外，毛細管現象亦與有力焉。墨汁濡染毛筆寫字，與海綿質物體之易於溼透，皆係毛細管作用。

§ 141. 氣體之分子運動 組成物質之分子，既恆在運動不息，而尤以氣體分子為然。然則，氣體分子運動之速度可得而揣歟？

氣體分子運動，全無定向。在其與容器之圍壁及其他分子碰撞以前，其軌道恆為直線。此種碰撞為完全彈性的；碰撞前後，能量之和不變。但每一碰撞，二分子之能量及衝量，通常皆彼此互換，各分子每遇若此之碰撞，其速度之值與方向，即因而變更。吾人若‘微察’氣體之狀況，即就各分子個別觀察，即事屬可能，亦將見其繼續變遷，永無寧息，殊少規律之可言(圖 172)。但即

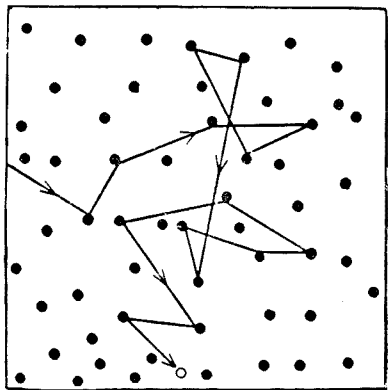


圖 172.

在極小之容積以內，且在極低之壓力下，氣體之分子已屬恆河沙數，故吾人若‘統觀’此容積內之全部氣體分子，將未見其有何變更也。蓋在大多數之分子中，任一分子速度之量與向每有變更，其他無數分子中必偶有一個作相反之變更，而平均適相抵消，此即所謂統計的平衡也。

此可以大都市中同樣生活之居民之狀況比較之。吾人分別詢問各人之生活，固極光怪陸離，倏忽萬變，甲死而乙生，丙去而丁至。但若統觀全市民，而不問個人之動靜，則所得之統計結果，如人口總數，平均年齡，以及其他一切特性之平均數值，每可歷久不變。此種‘統觀’法，即為市民統計。由此可導出廣泛之應用，即無須明瞭各人之遭遇，僅從統計之結果，已可確定市民之某項平均情形之精密的規律矣。

凡觀察大多數單體集成之團體時，恆可用統計法。氣體既由無數同類之分子所集成，則應用統計法以觀察之，自亦可得滿意之結果；此為一非常重要之事實。由此所得之結果，即足以代表整個氣體之平均狀態。而細微之每一個分子，即縱能為吾人所洞察，所見者亦屬偶然，無足輕重，與市民統計者對於某一個人之命運，並不發生興趣，特別注意，無以異也。

根據上述觀念，關於理想氣體，即各分子間互相作用之力可以略去不計者，結論尤見簡捷，有下列數點：

1. 在足夠長久之時間內，任一分子之動能  $\frac{1}{2}mv^2$  之平均值皆相等，全體分子莫不相同（時間的平均值）。且此值即可代表在任何時間全體分子之動能之平均值（空間的平均值）。從此可知若吾人所



遇之氣體分子純屬同類(即質量  $m$  相同), 則各分子之平均速度  $v$ , 即其時間的平均值, 皆應相等. 在許多情形中, 吾人於計算時, 可認為全體分子在某瞬時間皆具有此值之平均速度.

2. 在穩定狀態中, 平均言之, 分子運動之方向, 恆均勻的分布於空間內一切可能之方向.

3. 氣體恆充滿於其所占之空間, 無遠不屆, 無微不至; 若不計重力之作用, 則分子恆均勻的分布於其所占據之空間. 故空間中, 容積相等部份內之分子個數恆相等.

§ 142. 氣體之壓力 今以上節所揭示之觀念為基礎, 解釋氣體在其密閉之容器圍壁上如何發生壓力之情形. 此種壓力即氣體對外(對其周界)所表現之分子力也.

氣體分子, 恆因其運動不斷碰撞器壁, 撞後立即反跳. 碰撞時皆遵守彈性碰撞之情形; 又因器壁屹立不動, 故分子之動能, 毫不傳遞於器壁. 各分子以任何速度而來, 撞後仍以相等之速度而去.

設容器為一正立方體, 體積為 1 立方厘米, 內含氣體分子  $n$  個(在標準情況

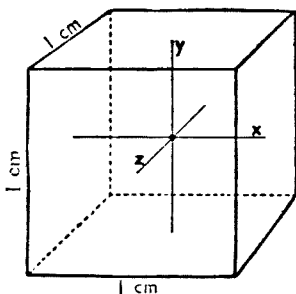


圖 173.

下,  $n = 2.705 \times 10^{19}$ ), 其平均速度為  $v$ . 則沿上下左右前後之方向而運動之分子, 各有  $n/3$  個. 沿左右方向運動之各個分子, 每隔  $2/v$  秒鐘, 碰撞容器左壁一次, 即每秒鐘內, 共碰撞  $v/2$  次. 每次碰撞分子之動量改變為

$$mv - (-mv) = 2mv;$$

一秒鐘內共爲

$$2mv \times \frac{v}{2} = mv^2,$$

是即分子所施於左壁之衝力。因左壁之面積爲 1 平方厘米，故亦即分子所施於左壁之壓力也。今有  $n/3$  個分子，故左壁所受之壓力爲

$$P = \frac{1}{3} nmv^2.$$

因  $n$  爲 1 立方厘米中分子之個數，故  $nm$  爲 1 立方厘米中所含之質量，即氣體之密度  $\rho$ 。於是

$$P = \frac{1}{3} \rho v^2.$$

故氣體分子之速度  $v$ ，可由其壓力及密度計算得之。

氫之密度，在  $0^\circ\text{C}$ . 及 760 mm Hg 下，爲 0.00008985。吾人知 760 mm Hg 之壓力等於 1,013,300 達因/厘米<sup>2</sup>。以此等之值，代入上式，得氫分子之速度爲

$$v = 1.837 \times 10^5 \text{ 厘米/秒},$$

即約爲每秒 2 公里也。以空氣計之，其值爲  $v = 4.84 \times 10^4$  厘米/秒，即約爲 0.5 公里也。

若有氣體，其質量爲  $M$ ，體積爲  $V$ ，則  $\rho = \frac{M}{V}$ 。以之代入上式，得

$$P = \frac{1}{3} \frac{Mv^2}{V},$$

或

$$PV = \frac{1}{3} Mv^2,$$

是即波義耳定律也 (§ 121)。其常數  $C = \frac{1}{3} Mv^2$ ，與氣體之質量及其分

子之平均速度之平方成正比，即等於氣體之動能之三分之二也。

§ 143. 氣體分子之動能——馬克斯威爾定律 設有兩種不同之氣體分子，其質量各為  $m_1$  及  $m_2$ ，速度各為  $v_1$  及  $v_2$ ，在每單位體積內各有  $n_1$  及  $n_2$  個分子，則由上節結果，知兩氣體之壓力各為：

$$P_1 = \frac{1}{3} n_1 m_1 v_1^2,$$

及 
$$P_2 = \frac{1}{3} n_2 m_2 v_2^2.$$

依阿佛加特羅之假設，在同溫同壓之下，同體積之氣體，所含分子之數目相等 (§ 101)，即若  $P_1 = P_2$ ，則有  $n_1 = n_2$ ，於是得：

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2.$$

換言之，在同溫度下，各種氣體分子之動能皆相等，是為馬克斯威爾定律 (Maxwell's law)。

§ 144. 氣體之混合——道爾頓定律 數種不發生化學作用之氣體混合，而貯於同一容器內，其所生之總壓力  $P$ ，等於各氣體單獨占據此容器時所生之分壓力 (partial pressures)  $P_1, P_2, P_3, \dots$  等之和，是為道爾頓定律 (Dalton's law)。

由前兩節所述氣體之分子運動說 (kinetic theory of gases) 觀之，道爾頓定律乃為極明顯之結果。因在同一容器內，有

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 = \dots = \frac{1}{2} m v^2$$

及 
$$P = \frac{1}{3} (n_1 + n_2 + n_3 + \dots) m v^2;$$

又依定義,有

$$P_1 = \frac{1}{3} n_1 m_1 v_1^2,$$

$$P_2 = \frac{1}{3} n_2 m_2 v_2^2,$$

$$P_3 = \frac{1}{3} n_3 m_3 v_3^2,$$

……………;

故得

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots$$

### 習題二十一

1. 有一 U 形開端之玻璃管,兩管支之直徑不等,各為 0.3 及 2 厘米,中盛以汞,求兩管支中汞面高度之差(汞與玻璃之接觸角為  $139^\circ$ ).

2. 有兩平行之玻璃片,垂直插入水中,相距 2 毫米,問水在其間上升若干?若此兩玻璃片不相平行,一邊緊靠,成  $1^\circ$  之角,求水在其間上升之情形(水與玻璃之接觸角為  $0^\circ$ ).

3. 有一球形之肥皂泡,直徑為 4 厘米,求泡內之壓力(肥皂水之表面張力係數為 35 達因/厘米).

4. 碎小物體浮於水面,有時互相吸引,有時互相推拒,試言其不同之情形,並詳述其故.

5. 油脂之表面張力較揮發油為大. 欲除去衣服上之油漬時,揮發油須施於油漬之中央抑邊緣,庶可使油漬之面積不致擴大?

6. 松節油之密度為 0.86 克/厘米<sup>3</sup>,表面張力係數為 28.8 達

因/厘米，於一半徑為 0.8 毫米之玻璃管中，上升 8.2 毫米。求松節油與玻璃之接觸角。

7. 求在標準狀態下，氧與氮兩種氣體分子之平均速度。

8. 有 0.2 克之氣體在  $0^{\circ}\text{C}$  時之壓力為 50 厘米汞高，其所占之體積為 3,000 厘米<sup>3</sup>，求其分子之平均速度。若將其容積增至 6,000 厘米<sup>3</sup>，而溫度不變，分子之平均速度有何變化？

9. 1,000 厘米<sup>3</sup> 中有氫氣 0.01 克，氮氣 0.02 克，氧氣 0.03 克，互相混合。設此混合氣體之壓力為 76 厘米汞高，求各氣體分子之平均速度。

10. 空氣之成分以容積計之，為 21% 之氧與 79% 之氮。求此二氣體質量之百分比。

## 第十八章 溫度與熱量

§ 145. 溫度 吾人對於冷熱之觀念，係由觸覺而來。觸覺神經分布於人體皮膚表面之全部，非如聽覺視覺神經之集中於耳目兩處。凡能使皮膚溫暖者，吾人即謂其為熱，反之能使皮膚寒冷者，謂其為冷。冷與熱為相對之觀念。若純藉感覺以辨別冷熱，甚不可靠。蓋此種感覺，不但各人不同，即同一之人亦因其經過而異。例如冬日久坐室內，猶嫌其寒；但若有人自外來，飽受風雪，一入室內，頓覺其暖。又如將初出於熱水中之手，伸入溫水中，則覺溫水為冷；然如先置手於冰水中，然後再取出而伸入溫水中，則又覺其頗熱。且吾人之皮膚對於劇冷劇熱，不能辨別，二者均使皮膚發泡。由此觀之，欲作科學之探討，對於冷熱之測定，須有客觀之標準。惟在未有客觀標準以供比較溫度之時，吾人仍可利用觸覺以辨別冷熱之大概。在同一情形下，溫度相等之物體，其所生之冷熱感覺相同；而溫度較高之物體，所生之感覺為較熱；溫度較低之物體，所生之感覺則為較冷。如以手觸物，溫度較體溫(37°C.)高者為熱，較體溫低者為冷。

§ 146. 熱量 吾人均知一杯之沸水，較一壺之熱水為熱。惟若將一杯之沸水，倒於一盆之冷水中，混合之後，其溫度則未必較高於將一壺之熱水倒入同盆之冷水中。故知溫度所代表者，僅為冷熱之程度，並未涉及物體所含熱量之多寡。一杯沸水溫度雖高，然其所含

之熱量，則未必較諸一壺熱水所含之熱量為多。

§ 147. 熱量之單位 物體所含熱量之多寡，不但視其溫度之高低，且隨物體之質量及其性質而各殊。在同一溫度下，質量愈大之物體，所含之熱量亦愈大。故採用一標準熱量以作單位時，須規定三事：(1)所用之物質；(2)此物質之質量；(3)使此物質增加或減少之溫度。

科學界公認使一克質量之水，從  $15^{\circ}\text{C}$ . 增加溫度一度時，所需之熱量為單位熱量，曰卡路里 (calorie) 或簡稱卡。一千卡稱為大卡。

實際上，常用所謂平均卡路里者，為熱量之單位。一平均卡路里之值，係等於一克水之溫度自  $0^{\circ}\text{C}$ . 增至  $100^{\circ}\text{C}$ . 時，所需之熱量之  $\frac{1}{100}$ 。平均卡路里與十五度之卡路里相差甚微，故非作極精密之計算時，可不加以區別。

在英制中，一單位熱量乃等於一磅之水，當其溫度自  $32^{\circ}\text{F}$ . 增至  $212^{\circ}\text{F}$ . 時，所需之熱量之  $\frac{1}{180}$ ，而此單位稱為平均英熱單位 (mean British thermal unit) 或 B.T.U. 因 1 磅等於 453.6 克而  $1^{\circ}\text{F} = \frac{5}{9}^{\circ}\text{C}$ . 故

$$1 \text{ 英熱單位} = 252 \text{ 卡路里.}$$

§ 148. 比熱 當物體之溫度自  $t_1$  增至  $t_2$  時，其所收入之熱量，與所增加之溫度成正比，即：

$$H = C(t_2 - t_1),$$

式中之比例常數  $C$ ，稱為物體之熱容量 (thermal capacity)；蓋即物

體之溫度增高一度時，所收入之熱量也。

由實驗結果，吾人知物體之熱容量  $C$ ，與其質量  $M$  成正比，即：

$$C = sM,$$

式中  $s$  稱為物質之比熱 (specific heat)，蓋即 1 克之物質溫度增加  $1^{\circ}\text{C}$  時所需之熱量。

由熱量單位卡路里之定義，可知某物質之比熱云者，即其與同質量之水升高同樣溫度所需之熱量之比也。

§ 149. 溫度計 純藉觸覺以決定冷熱，於 §145 所述之困難外，且不能得一數量的關係。換言之，即吾人雖能覺某物體較熱或較冷，然不能言明其較熱或較冷多少。欲知物體之冷熱程度，可取物體因熱而起之任何物理變化，例如膨脹，以作標準。凡可以測定冷熱程度之儀器，稱為溫度計 (thermometer)。

通常物體熱脹冷縮，無論其為固體，液體或氣體，莫不皆然。故固體，液體及氣體皆可作為溫度計之用，而有固體的，液體的及氣體的溫度計種種。

溫度計所用之物質及其形式，實無限制，惟合用之溫度計，須具有下列數條件：

- 1° 與溫度一定之物體密觸，即有明確一定之指示。
- 2° 溫度計之質量，不可過大，以免其與物體接觸時，物體之溫度因而變更。
- 3° 溫度不同，溫度計即有顯著之表示，換言之，其靈敏度須大。
- 4° 便於攜帶。

**水銀溫度計** 通常所用之溫度計，多以水銀貯在玻璃管中為之，



頗合上舉之條件。

以一定質量之水銀的體積，為測量溫度之用。則溫度計上首須有兩個定點，即在兩個一定的標準溫度時，溫度計水銀柱所表示之位置，而後可用此溫度計，以比較其他在此兩標準溫度間之溫度。溫度計上須有兩個固定點者，以溫度不似長度或質量，可以一標準值之若干倍或幾分之幾表之。此理實因長度或質量等於零一詞，其義至為明顯；而溫度為零一詞，則除後來所推出之絕對零度 (absolute zero, § 203) 外，實無絕對的意義也。

現今所常用之兩固定點：一為冰點 (ice-point)，即壓力為一大氣壓時，純淨之冰與水的混合體之溫度；一為蒸汽點 (steam point)，即純淨之水在 1 大氣壓下，沸騰時之溫度。

溫度計上之兩固定點，既經決定，則可於其間為之分度。攝氏 (Celsius) 分為百度，而以冰點為零度，則蒸汽點為 100 度。華氏 (Fahrenheit) 分為 180 度，而以冰點為 32 度\*，則蒸汽點為 212 度。

由上述水銀溫度計之構成，吾人可知溫度為一種特別之物理量。蓋因兩物體之溫度不能相加，故云一溫度為其他二溫度之和，為毫無意義。普通測量可以有單位，而所測得者為單位之幾倍；但溫度間祇有相等及不相等諸關係。吾人非測量之也，實為之作標記而已。作標記之尺度，乃為任意選定者，如上述之

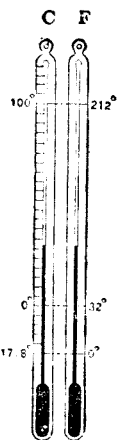


圖 174. 攝氏與華氏水銀溫度計

\* 華氏以當時所能得到之最低溫度 (即冰與鹽水混合之溫度) 為零度，因此冰點為 32 度。

冰點與蒸汽點，以及其間之分度法。

水銀溫度計雖有甚多之優點，通用頗廣，然因水銀在 $-39^{\circ}\text{C}$ . 即凝固，又到 $357^{\circ}\text{C}$ . 即沸騰，故不能用以測甚高或甚低之溫度。此外因玻璃管之容積，常漸變更，倘驟增至 $100^{\circ}\text{C}$ . 或更大之值時，每呈永久容變，故尋常水銀溫度之指示，須時常加以校準，方免誤差。惟玻璃管此種不規則之脹縮，經多次之冷熱後，常能漸歸消滅。故製水銀溫度計時，多先將其封固，歷長久之時間後，方鐫標度或先令其溫度作多次之劇烈變更，然後再鐫標度。

§150. 標準氣體溫度計 若以氣體代替水銀作為測量溫度之用，則因氣體之膨脹較大，上節末段所述玻璃之不規則脹縮，影響較為微小，乃可以不計。現今科學界所公認之標準氣體溫度計(standard constant volume hydrogen thermometer)，係根據雷腦(Regnault, 1810—1887年)精確測定氣體之特性，用氫氣製成，於1887年經國際度量衡委員會所採納者。

以一定質量之氫氣，盛於一定容積之管內，而由其壓力之變更，以測溫度，是為定容氫氣溫度計。換言之，標準溫度計所用之測溫特性，非氣體之膨脹，乃其氣壓之增減。

在冰點溫度時，設管內氫氣之壓力 $p_0$  適為100厘米汞高，將氫氣之溫度增高，至在標準壓力下水之沸騰溫度時，其壓力 $p_{100}$ ，則由實驗知為 $p_{100} = 136.6$ 厘米汞高。將冰點與沸

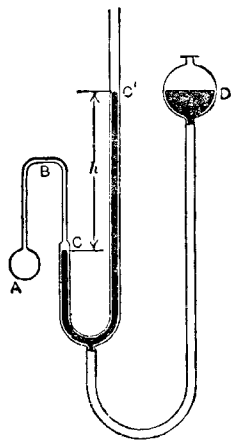


圖 175. 標準溫度計

點間之溫度差，分爲百等分，每等分稱爲 1 度，即所謂百分度計溫法 (centigrade scale) 也。

故百分度計溫法中之 1 度云者，即指此溫度改變，能使氫氣之壓力增加，適等於在沸點及冰點時兩壓力差之百分之一，即：

$$\frac{p_{100} - p_0}{100}.$$

因此，當氫氣管內之壓力爲  $p$  時，其溫度，依定義爲：

$$t = \frac{p - p_0}{\frac{p_{100} - p_0}{100}} = \frac{p - p_0}{0.00366 p_0} = 273.2 \left( \frac{p}{p_0} - 1 \right).$$

圖 175 示標準溫度計裝配情形之大概。A 爲鉑銻合金製成之管，內貯 100 立方厘米之氫氣，上下 D 管中之水銀高度，使 A 內所含之氫氣體積，常達在 B 處所刻之一定標度而不變。氫氣之壓力  $p$ ，即由 C 及 C' 兩點水銀柱之高度差  $h$  讀出。

標準溫度計並非用來直接測量物體之溫度。實驗室中測量溫度時，多用水銀溫度計；但精確之水銀溫度計，常與標準溫度計比較，而知其應加校正之值。

§ 151. 氣體之壓力係數 一定體積之氫氣，受熱後，其壓力之增加，已爲溫度之定義，如上節所述，而有

$$p = p_0(1 + bt),$$

式中  $b$  之值爲 0.003660，即  $1/273.2$ 。

至於他種氣體，當容積不變時，壓力與溫度之關係，亦可以上式表示之，且  $b$  之值均在  $1/273.2$  上下，相差頗微。  $b$  稱爲氣體之壓力係數 (pressure coefficient)。

## § 152. 絕對溫度 由

$$p = p_0 \left( 1 + \frac{t}{273.2} \right),$$

可見當  $t = -273.2$  時，氫氣之壓力  $p = 0$ ；換言之，當溫度降至冰點之下  $273.2$  時，氣體將毫無壓力。此特別之溫度，稱為絕對零度 (absolute zero)。絕對零度為一極限點，各氣體之溫度在降至此點之前，均將液化，故在實際上氣體悉不能達到絕對零度。

以絕對零度為起點而計算之溫度，稱絕對溫度 (absolute temperature)，而有

$$T = t + \frac{1}{b} = t + 273.2,$$

於是

$$p = \frac{p_0}{273.2} T.$$

故在容積不變時，氣體之壓力與其絕對溫度成正比，即所謂查爾定律 (Charles' law) 也。

## § 153. 幾個溫度數字

## 1° 空氣溫度：

空中平均溫度  $15^{\circ}\text{C}.$

地面上最熱處  $50^{\circ}\text{C}.$

地面上最寒處  $-50^{\circ}\text{C}.$

## 2° 高溫：

炭火  $900^{\circ}$  至  $1,400^{\circ}$

電燈絲 約  $1,800^{\circ}$

太陽 約  $6,000^{\circ}$

3° 低溫:

二氧化碳之沸點	- 78°.5
液體空氣之汽化	- 190°
液體氫氣之汽化	- 260°
液體氮之沸點	- 272°

§ 154. 燃燒熱 日常所需之熱量,除直接來自太陽外,多由柴煤及油等燃料燃燒而得. 每單位質量之燃料,完全燃燒後,所供給之熱量,稱為燃燒熱(heat of combustion).

表 9. 燃 燒 熱 (卡/克)

煤	6,000 至 8,000
木	1,600 至 3,500
煤 油	11,000 至 13,000
酒 精	7,100
炭	8,050

§ 155. 熱之工作當量 燧人氏鑽木取火,人類自上古以來,即熟知功能生熱之事實. 孩提之童,摩擦雙手以取暖,亦不待習物理學而後能. 輸入機器之功,恆大於其所輸出者,亦以機器各部分有摩擦之故. 摩擦厲害之處,發熱甚多,常耗去大量有用之功.

自 1840 年焦耳(Joule)測定熱與工作之數量關係,熱為能之一種,於是確定. 焦耳實驗所用之儀器,略如圖 176 所示. 器中儲水,中置可以轉動之翼瓣,器內則有固定之隔瓣. 翼瓣轉動時,水亦隨之流動,但為隔瓣所阻,不能暢流. 翼瓣之轉動,係由於兩重物之下降. 因

水之內摩擦力頗大，且翼瓣轉動時，水恆被迫流經翼隔兩瓣間之狹隘，故重物下降頗緩，無顯著之動能，僅其位能逐漸減小；且其全部悉由摩擦阻力而化成熱量，為水與容器所吸收，以增高其溫度。命水與容器所增高之溫度為  $t$ ，其熱容量為  $C$ ，則其所吸收之熱量為

$$H = Ct \text{ 卡；}$$

若兩重物下降之路程為  $h$ ，則所作之功為

$$W = 2Mgh \text{ 爾格。}$$

於是

$$2Mgh \text{ 爾格} = Ct \text{ 卡，}$$

或

$$1 \text{ 卡} = \frac{2Mgh}{Ct} \text{ 爾格，}$$

此即所謂熱之工作當量 (mechanical equivalent of heat)。通常以  $J$  表之，即

$$W = JH.$$

自此種實驗及類似之實驗，皆得相同之數值。 $J$  之公認值為：

$$\begin{aligned} J &= 4.187 \times 10^7 \text{ 爾格/卡} \\ &= 0.427 \text{ 仟克米/卡} \\ &= 778 \text{ 呎磅/卡。} \end{aligned}$$

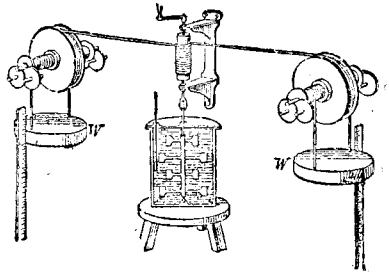


圖 176. 熱之工作當測量定

## 習題二十二

1. 有水一壺，其體積為 3 升，自  $15^{\circ}\text{C}$ . 煮沸，問須用炭多少？
2. 人之體溫在華氏表為多少度？
3. 有  $1,000$  厘米<sup>3</sup> 之氫氣在  $0^{\circ}\text{C}$ . 時，其壓力為 50 厘米汞高。保持其體積不變，而加熱至  $40^{\circ}\text{C}$ .，求氫氣之壓力及此時氫氣分子之動能。
4. 設有瀑布高 200 呎，問在此瀑布之底之水，其溫度較瀑布頂可高多少度？
5. 設在與陽光成垂直之地面上，每平方厘米每分鐘所吸收之熱量為 1.93 卡，問地面自太陽所吸收之功率，每平方米為多少馬力？

## 第十九章 物體之膨脹

物體之溫度增高，其分子之動能加大，所生之物理變化頗多，例如容積之膨脹，壓力之增大，體態之變化，以及電阻之變更等等，均易於觀察。上章所述水銀溫度計，即利用水銀之體積膨脹，以測溫度之高低。

火車之鐵軌，聯接之處，留有餘隙者，即為夏日軌條伸脹之餘地。裝車輪之鐵箍(tire)時，常先加熱使其脹大，而後套入輪周，則冷卻後，鐵箍緊抱輪周。凡此皆物體體積脹縮之昭明彰著，應用時不得不加以注意者。

物體熱脹冷縮，間亦有例外者，而脹縮之多寡，則各種物質大有不同。本章將次第討論固體，液體及氣體之膨脹。

§ 156. 固體之膨脹 取一桿原長為  $l_0$  者，置於一溫池中，如圖 177，而變更溫池之溫度  $t$ ，觀測桿之長度  $l$ ，即知每單位桿長之伸脹，與溫度之增加幾成正比，即

$$\frac{l-l_0}{l_0} = at,$$

或  $l = l_0(1 + at)$ ,

$a$  稱為線脹係數 (coefficient of

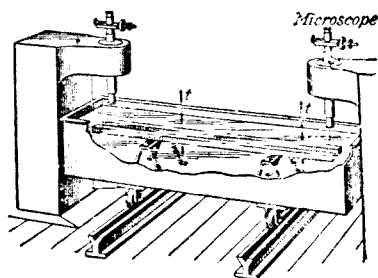


圖 177. 線脹係數之測定



linear expansion).

若固體各方之膨脹相同，則其面積將為

$$s = s_0(1 + at)^2 = s_0(1 + 2at),$$

因  $a$  為甚小， $a^2t^2$  之項對於  $at$  更小，可略而不計也。故面之膨脹係數 (coefficient of surface expansion) 為線脹係數之 2 倍。同理有

$$v = v_0(1 + 3at),$$

即容脹係數 (coefficient of cubical expansion) 為線脹係數之 3 倍。

表 10. 固 體 線 脹 係 數

鉛	$25.6 \times 10^{-6}$	鐵	$12.0 \times 10^{-6}$
銅	$16.4 \times 10^{-6}$	水晶(與光軸平行)	$8.0 \times 10^{-6}$
黃銅	$18.9 \times 10^{-6}$	水晶(與光軸正交)	$13.4 \times 10^{-6}$
金	$13.9 \times 10^{-6}$	玻璃(Pyrex)	$3.2 \times 10^{-6}$
銀	$18.8 \times 10^{-6}$	玻璃(Jena)	$7.8 \times 10^{-6}$
鋅	$28.0 \times 10^{-6}$	瓷	$2.8 \times 10^{-6}$
鉛	$29.3 \times 10^{-6}$	石英(融解後)	$0.3 \times 10^{-6}$
鎳	$12.8 \times 10^{-6}$	磚	$9.5 \times 10^{-6}$
錫	$22.5 \times 10^{-6}$	硬橡皮	$80.0 \times 10^{-6}$
錫	$8.9 \times 10^{-6}$	冰	$50.7 \times 10^{-6}$
因鋼(invar)	$0.7 \times 10^{-6}$		

物體受熱，體積膨脹，然其質量始終不變，故其密度與比重，均由溫度之增高而減小。

石英之線脹係數特小，故以熾熱之一段石英管，投於冷水中，可不致爆裂；普通玻璃則不然，驟然受冷，突呈不規則之縮小，而其組織每不能勝任，以致破碎。耐熱玻璃(Pyrex glass)之線脹係數較小，

比較不易爆裂。

銅，鐵與玻璃之線脹係數相差頗大，不能熔接；而鉑與玻璃之線脹係數較近，故可熔接。

各種金屬線脹係數不同，恆可互相配合，以作各種應用。例如擺鐘之補償擺，係用兩種不同之金屬棒，如鐵與錳，合製而成(圖 178)。鐵棒因溫度增高而伸長，使擺錘下降，但同時錳棒伸長使之上升。製造時選擇各棒之適當長度，使其升降相消，擺之週期遂不因溫度而變。

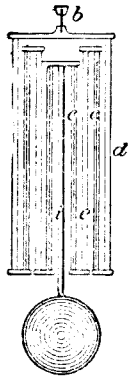


圖 178. 補償擺

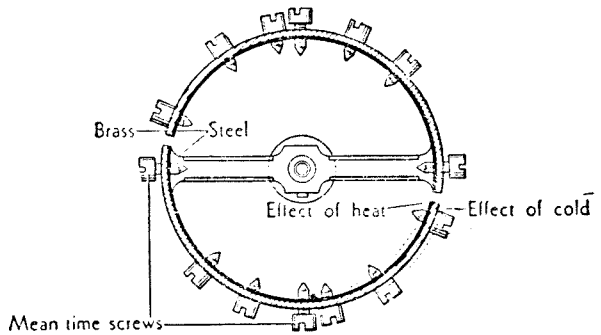


圖 179. 複片平衡輪

錶之平衡輪 (balance wheel, 圖 179), 其外緣亦多用兩種膨脹係數不同之金屬品為複片。蓋如是, 則當溫度改變時, 此複片之曲度亦隨之而變, 輪之質量分布遂改, 而其轉動慣量亦變。因此之故, 溫度變更所生他種影響之足以改變輪之週期者 (例如彈簧之彈性及輪之半徑等), 可因其轉動慣量之改變而獲得補償, 輪之週期乃得以維持不變。

§ 157. 液體之膨脹 液體無固定之形狀，僅有一定之體積，故其膨脹即指體積之變更而言。液體體積與溫度之關係，亦為

$$V = V_0(1 + at),$$

$a$  稱為液體之膨脹係數。

尋常測驗液體之膨脹時，因需將液體盛於適當之瓶或管內，而管或瓶之容積非不變者，故吾人直接觀測所得，非液體之絕對膨脹 (absolute expansion)，乃其對於貯器之像似膨脹 (apparent expansion)。是以由尋常實驗結果所得之液體膨脹係數，亦為其像似值。然如已知貯器之容脹係數  $a'$ ，則自所得之像似膨脹係數  $a_a$ ，加以  $a'$ ，即為液體之絕對膨脹係數。

欲證此事，命  $V_0$  表液體在  $0^\circ\text{C}$ . 時之體積，此亦為貯器在  $0^\circ\text{C}$ . 時之容積；當溫度增至  $t^\circ\text{C}$ . 時，液體之體積增至  $V$ ，而貯器之容積增至  $V'$ ，有

$$V = V_0(1 + at), \quad V' = V_0(1 + a't);$$

於是

$$V - V' = V_0(a - a')t.$$

此  $V - V'$  即直接觀測之像似膨脹，有

$$\frac{V - V'}{V_0} = a_a t,$$

故

$$a = a_a + a'.$$

液體絕對膨脹係數之直接測定 一定質量之物體，當其溫度增高時，其容積亦增，故其密度乃減。求物體密度與溫度之關係，即得絕對膨脹係數。

命物體之質量為  $m$ ，則由

$$\frac{V}{m} = \frac{V_0}{m} (1 + at),$$

有 
$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} (1 + at),$$

或 
$$a = \frac{1}{t} \left( \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right),$$

$\rho$  與  $\rho_0$  表物體在  $t^\circ\text{C}$ . 及  $0^\circ\text{C}$ . 時之密度。

欲測  $\rho_0/\rho$  之值，可如圖 180 所示，在一開端之 U 形管中，盛以液體。管支  $AB$  置於冰水中，其他管支  $CD$  則置於溫池內。管底  $BC$  部分特細，以減少兩管支內液柱之動盪。 $BC$  係水平，故  $B$  與  $C$  兩點管內之壓力常等。惟在  $B$  點之壓力，係等於  $AB$  管支中高  $h_0$ ，密度  $\rho_0$  之液柱所生之壓力；而在  $C$  點之壓力，則為  $DC$  管支高  $h_t$ ，密度  $\rho$  之液柱所生者。故有

$$g h_0 \rho_0 = g h_t \rho,$$

即 
$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{h_t}{h_0};$$

於是得 
$$a = \frac{1}{t} \left( \frac{h_t}{h_0} - 1 \right)$$

為絕對膨脹係數，而非像似的。雖式中  $h_t$  與  $h_0$  亦為液體對於其貯器之像似高度，蓋所用者乃其比耳。

水銀溫度計之露絲改正 水銀溫度計即以水銀之像似膨脹為溫度之指示，若溫度

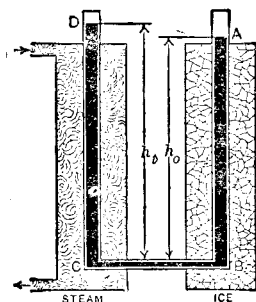


圖 180. 絕對膨脹係數之測定

計全浸在欲量其溫度之物體中，無須加以改正。惟為讀數方便起見，水銀溫度計中之水銀絲，常有一部分露在熱體之外，故所指示之溫度，每較實際為低。此應行改正之值，可依下述公式計算。

令  $t$  表溫度計所指示之溫度， $t_c$  表熱體之真正溫度， $t_s$  表露出部分之溫度，以另一溫度計測得者。e 表溫度計浸沒於熱體中之部分（圖 181），如是露出部分水銀柱之長為  $l - e$ ，與熱體溫度之差為  $t_c - t_s$ 。如  $\alpha$  表水銀對於玻璃之像似膨脹係數，則當溫度計全部之溫度為  $t_c$  時，露出部分之水銀柱，其長將為

$$l_1 = (l - e) [1 + \alpha(t_c - t_s)].$$

故液體之確實溫度乃為

$$t_c = t_1 + e = t + \alpha(t_c - t_s)(l - e),$$

忽去  $\alpha^2$  及其高次乘積之項，即得

$$t_c = t + \alpha(t - t_s)(l - e).$$

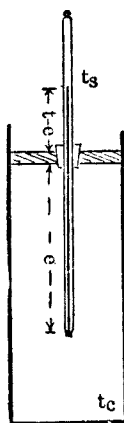


圖 181.

§ 158. 水之反常膨脹 水之膨脹，頗為奇特。其密度在  $4^\circ\text{C}$ . 時為最大。換言之，在  $4^\circ\text{C}$ . 之下，水之體積反因溫度之增加而縮小，在  $4^\circ\text{C}$ . 以上，則其體積隨溫度之增加而脹大。

水之反常膨脹，可以如圖 182 所示之儀器表現之。貯水（約  $15^\circ\text{C}$ .)

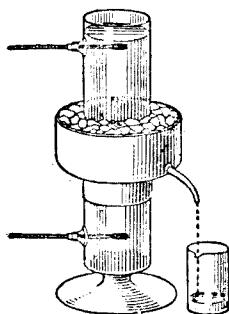


圖 182. 水之反常膨脹

於圓筒中，而在筒外中部圍以冰鹽水冷劑。於筒之上部及下部，各插水銀溫度計。上下兩溫度計，均行下降，而下一溫度計下降尤速，當其達  $4^\circ\text{C}$ . 之時，上一溫度計尚在六七度之間。下一溫度計到  $4^\circ\text{C}$ . 後，即行停止下降；而上一溫度計之下降則又加快，直至於  $0^\circ\text{C}$ .，此時筒之上部及中部，將漸先凝固；而下一溫度計，又再繼續下降。

水在  $-2^{\circ}\text{C}$ . 與  $+10^{\circ}\text{C}$ . 間體積之改變, 有如圖 183 中曲線所示. '克' 之單位, 所以用  $4^{\circ}\text{C}$ . 之水為標準者, 即以在  $4^{\circ}\text{C}$ . 左右, 水之體積或密度變化, 較他處為小. 試比較

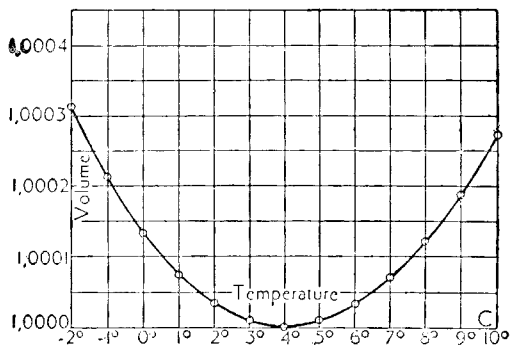


圖 183. 水之最大密度

2° 至 4° 及 0° 至 2° 間體積之變化可知. 故取  $4^{\circ}\text{C}$ . 時密度最大之水為標準, 自可較用其他溫度之水為精確.

在自然界中, 水之反常膨脹頗為重要. 湖水之上層受冷後, 即行下沉, 因此湖中之水, 溫度頗為均勻. 若溫度更由  $4^{\circ}\text{C}$ . 下降, 則湖面之冷水層, 以其密度較已在其下之  $4^{\circ}\text{C}$ . 之水為小, 即不再下沉, 而留於上面. 溫度續降, 即凝為冰, 被蓋湖面. 頗深之處, 溫度極難降至  $4^{\circ}\text{C}$ . 以下, 水族動物因得以終歲生存.

表 11. 液體之膨脹係數

水 ( $15^{\circ}\text{C}$ . 至 $100^{\circ}\text{C}$ . 之平均值)	$37 \times 10^{-5}$
酒精	$110 \times 10^{-5}$
水銀	$18.2 \times 10^{-5}$
硫酸	$57 \times 10^{-5}$
五碳烷 ( $\text{C}_5\text{H}_{12}$ )	$159 \times 10^{-5}$
二硫化碳	$121 \times 10^{-5}$
醇精	$163 \times 10^{-6}$

§ 159. 氣體之膨脹——給呂薩克定律 固體與液體，受熱而膨脹，其壓力變化甚小，吾人可不加以注意。一切實驗於大氣壓力下行之已足，氣體則不然。當氣體之溫度改變時，不但其體積改變，即其壓力亦可隨之而作甚大之增減。故言氣體之狀態，有三變數焉：即體積，壓力與溫度是也。

溫度不變時，研究氣體體積與壓力之關係，而有波義耳—馬利粵脫定律 (§121)。體積不變時，研究氣體壓力與溫度之關係，而有查爾定律，並取作標準溫度計 (§§ 150-2)。茲再研究，壓力不變時，氣體體積與溫度之關係，即所謂氣體之等壓膨脹也。

貯氣體於  $A$  管中 (圖 184)，置入溫池，當受熱而膨脹時， $C$  管內之水銀柱將被擠下降，而  $C'$  管內之水銀柱則被迫上升。倘開放活門  $D$ ，以令水銀流出，則可使  $C$  與  $C'$  兩管中之水銀柱高度相同。如是  $A$  管中之氣壓恆等於  $C'$  管上端之大氣壓，而  $A$  內氣體之體積可由  $C$  管中水銀柱之高度測得。

由此種實驗，給呂薩克 (Gay Lussac) 在 1802 年，測定各種氣體在一定壓力下，每單位體積之增加，均與其溫度之增加成正比，即

$$V = V_0(1 + at),$$

式中  $a$  稱氣體之等壓膨脹係數。

氫氣之等壓膨脹係數為 0.003661，與其壓力係數  $b$  (§ 151)，可認為相等。其他各種氣體  $a$  之值，與  $b$  亦甚相近，有如下表：

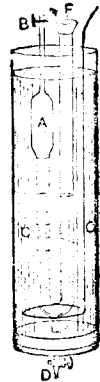


圖 184. 氣體之等壓膨脹

表 12. 氣體膨脹係數與壓力係數

(氣體約為 1 大氣壓，溫度在 1°C. 至 100°C. 間)

		$\alpha$	$b$
空	氣	0.003671	0.003668
氫	氣	0.003661	0.003660
氮	氣	0.003671	0.003668
氧	氣	.....	0.003674
二	氧	0.003710	0.003687

§ 160. 氣體膨脹係數與壓力係數之關係——理想氣體 各種氣體之等壓變化與等容變化，各合相似之給呂薩克及查爾定律，且其膨脹係數  $\alpha$  與壓力係數  $b$  之值，又各甚相接近，故物理學家早即相信各種氣體有同一之組織，在單位體積內，有相同數目之分子。

倘合乎查爾定律及給呂薩克定律之氣體，而又完全遵循波義耳—馬利—勞脫定律者，則吾人可證其膨脹係數與壓力係數必相等。

設有等質量之同氣體，盛於  $A, B$  兩容器內，其壓力，體積及溫度各為  $P_0, V_0$  及  $t_0$ 。若將容器  $A$  內之氣體，在壓力  $P_0$  不變下，加熱使其溫度增至  $t$ ，則其體積增大為

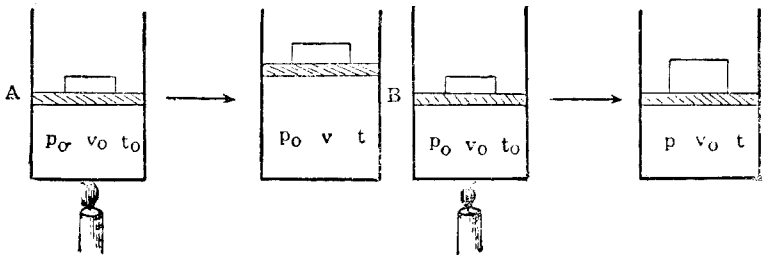


圖 185.



$$V = V_0 \{1 + a(t - t_0)\};$$

又若將  $B$  器內之氣體，在體積  $V_0$  不變下，加熱使其溫度增至  $t$ ，則其壓力增大為

$$P = P_0 \{1 + b(t - t_0)\}.$$

若該氣體又完全遵循波義耳—馬利粵脫定律，則  $A$  與  $B$  在同溫度  $t$  下，有

$$P_0 V = P V_0,$$

即 
$$P_0 V_0 \{1 + a(t - t_0)\} = P_0 V_0 \{1 + b(t - t_0)\},$$

得 
$$a = b.$$

此種完全遵循查爾，給呂薩克及波義耳—馬利粵脫三定律之氣體，稱為理想氣體(perfect gas). 由上節之表 12 觀之，所舉各種氣體之  $a$  與  $b$  之值，相差甚微，可知空氣，氧氣，氮氣等雖理想氣體之情形不遠，而尤以氫氣為然，此氫之所以用為標準溫度計也。

§ 161: 理想氣體之氣態方程式 命  $V_0$  及  $P_0$  表 1 克理想氣體在  $0^\circ\text{C}$ . 時之體積與壓力，今先維持其壓力不變，加熱至其溫度為  $t^\circ\text{C}$ . 時而止，則有

$$V_1 = V_0(1 + at) = V_0(1 + bt);$$

再保持其溫度於  $t^\circ\text{C}$ . 而不變，令其壓力自  $P_0$  變至  $P$ ，其體積將由  $V_1$  變至  $V$ ，有

$$P_0 V_1 = P V,$$

於是得 
$$P V = P_0 V_0(1 + bt).$$

若以絕對溫度  $T$  代入，即  $T = t + \frac{1}{b}$ ， $T_0 = \frac{1}{b}$ ，則得

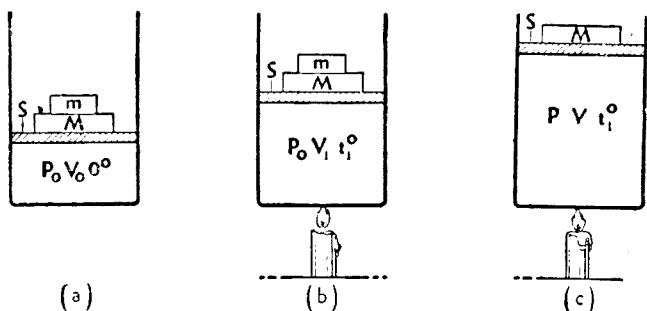


圖 186.

$$PV = P_0 V_0 \frac{T}{T_0},$$

或

$$\frac{PV}{T} = \frac{P_0 V_0}{T_0} = R,$$

即

$$PV = RT,$$

是為理想氣體之氣態方程式。式中之  $R$ ，稱為一克氣體之常數 (gas constant for one gram)。其值可自 1 克氣體，在某時之壓力  $P_0$ ，體積  $V_0$  及其溫度  $T_0$  計算得之。

若所用之氣體為  $m$  克，則氣態方程式顯然為：

$$PV = mRT;$$

又  $m/V = \rho$ ，故上式可書作：

$$P = \rho RT.$$

吾人於 § 142，由氣體之分子運動說，知其壓力為

$$P = \frac{1}{3} \rho v^2;$$

因此得

$$v^2 = 3RT,$$

即氣體分子之平均速度，完全由其溫度而決定，速度之平方與絕對溫度成正比。溫度愈高，氣體之分子運動愈烈，動能亦愈大。

若所用之氣體為 1 克分子，則氣態方程式為

$$PV = MRT = R'T,$$

$R'$  為 1 克分子氣體之常數，或簡稱氣體常數 (gas constant)。各種氣體其值均同，可由任何氣體在標準壓力及溫度下之分子容計得之，即

$$P_0 = 1.013 \times 10^6 \text{ 達因/厘米}^2,$$

$$T_0 = 273 \text{ K.},$$

$$V_0 = 22.4 \times 10^3 \text{ 厘米}^3,$$

得  $R' = 8.31 \times 10^7 \text{ 爾格/}^\circ\text{K.}$  或  $1.988 \text{ 卡/}^\circ\text{K.}$

§ 162. 氣體之自由膨脹 當氣體在一定壓力之下，受熱而膨脹也，溫度增高，體積脹大。故其所吸收之熱量，一用以對外作功，即勝過所受之壓力而使體積膨脹；二用以增加其分子運動之動能，因分子之速度平方，與絕對溫度成正比也。

若氣體膨脹時，既不對外作功，亦未吸收熱量，即所謂自由膨脹 (free expansion)，則其內能必不變。惟氣體之內能，如完全由其溫度決定（此在理想氣體，理所當然；因吾人假設理想氣體之分子間毫無互相作用之力，而又推得其動能與溫度成正比也），則作此種膨脹時，氣體之溫度，亦必不變。1850年焦耳 (Joule) 乃作實驗，以覘其現象之究為何如者。

取一充滿氣體之罐  $A$ ，與另一中為真空之罐  $B$  聯接。今若開啟兩罐間之活門  $C$ ，則氣體將自  $A$  罐衝入  $B$  罐中 (圖 187)。兩罐之圍壁及其聯接既係堅定的，故氣體在罐內自由膨脹之時，並不對外作

功，故其內能應不變。

今置此兩罐於量熱器之水中，而作實驗，以觀察量熱器中之溫度有無變更，即可知氣體之內能是否完全由溫度而定。焦耳實驗之結果，其誤差較所欲測之現象本身為大，故未足藉以解決此一問題。

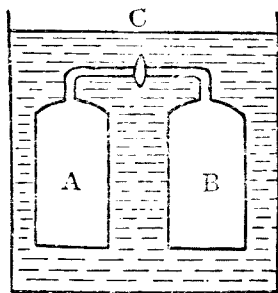


圖 187. 氣體之自由膨脹

後兩年，焦耳復與湯姆生 (Thomson) 用有空涼之塞子，作較準確之實驗。各種氣體自高壓之貯器中，脹入低壓之貯器時，溫度均略降低，氣氣則稍升高。此實驗之結果，表示所有實際氣體之內能，雖非完全由其溫度而定，然與完全由溫度而定之情形實相差甚微，各種氣體，皆非理想的。氣體分子間，略有互相吸引之力，當其自由膨脹也，必須勝過此等吸引之力，方能使分子間之平均距離增大，即須作相當之功；分子之動能因而減少，故氣體之溫度略微降低；

§ 163. 范賽瓦方程式 各種氣體皆非理想的，故實際氣體之氣態方程式，不能如理想氣體者 (§ 161) 之簡單，而波義耳—馬利奧脫定律與實際上之不符合處，吾人於前第十五章 § 121 亦略有提及。

范賽瓦 (Van der Waals) 將氣體分子間互引之力，與其所占之空間，引入氣體分子運動說中，而推出氣態方程式

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT,$$

式中  $a$  與  $b$  為二常數，其值視氣體之性質而異。新添之  $a/V^2$  及  $-b$  兩項，乃示其與理想狀態之區別。

吾人於導出理想氣體之定律時，嘗假設其分子間毫無互相作用之力，但事實上任何氣體之分子，均不免互相吸引，密度愈大引力愈強，以此之故，氣體分子碰撞器壁時之速度，恆因他分子向氣體內部之吸引而減小，於是作用於器壁上之壓力  $P$  亦因之減小，故應加一改正項  $a/V^2$ 。此改正項之與體積平方成反比者，以其將與器壁碰撞之分子數目，與器內之分子總數成正比，且此等將與器壁碰撞之分子，所受之吸引力，亦與器內分子之總數成正比，故與器內分子總數之平方成正比，即與氣體之密度平方成正比，而與氣體體積  $V$  之平方成反比也。

推演理想氣體之氣態方程式時，吾人未計氣體分子之大小，即假設分子本身之總體積，較之氣體所占之全部空間為小，可略而不計者 (§ 142)。此項疏忽，乃以  $-b$  之項改正之。蓋器內可縮小之體積，實較  $V$  為小，而為  $V-b$  也。

由上推理觀之，可知氣體之壓力較小，即其容積頗大時，則  $b$  及  $a/V^2$  兩項之影響頗微。又若氣體之溫度頗高時，則分子之動能大，相互間吸引力之影響，相形見絀。故在此兩情形下，實際氣體所遵循之定律，均將與理想氣體定律甚相接近。

### 習 題 二 十 三

1. 設有一鐘，其擺為黃銅所製。當溫度為  $15^{\circ}\text{C}$ . 時，此鐘擺動恰為準確，問在  $25^{\circ}\text{C}$ . 時，每日要差多少？
2. 以鋼條尺量銅線之長，當溫度為  $10^{\circ}\text{C}$ . 時，量得為  $2,584.65$  米。次日以原尺復量，溫度為  $24^{\circ}\text{C}$ .，問量得之長為何？求銅線之實長。

(鋼之線脹係數為  $11 \times 10^{-6}$ .)

3. 銀之密度在  $0^{\circ}\text{C}$ . 時為  $10.5$  克/厘米<sup>3</sup>, 求其在  $120^{\circ}\text{C}$ . 時之密度.
4. 有鐵板在  $10^{\circ}\text{C}$ . 時長  $8.5$  米, 寬  $4.5$  米. 求其在  $28^{\circ}\text{C}$ . 時之面積.
5. 有  $0^{\circ}\text{C}$ . 之水裝在玻璃管中, 高  $305.84$  厘米, 加熱至  $100^{\circ}\text{C}$ . 時, 求水在玻璃管中之高度.
6. 某日溫度為  $22^{\circ}\text{C}$ ., 氣壓表之水銀柱高為  $772.5$  毫米, 求以達因/厘米表該日之大氣壓力.
7. 有氣泡自深  $10$  米之池底升至池面時, 直徑為  $1.2$  厘米. 若池面及池底之溫度各為  $10^{\circ}$  及  $6^{\circ}\text{C}$ ., 求氣泡在池底時之大小.
8. 假設常人每次所吸入之空氣, 其體積有一定之值. 試比較其在高山頂與在山腳每分鐘呼吸之次數. 山頂之氣壓為  $60$  厘米汞高, 溫度為  $7^{\circ}\text{C}$ .; 而山腳之氣壓則為  $74$  厘米汞高, 溫度為  $15^{\circ}\text{C}$ ..
9. 一固體之質量為  $1,000$  克, 浸於  $2^{\circ}\text{C}$ . 之水中稱之為  $740$  克, 浸於  $10^{\circ}\text{C}$  之水中稱之則為  $742$  克. 求該固體之線脹係數.
10. 敷設鐵路之鋼軌時, 若堅釘於枕木之上, 二軌銜接之處, 未留空涼, 敷設時之溫度為  $20^{\circ}\text{C}$ .. 夏季最熱時之溫度為  $40^{\circ}\text{C}$ ., 冬季最寒時之溫度為  $-5^{\circ}\text{C}$ .. 求鋼軌中一年內所生之最大彈性力.
11.  $1$  克之空氣自  $15^{\circ}\text{C}$ . 熱至  $60^{\circ}\text{C}$ ., 其壓力為  $75$  厘米汞高, 始終保持常定者, 求空氣此時所作之功. 若其體積維持常定, 則溫度增高後壓力增加多少, 此時曾作外功否?
12. 求  $1$  克氫氣及  $1$  克氧氣之氣體常數. 若各乘以分子量, 則所

得之值爲何？

13. 以阿佛加特羅數除氣體常數，稱波次曼常數 (Boltzmann's constant)，試求其值。並證各種氣體分子，溫度每增高  $1^\circ$ ，所增加之動能，即等於波次曼常數之一倍半。

## 第二十章 比 熱

§164. 比熱之測定 比熱之定義，既如前第十八章 §148 所述。測定比熱，即同時測定熱量與溫度。測定溫度有溫度計。測定熱量所根據之原理，乃溫度不同之兩物體混合之後，熱體所放出之熱量等於冷體所收入之熱量，即所謂混合量熱法 (method of mixture) 也。

§165. 量熱器 量熱器之要點，在不漏熱。最簡單者為水量熱器，如圖 188。A 為量熱器內筒，多用銅片製成，中貯以水，為混合中熱量交換之所。筒內有溫度計及攪桿，攪桿攪動以使器內溫度均勻。為減小熱量因對流及輻射而散逸起見，內筒之外，圍以外筒 C。C 與 A 之間，則以絕熱質隔離之(空氣即為絕熱質)。

測比熱時，先稱量熱器之內筒 A 及攪桿之重，次注  $M_W$  克之水於 A 內，待其溫度達均一之值  $t_1$  時，乃將溫度為  $t$  質量為  $M$  之物體，放入 A 筒內，攪動之，使筒內溫度復達均一之值  $t_2$ 。如是，熱體所放出之熱量為

$$s.M(t-t_2),$$

水所收入之熱量為

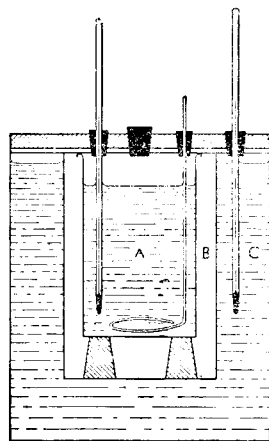


圖 188. 量熱器



$$M_W(t_2 - t_1),$$

而量熱器所收入之熱量為

$$C(t_2 - t_1),$$

$C$  表量熱器之熱容量。量熱器之熱容量，常稱為水當量 (water equivalent of calorimeter)。熱體所放出之熱量，與水及量熱器所收入者相等，故有

$$sM(t - t_2) = (M_W + C)(t_2 - t_1),$$

即得

$$s = \frac{(M_W + C)(t_2 - t_1)}{M(t - t_2)}.$$

測量液體之比熱時，常將熱液體裝於一小管中，然後放入  $A$  筒之水內。如是則量熱器之水當量，應包括此小管之熱容量。

§ 166. 固體及液體之比熱 由固體及液體比熱之值觀之，有可注意者數事：

(1) 水之比熱，依定義，在  $15^\circ\text{C}$ . 時為 1。水之比熱特大，表 13 (見次頁) 所舉各物，均較水之比熱為小。而冰之比熱僅為 0.502，此可見物質之比熱，因其體態而變。

水在各溫度，比熱之值，有如下列：

溫 度	水之比熱	溫 度	水之比熱
$5^\circ$	1.0049	$30^\circ$	0.9971
$10^\circ$	1.0021	$40^\circ$	0.9 69
$15^\circ$	1.0000	$50^\circ$	0.9972
$20^\circ$	0.9982	$70^\circ$	1.001
$25^\circ$	0.9973	$100^\circ$	1.006

表 13. 物質之比熱

物 質	比 熱	溫度範圍 °C.	原 子 量	比熱乘原子量 (原子熱)
鋁	0.217	17 至 100	27.1	5.88
銅	0.093	15 至 100	63.6	5.93
銅	0.00036	-250		
碳 精	0.454	896	12	5.45
碳 精	0.160	11	12	1.92
碳 精	0.0068	-220		
金	0.031	17 至 100	197.2	6.12
鐵	0.113	18 至 100	55.8	6.30
鎘	0.0305	20 至 100	207.2	6.35
鎘	0.0143	-250		
汞	0.0333	20	200.6	6.60
汞(固體)	0.0329	-75 至 -40	200.6	6.58
鎳	0.109	15 至 100	58.7	6.37
鉛	0.0322	15 至 100	195.2	6.25
銀	0.056	15 至 100	107.9	6.04
錫	0.054	18 至 100	118.7	6.41
鋅	0.0924	0 至 100	65.4	6.08
硼	0.022	-253 至 -106	10.9	0.24
硼	0.252	0 至 100	10.9	1.67
硼	0.433	192 至 234	10.9	4.77
水 晶	0.174	0		
冰	0.562	-21 至 -1		
黃 銅	0.092	0		
鋼	0.107	0		
玻 璃	0.117	10 至 50		
酒 精	0.58	0 至 100		
醇 精	0.56	0 至 100		
二硫化碳	0.24	0 至 100		

(2) 在極低之溫度，比熱如銅如碳，皆減小甚多。依現代之實驗與理論結果，皆認在絕對零度，物資之比熱將爲零。

(3) 多數原質之比熱，乘其原子量，其積約等於 6。此定律爲杜隆(Dulong)與畢底(Petit)在 1819 年所發現，其時低溫實驗結果尙甚缺乏，故當時認碳精，硼及硒等原質，爲此律之例外。今則對於物質在低溫時之比熱，知之較詳。卽各物體之比熱，在極低溫度時，爲值均極微；惟溫度增高，其比熱亦隨之而增大，因此遂有認在甚高之溫度時，碳精，硼及硒等之比熱，各乘以原子量亦將約等於 6。創此說者以爲各物質之原子，其質量既與其原子量成正比，故比熱與原子量之乘積，可代表各個原子之熱容量。而杜隆與畢底所發現之定律，乃表示各原子之熱容量均相同。

§ 167. 氣體之比熱 在前數節討論比熱時，吾人未曾計及物體之因熱膨脹，對於比熱之影響；此因固體與液體之膨脹甚微，故其影響於比熱者亦甚小。至於氣體之膨脹，則可達頗大之值，故討論氣體之比熱，對於此事須細行考究。

設閉氣體於一筒中；筒上蓋有可以移動之活寒。當氣體受熱時，筒中氣體將推出活寒而膨脹，惟活寒之上面受有大氣壓力，故當其被推出時，氣體將作相當之功。此功何由而來？吾人知熱爲能之一種，則當氣體受熱而膨脹時，其所吸收之熱量必有一部分用來作功。惟若氣體之容積不變，則所作之外功爲零，而氣體所收入之熱量，將完全用以增加其自身之溫度。由此觀之，氣體之溫度增加一定之度數時，所需之熱量，將視氣體之膨脹與否而異。換言之，氣體之比熱，視其體積變否而有不同之值。氣體體積之變更，可循多種之規則，最

簡單者係其壓力不變。於是氣體之比熱，遂有定容比熱 (specific heat at constant volume) 與定壓比熱 (specific heat at constant pressure) 之別。

定容比熱  $s_v$ ，係一克氣體於其容積不變時，溫度增高一度所需之熱量，而定壓比熱  $s_p$  則係一克氣體，於其壓力不變時，溫度增加一度所需之熱量。依本段所述  $s_v$  與  $s_p$  不同之理由， $s_p$  之值必較  $s_v$  為大。

$s_p$  與  $s_v$  相差之值，為 1 克氣體當溫度增加 1 度時，在定壓力  $P$  下膨脹，對外所作之功。在理想氣體，有

$$PV = RT,$$

及

$$PV' = R(T + 1),$$

對外所作之功為

$$P(V' - V) = R,$$

故得

$$c_p - c_v = R.$$

若  $s_p'$  及  $s_v'$  表一克分子之氣體定壓比熱與定容比熱，則有 (§161)

$$s_p' - s_v' = R = 1.988 \text{ 卡 (約 2 卡)}$$

為一普徧常數。

又從氣體分子之運動說，且可得定容比熱  $c_v$  之值。在一定容積之下，氣體受熱，全用以增加其內能，在理想氣體，即為分子之動能。依 §161 之結果，一克氣體之動能，在溫度  $T$  時，為  $\frac{3}{2} RT$ 。故溫度增高 1 度，1 克氣體分子之動能增加為  $\frac{3}{2} R$ ，是即由所受之熱而來。所受之熱為  $s_v$ 。故得理想氣體之定容比熱為

$$s_v = \frac{3}{2} R.$$

表 14. 氣體比熱

氣 體	溫度範圍 °C.	比 熱 $s_p$ $s_v$	比熱比值 $\frac{s_p}{s_v} = \gamma$
氫	12 至 198	3.409   2.42	1.408
氧	20 至 440	0.218	1.40
氮	20 至 440	0.246   0.171	1.41
空 氣	20 至 440	0.239	1.40
水 蒸 汽	100	0.480	1.33
氫	20 至 90	0.125	1.66
氫	18	1.25	1.66
氯	16-343	0.118	1.36
汞 蒸 汽	310		1.66

至於測  $s_p$  之值，可令已熱之氣體，在一螺旋形管內流通，而將管置於量熱器內。然後觀測氣體進出之溫度及其質量，與量熱器所收入之熱量，即可計算得之。用此法所得者，即係定壓比熱之值；蓋因使氣體流通之壓力差甚微，故在管內之氣體壓力，可視作一定不變也。

由  $s_p$  之值，與  $s_p - s_v$  之差，吾人可計得  $s_v$ 。但  $s_p$  與  $s_v$  之比又可以實驗方法直接測得（見後 §212 聲在氣體中之傳播），故吾人常由  $s_p$  及  $s_p/s_v$  以計算  $s_v$ 。表 14 末行所載者，即各氣體定壓比熱與定容比熱比數之實測值，如氫、氮，以及汞蒸汽之值，同為 1.66，與理想氣體者相照合。

§ 168. 氣體之絕熱變化 設有一圓筒，中貯氣體，上蓋活塞，加力而使活塞向內移動，則吾人對於氣體作功。當此時也，若未另給氣體以熱量，亦未由之取出熱量，則氣體之內能以吾人之作功而增加。氣體內能增加，則其分子之運動增速，故其溫度乃增高。反之，如任氣體膨脹，而將活塞推出，則氣體對外作功，內能減小，其溫度亦隨之而降低。此事蓋即液化氣體時所常利用者。

此種不增減熱量之變化，稱為絕熱變化(adiabatic transformation)。故將氣體絕熱壓縮，則氣體加暖；絕熱膨脹，則氣體冷卻。壓氣入車輪之氣胎中時，唧筒輒顯著的發熱，即此故也。

理想氣體之絕熱脹縮，其在各時之壓力  $P$  與其容積  $V$  之關係，可以方程式

$$PV^\gamma = \text{常數}$$

表示之。式中  $\gamma = s_p/s_v$ ，即氣體之定壓比熱與定容比熱之比，其值恆大於 1 (§ 167)。空氣之  $\gamma$  為 1.40。

因之，理想氣體之定壓比熱為

$$s_p = s_v + R = \frac{5}{2} R,$$

而定壓比熱與定容比熱兩者之比，為

$$\frac{s_p}{s_v} = \frac{5}{3} = 1.66.$$

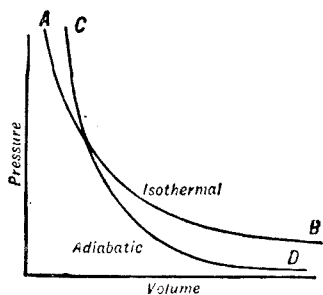


圖 189.

若一克分子之氣體之定容比熱，則為

$$s_v' = \frac{3}{2} R' = 3 \text{ 卡/度},$$

乃一普遍常數，此即杜隆—畢底定律所表示之事實。在表14中氫，氮，以及汞蒸汽等之定容比熱各乘以其原子量，所得之值約為3卡/度，以此等氣體之分子為單原子，與吾人所討論之理想氣體情形相近。至於表13所載之原子熱為6而非3者，實以其為雙原子或多原子之故。重要之事實，乃為克分子熱皆相等。

量  $s_v$  時，普通多用水蒸汽量熱器 (steam calorimeter)。法將氣體閉於一定容量之泡內，外注以水蒸汽，使其溫度自  $t^\circ\text{C}$ 。增至  $100^\circ\text{C}$ 。由所冷凝之水蒸汽質量及汽化潛熱，與泡之熱容量等，即可計得  $s_v$ 。惟此法需用多量之氣體，否則因泡之熱容量頗大，其影響於所求結果之準確者殊甚。故  $s_v$  之值，吾人每不直接實驗去求得之。

絕熱變化，可在壓容圖中以曲線表示，如圖189之  $CD$ ，稱為絕熱曲線 (adiabatic)，一如等溫變化 (即  $PV = \text{常數}$ ) 之可以曲線  $AB$  表示，稱為等溫曲線 (isothermal)。

絕熱曲線常較等溫曲線為陡。在絕熱變化中，當壓力增加，則體積減小，而溫度增高，於圖中一目瞭然。

§ 169. 氣體之絕熱壓縮係數 如氣體所受之壓力增加  $\Delta P$ ，則其容積減小  $\Delta V$ ，依 § 84 容積彈性係數之定義，為

$$k = \frac{\Delta P}{\frac{\Delta V}{V}}.$$

壓縮氣體之手續，既有絕熱與等溫之別，則氣體之壓縮係數，亦將有

絕熱與等溫之區別。氣體之等溫壓縮係數(以  $k_i$  表之), 乃等於其壓力  $P$ , 已見前第十五章 § 122, 從  $PV = \text{常數}$  一式推出。今進而求氣體之絕熱壓縮係數, 以  $k_a$  表之。

設氣體之壓縮, 係依絕熱變化進行; 如是當其壓力增加  $\Delta P$  時, 容積將減小  $\Delta V$ , 而有

$$\begin{aligned} PV^\gamma &= (P + \Delta P)(V - \Delta V)^\gamma \\ &= PV^\gamma \left(1 + \frac{\Delta P}{P}\right) \left(1 - \frac{\Delta V}{V}\right)^\gamma, \end{aligned}$$

即 
$$1 = 1 + \frac{\Delta P}{P} - \gamma \frac{\Delta V}{V} + \dots$$

略去式中  $\frac{\Delta P}{P}$  及  $\frac{\Delta V}{V}$  之二次及其高次乘幂不計, 則得

$$\frac{\Delta P}{P} - \gamma \frac{\Delta V}{V} = 0;$$

故 
$$k_a = \frac{\Delta P}{\frac{\Delta V}{V}} = \gamma P,$$

即 
$$k_a = \gamma k_i.$$

## 習題二十四

1. 測定某鎔冶爐之溫度時, 先將重為 100 克之鉑球放入爐中, 待其溫度已達爐內之值時, 取出而置於 500 克之水中。若水之起始溫度為  $12^\circ\text{C}$ , 混合後其溫度增至  $88^\circ\text{C}$ , 貯器之水當量為 85 克, 求爐之溫度。在本題之溫度範圍內, 鉑之平均比熱為 0.038。

2. 測定某量熱器之水當量時, 觀察所得之數據如下:



量熱器與攪桿等共重	58.86 克
量熱器加入冷水後共重	309.05 克
起始溫度	12.6 C.
加入熱水後量熱器共重	337.42 克
熱水之溫度	82.8 C.
混合後，量熱器與水之溫度	15.4 C.

求此量熱器之水當量及其比熱。

3. 某寢室在溫度為  $0^{\circ}\text{C}$ ., 氣壓為 76 厘米汞高時共容 240 立方米之空氣, 其中之物件及牆壁等之水當量為 20 仟克. 設爐火所供給之熱量僅有 25% 足以熱此室, 而室所吸收之熱量且有 10% 由牆壁外散. 問欲使室內溫度, 自  $0^{\circ}\text{C}$ . 增至  $20^{\circ}\text{C}$ . 時所需之煤若干?

4. 設某物質之比熱與溫度之關係, 為  $s = a + bt$ , 式中  $a$  及  $b$  為常數. 求使該物質  $m$  克之溫度自  $0^{\circ}\text{C}$ . 增至  $t^{\circ}\text{C}$ . 時, 所需之熱量.

5. 1 仟克之沸水逐漸冷卻, 若其放出之熱量悉散布於 1,000 米<sup>3</sup> 之乾燥空氣中, 空氣之初溫度為  $0^{\circ}\text{C}$ ., 壓力為 76 厘米汞高. 假設空氣之容積常定不變, 求空氣與水最後之溫度及壓力.

6. 設有一物體將其加熱自  $0^{\circ}\text{C}$ . 至  $t^{\circ}\text{C}$ . 時, 所需之熱量為每克  $H = at + bt^2 + ct^3$  卡. 求當溫度範圍為  $t_1$  至  $t_2$  時之平均比熱. 又求其溫度為  $t^{\circ}\text{C}$ . 時之比熱.

7. 將  $10^{\circ}$  之乾燥空氣絕熱壓縮至其原容積之  $1/10$ , 其溫度將升至若干度? 又若其原來之壓力為 76 厘米汞高, 問壓縮後, 其壓力若何?

8. 求氫, 氮及汞蒸汽之定容比熱, 及其一克氣體之常數.

9. 設已知氧氣  $O_2$ , 氮氣  $N_2$  及鈉  $Na$  之比熱, 試由之求  $NaN_2$  比熱之大約值.

## 第二十一章 物態之變化

§ 170. 物態變化之種類 就其狀態而言，物體可分為固體，液體及氣體三種，前已言之。加熱於物體，除其溫度增高及體積膨脹而外，甚者可使其狀態亦生改變。冬日之水，凍凝為冰，及冰之融解；乃液體變為固體及固體變為液體之顯著者。熱水使之沸騰，則化為水蒸汽；冷卻之，則復得水；此為液體變為氣體及氣體變為液體之最常見者。至於固體直接變為氣體，或氣體直接變為固體，日常中雖不常見；然曾習化學者，必知將碘置管中而熱之，則可直接汽化之一事。

物體由固態變為液態，稱為融解 (fusion or melting)；由液態變為固態，稱為凝固 (solidification) 或凍結 (freezing)。其由液態變為氣態，則稱蒸發或氣化 (vaporization)；反之，稱為液化 (liquefaction)。至於固體直接變成氣體，稱為昇華 (sublimation)，反之，亦稱凝固。

通常液體在室內溫度時，即蒸發不已，溫度愈高，蒸發愈甚。若溫度繼續增加，則終將至一定點，其時液體內部到處劇烈發生氣泡，大有全部液體立即化成氣體之勢，是曰沸騰 (ebullition or boiling)。此時之溫度，稱為沸騰溫度或沸點 (boiling point)。

固體融解或液體凝固，亦有其一定之溫度，稱為融解溫度或融點 (melting point)。融解與凝固兩詞，在物理學上為同義，實一事之二方面。

將熱量  $H$  均勻的輸入於物體，使其融解或沸騰時，其溫度  $t$  之變化，有如圖 190 所示。在達融點或沸點  $t_f$  之前，物體之溫度逐漸上升；但一到此點 ( $A$ )，則立刻停止上升，熱量雖仍不斷輸入，然物體之溫度將始終維持常定，直至融解或沸騰完畢 ( $B$ ) 而止；此後溫度復行上升；故此等溫度極易精密測定。凝固或液化時之情形與此相同，惟進行之方向相反耳。

明確之融點，僅真正之固體即晶體，方有之。非晶質之物體，如玻璃，火漆，松香之類，則無明確之融點。溫度漸高，其質化軟，初似黏膠，終成薄液。其固態與液態間無明顯之界限。

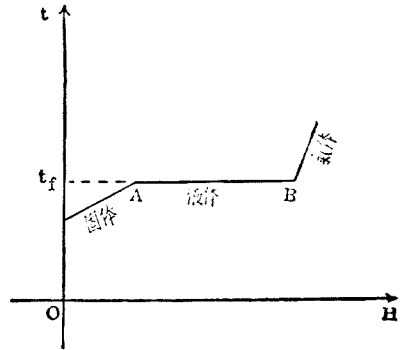


圖 190.

在一定之壓力下，物質僅在融解溫度時，固態與液態兩者方能同時並存。較融點高，則恆為液態；較低，則恆為固態。高於沸點者，純為氣體；然不特在沸點之時，即在較沸點為低之溫度下，液態與氣態亦可同時並存，且恆為平衡情形（見後 § 175）。低於融點時，固態與氣態亦可並存。一物之固，液，氣三態同時並存者，僅於某一定之壓力及一定之溫度下，方為可能，此即所謂三態點 (§ 183)；以水為例，此時之壓力應為  $p = 4.6 \text{ cm Hg}$ ，溫度應為  $t = +0.0076^\circ\text{C}$ 。

茲再總括之如下：

融點以下

固態與氣態

三態點

固態 液態與氣態

融點與沸點之間

液態與氣態

沸點以上

氣態

若將液體謹慎處理之，每可使其溫度降至融點以下數度而不凝固，此即所謂過度冷卻 (supercooling)。例如水可冷卻至  $-10^{\circ}\text{C}$ 。而不凍結，但若稍受顫動或有細粒之固體投入其中，則液體立即凝固，其溫度亦自行上升，以至融點而止。

又如液體甚為純淨，緩緩加熱，亦每可使其溫度升至沸點以上數度而不沸；但如略有擾動，即突然猛烈發生氣泡，同時溫度自行降至沸點而止；此即所謂過度加熱 (superheating) 現象。

過度冷卻與過度加熱，皆為液體之極不穩定的平衡。

合金 (alloy) 乃二種或二種以上金屬晶體之混合物體。如黃銅 (brass) 乃銅鋅合金；青銅 (bronze) 則為銅錫合金；鋼為鐵碳化物，其中且常含有少許他種物質，如硫磺及磷等。合金之融點，常較其所含成分之純金屬為低。例如將鉛錫各半之合金液冷卻之，當溫度為  $220^{\circ}\text{C}$ 。時，其溫度將稍停不變。此時鉛漸先開始凝固，惟其凝固點因有錫與之混合之故，乃較純鉛之凝固點  $327^{\circ}\text{C}$ 。為低。此後如繼續冷卻之，則被凝固之鉛將益多，溫度益將下降，至  $182.5^{\circ}\text{C}$ 。時溫度之變更復暫停頓。此時鉛與錫同行凝固，而成所謂易融合金 (eutectic mixture)；此合金中含 37% 之鉛與 63% 之錫，是以  $182.2^{\circ}\text{C}$ 。可視為鉛錫易融合金之凝固點。

固體內部之分子，於其平衡位置之左右作振動，無時或已。溫度愈高振動愈烈。至融解溫度時，物體中各分子振動如是之烈，使其相互間之團結，頓形鬆弛，以至解體。於是固體之有規則排列，遂變為

液體漫無秩序之狀態。欲催促分子組織之崩解，恆必有需乎工作，此工作即取自輸入之熱能——融解熱。

蒸發或沸騰之情形，亦與此相類，此時輸入之熱能——蒸發熱，化成工作，使前在融解時已經鬆弛之分子，更相遠離，而成氣體之狀態。

§ 171. 融解時體積之變更 凡物體融解時，其體積恆隨之變更，大多數物體之體積，於融解時膨脹，凝固時縮小(圖191)。但有數種物質，於融解時不脹而反縮，冰即爲此之一例。水結成冰，體積約增9%。冬日水管花瓶，往往炸裂，即爲水凍結時體積增大所致。

巖石細罅中，不免有水浸入，遇冷凍結，體積驟脹，巖因生裂紋。迨春回大地，日暖冰融，年復一年，而巖石崩解矣。

全屬中如鉍(bismuth)，銻(antimony)，銀及鑄鐵，凝固時體積增大。作鑄模之金屬品，當其凝固時，須具有膨脹之特性，方能緊壓模樣，而將其精細花紋一一表出。故印鑄局多用鉛，銻及銅之合金，以爲鑄模。

§ 172. 壓力對於融點之影響 物體之體積於融解時膨脹者，若增強其外壓力，則融點因之升高；縮小者反是，壓力增而融點反降。

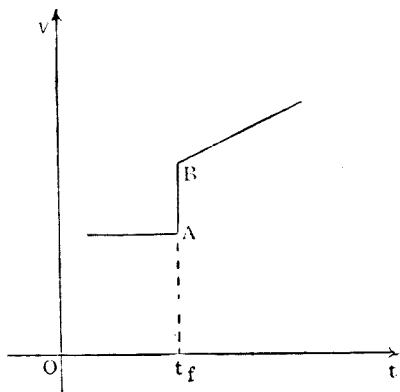
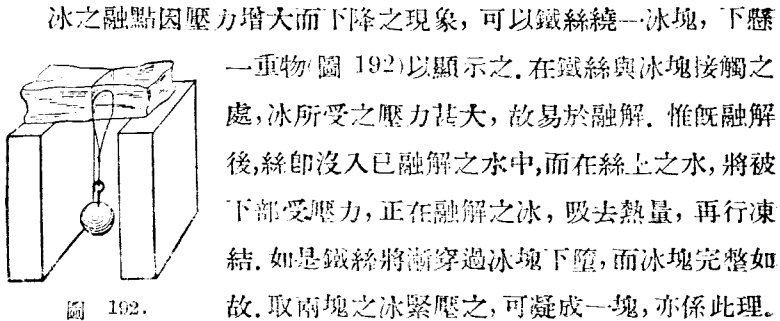


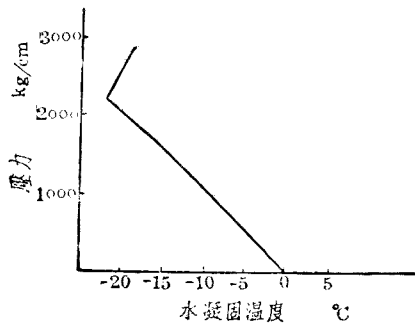
圖 119. 融解時體積之變更

簡言之，壓力之作用，在使物體易於達到體積較小之狀態。此理亦甚明顯，蓋物體為分子所組成，而分子在運動中也。



在尋常之壓力下，壓力增加 1 大氣壓，冰之融點下降  $0.0075^{\circ}\text{C}$ 。

圖 193 之曲線，表示水與冰平衡時，其溫度與壓力之關係。此種曲線，稱為融解曲線 (fusion curve)。如用甚大之壓力，融點所達之最低值為  $-20^{\circ}\text{C}$ 。此後如再增加壓力，則反上升。



### § 173. 融解熱 方固

體之融解過程正在進行中也 (圖 190 中之  $AB$  線段)，輸入之熱量，不使物體溫度增高，乃用以抗勝固體分子互相結合之力，使成液體，所謂物質之融解熱 (heat of fusion) 者，乃為 1 克之物質，自固體化成液體，其溫度始終維持在融點時，所需之熱量。因其不使溫度變遷，故亦稱融解潛熱 (latent heat of fusion)。反之，流體凝為固體時，亦

有相等之熱量放出；此時物體散播其融解熱於四周，故凝固過程正在進行中，雖繼續放出熱量，其溫度可始終不變。

欲測固體之融解熱，可於量熱器中滿儲以水，而將融解之物質投入其中。設物體之質量為  $M$ ，其在液態時之比熱為  $s$ ，原始之溫度為  $t$ ，融解點為  $t_f$ ，融解熱為  $H_f$ ，而在固體時之比熱為  $s'$ 。今投此物體於量熱器中，令量熱器之水當量為  $M_o$ ，器中之水為  $M_w$ ，其原始溫度為  $t_0$ ，混合攪動之後，溫度為  $t'$ 。如是，液體之溫度自  $t$  減至  $t_f$  時，所放出之熱量為

$$H_1 = sM(t - t_f);$$

當其完全凝固時，所放出之熱量為

$$H_2 = MH_f;$$

凝固之後，溫度復由  $t_f$  減至  $t'$ ，故在此時間內，又放出熱量為

$$H_3 = s'M(t_f - t').$$

於是物體所放出之總熱量為

$$sM(t - t_f) + MH_f + s'M(t_f - t').$$

如毫無輻射或他種失熱效應，則此熱量完全為量熱器所吸收。惟量熱器之溫度，自  $t_0$  增至  $t'$  時，所收入之熱量為

$$H_4 = (M_w + M_o)(t' - t_0).$$

故有

$$sM(t - t_f) + MH_f + s'M(t_f - t') = (M_w + M_o)(t' - t_0),$$

得

$$H_f = \frac{M_w + M_o}{M}(t' - t_0) - s(t - t_f) - s'(t_f - t').$$

如已知物體（例如冰）之融解之值，則由其所融解之質量，可用



來求他物體所放出之熱量。利用冰之融解熱以測定熱量者，稱爲冰量熱器(ice calorimeter)，較之水量熱器容積可以減小。

表 15. 融解溫度(°C.)及融解熱(卡/克)

物 質	融解溫度	融解熱	物 質	融解溫度	融解熱
鉛	658	94	錫	232	14
鉛	327	6	汞	-38.9	3
鐵	1,530	49	鎢	1,400	
金	1,063	16	黃 銅	900	
銀	960.5	26	鈾	3,380	
鉑	1,773	27	水	0	80
銅	1,083	42	氧	-218	3.3
鋅	419.4	26	氮	-210	6.1

§ 174. 汽化 物質汽化之原因，係由於液體之分子運動。液體分子之欲逸出液面時，其他分子之引力，輒予以阻擋；故欲使分子脫離其液體之引力範圍，即使之汽化，恆需工作。若某分子因其本身之運動，而具有足夠之動能，該分子即可藉其動能，以成汽化所需之功，突破液面，脫穎而出，是即汽化現象。

液體溫度愈高，其分子之平均速度愈大，則動能頗大之分子足以做汽化之工作者，爲數亦愈多；故汽化與溫度有關，溫度愈高，汽化愈烈。展溼布於空中，不久自乾，若置之於爐旁，或曝於太陽之下，則乾更快。

汽化不斷進行，活躍分子先後脫離液體以去，於是液體內部分子之平均能量，因之逐漸減小，而溫度下降。故欲維持液體之溫度，

必須補償此項因汽化而損失之熱能。

液體因汽化而冷卻之現象，於水頗易觀察之。室中靜置之水，恆較其周圍之物體為涼。人體濡水，每覺寒冷，蓋以水之迅速蒸發也。故發汗後每易感冒風寒。

欲使沸熱之食物加速冷卻，每以口吹之；所以然者，因藉此可吹去已成之水汽，俾食品中之水分，加速蒸發，而溫度因以下降。油膩之湯不易冷卻者，以浮蓋湯面上之油層，能阻止蒸發之進行也。

§175, 飽和蒸汽 試於密閉之容器中置杯，杯盛液體(圖194)。液體汽化，即有液體分子自液內逸出，而入於器之上部空間中。此種分子，即汽之密度，逐漸增加，但不能有增無已，終將達一極限之值而止。蓋因此已汽化之分子，係密閉於器內，不能逸散，故其近於杯中液面者，將重復回到液內，而仍成為液中分子。此種情形，繼續進行，至逸出液面與浸入液面分子之數目相等時，器內蒸汽之密度，將不再增加。此時之情形雖亦可視為一種平衡狀態，然在液面處，分子仍不斷出入，不過出入之數目適相等而已。達到此種平衡狀態之蒸汽，稱為飽和蒸汽(saturated vapor)。

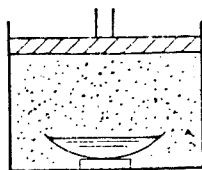


圖 194. 飽和蒸汽

當器內空間之蒸汽，已達飽和狀態時，若增加其容積，則其中蒸汽之密度減小，而與液面接觸之蒸汽分子之數目亦少，如是逸出液面而入於空間之分子乃較多，而一部分之液體遂復汽化，器上密度再達前此飽和之值時，乃復呈平衡狀態。反之，如減小器中空間之容積，則其中蒸汽之密度增加，自蒸汽中返入液面之分子乃較多，而一部分之蒸汽遂液化，至蒸汽之密度亦達前此飽和之值時，乃復呈平

衡狀態。由此觀之，飽和蒸汽之密度，僅視其溫度而定，不因其容積之增減而稍異。

往日習慣上，咸以氣體之與其本身液體並存一處者，稱為汽。每將氣與汽，加以區別；可以液化者稱為汽，不能液化者稱為氣。但吾人今日確知一切氣體，在適當條件下，皆可使之液化，氣與汽固二而一者也。通常仍以氣體之與理想氣體狀態相差頗著者稱為汽，蓋以此類較氫，氮之近似理想氣體者易於液化。

§ 176. 飽和汽壓 蒸汽分子，與器壁及液面相碰撞，亦生相當之壓力，其情形與氣體完全相同。飽和蒸汽所生之壓力，稱為飽和汽壓 (saturated vapor pressure)。液體溫度增高時，飽和蒸汽之密度既增，其與器壁單位面積碰撞之分子數目亦增，故其壓力亦較大。惟在一定溫度之下，飽和蒸汽之密度有一定之值，不因其所占之容積大小而異，故飽和汽壓亦然，以有供給蒸汽分子之源——液體，同時存在故也。

未達飽和狀態之汽壓，自然可為任意之值，但常小於飽和汽壓耳。故吾人言汽壓，通常均指飽和汽壓而言。

欲測在各溫度下之飽和汽壓，可用如圖 195 所示之裝置。取兩個托里拆利 (Torricelli) 式之玻璃管，倒立汞池中，其上端有一溫池。欲測某液體之飽和汽壓時，以滴管將足夠之液體自一管之下端，送達其上。如是液體即在管之上部汽化，至其中之蒸汽達飽和狀態而止。同時此飽和蒸汽所生之壓力，將使管中汞

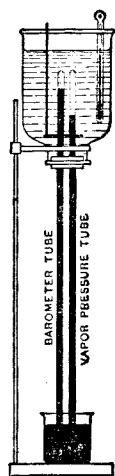


圖 95.  
飽和汽壓之測定

柱下降，故自兩管中汞柱高度之差，即知飽和汽壓之值。變更溫池之溫度，即可測得飽和汽壓與溫度之關係。

圖 196 表示飽和水蒸汽之汽壓與溫度之關係，此種曲線稱為汽化曲線。可見汽壓隨溫度增加極速，在  $100^{\circ}\text{C}$ . 時，水之汽壓為 1 大氣壓，在  $150^{\circ}\text{C}$ . 時則為 4.71 大氣壓。

水銀之飽和汽壓，在室內溫度時，僅為 0.001 毫米汞高，故用水銀壓力計時，可以略而不計。

當未飽和蒸汽之溫度降落時，其飽和程度將漸增加，以達於飽和狀態；既達飽和之後，若復冷卻，

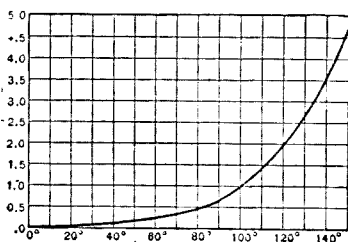


圖 196. 飽和水蒸汽之汽壓

卻之，則一部分之蒸汽，即將凝結為液。然如飽和蒸汽完全不與液體或其他雜質相接觸，則其溫度雖降至液化點以下，有時仍不凝結，此時蒸汽之密度，較與其溫度相對應之飽和密度為大，此種狀態，稱為過度飽和 (supersaturation)。其為不穩定之狀態，與過度冷卻，過度加熱 (§170) 情形相同。

在一定壓力之下，飽和蒸汽如係與其液體相接觸，則縱使繼續加熱，其溫度亦將不變。此時加熱之結果，徒為增多液體之汽化而已。若所有之液體，均已汽化完盡，或將飽和蒸汽導入另一管內，使不與其液體接觸，而後熱之，其溫度仍可漸增。如是隔離之後，蒸汽即是氣體。此時之蒸汽，稱為過熱蒸汽 (superheated vapor)。

離飽和狀態較遠之過熱蒸汽，其壓力，容積與溫度等之關係，與普通氣體相同，幾完全遵循波義耳，查爾及給呂薩克等定律，愈近於

表 16. 飽和水蒸汽汽壓及密度

溫度°C.	汽 壓 (毫米汞高)	密 度 (克/厘米 <sup>3</sup> )	溫度°C.	汽 壓 (毫米汞高)	密 度 (克/厘米 <sup>3</sup> )
-10°	2.14	$2.3 \times 10^{-6}$	60°	149.38	$130.1 \times 10^{-6}$
0°	4.60	$4.88 \times 10^{-6}$	70°	233.7	$198.0 \times 10^{-6}$
10°	9.21	$9.44 \times 10^{-6}$	80°	355.1	$293.1 \times 10^{-6}$
20°	17.54	$17.35 \times 10^{-6}$	90°	525.8	$424.0 \times 10^{-6}$
30°	31.82	$30.4 \times 10^{-6}$	100°	760	$598.0 \times 10^{-6}$
40°	55.32	$51.2 \times 10^{-6}$	110°	1,074.6	$972.0 \times 10^{-6}$
50°	92.51	$83.0 \times 10^{-6}$	120°	1,489.2	$1,123.0 \times 10^{-6}$

飽和狀態，則其關係與此等定律之差異，亦愈甚。

§ 177. 汽化熱 1 克之液體，在一定溫度下，汽化時所需之熱量，稱為汽化(潛)熱 (heat of vaporization)。反之，1 克之氣體凝結為液體，即液化時，亦必放出相等之熱量。

液體之汽化熱，亦可用混合法以測定之。盛液體於汽鍋中而蒸之，令所生之蒸汽，通入置於量熱器內之螺旋管中，而被冷卻，凝結為液。如是若量熱器之水當量為  $M_0$ ，其中之水重為  $M_W$ ，起始之溫度為  $t_0$ ，蒸汽之溫度為  $t$ ，混合後之溫度為  $t'$ 。蒸汽凝結為液後之比熱為  $s$ ，質量為  $M$ 。則量熱器所收入之熱量，為  $(M_W + M_0)(t' - t_0)$ ；蒸汽凝結為液時，所放出之熱量為  $MH_v$ ， $H_v$  表其汽化熱；而此冷凝液體之溫度自  $t$  降至  $t'$  時，所放出之熱量為  $Ms(t - t')$ ；故有

$$MH_v + Ms(t - t') = (M_W + M_0)(t' - t_0),$$

得 
$$H_v = \frac{M_w + M_a}{M} (t' - t_0) - s(t - t')$$

茲列舉數種液體，在其標準壓力之沸點下之汽化熱於表 17，並可注意者，即水之汽化熱特大。

表 17. 汽化熱

物	質	沸 點 °C.	汽化熱 (卡/克)
酒	精	78.3°	205
醇	精	34.5°	88.4
萘	C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	80.0°	94
	汞	357°	65
	水	100°	539

液體之汽化熱，常視其溫度而略異，溫度高則汽化熱反而減小，此亦吾人所易懂而期待者。水在各溫度之汽化熱，有如表 18 所載，可以方程式

$$H_v = 598.8 - 0.601t$$

表之。

表 18. 水之汽化熱

100°C.	539 卡/克
80°	551
60°	562
40°	573
20°	584
0°	598.8

§ 178. 大氣中之水蒸汽 因河池海洋中之水，不斷汽化之故，在大氣中常含有水蒸汽。其多寡情形，可以每立方厘米空氣中所含水蒸汽之質量，即絕對溼度 (absolute humidity) 表示之。空氣中所含未飽和之水蒸汽之質量，可用間接方法測定露點以求之。

將某部分空氣之溫度逐漸減低，使其中原未飽和之水蒸汽，達到飽和狀態，此時之溫度，稱為露點 (dew point)。空氣中所含之水蒸汽愈少，則其露點愈低，即離空氣溫度愈遠。在乾燥且冷之日，露點常可在  $0^{\circ}\text{C}$ . 以下。

欲測定露點，可用一光亮之金屬杯，令其內部冷卻，至在其外面呈現一層露珠時，乃誌杯內溫度。次漸增其內部之溫度，至此層露珠又復完全消滅時，再誌杯內溫度。此兩溫度之平均值，即露點之值。

既測知露點，則自飽和水蒸汽表 (例如 § 176 之表 16)，可查得此時空氣中實際所含水蒸汽之密度，與在此時之溫度下，空氣所能含之飽和水蒸汽之密度之比，稱為相對溼度 (relative humidity)。

諺云：“礎潤而雨”。礎潤即表示礎達露點。礎之溫度與空氣溫度相差不多，故礎潤即表示空氣相對溼度甚大，可雨之兆也。

相對溼度約為 50% 至 60% 時，吾人皮膚上之水分，汽化之緩速，頗為適宜。如相對溼度大於 60%，則汽化太緩，吾人感潮溼之苦；若小於 50%，則汽化太速，吾人乃覺其太乾燥。

相對溼度之值，除由測定露點以推算之外，亦可用汽化所生之冷卻現象以求之。其法以溼布一小方，包裹溫度計之泡，以作溼泡溫度計。布之一端，浸入水中，使其常溼 (圖 197)。除空氣中之水蒸汽已達飽和之時外，此溼泡溫度計所指示之溫度，將較無溼布包圍之

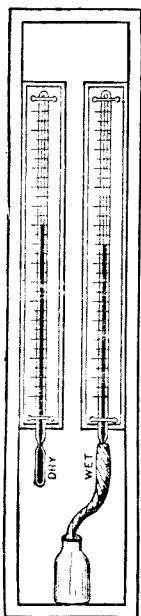


圖 197. 溼度計

乾溫度計所指示者為低。此乃由溼布上之水繼續汽化，而將其溫度減低所致。至於溼泡溫度計與乾泡溫度計兩者所示之溫度差，其值係視溼布上水之汽化之緩速而定；惟汽化之緩速，又視空氣中水蒸汽之飽和程度（即其相對溼度）而異。故如預先將此種溼度計（hygrometer）之指示，與用露點儀器所計得之相對溼度互相比較，而作一表或圖；則觀測此兩溫度計，即可自表或圖，查其相對溼度之值。

露，霜，霧，雲，雨，雹及雪當太陽西下後，地上固體如草木石等溫度之降落，較速於空氣，有時竟至露點之下，於是空氣中之水蒸汽，乃凝結於此等物體之上，而成為露。若天氣甚冷，露點之溫度係在  $0^{\circ}\text{C}$ . 之下，則所結之露凍而為霜。

夜間地球之冷卻，不但使在地面上之固體之溫度，降至露點以下，且可使近於地面之空氣溫度，亦降至露點以下，如是近於地面上之水蒸汽，亦將凝結而附着於空氣中之浮塵，以成霧。

當在地球面上高處之溫度冷卻，至露點以下之時，其中之水蒸汽，遂有一部分凝結於空中之浮塵，而成雲。設所凝結之水頗多，即可下降成雨。下降之雨在尚未抵地之前，如已凍結為冰，是即為雹。若凝結時之溫度（即露點）乃在  $0^{\circ}\text{C}$ . 之下，則其下降者乃為雪。

由此觀之，露霜與霧，雲雨及雹與雪之成因，均係大氣溫度降至露點之下所致。至於其所成者，果為露霜或霧，或雲或雨，或雹或雪，則視其冷卻所在之地點而定。

§ 179. 製冷器 圖 198 示一製冷設備之大概。壓氣機  $C$  將氦  $\text{NH}_3$  或二氧化硫壓入於冷凝器  $A$ ，使之液化，所放出之熱量被器內流通之冷水吸取而去。經過冷凝器後，液態之氦或二氧化硫乃自大



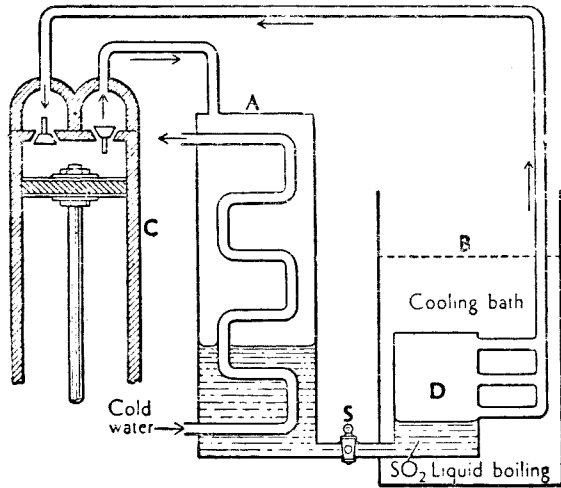


圖 198. 製 冷 器

小可以調節之活門  $S$  流入於汽化管  $D$  中，此中之壓力較低，即行汽化。且自管四圍之鹽水，吸取其所需之汽化熱量。如是在汽化管四圍流通之鹽水，其溫度可降至  $-10^{\circ}\text{C}$ . 左右。此冷鹽水即可用以製冰，或冷卻夏季之房屋，以減低室內溫度。

§ 180. **沸騰** 液體之沸騰，即為一種劇烈之汽化現象。其作用不僅限於液面，即其內部各處，尤其是與容器器壁相接之處，均在同時進行。此等之處皆生氣泡，而上升液面。此等汽泡中之汽壓，視液體之溫度而異，惟至少等於液體本身所受之壓力，否則液體中即或偶有氣泡產生，終必因外壓力之壓縮，而復行凝成液體。故在某一定之溫度，液體之飽和汽壓，適等於外壓力時，液體即行沸騰。例如在空氣中，自由沸騰，即發生於汽壓與大氣壓力相等之時。

故液體之沸點繫乎壓力，在任何溫度下，液體皆可沸騰，只要所加之壓力相當足耳。通常液體之沸點皆指在大氣壓力下而言。下述實驗足以表示沸點與壓力之關係。

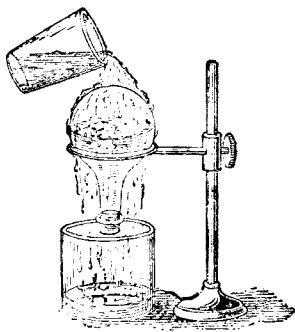


圖 199. 沸點與壓力之關係

盛水於玻璃瓶中，熱之使其沸騰後，緊塞瓶口，而倒置之如圖 199。此時在瓶內上部之水蒸汽乃飽和者，其汽壓即等於大氣壓力；故瓶中水之溫度降至沸點以下時，沸騰立即停止。今若注冷水於瓶頂外，以冷卻之，則瓶中飽和水蒸汽將有一部分凝結為水，而其內之壓力乃驟降至大氣壓以下，惟此時在瓶中之水，其溫度下降不及壓力降落之速，故瓶中之水復行沸騰，至其壓力復達到飽和蒸汽

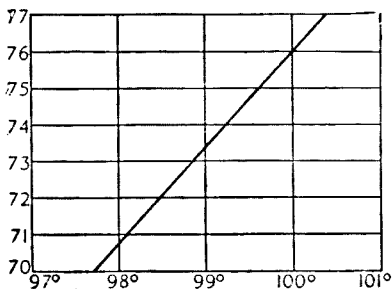


圖 200. 水之沸點

壓力之值而後止。

在大氣壓力附近，水之沸點有如圖 200 所示。在其他較廣之壓力範圍，見 §176 飽和水蒸汽汽壓(圖 196 及表 16)。

大氣壓力隨高度而遞減，故水之沸點，亦因之而下降。例如在昆明海拔為 1,900 米，大氣壓力約為 60 厘米汞高，水之沸點約為 93.5°C。耳。在高山之巔，氣壓較低，沸點亦較低，故常有不能將食物煮熟之患。欲食物之易熟，常緊蓋烹飪之鍋，其目的亦係藉以增加鍋內之汽壓，使鍋內沸騰之溫度，可達較高之值而已。

§ 181. 溶液之汽化與凝固 若液體中有雜質，而不溶解者，則其沸騰與凝固，均不受雜質之影響。若雜質溶解於液中，則成溶液 (solution)。液體稱溶劑 (solvent)，溶解其內之物質稱溶質 (solute)。

溶劑與溶質分子間之引力較大，故其分子較難掙脫，逸去液面。在同一溫度下，溶液之飽和汽壓較溶劑之純液者為小，故溶液之沸點亦較高。如鹽在水之飽和溶液，其沸點在大氣壓力下，為  $108.4^{\circ}\text{C}$ 。溶液沸點之上升，與其濃度成正比；若溶質呈游離現象 (dissociation)，即其分子分成游子 (ions)，則沸點之上升更甚。

同理，溶液之凝固點，較溶劑之純液為低。故鹽與水混合，可達  $-22^{\circ}\text{C}$  之低溫。

液態合金亦即是一種溶液，故合金之融點，常較其所含成分之純金屬為低 (見前 § 170)。

當溶液沸騰時，首先汽化者為溶劑，倘復將其冷卻而凝結，則得較前純淨之液體，此種處理，稱為蒸餾 (distillation)。例如鹽之水溶液沸騰時，汽化者僅為水，導水蒸汽經螺旋管而冷卻之，即凝為純潔之蒸餾水。將蒸餾水重行蒸餾一次，更為純潔，稱重蒸餾水。

數種液體互相混合後，每於沸騰時，其沸點最低之一種，在蒸汽中成分特多。蒸汽遇冷而凝結後，在蒸餾液中，仍以上述之一種成分為最富。經數次蒸餾後，液中幾可僅存此種唯一之成分，即所謂分餾法 (fractional distillation) 也。

§ 182. 昇華 多種之固體，可不必先融解成為液體，即能直接汽化。此等物體汽化後，如冷卻之，則亦不必先凝為液，而可直接成為固體。此種現象，稱為昇華 (sublimation)。

嚴寒之日，當溫度在  $0^{\circ}\text{C}$ . 之下時，雪未融解為水，亦可漸消失而為水蒸汽，即係此故。他如碘，硫磺及樟腦等物，均可在尋常之溫度與壓力下昇華。

昇華時，固體對於其蒸汽亦有其一定之平衡壓力。在  $0^{\circ}\text{C}$ . 時，冰與水蒸汽之平衡壓力為 4.6 毫米汞高。圖 201 之曲線，表示冰與水蒸汽之平衡壓力對於溫度之關係。此種曲線，稱為昇華曲線 (sublimation curve)。

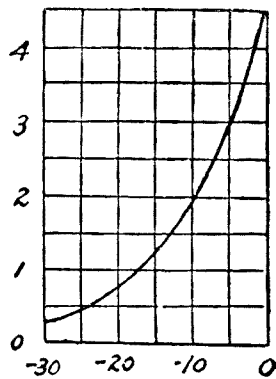


圖 201.

固體昇華時，每克所需之熱量，稱為昇華熱 (heat of sublimation)。

§ 183. 三態平衡點 當物質之二態平衡時，如固態與液態，液態與氣態，及氣態與固態，其溫度與所受之壓力，必滿足前此 § 172, § 176 及 § 182 各節所分述之情形。

今將融解曲線 (F)，汽化曲線 (V) 及昇華曲線 (S) 三者同畫在圖 202 上。曲線上各點代表二態之平衡，不在曲線上者表示為何？

曲線 (V) 上 B 點代表水與水蒸汽在溫度  $t$ ，壓力  $p$  時之平衡。若保持溫度不變，而增加壓

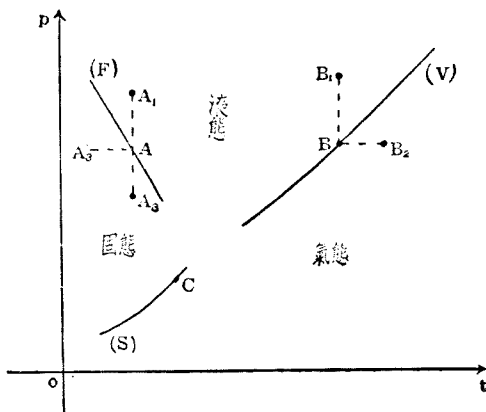


圖 202.

力，則水蒸汽凝結成水， $B$  點移至  $B_1$ ，故  $B_1$  表示液態。反之，若壓力不變，增加溫度，則水汽化成水蒸汽， $B$  點移至  $B_2$ ，故  $B_2$  表示氣態。即在汽化曲線之上面各點，代表液態，其下面各點代表氣態。

增加冰 ( $A$  點) 之壓力，則冰點下降，若保持溫度不變，冰融為水 ( $A_1$  點)。反之，若壓力減小而溫度不變 ( $A_3$  點)，或壓力不變而溫度減低 ( $A_3'$ )，均將有更多之水凍結為冰。故在融解曲線之上面各點代表液態，而在其下面者代表固態。

同理，在昇華曲線 ( $S$ ) 之上面各點代表固態，在其下面者代表氣態。

故 ( $F$ )、( $V$ ) 及 ( $S$ ) 三曲線，將圖分成三區域：在 ( $F$ ) 與 ( $V$ ) 間之各點代表液態；在 ( $V$ ) 與 ( $S$ ) 間之各點代表氣態；而在 ( $S$ ) 與 ( $F$ ) 間之各點代表固態。

又此 ( $F$ )、( $V$ ) 及 ( $S$ ) 三曲線，必同交於一點  $T$  (圖 203)。因苟不若是，例如  $VT$  及  $FT$  兩曲線如虛線所示，則在此三曲線所包圍之區域內各點，例如  $a$  點，其所指示之狀態，自各曲線言之，將不相同。自融解曲線言之， $a$  點之狀態係固體，而自汽化曲線言之，則為液體，此則顯然不可能者也。

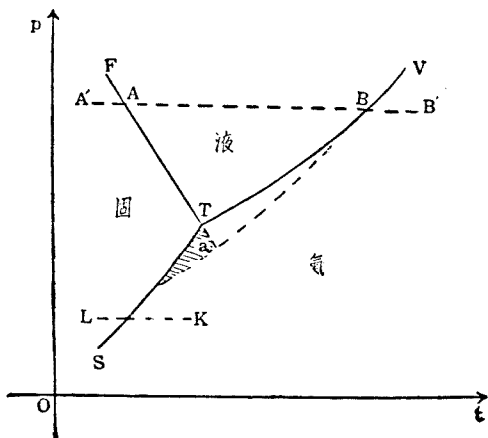


圖 203. 三態點

融解，汽化及昇華三曲線，既各代表二態平衡時之壓力與溫度之關係，故在此三曲線相交之點，其狀態必為固，液，汽三態，同時並存，互相平衡。換言之，當三態平衡時，物質之溫度及壓力，必為此交點所指示之值，各有一定。此交點，稱為三態平衡點 (triple point)。

水之三態點 (即冰，冰及水蒸汽同時存在) 之壓力，為 4.6 毫米汞高，溫度為  $+0.0072^{\circ}\text{C}$ 。

茲為更求確切明瞭此等曲線表示物態變化起見，試就物體所受之壓力較大及較小於三態平衡點所指示者二事，分別討論其受熱之情形如下：

設圖 203 中  $A'$  點，表某物質之原始狀態，此時物體為固態。加熱而維持其壓力不變，則溫度漸增，至達融點時 (即融解曲線上之  $A$  點)，物體乃開始融解，此時物體之溫度不變。迨固體完全融解成液後，其溫度乃復增，至達沸點時 (即汽化曲線上之  $B$  點)，物體乃開始沸騰，此時之溫度亦不變，直待至液體完全汽化後，蒸汽之溫度繼續增加，而成過熱蒸汽。

設物體原始之壓力及溫度，為圖中  $L$  點所示者，如保持其壓力不變，而加熱，則此固體之溫度漸增，及其達到  $M$  點時，乃開始昇華為氣。在此變化過程中，自無融解與沸騰現象。

§ 184. 氣體之液化 自圖 202 或 203 觀之，不變壓力而繼續加熱於液體，可使之汽化；又若不變其溫度，而減小壓力，亦可使液體汽化。反之，如欲使物體自汽態變為液態，或冷卻之，或增加其壓力，似均可能。但實驗顯示，欲藉增加壓力以液化氣體，其溫度首須冷至某一定值之下。各種氣體，各有其一定之溫度；高於此時，雖加任何

壓力，亦不能使其液化，必須低於此溫度之後，液化方為可能。稱此溫度，為**臨界溫度** (critical temperature)。在臨界溫度時，液化氣體所需之壓力，稱為**臨界壓力** (critical pressure)。在臨界壓力及臨界溫度下，單位質量物體所占之容積，稱為**臨界比容** (critical specific volume)。

氣體液化有臨界溫度之存在，從分子之運動說觀之，極為合理。蓋氣體液化問題乃在設法增強其分子間互相吸引之力，使其密聚而合於液體特具之狀態。氣體之分子間固亦有其互引之力，其所以不克自行化成液體者，則因溫度稍高時，氣體分子之熱運動甚為劇烈，足以阻止分子之互相接近而有餘也。故必設法減少分子之動能，小至某一程度(即減低溫度至臨界溫度)之後，加以壓力，分子始能就範也。

遵循波義耳定律之氣體，溫度不變時，其壓力與比容之關係，可以雙曲線 (hyperbola) 表示之。每一溫度有一曲線，即所謂恆溫線

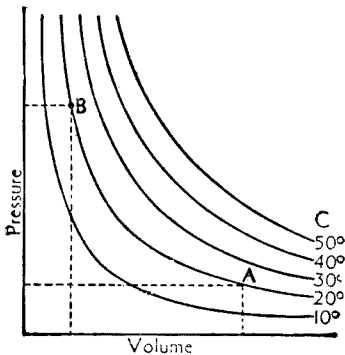


圖 204. 恆溫線

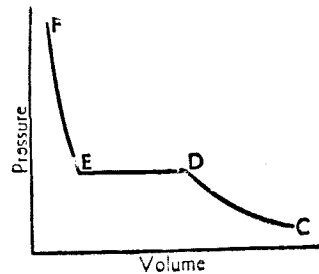


圖 205. 蒸汽之壓容圖

(isothermals) 也, 如圖 204. 氣體之易於液化者, 例如水蒸汽, 則其壓—容曲線有如圖 205 所示, 當液化過程中 (即圖中之  $DE$  線段), 壓力不變, 而體積減小.

二氧化碳之恆溫線有如圖 206 中所示. 二氧化碳之臨界溫度為  $31.6\text{ C.}$  臨界溫度之恆溫線, 稱為臨界恆溫線 (critical isothermal), 至  $EHD$  虛線, 表融解時及汽化時之壓力與比容之關係.  $EH$  段曲線稱為液態曲線 (liquid line);  $HD$  段曲線稱為飽和曲線 (saturation line).

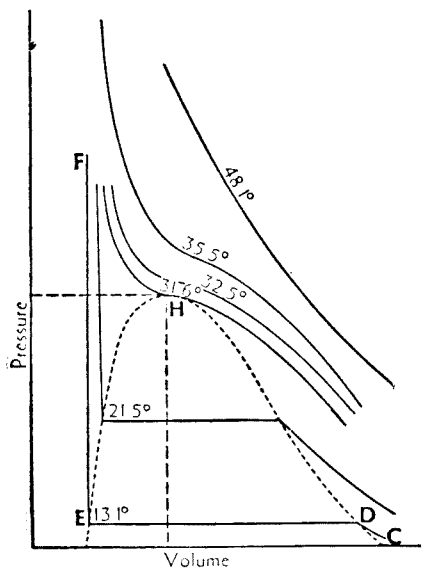


圖 206. 二氧化碳之壓容圖

在此壓容圖中, 液態, 飽和及臨界恆溫線三者將圖分成四區域: (1) 在液態及臨界恆溫線之左各點, 所代表者為液態情形; (2) 在液態及飽和曲線之間各點, 乃代表液與汽兩態同時並存之情形, 因液體汽化時與一定液度相對應之汽壓有一定之值, 故在此區域內之恆溫線, 係與橫軸平行之直線, 如圖中之  $ED$  線; (3) 在飽和曲線之右, 臨界恆溫線之左各點, 所代表者即通常所稱為蒸汽; (4) 在臨界恆溫線之右各點, 所代表之情形則為氣態. 離臨界愈遠之恆溫線, 愈近雙曲線.

設維持溫度於  $21.5^{\circ}\text{C.}$ , 使之不變, 而壓縮二氧化碳, 將有下述之



過程。其始，減小容積之影響，不過使二氧化碳蒸汽之壓力逐漸增大；至壓力達到 59 大氣壓時，液態之二氧化碳立將呈現，此乃液態開始存在之時，故所示之壓力即所謂飽和汽壓是也。過此之後，如繼續減小其容積，則多量之蒸汽將被液化。迨全部蒸汽皆化為液體後，如欲再減小其容積，則需頗大之壓力，故過此之後，恆溫線甚為峻直。

設上段所述之手續，係將溫度維持於較高之值而行之，則開始液化之壓力較前為高，而開始液化之比容較前為小，惟完全液化後之比容則較前為大。換言之，溫度愈高，則蒸汽開始液化時，與其完全液化後之比容，相差愈小。若溫度適為臨界值，此兩比容之值即相等。倘若溫度較高於臨界值，則氣體將不能被液化矣。

表 19. 臨界溫度壓力及比容

物 質	臨界溫度 ·C.	臨界壓力 (大氣壓)	臨界比容 (厘米 <sup>3</sup> /克)
氫	-239.91	12.80	32
氮	-147.13	33.49	3.22
氧	-118.82	49.713	2.33
空 氣	-140.6	37.2	2.85
水 蒸 汽	374	217.96	3.04
二 氧 化 碳	31.5	72.9	2.2
氨	130	115	

吾人於此願重覆申言者，臨界壓力為在臨界溫度時使氣體液化所需之壓力，氣體液化不必一定要在臨界溫度，液化所在之溫度離臨界值愈低者，則所需之壓力亦愈小，自然亦可用比臨界壓力更高

之壓力來使氣體液化。

氣體所以在室內溫度加以壓力即可液化者，如水蒸汽，其臨界溫度頗高故也。水蒸汽之臨界溫度為  $365^{\circ}\text{C}$ 。

氣體之液化須取決於分子間引力之作用，故氣體在尋常溫度下，僅藉壓力即能液化者，如上述之二氧化碳，其性質必與理想氣體相去頗遠，水蒸汽更無論矣。

若減小液體二氧化碳之壓力（如圖 207，開貯液體二氧化碳之管而令其外流），則以其迅速汽化冷卻之故，一部分即凝為固體二氧化碳。在大氣壓力下，固體二氧化碳之溫度為  $-78^{\circ}.4\text{C}$ 。置少許之固體二氧化碳於手中，則初以手中之熱，使其略有汽化，此二氧化碳汽即隔離固體二氧化碳與手掌之間。若緊握之，則其炙手有如熾熱之鐵。以醇精與固體二氧化碳混合，則與其他物體之接觸較佳，置汞其中，即成固體。但固體二氧化碳與醇精之混合物，在大氣壓力下，其溫度仍為  $-78^{\circ}.4\text{C}$ ；若抽去混合物上之空氣，則可達  $-116^{\circ}\text{C}$  之低溫。

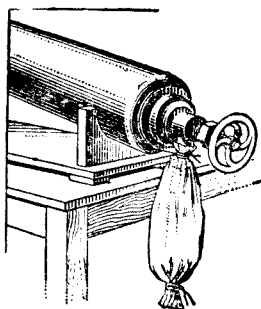


圖 207. 固體二氧化碳

§ 185. 空氣之液化 按上所述，可知欲液化各種近於理想氣體之氣體，首在如何使之冷卻達於甚低之臨界溫度以下。今日各地，如上海天津，設有專廠，大規模製造液體空氣，以供應用。空氣之液化，普通多用林得(Linde)或克勞特(Claude)法。法中所用使空氣冷卻至臨界溫度以下之原理，均係基於氣體自由膨脹，而溫度下降之事實。

空氣先經洗塔，以除去其中所含之二氧化碳等。P 為壓縮機(圖208甲)，將空氣壓縮約至200大氣壓，因其受壓，溫度增高，乃將空氣導過冷凝器 B，以除去被壓時所產生之熱量。再導入螺旋管 T，空氣通過可調節之活栓 V 時，立即膨脹，而自行冷卻，以至於臨界溫度  $-140.6^{\circ}\text{C}$ 。以下。其一部分空氣已因此而液化者，即集於 L 中。其尚為氣體之冷空氣，則經過逆流管而

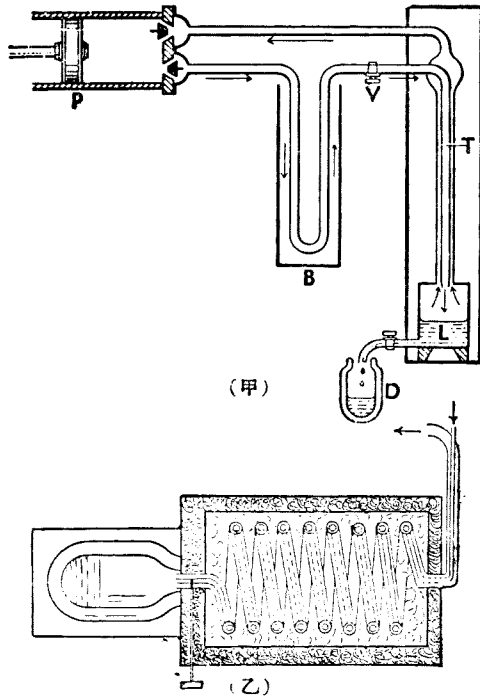


圖 208. 空氣之液化

回到壓縮器中。逆流管亦螺旋形(圖208乙)，包圍於螺旋管 T 之外，使新來在 T 中之空氣，更行冷卻而液化也。

既得液體空氣，可使氫氣液化；既得液體氫氣，可使氦氣液化；此等工作以 H. Kamerlingh Onnes 之力為多。液態氫之溫度為  $-268^{\circ}.9\text{C}$ ，即絕對溫度  $4^{\circ}.3$ 。若任其突然汽化，直可降至  $0^{\circ}.6$  絕對溫度。此時在液體氫中，已可見結晶之固體氫出現。其他一切氣體，在較高溫度時，早已凝成固體矣。此  $0^{\circ}.6$  之絕對溫度，為現在吾人

所能達到之最低溫度，其與絕對零度雖相去甚近，但絕對零度為不可達之理想境界而已。

達到如是降低之溫度時，極多數之物體在各方面咸顯特殊之情形，例如比熱電之超導性等。

因氮之沸點 $-195^{\circ}\text{C}$ ，較低於氧 $-183^{\circ}\text{C}$ 。故在液體空氣中，氮之沸騰而脫離液體恆較氧為速。液體空氣稍置片時，其留於液中者大部分將皆為氧。工業上所用鉅量之氧氣即由液體空氣蒸發而來。

在液體空氣之溫度時，水銀已早凝為固體，且可受錘擊；橡皮變為堅脆，鉛絲有高度之彈性。碳在液體空氣之溫度時，能吸收多量之氣體，於求高度真空有甚大之助益(圖 209)。

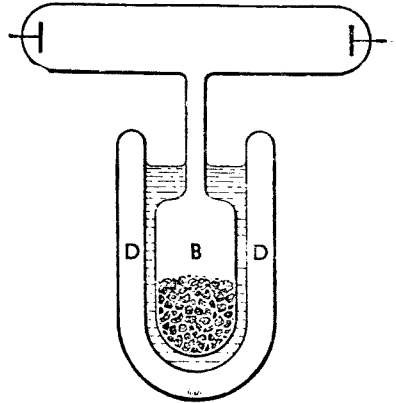


圖 209.

## 習題二十五

1. 當壓力為每方吋 2 磅時，水之沸點為  $126^{\circ}\text{F}$ ，汽化熱為每磅 1,021 英熱單位。今將溫度為  $70^{\circ}\text{F}$  之水 10 磅加熱，在每方吋 2 磅之壓力下，汽化完盡。求所需之熱量。

2. 一瓶中貯 2,000 克之水，瓶之水當量為 40 克，瓶及水之溫度為  $25^{\circ}\text{C}$ ，置於真空中，任其蒸發。問此中之水蒸發若干克時，瓶之溫度降至  $20^{\circ}\text{C}$ ？

3. 室內溫度為  $30^{\circ}\text{C}$ . 時, 露點為  $10^{\circ}\text{C}$ ., 求室中之相對溼度.
4. 設將固體之水銀 100 克, 自  $-39^{\circ}\text{C}$ . 融解起, 再將其汽化, 使其溫度達  $350^{\circ}\text{C}$ ., 求所需之熱量.
5. 地面上積雪 10 厘米, 設其平均密度為  $0.2$  克/厘米<sup>3</sup>, 溫度為  $0^{\circ}\text{C}$ ., 問須下若干厘米之雨, 方足以將雪完全融解? 雨之溫度為  $10^{\circ}\text{C}$ ..
6. 有 16 克之鐵塊, 燒紅後, 投入於冰塊之空隙中, 冰因之融解 12 克. 求鐵塊之溫度.
7. 一容器中之下部儲水, 上部為空氣與飽和水蒸汽混合存在, 氣壓為 770 毫米汞高. 今若保持容器之溫度為  $20^{\circ}\text{C}$ ., 而不變, 將容器上部之容積減小一半, 求容器內之氣壓.
8. 一圓筒形之容器中, 有空氣及少許之水, 以活塞密閉之. 活塞與筒壁間, 毫無摩擦阻力. 當其溫度自  $10^{\circ}\text{C}$ ., 升至  $48^{\circ}\text{C}$ ., 時, 活塞即向外移動, 而其容積因之增加原來之四分之一. 活塞外之大氣壓為 76 厘米汞高, 始終維持常定.  $10^{\circ}\text{C}$ . 時水之飽和汽壓為 9.2 毫米汞高, 試求  $48^{\circ}\text{C}$ . 時之氣壓.
9. 有甲乙兩氣壓表, 並置一處, 溫度相等. 甲表之水銀柱頂上略有少許空氣混入, 故其示度略較乙表為低. 今以二種液體分別導入此二氣壓表中, 其水銀柱頂上均留有少許液體, 歷久未見蒸發完盡, 二表之示度, 遂降至同值. 問何種液體沸點較高? 試言其故.
10. 氮之汽化熱約為每克 341 卡. 設有 1,000 仟克之水, 其原始溫度為  $10^{\circ}\text{C}$ .; 今用  $0^{\circ}\text{C}$ . 之氮以製 1,000 仟克之冰, 冰之溫度亦為  $0^{\circ}\text{C}$ ., 問需用氮多少?

11. 1 克之食鹽溶化於 1 升之水，沸點為  $100.018^{\circ}\text{C}$ ，今有鹽水之沸點為  $100.1^{\circ}\text{C}$ ，求其濃度。

12. 罐中盛水，上部留有乾燥之空氣，於  $20^{\circ}\text{C}$  時密封之，今置沸水中消毒，求罐內之壓力，問罐內之水是否沸騰？

13. 設將溫度為  $21.5^{\circ}\text{C}$  之二氧化碳，封閉於管內，維持其容積不變而熱之，今欲其適通過臨界狀態，問管中液態與氣態之二氧化碳之比，約為何值？

14. 自范德瓦耳氣態方程式：

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT,$$

求證氣體之臨界值為：

$$T_c = \frac{8a}{27Rb},$$

$$P_c = \frac{a}{27b^2},$$

$$V_c = 3b.$$

## 第二十二章 熱之傳遞

熱自一處傳遞於他處，其法有三：傳導，對流與輻射是也。溫度較高之物體與溫度較低者相接觸，熱體溫度漸次降低，而冷體之溫度漸次增高，至兩者之溫度相同而止，此為吾人所常見之傳熱方法，稱為傳導 (conduction)。物體之溫度增高，其密度因而減小，故較熱之流體常上升，而較冷者則下降，因此等分子之移動，而將其所帶之熱量，自物體內之某部，傳遞至於他部分，稱為對流 (convection)。對流僅能在流體內發生。傳導與對流均藉物質為傳熱之媒介；此外，熱可不藉物質，而超越空間，以傳遞遠方，例如太陽所發射之熱，此種傳熱法，稱為輻射 (radiation)。

熱之傳遞方法，雖有上述傳導，對流及輻射三種，然在實際問題中，此三種方法，或同時進行，或先後進行，或一法傳遞之熱較大於其他二法，則視實際之情形而異。

§ 186. 傳導 熱之傳導，純為一種分子之作用。若物體某處之溫度，較其隣接之他處為高，則溫度較高處之分子，運動較烈，頻與其周圍之分子碰撞，而授其一部分之動能於隣接之分子，由此逐步傳導，直至各處之溫度，亦即各處分子之動能平均值，均勻而後止。故溫度均勻之物體，其本身上無熱之傳導現象。熱之傳導，係由於溫度有差之故。以形式言，其與流體受壓力差之作用而流動者，頗相類

似。惟熱量傳導時，流動者非為物質，而為能量。

熱之傳導沿溫度下降之方向。每秒鐘內，流過截面面積  $s$  之熱量為(圖 210)

$$H = \lambda s \frac{\Delta t}{\Delta l},$$

式中  $\Delta t$  為截面  $s$  與其另一隣近截面之溫度差，兩截面間相距  $\Delta l$ ； $\lambda$  為比例常數，稱

為導熱係數 (coefficient of conductivity)，此即所謂富禮哀定律 (Fourrier's law) 也。 $\frac{\Delta t}{\Delta l}$  稱為溫度遞降率 (gradient of temperature)。

故熱之流量與溫度遞降率成正比。

固體之導熱，可以一金屬棒為例(圖 211)。其一端  $P$  緊接溫池，

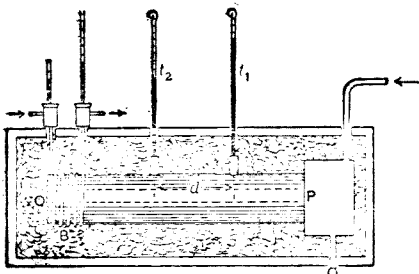


圖 211. 導熱係數之測定

溫池中有熱水或蒸汽常流，溫度為固定者。其他一端  $Q$  有螺旋管圍繞之，管中通以冷水。中插  $t_1$  及  $t_2$  兩溫度計，以測定棒上之溫度遞降率，即  $\frac{t_1 - t_2}{d}$ 。

實驗開始之後不久，熱在棒中之傳導即達穩定狀態。自棒之  $P$  端到  $Q$  端，溫度均勻下降，於是由  $Q$  端螺旋管中每秒鐘所流出之水量及其溫度之增加，即可測定棒之導熱係數。

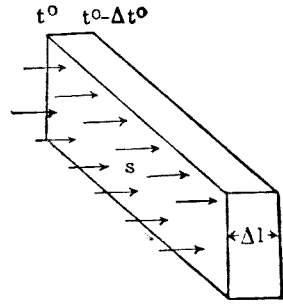


圖 210. 熱之傳導



雖在同一溫度——例如室內溫度——中之物體，吾人每覺其冷熱不一；蓋導熱係數之有不同，以及比熱值之有大小，實為其原因焉。物體之導熱性愈佳，且比熱之值愈大者其每秒鐘由吾人較暖之皮膚奪去之熱量愈多，而皮膚與其接觸之處冷卻亦愈快。故同在室內溫度時，金屬似冷，棉絮似暖。若溫度較高於皮膚，則感覺適得其反；百度之棉絮尚能握於手中，而百度之鐵塊，則炙手不堪忍受須臾。欲賴人體之感覺，以作溫度之數量測定，其不可靠也明矣，此又其一端耳。

概括言之，液體之導熱係數，恆遠小於固體者，氣體之導熱係數，較液體尤小。棉襖皮袍之所以為禦寒善品者，亦以其包藏多量之空氣也。

表 20. 導熱係數 (C. G. S. 單位)

物質	$\lambda$	物質	$\lambda$	物質	$\lambda$
鐵	0.144	三和土	0.0022	酒精	0.00042
黃銅	0.26	木材	0.0003至0.0009	空氣	0.00006
銀	0.97	石棉	0.00035	氫	0.00033
玻璃	0.0024	絲絹	0.0002	氧	0.000056
水	0.0014	棉花	0.0001		

§ 187. 對流 液體與氣體之導熱係數雖微，然在適當之情形下，流體對於傳遞熱量亦頗有效者，則對流作用也。

水與空氣之對流，為吾人所習見者；水之煮沸，烟囱之通風，皆對流之實例。瓶中盛水，置於火上熱之（圖 212），若水中雜以少許細木屑，即可顯出水之對流情形。瓶底近火之水，受熱膨脹而上升，其他部分冷而密度大者移來補充，遂成對流。

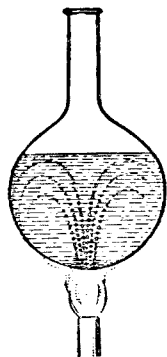


圖 212. 水之對流

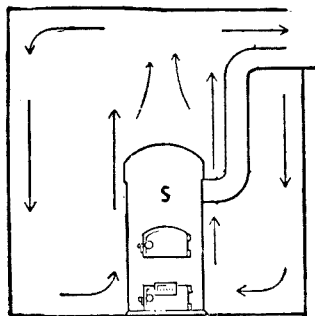


圖 213. 空氣之對流

冬日爐火溫室，亦賴空氣之對流作用。爐之周圍與爐接觸之空氣，由傳導而得熱，即起對流，以散播熱量於全室（圖 213）。

大氣中，空氣之對流而成風，海洋中，水之對流而成寒流及熱流，乃對流之大規模者。

人類之衣服，禽獸之羽毛，皆用以保持體溫者。考其所以能禦寒之故，皆因此等物質足以阻止身體周圍空氣之對流，至於其為非良導熱體，尚為次要之原因也。

熱之傳導與對流皆賴物質，故在真空中即不能發生。基於此理，保溫瓶（俗稱熱水瓶）之雙層玻璃圍壁間，咸抽去空氣。故可保熱使不散失，保溫亦可以保冷。

§ 188. 輻射 熱體附近雖無物質，亦恆散播熱量於其四周，此種傳熱現象，顯非傳導與對流所致。例如太陽與地球之間，有極大之距離毫無物質存在，足以傳導熱量或發生對流作用，而地球面上全部之熱量，可說來自太陽。此種超越真空而傳遞熱量之現象，即為輻射。

置兩物體  $A$  與  $B$  於真空中，縱令兩者不相接觸，然因輻射之故，較熱之物體  $A$ ，其溫度亦將漸減，而較冷之物體  $B$ ，其溫度則將漸增，以至兩者之溫度相同而後止。在此種情形之下，通常稱為  $A$  向  $B$  輻射熱量。

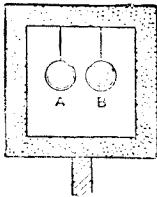


圖 214.

今若假設不改變  $B$  之原有溫度，而令  $A$  之原有溫度較  $B$  為低，則吾人所察見之結果，將為  $B$  向  $A$  輻射熱量。惟此時  $B$  之情形，固仍無異於前，是以知在前此之情形下， $B$  亦輻射其熱量於  $A$ ，惟其所射於  $A$  之熱量，不及  $A$  向  $B$  所發射者之多，故吾人所見結果，乃為  $A$  向  $B$  發射熱量耳。由是觀之，輻射非一單

向手續，乃一互換之現象，是即拍萊福脫 (Prévost) 所倡之輻射互換說 (exchange of radiation) 也。

故當輻射達平衡狀態時，各體並未停止其輻射，不過其所射出之熱量，與其收入之熱量適相等而已。

§ 189. 黑體之輻射 一切物體，無論冷熱，恆輻射其熱量。物體輻射之熱量，則隨其溫度之增高而加大。溫度愈高，輻射愈烈。尋常物體輻射之熱量，除與其溫度有關外，又視物體之表面情形而異。黑色物體之輻射與吸收熱量之本領，較他色物體為佳，此為尋常經驗所知之事實，可由圖 215 所示之儀器以表明之。

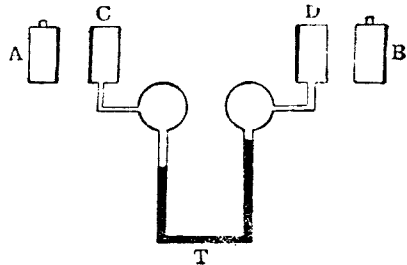


圖 215.

$A$  與  $B$  為二相同之圓形扁匣，用金屬製成，中可盛以

熱水，其一面塗成黑色，他面則甚光亮。 $C$ 及 $D$ 之結構，與 $A$ 及 $B$ 相同。今若置 $C$ 及 $D$ 於一示差空氣溫度計(differential air thermometer)  $T$ 之兩端，而令 $A$ 之黑面對 $C$ 之黑面， $B$ 之亮面對 $D$ 之亮面，即可知自 $A$ 輻射於 $C$ 之熱量，較自 $B$ 輻射於 $D$ 者為多，因 $C$ 之溫度較 $D$ 之溫度為高，此可由 $T$ 中兩液柱之高之差見之。

黑體之輻射，與吸收熱量之本領，既較他色物體為佳；又一切溫度相等之黑體，其輻射情形完全相同，故可視黑體為一標準之輻射物體。斯底芬(Stefan)在1883年曾作實驗，以考究完全黑體(perfectly black body)所輻射之熱量，與其溫度之關係，其結果指示，完全黑體每單位面積在每秒鐘內，所輻射之熱量 $U$ ，係與其絕對溫度之四次乘冪成正比，即

$$U = \sigma T^4,$$

式中之比例常數 $\sigma$ ，約等於 $5.7 \times 10^{-5}$  爾格/度<sup>4</sup>—厘米<sup>2</sup>秒，稱為斯底芬—波次曼常數(Stefan-Boltzmann constant)。

由此定律觀之，可見溫度 $T_1$ 之黑體，與溫度為 $T_2$ 之黑體，互相輻射時，溫度較高之黑體，其每單位面積在每秒鐘內，由輻射而失去之熱量，為：

$$U = \sigma(T_1^4 - T_2^4).$$

嚴格言之，此定律僅能適用於完全之黑體，惟尋常物體之輻射，亦與此近似，但 $\sigma$ 之值稍異耳。

又若兩物體之溫度 $T_1$ 及 $T_2$ 均頗高，而其相差 $T_1 - T_2$ 則甚微，在此情形下，有：

$$U = \sigma(T_1 - T_2)(T_1^3 + T_1^2 T_2 + T_1 T_2^2 + T_2^3) \cong 4\sigma T_2^3 (T_1 - T_2).$$

如  $T_1$  爲物體之溫度,  $T_2$  爲物體所在之周圍之溫度而不變者, 則有

$$U = k(T_1 - T_2),$$

式中  $k$  爲一常數, 此即牛頓之冷卻定律 (law of cooling) 也。

實驗證明, 在溫度相差不超過  $20^\circ$  時, 包括空氣之輻射, 對流及傳導諸原因, 物體失去之熱量常可以牛頓冷卻定律表示之, 故吾人恆用以爲量熱器等失熱之改正。

## 習 題 二 十 六

1. 有一黃銅桿長 1 米, 截面積爲 8 厘米<sup>2</sup>, 其一端置在  $100^\circ\text{C}$ . 之水蒸汽中, 他端則與冰接觸, 全桿以極良之絕熱體包裹之. 問在 10 分鐘內冰被融解多少克?

2. 設人之皮膚之溫度爲  $32^\circ\text{C}$ ., 外界之溫度爲  $5^\circ\text{C}$ .. 問當着厚爲 4 毫米之棉衣時人體每平方米所失去之熱量, 每分鐘多少?

3. 試自下述之數字, 計算維持房內溫度較房外高  $50^\circ\text{F}$ . 時, 每日應燃燒若干磅之煤:

煤之燃燒熱爲每磅 14,000 英熱單位;

爐之效率爲 60%;

每英熱單位可使房內空氣溫度增高  $40^\circ\text{F}$ .;

房長 50 呎, 寬 30 呎, 高 25 呎;

屋頂由石板瓦蓋成, 牆上共有 500 方呎之玻璃窗, 門之面積則共爲 100 方呎, 地爲磚地;

當房內外溫度相差爲  $1^\circ\text{F}$ . 時各部分每方呎所傳導之熱量, 以英熱單位計之, 約爲每小時:

磚牆	3;
玻璃窗	12;
門	4.5;
石板瓦	5;
磚地	4.8;

因關閉窗門而漏失之熱量，其效果與將房內之空氣，每小時完全更換二次相同。

4. 設有一熔冶電爐，旁鑿一小穴，面積為  $1.2$  厘米<sup>2</sup>。爐由小穴向外之輻射，可視為完全黑體。今於小穴外置  $100$  克之水，以吸收爐之輻射熱，則水之溫度每分鐘增高  $13^{\circ}\text{C}$ 。求電爐之溫度。

5. 某次作量熱實驗時，室溫為  $18^{\circ}\text{C}$ 。量熱器之溫度為  $9.6^{\circ}\text{C}$ ，而在  $5$  分鐘內，其溫度增至  $10^{\circ}\text{C}$ 。此時乃將熱量輸入於量熱器中，其溫度自  $10^{\circ}\text{C}$ ，在  $10$  分鐘內，均勻的增至  $35.5^{\circ}\text{C}$ 。既達此溫度，乃終止加熱。求輸入於量熱器之熱量。量熱器中之水及其水當量共為  $500$  克，問加熱停止之後  $10$  分鐘，量熱器之溫度為何？

## 第二十三章 熱 機

將熱變化為功之機器，統稱熱機(heat engine)，可分為蒸汽機(steam engine)與內燃機(internal combustion engine)兩種。熱機之熱量皆取自各種燃料。蒸汽機先將燃料所儲之化學能量變為蒸汽之熱量，然後再變為功；至於內燃機，則係直接將燃料置於機內而燃燒之。本章將敘述各種熱機結構之大概，及其動作之原理。

§ 190. 往復蒸汽機 現代往復蒸汽機(reciprocating steam engine)，乃經多數發明者之改良，始達今日完善之形式。十八世紀初葉，已有此機出現，效率極低，經瓦特(James Watt, 1736—1819)加以改進後，用途日廣，故言蒸汽機者多稱瓦特為鼻祖。

圖 216 表示往復蒸汽機之主要部分，今略言其動作情形。汽鍋  $B$  中所生之水蒸汽，自  $S$  管流入蒸汽房(steam chamber)，然後由過道  $N$  進機筒(cylinder)  $C$  之右端中。在此端中，蒸汽之壓力推動活塞  $P$ ，使其向筒之左方移動。活塞  $P$  移動時，與活塞連接之桿(connecting rod)  $R$  可使機軸(shaft)  $A$  轉動；如是在機軸上之偏心輪(eccentric)  $K$  (圖 217)亦隨之轉動，而牽動與  $K$  連接之桿  $R'$ ，並使滑動活門(sliding valve)  $V$  向左右移動。此活門  $V$  之位置及其移動之方向，適足以使活塞  $P$  在筒內極右端時， $N$  過道漸露開，而與蒸汽房通聯，同時在筒左端之  $M$  過道，則與排氣房(exhaust chamber)

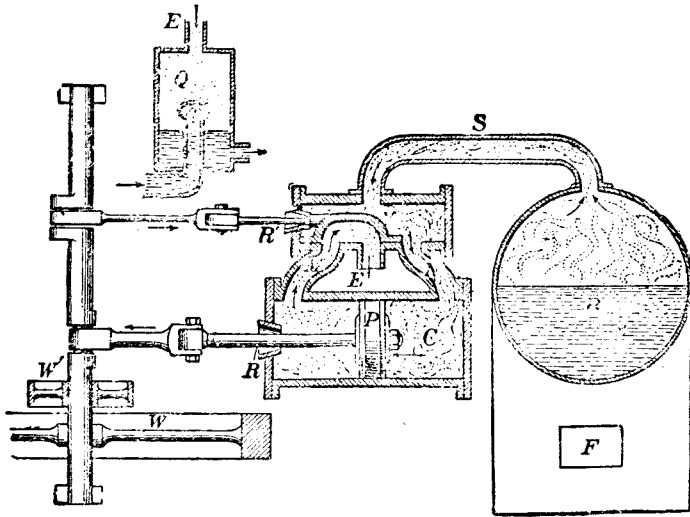


圖 216. 往復蒸汽機

$E$  通聯。當活塞  $P$  自右向左移動， $N$  過道將復完全與蒸汽房隔斷，如是存於  $C$  內之汽蒸，漸次膨脹， $C$  中之壓力則漸次降低。至活塞將行至  $C$  之左端時， $N$  過道乃與排氣房  $E$  通接，此時  $C$  中之壓力，乃降至與排氣房內之壓力相等。

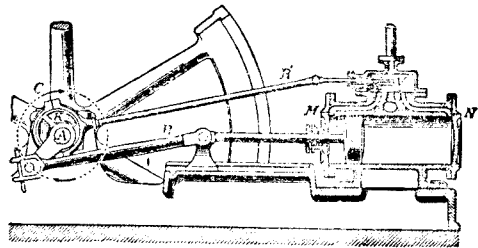


圖 217. 偏心輪

同時， $V$  活門適將  $M$  過道與蒸汽房通聯，故在活塞  $P$  左面之壓力，漸增至與蒸汽房中之壓力相等時， $P$  乃向右移動。此後在  $P$  左面機筒  $C'$  內之情形，與前此所述在其右面機筒  $C$  內之情形相同。活塞如是



往復移動不已。

爲使機器旋轉之速度較爲均勻起見，機軸上均裝備一重大之飛輪 (flywheel)。輪之轉動慣量既大，機軸之速度因而不易變更。此外尚有所謂整速器 (governor) 者，乃以調節輸入筒內蒸汽之多寡，使蒸汽機之速度及其所輸出之功率，適足以做其所擔負之工作。

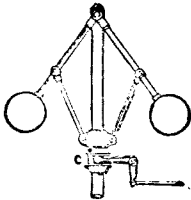


圖 218. 整速器

圖 218 示整速器之一種。當工作擔負減小，機器之速度因而增加時，整速器旋轉速度隨之增加，而其兩球間之展開，因離心力之增強遂亦加大。如是  $C$  桿被推上，而將蒸汽輸送管中之活門關小。反之，若負擔過大時，則  $C$  桿向下移動，而將輸送管中之活門開大，以增多蒸汽之輸入。

往復蒸汽機筒內蒸汽壓力之變更情形，可由壓容圖以表示之。 $C$  筒中蒸汽之體積，係與  $P$  活塞至筒右端之距離成正比。故以此距離  $l$  爲橫坐標，筒中蒸汽壓力  $p$  爲縱坐標，則得如圖 219 所示之曲線。茲就此圖，以說明蒸汽機動作循環之四步於下：

(1) 當  $P$  活塞在右方極端時， $N$  過道開始與蒸汽房通聯，故  $C$  筒中之壓力增至與蒸汽房者相等，如圖中  $A$  點所示，此點稱爲進汽點

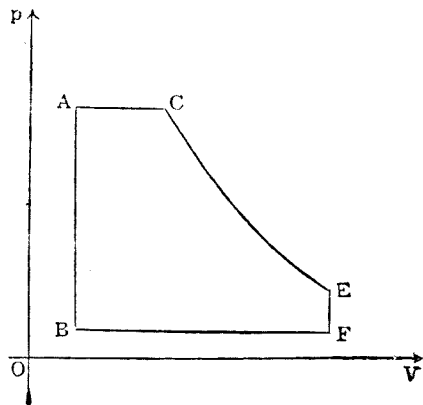


圖 219.

(admission). 此後  $P$  向左移動, 惟  $N$  過道仍繼續與蒸汽房通聯, 故  $C$  中之壓力及溫度均不變. 圖中自  $A$  至  $C$  之直線, 即表示在此時間內之情形, 是為循環之第一步.

(2) 當活塞  $P$  行至距右端為  $AC$  距離時,  $N$  過道始為  $V$  活門所完全遮蓋, 此時蒸汽之供給完全斷絕, 故  $C$  點常稱為斷汽點 (cut-off). 筒內雖無新進之蒸汽, 然已在其中者則漸膨脹, 以推進  $P$  活塞, 使之繼續向左移動. 如機筒之圍壁係不透熱的, 則此時之膨脹為絕熱膨脹. 惟在實際機器中, 此步手續實非完全絕熱膨脹, 是為循環之第二步. 其壓力變化之情形, 可以自  $C$  至  $E$  之曲線表示之.

(3) 當活塞行抵筒之左端時,  $N$  過道乃與排氣房通聯, 故  $C$  筒中之蒸汽, 立即衝入排氣房中, 而  $C$  內之壓力, 乃降落至  $F$  點所示排氣房壓力之值.  $E$  點名為排氣點 (exhaust). 此後  $P$  活塞向右移動將  $C$  中之餘汽悉行驅入排氣房中, 是為循環之第三步. 其壓力變化之情形, 可以  $FB$  直線表示之.

(4) 自排氣房中所放出之蒸汽, 冷凝為水後, 再被唧入於氣鍋中, 而化為蒸汽. 如是當活塞行抵筒之右端時,  $N$  過道復與蒸汽房通聯, 而汽鍋中之蒸汽乃復進入於  $C$  中. 此時情形可以  $BA$  直線表之, 是為循環之第四步. 此第四步乃在汽鍋中完成者.

經過此四步手續後, 循環始可完成. 此後機之動作, 乃重依前述之程序繼續進行. 至於在  $P$  活塞左方之  $C'$  筒內, 其情形亦復相類.

壓容圖中  $ACEFBA$  所包圍之面積, 代表蒸汽機在一循環中所作之功. 此等壓容圖可以一適當之儀器, 名為蒸汽機示功器 (steam engine indicator) 者 (圖 220), 以  $S$  桿插入熱機之機筒中, 機筒內

之壓力使器上活塞上下移動，則筆端  $T$  即在隨熱機往復而旋轉之紙筒上，自動畫出。

**冷凝式蒸汽機** 蒸汽機之功率，視機筒中之平均壓力而定。若欲增大其平均壓力，則有兩法：一為增大汽鍋之蒸汽壓力，又其一則為減小排氣房之壓力。為達到此第二目的起見，蒸汽機之排氣房多與

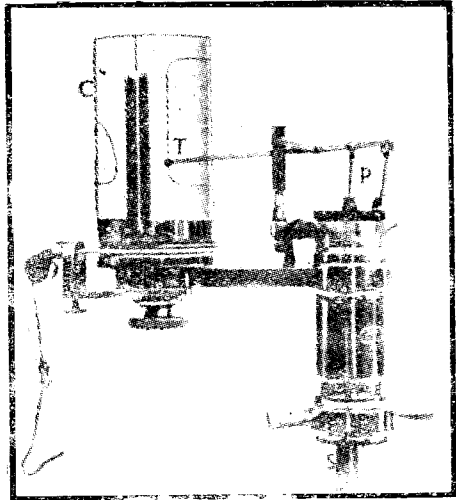


圖 220. 示功器

一冷凝器連接。如是，自機內所排出之蒸汽，在冷凝器中被冷卻為水，容積頓減，故其壓力亦降落。在尋常之冷凝式蒸汽機中，排氣房之壓力僅約為三、四厘米汞高（即每方吋一磅左右），以是反抗活塞移動之壓力較小，而機器之功率遂可較大。

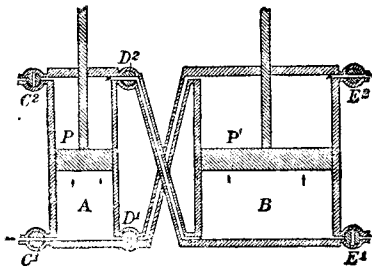


圖 221. 複式機之機筒

**複式蒸汽機** 用單個機筒之蒸汽機，其所排出之蒸汽尚含有多量之熱，未被變化為功。為利用此熱量起見，可將自第一機筒所排出之蒸汽引入於面積較大之另一機筒中，而再讓其膨脹。新式之蒸汽機，常有三個或四個之機筒，

以便蒸汽作三次或四次之膨脹，此等複式蒸汽機(compound engine)之效率，較單式機為大。

● §191. 蒸汽輪機 蒸汽輪機(steam turbine)乃利用蒸汽之膨脹，以直接轉動一個或數個固定於軸上之輪，其原理與風輪水車頗相類似。汽鍋中所生之蒸汽，經輸送管而自數個固定之射氣管(nozzles)射出，射出之高速蒸汽，撞擊輪周之輪葉(blade)，使輪轉動(圖 222)。惟經過第一組之輪葉後，蒸汽尚含有多量有用之熱，故實際之蒸汽輪機均有多組之輪葉。此等輪葉，乃由固定者與可轉動者相間裝置而成(圖 223)。固定輪葉之功用，乃以節制蒸汽射發之方向，使可動之輪葉以最佳之效率向同一方向轉動。

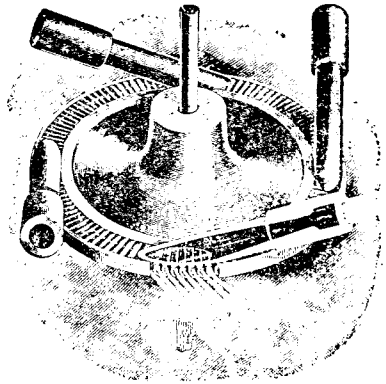


圖 222. 蒸汽輪機

蒸汽輪機為較近之發明，與往復蒸汽機相比較，有下列之優點：

- (1) 輪機係直接轉動，往復機則先有往復之移動，而後變成轉動，故輪機之轉動較為平穩，而無須極堅固之基地；
- (2) 輪機所占之地位較小；
- (3) 輪機之效率較大；
- (4) 輪機之速度可較高。

因上述各種優點，今日較大之動力設備多採用蒸汽輪機。直接聯接於發電機之鉅大輪機，其輸出之功率，每有達數十萬仟瓦者。

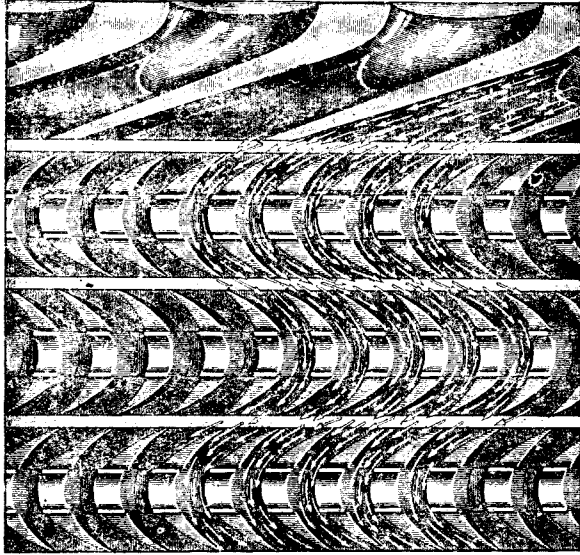


圖 213. 蒸汽輪機之輪葉

§ 192. 內燃機 近半世紀來，內燃機對於吾人之日常生活，亦占有極重要之位置。街上之汽車，空中之飛機，皆為此種熱機。其動作之原理，先將液體燃料(汽油或煤油)灑散為細點，與適當容量之空氣混合，成為爆炸混合品(explosive mixture)，然後引之入於內燃機筒中，而燃燒之。此種混合氣體爆炸之後，壓力激增，遂迫機筒中之活塞移動。活塞之往復移動，乃由相連之桿傳遞於曲柄(crank)，而使機軸轉動。

內燃機之動作循環，亦由四步手續完成：(1)設機已轉動，活塞方自左向右移動(圖 224a)，此時進氣之活門 *I* 被軸上之偏輪(cam)作用而開，於是爆炸混合氣體乃被吸入於機筒內。自活塞在近於極

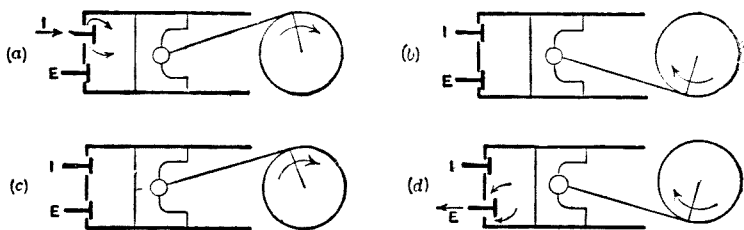


圖 224. 內燃機之動作

左位置始，迄其移動至幾達極右位置之時止，機筒中之壓力幾全不變，是為第一步。其情形可以壓容圖(圖 225)中  $AB$  直線表之。(2) 活塞既抵右端，活門  $I$  乃關閉；當其回向左方時，留存於筒內之混合氣體乃被壓縮於筒左端，是為第二步(圖 224 b)。在此壓縮期間，機筒內之壓力，乃如  $BC$  曲線所示者而增加。(3) 當活塞將行抵筒之左端時，即有火花超越筒內之二電極，使氣體爆炸，筒內壓力因以激增，至  $D$  點所示之值。此後氣體遂膨脹，而迫活塞復向右方移動。在此時間內，機筒中之壓力如  $DE$  曲線而減小，是為循環之第三步。(4) 當活塞行抵機筒之右端時，排氣活門  $E$  乃由適當之機件所開啟，故活塞回向左移動時，筒內剩餘之氣乃被排出，是為第四步。其情形可以  $EF$  線表之。活塞將行抵左端

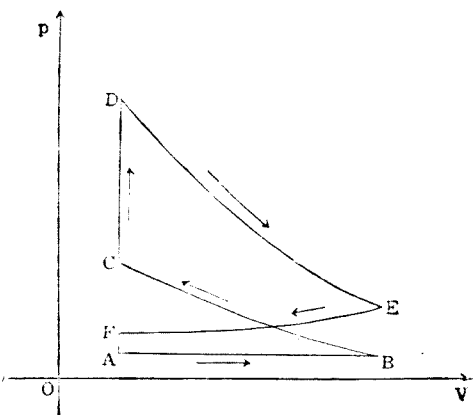


圖 225.

時，*E* 活門即已關閉，而筒內情形乃回復到第一步將開始時之狀況。此後各步重覆繼續進行。

自上述之動作程序觀之，爆炸氣體僅在第三步之短時間內，將其能量送於機器；在其他三部之時間內，機器之轉動完全藉機軸上飛輪所積之動能，以維持其速度。欲求轉動之均勻，故內燃機之飛輪特別重大(圖 226)。

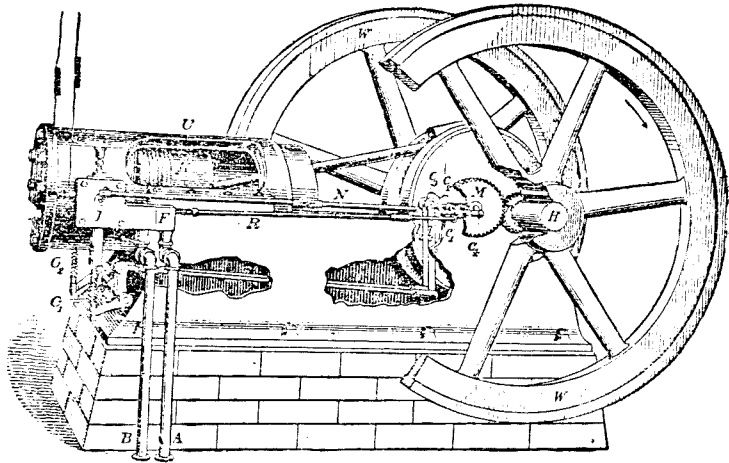


圖 226. 內 燃 機

內燃機之效率常可達到百分之三十以上，較諸最佳之蒸汽機，約大二倍，用此種熱機時，既無需鍋爐等設備，所占之地位復小，故為現在原動力廠所樂採用，此液體燃料問題之所以為各國注意也！

## 習 題 二 十 七

1. 有一機關車為每小時燃燒 1,350 磅之煤，煤之燃燒熱為每

磅14,500英熱單位。機關車曳重8,000磅,在摩擦係數為0.08之路上行駛,速度為每小時30哩。機關車本身之重為2,000磅。求機關車之效率。

2. 設有雙作蒸汽機,機中之平均壓力為每方吋10磅,活塞之面積為4.2方呎,活塞之行程為2.5呎。若該機每分鐘轉動180次,求其功率。

3. 有汽車每小時用汽油2加侖,其效率為18%,求汽車之功率。汽油之燃燒熱為每加侖110,000英熱單位。



## 第二十四章 熱力學定律

§ 193. 力學功能定理之推廣 在一系統內，外力所作之功等於系統內各物體動能之增加 (§ 43)。如墮體由  $h_1$  降至  $h_2$ ，則其動能由  $\frac{1}{2}mv_1^2$  增加為  $\frac{1}{2}mv_2^2$ ，而有

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = mg(h_1 - h_2).$$

至若稱  $mgh_1$  及  $mgh_2$  為位能，而說物體在運動中其位能與動能之和

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \text{常數},$$

是實視墮體與地球為一系統矣。重力成為系統內之內力。

在一統系內，不受外力之作用，其能量為一定，是為能量不減定律。

若一孤立之物體，由能量不減定律，有

$$\frac{1}{2}mv^2 = \text{常數},$$

此即牛頓之運動第一定律也。

物體之環繞吾人者，無時無刻不在變動。純粹位置上之變動，乃力學之所研究者；惟熱之現象，每伴力之現象以俱生，如物體移動於

空氣中，則物體變熱，其周圍空氣之溫度亦因之而增高。合力與熱而並研究之，乃熱力學之所有事也。

在力學問題中，無阻力與摩擦力，功能定律始為正確。但阻力及摩擦所生之熱量，與其所耗費之功，有一定之數量關係，稱為熱之工作當量 (§ 155)。若將熱量  $H$  作為能之一種  $W = JH$  合併計算，則功能定理與能量不減定律又為真確矣。

§ 194. 熱力學第一定律 吾人有須注意者：即  $W = JH$  之一式，祇能適用於閉合之變化中也。所謂閉合變化，即一系統由初情狀 (initial state) 開始變化，至終情狀 (final state) 而止，終情狀乃與初情狀完全相同者也。如在焦耳實驗中 (§ 155)，可設想為冷水流入量熱計，由量熱器流出熱水。待重物下降達勻速，水流成穩定狀態時，實驗纔開始。經過  $t$  時後，實驗作為完畢。則實驗開始與完畢時之初終情狀完全相同，即所謂閉合變化也。在  $t$  時間內，此閉合變化中，該體系所放出之熱量  $H$  (量水流及其增高之溫度即得)，與其所受於重物之功  $W$ ，始有  $W = JH$  之關係。

若在不閉合之變化中，則系統所受外力之功  $W$ ，與其所放出之熱量  $H$ ，可以風牛馬不相及，無絲毫之關係。如以水壺置火爐上，初情狀為冷水，終情狀為熱水，而工作永為零，即

$$H > 0, \quad \text{而} \quad W = 0.$$

又如氣體受外加壓力  $P$  而絕熱壓縮，初情狀體積為  $V_0$ ，終情狀體積為  $V_1$ ，所受外力之功為

$$W = P(V_0 - V_1), \quad \text{而} \quad Q = 0.$$

但事之有趣者，( $JH - W$ ) 一量無論系統經何途徑變化，祇須有

同樣之初終情狀，其數值均等。換言之， $(JH - W)$  之量，乃依初終情狀而決定，與上述單獨計算  $H$  及  $W$  二量不同，可證之如下：

設系統由情狀  $A$ ，以某種方式變化至另一情狀  $B$ 。其經歷中吸收之熱量為  $H_1$ ，做出之工作為  $W_1$ ；若以另一種方式自  $A$  變化至  $B$ ，則為  $H_2$  及  $W_2$ 。

吾人假定系統由情狀  $B$  回返於情狀  $A$ ，為常屬可能之事，並設還原時系統吸收之熱量為  $h$ ，做出之工作為  $w$ 。

於是吾人可應用熱之工作當量原理於此兩個閉合變化：由  $A$  以第一種方式變到  $B$ ，再由  $B$  到  $A$  還原，即有

$$J(H_1 + h) = W_1 + w;$$

再應用於由  $A$  以第二種方式變到  $B$ ，再由  $B$  到  $A$  還原，乃得

$$J(H_2 + h) = W_2 + w;$$

以前式減後式，則  $h$  與  $w$  被消去，結果為

$$JH_1 - W_1 = JH_2 - W_2.$$

由此可知  $(JH - W)$  一量，不以變化所循之途徑而有不同，完全由初終情狀決定也。

此  $(JH - W)$  一量，名為系統由情狀  $A$  變至情狀  $B$  時之內能差 (variation of internal energy)。於是系統之情狀，可用一函數  $U$  表之。設在情狀  $A$  時  $U$  之值為  $U_A$ ，情狀  $B$  時  $U$  之值為  $U_B$ ，則有

$$U_B - U_A = JH - W,$$

是為熱力學之第一定律 (first law of the dynamics)。

討論至此，吾人可知欲增某系統之內能，有下兩法：

1° 供給熱量 (即系統吸收熱量)： $H > 0$  (系統放出之熱量為負)；

2<sup>o</sup> 耗費工作(即系統接受工作):  $W < 0$  (系統做出之工作為正)。此二法從當量原理立論,並無差別。然置一錶於火爐上,與開緊錶之發條,其結果之不同,盡人皆知。此可見熱力學第一定律之有未盡處也。在第一定律中不加區別之種種能,當於熱力學之第二定律中區別之。

在隔離或孤立之系統中,既不接受或做出工作,又不放出或吸入熱量,即  $H$  及  $W$  均等於零;故  $U_A = U_B$ , 即其內能為常數。簡言之,孤立系統之內能不變。

例 設有流體不能壓縮或膨脹,其質量為  $m$ , 比熱為  $s$ 。此系統之變數僅有一個,即溫度  $t$  是也。命  $t = 0^\circ\text{C}$  時,  $U$  之值為零。若欲此系統變至溫度為  $t$  時之情狀,則吾人必須耗費熱量  $H = mst$ , 在他方面  $W$  之值為零,故有

$$U = Jmst.$$

§ 195. 永動機之不可能 永久運動 (perpetual motion) 一名詞,不甚正確,蓋如飛輪之類,苟無摩擦作用,則運動開始後,當能永久繼續運動不息,此則雖不易實現,然於理固說得通,即牛頓慣性定律也。若謂一力不費,可得永久工作(perpetual work),此則非特不可實現,且於理亦說不通;故謂一機械永久運動,其意應指:一系統不借助外力,可生無限工作。

若一系統由情狀(0)變至情狀(1),則吾人有下式:

$$U_1 - U_0 = JH - W;$$

若假定該系統不假助外界,則  $H = 0$ ; 於是得

$$U_0 - U_1 = W.$$

倘該系統之內能減少,則該系統可產生工作(因  $W > 0$ ), 如彈簧

伸長後之縮短，可產生工作是也。然此可暫而不可久。欲其經久不渝，非使該系統不斷的返於初情狀不可；但若該系統作閉合變化，則  $U_1 = U_0$  而  $W = 0$  矣，故永久工作為不可能。

熱力學第一定律，亦可以永久運動不可能為基礎原則；從來種種永動機之失敗，即為此原則所根據之理由；而吾人原始之觀念，如「人力有限」亦與此原則相符合，蓋若吾人能不費一力而得永久工作，是人力無限矣。倘此種幻想能成事實，是吾人之世界將有何趣味耶！

然於此尚有一事，可加注意者。設某系統在變化過程中，不斷的吸收四周之熱量，如空氣或海水內之熱量。當該系統返於初情狀時，吾人可有下式

$$W = JH.$$

熱力學第一定律並不反對  $H > 0$  與  $W > 0$ ，即該系統吸收海水內之熱量而產生工作，再返於初情狀，如是反覆進行，永不停止。如輪船航行海上，大可利用海水之熱量，不必燒煤，此可名為第二類永動機，亦吾人幻想中之天地也！故上述第一不可能之外，必尚有第二不可能在，此則熱力學第二定律之所欲述明者。

§ 196. 熱力學第一定律之未盡處 上節末段所述第二類永動機之不可能，非熱力學第一定律所能解決。細考熱力學第一定律，固有若干事物未加區別者：

1° 工作與熱量，雖均為能，可以變換，且有一定之換價，然究不能混為一談，視作同物。拉一彈簧與燒一彈簧，此二手術皆同樣增加彈簧之內能，然非為同一事，則顯而易見也。

2° 從不同熱源而來之各種熱量，亦須加以區別。在熱之工作當量原理中，供給一系統之熱量，但計熱量之多寡，不問其所自來之熱源溫度如何。在此原理中，一加路里之熱終是一樣價值，然  $0^{\circ}\text{C}$ . 之一加路里與  $100^{\circ}\text{C}$ . 之一加路里，有加以區別之必要，則又顯而易見之事也。溫和之水一桶，所含之熱量非不多也，然不足以熟一蛋；而一滴沸水，便足以傷人。

§ 197. 可逆變化 可逆變化(reversible process) 為一組繼續之平衡情狀，或至少非常隣近平衡情狀，其變化可有正逆二方向；依正向進行之變化，若其環境略有更改，隨時可成逆向進行之變化，此二向變化之路徑相等，或非常隣近。在此二向變化所需之功與熱，絕對值相同而符號相反。

所謂平衡，須於各時間內，熱的方面與力的方面均達平衡。

在力的方面，可逆變化須無摩擦阻力，始可實現。

在熱的方面，可逆變化須系統與熱源接觸時，其間之溫度差為無窮小。例如置冷水於火爐上而熱之，非為可逆之手續；投冰於熱水中融解之，亦非為可逆之手續。可逆之手續當備無窮數之熱源，其溫度依次遞增（增量為無窮小），於是將物體按次與此等熱源相接觸，物體吸收或放出熱量，每次之值為無窮小。

實際變化中，從未有完全可逆者，然吾人不妨假定有之；其為一種理想的手續，不言而喻。從此推出理論，與根據觀測所得之數值，以計算在此種變化中所產生之諸現象。

§ 198. 熱力學第二定律 當系統變化中，僅與一個熱源交換熱量，謂之單熱源變化。熱源有均勻一定之溫度，如恆溫器(thermo-

stat), 或即系統周圍之空氣皆是。

設有一系統，在變化(可逆或否)中僅與一恆溫器交換熱量；又設此變化為閉合的， $W$  為所產生之工作， $H$  為恆溫器所供給之熱量。則從熱力學第一定律，得

$$W = JH.$$

關於  $W$  及  $H$  之正負問題，僅有下列兩種可能情形：

第一情形：
$$H < 0, \quad W < 0.$$

即系統消耗工作，放出熱量，此為可能之事。力學問題中之有摩擦現象者即屬此類：

第二情形：
$$H > 0, \quad W > 0.$$

此情形之意義，為從周圍(空氣或海水)吸收熱量，以產生工作。此即 § 195 末段所述之第二種永動機。單熱源如空氣，海水等，其中熱量取之無盡，若此機能實現，則將為人類之奇蹟。惜乎此亦不可能也。因此吾人承認下述之公理：

一系統與單熱源(僅有一種溫度)交換熱量，經歷一閉合變化，無論可逆與否，不能產生工作(正量)。是即熱力學第二定律(second law of thermodynamics)也。

若其變化為可逆的，則其正逆二方向變化中，所產生之功  $W$  正負相反，但由上述之公理，兩者均不能為正，故必

$$W = 0,$$

因之 
$$H = 0.$$

故系統經歷之一閉合可逆之單熱源變化時，既無工作之產生或消耗，亦無熱量之吸收或放出。

§ 199. **雙熱源變化** 由上所述，知取給熱量於單熱源之發動機為不能實現者，然則置備兩個不同溫度之熱源，其結果又當如何？

此二熱源中，溫度較高者稱溫源，低者稱冷源。設系統經歷一閉合變化， $H$  為溫源所供給之熱量， $H'$  為冷源所供給之熱量， $W$  為此系統所產生之工作，則由熱力學第一定律，有

$$W = J(H + H').$$

但熱力學第二定律方能明確指示上式中諸量應具之正負符號，即  $H'$  必須為負是也。

蓋若假定  $H' > 0$ ，則  $H$  仍可為正或負，但必  $H + H' > 0$ ，因吾人希望此系統能產生工作也。

若  $H > 0$  (同時  $H' > 0$ )，此兩源均供給熱量於系統。今設有溫度高於此兩源之第三源。兩源於變化時所供給之熱量，可向第三源取回，只須與第三源接觸足矣。是名為雙源，實則仍與單源無異，故不能有正量之工作，與  $W > 0$  之希望相衝突矣。

又若  $H > 0$  (同時  $H' > 0$ )，溫源從系統中得熱，而冷源則授熱於系統。欲證此假定之不合理，如前設有一第三熱源，其溫度介於溫源與冷源之間。則冷源所供給之熱量可向第三源取償，溫源所受之熱量可發還於第三源，此亦雙源其名，單源其實也。

當  $H' > 0$  時， $H > 0$  與  $H < 0$  均不能成立，故  $H' > 0$  之假定為不合理。然則  $H' = 0$  合理否？此則冷源既不放熱又不收熱，與無此源等，結果仍為單源，故亦不合理。

最終結論為  $H' < 0$ ，於是  $H > 0$ ；換言之：

在一閉合變化中，一系統與兩個熱源交換熱量，若要產生正量



工作，則必該系統取熱量於溫源，而遺熱量於冷源。此系統可經無窮次之同樣變化，每次爲一週期，每次返於原來情狀，於是吾人得一熱機（見第二十三章）。

再就  $W < 0$  而討論之。  $W < 0$ ，則  $H + H' < 0$ ， $H$  或  $H'$  至少有一個爲負值。下列三種情形均屬可能：

1°  $H < 0$ ， $H' < 0$ 。兩源均吸收熱量。消耗工作變爲熱量，而輸送於兩源，此非有趣之事件。

2°  $H > 0$ ， $H' < 0$ 。冷源同時吸收溫源之熱量及工作所成之熱量，此則更非有趣事件。

3°  $H > 0$ ， $H' > 0$ 。溫源得熱，冷源失熱，吾人使冷物之熱量入於熱物，冷者益冷，熱者益熱，故必費去工作（即  $W < 0$ ）。如是之系統可作致冷機器（造冰機，見 §179），亦可作生熱機器（熱水汀）。

§ 200. 熱機之效率 雙熱源原動機合於下之條件：

$$W > 0, \quad H > 0, \quad H' < 0.$$

爲便利起見，設  $h = -H'$ 。於是

$H$  = 溫源供給於系統之熱量；

$h$  = 系統遺棄於冷源之熱量；

$W = J(H - h)$ ，爲熱機所產生之正量工作。

此種雙熱源變化，可以蒸汽機爲例。此系統即爲水，溫源爲鍋爐，冷源爲凝聚器。

所謂效率，爲所得之實利與所費之能量相比。

在此處，實利爲  $W$ ，或以  $H - h$  表之。所費之能量，由經濟學觀點，當爲  $H$ ，與  $h$  無關；因溫源之  $H$  從燒煤得來，而  $h$  則棄置於冷水中，

通常不復值錢矣。

於是熱機之效率，有下定義：

$$e = \frac{H-h}{H} = 1 - \frac{h}{H},$$

或書作

$$e = \frac{W}{JH}.$$

§ 201. 雙熱源可逆循環——賈祿循環 欲得可逆閉合變化，則交換熱量之物體，其溫度必無窮鄰近方可。設  $t$  為溫源溫度， $t'$  為冷源溫度。系統在  $t$  及  $t'$  溫度時，各與溫源及冷源交換熱量，故有二個恆溫變化。然該系統欲自一溫度返至他溫度，則又須經過二個不交換熱量的可逆變化；換言之，即經歷二個絕熱變化。此種循環，稱為賈祿循環 (Carnot's cycle)。

如圖 227,  $AB$  為在溫度  $t$  之恆溫線,  $CD$  為在溫度  $t'$  之恆溫線,  $BC$  與  $DA$  即二條絕熱線也。所產生之工作等於  $ABCD$  循環所圍成之面積，因此處工作為正量，故循環之方向如圖中矢頭所示。

今以實例解釋此圖。假設氣體貯於一圓筒中，筒之四周除其一端外，均不透熱，活塞之移動毫無摩擦阻力。此外另備一溫度為  $t$  之溫源  $S$ ，與溫度為  $t'$  之冷源  $S'$ ，及一不透熱之墊  $M$ 。

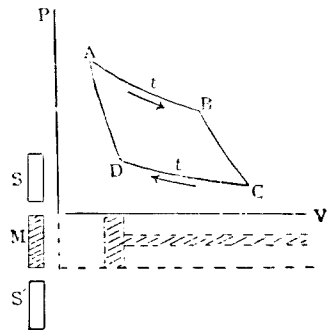


圖 227. 賈祿循環

從初情狀  $A$  起，筒端與溫源  $S$  接觸，溫度為  $t$ ，則氣體將自溫源

$S$  吸取熱量  $H$ , 而作等溫膨脹以抵於  $B$ . 乃令之離開溫源, 而與絕熱熱  $A$  接觸, 仍任氣體繼續膨脹. 當此絕熱膨脹進行時, 氣體將其內能之一部, 變為其所作之外功, 故其溫度漸次降落以至於  $C$  點時, 溫度為  $t'$ . 不復令其膨脹, 而將筒端與冷源  $S'$  接觸. 冷源之溫度為  $t'$ , 氣體又作等溫壓縮, 放出熱量  $h$ , 以至於  $D$ . 在  $D$  點, 氣體與冷源隔離, 而與絕熱墊接觸, 繼續作絕熱壓縮, 以回返至  $A$  點. 如是一週期之變化, 終而復始.

§ 202. 雙熱源可逆循環之效率——賈祿定理 指定一定溫度之溫冷兩熱源, 可作各種不同之賈祿循環; 因所用之流體可以隨便選擇, 不問為水, 為酒精, 為空氣, 為純粹或混合物體. 於此吾人應問此等不同之系統中, 究以何者之效率為最大? 此問題賈祿定理解答之.

賈祿定理可分二部: (1) 作用於相同二溫度間之一切可逆機, 其效率均相等; (2) 作用於相同二溫度間, 可逆機之效率恆較不可逆機為大.

設有兩具可逆機  $E_1$  及  $E_2$ , 各作可逆循環  $C_1$  及  $C_2$ , 作用於相同之兩熱源  $S$  及  $S'$  間. 在  $C_1$  循環內, 熱量之變化為  $H_1$  及  $h_1$ , 在  $C_2$  循環內, 為  $H_2$  及  $h_2$ . 吾人當證明

$$1 - \frac{h_1}{H_1} = 1 - \frac{h_2}{H_2} \quad \text{或} \quad \frac{h_1}{H_1} = \frac{h_2}{H_2}.$$

為簡明起見, 不妨假定  $H_1 = H_2$  (其實, 如視  $H_1$  及  $h_1$  為  $E_1$  機  $n$  次循環之總熱量,  $H_2$  及  $h_2$  為  $E_2$  機  $n'$  次循環之總熱量, 則不難使  $H_1 = H_2$ ).

循環  $C_1$  為可逆，設用逆向，則其熱量變化為  $-H_1$  及  $-h_1$ 。若  $C_1$  用正向， $C_2$  用正向，合兩具熱機總計之，則受於溫源之熱量為  $H_2 - H_1$ ，遺於冷源之熱量為  $h_2 - h_1$ 。但  $H_2 = H_1$ ，故僅有冷源發生作用，由本章 §198 熱力學第二

定律之結論，知  $h_2 - h_1 = 0$ 。因  $H_1 = H_2$ ，而  $h_2 = h_1$ ，故得證明兩具可逆機之效率相等。此為賈祿定理第一部之證。

證其第二部時，假設  $E_2$  為不可逆機，則  $C_1$  為可逆循環，而  $C_2$  為不可逆循環。仍併合  $C_2$  及  $C_1$  之逆向而總計

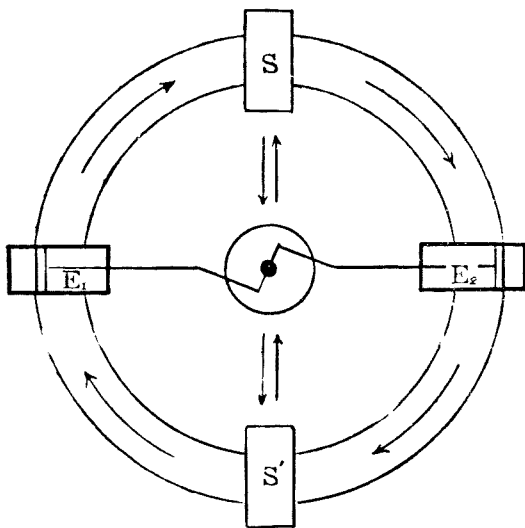


圖 228.

之，因設  $H_1 = H_2$ ，故仍得一單熱源變化，但不可逆，遺棄於冷源之熱為  $h_2 - h_1$ 。由 § 198，知  $h_2 - h_1$  之值應為正數，即

$$h_2 > h_1.$$

又因

$$H_2 = H_1,$$

故得

$$\frac{h_2}{H_2} > \frac{h_1}{H_1},$$

或書作

$$1 - \frac{h_1}{H_1} > 1 - \frac{h_2}{H_2}.$$

是即賈祿定理之第二部。

故一切作用於同樣溫度間之賈祿循環，有相等之效率；此公共效率，為吾人所能得到之最大效率。

同時，亦得一極普遍之結論，即不可逆性表示濫費機械作工是也，或所得者少於所可得，或所費者多於所當費。

§ 203. 熱力學之絕對計溫法 由上節結果觀之，在二個一定溫度之熱源間動作之可逆機，其效率均為相等，不因其所用之物質而異；故可逆機之效率僅視其動作之二溫度  $t$  及  $t'$  而定，即  $e = \frac{H-h}{H} = 1 - \frac{h}{H}$ ，僅由溫度  $t$  與  $t'$  而定，則  $\frac{h}{H}$  亦僅由  $t$  與  $t'$  而定。

因是之故，吾人可創立新法以計算溫度。此新計溫法將不依賴某種物質（例如前此之水銀或氫）之特性，而僅根據賈祿定理，故常稱為熱力學之絕對計溫法 (thermodynamic scale of absolute temperature)。

依照絕對計溫法，可逆機作賈祿循環時，自溫源所取用之熱量  $H$  與其所輸入於冷源之熱量  $h$  之比，依定義，即為溫源溫度  $T$  與冷源溫度  $T'$  之比，即

$$\frac{T}{T'} = \frac{h}{H}.$$

至於在此計溫法中一度之大小，其規定仿照 § 149 法則，將基本間隔（即自冰點至水沸點之溫度差）分為 100 度。若冰點之溫度為  $T_i$ ，水沸點之溫度為  $T_b$  時，則

$$T_b - T_i = 100.$$

設  $T$  爲任一物體之熱力學絕對溫度，則有

$$\frac{T}{T_i} = \frac{H}{H_i} \quad \text{或} \quad \frac{T}{T_b} = \frac{H}{H_b},$$

故

$$T = \frac{100H}{H_b - H_i}.$$

此即熱力學溫度  $T$  之定義，式中  $H_b$  及  $H_i$  表可逆機作用於水沸點及冰點之二熱源間所吸收或放出之熱量，而  $H$  表可逆機作用於冰點及溫度  $T$  二熱源間，在  $T$  熱源處所吸收或放出之熱量。

如是規定之熱力學絕對溫度  $T$ ，與理想氣體溫度計所表示之溫度  $t$  之關係，可以理想氣體爲可逆機所用之流質而求得之。由理論推得

$$T = \frac{1}{\alpha} + t = 273.2 + t.$$

絕對溫度常以  $^{\circ}\text{K}$ . 表之，以資區別。

§ 204. 用絕對溫度表示熱機效率 若熱機作用於絕對溫度  $T$  及  $T'$  之間爲可逆的，則依絕對溫度之定義，有

$$\frac{h}{H} = \frac{T'}{T};$$

於是熱機之效率爲

$$e = \frac{H - h}{H} = \frac{T - T'}{T},$$

此爲作用於溫度爲  $T$  及  $T'$  之兩熱源間之熱機之最大理想效率。

在實際上， $T'$  爲凝聚器之溫度，常略高於其周圍之溫度，設爲  $300^{\circ}\text{K}$ . ( $=27^{\circ}\text{C}$ .)，已屬極低之數值矣。最大之效率  $e$  將因  $T$  增高而

增大，設  $T = 100^{\circ}\text{C.} = 373^{\circ}\text{K.}$ ，則效率  $\epsilon = \frac{73}{373} = 0.19$ 。由此可知熱源所發生之 100 加路里，至少有 81 加路里棄於凝聚器中，至多僅 19 加路里變為工作。然此種最大效率，實際上已不能得。若  $T = 300^{\circ}\text{C.} = 573^{\circ}\text{K.}$ ，則  $\epsilon = 0.48$ ，故自瓦特以來，凡蒸汽機無不盡量用可能之高溫度也。

§ 205. 熱之變質——熵 熱量與工作相當云者，即 4.18 焦耳之功全變為熱時，可產生 1 加路里之熱；而 1 加路里之熱全變為功時，亦可產生 4.18 焦耳之功也。但有熱 1 加路里與功 4.18 焦耳於此，就其可用者 (utilitable) 而言，則兩者全不相同。4.18 焦耳之功極易全變為 1 加路里之熱；而 1 加路里之熱，即理想之熱機亦不能使之全變成為 4.18 焦耳之功也。在上節之舉例中，100 加路里之熱，其溫度為  $100^{\circ}\text{C.}$  者，至多僅有 19 加路里變為工作，溫度為  $300^{\circ}\text{C.}$  者，則至多可有 48 加路里變為工作。

有熱量  $H$  於此，如以產生工作而論，其價值繫於此熱量所居之溫度。從吾人四周所取得之熱量，全無用處；如熱源之溫度與其四周溫度相差愈遠（或高於或低於），則其價值愈高。

設熱源之溫度為  $T$ ，四周之溫度為  $T'$ ，熱源放出之熱量  $H$ ，其可能變成之工作，不過

$$W = \epsilon JH = JH \left( 1 - \frac{T'}{T} \right)$$

而已。

故熱之為能，量有多寡，同時品有高下，溫度高者其品愈高，熱

量之溫度減低，品趨下矣，謂之變質。

有熱量  $H$ ，其溫度為  $T$ ，則  $\frac{H}{T}$  之一量，稱為熵 (entropy)。系統在變化中，吸收或放出熱量，若同時注意其熵之變遷，乃為一極有趣之事。

在可逆閉合之賈祿循環中，吸收溫度為  $T$  之熱量  $H$ ，而放出溫度為  $T'$  之熱量  $h$ ，且

$$\frac{H}{T} = \frac{h}{T'}, \quad \text{或} \quad \frac{H}{T} - \frac{h}{T'} = 0,$$

即溫源所減小之熵，等於冷源所增加之熵。故在可逆變化中，溫源與冷源兩者之熵之和不變。

若在不可逆變化中，則不然。因不可逆循環之效率恆小於可逆循環之效率，即

$$\frac{H' - h'}{H'} < \frac{H - h}{H}, \quad \text{或} \quad \frac{h'}{H'} > \frac{h}{H}.$$

$H'$  及  $h'$  表示在不可逆循環中吸入及放出之熱量。

於是

$$\frac{\frac{h'}{H'}}{\frac{h}{H}} > \frac{\frac{H - h}{H}}{\frac{H' - h'}{H'}} = 1, \quad \text{或} \quad \frac{h'}{T'} - \frac{H'}{T} > 0,$$

即冷源所增加之熵大於溫源所減小之熵。故在不可逆之變化中，冷源熱源兩者之熵之和常增。

故在孤立之系統中，熵之值祇有增而無減。在可逆現象，熵不變值；在不可逆現象，即一切實際變化，熵常增加。



擴而論之，宇宙一孤立之系統也(試問他與誰交換東西?)，於是  
有下二結論：

宇宙之能常住不減；

宇宙之熵常增不減。

## 習 題 二 十 八

1. 設有賈祿理想熱機，當其動作於水沸點及冰點之兩熱源間時，所作之功每循環為 8,000 呎磅。今此機若動作於熱源  $S$  與冰點之間，則所作之功為每循環 10,000 呎磅。求此時機之效率及取自熱源  $S$  之熱量，並求熱源之溫度。

2. 有 50,000 馬力之蒸汽輪機，其所收入之蒸汽溫度為  $320^{\circ}\text{C}$ ., 排出之蒸汽溫度  $45^{\circ}\text{C}$ ., 設由賈祿循環可得理想效率，但由熱能變為機械工作之效率僅為 80%，而其鍋爐之效率則為 60%，問該蒸汽輪機每小時燒煤多少？煤之燃燒為每磅 14,000 英熱單位。

3. 設有烈火溫度為  $1,300^{\circ}\text{K}$ ., 每小時放熱為 20 大卡。若任其散布於室中以暖室，室中每小時得熱多少？若有熱機作用於此烈火之溫度及室外溫度  $T = 273^{\circ}\text{K}$ . 間，先將烈火放出之熱量變成工作，問每小時可得工作多少？由此所得之機械工作，依賈祿循環之逆向進行，作用於室外溫度  $T$  及室內溫度  $T' = 293^{\circ}\text{K}$ . 間以暖室，則每小時得熱多少？

4. 利用動作於溫度為  $T$  及  $T'$  間之可逆機，求自冷源取熱量  $H$  所需之工作，並證欲使物體之溫度降至絕對零度，所需之工作為無窮大。

5. 試就圖 206 所示之二氧化碳壓容圖表示下述之循環：有溫度為  $21.5^{\circ}\text{C}$ ，壓力為 59 大氣壓之液體二氧化碳一克，熱之使其完全汽化。當其完全汽化時，乃冷卻之，並維持其容積不變。迨其溫度既降落至  $13^{\circ}\text{C}$  時，乃維持其壓力不變，使其完全液化。既完全液化之後，乃復增加其壓力及溫度，使之沿液態曲線所示之情況，回復至原始之狀態，即壓力等於 59 大氣壓，溫度為  $21.5^{\circ}\text{C}$ 。試計算此循環所得之功。

## 第二十五章 波 動

§206. 振動之意義 吾人復就第十二章 §93 之彈簧振子而討論之。其上端  $O'$  固定於架上，稱為死端；下端  $O$  懸重物  $W$ ，稱為活端。彈簧原長為  $l$ 。活端被拉，稍離其平衡位置後，因其彈性力之作用，要向原處回返；但回到原處時，以其積有動能之故，又不復能立即靜止，而起振動。

振動時，活端  $O$  點之位移為

$$x_t = a \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

有如圖 229 所示。

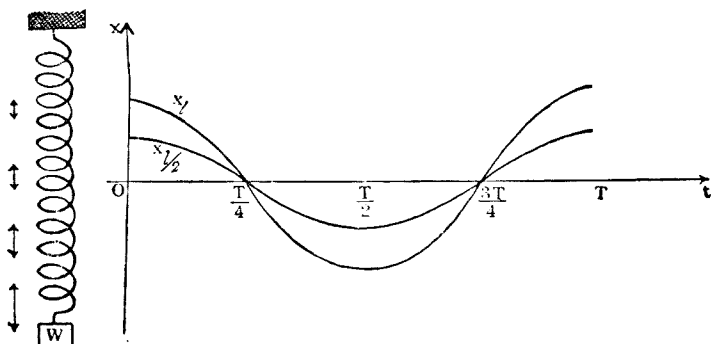


圖 229.

彈簧中各點亦莫不離其平衡位置，而在其上下作同週期之振

動，例如彈簧中點之位移為

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{a}{2} \cos 2\pi \frac{t}{T};$$

惟有死端固定，始終不動，即

$$x_0 = 0.$$

故圖 229 之正弦曲線，實示彈簧各點之位置，隨時間而變化之情形也。

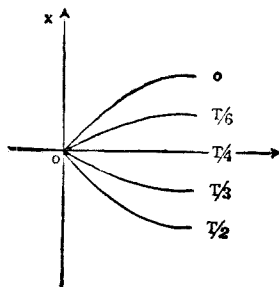


圖 230.

若就某瞬時觀之，彈簧各點離其平衡靜止位置之距離，有如圖 230 所示。

又如梁或桿之彎曲振動(圖 231)，則吾人所見者即為其振動之空間的表示。

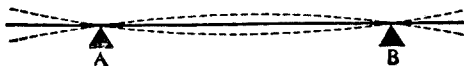


圖 231. 桿之振動

§ 207. 波動 物體之一部分，設受任何作用，而離開其自然靜止之位置，即該處之體內平衡受有擾動。則此等擾動即可傳至其鄰近部分，擾動在物體中傳播，稱為波動(wave motion)。擾動之傳遞與波動之成立，端賴物體之彈性。

如固定繩之一端於牆上，執其他端而上下搖動一下，則見屈曲



圖 232.

之形，自此端向彼端前進(圖 232)。此以繩端分子受手擾動，其隣接之分子初以慣性而兀立，終被分子間之力所牽動，如是擾動，逐步傳遞。吾人若將繩端上下移動，快慢適中，則其所生之波將成羣列隊前進，如圖 233。此種波浪進行之方向與擾動之方向(即質點振動之方向)係成直角者，稱為橫波(transverse wave)。故物體之切變彈性係數不為零者，方能傳遞橫波。



圖 233.

氣體分子間之力甚微，無切變可言。若將氣體分子牽至一旁，無法使其隣近分子挈以俱去則橫波在氣體中不能存在。但氣體固可壓縮者，則壓縮之擾動將可在氣體中傳遞。如在管口(圖 234)用兩板忽而合近，忽而開遠，則兩板間之空氣忽而稠密，忽而疏薄。此種稠密(condensation)與疏薄(raretaction)之擾動，將由管中空氣傳至他口，而使火焰搖擺。

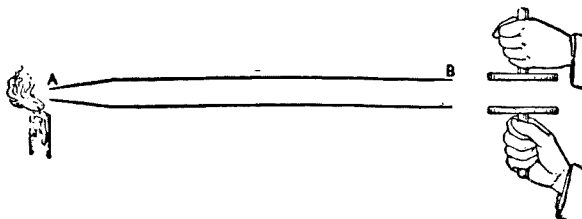


圖 234.

此處有須注意者，即管中空氣分子，只隨兩板之開合週期，各在

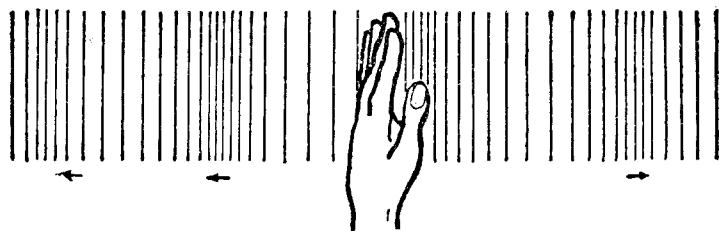


圖 235.

其平衡位置之左右，作往返運動(圖 235)，始終不成氣流，由管之此端流入，而自他端流出也。

此種波浪進行之方向與擾動之方向(即質點之振動方向)相平行者，稱為縱波(longitudinal wave)，彈簧之振動亦屬縱波(圖 236)。

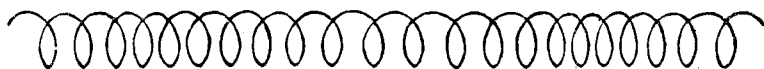


圖 236.

故物體之有容變者，皆能傳遞縱波。固體可以傳遞縱波及橫波，而氣體只能傳遞縱波。

§ 208. 水波 在若干情形中，波動之傳遞，祇限於兩物體(液體或氣體)之分界面。水波(water wave)即其一例。水波雖為吾人所最習見者，然其情形則較上述之橫波與縱波為複雜。

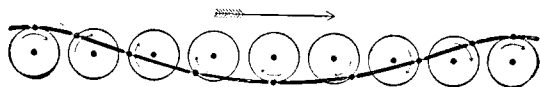


圖 237. 水波

液體表面之平衡狀態，受擾動(風或投石)後，使之發生週期波動者，有二種完全不同之力。液面之一部分，離開其平衡位置後，所

受之第一種力爲重力，欲使液面回復水平。第二種力爲表面張力，欲使液面之面積縮成最小，即欲使自由液面成爲平面。滔天巨浪，江海奔騰，幾全爲重力之作用所獨霸（重力波）。至若微風習習，吹皺池塘，或輕叩水盂，波紋蕩漾，則表面張力特占優勢（表面張力波）。

故參加水波之水點，各在其平衡位置之四周作圓周運動，如圖 237 所示。

§ 209. 波之傳播 波之生成，繼續不斷，厥爲物體內某處有一週期擾動存在，此可爲該處之一振動體，能使其隣接各點皆隨之作週期運動者。此等隣近部分，因彼強迫而振動，其頻率  $N$  卽爲振動體之頻率。若物體之性質不以其方向而異，則振動狀態將以一定而相等之速度  $u$  傳播前進。傳播振動之物體，無論其爲固體，液體或氣體，稱爲媒質 (medium)。

波動不論其爲縱波或橫波，在媒質中，以速度  $u$  前進。在某瞬時間，其在空間中之情形，有如圖 238 所示。自波中之任何一點至次一波之相當點之距離，稱爲波長 (wave length)。是波長卽波動在一週期  $T$  時間內前進之距離，實爲在空間中之週期，有

$$\lambda = uT, \quad \text{或} \quad u/N.$$

傳播速度  $u$  之值由媒質之特性而定；週期或頻率，則繫於振動體之本身情形。故波動之三要素， $\lambda$ ， $u$  及  $T$  (或  $N$ )，如其中之二者，即可得其餘之第三者。除傳播速度外，在光學常言光之波長，在聲學常言聲之頻率，各取其便也。

圖 238 中， $a$  表最大之位移，就波言，稱爲波幅，卽振動點之振幅也。常以波幅之平方表波之強度 (intensity)，卽

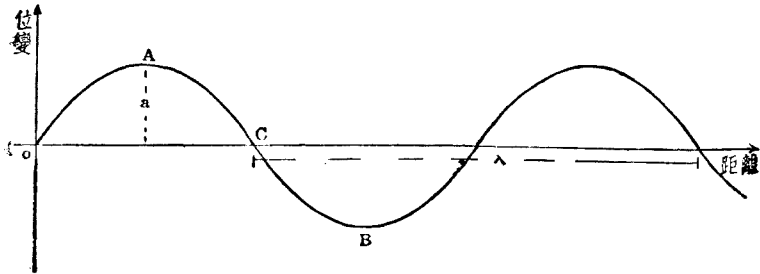


圖 238.

$$I \sim a^2.$$

就某瞬時間言，位移最大之點如  $A$  及  $B$ ，稱為波腹(loop)，位變為零之點如  $C$ ，稱為波節(node)。若將  $A$  及  $B$  波腹更為之區別，則一稱波峰，一稱波谷。

設振動體(振源)之振動為

$$A = a \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

若其振動之傳播速度為  $u$ ，則自擾動中心傳至  $r$  距離處，所需之時間為  $r/u$ 。故與擾動中心相距  $r$  處，在時間  $t$  時之擾動情形，應與擾動中心在時間  $t - \frac{r}{u}$  時者相同。於是在  $r$  距離處之振動為

$$A = a \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{r}{u} \right) = a \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right).$$

故媒質中兩點相距  $x$  者，其位相之差為  $2\pi x/\lambda$ 。

由同一振源發出之同一作用——即擾動中心處之同一事變——同時到達之諸點所組成之面，稱為波面(wave front)。波面為球面者，稱球面波(spherical wave)；為平面者，稱平面波(plane wave)。



由一振源而發生者，通常皆為球面波，即以振源為球面波之心。但若振源離吾人考究之點甚遠，而吾人所考究之媒質範圍又不大時，則可視作平面波。各個球面波上每點之振幅相等，將視其距離波心之遠近而異；而平面波之振幅，則可視作常定。

波前進之方向恆與波面正交。波動若不遇障礙，恆以直線前進。

§ 210. 郝更斯原理 依波面之定義，其上各點之位相相同，而振幅又相等，均可視作新波源，各自發出一相同之元波 (elementary wave)。如圖 239 所示， $A$  為振源  $O$  之球面波，以  $A$  球面上各點為心， $r=ut$  為半徑作球，則此等球面所包切之面仍為球面  $B$ ，亦即在  $t$  時後  $O$  振源之波面。如是可不問振源  $O$  之所在，從某瞬時波面之位置，即可求以後（或以前）任何時刻波面之位置，是為郝更斯原理 (Huygen's principle)。

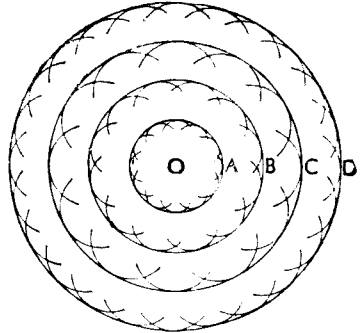


圖 239. 郝更斯原理

§ 211. 波之反射 設有兩種媒質，其分界面為  $AB$ ，如圖 240。由第一媒質中  $O$  點發出之波，進行至  $AB$ ，分成兩部分，一部分射回第一媒質內，一部分則穿入第二媒質中，方向均有改變，此現象可由郝更斯原理說明之。

波在第一媒質中時為球面波，假使無第二媒質存在，則行至  $C$ ，仍將不改其為球面，更經若干時，應達於  $AGB$ 。實際上，因有分界面  $AB$  存在，故成為對於  $AB$  而與  $AGB$  作對稱形之球面，射回第一媒



平面，曰入射面(plane of incidence)。AN與反射線所成之平面，曰反射面(plane of reflection)。入射線與AN間所成之角OAN，曰入射角(angle of incidence)；反射線與AN間所成之角NAE，曰反射角(angle of reflection)。因三角形OCA與O'CA相等，故入射角等於反射角，且兩者均在同一平面內，是為波之反射定律(law of reflection of waves)。

§ 212. 波之折射 上節所述者為由分界面射回第一媒質中之一部分，尚有他一部分改向進入於第二媒質中，此項現象稱為折射(refraction)。

圖 241 之 DM 表入射平面波之波面，CD, EF, GH 等為入射線。由 M 點，依郝更斯原理發出之小波，以第一媒質所持有之速度  $u_1$  繼續前進，經時間  $t$  而達於 H；由 D 出發之小波則將以第二媒質所持有之速度  $u_2$  向 DP 進行，經時間  $t$  而達於 P；即  $MH = u_1 t$  及  $DP = u_2 t$ 。其在 D 及 H 兩點間各點所發出之小波，當在此兩者之間；如 F 點之小波，其半徑 FQ 將等於  $\frac{u_2}{u_1} \times LH$ 。包切此等小波之波面，為自 H 引至由 D 發出之小波之切面 HQP，乃一平面，即折射後之

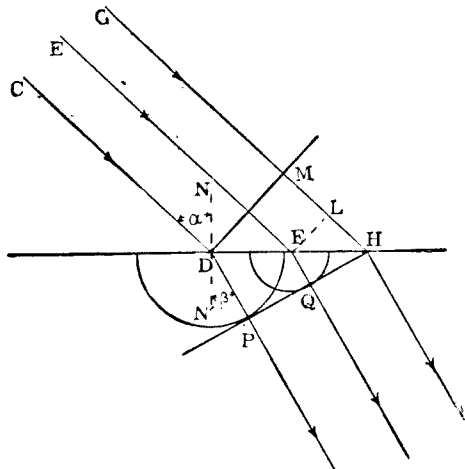


圖 241. 波之折射

波面，其在第二媒質中進行之方向如  $DP$ ，曰折射線 (refracted ray)。折射線與法線  $NN'$  所定之平面，曰折射面。折射線與法線間所成之角  $N'DP$ ，曰折射角 (angle of refraction)。因

$$\angle NDC = \angle MDH, \text{ 及 } \angle PDN' = \angle PHD,$$

故如命  $\alpha$  表入射角， $\beta$  表折射角，則有

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{u_1}{u_2} = \mu,$$

式中之  $\mu$  為一常數，其值由  $u_1$  及  $u_2$ ，即兩媒質之性質而定，與入射角之大小無關，此常數曰折射率 (index of refraction)。換言之，入射面與折射面恆在同一平面上，入射角之正弦與折射角之正弦之比等於一常數，其值由媒質之種類而定，與入射角之大小無關，是為波之折射定律 (law of refraction of waves)。

如  $u_1 > u_2$ ，則第一媒質稱為較第二媒質為稀疏 (rare)；反之，如  $u_1 < u_2$ ，則第一媒質稱為較第二媒質為稠密 (dense)。此種稀疏與稠密之分，純就媒質傳播波動之性質而言，與媒質本身之密度不必完全相同。須注意之。

§ 213. 波之干涉 設有頻率相同之兩振源  $A$  與  $B$ ，在同一之媒質中，其振幅且相等。則由  $A$  及  $B$  發出之波，在媒質中各點相遇。如以實線表波峰，虛線表波谷，其情形有如圖 242 所示。峰與峰或谷與谷相合之點，振動加強；而峰與谷或谷與峰相遇之點，則互相抵消，將兀立不動；前者稱為腹點，後者稱為節點。此種現象，稱為波之干涉 (interference)。

$A$  與  $B$  繼續振動，則波前進不已；但腹點與節點在媒質中之位

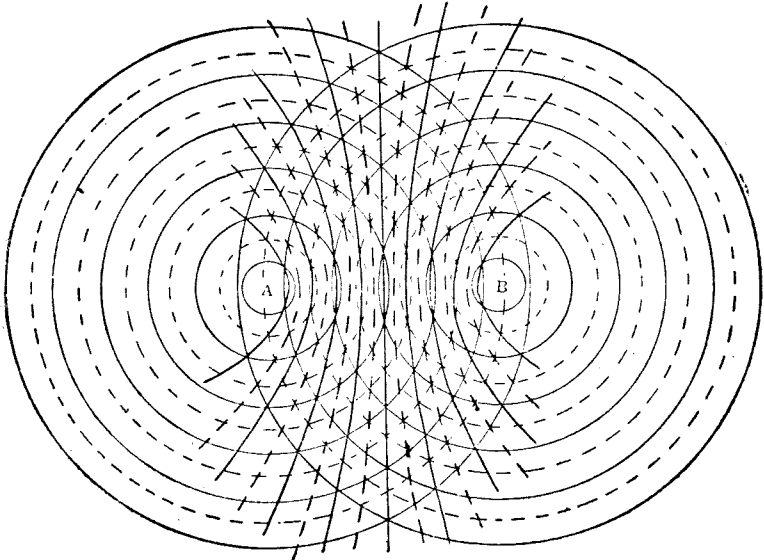


圖 212. 波之干涉

置各有一定，不隨時間而改變。例如一點  $P$  與  $A$  及  $B$  之距離差，恰為半波長之偶倍數時，即

$$PA - PB = \pm k\lambda \quad (k \text{ 爲整數}),$$

則  $P$  為腹點；若與二振源之距離差恰為半波長之奇倍數時，即

$$PA - PB = \pm \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda,$$

則  $P$  為節點。腹點或節點之軌跡各為雙曲線面，而以  $A$  及  $B$  兩振源為其焦點。每相隣之兩腹面間有一節面，兩節面間有一腹面。

§ 214. 縱波之傳播速度 波動傳播之速度，既視媒質之性質——彈性與慣性——而定；媒質之為氣體者，且不能傳播橫波，故橫

波與縱波在同一媒質中之傳播速度，必不相同，當分別論之。今先言縱波之傳播速度。

縱波在密度為  $\rho$  之媒質中傳播，吾人可於媒質中，設想一極長之直管，管之截面積為 1 平方厘米，將管分為無數之立方段落，每段長 1 厘米（圖 243），在管之左端，置一無摩擦阻力且無重量之活塞，令此活塞向管中前進，則管內媒質與活塞面接觸處之壓力，略增  $\Delta P$ 。如是，一壓縮之擾動將向管內前進，令  $u$  表此擾動之傳播速度。

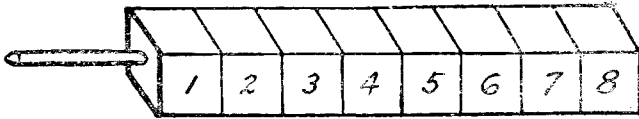


圖 243. 縱波之傳播速度

當活塞向前移動時，第一個立方先被壓縮，至其所受之壓力自  $P$  增至  $P + \Delta P$ ，即其體積減小  $\Delta V$  時，第一個立方乃將其所增加之壓力，傳遞於第二個立方，如此類推。此壓縮乃自第一立方始，在 1 秒鐘內，次第傳遞於第  $u$  個立方。此時被壓縮之立方，既有  $u$  個，而每個體積之減小為  $\Delta V$ ，且因各立方之截面積為 1 平方厘米，故活塞在 1 秒鐘內前進之距離乃為  $u\Delta V$ 。換言之，活塞之速度為每秒  $u\Delta V$  厘米。惟各立方被壓縮  $\Delta V$  後，不復再被壓縮，且將隨活塞前進，故已被壓縮各立方之速度亦為每秒  $u\Delta V$  厘米。

在上述之進程中，所施於媒質之力係活塞所受總壓力  $P + \Delta P$ 。此力在 1 秒內，所作之功為  $(P + \Delta P)u\Delta V$ 。其所生之效果有二：其一將被壓縮各立方之壓力自  $P$  增至  $P + \Delta P$ ；其二則使各立方之速度

自 0 增至  $u\Delta V$ 。因此各立方之位能與動能均增。所增加位能之值，可自被壓縮各立方所受之平均壓力  $P + \frac{\Delta P}{2}$  及所壓縮之總體積  $u\Delta V$  求得之，即  $(P + \frac{\Delta P}{2})u\Delta V$ ；其所增加動能之值為  $\frac{1}{2}\rho u(u\Delta V)^2$ 。

故有

$$(P + \Delta P)u\Delta V = (P + \frac{\Delta P}{2})u\Delta V + \frac{1}{2}\rho u(u\Delta V)^2,$$

即得

$$u^2 = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\Delta P}{\Delta V}.$$

**固體之傳播速度** 若媒質為固體時，則上述之體積變化  $\Delta V$ ，即為各立方段之長變  $\Delta l$ ，故  $\frac{\Delta P}{\Delta V}$  即等於固體之長變彈性係數  $E$ 。於是縱波之傳播速度為

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

例如鐵： $E = 20 \times 10^{11}$  達因/厘米<sup>2</sup>，

$\rho = 7.5$  克/厘米<sup>3</sup>，

得  $u = \sqrt{\frac{20 \times 10^{11}}{7.5}}$  厘米/秒 = 5,164 米/秒。

固體之傳播速度甚大，於此可見。

**液體之傳播速度** 若媒質為液體，則  $\frac{\Delta P}{\Delta V}$  為容變彈性係數，於是縱波之傳播速度為

$$u = \sqrt{\frac{k}{\rho}}.$$

例如水:  $k = 2 \times 10^{10}$  達因/厘米<sup>2</sup>,

$$\rho = 1 \text{ 克/厘米}^3,$$

得  $u = \sqrt{2 \times 10^{10}}$  厘米/秒 = 1,414 米/秒.

**氣體之傳播速度** 氣體之恆溫壓縮係數即等於  $P$  (§122). 牛頓以  $P$  代入上式之  $\frac{\Delta P}{\Delta V}$ , 則由上式算出之傳播速度, 較之實驗所得者為小甚多, 後拉普拉斯(Laplace)指出氣體傳播縱波時, 所受壓縮之變化甚驟, 非恆溫的, 乃絕熱的. 稠密之處, 溫度增高; 而疏薄之處, 溫度減低; 凡此皆所以增加氣體之彈性, 故  $\frac{\Delta P}{\Delta V}$  應為  $\gamma P$  (§ 169), 而  $\gamma$  者即等壓比熱與等容比熱之比也. 於是縱波在氣體中之傳播速度為

$$u = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}.$$

例如空氣:  $P = 1.013 \times 10^6$  達因/厘米<sup>2</sup>,

$$\rho = 0.001293 \text{ 克/厘米}^3,$$

$$\gamma = 1.40,$$

得  $u = \sqrt{\frac{1.40 \times 1.013 \times 10^6}{0.001293}}$  厘米/秒 = 331.7 米/秒.

與實驗直接測得者相合.

又  $P/\rho$  (或  $P/\rho$ ) 與氣體之絕對溫度成正比, 故氣體之傳播速度, 與其絕對溫度之平方根成正比, 而與壓力無關.

吾人常測定縱波之傳播速度, 以求氣體之等壓比熱與等容比熱之比, 即  $\gamma$  (§ 167).

§ 215. 傳播縱波時壓力之變化 由上節所得結果



$$u^2 = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\Delta P}{\Delta V},$$

有  $\Delta P = \rho u^2 \Delta V.$

$\Delta V$  者乃立方格之容變，其值即等於立方格之長變  $\Delta l$ 。設立方格左面之振動為

$$A = a \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

則其右面之振動（因立方格長 1 厘米）為

$$a \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x+1}{\lambda} \right);$$

而有

$$\begin{aligned} \Delta l &= a \left[ \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) - \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x+1}{\lambda} \right) \right] \\ &= 2a \sin \frac{\pi}{\lambda} \operatorname{csc} 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

於是

$$P - P_0 = \frac{2\pi a}{\lambda} \rho u^2 \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

故氣體各點之壓力，在其平均值  $P_0$  之左右，隨時間  $t$  作週期之餘弦變化，而各該點之振動，則為時間  $t$  之正弦變化。振動大處（振腹 antinode），壓力之變化小；振動小處（振節 node），壓力之變化大（即稠密與稀薄處）。故振腹恆與壓節相合，而振節恆與壓腹相合。

§ 216. 氣柱振動 在管之開端吹氣，不論其他端為開啟或為閉塞，管內之空氣隨即發生振動。空氣之質點沿管軸方向作週期之前後運動。氣體之傳播速度既有一定，波長又與管長有關，故氣柱振

動之頻率，非可任意者。

**閉管** 若管之他端為閉塞者，在管之閉端，氣體不能移動，故此點恆為振節。在其開端之氣體，振動最大，惟其壓力則為大氣壓力而不變，故開端乃一壓節，而為振腹(圖 244)。如是管長  $l$  即為波長之  $\frac{1}{4}$ ，故所發音(振動)之頻率為

$$f = \frac{V}{\lambda} = \frac{V}{4l},$$

$V$  表音波在空氣中之速度。

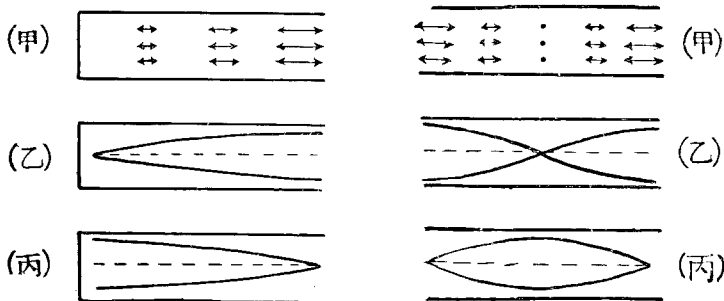


圖 244. 閉管氣柱振動

- (甲) 氣體分子之運動  
(乙) 振幅  
(丙) 壓力變幅

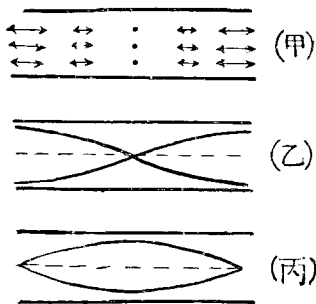


圖 245. 開管氣柱振動

- (甲) 氣體分子之運動  
(乙) 振幅  
(丙) 壓力變幅

**開管** 若管之兩端均為開啓者，則兩端同為振腹，同為壓節(圖 245)。如是管長  $l$  為波長之  $\frac{1}{2}$ ，而其頻率則為

$$f = \frac{V}{\lambda} = \frac{V}{2l}.$$

§ 217. **倍振** 管之閉端必為振節，開端必為振腹，固無論矣。但在閉管內之波形，有如圖 246(1) 所示。(b) 之頻率為(a) 之 3 倍，

(c)之頻率為(a)之5倍,……. 此等頻率稱為倍振(harmonics),其音稱為陪音;而稱最低之頻率為基振(fundamental frequency),其音為基音. 閉管之倍振恆為奇數倍振.

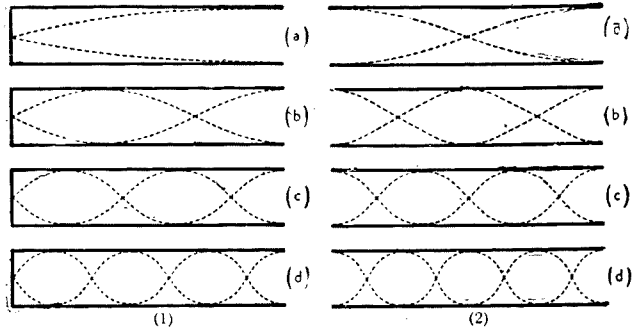


圖 246. 倍 振

在開管內之波形,有如圖 246(2)所示.(b)之頻率為(a)之2倍,(c)之頻率為(a)之3倍,……. 如是開管可有奇偶各種倍振,即有各種陪音,故其音品較閉管為爽脆悅耳.

又閉管之基振,較同長開管之基振,要低一倍.

§ 218. 橫波之傳播速度 設有橫波以速度  $u$  在繩中傳播,其情形與設想繩以速度  $u$  穿過一彎曲之管無異(圖 247).

欲知橫波在繩中之傳播速度,可求繩以速度  $u$  穿過曲率半徑為  $r$  之管時,  $u$  與繩中張力  $T$  及繩之密度之關係.

試就繩之一小段  $QR$  而觀之,兩端之張力為  $T$ ,此二張力有一合力為

$$F = T\alpha,$$

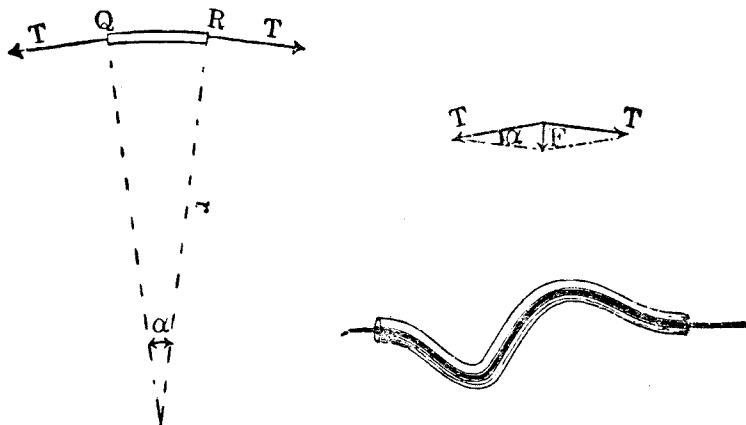


圖 247. 橫波之傳播速度

$\alpha$  為  $QR$  段繩在其曲率中心所對之角。

若  $QR$  段繩之向心力適等於合力  $F$ ，則穿過時繩將絲毫不受管壁之作用，宛如管不存在然，此為吾人所需要之情形。設  $\mu$  為繩每單位長之質量，則  $QR$  段繩（長  $=r\alpha$ ）之質量為  $\mu r\alpha$ 。於是有

$$\frac{\mu r \alpha u^2}{r} = F = T \alpha,$$

得

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}},$$

即為橫波之傳播速度。

§219. 絃線振動 支絃線於  $A, B$  兩點而拉緊，如圖 248，則絃線振動時， $A$  及  $B$  恆為振節， $A$  與  $B$  間之絃長  $l$  即

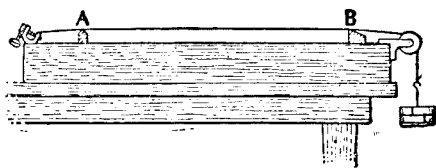


圖 248 絃線振動

為波長之  $\frac{1}{2}$ 。故其基振之頻率為

$$f = \frac{v}{2l} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\mu}},$$

式中  $T$  表線之張力， $\mu$  表線每單位長之質量，此從絃之中點彈撥所得之音也。彈琴者常以手指壓絃線，使其分段振動，則得各種陪音（圖

249）。又因頻率與線之張力之平方根成正比，故調諧絃器時，常旋轉絃端之螺旋，以增減絃中之張力。此外長短相同及張力相等之絃，其頻率則視每單位長之質量而異，故發音之較高之絃，線體

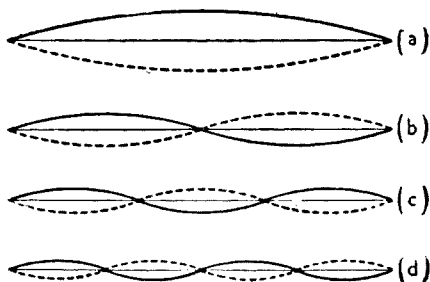


圖 249.

較細。提琴上四絃線粗細不同之理，即基於是。

§ 220. 駐波 讀者於此或覺管中氣柱與絃線振動之有規律，而深感自然界物性之美麗。第十二章 § 93 與本章 § 205 所述之彈簧振動，亦與閉管氣柱之基振完全相同。在此等振動中，似與波動在無限制與無限大之媒質中傳播者，情形有別。在無限制與無限大之媒質中，各點之振幅相同，只是位相有異耳。而管中氣柱與絃線振動顯然非若是也。欲明其故，且言駐波。

設有週期相同振幅相等之兩平面波，恰沿相對之方向而前進。在  $x=0$  處，當  $t=0$ ，時兩波位相之差為 0，則其振動方程式同為

$$A_1 = A_2 = a \sin \omega t.$$

今當討論離此  $x$  處一點之振動情形。依 § 209，向右前進之波，到

達該點時之振動爲

$$A_1 = a \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right);$$

而向左前進者爲

$$A_2 = a \sin \omega \left( t + \frac{x}{v} \right).$$

於是在該點之總擾動，爲：

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = a \left[ \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \sin \omega \left( t + \frac{x}{v} \right) \right] \\ &= 2a \cos \frac{\omega x}{v} \sin \omega t = 2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin \omega t, \end{aligned}$$

式中  $2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$  一因數之值與時間無關，可視爲在  $x$  處之振幅。但

此值隨距離  $x$ ，而在空間中作週期之變化。當  $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0$  時，即  $x =$

$\pm \frac{\lambda}{4}, \pm \frac{3\lambda}{4}, \dots$ ，或  $\pm \frac{2n+1}{4}\lambda$  處，振幅爲 0；當  $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm 1$  時，

即  $x = \pm \frac{n}{2}\lambda$  處，振幅最大爲  $2a$ （圖 250）。 $n$  爲一整數。故沿此兩波

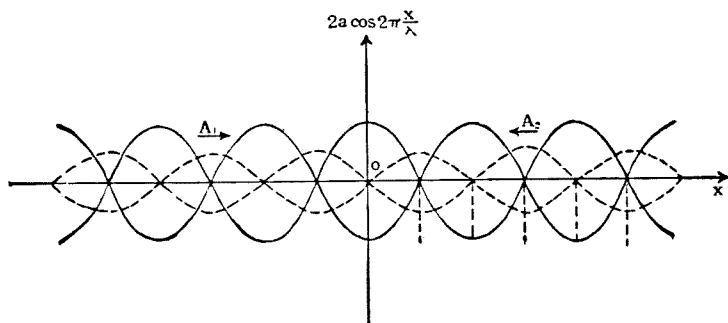


圖 250. 駐波之振幅

之進行路程上，有振幅最大及振幅爲零之定點，交互排列，前者仍稱爲振腹，後者仍稱爲振節。此種現象，稱爲駐波(standing wave)，(參閱 § 213 波之干涉)。

實測駐波中波節或波腹間之距離，即可得波長  $\lambda$  之值，又若頻率  $f$  爲已知，則可計得波動之傳播速度  $v$ 。

吾人於此當恍然絃線及管中氣柱之振動皆駐波也。蓋波動在質中傳遞，每達周界輒行反射。反射之波與入射之波相反進行，互相干涉而生駐波。故駐波即干涉現象之表現也。

今再申述一駐波實驗於次：

繫繩於音叉之一端，而在繩之他端，懸一重體  $W$  (圖 251)。當音叉振動時，即有一列橫波自叉端  $A$  沿繩前進。惟此波列行抵  $B$  後，因  $W$  甚重，不能將其牽動，遂行反射，此兩列之波，構成駐波。

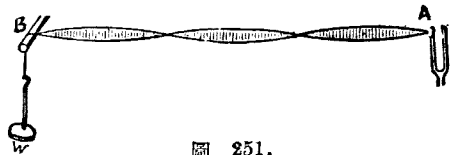


圖 251.

欲駐波之得以成立，須音叉之頻率  $f$ ，與繩之長  $l$ ，及其張力  $W$ ，三者之間有一定之關係。即以音叉頻率之振動，由繩之傳播速度，在繩中前進，而成繩長所許可之波長是也。換言之，音叉之頻率與繩之頻率相等，即

$$f = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{W}{\mu}},$$

吾人常調節重量  $W$  以實現之。

本章 § 207 所述執繩之一端，上下移動而成列波，須移動快慢與

拉緊之力相配合，即係此理。

§ 221. 反射波之相 茲以繩中及管中傳播之波為例，而說明在其端之周界處，反射波與入射波之相之關係。

設繩之一端  $B$  固定於牆，而自其他端  $A$  發送一橫波自左向右前進。當此橫波行抵其固定之端時，此波即被反射。因  $B$  端係固定，故反射波與入射波在此處所必須滿足之條件，為使  $B$  點不動。今若假設另有一波，其形式適為入射波之倒像 (inverse image)，且係自右向左進行 (圖 252)，則此兩波

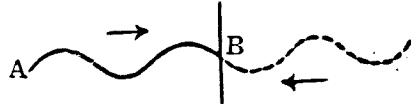


圖 252.

行抵  $B$  點時，因兩波之擾動適相等而相反，故  $B$  點必不動。由是觀之，在繩固定端之

反射波，即為入射波之倒像；或言固定端反射時，波之位相增加  $\pi$ 。如在  $B$  點之入射波為

$$a \sin \omega t,$$

則其反射波為

$$a \sin (\omega t + \pi),$$

於是在距  $B$  點  $x$  處之振動為兩者之和，即

$$\begin{aligned} a \sin \omega \left( t + \frac{x}{v} \right) + a \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \pi \right] \\ = 2a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos \omega t \end{aligned}$$

也。

閉管之閉端反射情形，亦復如是。



若  $B$  端係完全自由者，則當波行抵其處時，此端既無阻止其移動之力，移動遂呈雙倍之值。換言之，在繩之自由端，反射波乃入射波之正像 (erect image, 圖 253)；或言自由端反射時，波之位相不變。管之開端，反射情形亦復如是。

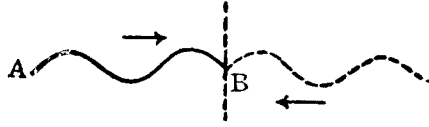


圖 253.

故由稠密媒質而入稀疏媒質之波，其反射波之相與入射波相連續，不生變化；而由稀疏媒質入稠密媒質者，其反射波之相與入射波相差  $\pi$ 。

§222. 波動中能之傳遞——反距離平方定律 振源在媒質中，使其隣接之部分隨之振動，而產生波動時，振源逐漸消失其振動能量，故必繼續不斷供給能量以補償之。媒質中各部分所載之能量，若不因摩擦阻力而化為熱能，則恆又轉授於其隣接之他部分，故在一波動之中，能量恆藉媒質而傳遞。波動者所以傳播一處之能量而散布至他處者也。

今試就球面波論之。假設在媒質中，能量毫無損耗。以振源為中

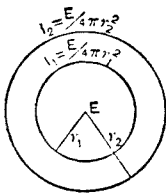


圖 254.

心，作一球面，半徑為  $r_1$ ，其外更作一球面，半徑為  $r_2$  (圖 254)。命  $E$  為振源每秒鐘所發出之能量，則經過第一球面上每平方厘米之能量為

$$I_1 = \frac{E}{4\pi r_1^2};$$

經過第二球面上每平方厘米之能量為

$$I_2 = \frac{E}{4\pi r_2^2}.$$

吾人稱此爲在  $r_1$  及  $r_2$  距離處之能流密度, 其比爲

$$I_1 : I_2 = 1/r_1^2 : 1/r_2^2 = r_2^2 : r_1^2.$$

故能流密度隨其與振源距離之平方而遞減.

在媒質中, 能量密度爲

$$I = 2\pi^2 \rho f^2 a^2,$$

$a$  爲所在處之振幅, 故振幅乃隨其與振源之距離之反比而遞減.

在平面波之各波面上, 能量密度則爲相等, 因其離振源頗遠, 而吾人所考究之媒質範圍又不大也 (§ 209).

## 習題二十九

1. 試依郝更斯原理, 求平面波之反射定律.
2. 設第十二章 § 93 所述之彈簧振子, 原長爲 30 厘米, 求縱波在該彈簧中之傳播速度.

3. 有一前進之波, 其位移在 C.G.S. 制中可以

$$A = 5 \sin(8t + 3x)$$

表之, 求其頻率, 波長及速度.

4. 有一銅線, 其截面積爲 1 毫米<sup>2</sup>. 今若以加 50 克之張力, 求橫波在此線中傳播之速度. 欲橫波在此線中之傳播速度與縱波相等, 須加何張力? 銅之密度爲 8.8 克/厘米<sup>3</sup>. 楊氏彈性係數爲  $11 \times 10^{11}$  達因/厘米<sup>2</sup>.

5. 設鋼線所能受之最大張力, 不得超過每平方厘米 4,000 仟

克，今有長 80 厘米之鋼線一根，問其所能生之最高基音之頻率為何？鋼之密度為 7.8 克/厘米<sup>3</sup>。

6. 將一均勻之棒夾住其中點而以松香布擦之，棒將作何種振動？若夾住其全長之  $\frac{1}{4}$  處，則又何如？設棒長為 1.6 米，密度為 7.8 克/厘米<sup>3</sup>，楊氏彈性係數為  $21 \times 10^{11}$  達因/厘米<sup>2</sup>，試分別計算該棒所發最低及次低之音之頻率。

7. 有閉管長 12 厘米，縱波在空氣中之傳播速度為每秒 332 米。求該管所發最低及次低之音之頻率。若該管兩端全開，求其所發最低及次低之音之頻率。

8. 求音在 30°C. 之空氣中之傳播速度。

9. 求音在 0°C. 時 30 厘米汞高半真空之空氣中之傳播速度。

10. 有縱波以  $15^\circ$  之角自空氣射入水面，求在水中波前進之方向。

12.  $A, B$  二點為同一媒質中之二波源，其振幅皆為 2 厘米，頻率皆為每秒 100 次，其位相之差為  $\pi$ ，媒質傳播之速度為 430 米/秒。設  $A, B$  二點相距 30 米，試求  $AB$  連接線上因干涉而靜止之各點之位置。

13. 求音在氫中之傳播速度。

## 第二十六章 聲 學

§ 223. 聲 物體之振動，引起其周圍媒介質之波動，傳至吾人之耳而起感覺，即成爲聲(sound)。此種振動之物體，曰發聲體，或稱聲源。空氣亦能傳音，故聲波必爲縱波。

彈簧與擺之振動，吾人可見而不可聞，以其頻率甚低故也。但極高頻率之振動，吾人亦不能聞，故耳之聽覺，有其可聞之頻率限度。頻率在 30 以上 5,000 以下者始爲可聞。

聲之大小，由於聲源振動之強弱與離吾人之遠近。空氣以其稠密疏薄之時間的與空間的週期變化(圖 255)傳至耳中之鼓膜，鼓膜即隨之而作強迫振動，其可能之振幅約爲  $\frac{1}{10}$  毫米。聲之小者



圖 255.

將以空氣之壓力變化過微，不足引起鼓膜之振動，吾人無從感覺；故聽聞之起點(threshold of audibility)須有一定之強度。反之，聲之過大者亦令吾人起不快或痛苦之感，鼓膜有破裂之虞，將掩耳而過，此痛感之起點(threshold of feeling)一如聽聞之起點且隨頻率之大小而異。故耳之聽覺又有其可聞之強弱限度。

人耳可聞之頻率與強度限度，如圖 256 所示。二曲線包圍之內

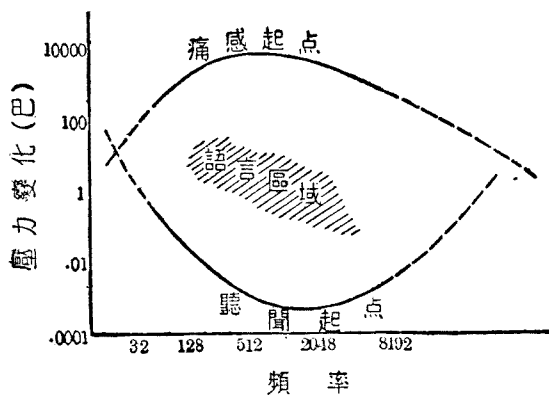


圖 256. 可聞限度

為可聞區域，左右為可聞之頻率範圍，上下為可聞之強度範圍。

人身亦有發聲器，即喉內之聲帶是。聲帶為一薄膜，其張力在某定範圍內，可以任意調節。氣流自肺部經由氣管衝出時，聲帶即因之振動。聲帶所發之音，頻率在 150 與 3,000 之間。其大小亦有不可超越之範圍，如圖 256 中之語言區域 (speech region) 是。

§ 224. 聲之速度 聲為縱波，在固體、液體及氣體中皆可傳遞，但無物質之真空，則不能傳聲。

縱波之傳播速度，已於上章 § 214 言之。聲之速度，不以頻率不同而殊。

在空氣中  $0^{\circ}\text{C}$ . 時聲速為 331.5 米/秒， $20^{\circ}\text{C}$ . 時約為 340 米/秒。溫度愈高，聲音傳播愈速，與絕對溫度之平方根成正比。強烈之爆炸，使空氣氣壓改變頗大者，聲之傳播速度，較上值略大。

吾人可直接測量空氣中之聲速，例如在甲處鳴砲，而在乙處觀察砲火出現至聞到砲聲時所歷之時間。反之，已知聲速，吾人恆可藉以

測定聲源所在之距離。

如在  $A, B, C$  三處 (圖 257), 紀錄敵人砲聲所達到之時間為  $t_A, t_B, t_C$ , 乃以  $B$  及  $C$  為心,  $v(t_B - t_A)$  及  $v(t_C - t_A)$  為半徑 ( $v$  為砲聲之速度) 作圓。再求過定點  $A$ , 作與此兩圓相切之第三圓則第三圓之圓心  $S$  即敵人砲位所在之地。

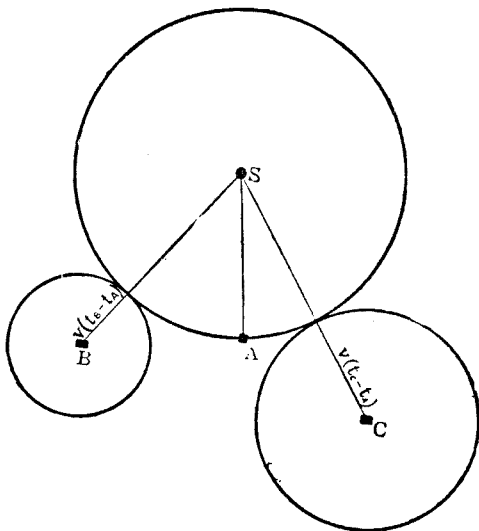


圖 257. 用聲測遠

聲在液體及固體中之速度, 常較在空氣中為大。在水中為 1,441 米/秒, 在鐵中為 4,950 米/秒。故傾耳鐵軌上, 聞知火車聲, 較自空氣中傳來者為早。

表 21. 聲之速度

空氣 0°C.	331.5 米/秒
氫氣 0°C.	1,286
二氧化碳 0°C.	261
水 13°C.	1,441
黃銅棒	3,600
鐵棒	4,950
鋼棒	5,000
木棒	3,300

§ 225. 聲之波長 吾人可聞之聲，其頻率在30與5,000之間，又聲在空氣中之速度為每秒331.5米，則由

$$\lambda = uT = v/f,$$

知吾人可聞之聲，在空氣中，其波長為自11米至6.6厘米，與吾人日常所用器具之大小，同一等級。

同一頻率之聲波長與其速度成正比，故在固體與液體中之波長，常較在空氣中者為大。

§ 226. 聲之性質 物體之振動有漫無秩序及紀律整齊之分，由此發生之聲，亦可大別為二。例如雷鳴砲響以及車輪轆轤之聲，屬於前者，令人聞之，有不快之感，是曰噪聲(noise)；反之，如琴瑟簫笛之聲，屬於後者，令人聞之，心曠神怡，是曰樂音(musical sound)。噪聲之振動既極雜亂無章，故聲學所研究者，概限於樂音。

樂音之特性有三，曰音調，音品及音強。

音調 笙笛之音較號筒之音為高；皮鼓之音則較兩者為低。音之高低，稱為音調，純由振動之頻率而定。振動頻率大者，所生之音調亦較高。

取一圓板，其周緣鑽有許多等距之小孔(圖258)，疾轉此板，而同時自管向孔吹氣，則當管口對孔較多之處吹氣，或轉動較速，所生之音愈高。此種儀器，稱為驗音盤

樂音之頻率，有如下表：

律 音 名	C	D	E	F	G	A	B	C'
階 音 名	do	re	mi	fa	sol	la	ti	do'
頻 率(科學的)	256	288	320	341 $\frac{1}{3}$	384	426 $\frac{2}{3}$	480	512

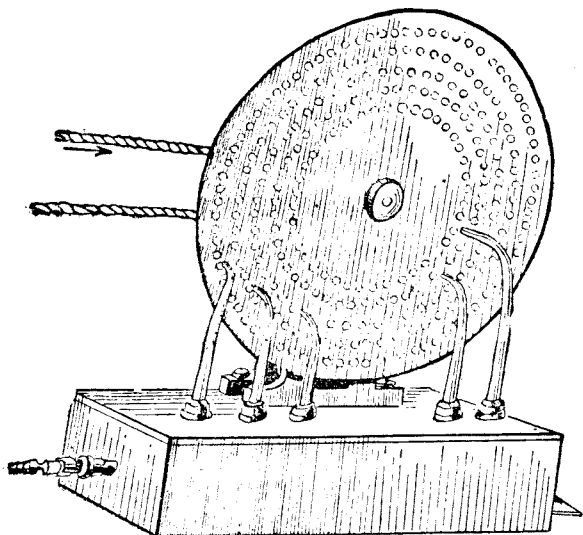


圖 258. 驗音盤

頻 率(絃樂的)	264	297	330	350	396	440	495	528
音 程	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	

頻率比例數(最小整數) 24 : 27 : 30 : 52 : 36 : 40 : 45 : 48

音品 鋼琴所生之音，與笙笛所生者迥異，此因各樂器所生之音，其品質 (quality) 有別故也。音品視聲波之形狀而定。圖 259 示三種之波形，A 為正弦曲線，乃音義或笛所生純音之波形；B

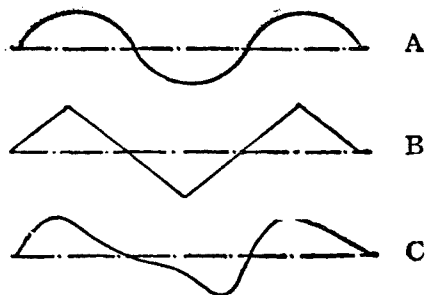


圖 259. 音 品



之波形與由提琴所發生者頗相似；*C*則為開管所生之波形（*B*及*C*皆為複音），此三波之振幅雖相同，其波長亦相等，惟因其形式不同，吾人亦能辨別之。

複音乃為一較強之基音（§217）與數個較弱之陪音（倍振）混合而成。如圖 260，*A* 基音與其二倍音 *B* 及三倍音 *C* 和合而成複音 *D*。

同一樂器，輕奏重敲，音品亦異。如圖 261，為輕吹（*p*）較重吹（*mf*）及重吹（*f*）中 *C* 音之波形。

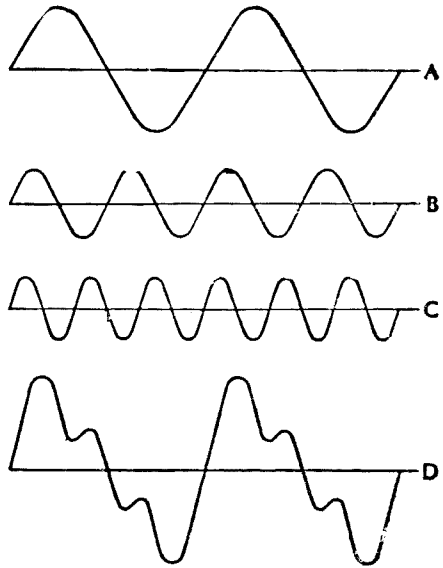


圖 260. 複音

音強 聽官之感覺強度，自必與音波之能量有關，為生理學上之問題。關於此種強弱之感覺，情形頗為複雜，蓋不特同一聲音，對

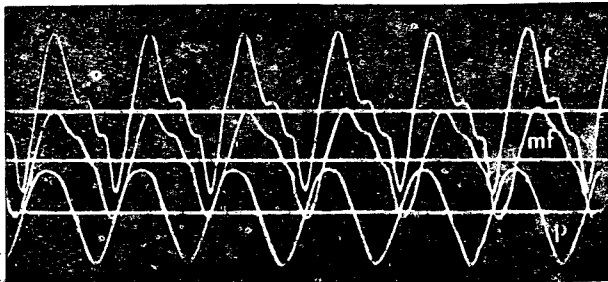


圖 261. 輕吹（*p*）、較重吹（*mf*）及重吹（*f*）之波形

於兩人所生之強弱感覺不同，即對於同一之人，亦復視其健康狀況及心緒之不同而有差異。

音波之能量，在媒質中每立方厘米為 (§ 222)

$$I = 2\pi^2\rho f^2 a^2,$$

式中  $f$  為頻率， $a$  為振幅， $\rho$  為媒質之密度。故振幅愈大，發聲愈強。惟振幅與振源之距離成反比，故離聲源愈遠，聞聲愈弱。可知音強係由聲源之振幅而定。

絕對測量聲音強度，頗為繁複，惟吾人常言及兩音強之比。蓋必兩音強度相差若干倍，吾人方能辨別其有大小，非差多少也，故比較兩音之強弱時，常以其強度之比為準。現今所用以表音強階段 (level of sound intensity) 之單位，稱為裴爾 (bel)，其常用之值，則為裴爾之十分之一，而名之為分裴爾 (decibel)。分裴爾之定義如下：設兩音之強度各為  $I_1$  及  $I_2$ ，而其強度階段之差為  $n$  分裴爾云者，以

$$n = 10 \log_{10} \frac{I_2}{I_1}$$

也。例如  $I_2 = 10I_1$  時，兩音強之差為 10 分裴爾 (即一裴爾)；若  $I_2 = 100I_1$  時，則音強之差為 20 分裴爾。1 分裴爾約為吾人可以分辨兩音強之最小限度，即 1.26 倍也。

§ 227. 聲之反射 聲之傳播達到媒質之周界或遇障礙物時，即行反射。反射角等於入射角 (§ 211)。室外之聲雖多穿牆傳遞而進，每亦反射踰戶而入。如有聲源  $S$  (圖 262)，吾人在隣街  $A$  處即可聞見，到  $H$  處更為清晰，過此反又銷沈，即以其由對面房屋反射而來之故也。山谷回音 (echo) 即是反射之聲。

在廣廳大堂中，牆壁頂地，光滑無塵，孤零獨入，恆覺聲之反射頗強。聲波在場中可經數次之反射，來回之路程既遙，回音與原聲相隔之時間自久，因成不悅耳之混聲 (reverberation, 即前去原聲之回音與後來之原聲相交混)。室內混響，對於聽聞

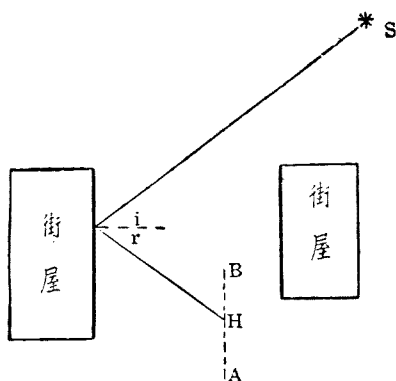


圖 262. 聲之反射

有害殊甚，惟苟完全消除之，則音強亦因而猛減。欲聽悅耳之音樂，固不宜有過多之混響以害清聽，然略帶些許可資調譜。故此事在近代建築學中，頗為重要。

混響之發生既由室內牆壁與頂地所反覆反射之聲波而來，故如遮以柔軟物質，如地毯幃幕，以吸收聲波，則混響即可減少。開啓之窗，任聲波完全通過，一去不返，可視作將射於其上之聲波完全吸收。是以欲比較各種物質之吸音本領，可以一平方米之開窗為單位而計之。每方米物質之吸音本領，以開窗為單位計得之值，稱為吸音係數 (coefficient of sound absorption)。例如棉被四方米之吸音本領與三方米之開窗相等，則棉被之吸音係數為 0.75。下表 (見次頁) 列舉常用物質之吸音係數。

音樂會之聽眾實為良好之吸音體，為己為人，減少混響，誠美事也。聽眾稀少，音樂家每不能作良好之演奏，或由其心理作用，實亦有其物理之原因也。

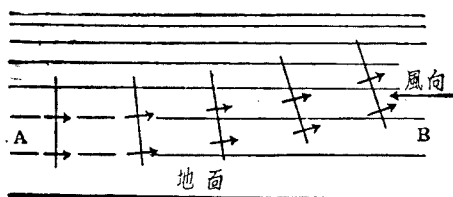
表 22. 吸音係數

開窗	1.000	毛呢	0.78
硬木	0.061	聽者(每人)	0.44—0.6
磚	0.025	木座(每位)	0.003
地毯	0.20		

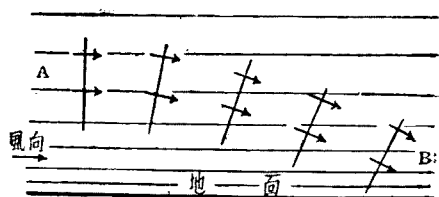
聲波傳入海中，至海底而反射，若測得聲波上下往返所需之時間，即可用以計算海之深度。吾人於此常用超聲波(supersonic wave)，即其頻率甚高為不可聞者。此法亦可作偵察潛水艇等之用。同理，由爆炸時所發之巨聲，在地層內不連續面上之反射，可計算礦脈所在之處，以為探測油礦等之用。

§ 228. 聲之折射 空氣中地面與上層之溫度不同，或因有風，即顯聲之折射現象。風之速度通常在地面較在高處為小，是以當聲

音進行之方向與風向相反時，離地愈高，其傳播速度愈小，聲之波面遂向上折進，如圖263(甲)。故在  $B$  處之人，每不易聞  $A$  處之聲，逆風故也。如風向與聲波進行之方向一致，則離地愈高，傳播速度愈大，所得結果遂適相反；即波面向下折轉，如圖 263(乙)。  $B$



(甲)



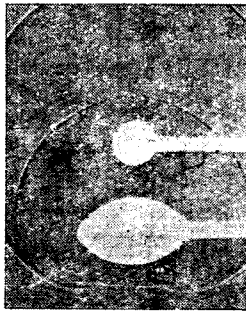
(乙)

圖 263. 聲之折射

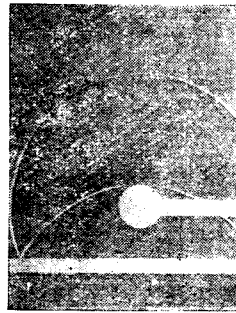
處之人聞之，格外清晰，順風故也。順風而立，大聲疾呼，則前面低處與後面高處較易聽見，其理即基於此。

晴朗之日，高處溫度較低，故聲之傳播速度隨高度而減 (§ 224)。聲音之波前途亦向上折轉，情形完全與逆風相似。在夜間及太陽初出或西入時，地面溫度較低，聲之傳播情形與順風相似。「夜半鐘聲到客船」，非僅由於夜闌人靜之故也。

用橡皮袋內盛二氧化碳，使成透鏡狀，於其軸上一點置錶，則於他一邊之其軛點，聞錶聲特別清晰，此為在室內作聲之折射實驗。圖 264 (甲)，即由此實驗照像所得之折射聲波。圖 264 (乙) 則為反射之聲波。



(甲)



(乙)

圖 264. 聲之折射波與反射波

§ 229. 聲之干涉 欲明聲之干涉，最好用同一聲源之波，蓋此方足保證此兩振動必為完全相同也。置音叉於圖 265 之管口  $A$  外，而自  $B$  管口聽之，管之半部可任意拉出，如伸縮喇叭然。音叉之聲在  $C$  點分成二路前進，至  $D$  而復合。此兩音所經路程之差為  $CFD - CED$ 。此差值若等於波長之整數倍，即  $n\lambda$ ，則兩波之相恰好一致 (§ 213)，

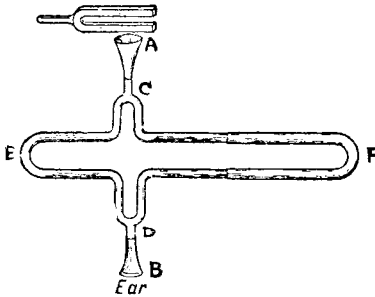


圖 265. 聲之干涉

$B$  點所聞之聲加強；若適等於半波長之奇數倍，即  $(2n+1)\lambda/2$ ，則兩波之相恰好相反，彼此干涉而消滅，在  $B$  無聲可聞。

利用此法，可測空氣中純音之波長，因而測定其頻率。

### § 230. 拍音 頻率相差極

小之二純音，同時合奏，則由干涉

結果，成爲時強時弱之音，曰拍 (beat) (§ 95)。試取兩相同之音叉，以少許白蠟塗於一叉之端，或將琵琶上相同之兩絃略鬆其一，於是兩音不協，拍音遂生。拍音之頻率即兩純音頻率之差。若拍頻在 16 以上，人耳不能一一判別，即不覺其爲拍音，但知其音調頗低耳；若頻率在 16 以下，吾人可以數得之。用拍以定兩純音頻率之差，實爲一最可靠之方法。樂師調節樂器，即賴拍音，使拍音消滅，則兩頻率相等。

§ 231. 共鳴 置音叉於玻璃量管之口上，而使之振動(圖 266)，管中盛水。管中氣柱受音叉影響，即作強迫振動，惟水面至適當高度時，即管中氣柱達適當之長度，則音叉之音特強。斯時氣柱本身之固有頻率 (natural frequency)，適與音叉之頻率相等。氣柱隨音叉而振動，步伐一致，因而助長音叉之振動，如是聲應氣求，稱爲共鳴 (resonance)。吾人即可由共鳴氣柱之長，測

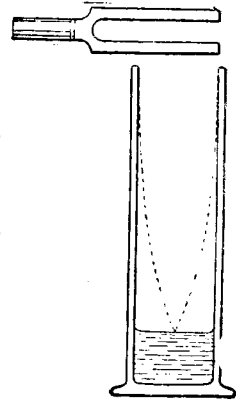


圖 266. 共鳴

定音叉之頻率。

故音叉每裝於其鳴匣上。當音叉在其其鳴匣上振動時，雖二者之基音符合，而倍音則不相同，故用其鳴匣之音叉，不但所發之基音較強，其所發之音因而亦較純粹。提琴之木身及鋼琴之聲板，均為利用其鳴，以擴大樂器之聲音。吾人之口腔，亦為聲帶之其鳴器。

赫爾母慈 (Helmholtz) 曾利用一套黃銅球形共振器 (resonators, 圖 267)，以分析語音。器有大小兩口，大口備接收傳來之聲波，小口可插入耳中聽之。各個器內空氣各有其固有之基音，如傳來聲波中有與其基音頻率相同者，即生其鳴，否則寂然。如是利用一套之共振器，即可分析任何聲音，而知其成分。又依分析結果，利用一組音叉，其頻率之比為 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 者中之二個或幾個，而合振之，即可得原來之音。

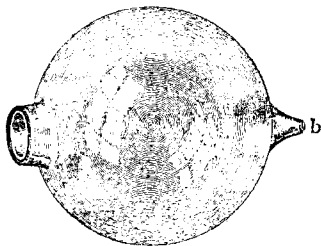


圖 267. 共振器

§ 232. 聲之駐波 管絃樂器振動，皆現駐波。量駐波之長，知空氣之聲速，即可測定音之頻率；反之，已知振動頻率，量駐波之長，即可在實驗室內，測定音在各種物體中之速度。

如圖 268，管之一端塞以固定活塞 *A*，其他端之外夾一金屬棒 *B*，棒之一端釘一圓盤，插入管內。管內置有乾燥之軟木屑或石松之種子，最佳用水晶之粉末。於棒之中點 *C* 或其  $\frac{1}{4}$  長處夾住，而以敷有松香之絹，在棒之他一端摩擦使之振動，則因圓盤之振動，遂有稀密相間之波浪向 *A* 進行，抵 *A* 即被反射。若調節 *A* 在管中之位置，則

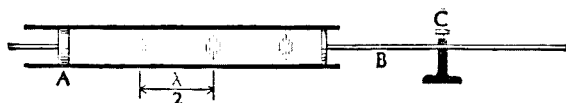


圖 268. 聲之駐波

此向  $A$  進行及自  $A$  反射之兩波，互相干涉而呈駐波。於是置於管中之細粉，即自運動最烈之波腹處移動，而聚集於波節。於是吾人可直接量兩波節間之距離，而得聲在管中之波長。

康脫 (Kundt) 利用此法以測各種氣體之聲速。先後儲氣於管中，而測駐波之長；此等駐波波長之比，即各種氣體聲速之比也。

至於管中氣柱之頻率，即棒之頻率，可由棒長與棒之聲速決定。通常金屬之聲速較氣體者為大。故管中駐波波長頗小，活塞  $A$  位置之調節，在此實驗中殊不嚴格，而管亦即棒之共振器也。

§ 233. 聲之繞射 巷內哭聲，每達街外，此非由於反射，更非拆射，實由聲之繞射 (diffraction)。聲波達巷口時 (圖 269)，即以巷口各點為振動中心，依郝更斯原理而生副波，向外四周傳播，故聲常可繞過屋角或山谷等障礙物。

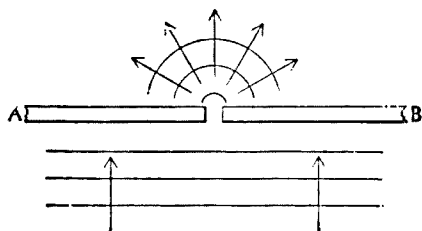


圖 269. 聲之繞射

繞射現象，即由干涉而成，為波動應有之結果。關於繞射之詳情，當俟光學中討論之。

§ 234. 板之振動 板或膜之振動，在應用上亦頗重要，如鑼，鼓，鐘等皆是。電話耳機，即賴一薄板之振動。

板之振動情形，視其周界之形狀，與固定之點，及打擊之處而定，



亦有其自然之振動頻率，可以細砂或粉末均勻灑布於板上，而觀察之。當板振動時，細砂即移聚於無振動之處，而現出種種有規則之節線 (nodal lines)，如圖 270 所示。

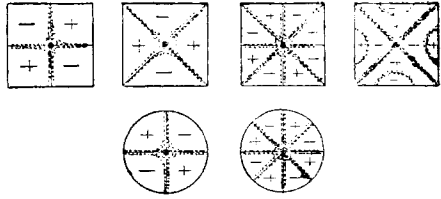


圖 270. 板之振動

相隣之二區域，一方向上時則他方向下，以 (+) 及 (-) 表示之。

§ 235. 音之諧和 凡兩音其頻率之比，可以簡單整數表示者，同時或接連發生，每引起吾人愉快之感覺。例如頻率之比為 2 與 1，3 與 2，4 與 3，5 與 4，或 6 與 5 等兩音合奏，甚為悅耳，稱之為諧和 (harmony or consonance)。蓋如是，兩音之倍音頗多同類，不生拍音，將無輾轉之音，響雜其間也，此為諧和之物理的意義。如以  $C, E, G$ ;  $G, B, D'$ ; 或  $F, A, C'$  三音合奏，其頻率之比為 4 : 5 : 6，最為悅耳；在音樂上稱為長三和音 (major triad)。

§ 236. 語言與四聲 各種語言多由母音及子音而成。母音中各含有頻率一定之幾個純音，稱為母基音，此母音所以各有其特別之音色也。圖 271 為英文在 *moo* 中 *oo* 音之振動。母基音之構成非由於聲帶，而為鼻腔及喉腔之振動。試開鋼琴之蓋，提起踏板，向之唱

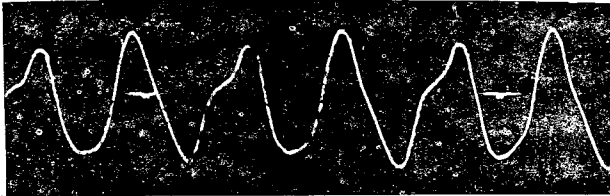


圖 271. 英文 oo 音之振動

一母音，則鋼琴中必有某數個純音，與之共振，而發出一清晰可聞的同樣之母音，是即母音之音色，由於頻率一定之幾個純音互相混合而成之明證也。留聲機之話片，若不依準確之速度轉動，則因母基音之音調改變，而影響於母音之特性。

子音則為噪音，情形較為複雜。

我國聲韻之所謂平上去入四聲者，如夫撫父福，即以其頻率之不同而分。陳澧云：「古無平上去入之名，借宮商角徵羽以名之；所謂宮羽徵商，即平上去入也」。據計終勝所說，\* 平聲即長音階之基音；高八音之倍振(octave)，即入聲；由基音高二音階所生之音，所謂長三度音程(major third)，即去聲；由去聲再上升一音階有半，所謂完全五度音程(fifth)，即上聲。是我國之四聲，實與音樂上之和聲，天然吻協，謂我國語配稱天籟，其誰曰不宜？

說話時，音調不同，意義攸分，則由其頻率之改變而成。或上升，或下降，或先降後升，或先升後降。如說‘那兒’與‘那兒？’，可以由音調分別出來，又如說‘是’，可以表示‘對的’，‘不差’，‘很好’，‘真的嗎？’，‘不見得吧！’，‘這很清楚’，及‘可能的，不過……’等等意思。

§ 237. 聲之杜伯拉效應 若聲源與聽者間，有相對之運動，則聽者所聞見之音高，與聲源之頻率略有差別。例如當火車馳進車站時，其汽笛之音較高；離開時，則較低。又如聽者向聲源前進，聞及之音較高，反之較低。聲源與聽者之相對速度愈大，音調之突變亦愈顯。此種現象之說明，因為杜伯拉所創，稱為杜伯拉效應 (Doppler's effect)。

\* 見東方雜誌 第四十二卷，第十一號，民國三十五年，六月一日發行。

命聲源  $O$  之振動頻率為  $f$ ，以速度  $v$  前進，聲之傳播速度為  $V$ ，則一秒鐘後，聲源所發出之第一波與聲源間之距離，在聲源之前方為  $V-v$ ，在後方為  $V+v$  (圖 272)，此中同有  $f$  波。故在聲源之前方，波長縮成  $\lambda = \frac{V-v}{f}$  在後方則伸成  $\lambda = \frac{V+v}{f}$ ，各仍以速度  $V$  前

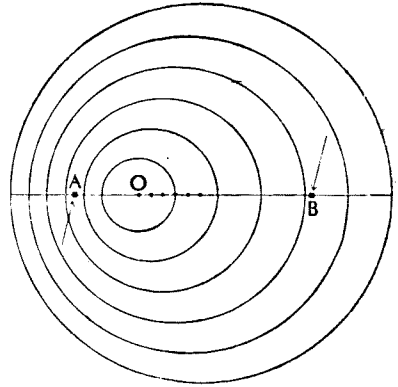


圖 272. 杜伯拉效應

進。於是在聲源之前方的聽者  $A$ ，每秒鐘收到之波數為

$$f' = \frac{V}{\lambda} = \frac{V}{V-v} f,$$

而覺音調增高。反之，在聲源後方之聽者  $B$ ，每秒鐘所收到之波數僅為

$$f' = \frac{V}{V+v} f,$$

而覺音調減低。

若聲源靜止，聽者向之或背之，以速度  $v$  前進，則所收到之音之頻率為

$$f' = \frac{V \pm v}{V} f.$$

總而言之，聲源與聽者間若有相對速度  $v$  (相向為正，相背為負)，則音頻之改變  $\Delta f$  為

$$\frac{\Delta f}{f} = \pm \frac{v}{V}$$

§238. 物體運動較音速為快時之情形 在空氣中聲速為每秒332米，鎗砲之彈，其速度又較音速為大者，故在聞鎗砲聲之先，彈已在目前，不及躲避。大戰中所用火箭，多較音速為快，以致聲音探測器失其效用。

命  $V$  為彈前進之速度，較音速  $v$  為大，其經過之處的四周空氣被壓縮，以縱波之速度（即音速  $v$ ）向前傳遞，其波面成爲壓波（bow wave），彈挾壓波以俱進。若彈離鎗砲時爆炸所成之聲波，則望塵莫及，尙瞠乎其後也。

壓波間所成之角  $2\phi$ （圖 273），合下列之關係：

$$\frac{v}{V} = \sin \phi$$

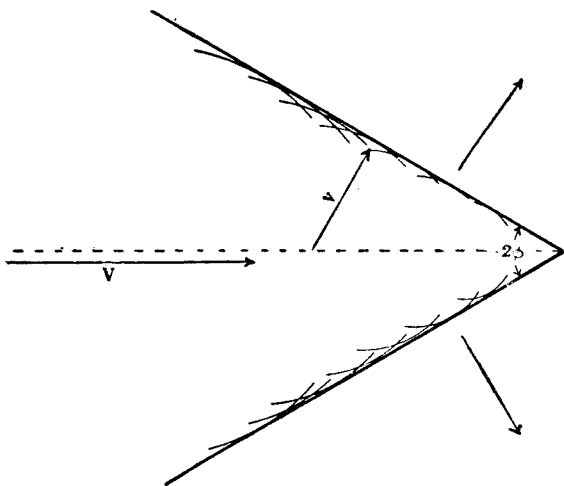


圖 273. 壓波

壓波波面之空氣密度較大，因而光起折射，故可以照相顯出，如圖 274. 放射魚雷，水面即成壓波，為海軍所習見。

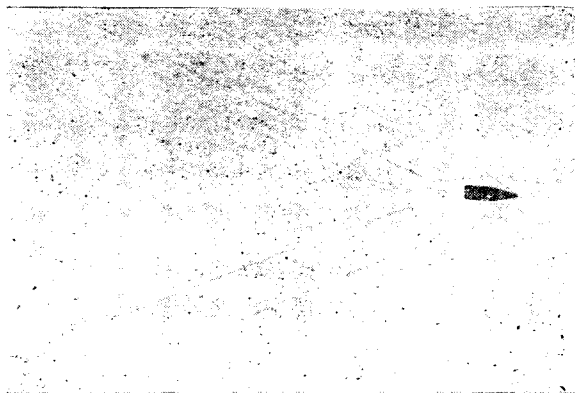


圖 274. 魚彈之壓波

### 習題三十

1. 火車開離車站時，鳴放警笛。某工人於鐵軌中間車聲後 3 秒鐘，始聞警笛之聲。問該工人離站多遠？

2. 某要隘口，南北雙峰聳峙，石壁直立，二壁相距 600 米。北風怒號。守兵在隘口放鎗，求最初三回聲相隔之時間為 1.5 及 1 秒，守兵離二壁之距離與風之速度。

3. 設有孔盤，其周圍共有 90 小孔。今對各孔吹氣，同時轉動孔盤，其所生之音與中階 C 音互拍之頻率為每秒 8 次。問孔盤每秒轉動若干轉？

4. 設有一端閉塞之管長 60 厘米求其基音及首三個倍音之頻率。該管之音調在溫度  $20^{\circ}\text{C}$ . 及  $0^{\circ}\text{C}$ . 時完全相同，求該管之線脹係數

5. 作康脫聲管實驗之銅棒長 1 米，於其中點處夾住之。管中爲空氣。振動發生後，其各粉末堆間之距離爲 99 毫米。銅之密度爲 8.9 克/厘米<sup>3</sup>。試求銅之長變彈性係數。

若管中盛氦而作實驗，則粉末堆間之距離爲 290 毫米，求氦之定壓比熱與定容比熱之比。

6. 通常談話之時所需之功率爲 10 微瓦 (microwatt)，而聞聽起點約爲 0.6 微微瓦，問談話之聲可達多遠？離談話 5 及 10 米處，音強相差多少分斐爾？

7. 人坐火車中，車行每小時 40 公里，前面有另一火車在平行之軌上相向駛來，聞其警笛之聲近於 C' 音，待其駛過後，再開警笛之聲，則近 A 音。求該車警笛之頻率及其駛行之速度。

8. 鎗彈之壓波成  $30^\circ$  角，求其前進之速度。

# 附 錄

三 角 函 數 表

DEGREE	SINE		TANGENT		COTANGENT		COSINE		DEGREE
0	0.0000		0.0000		∞		1.0000		90
1	.0175	175	.0175	175	57.29		.9998	92	89
2	.0349	174	.0349	174	28.64		.9994	94	88
3	.0523	174	.0524	175	19.08		.9986	98	87
4	.0698	174	.0699	176	14.30		.9976	16	86
5	0.0872		0.0875	176	11.43		0.9962		85
6	.1045	173	.1051	177	9.514		.9945	17	84
7	.1219	174	.1228	177	8.144		.9925	20	83
8	.1392	173	.1405	177	7.115		.9903	22	82
9	.1564	172	.1584	179	6.314	801	.9877	26	81
						643		29	
10	0.1738		0.1763	181	5.671		0.9848		80
11	.1908	172	.1944	182	5.145	526	.9816	32	79
12	.2079	171	.2126	183	4.705	440	.9781	35	78
13	.2250	169	.2309	184	4.331	374	.9744	37	77
14	.2419	169	.2493	186	4.011	329	.9703	41	76
						279		44	
15	0.2588		0.2679	188	3.732		0.9659		75
16	.2756	168	.2867	190	3.487	245	.9613	46	74
17	.2924	166	.3057	192	3.271	210	.9563	50	73
18	.3090	166	.3249	194	3.078	193	.9511	52	72
19	.3256	164	.3443	197	2.904	174	.9455	56	71
						157		58	
20	0.3420		0.3640	199	2.747		0.9397		70
21	.3584	164	.3839	201	2.605	142	.9336	61	69
22	.3746	162	.4040	205	2.475	130	.9272	64	68
23	.3907	161	.4245	205	2.356	119	.9205	67	67
24	.4067	160	.4452	207	2.246	116	.9135	70	66
						101		72	
25	0.4226		0.4663	214	2.145		0.9063		65
26	.4384	158	.4877	218	2.050	95	.8988	75	64
27	.4540	156	.5095	222	1.963	87	.8910	78	63
28	.4695	155	.5317	226	1.881	82	.8829	81	62
29	.4848	153	.5543	231	1.804	77	.8746	83	61
						72		86	
30	0.5000		0.5774	235	1.732		0.8660		60
31	.5150	150	.6009	240	1.664	68	.8572	88	59
32	.5299	149	.6249	245	1.600	64	.8490	92	58
33	.5446	147	.6494	251	1.540	60	.8407	95	57
34	.5592	146	.6745	257	1.483	57	.8320	97	56
						55		98	
35	0.5736		0.7002	263	1.428		0.8192		55
36	.5878	142	.7265	271	1.376	52	.8090	102	54
37	.6018	140	.7536	277	1.327	49	.7986	104	53
38	.6157	139	.7813	285	1.280	47	.7880	106	52
39	.6293	136	.8098	293	1.235	45	.7771	109	51
						43		111	
40	0.6428		0.8391	302	1.192		0.7660		50
41	.6561	133	.8693	311	1.150	42	.7547	113	49
42	.6691	130	.9001	321	1.111	39	.7431	116	48
43	.6820	129	.9325	332	1.072	39	.7314	117	47
44	.6947	127	.9657	343	1.036	36	.7193	121	46
						36		122	
45	0.7071		1.0000		1.000		0.7071		45
DEGREE	COSINE		COTANGENT		TANGENT		SINE		DEGREE

NATURAL NUMBERS											PROPORTIONAL PARTS								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0702	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	6	7	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	3	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7



NATURAL NUMBERS										PROPORTIONAL PARTS										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
55	7404	7412	7410	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	3	4	5	6	7			
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	6	7		
57	7559	7566	7574	7582	7590	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	6	7		
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7	
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	2	3	4	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	2	3	4	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9026	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
97	9869	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6

