高級中學教科適用

最新實用三角學

錢克仁編著

高級中學教科適用

最新實用三角學

錢克仁編著

開明書店印行

最 新 實 用 三 角 學

三十五年七月初版　三十六年七月再版

每冊定價國幣二元五角

編 著 者　錢 克 仁

發 行 者　開 明 書 店
代表人范洗人

印 刷 者　開 明 書 店

(104 P.) W　仁

編輯大意

一. 本書依據二十九年七月頒布之高中課程標準編輯，足供高級中學第一學年平面三角學教學之用.

二. 本書共分九章，前五章注重三角形之解法，以及實用問題之解決；後四章注重理論之探究，以備學生以後進修高深數學之用.

三. 初中畢業學生雖曾習過對數，但初中代數學中未能廣用對數，故本書不厭重複，第四章仍專論對數，俾學生習之，熟能生巧，於解三角形時，收精確敏捷之效.

四. 座標理論爲近世數學重要基礎之一，本書特加詳論，使高中一年級學生先得一明確概念，嗣後對函數之變跡，方程式之圖解，始勿再視爲畏途.

五. 三角學爲理論部份較少之數學教程，故本書特多選例題，以爲學生解題之示範. 多備習題，以爲學生習作思考之用.

六. 本書受劉薰宇先生之鼓勵，並承借大量參考書，始行動筆寫作. 幾月以來，隨時得劉先生珍貴意見，並蒙校閱修正，於此編者特誌深摯之謝意.

編　者

三十二年七月 貴州修文

目　　錄

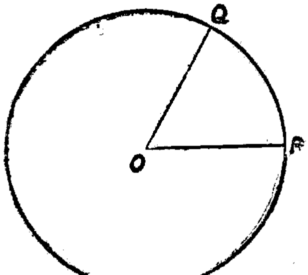
最新實用三角

第一章　角之量法

1. 三角學　三角學一詞希臘原文之意爲三角形之測量，亦卽在研究三角形之邊與角之關係也．但輓近，三角學之範圍大有擴張，現包括所有關於角之函數關係之研究，其結果在純粹理論之研究上或在實用上均爲極重要之工具

2. 角之單位　二直線相交卽成一角．角之大小，必先定單位以量之．量角之單位有三種，分述如下：

(一)六十分制　六十分制以「度」爲單位，一度爲直角之九十分之一，亦爲圓周三百六十分之一弧所對之圓心角．度以下，復分一度爲六十分，再分一分爲六十秒．度，分，秒，吾人以 $^\circ$, $'$, $''$, 表之；例如五度三分五十秒記爲 $5^\circ 3' 50''$．度以下之分秒亦有以十進法記之者，如六度半記如 $6.5^\circ = 6^\circ 30'$．



第一圖

(二)弧度制　以 r 爲半徑作圓；圓上弧長等於 r 之弧所對之圓心角稱爲一弧角．如圖，設 PQ 之弧長等於半徑 OP，則

$$\angle POQ = 1 \text{ 弧角}.$$

已知圓周爲 $2\pi r$，卽圓周爲半徑 r 之 2π 倍，故環繞一點一周所得之

角可分爲 2π 個弧角.

(三)百分制　分直角爲一百「級」，一級爲一百分，一分爲一百秒，是爲百分制. 級，分，秒，以 ^{g}，$'$，$''$ 表之；例如十一級二十分八十五秒記爲 $11^g\ 20'\ 85''$.

六十分制爲昔日巴比倫人所創，巴族天文學家觀測天象時以六十進位，故度爲六十分，分爲六十秒. 此制通行，垂四千餘年，爲世人稔知，實用上多用此制，至今不衰. 弧度制自西曆十八世紀起始通行，在高等數學中類皆用之，因其可直視之爲數而免寫符號故也. 例如角爲 3 弧角可祇書爲 3. 百分制爲十八世紀末法國大革命時改制之際所定，故又稱法國制. 然因六十分制通行已久，一旦改制，各種觀測結果，以及成案均須更改，似無必要；此制終未廣爲應用.

3.　**各種單位間之關係**　因定直線上一點，將線繞轉一週後，復合初位，所得之角爲 2π 個弧角；但此角又爲三百六十度，故

$$2\pi\ \text{弧角} = 360^\circ; \tag{1}$$

即
$$1\ \text{弧角} = \frac{180^\circ}{\pi} \qquad (\pi = 3.14159\cdots)$$
$$= \frac{180^\circ}{3.1416}$$
$$= 57^\circ.2957 = 57^\circ\ 17'45'';$$

反之
$$1^\circ = \frac{2\pi\text{弧角}}{360} = \frac{\pi\text{弧角}}{180}$$
$$= \frac{3.1416\text{弧角}}{180}$$

$= 0.01745$弧角

由(1)讀者可自推算：

$$180° = \pi \text{弧角}, \quad 270° = \frac{3\pi}{2}\text{弧角},$$

$$90° = \frac{\pi}{2}\text{弧角}, \quad 30° = \frac{\pi}{6}\text{弧角等}.$$

設一角 α，以六十分制計之爲 D 度，以弧度制計之爲 R 弧角，以百分制計之爲 G 級.

$$\text{因} \quad \text{直角} = 90° = \frac{\pi}{2} = 100^g,$$

則 $\quad \dfrac{D}{90}, \dfrac{R}{\frac{\pi}{2}}, \dfrac{G}{100}$ 三者均表 α 角與一直角之比，因得公式

$$\frac{\alpha\text{角}}{\text{直角}} = \frac{D}{90} = \frac{R}{\frac{\pi}{2}} = \frac{G}{100}. \tag{2}$$

例如一角爲 $60°$，則 $D = 60$，代入(2)式，

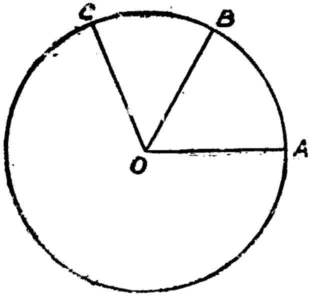
則 $$R = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot D}{90} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 60}{90} = \frac{\pi}{3},$$

即 $60°$ 爲 $\frac{\pi}{3}$ 弧角.

$$G = \frac{100D}{90} = \frac{100.60}{90} = 66.6667$$

即 $60°$ 爲 $66^g\ 66'\ 67''$.

4. 弧長 設$\angle AOC$爲任意一圓心角，則因圓心角之大小與所張之弧之長成正比例，故


第二圖

$$\frac{\angle AOC}{\angle AOB}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{\overset{\frown}{AB}}$$

用弧度制時，$\overset{\frown}{AB}=$半徑，而$\angle AOB$爲一單位角，故

$$\angle AOC=\frac{\overset{\frown}{AC}}{\text{半徑}}\text{弧角;}$$

即 圓心角等於$\dfrac{\text{圓心角所張之弧長}}{\text{半徑}}$弧角.

又 $\overset{\frown}{AC}=\angle AOC.$ 半徑，

即一圓弧之長爲半徑與此弧所對圓心角（用弧度制）之乘積.

例 1. 設圓半徑爲 2 尺 5 寸，圓心角α所張之弧長爲 1 尺，求α角.

解. $\alpha=\dfrac{\text{弧長}}{\text{半徑}}=\dfrac{1}{2.5}=0.4$

故 α 爲 0.4 弧角，即 $57°\ 17'\ 45''\times 0.4=14°19'26''.5$

例 2. 設圓半徑爲 5 尺，求圓心角爲 $33°\ 15'$ 所張之弧長.

解. 先化 $33°\ 15'$ 爲弧角.

$$33°\ 15'=33\frac{1}{4}°$$

$$35°\ 15'=33\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{180}\text{弧角}$$

$$=\frac{133}{720}\pi\text{弧角}$$

$$\text{弧長}=\text{圓心角}\times\text{半徑}$$

$$=\frac{133}{720}\pi\cdot 5$$

$$=\frac{133}{144}\cdot\frac{22}{7}\qquad(\text{取}\pi=\frac{22}{7})$$

$$=2\frac{65}{72}=2.9\text{强}$$

即弧長爲 2.9 尺強.

習　題　一

以百分制表下列諸角:

1. $69^\circ\,13'\,30''$

答: $76^{g}\,91^{`}\,66^{``}.7$

2. $19^\circ\,0'\,45''$

答: $21^{g}\,12^{`}\,50^{``}$

$142^\circ\,15'\,45''$

答: $158^{g}\,6\;\,94^{``}.4$

以六十分制表下列諸角:

4. $1^{g}\,2^{`}\,3^{``}$

答: $55'\,5''.8$

5. $56^{g}\,87^{`}\,50^{``}$

答: $50^\circ\,11'\,15''$

6. $37^{\backprime} 5^{\backprime\backprime}$

答: $20' 0.4''$

7. 兩角之和爲 80^g, 其差爲 18°,問各幾度?

答: 45°, 27°.

8. 設三角形三角之比爲 4: 5: 6, 問三角各爲幾弧角?幾度?

答: $\frac{4\pi}{15}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{5}$;

48°, 60°, 72°.

9. 設一二等邊三角形之底角爲頂角之 12 倍,問頂角爲幾級?

答: 8^g.

計算下列諸題時, 可設 $\pi = \frac{22}{7}$.

10. 一飛輪每秒鐘轉動 35 周, 問轉 5 弧角須時若干?

答: $\frac{1}{44}$ 秒.

11. 一鐘分針長 4.4寸, 問一小時間針行之弧長若干?

答: 0.27 寸.

12. 繫馬於樹,馬張緊全繩走 52.36 尺,樹端之繩張角 75°, 求繩長.

答: 40 尺.

13. 前題, 若繩長 27 尺, 樹端繩之張角爲 70°, 求馬在繩之他端走路若干?

答: 33 尺.

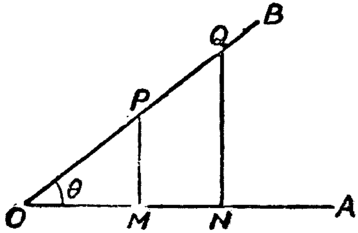
14. 一人跑步於周長 792 公尺之圓形跑道上，平均每分鐘經歷之圓心角為 $2\frac{6}{7}$ 弧角，問此人若跑路 9 公里，須時若干？(1公里＝1000公尺)

答：25 分

第二章 三角函數

5. 銳角之三角函數

設二直線 OA, OB 交成銳角 θ，在 OB 上任取二點 P, Q，作 PM，QN 垂直於 OA. 則所得 $\triangle POM$，$\triangle QON$ 為二相似三角形，因二者均有直角及 θ 故也. 相似三角形對應邊之比相等，故有



第 三 圖

$$\frac{MP}{OP}=\frac{NQ}{OQ}=\frac{\theta\text{之對邊}}{\text{斜邊}},$$

$$\frac{OM}{OP}=\frac{ON}{OQ}=\frac{\theta\text{之隣邊}}{\text{斜邊}};$$

$$\frac{MP}{OM}=\frac{NQ}{ON}=\frac{\theta\text{之對邊}}{\theta\text{之隣邊}},$$

$$\frac{OM}{MP}=\frac{ON}{NQ}=\frac{\theta\text{之隣邊}}{\theta\text{之對邊}},$$

$$\frac{OP}{OM}=\frac{OQ}{ON}=\frac{\text{斜邊}}{\theta\text{之隣邊}},$$

$$\frac{OP}{MP}=\frac{OQ}{NQ}=\frac{\text{斜邊}}{\theta\text{之對邊}}.$$

吾人因此得知，一角之二邊任意延長，其所成直角三角形之邊之比為一定. 然若角有變更，則所成直角三角形之邊之各比均將隨之變值. 因此，各邊之比為角之函數. 一角 θ 所在直角三角

形中各邊之比稱 θ 之三角函數，即上述之六種. 角之三角函數既有六種，吾人必各冠之以名，以爲區別.

命 $\dfrac{MP}{OP}=\dfrac{\theta\text{之對邊}}{\text{斜邊}}=Sin\,\theta$， 讀如 θ 之正弦(*Sine*)；

$\dfrac{OM}{OP}=\dfrac{\theta\text{之隣邊}}{\text{斜邊}}=Cos\,\theta$， 讀如 θ 之餘弦(*Cosine*)；

$\dfrac{MP}{OM}=\dfrac{\theta\text{之對邊}}{\theta\text{之隣邊}}=Tan\,\theta$， 讀如 θ 之正切(*Tangent*)；

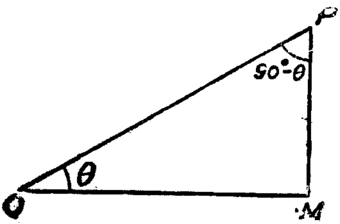
$\dfrac{OM}{MP}=\dfrac{\theta\text{之隣邊}}{\theta\text{之對邊}}=Cot\,\theta$， 讀如 θ 之餘切(*Cotangent*)；

$\dfrac{OP}{OM}=\dfrac{\text{斜邊}}{\theta\text{之隣邊}}=Sec\,\theta$， 讀如 θ 之正割(*Secant*)；

$\dfrac{OP}{MP}=\dfrac{\text{斜邊}}{\theta\text{之對邊}}=Csec\,\theta$， 讀如 θ 之餘割(*Cosecant*).

$Sin\,\theta$. $Cos\,\theta$ 既爲 θ 之函數，則 $1-Cos\,\theta$, $1-Sin\,\theta$ 亦爲 θ 之函數; 命 $1-Cos\,\theta=Vers\,\theta$，讀如 θ 之正矢(*Versed Sine*)；

$1-Sin\,\theta=Covers\,\theta$，讀如 θ 之餘矢(*Coversed Sine*). 因是，六種三角函數之外，復得二種，惟後二者較爲少用鮮見.



第四圖

6. 餘角函數

在直角三角形 $\triangle MOP$ 內，設 $\angle MOP=\theta$，則 $\angle MPO=90°-\theta$，即 $\angle MPO$ 爲 $\angle MOP$ 之餘角.

就 $\angle MPO$ 處觀之，則 MO 爲

其對邊，PM 為其鄰邊，故有

$$\operatorname{Sin}(90°-\theta)=\operatorname{Sin} MPO=\frac{MO}{PO}=\operatorname{Cos} MOP=\operatorname{Cos}\theta,$$

$$\operatorname{Cos}(90°-\theta)=\operatorname{Cos} MPO=\frac{PM}{PO}=\operatorname{Sin} MOP=\operatorname{Sin}\theta,$$

$$\operatorname{Tan}(90°-\theta)=\operatorname{Cot} MPO=\frac{MO}{PM}=\operatorname{Cot} MOP=\operatorname{Cot}\theta,$$

$$\operatorname{Cot}(90°-\theta)=\operatorname{Cot} MPO=\frac{PM}{MO}=\operatorname{Tan} MOP=\operatorname{Tan}\theta,$$

$$\operatorname{Sec}(90°-\theta)=\operatorname{Sec} MPO=\frac{PO}{PM}=\operatorname{Csc} MOP=\operatorname{Csc}\theta,$$

$$\operatorname{Csc}(90°-\theta)=\operatorname{Csc} MPO=\frac{PO}{MO}=\operatorname{Sec} MOP=\operatorname{Sec}\theta.$$

由此得知:

一角之正弦為其餘角之餘弦；一角之餘角之正弦為該角之餘弦.

一角之正切為其餘角之餘切；一角之餘角之正切為該角之餘切.

一角之正割為其餘角之餘割；一角之餘角之正割為該角之餘割.

於此，吾人可明「餘函數」之所以命名也.

習題二

設 $\triangle ABC$ 中 C 為直角，A, B, C 之對邊各為 a, b, c.

1. 求 A 角之六種三角函數，已知三邊為:

(i) 5, 12, 13;

(ii) 8, 15, 17;

(iii) 3, 4, 5;

(iv) $2mn$, m^2-n^2; m^2+n^2;

(v) $\dfrac{2xy}{x-y}$, $x+y$, $\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$.

2. 已知 $a^2+b^2=c^2$, 求 A 角與 B 角之三角函數:

(i) $a=24$, $b=143$;

(ii) $a=40$, $c=41$;

(iii) $b=9.5$, $c=19.3$;

(iv) $a=\sqrt{p^2+q^2}$; $b=\sqrt{2pq}$;

(v) $b=2\sqrt{pq}$, $c=p+q$

3. 已知 $a^2+b^2=c^2$, 求 A 角之正弦, 餘弦, 正切:

(i) $a=2b$;

(ii) $a=\dfrac{2}{3}c$.

4. 已知 $c=20.5$, $Sin\ A=\dfrac{3}{5}$, 求 a.

答: $a=12.3$.

5. 已知 $b=2\dfrac{5}{11}$, $Cot\ B=\dfrac{11}{3}$, 求 a.

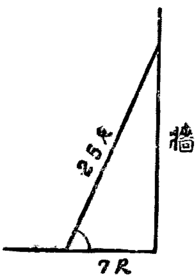
答: $a=9$.

6. 已知 $b=20$, $Sec\ A=2$, 求 c.

答: $c=40$.

7. 已知 $c = 3.5$，$Cos\ A = 0.44$ 求 b.

答: $b = 1.54$.



第 五 圖

8. 一竹竿長 25 尺，斜倚於牆，竿頂適達窗口，竿根離牆 7 尺，問窗口離地幾尺？並求竹竿與地面所成角之餘弦及正切.

答: 24 尺, $\frac{7}{25}$, $\frac{7}{24}$.

9. 梯長 29 尺倚於高 21 尺之牆上，問梯脚離牆幾尺？並求梯與牆所成角之正弦，餘切.

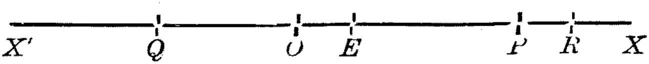
答: 20 尺, $\frac{21}{29}$, $\frac{21}{20}$.

10. 設 ABC 爲直角三角形, $AC = 36$, $BC = 15$, 求斜邊 AB. 求 A 角之正弦及餘弦; 並證明 A 角正弦之平方,與餘弦之平方之和爲 1.

答: $AB = 39$.

7. 平面上點之座標

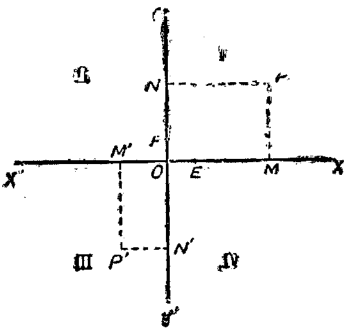
（1）　實數之直線表示



在無限直線 XX' 上任取二點 O, E. 設 P 爲 XX' 上一點，並令 $\overline{OP} / \overline{OE} = p$. 若 P 與 E 在 O 之同側，定 p 爲正; 若 Q 與 E 在 O 之異側，定 $\overline{OQ} / \overline{OE} = q < O$. P 合於 E 時, $OP / \overline{OE}$

$=1$; P 合於 O 時，則 $\overline{OP}/\overline{OE}=O$. 如是，則對於無限直線 XX' 上任意一點，必有一數與之對應，另一方面，對於任意一數(實數) r，在 XX' 上可作一點 R，使 R 與 O 之距離為 r，$\overline{OE}$. 若 $r>O$，則 R 與 E 在 O 之同側；若 $r<O$，則 R 與 E 在 O 之異側；若 $r=O$，則 R 即 O；若 $r=1$，則 R 即 E. 因此，對於任意一實數，直線上必有一點與之對應. 吾人因知實數與直線上之點做成「一對一的對應」，而 p, q, r，則稱點 P, Q, R，在 XX' 上之座標. O 稱原點，$\overline{OE}$ 可取為單位長，故 E 為 1.

於此，吾人應注意者，即一實數在 XX' 上所表之點之位置，在 O 之左方或右方，(或 XX' 上點之表正數抑表負數)，全視 E 與 O 之相對位置而定. 前述任取 O, E 時，取 E 為 O 右方之點，則於 XX' 上在 O 右方之點悉表正數；在 O 左方之點悉表負數. 若初取 O, E 時，在 O 之左方取 E，則表正數之點將在 O 之左方，表負數之點反在 O 之右方矣.



第六圖

一般數學之研究中，常規定 E 在 O 之右方；吾人循此規定，故今後可以 O 之右方之點表正數，以 O 左方之點表負數，因而 $\overline{OP}$ 曰正方向的線段，$\overline{OQ}$ 曰負方向的線段.

(2)　笛氏直角座標.

設 XX', YY' 為二無限直

線,直角相交於 O 點. 於 XX' 上在 O 之右方取 E, 於 YY' 上在 O 之上方取 F,並使 $\overline{OE}=\overline{OF}=$ 單位長. $X'OX$, $Y'OY$, 分平面為 I, II, III, IV 四部分, 每一部分稱一象限; 讀如第一象限, 第二象限, 第三象限, 第四象限.

設 P 為 $X'OX$, $Y'OY$ 所決定之平面上任意一點, 由 P 作 $PM \parallel Y'OY$, 作 $PN \parallel X'OX$, 與 $X'OX$, $Y'OY$ 二直線交於 M, N 二點, 則由前段理論, M, N 二點各表一數. 因 $\overline{OE}=\overline{OF}=1$, 故設 $\overline{OM}=m$, $\overline{ON}=n$. 此 m 與 n 二數全因 P 之位置而定. 因由 P 點祇能作 $X'OX$, $Y'OY$ 之平行線各一條, 故對於 P 點有二數 m, n; 且亦僅此二數 m, n 與 P 對應. 另一方面, 設有二數: m', n'. 在 $X'OX$ 上作 M' 點, 使 $\overline{OM'}=m'\cdot\overline{OE}$; 在 $Y'OY$ 上作 N' 點, 使 $\overline{ON'}=n'\cdot\overline{OF}$, 作 $M'P' \parallel Y'OY$, 作 $N'P' \parallel X'OX$. 設二者之交點為 P'; 則 P' 點卽為對應於二數 m', n' 之一點. 換言之, 對任意二數 m', n' 在 $X'OX$, $Y'OY$ 平面上必有一點 P' 與之對應. 若是, 則平面上之點與二實數(成一組)做成一對一之對應. 此一組數, (二實數)稱點之笛氏座標*. 例如, 上述 P 點關於 $X'OX$, $Y'OY$ 平面之座標為 (m, n). 因所取 $X'OX$, $Y'OY$ 互相垂直, 故此種座標系統, 又名直角座標系統. $X'OX$ 稱橫軸, 或 x 軸, $Y'OY$ 稱縱軸, 或 y 軸, O 稱原點; $X'OX$, $Y'OY$ 二直線所決定之平面, 稱座標平面, 或 xy 平面; 平面上

*笛卡爾 (René Descartes, 1596—1650) 法國數學家, 哲學家, 世人稱笛氏爲解析幾何學之始創者.

一點 P 距 y 軸之距離 NP 稱 P 之橫座標，常以 x 記之，P 距離 x 軸之距離 MP 稱 P 之縱座標，常以 y 記之. x 與 y 合之，始能定 P，故合稱爲 P 之座標，常記如 (x,y).

因規定 E 在 O 之右方，F 在 O 之上方，故

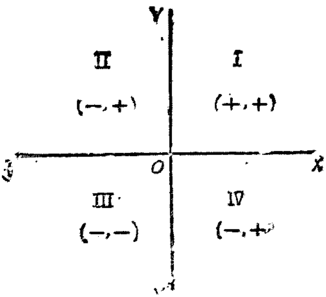
第一象限中之點之橫座標爲正，縱座標爲正，即 $(+,+)$；

第二象限中之點之橫座標爲負，縱座標爲負，即 $(-,+)$；

第三象限中之點之橫座標爲負，縱座標爲負，即 $(-,-)$；

第四象限中之點之橫座標爲正，縱座標爲負，即 $(+,-)$.

點之橫座標，縱座標之正負，與點所屬象限之關係，或可藉下圖表之，以使記憶.

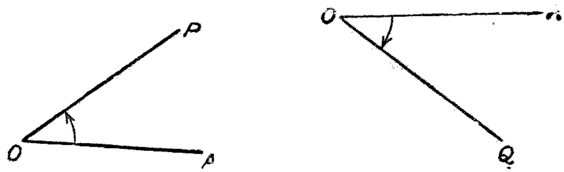


第　七　圖

8.　任意角之三角函數

二直線相交即成一角. 但角之形成又可視爲一動線以其一端爲中心旋轉所得者，動線之最初位置及最終位置即角之兩邊，稱始邊與終邊.

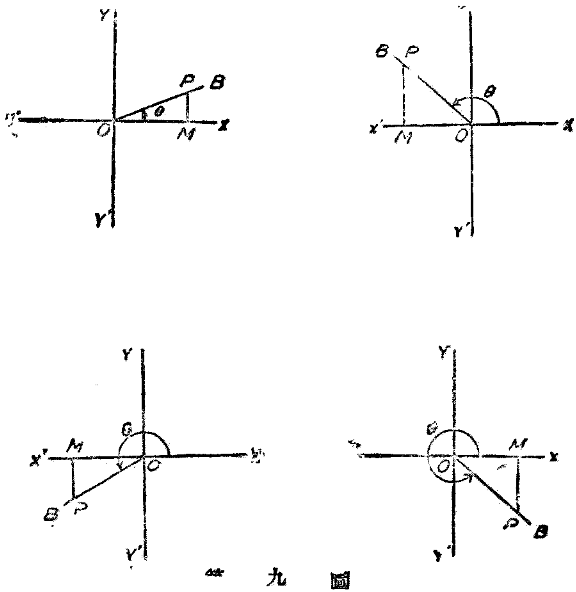
動線繞一端旋轉時，可有兩種轉法，今規定依逆時針之方向旋轉所得者爲正角；依順時針之方向旋轉所得者爲負角.



第八圖

如圖，$\angle AOP$ 爲正角，$\angle AOQ$ 爲負角.

設取直角相交二直線 $X'OX$，$Y'OY$ 爲座標軸，以 OX 爲角之始邊，當動線 OB 由 OX 之位置旋轉至 OB 之位置時 OB 卽爲 $\angle XOB$ 之終邊. 吾人依角之終邊之位置在何一象限，以定該角爲第幾象限之角. 譬如，$\angle XOB$ 之終邊 OB 在第二象限內，則謂 $\angle XOB$ 爲第二象限之角，餘仿此.



第九圖

第二，第三，第四象限內之正角均大於一直角，然其三角函數之定義，可藉平面上點之座標理論將銳角之三角函數定義擴充而得.

設在 $\angle XOB$ 之終邊 OB 上任取一點 P，設 P 之橫座標為 x；縱座標為 y；P 與 O 之距離為 r. 以 θ 表 $\angle XOB$，則定任意角 θ 之三角函數如下：

$$Sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{P\text{ 之縱座標}}{OP},$$

$$Cos\,\theta=\frac{x}{r}=\frac{P\text{ 之橫座標}}{OP},$$

$$Tan\,\theta=\frac{y}{x}=\frac{P\text{ 之縱座標}}{P\text{ 之橫座標}},$$

$$Cot\,\theta=\frac{x}{y}=\frac{P\text{ 之橫座標}}{P\text{ 之縱座標}},$$

$$Sec\,\theta=\frac{r}{x}=\frac{OP}{P\text{ 之橫座標}},$$

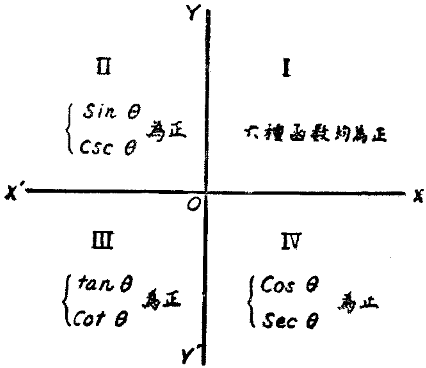
$$Csc\,\theta=\frac{r}{y}=\frac{OP}{P\text{ 之縱座標}}.$$

$r\,(=OP)$ 為 P 與 O 之距離，恆為正，P 之橫座標及縱座標則須視 P 之位置在何一象限而定正負；因此 θ 之六種三角函數之值在四個象限中亦有正負之別. 吾人細察六種函數中，正弦與餘割必同號；餘弦與正割同號；正切與餘切同號；因列下表：

函數 / 象限	$Sin\ \theta$ $Csc\ \theta$	$Cos\ \theta$ $Sec\ \theta$	$Tan\ \theta$ $Cot\ \theta$

I	+	+	+
II	+	−	−
III	−	−	+
IV	−	+	−

或示之以圖:



第 十 圖

無論表或圖，讀者須熟記不忘，以爲進修之基礎.

若圖中動線 OB 繞 O 一周後，復歸 OPB 之位置，則所成之角爲 $360°+\theta$，其三角函數仍與 θ 之函數同值，推之，若 n 爲正整數則 $n.360°+\theta$ 之三角函數與 θ 之函數同值.

例如 $Sin\,750° = Sin\,[2.360°+30°]$

$$= Sin\,30°$$

例. 已知 $Sin\,\theta = \frac{1}{2}$，求 θ 之其他函數之値.

解. $Sin\,\theta = \frac{1}{2}$ 爲正數，則 θ 必在 I, II 象限.

今 $Sin\,\theta = \frac{1}{2} = \frac{y}{r}$，則可設 $r = 2$，
$y = 1$; 故 $x = \pm\sqrt{2^2-1} = \pm\sqrt{3}$.

若 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，則

$Cos\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$Tan\,\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$，

$Cot\,\theta = \sqrt{3}$，$Sec\,\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$，

$Cse\,\theta = 2.$

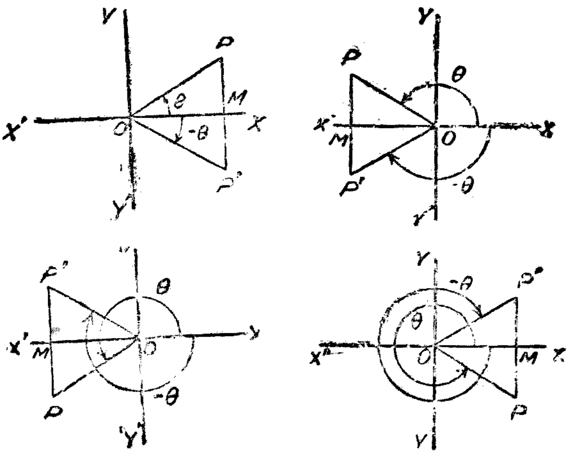
若 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$，則

$Cos\,\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$，$Tan\,\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$，

$Cot\,\theta = -\sqrt{3}$，$Sec\,\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$，

$Csc\,\theta = 2.$

9. 負角之三角函數



第十一圖

設動線 OP 由 OX 開始轉動，成角 θ 而止於 OP. 作 $PM\perp OX$（或其延長線），延長 PM 至 P'，使 $PM=MP'$，則 $\triangle MOP$ 與 $\triangle MOP'$ 有夾直角之兩邊相等，故 $\triangle MOP\cong\triangle MOP'$，而 $OP=OP'$，$\angle MOP=\angle MOP'$. 所附四圖中，正角 XOP 與負角 XOP' 絕對值相等，而方向相反，故 $\angle XOP'=-\theta$. 由座標理論，可知 $MP'=-MP$. 故有

$$Sin\,(-\theta)=\frac{MP'}{OP'}=\frac{-MP}{OP}=-Sin\,\theta;$$

$$Cos\,(-\theta)=\frac{OM}{OP'}=\frac{OM}{OP}=Cos\,\theta;$$

$$Tan(-\theta)=\frac{MP'}{OM}=\frac{-MP}{OM}=-Tan\,\theta,$$

$$Cot\,(-\theta)=\frac{OM}{MP'}=\frac{OM}{-MP}=-Cot\,\theta;$$

$$Sec\,(-\theta)=\frac{OP'}{OM}=\frac{OP}{OM}=Sec\,\theta,$$

$$Csc\,(-\theta)=\frac{OP'}{MP'}=\frac{OP}{-MP}=-Csc\,\theta,$$

於此，吾人應注意者，卽負角之餘弦及正割與其同量之正角之餘弦及正割同值.

例. $Sin\,(-30^\circ)=-Sin\,30^\circ;$

$Cos\,(-30^\circ)=Cos\,30^\circ.$

若圖中動線 OP' 繞 O 一周後，復歸圖中 OP' 原位，則所成之角爲 $(-360^\circ-\theta)$，然其三角函數仍與 $(-\theta)$ 之函數同值；推之，若 n 爲負整數，則 $n.\,360^\circ-\theta$ 之三角函數與 $(-\theta)$ 之函

數同值.

例如 $Tan(-400^\circ)=Tan(-360^\circ-40^\circ)$

$$=Tan(-40^\circ)$$

$$=-Tan\,40^\circ.$$

合§8末段之論,吾人可曰無論 θ 表正角,或負角,若 n 爲整數,則 $n.360^\circ+\theta$ 之三角函數仍與 θ 之函數同值,即一角之終邊無論繞角之頂點進旋若干周,或退旋若干周,所得之角之三角函數仍與原角之三角函數同值也.

習　題　三

1. 在座標平面上,作下列諸點:

(i) $(3,1)$,　　(ii) $(-1,-4)$,

(iii) $(-5,6)$,　　(iv) $(2,-1)$.

2. 問 x 爲何一象限中之角,已知

(i) $Cos\,x=\frac{1}{2}$,　　(ii) $Tan\,x=-\sqrt{3}$,

(iii) $Csc\,x=3$,　　(iv) $Sec\,x=-5$.

3. 書出下列諸角所屬之象限:

(i) $1,000^\circ$,　　(ii) -900°;

(iii) 440°;　　(iv) $\frac{17\pi}{6}$;

(v) $-\frac{2\pi}{3}$;　　(vi) $-\frac{73}{6}\pi$.

4. 試述下列諸角應在之象限;並求其他五種三角函數,若

已知

(i) $Sin\, x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, (ii) $Cos\, y = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

(iii) $Cot\, z = 1$, (iv) $Sec\, \theta = -\frac{5}{3}$.

5. 化下列諸函數爲小於 360° 之角,並註明其應爲正值或爲負值.

例. $Tan\, 1500° = Tan\, [4.360° + 60°]$

$$= Tan\, 60° > 0.$$

(i) $Sin\, 3860°$, (ii) $Tan\, 1060°$,

(iii) $Sec\, 587°$, (iv) $Cos\, \frac{140}{12}\pi$.

6. 化下列諸函數爲小於 360° 之正角之函數,並註明其值之正負.

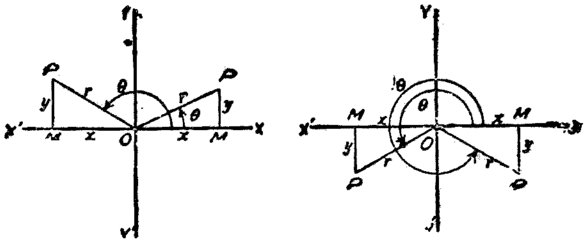
例. $Cot\left(-\frac{13}{6}\pi\right) = Cot\left(-2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$$= Cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -Cot\, \frac{\pi}{6} < 0.$$

(i) $Sin\, (-860°)$, (ii) $Cos\, (-1200°)$,

(iii) $Tan\left(-\frac{51}{12}\pi\right)$, (iv) $Csc\left(-\frac{16}{3}\pi\right)$.

10. 三角函數之基本關係



第十二圖

設$\angle XOP$終邊上任意一點P之座標爲(x,y)，$OP=r$，則
$Sin\ \theta=\frac{y}{r}$，$Cos\ \theta=\frac{x}{r}$，$Tan\ \theta=\frac{y}{x}$，$Cot\ \theta=\frac{x}{y}$，$Sec\ \theta=\frac{r}{x}$，$Csc\ \theta=\frac{x}{y}$；六種函數間有下述之基本關係：

1. 倒數關係.

因　$Sin\ \theta\cdot Csc\ \theta=\frac{y}{r}\cdot\frac{r}{y}=1$；

故　$Sin\ \theta=\frac{1}{Csc\ \theta}$，$Csc\ \theta=\frac{1}{Sin\ \theta}$.

易知　$Cos\ \theta\cdot Sec\ \theta=1$；$Cos\ \theta=\frac{1}{Sec\ \theta}$，

$$Sec\ \theta=\frac{1}{Cos\ \theta},$$

$$Tan\ \theta\cdot Cot\ \theta=1,\quad Tan\ \theta=\frac{1}{Cot\ \theta},$$

$$Cot\ \theta=\frac{1}{Tan\theta}.$$

即一角之正弦，與其餘割互爲倒數，餘弦與正割互爲倒數，正切與餘切互爲倒數.

2. 商數關係.

因 $Sin\,\theta = \frac{y}{r}$; $Cos\,\theta = \frac{x}{r}$,

故 $\frac{Sin\,\theta}{Cos\,\theta} = \frac{y}{r} \quad \frac{x}{r} = \frac{y}{x}$

然 $Tan\,\theta = \frac{y}{x}$,

故 $Tan\,\theta = \frac{Sin\,\theta}{Cos\,\theta}$;

易知 $Cot\,\theta = \frac{Cos\,\theta}{Sin\,\theta}$.

故知: 一角正弦與餘弦之比卽其正切, 餘弦與正弦之比卽其餘切.

3. 平方和關係.

因 $Sin\,\theta = \frac{y}{r}$, $Cos\,\theta = \frac{x}{r}$.

$$x^2+y^2=r^2,$$

故 $\left(Sin\,\theta\right)^2+\left(Cos\,\theta\right)^2=\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{x}{r}\right)^2$

$$=\frac{x^2+y^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2}=1.$$

卽一角正弦, 餘弦之平方和爲 1.

三角函數之乘冪數, 如 $(Sin\,\theta)^2$, $(Sin\,\theta)^3$ 等, 常簡書爲 $Sin^2\,\theta$, $Sin^3\,\theta$ 等, 以後多用簡寫式. 因此上式, 可書爲

$$Sin^2\,\theta + Cos^2\,\theta = 1 \tag{1}$$

由此可知

$$Sin^2\theta = 1 - Cos^2\theta,$$

$$Sin\,\theta = \pm\sqrt{1 - Cos^2\theta}.$$

等號右端根式之符號，視 θ 之大小而定，若 θ 在 I, II 象限中，則取正號；若 θ 在 III,IV 象限中，則取負號.

同理，由(1)可知

$$Cos^2\theta = 1 - Sin^2\theta,$$

$$Cos\,\theta = \pm\sqrt{1 - Sin^2\theta}.$$

若 θ 在 I,IV 象限，根號爲正；若 θ 在 II,III 象限，根號爲負.

以 $Cos^2\theta$ 除(1)之左右，得

$$\frac{Sin^2\theta}{Cos^2\theta} + 1 = \frac{1}{Cos^2\theta}.$$

然因 $Tan\,\theta = \dfrac{Sin\,\theta}{Cos\,\theta}$, $Sec\,\theta = \dfrac{1}{Cos\,\theta}$,

故得 $$Tan^2\theta + 1 = Sec^2\theta \tag{2}$$

以 $Sin^2\theta$ 除(1)之左右時，則得

$$Cot^2\theta + 1 = Csc^2\theta. \tag{3}$$

易知

$$Sec^2\theta - 1 = Tan^2\theta,$$

$$Csc^2\theta - 1 = Cot^2\theta,$$

$$Sec\,\theta = \pm\sqrt{1+Tan^2\theta},$$

$$Tan\,\theta = \pm\sqrt{Sec^2\theta - 1},$$

$$Csc\,\theta = \pm\sqrt{1+Cot^2\theta};$$

及 $$Cot\,\theta = \pm\sqrt{Csc^2\theta - 1};$$

由上述三種關係，吾人可證同一角三角函數之恆等式.

例 1. 證明 $Csc\,A \cdot Tan\,A = Sec\,A$.

證 $Csc\,A \cdot Tan\,A = \dfrac{1}{Sin\ A} \cdot \dfrac{Sin\ A}{Cos\ A}$

$$= \frac{1}{Cos\ A} = Sec\,A.$$

例 2. 證明 $Cos^4A - Sin^4A = Cos^2A - Sin^2A$.

證 $Cos^4A - Sin^4A = (Cos^2A + Sin^2A)(Cos^2A - Sin^2A)$

$$= Cos^2A - Sin^2A.$$

例 3. 證明 $Sec^4\theta - Sec^2\theta = Tan^2\theta + Tan^4\theta$

證 左端 $= Sec^2\theta(Sec^2\theta - 1)$

$= (1 + Tan^2\theta) \cdot Tan^2\theta$

$= Tan^2\theta + Tan^4\theta$.

由前述三種關係式，又可將一種函數表示其他五種函數.

例. 以 $Tan\ A$ 表 A 之其他五種函數.

解 $Cot\ A = \dfrac{1}{Tan\ A}$,

$Sec\ A = \pm\sqrt{1+Tan^2A}$,

$Cos\ A = \dfrac{1}{Sec\ A} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+Tan^2A}}$

$Sin\ A = \dfrac{Sin\ A}{Cos\ A} \cdot Cos\,A$

$= Tan\,A \cdot Cos\,A$

$= \pm\dfrac{Tan\ A}{\sqrt{1+Tan^2A}}$;

〔或　$Sin\ A=\dfrac{1}{Csc\ A}=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+Cot^2 A}}$

$$=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\dfrac{1}{Tan^2 A}}}=\pm\frac{Tan\ A}{\sqrt{1+Tan^2 A}},$$

或　$Sin\ A=\pm\sqrt{1-Cos^2 A}=\pm\sqrt{1-\dfrac{1}{1+Tan^2 A}}$

$$=\pm\sqrt{\frac{Tan^2 A}{1+Tan^2 A}}$$

$$=\pm\frac{Tan\ A}{\sqrt{1+Tan^2 A}}〕$$

$$Csc\ A=\frac{1}{Sin\ A}=\pm\frac{\sqrt{1+Tan^2 A}}{Tan\ A}.$$

因此，若已知一角 A 之某一函數值時，其他五種函數之值，亦可用上法求得.

例.　已知 $Cos\ A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，則

$$Sin A=\pm\sqrt{1-Cos^2 A}=\pm\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\pm\tfrac{1}{2},$$

$$Tan\ A=Sin\ A/Cos\ A=\pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$Cot\ A=1/Cot\ A=\pm\sqrt{3},$$

$$Sec\ A=1/Cos\ A=\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$Csc\ A=1/Sin\ A=\pm 2.$$

習　題　四

試證下列恆等式:

1. $Sin\ A \cdot Cot\ A = Cos\ A.$

2. $Cot\ A \cdot Sce\ A = Csc\ A.$

3. $Sin\ A \cdot Sce\ A = Tan\ A.$

4. $Cot\ A \cdot Sec\ A \cdot Sin\ A = 1.$

5. $(1-Cos^2\ A)\ Csc^2\ A = 1.$

6. $(1-Sin^2\ A)\ Sec^2\ A = 1.$

7. $Cot^2\ \theta\ (1-Cos^2\theta)=Cos^2\ \theta.$

8. $Tan\ \theta \cdot \sqrt{1-Sin^2\ \theta} = Sin\ \theta.$

9. $Csc\ \theta \cdot \sqrt{1-Sin^2\ \theta} = Cot\ \theta.$

10. $(1+Tan^2\theta)\ Cos^2\ A = 1.$

11. $(Sec^2\theta-1)\ Cot^2\ \theta = 1.$

12. $(1-Cos^2\ \theta)\ (1+Tan^2\ \theta)=Tan^2\ \theta.$

13. $(1-Cos^2\ \theta)\ (1+Cot^2\ \theta) = 1.$

14. $Cos\ A \cdot Csc\ A \cdot \sqrt{Sec^2\ A-1} = 1.$

15. $Sin\ A \cdot Sec\ A \cdot \sqrt{Csc^2\ A-1} = 1.$

16. $Cos\ \theta \sqrt{Cot^2\ \theta+1} = \sqrt{Csc^2\ \theta-1}.$

17. $Sin^2\ \theta\ Cot^2\ \theta + Sin^2\ \theta = 1.$

18. $\dfrac{1}{Cos^2\ A} - \dfrac{1}{Cot^2\ A} = 1.$

19. $\dfrac{Sin\ A}{Csc\ A} + \dfrac{Cos\ A}{Sec\ A} = 1.$

20. $\dfrac{Sec\ A}{Cos\ A} - \dfrac{Tan\ A}{Cot\ A} = 1.$

21. $Sin^4\theta - Cos^4\theta = 2\,Sin^2\theta - 1 = 1 - 2\,Cos^2\theta.$

22. $Sec^4\theta - 1 = 2\,Tan^2\theta + Tan^4\theta.$

23. $Csc^4\theta - 1 = 2\,Cot^2\theta + Cot^4\theta.$

24. $(Tan\theta \cdot Csc\theta)^2 - (Sin\theta \cdot Sec\theta)^2 = 1.$

25. $(Sec\theta \cdot Cot\theta)^2 - (Cos\theta \cdot Csc\theta)^2 = 1.$

26. 以 $Sin\ A$ 表 A 之其他五種函數.

27. 以 $Cot\ A$ 表 $Sec\ A$；$Sin\ A$.

28. 以 $Sec\ \theta$ 表 $Sin\ \theta$，$Cot\ \theta$.

29. 已知 $Tan\ A = \frac{4}{3}$；求 $Sin\ A$; $Sec\ A$.

30. 已知 $Sec\ \theta = 4$，求 $Cot\ \theta$, $Sin\ \theta$.

31. 已知 $Tan\ \theta = \frac{1}{2}$，求 $Sec\ \theta$, $Csc\ \theta$.

32. 若 $Sin\ A = \frac{m}{n}$，證明

$$\sqrt{n^2 - m^2} \cdot Tan\ A = m.$$

33. 若 $p \cdot Cot\ \theta = \sqrt{q^2 - p^2}$，求 $Sin\ \theta$.

34. 若 $Sec\ \theta = \frac{m^2+1}{2m}$，求 $Tan\ \theta$, $Cot\ \theta$.

35. 若 $Sec\ \theta = \frac{13}{5}$；求

$$\frac{2\,Sin\theta - 3\,Cos\theta}{4\,Sin\theta - 9\,Cos\theta} \text{ 之值.}$$

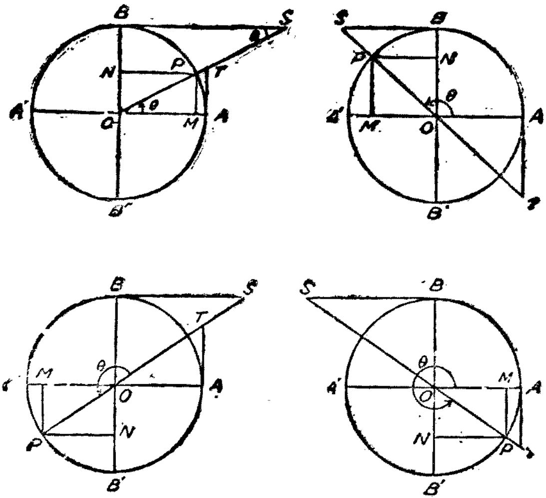
36. 若 $Cot\ \theta = \frac{p}{q}$，求

$$\frac{p\,Cos\theta - q\,Sin\theta}{p\,Cos\theta + q\,Sin\theta} \text{ 之值.}$$

11. 三角函數之線的表示

以單位長爲半徑之圓稱單位圓.

設 $A'OA$, $B'OB$ 爲單位圓中互相垂直之二直徑. 此二直徑亦可視爲座標平面之座標軸. 以 OA 爲始邊, 圓上任一點 P 與 O 之連線爲終邊, 則成 $\angle AOP=\theta$.



第十三圖

作 $PM \perp A'OA$, $PN \perp B'OB$; 自 A 作 $AT \perp OA$, 交 OP (或其延長線) 於 T, 自 B 作 $BS \perp OB$, 交 OP (或其延長線) 於 S. 因 P, A, B 爲圓上之點, 故

$OP=OA=OB=1$, 故有

$$\sin\theta=\frac{MP}{OP}=MP,$$

$$\text{Cos}\ \theta=\frac{NP}{OP}=NP,$$

$$\text{Tan}\ \theta=\frac{AT}{OA}=AT,$$

$$\text{Cot}\ \theta=\frac{BS}{OB}=BS,$$

$$\text{Sec}\ \theta=\frac{OT}{OA}=OT,$$

$$\text{Csc}\ \theta=\frac{BS}{OB}=BS,$$

詳察四圖，由座標理論，可知：

正弦，正切在 $A'OA$ 之上爲正，在 $A'OA$ 之下爲負；

餘弦，餘切在 $B'OB$ 之右爲正，在 $B'OB$ 之左爲負；

正割，餘割依 OP 之方向者爲正，在 OP 之反向延長線者爲負.

讀者應將上述結果與§7中三角函數爲正爲負之表或圖，參照研究，以驗其不相悖也.

由圖又易知：

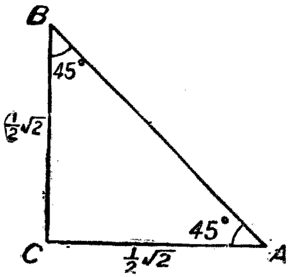
$MP \leq OP$，$OM < OP$，卽一角之正弦，餘弦俱不大於1；MP，OM 爲負值時，亦不小於(-1)，故曰一角之正弦，餘弦之絕對值不大於1.

$OT > OP$，$OS > OP$，卽一角之正割，餘割俱不小於1；OT，OS 爲負值時，亦不大於(-1)，故曰一角之正割，餘割之絕對值不小於1.

AT 與 BS 可為任意正負值，故一角之正切與餘切之值可為任意之實數焉.

12. 特別角之函數

(1) 45°之函數　設 ACB 為等腰直角三角形，則



第十四圖

$AC=BC$，且

$$\angle A=\angle B=45°$$

設斜邊 $AB=1$.

因 $AC^2+BC^2=1$,

即 $2AB^2=1$,

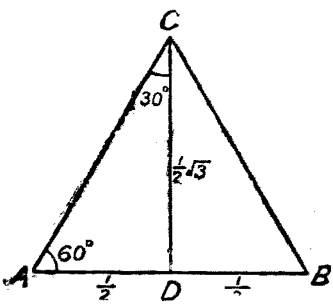
故 $AC=BC=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

由餘角函數之定義，可知

$Sin\ 45°=Cos\ 45°=\frac{1}{2}\sqrt{2}$;

$Tan\ 45°=Cot\ 45°=1$,

$Sec\ 45°=Csc\ 45°=\sqrt{2}$.



第十五圖

(2) 30° 與 60°之函數.

設 ABC 為等邊三角形，其各邊為 1，設 CD 為 C 角之平分線，則 CD 為 AB 之中點垂直線.

於是 $AD=\frac{1}{2}$,

$$CD=\sqrt{1-(\tfrac{1}{2})^2}=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

在直角三角形三角形內 ACD 內，

$\angle ACD=30°$，$\angle CAD=60°$；

由餘角函數之理論，可知

$$Sin\ 30°=Cos\ 60°=\tfrac{1}{2},$$

$$Cos\ 30°=Sin\ 60°=\tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$Tan\ 30°=Cot\ 60°=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{3},$$

$$Cot\ 30°=Tan\ 60°=\sqrt{3},$$

$$Sec\ 30°=Csc\ 60°=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3},$$

$$Csc\ 30°=Sec\ 60°=2.$$

(3) 0°, 360° 之函數.

0° 與 360° 角之終邊與始邊均爲一致,故可合併論之.

利用 § 11 之四圖,單位圓中,若 $\theta=0°$, 或360°,則

$$Sin\ 0°=Sin\ 360°=MP=0,$$

$$Cos\ 0°=Cos\ 360°=OM=1,$$

$$Tan\ 0°=Tan\ 360°=AT=0,$$

$$Cot\ 0°=Cot\ 360°=BS=\infty^{*},$$

$$Sec\ 0°=Sec\ 360°=OT=1,$$

$$Csc\ 0°=Csc\ 360°=OS=\infty^{*}.$$

(4) 90° 之函數.

利用單位圓之圖，若 $\theta=90°$，則

[註: *$Cot\,\theta=BS$, $Csc\,\theta=OS$. 今$\theta=0°$,$\theta=360°$,則OP 與 BS 在有限處無交點，設 OP 與 BS 交於無限遠之 S 點，故 BS 及 OS 之長爲 ∞ 也]。

$Sin\ 90^\circ = MP = 1,$

$Cos\ 90^\circ = OM = 0,$

$Tan\ 90^\circ = AT = \infty,$

$Cot\ 90^\circ = BS = 0,$

$Sec\ 90^\circ = OT = \infty,$

$Csc\ 90^\circ = OS = 1.$

(5) 180° 之函數.

利用單位圓之圖，若 $\theta = 180^\circ$，則

$Sin\ 180^\circ = MP = 0,$

$Cos\ 180^\circ = OM = -1,$

$Tan\ 180^\circ = AT = 0,$

$Cot\ 180^\circ = BS = \infty,$

$Sec\ 180^\circ = OT = -1,$

$Csc\ 180^\circ = OS = \infty.$

(6) 270° 之函數.

利用單位圓之圖，若 $\theta = 270^\circ$，則

$Sin\ 270^\circ = MP = -1,$

$Cos\ 270^\circ = OM = 0,$

$Tan\ 270^\circ = AT = \infty,$

$Cot\ 270^\circ = BS = 0,$

$Sec\ 270^\circ = OT = \infty,$

$Csc\ 270^\circ = OS = -1.$

上述諸角之函數值，讀者須熟憶不忘，茲列次表以示之：

$\theta=$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$Sin\theta=$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$Cos\theta=$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$Tan\theta=$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$Cot\theta=$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞	0	∞
$Sec\theta=$	1	$\frac{}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-1	∞	1
$Csc\theta=$	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	∞	-1	∞

13. **三角函數表檢查法**　前節由初等幾何學方法，求得 $30°, 60°, 45°, \cdots\cdots$ 等特別角之函數值；至若一般銳角之函數值，則須賴函數值表之檢查．今述其檢表之法，表之造法，將在第九章內略論之．

本書書末所附之三角函數表，可直接查得每度之十分之一，即六分之角，一分至五分之值，可於表之右端表差一列中查出加減得值．

正銳角之正弦，正切，正割為角之增加函數，即角增大時，函數值亦隨之增大；餘弦，餘切，餘割則為角之減少函數，即角增大時，其函數值反而減少．本書附正弦，餘弦，正切，三種函數表；餘割，正割，餘切之函數值，可由前述三者之倒數得之．

今舉下述諸例以明表之查法：

例 1.　求（i）　31°18′之正弦，

（ii）　31°20′之正弦.

由正弦函數表，左列 31° 之一行，得

正弦函數表

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	表差				
											1′	2′	3′	4′	5′
31°	5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	3	5	7	10	12

31° 與 32° 間一切角之正弦，均可由上表得之，應注意者，正弦與餘弦之值均小於 1，表中之值，均爲小數，故所得之值，均須冠之以小數點.

（i）　今在 18′ 爲首之一列中，查得 5195，卽得

$Sin\ 31°18' = 0.5195$,

（ii）　31°20′ 比 31°18′ 大 2′. 今在表差中，在以 2′ 爲首之一列中查得 5. 此表爲小數四位之表，卽此 5 字實表 .0005，其他之差如 1′，3′，4′，5′ 等均各表差 .0003，.0007，.0010，.0012 等.

由表得

$$\begin{array}{rl} Sin\ 31°18' &= 0.5195 \\ 2' \text{之表差} &= 0.0005 \quad (+ \\ \hline \therefore Sin\ 31°20' &= 0.5200. \end{array}$$

例 2.　求 26°28′ 之餘弦.

餘弦函數表

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	表差 1′	2′	3′	4′	5′
26°	8988	8980	8973	8965	8957	8949	8942	8934	8926	8918	1	3	4	5	6

$26°28'$ 比 $26°24'$ 大 $4'$，故其餘弦值必較 $26°24'$ 之餘弦值小 $4'$ 之表差值。

$$\begin{array}{rl} \text{Cos } 26°24' &= 0.8957 \\ 4' \text{ 之表差 } &= 0.0005 \quad (- \\ \hline \therefore \text{Cos } 26°28' &= 0.8952 \end{array}$$

例 3. 若 $Tan\ \theta=1.6666$，求 θ.

〔解〕 由正切函數表，尋角之正切值較 1.6666 小，而最近之一行.

正切函數表

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	表差 1′	2′	3′	4′	5′
59°	1.6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	11	23	24	45	56

$$\begin{array}{rl} Tan\ \theta &= 1.6666 \\ Tan\ 59° &= 1.6643 \quad (- \\ \hline \text{差} = & \quad 23 \end{array}$$

即 θ 比 $59°$ 大表差為 23 之角，由右端，查悉 $2'$ 之表差為 23，故 $\theta=59°2'$.

例 4. 若 $Cos\ x=0.6353$，求 x.

〔解〕　由餘弦函數表，尋角之餘弦值較 0.6353 稍大而最近之一行，得

餘弦函數表

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	表差				
											1′	2′	3′	4′	5′
50°	6428	6414	6401	6388	6374	6361	6347	6334	6320	6307	2	4	7	9	11

$$
\begin{array}{rl}
\cos 50°30' & =0.6361 \\
\cos\ \theta & =0.6353 \quad (- \\
\hline
\text{差} & =\quad 8
\end{array}
$$

右端表差項中無 8，然表差爲 7 者卽爲 3′，爲 9 者卽 4′，今差 8，則爲 3.5′=3′30″.

故　$\theta=50°33'30''$.

一數除去其左右端定位之 0，所餘部份之數字稱該數之有效數字．例如 12400，2.6050，0.0083 之有效數字各爲 124，2605，83.

本書所附之正弦，餘弦函數表，有效數字至多不過四位，正切函數之有效數字至多不過六位．卽正弦，餘弦值之第五位小數已略去不計．計算時，用有效數字祇有四位之表值，則祇能得四位有效數字之結果，多得位數，則反有似是而非之誤．讀者應注意及之．

例如　設 $a=35.7$，$B=25°$，求 $a\sin B$.

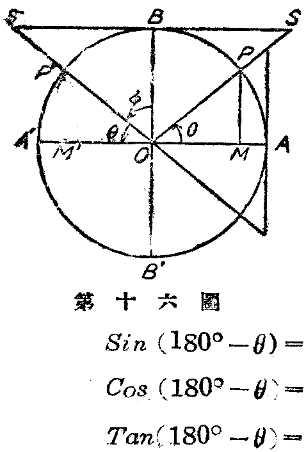
由表得　$\sin 25°=0.4226$

$$
\begin{array}{r}
.4226 \\
\underline{35.7} \\
29582 \\
21130 \\
12678 \\
\hline
15.08682
\end{array}
$$

此處應得 $a\,Sin\ B = 15.08$

14. 化第二,第三,第四象限角之函數爲銳角之函數

I. 化第二象限角之函數爲銳角之函數.



設 O 爲單位圓,

$\angle AOP' = 180° - \theta$,

$\angle BOP' = \phi$, 作 $\angle AOP = \theta$,

則由 § 11, 可知

第十六圖

$Sin\,(180° - \theta) = M'P' = MP = Sin\theta$,

$Cos\,(180° - \theta) = OM' = -OM = -Cos\theta$;

$Tan\,(180° - \theta) = AT' = -AT = -Tan\theta$;

$Cot\,(180° - \theta) = BS' = -BS = -Cot\theta$,

$Sec\,(180° - \theta) = OT' = -OT = -Sec\theta$,

$Csc\,(180° - \theta) = OS' = OS = Csc\theta$.

$\angle BOP'=\phi$，則 $\angle AOP'=180^\circ-\theta=90^\circ+\phi$，又因 $\theta=90^\circ-\phi$，故

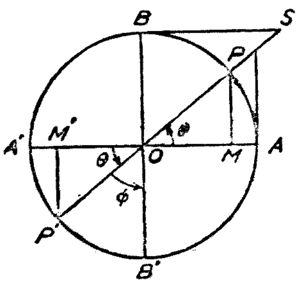
$$Sin\ (90^\circ+\phi)=Sin\ \theta=Cos\ \phi,$$
$$Cos\ (90^\circ+\phi)=-Cos\ \theta=-Sin\ \phi;$$
$$Tan\ (90^\circ+\phi)=-Tan\ \theta=-Cot\ \phi,$$
$$Cot\ (90^\circ+\phi)=-Cot\ \theta=-Tan\ \phi,$$
$$Sec\ (90^\circ+\phi)=-Sec\ \theta=-Csc\ \phi,$$
$$Csc\ (90^\circ+\phi)=Csc\ \theta=Sec\ \phi.$$

例. $Sin\ 150^\circ=Sin(180^\circ-30^\circ)=Sin\ 30^\circ=\frac{1}{2}$.

$Cos\ 135^\circ=Cos(90^\circ+45^\circ)=-Cos\ 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$Tan\frac{2}{3}\pi=Tan\ (\pi-\frac{\pi}{3})=-Tan\ \frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

II. 化第三象限角之函數爲銳角函數.



第十七圖

今設 $\angle AOP'=180^\circ+\theta$

$\angle P'OB'=\phi$，則

$$Sin\ (180^\circ+\theta)=M'P'=-MP=-Sin\theta,$$
$$Cos\ (180^\circ+\theta)=OM'=-OM=-Cos\theta,$$
$$Tan(180^\circ+\theta)=AT=Tan\theta,$$

$$Cot\ (180^\circ+\theta)=BS=Cot\,\theta,$$

$$Sec\ (180^\circ+\theta)=OT=-Sec\,\theta,$$

$$Csc\ (180^\circ+\theta)=OS=-Csc\,\theta.$$

又 $\angle AOP'=180^\circ+\theta=270^\circ+\phi$,　$\theta=90^\circ-\phi$;

故 $$Sin\ (270^\circ-\phi)=-Sin\theta=-Cos\,\phi,$$

$$Cos\ (270^\circ-\phi)=-Cos\theta=-Sin\,\phi;$$

$$Tan(270^\circ-\phi)=Tan\theta=Cot\,\phi,$$

$$Cot\ (270^\circ-\phi)=Cot\theta=Tan\,\phi,$$

$$Sec\ (270^\circ-\phi)=-Sec\theta=-Csc\,\phi,$$

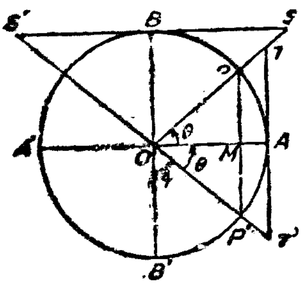
$$Csc\ (270^\circ-\phi)=-Csc\theta=-Sec\,\phi.$$

例. $Cot\ 210^\circ=Cot(180^\circ+30^\circ)=Cot\ 30^\circ=\sqrt{3}$.

$Cos\ 240^\circ=Cos(270^\circ-30^\circ)=-Sin\ 30^\circ=-\frac{1}{2}$.

$Sin\ \frac{5}{4}\pi=Sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-Sin\ \frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

III. 化第四象限角之函數爲銳角之函數



第十八圖

今設 $\angle AOP'=360^\circ-\theta$,

$\angle B'OP'=\phi$. 則

$$Sin\ (360^\circ-\theta)=MP'=MP=-Sin\,\theta,$$

$Cos\ (360°-\theta)=OM=Cos\theta,$

$Tan(360°-\theta)=AT'=-AT=-Tan\theta;$

$Cot\ (360°-\theta)=BS'=-BS=-Cot\theta,$

$Sec\ (360°-\theta)=OT'=OT=Sec\theta,$

$Csc\ (360°-\theta)=OS'=-OS=-Csc\theta.$

又 $\angle AOP'=360°-\theta=270°+\phi,\ \theta=90°-\phi,$

故 $Sin\ (270°+\phi)=-Sin\ \theta=-Cos\ \phi;$

$Cos\ (270°+\phi)=Cos\ \theta=Sin\ \phi,$

$Tan(270°+\phi)=-Tan\ \theta=-Cot\ \phi,$

$Cot\ (270°+\phi)=-Cot\ \theta=-Tan\ \phi,$

$Sec\ (270°+\phi)=Sec\ \theta=Csc\ \phi;$

$Csc\ (270°+\phi)=-Csc\ \theta=-Sec\ \phi.$

例. $Sin\ 300°=Sin(360°-60°)=-Sin\ 60°=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$Tan\ 315°=Tan(270°+45°)=-Cot\ 45°=-1.$

$Cos\ \frac{11}{6}\pi=Cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=Cos\ \frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

IV. 總論

上述三段中之 θ 爲銳角,但若除去此一假設,所得諸式,仍然爲眞. 例如設 $\theta=140°$,

欲證 $Sin(270°+\theta)=-Cos\theta$, 則按

左邊 $=Sin(270°+140°)=Sin\ 410°=Sin\ 50°;$

右邊 $=-Cos\ 140°=-Cos(90°+50°)=Sin\ 50°,$

故仍成立.

綜合前論，可得下述規則:

設 n 爲任意正負整數或零（即 $n=0, \pm1, \pm2, \cdots\cdots$）

（1）　角 $2n.\ 90^\circ+\theta$ 之函數之絕對值，等於 θ 之同函數之絕對值;

（2）　角 $(2n+1)\cdot 90^\circ+\theta$ 之函數之絕對值，等於 θ 之餘函數之絕對值;

（3）　所得 θ 角之函數之符號，爲原角之原來函數在所屬象限內之符號.

任意角之函數既可化爲銳角之函數，而銳角之函數可由函數表查得，故今者任意一角之三角函數均可知悉矣.

例 1.　$Sin\ 330^\circ=Sin(4\cdot90^\circ-30^\circ)=-Sin\ 30^\circ=-\frac{1}{2}$.

例 2.　$Cos\left(-\frac{19}{4}\pi\right)=Cos\ \frac{19}{4}\pi=Cos\left(4\pi+\frac{3}{4}\pi\right)$

$$=Cos\ \frac{3}{4}\pi=Cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=-Cos\ \frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 3.　$Tan\ (-300^\circ)=-Tan\ 300^\circ$

$$=-Tan(3\cdot90^\circ+30^\circ)=-[-Cot\ 30^\circ]$$

$$=Cot\ 30^\circ=\sqrt{3}.$$

例 4.　$Cos\ 165^\circ30'=(2\cdot90^\circ-14^\circ30')$

$$=-Cos\ 14^\circ30'=-0.9681.$$

例 5.　求下式之值.

$$Sin\ 420^\circ Cos\ 390^\circ + Cos(-300^\circ) Sin\ 330^\circ$$

〔解〕 原式 $= Sin\ 60^\circ Cos\ 30^\circ + Cos\ 300^\circ(-Sin\ 30^\circ)$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

例 6. 證明

$$Sin\ (270^\circ + A) + Cos\ A - Sin\ (270^\circ - A) + Cos(180^\circ + A) = 0.$$

〔證〕 原式 $= -CosA + CosA - [-CosA] + [-CosA]$

$$= +CosA - CosA = 0.$$

習　題　五

求下列各函數之值:

1. $Cos\ 480^\circ$

答: $-\frac{1}{2}$.

2. $Sin\ 960^\circ$

答: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $Cos\ (-780^\circ)$

答: $\frac{1}{2}$.

4. $Cot\ 840^\circ$

答: $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

5. $Cos\ 1125°$

答：$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. $Sec\ \frac{7\pi}{3}$

答：2.

7. $Sin\ \frac{15\pi}{4}$

答：$-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. $Cot\ \frac{16\pi}{3}$

答：1.

9. $Tan\left(-\frac{23}{4}\pi\right)$

答：1.

10. $Se\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

答：$\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

用三角函數表，查下列各函數之值：

11. $Cos\ 46°20'$

12. $Sin\ 149°30'$

13. $Tan\ 3020°13'$

14. $Cot\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

15. $Sec\ 36°23'$

16. 若 $Sin\ \theta = 0.1801$，求 θ.

17. 若 $Tan\,\theta = 1.7060$, 求 θ.

18. 若 $Cos\,\theta = 0.6543$, 求 θ.

19. 求在 $0°$ 與 $360°$ 間之 A 角, 設已知

(a) $Sin\,A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

答: $A = 45°, 135°$.

(b) $Tan\,A = -1$,

答: $A = 135°, 315°$.

(c) $Cos\,A = -\frac{1}{2}$.

答: $A = 120°, 240°$.

20. 若 $Cos\,A = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$, $Tan\,A = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 求 A.

答: $A = 210°$.

將下列各式化簡:

21. $$\frac{Sin(-A)}{Sin(180°+A)} - \frac{Tan(90°+A)}{Cot\,A} + \frac{Cos\,A}{Sin(90°+A)}$$

答: 1.

22. $$\frac{Csc(180°-A)}{Sec(180°+A)} \cdot \frac{Cos(-A)}{Cos(90°+A)}$$

答: $+Cot^2 A$.

23. $$Sin\,\theta\,Cos\,\theta\left\{Sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)Csc(-\theta) + Cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)Sec\,\theta\right\}$$

答: 1.

試證明下列諸等式:

24. $Tan\,225°Cot\,405° + Tan\,765°Cot\,675° = 0.$

25. $3Tan^2 45° - Sin^2 120° - \frac{1}{2}Cot^2 210° + \frac{1}{8}Sec^2 45° = 1.$

26. $\frac{Sin(180°-y)}{Sin(270°-y)} \cdot Tan(90°+y) + \frac{1}{Sin^2(270°-y)}$

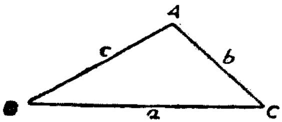
$= 1 + Sec^2 y.$

27. $Cos\frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = Sin\,\frac{x}{3}.$

28. $Tan\,\frac{1}{2}(6\pi + x) = Tan\,\frac{x}{2}.$

第三章　直角三角形解法

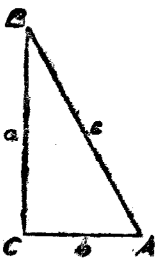
15.　解三角形　三角形之三邊及三角，稱三角形之六個元素．解三角形者卽已知其幾元素，用幾何學或三角學之方法求其他未知之元素．已知三角形之一邊及其他二元素，常可解此三角形．三角學中常用 A, B, C，表三角形 ABC 之三個內角，而以 a, b, c，各表角 A, B, C 之對邊．a, b, c 又常表邊 BC, AC, AB 長度之數，俟計算後再附以適當之單位．



第十九圖

解任意三角形之法，將嗣後論之，此章專述直角三角形之解法．

16.　解直角三角形　由初等幾何學，可知若已知直角三角形之二邊，則可求出其他一邊．如圖 ABC 爲直角三角形，則



第二十圖

$$c^2=a^2+b^2,$$

故 a, b, c 三者之中，已知其二，則必可求其他一邊．

又 A, B 爲互爲餘角之二銳角，故若已知其一，可求其他．

因此，解直角三角形之問題，祇有下述二種：

1.　已知二邊解直角三角形．由圖，悉

$$c^2=a^2+b^2, \qquad c=\sqrt{a^2+b^2},$$

$$a^2=c^2-b^2, \qquad a=\sqrt{c^2-b^2},$$

$$b^2=c^2-a^2, \qquad b=\sqrt{c^2-a^2}.$$

卽已知二邊，可求第三邊．上述根式，恆取正值，蓋三角形邊之長不爲負值也．

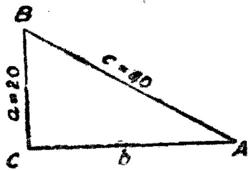
由 a, b, c 中任作二數之比，卽得二銳角 A, B 之三角函數，因而求得 A 或 B．由 $90°$ 減 A 得 B，由 $90°$ 減 B 得 A．例如，用 a 及 b，則

由 $\quad Tan\ A=\dfrac{a}{b}$，可求 B，

$B=90°-A$．

已知二邊及一直角，今求得一邊及二銳角，如是則六個元素已完全求得．

例．已知 $C=90°$, $a=20$, $c=40$，解此三角形．



第二十一圖

〔解〕 今 $b^2=c^2-a^2$

$$=1600-400$$

$$=1200$$

$$\therefore b=20\sqrt{3}.$$

又 $Sin\ A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{20}{40}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore A=30°$．

$\therefore B=90°-30°=60°$．

〔別解〕 $Cos\ B=\dfrac{a}{c}=\dfrac{20}{40}=\dfrac{1}{2}$；

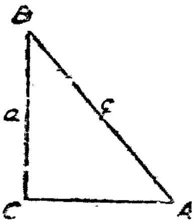
$\therefore B=60°$．

而　　$A=90°-B=30°$

又 $Cos\ A=\frac{b}{c}$，即

$$b=C\cdot Cos\ A=4\cdot Cos\ 30°$$
$$=40\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=20\sqrt{3}.$$

2. 已知一邊及一銳角解直角三角形.



第二十二圖

設已知直角三角形 ABC 之銳角 B，及 b 邊，則

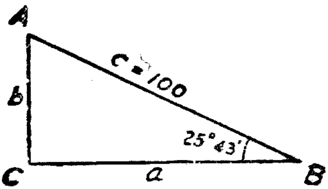
由　　$A=90°-B$，得 A.

由　$Tan\ A=\frac{a}{b}$，得

$$a=b\cdot Tan A.$$

由　$Sec\ A=\frac{c}{b}$，得 $c=b\cdot Sec A$.

例. 已知 $C=90°$，$B=25°43'$，$c=100$，解此三角形.



第二十三圖

〔解〕　$A=90°-B$

$=90°-25°43'$

$=64°17'$

因　　$\frac{a}{c}=Cos\ B$

故　　$a=c\cdot Cos\ B$

$=100\ Cos\ 25°43'$

$=100\times0.9010$〔由函數表〕

$=90.10$

又 $\frac{b}{a}=Tan\ B,$

$b=a\ Tan\ B=90.10\times Tan25°43'$

$=90.10\times 0.4817$

$=43.39.$

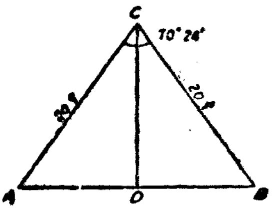
注意. 直角三角形之面積爲夾直角二邊之乘積之半. 上例中 $\triangle ABC$ 之面積爲

$\frac{1}{2}a.b=\frac{1}{2}\times 90.10\times 43.39$

$=1955.$

17. 二等邊三角形之解法 二等邊三角形頂角之平分線必爲底邊之中點垂直線，故此平分線必將原來三角形分爲兩個全等之直角三角形. 由是，二等邊三角形之解法，可藉直角三角形之解法得之.

例. 已知一二等邊三角形之頂角爲 70°24′ 二相等邊各爲 20 寸，解此三角形，並求其面積.



第二十四圖

〔解〕 $A=B$

$=\frac{1}{2}(180°-70°24')$

$=\frac{1}{2}(109°36')$

$=54°48'.$

$AB=2\cdot AD$

$=2\cdot AC\cdot Cos\ A$

$=2\times 20\times Cos\ 54°48'$

$$= 40 \times 0.5764$$

$$= 22.96$$

$$CD = AC \cdot Sin\ A$$

$$= 20 \cdot Sin\ 54°48'$$

$$= 20 \times 0.8171$$

$$= 16.34$$

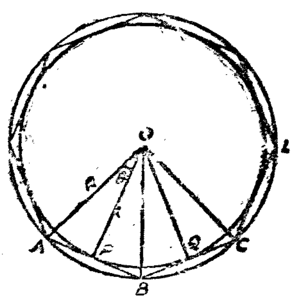
$$\therefore 面積 = \frac{1}{2} \times CD \cdot AB$$

$$= \frac{1}{2} \times 22.96 \times 16.34$$

$$= 187.6$$

故 $AB = CB$ 為 22.96 寸，面積為 187.6 方寸.

18. 解正多邊形 正多邊形（或正多角形）可內接於一圓且同時可外切於另一圓. 正多邊形之外心即其內心. 正 n 邊形之心 O 與各頂點 $A, B, C, \cdots\cdots$ 之聯線即其外接圓半徑. $OA, OB, OC, \cdots\cdots$ 等半徑分原來之正多邊形為 n 個全等之二等邊三角形. 又由 O 作 $AB, BC, \cdots\cdots$ 之垂線 $OP, OQ, \cdots\cdots$ 即得其內切圓之半徑. $OP, OQ, \cdots\cdots$ 等又將前所得之 $AOB, BOC, \cdots\cdots$ 等二等邊三角形各為二個全等直角三角形. 因是，正多邊形之解，亦可藉直角三角形之解而得之.



第二十五圖

如圖，ABC 為一正 n 邊形. 設其每邊之長為 a，則由幾何學，知

$$\angle AOB = \left(\frac{360}{n}\right)^{\circ}$$

直角三角形 AOP 內:

$$\theta = \tfrac{1}{2}\angle AOB$$

$$= \frac{180^\circ}{n}.$$

又 $AP = \dfrac{a}{2} =$ 邊長之半;

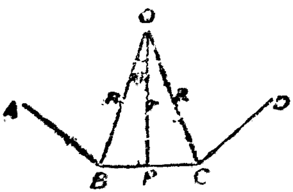
$OA = R =$ 外接圓之半徑,

$OP = r =$ 內切圓之半徑,

$p = na =$ 周界,

$S = \dfrac{pr}{2} =$ 面積.

例. 設一正十二邊形,每邊為 20 尺,求其外接圓半徑,內切圓半徑,及其面積.



第二十六圖

〔解〕 $\angle BOC = \dfrac{360^\circ}{12} = 30^\circ.$

$\theta = \tfrac{1}{2} \times \angle BOC = 15^\circ.$

$BP = \tfrac{1}{2}.\ BC = 10.$

$Tan\ 15^\circ = \dfrac{BP}{r},$

$\therefore\quad r = \dfrac{10}{Tan\ 15^\circ}$

$= \dfrac{10}{0.2679} = 37.32$ 尺.

又 $Sin\ 15^\circ = \dfrac{BP}{R},$

故 $R = \dfrac{10}{Sin\ 15^\circ} = \dfrac{10}{0.2588} = 38.64$ 尺.

周界 $p=n\cdot a=12\times 20=240$ 尺.

面積 $S=\frac{p\cdot r}{2}=\frac{1}{2}\times 37.32\times 240$

$=4478$ 方尺.

習題六

解下列諸三角形，已知:

1. $A=90°$, $a=40$, $b=2\sqrt{3}$.

答: $c=20$, $B=60°$, $C=30°$.

2. $c=6$, $b=12$, $B=90°$

答: $a=6\sqrt{3}$, $A=60°$, $C=30°$.

3. $a=20$, $c=20$, $B=90°$

答: $b=20\sqrt{2}$, $A=C=45°$.

4. $a=5\sqrt{3}$, $b=15$, $C=90°$.

答: $c=10\sqrt{3}$, $A=30°$, $B=60°$.

5. $A=90°$, $B=25°$, $a=4$.

答: $C=65°$, $b=1.69$, $c=3.625$.

6. $B=90°$, $C=37°$, $b=100$.

答: $A=53°$, $c=60.18$, $a=79.86$.

7. $A=27°$, $C=63°$, $b=6$.

答: $B=90°$, $a=2.724$, $c=5.346$.

8. $B=90°$; $A=36°$, $c=100$, $Tan\,36°=.73$, $Sec\,36°=1.24$

答: $C=54°$, $a=73$, $b=124$.

9. $A=90°$, $c=37$, $a=100$, $Sin\ 21°43'=0.37$, $Cos\ 21°43'=0.93$.

答: $B=68°17'$, $C=21°43'$, $b=93$.

10. $A=90°$, $B=39°24'$, $b=25$.

答: $C=50°36'$, $a=39.38$, $c=30.43$.

11. 若 $C=90°$, $Cot A=0.07$, $b=49$, 求 a.

答: $a=700$.

12. 若 $a=100$, $B=90°$, $C=40°51'$, 求 c.

答: $c=86.47$.

13. 若 $b=200$, $A=90°$, $C=78°12'$, 求 a 之最近整數解.

答: $a=978$.

解下列各二等邊三角形:

14. 等角爲 $68°10'$, 等邊爲 0.295.

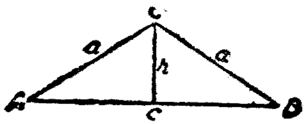
答: 底邊爲 0.2194,
頂角爲 $23°40'$,
高爲 0.2738.

15. 底邊爲 9, 高爲 20.

答: 等角爲 $77°19'$,
頂角爲 $25°22'$,
等邊爲 20.5.

16. 高爲 16.8, 面積爲 43.68.

答: 等角爲 $81°12'$,


第二十七圖

等邊為 17,

頂角為 17°36′;

底邊為 5.2.

用左圖，求二等邊三角形 ABC 之面積:

17. 已知 a 及 c.

答: $S=\frac{1}{4}C\sqrt{4a^2-c^2}$

18. 已知 a 及 C.

答: $S=a^2 Sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C$.

19. 已知 a 及 A.

答: $S=a^2 Sin A \cos A$.

20. 已知 h 及 C.

答: $S=h^2 Tan \frac{1}{2} C$.

解下列各正多邊形:

21. $n=10, a=1$.

答: $R=1.618, r=1.539,$

$S=7.694$.

22. $n=20, R=20$.

答: $r=19.75, a=6.257,$

$S=3.078$.

23. $n=8, r=1$.

答: $R=1.082, a=0.8284,$

$S=3.313.$

24. $n=11, S=20.$

答: $R=2.593, r=2.488,$

$a=1.461.$

25. 設正 n 邊形每邊爲 a, 試證

$$R=\tfrac{1}{2}a\ Csc\ \frac{180^\circ}{n}\ 及\ r=\tfrac{1}{2}a\ Cot\ \frac{180^\circ}{n}.$$

26. 設一圓之內接正六邊形之每邊爲 1 寸, 求內接正十二邊形每邊之長.

答: 0.5176 寸.

27. 設一等邊三角形之周長爲 20, 求其內切圓之面積.

答: 11.61.

28. 設一圓之內接正八邊形及正九邊形之周長均爲16, 求二形面積之差.

答: 0.2238.

29. 設一圓之內接正五邊形及正六邊形之面積均爲12, 求二形周長之差.

答; 0.310.

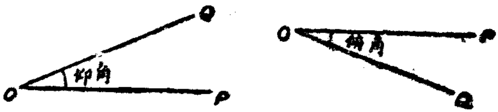
30. 設每邊爲 a 之正 n 邊形內接於半徑 R 之圓, 設同圓內接正 $2n$ 邊形之每邊爲 b, 試證

$$b=a\ Sin\ \frac{90^\circ}{n}\ Csc\ \frac{180^\circ}{n}.$$

19. **應用問題** 利用直角三角形之解法, 可算關於高

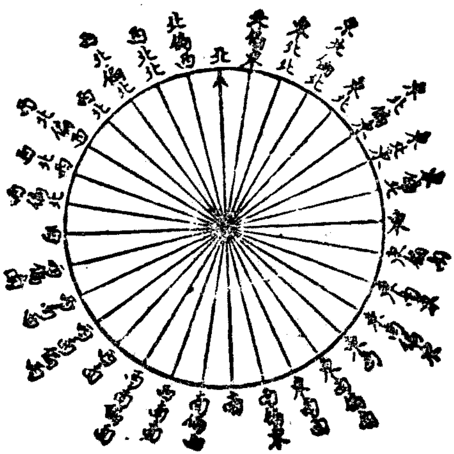
與距離之簡單問題. 先述下列諸術語.

設 Q 爲與水平線 OP 同在一垂直平面之一點, 由 OP 張角測 Q, 若 Q 在水平線 OP 之上側, 則 $\angle POQ$ 稱由 O 點測 Q 之仰角; 若 Q 在水平線 OP 之下側, 則 $\angle POQ$ 稱由 O 點測 Q 之俯角. 如圖



第二十八圖

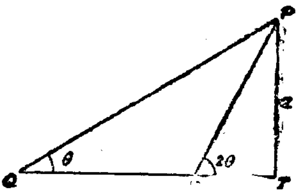
三角學與測量及航海極有關係, 故此處一述航海羅盤之大概, 以知方向之命名. 航海用羅盤共分三十二等份, 每份 $=360^\circ \div 32 = 11\frac{1}{4}^\circ$. 下圖卽示其分法



第二十九圖

東，南，西，北四點，稱方向基點. 其餘諸方向均隨此四點而定名. 除特殊情形下，通常以北方指紙之上方. 羅盤上任意二點間之角差，卽爲二點間幾個 $11\frac{1^\circ}{4}$ 角之倍數. 例如：由東北北測西北偏北之一點，則其間夾角卽爲 $5\times 11\frac{1}{4}^\circ=56\frac{1}{4}^\circ$；由東北偏東測東南之點，則其夾角卽爲 $7\times 11\frac{1}{4}^\circ=78\frac{3}{4}^\circ$.

例 1. 設 Q, R, T' 爲在一直線上之三點，$T'P$ 垂直 QT'，已知 $PT'=a$，$\angle PQT'=\theta$，$\angle PRT'=2\theta$，試以 a 及 θ 表圖中各綫之長.



第 三 十 圖

〔解〕 $\angle QPR=\angle PRT'-\angle PQR$

$\therefore\ \angle QPR=2\theta-\theta=\theta=\angle PQR.$

$\therefore\qquad QR=PR.$

在直角三角形 PRT' 內：

$$PR=a\,Csc\,2\theta;$$

$$QR=a\,Csc\,2\theta.$$

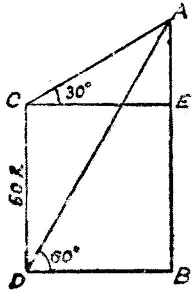
且 $\quad T'R=a\,Cot\,2\theta.$

在直角三角形 PQT' 內：

$QT = a\,Cot\,\theta,$

$PQ = a\,Csc\,\theta.$

例 2. 由地面測塔頂,得仰角爲 60°,由高 50 尺之屋頂測塔頂之仰角爲 30°,求塔之高.



第三十一圖

〔解〕 設 AB 表塔,CD 表屋,作 $CE \parallel DB$,

設 $AB = x$,則

$AE = AB - BE = x - 50.$

設 $DB = CE = y.$

在直角三角形 ADB 內:

$$y = x\cot 60^\circ = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

在直角三角形 ACE 內:

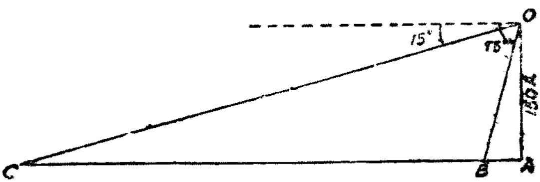
$$y = (x-50)Cot\,30^\circ = \sqrt{3}(x-50).$$

$$\therefore \frac{x}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}(x-50),$$

$$x = 3(x-50),$$

故 $x = 75$,即塔高爲 75 尺.

例 3. 由高 150 尺之懸崖觀測二船,得俯角爲 15° 與 75° 求二船間之距離.



第三十二圖

〔解〕 設 OA 表崖,B,C 表二船,OP 表 O 處水平線,則

$\angle POC=15°$, $\angle POB=75°$,

故 $\angle OCA=15°$, $\angle OBA=75°$.

設 $CB=x$, $AB=y$, 則 $CA=x+y$.

由直角三角形 OBA,

$$y=150\cdot Cot\,75° \tag{1}$$

由直角三角形 OCA,

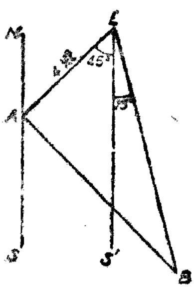
$$x+y=150\cdot Cot\,15° \tag{2}$$

由(2)減(1)

$$x=150(Cot\,15°-Cot\,75°)$$
$$=150(3.732-0.2679)$$
$$=150\times3.463=519.5$$

卽二船相距 519.5 尺.

例 4. 由燈塔 L 測二船 A, B, A 在西南, B 在南偏東 15°. 在 A 船測 B, B 適在 A 之東南, A 距 L 4 浬, 求二船之距離.



第三十三圖

〔解〕 作 LS' 指南方, 則由題意, 悉

$\angle ALS'=45°$

$\angle BLS'=15°$

故 $\angle ALB=60°$

過 A 作 SN 表南北方向,

則 $\angle NAL=\angle ALS'=45°$.

因 B 在 A 之東南,

故 $\angle BAS=45°$.

故 $\angle BAL=180°-45°-45°=90°$

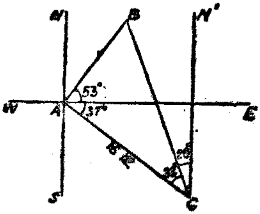
由直角三角形 ABL:

$$AB=AL\ Tan\ ALB=4\ Tan\ 60°$$

$$=4\cdot\sqrt{3}=6.928.$$

卽 A, B 二船相距 6.928 浬.

例 5. 一船每小時行 8 浬,向東偏南 37° 駛行. 該船於上午十一時測一炮台之方向爲東偏北 53°, 下午一時由船測炮台之方向爲北偏西 20°, 今求該兩次測炮台時與炮台之距離各若干?



第三十四圖

設 A 與 C 表船前後二位置, B 表炮台. 過 A 作方向基線, 表東南西北. 由觀測, 得

$$\angle EAC=37°,$$

$$\angle EAB=53°,$$

故 $\angle BAC=90°.$

過 C 作指北線 CN', 則 $\angle BCN'=20°$,

$$\angle ACN'=\angle CAS=90°-37°=53°.$$

$$\angle ACB=\angle ACN'-\angle BCN'$$

$$=53°-20°=33°$$

由直角三角形 ACB:

$$AB=AC\cdot Tan\ ACB=16\times Tan\ 33°$$

$$=16\times 0.6494=10.39.$$

$$BC=\frac{AC}{Cos\ ACB}=\frac{16}{Cos\ 33°}$$

$$=\frac{16}{0.8386}=19.08.$$

即該船上午十一時距炮台 10.39 浬; 下午一時距炮台 19.08浬.

習 題 七

1. 一人望見二旗桿均在其東北方向, 此人往東走 800 尺後, 一桿在其正北, 一桿在其西北, 問此人未走時與二桿各距若干?

答: 565.6 尺, 1131 尺

2. 港內二船正午啓錠, 一往南偏西 28° 行, 每小時行 10 浬; 一往南偏東 68° 行, 每小時行 10.5 浬, 問下午二時, 二船相距若干?

答: 29 浬.

3. 一塔較他塔高 30 尺, 一人於距低塔 100 尺處望二塔之顚適成一直線, 得仰角 27°2′, 求二塔之高.

答: 51 尺; 81 尺.

4. 二船之桅, 一高 40 尺, 一高 60 尺, 桅顚之連線與水平線成 33°41′ 角, 求二船之距離.

答: 30 尺.

5. 屋頂有旗桿, 於離屋 40 尺處測得屋頂與桿頂之仰角爲 30° 與 60°, 求旗桿之長.

答: 46.19 尺.

6. 於高 100 尺之紀念碑頂望二船. 得俯角爲 45° 與 30°,

求二船之距離.

答: 73.2 尺.

7. 於山頂測公路上二相鄰之里程石(相距 1 公里)得俯角 45° 與 22°;求山高若干公尺?

答: 677.6 公尺.

8. 由屋頂望塔頂得仰角 42°,視塔足得俯角 17°,屋高 30 尺,求塔高.

答: 118.3 尺.

9. 一人望山頂得仰角 14°,向山直行 700 尺後,望山頂得仰角 35°;求山高.

答: 271 尺.

10. 二塔並立,一人於二塔間中央測得二塔仰角為 30° 與 60°,試證二塔之高為三與一之比.

11. 一梯置於街中,梯頂斜倚高 33 尺之窗口,若轉換梯身,而不動梯足則梯頂靠對街高 21 尺之窗口,設梯長 40 尺,求街寬若干?

答: 20.88 尺.

12. 大樹為風折斷,上部倒地與地成 30° 角,樹顛與樹根在地面相距 50 尺,求樹原高若干?

答: 86.6 尺.

13. 有等高之二燈桿分置於長 100 尺之橋之兩端,一人在橋上望二桿之頂,得仰角為 60° 與30°,問燈桿之高,及人之位置.

答: 43.3尺,人距一桿75尺.

14. 設太陽光線與地成 30° 角時,一塔之影較陽光與地成 45° 角時之塔影長 60 尺,試證塔高為 $30(1+\sqrt{3})$ 尺.

第四章　對　數

20.　定義　若 $a^x=N$ 而 $a>1$，則曰 x 爲以 a 爲底數時眞數 N 之對數，常記如:

$$x=log_a\ N.$$

例如　$3^4=81$，則 $log_3 81=4$;

$10^1=10$，則 $log_{10} 10=1$;

$1000=10^3$，則 $log_{10} 10=3$;

$5^3=125$，則 $log_5 125=3$.

21.　對數之基本定理

一　底數之對數等於 1.

因　$a^1=a$，故 $log_a\ a=1$.

二　1 之對數等於 0.

因　$a^0=1$，故 $log_a\ 1=0$.

三　諸數乘積之對數，等於各因數之對數之和（底數相同）.

設以 a 爲底數時，M; N 之對數爲 x, y，則

$$x=log_a\ M,\quad y=log_a\ N.$$

$$\therefore\ M=a^x,\qquad N=a^y.$$

$$M\times N=a^x\times a^y=a^{x+y}$$

$$\therefore\ log_a\ (M\times N)=x+y=log_a\ M+log_a\ N.$$

同理: $\log_a(A\cdot B\cdots K)=\log_a A+\log_a B+\cdots+\log_a K.$

例1. $\log_a 42=\log_a(2\times3\times7)$

$=\log_a 2+\log_a 3+\log_a 7.$

例2. 已知 $\log_{10}3=0.47712$, $\log_{10}5=0.69897$.

則 $\log_{10}15=\log_{10}(3\times5)$

$=\log_{10}3+\log_{10}5$

$=0.47712+0.69897$

$=1.17609.$

四 分數之對數,等於分子之對數減分母之對數.

設 $\frac{M}{N}$ 爲一分數; $x=\log_a M$, $y=\log_a N$;

則 $M=a^x$; $N=a^y$.

故 $\frac{M}{N}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$

$\therefore$ $\log_a\frac{M}{N}=x-y=\log_a M-\log_a N.$

注: (1) $\log_a M+\log_a N\neq\log_a(M+N)$;

(2) $\log_a M-\log_a N\neq\log_a(M-N)$,

(3) $\log_a\frac{M}{N}\neq\frac{\log_a M}{\log_a N}$,

(4) $\frac{\log_a M}{\log_a N}\neq\log_a M-\log_a N.$

例1. $\log\frac{15}{7}=\log 15-\log 7$

$=\log(3\times5)-\log 7$

$$=\log 3+\log 5-\log 7.$$

例2.　已知 $\log_{10} 2=0.30103$, 求 $\log_{10} 5$.

因　$\log_{10} 5=\log_{10}\left(\frac{10}{2}\right)$

$$=\log_{10} 10-\log_{10} 2$$

$$=1-0.30103$$

$$=0.69897.$$

推論　$\log\frac{1}{M}=\log 1-\log M$

$$=0-\log M$$

$$=-\log M.$$

故某數倒數之對數，等於該數之對數之反號數，此稱爲原數之餘對數，某數 N 之餘對數，可記爲 $\mathrm{colog}\ N$. 即

$$\mathrm{colog}\ N=\log\frac{1}{N}=-\log N.$$

例如　$\mathrm{colog}_{10} 2=\log_{10}\frac{1}{2}$

$$=-\log_{10} 2$$

$$=-0.30103.$$

五　某數乘冪之對數，等於其數之對數與冪指數之乘積.

設　$x=\log_a M$, 則

$$M=a^x.$$

$$\therefore\ M^n=a^{nx}$$

$$\therefore\ \log_a M^n=nx=n\log_a M.$$

例　已知 $\log_{10} 2=0.30103$, $\log_{10} 3=0.47712$, 求 $\log_{10} 24$.

$$\begin{aligned}\log_{10} 24 &= \log_{10}(3\times 8)\\ &= \log_{10} 3+\log_{10} 2^3\\ &= \log_{10} 3+3\log_{10} 2\\ &= 0.47712+3\times 0.30103\\ &= 0.47712+0.90309\\ &= 1.38021.\end{aligned}$$

注意：(1) $\log M^n \neq (\log M)^n$，

(2) $n\log M \neq \log nM$.

六 某數某次根之對數，等於其數之對數以根指數除之之商.

於 $\log_a M^n = n\log_a M$

式中，置 $n=\dfrac{p}{q}$，

則 $\log_a M^{\frac{p}{q}} = \dfrac{p}{q}\log_a M$；

即 $\log_a \sqrt[q]{M^p} = \dfrac{p}{q}\log_a M.$

若 $p=1$，則

$$\log_a \sqrt[q]{M} = \frac{1}{q}\log_a M.$$

例1. $$\begin{aligned}\log_3\sqrt{27} &= \log_3\sqrt{3^3}\\ &= \log_3 3^{\frac{3}{2}}\\ &= \frac{3}{2}\log_3 3=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

例2. $\log_a \dfrac{a^5\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c^2}} = \log_a (a^5\sqrt{b}) - \log_a \sqrt[3]{c^2}$

$= \log_a a^5 + \log_a b^{\frac{1}{2}} - \log_a c^{\frac{2}{3}}$

$= 5 + \frac{1}{2}\log_a b - \frac{2}{3}\log_a c.$

於此可知，眞數之乘積，商，乘冪數及根數，均可由用某數爲底數之對數後取加，減，乘，除諸法求之.

習　題　八

1. 改寫下列各式爲對數式:

$2^5=32$, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{27}$, $\sqrt[4]{625} = 5$,

$2^{-3} = \dfrac{1}{8}$, $10^{-3}=0.001$, $x^3=y$,

2. 改寫下列各式爲指數式:

$\log_4 64=3$, $\log_6 36=2$, $\log_{10}.01=-2$,

$\log_9 3=\frac{1}{2}$, $\log_b a=c$,

3. 用 5 爲底數時, 1, 5, 25, $\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{1}{25}$, $\dfrac{1}{125}$ 之對數各爲何數?

4. 用 10 爲底數時, 1, 10, 100, 100000, 0.1, 0.01, 0.0001 之對數各爲何數?

證明下列各式:

5. $3\log_{27}3-\frac{1}{3}\log_3 27+\log_9 3=\frac{1}{2}$.

6. $\log_8 64+\log_4 64+\log_2 64=11$.

7. $2\log_a a+2\log_a\frac{1}{a}+\log_a 1=0$.

8. $\log_{10}(0.1)^4-\log_{10}\sqrt[3]{0.001}=-3$.

9. $\log_5\sqrt{125}+\log_{11}\sqrt[3]{121}=\frac{13}{6}$.

10. $\log_{10}\frac{1}{10}+\log_{10}\frac{1}{100}-\log_{10}\frac{1}{1000}=0$.

將下列各式展開爲對數之加減式:

11. $\log P(1+r)^n$

12. $\log\frac{ab\operatorname{Sin}C}{2}$.

13. $\log\sqrt[\frac{4}{3}]{\frac{x(x-y)}{z(z+x)}}$.

14. $\log\frac{a^3b^2c^{\frac{1}{2}}}{4\sqrt[3]{d}}$.

15. $\log\sqrt[4]{\left(\frac{a^2(b-c)}{c\sqrt{a-b}}\right)^3}$.

化簡下列各對數式:

16. $2\log x+\frac{1}{2}\log y-3\log z$.

17. $\frac{5}{3}\log(x-1)-\frac{2}{3}\log x-\frac{1}{6}\log(x+2)$.

18. $\frac{1}{2}\left\{2\log(x-1)+3\log(x-1)+\frac{1}{2}\log x\right\}$.

22. 常用對數 以 10 爲底數之對數，稱常用對數．常用對數，其底數 10 常略而不記．例如 $\log_{10} 2$ 即記爲 $\log 2$．以後言常用對數時，即簡稱之曰對數．例如 $\log_{10} 2$ 即曰 2 之對數．

正整數之對數依次列成之表曰對數表．

23. 定位部與定值部 由方程式 $10^x = N$，可知一數 N 之常用對數一般不爲整數，且不常爲正數．

例如 $10^3 < 3154 < 10^4$

則 $3 < \log 3154 < 4$,

即 $\log 3154 = 3 +$ 小數．

又如 $10^{-2} < 0.06 < 10^{-1}$

則 $-2 < \log 0.06 < -1$

即 $\log 0.06 = -2 +$ 小數．

一數 N 之對數之整數部份稱定位部；小數部份稱定值部．

定位部可由觀察以決之，定值部則由對數表中查得之；決定定位部之方法如下述：

因 $10^0 = 1$, $\therefore \log 1 = 0$;

$10^1 = 10$, $\therefore \log 10 = 1$;

$10^2 = 100$, $\therefore \log 100 = 2$;

$10^3 = 1000$, $\therefore \log 1000 = 3$;

……………, $\therefore$ ……………．

故知，大於 1 而小於 10 之數，其定位部爲 0；大於 10 而小

於 100 之數，其定位部爲 1；大於 100 而小於 1000 之數，其定位部爲 2；推廣之，一 n 位整數之數，其定位部爲 $n-1$，故得：

定理 1. 大於 1 之眞數之對數，其定位部爲比其整數部份位數少 1.

又因　$10^{-1}=\dfrac{1}{10}=0.1,\qquad \therefore \log 0.1=-1;$

$$10^{-2}=\frac{1}{100}=0.01,\qquad \therefore \log 0.01=-2;$$

$$10^{-3}=\frac{1}{1000}=0.001,\qquad \therefore \log 0.001=-3;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,\qquad \therefore\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

故得：

定理 2. 小於 1 之眞數之對數，其定位部爲一負數，其絕對值等於小數點右方有效數字前 0 之個數加 1.

定位部爲負數時，常將負號記於定位部數字之上．例如 103 之定位部爲 2，但 0.00103 之定位部則爲 $\bar{3}$．因此一數之定值部總爲正小數．　設 n 爲正整數，因，

$$\log 10^{n}=n,$$

故　　$\log(M\times 10^{n})=n+\log M$

$$\log(M\div 10^{-n})=\overline{n}+\log M$$

卽眞數 M，$M\times 10^{n}$，$M\div 10^{n}$ 諸數之對數有相同之定値部，所差別者祗在定位部．故得

定理 3. 凡眞數之數字排列相同者,則不論其小數點之位置若何,其對數之定値部必相同.

例 $\log 1.03 = 0.0128,$

$$\log 10.3 = \log(1.03\times 10)$$
$$= \log 1.03 + \log 10$$
$$= 1.0128,$$
$$\log 10300 = \log(1.03\times 10^4)$$
$$= \log 1.03 + \log 10^4$$
$$= 4.0128,$$
$$\log 0.00103 = \log(1.03\times 10^{-3})$$
$$= \log 1.03 + \log 10^{-3}$$
$$= 0.0128 - 3,$$
$$= \overline{3}.0128.$$

注意:$\overline{3}.0128 \neq -3.0128.$

24. 對數表之用法 一數之對數之定位部,可由觀察而得,其定値部則賴對數表之查閱.今用下述諸例,以明表之查法.

例 1. 求 546, 0.0546 之對數.

〔解〕 由表,在頁之最左方,首書 *No.* 之一直列內,找得 54;再在首行中找得 6,然後由 6 之直列與 54 之橫行兩者相交處查得 7372;冠之以小數點,卽為 546 之定値部,亦卽 $\log 5.46$. 今再附以定位部,故得

$\log 546 = 2.7372$

$\log 0.0546 = \bar{2}.7372.$

例 2.　已知 $\log x = 3.9090$, 求 x.

〔解〕　由表之中部先查得 9090, 再視該數所在之行與列. 9090 在標明 81 之橫行內, 且在標明 1 之直列內, 故 0.9090 應爲 $\log 8.11$. 今 $\log x$ 之定位部爲 3, 故知

$x = 8110.$

例 3.　求 $\log 24.85$

〔解〕　三位有效數字之眞數之定值部可由附表直接查得今有第四位數字, 則可用表右方之比例差表修正之. 先得

$\log 24.80 = 1.3945$

在表之右方, 上表 1, 2,……9 之小表中於標 5 之直行中, 在該列與大表標 24 之橫行相交處查得 9, 此 9 名曰表差, 將 9 加在 1.3945 最右之數字上卽得. 故 $\log 24.85 = \log 24.80 + 5$ 之表差

$= 1.3945 + 9$

$= 1.3954.$

例 4.　已知 $\log x = 3.7747$, 求 x.

〔解〕　先在表中查 7747, 或與其最近之數. 今得 595 之定值部爲 7745, 596 之定值部爲 7752. 故 x 必在 595 與 596 之間.

x 之定值部 $= 7747$

595 之定值部 $= 7745$　(一

$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad 2}$

今在 59 之橫行內，在比例小表中檢得 2，然後再視 2 字左首標 3 之直列內，故知 x 之有效數字爲 5953. 用定位部 $\overline{3}$，故知

$$x=0.005953.$$

若有五位以上之有效數字之眞數，欲求其對數，或已知對數反求其眞數而表中無法確實查得時，則可用比例法求之. 比例之法與 § 13 中所述者相同，此處不贅述矣.

例 5. 求 257×18.34

〔解〕 設 $N=257\times18.34$

由表 $\log 257=2.4099$

$\log 18.34=1.2634$ （+

$\log N=3.6733$

$\therefore\ N=4713.$

例 6. 求 $x=\dfrac{\left(330\times\dfrac{1}{49}\right)^4}{\sqrt[3]{22\times6.9}}$

〔解〕 $\log x=4(\log330-\log49)-\frac{1}{3}(\log22+\log6.9)$

$\log 330=2.5185$

$\log 49=1.6902$ （−

$.8283$

4 （×

3.3132

減去 $.7271$

$\log x=2.5861$

$\log 22=1.3424$

$\log 6.9=0.8388$ （+

$3)\ 2.1812$

7271

故得 $x=385.6$

此處因原題目中所設數字，均無四位者，故答數最多取三位，宜爲 386.

習 題 九

用對數求下列諸題之值(答案最多用四位有效數字):

1. $31.9\times1.51\times9.7$

2. $.00567\times.0297$

3. $8.034\times1893\times4.007$

4. $43\times8.07\times.0392.$

5. $\dfrac{2.38\times3.901}{4.83}$

6. $\dfrac{14.72\times38.05}{276\times.0038}$

7. $\dfrac{293\times760\times13000}{780\times273}$

8. $(.097)^4$

9. $\sqrt{\dfrac{.0137\times.0296}{873.5}}$

10. $\dfrac{83\times\sqrt[3]{92}}{127\times\sqrt[5]{246}}$

11. 求 $\sqrt[3]{347.3}$ 與 $\sqrt[5]{256.4}$ 之比例中項.

12. 求 .0238 與 7.805 之比例第三項.

13. 設 $l=2.863$, $g=32.19$, $\pi=3.1416$,求 $2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ 之值.

14. 設 $m=18.34$, $v=35.28$, 求 $\frac{1}{2}mv^2$ 之值.

15. 設 $m=33.47$, $r=9.6$, $v=60$, $g=32.19$. 求 $F=\frac{mv^2}{gr}$ 之值.

16. 已知 $V=537.6$, $\pi=3.1416$. 由 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$, 求 r 之值.

17. 設 $x=73.90$, $y=27.25$, 由 $x^n y=8.7\times 10^8$, 求 n 之值.

18. 一立方體之金屬，每邊為 36.4 $cm.$, 將其熔成一球，求球之直徑.

答: 45.16 $cm.$

25. 三角函數對數表　本書第二附表，為從 0° 至 90° 之各主角函數值所列成之表. 用對數計算數值，已知其方便. 故若將函數表中所列之函數值一一查好對數，製列成表；則遇含有三角函數之計算時，可由角之大小，直接查到其某函數值之對數，不必先查函數值，再查其對數，致費二次手續. 本書第三附表即為此種三角函數對數表.

因角之正弦，與餘弦值小於 1，故正弦，餘弦之對數，其定位部為負數，為印刷方便計，特將正弦，餘弦之對數值加 10 列表，故實際計算時，須將表值減 10 後再用，角之正切值有大於 1 者，亦有小於 1 者，今亦為印刷方便計，亦將各正切對數值加 10，計算時亦須將表值減 10. 又函數對數之定位部祇標於每行

之第一數，同行其他各值查得時，必須冠之以定位部，此點不可忽略．若同行中，某角之函數對數定位部增大時，則在其定值部上方冠以橫線，以爲區別，此角之函數對數定位部卽以下一行之定位部爲準．

例 1. $\log Sin\ 29°30' = 9.6923-10$

$= \bar{1}.6923.$

例 2. $\log Cos\ 68°12' = 9.5698-10$

$= \bar{1}.5698.$

例 3. $\log Tan\ 84°24' = 11.0085-10$

$= 1.0085.$

三角函數對數表之插入法，與先述查函數表時相同，亦可利用表右端之表差加減得值．

例 1. $\log Tan\ 25°14' = \log Tan\ 25°12' + 2'$ 之表差

$= 9.6726-10+.0007$

$= 9.6733-10$

$= \bar{1}.6733.$

例 2. $\log Cos\ 34°16' = \log Cos\ 34°12' - 4'$ 之表差

$= 9.9175-10+.0003$

$= 9.9172-10$

$= \bar{1}.9172.$

注意：第一象限角之"正"函數之對數值隨角之增大而增加，"餘"函數之對數值則隨角之增大而減少．

又因　$Cot\ \theta=\frac{1}{Tan\ \theta}$, $Sec\ \theta=\frac{1}{Cos\ \theta}$, $Csc\ \theta=\frac{1}{Sin\ \theta}$; 故

$$\log Cot\ \theta=-\log Tan\ \theta,$$

$$\log Sec\ \theta=-\log Cos\ \theta,$$

$$\log Csc\ \theta=-\log Sin\ \theta;$$

因此 $logCot$, $logSec$, $logCsc$ 不再列表,應用時,用 $logTan$, $logCos$, $logSin$ 推算可也.

已知角 θ 之函數對數值,欲求 θ,其法亦與用函數表時相同.

例 1.　已知 $\log Cos\ \theta=9.6577-10$,求 θ.

〔解〕　　$\log Cos\ \theta=9.6577$

由表: $\log Cos\ 63^\circ=9.6570$

相減得表差=　　7

故 θ 爲較 63° 小之角,所小者爲相當於表差爲 7 之一角.今於表差列中查得此小角爲 $3'$,故　$\theta=63^\circ-3'=62^\circ57'$.

例 2.　已知 $\log Sin\ \phi=9.8111-10$,求 ϕ.

〔解〕　　$\log Sin\ \phi=9.8111$

由表　$\log Sin\ 40^\circ18'=9.8108$

表差　　　=　　3

故 ϕ 爲較 $40^\circ18'$ 大表差相當於 3 之小角,故 $\phi=40^\circ18'+2'=40^\circ20'$.

由 0° 至 3°,由 87° 至 90° 諸角之函數對數,因其間表差變化太大,故往往不附,應用時,可由比例求之.

例　求 $\dfrac{Cot\ 27°12' \times Sin\ 34°17'}{Sec\ 77°23'}$ 之值。

〔解〕 設以 x 表上式之值，則

$$x = Tan\ 62°48' \times Sin\ 34°17' \times Cos\ 77°23'.$$

$$\therefore\ \log x = \log Tan\ 62°48' + \log Sin\ 34°17' + \log Cos 77°23'.$$

$$\log Tan\ 62°48' = 10.2891 - 10$$

$$\log Sin\ 34°17' = 9.7507 - 10$$

$$\log Cos\ 77°23' = 9.3393 - 10$$

$$29.3791 - 30$$

即
$$\log x = \overline{1}.3791$$

$$x = 0.2394.$$

習　題　十

用表求下列諸函數之對數：

1. $Sin\ 29°38'$.

2. $Tan\ 38°25'$.

3. $Cot\ 42°27'$.

4. $Csc\ 55°22'$.

求角 θ，已知

5. $\log Sin\ \theta = \overline{1}.8599$.

6. $\log Cot\ \theta = 0.7456$.

7. $\log Cos\ \theta = \overline{2}.9331$.

8. $\log Tan\ \theta = 0.1013$.

9. 求 $Sin\ 27°13' \times Cos\ 46°16'$ 之值.

10. 求 $\dfrac{Sin\ 34°19' \times Tan\ 82°6'}{Cos\ 13°37'}$ 之值.

11. 已知 $a=32.73$, $b=27.86$, $C=30°16'$, 求 $ab\ Sin\ C$ 之值.

12. 已知 $a=2.0$, $n=8$, 求 $na^2\ Cot\dfrac{\pi}{n}$ 之值.

13. 設 $Tan\ \phi=\dfrac{2e}{1-e^2}Sin\ \theta$, 已知 $e=0.35$, $\theta=56°14'$;

求 ϕ.

14. 已知 $b=32.78$, $c=19.23$, $A=115°34'$, 求

$\dfrac{2bc}{b+c}\ Cos\ \dfrac{A}{2}$ 之值.

15. 已知 $v=48$, $\theta=23°$, $g=32.19$; $e=0.37$, 求

$\dfrac{2v^2\ Sin\ \theta}{g(1-e)^2\ Cos^2\theta}$ 之值

第五章　任意三角形之解法

26.　本章之目的

本書第三章已詳述直角三角形之解法．今述任意三角形之解法，卽在三角形三角及三邊之六元素中，已知其一邊及其他二元素時，欲求其他未知之三元素也．吾人可分下述四類問題以詳論之:

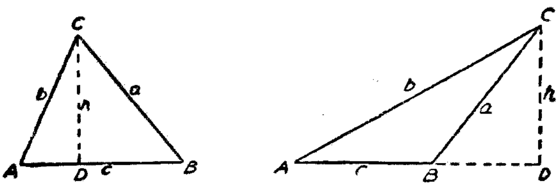
(1)　已知三角形之一邊及二角;

(2)　已知三角形之二邊及一對角;

(3)　已知三角形之二邊及其夾角;

(4)　已知三角形之三邊．

27.　正弦定律



第三十五圖

設 ABC 爲一三角形，A, B, C 表其頂角; a, b, c，表各對邊．自 C 作對邊之垂線 CD; 於是:

$$\frac{h}{b}=Sin\,A,$$

及

$$\frac{h}{a}=Sin\,B.$$

〔右圖中，$\frac{h}{a}=Sin(180^\circ-B)=Sin B$〕

上二式相除，得

$$\frac{a}{b}=\frac{Sin\ A}{Sin\ B},$$

即 $$\frac{a}{Sin\,A}=\frac{b}{Sin\ B}. \qquad (1)$$

同理，由 A 作對邊之垂線，可得

$$\frac{b}{c}=\frac{Sin\ B}{Sin\ C},$$

即 $$\frac{b}{Sin\ B}=\frac{c}{Sin\ C}. \qquad (2)$$

由 C 作對邊之垂線，可得

$$\frac{a}{c}=\frac{Sin\ A}{Sin\ C};$$

即 $$\frac{a}{Sin\,A}=\frac{c}{Sin\ C}. \qquad (3)$$

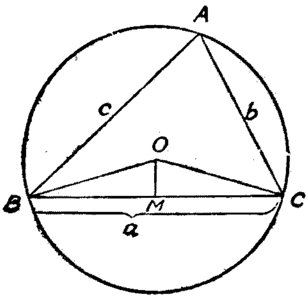
由 (1)，(2)，(3) 三式合之，得

$$\frac{a}{Sin\ A}=\frac{b}{Sin\ B}=\frac{c}{Sin\ C}$$

此名正弦定律；即

三角形中，各邊與其對角之正弦之比相等.

正弦定律以幾何法證之，更爲簡易. 設 O 爲 ABC 之外接圓心，R 爲半徑，作 OM 垂直 BC，於是 $\angle BOM=\frac{1}{2}\angle BOC=\angle A$，故 $BM=R\ Sin\ BOM=R\ Sin\ A$.



第三十六圖

但　$BM = \frac{a}{2}$,

故　$a = 2R\,Sin\,A.$

同理　$b = 2R\,Sin\,B.$

$c = 2R\,Sin\,C.$

於是,知

$$\frac{a}{Sin\,A} = \frac{b}{Sin\,B} = \frac{c}{Sin\,C} = 2R.$$

卽　三角形之各邊與各該邊對角之正弦之比均等於其外接圓之直徑.

28. 已知一邊及二角　今設已知 A, B, 及 b; 欲求 $C, a, c.$

(一)　由 $A+B+C=180°$, 可知

$$C=180°-(A+B)$$

(二)　由 $a:Sin\,A=b:Sin\,B$, 可得

$$a=\frac{b\,Sin\,A}{Sin\,B}$$,如用對數,

卽知　$\log a=\log b+\log Sin\,A+\mathrm{colog}\,Sin\,B.$

(三)　用正弦定律,可知

$$c=\frac{b\,Sin\,C}{Sin\,B}\left(=\frac{a\,Sin\,C}{Sin\,A}\right),$$

用對數;　$\log c=\log b+\log Sin\,C+\mathrm{colog}\,Sin\,B.$

例 已知 $c=958$, $A=75°18'$, $C=54°35'$.

〔解〕 $B=180°-(75°18'+54°35')$

$=50°7'$

由 $a=\dfrac{c\ Sin\ A}{Sin\ C}$;

$b=\dfrac{c\ Sin\ B}{Sin\ C}$;用對數,

$$\begin{aligned}
log\ c &= log\ 958=2.9814\\
log\ Sin\ A &= log\ Sin\ 75°18'=9.9855-10\\
colog\ Sin\ C &= \underline{colog\ Sin\ 54°35'=0.0888}\\
& \qquad log\ a=3.0557\\
& \qquad a=1137
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
log\ c &= log\ 958=2.9814\\
log\ Sin\ B &= log\ Sin\ 50°7'=9.8850-10\\
colog\ Sin\ C &= \underline{colog\ Sin\ 54°35'=0.0888}\\
& \qquad log\ b=2.9552\\
& \qquad b=902.
\end{aligned}$$

習 題 十 一

解三角形,若已知

1. $a=48$, $A=61°$, $C=69°$.

2. $a=200$, $A=10°14'$, $B=44°45'$.

3. $a=788$. $C=72°12'$. $B=55°42'$.

4. $b=37, A=115°36', B=27°19'$.

5. $c=3795, A=18°53'. B=81°12'$.

6. $b=13.5, A=14°12', C=57°17'$.

7. 三角形之一底爲500尺，二底角爲30°及105°，求其他二邊，及高.

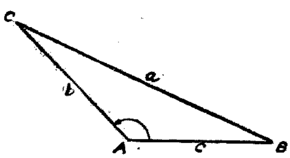
8. 三角形三角之比爲1:2:6，最大角之對邊爲20尺，求其他二邊.

9. 二人相距4里，相對而立，在二人所在與地面垂直之平面中，有一氣球，二人仰測氣球所得之角爲46°與52°，問氣球與二人之距離各若干？氣球離地若干？

10. 一梯形之二平行邊爲15與7，一平行邊與他二不平行邊所成角爲70°，40°，求二不平行邊.

29. 已知二邊及一對角 設已知a, b，及A，求解三角形ABC.

(A) 設A爲鈍角，則a必爲三角形三邊中之最長者始可作一三角形.然後用正弦定律解此三角形.

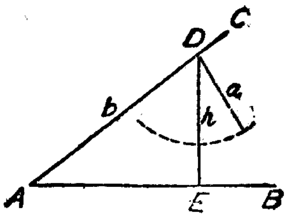


第三十七圖

(B) A爲直角，$a>b$時，可按直角三角形解法解之.

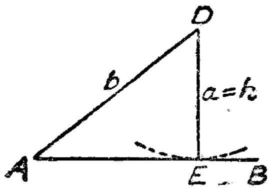
(C) A爲銳角時，可分下列諸情形論之：

(i)　若 $a<h$，即 a 小於由 D 點至 AB 之垂直線，此時用 D 爲圓心，a 爲半徑所畫之圓弧不能與 AB 相交，則卽不能有三角形滿足已知之條件.



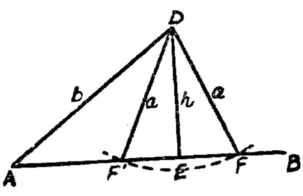
第三十八圖

(ii)　若 $a=h$，則 D 爲圓心，a 爲半徑之圓弧，適與 AB 相切，此時可得一直角三角形.



第三十九圖

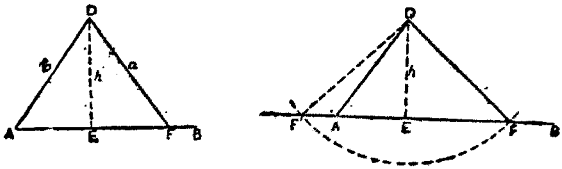
(iii)　若 $b>a>h$，則 D 爲圓心，a 爲半徑之圓弧交 AB 於兩點 F，F'；此時所得 $\triangle ADF$ 及 $\triangle ADF'$ 均滿足已知條件，二三角形均可依正弦定律解之.



第四十圖

(iv)　若 $a=b$，此時祇有一二等邊三角形.

(v)　若 $a>b$，此時 D 爲圓心，a 爲半徑之圓弧與 AB 復有二交點 F，F'；但祇有 $\triangle ADF$ 滿足已知條件，因 $\triangle ADF'$ 中之 A 角爲所設之 A 角之補角也.



第四十一圖

上述 h, 實等於 $b\ Sin\ A$; 今將以上結果綜述如下:

1. $A>90°$: $a>b$, 一解.

2. $A=90°$: $a>b$, 一解.

3. $A<90°$: 若 $a<b\ Sin\ A$, 無解;

若 $a=b\ Sin\ A$, 一解;

若 $b>a>b\ Sin\ A$, 二解;

若 $a \geqq b$, 一解.

此節所論者爲不能決定之種種情形, 有無解者, 有一解, 二解者, 故常稱爲疑款.

凡已知二邊及一對角而有解之三角形均可用正弦定律及三內角等於 180° 之理解之.

例1. 已知 $a=40$, $b=100$, $A=30°$, 求, B, C, c.

〔解〕 在此 $a<b$, 而 $b\ Sin\ A=100\ \frac{1}{2}=50$, 且 $a<b\ Sin\ A$; 故此題無解.

例2. 已知 $a=50$, $b=100$, $A=30°$, 求 B, C, c.

〔解〕 此處 $b=Sin\ A$, 卽 ABC 爲一直角三角形, $B=90°$. 因此

$$C=90°-A=60°$$

$$c=b\,\mathrm{Cos}\,A$$
$$=100\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=100\times0.8660$$
$$=86.6$$

例 3. 已知 $a=142$, $b=175$, $A=40°$, 求 B, C, c.

〔解〕 先比較 $a, b, b\,\mathrm{Sin}\,A$, 三數以定此題之解.

已知 $a<b$,

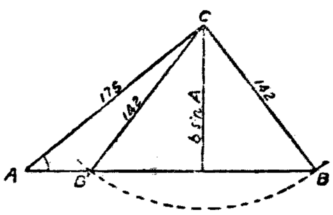
$$\log b=\ 2.2430$$
$$\underline{\log \mathrm{Sin}\,A=\ 9.8081-10}$$
$$\log b\,\mathrm{Sin}\,A=12.0511-10$$

但 $\log a=\ 2.1523$,

即 $\log a>\log b\,\mathrm{Sin}\,A$,

故 $b>a>b\,\mathrm{Sin}\,A$;

因知此題有二解, $\triangle ABC$, 與 $\triangle AB'C$.



第四十二圖

第一解; $\triangle ABC$:

因 $\mathrm{Sin}\,B=\dfrac{b\,\mathrm{Sin}\,A}{a}$

$$\begin{array}{r}
\log b = 2.2430 \\
\log Sin\ A = 9.8081-10 \\
colog\ \ a = 7.8477-10 \\
\hline
\log Sin\ B = 9.8988-10
\end{array}$$

$$B = 52°23'$$

$$A+B = 92°23'$$

$$\therefore\quad C = \angle ACB = 180° - 92°23'$$
$$= 87°37'$$

用 $$c = \frac{a\ Sin\ C}{Sin\ A}$$

$$\begin{array}{r}
\log A = 2.1523 \\
\log Sin\ C = 9.9996-10 \\
colog\ Sin\ A = 0.1919 \\
\hline
\log c = 2.3438
\end{array}$$

$$c = 220.7$$

第二解，$\triangle AB'C$:

$$\angle AB'C = \angle B' = 180° - B$$
$$= 180° - 52°23'$$
$$= 127°37'$$

$$\angle ACB' = \angle C' = 180° - (A+B')$$
$$= 180° - 167°37'$$
$$= 12°23'$$

用 $c' = \frac{a \operatorname{Sin} C'}{\operatorname{Sin} A}$, $(c' = AB')$,

$$\log a = 2.1523$$

$$\log \operatorname{Sin} C' = 9.3312 - 10$$

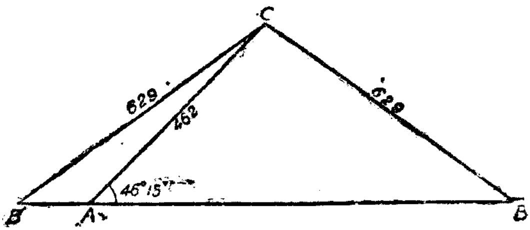
$$\underline{\operatorname{colog} \operatorname{Sin} A = 0.1919}$$

$$\log c' = 1.6754$$

$$c' = 47.36.$$

例 3. 已知 $a = 629$, $b = 462$, $A = 46°15'$, 求 B, C, c.

〔解〕 此處 $a > b$, 故僅有一解.



第四十三圖

用 $\operatorname{Sin} B = \frac{b \operatorname{Sin} A}{a}$

$$\log b = 2.6646$$

$$\log \operatorname{Sin} A = 9.7224 - 10$$

$$\underline{\operatorname{colog} a = 7.2013 - 10}$$

$$\log \operatorname{Sin} B = 9.5883 - 10$$

$$B = 36°2'$$

$$C = 180° - (A + B)$$

$$=180°-82°17'$$

$$=97°43'$$

由 $$c=AB=\frac{a\ Sin\ C}{Sin\ A}$$

$$\log a=2.7987$$

$$\log Sin\ C=9.9909-10$$

$$\underline{colog\ Sin\ A=0.2776}$$

$$\log c=3.0672$$

$$c=1167.$$

例 4. 已知 $a=204$, $b=204$, $A=50°42'$; 求 B; C; c.

〔解〕 此處 $a=b$, 故爲二等邊三角形,

故 $$B=A=50°42',$$

$$C=180°-(50°42'+50°42')$$

$$=78°36'$$

用 $$c=\frac{a\ Sin\ C}{Sin\ A},$$

$$\log a=2.3096$$

$$\log Sin\ C=9.9913-10$$

$$\underline{colog\ Sin\ A=0.1113}$$

$$\log c=2.4122$$

$$c=258.3.$$

習題十二

已知下列各元素，决定各該三角形是否有解？有幾個解？(不必一一解出)．

1. $a=25,\ b=50,\ A=30^\circ$.

2. $a=100, b=100, A=30^\circ$.

3. $a=200, b=100, A=30^\circ$.

4. $a=108, b=152.7, A=45^\circ$.

5. $a=802, b=785, A=32^\circ 6'$.

6. $a=20,\ b=75,\ A=74^\circ 19'$.

7. $a=57,\ b=42,\ A=20^\circ 10'$.

8. $a=210, b=196, B=77^\circ 17'$.

9. 已知 $a=2, c=\sqrt{3}+1, A=45^\circ$；求，$B, C, b$.

答：$\begin{cases} B_1=30^\circ \\ C_1=105^\circ \\ b_1=\sqrt{2}, \end{cases}$；$\begin{cases} B_2=60^\circ, \\ C_2=75^\circ, \\ b_2=\sqrt{6}. \end{cases}$

10. 已知 $A=30^\circ, b=8, a=6$；求 c.

答：$c_1=11.4$; $c_2=2.46$.

11. 已知 $A=30^\circ, c=250, a=125$；求 B, C, b.

答：$B=60^\circ, C=90^\circ, b=216$.

12. 已知 $a=250, b=240, A=72^\circ 5'$；求 B, C.

答：$B=65^\circ 59'$,

$C=41^\circ 56'$.

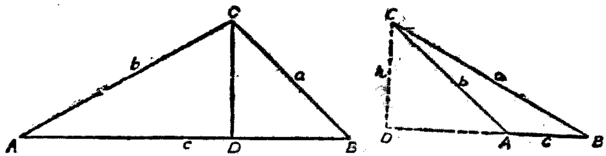
13. 已知 $A=18^\circ, b-a=2, ab=4$，求 B, C.

答: $\begin{cases} B_1=54^\circ \\ C_1=108^\circ \end{cases}$; $\begin{cases} B_2=126^\circ \\ C_2=36^\circ. \end{cases}$

14. 已知 $A=36^\circ$, $a=4$, 由 C 至 AB 之垂直距離爲 1.36, 求 B,C.

答: $18^\circ, 126^\circ$.

30. **餘弦定律** 任意三角形內，一邊之平方，等於其他二邊平方之和，減去此二邊與其夾角餘弦之積之二倍.



第四十四圖

〔證〕 (i) 設 A 爲銳角. 因

$$a^2=h^2+BD^2$$

而 $$BD=C-AD$$

故 $$a^2=h^2+c^2-2c\cdot AD+AD^2.$$

又因 $$h^2+AD^2=b^2,$$

$$AD=b\operatorname{Cos}A,$$

故 $$a^2=b^2+c^2-2bc\operatorname{Cos}A \qquad (\mathrm{I})$$

(ii) 設 A 爲鈍角. 因

$$a^2=h^2+BD^2;$$

而 $$BD=c+AD,$$

故 $$a^2=h^2+c^2+2c\cdot AD+AD^2.$$

又因 $h^2+AD^2=b^2$,

$$AD=b\,Cos(180°-A)$$

$$=-b\,Cos\,A$$

故 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot Cos\,A$.

因此，無論 A 爲銳角，鈍角，(1) 式之關係常成立. 同理，可證:

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot Cos\,B \qquad (2)$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot Cos\,C \qquad (3)$$

注意: 若A 爲直角，則 $Cos\,A=0$, (1) 式卽 $a^2=b^2+c^2$. 由是，(1)，(2)，(3) 三式亦可視爲畢達哥拉定理之擴充焉.

31. 已知二邊及其夾角 已知三邊之解法.

(i) 已知 b 與 c 二邊，及夾角 A，則可用 (1)式，解出 a 邊. 然後，用正弦定律解得 B, C 二角.

(ii) 若已知三邊 a, b, c, 可由 (1)，(2)，(3) 三式移項，求得 A; B, C 三角:

$$Cos\,A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \qquad (4)$$

$$Cos\,B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \qquad (5)$$

$$Cos\,C=\frac{a^3+b^2-c^2}{2ab}. \qquad (6)$$

解三角形之四類問題，就理論上言，應用正弦定律及餘弦定律已可完全解決. 但因餘弦定律之三式，若用對數計算，頗不方便. 吾人常以餘弦定律計算數字簡單之問題，或藉以估計某邊

之長度．實際上，精密而簡捷之計算，尚有待於正切定律之運用焉．

例 1.　已知 $b=\sqrt{3}$，$c=1$，$A=30^\circ$，求 B, C, a.

〔解〕　因 $a^2=b^2+c^2-2bc\,Cos\,A$

$$=3+1-2\cdot\sqrt{3}\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=1$$

故 $a=1=c$.

$\therefore$ $C=A=30^\circ$,

$B=180^\circ-A-C=120^\circ$.

例 2.　已知 $a=12$，$b=16$，$c=20$，求 A, B, C.

〔解〕　$Cos\,A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}$

$$=\frac{16^2+20^2-12^2}{2\cdot16\cdot20}$$

$$=\frac{4}{5}\doteq0.8000.$$

$A=36^\circ52'$

$Cos\,B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2\,ac}$

$$=\frac{3}{5}=0.6000$$

$B=53^\circ8'$

$Cos\,C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2\,ab}$

$$=0$$

$C=90°$.

例3. 設 $a=x^2+x+1, b=2x+1, c=x^2-1$; 證明其最大之角爲 120°.

〔證〕 a, b, c 三邊之中，以 a 邊爲最大，故其所對之 A 角爲最大. 由

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(2x+1)^2+(x^2-1)^2-(x^2+x+1)^2}{2(2x+1)(x^2-1)}$$

$$=-\tfrac{1}{2}$$

故 $A=120°$

習題十三

1. 已知 $a=5, b=5, C=60°$, 求 c.

2. 已知 $a=16, c=10, B=60°$, 求 b.

3. 在平行四邊形 $ABCD$ 內, $AB=6$ 寸, $AD=8$ 寸; $A=30°$; 求二對角線之長.

4. 已知 $a=4, b=6, C=60°$, 求 A, B, c.

5. 已知 $a=2, b=\sqrt{6}, c=\sqrt{3}-1$, 求 A, B, C.

6. 已知 $a=9, b=10, c=11$, 求 B.

7. 已知三角形 ABC 中之三邊 $a=2, b=3, c=4$; 求其最大之角.

8. 已知 $a=17, b=20, c=27$; 求其最小之角.

9. 已知 $a=7, b=4\sqrt{3}, c=\sqrt{13}$; 求其最小之角.

10. 已知 $a=56, b=63, c=33$; 求其最大之角.

設三角形 ABC 之三邊為 a, b, c; R 為其外接圓半徑; 求證下列諸題:

11. $a=b\ Cos\ C+c\ Cos\ B$,

$b=a\ Cos\ C+c\ Cos\ A$,

$b=a\ Cos\ C+c\ Cos\ A$,

$c=a\ Cos\ B+b\ Cos\ A$.

12. $R(Sin\ A+Sin\ B+Sin\ C)=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

13. $R=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{abc}{Sin\ A\ Sin\ B\ Sin\ C}}$.

14. $a^2+b^2+c^2=2(ab\ Cos\ C+bc\ Cos\ A+ca\ Cos\ B)$.

15. $\dfrac{Cos\ A}{a}+\dfrac{Cos\ B}{b}+\dfrac{Cos\ C}{c}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2\ abc}$.

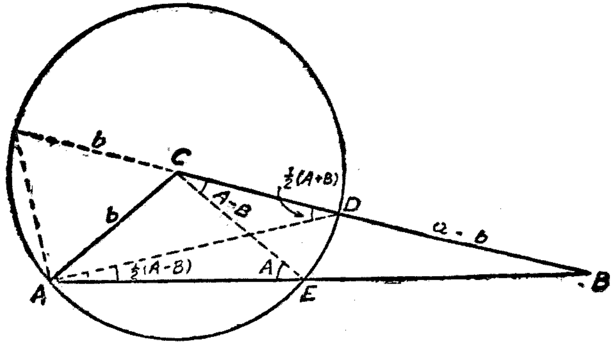
16. $\dfrac{Cos\ B+Cos\ C}{1-Cos\ A}=\dfrac{b+c}{a}$.

17. $\dfrac{Sin A+2\ Sin B}{b+2\ b}=\dfrac{Sin\ C}{c}$.

18. $a+b+c=(b+c)Cos\ A+(c+a)Cos\ B+(a+b)Cos\ C$.

32. **正切定律** 三角形任意兩邊之和與差之比,等於其相對兩角之半和之正切與半差之正切之比.

〔證〕: 設 ABC 為任意三角形, 以 AC 為半徑, C 為圓心作圓. 交 CB; AB 於 D; E 兩點.



第 四 十 五 圖

延長 BC 交圓周於 D'. 作 CE, AD, AD'.

由是　$\angle D'CA=A+B$

$\therefore$　$\angle D'DA=\frac{1}{2}(A+B)$

$$A=\angle CEA=\angle ECB+B.$$

$\therefore$　$\angle ECB=A-B$

$\therefore$　$\angle DAE=\frac{1}{2}(A-B)$

$\angle D'AD=90°$.

今就 $\triangle ADB$, 用正弦定律, 得

$$\frac{DB}{AB}=\frac{\sin DAB}{\sin ADB},$$

但　$DB=a-b$, $AB=c$.

$$\therefore \quad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin[180°-\frac{1}{2}(A+B)]}$$

故
$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)} \tag{1}$$

復就$\triangle AD'B$，用正弦定律，則得

$$\frac{D'B}{AB}=\frac{\sin D'AB}{\sin AD'B}.$$

因　　$D'B=a+b$,

故　　$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin[D'AD+\frac{1}{2}(A-B)]}{\sin AD'B}$$

$$=\frac{\sin[90^\circ+\frac{1}{2}(A-B)]}{\sin[90^\circ-\frac{1}{2}(A+B)]}.$$

故　　$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\qquad(2)$$

以(1)除(2)，

$$\frac{\dfrac{a+b}{c}}{\dfrac{a-b}{c}}=\frac{\dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}}{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}},$$

卽　　$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}$$

由§10中，三角函數之商數關係，故知

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}.\qquad(3)$$

若$b>a$，則$B>A$，上式可改寫爲

$$\frac{b+a}{b-a}=\frac{\tan\frac{1}{2}(B+A)}{\tan\frac{1}{2}(B-A)}$$

將文字輪換之，可得

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{Tan\,\frac{1}{2}(B+C)}{Tan\,\frac{1}{2}(B-C)},\tag{4}$$

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{Tan\,\frac{1}{2}(C+A)}{Tan\,\frac{1}{2}(C-A)}.\tag{5}$$

因 $A+B+C=180°$，故

$$\tfrac{1}{2}(A+B)=90°-\frac{C}{2},$$

$$Tan\,\tfrac{1}{2}(A+B)=Cot\frac{C}{2}.$$

因此上述 (3) 式可改寫爲

$$Tan\,\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\,Cot\,\frac{C}{2};\tag{6}$$

(4), (5) 兩式，可如法改寫爲:

$$Tan\,\tfrac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}\,Cot\,\frac{A}{2};\tag{7}$$

$$Tan\,\tfrac{1}{2}(C-A)=\frac{c-a}{c+a}\,Cot\,\frac{B}{2}.\tag{8}$$

應用正切定律三式之一，可將已知二邊及其夾角之三角形解出. 例如，已知 a, b 及 C，則用 (6)，可得 $Tan\,\frac{1}{2}(A-B)$，因此得 $\frac{1}{2}(A-B)$. C 旣已知，則易知 $\frac{1}{2}(A+B)$ 之值. 於是，A, B 之值亦立卽求得，因

$$A=\tfrac{1}{2}(A+B)+\tfrac{1}{2}(A-B);$$

$$B=\tfrac{1}{2}(A+B)-\tfrac{1}{2}(A-B).$$

故也. 旣知 A, B, C 並 a, b，再用正弦定律，則 c 亦可得矣.

因 $\frac{1}{2}(A+B)=90°-\frac{C}{2}$，以 $90°-\frac{C}{2}$ 代 $\frac{1}{2}(A+B)$，書於

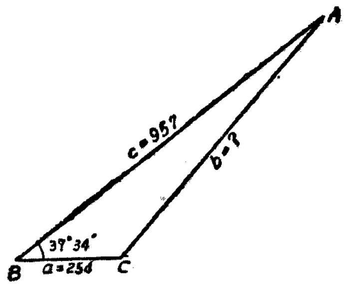
(1) 與 (2) 中，則得

$$\frac{a-b}{c}=\frac{Sin\frac{1}{2}(A-B)}{Cos\frac{1}{2}C};\tag{9}$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{Cos\frac{1}{2}(A-B)}{Sin\frac{1}{2}C}.\tag{10}$$

(9), (10) 兩式，稱 *Mollweide* 公式，於驗核已得之結果時常用之.

例：已知 $a=254$, $b=957$, $B=37°34'$, 求 b, A, C.



第 四 十 六 圖

$\frac{1}{2}B=18°47'$

〔解〕 $\frac{1}{2}(C+A)=90°-\dfrac{B}{2}=71°13'$

$$Tan\tfrac{1}{2}(C-A)=\frac{c-a}{c+a}Cot\tfrac{1}{2}B$$

$$=\frac{c-a}{c+a}\cdot\frac{1}{Tan\frac{1}{2}B}.$$

$c-a=703$, $+a=1211$

$$\log(c-a)=2.8470$$
$$\operatorname{colog}(c+a)=6.9169-10$$
$$\operatorname{colog}\operatorname{Tan}\tfrac{1}{2}B=0.4684$$

$$\log\operatorname{Tan}\tfrac{1}{2}(C-A)=10.2323-10$$
$$\tfrac{1}{2}(C-A)=59°38'20''$$
$$\tfrac{1}{2}(C+A)=71°13'$$
$$C=130°51'20''$$
$$A=11°34'40''$$

由 $b=\dfrac{c\operatorname{Sin}B}{\operatorname{Sin}C}$

$$\log c=2.9809$$
$$\log\operatorname{Sin}B=9.7851-10$$
$$\operatorname{colog}\operatorname{Sin}C=0.1213$$

$$\log b=2.8873$$
$$b=771.4.$$

〔驗核〕，用公式

$$\frac{c-a}{b}=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(C-A)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B}$$

$$\log b=2.8873$$
$$\log\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(C-A)=9.9359-10$$
$$\operatorname{colog}\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B=0.0238$$

$$\log(c-a)=2.8470$$

習題十四

1. 已知$a=9, b=6, C=60°$；求A, B.

答：$A=79°6'24'', B=40°53'36''$.

2. 已知$b=27, c=23, A=44°30'$；求B, C.

答：$B=78°48'52''$,

$C=56°41'8''$.

3. 已知$a=327, c=256, B=56°28'$，求A, C.

答：$A=74°32'44''$,

$C=48°59'16''$.

4. 已知$b=4c$, $A=65°$，求B, C.

答：$B=100°47'$,

$C=14°13'$.

5. 已知$17a=7b, C=60°$，求A, B.

答：$A=24°11'$

$B=95°49'$.

6. 已知三角形二邊之比爲5：3，其夾角爲$60°30'$；求其他二角.

答：$82°57', 36°33'$.

7. AB爲不可測長之物，由C點測得$\angle ACB=56°32'$，$AC=32.5$尺，$BC=24.26$尺，求AB.

答：$AB=34.77$尺.

8. 平行四邊形之二對角線長為 10 尺與 12尺，二對角線之夾角為 $49°18'$; 求此形各邊之長.

9. 二火車同時同地開駛，二軌道成$30°30'$角，二車之速度一為每小時 65 里，一為 70 里; 問開駛一小時後二車相距幾里?

10. 一舟距島之一端 5 里，距他端 8 里，舟與島兩端二視線之角為 $32°34$; 求島之長.

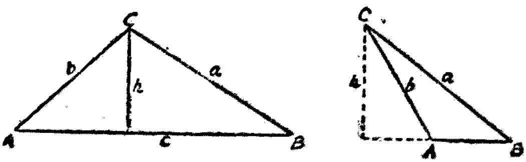
33. 三角形之面積

(一) 已知底與高. 設一三角形之底為 c, c 上之高為 h, 面積為 S, 則由幾何學知:

$$S=\frac{1}{2}ch.$$

(二) 已知二邊及其夾角. 設已知$\triangle ABC$ 之 b, c 二邊及其夾角 A; 則由圖，可知 $h=b\ Sin\ A$，故

$$S=\frac{1}{2}b\,c\ Sin\ A$$



第四十七圖

同理，
$$S=\frac{1}{2}a\,c\ Sin\ B$$
$$=\frac{1}{2}a\,b\ Sin\ C$$

(三) 已知三邊. 因

$$Sin^2 A=1-Cos^2\ A$$

$$=(1-Cos\,A)(1+Cos\,A)$$

又因　$Cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}$，故

$$S^2=\frac{1}{4}b^2c^2Sin^2\,A$$

$$=\frac{1}{4}b^2c^2\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}\right)$$

簡化之，得

$$S^2=\frac{1}{16}(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c).$$

令三角形之周長爲 $2s$，即 $a+b+c=2s$，

則　$b+c-a=2(s-a)$；

$a+b-c=2(s-c)$，

$a-b+c=2(s-b)$；

因此，　$S^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$.

故，　$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

上式爲西元前一世紀時，希臘工程師海羅(*Hero*)所創，故名海羅公式.

例 1.　已知 $b=6$ 尺，$c=5$ 尺，$A=30°$，求此三角形之面積.

〔解〕　$S=\frac{1}{2}\,b\,c\,Sin\,A$

$=\frac{1}{2}\times 6\times 5\times Sin\,30°$

$=7.5.$

答：7.5 平方尺.

例 2.　已知三角形之三邊爲 17, 25, 28，求其面積；並求三

邊上之高

〔解〕 $2s=17+25+28,$

$s=35.$

$S=\sqrt{35\times18\times10\times7}$

$=5\times7\times6$

$=210$

因 $S=\frac{1}{2}ch$，故 $h=\frac{2S}{c}$，由是三高爲：

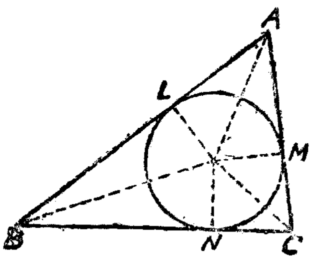
$\frac{420}{17}$；$\frac{420}{25}$，$\frac{420}{28}$，或爲 $\frac{420}{17}$，$\frac{84}{5}$，$15.$

34. 三角形內切圓之半徑

設三角形 ABC 之內切圓之心爲 O，切點爲 L, M, N；半徑爲

$r=OL=OM=ON.$

$\triangle ABC$ 爲 AOB，BOC，COA 三者之和，故



第四十八圖

$S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)r$

$=sr$

由前節，已知

$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$；故

$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$

35. 已知三邊求三角 用餘弦定律(§ 31 之 (4), (5), (6)) 若已知 a, b, c, 三邊已可求 A, B, C. 惟因多為加減關係, 計算較繁. 故今擬藉內切圓半徑之助, 用對數以求三角.

由前圖, 知

$$\angle NAO=\tfrac{1}{2}A,$$

則 $$Tan\tfrac{1}{2}A=\frac{ON}{AN}=\frac{r}{AN}.$$

又因

$$2s=AN+NB+BL+LC+CM+MA,$$

而 $NB=BL,\ CM=LC,\ MA=AN;$

故 $2s=2AN+2BL+2LC,$

卽 $s=AN+(BL+LC)$

卽 $AN=s-a$

故 $$Tan\tfrac{1}{2}A=\frac{r}{s-a}.$$

同理 $$Tan\tfrac{1}{2}B=\frac{r}{s-b},$$

$$Tan\tfrac{1}{2}C=\frac{r}{s-c}.$$

或 $$Tan\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s\ (s-a)}};$$

$$Tan\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s\ (s-b)}},$$

$$Tan\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s\ (s-c)}}.$$

例. 已知 $a=51,\ b=65,\ c=20$，求解此三角形

〔解〕 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)=68$

$s-a=17,\ s-b=3,\ s-c=48.$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{colog} s &= 8.1675-10\\
\log(s-a) &= 1.2304\\
\log(s-b) &= 0.4771\\
\log(s-c) &= 1.6812\\
\hline
\log r^2 &= 11.5562-10\\
\therefore\ \log r &= 0.7781
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log r &= 0.7781\\
\operatorname{colog}(s-a) &= 8.7696-10\\
\hline
\log \operatorname{Tan}\frac{A}{2} &= 9.5477-10\\
\therefore\ \frac{A}{2} &= 19^\circ 27'\\
A &= 38^\circ 54'.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log r &= 0.7781\\
\operatorname{colog}(s-b) &= 9.5229-10\\
\hline
\log \operatorname{Tan}\frac{B}{2} &= 10.3010-10\\
\therefore\ \frac{B}{2} &= 63^\circ 26'\\
B &= 126^\circ 52'.
\end{aligned}
$$

$$\log r = 0.7781$$

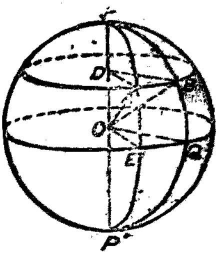
$$\text{colog}\ (s-c) = 8.3188-10$$

$$\log Tan\ \frac{C}{2} = 9.0969-10$$

$$\therefore \frac{C}{2} = 7°8'$$

$$C = 14°16'.$$

36. 航海上之應用 一船向正東或正西航行，卽常在同一緯度上時，稱平行航行．所航之距離稱橫距，常以海里爲單位．圖中弧 AB 爲 A，B 間之橫距．A 與 B 同一緯度，



第四十九圖

大圓弧 EOA = 大圓弧 = QB

$= \angle QOB$,

A 與 B 經度之差 = EQ，因知:

$$\frac{\text{弧}\ AB}{\text{弧}\ EQ} = \frac{DA}{OE} = \frac{DA}{OA}$$

$$= Cos\ OAD$$

$$= Cos\ AOE$$

$$= Cos\ \text{緯度}.$$

故 弧 AB = 弧 $EQ \cdot Cos$ 緯度，

卽 $$\text{經度差} = \frac{\text{橫距}}{Cos\ \text{緯度}}$$

註 1. 球面上通過球心之圓稱大圓．

註 2. 地球之大圓弧上之一分爲一海里（簡作浬 *Knot*）．

換言之，赤道上 1 浬之弧即地球大圓之 1 分，美國以 6080.3 呎為 1 浬，英國則以 6080 呎為 1 浬.

註 3. 經度，緯度多以 E, W, S, N 記之. 例如北緯 $5°3'$，記如 $5°3'\ N$. 地球上任一點均用經度，緯度之二數表之. 例：某船在 $25°20'\ N$, $36°16'\ W$，向正西（W）航行 140 浬，求其到達地之經度.

〔解〕 橫距$=140$,

緯度$=25°20'\ N$.

$$\therefore 經度差=\frac{140}{Cos\ 25°20'}$$

$$\begin{aligned} log\ 140 &= 12.1461-10 \\ log\ Cos\ 25°20' &= \ \ 9.9561-10 \\ \hline log\ 經度差 &= \ \ 2.1900 \\ 經度差 &= \ \ 154.9' = 2°34.9' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 故到達之經度 &= 36°10'\ W. + 2°34.9' \\ &= 38°44.9'\ W. \end{aligned}$$

習 題 十 五

求下列諸三角形之面積:

1. $a=40$, $b=13$, $c=37$.

答: 365.7.

2. $a=408$, $b=41$, $c=401$.

答: 29450. 或 6983.

3. $b=8, c=5, A=60°$.

答: 17.3'.

4. $b=21.66, c=36.94, A=66°4'$.

答: 365.7.

5. 求證平行四邊形之面積，等於二隣邊與其夾角正弦之乘積.

6. 求證任意四邊形之面積，等於二對角線與夾角正弦乘積之一半.

7. 已知一等腰梯形之二底及一銳角，求其面積公式.

8. 已知一二等邊三角形之底爲 20，面積爲 $100 \div \sqrt{3}$，求其各角.

解下列諸三角形:

9. $a=51, b=65, c=20$.

10. $a=111, b=145, c=40$.

11. $a=6, b=\sqrt{6}, c=\sqrt{3}-1$.

12. $a=6, b=8, c=10$.

13. 已知三角形之三邊爲 487.3, 512.3, 544.4，求其最小角.

14. 已知三角形之三邊爲 3, 4, 6 求其最大角.

15. 一船在 $46°16' N, 72°16' W$，向正東航行 149 浬 求其到達地之經度.

答: $68°54'39''$ W.

16. 一船在 $44°49'$ S, $119°42'$ E, 向正西行至 $117°16'E$; 問航行幾浬?

答: 103.6 浬.

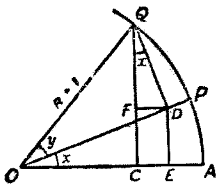
第六章 三角恆等式

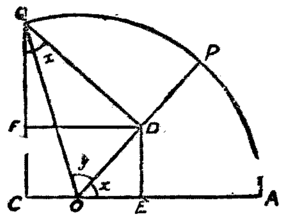
37. 三角恆等式

代數學中之等式有二種：不論其中未知數爲何值，等式均成立者稱恆等式，未知數必爲某些特別值；等式始能成立者稱方程式．含三角函數之恆等式稱三角恆等式；含三角函數之方程式稱三角方程式．本章專論三角恆等式，三角方程式則於下章述之．

第二章 § 10 中，吾人已論同角之六種三角函數中有(一)倒數關係，(二)商數關係，(三)平方和關係．此三種關係，實卽簡單之三角恆等式，蓋式中之角不論爲何值時，等式均能成立也．

38. 二角之和之正弦與餘弦





第五十圖

圖中，設 x, y 爲小於 $90°$ 之正角．取單位圓，以 O 爲圓心，作 $\angle AOP=x$，$\angle POQ=y$，則 $\angle AOQ=x+y$．左圖中，$\angle AOQ<90°$；右圖中 $\angle AOQ>90°$．今求 $\angle AOQ$ 之正弦及餘弦．

I. 求 $\sin(x+y)$. 作 $QC \perp OA$, 則

$$\sin(x+y)=CQ.$$

再作 $QD \perp OP$, 則

$$\sin y=DQ, \quad \cos y=OD.$$

自 D 作$DE \perp OA$, 又作 DF 平行 OA,

則 $\angle DQF=\angle AOP=x$. 因知

$$\sin(x+y)=CQ=CF+FQ$$
$$=ED+FQ$$

又 OED, QFD 均爲直角三角形, 故

$$ED=OD\sin x$$
$$=\sin x \cdot \cos y;$$
$$FQ=DQ \cdot \cos x$$
$$=\cos x \cdot \sin y.$$ 相加卽得

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y. \qquad (1)$$

II. 求 $\cos(x+y)$. 仍用前圖,

$$\cos(x+y)=OC$$
$$=OE-CE$$
$$=OE-FD,$$

(若 $x+y>90°$, OC 爲負).

$$OE=OD\cos x=\cos x \cdot \cos y;$$

$$FD=DQ\sin x=\sin x \cdot \sin y,$$ 故

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y. \qquad (2)$$

〔注意〕 x 與 y 均爲角, 故 $x+y$, $x-y$ 均爲角. $\sin(x+y)$

于 $Sin\ x+Sin\ y$.

例 1.　求 $Sin\ 75°$, $Cos\ 75°$

〔解〕　$Sin\ 75°=Sin\ (30°+45°)$

$$=Sin\ 30°\ Cos\ 45°+Cos\ 30°\ Sin\ 45°$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

$Cos\ 75°=Cos\ (30+45°)$

$$=Cos\ 30°\ Cos\ 45°-Sin\ 45°\ Sin\ 30°$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

例 2.　設 x, y 均為銳角，已知 $Sin\ x=\frac{3}{5}$, $Sin\ y=\frac{5}{13}$，求 $Cos\ (x+y)$

〔解〕　因 x, y 均銳角，故 $Cos\ x$, $Cos\ y$ 均為正數. 由平方和關係:

$$Cos\ x=\sqrt{1-Sin^2x}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5},$$

$$Cos\ y=\sqrt{1-Sin^2 y}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}.$$

$\therefore$　$Cos(x+y)=Cos\ x\ Cos\ y-Sin\ x\ Sin\ y$.

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{33}{65}.$$

證明 (1) 與 (2) 時，吾人爲方便計乃假定 x 與 y 均爲銳角，實則 x, y 爲任意角時，(1) 與 (2) 二式均眞. 今以例明之.

例 1. 設 x 爲第二象限之正角，y 爲第四象限之正角，以示 (1) 式爲眞.

〔證〕 命 $x=90°+x'$, $y=270°+y'$, 則 x', y' 均爲銳角.

$$x+y=360°+(x'+y'),\text{ 故}$$

$$\begin{aligned}Sin(x+y)&=Sin[360°+(x'+y')]\\&=Sin(x'+y')\\&=Sin\,x'\,Cos\,y'+Cos\,x'\,Sin\,y'.\\&=Sin(x-90°)\cdot Cos(y-270°)\\&\quad+Cos(x-90°)\cdot Sin(y-270°)\\&=Cos\,x\,Sin\,y+Sin\,x\,Cos\,y.\end{aligned}$$

故 (1) 式仍眞.

例 2. 設 x 爲第一象限之正角，y 爲第二象限之負角，以示 (2) 式爲眞.

〔證〕 命 $x=90°-x'$, $y=-180°-y'$,

則 x', y' 均爲銳角，而

$$x'=90°-x,\ y'=-180°-y;$$

$$x+y=-90°-(x'+y').$$

$$\begin{aligned}Cos(x+y)&=Cos[-90°-(x'+y')]\\&=Cos[90°+(x'+y')]\\&=-Sin(x'+y')\end{aligned}$$

$$= -[Sin\ x'\ Cos\ y' + Cos\ x'\ Sin\ y']$$

$$= -[Sin(90° - x)\ Cos(-180° - y) + Cos(90° - x) Sin(-180° - y)]$$

$$= -[Cos\ x \cdot Cos(180° + y) + Sin\ x(-Sin\ \overline{180 + y})]$$

$$= -[Cos\ x(-Cos\ y) + Sin\ x \cdot Sin\ y]$$

$$= Cos\ x\ Cos\ y - Sin\ x\ Sin\ y.$$

x 與 y 爲其他任意角時，(1) 與 (2) 無不爲眞，讀者可自試之.

39. 二角之差之正弦與餘弦

(1), (2)二式旣對任意之 x, y 爲眞，今以$(-y)$代 y 入 (1) 式卽得

$$Sin(x - y) = Sin[x + (-y)]$$

$$= Sin\ x\ Cos\ (-y) + Cos\ x\ Sin(-y)$$

因 $Cos(-y) = Cos\ y$, $Sin(-y) = -Sin\ y$, 故

$$Sin(x - y) = Sin\ x\ Cos\ y - Cos\ x\ Sin\ y. \tag{3}$$

$$Cos(x - y) = Cos[x + (-y)]$$

$$= Cos\ x \cdot Cos(-y) - Sin\ x\ Sin(-y)$$

卽

$$Cos(x - y) = Cos\ x\ Cos\ y + Sin\ x\ Sin\ y. \tag{4}$$

例 1. 求 $Sin\ 15°$

〔解〕: 用 (3), 設 $x = 45°$; $y = 30°$, 則

$$Sin\ 15° = Sin(45° - 30°)$$

$$= Sin\,45^\circ \cdot Cos\,30^\circ - Cos\,45^\circ\,Sin\,30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

例 2. 證明 $Sin(A+B)Sin(A-B)=Sin^2 A-Sin^2 B$.

〔證〕: $Sin(A+B)Sin(A-B)$

$= [Sin\,A\,Cos\,B + Cos\,A\,Sin\,B]\,[Sin\,A\,Cos\,B - Cos\,A\,Sin\,B]$

$= Sin^2 A\,Cos^2 B - Cos^2 A\,Sin^2 B$

$= Sin^2 A(1-Sin^2 B)-(1-Sin^2 A)Sin^2 B$

$= Sin^2 A - Sin^2 B.$

習 題 十 六

1. 用 60° 與 30° 之函數，證明
   $Sin\,90^\circ=1$, $Cos\,90^\circ=0$.

2. 設 $Sin\,A=\frac{3}{5}$, $Cos\,B=\frac{-9}{41}$, A 為第一象限之角; B 為第二象限之角，試求 $Sin(A+B)$, $Cos\,(A+B)$.

3. 設 $Sin\,A=\frac{45}{53}$, $Sin\,B=\frac{33}{65}$, A 為第二象限之角，B 為第四象限之角，求 $Sin(A+B)$, $Cos(A-B)$.

證明下列諸式:

4. $Sin\,(45°+x)=\dfrac{Cos\,x+Sin\,x}{\sqrt{2}}$.

5. $Cos\,(60°+x)=\dfrac{Cos\,x-\sqrt{3}\,Sin\,x}{2}$.

6. $Sin\,(y-30°)=\dfrac{\sqrt{3}\,Sin\,y-Cos\,y}{2}$.

7. $Cos\,(60°-y)=\dfrac{Cos\,y+\sqrt{3}\,Sin\,y}{2}$.

8. $\dfrac{Sin\,(x+y)}{Cos\,x\,Cos\,y}=Tan\,x+Tan\,y$.

9. $\dfrac{Sin\,(x-y)}{Sin\,x\,Sin\,y}=Cot\,y-Cot\,x$.

10. $Cos(A+B)\,Cos(A-B)=Cos^2A-Sin^2B$.

11. $Sin(A+B)\,Sin(A-B)=Cos^2B-Cos^2A$.

12. $Cos(45°-A)-Sin(45°+A)=0$.

13. $Cos(45°+A)+Sin(A-45°)=0$.

14. $Sin\,105°+Cos\,105°=Cos\,45°$.

15. $2\,Sin(A+45°)\,Sin(A-45°)=Sin^2A-Cos^2A$.

16. $2\,Cos\left(\dfrac{\pi}{4}+A\right)Cos\left(\dfrac{\pi}{4}-A\right)=Cos^2A-Sin^2A$.

17. $2\,Sin\left(\dfrac{\pi}{4}+A\right)Cos\left(\dfrac{\pi}{4}+B\right)=Cos\,(A+B)+$
$Sin\,(A-B)$.

18. $\dfrac{Sin\,(A-B)}{Cos A\,Cos B}+\dfrac{Sin\,(B-C)}{Cos B\,Cos C}-\dfrac{Sin\,(C-A)}{Cos C\,Cos A}=0$.

40. 二角之和或差之正切與餘切

I. 由公式 (1) 與 (3)，得

$$Tan\,(x+y)=\frac{Sin(x+y)}{Cos(x+y)}$$

$$=\frac{Sin\,x\,Cos\,y+Cos\,x\,Sin\,y}{Cos\,x\,Cos\,y-Sin\,x\,Sin\,y}$$

以 $Cos\,x\cdot Cos\,y$ 除分子，分母，則

$$Tan(x+y)=\frac{\dfrac{Sin\,x}{Cos\,x}+\dfrac{Sin\,y}{Cos\,y}}{1-\dfrac{Sin\,x}{Cos\,x}\cdot\dfrac{Sin\,y}{Cos\,y}}$$，故

$$Tan(x+y)=\frac{Tan\,x+Tan\,y}{1-Tan\,x\,Tan\,y}. \tag{5}$$

同理，由 (2) 及 (4)，可得

$$Tan(x-y)=\frac{Tan\,x-Tan\,y}{1+Tan\,x\,Tan\,y}. \tag{6}$$

II. $Cot\,(x+y)=\dfrac{1}{Tan(x+y)}=\dfrac{1-Tan\,x\,Tan\,y}{Tan\,x+Tan\,y}$;

以 $Tan\,x=\dfrac{1}{Cot\,x}$；$Tan\,y=\dfrac{1}{Cot\,y}$ 代入上式，簡化之，得

$$Cot\,(x+y)=\frac{Cot\,x\,Cot\,y-1}{Cot\,y+Cot\,x}. \tag{7}$$

同法，可得

$$Cot\,(x-y)=\frac{Cot\ x\ Cot\ y+1}{Cot\ y-Cot\ x}. \qquad (8)$$

公式(1)—(8)可合書如下，以便記憶：

$Sin(x\pm y)=Sin\ x\ Cos\ y\pm Cos\ x\ Sin\ y.$

$Cos(x\pm y)=Cos\ x\ Cos\ y\mp Sin\ x\ Sin\ y.$

$$Tan\,(x\pm y)=\frac{Tan\ x\pm Tan\ y}{1\mp Tan\ x\ Tan\ y}.$$

$$Cot\,(x\pm y)=\frac{Cot\ x\ Cot\ y\mp 1}{Cot\ y\pm Cot\ x}.$$

例1. 求 $Tan\ 75°$.

〔解〕 $Tan\ 75°=Tan(45°+30°)$

$$=\frac{Tan45°+Tan30°}{1-Tan45°Tan30°}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{3-1}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}$$

$$=2+\sqrt{3}.$$

例2. 求 $Tan(A+B+C)$

〔解〕: $Tan(A+B+C)=Tan[(A+B)+C]$

$$=\frac{Tan(A+B)+Tan\ C}{1-Tan(A+B)Tan\ C}$$

$$=\frac{\dfrac{Tan\ A+Tan\ B}{1-Tan A\ Tan\ B}+Tan\ C}{1-\dfrac{Tan\ A+Tan\ B}{1-Tan\ A\ Tan\ B}\cdot Tan\ C}$$

$$=\frac{Tan A+Tan B+Tan C-Tan A\ Tan B\ Tan C}{1-Tan A\ Tan B-Tan B\ Tan C-Tan C\ Tan A}.$$

推論. 若 $A+B+C=180°$, 則 $Tan(A+B+C)=0$, 故上式之分子必需爲零, 因得下述等式:

$$Tan A+Tan B+Tan C=Tan A\ Tan B\ Tan C.$$

習題十七

1. 設 $Tan\ A=\frac{1}{2}$, $Tan\ B=\frac{1}{3}$, 求 $Tan(A+B)$.

2. 設 $Tan\ A=\frac{4}{3}$, $B=45°$, 求 $Tan(A-B)$

3. 設 $Cot\ A=\frac{5}{7}$, $Cot B=\frac{7}{5}$; 求 $Cot(A+B)$; $Cot(A-B)$.

4. 設 $Cot\ A=\frac{11}{2}$, $Tan\ A=\frac{7}{24}$; 求 $Cot(A-B)$, $Tan(A+B)$.

證明下列各等式:

5. $Tan(45°+A)=\dfrac{1+Tan A}{1-Tan A}$.

6. $Tan(45^\circ - A) = \dfrac{1 - Tan A}{1 + Tan A}$.

7. $Cot\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right) = \dfrac{Cot\,\theta + 1}{Cot\,\theta - 1}$.

8. $Cot\left(\dfrac{\pi}{4} + \theta\right) = \dfrac{Cot\,\theta - 1}{Cot\,\theta + 1}$.

9. $Tan\,15^\circ = 2 - \sqrt{3}$.

10. $Cot\,15^\circ = 2 + \sqrt{3}$.

11. 求 $Cos(A+B+C)$.

12. 求 $Sin(A+B+C)$.

13. 用 $Tan A$, $Tan B$, $Tan C$ 表 $Tan(A-B-C)$.

14. 用 $Cot\,A$, $Cot\,B$, $Cot\,C$ 表 $Cot\,(A+B+C)$.

41. 倍角之三角函數 公式(1)——(8)既對任意 x 與 y 均成立，則置 $x=y$ 時，亦應成立；於是吾人得倍角之三角函數.

I. 由(1)

$$Sin\,(x+y) = Sin\,x\,Cos\,y + Cos\,x\,Sin\,y.$$

若 $x=y$，則得

$$Sin\,(x+x) = Sin\,x\,Cos\,x + Cos\,x\,Sin\,x,$$

即
$$Sin\,2x = 2\,Sin\,x\,Cos\,x. \qquad (9)$$

以 $x=y$ 代入(3)式，得

$$Cos\,(x+x) = Cos\,x \cdot Cos\,x - Sin\,x\,Sin\,x;$$

即 $$Cos\,2\,x=Cos^2x-Sin^2x. \tag{10}$$

由平方和關係，又易知

$$\begin{aligned} Cos\,2x&=Cos^2x-Sin^2x\\ &=1-2\,Sin^2x\\ &=2\,Cos^2x-1 \end{aligned}$$

以 $x=y$ 代入 (5) 式，得

$$Tan\,(x+x)=\frac{Tan\,x+Tan\,x}{1-Tan\,x\,Tan\,x},$$

即 $$Tan\,2\,x=\frac{2\,Tan\,x}{1-Tan^2x} \tag{11}$$

再以 $x=y$ 代入 (7) 式，得

$$Cot\,(x+x)=\frac{Cot\,x\cdot Cot\,x-1}{Cot\,x+Cot\,x};$$

即 $$Cot\,2\,x=\frac{Cot^2x-1}{2\,Cot\,x} \tag{12}$$

由前二節之理，吾人可化 $n\,x$ 之函數為 x 之函數，此處 n 表一整數.

例 1. 求 $Sin\,3\,x$.

〔解〕. 由 (1)

$$Sin(x+y)=Sin\,x\,Cos\,y+Cos\,x\,Sin\,y$$

命 $y=2\,x$，則

$$\begin{aligned} Sin\,3\,x&=Sin\,x\,Cos\,2\,x+Cos\,x\,Sin\,2\,x\\ &=Sin\,x(Cos^2x-Sin^2x)+Cos\,x(2\,Sin\,x\,Cos\,x) \end{aligned}$$

$$=3\,Sin\,x\,Cos^2 x-Sin^3\,x$$

$$=3\,Sin\,x\,(1-Sin^2 x)-Sin^3 x$$

$$=3\,Sin\,x-4\,Sin^3 x.$$

例2. 求 $Tan\,4\theta$.

〔解〕 由(1)

$$Tan\,2\,x=\frac{2\,Tan\,x}{1-Tan^2 x}.$$

命 $x=2\,\theta$, 則

$$Tan\,4\,\theta=\frac{2\,Tan\,2\theta}{1-Tan^2 2\,\theta}$$

$$=\frac{2\cdot\dfrac{2\,Tan\,\theta}{1-Tan^2\theta}}{1-\left(\dfrac{2\,Tan\,\theta}{1-Tan^2\theta}\right)^2}$$

$$=\frac{4\,Tan\theta(1-Tan^2\theta)}{1-6\,Tan^2\theta+Tan^4\theta}.$$

例3. 求證 $Sin\,3\,A\,Cos\,A-Cos\,3\,A\,Sin\,A=Sin\,2\,A$.

〔證〕 由(2);

$$Sin\,x\,Cos\,y-Cos\,x\,Sin\,y=Sin(x-y),$$

命 $x=3\,A$, $y=A$, 因 $x-y=2A$, 故上式爲眞.

例4. 求證 $Cos\,4\,\theta\,Cos\,\theta+Sin\,4\,\theta\,Sin\,\theta$

$$=Cos\,2\,\theta\,Cos\,\theta-Sin\,2\,\theta\,Sin\,\theta.$$

〔證〕 左邊 $=Cos\,(4\,\theta-\theta)$

$$=Cos\,3\,\theta$$

$$=Cos\,(2\,\theta+\theta)$$

$$=Cos\,2\,\theta\,Cos\,\theta-Sin\,2\,\theta\,Sin\,\theta.$$

習題十八

證明下列恆等式:

1. $Cos(A+B)CosB+Sin(A+B)SinB=CosA.$

2. $Cos\,(30^\circ+A)\,Cos(30^\circ-A)-$
$Sin\,(30^\circ+A)\,Sin\,(30^\circ-A)=\frac{1}{2}.$

3 $Sin\,(60^\circ-A)\,Cos\,(30^\circ+A)+$
$Cos\,(60^\circ-A)\,Sin\,(30^\circ+A)=1.$

4. $\dfrac{Cos\,2\,x}{Sec\,x}-\dfrac{Sin\,2\,x}{Csc\,x}=Cos\,3\,x$

5. $Sin\,2\,\theta\,Cos\,\theta+Cos\,2\,\theta\,Sin\,\theta$
$=Sin\,4\,\theta\,Cos\,\theta-Cos\,4\,\theta\,Sin\,\theta.$

6. $Cos\,4\,\theta\,Cos\,\theta-Sin\,4\,\theta\,Sin\,\theta$
$=Cos\,3\,\theta\,Cos\,2\,\theta-Sin\,3\,\theta\,Sin\,2\,\theta.$

7. $(Sin\,\theta\pm Cos\,\theta)^2=1\pm Sin\,2\,\theta.$

8. $Cos^4\theta-Sin^4\theta=Cos\,2\,\theta.$

9. $Tan\,(45^\circ+A)-Tan\,(45^\circ-A)=2\,Tan\,2\,A.$

10. $3\,SinA-Sin\,3\,A=2\,Sin\,A(1-Cos\,2\,A).$

11. $Sin\,4x=8\,Cos^3x\,Sin\,x-4\,Cos\,x\,Sin\,x.$

12. $Sin\,5x=5\,Sin\,x-20\,Sin^3x+16\,Sin^5\,x.$

13. $Sin\,6x = 32\,Cos^5 x\,Sin\,x - 32\,Cos^3 x\,Sin\,x$
$+ 6\,Cos\,x\,Sin\,x.$

14. $Cos\,3x = 4\,Cos^3 x - 3\,Cos\,x.$

15. $Cos\,4x = 8\,Cos^4 x - 8\,Cos^2 x + 1.$

16. $Cos\,5x = 16\,Cos^5 x - 20\,Cos^3 x + 5\,Cos\,x.$

17. $Cos\,6x = 32\,Cos^6 x - 48\,Cos^4 x + 18\,Cos^2 x - 1.$

18. $Tan\,3x = \dfrac{3\,Tan\,x - Tan^3 x}{1 - 3\,Tan^2 x}$.

42. 半角之三角函數

I. 化一角之函數爲其半角之函數.

1. 由 $Sin\,2\theta = 2\,Sin\,\theta\,Cos\,\theta$, 命 $\theta = \frac{x}{2}$, 則

$$Sin\,x = 2\,Sin\frac{x}{2}\,Cos\,\frac{x}{2} \tag{13}$$

2. 由 $Cos\,2\theta = Cos^2\theta - Sin^2\theta$

$$= 2\,Cos^2\theta - 1$$

$$= 1 - 2\,Sin^2\theta,$$

命 $\theta = \frac{x}{2}$; 則

$$Cos\,x = Cos^2\frac{x}{2} - Sin^2\frac{x}{2}.$$

$$= 2\,Cos^2\frac{x}{2} - 1$$

$$= 1 - 2Sin^2\frac{x}{2} \tag{14}$$

3 由 $Tan\,2\theta=\dfrac{2\,Tan\,\theta}{1-Tan^2\theta}$，

命 $\theta=\dfrac{x}{2}$；則

$$Tan\,x=\frac{2\,Tan\,\frac{x}{2}}{1-Tan^2\frac{x}{2}}. \qquad (15)$$

4. 由 $Cot\,2\theta=\dfrac{Cot^2\theta-1}{2\,Cot\,\theta}$；

命 $\theta=\dfrac{x}{2}$，則

$$Cot\,x=\frac{Cot^2\frac{x}{2}-1}{2\,Cot\,\frac{x}{2}}. \qquad (16)$$

II. 化半角函數爲其角之餘弦函數.

1. 因 $Cos\,x=1-2\,Sin^2\dfrac{x}{2}$

故 $2\,Sin^2\dfrac{x}{2}=1-Cos\,x$

則 $Sin\,\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-Cos\,x}{2}}$ (17)

2. 因 $Cos\,x=2\,Cos^2\dfrac{x}{2}-1$

故 $2\,Cos^2\dfrac{x}{2}=1+Cos\,x$

則 $$Cos\,\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+Cos\,x}{2}} \tag{18}$$

(17);(18) 二式相除，則得

$$Tan\,\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-Cos\,x}{1+Cos\,x}}. \tag{19}$$

(17);(18) 二式根號之正負，視 $\dfrac{x}{2}$ 所在象限爲定.(19)式右端若分子，分母各乘 $\sqrt{1+Cos\,x}$，則得

$$Tan\,\frac{x}{2}=\frac{Sin\,x}{1+Cos\,x}, \tag{19a}$$

此式雖由開平方而得，但因 $1+Cos\,x>0$, $Tan\,\dfrac{x}{2}$ 恆與 $Sin\,x$ 同號，故祇須用正號.若(19)式右端分子,分母同乘 $\sqrt{1-Cos\,x}$，則得

$$Tan\,\frac{x}{2}=\frac{1-Cos\,x}{Sin\,x} \tag{19b}$$

再按倒數關係，易知

$$Cot\,\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+Cos\,x}{1-Cos\,x}}=\frac{1+Cos\,x}{Sin\,x}=\frac{Sin\,x}{1-Cos\,x} \tag{20}$$

43. 雜例

1. 求 $Sin\,18^\circ$

設 $A=18^\circ$，則 $5\,A=90^\circ$，故

$$2A=90^\circ-3A.$$

$$\therefore\quad Sin\,2A=Sin\,(90^\circ-3A)=Cos\,3A;$$

$$\therefore\quad 2\,Sin\,A\,Cos\,A=4\,Cos^3A-3\,Cos\,A.$$

因 $Cos\,18^\circ\neq0$，以 $Cos\,A$ 除上式兩端，得

$$2\,Sin\,A=4\,Cos^2A-3$$

$$=4\,(1-Sin^2A)-3;$$

卽 $\quad 4\,Sin^2A+2\,Sin A-1=0$

$$\therefore\quad Sin\,A=\frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}.$$

因 $Sin\,18^\circ$ 爲正，故

$$Sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

$$Cos 18^\circ=\sqrt{1-Sin^2 18^\circ}$$

$$=\sqrt{1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}}=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}}.$$

$$Cos 36^\circ=1-2\,Sin^2\,18^\circ$$

$$=1-\frac{2(6-2\sqrt{5})}{16}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

54°，72° 之函數均可用餘角關係求得.

2. 證明 $Cos^6x+Sin^6x=1-\frac{3}{4}Sin^2 2\,x.$

〔證〕 左端 $=(Cos^2x+Sin^2x)(Cos^4x-Cos^2x\,Sin^2x+Sin^4x).$

$$=Cos^4x-Cos^2x\,Sin^2x+Sin^4x$$

$$= (Cos^2 x + Sin^2 x)^2 - 3\, Sin^2 x\, Cos^2 x$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\ (4\, Sin^2 x\, Cos^2 x)$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\ Sin^2\, 2x.$$

3. 證明 $\dfrac{Cos\ A - Sin\ A}{Cos\ A + Sin\ A} = Sec\ 2\ A - Tan\ 2\ A.$

〔證〕 因右端 $= \dfrac{1}{Cos\ 2\ A} - \dfrac{Sin\ 2\ A}{Cos\ 2\ A}$

$$= \frac{1 - Sin\ 2\ A}{Cos\ 2\ A}.$$

又因 $Cos\ 2\ A = Cos^2 A - Sin^2 A$

$$= (Cos A + Sin A)(Cos A - Sin A)$$

以之與左端分母相較，故知左端分子，分母若各乘$(Cos\ A - Sin\ A)$，或可得證.

$$左端 = \frac{(Cos A - Sin A)(Cos A - Sin A)}{(Cos A + Sin A)(Cos A - Sin A)}$$

$$= \frac{Cos^2 A + Sin^2 A - 2\ Cos A\ Sin A}{Cos^2 A - Sin^2 A}$$

$$= \frac{1 - Sin 2A}{Cos\ 2\ A} = Sec\ 2\ A - Tan\ 2\ A.$$

4. 證明

$$\frac{1}{Tan\ 3\ A - Tan A} - \frac{1}{Cot\ 3\ A\ Cot\ A} = Cot\ 2\ A.$$

〔證〕

$$左端=\frac{1}{\frac{Sin\,3\,A}{Cos\,3\,A}-\frac{Sin\,A}{Cos\,A}}-\frac{1}{\frac{Cos\,3\,A}{Sin\,3\,A}-\frac{Cos\,A}{Sin\,A}}$$

$$=\frac{Cos\,3\,A\;Cos\,A}{Sin\,3A\;Cos\,A-Cos\,3\,A\;Sin A}-\frac{Sin\,3A\;Sin\,A}{Cos\,3A\;Sin A-Sin\,3A\;Cos A}$$

$$=\frac{Cos\,3A\;Cos A+Sin\,3A\;Sin A}{Sin\,3A\;Cos A-Cos\,3A\;Sin A}$$

$$=\frac{Cos\,(3A-A)}{Sin\,(3A-A)}=\frac{Cos\,2A}{Sin\,2A}=Cot\,2A.$$

由此例，可知遇含有$2A$，$3A$之等式時，未必盡欲以A之函數代入方可得證.

5. 設$Tan\,\frac{x}{2}=u$；以u表$Sin\,x$；$Cos\,x$.

〔解〕 $$Sin\,\frac{x}{2}=\frac{Tan\,\frac{x}{2}}{Sec\,\frac{x}{2}}=\pm\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}.$$

$$Cos\,\frac{x}{2}=\frac{1}{Sec\,\frac{x}{2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}.$$

因 $Sin\,x=2\,Sin\,\frac{x}{2}\cdot Cos\,\frac{x}{2}$，故

$$Sin\,x=\pm\frac{2\,u}{\sqrt{1+u^2}};$$

因 $Cos\,x=Cos^2\,\frac{x}{2}-Sin^2\,\frac{x}{2}$，故

$$Cos\ x = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

如 x 在第一，第二象限內，則 $\frac{x}{2}$ 在第一象限，$Cos\ \frac{x}{2}$，$Sin\ \frac{x}{2}$ 均正數，故 $Sin\ x = \frac{2u}{\sqrt{1+u^2}}$。若 x 在第三，第四象限，則 $Sin\ \frac{x}{2}$ 為正，$Cos\ \frac{x}{2}$ 為負，故此時

$$Sin\ x = \frac{2u}{\sqrt{1+u^2}}.$$

習題十九

1. 設 $Cos\ \theta = 0.28$，求 $Tan\ \frac{\theta}{2}$.

2. 已知 $Tan\ x = 2$，x 為第三象限之角，求 $Sin\ 2x$；$Cos\ 2x$；$Tan\ 2x$。

3. 已知 $Tan\ x = \frac{a}{b}$，求 $Sin\ 2x$，$Cos\ 2x$，$Tan\ 2x$；一切可能之值.

證明下列恆等式:

4. $2\ Csc\ 2a = Sec\ a\ Csc\ a$.

5. $Tan\ \frac{x}{2} + Cot\ \frac{x}{2} = 2\ Csc\ x$.

6. $Cos^4\ \frac{x}{2} - Sin^4\ \frac{x}{2} = Cos\ x$.

7. $Cot\ \frac{x}{2} - Tan\ \frac{x}{2} = 2\ Cot\ x.$

8. $\dfrac{Cot\ \frac{x}{2} - Tan\ \frac{x}{2}}{Cot\ \frac{x}{2} + Tan\ \frac{x}{2}} = Cos\ x.$

9. $\dfrac{1+Cot^2\ \frac{x}{2}}{2Cot\frac{x}{2}} = Csc\ x.$

10. $\dfrac{Sec\ x-1}{Sec\ x} = 2\ Sin^2\ \frac{x}{2}.$

11. $Sin\ A = 1-2\ Sin^2\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right).$

12. $Cos^2\left(\frac{\pi}{4} - a\right) - Sin^2\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = Sin\ 2a.$

13. $Tan\ \frac{x}{4} = -\dfrac{Sin\ \frac{1}{2}\ x}{1+Cos\ \frac{1}{2}\ x}.$

14. $Cot\ \frac{x}{4} = \dfrac{Sin\ \frac{1}{2}\ x}{1-Cot\ \frac{1}{2}\ x}.$

15. $Sin\ x = \dfrac{2\ Tan\ \frac{x}{2}}{1+Tan^2\ \frac{x}{2}}.$

16. $Tan\ 2A - Sec A\ Sin A = Tan A\ .\ Sec\ 2A.$

17. $4(Cos^6\theta + Sin^6\theta) = 1+3\ Cos^2 2\theta.$

18. $\dfrac{Cos\ 3\ \theta + Sin\ 3\ \theta}{Cos\ \theta - Sin\ \theta} = 1+2\ Sin\ 2\ \theta.$

19. $\dfrac{\operatorname{Cos} 3\theta - \operatorname{Sin} 3\theta}{\operatorname{Cos}\theta + \operatorname{Sin}\theta} = 1 - 2\operatorname{Sin} 2\theta.$

20. $\dfrac{\operatorname{Cos}\theta + \operatorname{Sin}\theta}{\operatorname{Cos}\theta - \operatorname{Sin}\theta} = \operatorname{Tan} 2\theta + \operatorname{Sec} 2\theta.$

21. $\dfrac{1+\operatorname{Sin}\theta}{\operatorname{Cos}\theta} = \dfrac{1+\operatorname{Tan}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{Tan}\frac{\theta}{2}}.$

22. $\dfrac{\operatorname{Cos}\theta}{1-\operatorname{Sin}\theta} = \dfrac{\operatorname{Cot}\frac{\theta}{2}+1}{\operatorname{Cot}\frac{\theta}{2}-1}.$

23. $(2\operatorname{Cos} A+1)(2\operatorname{Cos} A-1) = 2\operatorname{Cos} 2A+1.$

24. $4\operatorname{Sin}^3 A\operatorname{Cos} 3A + 4\operatorname{Cos}^3 A\operatorname{Sin} 3A = 3\operatorname{Sin} 4A.$

[用 $4\operatorname{Sin}^3 A = 3\operatorname{Sin} A - \operatorname{Sin} 3A$,

$4\operatorname{Cos}^3 A = 3\operatorname{Cos} A + \operatorname{Cos} 3A$ 代入]

25. $\operatorname{Cos}^3 A\operatorname{Cos} 3A + \operatorname{Sin}^3 A\operatorname{Sin} 3A = \operatorname{Cos}^3 2A.$

26. $\dfrac{\operatorname{Cot}\theta}{\operatorname{Cot}\theta - \operatorname{Cot} 3\theta} + \dfrac{\operatorname{Tan}\theta}{\operatorname{Tan}\theta - \operatorname{Tan} 3\theta} = 1.$

27. $\dfrac{1}{\operatorname{Tan} 3\theta + \operatorname{Tan}\theta} - \dfrac{1}{\operatorname{Cot} 3\theta + \operatorname{Cot}\theta} = \operatorname{Cot} 4\theta.$

28. $\operatorname{Cos}^2 36^\circ + \operatorname{Sin}^2 18^\circ = \dfrac{3}{4}.$

44. 函數之和與差 由公式

$\operatorname{Sin}(x+y) = \operatorname{Sin} x\operatorname{Cos} y + \operatorname{Cos} x\operatorname{Sin} y;$

$\operatorname{Sin}(x-y) = \operatorname{Sin} x\operatorname{Cos} y - \operatorname{Cos} x\operatorname{Sin} y.$

二式相加，得

$$Sin(x+y)+Sin(x-y)=2\,Sin\,x\,Cos\,y. \tag{21}$$

相減，得

$$Sin(x+y)-Sin(x-y)=2\,Cos\,x\,Sin\,y. \tag{22}$$

又由公式

$$Cos(x+y)=Cos\,x\,Cos\,y-Sin\,x\,Sin\,y;$$

$$Cos(x-y)=Cos\,x\,Cos\,y+Sin\,x\,Sin\,y.$$

二式相加，得

$$Cos(x+y)+Cos(x-y)=2\,Cos\,x\,Cos\,y. \tag{23}$$

相減，得

$$Cos(x+y)-Cos(x-y)=-2\,Sin\,x\,Sin\,y. \tag{24}$$

命 $x+y=A,\ x-y=B$，則

$$x=\frac{A+B}{2},\ y=\frac{A-B}{2}.$$

代入(21)，(22)，(23)，(24)四式，則得

$$Sin\,A+Sin\,B=2\,Sin\,\frac{A+B}{2}\,Cos\,\frac{A-B}{2}. \tag{25}$$

$$Sin\,A-Sin\,B=2\,Cos\,\frac{A+B}{2}\,Sin\,\frac{A-B}{2}. \tag{26}$$

$$Cos\,A+Cos\,B=2\,Cos\,\frac{A+B}{2}\,Cos\,\frac{A-B}{2}. \tag{27}$$

$$Cos\,A-Cos\,B=-2\,Sin\,\frac{A+B}{2}\,Sin\,\frac{A-B}{2}. \tag{28}$$

此稱和差化積之公式：

例 1. $2\,Sin\,7x\,Cos\,4x$

$$=Sin(7x+4x)+Sin(7x-4x)$$

$$=Sin\,11x+Sin\,3x$$

例 2. $Cos\,\frac{3A}{2}\,Cos\,\frac{5A}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left[Cos\left(\frac{3A}{2}+\frac{5A}{2}\right)+Cos\left(\frac{3A}{2}-\frac{5A}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}[Cos\,4A+Cos(-A)]$$

$$=\frac{1}{2}(Cos\,4A+Cos\,A).$$

例 3. $2\,Sin\,75^\circ\,Sin\,15^\circ$

$$=-[Cos(75^\circ+15^\circ)-Cos(75^\circ-15^\circ)]$$

$$=-[Cos\,90^\circ-Cos\,60^\circ]$$

$$=-[0-\tfrac{1}{2}]=\tfrac{1}{2}.$$

例 4. $Sin\,14\theta+Sin\,6\theta$

$$=2\,Sin\,\frac{14\theta+6\theta}{2}\,Cos\,\frac{14\theta-6\theta}{2}$$

$$=2\,Sin\,10\theta\,Cos\,4\theta.$$

例 5. $Cos\,A+Cos\,8A$

$$=2\,Cos\,\frac{A+8A}{2}\,Cos\,\frac{A-8A}{2}$$

$$=2\,Cos\,\frac{9A}{2}\,Cos\,\frac{7A}{2}.$$

例 6. 證明

$Sin\,5A+Sin\,2A-Sin\,A$

$$=Sin\,2A(2\,Cos\,3A+1)$$

〔證〕 左端$=(Sin\,5A-Sin\,A)+Sin\,2A$

$$=2\,Cos\,3A\,Sin\,2A+Sin\,2A$$

$$=Sin\,2A(2\,Cos\,3A+1).$$

例 7. 將正弦之積表示下式:

$Sin\,(B+C-A)+Sin\,(C+A-B)+Sin\,(A+B-C)-Sin(A+B+C)$

〔解〕 原式$=2\,Sin\,C\,Cos(B-A)+2\,Cos(A+B)Sin(-C)$

$$=2\,Sin\,C\left\{Cos(B-A)-Cos(A+B)\right\}$$

$$=2\,Sin\,C\,(2\,Sin\,B\,Sin\,A)$$

$$=4\,Sin\,A\,Sin\,B\,Sin\,C.$$

例 8. 若 $A+B+C=180°$, 求證

$Sin\,2A+Sin\,2B+Sin\,2C=4\,Sin\,A\,Sin\,B\,Sin\,C.$

〔證〕 右端$=2\,Sin(A+B)Cos(A+B)+2\,Sin\,C\,Cos\,C.$

$$=2\,Sin\,C\,Cos(A-B)+2\,Sin\,C\,Cos\,C\cdot$$

$$=2\,Sin\,C\,[Cos(A-B)+Cos\,C]$$

$$=2\,Sin\,C\,[Cos(A-B)-Cos(A+B)]$$

$$=2\,Sin\,C\,(2\,Sin\,A\,Sin\,B)$$

$$=4\,Sin\,A\,Sin\,B\,Sin\,C.$$

例 9. 若 $A+B+C=180°$, 求證

$Tan\,A+Tan\,B+Tan\,C=Tan\,A\,Tan\,B\,Tan\,C.$

〔證〕 因 $A+B$ 爲 C 之補角, 故

$Tan(A+B)=-Tan\,C$，即

$$\frac{Tan\,A+Tan\,B}{1-Tan\,A\,Tan\,B}=-Tan\,C，\text{即}$$

$Tan\,A+Tan\,B=-Tan\,C+Tan\,A\,Tan\,B\,Tan\,C.$

移項，即得

$Tan\,A+Tan\,B+Tan\,C=Tan\,A\,Tan\,B\,Tan\,C.$

例 10. 設 $A+B+C=180°$，求證

$$Cos\,A+Cos\,B+Cos\,C=1+4\,Sin\frac{A}{2}\,Sin\,\frac{B}{2}\,Sin\,\frac{C}{2}$$

〔證〕 左端 $=2\,Cos\,\dfrac{A+B}{2}\,Cos\,\dfrac{A-B}{2}+Cos\,C.$

$$=2\,Sin\,\frac{C}{2}\,Cos\,\frac{A-B}{2}+1-2\,Sin^2\,\frac{C}{2}.$$

$$=1+2\,Sin\,\frac{C}{2}\left[Cos\,\frac{A-B}{2}-Sin\,\frac{C}{2}\right]$$

$$=1+2\,Sin\,\frac{C}{2}\left[Cos\,\frac{A-B}{2}-Cos\,\frac{A+B}{2}\right]$$

$$=1+4\,Sin\,\frac{A}{2}\,Sin\,\frac{B}{2}\,Sin\,\frac{C}{2}.$$

習題二十

證明下列諸等式:

1. $Sin\,3\,\theta-Sin\,\theta-Sin\,5\,\theta=Sin\,3\,\theta(1+2\,Cos\,2\,\theta)$

2. $Sin\,\theta-Sin\,2\,\theta+Sin\,3\,\theta=4\,Sin\,\dfrac{\theta}{2}\,Cos\,\theta\,Cos\,\dfrac{3\theta}{2}.$

3. $\operatorname{Sin} A+2 \operatorname{Sin} 3A+\operatorname{Sin} 5A=4 \operatorname{Sin} 3A \operatorname{Cos}^2 A.$

4 $\dfrac{\operatorname{Sin} 2A+\operatorname{Sin} 5A-\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Cos} 2A+\operatorname{Cos} 5A+\operatorname{Cos} A}=\operatorname{Tan} 2A.$

5. $\operatorname{Sin} 4\theta \operatorname{Cos} \theta-\operatorname{Sin} 3\theta \operatorname{Cos} 2\theta=\operatorname{Sin} \theta \operatorname{Cos} 2\theta.$

6. $\operatorname{Cos} 5^\circ-\operatorname{Sin} 25^\circ=\operatorname{Sin} 35^\circ.$

7. $\operatorname{Sin} 65^\circ+\operatorname{Cos} 65^\circ=\sqrt{2} \operatorname{Cos} 20^\circ.$

〔用 $\operatorname{Cos} 65^\circ=\operatorname{Sin} 25^\circ$〕

8. $\operatorname{Cos} 80^\circ+\operatorname{Cos} 40^\circ-\operatorname{Cos} 20^\circ=0.$

9. $\operatorname{Sin} 78^\circ-\operatorname{Sin} 18^\circ+\operatorname{Cos} 132^\circ=0.$

10. $\operatorname{Cos}(B+C-A)-\operatorname{Cos}(C+A-B)$

$+\operatorname{Sin}(A+B-C)+\operatorname{Sin}(A-B+C)$

$=4 \operatorname{Sin} A \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos} C.$

11. $\operatorname{Cos} A+\operatorname{Cos} B+\operatorname{Cos} C+\operatorname{Cos}(A+B+C)$

$=4 \operatorname{Cos} \dfrac{B+C}{2} \operatorname{Cos} \dfrac{C+A}{2} \operatorname{Cos} \dfrac{A+B}{2}.$

12. $\operatorname{Cos} 20^\circ \operatorname{Cos} 40^\circ \operatorname{Cos} 80^\circ=\dfrac{1}{8}.$

13. $\operatorname{Sin} 20^\circ \operatorname{Sin} 40^\circ \operatorname{Sin} 80^\circ=\dfrac{1}{8}\sqrt{3}.$

若 $A+B+C=180^\circ$，求證下列等式:

14. $\operatorname{Sin} 2A-\operatorname{Sin} 2B+\operatorname{Sin} 2C$

$=4 \operatorname{Cos} A \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos} C.$

15. $\operatorname{Sin} 2A-\operatorname{Sin} 2B-\operatorname{Sin} 2C$

$=-4 \operatorname{Sin} A \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos} C.$

16. $\operatorname{Sin} A+\operatorname{Sin} B-\operatorname{Sin} C$

$$=4\operatorname{Sin}\frac{A}{2}\operatorname{Sin}\frac{B}{2}\operatorname{Sin}\frac{C}{2}.$$

17. $\operatorname{Cos} A-\operatorname{Cos} B+\operatorname{Cos} C$

$$=4\operatorname{Cos}\frac{A}{2}\operatorname{Sin}\frac{B}{2}\operatorname{Cos}\frac{C}{2}-1.$$

18. $\operatorname{Tan}\frac{B}{2}\operatorname{Tan}\frac{C}{2}+\operatorname{Tan}\frac{C}{2}\operatorname{Tan}\frac{A}{2}+\operatorname{Tan}\frac{A}{2}\operatorname{Tan}\frac{B}{2}=1.$

〔因 $\operatorname{Tan}\frac{A+B}{2}=\operatorname{Cot}\frac{C}{2}$，故 $\operatorname{Tan}\frac{A+B}{2}\operatorname{Tan}\frac{C}{2}=1$〕.

19. $\dfrac{\operatorname{Sin} B+\operatorname{Sin} C-\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin} A+\operatorname{Sin} B+\operatorname{Sin} C}=\operatorname{Tan}\frac{B}{2}\operatorname{Tan}\frac{C}{2}.$

20. $\dfrac{1+\operatorname{Cos} A-\operatorname{Cos} B+\operatorname{Cos} C}{1+\operatorname{Cos} A+\operatorname{Cos} B-\operatorname{Cos} C}=\operatorname{Tan}\frac{B}{2}\operatorname{Cot}\frac{C}{2}.$

45. 三角形中邊與角之關係式 三角形邊與角之關係式除已詳見於第五章者外，猶有數式足以一述者.

設任意三角形 ABC，各角之相對邊為 a，b，c. $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，則由餘弦定律，有

$$\operatorname{Sin}^2\frac{A}{2}=\frac{1-\operatorname{Cos} A}{2}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{a^2-(b-c)^2}{bc}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\;\frac{4(s-b)(s-c)}{bc}$$

$$\therefore \quad Sin\ \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{b\,c}} \tag{29}$$

又由 $Cos^2\ \dfrac{A}{2} = \dfrac{1+CosA}{2}$，

同法易得

$$Cos\ \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{s\ (s-a)}{bc}} \tag{30}$$

(29)，(30) 二式相除，卽得

$$Tan\ \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \tag{31}$$

根號前之正負號，視 $\dfrac{A}{2}$ 在何一象限而定.

由 (31) 式，可證內切圓半徑

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-\ \ )(s-c)}{s}},$$

三角形面積

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ .$$

例1. 直角三角形 ABC 內 C 爲直角，a; b; c; 爲 A, B, C 之對邊，求證

$$\left(Sin\ \frac{A}{2} + Cos\ \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{a+c}{c}.$$

〔證〕 左端 $= Sin^2\ \dfrac{A}{2} + Cos^2\ \dfrac{A}{2} + 2\ Sin\dfrac{A}{2}\ Cos\dfrac{A}{2}$

$$= 1 + Sin\ A$$

$$=1+\frac{a}{c}$$

$$=\frac{a+c}{c}.$$

例 2.　任意三角形之三邊爲 a; b; c; $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$, 內切, 外接圓之半徑各爲 r 與 R, 求證

$$abcr=4R(s-a)(s-b)(s-c).$$

〔證〕 由正弦定律及三角形面積之公式, 有

$$R=\frac{a}{2\,Sin\,A}=\frac{abc}{2\,bc\,Sin\,A}$$

$$=\frac{abc}{4\,\triangle}$$

$$=\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

以此代入原式右端, 則

$$右端=abc\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$=abc\cdot r.$$

習 題 二 十 一

設直角形 ABC 中 C 爲直角, c 爲斜邊, $A, a; b, B$ 爲相對之角與邊, 求證

1. $Tan\,\frac{A}{2}=\frac{a}{b+c}$.

2. $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}=\frac{2\,Sin\,A}{\sqrt{Cos\,2B}}$

設 ABC 爲任意三角形，a, b, c 爲 A, B, C 之相對邊，內切外接圓半徑爲 r 與 R，面積爲 $\triangle$，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，求證：

3. $\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{1}{ab}=\dfrac{1}{2sR}$.

4. $\dfrac{1}{s-a}+\dfrac{1}{s-b}+\dfrac{1}{s-c}=\dfrac{4R}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$

〔用本節例 2〕

5. $Tan\,\dfrac{B}{2}\;Tan\,\dfrac{C}{2}=\dfrac{b+c-a}{b+c+a}$.

6. $(a+b)\,Sin\,\dfrac{C}{2}=c\,Cos\,\frac{1}{2}(A-B)$.

7. $b\,Cos^2\dfrac{C}{2}+c\,Cos^2\dfrac{B}{2}=s$.

8. $c\,(Cos\,A+Cos\,B)=2\,(a+b)\,Sin^2\dfrac{C}{2}$.

9. $\triangle=\dfrac{abc}{s}\,Cos\,\dfrac{A}{2}\,Cos\,\dfrac{B}{2}\,Cos\,\dfrac{C}{2}$.

10. $\triangle=\dfrac{a^2}{4}\,Sin\,2B+\dfrac{b^2}{4}\,Sin\,2A$.

第七章 反三角函數，三角方程式

46. 反三角函數 由三角函數之定義，知一角之三角函數之值，隨其角之大小而變. 逆之，若已知某角之三角函數，則亦可求其角之大小，即角之大小亦可以其一函數之值表之，例如，已知 x 角，其正弦值

$$y = Sin\ x,$$

若已知正弦值 y，則 x 爲具有正弦值 y 之角，可書

$$x = Sin^{-1}y, \quad 或\ x = arc\ Sin\ y,$$

讀如"y 之反正弦"

仿此，餘弦爲 y 之角以 $Cos^{-1}y$ 表之，讀如"y 之反餘弦". 正切爲 y 之角以 $Tan^{-1}y$ 表之，讀如"y 之反正切". 餘類推.

三角函數有六種，今以角爲函數之函數，則反三角函數亦得六種.

47. 函數值相同之角 已知一角，其終邊只能有一位置，故其三角函數亦僅各有一值. 但已知一函數值時，則其角之終邊有二位置，且每一位置之角，亦爲多值，蓋相差 $360°$ 整倍數之角，終邊均同位置也.

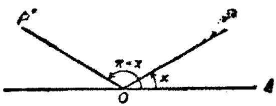
例如已知 x 爲 $30°$，則 $Sin\ x$ 只能爲 $\frac{1}{2}$ 一值. 但已知 $Sin\ x = \frac{1}{2}$，則 x 可爲 $30°$，亦可爲 $150°$，且爲 $n\,360° + 30°$，$n\,360° + 150°$，

n 為正負數，則滿足 $Sin\ x=\frac{1}{2}$ 之 x 角之值不僅一個. 故知：一角之三角函數僅有單値，而反三角函數則有無限之値.

上式 $Sin\ x=\frac{1}{2}$，或 $x=Sin^{-1}\frac{1}{2}$ 之 x 可爲 $30°$，$150°$，………，諸値中以 $30°$ 爲最小之正角，此 $30°$ 即稱主値. 一般言之，具有相同函數値之諸角中，絕對値最小之角，稱主値. 常記 $Sin^{-1}x$；$Csc^{-1}x$；$Tan^{-1}x$，$Cot^{-1}x$ 之主値在 $-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$ 之間，$Cos^{-1}x$ $Csc^{-1}x$ 之主値在 O，π 之間.

48. 有同正弦値諸角之通値

設 x 爲有已知正弦値之最小正角，作 OP；OP' 表 x 與 $\pi-x$ 之終邊.



第五十一圖

於是有同正弦値之諸正角爲

$$2p\pi+x.$$

$$2p\pi+(\pi-x),$$

此處 p 爲 O 或正整數. 負角有

$$-(\pi+x),\quad -(2\pi-x)$$

或 $$2q\pi-(\pi+x),\quad 2q\pi-(2\pi-x),$$

q 爲零或負整數.

綜合上述結果，可知與 x 具有同正弦値之角爲：

$$\left.\begin{array}{r}2p\pi+x\\(2q-2)\pi+x\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{r}(2p+1)\pi-x\\(2q-1)\pi-x\end{array}\right\}$$

故知

$$\operatorname{Sin} x=\operatorname{Sin}[n\pi+(-1)^n x]$$

n 爲零或正負整數.

因餘割爲正弦之倒數，故

$$\operatorname{Csc} x=\operatorname{Csc}[n\pi+(-1)^n x]$$

例 已知 $\operatorname{Sin}\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 θ 之通值.

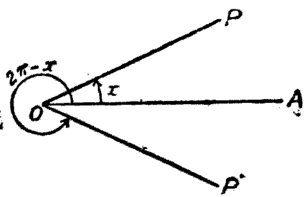
〔解〕 滿足 $\operatorname{Sin}\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 之最小角爲 $\frac{\pi}{3}$，故通值爲

$$n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}.$$

49. 有同餘弦值諸角之通值

設 x 爲有已知餘弦值之最小正角，作 OP，OP' 表 x 與 $2\pi-x$ 角之終邊

於是與 x 有同餘弦之正角有 $2p\pi+x$，$2p\pi+(2\pi-x)$，p 爲零或正整數.



第五十二圖

負角有 $-x$；$-(2\pi-x)$

或 $2q\pi-x$，$2q\pi-(2\pi-x)$，q 爲零或負整數.

故知與 x 角具有同餘弦之諸角可書爲

$$\left.\begin{matrix}2p\pi+x\\2q\pi-x\end{matrix}\right\}\qquad\left.\begin{matrix}(2p+2)\pi-x\\(2q-2)\pi+x\end{matrix}\right\}$$

即 $\operatorname{Cos} x=\operatorname{Cos}[2n\pi\pm x]$ n 爲零，或正負整數.

易知

$Sec\ x = Sec\ [2n\pi \pm x]$.

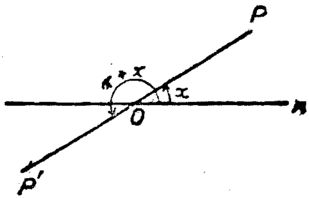
例. 已知 $Cos\ \theta = -\frac{1}{2}$，求 θ 之通值.

〔解〕 最小之角為 $\pi - \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$，故通值為

$$2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}.$$

50. 有同正切值諸角之通值

設 x 為有已知正切值之最小正角，作 OP, OP' 表 x，與 $\pi + x$ 角之終邊



第五十三圖

於是，與 x 有同正切之正角有

$2p\pi + x$,

$2p\pi + (\pi + x)$;

p 為零或正整數.

負角有

$-(\pi - x)$;　　$-(2\pi - x)$;

或　$2q\pi - (\pi - x)$;　$2q\pi - (2\pi - x)$; q 為零或負整數.

故知與 x 角具有同正切之諸角可書為:

$$\left.\begin{array}{r} 2p\pi + x \\ (2q-2)\pi + x \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} (2p+1)\pi + x \\ (2q-1)\pi + x \end{array}\right\}$$

即　$Tan\ x = Tan[n\pi + x]$，n 為零或正負整數.

易知

$Cot\ x = Cot\ [n\pi + x]$

例. 已知 $Cot\ 4\theta = Cot\ \theta$，求 θ.

〔解〕 通值 $4\theta=n\pi+\theta$, 則

$$3\theta=n\pi,\ \text{故}\ \theta=\frac{n\pi}{3}.$$

習題二十二

1. 已知 $Sin\,A=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 A 之通值, 與 A 之四個最小正角.

2. 已知 $Tan\,x=1$, 求 x 之通值, 與絕對值小於 2π 之角.

3. 已知 $Sin\,2x=\frac{1}{2}$, 求證 $x=\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{2}$.

4. 設 $Cos\,3x=-\frac{1}{2}$, 求證 $x=\frac{2n\pi}{3}\pm\frac{2\pi}{9}$.

求下列諸角之通值.

5. $Sin\,A=\pm1$.

6. $Cot\,x=\pm\sqrt{3}$.

7. $Sec\,x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$.

8. $Csc\,x=\pm\sqrt{2}$.

求下列諸函數之值.

9. $Sin(Cos^{-1}\frac{1}{2})$.

10. $Cos(Tan^{-1}1)$.

11. $Tan\left(Sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

12. $Cot\left(Tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

13. $Cos\ (Cos^{-1}\frac{1}{2})$.

14. $Sin\ (Sec^{-1}2)$.

51. 反三角函數恆等式

恆等式含有反三角函數者稱爲反三角函數恆等式．三角函數間之任何關係，皆可用反函數之符號表出，即成一反三角函數之恆等式．

1. 由餘角函數關係化得者:

設 $Sin\ A=a$, 則 $Cos\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)=a$.

故 $A=Sin^{-1}a$, $\dfrac{\pi}{2}-A=Cos^{-1}a$;

相加得 $Sin^{-1}a+Cos^{-1}a=\dfrac{\pi}{2}$.

因 a 爲正弦，餘弦之值，故其絕對值不大於 1，故 $-1\leq a\leq 1$.

同理，可證

$$Tan^{-1}b+Cot^{-1}b=\frac{\pi}{2}.$$

$$Sec^{-1}c+Csc^{-1}c=\frac{\pi}{2}.$$

但 $c\leq-1$, 或 $c\geq 1$.

2. 由幾個角函數關係化得者:

例一. 證明 $Sin^{-1}\dfrac{3}{5}+Cos^{-1}\dfrac{15}{17}=Sin^{-1}\dfrac{77}{85}$.

〔證〕 設 $A=Sin^{-1}\frac{3}{5}$， $B=Cos^{-1}\frac{15}{17}$，

則 $Sin\,A=\frac{3}{5}$， $Cos\,B=\frac{15}{17}$；

$Cos\,A=\frac{4}{5}$； $Sin\,B=\frac{8}{17}$．

故 $Sin(A+B)=Sin\,A\,Cos\,B+Cos\,A\,Sin\,B$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{17}+\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{17}.$$

$$=\frac{77}{85};$$

$\therefore$ $A+B=Sin^{-1}\frac{77}{85}$，即原式爲眞．

例二． 證明 $Cos^{-1}\frac{4}{5}+Cos^{-1}\frac{12}{13}=Cos^{-1}\frac{33}{65}$．

〔證〕 令 $A=Cos^{-1}\frac{4}{5}$， $B=Cos^{-1}\frac{12}{13}$，則

$Cos\,A=\frac{4}{5}$， $Cos\,B=\frac{12}{13}$，

$Sin\,A=\frac{3}{5}$； $Sin\,B=\frac{5}{13}$．

故 $Cos(A+B)=Cos\,A\,Cos\,B-Sin\,A\,Sin\,B$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}$$

$$=\frac{33}{65},$$

$\therefore$ $A+B=Cos^{-1}\frac{33}{65}$， 即原式爲眞．

例三. 證明 $Tan^{-1}\frac{1}{2}+Tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

〔證〕 令 $A=Tan^{-1}\frac{1}{2}$; $B=Tan^{-1}\frac{1}{3}$，則

$$Tan\,A=\frac{1}{2},\quad Tan\,B=\frac{1}{3}.$$

故 $$Tan\,(A+B)=\frac{Tan\,A+Tan\,B}{1-Tan\,A\,Tan\,B}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1$$

$\therefore\quad A+B=Tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$；即原式為真.

52. 反三角函數方程式

含反三角函數之方程式常可化為含其中未知數之代數方程式，然後解之.

例. 設 $Tan^{-1}2x+Tan^{-1}3x=\frac{\pi}{4}$，求 x.

〔解〕 $Tan^{-1}2x$ 與 $Tan^{-1}3x$ 表角，將上式兩端取正切，則得

$$Tan(Tan^{-1}2x+Tan^{-1}3x)=Tan\frac{\pi}{4}=1,$$

即　　$$\frac{Tan\,Tan^{-1}2x+Tan\,Tan^{-1}3x}{1-Tan(Tan^{-1}2x)\cdot Tan(Tan^{-1}3x)}=1,$$

即　　$$\frac{2x+3x}{1-2x\cdot 3x}=1,$$

即　　$$6x^2+5x-1=0$$

解之，　$x=\frac{1}{6}$，或-1.

習題二十三

求證下列各反三角函數恆等式：

1. $Sin^{-1}\frac{3}{5}+Sin^{-1}\frac{12}{13}=Sin^{-1}\frac{63}{65}$.

2. $Tan^{-1}m+Tan^{-1}n=Tan^{-1}\frac{m+n}{1-m\cdot n}$.

3. $2\,Tan^{-1}a=Sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}$.

4. $2\,Sin^{-1}a=Cos^{-1}(1-2a^2)$.

5. $Tan^{-1}\frac{m}{n}-Tan^{-1}\frac{m-n}{m+n}=\frac{\pi}{4}$.

6. $Cos^{-1}\frac{4}{5}+Tan^{-1}\frac{3}{5}=Tan^{-1}\frac{27}{11}$.

7. $Sin^{-1}\frac{3}{5}+Sin^{-1}\frac{8}{17}=Sin^{-1}\frac{77}{85}$.

8. $Tan^{-1}\frac{1}{7}+Tan^{-1}\frac{1}{13}=Tan^{-1}\frac{2}{9}$.

9. $Sin^{-1}x+Sin^{-1}y=Sin^{-1}[x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}]$.

10. $Cos^{-1}x+Cos^{-1}y=Cos^{-1}[xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}]$.

解下列各反三角函數方程式.

11. $Sin^{-1}x=Cos^{-1}x$.

12. $Tan^{-1}(x+1)-Tan^{-1}(x-1)=Cot^{-1}2$.

13. $Cot^{-1}x+Cot^{-1}2x=\dfrac{3\pi}{4}$.

14. $Sin^{-1}x-Cos^{-1}x=Sin^{-1}(3x-2)$.

15. $Cos^{-1}x-Sin^{-1}x=Cos^{-1}x\sqrt{3}$.

16. $Tan^{-1}x+Tan^{-1}(1-x)=2\,Tan^{-1}\sqrt{x-x^2}$.

17. $Tan^{-1}\dfrac{x-1}{x-2}+Tan^{-1}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{\pi}{4}$.

53. 三角方程式

方程式含有未知角之函數者稱三角方程式.

例如．

$$3\,Sin\,x=2,$$

$$2\,Cos^2x+\sqrt{3}\,Sin\,x+1=0.$$

等皆爲三角方程式. 求未知角之値，使適合一三角方程式者，即稱解此三角方程式. 解方程式無一定之方法，讀者或可參考下述指示，以得小助焉.

（一）若方程式中含倍角，分角，角之和或差者，則宜先變爲單角函數再簡化之.

（二）使所成之方程式中，只含一種函數.

（三）用代數方法解出方程式中所含之一種函數. 未知角以其通値表答之.

例一 解 $2\,Sin^2 x+\sqrt{3}\,Cos\,x+1=0$.

〔解〕 因 $Sin^2 x=1-Cos^2 x$，故得

$$2\,Cos^2 x-\sqrt{3}\,Cos\,x-3=0.$$

即 $$(Cos\,x-\sqrt{3})(2\,Cos\,x+\sqrt{3})=0.$$

解得 $Cos\,x=\sqrt{3}$，$\quad Cos\,x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

但餘弦不能大於1，故 $Cos\,x=\sqrt{3}$ 非原式之解. 由 $Cos\,x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，知 $x=2\,n\pi\pm\dfrac{5\pi}{6}$.

例二 解 $Cos\,2\,x\,Sec\,x+Sec\,x+1=0$

〔解〕 因 $Cos\,2\,x=Cos^2 x-Sin^2 x$

$$Sec\,x=\frac{1}{Cos\,x}\text{，故}$$

$$(Cos^2 x-Sin^2 x)\frac{1}{Cos\,x}+\frac{1}{Cos\,x}+1=0$$

去分母後，得

$$Cos^2 x-Sin^2 x+1+Cos\,x=0$$

即 $$Cos^2 x-(1-Cos^2 x)+1+Cos\,x=0.$$

即 $$2\,Cos^2 x+Cos\,x=0$$

故 $$Cos\,x(2\,Cos\,x+1)=0.$$

$$Cos\,x=0,\qquad x=2\,n\pi\pm\frac{\pi}{2};$$

$$Cos\,x=-\tfrac{1}{2},\quad x=2\,n\pi\pm\frac{2\pi}{3}.$$

例三 解 $Sin\,x+Sin\,3\,x+Sin\,2\,x$

$$=4\ Cos\ \frac{x}{2}\ Cos\ x\ Cos\ \frac{3x}{2}.$$

〔解〕　左端$=2\ Sin\ 2\ x\ Cos\ x+2\ Sin\ x\ Cos\ x$

$$=2\ Cos\ x(Sin\ 2\ x+Sin\ x)$$

$$=4\ Cos\ x\ Sin\ \frac{3x}{2}\ Cos\ \frac{x}{2}.$$

故原式變爲:

$$4\ Cos\ x\ Sin\frac{3x}{2}\ Cos\ \frac{x}{2}=4\ Cos\ \frac{x}{2}\ Cos\ x\ Cos\ \frac{3x}{2}.$$

即　$4\ Cos\ x\ Cos\ \frac{x}{2}\left(Sin\ \frac{3x}{2}-Cos\frac{3x}{2}\right)=0.$

故有　　$Cos\ x=0,\ x=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}.$

$$Cos\ \frac{x}{2}=0,\quad x=(2\ n\pm1)\pi.$$

$$Sin\ \frac{3x}{2}-Cos\ \frac{3x}{2}=0.$$

即　　$Tan\ \frac{3x}{2}-1=0$

$$Tan\ \frac{3x}{2}=1,$$

$$\frac{3x}{2}=n\pi+\frac{\pi}{4};$$

則　$x=\frac{2\ n\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$

例四. 解 $Cos\ 2\ \theta=Cos\ \theta+Sin\ \theta.$

〔解〕　$Cos^2\theta-Sin^2\ \theta=Cos\ \theta+Sin\ \theta;$

$\therefore \quad (\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)=\cos\theta+\sin\theta.$

故 $\quad \cos\theta+\sin\theta=0 \qquad (1)$

或 $\quad \cos\theta-\sin\theta=1 \qquad (2)$

由 (1) 卽 $\quad \tan\theta=-1;$

$$\therefore \quad \theta=n\pi-\frac{\pi}{4}.$$

以 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 乘 (2) 之各項，則得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}};$$

卽 $\quad \cos\theta\cos\frac{\pi}{4}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

或 $\quad \cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}};$

$\therefore \quad \theta+\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\frac{\pi}{4},$

$\therefore \quad \theta=2n\pi;$ 或 $\theta=2n\pi-\frac{\pi}{2}.$

習題二十四

解下列各三角方程式:

1. $\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta=1.$
2. $\sin m\theta+\cos n\theta=0.$
3. $\tan p\theta=\cot q\theta.$
4. $\cos\theta=\sqrt{3}\cdot(1-\sin\theta).$

5. $Sin\,\theta+\sqrt{3}\cdot Cos\,\theta=\sqrt{2}$.

6. $Tan\,B+Cot\,B=2$.

7. $Csc\,x\,Cot\,x=2\sqrt{3}$.

8. $Sin\,\frac{x}{2}=Csc\,x-Cot\,x$.

9. $3(Sec^2A+Cot^2A)=13$

10. $Csc\,2x+Csc\,x=-1$.

11. $2\,Sin\,y=Sin\,2y$.

12. $Sin\,x+Sin\,2x+Sin\,3x=0$.

13. $Sin\,4x-Sin\,3x=Sin\,2x$.

14. $Tan\,x+Tan\,2x=Tan\,3x$.

15. $\sqrt{1+Sin\,x}-\sqrt{1-Sin\,x}=2\,Cos\,x$.

16. $Sin\,y+Sin\,3y=Cos\,y-Cos\,3y$.

54. 聯立三角方程式　解聯立三角方程式之法，通常有二，分述如次：

I. 化爲未知角之聯立方程式，再解

例. 解

$$\left.\begin{aligned} Sin\,x+Sin\,y&=A \\ Cos\,x+Cos\,y&=B \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned}(1)\\(2)\end{aligned}$$

〔解〕 用和差化積公式：

$$2\,Sin\,\frac{x+y}{2}\,Cos\,\frac{x-y}{2}=A \tag{3}$$

$$2\,Cos\,\frac{x+y}{2}\,Cos\,\frac{x-y}{2}=B \tag{4}$$

相除，得

$$Tan\,\tfrac{1}{2}(x+y)=\frac{A}{B};$$

即 $$x+y=2\,Tan^{-1}\frac{A}{B} \tag{5}$$

又由 (3) 及 (4)

$$A^2+B^2=4\,Cos^2\tfrac{1}{2}(x-y)[Sin^2\tfrac{1}{2}(x+y)+Cos^2\tfrac{1}{2}(x+y)]$$

即 $A^2+B^2=4\,Cos^2\tfrac{1}{2}(x-y)$。

或 $$Cos\,\tfrac{1}{2}(x-y)=\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2}$$

故 $$x-y=2\,Cos^{-1}\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2} \tag{6}$$

由 (5) 及 (6) 解之，得

$$x=Tan^{-1}\frac{A}{B}+Cos^{-1}\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2};$$

$$y=Tan^{-1}\frac{A}{B}-Cos^{-1}\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2}$$

II. 化爲單角函數爲未知數之聯立方程式，然後解之者.

例 解
$$\left.\begin{aligned} x+y&=150^\circ \qquad (1)\\ Tan\,x+Tan\,y&=-\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad (2)\end{aligned}\right\}$$

〔解〕 (1)式兩邊取正切:

$$Tan(x+y)=Tan\,150^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}},$$

即 $$\frac{Tan\,x+Tan\,y}{1-Tan\,x\,Tan\,y}=-\frac{1}{\sqrt{3}},$$

由 (2)；知上式爲

$$\frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-Tan\,x\,Tan\,y}=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

卽 $$Tan\,x\,Tan\,y=-1 \qquad (3)$$

由(2)及(3)，卽得以 $Tan\,x$，$Tan\,y$ 爲未知數之聯立方程式，按代數學理論解之，知

取 $Tan\,x=\frac{1}{\sqrt{3}}$， $Tan\,y=-\sqrt{3}$，則

$$x=m\pi+\frac{\pi}{6},\quad y=n\pi+\frac{2\pi}{3}.$$

若取 $Tan\,x=-\sqrt{3}$， $Tan\,y=\frac{1}{\sqrt{3}}$，則

$$x=m\pi+\frac{2\pi}{3},\quad y=n\pi+\frac{\pi}{6}$$

上述二組解答中，m 與 n 均表零或任意正負整數.

55. 消去法 於一組方程式中消去未知量之法，本無一定. 玆舉例以明消去法之大意.

例 1. 由 $x\,Cos\,\theta=a$，$y\,Cot\,\theta=b$，消去 θ.

〔解〕 此處 $Sec\,\theta=\frac{x}{a}$，$Tan\,\theta=\frac{y}{b}$，

但因 $Sec^2\theta-Tan^2\theta=1$，

故 $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

最後一式稱消去式.

例 2. 由 $$\begin{cases} l\,Cos\,\theta+m\,Sin\,\theta+n=0 & (1)\\ p\,Cos\,\theta+q\,Sin\,\theta+r=0 & (2)\end{cases}$$

消去 θ.

〔解〕 (1), (2) 二式可視爲 $Sin\,\theta$, $Cos\,\theta$ 之聯立方程式，解之，可得

$$Cos\,\theta=\frac{mr-nq}{lq-mp},\quad Sin\,\theta=\frac{np-lr}{lq-mp}$$

因 $Cos^2\theta+Sin^2\theta=1$, 故得

$$(mr-nq)^2+(np-lr)^2=(lq-mp)^2.$$

例 3. 由 $\begin{cases}\dfrac{ax}{Sin\,\theta}-\dfrac{by}{Cos\,\theta}=c^2\\ l\ \ Tan\,\theta=m\end{cases}$

消去 θ.

〔解〕 由第二式:

$$\frac{Sin\theta}{m}=\frac{Cos\theta}{l}=\frac{\sqrt{Sin^2\theta+Cos^2\theta}}{\sqrt{m^2+l^2}}=\frac{1}{\sqrt{m^2+l^2}}.$$

$$\therefore\quad Sin\ \theta=\frac{m}{\sqrt{m^2+l^2}},\quad Cos\,\theta=\frac{l}{\sqrt{m^2+l^2}}.$$

以之代入第一式，簡化之，可得

$$\frac{ax}{l}-\frac{by}{m}=\frac{c^2}{\sqrt{m^2+l^2}}.$$

例 4. 由 $\begin{cases}x=Cot\,\theta+Tan\,\theta & (1)\\ y=Sec\,\theta-Cos\,\theta & (2)\end{cases}$

消去 θ.

〔解〕 由已知之二式，知

$$x=\frac{1}{Tan\,\theta}+Tan\,\theta=\frac{Sec^2\,\theta}{Tan\,\theta} \tag{3}$$

$$y=Sec\,\theta-\frac{1}{Sec\,\theta}=\frac{Tan^2\,\theta}{Sec\,\theta} \tag{4}$$

由 (3), (4), 易知

$$x^2y=Sec^3\theta; \quad xy^2=Tan^3\theta.$$

因 $\quad Sec^2\theta-Tan^2\theta=1.$

$$\therefore\ (x^2y)^{2/3}-(xy^2)^{2/3}=1.$$

即 $\quad x^{4/3}\,y^{2/3}-x^{2/3}\,y^{4/3}=1.$

例5. 由
$$\begin{cases} a\,Sin^2\theta+b\,Cos^2\theta=m & (1)\\ b\,Sin^2\phi+a\,Cos^2\phi=n & (2)\\ a\,Tan\,\theta=b\,Tan\,\phi & (3)\end{cases}$$

消去 θ 及 ϕ

〔解〕 由 (1)

$$a\,Sin^2\theta+b\,Cos^2\theta=m(Sin^2\theta+Cos^2\theta)$$

$$\therefore\ (a-m)\,Sin^2\theta=(m-b)Cos^2\theta;$$

$$\therefore\ Tan^2\theta=\frac{m-b}{a-m}.$$

由 (2)

$$b\,Sin^2\phi+a\,Cos^2\phi=n(Sin^2\phi+Cos^2\phi)$$

$$\therefore\ Tan^2\phi=\frac{n-a}{b-n}.$$

由 (3)

$$a^2 Tan^2\theta = b^2 Tan^2\phi;$$

$$\therefore \quad \frac{a^2(m-b)}{a-m} = \frac{b^2(n-a)}{b-n}.$$

$$\therefore \quad a^2(bm-b^2-mn+bn) = b^2(an-a^2-mn+am);$$

$$mab(a-b)+nab(a-b) = mn(a^2-b^2);$$

$$\therefore \quad mab+nab = mn(a+b)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{n}+\frac{1}{m} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

習題二十五

解下列各聯立方程式:

1. $Cos(A-B) = Sin(A+B) = \frac{1}{2}$.

2. $Tan(A-B) = 1$, $Sec(A+B) = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

3. $Sin(2x-y) = Cos(x+2y) = \frac{1}{2}$.

4. $x+y = 90^\circ + Sin\, x + Cos\, y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. $Sin^2 x + Sin^2 y = a$, $Cos^2 x - Cos^2 y = b$.

6. $\begin{cases} Sin^2\theta + 2\,Cos\,\theta = 2, \\ Cos\,\theta - Cos^2\theta = 0. \end{cases}$

消去下列各題中之未知角 θ:

7. $\begin{cases} \frac{x}{a}\,Cos\,\theta + \frac{y}{b}\,Sin\,\theta = 1 \\ \frac{x}{a}\,Sin\,\theta - \frac{y}{b}\,Cos\,\theta = 1 \end{cases}$

8. $a\,Sec\,\theta - x\,Tan\,\theta = y$, $b\,Sec\,\theta + y\,Tan\,\theta = x$.

9. $Cos\,\theta + Sin\,\theta = a$, $Cos\,2\,\theta = b$.

10. $a = Cot\,\theta + Cos\,\theta$, $b = Cot\,\theta - Cos\,\theta$.

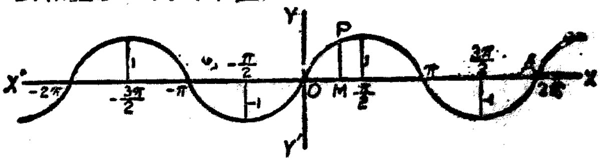
11. $\begin{cases} x = Sin\,\theta + Cos\,\theta, \\ y = Tan\,\theta + Cot\,\theta. \end{cases}$

12. $\begin{cases} Csc\,\theta - Sin\,\theta = a^3 \\ Sec\,\theta - Cos\,\theta = b^3 \end{cases}$

第八章　三角函數之變跡

56.　定義　設 $y=f(x)$ 爲 x 之函數，對任意値之 x，y 有一個對應値，如此之 x 與 y 作爲平面上一點之座標，則所得諸點之軌跡稱函數 $y=f(x)$ 之變跡.

57.　正弦曲線　取直角座標系統，$X'OX$，$Y'OY$，在 $X'OX$ 橫軸上以弧角爲單位.



第五十四圖

$y = \sin x$

列下表:

x		y	x		y
0°	0	0	210°	$\frac{7\pi}{6}$	−.50
30°	$\frac{\pi}{6}$	.50	240°	$\frac{4\pi}{3}$	−.86
60°	$\frac{\pi}{3}$	.86	270°	$\frac{3\pi}{2}$	−1
90°	$\frac{\pi}{2}$	1.0	300°	$\frac{5\pi}{3}$	−.86
120°	$\frac{2\pi}{3}$	.86	330°	$\frac{11\pi}{6}$	−.50
150°	$\frac{5\pi}{6}$	.50	360°	2π	0
180°	π	0			

由上表之各組(x, y)值，可連得 OA 間一段曲線.

因 $Sin\,(x \pm 2\pi) = Sin\,x = y$; 可知以 $x \pm 2\pi$ 代 x，變跡之形狀不變. 換言之，將已得之變跡 OA 向右，向左移動 2π，必與原圖相合. 因此正弦曲線，雖爲無限長，但祇須作自 x 至 $x+2\pi$ 間一段曲線，用沿 $X'OX$ 軸之平行移動即可得其他部份.

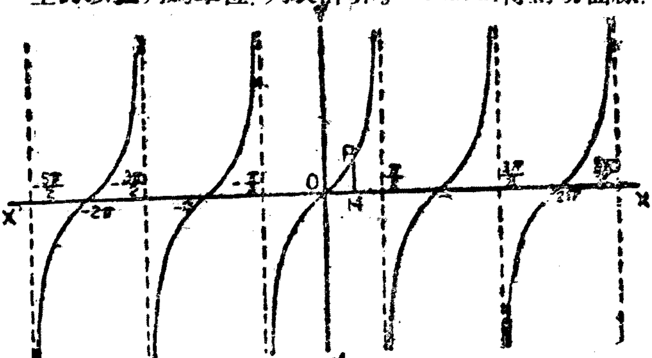
因正弦之值極大爲 1，極小爲 -1，故曲線永在 $y=-1$, $y=1$ 之間.

因正弦曲線與 x 軸相交無窮次，故方程式 $y=Sin\,x=0$ 有無窮個實根，$x=Sin^{-1}0=n\pi$，故每二根之間相距 π.

餘弦曲線，可用同法得之，惟因 $Cos\,0=1$，故餘弦曲線與正弦曲線相差 $\frac{\pi}{2}$

58. 正切曲線

取直角座標系統 $X'OX$, $Y'OY$，橫軸 $X'OX$ 上仍以弧角爲單位. 列表計算 $y=Tan\,x$，得正切曲線.



第五十五圖

因 $Tan\,n\pi=0$，故曲線與 X 軸有無窮次相交.

因 $Tan\,\frac{2n+1}{2}\pi=\infty$，故當 x 爲

$$\pm\frac{\pi}{2};\ \pm\frac{3\pi}{2},\ \pm\frac{5\pi}{2},\ \cdots\cdots$$

時，y 爲 ∞，變跡之點，離 X 軸無限遠，故 $Tan\,x$ 爲一不連續的曲線.

因 $Tan\,(\pi+x)=Tan\,x=y$，故以 $\pi+x$ 代入 x；變跡仍然與前相同.吾人實際上祇須畫由 0 至 π 間之一段曲線，正切曲線之其他可由沿 X 軸之平行移動而得.

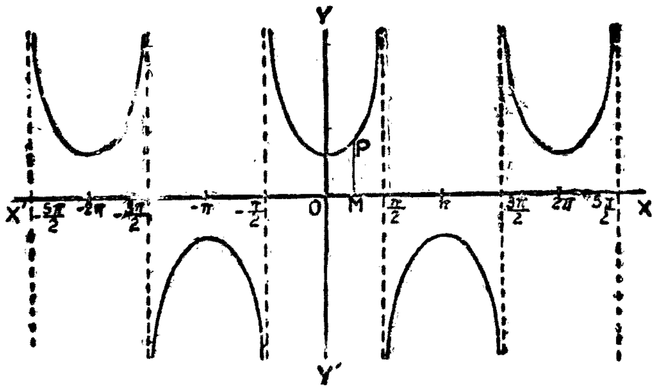
將正切曲線向右移動 $\frac{\pi}{2}$，並繞 Y 軸旋轉 $180°$；則得餘切曲線.

59. 正割曲線　如前列表作 $y=Sec\,x$ 之變跡，即得正割曲線.

因正割之絕對值不小於 1，故曲線在 $y=-1$，$y=1$ 之間無跡.

因　$x=\pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3\pi}{2},\ \pm\frac{5\pi}{2};\cdots\cdots$

時 $Sec\,x=\infty$，故正割曲線亦爲不連續的曲線.



第五十六圖

因 $Sec(x\pm 2\pi)=Sec\,x=y$，故作畫時，祇須作由 $x=-\frac{\pi}{2}$，至 $x=\frac{3\pi}{2}$ 間之曲線，由沿 X 軸之平行移動；可得其他部份.

餘割曲線與正割曲線相似；二者相差 $\frac{\pi}{2}$.

60. 三角函數之週期性 由§9之理論；或§56，§58，可知 $Sin(x\pm 2\pi)=Sin\,x$；$Cos(x\pm 2\pi)=Cos$.，$Sec(x\pm 2\pi)=Sec\,x$，$Csc(x\pm 2\pi)=Csc\,x$. 卽角度增加，或減小 2π；正弦，餘弦，正割，餘割之函數値卽周而復始. 故稱上述四種函數爲以 2π 爲週期之週期函數.

由§57，可知 $Tan(x\pm\pi)=Tan\,x$，則正切及餘切爲以 π 爲週期之週期函數.

習題二十六

試繪下列諸函數之曲線:

1. $y=\mathrm{Cos}\,x$.

2. $y=\mathrm{Cot}\,x$.

3. $y=\mathrm{Csc}\,x$.

4. $y=\mathrm{Sin}\,2x$.

5. $y=2\,\mathrm{Tan}\,\dfrac{\pi x}{3}$.

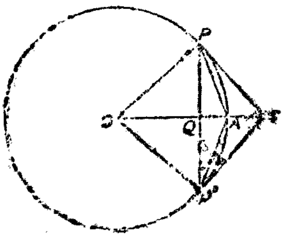
6. $y=\mathrm{Sin}\,x+2$.

第九章　三角函數極限，造表法略論

61. 三角函數極限之基本定理

定理　以 x 表一角之弧角量，則 x 趨近於零時，$\frac{Sin\ x}{x}$；$\frac{Tan\ x}{x}$ 二比，各趨近極限 1.

〔證〕　設 O 圓為單位圓，取弧 $AP=AP'=x$，聯弦線 PP'；由 P, P' 作二切線 PT 與 $P'T$，則自幾何學可知



第五十七圖

$$PQP' < PAP' < PT+P'T. \quad (1)$$

但　$PQP'=PQ+QP'=2\ Sin\ x$;

$PAP'=PA+AP'=2\ x$,

$PT+P'T=2\ Tan\ x$,.

代入(1)，得：

$$2\ Sin\ x < 2\ x < 2\ Tan\ x,$$

即　$Sin\ x < x < Tan\ x.$　　(2)

故 x 為任意銳角之弧角量，則必大於其正弦，而小於正切.以 $Sin\ x$ 除 (2)，即得

$$1 < \frac{x}{Sin\ x} < \frac{1}{Cos\ x}.$$

當 x 趨近於零，$Cos\ x$ 趨近於 1，故 $\frac{1}{Cos\ x}$ 亦趨近於 1，因 $Cos\ x \leq 1$，故 $\frac{1}{Cos\ x} \geq 1$. 於是 $\frac{x}{Sin\ x}$ 必在 1 與較 1 稍大之數二者之間，故知 x 趨近於零時，$\frac{x}{Sin\ x}$ 趨近於 1，亦卽 $\frac{Sin\ x}{x}$ 趨近於 1.

同理，以 $Tan\ x$ 除 (2)，卽得

$$Cos\ x < \frac{x}{Tan\ x} < 1,$$

當 x 趨近於零時，$Cos\ x$ 趨近於 1，而較 1 稍小，故 $\frac{x}{Tan\ x}$ 必在一較 1 稍小之數，與 1 二者之間. 故 x 趨近於零，$\frac{x}{Tan\ x}$ 趨近於 1，亦卽 $\frac{Tan\ x}{x}$ 趨近於 1.

注意：此定理，可用下列二式表之：

$$\lim_{x \to 0} \frac{Sin\ x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{Tan\ x}{x} = 1.$$

x 爲角之弧角量.

例 1. 求 $\lim\limits_{n \to 0} \left(\frac{Sin\ n^\circ}{n}\right)$.

〔解〕 設 n° 角化爲弧角 θ，則

$$\frac{n}{180} = \frac{\theta}{\pi}, \quad 卽\ n = \frac{180\,\theta}{\pi},$$

而 $\operatorname{Sin} n^\circ = \operatorname{Sin} \theta$;

$$\therefore \quad \frac{\operatorname{Sin} n^\circ}{n} = \frac{\pi \operatorname{Sin} \theta}{180\theta} = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\operatorname{Sin} \theta}{\theta}.$$

當 $n \to 0$，即 $\theta \to 0$；

$$\therefore \quad \lim_{n=o} \left(\frac{\operatorname{Sin} n^\circ}{n}\right) = \frac{\pi}{180} \lim_{\theta \to o} \left(\frac{\operatorname{Sin} \theta}{\theta}\right)$$

$$\therefore \quad \lim_{n \to o} \left(\frac{\operatorname{Sin} n^\circ}{n}\right) = \frac{\pi}{180}.$$

例 2. 求 $\lim\limits_{n \to \infty} \left(n \cdot \operatorname{Sin} \dfrac{\theta}{n} \right)$.

〔解〕 $n \operatorname{Sin} \dfrac{\theta}{n} = \theta \cdot \dfrac{n}{\theta} \cdot \operatorname{Sin} \dfrac{\theta}{n} = \theta \left(\operatorname{Sin} \dfrac{\theta}{n} \div \dfrac{\theta}{n} \right)$

因 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\theta}{n} = 0$，故

$$\lim_{n \to \infty} \left(n \operatorname{Sin} \frac{\theta}{n} \right) = \theta \lim_{n \to \infty} \left(\operatorname{Sin} \frac{\theta}{n} \div \frac{\theta}{n} \right)$$

$$= \theta \lim_{\theta/n \to 0} \left(\operatorname{Sin} \frac{\theta}{n} \div \frac{\theta}{n} \right)$$

$$\therefore \quad \lim_{n \to \infty} \left(n \cdot \operatorname{Sin} \frac{\theta}{n} \right) = \theta.$$

同理，$\lim \left(n \cdot \operatorname{Tan} \dfrac{\theta}{n} \right) = \theta$.

62. 與 0° 或 90° 相鄰諸正銳角之函數 本

書所附之三角函數表，自 $0'$ 起，每隔 $6'$ 給以一值，而 $1'$ 至 $5'$ 間之插入數，則附於各表之右端，供計算時臨時加減。惟當角之鄰近 0° 或 90° 時，因函數變化較快，遂使此項表差不復正確，故須照下法計算之。又本書所附之三角函數對數表，自 $0'$ 起，每隔 $10'$ 給以一值，故當角之鄰近 0° 或 90° 時，不得不每隔 $1'$ 卽給以一值，以求精密。欲計算角之鄰近 0° 或 90° 時之函數及函數之對數，其法如下：

設有一甚小之角，以弧角 x 表其量，則由前節定理，可以 x 代 $Sin\ x$，或 $Tan\ x$.

例如　由函數值表，查得

$$Sin\ 2^\circ\ 12' = 0.384,\quad Tan\ 2^\circ\ 12' = 0.384.$$

今將 $2^\circ\ 12'$ 化爲弧角：

$$2^\circ\ 12' = 2.2^\circ,\quad 2.2 \times 0.01745 = 0.384$$

卽 $2^\circ\ 12'$ 爲 0.384 弧角；於是可見在 0° 與 2.2° 間；諸角之正弦，正切以其角之弧角量表倘不致有誤。

又因餘角函數定義：

$$Cos\ 87^\circ\ 48' = Sin\ 2^\circ\ 12' = 0.0384,$$

$$Cot\ 87^\circ\ 48' = Tan\ 2^\circ\ 12' = 0.0384.$$

因得下列規則：

1.　求鄰近 0° 諸銳角之函數

$Sin\ x = x$ 之弧角； $Tan\ x = x$ 量之弧角量；

$Cot\ x = x$ 之弧角量之倒數，卽 $\frac{1}{x}$.

$Cos\ x$ 用表可查.

2.　求鄰近 90° 諸銳角之函數:

$Cos\ x = x$ 之餘角之弧角量;

$Cot\ x = x$ 餘角之弧角量;

$Tan\ x = x$ 餘角之弧角量之倒數;

$Sin\ x$ 用表可查.

在計算時，常用下列諸式:

$1° = \dfrac{\pi}{180} = 0.01745$ 弧角,

$1' = 0.0002909$ 弧角,

$1'' = 0.0000048$ 弧角,

$\dfrac{180°}{\pi} = 57.2957° = 1$ 弧角,

$\pi = 3.14159 = \dfrac{22}{7}$ (近似值)

$\log 0.01745 = \bar{2}.2419$,

$\log 0.0002909 = \bar{4}.4637$,

$\log 0.0000048 = \bar{6}.6856$,

$\log 57.2957 = 1.578$,

$\log \pi = 0.4917$,

例 1.　求 89° 34.6′ 之餘切，餘弦，正切.

〔解〕　先求此角之餘角.

$90° - 89°\ 34.6' = 25.4'$

$25.4 \times 0.0002909 = .00739$ 弧角

$\therefore\ Cos\ 89°\ 34.6' = 0.00739$,

$$Cot\ 89°\ 34.6' = 0.00739,$$

$$Tan\ 89°\ 34.6' = \frac{1}{0.00739} = 135.32$$

例 2. 求 $log\ Tan\ 89.935°$

〔解〕 $90° - 89.935° = 0.065°$

故 $$Tan\ 89.935° = \frac{1}{Cot\ 0.065°}$$

$$= \frac{57.2957}{0.065},$$

$$\therefore\ log\ Tan\ 89.935° = log\ 57.2957 - log\ 0.065$$

$$= 1.7581 - \bar{2}.8129$$

$$= 2.9452.$$

習題二十七

1. 求 $\lim_{x \to o} \dfrac{Tan \frac{x}{m}}{x}$

求下列各函數之值:

2. $Sin\ 42'$.

3. $Cos\ 89°13'$.

4. $Tan\ 0.01°$.

5. $Cot\ 50'$.

求下列各函數對數值:

6. $log\ Cot\ 0.05°$.

7.　$log\ Tan\ 0.04°$.

8.　$log\ Sin\ 0.06°$.

63.　造表法略論

設 θ 表角之弧角量，則由無窮級數理論，有

$$Sin\ \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \frac{\theta^7}{5040} + \cdots\cdots$$

$$Cos\ \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \frac{\theta^6}{720} + \cdots\cdots$$

正弦，餘弦之函數值表，即用上述級數計算而得．上二式之證明，因其理論超出本書範圍，從略不論．

例如　求 $Sin\ 20°$，

因　　$20° = \frac{20\pi}{180}$ 弧角，取 $\pi = 3.14159265$；

得　　$20° = 0.349065850398$ 弧角，

代入 $Sin\ \theta$ 級數中，取首三項，計算之，得

$$Sin\ 20° = 0.342020268347$$

本書附表所列，$Sin\ 20°$ 爲 0.3420，蓋祇取小數四位，五位以後，用四捨五入法略之矣．

用公式

$$Cos\ 20° = \sqrt{1 - Sin 20°}$$

或用 $Cos\ \theta$ 級數，計算之，得

$$Cos\ 20° = 0.939695044036$$

表中 $Cos\ 20°$ 爲 0.9397，亦以四捨五入故也．

既得 $Sin\ \theta, Cos\ \theta$, 則可算 $Tan\ \theta, Cot\ \theta$.

因 $Tan\ \theta = \dfrac{Sin\ \theta}{Cos\ \theta}$, $\quad Cot\ \theta = \dfrac{1}{Tan\ \theta}$.

64. 表之精確度 本書所附之三角函數表小數僅有四位，第五位小數用四捨五入法，併入第四位，因此可能有 ± 0.00005 之誤差，於是由已知角以求函數之值，僅能精確至第三位小數而止. 反之，由函數值以求角之大小，設 D 爲二相隣函數之差，因表爲每六分給一函數值者，設函數第四位小數相差 5 時，相當角 A 所生之誤差爲 e，則按插入法，得

$$6' : D = e : 0.5;$$

而 $$e = \left(\frac{3}{D}\right)' = \left(\frac{180}{D}\right)''$$

故所求得之角爲 $A \pm \left(\dfrac{3}{D}\right)'$，卽其最大誤差不超過 $\left(\dfrac{6}{D}\right)''$ 也.

本書所附之對數表，定值部亦僅有四位小數，故誤差之範圍爲 0.00005. 卽一數 x 之對數，實際上爲

$$log\ x \pm 0.00005,$$

因 $0.00005 = log\ 1.000115$, 故

$$log\ x + 0.00005 = log\ 1.000115\ x$$

$$= log(1 + .000115)x,$$

$$log\ x - 0.00005 = log\ \frac{x}{1.000115}$$

$$= log\ \frac{x}{1 + .000115}$$

$$=\log(1-.000115)\,x,$$

因 .000115 甚小，故上式可以 $(1-.000115)$ 代 $\frac{1}{1+.000115}$ 也．由 $\log x$ 士 0.00005 之二式，可見查四位對數所得眞數 x 之誤差不超過 $0.000115\,x$。

習 題 二 十 八

1. 求 $6°$ 之正弦，餘弦及正切至小數第四位．

2. 求 $25°$ 之正弦，餘弦，餘切至小數第六位．

3. 用公式：

$$Sin(x+1')=2\,Sin\,x\,Cos\,1'-Sin(x-1'),$$

$$Cos(x+1')=2\,Cos\,x\,Cos\,1'-Cos(x-1'),$$

已知 $Cos\,1'=0.999999$，　$Sin\,1'=0.000291$，

試求 $Sin\,2'$, $Sin\,3'$, $Cos\,2'$, $Cos\,3'$ 至小數第六位．

[註：此名 Simpson 之造表法]

三角學中西名詞對照表

三　畫

三角學 Trigonometry
三角函數 Trigonometric function
三角函數表 Table of trigonometric functions
大圓 Great circle

四　畫

六十分制 Sexagesimal system
分 Minute
巴比倫 Babylon
元素 Element
內切圓 Inscribed circle
方向基點 Cardinal point
反三角函數 Inverse trigonometric functions
方程式 Equation

五　畫

正弦 Sine
正切 Tangent
正割 Secant
正矢 Versed sine
正 Positive
正多邊形 Regular polygon
半徑 Radius
外接圓 Circumscribed circle
水平線 Horizontal Line
正弦定律 Law of sine
正切定律 Law of tangent
平行航行 Parallel sailing
主值 Principal value

六　畫

百分制 Centisimal system
有效數字 Significant number
仰角 Angle of elevation
曲線 Curve

七　畫

角 Angle

八　畫

直角 Right angle
表差 Mean difference
直角三角形 Right triangle
周界 Perimeter
底數 Base
定位部 Characteristic

定值部 Mantissa

九畫

函數 Function
度 Degree
弧 Arc
秒 Second
弧度制 Circular system
弧角 Radian
級 Grade
負 Negative
始邊 Initial line
恆等式 Identity
面積 Area
消去法 Elimination

十畫

座標 Co-ordinates
座標軸 Axes of Co-ordinates
原點 Origin
終邊 Terminal line
俯角 Angle of depression
紐 Knot
通值 General value
週期 Period
週期函數 Periodic function

十一畫

斜邊 Hypotenuse
笛氏直角座標 Cartesian rectangular Co-ordinates
旋轉 To revolve
倒數 Reciprocal
乘冪數 Power
符號 Sign
常用對數 Common logarithm
畢達哥拉定理 Pythagorean theorem

十二畫

單位 Unit
象限 Qradrant
單位圓 Unit circle
減少函數 Decreasing function
絕對值 Absolute value
鈍角 Obtuse angle

十三畫

極限 Limit

十四畫

對邊 Opposite side
鄰邊 Adjacent side
對數 Logarithm
疑款 Ambiguous case

十五畫

銳角 Acute angle
餘角 Complement
餘弦 Cosine
餘切 Cotangent
餘割 Cosecant
餘矢 Coversed sine

實數 Real number
橫座標 Abscissa
整數 Integer
增加函數 Increasing function
餘對數 Co-logarithm
餘弦定律 Law of cosine
橫距 Departure

十七畫

縱座標 Ordinate

十九畫

羅盤 Compass

二十三畫

變跡 Graph
驗算 Check

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	16	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	4	5	7	9	10	12	14	16
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	12	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	5	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	7	8	9	11	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	2	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	4	5	6	7	8	9	11
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	6	7	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	5	6	7	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	3	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	1	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	3	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	5	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	3	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	3	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	3	3	4	4	5	6
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	3	3	4	4	5	6
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	4	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	1	1	2	2	3	3	4	4	5
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	3	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

正弦眞數表

加

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		分 1′	2′	3′	4′	5′
0°	·0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89°	3	6	9	12	15
1	·0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88	3	6	9	12	15
2	·0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523	87	3	6	9	12	15
3	·0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	0698	86	3	6	9	12	15
4	·0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	0872	85	3	6	9	12	14
5	·0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	1045	84	3	6	9	12	14
6	·1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	1219	83	3	6	9	12	14
7	·1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	1392	82	3	6	9	12	14
8	·1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	1564	81	3	6	9	12	14
9	·1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	1736	80	3	6	9	11	14
10	·1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	1908	79	3	6	9	11	14
11	·1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	2079	78	3	6	9	11	14
12	·2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2232	2250	77	3	6	9	11	14
13	·2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	2419	76	3	6	8	11	14
14	·2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	2588	75	3	6	8	11	14
15	·2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756	74	3	6	8	11	14
16	·2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924	73	3	6	8	11	14
17	·2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090	72	3	6	8	11	14
18	·3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256	71	3	6	8	11	14
19	·3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	3420	70	3	5	8	11	14
20	·3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3584	69	3	5	8	11	14
21	·3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3746	68	3	5	8	11	14
22	·3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3907	67	3	5	8	11	13
23	·3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	4067	66	3	5	8	11	13
24	·4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	4226	65	3	5	8	11	13
25	·4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	4384	64	3	5	8	11	13
26	·4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540	63	3	5	8	10	13
27	·4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695	62	3	5	8	10	13
28	·4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848	61	3	5	8	10	13
29	·4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	5000	60	3	5	8	10	13
30	·5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150	59	3	5	8	10	13
31	·5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299	58	2	5	7	10	12
32	·5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	57	2	5	7	10	12
33	·5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592	56	2	5	7	10	12
34	·5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	5736	55	2	5	7	10	12
35	·5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878	54	2	5	7	9	12
36	·5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	53	2	5	7	9	
37	·6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	52	2	5	7	9	
38	·6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	51	2	5	7	[illegible]	
39	·6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	6428	50	2	4	7	[illegible]	
40	·6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	49	2	4	7	[illegible]	
41	·6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	48	2	4	7		
42	·6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	47	2	4	6		
43	·6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947	46	2	4	[illegible]		
44	·6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	7071	45°	2	4			
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′		0′		1′	2			

餘弦眞數

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48	54′	60′		加 分 1′	2′	3′	4′	5′
45°	·7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	7193	44°	2	4	6	8	10
46	·7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	43	2	4	6	8	10
47	·7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	7431	42	2	4	6	8	10
48	·7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	7547	41	2	4	6	8	10
49	·7547	7558	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	7660	40	2	4	6	8	9
50	·7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	7771	39	2	4	6	7	9
51	·7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	7880	38	2	4	5	7	9
52	·7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	7986	37	2	4	5	7	9
53	·7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	8090	36	2	3	5	7	9
54	·8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	8192	35	2	3	5	7	8
55	·8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	8290	34	2	3	5	7	8
56	·8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	8387	33	2	3	5	6	8
57	·8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	8480	32	2	3	5	6	8
58	·8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	8572	31	2	3	5	6	8
59	·8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	8660	30	1	3	4	6	7
60	·8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	8746	29	1	3	4	6	7
61	·8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	8829	28	1	3	4	6	7
62	·8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	8910	27	1	3	4	5	7
63	·8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	8988	26	1	3	4	5	6
64	·8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	9063	25	1	3	4	5	6
65	·9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	9135	24	1	2	4	5	6
66	·9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	9205	23	1	2	3	5	6
67	·9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	9272	22	1	2	3	4	6
68	·9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	9336	21	1	2	3	4	5
69	·9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	9397	20	1	2	3	4	5
70	·9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	9455	19	1	2	3	4	5
71	·9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	9511	18	1	2	3	4	5
72	·9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	9563	17	1	2	3	4	4
73	·9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	9613	16	1	2	2	3	4
74	·9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	9659	15	1	2	2	3	4
75	·9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	9703	14	1	1	2	3	4
76	·9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	9744	13	1	1	2	3	3
77	·9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	9781	12	1	1	2	3	3
78	·9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	9816	11	1	1	2	2	3
9	·9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	9848	10	1	1	2	2	3
	·9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	9877	9	0	1	1	2	2
	·9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	9903	8	0	1	1	2	2
	9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	9925	7	0	1	1	2	2
	9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	9945	6	0	1	1	1	2
	945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	9962	5	0	1	1	1	1
	962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	9976	4	0	0	1	1	1
	[illegible]	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	9986	3	0	0	1	1	1
	[illegible]	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	9994	2					
		9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	9998	1					
		9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	1·0000	0°					
			48′	42′			24′	18′	12′	6′	0′		1′	2′	3′	4′ 減 分	5′

加

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		分 1′	2′	3′	4′	5′
0°	·0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89°	3	6	9	12	15
1	·0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88	3	6	9	12	15
2	·0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	0524	87	3	6	9	12	15
3	·0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	0699	86	3	6	9	12	15
4	·0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	0875	85	3	6	9	12	15
5	·0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	1051	84	3	6	9	12	15
6	·1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	1228	83	3	6	9	12	15
7	·1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	1405	82	3	6	9	12	15
8	·1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	1584	81	3	6	9	12	15
9	·1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	1763	80	3	6	9	12	15
10	·1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	1944	79	3	6	9	12	15
11	·1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	2126	78	3	6	9	12	15
12	·2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	2309	77	3	6	9	12	15
13	·2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	2493	76	3	6	9	12	15
14	·2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	2679	75	3	6	9	12	16
15	·2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	2867	74	3	6	9	13	16
16	·2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3057	73	3	6	9	13	16
17	·3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3249	72	3	6	10	13	16
18	·3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3443	71	3	6	10	13	16
19	·3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3640	70	3	7	10	13	16
20	·3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3839	69	3	7	10	13	17
21	·3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	4040	68	3	7	10	13	17
22	·4040	4061	[illegible]	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	4245	67	3	7	10	14	17
23	·4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	4452	66	3	7	10	14	17
24	·4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4663	65	4	7	11	14	18
25	·4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4877	64	4	7	11	14	18
26	·4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	5095	63	4	7	11	15	18
27	·5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	5317	62	4	7	11	15	18
28	·5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	5543	61	4	8	11	15	19
29	·5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	5774	60	4	8	12	15	19
30	·5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	6009	59	4	8	12	16	20
31	·6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	6249	58	4	8	12	16	20
32	·6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	6494	57	4	8	12	16	20
33	·6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	6745	56	4	8	13	17	21
34	·6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	7002	55	4	9	13	17	21
35	·7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	7265	54	4	9	13	18	22
36	·7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	7536	53	5	9	14	18	23
37	·7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	7813	52	5	9	14	18	23
38	·7813	7841	7860	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	8098	51	5	10	14	19	24
39	·8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	8391	50	5	10	15	20	24
40	·8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	8693	49	5	10	15	20	25
41	·8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	9004	48	5	10	16	21	26
42	·9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	9325	47	5	11	16	21	27
43	·9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	9657	46	6	11	17	22	28
44	·9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	1·0000	45	6	11	17	23	29
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′		1′	2′	3′	4′	5′ 分

減

餘切眞數表

正切眞數表

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		加 分 1′	2′	3′	4′	5′
45°	1·0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	0355	44°	6	12	18	24	30
46	1·0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	0724	43	6	12	18	25	31
47	1·0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067	1106	42	6	13	19	25	32
48	1·1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	1504	41	7	13	20	26	33
49	1·1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	1918	40	7	14	21	28	34
50	1·1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	2349	39	7	14	22	29	36
51	1·2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753	2799	38	8	15	23	30	38
52	1·2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	3270	37	8	16	24	31	39
53	1·3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	3764	36	8	16	25	33	41
54	1·3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	4281	35	9	17	26	34	43
55	1·4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	4826	34	9	18	27	36	45
56	1·4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	5399	33	10	19	29	38	48
57	1·5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	6003	32	10	20	30	40	50
58	1·6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577	6643	31	11	21	32	43	53
59	1·6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	7321	30	11	23	34	45	56
60	1·7321	7391	7461	7532	7603	7675	7747	7820	7893	7966	8040	29	[illegible]	24	36	48	60
61	1·8040	8115	8190	8265	8341	8418	8495	8572	8650	8728	8807	28	13	26	38	51	64
62	1·8807	8887	8967	9047	9128	9210	9292	9375	9458	9542	9626	27	14	27	41	55	68
63	1·9626	9711	9797	9883	9970	0057	0145	0233	0323	0413	0503	26	15	29	44	58	73
64	2·0503	0594	0686	0778	0872	0965	1060	1155	1251	1348	1445	25	16	31	47	63	78
65	2·1445	1543	1642	1742	1842	1943	2045	2148	2251	2355	2460	24	17	34	51	68	85
66	2·2460	2566	2673	2781	2889	2998	3109	3220	3332	3445	3559	23	18	37	55	74	91
67	2·3559	3673	3789	3906	4023	4142	4262	4383	4504	4627	4751	22	20	40	60	79	99
68	2·4751	4876	5002	5129	5257	5386	5517	5649	5782	5916	6051	21	22	43	65	87	108
69	2·6051	6187	6325	6464	6605	6746	6889	7034	7179	7326	7475	20	24	47	71	95	119
70	2·7475	7625	7776	7929	8083	8239	8397	8556	8716	8878	9042	19	26	52	78	104	130
71	2·9042	9208	9375	9544	9714	9887	0061	0237	0415	0595	0777	18	29	58	87	115	144
72	3·0777	0961	1146	1334	1524	1716	1910	2106	2305	2506	2709	17	32	64	96	129	161
73	3·2709	2914	3122	3332	3544	3759	3977	4197	4420	4646	4874	16	36	72	108	144	180
74	3·4874	5105	5339	5576	5816	6059	6305	6554	6806	7062	7321	15	41	82	122	162	203
75	3·7321	7583	7848	8118	8391	8667	8947	9232	9520	9812	0108	14	46	94	139	186	232
76	4·0108	0408	0713	1022	1335	1653	1976	2303	2635	2972	3315	13	53	107	160	214	267
77	4·3315	3662	4015	4374	4737	5107	5483	5864	6252	6646	7046	12	62	124	186	248	310
78	4·7046	7453	7867	8288	8716	9152	9594	0045	0504	0970	1446	11	73	146	219	292	366
79	5·1446	1929	2422	2924	3435	3955	4486	5026	5578	6140	6713	10	87	175	262	350	438
80	5·6713	7297	7894	8502	9124	9758	0405	1066	1742	2432	3138	9					
81	6·3138	3859	4596	5350	6122	6912	7720	8548	9395	0264	1154	8	正切餘切的值，至此增加很快，故此公差欄不能用。				
82	7·1154	2066	3002	3962	4947	5958	6996	8062	9158	0285	1443	7					
83	8·1443	2636	3863	5126	6427	7769	9152	0579	2052	3572	5144	6					
84	9·5144	9·677	9·845	10·02	10·20	10·39	10·58	10·78	10·99	11·20	11·43	5					
85	11·43	11·66	11·91	12 16	12·43	12·71	13·00	13·30	13·62	13·95	14·30	4					
86	14·30	14·67	15·06	15·46	15·89	16·35	16·83	17·34	17·89	18·46	19·08	3					
87	19·08	19·74	20·45	21·20	22·02	22·90	23·86	24·90	26·03	27·27	28·64	2					
88	28·64	30·14	31·82	33·69	35·80	38 19	40·92	44·07	47 74	52·08	57 29	1					
89	57·29	63·66	71·62	81·85	95·49	114·6	143·2	191·0	286·5	573·0	∞	0°					
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′		1′	2′	3′	4′	5′
													分 減				

餘切眞數表

°	′		0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′		
0	0	6	——	4637	7648	9408	*0658	*1627	*2419	*3088	*3668	*4180	*4637	50	
	10	7.	4637	5051	5429	5777	6099	6398	6678	6942	7190	7425	7648	40	
	20		7648	7859	8061	8255	8439	8617	8787	8951	*109	*261	*408	30	
	30	7.9	408	551	689	822	952	*078	*200	*319	*435	*548	*658	20	
	40	8.0	658	765	870	972	*072	*169	*265	*358	*450	*539	*627	10	
	50	8.1	627	713	797	880	961	*041	*119	*196	*271	*346	*419	0	89
1	0	8.2	419	490	561	630	699	766	832	898	962	*025	*088	50	
	10	8.3	088	150	210	270	329	388	445	502	558	613	668	40	
	20		668	722	775	828	880	931	982	*032	*082	*131	*179	30	
	30	8.4	179	227	275	322	368	414	459	504	549	593	637	20	
	40		637	680	723	765	807	848	890	930	971	*011	*050	10	
	50	8.5	050	090	129	167	206	243	281	318	355	392	428	0	88
2	0	8.5	428	464	500	535	571	605	640	674	708	742	776	50	
	10		776	809	842	875	907	939	972	*003	*035	*066	*097	40	
	20	8.6	097	128	159	189	220	250	279	309	339	368	397	30	
	30		397	426	454	483	511	539	567	595	622	650	677	20	
	40		677	704	731	758	784	810	837	863	889	914	940	10	
	50		940	965	991	*016	*041	*066	*090	*115	*140	*164	*188	0	87
3	0	8.7	188	212	236	260	283	307	330	354	377	400	423	50	
	10		423	445	468	491	513	535	557	580	602	623	645	40	
	20		645	667	688	710	731	752	773	794	815	836	857	30	
	30		857	877	898	918	939	959	979	999	*019	*039	*059	20	
	40	8.8	059	078	098	117	137	156	175	194	213	232	251	10	
	50		251	270	289	307	326	345	363	381	400	418	436	0	86
4	0	8.8	436	454	472	490	508	525	543	560	578	595	613	50	
	10		613	630	647	665	682	699	716	733	749	766	783	40	
	20		783	799	816	833	849	855	882	898	914	930	946	30	
	30		946	962	978	994	*010	*026	*042	*057	*073	*089	*104	20	
	40	8.9	104	119	135	150	166	181	196	211	226	241	256	10	
	50		256	271	286	301	315	330	345	359	374	388	403	0	85
5	0	8.9	403	417	432	446	460	475	489	503	517	531	545	50	
	10		545	559	573	587	601	614	628	642	655	669	682	40	
	20		682	696	709	723	736	750	763	776	789	803	816	30	
	30		816	829	842	855	868	881	894	907	919	932	945	20	
	40		945	958	970	983	996	*008	*021	*033	*046	*058	*070	10	
	50	9.0	070	083	095	107	120	132	144	156	168	180	192	0	84
6	0	9.0	192	204	216	228	240	252	264	276	287	299	311	50	
	10		311	323	334	346	357	369	380	392	403	415	426	40	
	20		426	438	449	460	472	483	494	505	516	527	539	30	
	30		539	550	561	572	583	594	605	616	626	637	648	20	
	40		648	659	670	680	691	702	712	723	734	744	755	10	
	50		755	765	776	786	797	807	818	828	838	849	859	0	83
			10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′		

LOG COSINE

°	′		0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′		
7	0	9.0	859	869	879	890	900	910	920	930	940	951	961	50	
	10		961	971	981	991	*001	*011	*020	*030	*040	*050	*060	40	
	20	9.1	060	070	080	089	099	109	118	128	138	147	157	30	
	30		157	167	176	186	195	205	214	224	233	242	252	20	
	40		252	261	271	280	289	299	308	317	326	336	345	10	
	50		345	354	363	372	381	390	399	409	418	427	436	0	82
8	0	9.1	436	445	453	462	471	480	489	498	507	516	525	50	
	10		525	533	542	551	560	568	577	586	594	603	612	40	
	20		612	620	629	637	646	655	663	672	680	689	697	30	
	30		697	705	714	722	731	739	747	756	764	772	781	20	
	40		781	789	797	806	814	822	830	838	847	855	863	10	
	50		863	871	879	887	895	903	911	919	927	935	943	0	81
9	0	9.1	943	951	959	967	975	983	991	999	*007	*015	*022	50	
	10	9.2	022	030	038	046	054	061	069	077	085	092	100	40	
	20		100	108	115	123	131	138	146	153	161	169	176	30	
	30		176	184	191	199	206	214	221	220	236	243	251	20	
	40		251	258	266	273	280	288	295	303	310	317	324	10	
	50		324	332	339	346	353	361	368	375	382	390	397	0	80
10	0	9.2	397	404	411	418	425	432	439	447	454	461	468	50	
	10		468	475	482	489	496	503	510	517	524	531	538	40	
	20		538	545	551	558	565	572	579	586	593	600	606	30	
	30		606	613	620	627	634	640	647	654	661	667	674	20	
	40		674	681	687	694	701	707	714	721	727	734	740	10	
	50		740	747	754	760	767	773	780	786	793	799	806	0	79
11	0	9.2	806	812	819	825	832	838	845	851	858	864	870	50	
	10		870	877	883	890	896	902	909	915	921	928	934	40	
	20		934	940	947	953	959	965	972	978	984	990	997	30	
	30		997	*003	*009	*015	*021	*027	*034	*040	*046	*052	*058	20	
	40	9.3	058	064	070	077	083	089	095	101	107	113	119	10	
	50		119	125	131	137	143	149	155	161	167	173	179	0	78
12	0	9.3	179	185	191	197	202	208	214	220	226	232	238	50	
	10		238	244	250	255	261	267	273	279	284	290	296	40	
	20		296	302	308	313	319	325	331	336	342	348	353	30	
	30		353	359	365	370	376	382	387	393	399	404	410	20	
	40		410	416	421	427	432	438	444	449	455	460	466	10	
	50		466	471	477	482	488	493	499	504	510	515	521	0	77
13	0	9.3	521	526	532	537	543	548	554	559	564	570	575	50	
	10		575	581	586	591	597	602	608	613	618	624	629	40	
	20		629	634	640	645	650	655	661	666	671	677	682	30	
	30		682	687	692	698	703	708	713	719	724	729	734	20	
	40		734	739	745	750	755	760	765	770	775	781	786	10	
	50		786	791	796	801	806	811	816	822	827	832	837	0	76
			10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′	′	°

LOG COSINE

		0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		d.
14	9.3	837	887	937	986	*036	*083	*130	75	
15	9.4	130	177	223	269	314	359	403	74	
16		403	447	491	533	576	618	659	73	
17		659	700	741	781	821	861	900	72	
18		900	939	977	*015	*052	*090	*126	71	
19	9.5	126	163	199	235	270	306	341	**70**	
20	9.5	341	375	409	443	477	510	543	69	34
21		543	576	609	641	673	704	736	68	32
22		736	767	798	828	859	889	919	67	31
23		919	948	978	*007	*036	*065	*093	66	29
24	9.6	093	121	149	177	205	232	259	**65**	28
25	9.6	259	286	313	340	366	392	418	64	27
26		418	444	470	495	521	546	570	63	25
27		570	595	620	644	668	692	716	62	24
28		716	740	763	787	810	833	856	61	23
29		856	878	901	923	946	968	990	**60**	23
30	9.6	990	*012	*033	*055	*076	*097	*118	59	22
31	9.7	118	139	160	181	201	222	242	58	21
32		242	262	282	302	322	342	361	57	20
33		361	380	400	419	438	457	476	56	19
34		476	494	513	531	550	568	586	55	18
35	9.7	586	604	622	640	657	675	692	54	18
36		692	710	727	744	761	778	795	53	17
37		795	811	828	844	861	877	893	52	16
38		893	910	926	941	957	973	989	51	16
39		989	*004	*020	*035	*050	*066	*081	**50**	15
40	9.8	081	096	111	125	140	155	169	49	15
41		169	184	198	213	227	241	255	48	14
42		255	269	283	297	311	324	338	47	14
43		338	351	365	378	391	405	418	46	13
44		418	431	444	457	469	482	495	**45**	13
45	9.8	495	507	520	532	545	557	569	44	12
46		569	582	594	606	618	629	641	43	12
47		641	653	665	676	688	699	711	42	12
48		711	722	733	745	756	767	778	41	11
49		778	789	800	810	821	832	843	**40**	11
		60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	°	d.

	50	**49**	**48**	**47**	**46**
1	5.0	4.9	4.8	4.7	4.6
2	10.0	9.8	9.6	9.4	9.2
3	15.0	14.7	14.4	14.1	13.8
4	20.0	19.6	19.2	18.8	18.4
5	25.0	24.5	24.0	23.5	23.0
6	30.0	29.4	28.8	28.2	27.6
7	35.0	34.3	33.6	32.9	32.2
8	40.0	39.2	38.4	37.6	36.8
9	45.0	44.1	43.2	42.3	41.4
	45	**44**	**43**	**42**	**41**
1	4.5	4.4	4.3	4.2	4.1
2	9.0	8.8	8.6	8.4	8.2
3	13.5	13.2	12.9	12.6	12.3
4	18.0	17.6	17.2	16.3	16.4
5	22.5	22.0	21.5	21.0	20.5
6	27.0	26.4	25.8	25.2	24.6
7	31.5	20.8	30.1	29.4	28.7
8	36.0	35.2	34.4	33.6	32.8
9	40.5	39.6	38.7	37.8	36.9
	40	**39**	**38**	**37**	**36**
1	4.0	3.9	3.8	3.7	3.6
2	8.0	7.8	7.6	7.4	7.2
3	12.0	11.7	11.4	11.1	10.8
4	16.0	15.6	15.2	14.8	14.4
5	20.0	19.5	19.0	18.5	18.0
6	24.0	23.4	22.8	22.2	21.6
7	28.0	27.3	26.6	25.9	25.2
8	32.0	31.2	30.4	29.6	28.8
9	36.0	35.1	34.2	33.3	32.4
	35	**34**	**33**	**32**	**31**
1	3.5	3.4	3.3	3.2	3.1
2	7.0	6.8	6.6	6.4	6.2
3	10.5	10.2	9.9	9.6	9.3
4	14.0	13.6	13.2	12.8	12.4
5	17.5	17.0	16.5	16.0	15.5
6	21.0	20.4	19.8	19.2	18.6
7	24.5	23.8	23.1	22.4	21.7
8	28.0	27.2	26.4	25.6	24.8
9	31.5	30.6	29.7	28.8	27.9
	30	**29**	**28**	**27**	**26**
1	3.0	2.9	2.8	2.7	2.6
2	6.0	5.8	5.6	5.4	5.2
3	9.0	8.7	8.4	8.1	7.8
4	12.0	11.6	11.2	10.8	10.4
5	15.0	14.5	14.0	13.5	13.0
6	18.0	17.4	16.8	16.2	15.6
7	21.0	20.3	19.6	18.9	18.2
8	24.0	23.2	22.4	21.6	20.8
9	27.0	26.1	25.2	24.3	23.4
	25	**24**	**23**	**22**	**21**
1	2.5	2.4	2.3	2.2	2.1
2	5.0	4.8	4.6	4.4	4.2
3	7.5	7.2	6.9	6.6	6.3
4	10.0	9.6	9.2	8.8	8.4
6	12.5	12.0	11.5	11.0	10.5
6	15.0	14.4	13.8	13.2	12.6
7	17.5	16.8	16.1	15.4	14.7
8	20.0	19.2	18.4	17.6	16.8
9	22.5	21.6	20.7	19.8	18.9
	20	**19**	**18**	**17**	**16**
1	2.0	1.9	1.8	1.7	1.6
2	4.0	3.8	3.6	3.4	8.2
3	6.0	5.7	5.4	5.1	4.8
4	8.0	7.6	7.2	6.8	6.4
5	10.0	9.5	9.0	8.5	8.0
6	12.0	11.4	10.8	10.2	9.6
7	14.0	13.3	12.6	11.9	11.2
8	16.0	15.2	14.4	13.6	12.8
9	18.0	17.1	16.2	15.3	14.4
	15	**14**	**13**	**12**	**11**
1	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1
2	3.0	2.8	2.6	2.4	2.2
3	4.5	4.2	3.9	3.6	3.3
4	6.0	5.6	5.2	4.8	4.4
5	7.5	7.0	6.5	6.0	5.5
6	9.0	8.4	7.8	7.2	6.6
7	10.5	9.8	9.1	8.4	7.7
8	12.0	11.2	10.4	9.6	8.8
9	13.5	12.6	11.7	10.8	9.9

LOG SINE

°		0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		d.
50	9.8	843	853	864	874	884	895	905	39	10
51		905	915	925	935	945	955	965	38	10
52		965	975	985	995	*004	*014	*023	37	10
53	9.9	023	033	042	052	061	070	080	36	9
54		080	089	098	107	116	125	134	35	9
55	9.9	134	142	151	160	169	177	186	34	8
56		186	194	203	211	219	228	236	33	8
57		236	244	252	260	268	276	284	32	8
58		284	292	300	308	315	323	331	31	8
59		331	338	346	353	361	368	375	30	7
60	9.9	375	383	390	397	404	411	418	29	7
61		418	425	432	439	446	453	459	28	7
62		459	466	473	479	486	492	499	27	7
63		499	505	512	518	524	530	537	26	6
64		537	543	549	555	561	567	573	25	6
65	9.9	573	579	584	590	596	602	607	24	6
66		607	613	618	624	629	635	640	23	6
67		640	646	651	656	661	667	672	22	5
68		672	677	682	687	692	697	702	21	5
69		702	706	711	716	721	725	730	20	5
70	9.9	730	734	739	743	748	752	757	19	5
71		757	761	765	770	774	778	782	18	4
72		782	786	790	794	798	802	806	17	4
73		806	810	814	817	821	825	828	16	4
74		828	832	836	839	843	846	849	15	4
75	9.9	849	853	856	859	863	866	869	14	3
76		869	872	875	878	881	884	887	13	3
77		887	890	893	896	899	901	904	12	3
78		904	907	909	912	914	917	919	11	3
79		919	922	924	927	929	931	934	10	3
80	9.9	934	936	938	940	942	944	946	9	2
81		946	948	950	952	954	956	958	8	2
82		958	959	961	963	964	966	968	7	2
83		968	969	971	972	973	975	976	6	2
84		976	977	979	980	981	982	983	5	1
85	9.9	983	985	986	987	988	989	989	4	1
86		989	990	991	992	993	993	994	3	1
87		994	995	995	996	996	997	997	2	0
88		997	998	998	999	999	999	999	1	0
89		999	*000	*000	*000	*000	*000	*000	0	0
90	10.0	000								
		60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	°	d.

	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1	1.0	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1
2	2.0	1.8	1.6	1.4	1.2	1.0	.8	.6	.4	.2
3	3.0	2.7	2.4	2.1	1.8	1.5	1.2	.9	.6	.3
4	4.0	3.6	3.2	2.8	2.4	2.0	1.6	1.2	.8	.4
5	5.0	4.5	4.0	3.5	3.0	2.5	2.0	1.5	1.0	.5
6	6.0	5.4	4.8	4.2	3.6	3.0	2.4	1.8	1.2	.6
7	7.0	6.3	5.6	4.9	4.2	3.5	2.8	2.1	1.4	.7
8	8.0	7.2	6.4	5.6	4.8	4.0	3.2	2.4	1.6	.8
9	9.0	8.1	7.2	6.3	5.4	4.5	3.6	2.7	1.8	.9

LOG COSINE

LOG TANGENT

°	′		0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′		
0	0	6.		4637	7648	9408	*0658	*1627	*2419	*3088	*3668	*4180	*4637	50	
	10	7.	4637	5051	5429	5777	6099	6398	6678	6942	7190	7425	7648	40	
	20		7648	7860	8062	8255	8439	8617	8787	8951	*109	*261	*409	30	
	30	7.9	409	551	689	823	952	*078	*200	*319	*435	*548	*658	20	
	40	8.0	658	765	870	972	*072	*170	*265	*359	*450	*540	*627	10	
	50	8.1	627	713	798	880	962	*041	*120	*196	*272	*346	*419	0	89
1	0	8.2	419	491	562	631	700	767	833	899	963	*026	*089	50	
	10	8.3	089	150	211	271	330	389	446	503	559	614	669	40	
	20		669	723	776	829	881	932	983	*033	*083	132	181	30	
	30	8.4	181	229	276	323	370	416	461	506	551	595	638	20	
	40		638	682	725	767	809	851	892	933	973	*013	*053	10	
	50	8.5	053	092	131	170	208	246	283	321	358	394	431	0	88
2	0	8.5	431	467	503	538	573	608	643	677	711	745	779	50	
	10		779	812	845	878	911	943	975	*007	*038	*070	*101	40	
	20	8.6	101	132	163	193	223	254	283	313	343	372	401	30	
	30		401	430	459	487	515	544	571	599	627	654	682	20	
	40		682	709	736	762	789	815	842	868	894	920	945	10	
	50		945	971	996	*021	*046	*071	*096	*121	*145	*170	*194	0	87
3	0	8.7	194	218	242	266	290	313	337	360	383	406	429	50	
	10		429	452	475	497	520	542	565	587	609	631	652	40	
	20		652	674	696	717	739	760	781	802	823	844	865	30	
	30		865	886	906	927	947	967	988	*008	*028	*048	*067	20	
	40	8.8	067	087	107	126	146	165	185	204	223	242	261	10	
	50		261	280	299	317	336	355	373	392	410	428	446	0	86
4	0	8.8	446	465	483	501	518	536	554	572	589	607	624	50	
	10		624	642	659	676	694	711	728	745	762	778	795	40	
	20		795	812	829	845	862	878	895	911	927	944	960	30	
	30		960	976	992	*008	*024	*040	*056	*071	*087	*103	*118	20	
	40	8.9	118	134	150	165	180	196	211	226	241	256	272	10	
	50		272	287	302	316	331	346	361	376	390	405	420	0	85
5	0	8.9	420	434	449	463	477	492	506	520	534	549	563	50	
	10		563	577	591	605	619	633	646	660	674	688	701	40	
	20		701	715	729	742	756	769	782	796	809	823	836	30	
	30		836	849	862	875	888	901	915	927	940	953	966	20	
	40		966	979	992	*005	*017	*030	*043	*055	*068	*080	*093	10	
	50	9.0	093	105	118	130	143	155	167	180	192	204	216	0	84
6	0	9.0	216	228	240	253	265	277	289	300	312	324	336	50	
	10		336	348	360	371	383	395	407	418	430	441	453	40	
	20		453	464	476	487	499	510	521	533	544	555	567	30	
	30		567	578	589	600	611	622	633	645	656	667	678	20	
	40		678	688	699	710	721	732	743	754	764	775	786	10	
	50		786	796	807	818	828	839	849	860	871	881	891	0	83
			10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′	′	°

LOG COTANGENT

LOG TANGENT

°	′		0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′		
7	0	9.0	891	902	912	923	933	943	954	964	974	984	995	50	
	10		995	*005	*015	*025	*035	*045	*055	*066	*076	*086	*096	40	
	20	9.1	096	106	116	125	135	145	155	165	175	185	194	30	
	30		194	204	214	223	233	243	252	262	272	281	291	20	
	40		291	300	310	319	329	338	348	357	367	376	385	10	
	50		385	395	404	413	423	432	441	450	460	469	478	0	82
8	0	9.1	478	487	496	505	515	524	533	542	551	560	569	50	
	10		569	578	587	596	605	613	622	631	640	649	658	40	
	20		658	667	675	684	693	702	710	719	728	736	745	30	
	30		745	754	762	771	779	788	797	805	814	822	831	20	
	40		831	839	848	856	864	873	881	890	898	906	915	10	
	50		915	923	931	940	948	956	964	973	981	989	997	0	81
9	0	9.1	997	*005	*013	*022	*030	*038	*046	*054	*062	*070	*078	50	
	10	9.2	078	086	094	102	110	118	126	134	142	150	158	40	
	20		158	166	174	181	189	197	205	213	221	228	236	30	
	30		236	244	252	259	267	275	282	290	298	305	313	20	
	40		313	321	328	336	343	351	359	366	374	381	389	10	
	50		389	396	404	411	419	426	434	441	448	456	463	0	80
10	0	9.2	463	471	478	485	493	500	507	515	522	529	536	50	
	10		536	544	551	558	565	573	580	587	594	601	609	40	
	20		609	616	623	630	637	644	651	658	666	673	680	30	
	30		680	687	694	701	708	715	722	729	736	743	750	20	
	40		750	757	764	770	777	784	791	798	805	812	819	10	
	50		819	825	832	839	846	853	859	866	873	880	887	0	79
11	0	9.2	887	893	900	907	913	920	927	933	940	947	953	50	
	10		953	960	967	973	980	987	993	*000	*006	*013	*020	40	
	20	9.3	020	026	033	039	046	052	059	065	072	078	085	30	
	30		085	091	098	104	110	117	123	130	136	142	149	20	
	40		149	155	162	168	174	181	187	193	200	206	212	10	
	50		212	219	225	231	237	244	250	256	262	269	275	0	78
12	0	9.3	275	281	287	293	300	306	312	318	324	330	336	50	
	10		336	343	349	355	361	367	373	379	385	391	397	40	
	20		397	403	409	416	422	428	434	440	446	452	458	30	
	30		458	464	469	475	481	487	493	499	505	511	517	20	
	40		517	523	529	535	541	546	552	558	564	570	576	10	
	50		576	581	587	593	599	605	611	616	622	628	634	0	77
13	0	9.3	634	639	645	651	657	662	668	674	680	685	691	50	
	10		691	697	702	708	714	719	725	731	736	742	748	40	
	20		748	753	759	764	770	776	781	787	792	798	804	30	
	30		804	809	815	820	826	831	837	842	848	853	859	20	
	40		859	864	870	875	881	886	892	897	903	908	914	10	
	50		914	919	924	930	935	941	946	952	957	962	968	0	76
			10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′	′	°

LOG COTANGENT

		0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		d.
14	9.3	968	*021	*074	*127	*178	*230	*281	75	53
15	9.4	281	331	381	430	479	527	575	74	49
16		575	622	669	716	762	808	853	73	46
17		853	898	943	987	*031	*075	*118	72	44
18	9.5	118	161	203	245	287	329	370	71	42
19		370	411	451	491	531	571	611	70	40
20	9.5	611	650	689	727	766	804	842	69	38
21		842	879	917	954	991	*028	*064	68	37
22	9.6	064	100	136	172	208	243	279	67	36
23		279	314	348	383	417	452	486	66	35
24		486	520	553	587	620	654	687	65	34
25	9.6	687	720	752	785	817	850	882	64	33
26		882	914	946	977	*009	*040	*072	63	32
27	9.7	072	103	134	165	196	226	257	62	31
28		257	287	317	348	378	408	438	61	30
29		438	467	497	526	556	585	614	60	29
30	9.7	614	644	673	701	730	759	788	59	29
31		788	816	845	873	902	930	958	58	28
32		958	986	*014	*042	*070	*097	*125	57	28
33	9.8	125	153	180	208	235	263	290	56	27
34		290	317	344	371	398	425	452	55	27
35	9.8	452	479	506	533	559	586	613	54	27
36		613	639	666	692	718	745	771	53	26
37		771	797	824	850	876	902	928	52	26
38		928	954	980	*006	*032	*058	*084	51	26
39	9.9	084	110	135	161	187	212	238	50	26
40	9.9	238	264	289	315	341	366	392	49	26
41		392	417	443	468	494	519	544	48	25
42		544	570	595	621	646	671	697	47	25
43		697	722	747	772	798	823	848	46	25
44		848	874	899	924	949	975	*000	45	25
		60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	°	d.

	53	52	51	50	49
1	5.3	5.2	5.1	5.0	4.9
2	10.6	10.4	10.2	10.0	9.8
3	15.9	15.6	15.3	15.0	14.7
4	21.2	20.8	20.4	20.0	19.6
5	26.5	26.0	25.5	25.0	24.5
6	31.8	31.2	30.6	30.0	29.4
7	37.1	36.4	35.7	35.0	34.3
8	42.4	41.6	40.8	40.0	39.2
9	47.7	46.8	45.9	45.0	44.1
	48	**47**	**46**	**45**	**44**
1	4.8	4.7	4.6	4.5	4.4
2	9.6	9.4	9.2	9.0	8.8
3	14.4	14.1	13.8	13.5	13.2
4	19.2	18.8	18.4	18.0	17.6
5	24.0	23.5	23.0	22.5	22.0
6	28.8	28.2	27.6	27.0	26.4
7	33.6	32.9	32.2	31.5	30.8
8	38.4	37.6	36.8	36.0	35.2
9	43.2	42.3	41.4	40.5	39.6
	43	**42**	**41**	**40**	**39**
1	4.3	4.2	4.1	4.0	3.9
2	8.6	8.4	8.2	8.0	7.8
3	12.9	12.6	12.3	12.0	11.7
4	17.2	16.8	16.4	16.0	15.6
5	21.5	21.0	20.5	20.0	19.5
6	25.8	25.2	24.6	24.0	23.4
7	30.1	29.4	28.7	28.0	27.3
8	34.4	33.6	32.8	32.0	31.2
9	38.7	37.8	36.9	36.0	35.1
	38	**37**	**36**	**35**	**34**
1	3.8	3.7	3.6	3.5	3.4
2	7.6	7.4	7.2	7.0	6.8
3	11.4	11.1	10.8	10.5	10.2
4	15.2	14.8	14.4	14.0	13.6
5	19.0	18.5	18.0	17.5	17.0
6	22.8	22.2	21.6	21.0	20.4
7	26.6	25.9	25.2	24.5	23.8
8	30.4	29.6	28.8	28.0	27.2
9	34.2	33.3	32.4	31.5	30.6
	33	**32**	**31**	**30**	**29**
1	3.3	3.2	3.1	3.0	2.9
2	6.6	6.4	6.2	6.0	5.8
3	9.9	9.6	9.3	9.0	8.7
4	13.2	12.8	12.4	12.0	11.6
5	16.5	16.0	15.5	15.0	14.5
6	19.8	19.2	18.6	18.0	17.4
7	23.1	22.4	21.7	21.0	20.3
8	26.4	25.6	24.8	24.0	23.2
9	29.7	28.8	27.9	27.0	26.1
	28	**27**	**26**	**25**	
1	2.8	2.7	2.6	2.5	
2	5.6	5.4	5.2	5.0	
3	8.4	8.1	7.8	7.5	
4	11.2	10.8	10.4	10.0	
5	14.0	13.5	13.0	12.5	
6	16.8	16.2	15.6	15.0	
7	19.6	18.9	18.2	17.5	
8	22.4	21.6	20.8	20.0	
9	25.2	24.3	23.4	22.5	

°		0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		d.
45	0.0	000	025	051	076	101	126	152	44	25
46		152	177	202	228	253	278	303	43	25
47		303	329	354	379	405	430	456	42	25
48		456	481	506	532	557	583	608	41	25
49		608	634	659	685	711	736	762	40	25
50	0.0	762	788	813	839	865	890	916	39	26
51		916	942	968	994	*020	*046	*072	38	26
52	0.1	072	098	124	150	176	203	229	37	26
53		229	255	282	308	334	361	387	36	26
54		387	414	441	467	494	521	548	35	27
55	0.1	548	575	602	629	656	683	710	34	27
56		710	737	765	792	820	847	875	33	27
57		875	903	930	958	986	*014	*042	32	28
58	0.2	042	070	098	127	155	184	212	31	28
59		212	241	270	299	327	356	386	30	29
60	0.2	386	415	444	474	503	533	562	29	29
61		562	592	622	652	683	713	743	28	30
62		743	774	804	835	866	897	928	27	31
63		928	960	991	*023	*054	*086	118	26	32
64	0.3	118	150	183	215	248	280	313	25	33
65	0.3	313	346	380	413	447	480	514	24	34
66		514	548	583	617	652	686	721	23	35
67		721	757	792	828	864	900	936	22	36
68		936	972	*009	*046	*083	*121	*158	21	37
69	0.4	158	196	234	273	311	350	389	20	38
70	0.4	389	429	469	509	549	589	630	19	40
71		630	671	713	755	797	839	882	18	42
72		882	925	969	*013	*057	*102	*147	17	44
73	0.5	147	192	238	284	331	378	425	16	46
74		425	473	521	570	619	669	719	15	50
75	0.5	719	770	822	873	926	979	*032	14	52
		60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	°	d.

	25	26	27	28	29
1	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
2	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8
3	7.5	7.8	8.1	8.1	8.7
4	10.0	10.4	10.8	11.2	11.6
5	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5
6	15.0	15.6	16.2	16.8	17.4
7	17.5	18.2	18.9	19.6	20.3
8	20.0	20.8	21.6	22.4	23.2
9	22.5	23.4	24.3	25.2	26.1

	30	31	32	33	34
1	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4
2	6.0	6.2	6.4	6.6	6.8
3	9.0	9.3	9.6	9.9	10.2
4	12.0	12.4	12.8	13.2	13.6
5	15.0	15.5	16.0	16.5	17.0
6	18.0	18.6	19.2	19.8	20.4
7	21.0	21.7	22.4	23.1	23.8
8	24.0	24.8	25.6	26.4	27.2
9	27.0	27.9	28.8	29.7	30.6

	35	36	37	38	39
1	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9
2	7.0	7.2	7.4	7.6	7.8
3	10.5	10.8	11.1	11.4	11.7
4	14.0	14.4	14.8	15.2	15.6
5	17.5	18.0	18.5	19.0	19.5
6	21.0	21.6	22.2	22.8	23.4
7	24.5	25.2	25.9	26.6	27.3
8	28.0	28.8	29.6	30.4	31.2
9	31.5	32.4	33.3	34.2	35.1

	40	41	42	43	44
1	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4
2	8.0	8.2	8.4	8.6	8.8
3	12.0	12.3	12.6	12.9	13.2
4	16.0	16.4	16.8	17.2	17.6
5	20.0	20.5	21.0	21.5	22.0
6	24.0	24.6	25.2	25.8	26.4
7	28.0	28.7	29.4	30.1	30.8
8	32.0	32.8	33.6	34.4	35.2
9	36.0	36.9	37.8	38.7	39.6

	45	46	47	48	49
1	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9
2	9.0	9.2	9.4	9.6	9.8
3	13.5	13.8	14.1	14.4	14.7
4	18.0	18.4	18.8	19.2	19.6
5	22.5	23.0	23.5	24.0	24.5
6	27.0	27.6	28.2	28.8	29.4
7	31.5	32.2	32.9	33.6	34.3
8	36.0	36.8	37.6	38.4	39.2
9	40.5	41.4	42.3	43.2	44.1

	50	51	52	53
1	5.0	5.1	5.2	5.3
2	10.0	10.2	10.4	10.6
3	15.0	15.3	15.6	15.9
4	20.0	20.4	20.8	21.2
5	25.0	25.5	26.0	26.5
6	30.0	30.6	31.2	31.8
7	35.0	35.7	36.4	37.1
8	40.0	40.8	41.6	42.4
9	45.0	45.9	46.8	47.7

°	′		0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′		
76	0	0.6	032	038	043	048	054	059	065	070	076	081	086	50	
	10		086	092	097	103	108	114	119	125	130	136	141	40	
	20		141	147	152	158	163	169	174	180	185	191	196	30	
	30		196	202	208	213	219	224	230	236	241	247	252	20	
	40		252	258	264	269	275	281	286	292	298	303	309	10	
	50		309	315	320	326	332	338	343	349	355	361	366	0	13
77	0	0.6	366	372	378	384	389	395	401	407	413	419	424	50	
	10		424	430	436	442	448	454	459	465	471	477	483	40	
	20		483	489	495	501	507	513	519	525	531	536	542	30	
	30		542	548	554	560	566	572	578	584	591	597	603	20	
	40		603	609	615	621	627	633	639	645	651	657	664	10	
	50		664	670	676	682	688	694	700	707	713	719	725	0	12
78	0	0.6	725	731	738	744	750	756	763	769	775	781	788	50	
	10		788	794	800	807	813	819	826	832	838	845	851	40	
	20		851	858	864	870	877	883	890	896	902	909	915	30	
	30		915	922	928	935	941	948	954	961	967	974	980	20	
	40		980	987	994	*000	*007	*013	*020	*027	*033	*040	*047	10	
	50	0.7	047	053	060	067	073	080	087	093	100	107	113	0	11
79	0	0.7	113	120	127	134	141	147	154	161	168	175	181	50	
	10		181	188	195	202	209	216	223	230	236	243	250	40	
	20		250	257	264	271	278	285	292	299	306	313	320	30	
	30		320	327	334	342	349	356	363	370	377	384	391	20	
	40		391	399	406	413	420	427	485	442	449	456	464	10	
	50		464	471	478	485	493	500	507	515	522	529	537	0	10
80	0	0.7	537	544	552	559	566	574	581	589	596	604	611	50	
	10		611	619	626	634	641	649	657	664	672	679	687	40	
	20		687	695	702	710	718	725	733	741	748	756	764	30	
	30		764	772	779	787	795	803	811	819	826	834	842	20	
	40		842	850	858	866	874	882	890	898	906	914	922	10	
	50		922	930	938	946	954	962	970	978	987	995	*003	0	9
81	0	0.8	003	011	019	027	036	044	052	060	069	077	085	50	
	10		085	094	102	110	119	127	136	144	152	161	169	40	
	20		169	178	186	195	203	212	221	229	238	246	255	30	
	30		255	264	272	281	290	298	307	316	325	333	342	20	
	40		342	351	360	369	378	387	395	404	413	422	431	10	
	50		431	440	449	458	467	476	485	495	504	513	522	0	8
82	0	0.8	522	531	540	550	559	568	577	587	596	605	615	50	
	10		615	624	633	643	652	662	671	681	690	700	709	40	
	20		709	719	728	738	748	757	767	777	786	796	806	30	
	30		806	815	825	835	845	855	865	875	884	894	904	20	
	40		904	914	924	934	945	955	965	975	985	995	*005	10	
	50	0.9	005	016	026	036	046	057	067	077	088	098	109	0	7
			10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′	′	°

LOG COTANGENT

°	'		0'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'	10'		
83	0	0.9	109	119	129	140	151	161	172	182	193	204	214	50	
	10		214	225	236	246	257	268	279	290	301	312	322	40	
	20		322	333	344	355	367	378	389	400	411	422	433	30	
	30		433	445	456	467	479	490	501	513	524	536	547	20	
	40		547	559	570	582	593	605	617	629	640	652	664	10	
	50		664	676	688	700	711	723	735	747	760	772	784	0	6
84	0	0.9	784	796	808	820	833	845	857	870	882	895	907	50	
	10		907	920	932	945	957	970	983	995	*008	*021	*034	40	
	20	1.0	034	047	060	072	085	099	112	125	138	151	164	30	
	30		164	177	191	204	218	231	244	258	271	285	299	20	
	40		299	312	326	340	354	367	381	295	409	423	437	10	
	50		437	451	466	480	494	508	523	537	551	566	580	0	5
85	0	1.0	580	595	610	624	639	654	669	683	698	713	728	50	
	10		728	744	759	774	789	804	820	835	850	866	882	40	
	20		882	897	913	929	944	960	976	992	*008	*024	*040	30	
	30	1.1	040	056	073	089	105	122	138	155	171	188	205	20	
	40		205	222	238	255	272	289	306	324	341	358	376	10	
	50		376	393	411	428	446	464	482	499	517	535	554	0	4
86	0	1.1	554	572	590	608	627	645	664	682	701	720	739	50	
	10		739	758	777	796	815	835	854	874	893	913	933	40	
	20		933	952	972	992	*012	*033	*053	*073	*094	*114	*135	30	
	30	1.2	135	156	177	198	219	240	261	283	304	326	348	20	
	40		348	369	391	413	435	458	480	503	525	548	571	10	
	50		571	594	617	640	663	687	710	734	758	782	806	0	3
87	0	1.2	806	830	855	879	904	929	954	979	*004	*029	*055	50	
	10	1.3	055	080	106	132	158	185	211	238	264	291	318	40	
	20		318	346	373	401	429	456	485	513	541	570	599	30	
	30		599	628	657	687	717	746	777	807	837	868	899	20	
	40		899	930	962	993	*025	*057	*089	*122	*155	*188	*221	10	
	50	1.4	221	255	289	323	357	392	427	462	497	533	569	0	2
88	0	1.4	569	606	642	679	717	754	792	830	869	908	947	50	
	10		947	987	*027	*067	*108	*149	*191	*233	*275	*318	*362	40	
	20	1.5	362	405	449	494	539	584	630	677	724	771	819	30	
	30		819	868	917	967	*017	*068	*119	*171	*224	*277	*331	20	
	40	1.6	331	386	441	497	554	611	670	729	789	850	911	10	
	50		911	974	*037	*101	*167	*233	*300	*369	*438	*509	*581	0	1
89	0	1.7	581	654	728	804	880	959	*038	*120	*202	*287	*373	50	
	10	1.8	373	460	550	641	735	830	928	*028	*130	*235	*342	40	
	20	1.9	342	452	565	681	803	922	*0048	*0177	*0311	*0449	*0591	30	
	30	2.	0591	0739	0891	1049	1213	1383	1561	1745	1938	2140	2352–	20	
	40		2352	2575	2810	3058	3322	3602	3001	4223	4571	4949	5363	10	
	50		5363	5820	6332	6912	7581	8373	9342	3.0592	3.2352	3.5363	—	0	0
			10'	9'	8'	7'	6'	5'	4'	3'	2'	1'	0'	'	°

LOG COTANGENT

二·五