

大學叢書

高等物理學

上 冊

衛斯特發爾著
周君適 姚啓鈞譯

商務印書館發行

大學叢書
高等物理學

上 冊

衛斯特發爾著
周君適 姚啓鈞譯

商務印書館發行

譯 者 序

本書爲德國柏林大學教授 Westphal 氏原著,其初版於 1928 年出版,經譯者歷在暨南大學廣西大學及重慶大學等校採作教本,迄今已及八年。第二版於 1930 年出版,與初版無甚大異。譯者初即按二版翻譯,將次完成,而第三版於 1933 年出版,增改頗多,遂又全部改譯。前後共歷五年,修改不下數次,方告譯竣。雖不敢云信達,然下筆頗知謹慎,力求不失原意。全書皆直譯,理工科學生之初習德文者,可與原文對照閱讀(原書德國柏林 Julius Springer出版)。

初治物理學者對於物理學之基本思想須有確切明晰之認識,固不僅能證公式,能解習題,即算了事。原著闡明原理,不厭求詳,而尤着重於基本之思想。如 §§ 37, 38 與 39 諸節關於向心力與離心力, § 107 氣體之浮力, § 135 熱學第二主要定理, § 259 支路導體系中電流強度之計算, §§ 439 與 440, 平行平板內之干涉現象諸節,均反覆申說,頗能與初學者以深切之印象。他若 § 157, Maxwell 氏氣體分子速度分布定律,及 § 483, Planck 氏輻射定律等,雖似超出本書範圍,然原著者之意僅在說明二氏思想之重要,而不涉定律若何導出之數學的步驟。初學者須認清此點,不必專在形式上窮根

究底。其在本書範圍以內可加證明而原書中缺略者，悉由譯者加以補充，作為附錄，如 § 20，簡諧運動之定義，§ 82，彎曲變形之公式，§ 83，切變之公式，§ 119，弦線振動之公式，§ 124 Newton 與 Laplace 二氏縱波速度公式，以及 § 312，二電流間作用力之公式等是。

微積分及初步微分方程式在物理學中應用至廣，每見有教本中於證明某種定理時，因欲避免此二種數學工具而不惜以初等數學展轉證之者，其繁冗之式不特足使初學者望而生畏，且有時尚不免涉於牽強。若引用微積分及初步之微分方程式，則困難立除。本書自第二編起即加引用，誠屬至當。雖吾國中學課程中未將此二科列入，然其運算之方法尚屬簡單，故譯者另於附錄中將其關於本書應用所及者一一備述；未習者先讀附錄即可應付裕如。

譯本中所用公式及符號悉照原本，俾存真相。惟單位名稱悉加方括弧 []，以求醒目，而向量符號原書中用德文花體字母者，今改用肥體字母。原書 § 359 Maxwell 氏方程式用左坐標系，以致其結果與通常習見者不同，今得原著者同意，改用右坐標系。他若 §§ 36, 83, 119, 185, 252, 321, 330, 337 及 483 諸節中原著均有一二筆誤之處，以及其他引證節目錯誤之處，今均加改正。第 301 圖與 302 圖原用左坐標，第 390 圖 *b* 原有錯誤，今皆重繪。

譯本中所用物理學名詞大部份均遵照二十三年一月

公布之名詞，惟間有數處，則略有不同。如『介質常數』(Dielectric Constant)改爲『介電係數』，俾與『導磁係數』相對稱，而『介體』與『介質』(Dielectric)遂亦因之改爲『介電體』，與『介電質』。又如 Medium 一字，亦作『介質』，今仍沿用舊名『媒質』，俾包括『介電質』，『導磁質』，以及其他一切媒遞之質。又如 Canal Ray 不應作『陽極射線』而應作『陽射線』，蓋另有 Anode Ray 方可譯作前名。同理，Negative Glow 原作『陰極電輝』，今改爲『陰電輝』，以別於 Cathode Glow。又如『磁殼』(Magnetic Shell)今改爲『磁片』，蓋殼似有內外之分，而片則無分內外也。又如 Anisotropic 一字原作『非各向同性的』，而 Anisotropic Medium 則又作『各向異性介質』，今決均用『各向異性』，蓋前者固着重於『各向並不完全同性』，而後者亦非必謂『無有一向同性』者也；『各向異性』自較『非各向同性』爲簡明。又如『偶極子』(Dipole)改爲『極偶』，以求簡單，且亦與『力偶』不無相似之處；於是 Electric Dipole 稱爲『電偶』，Magnetic Dipole 稱爲『磁偶』，『進動』(Precession)可改爲『錐動』，取轉動體之軸在錐面上移動之意。『皮膚作用』(Skin Effect)改爲『表皮作用』。Macroscopic 一字原作『粗大的』，今改爲『統觀』，Microscopic 原作『細微的』，今改爲『微察』。特誌於此，以供採擇。

物理學名詞在未公布以前漫無標準，故譯者每於文中兼附西文，以免混淆，而讀者遂每以西文爲主。本書除少數不習見之名詞外，均不附原文，希矯西文爲主之弊。書末附

華德英、德華及英華三種索引，以便對照。西文人名及地名以未有相當標準，故悉用原名，未加強譯；索引另附。

原書中無習題，譯者向各方搜集，約得 300 題。選題原則，以能使讀者稍加思索，不直接代入公式者爲上，且力避過涉艱難之題。較難之題均有提示。

譯者屢承何奎垣先生之鼓勵與指示，無任銘感。章元石先生亦頗多臂助匡正之處，謹此誌謝。

民國二十五年夏譯者謹識，

時在四川省立重慶大學。

目次

第一編 通論 1

第一章 物理學之內容及方法 §1—51

物理學在自然科學中之地位 1. — 因果說 3. —
實驗 4. — 物理學定律 5. — 物理學之分類 7.

第二章 度量衡及測量 §6—119

物理測量之本性與目的 9. — 長度之測量 10. —
角度之測量 14. — 時間之測量 16. — 純量與向
量 16. — 向量之合併與分解 17.

第三章 物質 §12—1421

物質不滅定理 21. — 物態 21. — 物質組織暫
論 22.

第二編 剛體力學 重力25

第四章 運動學 § 15—20 25

質點之定義 25. — 運動 25. — 直線上之運動 26.
 — 空間內之運動 29. — 速度及加速度之向量
 表示法 30. — 角速度及角加速度 33.

第五章 剛體受力作用後之狀況

§ 21—52 37

作用力視為運動變化之原因 37. — 慣性定理
 (Newton 氏第一公理) 37. — 慣性質量 (Newton 氏
 第二公理). 質量與力之單位 39. — 科學度量衡
 制 (C.G.S. 制) 及工業度量衡制 41. — 動量 42. —
 慣性力. D'Alembert 氏原理 43. — 力之合併. 力之
 平行四邊形定理 43. — 關於諸力相合之幾種實
 驗 46. — 作用與反作用 (Newton 氏第三公理). 逼
 力 48. — 平衡 49. — 力偶. 力矩 50. — 槓桿 51.
 — 動量不滅定理 (衝量定理) 53. — 質量中心或
 稱重心 55. — 重心運動不變之定理 58. — 轉動
 慣量 59. — 圓周運動. 向心力與離心力 62. —
 從轉動組所見之離心力 65. — 關於轉動體慣性
 力之幾種實驗 68. — 工作 71. — 加速工作 73.

——工作或能量不滅之定理 74. ——運動能量或稱動能 76. ——位置能量或稱位能 77. ——工率 78. ——轉動能量. 角動量 80. ——單位扭角力矩 83. ——對於自由軸之轉動. 迴轉子 (旋子) 84. ——地球之自轉 87. ——大陸之背極性 91. ——彈性與非彈性二種碰撞 92. ——力學諸量之因次 97.

第六章 重力 §53—6999

重力與由重力而起之加速度 99. ——重性質量 100. ——重量 101. ——比重. 密度. 容度 103. ——地球重力場中之運動. 下落與拋射 105. ——斜面上之下落 108. ——重力 111. ——擺 111. ——用擺以測定 g 值 114. ——穩定, 不穩, 與隨遇三種平衡 116. ——Newton 氏萬有引力定律 120. ——地球內部之重力 122. ——月球之運動 123. ——行星運動 124. ——潮汐 128. ——超距作用與媒遞作用. 133 ——引力位與引力場強度 133.

第七章 力學定律之應用 §70—80 136

機械 136. ——槓桿類機械 138. ——滑車及滑車組 140. 齒輪 143. ——尖劈及螺旋 144. ——精密天平 145. ——絕對稱物法 150. ——推挽運動之變成轉動 151. ——

車輪 152.——彎曲軌道上之慣性作用(離心力)152.
——時鐘 156.

第三編 柔體力學 159

第八章 固體之彈性 § 81—85 159

彈性之觀念及普遍之事實 159.——微小之長度的形變. Hooke 氏定律. 彎曲 161.——切變 163.——壓力 165.——彈性能量 166.

第九章 液體靜力學 § 86—93 168

無重液體內部之壓力 168.——重力之作用 169.——液體之自由表面 174.——浮力. Archimedes 氏原理 175.——浮泊 178.——液體之彈性 180.——表面張力 181.——毛細作用 183.

第十章 氣體靜力學 § 94—107 188

氣體分子論(氣體動力論) 188.——Avogadro 氏定律 190.——分子量與原子量. 克分子與克原子 191.——氣體之壓力 193.——Boyle-Mariotte 二氏定律 198.——自由路程及碰撞頻率 199.——氣體之壓縮係

數. 等溫容積變遷 201. — 理想氣體與真正氣體
 202. — 重力作用下之氣體 203. — 大氣壓力 204.
 — 空氣壓力之作用 206. — 氣體壓力之測量
 209. — 抽氣機 211. — 氣體之浮力 214.

第十一章 流動液體與流動氣體之 力學 § 108—116 219

流動液體與流動氣體概論 219. — Bernouilli 氏方
 程式 220. — Bernouilli 氏方程式之應用 222. —
 分界面. 渦旋 227. — 翼板 228. — 粘滯流體. 內
 摩擦 229. — 管中之液流 231. — 液體射線與氣
 體射線 233. — Stokes 氏落體定律 234.

第四編 振動與波動 237

第十二章 機械振動與機械波動

§ 117—137 237

振動之意義 237. — 振動方程式. 阻尼振動 240.
 — 絃線振動 242. — 氣柱振動 243. — 強迫振
 動. 共振 244. — 擾動之傳播 245. — 週期波 246.
 — 波長 248. — 縱波與橫波. 偏極 249. — 干

涉 251. — 駐波 253. — 振拍 254. — Doppler 氏
 效應 255. — 波動中能量之傳遞, 距離定律 257.
 — 兩媒質分界面上之現象 258. — 反射 258.
 — 折射 259. — Fermat 氏原理 261. — 波之吸
 收 262. — Huygens 氏原理 262. — 繞射 263.

第十三章 聲學 § 138—153 265

聲之本性及其傳播 265. — 噪聲, 複音, 純音 266.
 — 音調, 頻率, 波長 266. — 聲之反射 267. —
 聲之干涉 268. — 聲之駐波 269. — 拍音, 合音 270.
 — 共鳴, 調諧之空氣柱 271. — 聲之 Doppler 氏
 效應 273. — 音階 273. — 諧和與不諧和 276. —
 絲弦樂器 276. — 樂管, 風琴 277. — 吹奏樂器及
 其他樂器 278. — 耳, 喉頭 279. — 語言及母音
 281.

第五編 熱學(熱力學) 283

第十四章 溫度及熱之本性 § 154—159 .. 283

溫度 283. — 溫標, 絕對溫度 284. — 熱之動力
 論 285. — Maxwell 氏定律 289. — 擴散 291. —
 Brown 氏運動, 起落現象 294.

第十五章 溫度,壓力與體積. 物態方程式 § 160—167299

固體與液體之受熱而膨脹 299. — 水之反常 302.
— 理想氣體之物態方程式. Boyle-Mariotte-Gay
Lussac 三氏定律 303. — 理想氣體之膨脹係數及
壓力係數 305. — Van der Waals 氏物態方程式
307. — 物態變遷之種種特例 308. — 液體溫度
計 308. — 氣體溫度計及其他之溫度測量法 310.

第十六章 比熱 § 168—173312

熱量. 卡 312. — 熱容量與比熱 312. — 原子熱.
Dulong-Petit 二氏定律 314. — 氣體之比熱 314.
— 氣體之絕熱變 318. — 比熱之測定 321.

第十七章 物態之變化 § 174—185324

物態變化之種類 324. — 融解熱 327. — 融解時
體積之變遷 329. — 融點與壓力之關係 330. —
汽化 331. — 汽化熱 333. — 飽和汽. 汽壓 334.
— 沸騰. 沸點與壓力之關係. 蒸餾 337. — 汽密
度 339. — 昇華 341. — 氣體之液化 342. — 空氣,
氫及氦之液化. 極低溫度 346.

第十八章 二元系 § 186—191 349

溶液 349. — 膠體溶液 350. — Raoult 氏定律. 溶液之沸點與凍點 350. — 滲透 352. — 凝膠體. 冷劑 354. — 吸收 355.

第十九章 熱學主要三定理. 熱與工

§ 192—203 358

熱學第一主要定理 358. — 熱之工當量 359. — 機械工作之化爲熱能. 摩擦 360. — 熱學第二主要定理. 熵 363. — 可逆及不可逆過程 368. — 溫度之調勻 369. — 熱之傳導 370. — 熱學第三主要定理 (Nernst 氏熱學理論) 374. — Carnot 氏循環過程 374. — 熱能之化爲機械工作 378. — 熱力機械 379. — 熱源. 熱化學 382.

第二十章 大氣物理學 § 204—208 385

大氣之普遍特性 385. — 空氣之溫度 387. — 空氣中之溼度. 凝結現象 389. — 空氣之運動 392. — 氣候 395.

第六編 電磁學 401

第二十一章 靜電學 § 209—241401

靜電之基本實驗。陽電與陰電 401.——電量與電荷 402.——Coulomb 氏定律。電荷單位 403.——電量不減定理 406.——電之本性及物質之電的性質 407.——電荷中心。電偶 409.——良導體與不良導體。非導體 410.——金屬體中電荷之流動 411.——用驗電器之幾種實驗 412.——電場。電場強度 414.——電壓 416.——電位 418.——電力線 420.——等位面 422.——點電荷及電偶之電場 422.——導體中之電場強度及電位 424.——導體之電荷在其表面上之位置 426.——尖端作用 428.——靜電感應 428.——電場對於極偶及不荷電導體之力的作用 431.——電容 434.——容電器 437.——靜電計作為電壓計 439.——關於導片容電器之幾種實驗 443.——容電器荷電後之能量。容電器導片之吸引。電場能量密度 444.——介電體。介電極化 446.——電的位移 451.——普遍之 Coulomb 氏定律 451.——電場對於介電質之力的作用 452.——壓電及焦熱電。電伸縮 452.——起電盤。靜電感應起電機 453.——實用單位制中之靜電學最要公式 457.——靜電單位制中各量之因次 459.

第二十二章 固態導體中之電流

§ 242—263461

電流源, 電動勢 461. — 電流經過導體中電壓之遞變 462. — 電流 463. — 金屬之導電 467. — Ohm 氏定律, 電阻 469. — 金屬中電荷流動之速度 472. — Wiedemann-Franz 二氏定律 472. — Kirchhoff 氏定理 473. — 導體中之串聯及並聯, 電壓分段法 475. — 變阻器 477. — 電阻之測量 480. — 電橋測量電容法 484. — Johnson-Rahbek 二氏效應 484. — 電阻之溫度係數, 超導性 485. — 固體中之電解傳導 488. — 導體之特性曲線 489. — 電流源之內電阻, 電流源之串聯與並聯 490. — 支路導體系中電流強度之計算 493. — 電流工作, 電流工率 495. — 電流熱之應用 497. — 接觸電壓, 摩擦電 499. — 熱電現象 501.

第二十三章 液態導體中之電流

§ 264—280503

純粹液體之導電性 503. — 水溶液之導電性, 電解 503. — 電極上析出之物質 504. — 電解分離 505. — 電解液導電之機械作用 507. — Faraday

氏定律 508. — 電極上之副作用 511. — 非水溶液及融解物質中之電解傳導 513. — 電解之工業應用 514. — 電解液之電阻 515. — 金屬與電解液之接觸 516. — 電解極化 517. — 電池 519. — 蓄電池 521. — 電能量及化學能量 524. — 局部電流 525. — 動電現象 526.

第二十四章 氣體中之電流 § 281—295…528

氣體導電之本性 528. — 氣體導電之基本形式 528. — 被激放電 529. — 熾熱電子，熱游子 532. — 溫度游離 533. — 導電性氣體柱之電阻與其特性曲線 533. — 自激放電，通論 536. — 無聲放電或尖端放電 537. — 電花放電 538. — 輝光放電 539. — 陰極射線 542. — 輝光放電中之陽射線 544. — 電弧 544. — 電暈 546. — 大氣電 546.

第二十五章 真空中之磁場 § 296—335…549

磁體 549. — 世無真正獨立之磁性，磁偶 550. — 關於磁極之 Coulomb 氏定律 551. — 磁場強度，力線 552. — 磁場對於磁偶之力的作用 554. — 地球磁性 555. — 直線電流之磁場 558. — 電流流過導線環及螺線管時之磁場 560. — Laplace

氏定律 564. — 磁場中有電流流過之導線所受力之作用 566. — 磁場對於運動電荷之力的作用 569. — 陰極射線之磁偏轉與電偏轉 570. — 電場對於運動磁極之力的作用 575. — 磁場對於電流之力的作用 576. — 導線環電流之磁矩 577. — Rowland, Röntgen 及 Eichenwald 諸氏之實驗 578. — 電流與電流間之力的作用 580. — 電磁單位制 582. — 絕對單位與國際單位 584. — 光速在電學中之測量 586. — 磁壓, 磁位 586. — 電磁感應 589. — Faraday 氏感應定律 591. — 常定均勻磁場內運動導線及導線組運動部份中之感應 593. — 單極感應 595. — 運動導線在歷久不變之非均勻磁場中之感應 596. — 靜止導線在隨時變化之磁場中之感應 597. — 斷路中之感應 598. — 感應現象之一瞥 599. — 電磁場 600. — 位移電流 601. — 電磁擾動之傳播 604. — 旋渦電場中電位之多義性 604. — Lenz 氏定律 605. — 用感應線圈以測量磁場 606. — 磁壓之測量 608. — 互感應 609. — 自感應 610. — 渦電流 613. — 表皮作用 614.

第二十六章 物質之磁性 § 336—362 …616

順磁性,反磁性及鐵磁性 616.——靜磁感應強度,導磁係數及磁化係數 617.——順磁性及反磁性之學說 619.——靜磁感應強度 B 爲磁性物質內真正之磁場 621.——磁化強度 622.——質量磁化係數,分子磁化係數 623.——鐵磁性 624.——磁滯,飽和 625.——頑磁性,矯頑力 627.——消磁 629.——磁化物體周圍之磁場 630.——磁力線之折射 631.——地磁場中之磁化作用 632.——磁力線恆自行閉合 633.——磁通,磁阻 634.——鐵磁性之學說 635.——Barkhausen 氏效應, Einstein 與 de Haas 二氏之實驗 638.——Curie 氏點 639.——螺線管中之鐵心,電磁體 640.——磁場對於順磁性,反磁性及鐵磁性三種物體之力的作用 641.——物質性媒質中關於磁極之 Coulomb 氏定律 644.——物質性媒質中之感應定律 645.——磁場及電磁場之能量 646.——Maxwell 氏方程式 648.——熱流磁性及電流磁性現象 651.——C.G.S. 制中磁學諸量之因次 652.——實用單位制中之磁學諸量 653.

第二十七章 電磁測量計,儀器及電機 § 363—374657

正切電流計 657.——磁轉電流計 658.——直流用

圈轉儀器 660. — 電流計之阻尼 662. — 軟鐵儀器 664. — 電流計與電壓計概論 665. — 交流用圈轉儀器. 工率計 667. — 電磁替續器 668. — 電報與電話 668. — 電花感應圈 671. — 發電機 675. — 電動機 679.

第二十八章 交流電流, 電振動及電波 § 375—395.....682

交流電流 682. — 交流電阻 684. — 交流電阻之串聯與並聯 687. — 電之共振 690. — 交流工率, 電流及電壓之有效值 691. — 以電橋測量自感係數及電容之法 693. — 多相交流 695. — 變壓器 697. — 振動電路中之電振動 700. — Tesla 氏振動 703. — 電波 705. — 斷路及通路之振動電路 708. — 電波之接收 709. — Heinrich Hertz 氏之實驗 710. — 二導線間電之駐波 711. — 無線電報 713. — 機械發送器, Poulsen 氏振動 713. — 無線電話之原理 715. — 用品體檢波器之接收 717. — 用真空管之接收 718. — 用真空管以產生振動 723.

第七編 光學及廣義輻射學.....727

第二十九章 幾何光學 § 396—434727

輻射學之內容, 光源 727.——光線 728.——直線傳播 729.——光之速度 732.——光通量,光源強度,照度,表面亮度 738.——距離定律 739.——光度學 741.——幾何光學 744.——鏡像概論 745.——漫射與單向反射, 反射定律 747.——平面反射鏡所生之像 749.——凹鏡 751.——凸鏡 758.——折射定律, 光程 760.——曲光, 皺光 763.——全反射 764.——稜鏡 767.——球形透鏡 769.——透鏡中之折射 770.——會聚透鏡 773.——發散透鏡 776.——透鏡公式之討論 777.——厚透鏡 779.——透鏡之缺點 780.——透鏡組 781.——映畫器, 照相機 782.——關於放大鏡,顯微鏡,望遠鏡放大率之概論 784.——放大鏡 785.——物鏡與目鏡所成之透鏡組 786.——望遠鏡 788.——顯微鏡 791.——光闌,叉絲,目鏡測微計 793.——眼 794.——眼之缺點, 眼鏡 796.——色覺, 明暗中之視覺 798.——視覺之空間性 799.——色散 800.——分光計 803.——虹霓 805.

第三十章 光之波動說, 波動光學

§ 435—464807

光性理論之歷史 807.——光之頻率與波長. 光譜色之本性 809.——光之干涉 810.——Fresnel 氏干涉實驗 812.——平行平板內之 Fraunhofer 氏式干涉 815.——平行平板上干涉光線強度之關係 823.——平行平板內之 Fresnel 氏式干涉 826.——尖劈形薄層物質內之干涉現象. Newton 氏干涉圈 828.——干涉儀 830.——光學中之 Huygens 氏原理. 光之繞射 832.——Fresnel 氏式繞射現象 833.——Fraunhofer 氏式繞射現象 835.——光柵中之繞射 837.——微粒物質上之繞射與散射 841.——光像之波動說. 顯微鏡中之繞射. 超度顯微鏡 842.——光之駐波 846.——光之 Doppler 氏效應 846.——由反射而生之偏極 847.——橢圓,正圓及直線三種偏極光線 849.——雙折射 851.——雙折射現象之說明 852.——Fresnel 氏雙折射作圖法 855.——Nicol 氏稜晶 856.——Nicol 氏稜晶正交時所見之彩色 857.——液態晶體. 電場中之雙折射 858.——偏極面之轉移 858.——光之電磁說 861.——磁光學. Zeeman 氏效應 861.——電光學. Stark 氏效應 865.——輻射壓力 866.

第三十一章 全光譜 § 465—479……………867

全光譜概要 867. — 全光譜中之色散, 吸收及反射諸現象 869. — 輻射測量儀器 872. — 光譜中之紅外區域 874. — 光譜中之紫外區域 878. — Röntgen 氏射線 879. — Röntgen 氏射線之波動性 882. — Röntgen 氏射線光譜學, 晶體結構分析 885. — γ 射線與宇宙射線 889. — 電波之光學 890. — 發射光譜與吸收光譜 890. — 光譜分析 892. — 純光譜色與混合色 893. — Young-Helmholtz 二氏之三色說 895. — 體色 896.

第三十二章 溫度輻射與冷光現象

象 § 480—487 898

溫度輻射 898. — Kirchhoff 氏定律, 黑體 898. — 光譜線之自行轉變 901. — Planck 氏黑體輻射定律 902. — Wien 氏位移定律, Stefan-Boltzmann 二氏定律 906. — 利用輻射之溫度測量 907. — 發光效率 908. — 冷光現象 909.

第八編 量子論與物質論 913

第三十三章 量子論, 原子與分子

之構造 § 488—516 913

Planck 氏定律與量子論 913. — 光電效應 915. — 光子之動量與質量 918. — Compton 氏效應 921. — 電子與電量子 924. — 原子構造 925. — 量子論對於原子構造之應用. Bohr 氏理論 928. — 氫原子 931. — 氫光譜 932. — 氫之連續光譜 937. — 類似氫光譜 938. — 光譜線系概論 939. — 原子之激發與游離 944. — 元素之週期系 948. — 原子價之物理意義, 分子構造 952. — 線狀光譜與週期系 955. — Röntgen 氏光譜 957. — 轉動振動光譜 961. — 帶狀光譜 963. — 帶狀光譜與化學 965. — 螢光 968. — Raman 氏效應 969. — 光之化學作用 (光化學) 971. — 比熱之量子論 972. — 磁子 976. — 方向之量子性 976. — 波動力學 978. — Pauli 氏原理及 Fermi-Bose 二氏統計 983. — 金屬之新電子論 986.

第三十四章 原子核 § 517—524988

真原子量. 同位元素 988. — Prout 氏假說. 原子核構造 992. — 放射現象. α, β, γ 三種射線 993. — 放射元素族 994. — Wilson 氏之凝霧法 997. — 放射元素之位移定理 999. — α 射線之計數 1000. — 原子之人工分裂法 1001.

第三十五章 物質之構造 § 525—528…1004

概論 1004. — 氣體 1004. — 液體. 非晶體 1005.
— 晶體 1006.

第九編 相對論 ……………1011

第三十六章 狹義相對論 § 529—539 …1012

力學之相對原理 1012. — Galilei 氏變換式 1015.
— Michelson 氏實驗 1016. — 狹義相對論之基礎
1021. — Lorentz 氏變換式 1022. — 時間之相對性
1024. — 長度之相對性 1027. — 速度相加定理
1028. — 質量與速度 1030. — 能量之慣性與質量
1031. — 物質之化成輻射 1033.

第三十七章 廣義相對論 § 540—544…1035

等價原理 1035. — 光之偏轉 1037. — Einstein 氏
之萬有引力定律. 水星近日點之移動 1039. —
光譜線之紅向移動 1040. — 相對論與幾何學
1041.

表

最重要物理常數首頁前。——能量換算表首頁前。
 ——關於地球日球與月球之常數首頁前。——力學
 諸量之因次及單位 97。——比重 104。——長變係數
 162。—— 0°C .時各高度處之氣壓 205。——固體與液體
 之線脹係數 299。——水之密度 302。——氣體之壓力
 係數 306。——比熱 313。——數種氣體之比熱 317。——
 融點與沸點 326。——融解熱 328。——汽化熱 334。
 ——水(或冰)之汽壓 335。——水銀之汽壓 335。——
 氨之汽壓 335。——水之沸點與壓力之關係 337。
 ——碘之汽壓 341。——臨界值 346。——氣體之吸
 收 356。——數種物質之導熱係數 373。——介電係
 數 449。——靜電及實用單位 457。——靜電單位制
 中之因次 460。——電阻係數 471。——飛躍溫度
 488。——電化當量 510。——電磁單位制中之因次
 583。——電磁單位與實用單位 584。——磁化係
 數 617。——鐵之導磁係數 627。——磁學諸量之因
 次 653。——折射率 761。——全光譜 868。——最重
 要之剩餘射線 877。——游離電壓 948。——元素之
 週期系 950。——由光譜法及熱量法測定之分離
 工作 967。

習題	1071
人名索引.....	1135
節目索引(德華).....	1141
節目索引(華德英)(四角號碼).....	1157

A. 最重要物理常數

萬有引力常數 G	$6,65 \cdot 10^{-8}$ [達因] · [釐米] ² [克] ⁻¹
45° 緯度之重力加速度 g	980,665 [釐米] · [秒] ⁻²
1 [大氣壓]	$1,01325 \cdot 10^6$ [達因] · [釐米] ⁻²
0°C. 時水銀之比重	13,5955 [克] · [釐米] ⁻³
溫度之絕對零度	-273,2°C.
理想氣體之克分子容積	22400 [釐米] ³ · [克分子] ⁻¹
普適氣體常數 R	$1,9858$ [卡] · [度] ⁻¹ [克分子] ⁻¹ $= 8,3131 \cdot 10^7$ [爾格] · [度] ⁻¹ [克分子] ⁻¹
熱之工當量	$4,1863 \cdot 10^7$ [爾格] = 1 [卡]
銀之電化當量	$1,11800 \cdot 10^{-3}$ [克] · [庫侖] ⁻¹
Faraday 氏常數	$0,96494 \cdot 10^5$ [庫侖] · [克分子] ⁻¹
氧之原子量	16,000
氫之原子量	1,0078
Loschmidt 氏常數	$6,060 \cdot 10^{23}$ [克分子] ⁻¹
Avogadro 氏常數	$2,706 \cdot 10^{19}$ [釐米] ⁻³
Boltzmann 氏常數 k	$1,372 \cdot 10^{-16}$ [爾格] · [度] ⁻¹
電量子	$4,769 \cdot 10^{-10}$ [靜電單位] $1,591 \cdot 10^{-19}$ [庫侖]
電子之荷質比	$1,760 \cdot 10^8$ [庫侖] · [克] ⁻¹
電子之原質量	$0,9003 \cdot 10^{-27}$ [克]
氫原子(質子)之質量	$1,662 \cdot 10^{-24}$ [克]
原子量為 α 之原子之質量	$\alpha \cdot 1,649 \cdot 10^{-24}$ [克]

真空中之光速	$2,9979_6 \cdot 10^{10}$ [釐米][秒] $^{-1}$
Rydberg 氏常數	$109737,1$ [釐米] $^{-1}$
Stefan-Boltzmann 氏常數 σ	$5,77_3 \cdot 10^{-12}$ [瓦特]·[釐米] $^{-2}$ ·[度] $^{-4}$
Planck 氏作用量子 h	$6,54_4 \cdot 10^{-27}$ [爾格]·[秒]

B. 能量換算表

絕對溫度 T 度時理想氣體一個分子之

能量 $3kT/2$ $2,05_8 \cdot 10^{-16} T$ [爾格]

電子受 U [伏特]電壓之作用而加速後之

能量..... $1,59_1 \cdot 10^{-12} U$ [爾格]

電子受 U [伏特]電壓之作用而加速後之

速度..... $5,93_5 \cdot 10^7 \sqrt{U}$ [釐米]·[秒] $^{-1}$

光子頻率為 ν 時之能量..... $6,54_4 \cdot 10^{-27} \cdot \nu$ [爾格]

光子波數為 N 時之能量..... $1,96_2 \cdot 10^{-16} \cdot N$ [爾格]

光子波長為 λ 時之能量..... $1,96_2 \cdot 10^{-16} \cdot \lambda^{-1}$ [爾格]

氫原子(質子)之能量 mc^2 $1,49_4 \cdot 10^{-3}$ [爾格]

電子之能量 mc^2 $0,809_3 \cdot 10^{-6}$ [爾格]

光子頻率為 ν 時之質量..... $0,728_0 \cdot 10^{-47} \cdot \nu$ [克]

光子波數為 N 時之質量..... $2,18_3 \cdot 10^{-37} N$ [克]

光子波長為 λ 時之質量..... $2,18_3 \cdot 10^{-37} \cdot \lambda^{-1}$ [克]

C. 關於地球日球與月球之常數

地球半徑之平均值..... 6370 [仟米]= $6,370 \cdot 10^8$ [釐米]

地球之質量	$5,97 \cdot 10^{27}$ [克]
地球之平均密度	$5,52$ [克]·[釐米] ⁻³
恆星日	23 [小時] 56 [分] $4,1$ [秒] = 86164 [秒]
地球沿其軌道上之速度	$2,98 \cdot 10^8$ [釐米]·[秒] ⁻¹
地球自轉時赤道上一點之速度	$4,65 \cdot 10^4$ [釐米][秒] ⁻¹
月球之半徑	1735 [仟米]
月球之質量	$7,4 \cdot 10^{25}$ [克] = $1/81$ 地球質量
地球與月球間之距離	384400 [仟米] = $60,27$ 地球半徑
日球之半徑	696000 [仟米]
日球之質量	$1,97 \cdot 10^{33}$ [克]
地球與日球間之距離	$1,495 \cdot 10^8$ [仟米]

高等物理學

第一編 通論

第一章 物理學之內容及方法

1. 物理學在自然科學中之地位。物理學爲研究自然界 ($\phi\acute{\upsilon}\sigma\iota\varsigma$) 之學，故爲十分普遍之自然學，亦即自然科學。一切知識之以自然科學稱者，事實上莫不屬於物理學研究之範圍，即生物界之現象亦包括在內。惟近日每將自然科學類分爲若干支，如狹義物理學即屬其中之一支；其所以分類之理由係屬外表的。此種見地最初係由歷史而來。各類科學發達之時期先後大有不同。例如天文學與地理學起源於上古時代。狹義物理學之發展則僅去今不久。除上古時代一二零星之知識不計外，直至 Galilei 氏 (1564—1642) 之時，物理學方始誕生；迄十八世紀末葉，化學已完成其發展過程中重要之階段，而物理學猶在極樸之中。各支之自然科學固不可互相分離，但因其發展之遲速大有不同，故彼此之關係一時竟湮沒無聞，其後歷久而始漸顯著。今日自然科學之分類依舊未廢，其首要之原因蓋僅爲實用計。夫欲

以一人之精力而求貫通全部之自然科學，在今日實屬必不可，此其所以分類之第一種原因也。Alexander V. Humboldt 氏 (1769—1859) 洵爲欲將當時自然科學知識之大部份融會爲一，最後努力之一人。自然科學所以分類之第二種原因係由於各類科學工作方法之不同，其實蓋係工作方法之分類耳。且研究之對象遠不若所用方法之重要，今日各類之自然科學事實上卽以其所用之方法爲其標識。物理學最近之發展卽爲其足資表率之一例。二十年以前，分子與原子特性之研究屬於化學之範圍，但今已成爲近代物理學中最重要問題之一，因其研究純用物理方法也。

就研究之方法言之，自然科學可分爲二大類。最初所用之方法乃以觀察自然界中自然進行而絲毫未加人工之現象爲基礎。今日一部份之自然科學尙以此是務，例如天文學與氣象學是。其研究室爲觀象臺。其後歷若干時間而人類方始用人工設置種種現象以爲研究之對象，觀察其經過之情形，以探求其變化之規律。至此，人類發明實驗，而實驗室以興。實驗自然科學主要之代表當推狹義物理學與化學。但其意並非謂其他之自然科學皆不需實驗也，例如生理學中，實驗亦漸趨重要。他一方面物理學亦可用觀察的科學之結果以爲其改善進步之用，或將其所以然之故闡明之。自 Newton 氏以物理學家之目光，由地球仰矚星體後，天文學上之觀察遂亦成爲物理學上最重要之基礎材料矣。

整個自然科學與狹義物理學之關係既若此密切，且物理學之範圍統括一切自然科學，既亦無可置辯，故習物理學者須在某程度內具有普遍自然科學之概念。彼須時時準備將一相鄰科學中所得之結果認清其在物理學上之意義，或應用物理學之方法，以解決前此在狹義物理學中未知之問題。今日治物理學者，雖常被迫向範圍極狹之一方作專門之研究，但此種準備仍不可忽略，蓋惟獲得普遍自然科學之知識，始能對此強迫作有效的補救也。

設置實驗而記載其經過，物理學之問題猶未滿足也。實驗之用係在藉以明瞭諸自然現象彼此間之關係。於是理論物理學興，其唯一之任務乃在利用數學之方法以研究此種之關係。但其問題不僅在闡明及綜合實驗之結果而已，且須根據已知之定理預言未知之事實。此種事實之確否復須藉新實驗以證明之，於是理論物理學及純粹實驗物理學二者之間遂有不可缺少之交互作用成立矣。

物理研究之根源純在求真知，其動機完全為理想的。物理知識對於人類物質上之裨益，約在一世紀以前方漸顯著。應用物理研究之結果，即成工業。而由工業上不斷發見之新問題，益促物理學之突飛猛進。

2. 因果說 一種之知識必須不囿於空間的與時間偶然之單獨現象者，方有科學上之意義與價值，換言之，其結論必須無分古今遠近者。吾人苟能確實證明因與果二者之

間到處恆有一定不易之關係存在，即在任何情形中，同因者必得同果，則基於此種知識而成立之自然科學方可保證其鞏固。伸說此事之定律稱為因果律。此項無可疑惑絕對合理之定律，不僅自然科學之全部建築，即人羣有秩序之生活，亦皆以此為基礎。事實上在吾人日常之生活中及自然現象廣大之範圍內，此因果律確屬嚴格合理。吾人若知在某一定時間時作用於某一自然現象之原因之一切詳情，則此自然現象以後應經歷之狀況亦得逐一由此斷定，即吾人所謂定運者是也（此則須視表示一自然定律是否能用微分方程式為斷）。

吾人今日已確知此嚴格的定運論實有一限度，例如關於物質基本組織之某種現象即不遵守是律（§514）。其實此類現象亦不能超出科學研究及科學知識之外。但其精密之理論則已越出本書之範圍，故以後吾人仍恆視因果律為合理，而以一切自然現象嚴格歸之於前定之命運。

3. 實驗。純粹物理學之知識由直接觀察自然界中不加入工而自行顯示之現象者絕少，已知前邊。惟自然之現象大抵複雜萬分，往往有數種不同之原因，不能作個別之控制，而必同時出現者，故雖簡單之規律，亦難以明白顯示於外。若行實驗，則可設法布置種種之條件，使某一已知原因（其詳情已儘量確知者）之作用，得以儘量昭然出現，以便吾人單獨之觀察。故常有稱實驗為『對於自然界之問題』者，

從此類之答案吾人便能了解其規律。

4. 物理學定律。通常舉行實驗，多在測定一量之值，其最簡單者如長度，時間，溫度，重量等。然僅行一次實驗，每不足以求出其定律。欲達此目的，恆須經過多次各別之觀測，且須適當的變換實驗之條件。例如物體自由下落時，其下落之路程與下落之時間相關之定律，決不能由一次觀測而得，不特須觀測多次，尤須取若干不同之落程行之。此時所得之結果，每為一組二個或二個以上彼此相關之相應數，在上例中，即為落程及其相應之下落時間。由此一羣數字中，苟能求出相應各數間之數學關係，對於實驗之全部均為合理者，則此項關係，即為物理定律。就自由下落之物體論之，其落程 S 恆與其下落時間 t 之平方成正比，故以數學公式表之，當為 $S=at^2$ ，其中 a 為一常數，其意義可由他方面之理論或實驗以推出之，而其數值則可由實驗所得之諸數中計算而得。由此可知凡物理學之定律，恆可以數學方程式概括之。若僅謂某一現象，在某種條件之下，即應出現，或不應出現，則辭極浮泛，鮮有能稱為定律者（欲陳述一物理定律，按通常之習慣，在可能範圍內或以方程式表之，蓋其精確簡明，莫與倫比焉）。

凡經精確實驗測定之物理定律，根本上決不能推翻。有時每因增進測量儀器之精確度，或推廣觀測之範圍至另一數量級之區域，以致所得之結果前後不無出入，但既成之

定律，往往仍可視為在其昔日觀測範圍內之一種近似定律，完美之新定律恆必將前者包括而作為其一特例。故在此種情形中，吾人恆將既成之定律加以擴充，或對於其有效範圍加以限制（例如 Newton 及 Einstein 二氏之萬有引力定律，§ 542）。

按定律二字，似有頒布之者必具無上威權，足以逼使世間一切事物奉行不怠之意。其實自然定律則不然，無絲毫主觀與強迫，而確具有絕對之真實性者，故非人類之法律所可比擬。已成立之自然定律偶或發見矛盾時，吾人可斷言必非在自然界中有矛盾之現象從茲開始，實因吾人對此定律之真諦尚未周知故耳。

按吾人不斷之經驗，知往日以實驗方法，研究各種自然現象所得之許多物理定律中，大部份可以刪去，蓋此等定律僅為少數十分普遍之物理定律之特例，而可容納於其中。故宇宙之內，凡為吾人觀察所及之一切現象，皆受若干為數無多之普遍的物理定律所支配。物理學在此方面之發展，距結束尚遙，自無疑義。

假說者，乃係一種物理定律或物理事實之解釋，惟尚闕最終之證明，而在未得反證以前，其說似最屬適宜，可用以解釋與其相關之任何物理現象者。假說在科學上之價值，在能示研究者以準繩，須若何進行其實驗，方足以解決其所提出而尚未完全了解之問題。時過境遷，假說或被推翻，或竟

得定律之保障而成爲物理事實。例如不久以前物質由分子及原子組成 (§ 14) 之說，尚屬假說。今則成爲一顛撲不破之物理事實矣。

由地球上舉行之實驗所得之物理定律，其效用初非僅限於地球而已。歷來觀察太空中恆星界之任何物理現象，從未見有與地球上認爲合理之定律根本相反者。凡用地球上公認之定律觀察他星體時所見之現象，大抵均能了解其大意。其有某類現象，今日尚未能解釋盡善者，則因恆星之實際狀況，究不能重建於實驗室中，而供吾人直接之觀摩故也。

5. 物理學之分類。物理學之全部教材，大致可分爲下列之主要部份：

1. 力學。此部份所研究者，爲物體受任何作用力後運動之情形，與夫其運動或其他物理性質及狀態等之變化。至於力之來源，初不問也。力學中別有一部份爲分子力學，其最重要之應用，在於熱學。聲學亦屬力學，蓋聲者物體之一特種運動而已。

2. 廣義力學。力可區分爲 a) 重力，b) 電力 及其密切相關之磁力。光學亦屬於 b) 類。

3. 物理統計學。以或然率之定律應用於極多數單體集合演成之物理現象，其爲吾人所注意者，非爲各單體而爲其平均情形者。

4. 振動學。研究一切週期現象形式上之普遍規律。

5. 物質組織學及物性學。原子之構造，分子若何由原子組成，以及物質之若何更由原子與分子所集合，俱爲其研究之範圍。

按此劃分之部份，常不免互相交混。故欲演述整個的物理學，絕不能堅守此種界限。本書在可能範圍以內即按此法區分之。如第四，五，七至二十諸章，按上義應屬於力學，其中因便於講述而插入之第六章（重力學）以及第二十一至三十二諸章（電學，磁學及光學），可視爲廣義力學。第三十三至三十五數章，爲物質組織學。第三十六及三十七章之相對論納於力學亦可，納於廣義力學亦無不可。物理統計學主要之應用，散見於各處者不少，要以第十，十四及十九諸章爲最多。振動學之應用則在第十二，二十八及三十諸章。

第二章 度量衡及測量

6. 物理測量之本性與目的。前已述及大多數之物理知識，均由實驗所得之數值的結果而來，即來自某種數值之測量。

有多種之物理量，——例如速度，電流等，——吾人不能直接測定其值，祇可間接由其他可測之量以計算之。可以直測諸量之最重要者，當推長度。物理學上一切之測量幾皆可歸之於測量長度。例如凡藉指標在刻度尺上示出之數值，從而讀得其結果者皆屬之。指標在刻度尺上移過之距離——大概自零點算起——即可用以測量使指標移動之作用之大小。如時鐘，指標氣壓計，電學測量計等，俱屬此類。故長度測量恆視為物理學中最重要之測量。而最重要之測量方法，則有所謂消盡法（又稱零點法）者，法用一等強而反向且可測量之變作用以完全消盡一欲測之量之作用。天平即為其一例，一邊之重量使指標傾斜，但適為他邊已知之等重砝碼所抵消，而使指標仍返指零點。

各種測量之法，不外聚同類之二量而比較之。有時可直接比較，例如天平，有時祇可間接比較，如測電計等，其所用之測量儀器，須先以同類之已知量校核之。物理學上各種之量，皆須規定其單位，庶測量所得之結果方得以數值作明

顯之記載，於是其結果即爲欲測之量中所含單位之倍數，此數可爲整數，可爲分數，亦可爲無理數。但實用上後二者常以小數表之。記載時所用數字之位數，須視測量之精密度而定。測量任何物理量時，某種之誤差恆難幸免，其程度視所用之方法而異。有數種之物理量，如長度及質量等，吾人已能測至與真值相差不過百萬分之一（參閱§ 514）。

7. 長度之測量。科學上所用長度之單位爲 [厘米]。此爲一 [公尺] 亦稱一 [米] 者之百分之一，即 $1 \text{ [米]} = 100 \text{ [厘米]}$ 。公尺之長，係 1791 年萬國共同協定之者，等於地球一象限（沿地面上之經度，自一極至赤道間之距離）之千萬分之一。『公尺原器』即按當時所知此段之長度而定，尺爲鉞製，保存於法京巴黎之萬國度量衡館（Bureau International des Poids et des Mesures）中。依原器製成極精確之副原器，則散存各國（在德國則保存於物理工業館〔Physikalisch-Technischen Reichsanstalt〕中）賴以校核精確測量時所用之尺桿。¹⁾

1), 物理量之單位，恆可分爲科學上原定之定義及實用上法定之定義二種。後者自當按立法時所能達到之精密度儘量與前者相等，而事實上確由工業製出一原器，與科學上之定義相符合，例如公尺原器之長度，即與公尺原來之定義不爽分毫。嗣因測量術之進步，發見法定之單位與科學上原定之單位微有差別，但實際上不論在任何重要情形之下，萬國立法規定之單位俱不容改更，以致形成今日二種不同之單位（參閱§ 314）。

公尺爲吾人任意規定之長度單位，設因某種偶然的擾亂，以致一切之標準悉被毀滅，則勢難重行恢復，精密無誤，故爲防患未然計，此長度又另以他種之單位表出之。最精確可靠者，莫若光波之波長，因其能於隨時隨地，雖遠在他一星體之上，亦不難重行測出者也。吾人今已選定鐳之紅色光譜線爲標準，在乾燥之空氣中壓力爲760[毫米]時，其波長等於 $643,84696 \cdot 10^{-9}$ [公尺] (所謂波長標準)。

若遇某種之量遠較基本單位或爲大或爲小，則記載時必用頗大或頗小之數，殊覺不便。故吾人又引用許多輔助單位以免此弊(例如銀圓之分成角幣)。其制如下：單位名稱之前加以什字，以示基本單位之十倍。例如1[什克]，即爲10[克]。單位之千倍者加以仟字，百萬倍者，逕稱百萬(例如[百萬歐姆])。單位之1/10, 1/100, 1/1000 及 1/1000000 各分別附以分,厘,毫,微等字。至於更小之量，如單位之 10^{-9} 及 10^{-12} 無字可加者，則僅以字母 $[m\mu]$ 及 $[\mu\mu]$ 表之。一切度量衡單位之輔助單位，初非全數皆屬必需，實用者僅較爲重要之數種而已。

茲將由公尺導出常用之輔助單位列舉如下：

$$1[\text{仟米}](\text{公里}) = 10^3[\text{米}](\text{公尺}),$$

$$1[\text{分米}] = 10^{-1}[\text{米}],$$

$$1[\text{厘米}] = 10^{-2}[\text{米}],$$

$$1[\text{毫米}] = 10^{-3}[\text{米}].$$

$$1 [\text{微米}] = 1 [\mu] = 10^{-6} [\text{米}] = 10^{-8} [\text{毫米}],$$

$$1 [m\mu] = 10^{-9} [\text{米}] = 10^{-6} [\text{毫米}]$$

$$1 [\mu\mu] = 10^{-12} [\text{米}] = 10^{-9} [\text{毫米}],$$

(μ 讀作 My, $\mu\mu$ 讀作 Mymy). 在光學中, 光波波長之單位, 常用 Ångström 氏單位 (ÅE), 及 X 單位, $1 [\text{ÅE}] = 10^{-10} [\text{米}] = 1/10 [\mu\mu]$, 而 $1 [\text{X 單位}] = 10^{-11} [\text{厘米}] = 10^{-13} [\text{米}]$.

欲記載非常遙遠之距離, 如天文學中所用者, 縱以 [公里] 爲單位, 尚覺不便. 故在天空中又另設一長度之單位稱爲 [光年]. 一 [光年] 爲光波在一年中進行之路程. 光波每秒鐘內前進 300000 [公里] (參閱 § 399). 故一年內所行之路程爲

$1 [\text{光年}] = 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 300000 [\text{公里}] = 9460800000000 [\text{公里}]$, 或約爲 $9 \frac{1}{2} \cdot 10^{12} [\text{公里}]$. 今日天文學上常用之長度單位, 又有所謂 秒差距 (Sternweite, 或 parsec) 者. 此乃爲自一星體望至地球軌道之半徑僅爲 1 秒之弧度時, 該星體與地球之距離.

$1 [\text{秒差距}] = 206265 \text{ 地球軌道之半徑} = 3 \frac{1}{4} [\text{光年}]$
或約爲 $31 \cdot 10^{12} [\text{公里}]$.

若不用輔助單位, 而仍欲避去運用不便之大數或小數, 吾人亦可仍用基本單位, 惟其數值則以與 1 相近之數字乘以 10 之冪次表出之. 例如

$$1 [\text{光年}] = 0,94608 \cdot 10^{13} [\text{公里}] = 0,94608 \cdot 10^{18} [\text{厘米}];$$

$$1[n\mu] = 10^{-7}[\text{厘米}]_e$$

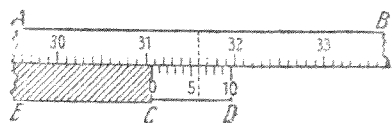
在物理學中，通常長度皆以[厘米]表之。故[厘米]為物理學之長度基本單位，尤於記載一切物理常數時，凡涉及長度者，無不用之。

從長度之單位可導出面積單位（[厘米]²，[公里]²等）及空間或容積之單位（[厘米]³，[公里]³等）。

置欲測之長度於一尺桿旁而比較之，即為實測長度最簡單之法，此種尺桿之刻度通常多用[毫米]。從欲測之物體兩端在尺桿上所截出之[毫米]或[厘米]數，即可計得其長度，有時尚可估計不及一[毫米]之小數。稍稍熟習後，用刻度至[毫米]之尺桿，僅憑肉眼，亦可精密量出0,1[毫米]之值。

欲作十分精密之長度測量，可用游標測徑器，螺旋測徑器，球徑計，Zeiss式厚度計，以及比長器等。

凡由刻線指標在[毫米]刻度尺上所示之位置以讀數時，恆可利用游標法（第1圖）以增進其精密度。副尺CD可平行沿主尺AB而游移，其零點刻線(c)即作為讀數之指標，刻度法大多取主尺上之9等份在副尺上刻成

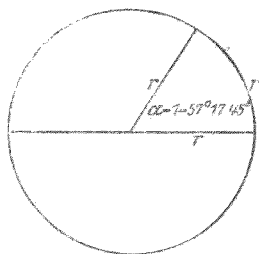


第1圖 游標

10等份。由副尺之零線先讀出所測之長介乎某二[毫米]刻線之間，如圖中所示者，乃在31,0及31,1之間。次觀察副尺上第幾刻線與主尺上任一刻線相對，即可求出此值究為

十分之幾[毫米]。例如在第1圖中,副尺上之第6刻線與主尺上之31,6刻線相對(圖中以虛線示之),即此第六刻線與實際之讀數點相距 $54/10$ [毫米]。故應得之數,當為31,6[厘米]減去 $54/10$ [毫米],或31,06[厘米]。由此可知副尺上第幾刻線——在上例中為6——與主尺上任一線相對者,該數即直接示明一[毫米]之十分之幾。通常二刻線或不能針鋒相對。若刻度精確,吾人且可按相差之程度以估計次位之小數。副尺與主尺刻度之差數,亦可小於 $1/10$ [毫米]。其測出之數值,自當更為精密。但此法亦終有極限。

8. 角度之測量。實用之角度單位為1度(1°),為一直角之九十分之一。其輔助單位為1分,即 $1' = 1/60^\circ$,及1秒,即 $1'' = 1/60'$ 。但在數學及物理學上常用所謂弧度法者,較為便利。於半徑為 r 之圓周上截取一弧,其長度適等於 r ,則其所張之中心角即為1弧度(第2圖)。其值等於 $360/2\pi$ 度,即 $57,2958^\circ = 57^\circ 17' 45''$ 。



第2圖 弧度法中角度之單位

物理學中測量角度時,多間接測量二直線之長度,而取其商,或為所測角之正弦,或餘弦,或正切。既知三角函數之值,即可從表中查得所測角之度數,或更從此計算其弧度數。

若角度不大——通常以不超過 6° 為限——則因此等小角之弧度值

與其正弦或正切之值相差頗微，故可命其彼此相等，不致有重大之錯誤 ($\psi = \sin \psi = \text{tg } \psi$)。按弧度法計之， 6° 爲 0,1047，而 $\sin 6^\circ = 0,1045$ ， $\text{tg } 6^\circ = 0,1051$ 。故角度爲 6° 時之錯誤且小於 1%。

多種之物理儀器，須具有十分精確之角度刻度，方能於儀器一部份轉動時，讀得精確之數值，而尤以光學儀器爲最（例如測量學中測角所用之經緯儀，光學中所用之分光儀，及重砲上所用之向圓等是）。在此種情形中，儀器可轉動之部份上恆有一刻線之指標，傍於一固定之刻度圓盤（或相反），盤周或僅刻度數，或兼刻分秒。指標在刻度盤上兩次所指度數之差，即爲儀器轉過之角度。按此種之角度測量法，乃係利用圓周上之刻度，即角度所張圓弧之長，故與直線長度測量法同，亦可應用游標之原理。惟此種副尺之刻度法，須特別制定，以求適合於測角之用。通常主尺之刻度爲四分之一度者，副尺上之 30 格，等於主尺上之 29 格。若此可由副尺之位置，直接精密讀出所測角之 $1/2$ 分。蓋恰如 §7 所述之副尺還示主尺刻度之十分之一者，今則可至三十分之一，即 $1/4$ 度之 $1/30$ ，即 $1/2$ 分。

自空間之一點至一面積周緣上之各點，各以直線連結之，此等直線之全體恆圍成一立體角。命 f 爲一半徑等於 r 之球面上之一部份面積，連結球心至 f 周緣上各點之全部直線圍成一立體角 ω ，其值爲

$$f = r^2 \omega \text{ [厘米]}^2, \text{ 故 } \omega = \frac{f}{r^2}.$$

因全球面之面積爲 $f = 4\pi r^2$ [厘米]², 故一『完全』立體角 (相當於完全平面角, 360° 或 2π) 應等於 4π . 按上式, 以立體角之頂點爲中心, 作一半徑 $r = 1$ [厘米] 之球, 若其在球面上所截之面積爲 1 [厘米]², 則該角爲單位立體角, 即 $\omega = 1$. 此種面積不拘任何形狀均可.

9. 時間之測量. 科學上時間之單位爲秒. 其定義爲 $60 \cdot 60 \cdot 24$ 秒 = 86400 秒, 適等於一平太陽日 (太陽每連續二次經過中天相隔之時間在一年內之平均值). 別於太陽日者, 尚有恆星日, 乃爲一恆星連續二次經過中天相隔之時間. 因地球公轉一次, 其對太陽之自轉次數, 較其對恆星之自轉次數恰少一次, 故太陽日與恆星日長短不同 (地球若恆以同一之面向太陽, 則當其公轉一次時, 對於太陽似無自轉, 但對於恆星則恰已自轉一周矣). 一恆星日等於平太陽時之 23 小時 56 分 41 秒. 欲作精密之時間測量, 常用重力發動之擺鐘.

平太陽日初非絕對不變之時間. 由天文之觀察, 知平太陽日以極慢之週期而有數秒之變遷. 又潮汐之漲落, 對於地面摩擦不絕, 地球之自轉, 亦不免因之逐漸減慢 (§ 67).

10. 純量與向量. 物理量可分爲二大類, 即純量與向量是. 純量爲某類之量, 祇須記載其數值及單位, 即可完全表

明之者，例如長度，面積，體積等。向量者，若僅記載其數值及單位，每嫌不足，而此外尚須說明其方向者。例如速度是。若僅述火車速度之快慢，而不言其前進之方向，則吾人必不能完全明瞭其運動之狀況，故尚須記載其運動之方向，例如與南北向所成之角度為若干。向量恆可以箭矢示之。箭身之長，表向量之值（長度與向量值或為相等或為正比），箭頭之向，表向量之向。

向量以肥體之字母（例如 \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{a} , \mathbf{b} ）表之，以別於純量。每一向量皆與一純量相關，即二者之數值相同者。吾人稱此種純量為其相關向量之絕對值。

二向量之相等式（向量方程式）恆有雙重之意義。例如 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ 一式，非僅謂 \mathbf{A} 與 \mathbf{B} 二向量之絕對值相等，且二者在空中之方向亦係相同。此項事實在向量方程式中恆須注意。儘有 $A=B$ 而同時並不 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ 者。

若僅遇一個向量，或數個同向或反向之向量，則祇記其純量之數值已足。反向之向量，以相反之符號別之。在此種情形中，向量之方程式可以代數法運算之。

11. 向量之合併與分解。向量之相加非僅加其數量（絕對值），且尚須顧及其方向。普通之代數加法僅可應用於純量，對於向量已失其效用。向量之合併，以圖形表示之，最為明顯。二純量之相加若亦以圖形示之，則可取二線段，其長為 A [厘米] 及 B [厘米] 者，彼此銜接而排列之，而量其長度

$A+B=R$ 即得 (第3圖 a), A 與 B 可不必同時在同一直線之上。原理上雖作任何彎曲,亦無不可。其結果,即合成線段之長度,恆為相同。



第3圖 a. 純量相加

$$A+B=R$$



第3圖 b.

$$A+B=R$$

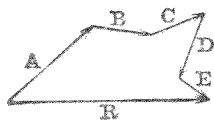


第3圖 c.

向量相加

$$R=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\gamma}$$

A 與 B 二向量相加時,可將其相應之向量箭矢 (§10) 順其方向一一銜接之,而自若此所成之曲折線之起點至其終點連以一向量箭矢 R (第3圖 b), 於是 R 即為 A 與 B 二向量之向量和或稱合成量 (合量)。此種方法可推及於不拘多寡之向量 (第4圖)。



第4圖

$$A+B+C+\dots=R$$

初不必限於同一平面之內,如第4圖然。其銜接之先後順序亦無關係。

此種之向量加法,可用下列之方程

式表示之,如代數加法然,

$$A+B+C+D+\dots=R \quad (1)$$

但此方程式決非代數式,不僅涉及向量之數值 (絕對值), 命 A, B 及 R 為第3圖 b 中 A, B 及 R 三向量之絕對值, 則 $A+B=R$ 一式自非指 $A+B=R$ 而言, 其意義須就第3圖 c 應用餘弦定律求得之,

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \gamma}, \quad (2)$$

式中 γ 爲 \mathbf{A} 與 \mathbf{B} 二向量間之交角。

若不用第 3 圖 b 之作圖法，吾人輒用平行四邊形作圖法（第 5 圖），置二向量箭矢之起點於一處，以箭身作二邊，完成一平行四邊形，再自起點作對角線。

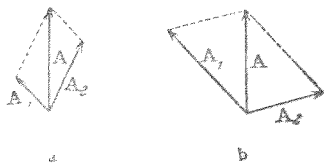
此對角線就其長度與方向言之，適等於 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 二向量之合量 \mathbf{R} 。



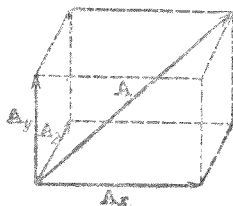
第 5 圖 平行四邊形作圖法

合向量既由 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 等諸向量以向量加法合成，故 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 等即稱爲合量 \mathbf{R} 之分向量（分量）。

一已知之向量，常又可理想的將其分解爲若干分向量，雖原向量初非眞由此等分向量所合成，不過以向量加法合成之向量和，確可視爲與原向量無異。分解向量之手續祇須將上法逆行即得。命 \mathbf{A} 爲所設向量，今欲將其分解之。先自 \mathbf{A} 之出發點，按指定之新向量方向作二直線。再自向量箭矢之尖端作此二直線之平行線（第 6 圖 a 及 b ）。若此，可得一平行四邊形，其對角線爲原向量，而通過 \mathbf{A} 向量出發點之二邊即爲原向量 \mathbf{A} 在指定二方向上之分量 \mathbf{A}_1 及 \mathbf{A}_2 。



第 6 圖 向量之分解



第 7 圖 在彼此垂直三軸上向量之分解

指定方向可大有不同,故分量之值亦隨之而異,此可由比較第6圖 a 及 b 而見之.

按此,則一向量恆可分解為二個以上之分量. 最常遇者,將一向量依直角坐標系互相垂直之三方向而分解為三個分量.

命 \mathbf{A} 為任意一向量, \mathbf{A}_x , \mathbf{A}_y , \mathbf{A}_z 為彼此垂直之三方向上之三個分量(第7圖). 於是

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z \quad (3)$$

命 A 為 \mathbf{A} 向量之絕對值, A_x , A_y , A_z 為其三個分量之絕對值,則

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (4)$$

第三章 物質

12. **物質不滅定理.** 自然界中所見之任何現象,從未有並無物質存在而能自行演出者,故現象之生恆須憑藉物質且亦須由物質以顯示之。有時見其變遷,如化學作用是,有時見其失蹤,如鹽之溶解,水之蒸發是。在一切類此之情形中,吾人咸不難證明此不過為物質外形之變遷,以致逃出吾人五官直接之察覺,其實物質之本身,初未消滅也。集自古迄今人類之經驗,知物質之組織,僅能變化至某項程度,而其本身則永不消滅。同理,物質亦不能憑空產生(今日物理學界爭辯未已之物質化成輻射線的可能說[§ 539]姑置不論)。

此處吾人首次遇及物理學上所謂不滅定理者(又稱永存定理)之一,餘容以後再論。此種不滅定理為構成全部物理學重要基礎之一。

13. **物態.** 物體可分為固體,液體,氣體三種。此三種之狀態稱為物體之三態。變更物體之形狀或其體積時,其所呈之反抗各有不同,外表上即可依此區分物態。

a) 固體對於變形及變積所起之抵抗力俱頗大,故變形頗難,壓縮性頗小。

b) 液體對於變形毫無抵抗力,即有之,亦為值頗微,而對

於變積所起之抵抗力則頗大。故液體可任意變形（可注入任何形式之容器中），壓縮性通常雖較固體稍大，但仍屬頗微。

c) 氣體對於變形及容積之擴大，不起反抗，惟壓縮時始略具抵抗力。故氣體亦如液體，可以任意變形。氣體之特性，一方面既易壓縮，而他方面復能自行擴張，故恆滿佈於其全部可達之空間。

嚴格言之，惟晶體始足稱爲固體。其餘類似固體者——例如火漆，凍瀝青，玻璃等物——若變形力歷久不除，則其特性有似液體。此類物體，終能任意使其變形（受範性），惟難易或有不同耳。其與真正固體差別最大之處，尤在其無一定之融點。精密言之，晶體與非晶體之區別尚不在其受範性。晶體苟受十分強烈之力歷久作用，雖變形頗小，亦稍示受範之性。其主要之區別，在其分子之構造。

14. 物質組織暫論。試取單純（均勻）之固體，液體，或氣體剖分之，則初時惟見其大小形狀與原來者有別，其物理性質固未有變更也。今以人羣比擬之，將一大羣之人，分爲若干團體，再由各團體分爲若干小團體。則各團體及小團體之普通情形，與原來之人羣，亦初無區別也。但若按此更行繼續剖分，終必至每一小團體中僅剩一人而止，蓋此時已達極限，無可再往下分者矣。物質之剖分亦然，終必至一極限，若欲原來物質之本性不生變化，則至此極限，即爲剖分終點，

而不能再進。此極限在人羣爲個人，在物質爲分子及原子，即吾人認爲組成物質之基礎者也。物質種類之不同，即由於分子種類之有異。凡吾人目力所及之物體中，分子已屬恆河沙數。例如 1 [立方厘米] 之空氣中約有 $27 \cdot 10^{18}$ 個分子，1 [克] 之水中約有 $3,37 \cdot 10^{22}$ 個。一個氫分子之重量僅爲 $3,3 \cdot 10^{-24}$ [克]，積 10^{24} 個氫分子而稱之，僅重 3,3 [克] (§95)。

固體中分子相擠頗密，而彼此間有互相作用之力，故各分子多寡咸固於定位。液體分子，亦相密集，惟互相作用之力，不若固體分子之強。故液體分子不拘於定位，而能彼此滑動。若在氣體，則分子移動尤易，蓋彼此間之距離遠較固體液體中者爲大，其互相作用之力尤微乎其微也。

分子與原子恆帶電荷，在許多情形中，物體之分子與原子間使其互相圍結之作用力，皆爲此等電荷間之電力(詳見第三十三章)。

第二編 剛體力學 重力

本章所討論者，假設皆爲『剛體』，即理想的固體，雖受力之作用，其形狀與體積始終無顯著之變化。

第四章 運動學

15. 質點之定義。因欲使下述之思想最趨簡明，故吾人常不涉真正物體之狀況，而僅及於極小之理想的物體，其大小直似一點者。此種理想的物體，稱爲質點。吾人可想像質點爲一十分微小之圓球。質點在空間之位置，可以其在某坐標系中之坐標單義的記載之，不若真正之物體，其各部份佔據較廣之空間，不能若此直接表出也；吾人所以欲假設一物體爲一質點者，亦即以此（日常生活中，吾人亦輒視廣大之物體爲質點，例如海洋中船舶之位置，常以地面之經緯度表之。此因船舶等物較之其相關之空間，實屬渺乎其微，雖略去其形狀大小，亦不致有重大之錯誤）。記載一點在空間之位置，通常皆用直角坐標系，其原點（即坐標軸之交點）與軸向可任意選定之，惟求對於相關之問題最爲便利者是擇。有時亦可用極坐標系。

16. 運動。凡物體位置有變化時，吾人統稱之曰運動。

對於運動之判斷，恆須視觀察者本身之運動狀況而定。靜坐於車廂內之乘客，自車上觀之，覺為靜止，但自地上觀之，則見其隨車運動。又若乘客在車廂內行動，則自車上觀之及自地上觀之，其運動又各不同。自地面以觀屋宇建築，均為靜止；但是太陽觀之，此等物體固均隨地球而運動不息。故欲敘述質點或物體之運動，必先確定觀察者之地位，即究以何組物體為靜止。在物理學中，常以地面或實驗室內之桌面為靜止，而所述之運動，即係對於此等靜止物體而言。其意蓋謂吾人記載物體各時間之位置所用之坐標系乃為固定於地面上者。

任何運動恆可以其速度表顯之。不同之速度非特快慢不同，且方向亦異，故速度為向量 (§ 10)。

17. 直線上之運動。今先述一簡單之情形，即物體(質點)沿一直線上之運動。在此例中，運動不離直線，或向此端，或向彼端，故速度之向量性可暫不問，祇求其絕對值之關係已足 (§ 10)。

物體軌道上之各點可以坐標 s 表示之。物體運動，蓋謂其位置 s 隨時間 t 而變化也，換言之，即 s 應為 t 之函數， $s = s(t)$ 。物體在其軌道上之速度 v 可以下列之微分商為其定義

$$v = \frac{ds}{dt} . \quad (1)$$

ds/dt 為正值時，速度為正，即其坐標 s 之數值隨時間而

遞增。反向之速度即爲負。坐標值遞增之方向可任意選擇，速度之符號即以此而定（一人在大道上自 A 處出發向前進行而達 B 處，吾人計算其速度時以路旁之公里碑爲標準，公里之計數自 A 處起算者，其人之速度爲正，自 B 處起算者，爲負）。

通常物體之速度在各時間不爲常定，而亦爲時間之函數，即 $v=v(t)$ 。運動之速度隨時間而變化者稱爲加速運動，就物理學術語言之，即速度之絕對值不加而反減者，亦稱加速。加速度 γ 可以下列之微分商爲其定義

$$\gamma = \frac{dv}{dt}, \text{ 或按 (1) 式, } \gamma = \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (2)$$

速度之值增加時，加速度爲正，否則爲負（吾人須注意負加速度非必爲減速。物體向軌道坐標 s 遞減之方向運動時，其速度 v 爲負，此時若 v 之絕對值增加，其加速度仍爲負）。

將 (1) 式積分之，得

$$\int_{t_1}^{t_2} v dt = \int_{s_1}^{s_2} ds = s_2 - s_1, \quad (3)$$

式中 s_1 與 s_2 示 t_1 及 t_2 二時間物體位置之坐標。故由 $\int_{t_1}^{t_2} v dt$ 之積分，即可得 $t_2 - t_1$ 時間內前進路程之長度 $s_2 - s_1$ 。計算此積分時，須先知 v 爲 t 之函數。運動之最簡單者爲以常定速度而在一直線上前進，即所謂直線定速運動者是。遇此種情形時，可自 (3) 式得

$$s_2 - s_1 = v(t_2 - t_1), \text{ 或 } v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}. \quad (4)$$

若此，則速度為路程與時間之商數，而可由測量 $t_2 - t_1$ 時間內前進之路程 $s_2 - s_1$ 以定之。

吾人選擇時間之起點時，若以物體在 s_0 之位置時為 $t=0$ ，而當時間 t 時，物體之位置在 s ，則 (4) 可寫作

$$s = s_0 + vt, \text{ 或 } v = \frac{s - s_0}{t}. \quad (5)$$

同理，以 (2) 式積分之，得

$$\int_{t_1}^{t_2} \gamma dt = \int_{v_1}^{v_2} dv = v_2 - v_1. \quad (6)$$

欲計算此項積分之值，亦須先知加速度 γ 為時間 t 之函數。此處吾人亦僅述一加速度常定之簡單情形（定加速運動）。於是 (6) 式即成

$$v_2 - v_1 = \gamma(t_2 - t_1), \text{ 或 } \gamma = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}. \quad (7)$$

故常定之加速度可由測量 $t_2 - t_1$ 時間內速度之增加值 $v_2 - v_1$ 而定之。若吾人所取時間之起點 $t=0$ 時，速度已為 v_0 ，而當時間為 t 時速度為 v ，則按 (7) 式，

$$v = v_0 + \gamma t. \quad (8)$$

試以此 v 之值代入 (3) 式，再由 $t=0$ 至 t 積分之。吾人即得定加速運動中在時間 t 時動體所已至之位置 s 為

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2 \quad (9)$$

此式中 s_0 爲物體在 $t=0$ 時之位置,故 $s-s_0=v_0t+\gamma t^2/2$ 爲 t 時間內物體所經之路程.

18. 空間內之運動. 因速度爲向量,故任何運動在各時間之狀況恆可沿一直角坐標系 xyz 之三軸分爲三個分速度. 速度之絕對值爲 v , 其三分量之絕對值爲 v_x , v_y 及 v_z . 按 (1) 式得

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (10)$$

$$\text{而} \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{(dt)^2}} = \frac{ds}{dt} \quad (11)$$

(參閱 § 17). 此處

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

爲物體軌道上無限小之一段,與直線運動之情形同.

加速度 γ 之分量爲

$$\gamma_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \gamma_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \gamma_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}, \quad (12)$$

$$\text{而} \quad \gamma = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2} \quad (13)$$

若已知 v 或 γ 之分量爲時間之函數,則 (10) 及 (12) 二式亦可積分,與 (1), (2) 二式同. 於是吾人得速度分量 v_x , v_y , v_z 以及位置之坐標 x , y , z 皆爲時間之函數,

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

消去此三式中之時間,吾人又可得 x , y , z 三變數間之

二方程式,此二式示明物體之軌道曲線(每一方程式示一空間曲面,二面之交線即為軌道曲線)。

任何運動,其加速度之三個分量 $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ 中至少有一個不為零時,方稱加速運動。故曲線之運動,雖其軌道速度常定不變,亦為加速運動。試以一簡單之情形為例,一物體在 xy 平面內以常定之轉動速度繞一圓周而運動。此處 $\gamma_z=0$, 但在 x 軸及 y 軸之方向上物體感受加速度,其量與向皆依週期而變化 (§ 20)。

吾人應注意物體在空間內作任何運動時,與(2)式相應之加速度 $\gamma = \frac{d^2s}{dt^2}$ 已不為合理。此應為

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2},$$

此自與 $\frac{d^2s}{dt^2}$ 絕不相同。物體沿其軌道上之加速度 $\frac{d^2s}{dt^2}$ 通常與此有異,其絕對值較小於 γ 。

圓周運動即為其一例,軌道速度不變 ($\frac{d^2s}{dt^2} = 0$) 時,常有一有限值之加速度 γ 。

19. 速度及加速度之向量的表示法。吾人今當討論以向量表示物體之運動。此處吾人須注意物體之軌道元(即軌道上極小之一段)亦為一向量,因其有量有向故也。速度以 \mathbf{v} 表之。於是下列之微分商即為速度之定義

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} \quad (14)$$

其中 $d\mathbf{s}$ 爲物體在 dt 時間內所經無限小之一段路程,按諸上述, $d\mathbf{s}$ 亦係向量。

設有一物體在一直角坐標系 xyz 中運動。吾人可將向量 \mathbf{v} 按坐標軸之三方向分解之 (§ 11),

$$\mathbf{v}_x = \frac{dx}{dt}, \quad \mathbf{v}_y = \frac{dy}{dt}, \quad \mathbf{v}_z = \frac{dz}{dt}, \quad (15)$$

式中 dx, dy, dz 三者爲 $d\mathbf{s}$ 之分量。按 § 11, (3) 式,應得下列之向量方程式

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z. \quad (16)$$

今試將速度 \mathbf{v} 自 $t=0$ 至 t 積分之,有如 § 17, (3) 式然。按 (14) 式得

$$\int_0^t \mathbf{v} dt = \int_{l=0}^l d\mathbf{s}. \quad (17)$$

欲明瞭此式右邊之意義,吾人須知積分者謂總計其和也,在此例中謂總計物體在 t 時間內所經諸無限小向量 $d\mathbf{s}$ 之和,而此和須按向量相加之定律以總計之 (§ 11)。故須將各路程元 $d\mathbf{s}$ 彼此銜接,如 § 11, 第 4 圖中之 A, B 諸向量然。若此所成之曲折線,即爲物體在 t 時間內所行之軌道 s 。此積分之值,即 $d\mathbf{s}$ 之和,可按 § 11 中所述之規則求之,自軌



第 8 圖 物體之位移及軌道

道起點 A 至終點 B 作一向量箭矢即得。故 $\int ds = \Delta s$ 之積分與物體所歷之路程完全不同。此為 t 時間內物體所作之位移，示量且亦示向。除直線運動外，位移之值恆較小於軌道之長 s 。加速度向量 \mathbf{g} 與(2)式相似，亦為速度 \mathbf{v} 之時間的微分商。

$$\mathbf{g} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (18)$$

\mathbf{g} 之方向時時與速度變化之方向相同，因(18)式為一向量方程式也。但 \mathbf{g} 之方向通常與 \mathbf{v} 之方向相異。

\mathbf{g} 向量亦可分成坐標軸方向上之三個分量，而寫成與(15)及(16)二式相似之式，

$$\mathbf{g}_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad \mathbf{g}_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad \mathbf{g}_z = \frac{dv_z}{dt} \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}_x + \mathbf{g}_y + \mathbf{g}_z. \quad (19)$$

將(18)式積分之，得

$$\int_0^t \mathbf{g} dt = \int_{t=0}^t d\mathbf{v}, \quad (20)$$

按(17)式之意義， $\int d\mathbf{v}$ 為積分時間 t 中一切速度變化 $d\mathbf{v}$ 之向量和。命 $\int_{t=0}^t d\mathbf{v} = \Delta\mathbf{v}$ ，則經過 t 時間後之速度為

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}, \quad (21)$$

式中 \mathbf{v}_0 為 $t=0$ 時之速度向量。 \mathbf{v}_0 與 $\Delta\mathbf{v}$ 應以向量法相加(第9圖)。通常二者不在同一之方向。

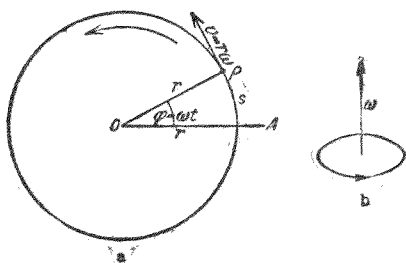
吾人須注意 v_0 與 $v_0 + \Delta v$ 之絕對值可以相等, 僅其方向不同. 定速之圓周運動即屬此例 (§ 20).



第 9 圖 速度之向量的變化

20. 角速度及角加速度. 曲線運動亦稱轉動; 吾人將於此處述一最簡單之情形, 即一質點以定速沿一半徑為 r 之圓周軌道而運動. 此時用極坐標系以記載各時間質點 P 所至之位置最為便利, 其坐標一方面以圓周軌道之半徑 r 表之, 第二方面又以各時間質點至圓心之聯線 (向徑) 與通過圓心之某一定直線 OA 所成之 φ 角 (第 10 圖 a) 表之. 因 r

為常定, 故在圓周運動中變化者僅為 φ 角. 是以質點之變位, 可單以此角度之變化描述之. 質點在圓周上之位置變遷愈速, 則 φ 角之變化亦愈速. 若 φ 角以弧度法 (§ 8) 量之, 其所張圓弧



第 10 圖 圓周運動

之長為 $s = r\varphi$. 若質點在 t 時間內經過此段之圓弧, 則其軌道上之速度應為

$$v = r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = r\omega. \quad (22)$$

吾人稱 $\omega = d\varphi/dt$ 為圓周運動之角速度, 蓋 ω 為 φ 角變化之速度, 即 φ 角在一秒鐘內增加之值也. 質點每繞一周, φ 角

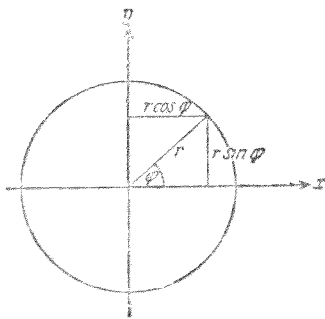
之值即增加 2π 。故二周後增加 4π , n 周後增加 $n \cdot 2\pi$ 。

若角速度並非常定,則仿 § 17 所述,角加速度 η 之定義應為一秒鐘內角速之增加值: $\eta = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2$ 。

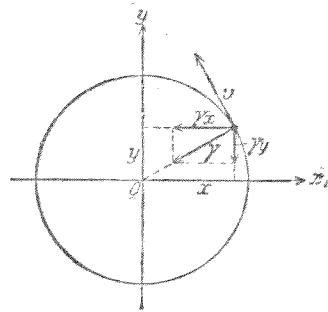
角速與角加速皆為向量,蓋軸之方向,與旋繞之順逆,均為轉動之要素也。角速亦可以箭矢表之,箭身之長正比於角速之數值,箭身之方向,垂直於運動體之軌道平面,且若設想有正螺旋(通常所用之螺旋,以及鑽孔器等皆為正螺旋)依物體之旋繞方向轉動時,螺旋之前進向即為箭頭所指之方向(第 10 圖 *b*)。此等向量相加時,亦應遵守與其他向量相同之定律。角加速度之情形亦與此相同。

吾人設想一圓周運動,其角速 ω 為常定,而以圓周軌道之中心為原點,作一直角坐標系(第 11 圖 *a*)。命 r 為圓周軌道之半徑, φ 為 r 之方向與正 x 軸之交角,則圓周軌道上一點之坐標為

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (23)$$



第 11 圖 *a* 簡諧運動之說明



第 11 圖 *b* 圓周運動之加速度

質點在此圓周上以定速而運動，命 t 爲質點越過正 x 軸後之時間，則此時與其位置相應之 φ 角爲

$$\varphi = \omega t, \quad (24)$$

而此時質點之坐標爲

$$x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t. \quad (25)$$

按(10)式，知 x 及 y 軸上之分速 v_x 及 v_y 應以(25)式對 t 微分而得

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -r\omega \sin \omega t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = r\omega \cos \omega t, \quad (26)$$

(26)式再對 t 微分一次，即得此二方向上之加速度

$$\gamma_x = -r\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x, \quad \gamma_y = -r\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y, \quad (27)$$

故與坐標 x 及 y 成正比。

因 γ_x 及 γ_y 皆爲有限值，故此項圓周運動之軌道速度雖爲常定，而仍不免爲一種加速運動 (§ 19)。其加速度之絕對值爲

$$\gamma = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} = r\omega^2 \quad (28)$$

(第11圖 b)。 加速度 γ 垂直於速度 v 。

今若單就此運動在 x 軸方向上之一部份觀之——如吾人自圓外 y 軸上一點觀察此圓周運動時所見者，——則吾人可得一種有規則之來回運動，即所謂週期運動或稱振動者是也。振動之合於(25)式所表之規律者，稱爲簡諧運動(其坐標或與正弦或與餘弦成正比，均爲合理，蓋此二函數

均依 ωt 之遞增而同樣變遷也。至於何時正弦出現,何時餘弦出現,則純視若何選擇 t 之零點而定。 r 爲 x (或 y) 所能達到之最大值。吾人稱 r 爲振幅。

第五章 剛體受力作用後之狀況

21. 作用力視為運動變化之原因。以上僅述速度之變遷，未及其所以變遷之故。在自然現象中，速度之大小與方向吾人常見其變更，但其原因輒不能直接察出（例如自由下落及斜拋）然有時亦不難直接理會之。此種之原因若即發源於吾人本身之體內，則尤易察覺，例如運用吾人之筋肉，每可干涉物體之運動，或使靜物運動，或使動物靜止，或更任意變換其運動之遲速與方向。在此一切情形之中，似有物焉，為之主宰，即吾人所稱為筋力者是也。是則利用吾人本身之力恆可使物體加速。然同一事變之直接原因必應相同，此實為一切科學知識之基礎。故自然現象中凡涉及加速者，必有相當於吾人筋力之原因在，因亦以力名之。又一切原因之足以變更運動者（例如重性）吾人恆能用筋力以抵消之（手舉重物，可以不墜）。惟等量與等量，方能彼此抵消，故吾人不得不承認如上例中重性作用之原因亦必為力。

22. 慣性定理(Newton 氏第一公理) Galilei 氏嘗謂凡物體絕不受力之作用者，其速度之量與向必始終不變。然按諸日常之經驗，地面上定速運動之物體（如火車，馬車，船舶），所以能前進不息者端賴有繼續作用之力。但此僅就物體之因摩擦（地面，鐵軌，輪軸，水，空氣）受有阻力者而言。

此種摩擦阻力於速度常定時僅能以推進力克制之。苟無摩擦阻力，則火車在水平軌道上一經推動，可無需機車之拖帶，即能繼續前進不已，其速度且永不減小。磨琢之鋼球或小冰塊在光滑冰面上摩擦阻力頗小，能滑過一頗遠之距離，而無甚減速。物體不受力時，其運動狀況歷久不變，若欲其變，恆須加力，則其中必有一原因焉，以主持之，此種之原因，吾人即以物體之慣性稱之。此為一種普遍之物性，與重性及可見性——此性並非恆有——同可作為藉以察知物體存在與否之用，最為明顯。Newton 氏即以此項物性納之於其三公理之首，三公理者，氏用以奠定力學之基者也。第一公理之言曰：

『任何物體恆固持其直線定速運動而不變，苟欲其變，恆須以一力作用於其上以強迫之。』

靜止亦可視為一種運動，其速度 $v=0$ ，故靜者恆靜之意，亦包含於其中。

Newton 氏第一公理，通常亦稱為慣性定理。此定理又可述之如下：吾人每見物體之速度變量或變向時，恆可斷言其間必有力之作用。換言之：變更速度之大小或方向之原因恆為力。

Newton 氏三公理之拉丁原文 (1687) 照錄於下：

1. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus

Impressis cogitur statum suum mutare.

2. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur (§ 23).

3. Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem, sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi (§ 29).

Newton 氏公理以此種述法爲最簡明,幸熟記之。

23. 慣性質量(Newton 氏第二公理)、質量與力之單位
Newton 氏第二公理(1632年 Galileo 氏已先言之)之言曰:

『運動之變化 (Mutatio motus) 恆正比於其作用力,而依從作用力之方向』。

此處所謂『運動之變化』究當作何解乎? 若爲同一之物體,先後受強弱不同各力之作用,則其意可作速度之變化解,而此即爲加速度,故可言加速度正比於其作用力。若爲不同之物體,則此又不然。按諸日常之經驗,各物體雖受相等之作用力,而其加速度可大不相同。蓋各物體運動狀況所遇之變化雖係相等,而其所呈之抵抗仍可各不相同,換言之,即各物體之慣性不同。此不同之情形,吾人歸之於物體內部之一種特性,稱爲物體之慣性質量,或即簡稱慣質,或稱質量。是則物體之質量云者,非指其物質本身而言,而乃用以表示其一種特性者。但由此即可量出物體中所含物質

之多寡,且亦最有把握.

物體受等力作用時,慣性愈大,即所含之質量愈多者,其加速度愈小. 故加速度 g 與作用力 k 爲正比,而與受力物體之質量 m 爲反比,即 $g=k/m$, 或 $k=mg$. 因力與質量之單位均未規定,故即將此比率書成下列之等式亦無不可.

$$k=mg, \text{ 或 } (\text{力}) = (\text{質量}) \times (\text{加速度}). \quad (1)$$

若此,則所謂運動之變化者,乃指質量與加速度之相乘積而言. 因力除強弱外尚須說明其方向,故爲一向量,而 (1) 式所示者,不僅二邊之數值相等,且 k 與 g 二向量之方向亦必相同.

若僅涉及力之絕對值者,吾人又別以 k 表之. 於是 (1) 式應寫成

$$k=m\gamma. \quad (1a)$$

Newton 氏第二公理爲第一公理之補充,而關於力之觀念,亦因此得一更確切之定義. 其言曰:力之強弱,以其作用於某指定之物體上時所生加速度之大小量之,而其方向,則與加速度之方向相同. 此公理實亦可作爲慣質之定義.

一[厘米]³之水在 4°C. 時之質量,吾人已確定其爲質量之單位(所以規定此溫度之理由,見 § 161) 此項質量稱爲 1 [克]. [克]之輔助單位如下:

$$1 [\text{厘克}] = 1/100 [\text{克}]$$

$$1 [\text{毫克}] = 1/1000 [\text{克}]$$

$$1[\text{仟克}](\text{公斤})=1000[\text{克}]$$

$$1[t](\text{公鎊})=1000[\text{仟克}]=10^6[\text{克}].$$

質量爲純量 (§ 10). 祇須記載其數量及單位已可完全決定之.

測定(比較)質量時通常非較其慣性,而較其重性,即以秤稱之. 保存於法京巴黎之『公斤原器』爲萬國公認質量單位之標準原器,依原器所製之副原器分存於各國¹⁾.

一均勻物質單位體積,即 $1[\text{厘米}]^3$ 中之質量,稱爲該物質之密度(參閱 § 56).

按(1)式,力之單位應爲一力能賦予質量 m 以一加速度 g ,適使 mg 相乘積之數值爲1者. 例如在 C.G.S. 制 (§ 24)中, m 與 g 之值均爲1,即可合此條件. 故得力之單位定義如下:

凡能使 $1[\text{克}]$ 之質量得 $-1[\text{厘米}]/[\text{秒}]^2$ 加速度之力爲力之單位.

吾人稱若此定義之單位力爲1[達因]. 其值等於1[克]之質量在(地面上)海面高度 (§ 53) 處所受重力之 $1/980$,或約等於1[毫米]之重量.

24. 科學度量衡制(C.G.S. 制)及工業度量衡制. 長度,質量及時間爲科學度量衡制中之基本量,而[厘米],[克]及[秒]

1) 見 § 7 註. 按最近之測量,知公斤原器已較其定義之值大 $0,01$ 克.

爲其基本單位。吾人稱之爲[厘米][克][秒]制或簡稱 C.G.S 制。此制以外，僅有溫度爲一另具特性之量。

工業上[厘米][克][秒]制之單位有一部份不甚合用。在工業度量衡制中，時間之單位仍用[秒]，但長度之單位則用[米]。第三種之基本量在原理上與[厘米][克][秒]制完全不同，不用質量，而用力，且以1[公斤]之質量在地面上所受之重力，即1[公斤]之重量，爲力之單位。以後 (§ 55) 吾人將見此力等於 981000 [達因]。此項單位，在工業度量衡制中稱爲1[重量公斤]，或即簡稱[公斤]。惟此與1[公斤]之質量不同，故吾人以星號加於[公斤*]之上以別之。工業制中之質量，反爲一導出之單位。(力) = (質量) · (加速度) 之關係仍爲合理，惟加速度自當以[米]/[秒]²量之。於是一物體受1[公斤*]之力後苟其加速度爲1[米]/[秒]²者，其質量在工業制中等於 1。從此吾人不難計算工業制中質量之單位應等於 9810 [克]。但此項單位不另立專名，而以(力)/(加速度)，即 [公斤*][秒]²/[米]量之。

25. 動量。按 § 19, (18) 式，可將 § 23 之(1)式寫成

$$\mathbf{k} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad (2)$$

若此則作用力 \mathbf{k} 等於 $m\mathbf{v}$ 對於時間之微分商。質量與速度之相乘積 $m\mathbf{v}$ ，稱爲質量 m 之動量或稱衝量，於是 Newton 氏第二公理又可述之如下：單位時間內動量之變化。

恆等於作用力。動量爲向量；二動量相等，非僅其數值相等，其方向亦必相同。

至此，吾人始得將 § 23 起首所設『運動之變化』究應作何解之問題作一確切之回答，蓋即指動量之變化言也。

自 (2) 式直接可得

$$m\mathbf{v} = \int_0^t \mathbf{k} \cdot dt. \quad (3)$$

故動量爲作用力之時間的積分。

僅涉及動量之絕對值時，速度 \mathbf{v} 可以其絕對值 v 代之 (§ 10)，於是動量可寫作 mv 。

26. 慣性力。D'Alembert 氏原理。 (1a) 式亦可寫作

$$\mathbf{k} + (-m\mathbf{g}) = 0 \quad (4)$$

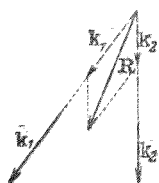
按 D'Alembert 氏之意， $-m\mathbf{g}$ 亦可視作一力，起源於加速質量 m 之慣性，以阻抗其加速度者。吾人稱此力爲慣性力或稱慣性阻力。慣性力恆與加速力反向，而絕對值相等。 (4) 式之意蓋謂物體加速運動時，其加速力與慣性力之和恆爲零 (D'Alembert 氏原理，1793)。

27. 力之合併。力之平行四邊形定理。力爲向量，故相加時須用向量合併之定律 (§ 11)。

一物體同時受數力之作用後，其運動之狀況，恆似僅受單獨之一力作用者然，此單獨力之強弱與方向應與實際上作用之諸力按向量定律合併後所得之合力相同。故此力恆可逕以合力視之。

一力之作用，遇有第二力闖入時，或疑不免稍受其影響；初視之頗似合理，但苟真若此，則前述簡單之向量加法，將不能直接應用於力矣。Newton 氏已示明羣力相加互不相擾，此即稱為羣力不擾說或獨立原理。

諸力之合力，可依 § 11 所述向量相加之法則，用作圖法求之。各力各有一着力點，着力點者吾人所設想物體受之力之點也。令表示各力之向量箭矢之尾端與其着力點相合。若諸力同時作用於物體之同一點，其合力即可逕行作出。若諸力之着力點不同，則不能直接作圖。吾人茲僅述其一種情形，即力之向量箭矢均在同一平面內者。着力點可沿作用力之方向，即其作用線上任意前後移動，毫不影響於此力之瞬間作用（例如拖車之繩，不問直接結於車首，或結於轆之中央，或其前端，拖力對於車之瞬間作用，均屬相同）。故 k_1 及 k_2 二力，着力點雖不同，但在同一平面內者，吾人可設想其同時作用於其二方向之交點（第 12 圖），即於作圖時移着力點於此交點，而按前法作出二力之合力 R 。若尚有他力亦在此同一平面內，則仍用同法，逐一與第一合力相加而求得全體作用力之合力。



第 12 圖 諸力不作用於同一點之合力

着力點沿作用線移動時，僅其瞬間作用不生變化，此處特重加聲明以免誤解。

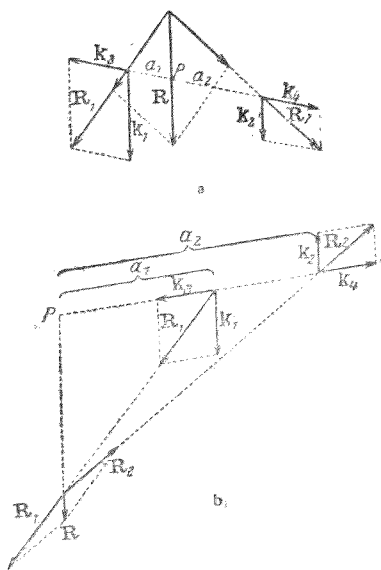
其後繼之運動經過情形，除視作用力之強弱與方向外，尚須

視慣性力之作用而定，故必與着力點之位置有關。例如一力按空間某一定之方向而作用於物體表面上之一點，則通常物體因此力與其反向之慣性力二者之作用而在空間內轉動，但其轉動時之情形，則須視外力加於物體之前面抑或後面而異。

等量反向之二力在同一直線上作用時，恆相抵消，此為一顯明而重要之特例（例如勢均力敵之二羣兒童作拔河之戲）。又如同直線上同向二力之合力恆為其代數和。

若遇二力平行，不問其同向或反向，吾人決不能移其着力點使相交於一點，故上述之平行四邊形作圖法失其效用。

但此時可藉一機巧之法以解之。以直線連結二力之着力點（第13圖a），即沿此直線上，任意添加等量反向之二新力 k_3 與 k_4 。此新添之二力必互相抵消，而不生影響。四力之作用，與原來 k_1 及 k_2 二力之作用相同。茲作 k_1 及 k_3 之合力 R_1 ，與 k_2 及 k_4 之合力 R_2 。此二合力（下述 k_1 及 k_2 等量反向之情形除外，見 § 31）通常不再平行，可以前法以求其合力



第 13 圖 平行力之合力

R ; 此即原來二力 k_1 及 k_2 之合力。

從簡單之計算,知平行而同向之二力相加後,其合力 R ——自必在原來二力之平面內——之絕對值 R 恆必等於二力之代數和,且亦與二力平行而同向,而其作用線與二力着力點連線之交點 P , 稱為二力之中心者,必介於二力着力點之間,其截分之二距離 a_1 及 a_2 , 恆反比於二力之絕對值 k_1 與 k_2 。

$$a_1 : a_2 = k_2 : k_1 \text{ 或 } a_1 k_1 = a_2 k_2. \quad (5)$$

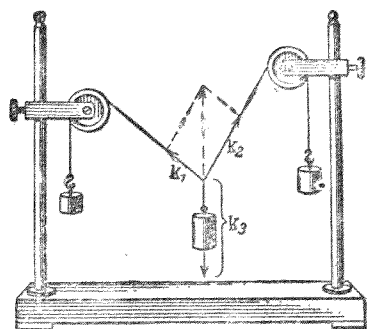
若原來之二力平行而反向(第13圖 b), 則其合力之絕對值 R , 等於二力之代數差, 仍平行於二力而與較大之一力同向。其作用線交二力着力點連線於其延長線上之 P 點, 且在較大一力着力點之一邊, 其與二着力點之距離 a_1 及 a_2 仍反比於二力(5式)。

若作用於一物體上之二力不在同一平面之內, 則吾人不能覓得其公共着力點。但遇此種情形時, 吾人恆可歸併之成一單力及一雙等量反向之平行力(即力偶, 見 § 31)。

28. 關於諸力相合之幾種實驗。 欲證明上述各節之合理, 吾人常取由物體重量而來之重力以爲作用力。其他任何之力(如彈簧力, 電力, 磁力等), 本亦俱可採用。但終不若重力之取之易, 用之捷, 且又便於測量。

裝置二固定滑輪 (§ 72) 於一架上, 以一繩繞之(第14圖), 另繫一繩於滑輪間之繩段上, 於此三繩段之自由端各懸

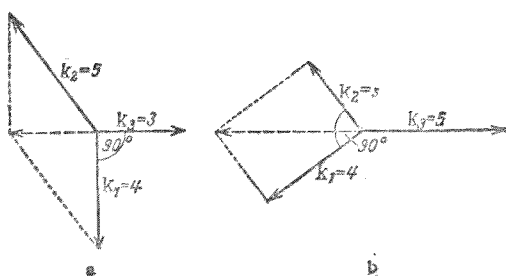
一重物,各因其重量而施 $k_1, k_2,$
 k_3 之力 繩與重物終必靜止
 於一固定不變之位置. 吾人
 可視三繩段會合處之繩結為
 質量頗小之一質點(其本身之
 重力作用可略去不計). 作用
 於此質點上者有 k_1 力,向左上
 方, k_2 力向右上方,及 k_3 力,鉛



第 14 圖 力之平行四邊形

直向下,此質點 m 若為靜止,則三力之合力必為零. 此時任
 何二力之合力,必與第三力等量而反向,且必在同一直線上.

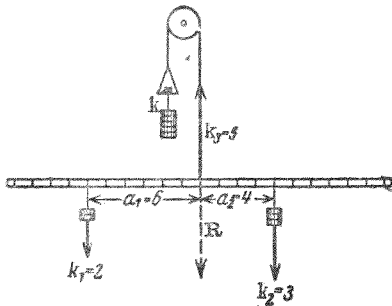
第15圖 a 及 b 示三力之比為 3:4:5 時之情形,得二種不
 同之作圖法. 在此特例中,較小之二力恆彼此成一 90° 之交
 角.



第 15 圖 力之平行四邊形

取一輕巧而不易彎曲之棒,長約 50 [厘米],於其中央繫
 之以繩,將繩繞過一固定滑輪,而於繩之他端懸一與棒等重

之砝碼以抵消棒之重量 k (第 16 圖)。另將二砝碼懸於棒



之兩端,又以一砝碼懸於繫棒之繩之他端,命三者重量之比為 $k_1:k_2:k_3$ 。棒若靜止不動,則必有下列之條件

1. $k_3 = k_1 + k_2$,
2. $a_1:a_2 = k_2:k_1$.

第 16 圖 平行力之合力

若此,即可證實 § 27 中所述

之作圖法,蓋棒之得以靜止,三力之合力必為零也。此時 k_1 及 k_2 二力之合力 R 必與鉛直向上之 k_3 力等量而反向,且必同在一直線之上。就第 16 圖觀之,吾人即見其為合理。吾人亦可視 k_2 為抵消 k_1 與 k_3 之合力之力。在第 16 圖中此合力之着力點應與 k_2 着力點相合,且鉛直向上,其絕對值等於 $k_2 (=k_3 - k_1)$ 。

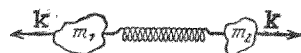
平行力之相加,更可用下述十分簡單之方法以示之。

以一薄板置於二架信秤(稱信函用之秤)之上,使二秤負重相等。另置一重物於板上。二秤所示之值,通常不再相同,與重物較近之一秤,恆示較大之值。但二秤負重之總值,減去因薄板之重量所示之值,恆等於重物之重量。各秤所示之值,恆反比於重物至各秤之距離。

29. 作用與反作用(Newton 氏第三公理)。逼力。Newton 氏之第三公理,實奠力學之基,其言曰:

『二物體間互相作用之力，恆等量而反向』。或：作用 (actio) 恆與反作用 (reactio) 數值相等而方向相反。此處吾人所注意者，作用力之方向且在互相作用之二物體之連線上。但此並非普遍之情形 (§ 305)。

今試述一簡單之例， m_1 與 m_2 二質量之間有一壓縮之彈簧，欲將二質量向二方推開 (第 17 圖)。推 m_1 質量向左之力，恆等於推 m_2 質量向右之力。此



二力方向相反，故其符號亦相反。

按 Newton 氏第二公理，二質量受等量反向二力之作用後，其加速度自視其質量之大小而異。

第 17 圖 二物體為壓縮彈簧連接時引起之作用與反作用

從未有——至少在純粹力學中——一物體以一力單方作用於第二物體，而此第二物體無一等量反向之力以反施於第一物體者。即有此種單方之力先已獨立存在，亦恆必引起一相應之反作用力。例如置一質量於一平面之上時，由其重量而施一力於平面，此力即使平面發生彈性變形，因之引起平面之反作用。懸一質量於繩之一端，繩被拉長，彈性之反作用力即於以生。此種之力，由一固有之作用力所引起，而為其反作用者，稱為逼力 k_s (絕對值 k_s)。

30. 平衡。一物體靜止或定速直線運動時，吾人決不能片面的應用慣性定理，而貿然斷定此物體未受外力之作用。吾人祇可謂物體所受之作用力，互相抵消，而其合力為零。

實則地球上一切物體，即當其在靜止之時，亦莫不受力之作用，蓋無物能脫離重力之作用者也。物體所受之諸作用力彼此適相抵消者，其狀態稱為平衡；通常尤用以名靜止之狀態。

一物體若受二力之作用，則僅當此二力等量而反向，且在同一直線上時，方能平衡。若作用於一物體之二力，不合此項條件，則欲物體平衡，至少必須另加一第三力，此新力與原來二力之合力仍須合此條件。若有諸力作用於一物體，而物體平衡，則此諸力之合力必為零。

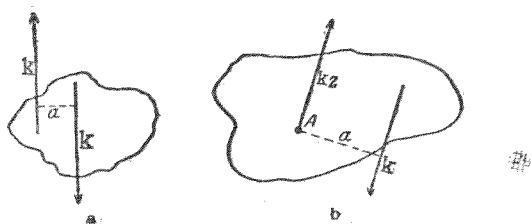
31. 力偶，力矩。 在 § 27 中曾提及一特例，而未加討論，即等量反向之二力同時作用於一物體，但二力之方向，不在同一直線上者。此等之力恆無合力。事實上此種所謂力偶者，根本上與其他一切力羣之作用完全不同。力偶不能使物體按某一定向加速前進，而僅能使之轉動，即在變更其角速度，而使之生角加速度 (§ 20)

k 力之值與其間垂直距離 a (第 18 圖 a) 二者之相乘積，稱為 k 力之力矩或靜矩。其值為

$$N = ka [\text{達因}] \cdot [\text{厘米}], \quad (6)$$

式中 k 為 k 力之值。

若一物體與一定軸 A 相固結，而在垂直於軸之一平面上，有一 k 力作用於此物體，則軸上恆因之生一逼力 k ，與 k 等量而反向 (第 18 圖 b)。故物體之能繞一定軸或一定點



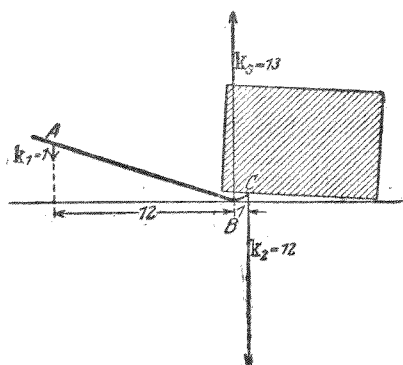
第 18 圖 a). 力偶 b). 由定軸上之逼力引起之力矩

而轉動者，每遇一單獨之力自外方作用於其上時，恆即因此引起一逼力，而與原力組成一力偶 ka ，其中之 a 為 k 力與定軸間之垂直距離。

力矩可以向量箭矢表示之，箭長與力矩之值相等或成正比，箭身垂直於組合力矩之二力之平面，而箭頭所指之向，為正螺旋依力矩之轉向轉動時之前進向（參閱 § 20 所述與此完全相似之規則），力矩之加法，亦按 § 11 以其向量箭矢相加之。

物體所受諸力矩向量和之值若為零，則物體平衡。例如二力矩同時作用於一物體時，僅二者數值相等，轉動方向相反者，物體方能平衡。

32. 槓桿。凡物體之能繞一軸或一點轉動者，皆可視作槓桿；所謂槓桿者，通常至少必有三力作用於其上，其中一力乃為作用於該軸或該點上之逼力。物體繞之轉動之軸或點，常為定軸或定點，即物體運動時，其在體內之位置不因之改變者。但此亦非為必需之條件。例如第 19 圖所示之起



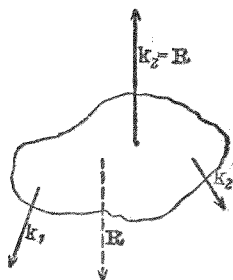
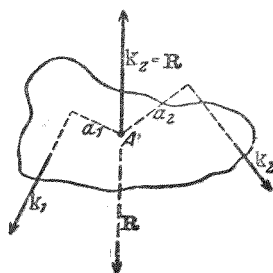
第 19 圖 一種鐵槓

重曲槓，即為槓桿之一種，而不合此條件者。外力作用於鐵槓之 A 點，如吾人以手握於此處而用力，而反作用力則生於 B, C 二點，此反作用力者，即吾人所欲藉鐵槓以克制者也。

理想上最簡單之槓桿，為一可繞定軸轉動之物體

(第 20 圖 a)，二力 k_1 及 k_2 自物體外方作用於其上。按 § 30 所述，軸上即因之生一逼力 k ，其量等於 k_1 及 k_2 二力之合力 R ，惟方向相反，而通常且亦不在同一直線之上。於是與 R 成一力偶，使物體轉動。

此種之槓桿僅於不受力偶作用時，方能平衡。是即軸上所生之逼力須與外力之合力成一直線(第 20 圖 b)。當此

第 20 圖 a 槓桿上之力第 20 圖 b 平衡之槓桿

之時，槓桿不受力矩之作用，即 \mathbf{k}_1 及 \mathbf{k}_2 二力之力矩適爲等量而反向。是即

$$\mathbf{k}_1 a_1 = -\mathbf{k}_2 a_2, \text{ 或 } \mathbf{k}_1 a_1 + \mathbf{k}_2 a_2 = 0, \quad (7)$$

式中 a_1 與 a_2 各爲 \mathbf{k}_1 與 \mathbf{k}_2 二力至軸之垂直距離——稱爲各力之『臂』。故作用於一槓桿上諸力矩之和爲零時，槓桿平衡。此爲槓桿之普遍定律，即有二個以上之力——軸上所生之逼力除外——在同一平面內作用時，即 $\Sigma \mathbf{k}_i a_i = 0$ ，此定律亦恆屬真確。

關於槓桿之其他詳情，見 § 71 以後。

33. 動量不減定理(衝量定理)。由 Newton 氏第三公理，可導出另一重要之基本定理。命 m_1 與 m_2 二物體間有一 \mathbf{k} 力作用(第 17 圖)。於是按第三公理

$$\mathbf{k} = m_1 \mathbf{g}_1 = -m_2 \mathbf{g}_2 \quad (8)$$

(此式之右邊須爲負號，因 $m_1 \mathbf{g}_1$ 與 $m_2 \mathbf{g}_2$ 反向也)。於是

$$m_1 \mathbf{g}_1 + m_2 \mathbf{g}_2 = 0. \quad (9)$$

按 § 19，此式又可寫作

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{d}{dt} (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) = 0. \quad (10)$$

(10) 式之意，蓋謂 $m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$ 一向量之時間的微分商等於零，故知該向量本身不因時間而變更。但按諸 § 25，此向量爲 m_1 與 m_2 二物體動量之和。若遇二個以上之質量，則其動量之和亦應若是。

$$\frac{d}{dt} \Sigma m_i \mathbf{v}_i = 0, \text{ 或 } \Sigma m_i \mathbf{v}_i = \text{常數}. \quad (11)$$

m_i 與 \mathbf{v}_i 為參與之各物體之質量及速度。在此質量系中，須假定僅有內力作用，(9)，(10)，(11) 諸式方為合理。所謂內力者，為系中諸質量彼此作用之力，非來自系外之物體者也。

動量可按坐標軸之方向分解成為三個分量。各分量亦遵循上述之理，

$$\Sigma m_i \mathbf{v}_{i_x} = \text{常數}, \Sigma m_i \mathbf{v}_{i_y} = \text{常數}, \Sigma m_i \mathbf{v}_{i_z} = \text{常數}, \quad (12)$$

此定理稱為動量不滅定理，或稱衝量定理。其意謂二個或二個以上之物體僅受內力作用時，其動量之和歷久不變。推而廣之，此動量不滅之定理，直可應用之於全宇宙，宇宙內所存一切動量之和，終古常定，不生不滅，不增不減。此為物理學基本定理所謂不滅定理者之一。

關於動量不滅定理在日常生活中的例證，數見不鮮。吾人在輕捷之車或船中向前運動，則車或船必隨之反向往後運動(第21圖)。



第 21 圖 衝量定理之說明

手中握有重物(如鐵棒，啞鈴等)時若突向前伸，則身體之其他部分，必稍向後退。

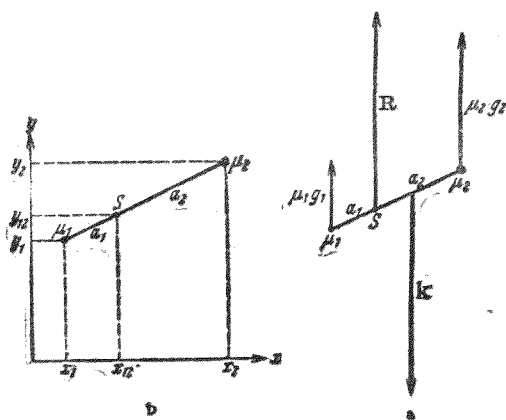
例如彈自槍礮中射出時，每見有所謂反坐之作用；當礮彈尚在炮管中時，作用於礮彈及炮身間者，純為內力，即炸藥爆發後所生巨量氣體之壓力。此力不特推炮彈向前，且亦推炮身向後。若炮彈之質量較小於炮身者千倍，則礮身向後運

動之速度亦必較小於礮彈前進之速度千倍。火箭(Rakete)者,即以箭中燃燒之氣體猛烈衝出時之反坐作用而前進者也。

吾人試取一金屬管,徑約2-3[厘米],長約20[厘米],密閉其一端,而以二絕緣導線自管之側壁通入管中,期使一感應圈之火花能在此二線端間跳過。此管或附裝以輪,如大炮然,或以二長繩懸於空中,將管口接於空氣充足之Bunsen燈上,使管內充滿煤氣及空氣之混合氣,先用一尋常之軟木塞密閉之,次以一附有鉛塊等重物之木塞塞於管口。於是通以電流,管中之混合氣體即因此火花而爆發,木塞即被射出。但同時管身即向後退。木塞質量愈大,管身之反坐愈烈。木塞質量愈小,則其飛射之速度愈大,而射程亦愈遠。

34. 質量中心或稱重心。自由運動之物體受 \mathbf{k} 力之作用而生加速度 \mathbf{g} 時,按§26,其各質點 μ 各感受一慣性力,其值為 $\mu\mathbf{g}$ 。此等之力彼此平行,均與加速度之方向相反,而各慣性力之和等於使物體加速之力, $\mu_1\mathbf{g} + \mu_2\mathbf{g} + \dots = \mathbf{k}$ 。慣性力可合成一合力,正復與其他各種之力同。試取一物體觀之,姑假定該物體僅由二質點 μ_1 及 μ_2 互相固結而成(第22圖a)。一力 \mathbf{k} 作用於此物體,則此物體——即二質點——立即得有加速度 $\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_2$ 。按§27,知慣性力之合力 \mathbf{R} 交兩質點連線於一點,分該線為二段,各段之長反比於二力之值,即 $a_1 : a_2 = \mu_2\mathbf{g} : \mu_1\mathbf{g} = \mu_2 : \mu_1$ 。合力與作用力 \mathbf{k} 恆等值而反

向,通常二者組成一力偶(第22圖a)使物體不僅沿 k 力之方向有一純粹之加速度,且尚有一角加速度,於是物體即因之



第 22 圖 質心(重心)之作圖法

轉動。苟作用力 k 與慣性力合力 R 二者同在一直線上,即作用力之方向亦交二質點連線於一點,將其分成二段, $a_1 : a_2 = \mu_2 : \mu_1$, 則物體僅有純粹之加速度而無轉動。不論作用力 k 之方向與強弱若何,此項條件均為合理,故物體之中恆可選出一點 S (第22圖 b), 一單獨作用力之方向苟通過此 S 點, 則物體僅得一直線加速度而完全無轉動之傾向 (k 力究係作用於此方向上之何點,按諸 § 27 可無關係,其所影響者惟運動之安穩而已)。

此 S 點即為使物體按一切可能之方向作純粹加速運動時所引起之慣性力之一切合力之交點。吾人稱之為物體之質量中心或簡稱質心。但重心(參閱 § 59) 一名尤較通

行。對於一切之慣性作用，吾人可理想物體之質量咸集中於該點。

設上述之物體在一直角坐標系之 xy 平面內。命其二質點之坐標各為 x_1, y_1 及 x_2, y_2 ，而重心之坐標為 x_{12} 及 y_{12} 。於是按第 22 圖 b 即可得 $(x_{12} - x_1) : (x_2 - x_{12}) = a_1 : a_2 = \mu_2 : \mu_1$ ， $(y_{12} - y_1) : (y_2 - y_{12}) = a_1 : a_2 = \mu_2 : \mu_1$ 。苟該物體在三度坐標系中佔一任何之方位，則尚須加一 z 方向上相應之式： $(z_{12} - z_1) : (z_2 - z_{12}) = \mu_2 : \mu_1$ 。按簡單之計算，得

$$x_{12} = \frac{\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad y_{12} = \frac{\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad z_{12} = \frac{\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

若另有一第三質點 μ_3 亦與此二質點相固結，則可按同一之手續以求其新重心點。三質點之重心之位置為

$$x_s = \frac{(\mu_1 + \mu_2)x_{12} + \mu_3 x_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} = \frac{\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3},$$

$$y_s = \frac{\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}, \quad z_s = \frac{\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}.$$

依此類推，任何個質點 μ_i 互相固結時，其重心之位置應為

$$x_s = \frac{\sum \mu_i x_i}{m}, \quad y_s = \frac{\sum \mu_i y_i}{m}, \quad z_s = \frac{\sum \mu_i z_i}{m}. \quad (13 a)$$

式中之 $m = \sum \mu_i$ 為全組互相固結之質點之總質量。若即以質心本身為坐標系之原點 ($x_s = y_s = z_s = 0$)，則

$$\sum \mu_i x_i = \sum \mu_i y_i = \sum \mu_i z_i = 0. \quad (14 a)$$

若遇一廣大之物體，其質量為 m ，吾人可以 dm 表其各質量元 μ_i ，而(13 a)及(14 a)二式可寫成積分式如下，

$$x_s = \frac{1}{m} \int x dm, \quad y_s = \frac{1}{m} \int y dm, \quad z_s = \frac{1}{m} \int z dm \quad (13 b)$$

$$\int x dm = \int y dm = \int z dm = 0. \quad (14 b)$$

縱使諸物體不相固結，空間中亦恆有一點合於(13 a)式或(13 b)式之定義，仍稱為諸物體之公共重心（例如太陽系之公共重心，或地球與月球之公共重心等）。

均勻之物體，物質分佈均勻，若其形狀又為簡單之幾何體者，其重心之位置頗易計算。例如均勻之空球或實球，其重心即為球心，均勻之箱匣（平行六面體），其重心即為其對角線之交點。

35. 重心運動不變之定理。 不相固結之諸物體 m_i ，在空間自由運動時，設受任何力之作用，或僅有內力（§ 33），即僅有彼此間引力或斥力之作用。此組物體之公共重心，通常在空間亦時時變易其位置，但其各瞬間之位置，均當由當時各物體之坐標 x_i, y_i, z_i ，按(13 a)式或(13 b)式計算之。將(13 a)式對時間 t 微分之，即得重心之位置沿三坐標軸方向移動之速度

$$v_x = \frac{dx_s}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{dx_i}{dt}}{m}, \quad v_y = \frac{dy_s}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{dy_i}{dt}}{m}, \quad v_z = \frac{dz_s}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{dz_i}{dt}}{m}, \quad (15)$$

($m = \Sigma m_i$) 此三個分數式之分子，皆為各物體在三坐標方向上動量之和；因祇有內力作用於其間，故按 § 33，其值均為常定。各物體之速度雖因內力之作用而有任何變化，但其公共重心之三個分速度——亦即其速度——絲毫不受其影響，而始終不變。若全部物體同時更受外來加速力之作用，如重力等，則其公共重心之運動，恰似諸物體之質量咸集中於此一點者然。

以上所述即所謂重心運動不變之定理或簡稱重心定理，觀其所由導出之法，乃不過為動量不滅定理 (§ 33) 之另一說法，而歸根結底，終亦不出 Newton 氏第三公理而已。

第 21 圖即為關於重心定理簡單之一例。飛行中之爆發彈又為其另一例。未炸之前，其重心在彈內，沿一拋物線（或彈道曲線，§ 57）軌道而前進。既炸之後，則因其內力之作用而裂片紛飛，但諸裂片之公共重心，仍按原軌道前進，一似未炸裂然（但裂片所受之空氣阻力——另一外力——與未爆前彈身所受者不同，事實上恆為較強，故爆發後，公共重心所經之彈道曲線當較未爆前破彈之軌道向下彎曲更陡）。

36. 轉動慣量。 設有一質點 m ，繞一定軸而轉動。命其與定軸間之垂直距離為 r 。一外力在垂直於定軸及 r 之平面而作用於此質點，其值為 k ，質點因得一加速度 dv/dt 。於是質點即繞一圓周而加速。命其在任一時間之角速度為 ω ，其軌道速度為 $r\omega$ ，則 $k = mr d\omega/dt$ 。此 k 力即引起一力

距,其值爲 $N=kr$, 於是

$$N = mr^2 \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2\varphi}{dt^2} \text{ [達因]} \cdot \text{[釐米]} \text{ 或} \\ \text{[克]} \cdot \text{[釐米]}^2 \cdot \text{[秒]}^{-2}. \quad (16)$$

按上式定義之值

$$J = mr^2 \text{ [克]} \cdot \text{[釐米]}^2 \quad (17)$$

稱爲質點 m 對於一相隔垂直距離 r 之定軸之轉動慣量 (Euler 氏, 1758).

若遇廣大之物體,由無數之質點組成者,其轉動慣量等於其各部份轉動慣量之和,即

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots = \Sigma m_i r_i^2 \text{ [克]} \cdot \text{[釐米]}^2.$$

或用積分式

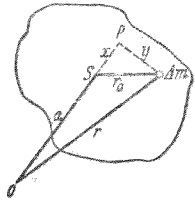
$$J = \int r^2 dm \text{ [克]} \cdot \text{[釐米]}^2, \quad (18)$$

此項積分須遍及於物體之全部。欲計算此積分之值,先須覓得質量元 dm 在物體中之分佈狀況,即其密度究爲距離 r 之何種函數;此距離均係對於定軸而言。定軸可在體內,亦可在體外。

對於廣大之物體,(16)式亦爲合理,即轉動慣量與角加速度之相乘積亦等於作用之力矩。故關於轉動者亦有一與 Newton 氏第二公理(力)=(質量) \times (加速度)相似之關係。事實上吾人可視之爲第二公理對於轉動之一種應用。

設有一物體(第23圖)可繞一垂直圖面於 o 點之定軸而

轉動。一直線與此軸平行而通過物體之重心者(重心軸)交圖面於 s 點,命 $os=a$ 。試於圖面上任意取一物體之質量元 Δm , 其與 o 點之距離為 r , 與 s 點之距離為 r_0 。延長 a 使過 s 點,自 Δm 作垂線於此延長線上。物體對於通過 o 點一軸之轉動慣量為



第 23 圖 Steiner 氏定律之導出

$$J = \Sigma \Delta m r^2 = \Sigma \Delta m [(a+x)^2 + y^2] = a^2 \Sigma \Delta m + \Sigma \Delta m r_0^2 + 2a \Sigma \Delta m x.$$

今 $\Sigma \Delta m$ 為物體之總質量 m , 而 $\Sigma \Delta m r_0^2$ 為物體對於其重心軸之轉動慣量 J_0 。又按重心之定義 (§ 34, 14 a 式), $\Sigma \Delta m x = 0$ 。因得

$$J = ma^2 + J_0 \tag{19}$$

但 ma^2 為重心軸上一質點 m 對於一與之平行而通過 o 點之定軸之轉動慣量。故 (19) 式之意義謂: 一物體對於任意一定軸之轉動慣量等於二轉動慣量之和, 其一為物體對於通過其重心而與定軸平行之軸者, 其二為一假設之質點據於物體之重心時對於原軸者, 此假設質點之質量須與物體之質量相等 (Steiner 氏定理)。自 (19) 式, 知物體對於任一指定方向內一切之軸之轉動慣量, 以通過物體重心之一軸者 ($a=0$) 為最小, 即 J_0 。

命 P 為物體內或物體外之一點。通過 P 點可作任何直線, 以每一直線為軸, 物體對之各有一定值之轉動慣量 J

在此種直線上各截取一線段，使其自 P 點算起之長度等於 $1/\sqrt{J}$ 之值，則此一羣線段之終點組成一橢圓球之面，即所謂慣量橢圓球者是。 P 為物體之重心時，橢圓球為最大；軸離重心愈遠者球愈扁。轉動慣量最小之方向為長軸，最大之方向為短軸。若 P 為物體之重心，則此二方向及一與此二者垂直之第三方向稱為物體之慣量主軸，其相應之轉動慣量為轉動主慣量。

已知一物體對於一通過其重心之軸之轉動慣量後，其對於與此平行之任何軸之轉動慣量即可逕由 (19) 式求出之。以 (18) 式計算物體對於其重心軸之轉動慣量時，僅形狀有規則而密度分佈簡單之物體方可得簡捷之結果，尤以均勻之物體為然。例如均勻之實體圓柱，半徑為 R ，對於其柱軸之轉動慣量為 $mR^2/2$ ；半徑為 R 之均勻實體球，對於通過其中心任何一軸之轉動慣量為 $2mR^2/5$ 。

37. 圓周運動。向心力與離心力。 設有一物體，質量為 m ，繞一定點以定速 v 在一圓周上運動，圓周之半徑為 r 。例如以一長為 r 之繩或棒繫住一物體於轉動中心而任其旋繞。命其角速為 $d\varphi/dt = \omega$ ；按 § 20, (22) 式，其在軌道上進行之速度為 $v = r\omega$ 。

按 (28) 式 (§ 20)，任何物體轉動時恆受一沿輻 (radial) 之加速度 $\gamma = -r\omega^2$ ，其方向係向轉動中心 (第 24 圖 a)，故其時沿此方向上恆有一力作用，其值為

$$k = -m\gamma = -mr\omega^2 = -\frac{mv^2}{r} \text{ [達因]}. \quad (20)$$

逼使物體不離圓周軌道而運動者，即係此力，例如繫住動體

之繩中之張力是。吾人稱

此力為向心力。此處須注

意此力並非為圓周運動中

特有之力，具有特別之性質

者，而乃專用以指任何作用

於動體，使之時時傾向轉動

中心，不致遠離之力。此力可為棒或繩以及緊張之彈簧中

之彈力，亦可為作用於二物體間之萬有引力，電力，或磁力等

等。

按 § 26，此項沿軸之加速度必有一慣性力隨之出現，其

值與加速力相等，惟方向則相反，即沿輻面向外。故轉動物

體 ω 恆有以 $mr\omega^2$ 之力，將轉動中心沿輻牽之向外之趨勢。

繫石塊於繩之一端，手握繩之他端使之作圓周運動時，吾人

手中所感覺者即為此力。此時吾人輒覺轉動之物體似施

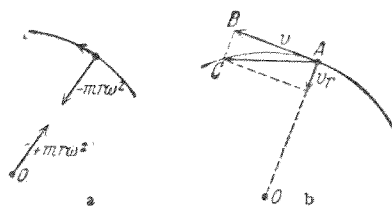
一力於吾人之手，牽繩端沿輻向外，似欲離手而去者然。事

實上此僅為轉動物體慣性之反作用，以反抗吾人之手所施

於其上使之沿輻向內之力；初非為由於轉動而生之新力，沿

輻向外作用於轉動體，而傳至轉動中心，一如吾人所感覺者

故此所謂離心力 $+mr\omega^2$ 者，絕非為作用於轉動體上之力，



第 24 圖 離心力之導出

而爲由於轉動體之慣性所引起之力，以作用於轉動中心者（第24圖 a）。此即爲物體受向心力之作用而被牽引至轉動軸時，物體按 Newton 氏第三公理而生之反作用力。向心力停止作用後，物體立即（若無重力等其他之力之作用）因其慣性而以定速 $v=r\omega$ 沿其時軌道之切線前進。

實際上轉動進行之步驟，大致如第24圖 b 所示。設時間爲 t 時，轉動體之位置在 A 點。若不受向心力之作用，則此物必將以其速度 $v=r\omega$ 按直線進行，經過 dt 時間後，將進至 B 點。向心力使物體按 v 之垂直向而加速，在 dt 時間內，將使轉動體增加一平均速度 v_r 。物體因此二速度之聯合作用，故在 dt 時間內，進至圓周軌道上之 C 點。此圖所示運動之步驟，極屬粗略，蓋事實上沿 AC 弧上 v_r 之方向繼續變遷不已也。故吾人須理想截取圓弧上無限短之一段而觀察其變化。於是二向量 $AB=AC=v$ 在事實上彼此相等，換言之，即物體雖繼續（按軌道之垂直方向）受加速度之作用，而速度 v 之絕對值可維持常定。

轉動時所引起之離心力之值爲

$$k = +mrv\omega^2 = +\frac{mv^2}{r} \text{ [達因]}. \quad (21)$$

吾人常言物體轉動時，離心力與向心力互相平衡。此言僅謂離心力與向心力二者恆爲等量而反向，且均在同一直線之上。但吾人須注意轉動物體本身並不平衡，蓋其始

終受加速度之作用也。

本節所述者，對於任何曲線運動莫不合理。動體經過曲線軌道上任一點時，其所受之向心力均可按(21)式計算之，其時 r 爲在該點上軌道之曲率半徑。

38. 從轉動組所見之離心力。前在 § 37 中所述轉動體受力後之情形，乃爲自轉動組以外一靜止之觀察者所見者。今當另假設一觀察者，穩坐於轉動組中，隨轉動體以同一之角速度繞同軸而轉動。例如吾人在地球之上觀察地球自轉之作用，其情形正與此相同。試舉一簡單之例，吾人可設想一圓板繞其中心軸而轉動，在其中心點處有一觀察者安坐其上，隨板轉動。另有一觀察者在板外靜止不動，而於板外用一靜止之坐標系以觀察轉動圓板上之變化。隨板轉動之觀察者所用之坐標系即固結於板上，例如地球上所用之經緯度是。二人若此觀察同一運動，其所得之感想，基本上完全不同。靜止觀察者所見之運動，已於 § 37 中述之。其時凡附屬於轉動組中之全部物體，因其繼續轉動，故亦繼續受向心力之作用，而不爲平衡。但在隨板轉動之觀察者觀之，凡對於轉動圓板無相對運動者，皆爲靜止，在轉動坐標系中之位置始終不變。故就此觀察者而言，物體對於其坐標系既無運動，則爲平衡。但此隨板轉動之觀察者同時必又注意一事，即欲使此等之物體靜止於板上，恆須賴有一向轉動軸作用之力，即向心力是，否則圓板上之物體，立將向板之

外緣移動。無向心力作用時物體向圓板外緣之加速運動，在隨板轉動之觀察者視之，必係由於此轉動體本身受有力之作用，使之沿輻向外。此力由隨板轉動之觀察者名之爲離心力，當較板外之靜止觀察者以同名名之更有理由，蓋前者所見之轉動體確有因此力而欲離轉動軸以沿輻向外之傾向也（此觀察者所見之轉動軸，不過爲全體離心力之交線而已）。

今再將此二觀察者之觀點總括之如下：

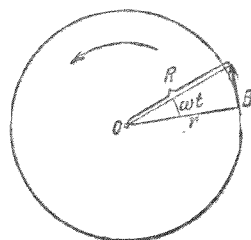
就靜止之觀察者視之，轉動組以及附屬於該組中與之無相對運動之一切物體均不爲平衡。轉動組中各成份之所以能繼續轉動不息者，皆賴作用於各成份上之向心力，繼續使其沿輻向內加速而成。離心力爲轉動體反抗向心力加速作用之反作用，故爲一慣性力。

就隨同轉動之觀察者視之，一切靜止於轉動組中之物體，即隨同轉動之一切物體，均爲平衡。但此觀察者同時必察得轉動組以內到處皆有一力作用，此力恆欲使組中一切隨同轉動之物體沿輻向外而運動，其值正比於各物體之質量，及各物體與一定直線（轉動軸）間之距離（ $k = mr\omega^2$ ）。故此觀察者所見之離心力乃係作用於轉動體之本身。向心力之用僅在將離心力抵消而使組中之物體平衡，即阻止其沿輻向外之加速運動而已。

離心力之性質，在隨同轉動之觀察者視之，確合乎作用

力之本義，試按下述之思索，將尤見明瞭。第 25 圖示一圓板，

以角速 ω 繞定點 O 而轉動；在板緣上之 B 點處有一質點，由向心力之作用而固定於該處。此質點初時以速度 $v=r\omega$ 沿圓周而運動，其半徑為 r 。在 $t=0$ 時，設向心力突然停止；在轉動組以外觀之，質點將因其慣性而沿切線



第 25 圖 離心力之說明

仍以速度 v 離板他去。經過 t 時間後，質點必已在此方向上進行 vt 之路程，其與轉動中心之距離，必已由 r 而增至

$$R = \sqrt{r^2 + v^2 t^2}$$

將此式微分一次，則得 R 增加之速度，微分二次，則得其增加之加速度，

$$\frac{dR}{dt} = \frac{v^2 t}{\sqrt{r^2 + v^2 t^2}}, \quad \frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{v^2 r^2}{(r^2 + v^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

在 $t=0$ 時，即質點方將離板緣而開始他去時，吾人可自此式求得其初加速度 γ ，即當質點與轉動中心相距 r 時所受之加速度。此可將 $t=0$ 代入上式而求得之，即

$$\gamma = \left(\frac{d^2 R}{dt^2} \right)_{t=0} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2.$$

故質點 m 所受之作用力 $k = m\gamma$ 當為

$$k = mr\omega^2,$$

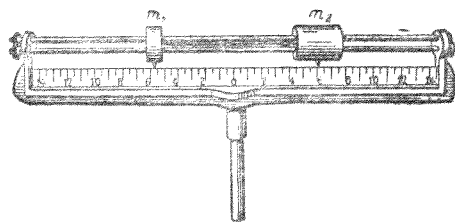
此即前得離心力之式。

吾人理想上輒願居於轉動組之外，而為一靜止之觀察者，如 § 37 所述。但事實上吾人若處於隨同轉動觀察者之地位以觀察自然界中之現象，則所得之結果仍完全相同。二種之觀點皆屬等要，不可偏廢。至於何時當用何法觀察，則在視當前之情形，究以何者較為方便而定其去取。吾人日常生活中，居於隨同轉動之觀察者之地位時頗多，將不自覺耳。

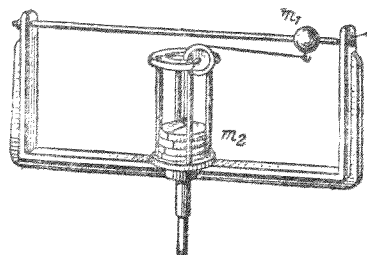
39. 關於轉動體慣性力之幾種實驗。繫物體於繩之一端，而任其在空中旋繞時，握繩之手每可直接感覺離心力之作用。此力關於工業上之應用，當俟 § 79 中述之。

欲作離心力之實驗，最佳須用離心機械；此乃為一種儀器，具有鉛直之軸，欲實驗之物體，可固定於此軸上，而使之迅速轉動者。今姑舉數種實驗如下以為例。

1. 二光滑之水平棍上(第 26 圖)有二物體 m_1 與 m_2 ，由一繩結連之，在棍上頗易滑動。二物體之上各有一相等之向心力沿輻向內作用(繩內之張力)。吾人試以隨同轉動之



第 26 圖 離心力之說明

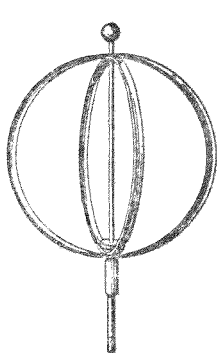


第 27 圖 離心力之說明

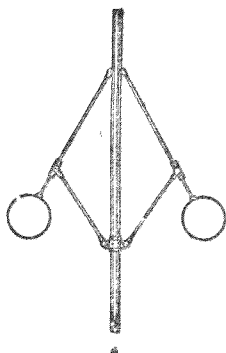
觀察者之立場觀察之 (§ 38). 僅當 m_1 與 m_2 所受之離心力相等時, 二者所成之物體組對於隨同轉動之坐標系方為平衡, 否則二物體即將向離心力較大之一方移動. 命 r_1 及 r_2 各為二物體與轉動中心間之距離, 且假設 $m_1 r_1 \omega^2 < m_2 r_2 \omega^2$, 則物體 m_2 將牽引物體 m_1 向 m_2 之一端. $m_2 r_2 \omega^2$ 之值超過 $m_1 r_1 \omega^2$ 愈大, 則物體之運動愈強, 終將猛擊於 m_2 一端之邊上.

2. 將第 27 圖所示之儀器迅速轉動, 使自 m_1 發出而由連結之繩傳至 m_2 之離心力較大於 m_2 所受之重力, 則 m_1 之質量雖較 m_2 為小, 可將 m_2 提起. m_2 一經提起, 吾人將見直至轉動速度減小至將其提起所需之值以下時方再下落. m_2 既被提起, m_1 與轉動軸間之距離自必因之增加, 由其發出之離心力亦隨之而增.

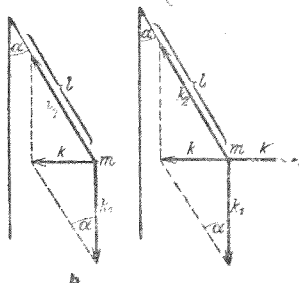
3. 由彈性金屬薄片製成之儀器 (第 28 圖), 通常稱為地球模型者, 因其轉動時二極略扁, 一如地球, 故名. 但此種比



第 28 圖 地球模型



第 29 圖 離心節速器



擬僅屬外觀的，蓋二者之向心力性質完全不同也。轉動之作用乃在使自圓環外部發出之離心力將其近軸之部份牽回環心，直至金屬片中因彎曲而生之彈力與離心力平衡而止。

4. 有離心節速器者，頗足一述。器由相同之二物體所成，固結於一鉛直之軸，且能在一鉛直面內轉動者（第29圖）。此器轉動愈速，二物體上昇愈高。

吾人先就轉動組以外一靜止觀察者之觀點（§37）視之。在物體 m 上（第29圖 b）作用之力有二，即重力 k_1 與 l 棒中之拉力 k_2 （逼力，§30）是。此二力之合力 k 苟適足以供給沿一圓周 $r=l \sin \alpha$ 上轉動時所需之向心力 $m\omega^2 \sin \alpha$ ，則即有定速之轉動發生。自第29圖 b 可見 $k=k_1 \operatorname{tg} \alpha$ 時，即合此條件。於是得 $k_1 \operatorname{tg} \alpha = m\omega^2 \sin \alpha$ ，或

$$\cos \alpha = \frac{k_1}{m\omega^2 l} \quad (22)$$

今試再就隨同轉動之觀察者之觀點（§38）以研究此同一之情形，則物體 m 除受 k_1 及 k_2 二力之作用外，尚受有第三力之作用，即與向心力等量反向之離心力 k' （第29圖 c）。故自此二種不同之觀點所得之結果，其相異處乃在自第一觀點所見者覺作用於 m 上之二力 k_1 及 k_2 不為平衡，而有一合力 k ，但自第二觀點觀之，則見 k_1, k_2 與 k' 三力彼此適相平衡。

僅當 $k_1 \leq ml\omega^2$ 時, (22) 式方能滿足. (按 § 55, $k_1 = mg$, 故 $\omega^2 \leq l/g$). 否則如角速度 ω 過小, 通常決不能將二物體提起.

離心節速器在工業上可用以節制蒸汽機之動作. 轉動體爲一種槓桿所結連; 流入機中之汽流可由此二物體之昇降以節制之.

40. 工作. 就人類而言, 凡一切利用筋力之動作, 咸可總稱之曰工作, 例如將一物體自地面提至桌面是. 若物體不受地心向下吸引之重力作用, 則吾人將物體提高, 可無需乎工作 (但欲使物體由靜而動, 亦須賴有工作, 以抵消其慣性; 惟此種工作當物體由動而靜時, 仍可還原. 吾人可設想物體之運動爲無限遲緩, 則自可不需任何有限值之加速工作 [§ 41]). 故欲將一物體向上提高某一鉛直距離, 第一步先須有一力作用於其上, 以抵消其所受鉛直向下之重力, 第二步方能使物體沿指定之路程, 背重力之方向而運動. 此時若所需之力愈大, 且物體受此力作用後所經之路程愈長, 則吾人謂所作之工爲值愈大. 若吾人所遇者非爲重力, 而爲任何其他之力, 例如彈簧變形時所生之彈力等, 則工作之意義仍與上述者完全相同. 一切機械工作恆直接以力與路程之相乘積量之.

$$(\text{工作}) = (\text{力}) \times (\text{路程}).$$

但此處所謂力者, 僅以進行此工作時實際上確屬有效之分力計算之. 此即指與路程同方向者而言; 分力之與路

程垂直者，雖有若無（參閱 § 58）。故所做工作之值，等於沿路程方向之分力 k ，與路程 s 之相乘積。

$$A = k \cdot s, \quad (23)$$

若力與路程之方向相交，成一 φ 角，則

$$A = k \cdot s \cdot \cos \varphi. \quad (24)$$

吾人亦可將 (24) 式中 $s \cos \varphi$ 合為一項視之，而謂：(工作) = (力) × (作用力方向上路程之分量)。

若 k 力之值在 s 路程上隨處而變，則所作之工可將各路程元 ds 積分而計算之，即

$$A = \int k ds \cos \varphi \quad (25)$$

故工作為力之路程的積分。

關於上述之例，觸目皆是。最常遇者，如抵消重力之工作，已見前述。此外日常生活中，大部份之工作皆用以抵消摩擦阻力，例如一切交通運輸之舟車，其所費之工作大部份皆消耗於此方面者也。

吾人試握重物，靜止不動，歷時稍久，輒覺筋疲力盡，一似作工者然；但按諸上述之定義，對於靜止物體，決無工作可言。此時吾人體中所起之生理變化，極形複雜，筋肉確曾作工，初未與定義相矛盾，惟其詳情則不能在此處演述。

C. G. S. 制中工作或能量之單位為 1 [爾格]。此即為 $k \cdot s = 1$ 時之工作，例如 1 [達因] 之力作用於一物體使之移動 1 [釐米] 之路程時所需之工作是。由 [爾格] 導出之輔助單

位爲[焦耳](即[瓦特][秒])= 10^7 [爾格]. 工業上所用工作與能量之單位——相應於工業度量衡制(§ 24)——應爲[米]·[公斤*],此爲將1[公斤]之質量鉛直提高1[米]時所需之工作. 1 [米]·[公斤*]= $9,81 \cdot 10^7$ [爾格](參閱 § 55).

41. 加速工作. 物體速度變遷時,亦有賴乎工作,即所謂加速工作是. 蓋欲使速度起有限值之變遷,必需力之作用,且此力必沿某段之路程繼續作用故也. 是故欲作某定值之加速工作,恆需一力沿某一定之路程繼續作用. 此工作用以抵消物體之慣性阻力,按 § 26,其值爲 $m\gamma$. 故物體之質量 m 愈大,或其加速度 γ 之值愈大,則其慣性力亦愈大. 按 § 40,作用於物體上之加速工作,應等於作用力之有效分力 k_s 及路程之相乘積,此路程者即爲物體在受力時間內所進行者. 命質量爲 m 之物體受 k_s 分力之作用,而行經 ds 之路程,此時所作之工爲 dA ,則

$$dA = k_s ds = m\gamma ds = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv = m v dr [\text{爾格}], (26)$$

蓋因 $\gamma = dv/dt$ 而 $v = ds/dt$ 故也. 式中 k_s 爲物體軌道 s 上力之分量, γ 爲同方向上之加速度.

若物體之速度僅變其方向,不變其大小,則按 Newton 氏第一公理 (§ 22),此種運動亦仍須賴有力之作用,但因速度之值常定不變,故此力所作之工爲零. 定速圓周運動,即其一例. 此例中變速之力,恆垂直於其時物體之運動向,故

$t_3=0$ 。是知定速圓周運動中，向心力 (§ 37) 未作一工。

任何物體因受力之作用而速度減小時，恆反抗此力而作工。例如使一物體向一彈簧前進，彈簧因之壓縮(火車之緩衝彈簧)，而動體之速度亦因之減小(負加速)。此時動體作工於彈簧之上，使其壓縮，而同時其本身之速度即因之消失。例如錘之擊釘入木，斧之劈物使開，以及其他一切作用有關於工作之消費者，其錘斧等物之運動，每因此一擊一劈而靜止。故此種情形中，工作可由運動而得，但欲使靜止物體得一正加速度，亦必賴工作之加於其上。

42. 工作或能量不滅之定理。 若以純粹之機械工作施於一物體之上，例如使其反抗重力或彈力而運動，則按諸吾人之經驗，知此等物體因之移至一位置後，能自行作工。此時所涉者祇須純為機械工作(各種之摩擦阻力除外)，則自此等物體所得工作之值，恆等於原來施於其上之工作。故一伸長之彈簧能將懸於其下端之物體反抗重力作用而向上牽引，迨物體下落，仍能將彈簧拉至原來之長。施於物體上之工作一似儲藏於物體之中，物體得此工作後，即可自行作出一等值之工。物體中若此出現之工作的可能性，稱為物體之能量(D'Alembert 氏 1785, Young 氏 1807)。吾人命其值等於其所能作工作之值。在 C.G.S. 制中，能量亦以[爾格]量之，在工業制中以[米]·[公斤*]量之，俱與工作同。故在純粹機械的現象中，能量或工作既永不能自行消滅，亦決不能

憑空產生。

但通常機械工作或能量確可消失，例如由摩擦而變化爲熱是。在十九世紀中葉 Robert Mayer, Joule, Helmholtz 諸氏以爲能量之意義，不應以純粹機械現象爲限，而應將其推廣至於物理學之全部，即在物理學全部範圍中，有某種之量亦得稱爲能量（如熱能，電能等等），於是上述之定律，初僅限於純粹機械現象者，今日亦普遍的有效，即凡機械工作或能量之消失，恆必有一等量之他種能量出現；其他能量消失時亦然。能量定義之推廣，實爲物理學上一大根本上之進步。

故此能量或工作不滅定理，亦稱能量原理者，普遍的皆爲合理：能量或工作永不自行消滅，亦不憑空產生。僅可由一種形式變爲他種形式，但其值則始終不變。

（Helmholtz 氏曾稱此定理爲力之不滅定理，此蓋由於當時，1847，命名尙未精確所致。不滅定理決不能應用於力，顯而易見）。

一世紀前，人類方努力於所謂『永久運動』實驗之設計，自能量不滅定理發現後，其原理經一再證明，確屬萬劫不磨，於是人類始恍然大悟，不得不將此項企圖放棄之矣。蓋當時所謂永久運動者，初非如其名稱所示，僅欲製造一種機械，不藉外力，永久繼續運動而已也（若能將摩擦阻力完全除去，則永久運動確屬可能，例如行星之運行於太空，終古不息），

當時之企圖，直欲製造一種機械，不需外來能量之輸入，而能繼續工作，即能量可源源自無中產生，吾人可『空賺』工作。

此種妄想，按之能量不滅定律，自屬必不可能（嗣後各國專利局亦不再接受自稱永久運動設計之一切專利聲請書矣）。

前在 §4 中，吾人已承認物理學之一切規律對於全宇宙均為合理，故宇宙中任何能量決不能自行消滅，亦不能憑空產生。根據此項事實，吾人可斷言宇宙內所藏能量之總值，當歷久不變。所變者僅為其出現時之形式而已（如動能，電能，磁能，重能，熱能等等）。能量原理又為物理學中基本的不滅定理之一。

43. 運動能量，或稱動能。 物體加速時所需之加速工作即轉入物體之內，而變為能量。按能量不滅定理，此項工作將永不消滅，而僅可變為他種形式，故可謂工作儲藏於動體之中，當其運動停止時，此項工作仍以原來（或他種）之形式出現。吾人可斷言在物體繼續運動之時間內，能量即寄托於動體之中。故運動之物體具有動能，或稱運動能量。此項能量之值必將由物體之質量及速度所表出。將 (26) 式積分之，得

$$A = \int_0^v mvdv = \frac{1}{2}mv^2 \text{[爾格]}. \quad (27)$$

故質量為 m 之物體以速度 v 運動時，其所具動能之值

爲 $\frac{1}{2}mv^2$ [爾格].

將動能對速度 v 微分之,則得

$$\frac{dA}{dv} = mv \text{ [克][厘米][秒]}^{-1}. \quad (28)$$

此卽爲前述之動量或衝量 (§ 25). 故動量爲動能對速度之微分商.

44. 位置能量或稱位能. 加工作於一物體,若其結果物體並不加速,僅反抗其所受之力之作用而移動其位置(例如反抗重力之作用而舉起一物體),則按諸能量原理此所加之工作必轉入物體而變爲能量,此項能量實係來自物體位置之遷移. 按(23)式,此種位移所需之工作爲 $A = k_s \cdot s$, 其中 s 爲物體在作用力 k_s 方向上移過之路程. 故物體位置變遷後所得新能量之值,必當與此相等. 此項能量稱爲位置能量或稱位能.

按上節所述,物體在某位置所具位能之值自必與其移過路程之遠近有關,此路程者卽物體沿力之反方向移至此某位置時所經過者也. 故位能之值,不僅有關乎終點之位置,且尚須視其移動時之出發點而異. 更切實言之,吾人蓋已將此物體在其出發點時之位能任意命之爲零. 事實上此項假定,頗屬可能,蓋位能零點之選擇,在自然界中,初無任何規定也. 故此項零點可任意選擇,唯求對於所遇之情形最爲便利可耳. 零點之選擇對於計算位能之結果毫無影

響，蓋所涉及者僅為位能之差而已。在許多情形中，以地面或海面或實驗室中之桌面為位能之零點，實為最便。

45. 工率. 工率 L 者為所作之工 A 對時間 t 之微分商，即

$$L = \frac{dA}{dt} [\text{爾格}]/[\text{秒}] \quad (29a)$$

故在 t 時間內所作之工為

$$A = \int_0^t L dt [\text{爾格}]. \quad (29b)$$

若工率 L 不隨時間而變，即與 t 無關，則 $A = Lt$ [爾格] 而 $L = A/t$ [爾格]/[秒]。在此例中，工率可視為單位時間內所作之工。C.G.S. 制中工率之單位為 1 [爾格]/[秒]，此即 1 秒鐘內進行 1 [爾格] 工作之工率。若用 [焦耳] (§ 40) 為工作之單位，則工率之單位為 1 [焦耳]/[秒] = 1 [瓦特] = 10^7 [爾格]/[秒]。1000 [瓦特] = 1 [仟瓦]。在工業制中，工率之單位為 1 [米]·[公斤*]/[秒] = $9,81 \cdot 10^7$ [爾格]/[秒] = 9,81 [瓦特]。今日尚多應用之工業上舊單位為 1 [馬力] = 75 [米]·[公斤*]/[秒] = 0,736 [仟瓦]。

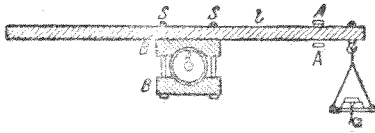
按 § 40, k 力作用於一物體，沿路程 ds 所作之工 dA 等於 $k_s \cdot ds$ ，故(29)式亦可寫作

$$L = k_s \frac{ds}{dt} = k_s v [\text{爾格}]/[\text{秒}]. \quad (30)$$

若有多力作用於一物體，則各力之作用可彼此相消，而在運

動方向上之合力爲零，遇此種情形時，自 Newton 氏第一公理知物體之速度 v 爲常定。但按 (30) 式，作用於物體上之各力仍各自作工。僅有作用力之分力 ks 與物體之速度 v 同向者，工作之值爲正。若與 v 反向，則該力之工率爲負，換言之，即物體須反抗此力而作工。故自第一種力之工作，物體可得能量，而遇第二種力作用時，物體將損失其固有之能量。例如物體在空氣中下落時，重力之方向向下，空氣阻力之方向與速度相反，物體同時受此二力之作用，可以常定之速度 v 而下落 (§ 116)。於是此物體之動能亦爲常定。但重力對於物體恆繼續作工。而此項工作不能絲毫增進物體之動能，蓋物體須反抗摩擦阻力而作工，其消費之能量，恆等於重力之工作所予之能量也。在此例中重力之工率爲正，摩擦阻力之工率爲負，二者之和爲零。試將物體鉛直向上拋射，當其上昇時，其動能化爲反抗重力之工作，力與速度方向相反，故重力之工率爲負。物體下落時則相反。

機器之機械工率之測量，爲工業上重要問題之一。自機器所得之有效工率與輸入機器中以使之發動之工率二者之比稱爲機器之效率。理想上最佳之機器，其值應爲 1，或 100%。但實際上由於摩擦阻力而能量損失，恆不能免，故其值必較 1 爲小。欲測電動機之有效工率，可用 Prony 氏工率計 (第 30 圖)。電動機之軸 A 爲二適宜之木夾 B 所夾住，其壓力之鬆緊可由螺旋 S 調節之。與木夾相連者爲一槓



第 30 圖 Prony 氏工率計

桿，其臂長為 l ，一端懸有一盤，以承砝碼。電動機轉動時，須反抗木夾之摩擦阻力而作工。槓桿為摩擦阻力所帶走，而壓於其旁之木釘 A 上，此時於盤中加以砝碼 (k_2)，務使其重力之力矩直接抵消機軸摩擦阻力所生之力矩。命 k_1 為機軸上出現之摩擦阻力， ω 為電動機之角速度， r 為軸之半徑，此角速度可另用一計轉器以量之。於是軸面上各點每秒鐘內所行之路程等於 $r\omega$ ，而 1 秒鐘內所作之工，亦即電動機之機械工率，為 $L = k_1 r \omega$ ，或以 n 表每秒鐘內之轉數，則 $\omega = 2\pi n$ ，而 $L = k_1 r 2\pi n$ 。按諸槓桿之定律，若 k_2 為由砝碼所生之力，則當平衡時應 $k_1 r = k_2 l$ 。於是

$$L = 2\pi n k_2 l.$$

此即為電動機之機械工率。

46. 轉動能量. 角動量. 設有一質點 m 以角速度 ω 繞一半徑為 r 之圓周而運動，則其速度為 $v = r\omega$ ，而其動能為

$$A = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 \text{ [爾格]}. \quad (31 a)$$

若轉動者為一廣大之物體，由無數之質點 m_1, m_2, m_3 等所組成，各與轉動軸間之距離為 r_1, r_2, r_3 等，則其轉動能量為

$$A = \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots) \omega^2 \text{ [爾格]}$$

或以積分式表之

$$A = \frac{\omega^2}{2} \int r^2 dm = \frac{1}{2} J \omega^2 \text{ [爾格]}. \quad (31b)$$

蓋按 § 36, $\int r^2 dm$ 爲物體之轉動慣量 J .

轉動物體之動能由轉動慣量 J 及角速度 ω 表出之, 其形式恰與直線移動物體之動能以質量及軌道速度表出者, 完全相同.

因轉動須有動能, 故物體滾動前進時, 欲使其達某一定值之速度 v , 當較同一物體滑動前進不受摩擦阻力之作用而亦達同一速度時所需之工作爲大, 蓋滾動前進時, 其動能

之總值爲 $\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$ 也. 物體在一平面內以 v 速度滾動

前進時, $v = r\omega$, 故其總能等於 $\frac{1}{2} (m + J/r^2) v^2$. 是則滾動之影

響一似物體之慣性質量由 m 增加至 $m + J/r^2$ 者然. 若滾動之物體爲一實體球, 則按 § 36 其慣質似較移動時增加 1,4 倍.

試製二個圓柱形之物體, 大小相同, 外表相同, 重量亦相同, 惟一爲木製之實體圓柱, 一爲中空之圓筒而內壁全部均勻的襯以鉛板者. 若此則二物體既不能以其外表, 亦不能以其重量區別之. 今將此二物體同置於一斜面上, 使之同時相並滾下, 則圓柱體較空圓筒滾下較速. 蓋二物體所受之

力相同，而空筒之慣性較大故也。空筒之質量成聚筒壁，其與轉動軸之距離自必較實柱體為遠。若將此二物體各依其中軸之方向懸之以繩，則當扭轉擺動時，實柱體亦恆較速。

按(28)式，運動物體之動量或其衝量等於其動能 $\frac{1}{2}mv^2$

對速度 v 之微分商。同理轉動物體之角動量亦以轉動能量 $\frac{1}{2}J\omega^2$ 對其角速度 ω 之微分商為其定義，故角動量等於

$$F = J\omega [\text{爾格}] \cdot [\text{秒}], \quad (32)$$

角動量亦可以向量箭矢表示之，如角速度 ω 然，其量與向之表示法，亦與角速度相應 (§ 20)，而角動量亦按向量加法定律 (§ 11) 以相加。

動量既遵守不減定理，角動量亦何獨不然。若一物體組中僅有內力 (§ 33) 作用，則不問各物體彼此間一切之交互作用，其角動量之總和恆為常定。故若視全宇宙為一物體組，則按此定理，宇宙內所存角動量之總和恆為定值，不增不減。

試比較移動及轉動諸定律，即可得下列各種形式上之平行性。位移 s 若代以角移 φ ，速度 v 及加速度 dv/dt 代以角速度 ω 及角加速度 $d\omega/dt$ ，質量 m 代以轉動慣量 J ，作用力 k 代以力矩 N ，動量 mv 代以角動量 $J\omega$ ，則移動之定律，即變成轉動之定律，如下列之對照表所示：

<u>移動</u>	<u>轉動</u>
能量: $A = \frac{1}{2}mv^2$	能量: $A = \frac{1}{2}J\omega^2$
$A = \int kds$	$A = \int Nd\varphi$
動量: $q = mv$	角動量: $F = J\omega$
作用力: $k = m \frac{dv}{dt}$	力矩: $N = J \frac{d\omega}{dt}$

此二種運動中,僅能量一項彼此均屬物理的同類量;其他若動量之於角動量,力之於力矩,均不屬同類。

47. 單位扭角力矩. 設有一物體組具有一種特性,即將其轉過一角度 φ 後,恆有一反向之力矩 (§ 31) 發生,使其恢復原位,且此力矩之值 N 恆正比於 φ 角者。故欲使此物體組轉動,恆需一與此等量反向之力矩。此項特性,可以下式示之

$$N = -D\varphi. \quad (33)$$

此比率常數 D 稱爲物體組之單位扭角力矩。(33)式之右邊所以用負號者,蓋示轉動後出現之力矩欲使角度 φ 減小也。若 J 爲該組之轉動慣量,則自 (16) 式 (§ 36) 得

$$N = J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D\varphi. \quad (34)$$

此微分方程式之解式爲

$$\varphi = \varphi_0 \sin 2\pi\nu t.$$

故物體組必作週期運動，亦即振動。式中 φ_0 爲每次振動時 φ 所能達之最大值，稱爲振動之振幅，而 $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{J}}$ ， ν 爲 1 秒鐘內振動之次數。振動週期 τ 與 ν 間有 $\tau = 1/\nu$ 之關係，當於 § 118 中詳述之。於是

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} \text{ [秒]}. \quad (35)$$

此項關係頗爲重要，以後當常用之。

(單位扭角力矩 D 在德文中常稱爲 *Diraktionskraft*。此項名稱易滋誤解。(33) 式中 φ 無因次，故 D 之因次與力矩同，其單位以 [達因]·[厘米] 或 [克]·[厘米]²·[秒]⁻² 量之)。

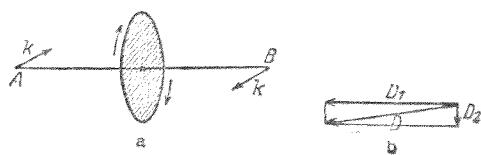
48. 對於自由軸之轉動。迴轉子(旋子)。一物體轉動軸之方向不爲體外之條件(如固定之軸座)所限制者，吾人稱之爲對於自由軸之轉動。自轉之天體以及陀螺等皆爲此種運動之例。若轉動之物體不受外力之作用，或即有外力而適爲他力所抵消，則當其繞自由軸轉動時，其重心必始終堅持一靜止之位置(或作直線定速運動)(§ 35)。此須重心適在軸上時方爲可能，故此種轉動之軸，必通過轉動體之重心。惟僅有轉動慣量爲最大或最小之軸(§ 36)爲穩定之轉動軸，此二者中前者尤較後者爲穩定。

物體繞其自由軸轉動時，若有外力作用於其上，欲變更其自由軸之方向，則此自由軸將呈頗爲奇異而複雜之慣性作用。迴轉子運動之情形，即可作爲一普遍之例。借此種

現象之理論太爲複雜，不能在此處討論。故以下所述者，僅限於基本之解釋而已。關於迴轉子運動之現象，須首述其自由軸之穩定性，換言之，迴轉子轉動至一足夠之角速度時，其自由軸可獨立不倒。其次，若轉動體之慣性頗大（轉動慣量頗大），每遇外來之作用，欲在空間變更其軸向時，恆沿作用面之垂直方向而轉動。試取腳踏車之輪，將輪軸向兩方接長使成一柄，便於手握，輪外之氣胎易以鉛製之輪緣，以增加其轉動慣量，即可作一美觀之實驗。繞繩於軸柄上面急抽之，輪即轉動極速，如迴轉子然（鉛輪緣須裝置牢固，否則脫輪飛出時，將危及旁觀之人）。

關於迴轉子運動之情形，吾人僅能述一簡單之例，而加以性質的說明。第31圖 *a* 示一圓板，繞 *AB* 軸而轉動，其轉動向如箭頭所示。在某瞬間，設有相等之二力 *k* 垂直於圖面而作用於軸之二端，

且二力適成一力偶（吾人可設想以二手握住迴轉子於 *A, B* 二點，按上述之方向將軸

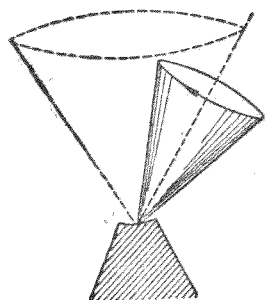


第 31 圖 關於迴轉子之理論

柄急轉之)。圓板對於 *AB* 軸轉動時之角動量爲 D_1 ，今因 *AB* 軸又繞一在圖面內垂直於 *AB* 之軸而轉動，故圓板又得一新角動量 D_2 。按 § 46 所定之法則， D_1 與 D_2 二向量箭矢之位置應如第31圖 *b* 所示，其合向量爲 D ，示明力偶 kk 停

止作用後角動量之量及向， D 之方向即為 AB 軸之新方向， A 端已向下移動， B 端已向上移動，換言之，軸之轉動方向，適與力偶 kk 逼使其轉動之方向相垂直。

兒童玩具之陀螺即為迴轉子之一種，陀螺之尖端立於地上，力矩 kk 即來自其重力，欲使其傾斜。按上節所述，陀螺軸之運動並不相應於此力矩之方向，而與之垂直。欲使由重力而來之力矩 D_2 出現，迴轉子初時自須略有傾斜之運動發生。祇須有些微之傾斜，力矩 D_2 立即出現，而迴轉子之軸即繼之沿一圓錐面而轉動（第 32 圖）。若完全不受摩擦阻力之影響，則陀螺將按上述之情形，沿錐面循環往復，無



第 32 圖 迴轉子之錐動

有已時，且此圓錐之頂角始終維持常定，歷久不變。但事實上轉動之速度恆因摩擦阻力而逐漸減小，錐角因之逐漸增大，陀螺終乃傾覆，迴轉子之軸若此在錐面上之運動，稱為迴轉子之錐動 (Precession)。

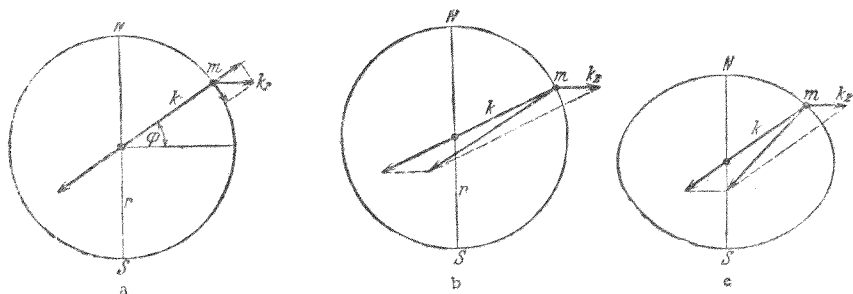
轉動物體軸方向之穩定在工業

上有一極重要之應用，即迴轉羅盤是。

吾人可利用電力以維持一物體之定速轉動，更用萬全懸掛法以懸之（如往日未有電燈時懸掛船中之油燈然），使其能按任何方向自由轉動。此種具有完全自由軸之迴轉子在地面上任何一處，其轉動軸之方向將因地球之自轉而繼續

變易。故此物體錐動不已。但在迴轉羅盤中，此項運動可用特製之裝置（以空氣流吹之）以消除之。於是迴轉子之軸恆指定向，即平行於地軸而精密的在地理南北之方向內，不再因地球之轉動而稍變。此種之羅盤較之磁針羅盤有二大利益，其一不受船內鋼鐵部份之擾亂，其二地磁力之偏角，即所謂錯向 (§ 301) 者，可完全免除。

49. 地球之自轉。地球為一完全自由軸之轉動體。由於太陽與月球之吸引，以及黃道之傾斜，而自太陽及月球發出之重力在地球上各處不為相等，其相背之一面每較相向之一面為弱，故亦發生錐動之運動，地軸之方向因之逐漸變遷，猶如一迴轉子然。地軸亦繼續沿一圓錐面而移動。今日地軸之指向北極星，乃為一暫時之現象。時過境遷，地軸又將更指他向，約歷 26000 年而繞行一週。地軸依之運動之圓錐面之頂角等於 47° ，適二倍於黃道之傾斜度；此傾斜度者即地球之赤道平面與其軌道平面間之交角。每隔千年



第 33 圖 地球上之離心力

之後，天象必將有顯著之變化，古時所見者與今日已大不相同。當大詩家 Homers 氏之時，在希臘所見大熊星座中之 η 星（即北斗第七星瑤光）終歲不落至地平線以下者¹⁾，今日已見其有時下落矣。

地面上之物體因地球之自轉而發生各種慣性作用，頗足一述。吾人先假設地球為一渾圓之球體。在緯度 φ 之某處地面上，設有一質點 m （第 33 圖 a）。此質點受有二力之作用，其一為正向地心之重力 k ，其二為垂直於地軸而沿輻向外之離心力 k_2 （隨同轉動觀察者之觀點，§ 38），其值為 $k_2 = m r \omega^2 \cos \varphi$ （ r 為地球半徑）。質點之所以能隨地球轉動者，端賴重力之作用，故其所需之向心力即仰給於重力。試將離心力分為二分力，其一沿地球之半徑，其二沿地面之切線，則前者與重力方向相反，後者使質點 m 向赤道移動（第 33 圖 b）亦示同一之情形，惟自他方面觀之，重力與離心力相加而成一合力。此合力不與球面垂直，故必有一與球面相切而向赤道之分力。從此可知凡在球面上一切可以自由運動之物體，皆將向赤道移動。故地球若為完全渾圓之球體，則地面上之任何物體，決不能維持平衡。重力與離心力之合力須到處均與地面垂直，平衡方為可能。由計算之結果，知此時地球必須為一兩極略扁之旋轉橢圓球；事實上地球

1) 參閱 Odyssee 第五章 274—276，及 Ilias 第十七章 487—489，關於此星，有 $\text{Ὁ ἦ δὲ ἄμμορος ἑστὶ λαστραὶ Ἰλιεαγοῦ}$ ，『獨彼一星兮，不知海浴』之句。

之形狀確係如此(第33圖c)。第33圖中所示之離心力,爲明瞭計,已特加放大,超出其與重力之比率。赤道上離心力之值爲最大,但僅約重力之 $1/300$ 。故地球兩極之扁平亦頗微。當地球尚在液體狀態時,已具略扁之狀。苟固體之地球本身確爲一渾圓之球,又假設海洋中含有無量之水——但實際則不然——則海面亦必呈略扁之形狀。

若物體在地面上沿一緯線自西向東運動,即與地球自轉之方向相同,則此物體之角速度 ω 必較速於地球之自轉,於是其離心力將較大於地面上靜止之物體,故其重量似因之減輕,自東向西運動時反是。此項作用已在駛行極速之船中作準確之擺動實驗以證明之。

若物體在北半球上沿一經線自南向北運動,則因其在地面上任一處離赤道愈遠者速度愈小,故此物體到達某處時,其速度在東西向上之分速必較大於該處地面本身之速度。仍命 r 爲地球之半徑, ω 爲地球自轉之角速,則在緯度 φ 處之各物體隨地球轉動之速度爲 $v = r\omega \cos \varphi$ 。若有一物體自緯度 φ 出發,沿一經線而運動至另一緯度 φ' , 則此物體達到目的地後,該處地面向東之速度爲 $v' = r\omega \cos \varphi'$ 與該物體之速度不同。此時物體對於地面有一東西向之速度 $u = v - v' = r\omega(\cos \varphi - \cos \varphi')$ 。故物體在北半球上向北運動時,恆較速於地球之自轉,反之,向南運動時則較遲。普遍言之,凡物體離赤道而向任一極運動時,對於地球之自轉爲前趨,反之,

向赤道運動時則落後。此種現象之顯著者，例如南北向射出之拋射體每稍歧離其原來之彈道。南北向之鐵道在北半球者，按車之前進向靠右邊之鐵軌恆磨損較烈，蓋此鐵軌須阻止車輪之右偏也；在南半球者，靠左邊之鐵軌亦然。河流之與子午線同向之一段，其兩岸為水流所沖毀者多寡不同，亦此理也。

物體自高塔下落也，每不鉛直，而輒向地球自轉之方向略偏。此蓋因塔頂較塔底離地軸稍遠，故其向東之速度亦較大。

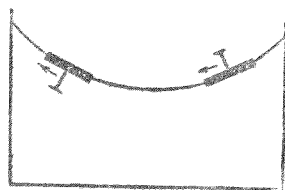
1661年時 Viviani 氏已在觀察地球自轉之現象，其後 Foucault 氏設計一實驗（即所謂 Foucault 氏擺動實驗，1850），可作地球自轉重要之證明，其實驗乃基於慣性力之原理而作。物體擺動時，吾人將見其擺動平面在空間內逐漸轉移，其方向與地球之自轉相反。在緯度 φ 處，擺動平面每小時內轉過 $15^\circ \sin\varphi$ 之角度。故擺動面在 24 小時內轉過之角度，在赤道上者為 0° ，在德京柏林者為 $285^\circ 36'$ ，而在二極者則為 360° 。若擺之懸線頗長，則僅擺動數次後，已可見其擺動面之轉移；法用弧光燈射懸線之影於一白牆之上，初時使擺動面與牆面垂直，不久即見線影逐漸向兩方擴張，以是知擺動面之轉移。此種現象之理論完全與實驗符合。

以上所述一切之現象可以一言蔽之，曰：凡運動之物體恆因其慣性而按曲率最小且不與所設條件相背之軌道進行。

轉動組中一物體在組中作相對運動時所遇之慣性作用，吾人特稱之曰 Coriolis 氏力。

50. 大陸之背極性。試詳察地球之現狀，大部份陸地咸聚集於赤道及中緯度一帶，而兩極區域尠見陸地。Wegener 氏以爲此種現象，亦由於離心力而來。吾人可視陸地爲浮於岩漿中之石塊，僅能在漿中艱難遲緩而運動。此種石塊重心之位置自必較爲其所排開之一部份岩漿之重心爲高。若無石塊，則因地球之形狀爲橢圓球，而該處適得平衡，該處之岩漿所受之離心力，必適足以使其與重力之合力垂直於該處之地面。但石塊重心之位置較高於未有石塊存在時該處岩漿之重心，是知其離地軸也較遠，其所受之離心力也自必較大，於是其重力與離心力之合力乃不與該處之地面垂直，而略帶傾斜。故此項合力有一與地面相切而指向赤道之分力，使石塊向赤道移動（Wegener 氏之大陸背極說）。設若石塊重心之位置較低於被擠開之一部份岩漿之重心，則石塊狀之大陸將趨集兩極矣。

此項現象更可由下述巧妙之實驗以明之。第 34 圖示一儲水之容器，可迅速轉動者（參閱 § 88）。一木塞上鑽有一釘，置於水面上。若釘頭向上，則當水面隨器急轉時，木塞將向內移動，若釘頭向下，則木塞向外移動。此無他，當

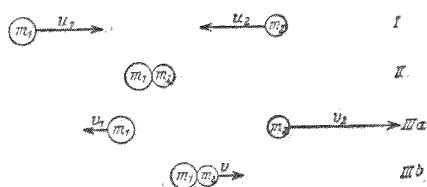


第 34 圖 關於背極性之解釋
Lely 氏原作

釘頭向上時，釘與木塞合成之物體組所受之離心力較被其擠開之一部份水所受者小，而釘頭向下時，較大故也。此處關於木塞及水之重心之相對位置，與上節所述石塊及岩漿之情形，適為相反，蓋此處水面之彎曲與上節地面之彎曲亦適相反也。吾人若視水面上之空間為地球，圖中左方所示之木塞與釘相當於大陸，則其所以離軸而移向赤道之理即瞭然矣。

51. 彈性與非彈性二種碰撞。欲示明能量原理及動量不滅定理，可用下述二物體之碰撞作為一簡單之例；吾人姑命二圓球以不同之速度在同一直線上運動，而作對心之碰撞（第35圖）。

當二物體碰撞時，其動能恆多寡有一部份變為他種之能量（發熱，物體之永久變形，以及發聲等等）。故互撞後物



第 35 圖 兩物質之對心碰撞 I 碰撞前 II 碰撞中 IIIa 碰撞後(彈性) IIIb 碰撞後(非彈性)。假設 $m_2 = m_1/2$, $u_2 = -u_1$, 則彈性為 $v_1 = -u_1/3$, $v_2 = +5u_1/3$, 非彈性為 $v = +u_1/3$ 。

體之動能恆較未撞前減少。但吾人可區別二種極限之情形，其一為完全彈性之碰撞，即撞後動能幾無絲毫變化者，其二為完全非彈性之碰撞，即動能之變化為最大，撞後二物體不再分離，而繼續共

同前進者。渾圓之二鋼球互撞時，與第一種情形相仿，而第

二種情形,可以油灰製成之二球體比擬之.

1. 彈性碰撞. 二物體互撞以後動量之和(衝量定理 § 33)及動能之和(能量原理 § 42)均與互撞以前完全相等. 設 m_1 及 m_2 爲互撞二物體之質量, u_1 及 u_2 爲撞前之速度, v_1 及 v_2 爲撞後之速度. 於是按能量原理

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \quad (36)$$

又按衝量定理,

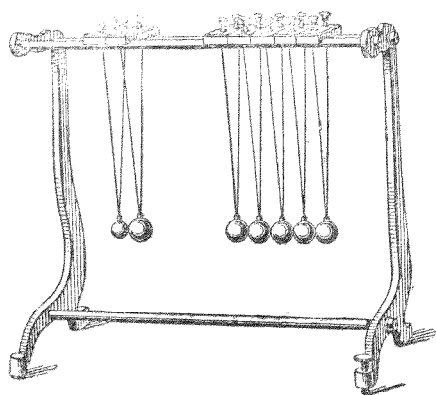
$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2. \quad (37)$$

從此二式可知:

$$v_1 = \frac{u_1(m_1 - m_2) + 2u_2 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{及} \quad v_2 = \frac{u_2(m_2 - m_1) + 2u_1 m_1}{m_1 + m_2}. \quad (38)$$

今假定二物體之質量相等,且第二物體未撞前爲靜止,即 $u_2 = 0$. 則從上式可得 $v_1 = 0$, 而 $v_2 = u_1$. 故在此特例中,二物體碰撞後,其速度適互相交換.

欲示明此種現象,可利用第 36 圖所示之儀器,器上有一羣完整之鋼球,各以雙線懸之. 最有趣味者可作下述之實驗. 試將一邊之一球或數球提起,而任其撞於其餘之他球. 吾人將見球列之他端必有個數相同之鋼球隨之躍起,衝撞之球立即靜止,而該端鋼球躍起時之速度適與此端鋼球衝撞時之速度相等. 命衝撞之球數爲 a , 每球之速度爲 u , 躍起之球數爲 b , 速度爲 v . 則按能量原理



第 36 圖 鋼球碰撞儀器

$a \cdot \frac{1}{2} m u^2 = b \cdot \frac{1}{2} m v^2$, 又按衝量定理 $a \cdot m u = b \cdot m v$, 從此可知 $u = v$ 及 $a = b$, 與實驗所示者相合 (衝撞之鋼球無一個被折躍回者, 此乃由於球列中碰撞作用之傳遞, 恆需一有限之時間所致)。

2. 非彈性碰撞. 在此情形中, 衝量定理仍屬合理, 蓋互撞之二物體間僅有內力作用也. 惟能量原理當易以一新添之條件, 即二物體互撞後速度 v 相等. 故

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2) v. \quad (39)$$

從此可得:

$$v = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}. \quad (40)$$

若 $m_1 = m_2 = m$ 而 $u_2 = 0$, 則 $v = u_1/2$. 在此特例中, 二物體互撞

後動能之和為 $\frac{1}{2} (2m) \left(\frac{1}{2} u_1\right)^2 = \frac{1}{4} m u_1^2$, 而在未撞前則為

$\frac{1}{2} m u_1^2$. 故在此例中動能之半已變為他種形式之能量(大

部份為熱能及變形工作)

欲示明非彈性碰撞之現象, 亦可用第 36 圖之儀器, 衝

撞之鋼球上塗以油灰,使互撞後二球合併成爲一體。

於此,足見計算物理現象時,普遍原理之極屬重要矣。上例中僅應用能量原理及衝量定理,與夫對心碰撞之假設,已足以計算所涉現象之經過,所略去者僅碰撞之本身,即兩物體互相接觸時之情形,然此非吾人此處所欲知者。

因此種之思索於原理上頗關重要,故更將二物體沿任何方向普遍的彈性碰撞用圖形示明之(第37圖)。二物體

m_1 與 m_2 各以動量 m_1u_1 與 m_2u_2 而運動,

當其公共重心 S (§34) 移至 Z 點時,二物體互相碰撞。故未撞以前二物體咸向 Z 點進行。吾人可視此二物體

爲一個物體組,其動量之總值可於重心點作各物體之動量向量,按向量法 (§11) 相加而得(箭矢 R)。今試考察

互撞後其公共重心已移至 S' 點之一

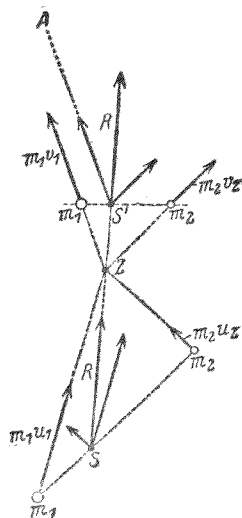
瞬時二物體運動之狀況。二動量之

和 R 之量與向不因碰撞而稍變 (§33), 吾人可假設碰撞之結果(其間詳情人

所不知), m_1 沿一平行於 $S'A$ 之方向進

行。欲求二物體互撞後動量之量及向,吾人須將總動量分

爲二個分量,其一在 $S'A$ 之方向內者。但將一向量如此分解,每可得無數種不同之分法,吾人可於其中選擇一種,即各



第 37 圖 關於彈性碰撞之理論

物體速度之值須適合能量原理者(若非爲完全彈性之碰撞,則損失之動能亦當一併計算在內)。按此方法,吾人可得一如第 37 圖所示之作圖法。今當求公共重心已移至 S' 點時二物體之位置。自 Z 點(因二物體在該點互撞後,即自該點出發,繼續運動)作二直線,各平行於新速度之方向,又作一直線通過 S' 點,使其爲二直線所截成二段之長度適反比於二物體之質量,蓋 S' 即爲此時二物體之公共重心也。其兩交點即爲 m_1 與 m_2 此瞬時之位置。於是互撞後之情況及其以後之進行,均可完全決定。

以上所述,僅爲一種特例,即碰撞之二物體僅當實際上彼此相觸之一瞬間方有一力作用於其間者,除此以外,因無他力之作用,故二物體各沿直線以定速前進。但二物體間之作用力可爲其距離之函數(如重力,電引力,或電斥力等)。其時二物體如相距頗遠,即在碰撞前後相隔頗久之時,其間之作用力爲值極微,雖視爲無力,亦無不可,故與上述之情形根本無甚差異。所異者僅爲碰撞正在進行中之經過情形,蓋此時須歷一較長之時間,在二物體彼此之作用力業已顯著之區域內,碰撞作用即已發生。欲計算碰撞以後之末態,須先知碰撞以前之初態,互撞時之『彈性度』,即二物體因碰撞而損失之能量,以及撞後任一物體速度之量或向。在此一切情形中,互撞物體動量和之量及向始終不變,而能量原理謂:物體互撞後所剩之能量,加以互撞時損失之能量,其和

恆等於撞前之能量。此類碰撞，二物體實際不必相觸，祇須彼此進入有顯著的引力或斥力之區域內，受此種力之作用，其原來之直線軌道即逐漸偏轉，終乃復離作用力區域而另取一新直線軌道。例如氣體分子之碰撞 (§ 94) 即屬此類。

若互撞之物體除動能外尚有轉能，則於比較互撞前後之能量時，此轉能亦當計算在內，且此外尚須加一角動量不滅之定律 (§ 46)。

52. 力學諸量之因次。力學中一切之量俱可以 C.G.S. 制中三種之基本量，即長度，質量及時間導出之，而其單位可用 [厘米]，[克]，[秒] 表出，且可書成此三種單位冪次相乘積之形式。吾人謂力學諸量在 C.G.S. 制中各有一定之因次。在 C.G.S. 制中與此三種基本量相應者有三種基本因次，即長度，時間及質量之因次，各以 $|l|$ ， $|t|$ 及 $|m|$ 表之。導出量之因次為此三種基本因次冪次之相乘積，即 $|m^a l^b t^c|$ ，其中之 a ， b ， c 或為正數，或為負數，亦可為 0。純數之因次為 $|z| = |m^0 l^0 t^0|$ ，蓋純數初不涉任何單位也。茲將力學中最重要諸量之因次列於第 1 表中。

第 1 表 力學諸量之因次及單位

質量……… $ m $ ，[克]	加速度…… $ l t^{-2} $ ，[厘米][秒] ⁻²
長度……… $ l $ ，[厘米]	力……… $ m l t^{-2} $ ，[克][厘米][秒] ⁻²
時間……… $ t $ ，[秒]	壓力……… $ m l^{-2} t^{-2} $ ，[克][厘米] ⁻² [秒] ⁻²
速度……… $ l t^{-1} $ ，[厘米][秒] ⁻¹	動量……… $ m l t^{-1} $ ，[克][厘米][秒] ⁻¹

能量, 功	$m l^2 t^{-2}$	[克][厘米] ² [秒] ⁻²	頻率	t^{-1}	[秒] ⁻¹
工率	$m l^2 t^{-3}$	[克][厘米] ² [秒] ⁻³	轉動慣量	$m l^2$	[克][厘米] ²
角速	t^{-1}	[秒] ⁻¹	力矩	$m l^2 t^{-2}$	[克][厘米] ² [秒] ⁻²
角加速	t^{-2}	[秒] ⁻²	角動量	$m l^2 t^{-1}$	[克][厘米] ² [秒] ⁻¹

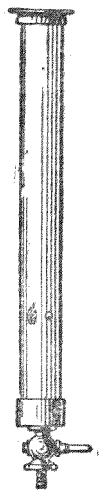
第六章 重力

53. 重力與由重力而起之加速度. 重力,或稱萬有引力,爲地面上一切物體被引向地心之力. 地面之上,無一物體能脫離重力之作用. 故重力亦爲物質共具之一種普遍特性,如慣性然. 靜止之物體必賴他物體以固定之,而其重力卽由其施於此他物體之壓力或拉力所呈顯. 對於自由運動之物體,重力爲使之下落,卽使之作加速運動之原因.

地面上各處之重力不盡相同,物體之距地心近者,其所受之重力大. 故兩極上物體之重力較赤道上者爲大(因地球兩極略扁),而在海面上者亦較在高山者爲大. 但在地面範圍之內,其相差甚微(見1式).

據精密之實驗,知不同之物體因重力而生之加速度完全相等,且與物體之種類完全無關. 此卽謂一切物體自同一之高度自由下落時,假設除重力外絲毫不受他力之作用,則下落之遲速皆同(Galilei 氏 1590). 但據吾人所見,似不盡然(如鉛塊與羽毛同時下落),此乃因空氣中下落之物體,除受重力外,尙受空氣摩擦阻力之作用,而此項阻力對於各種之物體強弱大有不同也. 試自高塔或高層建築物之上將重量不同之磚塊與鉛塊任其自由下落. 作用於其上之摩擦阻力較之重力爲極小. 故二物體着地之時間幾爲相

同。試納鉛球與羽毛於同一玻璃筒內(第 38 圖)。以抽氣機排去其空氣,則二者將以同速下落。



第 38 圖
物體下落同速

物體在某處自然下落至地面上時,其加速度之值爲

$$g = 980,62 (1 - 0,00264 \cos 2\varphi - 0,0000003h) \text{ [厘米]/[秒]}^2, \quad (1)$$

式中 φ 爲該處之緯度, h 爲距海面之高度,以[米]表出者,在中緯度處,其值以整數表之約爲

$$g = 981 \text{ [厘米]/[秒]}^2.$$

54. 重性質量. 凡物皆有重量,其原因可歸之於物體內部之一種特性——其理由當卽於以下申述之——猶如慣性之原因爲慣性質量,故重性之原因卽稱爲重性質量或簡稱重質。

吾人姑以 m' 表之。命物體之重質與作用於其上之重力成正比,則選定一單位後,物體之重質卽可由其重力測量之,例如懸物體於一螺旋彈簧之下,而觀察其伸長之多寡。

設一物體之重質爲 m' , 慣質爲 m , 則按 Newton 氏第二公理 (§ 23), 重力應爲 $m \cdot g$ [達因] ($g = 981 \text{ [厘米]/[秒]}^2$), 而按上述重質之定義, 重力正比於 m' , 故

$$mg = m'a \quad (2)$$

式中之 a 爲一常數。因一切物體在同地之 g 均爲同值, 故任何物體 $\frac{m'}{m} = \frac{g}{a}$ 亦均應相等。從此可知各物體之慣質

與重質必互爲正比。吾人咸一致同意命此比率之值等於
即命一物體之重質直接等於其慣質(按吾人之經驗,祇知 m' 正比於 m 而已。但重質之單位可任意選擇,故命 $m = m'$,初無窒礙)。於是在 C.G.S. 制中重質之單位亦爲[克]。嗣後慣質與重質通常不再加以區別。

物體之慣質與重質相等,意即謂物體之重量愈大者,欲使其運動也愈難,此爲日常經驗中人人所習知,一般未習物理學者直不知尚有慣質與重質根本上之差異。一物體在一平面之上,不問其能自由運動與否,祇須難以推之使動者,吾人輒謂其『重』,殊不知其原因與重力毫不相關。慣質與重質之相等(或嚴密的互成正比),雖似足以解釋此項原因,但此純爲一由經驗而來之事實,初非一目即可瞭然者。擺動之實驗 (§ 60) 始與吾人以最準確之證據。

慣質與重質相等之事實爲 Einstein 氏廣義相對論之基礎 (§ 540)。

55. 重量。物體之重質所受地球吸引之力稱曰該物體之重量。重量爲力,故在 C.G.S. 制中以[達因]量之。質量爲 1 [克] 之物體,由於其重性而所受之力,亦即當其止息於一固定之他物體上時施於該物體上之力,等於質量與重力加速度二者之相乘積 mg , 故在海面上時其值爲 981 [達因]。普遍言之,一物體之質量爲 m [克] 者,與其重量相應之力即爲 mg [達因]。但在日常生活中,記載重量時所用力之單

位，習慣上咸不取[達因]，而取1[克]（或1[公斤]，或1[毫克]）質量之重量為重量（力）之單位，與質量之單位無別。但 m [克] 質量之重量為一力，與質量 m [克] 之本身當有區別為佳。故記載重量時，於其單位名稱之旁加以星號（[克*]，[公斤*]，[毫克*]）。於是[克]字表質量之[克]數，而以[克*]字表重量之[克]數，在 C.G.S. 制中

$$1[\text{克}^*] = 981[\text{達因}].$$

因 g 之值隨物體與地心間之距離而異，故物體之重量亦隨高度而異，但質量則為常定。在高山之上物體恆較平地上略輕（但慣性不減！），每高 1000 [米]，重量約減輕 1/3000。故在 3000 [米] 之高度稱 1 [公斤] 之質量時猶如在平地上稱 999 [克] 之物質，即 1 [公斤] 之物質在該高度時之重量為 999 [克*]。但用天平稱物，重量不見減小，蓋物體之重量由砝碼測定之，物體與砝碼隨高度而減小之重量固完全相同也。欲測重量因高度而減輕之值，可用精密之彈簧秤，因彈簧之力，不以高度而稍變。

重量之隨高度而減輕，對於吾人日常生活無甚重要之意義。商業交易上稱物時，一方面因此種之減輕恆為值甚微，故不必計較；而他方面稱物之目的不在測定其重量而在測定其物質之多寡，即其質量。販夫以砝碼稱 1 斤之牛油，不問在高山，抑或在平地，其中恆含等量之物質；販夫所計者僅如是而已。

56. 比重. 密度. 容度. 設有不拘多寡之均勻物質,其重量爲 k [克*], 體積爲 V [厘米]³, 則此二者之比率

$$\frac{k}{V} = \sigma \text{ [克*] / [厘米]}^3 \quad (3)$$

對於該物質在同一情形(同壓力及同溫度)下恆爲同值 σ . 吾人稱此值爲該物質之比重. 按(3)式,其數值等於1[厘米]³物質之重量. 故比重之定義爲單位體積之重量.

按[克]之定義 (§ 23), 4°C. 時水之比重等於1[克*]/[厘米]³. 故一物質之比重,數值上應等於該物質任一定量之重量與其同體積 4°C. 之水之重量之比. 故物體之比重亦常以其重量與同體積水重之比爲定義. 苟若此,則比重(作爲比率)應爲一純數. 但此項定義吾人不欲採用.

按 § 53 物體之重量,視其在海面上之高度而異,故嚴格言之,比重亦依高度而異,惟相異之值甚微.

在 § 23 中,吾人已述一物質密度之定義,爲該物質單位體積內之質量,

$$\frac{m}{V} = \rho \text{ [克] / [厘米]}^3 \quad (4)$$

故(略去重量隨高度頗小之變更)由(3)式定義之比重,數值上與密度相等. 但此二量之物理的因次不同,吾人須嚴加區別之. 質量 m 之重量 k 等於 mg [達因],故在 C.G.S. 制中比重應等於 mg/V [達因]/[厘米]³,而在此制中

$$\sigma_{\text{C.G.S.}} = \rho g [\text{達因}] / [\text{厘米}]^3. \quad (5)$$

密度 ρ 一如質量之本身，亦與高度無關。

一物質密度之倒數稱爲其容度 V_s ，爲單位質量亦即 1 [克] 之物質所佔之體積。

故一物質之體積爲 V [厘米]³ 者，其質量爲

$$m = \quad [\text{克}], \quad (6a)$$

而其重量爲

$$k = \sigma V [\text{克}^*], \text{ 或 } \rho g V [\text{達因}], \quad (6b)$$

質量爲 m [克] 之物質所據之體積爲

$$V = V_s m [\text{厘米}]^3, \quad (6c)$$

又

$$V_s = \frac{1}{\rho} [\text{厘米}]^3 / [\text{克}]. \quad (7)$$

物體之形狀簡單者，其比重可直接由稱出之重量與量出之體積測定之。形狀複雜者，則須用他法 (§ 89)。

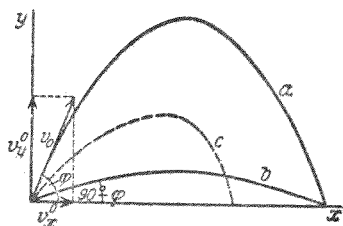
第 2 表 比重，單位爲 [克*] [厘米]⁻³。

鋁	2,7	酒精	0,791
鉛	11,3	水	0,9997
鐵	7,6—7,8	水銀	13,595
金	19,3	氫	0,00008985
銅	8,9	氮	0,0012507
鈉	0,97	氧	0,0014291
珀	21,4	空氣	0,0012928
玻璃	2,4—2,6	二氧化碳	0,0019768
苯	0,881	氮	0,0001785
醚	0,717		

上表中固體與液體之比重，溫度皆爲 0°C.，氣體則溫度

爲 0°C ., 壓力爲 1 大氣壓.

57. 地球重力場中之運動. 下落與拋射. 設有一物體在空間可自由運動, 試按任何之方向以某速度拋射之, 則其後繼之運動恆受重力之影響, 而其軌道通常即因之彎曲. 命時間爲 $t=0$ 時物體在某一位置, 其平行及垂直於地面之坐標爲 $x=0$ 及 $y=0$, 此時物體具有一速度 v_0 , 在 xy 面之內, 其軌道與水平之 x 向所成之交角爲 φ (第 30 圖, 曲線 a). 於是其速度在 x 及 y 二方向上之分速爲



第 30 圖 地面上物體受重力作用後之軌道(斜拋)

$$v_x^0 = v_0 \cos \varphi \quad \text{及} \quad v_y^0 = v_0 \sin \varphi \quad (8)$$

水平方向之運動不受重力之影響. 鉛直方向內有一向下之重力加速度

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g. \quad (9)$$

將(9)式積分之, 更參以(8)式得

$$\frac{dx}{dt} = v_x^0 = v_0 \cos \varphi, \quad (10 a)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin \varphi - gt. \quad (10 b)$$

再度積分之, 得

$$x = v_0 t \cos \varphi \quad \text{及} \quad y = v_0 t \sin \varphi - \frac{1}{2} g t^2. \quad (11)$$

將上二式消去 t , 即得物體軌道曲線之方程式

$$y = x t g \varphi - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi}. \quad (12)$$

此爲一拋物線之公式。其頂點爲軌道之最高點。此點處 $dy/dt=0$, 故自(10 b)式得上昇時間 t_h 爲

$$t_h = \frac{v_0 \sin \varphi}{g}. \quad (13)$$

以此代入(11)式, 得射高 $y=h$ 爲

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g}. \quad (14)$$

下降之曲線與上昇時爲對稱。自(12)式可導出物體復達平地 $y=0$ 時之射程爲

$$x_m = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{v_0^2}{g} \sin 2 \varphi. \quad (15)$$

自此式可知初速爲定值時, 以二不同之拋射角可得相同之射程, 即 φ 與 $\pi/2 - \varphi$ (第39圖, 曲線 b)。此因 $\sin \varphi = \cos(\pi/2 - \varphi)$ 而 $\cos \varphi = \sin(\pi/2 - \varphi)$ 故也。基於此項事實, 故砲術中有陡彈道及平彈道之分。

空氣之摩擦阻力恆不能避免, 拋射體之速度愈大者, 此阻力亦愈大, 故射體軌道恆顯著的不與曲線 a 或 b 相合。其下降之一段輒較上昇之一段爲陡, 而射高及射程均視前

減小(所謂彈道,第39圖c).

按(15)式,當 $\sin 2\varphi=1$, 即 $\varphi=45^\circ$ 時,射程爲最遠. 其值爲 $x_m=v_0^2/g$. 此值恰較其所能達到之射高大四倍,蓋按(14)式 $h=v_0^2/4g$ 也.

若將物體鉛直向上拋射,則 $\varphi=90^\circ$, $\cos\varphi=0$, 而 $x=0$. 於是自(15)式可得

$$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2, \quad \frac{dy}{dt}=v_0-gt, \quad h=\frac{v_0^2}{2g}, \quad t_h=\frac{v_0}{g}. \quad (16)$$

物體自某高度下落至其原來之水平面 $y=0$ 所需之時間與上昇此項高度之時間相等. 故自一點出發上昇後,經 $2t_h=2v_0/g$ 之時間而仍返原點. 上昇時間正比於初速 v_0 . 上昇之高則正比於初速之平方.

設有一物體當時間爲 $t=0$ 時,在高度 h 處以初速 $v=0$ 而下降,將(9)式積分之,得

$$\otimes \quad \frac{dy}{dt}=-gt, \quad y=h-\frac{1}{2}gt^2 \quad \text{或} \quad h-y=\frac{1}{2}gt^2. \quad (17)$$

故下降之距離 $h-y$ 與下降時間 t 之平方爲正比. 歷1秒鐘後,其值爲 $1g/2=490$ [厘米](約數),2秒鐘後, $4g/2=1960$ [厘米](約數),以此類推. 下降速度則隨時間而遞增. 將上式加以簡單之變換後,得物體下降 h 距離後之速度爲

$$v=\sqrt{2gh}. \quad (18)$$

1 秒鐘內下降之距離已爲頗大,故欲證明上述之規律,

須用極長之下降路程。Galilei 氏於 1590 年首先發見物體下落之定律，於 1604 年精密的以公式表出之，其所用以作為研究者，為 Pisa 地方著名之斜塔，氏自塔之各層將磚塊任其自行下落而觀察之；以該塔作為實驗室，其適用乃無與倫比¹⁾。

自以上之方程式頗易導出鉛直上拋之物體在 y 高度時之動能。此為

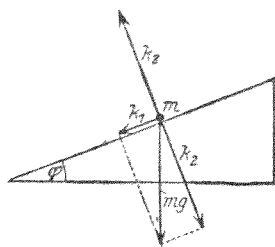
$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv_0^2 - mgy \quad \text{或} \quad \frac{1}{2} mv^2 + mgy = \frac{1}{2} mv_0^2. \quad (19)$$

第二式之右邊為物體在水平面 $y=0$ 時之動能，左邊為其在 y 高度時之動能，加以 mgy 一項。今因 mg 為作用於物體上之重力，故按 § 44, mgy 為將物體提起至 y 高度處所費之工作，亦即等於將物體若此提高後物體所得之位能。(19) 式之意蓋謂拋射物體動能與位能之和(略去空氣之摩擦阻力)恆為常定。上昇時動能漸減而位能藉以漸增，下降時則反是。故自由上拋及自由下落亦遵守能量不滅之定理 (Huygens 氏, 1673)。

58. 斜面上之下落。斜面者，係一平面而與水平面成一 φ 角者(第 40 圖)。設一物體之質量為 m ，能在一斜面上不受摩擦阻力而運動。物體所受之重力為 mg ，鉛直向下。

1) Galilei 氏(1564—1642)為今日之物理學之鼻祖。氏設計實際之實驗，以方程式表出物理學之定律，實為新時代之第一人。

試將此力分爲彼此垂直之二分力 k_1 與 k_2 , 其一與斜面平行, 其二與斜面垂直。此二分力中, 僅平行於斜面之分力能使物體加速下落。此力之值爲 $k_1 = mg \sin \varphi$ 。垂直之分力 $k_2 = mg \cos \varphi$, 則使物體緊壓斜面, 但不能使之在此方向上加速, 蓋其作用適爲斜面施於物體上之反作用力 (逼力, § 30) k_2 所抵消,



第 40 圖 斜面

k_2 固恆與 k_2 等量而反向者也 (事實上物體 m 確係同時受二力之作用, 一爲重力 mg , 一爲逼力 k_2 , 而 k_1 卽爲此二力之合力, 見第 40 圖)。故有效力爲

$$k_1 = m\gamma = mg \sin \varphi, \quad (20)$$

式中 γ 爲物體沿斜面向下之加速度。

設一物體在斜面之頂點, 斜面之高爲 h , 長爲 S , 則其與斜面足點間之距離爲 $S = \frac{h}{\sin \varphi}$ 。物體一脫牽掣, 卽以遞增

之速度下降此 S 之路程, 歷 t 時間後, 其所經之路程爲 (§ 20)

$$x = \frac{1}{2} \gamma t^2 = \frac{1}{2} g t^2 \sin \varphi, \quad (21)$$

此時物體已有之速度爲

$$v = \gamma t = g t \sin \varphi \quad \text{或} \quad v = \sqrt{2 g x \sin \varphi} \quad (22)$$

故物體下降斜面之全長 S 後所有之速度爲

$$v = \sqrt{2gS \sin\phi} = \sqrt{2gh} \quad (23)$$

但按諸(18)式,此與自由鉛直下落 h 高度後之速度相等。再者,此又爲能量原理簡單之推論,蓋在此二種情形中,位能之減少既屬相同,動能之增加自必相等也。

若斜面不爲平面而爲一斜度變化之曲面,則吾人可視其爲由傾斜不同之無數極小平面組合而成,其情形正復與上述者相同。

欲將一質量爲 m 之物體在一斜面上向上推之使經 S 之路程,換言之,將其提高 $h = S \cdot \sin\phi$, 則因重力之有效分力爲 $mg \sin\phi$ [達因], 而物體所經之路程爲 S , 故此時所需之工作爲

$$A = m \cdot g \cdot S \cdot \sin\phi = mgh \quad [\text{爾格}] \quad (24)$$

此項工作與將其鉛直提起 h 高度時所需之工作相等。故將一物體沿斜面上提高時與鉛直提高時所需之工作相等, 但斜面之斜度愈小者,所需之力愈小,蓋鉛直提高時之有效力爲全部之重力,而斜面上重力之有效分力以有 $\sin\phi$ 一因數而較小也。惟物體所經之路程則愈長。

欲作斜面上物體下落簡單之實驗,可用 Galilei 氏所製用以證明下落定律之傾斜槽,一球可在槽內滾下者。吾人測定與不同之時間相應之下落路程,即可由此證明上述之定理。由此實驗,可證明斜度相同時,下降之距離與自開始運動起所歷時間之平方成正比。下落時間與傾斜角 ϕ 之

關係可變更其斜度以證明之。

惟滾動之球自不合於上述理論中假設之無摩擦滑動之物體。物體除移動之動能外，尚具有轉動之能量。自其下降某距離後，其一部份之位能已化爲轉動能量，故移動之動能即因之減小此值。球之速度當較無摩擦滑下物體之速度爲小。若球與傾斜槽僅相觸於一點（球不與槽之二邊相觸），則按 § 36，其慣質似增大 $\frac{2}{5}$ 。於是 (20) 式應寫成 $\frac{7}{5}m\gamma$

$=mg\sin\phi$ ，或 $\gamma = \frac{5}{7}g\sin\phi$ 。此式右邊之重質自仍不變。故滾

動之結果使重力加速度 g 之有效值減小 $\frac{5}{7}$ 。若球與槽之

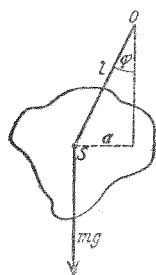
兩邊相觸，則此項作用更大。

59. 重心。 作用於一物體上之重力實爲作用於其各質點之重力之合力。此種之力皆相平行，且各正比於各質點之質量。故與關於純粹加速度之慣性力之條件 (§ 34) 完全相同。一物體對於重力作用之質心，其意義完全與對於慣性力作用之質心同，故通常亦以重心稱之。不論物體之方位何若，吾人可理想其重力恆作用於其重心。

60. 擺。 凡受重力作用之物體（懸於一定點或一固定之水平軸）而能自由轉動者，統稱之曰擺。轉動點或轉動軸究在體內抑在體外，俱無關重要。若任其自然，則物體所止之位置，其重心必鉛直在懸點之下。若將其拉開使離此自然

之靜止位置，則物體即對此位置發生振動，其離開此靜止位置之角移 φ 為時間之週期函數。吾人茲僅討論角移頗小時之情形，即在以下之計算中， $\sin\varphi$ 可逕以角度 φ 代之者 (§ 8)。

命擺之質量為 m ，對於懸點 O 之轉動慣量為 J 。物體之重心 S 與懸點 O 間之距離為 l (第 41 圖)。



第 41 圖

擺動定律之導出

懸於 O 點，或固結於一通過 O 點之水平軸，其情形皆為相同(若懸軸不為水平，則下述之計算須稍加改變)。吾人先假述擺之平面振動。

作用於物體之重心上者為重力 mg 。

故物體之角移為 φ 時所受使之復位之力矩為

$$N = -mga = -mgl\sin\varphi = -mg\varphi.$$

(力矩使 φ 角減小，故上式之右邊須用負號)。按 § 47，得

$$N = J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\varphi = -D\varphi, \quad (25)$$

式中 $mgl = D$ 。按 § 47， D 為擺之單位扭角力矩。於是

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D\varphi. \quad (26)$$

此微分方程式之解式前已在 § 47 中導出，且已求得一物體組之轉動慣量為 J ，單位扭角力矩為 D 者，其振動週期為

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} \text{ [秒]}, \quad (27)$$

在此例中即爲

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} \text{ [秒]}. \quad (28)$$

命 J_0 爲擺體對於一垂直於其振動面而通過其重心之軸之轉動慣量。於是按 Steiner 氏定理 (§ 36) 其對於 O 點之轉動慣量等於 $J = J_0 + ml^2$ 。若物體之大小較之 l 之長爲頗小，則 J_0 較之 ml^2 可以略去不計，而物體可視爲一質點，不論擺動至任何位置，其重心 S 恆在質點所在之處。此種理想上之擺稱爲數學擺，亦稱單擺，以別於實有之所謂物理擺，亦稱複擺。以 $J = ml^2$ 代入 (28) 式，即得

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \text{ 秒}. \quad (29)$$

單擺之週期正比於擺長 l 之方根。此項定律於 1596 年時爲 Galilei 氏由實驗所發見。以 $g = 981$ [厘米]/[秒]² 之值代入 (29) 式，知單擺之長爲 1 [米] 者，其週期幾爲 $\tau = 2$ [秒] (所謂秒擺)。

物理擺亦可以數學擺想像之，其物理的意義有如下述。物理擺之運動吾人可理想其分爲二種之擺動，其一爲對於 O 點之擺動，物體在空間之方位不變，其二爲物體對於其重心軸之擺動。物體之形狀頗小者，其第二部份之動能爲值頗小，雖略去之亦無不可。

在 (28) 式中以

$$\frac{J}{mg} = \lambda [\text{厘米}], \quad (30)$$

代入，則物理擺之週期可寫成

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}} [\text{秒}]. \quad (31)$$

將(29)與(31)二式相比較，可見 λ 爲一單擺之長，其週期與所設擺之週期相等者。故吾人稱 λ 爲複擺之等值單擺長。

均勻之實球體質量爲 m ，半徑爲 r 者，對於通過其重心（球心）之一軸之轉動慣量爲 $J_0 = \frac{2}{5}mr^2$ 。倘將此種之球懸於一繩之下端，其球心與懸點間之距離爲 l ，則按 § 36，此球對於懸點之轉動慣量應爲

$$J = \frac{2}{5}mr^2 + ml^2 = m \left(l^2 + \frac{2}{5}r^2 \right).$$

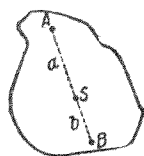
於是此複擺之等值單擺長應爲

$$\lambda = l \left(1 + \frac{2}{5} \frac{r^2}{l^2} \right) [\text{厘米}].$$

例如 $l=100$ [厘米]， $r=1$ [厘米]，則 $\lambda=1.00004l$ ，與 l 僅相差 $1/25$ [毫米]。故若此之複擺，已頗與一單擺相似。

61. 用擺以測定 g 值。 試取一物體——質量不可太小，如渾圓之鉛球，頗爲合用——以一不爲太短之繩懸之，用一準確之擺鐘以測出其振動之週期，則按(29)式或(31)式即可計算地球加速度 g 之值，且可得相當之精確度。

若用可倒擺以測 g 值,則精確度益增. 命 J_0 爲一物體對於一通過其重心 S 之水平軸之轉動慣量(第42圖),此軸與圖面垂直. 懸此物體於一通過 A 點之水平軸, A 與 S 之距離爲 a . 於是物體之振動週期爲 $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + ma^2}{mga}}$. 在一通過 A 與 S 之直線上重心之他方,恆可覓得一點 B , 其與 S 之距離爲 b , 若將物體懸於一通過 B 點而與前平行之軸時,其振動週期 τ 可與懸於 A 軸時之週期相等. 於是



第42圖 關於可倒擺之理論

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + ma^2}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + mb^2}{mgb}} \quad \text{或} \quad \frac{J_0 + ma^2}{a} = \frac{J_0 + mb^2}{b}.$$

將此方程式中之 b 解之,則除顯而易見之 $b=a$ (即 B 與 A 相重時)一根外,尚有一根爲

$$b = \frac{J_0}{ma}.$$

AB 之長,即爲 a 與 b 之和,即

$$AB = a + \frac{J_0}{ma} = \frac{J_0 + ma^2}{ma} = \frac{J_0}{ma},$$

式中 J 爲復擺對於通過 A 之一軸之轉動慣量. 但按(31)式, AB 之長即爲懸於 A 軸之物體之等值單擺長 λ , 而同時又因週期相等,故又爲懸於 B 軸時之等值單擺長. 故用此法恆可測得物體之等值單擺長;若週期亦經精確測定,則從此即可計算 g 之值.

第43圖示其簡單之實用裝置。一金屬棒上附有二物體 m_1 及 m_2 可在棒上任意移動，通常二物體均作透鏡形，以減少空氣之阻力。棒上另裝有相向之二刀口，一在二物體之間，一在其外。以任一刀口騎於適宜之平臺上（瑪瑙質或鋼質），則此棒即可振動而成一擺。移動二物體之位置，務使懸於二刀口時擺動之遲速相等而止。因二刀口均頗鋒銳，故其間之距離可非常精密測定之，此項距離即為其等值單擺長 λ 。用此法測定 τ 與 λ 後，按(31)式即可計算 g 之值，十分精確。



第43圖
可倒擺

前述物體之重質與慣質成正比，或即謂其為相等，曾以物體之自由下落為實驗的根據 (§54)；若以擺動之實驗證明之當更為確切。吾人可注意轉動慣量 J 中含有慣質，復位力矩 D 中含有重質。按(27)式振動之週期須取決於 J/D 之比，亦即慣質與重質之比。若此比之值對於一切物體不為相等，則吾人將見形狀完全相同，懸法亦為相同，惟以不同之物質製成之二擺，其振動週期 τ 將不為相等。此項問題不難嚴格證明之，蓋擺之頻率可由觀察多次之振動而十分精密測量之也。吾人已有非常精密之實驗設計以應此項用途由此所得之結果，確已示明慣質與重質相等之定理殊為可靠。

62. 穩定不穩與隨遇三種平衡。受重力作用之物體，僅

當其重力爲一等量反向之力所抵消時，方能平衡。此種平衡之例，在吾人日常生活中，觸目皆是。週圍吾人之物體大都皆係靜止，故此等物體均爲平衡。若將其移動少許使稍離其靜止位置，而後仍縱之任其自然，則通常此等物體尙不受摩擦阻力者，恆即返至原處，例如靜止之擺稍離其靜止位置，桌上之匣稍受傾側皆是；凡類此之平衡，咸稱曰穩定。吾人又可想像一種情形，即物體稍離其平衡位置後，雖毫無摩擦阻力之作用，但可逗留於其新位置，隨遇而安焉，例如均勻之圓球在一絕對水平之面上，或均勻之輪駕於軸上而可任意轉動，以及一切物體，其支點適在其重心上者。若此者稱曰隨遇平衡。尙有第三種情形，物體稍離其平衡位置後，即自行繼續遠離，終乃止於另一穩定平衡之新位置。此可以直立於指尖而平衡之杖比擬之，但此例並非代表平衡，蓋欲其直立不倒，須將手指隨杖運動，始能維持其平衡也。此種理想的平衡稱曰不穩。惟事實上任何物體方止於若此之位置時，恆已爲極微之擾亂所牽動而離開此位，故此種平衡，極鮮實現，蓋地面上此種極微之擾亂，實無法避免之也。不穩平衡在事實上初非持久之狀態，僅足供理論上之討論而已。

穩定平衡有時頗似不穩平衡，物體稍經傾側即離其穩定位置，先至一不穩位置，終乃至另一穩定之新位置而止。木板直立於其側面，修長之圓柱直立於其底，皆爲其例。極

輕之震動，已足使木板傾側，繞其底面之一邊而轉動，經過一與其初位密接之不穩平衡位置，而終乃達一新穩定位置，即橫臥於其面積較大之一面。此類之平衡稱曰介穩平衡。

物體在任何平衡位置時，其可能的運動輒為某種條件所限制。例如擺體懸於繩之一端，其在空間之運動不能出乎以擺長為半徑之球面。桌上所置之匣子，其任何一點，決不能至桌面之下。

上述在重力作用下三種特殊之平衡，同受一普遍條件之束縛，即物體平衡時，其重心恆取一極端之位置。

1. 穩定平衡時，物體之重心取最低位，惟此所謂最低者，自須合於限制運動之條件。

2. 不穩平衡時，物體之重心取最高位，此亦須合於限制運動之條件。

3. 隨遇平衡為穩定與不穩二種平衡之過渡情形。物體離其靜止位置而運動時，其重心之高度不變者，即為隨遇平衡。

平衡之位置，有時常須同時認為穩定與隨遇者，其區別在其若何離開靜止之位置。例如橫臥於水平面上之圓柱滾動時，重心不昇不降，就此方面觀之，其平衡為隨遇平衡；對於其他一切可能之運動而言，皆為穩定平衡。

吾人移動一物體使離其平衡位置時，其重心之高度每有變更，物體之位能 (§ 44) 必隨之增減。按前述之條件，凡遇

穩定平衡時，物體重心之位置僅可提高，故任作若何可能之運動，其位能均將因之增加，即吾人須加工作於物體之上，始克使其離穩定位置而運動。凡遇不穩平衡時，重心僅可降低，方不與上述之條件相背，故任何運動，物體之位能恆因之減少，而吾人可從此得一工作，例如物體因之作加速運動。凡遇隨遇平衡時，將一物體移動既不需工作，亦不能得工作，故其位能不變。

上述各種平衡之定義更可伸述之如下：物體穩定平衡時，位能爲最小，不穩平衡時爲最大。隨遇平衡爲二者間之極限。

以位能之大小作爲各種平衡之定義，如上節所述者，非特對於受重力作用時爲然，即受其他各種之力，如彈性力，電力或磁力等之作用時，亦均爲合理。

一物體通常具有許多穩定及不穩之平衡位置。例如置於桌上之匣子，穩定位置有六，即以匣之六面任一面爲底之時，不穩位置有二十，即以十二稜之任一稜或八角之任一角爲底之時。但單擺祇有一個穩定位置。

物體置於水平面上時，其穩定平衡之條件爲自其重心作至平面之鉛直線須通過物體靜止於平面上之底面（支持面）。懸體在其穩定平衡位置時，其重心恆鉛直的在懸點之下（吾人須注意，不可即以此項條件爲平衡位置之普遍定義，蓋此僅適合於上述之特例耳）！

各物體離其穩定位置以後，尚未至一不穩位置以前，其間所經位置之變遷多寡各有不同，吾人即可以此值量一平衡位置之穩定度。故在不同之方向內，穩定度通常不盡相等。一物體向一方之傾側，可較向他方者為易。

63. **Newton 氏萬有引力定律。** Isaac Newton 氏(1643—1727)始創重力作用，不僅限於地球上物體之理想，彼以為宇宙內任何物體之間亦均應有之(萬有引力定律, 1683)，此實為亙古以來思想界上最大傑作之一。由此，氏即確言逼使月球繞地依一圓周軌道運行之力(向心力, § 37)非他，即為地球作用於月球之重力，其情形正復與地面上物體所受者相同。不特此也，苟重性為一切物質共具之普遍特性，即任一物質對於其他物質，恆有一引力存乎其間，則太陽與其繞行之行星間，亦必有此同類之力存在。由此理想，Newton 氏即建立一關於二物質 m 與 M 間引力 k 之萬有引力定律。命二物體重心間之距離為 r ，則

$$k = -G \frac{mM}{r^2} \text{ [達因]}. \quad (32)$$

此項關係 Kepler 氏先已知之。此式之意，謂二物體間之作用力，正比於其質量，而反比於其重心間距離之平方。 G 為一常數，稱為萬有引力普遍常數。在 C.G.S. 制中其值為

$G = 6.65 \cdot 10^{-8}$ [達因][厘米]²/[克]² 或 [厘米]³/[克]·[秒]²，二質點質量各為 1 [克]，相距 1 [厘米] 時，其間相引之力頗微，

等於 $6,65 \cdot 10^{-8}$ [達因]。(32)式之負號,示作用於一物體上之力與自他物體引至其上之向徑方向相反,故所示為引力,換言之,即謂一力恆欲使距離 r 縮短者也。

命 m 為地面上一物體之質量。按 § 54, 作用於其上之重力 k 為 $-mg$, 其中 $g=981$ [厘米]/[秒]² (此處之力用負號,因其向地心故也)。今若以物體之質量代 m , 地球之質量代 M , 地球之半徑 ($R=6370$ 公里) 代 r , 則因此即為物體與地心間之距離, 故 k 必合於 Newton 氏萬有引力定律。於是得

$$k = -mg = -G \frac{mM}{R^2} \text{ [達因]}, \text{ 或 } g = G \frac{M}{R^2} \text{ [厘米]/[秒]}^2. \quad (33)$$

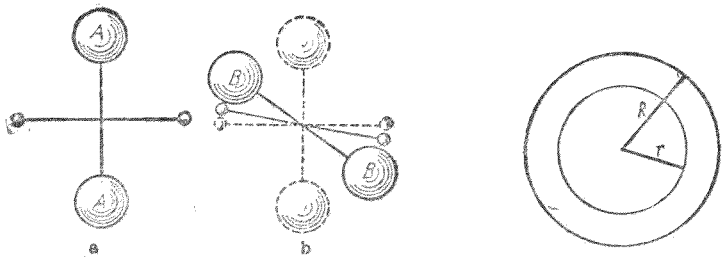
g 與地球半徑 R 之值均為已知, 若萬有引力普遍常數 G 之值亦為已知, 則可從此計算地球之質量。Richard 與 Krigar-Menzel 諸氏曾作極精密之實驗以測量大鉛球作用於輕物體之引力。由此計得地球之質量約為 $6 \cdot 10^{27}$ [克] = $6 \cdot 10^{21}$ [公鐵], 而其密度 (§ 56) 約為 $5,5$ [克]/[厘米]³。此密度為值不小, 吾人可斷言地球內部必含有較重之物質。更據其他許多之事實, 吾人深信地球之大部份皆由鐵與鎳所組成。

物體間之引力, 可用 Cavendish 氏 (1798) 所創之實驗證明之。其法用一轉秤, 即一棒兩端各附一小鉛球, 懸之使能轉動自如者 (第 44 圖)。置二大鉛球於相對之位置, 如 44, 則大小球間之引力適彼此抵消 (但其平衡為不穩平衡)。

若置於 BB 之位置,則大球對小球之引力成一力矩,使之轉動。

64. 地球內部之重力。若有一質量 m 在另一質量 M 之內,例如一物體在地球之內,則(32)式不再合理。命地球半徑為 R , m 與地心之距離為 $r < R$ (第45圖)。假設地球所自組成之各球層皆為均勻,則自簡單之積分可知由 r 與 R 二半徑間球層所起萬有引力之量與向均彼此相消,而所餘者僅為一 r 半徑球體之作用。若 ρ 為地球之密度,且命其到處相等,則此球體之質量 M' 等於 $4\pi\rho r^3/3$,而

$$k = -G \frac{mM'}{r^2} = -\frac{4\pi}{3} \rho G m r.$$



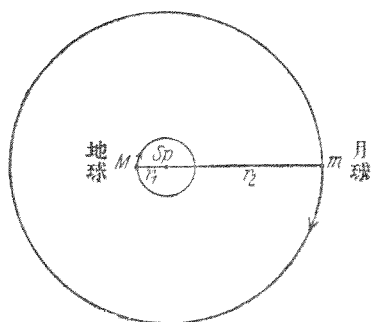
第 44 圖 Cavendish 氏實驗用以示明萬有引力者 第 45 圖 地球內部重力之導出

故在地球之內部重力正比於自地心之距離 r (形式上此與彈力相應, § 82)。在地球以外逐漸趨近地球,重力按 $1/r^2$ 而漸增,到達地面後,重力亦達其最大值。穿過地面後,重力復依 r 而遞減,到達地心後,其值為零。在地球外間者,重力之加速度為 $\gamma_e = gR^2/r^2$, 在地球內部者 $\gamma_i = gr/R$ 。但地球之

密度初非到處相等，故此自不能絕對合理。地殼之密度較小於其內部。

65. 月球之運動。萬有引力說之真確，自 Newton 氏用以計算月球繞地運行之週期後，而始得第一個顯著之證明。月球沿一圓周軌道（頗為近似）繞地運動。但地球本身亦非靜止（地球繞日以及全太陽系之運動，與此處無關，故不計在內）。靜止者當為地球與月球之公共重心 S_p ，蓋此處所涉者僅為地球與月球所成物體組中之內力作用也。命 r 為地球與月球間之距離， M 為地球之質量， m 為月球之質量， r_1 為地球重心與公共重心 S_p 之距離， r_2 為月球重心與 S_p 之距離，按 § 34，此公共重心 S_p 之位置，應由 $Mr_1 = mr_2$ 之關係定出之（第 46 圖），而 $r_1 + r_2 = r$ 。

故月球沿大圓周，地球沿小圓周，同繞其公共重心 S_p 而轉動，二者各以相同之時間運行全週，換言之，即二者之角速 ω 相等。事實上公共重心 S_p 之位置尚在地球以內，離地心約為地球半徑之 $3/4$ ，——蓋 M/m



第 46 圖 月球運動之說明

約為 81，而 r 約為地球半徑之 60 倍，不難估計之約如上值——，第 46 圖所示者，為易於明瞭計，不與事實符合。

按 § 38，月球與地球物體組內之平衡，端賴此二天體間

之引力(向心力)與作用於各天體上之離心力之相等,即

$$Mr_1\omega^2 = mr_2\omega^2 = G\frac{M\omega}{r^2}.$$

從此項關係及(33)式,不難計算

$$\omega^2 = \left(1 + \frac{m}{M}\right) \cdot g \frac{R^2}{r^3} \cdot [\text{秒}]^{-2}.$$

若 τ 爲月球之週期,則 $\tau = \frac{2\pi}{\omega} \cdot m/M$ 爲值極小,可略去不計,

故

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{gR^2}} [\text{秒}]. \quad (34)$$

吾人試以 $R=6370$ [公里] $=6,37 \cdot 10^8$ [厘米], $r=60,3 R$, 及 $g=981$ [厘米]/[秒]² 代入(34)式,則得 $\tau=27,3$ [日],與實際情形相合.

從(34)式,知 τ^2 與 r^3 成正比. 若地球亦有數個月球各依圓周軌道而運行——如其他行星然——則各月球週期 τ 之平方,必正比於其重心至地心距離 r 之三次冪(參閱 Kepler 氏第三定律, § 66).

66. 行星運動. Newton 氏自其萬有引力定律純用數學之計算推得行星運動之定律,適與 Kepler 氏(1609 及 1618)純粹根據天文學上觀察而得者互相吻合,此爲萬有引力定律最大之功績. Kepler 氏三定律之言曰:

1. 行星依橢圓軌道運行,太陽之位置爲其一焦點.

2. 從太陽引至任一行星之直線(向徑),在等時間內恆掃過等面積.

3. 行星運行週期之平方各與其橢圓軌道長軸之立方成正比.

關於第一定律者, 行星軌道之偏心率,亦即橢圓軌道與圓周軌道之差,大都為值極微. 水星之值等於 0,20561, 為最大,金星之值等於 0,00682, 為最小. 地球軌道之偏心率為 0,01675.

精密言之, Kepler 氏第一定律尚須略加修正. 蓋以上之說法,實有背重心運動不變之定理(§ 35). 在最簡單之情形中,假設太陽祇有一個行星,其與此惟一行星之公共重心必位於太陽與行星二者之重心之間,行星每運行一週,此公共重心亦將隨之繞太陽重心一週,是則二天體間雖僅有內力之作用,即力皆自其本身發出,然其公共重心仍將不為靜止. 故事實上太陽亦必運動,有如上節所述月球對於地球之運動然,在此假設太陽僅有一個行星之情形中,太陽之重心亦必沿一橢圓軌道而運動,其軌道之一焦點,與行星橢圓軌道之一焦點相合,此相合之焦點即為二天體之公共重心. 但實際上太陽之質量較之一切行星質量之總和猶為頗大(330000 倍於地球, 1047 倍於木星,而木星之質量已大於其他一切行星質量之總和 750 倍),故整個太陽系之公共重心,與太陽之重心相離極近,太陽之橢圓運動自可略之不計.

在實用天文學中，各行星間互相吸引之作用未可略去。行星軌道之擾動，即以此發生。此項擾動不易計算，蓋通常決不能用數學方法自萬有引力定律求出三個或三個以上彼此相引之物體整齊之運動式也（所謂多體問題）。縱欲計算其近似情形，亦已十分繁複。精確計算月球之運動時亦然，蓋最要者，其運動亦不免為太陽之引力所牽擾。

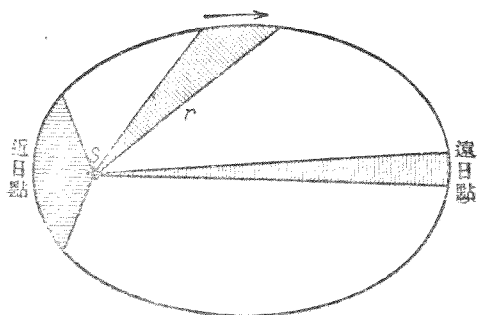
週期之彗星，原理上亦遵守 Kepler 氏之定律。此種彗星大致具有偏心率頗大之軌道。但當其沿軌道上運行時，均不免傍近一行星，以致輒受極大之擾動。故欲預算其再見之時日，常不能十分準確。在大多數情形中，吾人可視『失蹤』或『新生』之彗星皆為受有此種擾動以致其軌道不可捉摸者；而大多數之彗星皆有週期性，即恆在太陽系之中，而永不遠離者。無週期彗星之軌道必為拋物線或雙曲線。週期極大之彗星，在太陽附近之一段軌道已頗與拋物線相近似。

合於 Kepler 氏定律之例亦見於太陽系以外。恆星界中頗多雙星，此乃為相離較近之一雙鄰星，因彼此相引之作用而互作旋繞之運動者。此與太陽祇有一個行星且其質量與太陽不甚懸殊者相仿。在此情形中，自當應用修正後之 Kepler 氏第一定律，即須注意二物體同作運動，二恆星各沿橢圓軌道繞其公共重心而轉動。

地面上拋射物體 (§57) 之軌道，事實上為一橢圓『行星軌

道』之縮影，而視地球爲太陽者，此項軌道確與橢圓長軸一端附近之一段曲線相合。惟此處吾人可以一拋物線代之，仍屬非常精確，軌道之最高點即爲拋物線之頂點。蓋此處吾人嘗略去一事，即軌道上各處向地心之重力，嚴密言之，在空間中非爲同向也。

關於第二定律者，Kepler 氏第二定律之意義，可以第 47 圖表示之。圖中劃線之部份面積相等，相應於向徑在等時間內掃過之面積。此項定律之必須存在，可自能量原理導出之。行星離日愈近，其位能愈小，故其動能必愈大，即其速度必愈增。離日最近處（近日點）軌道上之速度爲最大，離日最遠處（遠日點）速度爲最小。



第 47 圖 Kepler 氏第二定律之說明

Kepler 氏第二定律亦稱爲面積定理。凡任何物體受一自固定中心發出之力（中心力）之作用而運動時，此第二定律普遍均可適用，其他二定律，則僅於此作用力正比於 $1/r^2$ 時方爲合理。

關於第三定律者，Kepler 氏之第三定律，前 (§ 65, 34 式) 已於討論月球之圓周軌道時證明之。同理，可證明其對於行星之圓周軌道亦為合理，但自 Newton 氏之萬有引力定律且可證明其對於橢圓軌道亦為合理。

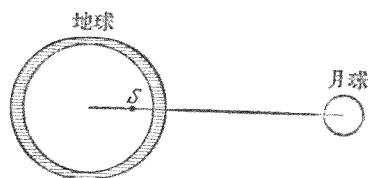
宇宙內一切物體之間，俱有萬有引力之作用，雖因相距非常遙遠，其力非常微弱，但經數百萬年，恆星運動終將受彼此牽涉之影響。宇宙中多處所見分佈非常稀薄而尚未凝成恆星之物質（暗星雲）之間亦有彼此吸引之作用。歲月變遷，此種星雲物質中之各部份恆向其公共重心互相吸引，於是逐漸厚積，其溫度因此增至極高，而終成一新恆星焉。

按數學之推論，知 Kepler 氏之第一及第三定律均從萬有引力定律而得，其惟一之條件乃為 k 力須正比於 $1/r^2$ 。第二定律則對於任何中心力均為合理，已見上述。故此三定律，非特對於中心力為萬有引力時為合理，即對於其他一切之力，祇須在二物體間作用時反比於其間距離之平方者，如二電荷間之作用力，亦皆合理。苟環境適宜，則此等物體之運動，必依 Kepler 氏之定律（所謂 Kepler 氏運動）。在原子論中，此項事實有重要之應用。

67. 潮汐。 潮汐之漲落，互相更迭，Newton 氏亦歸其原因於重力之作用，謂係由於海水之為月球與太陽所吸引，惟太陽之作用強度僅及月球之半。

本節中僅述月球之作用。欲明瞭此項現象，有一事頗

關重要，即月球繞地一週，地球同時亦繞二者之公共重心 S 一週，此公共重心之位置在地球之內，離地心約地球半徑之 $3/4$ (§ 65)。地球繞 S 轉動時，其與月球相向一面之軌道半徑較相背一面為短，其慣性作用（離心力，§ 37）亦因之較小。海水除受各處大致相等之地心引力外，尚受有其他二力之作用，其一為月球之引力，其二即上述之慣性力。海水之在向月一面者，其所受月球之引力恆使地面上重力之作用減小。且因其繞地球與月球之公共重心而轉動，故此部份之海水又感受慣性力 ($mr\omega^2$)，其方向又與地心引力相反，以致地心引力益見減小；幸此力為值不大，蓋此處之軌道半徑 r 亦不大也（約為地球半徑之 $1/4$ ）。海水之在背月一面者，其所受月球之引力確與地心

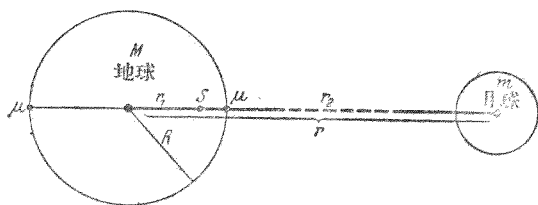


第 48 圖 潮汐略圖

引同向，但由於地球轉動而生之慣性力則與此反向，且因其軌道半徑頗大（約為地球半徑之 $7/4$ ），而此力亦為值頗大，足以超過月球之引力而有餘；故地面上此處亦有減小重力之作用出現。在上述二部份間地面上之各處，此項作用初漸減小，後乃漸增。故蔽於地面上之水面，不復仍為球形，而有如被拉長者然，其最高處即為此二部份（第 48 圖）。

向月及背月二部份之海水漲潮時，何以高度相同，觀上節之理論尚不足以解釋。此似由於地球與月球間之距離

及其大小之比恰為適宜所致。事實上向月一面所受離心力與月球引力之和，須等於背月一面所受離心力與月球引力之差，潮面方能同高；但此二力間何以有此基本關係存在，則決非驟觀之不加思索即可察見。下述之計算，正示明其所以相等之理，頗饒趣味。命 r 為月球重心與地球重心間之距離， S 為地球與月球之公共重心， r_1 為公共重心至地球重心之距離， r_2 為至月球重心之距離，故 $r = r_1 + r_2$ (第49圖)。 S 之位置，可從 $Mr_1 = mr_2$ ($M =$ 地球之質量， $m =$ 月球之質量) 之關係式定出。於是 $r_1 = rm / (M + m)$ ，而 $r_2 = rM / (M + m)$ 。命 R 為地球之半徑，則 r 約為 $60 R$ ；又 m 約為 $M/81$ 。故 $r_1 = 60 R/82$ ，或約為 $3 R/4$ ，此值前已述及之。



第 49 圖 關於潮汐之理論

命 ω 為地球與月球繞公共重心轉動之角速。此二天體之離心力與二者互相吸引之向心力恆為反向，而按 § 63 此值應為

$$Mr_1\omega^2 = mr_2\omega^2 = G \frac{Mm}{r^2}, \text{ 或 } \omega^2 = Gm/r^2r_1 = G(M+m)/r^3.$$

命 μ 為地面上任意一質量， k_1 為該質量在向月一面

時由於月球引力及離心力所成之合力, k_2 爲在背月一面時之合力,此二合力均與地心引力之方向相反. 於是得

$$k_1 = G \frac{\mu \cdot m}{(r-R)^2} + \mu(R-r_1)\omega^2, \quad k_2 = -G \frac{\mu \cdot m}{(r+R)^2} + \mu(R+r_1)\omega^2.$$

更將前述 ω^2 及 r_1 之值代入此二式,得

$$k_1 = G\mu \left[\frac{m}{(r-R)^2} - \frac{m}{r^2} + (m+M) \frac{R}{r^3} \right],$$

$$k_2 = G\mu \left[-\frac{m}{(r+R)^2} + \frac{m}{r^2} + (m+M) \frac{R}{r^3} \right].$$

今 R 遠較 r 爲小,約僅爲 $r/60$ (見前). 吾人可將上式中之分母 $(r-R)^2$ 及 $(r+R)^2$ 展開成一級數,略去二次幂以上各項,於是

$$k_1 = G\mu \left[\frac{m}{r^2} \left(1 + \frac{2R}{r} \right) - \frac{m}{r^2} + (m+M) \frac{R}{r^3} \right] = G\mu (M+3m) \frac{R}{r^3},$$

$$k_2 = G\mu \left[-\frac{m}{r^2} \left(1 - \frac{2R}{r} \right) + \frac{m}{r^2} + (m+M) \frac{R}{r^3} \right] = G\mu (M+3m) \frac{R}{r^3}.$$

故略去數值極小之高次幂諸項後, $k_1 = k_2$. 上述之計算中,地球與月球大小之比之特別值僅於展開級數時用之. 故凡遇二天體之半徑遠較二者間之距離爲小時,上述之結果均爲合理.

因 m 較 M 爲頗小,故上述二力之式亦可書成

$$k = k_1 = k_2 = G\mu M \frac{R}{r^3}.$$

但地面上之重力 k' (§63) 爲

$$k' = G \frac{\mu M}{R^2}.$$

故 $k = k'R^3/g^3$ 或約爲 $k'/200000$. 是則在地面上向月及背月之處, 重力似較其正常之值約小 $1/200000$. 地面上他處之重力亦見減小, 其減小值之數量級亦與此相仿, 惟均較該二處者爲少, 故向月及背月之處潮漲最高.

月球繞地一週 (27, 3 日), 則漲潮之最高點亦在空間繞過 360° . 若地球不作自轉, 則每隔 27, 3 日, 此最高點當沿地球週繞一次. 但地球每 24 小時自轉一次, 即地面上之任一點在向月背月之二個最高潮面下鑽過一次, 故地面上之各處約於 $24\frac{3}{4}$ 小時內輪流漲潮落潮各二次.

潮汐之成因除由於月球之作用外, 尚受太陽較弱之作用之影響; 二者彼此之位置時易, 故其作用有時互相加強 (大潮), 有時互相減弱 (小潮). 漲潮落潮時潮面高低之差與海岸之形狀亦頗有關係, 在曠洋之中, 其差可達數 [米] 以上.

因地球繼續在高潮面下鑽過, 向前轉動不已, 故海水中永久有一摩擦阻力存在, 此阻力足以減少地球轉動之能量, 於是地球之自轉速度必將因之逐漸減小, 換言之, 晝夜將因之延長. 但此項影響爲值極微, 自有歷史以來, 人類尙未之覺也. 尙有一事, 亦基於相同之理, 即吾人所見之月面, 從未變易, 是知月球恆以同面向於地球, 當其繞地一週時, 月球本

身必自轉一次。當月球尙未凝固以前，其流體狀之物質必因地球之吸引而成極強之潮汐。由此所生之摩擦阻力，使月球相對於地球完全不能自轉。

68. 超距作用與媒遞作用。 十九世紀末葉以前，重力嘗被認為一種超距作用，意即謂自一物體作用於他物體時，其間之空間內可不起任何變化。故當時吾人以為此種作用在空間之傳播可不需時間，換言之，即其傳播速度可為無限大。電力作用之傳播，在昔時亦認為一種超距作用。

此種觀念，今已棄置頗久。按相對論之說，任何作用在空間傳播之速度不能超過真空中之光速（300000 [仟米]/[秒]）。於是超距作用說遂被媒遞作用說亦稱場說者起而代之。此新學說之內容，謂空間內某處有一物體存在時，其週圍之空間立即因之變成某種情況，嚴格言之，全宇宙均被波及，於是凡遇有其他物體在空間內任何一處出現時，該物體即因之感受一力之作用，其強弱按萬有引力定律而異。吾人遂謂此空間荷有力場（重力場）。以後尙當述及他種之力場。重力作用傳播之速度，迄今尙不能測量。但重力作用之傳播，似與光之速度相同，可無疑義。

69. 引力位與引力場強度。 設一物體 m 受另一物體 M 之引力作用，則 m 每有運動，使兩物體間之距離增加時，恆須賴有一反抗引力之工作；使距離縮短時，吾人恆可從此得一工作。故物體 m 對於 M 所具之位能與二者間之距離 r 有

關係,今若定其值在 $r=\infty$ 時爲零(按 § 44, 位能之零點可任意選擇),則按 § 63, (32)式,

$$A = \int_{\infty}^r G \frac{mM}{r^2} dr = -G \frac{mM}{r} \text{ [爾格]}. \quad (35)$$

所謂空間某處之引力位 P 者,乃指一單位質量,即 1 [克] 之物質,在該處時之位能而言. 故空間內任意一點與物質 M 之重心相距爲 r 者,該處之引力位爲

$$P = -G \frac{M}{r} \text{ [爾格][克]}^{-1} \text{ 或 [厘米]}^2 \text{ [秒]}^{-2} \quad (36)$$

吾人亦可謂空間內某點之引力位者,乃爲吾人將 1 [克] 之物體,自該點移至與吸引物體相距無限遠時所得之工作. 按 (35) 式,此工作之值應爲負,蓋事實上此時吾人須反抗引力而作工於此物體之上也.

引力場強度云者,乃謂 1 [克] 之物體在空間內任一點時因萬有引力之作用而所受之引力. 若空間僅有一個吸引物體 M 存在,則按 § 63, (32)式,其引力場之強度爲

$$G = -G \frac{M}{r^2} \text{ [爾格][克]}^{-1} \text{ [厘米]}^{-1} \text{ 或 [厘米]} \text{ [秒]}^{-2}, \quad (37)$$

按此式與 (33) 式,可見地面上 ($M =$ 地球之質量, $r =$ 地球之半徑) 各處引力場之強度選等於各該處重力之加速度 g , 普遍言之,萬有引力場之強度恆等於加速度,蓋因有 (力)

$= (\text{慣性質量}) \times (\text{加速度})$, 與 $(\text{力}) = (\text{重性質量}) \times (\text{場強度})$ 之關係存在也 (但若在他種之力場內, 如電場等, 則此項關係並不合理)。

第七章 力學定律之應用¹⁾

70. 機械 在吾人日常生活中,有所謂機械者,應用力學定律最廣。工業上之機械可分爲發動機械與工作機械二種。發動機械可將自然界中原有之任何形式之能量變爲一種所需形式之能量,蒸汽機,電動機,發電機等皆屬之。工作機械則將自發動機械供給之能量變爲所需之工作,如車床,鑽床,刨床等以及運輸機,起重機,壓力機等皆屬之。發動機械原來之能量可不拘任何種類。最簡單者,常取任何物體自高處下落時所給出之位能,尤以水爲最常用之物體;或取任何物體之動能,例如流動之水或空氣(風)等。或取熱能爲輸入之能;但熱能本身,則又爲化學能量經燃燒作用而生者(汽機,內燃機)。尙有多種機械藉人力或獸力以發動之;此種之能,則來自人體或獸體中正在進行之化學作用(一人以打字機打字,則人猶如發動機械,打字機猶如工作機械)。

此處僅及純粹力學性之機械,其輸入及輸出之能量,除因摩擦阻力而化成無效之熱能者外,皆屬力學性;故主要者皆爲工作機械。凡此類之機械皆有一公共之特點,即機中

1) 本章所述者並不求其完備,凡所舉之例惟求醒目而能闡明力學之應用。

皆有可以運動之部份。許多力學性之機械，或用以變更物體之位能(昇高)或動能(例如水平移動之加速工作)，或同時變更二者。其他之機械則用以抵抗種種可能之阻力。在一切機械中，摩擦阻力恆不能完全避免，故皆須同時抵消之。有數種之機械幾全用以臻此目的。例如火車之機車或船舶之發動機，初動時用以產生加速工作；但在任何彎曲軌道上之水平移動既達穩定速度後，則僅用以產生抵抗摩擦阻力之工作。

今試觀察一反抗重力之工作，作為一簡單之例。設欲將一物體背重力作用之方向鉛直舉起一 h 之高。按 § 40 所述，欲作此工，先須有一與重力等量反向之力以抵消重力。既有此力(假設毫無摩擦阻力)，祇需另一任何微弱之推力或拉力，按指定之方向繼續作用，物體即以定速按此指定方向前進。若運動時尙遇有摩擦阻力，則其所需之工作亦須源源輸入。

自然界中各種可用之能源，——如人體，獸體，下注之水等——其工率 (§ 45) 咸有一最高限度，即每秒鐘內能作之工，不能超過某值。不特工率有限度也，即原有可用之力，通常亦有其最高限度，故在許多情形中，輸入之力每不足以滿足上述之條件——即須將阻力抵消。例如一人之力可陸續將千斤之重物運至十尺之高，但此僅可分批零運之。千斤之重固非一人之力一舉所能勝任，但此項工作則彼確可完

成之。輸入之能量與輸出之工作俱可以力與路程之相乘積量之；設仍不計摩擦阻力，通常力學性之機械皆係用以變更此相乘積者，換言之，藉以變成他力與他路程之等值的相乘積，此他力者適足以作所需之工者也。若一力 k_1 作用於一力學性機械之一端，經一路程 s_1 ，而在機械之他端，即產生一他力 k_2 ，通常不與 k_1 相等者，經他一路程 s_2 ，若毫無摩擦阻力之損失，則按能量原理

$$k_1 s_1 = k_2 s_2.$$

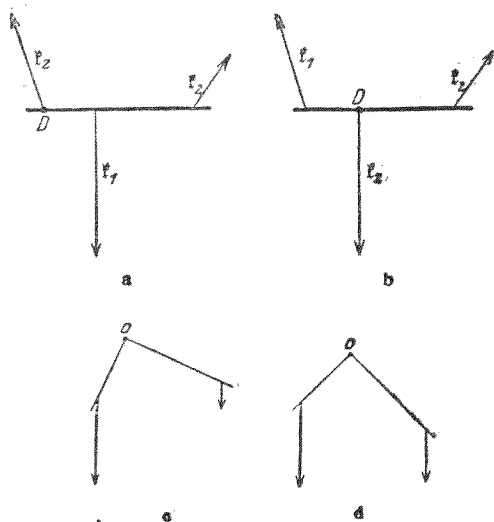
自此式可知作用力藉機械之助而增加時 ($k_2 > k_1$) 路程必隨之相應的減小 ($s_2 < s_1$)。若略去摩擦阻力，則路程與作用力恆為反比（所謂力學之金科玉律 Goldene Regel der Mechanik）。

大多數之機械皆以變更力之大小是務，但亦有用以變更路程之長短者，不可忽略之。例如時鐘，即屬後者之一類；其彈簧之一端舒展時或重物下落時所經之極短路程，可變為指針頂端轉動時較長之路程。輸入之能量僅用以抵消摩擦阻力而已。

任何複雜之力學性機械，恆為若干簡單之基本機件組合而成，即所謂簡單機械者是也。簡單機械又可分為二大類，即槓桿類及斜面類。第一類之最著者，除槓桿本身外，尚有輪軸及滑車，第二類則有尖劈及螺旋。

71. 槓桿類機械。 槓桿之定律已備述於 § 32 中。槓桿

之支點恆爲逼力 k_2 之着力點,已見前述. 實用上槓桿可分爲固定支點及滑動支點二種. 例如支於定軸上之槓桿屬第一種. 起重曲槓則屬第二種. 又支點可在二外力着力點之間(稱爲雙臂槓桿),亦可在二着力點之外(稱爲單臂槓桿)(第50圖 *a* 及 *b*),若此在實用上又可分爲二種.



第 50 圖 *a* 單臂槓桿 *b* 雙臂槓桿 *c* 及 *d* 作用於位置不同之角槓桿上之力

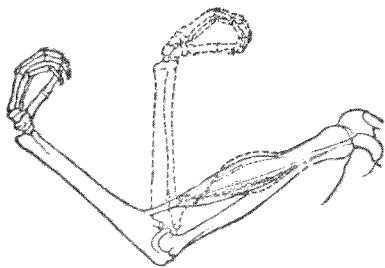
三力之着力點不在同一直線上,不如第 50 圖 *a* 及 *b* 者,稱爲角槓桿(第 50 圖 *c* 及 *d*).

吾人日常生活所用之一切器具中有逕名爲槓桿者,乃爲本節所述槓桿類機械最直接之應用. 提起重物以及抵抗任何他種阻力時常用之. 例如唧筒柄,其製造或爲單臂槓桿,或爲雙臂槓桿,蒸汽機上一部份之機械,以及輪掣,脚踏

車之踏板等俱爲槓桿。吾人最常用之工具，如鉗與剪等，皆或爲單臂槓桿，或爲雙臂槓桿。獨輪小車，亦應用槓桿作用而製成。吾人可視全車爲一槓桿，輪軸卽爲其活動支點。人力所不能舉之貨物，每可藉此舉起而運之前進，車柄愈長者愈佳。

在許多情形中，槓桿之形式又化作輪狀，例如啓閉活門之輪狀柄（用於熱汽管及蒸汽機等）。輪緣之上附以曲柄，可握之使輪繞軸轉動，如井中汲水時所用之機械，亦爲一種槓桿。在古式之吊口井中，尚有用尋常之槓桿以昇降吊桶者。其他之例，如門窗之拉手以及多種工具之握柄等，吾人

每可引長槓桿之臂以增加作用力之力矩 (§ 31) (如起軟木塞用之螺旋鑽孔機，以及鎖鑰之握柄等)。



第 51 圖 人臂爲一槓桿

人體之四肢亦爲槓桿。

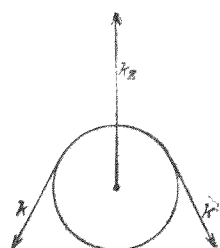
第 51 圖示一手臂之例。

72. 滑車及滑車組。

滑車爲工業上重要之槓桿類機械之一。定滑車爲一可繞定軸轉動之輪，其周緣以繩索，皮帶或鏈條等圍之（第 52 圖）。

繩之二端各受 k 力作用時，若二力相等，則滑車平衡。命二力間之交角爲 φ ，則軸上卽因之生一逼力 k_2 。其值等於 $2k \cos \varphi/2$ 。

實用上定滑車大都用以變換如繩內張力等作用力之方向，或用以傳遞轉動之運動（發動機之皮帶傳遞），但作用力之強弱不能藉以變更。



第 52 圖 定滑車略圖

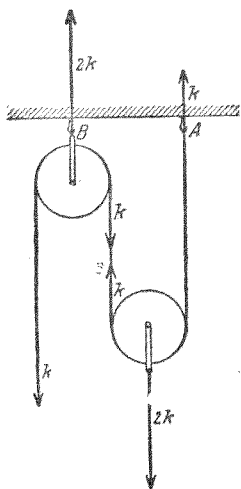
滑車之軸不固定者稱為動滑車，動滑車常在滑車組中用之（第 53 圖）。

吾人考察滑車組之平衡情形時，最簡便者可視繩索中各段之引力皆為相等，而此張力即等於繩之自由端所受之作用力 k 。故動滑車之為一繩索之二段所懸掛者，其所受向上之拉力為 $2k$ 。若同時又受 $2k$ 之力向下作用，則滑車平衡。全組滑車平衡時，繩之懸點(A)處有一力 k ，及定滑車之懸點(B)處有一力 $2k$ ，同時向上作用。惟通常輒將滑車本身之重量略去不計。若應用能量原理亦可得同一之結果。 k 力之着力點向下移動 s 距離時，動滑車本身以及其所受作用力 k' 之着力點即因之昇高 $s/2$ 之距離（因繩之長短不變）。於是

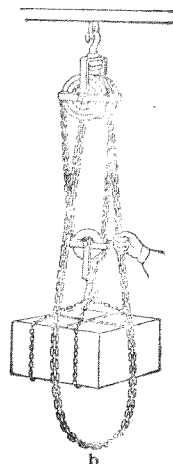
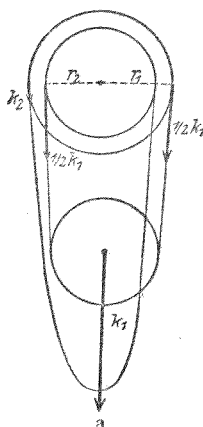
$$k \cdot s = k' \cdot s/2 \quad \text{而} \quad k' = 2k.$$

若遇有較多之定滑車及動滑車時，其各力之比亦可按上述簡單滑車組之理以推算之。

差動滑車（第 54 圖）為另一種形式不同之滑車組。半徑 r_1 及 r_2 不相等之二輪互相固結成一定滑車。一繩（無自由端之鏈）繞過二輪之緣，下懸一動滑車，其下受 k_1 力之



第 53 圖 由一定滑車及動滑車
組成之單簡滑車組



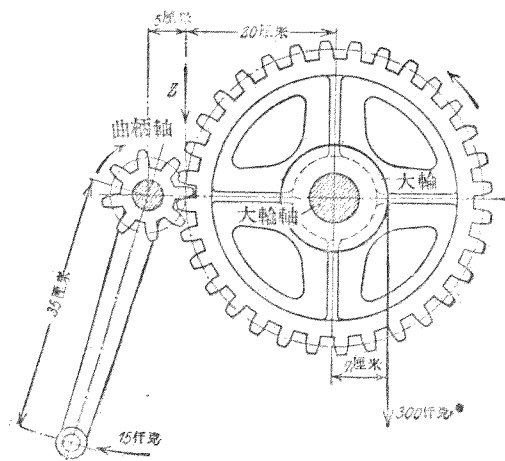
第 54 圖 差動滑車 a 略圖 b 實用者

作用。作用於繩上之力為 k_2 ，二者維持平衡。因動滑車上之 k_1 力向下作用，故繩內向上之張力為 $k_1/2$ 。因之定滑車受二力矩之作用，其值為 $\frac{1}{2} k_1 r_1$ 及 $-\frac{1}{2} k_1 r_2$ ，其方向相反。此二力矩之和為 $\frac{1}{2} k_1 (r_1 - r_2)$ ，使定滑車向右轉動。欲維持平衡，須加一向左轉動而等值之力矩以抵消之。此力矩可由 k_2 供給，其值為 $k_2 r_1$ 。於是 $k_2 = \frac{1}{2} k_1 \frac{r_1 - r_2}{r_1}$ 。若 r_1 與 r_2 之值相差無幾，則 k_2 可遠較 k_1 為小。故祇需一較小之作用力 k_2 ，即可反抗一遠較強烈之力 k_1 而作工。但按能量原理——或簡單之幾何學推論——，知 k_2 力之着力點同時必移過一頗長之路程。輪轉一週， k_2 之着力點向下移過 $2\pi r_1$

之距離，於是懸掛動滑車之繩之右段因之縮短 $2\pi r_1$ ，而其左段反伸長 $2\pi r_2$ 。故此二段之繩，共縮短 $2\pi(r_1 - r_2)$ 。於是動滑車以及 k_1 之着力點上昇此距離之半。按能量原理，即得與上述相同之結果

$$\pi k_1(r_1 - r_2) = 2\pi k_2 r_1, \text{ 即 } k_2 = k_1 \frac{r_1 - r_2}{2r_1}.$$

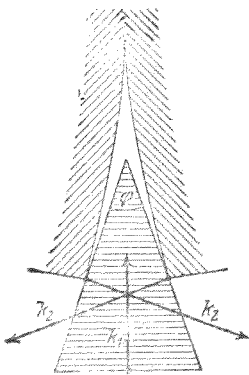
73. 齒輪。齒輪亦為一種槓桿。在第55圖中，命小輪之曲柄軸長35[厘米]，作用力15[公斤*]加於柄端，則所生之力矩為 $15 \cdot 35 = 527$ [公斤*]·[厘米]。二輪接觸處因之生有逼力 k_1 ，其作用於半徑為5[厘米]之小輪之力矩適與第一力矩等量而反向。故 $5k_1 = 525$ [公斤*] 或 $k_1 = 105$ [公斤*]。作用於半徑為20[厘米]之大輪之力亦與此相等，因生一力矩



第 55 圖 齒輪作用之說明

$20 \cdot 105 = 2100$ [公斤*] · [厘米]。若大輪之軸之半徑為 7 [厘米]，軸緣上有 300 [公斤*] 之作用力，則因其力矩 $7 \cdot 300 = 2100$ ，故適為平衡。由此可知小輪曲柄上之作用力 15 [公斤*] 足以抵抗大輪軸緣上之作用力 300 [公斤*] 而使之平衡。換言之，吾人可用 15 [公斤*] 之力以抵抗二十倍強之力。按簡單之計算，知齒輪任作若何運動時，其二端之力與路程之相乘積恆相等，恰符能量原理。上述之平衡條件，亦可基於能量原理而計算之（參閱 § 70，金科玉律）。

74. 尖劈及螺旋。 尖劈及螺旋俱為斜面類之簡單機械。尖劈之作用原理可以第 56 圖示明之。若 $k_1 = 2k_2 \sin \varphi/2$ ，則 k_1 與二 k_2 力平衡。尖角 φ 愈銳，則二側力愈較推動尖劈之作用力為大。分劈木材時所以用尖劈者，即此故也。利刃易割亦即以此。



第 56 圖 尖劈作用略圖

螺旋可視作捲合之斜面（可以旋梯比擬之）。實際上運用螺旋時，通常尚同時應用槓桿定律（例如有翅螺旋以及闊頭螺旋，其頂上有刻槽，可納入螺旋起子者，等等）。命螺旋頭之半徑為 r ，其周緣之切線上有 k_1 力作用。螺旋受此力之作用而轉過一周後，其所作之工為 $k_1 \cdot 2\pi r$ 。此項工作由螺旋尖端及螺紋之傳遞，而達於欲

將其克制之障礙。螺旋轉過一週後進行之路程等於螺旋之螺距 s (即相鄰二螺紋間之距離)。若螺旋進行時加於障礙之力為 k_2 , 則所作之工為 $k_2 s$ 。按能量原理, 此工作應與加於螺旋頭上之工作相等。故 $k_1 \cdot 2\pi r = k_2 s$, 或

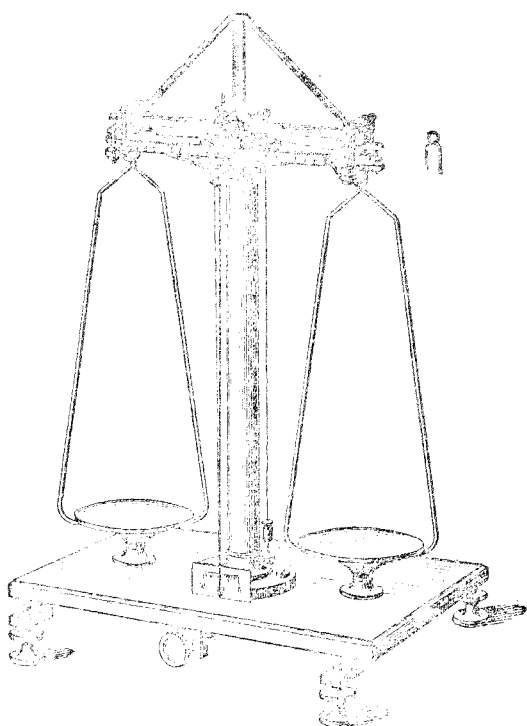
$$k_2 = k_1 \frac{2\pi r}{s}.$$

若螺距 s 愈小, 且作用於螺旋頭上轉力之臂 r 愈長, 則螺旋所能施出之力愈大 (一切螺旋壓機皆用此理)。

許多螺旋除螺旋作用外, 尚兼有尖劈作用, 如鑽木螺釘及木材鑽孔機等皆是。其螺旋之直徑自尖端以上逐漸增加。木材鑽孔機之主要作用僅其前部為螺旋, 用以深入木中。上部極峭之螺紋每有鋒利之緣, 形同刀口, 以挖大尖端所鑽成之孔。

75. 精密天平 大多數之天平皆為槓桿。稱物時所得之結果同為物體之重量, 但通常之目的實欲測其所含物質之多寡, 即其質量; 若砝碼以 [克*] 及其輔助單位表出, 則質量與重量數值相等。

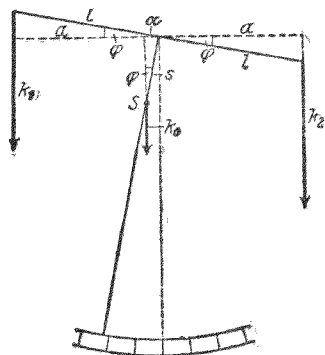
在許多種類不同之天平中, 此處僅述一種物理學上最屬重要之精密天平 (第 57 圖 *a*) —— 常亦稱為分析天平或稱化學天平, 蓋在化學上稱物時實非此不可也。此種天平之構造為一等臂之秤桿, 桿之中部附有一磨琢極精之鋼質刀口, 止息於鋼質或瑪瑙質之水平板上, 而作為秤桿轉動之軸。



第 57 圖 a 精密天平

任何天平咸具有一種制動裝置，天平不用時可藉以提高秤桿使離平板，以保護刀口之鋒利。二秤盤懸於秤桿之二端，其懸點通常亦用刀口，此二刀口與中央刀口間之距離，須儘量使其精密相等，且在同一直線之上。欲稱之物體納入一盤，砝碼納入他盤。秤桿之中間又附一修長之指針，可游移於下方之刻度弧上。秤桿本身之重量須為極輕，而對於彎曲之抗力又須絕大，故常仿橋梁之原理構造之。秤桿之上

又附有一種裝置，其上有二個微小物體，若變易此二物體之位置，則秤桿之重心可在鉛直或水平之方向上移動。前者用以增減天平之靈敏度，後者可使指針之尖端正對刻度弧之中點。此外尚有一種裝置對於秤桿之旁（第 57 圖 a 所示秤桿上可見之刻度尺），可將通常為 10 [毫克*] 重之小物體即游碼（第 57 圖 a 右上角）跨於秤桿上離中點任何距離之處（見後）。



第 57 圖 b 天平之靈敏度

稱法之原理，係置欲稱之物體於一盤，而納相當之砝碼於他盤，務使秤桿仍行回復未載重前之位置而止。小於 10 [毫克*] 之砝碼通常捨去不用。欲測出 [毫克*] 之數，可用游碼。命秤盤懸點與秤桿中點之距離為 l ，而游碼離中點（轉動軸）之距離為 r ，則按槓桿原理，游碼之作用猶如 $10 r/l$ [毫克*] 之砝碼置於秤盤之中。秤桿之刻度通常為十等分（雖有較精細之刻度，但無甚用處），故置於秤盤中自 1 至 10 [毫克*] 之砝碼可以 10 [毫克*] 之游砝跨於秤桿上之各處以代之。用更靈敏之天平尚可稱至更下之小數。用此種天平時，若按上法處理，通常每不易使指針恰回零點（即未載重前之停點）。吾人可處理之如下。先將物體重量相差 1

[毫克*]之上下二界限測定,例如較大於 51,235 [克*]而較小於 51,236 [克*]. 前者使指針偏右,設離零點 x 分度(須估計至十分之一分度);後者使指針偏左,設離零點 y 分度. 則物體之重量應為 51,235 [克*]加 $x/(x+y)$ [毫克*]. 設 $x=2,5$, $y=1,9$, 則物體之重量為 51,23557 [克*]. 指針零點之位置每不易與刻度弧上之零點相合,——此無損於衡量之精密——故每次未稱前及既稱後均須將零點重行精密測定.

精密稱物時恆用擺動法. 任何天平之制動裝置一經撤去,秤桿每作輕微之擺動. 試記錄指針左右擺動時奇次數連續迴歸點之刻度,例如右 4 次,左 3 次,先由左右二方之記錄各求其中數,然後由此二中數再求其中數. 此即為擺動停止時指針之停點.

吾人須注意天平實為一三臂槓桿,即有三個力矩同時作用於秤桿者. 其二個力矩或完全相等,或相差頗微,乃由二秤盤及盤內物體之重力所成,而其第三個力矩則由秤桿本身之重力而生,此重力作用於秤桿之重心 S (第 57 圖 b).

二盤中之載重相差為某一定值時指針轉過之分度愈大者,天平愈為靈敏. 靈敏度視秤桿重心之位置而異. 秤桿為穩定平衡,故其重心應鉛直在定軸(刀口)之下. 第 57 圖 b 示一秤桿之略圖. S 為重心,而 s 為重心及軸二者間之距離. 設秤桿之長為 $2l$, 因二盤載重不等,而秤桿乃平衡於圖示之位置(傾角為 φ). 命 k_0 為由於秤桿本身重量而作用

於 S 點之重力，則按槓桿原理

$$k_1 a + k_0 \alpha = k_2 a, \text{ 或 } k_1 l \cos \varphi + k_0 s \sin \varphi = k_2 l \cos \varphi.$$

以 Δk 表二盤載重之差，若傾角 φ 不大，則 $\operatorname{tg} \varphi$ 或 $\varphi = \frac{k_2 - k_1}{k_0} \frac{l}{s}$

$= \frac{\Delta k}{k_0} \frac{l}{s}$ 。故秤桿愈長，其重量愈小，而其重心與刀口愈相

密接者，天平之靈敏度愈大。

按此，吾人祇須任意增加秤桿之長，同時儘量減小重心之距離，似可無限增進天平之靈敏度。但實際上此種之可能性亦有一極限。靈敏度愈增，天平之擺動週期隨之而增，而其穩定度則隨之而減。擺動週期不可太大，若過某極限，則用時非特費時，且難處理。因秤桿（及懸重等）可繞定軸轉動，且靜止時為穩定平衡，吾人可視之為一擺，能對其穩定平衡之位置振動者。故此處下式亦為合理

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}$$

(§ 60, 27 式)。 J_0 為秤桿本身（連同懸盤）之轉動慣量， m 為各盤中之載重。於是擺動組之轉動慣量總值為 $J = J_0 + 2ml^2$ 。此組之復位力矩 D 乃由於秤桿之重量 k_0 而生。其值為 $D = k_0 s$ 。若增加秤臂之長 l ，非特 $2ml^2$ 一項因之增加，且秤桿之轉動慣量 J_0 亦隨之而增。於是擺動週期 τ 亦增。同理減小重心距離 s 亦可減小復位力矩 D 。

若載重 m 增加， J 即隨之而增，以之代入上式，知天平

之擺動週期 τ 亦隨 m 而增。

吾人嘗假設秤盤之懸點及秤桿之中點須精密的在同一直線之上，上述各節方為確切合理。苟不然，則其情況當更複雜。最著者，靈敏度將隨載重之多寡而增減。實際上各天平之秤桿每因載重而稍有彎曲，上述之三點在未載重前本係同在一直線上者，載重後即不然，載重愈多者彎曲愈甚，故任何天平之靈敏度咸不免隨載重而稍異。

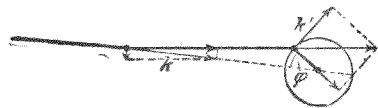
76. 絕對稱物法。 即使各砝碼皆為絕對準確，但秤桿二臂之長每不能絕對相等，故雖竭盡心力，謹慎從事，若僅稱物一次，則仍不能得十分可靠之結果。蓋溫度之相差幾屬不能避免，秤桿受熱即脹 (§ 160)，而脹時恆稍有不勻，在優良之天平中，其衡量非常準確者，此些微之不勻已足引起重大之影響。命秤桿一臂之長為 l ，他臂之長為 $l+\delta$ 。命所稱物體之真重量為 k ，而砝碼所示者為 k_1 。按槓桿定律， $kl = k_1(l+\delta)$ 。稱後將桿臂交換，即將物體及砝碼互易他盤。命此時砝碼所示者為 k_2 ，則 $k(l+\delta) = k_2l$ 。從此二式，第一方面可得真重量之值為 $k = \sqrt{k_1 k_2}$ ，第二方面可得臂長之比為 $\frac{l+\delta}{l} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$ 。故物體之真重量為二次砝碼所示之重量之幾何中項。此差值恆為甚微，吾人亦可以算術中項 $(k_1+k_2)/2$ 代之。同理，二臂之比可寫成 $1 + \frac{k_2 - k_1}{2k_1}$ 。

上述之法稱爲雙稱法，欲測物體之絕對重量時恆用之。在極多之情形中，例如一切化學上之稱物，吾人祇欲測定不同物體質量之比。若此，則臂長稍差之天平亦可應用，惟須將欲稱之物體恆置於天秤之一邊。一物體單獨稱得之值誠按臂長之比或爲過大或爲過小，但稱各物體時俱按同一之比而相差——各物須同在天平之一方——故計算各質量之比時此項錯誤可自行消去。

物體及砝碼在空氣中恆受不同之浮力，其重量之改正當於 § 107 中述之。

77. 推挽運動之變成轉動。 此爲工業上常遇之問題之一。蒸汽機 (§ 202) 活塞之來往運動通常須變爲輪之轉動(曲柄推動)，此尤其最要者也。此種裝置之略圖如第 58 圖所示。由動桿傳遞之 k 力產生力矩 $k'r$ ，使輪(半徑爲 r) 繞軸轉動。惟在 $\varphi=0$ 及 $\varphi=180^\circ$ 二處(稱爲死點)力矩爲零。

力矩之值雖繼續變遷，但吾人可設法使機械之動作在可能範圍內達一最均勻之速度，即將機械之轉動部份與一粗重之飛輪相固結，藉其慣性以遏制轉動速度顯著之變遷，且使機械越過死點以免停頓。吾人可視飛輪爲能量之儲藏所，力矩大時將轉能儲入，力矩小時則由此輸出。

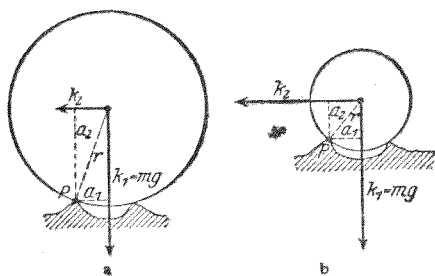


第 58 圖 推挽運動之變成轉動

機械之推挽部份若頗粗重，則機械之重心將亦因之進

退移動，繼續不已。於是機械之基礎頻受強力之作用，以致裝有此種機械之舟車或建築物等受劇烈之震撼。故製造巨大機械時，恆須儘量注意質量之平衡，即機械各部份之推挽運動須力求其互相抵消，庶全部機械之重心得以靜止不動。

78. 車輪。 車輪為人類最重要發明物品之一；道途修阻，運輸賴焉。車輪所受之摩擦阻力遠小於原始時之拖車，此



第 59 圖 車輪之作用 a 大輪 b 小輪

為其最著之優點。崎嶇惡劣之路上，輪徑愈長，其所遇之阻礙愈易越過，如第 59 圖所示。欲使車輪向左前進，輪之全部必繞 P 點轉動，故拉力 k_2 對於此點之力矩 $k_2 a_2$ ，至少須

與重力 $k_1 = mg$ 所生之力矩 $mg a_1$ 相等。按第 59 圖，可得 $k_2 a_2 = k_2 \sqrt{r^2 - a_1^2} = mg a_1$ ，即 $k_2 = mg \frac{a_1}{\sqrt{r^2 - a_1^2}}$ 。故若 a_1 相等，且軸上所有之質量 m 亦相等，則輪之半徑 r 愈大者，所需之拉力 k_2 愈小。

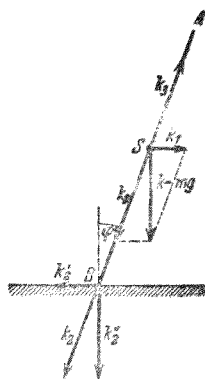
輪緣之外常護以橡膠之胎，其效用在每遇較小之障礙物，胎即被壓凹陷，而於越過此等障礙物時，車身可不致上下起伏。故工作之消費較之堅硬之輪緣者為少。

79. 彎曲軌道上之慣性作用(離心力) 物體沿彎曲軌

道運動時，慣性作用在實際上頗屬重要。試舉一吾人熟悉之例，如駕腳踏車而繞行曲線。若僅將前輪轉向，每不足使車身按曲線前進。此處尚須加一向心力，其值視軌道之曲率（半徑 r ），轉向時之角速 $\omega = v/r$ ，以及集中於車身與駕者全組物體重心上之總質量 m 三者而定。按 § 37, (20) 式，此值應為 mv^2/r 。吾人可將全組物體向內傾斜，使其重心移向曲線曲率中心之一方，於是向心力即可取給於此物體組之重力。（故地面上駕駛腳踏車熟練之人不易在月球上駕駛，蓋月球上之重力，將大見減小也！）在第 60 圖中，以直線 AB 示人及車，命 S 為重心，因車身之質量不大，故其重心幾與駕者之重心相合。重力 mg 作用於 S 點。分此力為二分力，使 k_1 沿水平向， k_2 沿 AB 直線。由 k_2 力引起之逼力 k_3 亦作用於 S 點，方向為 BA ，與 k_2 等量而反向，故與之互相抵消。於是僅餘一力 k_1 ，而此即為圓周運動——亦即曲線運動——所需之向心力。自第 60 圖可見車身之傾斜角 φ 當以下式計出之：

$$k_1 = mg \operatorname{tg} \varphi = \frac{mv^2}{r}, \text{ 或 } \operatorname{tg} \varphi = \frac{v^2}{rg}.$$

故若速度 v 愈大，而曲率半徑 r 愈小，則傾斜角 φ 須愈大。在車輪着地點 B 處有一力等於 k_2 者斜向作用於地面。此



第 60 圖 駕腳踏車
行彎曲軌道之略圖

力又可分為二分力， k_2' 與地面平行， $k_2''=mg$ 與之垂直（若軌道為水平，則垂直於地面之力僅有人與車之重力）。後者之力為地面之反作用力所抵消，而前者之力若不過大，——即傾角 φ 不大——則與摩擦阻力維持平衡。但若傾角頗大，則摩擦阻力不足與之維持平衡，尤以速度 v 為值頗大時為最，（溼潤之瀝青路面上輒易於傾跌！）故須注意常使 k_2 力垂直於軌道之平面。在腳踏車競車道之彎曲處，路面恆舖成傾斜（*überhöhung*）即是故也。（此處速度達某一定值時， k_2 之全力較 mg 為大，而與軌道面垂直。）

駕駛腳踏車之技術，乃在控制前輪恆使其傾角合於軌道之曲率。軌道之曲率恆由前輪之位置單獨決定之。地面上有摩擦阻力；對於指定之軌道曲率及指定之速度，恆由此項阻力——反抗 k_2' 力之反作用力（§ 29），第 60 圖——產生一水平向之力以作用於車身，其值為 mv^2/r ；故曲率半徑愈小者，此力愈大。因此力之方向向內，且其着力點在重心之下，故其力矩使車身向外傾側。利用此事，吾人不難糾正車身不可避免之輕微而無定的傾側。但若車身竟因此而離開所欲前進之向，則須加以過分之糾正。車身向前直駛時，苟欲突然轉向，例如欲其向左，則須使車身向左傾斜一適當之角度，此可將車首之駕駛柄微向右方一拉即得。車行彎曲軌道時，苟復欲使之向前直駛，則勢須將駕駛柄過量拉回，庶可消盡原有之傾斜。上述之事，不難於駕車時驟變前進

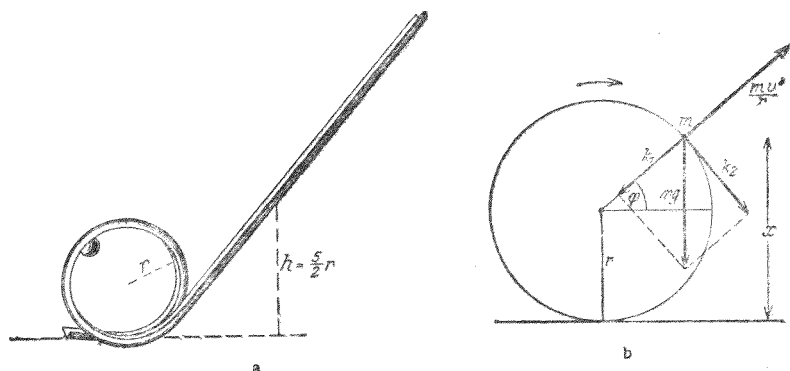
方向以證實之。因向心力隨 v^2 而遞增，故速度頗大時欲使車身平衡，祇須將駕駛柄稍稍移動即可，不必如速度較小時之甚，是以駕車速行易而緩行難。通常前輪之叉有一定之構造，祇須人體稍一傾斜，已足使駕駛柄移過少許。在速度不為過小時，駕駛柄若此移過少許已足糾正車身偶然之傾斜，故可脫雙手駕車而行。

速度頗大時，輪軸之穩定性，即迴轉子之作用 (§ 48)，對於腳踏車亦頗屬重要。

遊戲場中常見之所謂魔盤，亦為轉動體慣性作用之一例，此為一光滑之圓盤，可迅速轉動者。人立盤上，每不能自持，而為離心力（隨板轉動觀察者之觀點，§ 38）向外擲出。今試將此種遊戲逐步考察之。圓盤初轉時，人與盤間微弱之摩擦阻力足以傳達一某值之速度於人體。但人體有慣性，恆欲維持其速度之量與向於不變。故牽動人體之（盤上之）摩擦阻力，可使應有之直線軌道多寡變為彎曲螺線，人即沿此曲線達於盤緣。

馬戲中著名之技術有名為『倒行飛車』者，亦基於慣性之作用，此為一腳踏車或載人之小車自高處駛下，能繞過一環狀之軌道，如第 61 圖 *a* 所示者。吾人可作一小規模之實驗，用一小球仿行之，物體經過環頂時得以不墜者，自必因作用於其上之離心力足以抵消其重力所致。

命某瞬間動體 m 在第 61 圖 *b* 所示之位置。作用於其



第 61 圖 環狀軌道上之倒行飛車 a 模型 b 解釋

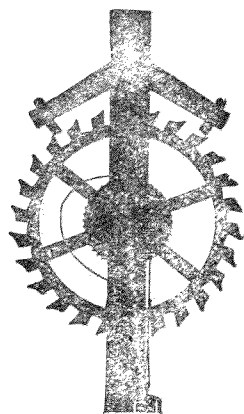
上之重力 $k=mg$ 可分為沿輻及切線上之二分力 k_1 及 k_2 。離心力 mv^2/r 至少須與前者相等，方得尚有一分力垂直作用於軌道。命 x 為 m 離軌道最低點之高度。自第 61 圖 b 可知 $k_1=k \sin \varphi=mg(x-r)/r$ 。命 h 為物體之起點離軌道最低點之高度。則在高度 x 時之動能為 $mv^2/2=mg(h-x)$ 。故 $mv^2/r=2mg(h-x)/r$ 。於是動體能安全經過圓環之條件為

$$2mg \frac{h-x}{r} \geq mg \frac{x-r}{r} \text{ 或 } h \geq \frac{3}{2}x - \frac{r}{2}.$$

欲使其經過軌道之最高點 ($x=2r$) 而不墮，則起點之高度至少須為 $h=5r/2$ ，此處摩擦阻力尚不計在內。否則物體到達高度 $x=(2h+r)/3$ 時即行下落。

80. 時鐘。擺鐘為物理學家 Huygens 氏所發明 (1658)。其原動力或為下墜物體之重力，或為彈簧之彈力；指針轉動時因機械內部摩擦阻力而消失之能量即取給於其中儲藏

之位能或彈性能。指針之行動又藉鐘擺之擺動以節制之；重物與指針間爲一組複雜之齒輪所銜接，另一錨狀擒縱機（第 62 圖）固結於鐘擺，又與齒輪組中之一相銜接，鐘擺每擺動一次，擒縱機即放過一齒。鐘擺爲摩擦阻力所消失之能量恆因輕微之一擊以補償之。鐘擺之下端懸有凸透鏡狀（因有空氣阻力）之物體，此物體可在擺桿上上下下移動，以調整擺動之週期。



第 62 圖 錨狀擒縱機

時錶中不用鐘擺而代以擺輪，此乃爲一輪，其軸上繫有一纖細之螺旋簧絲，可藉其彈性力而對靜止位置發生振動，擺輪之振動週期可由改變其單位扭角力矩（轉撥錶內之快慢針，可以伸縮簧絲之有效長度）以節制之。時鐘中之錨狀擒縱機亦可用於時錶中，亦有用原理相同之柱狀擒縱機者。

鐘擺之週期與重力加速度 g 之值有連帶關係，故亦隨高度而稍異。擺鐘所示之時刻輒因地位之高低而遲速稍有不同，但時錶則否。

溫度之變遷恆影響鐘擺之長度，在精良之擺鐘中咸採用補償擺，以免此弊，其長度不因溫度而異。時錶之擺輪，亦可改用類似之裝置 (§ 160)。

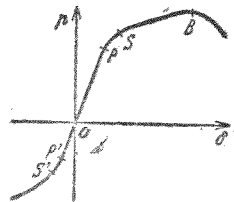
第三編 柔體力學

第八章 固體之彈性

81. 彈性之觀念及普遍之事實。本書前數章所述者皆以理想的物體觀念為基礎。物體皆視作剛體，即其形狀與體積毫不因外力之作用而稍變者。就極多數之固體言之，此與實際情形頗相近似。但事實上一切物體遇有方向不同之外力作用時，其形狀與體積無有不變者；真正之物體皆有彈性，換言之，多寡可以變形。

固體之形狀與體積由其分子組織之力以維持之。物體在自然狀態時，此種之分子力咸屬彼此平衡。任何之變形力皆足以擾亂其平衡，因之遂有逼力 (§ 29) 出現，此即物體內部之張力。遇有固定之變形力時，此新添之諸力間亦成平衡。

不同之固體於變形時輒示大不相同之情形。金屬之彈性尤見重要，彼此亦有顯著之差異。但亦有某種普遍之狀況悉屬相同者。尤如金屬之變形，吾人輒可別之為數個不同之區域。



第 63 圖 鎢鋼之形變 δ 與其張力 P 之關係

區域 第 63 圖示一特例，即一柔體中張力 P 與其逼成之長

度形變 δ 二者間之關係。其內張力之定義爲物體截面上 1 [厘米]² 內之彈性逼力，而長度形變則爲物體內垂直於此面之直線變遷與同方向上原值間之比。

祇須形變之值尙未超過某一限度，稱爲物質之正比限度者，內張力恆正比於形變，故欲產生某值之形變，恆需一與之成正比而爲定值之外力。在第 63 圖中，此項正比區域遇拉長時以 OP 示之，遇縮短時以 OP' 示之。形變一逾此限，即不再成爲正比。內張力之增加漸較形變之增加爲緩，換言之，物質對於逼其形變之抗力開始鬆弛。自延展限度之 S 點或 S' 點以往，形變再增時，內張力僅略增些微，而物質已變爲受範性矣。在許多情形中，自 B 點以後，形變更增，內張力反降。此時物體之斷面顯著的開始縮小，其最甚處有如被勒而成勒痕，終至破裂。但將物體壓縮時，通常形變愈大，則其內張力亦愈增。金屬之可錘，可展，可拉，皆基於上述之特性。

形變不大者，其使之變形之原因一經撤除後，物體即以其內張力之作用而立即完全恢復原狀。但超過物質之彈性限度後，通常須經若干時間物體方能復原（彈性後效）。彈性限度與正比限度大致相離不遠，但原理上二者並不相同。

沿作用力方向上之長度每有彈性變化，其與之垂直之截面恆必亦隨之而變。物體拉長時，截面縮小；縮短時增大。

長度之相對變遷值與截面之直線相對變遷值二者之比稱爲 Poisson 氏比。其理論上最高之值爲 2。在此例中，形雖變而體積不變。但通常伸長時體積稍增，壓縮時體積稍減。

單晶線所示之現象，最饒趣味。此爲一單個晶體所成之線，與尋常狀態下之金屬爲無數極小晶體錯雜湊聚而成者不同。此種之單晶線有非常之伸長性，用手拉之，極易拉至原長之二倍，且尙可拉長。此時其表面上即見鱗狀之波紋。此項現象蓋因晶體伸長時，其各部份彼此沿晶體格子面互相滑動所致。

物體之硬度與彈性間必有某種之關係，但科學上尙鮮研究。二物相擦，甲能傷乙，吾人即謂甲硬於乙。硬度雖無確切之定義，但在工業上殊屬重要，可用各種之方法以測量之，例如壓力試驗與擊力試驗。許多之物質，如鋼等，可用特殊之方法以使之加硬。一切物質中最硬者當推金剛石。

82. 微小之長度的形變。Hooke 氏定律。彎曲。試取一塊均勻之物質，長爲 l ，截面爲 q 。受變形力 k 之作用後，其長度變爲 $l + \Delta l$ 。於是 $\delta = \Delta l / l$ 一值稱爲其應變。截面 q 上單位面積所受 k 之力爲 k/q ，故物質內所起之應力（內張力） p 亦爲此值。祇須形變尙在正比限度以內， δ 恆正比於 p 。於是

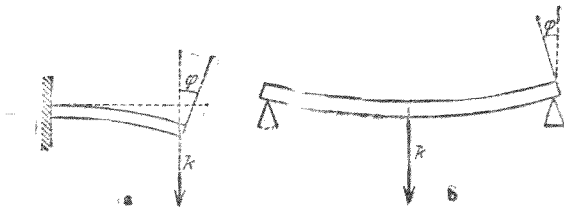
$$\delta = \frac{p}{E} \text{ 或 } \frac{\Delta l}{l} = \frac{k}{qE} \dots\dots\dots (1)$$

此為 Hooke 氏定律(1660),對於形變不大時為合理。(1)式中所見之數值 E 為一常數視物質而異,稱為某物質之長變係數。其倒數 $1/E$ 稱為彈性數(Elastizitätszahl) 其他之情形相等時, E 值愈大者,形變愈小。例如鋼之長變係數頗大,橡膠則頗小。第 3 表中示有數種物質之值。自(1)式可知 E 在 C.G.S. 制中之單位為[達因]/[厘米]²。但通常在常數表中皆習用[公斤*]/[毫米]²之單位。各向異性之物體,如大多數之晶體,長變係數每隨方向而異。

第 3 表 長變係數 [公斤*]/[毫米]²

鉛.....	3600—7200	鋁.....	53000
鉛.....	1500—1700	銅.....	10000—13000
鍛鐵與鋼.....	20000—22000	黃銅.....	8000—10000
生鐵.....	7500—1300	木質纖維.....	500—1200

彎曲為彈性形變之一種。固定一棒之一端而施力於其他端時(第 64 圖 a), 其形狀即因之而變,其兩端原為平行者,今則互成一交角 φ 。支棒於其兩端而加力於其中央時亦然(第 64 圖 b)。



第 64 圖 棒之彎曲

矩形截面之棒，一端固定，他端施力時

$$tg \varphi = 6 \frac{l^2}{a^3 b} \frac{k}{E}, \dots\dots\dots (2)$$

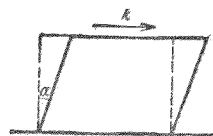
(l = 長度, a = 高, b = 闊, 一切之量均以 C.G.S. 制量之), 自由支持其二端而於中央施力時

$$tg \varphi = \frac{3}{4} \frac{l^2}{a^3 b} \frac{k}{E}. \dots\dots\dots (3)$$

故長變係數 E 之值可由彎曲之實驗測定之。

彎曲之物體同時受壓力與拉力二種作用。其彎曲裏面一邊之部份受壓縮, 外面一邊之部份則被拉長。此二部份之間有一層, 彎曲後長短不變, 稱為中立層。

83. 切變 彈性物體之伸長與彎曲, 皆以其長變係數 E 定之。尚有一種之彈性形變稱為切變或稱扭轉者, 以另一彈性常數稱為切變係數或稱扭轉係數者定之。切變之意義可以第 65 圖示之。設有一矩形六



第 65 圖 切變或扭轉

面體之物體固定的平臥於其一面, 與此相對之面上有一 k 力平行矩形於其面而作用, 此力均勻分佈於面上, 其作用遍及於一切之面積元。於是此矩形六面體即變為一物體, 其截面為平行四邊形, 而其二側面間之直角變更一微值 α (切應變)。 α 之值與 k 力成正比, 而與 k 力之作用面積 F 成反比 (k/F 稱為切應力)。吾人可書作

$$\alpha = \frac{l}{E(\bar{F})} \dots \dots \dots (4)$$

常數 G 隨物質而異，即為上述之切變係數。

若扭轉一物體，例如圓柱狀之棒，固定其一端而扭轉其他端，使其對於物體之軸轉過一 φ 角，則此種之彈性形變亦為純粹之切變。轉過之角度 φ 視圓柱棒之半徑 r ，長度 l ，及扭轉之力矩 N 而定，其關係以下式示之

$$\varphi = \frac{2l}{\pi r^4 G} N \dots \dots \dots (5)$$

故按 § 47，該物體之單位扭角力矩為 $D = \frac{\pi r^4 G}{2l}$ 。設於線之下端懸一物體，其轉動慣量為 J 者，扭轉之使離其靜止位置，則按 § 47，該物體即生扭轉振動，其週期為 $\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}$ 。從此可測定 D ，而計出切變係數 G 之值。因其影響於扭轉，故 G 亦稱為扭轉係數。

(4)式與(5)式僅限於形變 α 不大時方為合理，與 Hooke 氏定律即(1)式同。越過某一限度後，其情形與越過正比限度 (§ 81) 後之情形相應，不復維持正比，彈性後效等相繼出現，終乃毀壞其組織而破裂。

切變係數 G 之因次亦為(力)/(面積)，在常數表中，亦以 [公斤*]/[毫米]² 示之，與長變係數 E 相同。

繞金屬線於圓柱體上而成之螺簧一端受拉力或壓力時之情形，與一圓柱體長度伸縮時相同，且在一頗廣之限度

內遵守簡單之 Hooke 氏定律。事實上金屬線本身之彈性形變乃為扭轉。

因此種螺簧深能遵守 Hooke 氏之定律，故吾人輒用螺簧伸縮之多寡以測定使之發生此項形變作用力之大小。簧秤即本此理而作；物體懸於其下或壓於其上，螺簧即因物體之重量而伸縮其長度，其變遷之多寡即由其旁附設之刻度尺計出之。尚有一種簧秤可作為表演及粗略稱物之用。

以鋼片捲成之捲簧，如時鐘中之發條，其他機械中以為原動力之彈簧，以及時錶中擺輪上所用之游絲等，當其伸張時，其情形悉同扭轉之物體。惟事實上乃為金屬片之彎曲。

84. 壓力。今當將物理學上壓力之定義準確說明之。吾人日常談話中，壓力與力初無嚴格之區別。但在物理學中須精確辨別之。吾人謂一面之上有壓力時，其意蓋謂有無數之單力垂直作用於此面，各單力連續分佈於面上，無一處或免者。此面上每一[厘米]²面積內諸力之和必為一定值，吾人稱此值為面上之壓力 p 。設一面之面積為 F [厘米]²，一力等於 k [達因]者均勻分佈而作用於其上，則該面上之壓力為

$$p = \frac{k}{F} [\text{達因}] \cdot [\text{厘米}]^{-2} \dots\dots\dots (5)$$

實用時輒不用 C.G.S. 制中壓力之單位[達因]/[厘米]²，而用另一種之單位，當於 § 103 中述之。

85. 彈性能量. 物體之長度作彈性伸縮時,恆遇反抗變形之彈性力,故須賴工作. 設長度之變更爲 $\Delta l = x$, 則按(1)式 x 與作用力 k 間應有下列之關係:

$$k = \frac{qE}{l}x.$$

再拉長之使由 x 而增至 $x+dx$, 則此時所需之工作(=力·路程)爲

$$dA = k \cdot dx = \frac{qE}{l}x dx$$

(此處可視長度之變遷值 x 較之全長 l 爲極小). 積分之, 得增長 Δl 時所需之總工作爲

$$A = \int_0^{\Delta l} \frac{qE}{l}x dx = \frac{1}{2} \frac{qE}{l} (\Delta l)^2.$$

此工作儲藏於變形體中成爲位能, 變形力除去後, 此位能仍復呈出. 其他一切之彈性形變亦與此相同. 各種機械發動時, 其所需之能量取給於捲緊之彈簧者, 卽本是理. 彈性能量卽儲藏於其中.

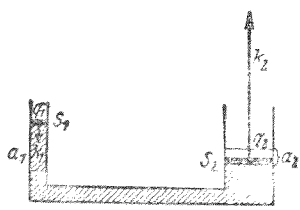
爲簡單計, 吾人視一固體爲一矩形六面體, 其稜之長爲 a, b, c (任何形狀之物體均可視爲由此種極小之六面體所組成); 各面均受垂直壓力 p 之作用, 而其體積 $V = abc$ 有 ΔV 之變遷. 三面所受之力爲 pab, pac, pbc . 命此時稜長之變更爲 $\Delta a, \Delta b, \Delta c$. 變形所需之工作應爲

$$\Delta A = p(ab\Delta c + ac\Delta b + bc\Delta a) = p\Delta(abc) = p\Delta V \dots\dots (6)$$

從原子觀點觀之,使固體(液體亦然,但通常氣體則否)彈性變形所需之工作應等於物體原子組織間相對位能之變遷值。未變形前,各原子之位置均為穩定平衡,故每遇變更分子間之原有距離,其位能無不因之增加者(穩定平衡 = 最小位能, § 62),此新增之能量自必取償於外加之工作。作用力一去,各原子仍回復其自然之相對位置。但若變形極大,則其內部之位置可因之永久變易,而成永久變形。

第九章 液體靜力學

86. 無重液體內部之壓力. 在第66圖所示之器具中設儲有液體,此處吾人姑假定其不受重力之作用. S_1 與 S_2 為二活塞,其截面為 q_1 與 q_2 . 若加 k_1 力於 S_1 , 則此力即經由活塞而傳至液體.



液體面上即因之受有壓力 $p = k_1/q_1$ 第 66 圖. 無重液體內之壓力

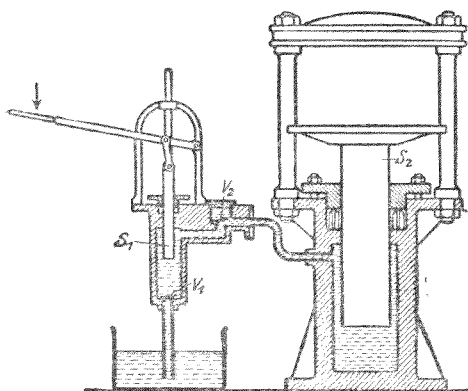
(§ 84) 設 k_1 力將 S_1 推下 a_1 之距離,則活塞 S_2 必因之上昇 a_2 之距離. 故 S_2 必受一力 k_2 之作用. 活塞 S_1 移動時所作之工為 $k_1 a_1 = p q_1 a_1$. 此工作必復由作於活塞 S_2 上之工 $k_2 a_2$ 呈顯之,故 $k_2 a_2 = p q_1 a_1$ (假設 S_1 與 S_2 間之液體移動時毫無摩擦阻力,故能量並無損失). 但此時 S_2 移動後新增之液體容積 $q_2 a_2$ 必等於 S_1 所排開之液體容積 $q_1 a_1$. 故得

$$k_2 = p q_2, \text{ 或 } \frac{k_2}{q_2} = p, \text{ 而 } k_1 : k_2 = q_1 : q_2 \dots\dots\dots (1)$$

今 k_2/q_2 為 S_2 受其下面液體所施之壓力. 按 Newton 氏第三公理, S_1 所受液體之壓力亦必為 p . 故 S_1 及 S_2 所受之壓力相等. 此處對於容器圍壁之二活動部份證明為然者對於其他部份自應皆然;故容器圍壁之各部份所受之液體壓力到處相等,惟須假設液體不受重力之作用.

吾人可設想一物體置於液體內部之任何一處，則物體之表面均為液體之界面，其各處所受之液體壓力自應完全相同。故吾人謂液體內部亦有壓力；將上述之定理擴充之，可知在靜止之無重液體中，壓力到處皆係相等。靜止液體內部之壓力稱為液體靜壓力。

水壓機為上述定理之一種應用，較小之力可由此化成較大之力。吾人可儘量加大 $q_2:q_1$ (1式) 比率之值，則由頗小之力 k_1 可產生絕大之力 k_2 。此時活塞 S_2 移動之距離必遠小於活塞 S_1 所移動者。實用上(第67圖) S_1 即為抽水機之活塞，可自外方將水壓入機中，且可反覆進行多次以增高其效用。



第67圖 水壓機 V_1, V_2 為活塞

87. 重力之作用。液體恆受重力之作用，故其內部不僅受表面上之壓力，如大氣壓力 (§ 103) 等之作用，其內部任何一點且均另受一種壓力，即由其上部液體之重量而來

者。命 AB (第 68 圖) 爲液體之一水平截面, 面積爲 q , 在液面下之深度爲 x 。若液體之比重爲 σ , 或其密度爲 ρ , 則 AB 面上液體之重量爲 $k = \sigma qx$ [克*], 或爲 ρgqx [達因] (§ 56)。

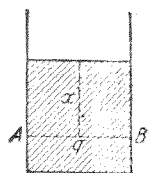
此重力恆均勻分佈於 q 面積之上, 故其壓力 p , 即此截面上每 1 [厘米]² 所受之力爲

$$p = \frac{k}{q} = \sigma x [\text{克}^*] / [\text{厘米}]^2 \text{ 或 } \rho g x [\text{達因}] / [\text{厘米}]^2 \dots (2)$$

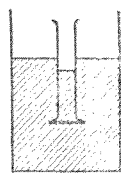
若液體表面上尚有外來之壓力 p_0 , 則 $p = p_0 + \sigma x$ 。故受重力作用之液體內部各處所受之靜壓力正比於各該處之深度。但此時吾人須假設液體之密度不以深度之不同而變, 換言之, 液體須無顯著之壓縮性者。深度不甚大時, 此確與事實頗相近似。

用下述之實驗(第 69 圖)可證明壓力確隨深度而變。一圓筒沒於液體之中, 其下口爲一毛玻璃片所密閉。當筒中爲空氣時, 玻璃片因液體之壓力而緊壓於筒之下端。試以同液體注入筒中, 直至筒內液面幾將與筒外液面同高, 玻璃片尚不致下落。迨筒中之液體與玻璃片本身之重量二者合成之壓力與玻璃片下面之液體壓力相等時, 玻璃片方始下落。

(2) 式所示之規律與容器之形狀無關。故任何容器中



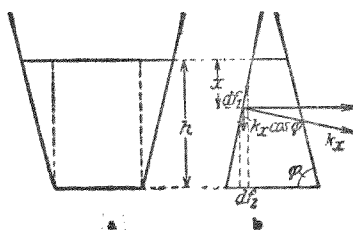
第 68 圖 壓力隨深度遞增之說明



第 69 圖 壓力隨深度遞增之證明

儲有 h 高之液體時，其底面所受之壓力恆為 σh [克*]/[厘米]²，不因其形狀而異。例如第 70 圖 a 所示之容器中，虛線以外之液體所施之壓力皆為容器之斜壁所承受，而第 70 圖 b 所示之容器可由下法說明之。

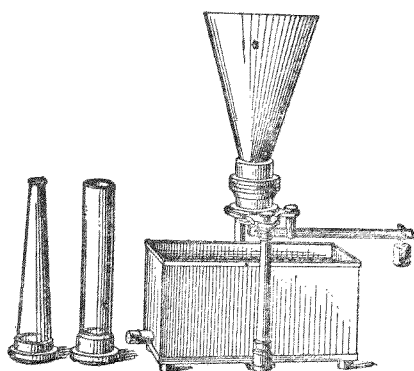
試在液體表面下深度 x 處取一薄層，命此薄層在容器斜壁上所截之環狀面積元為 df_1 ，



第 70 圖 底面壓力之說明

其在器底上之射影為 df_2 (圖中為簡明計 df_1 僅示其左邊)。設在 x 深度處之壓力為 p_x ；則 df_1 所受之總力為 $k = p_x \cdot df_1$ 。因此時液體平衡，故 df_1 亦施一相等之力於液體。試將此力分為水平及鉛直之二分力。沿 df_1 之全面上一切水平分力咸因對稱而相消。故所餘者僅為鉛直向下之分力，其值為 $df_1 \cdot p_x \cdot \cos \varphi$ ，其 φ 為容器斜壁及器底間之交角。此力由液體之傳達而作用於其所屬之底面積 df_2 ，而在該處產生一壓力 $p' = p_x \cdot \cos \varphi \cdot df_1 / df_2$ ，但因 $df_1 / df_2 = 1 / \cos \varphi$ ，故 $p' = p_x$ 。此外尚須加一壓力，即在 df_2 以上之液體所施者，其值為 $p'' = (h-x)\sigma$ ，故 df_2 所受二種壓力之和為 $p = p_x + \sigma(h-x)$ 。今以器底之全部觀之，其各點所受之壓力均應相同，蓋否則液體將沿水平向而流動；是即 p 應與 x 無關。此僅 $p_x = \sigma x$ 時方為可能，故 $p = \sigma h$ 。換言之，即在 x 深度或 h 深度處之壓力僅隨深度而定，不以容器之形式 (即 φ 角) 而異其值。欲示明此

項規律,可用許多形式不同之容器,均能與同一之活動底相配合,而於底下加一定之壓力,使其緊托於容器之下端(第71圖)。容器中注以液體,若其底部所受之托力相同,則不論容器之形狀若何,須注至同高,方可使底面

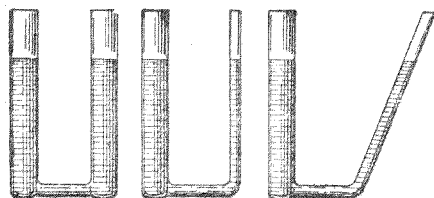


第71圖 底面壓力儀器

壓力與托力互相抵消。初時若堅托器底而滿注液體於器中,然後任使器底為某定力所托住,則液體將自器中流出,直至各器中液面同高而止(所謂液體靜力幻像 Pascal 氏, 1660)。

將滿儲相同液體之二管連通之,俾液體可彼此流通,則平衡時二管(假設非為極細,參閱 § 93)中之液面必同高,且同深處之壓力亦相同。管之形式初無關係(第72圖)。此項結論可自上述關於底面壓力之理論而得。在連通管中同

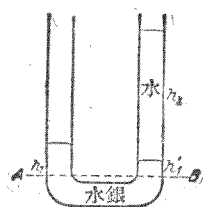
一水平面上各點之壓力必相等,蓋否則液體即將流動,直至壓力恢復相等而止。欲使一切水平面上之壓力相



第72圖 相連之液體(連通管)

等,其上部之液體須同高,換言之,連通管中液體表面之高度必相同。

設雙臂連通管(第73圖)中儲有兩種
 比重不同而不相混合之液體,如水銀與
 水. 在較重之液體中試任取一水平面
 AB, 其上兩邊之壓力必係相等. 設 σ_1
 爲較重液體之比重, σ_2 爲較輕者之比重,
 則 AB 面上左邊之壓力爲 $p = \sigma_1 h_1$, 右邊
 爲 $p = \sigma_1 h'_1 + \sigma_2 h_2$ [克*]/[厘米]², 故

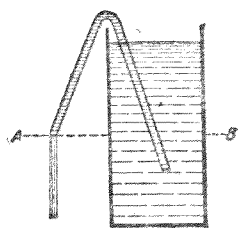


第73圖 兩種不同之液體所成之連通管

$$\sigma_1(h_1 - h'_1) = \sigma_2 h_2.$$

若 σ_2 爲已知, 則祇須測定高度 $h_1 - h'_1$ 與 h_2 , 即可計算比重 σ_1 之值.

在連通之液體中, 設或某時間在同一水平面上之壓力
 不等, 則液體勢必流動, 務欲恢復等壓而止. 虹吸管(第74圖)



第74圖 虹吸管

即本是理而作. 試以彎曲之管, 滿儲液
 體, 插其一端於同液體中, 而露其他端於
 外, 此露出之管口且較低於液體之表面.
 液體表面及管口之壓力均爲空氣壓力,
 故 AB 面之壓力不等, 其在液體內部者
 較高於管口. 液體因之從管口繼續流

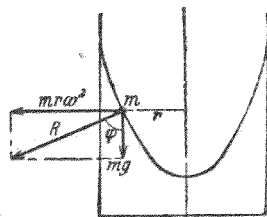
出, 直至液面降至與管口同高而止. 用時可先將液體吸入
 管中.

對於城市中之自來水管網及自然界中之地下泉, 本節
 所述之規律亦皆屬重要.

88. 液體之自由表面. 試取液體之自由表面上(即不與容器之圍壁相接觸者)之一點而觀察之. 因液體之各部份極易彼此滑過,勢必跟隨任何微弱之力而移動,故平衡時作用於其上之力必自行互相抵消. 表面上之液體質點第一方面受重力之作用,第二方面又受其下部液體所施垂直於液面之上壓力,此上壓力者,即由於質點本身之重力垂直於液面之分力而生(逼力). 欲此二力維持平衡,二者須等量而反向. 故液體若僅受重力之作用(液體界面之毛細作用尤應除外, § 93), 則其自由表面必垂直於重力之方向,換言之,必為水平. 否則重力將有一分力平行於液面,可使質點向側移動. 兩種不相混合而比重不同之液體,如水與水銀,或水與油等,置於一器中時,其分界面亦復如是.

液體除受重力外,若尚有他力之作用,則其自由表面必與一切作用力之合力相垂直.

試觀察圓筒狀容器中轉動之液體,頗饒趣味. 吾人試就隨液體轉動觀察者(§ 38)之地位觀之. 液體表面之任一質點 m 第一方面受鉛直之重力 mg 之作用,第二方面又受水平之



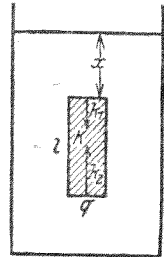
第 75 圖 轉動液體之表面

離心力 $m r \omega^2$ 之作用(r 為質點與轉動軸之距離, ω 為其角速). 此二力之合力須與液體表面垂直. 故液面之形狀須合乎此條件 從第 75 圖可見平衡之條件為
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m r \omega^2}{m g} = \frac{r \omega^2}{g}$$

(φ = 液面之傾斜角) 從此可計算液體面與圖面之交線為一拋物線。

69. 浮力. Archimedes 氏原理. 一物體置於液體中

時,物體表面所受之壓力隨深度而異. 命 K 為浸於液體中之物體,液體之比重為 σ , 物體之長為 l , 截面為 q (第76圖) 物體之頂面在液面下之深度為 x , 其底面之深度為 $l+x$. 其各側面所受之水平壓力適



第76圖 浮力

彼此相消,而頂面與底面則否. 按 (2) 式, 頂面所受之力為 $k_1 = \sigma q x$ [克*], 鉛直向下, 底面所受者為 $k_2 = \sigma q (l+x)$ [克*], 鉛直向上. 此互相平行而反向之二力之合力為

$$k = k_2 - k_1 = \sigma q l = \sigma V \text{ [克*]} \text{ 或 } V \rho g \text{ [達因]} \dots\dots (3)$$

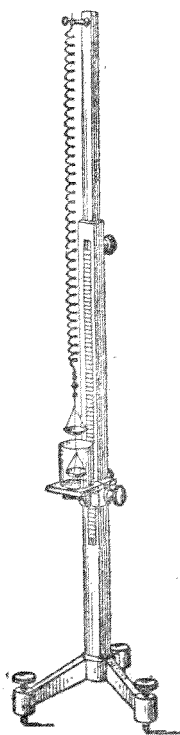
(V = 物體之體積) 此力之方向為鉛直向上. 吾人即稱此力曰浮力, 而(3)式所表示之原理曰 Archimedes 原理, 以紀念其發見者(西曆紀元前250年).

物體所受之浮力, 適與重力反向, 故在液體中時, 似失去其一部份之重量, 按 (3) 式其值等於與物體同體積液體之重量 σV [克*], 蓋 V 為其體積, 而 σ 為液體之比重也. 故 Archimedes 氏原理可述之如下: 物體在液體中所失之重恆等於為其所排開之液體之重. 不拘物體之形狀若何, 此定律恆為合理.

浮力爲一重力之作用，故在無重之區域中，即無所謂浮力。

若浸物體之液體爲水（精確言之： 4° 之水，見 § 23），則因其比重爲 $\sigma=1$ [克*]/[厘米]³，故被物體所擠開之水重以 [克*] 計之，數值上適等於其以 [厘米]³ 計出之體積，亦即等於物體本身體積之數值。故從物體在水中之失去之重即可間接測定物體之體積。

應用此理，可得一極簡捷之固體比重測定法，據謂 Archimedes 氏嘗用之。遇有形狀不規則之固體，其體積不易用他法測定者，此法尤見重要。設一物體之真重量爲 k ，浸於水中時之重量爲 k' ，則浮力爲 $k-k'$ 。數值上 $k-k'$ 等於物體之體積 V ，亦即爲同體積之水重。故 $k/(k-k')$ 之比示物體較重於其同體積之水之倍數，即直接等於其比重之值。此法之簡捷，尤在其不必確知 k 及 k' 之絕對值，祇需二者之比已足。故若能測定任何之量正比於 k 與 k' 者，如螺簧受 k 與 k' 作用後伸長之多寡，已可應用。吾人可用一未經校準之簧秤，將欲測之物體懸於長螺簧之下端，先在空氣中，後浸水中（第 77 圖）。簧秤之伸長先與



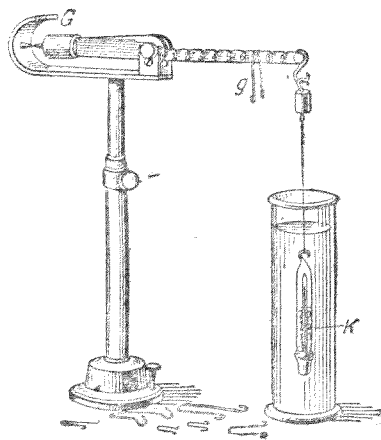
第 77 圖 測定比重所用之簧秤

k 爲正比，後與 k' 爲正比，故從若此二次伸長之比可選得 k'/k 之值 於是比重之絕對值 $|\sigma|$ 爲

$$|\sigma| = \frac{k}{k-k'} = \frac{\Delta l}{\Delta l - \Delta l'}, \dots\dots\dots (4)$$

Δl 與 $\Delta l'$ 爲螺簧二次伸長之值。

因固體在液體中所受之浮力須視液體之比重而異，故吾人可利用之以測液體之比重。Mohr 氏秤 (第 78 圖) 爲液體比重測定器之一種。其構造爲一槓桿，可於一刀口上轉動，其一端懸有玻璃體 K ，通常同時可作溫度計用。槓桿之他端附有重量 G ，當玻璃體在空氣中而槓桿平衡時， G 端附裝之指標恰與架上之尖端準對。 K 物體浸於液體中時，即受浮力之作用，此可以游碼狀之砝碼 g 加於槓桿之臂上以



第 78 圖 Mohr 氏秤



第 79 圖 浮秤

抵消之。槓桿臂上之刻度爲十等份，以此組砝碼中之最大者加於槓桿臂之末端時，適足以抵消 4° 時水之浮力。其餘之砝碼則爲此單位之十退小數。

欲迅速測定液體之比重，可用浮秤（第79圖）。此爲一下端(b)載重之玻璃管(a)，其上端爲刻度尺(s)，浸入液體中時，液體之比重愈大者，其聳出於液面之上愈高 (§ 90)。在刻度尺上，可直接讀出液體之比重。

90. 浮泊 固體之比重較小於液體者，若以之投入液體之中，假令全部浸沒，則其所受之浮力將較大於其重量。於是固體受有向上之力，推之使離液體而出，直至留在液體中一部分所受之浮力與其重量相等而止。於是固體浮於液體之中。當此之時，液體爲固體所擠開之一部份之重量與浮體之總重量相等。若固體之比重爲 σ_2 ，液體之比重爲 $\sigma_1 > \sigma_2$ ，則固體體積 V 之浸入液體中之部分 V' 可由下式計算之：

$$\sigma_2 V = \sigma_1 V', \dots\dots\dots (5)$$

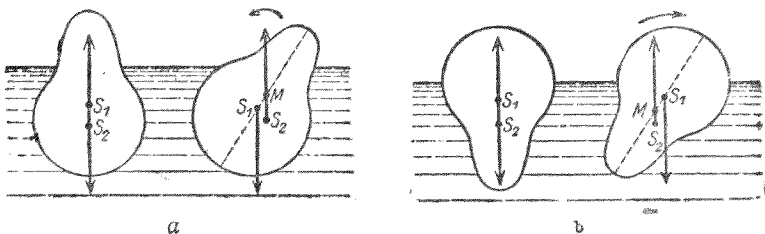
固體之浮於液體中也，液體之比重愈小者，浸入愈深。故船舶在淡水中之排水量較之在比重稍大之海水中者爲深。吾人在海水中亦易於浮起。

（通常吾人身體之比重均稍大於水；故入水時常下沉。但游泳者之得以上浮，乃由於其兩腿之向斜下方繼續猛伸，因得向上之加速度，以支持其體於水面。其下沉之傾向因

此得以抵消。同時，此伸力之水平分力使人體前進。臂之運動除用以作前進運動外，最要者，在使質量平衡[§ 77]。

物體之由許多部分錯雜聚合而成者，可以其平均比重代入(5)式之中，其值可由其總重量除以其總體積而得，例如計算船舶之排水深度時，其條件即為其總重量 k 應等於其浮力 $V'\sigma$ ，其 V' 為浸入水中部分之體積， σ 為水之比重。

固體浮泊時，在其各種可能之位置中，常祇有一種為穩定位置。重力恆作用於全部物體之重心點 S_1 (第 80 圖)。基於與 § 34 所述關於重心點者完全相同之思想，吾人可想像浮力作用於物體中之另一點 S_2 ，即液體被擠開部分之重心點所在之處。通常此二力組成一力矩，使物體轉至另一位置。僅當連結 S_1 與 S_2 之直線方向為鉛直時，平衡方為可能。但此時尚可或為穩定平衡或為不穩平衡。浮體在任一浮泊之位置運動時，液體為其所擠開之部分之形狀將隨之而變，但體積則始終維持常定。故經過若此之運動後，通常其重心點 S_2 每因之遷移。其精確之理論可述之如下：在



第 80 圖 浮泊之理

浮體中可作一直線，即平衡時連結二重心點 S_1 及 S_2 所成者。浮力之合力與此直線之交點 M 稱為定傾中心。定傾中心之位置在浮體重心點 S_1 以上時（第 80 圖 a ），浮體為穩定平衡，在下時（第 80 圖 b ）為不穩平衡。物體若離開其平衡位置，則在前種情形中，物體將自行返至原位，而在後種情形中，雖離開極微，物體將更行傾轉而止於其穩定位置。此項情形見第 80 圖自明。

物體浮泊時，自亦應合於 § 62 所述之條件，在其一切可能之位置中，以其穩定位置之位能為最小，惟此時應將液體一併計算在內。故物體組（液體 + 浮體）位能最小時之任何浮泊位置皆為穩定。

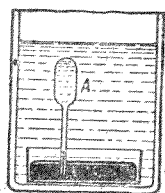
91. 液體之彈性。 液體對於純粹變形之力，如切力 (§ 83)，絕無永久之抵抗阻力，但對於其體積之變遷則有之。設有液體儲於一圓筒狀之容器中，其長為 l ，截面為 q ，為一活動之活塞所閉。活塞因 k 力之作用而向內移動 Δl 之距離時，液體之體積即變遷 $\Delta V = q\Delta l$ 。其相對的體積變遷值 $-\Delta V/V$ 係由於所受之壓力 $p = k/q$ ，故應與之成正比。於是

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta l}{l} = \frac{p}{\chi} = \frac{k}{q \cdot \chi} \dots \dots \dots (6)$$

此與 § 82, (1) 式相較，則見此式與關於固體之 Hooke's 氏定律者原理上完全相同；常數 χ 稱為壓縮係數，與 Hooke's 氏定律中固體之彈性係數 E 地位相同（6 式中所以用負號者，乃

因此處係數之定義指壓縮而言,不若彈性係數之定義指伸長言也)。

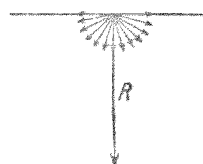
測量液體之壓縮係數時,吾人須注意不可使作用於液體之壓力將容器之圍壁變形,即容器之容積須不致因以改變。欲免此弊,可用壓力計(第81圖 Örsted 氏),容器外面所受之壓力與器中液體內部所受者恆係相等,故對於容器而言,除其本身之質料壓縮頗微,可略去不計外,其所受壓力之作用適內外抵消。欲測之液體儲於 A 器中,其下部爲水銀所密閉。外容氣中其餘之部份滿注以水。於是水面之上可加任何壓力。 A 器中液體體積之變遷可由水銀柱之昇降以測出之。



第 81 圖 液體壓縮
係數之測定

液體壓縮係數之數量級約十倍於固體。

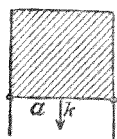
92. 表面張力。液體之自由表面,似由薄層之表皮所成。所謂表面張力者,其來源係由於分子間之引力。一分子在液體內部者必爲其他分子所圍繞,其各方所受之力平均相等,而彼此相消,但分子之在液體表面者則不然。此等之分子所受其他分子引力之合力 R (第82圖)垂直於表面,而向液內。故其對於液體之內部具有某值之位能。其平衡之條件乃在液體之位能須爲最小 (§ 62),與其他一切穩定平衡之情形同。欲液體之位能最



第 82 圖 表面張力
之解釋

小,其表面上之分子須爲數最少,即液體之表面須爲最小。故液體除內力外若不受任何他力之作用,則其自由表面之面積在合於所設條件(例如接觸面之形狀)之下恆爲最小(最小面)。自由水滴每成球形,即由於此。

蔽於線架上之液體薄膜,如肥皂膜等,對於增大其表面必加抵抗,蓋此時恆需工作,俾得賦予表面上之新分子以位能,換言之,將液內之分子趨至表面,恆須反抗其周圍分子之引力。故液體之自由表面有似彈性之膠膜,惟其所涉之力



第 83 圖 表面張力之說明

之來源完全不同。第 83 圖示一矩形之線架,其上張有一層液體之薄膜。矩形之一邊可以任意移動,以增減液體之表面。命此邊之長爲 a ,若向下移過 dx 之距離,則液膜之面積(注意共有兩面!)增加 $dF=2a \cdot dx$ 。命每一 [厘米]² 之表面

內含有 n 個分子,表面上每分子之位能爲 ϵ 。於是面積增大後,位能之增加,亦即所費之工作,應爲

$$dA = n\epsilon dF = n\epsilon \cdot 2a dx \text{ [爾格]}$$

此工係由 a 邊上之作用力 k 使之移過 dx 距離時所作。但工作恆等於力與距離之相乘積,故 $dA = k \cdot dx$ 。因得增大液膜所需之力,亦即液膜反抗增大之力,爲

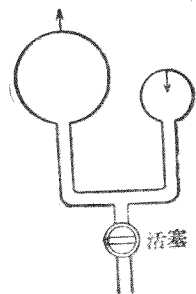
$$k = n\epsilon \cdot 2a = 2a\theta \text{ [達因]} \dots \dots \dots (7)$$

此液體所特具之常數 $\theta = n\epsilon$ 稱爲其表面張力係數。其因次爲 [達因]/[厘米],而等於邊緣上每 1 [厘米]內之力。

試觀察肥皂泡等液體之表皮，尤饒趣味。液體恆欲自行收縮使成最小之表面，但為泡中密閉氣體之壓力所反抗。欲計算其平衡，可取泡面上任一大圓，視泡為二半球所合成，而計算此二半球藉表面張力互相結合之總力。二半球接觸界線之長為 $2\pi r$ (r = 泡之半徑)。因泡有內外二面，故按 (7) 式，此總力應為 $k=4\pi r\theta$ 。但泡內與泡外氣體壓力之差 p 欲使二半球分裂。吾人不難計算氣體壓力差在此方向上之分力為 $k=\pi r^2 p$ 。此二力須互持平衡；故

$$4\pi r\theta = \pi r^2 p \text{ 或 } p = \frac{4\theta}{r}.$$

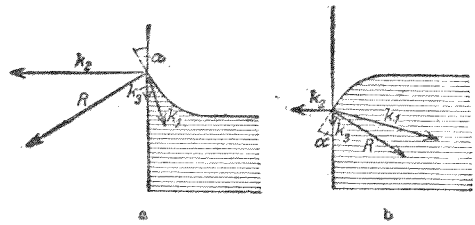
從此式得一初似驚異之結果，即肥皂泡平衡時，半徑愈小者泡內氣體之壓力愈大。驟觀之此似與吾人之經驗相反，蓋將空氣壓入時，泡必隨之脹大。但事實上此時脹大者為泡內密閉空氣之體積，其內壓力固因之下降也。下述之實驗即可示明此理。半徑不同之二肥皂泡為一管所連通 (第 84 圖)，則小者縮而大者脹，直至小泡在管端僅剩一頂，其曲率與大泡相等而止。初時小泡內之氣壓較大泡內為高，故小泡中之空氣源源流入大泡，直至此時，二泡內之氣壓方等。液體之表面張力又視其接觸之物質而異。



第 84 圖 大肥皂泡
縮小肥皂泡而脹大

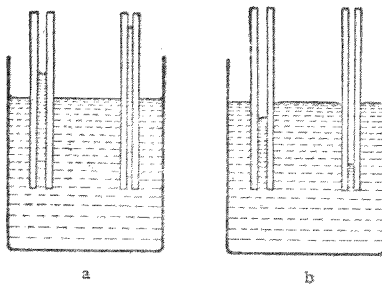
93. 毛細作用。所謂毛細現象者，係由液體與固體面

相觸時，二者間發生力之作用而成。此時液體表面之分子非特受液體內部分子之作用力 (k_1)，且亦受固體表面分子之作用力 (k_2)



第 85 圖 毛細現象之理

(第 85 圖)。若液體之上尚有他種物質(層疊之液體)，則其作用亦當計算，而最後尚有重力 (k_3)，但在許多情形中，重力常遠較其他各力為小。液體之表面應垂直於諸力之合力 R (§ 88)。因各力彼此之關係不同，故液體沿容器之壁面或上升(第 85 圖 a)，或下降(第 85 圖 b)。



第 86 圖 細管之作用

故名毛細作用中之情形，即本乎此。器中儲水，管插水中，水即在管內上昇(第 86 圖 a)，管徑愈小者，上昇愈高；水銀則反是，不昇而反降(第 86 圖 b)。

若液體與固體接觸間之分子力較液體本身之分子力為大，則液體擴展於固體之表面，成一薄層，而濡濕固體之表面，堅附於其上(例如水之與潔淨之玻璃)。否則不能濡濕，而液體在固體面上聚成小滴(例如水銀之與玻璃，水之與油膩玻璃)。其平衡之條件，

恆係位能須為最小。在此例中，所謂位能者，乃指相觸之固體與液體二物質表面分子間之相對位能而言。

試取一半徑為 r 之毛細管，垂直插入一密度為 ρ 之液體中，管壁盡為液體所濡濕（第 87 圖）。今試以位能須為最小

之條件為基礎，計算穩定平衡之狀態。位能由二部份合成，其一為上昇液體柱之位能，其二為液面分子之位能。此二者均隨液柱高度之變遷而異。命此高度為 h [厘米]。

於是此液柱之重心點 S 在管外液面以上 $h/2$ [厘米] 之處（此處及以下均略去液面頗小之彎曲，即毛細管中之所謂彎月面）。

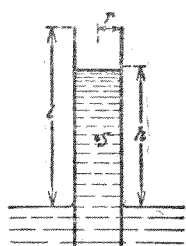
液柱對於管外液面之位能為 $\pi r^2 h \rho g \cdot h/2 = \pi r^2 h^2 \rho g/2$ 。

毛細管中之液面係由二部份 πr^2 與 $2\pi r(l-h)$ 所合成，其 l 為毛細管聳出液面之長度。按 § 92，表面上每 1 [厘米]² 內所含之分子能量為 $n\varepsilon = \theta$ ，故管中液面之位能為 $\theta [2\pi r(l-h) + \pi r^2]$ ，而總位能為

$A = \frac{1}{2} \pi r^2 h^2 \rho g + \theta [2\pi r(l-h) + \pi r^2]$ [爾格]。

將此式按上昇高 h 微分之，而令其微分係數為零，即得位能最小之條件為

$\frac{dA}{dh} = \pi r^2 h \rho g - 2\theta \pi r = 0$



第 87 圖 毛細上昇之說明

或

$$h = \frac{2\theta}{\rho r g} \dots\dots\dots (8)$$

若其他之值均爲已知，則於測得上昇高 h 後，即可從此計算常數 θ 之值。液體之不能濡濕管壁而在毛細管中下降者，按同理亦可得一相同之式，惟爲負號。

在上述二極限情形中，液面與壁面之交角 φ (所謂毛細角) 等於 0° 或 180° 。在其他一切情形中，其值介於此二限值之間 (第 85 圖)，毛細角之大小隨液體與器壁間之分子力而異。上升高之普遍式爲

$$h = \frac{2\theta}{\rho r g} \cos \alpha \dots\dots\dots (9)$$

表面張力係數 θ 對於毛細作用頗有重要之關係，故亦稱爲相關液體之毛細作用係數。

與毛細作用類似之力，有所謂分子力者，亦存乎一方面爲固體分子，他方面爲固體或氣體之間。例如附着 (Adhäsion) (如鉛粉之附着於黑板) 及吸附 (Adsorption) (§ 191) 之現象皆基乎是。

油滴着水，即因水與油間之毛細作用力，而自行擴張，滿蔽水面，成一極薄之膜。Rayleigh, Perrin 諸氏曾利用此項現象以估計分子之大小。若置一極小之油滴於廣闊之水面上，則油決不能盡蔽全部之水面。油之擴張度必有限制。

蓋此時油膜之厚薄已與分子直徑之值相埒,不能再行展薄也。利用此法吾人已測得分子之直徑當小於 10^{-6} [厘米],由肥皂泡黑點之厚薄 (§ 439),亦可測得近似之結果。

植物中液汁之上昇,除由於滲透作用 (§ 189) 外,毛細力亦與有功焉。細孔質與海綿質之物體在液體中易於濕透,亦由於此毛細作用之力。

第十章 氣體靜力學

94. 氣體分子論(氣體動力論). 若吾人能明瞭組成氣體之分子之舉動,且確知其數量的關係,則氣體之特性遠較固體液體爲簡單. 此即係所謂氣體動力論之內容. 首倡此說者當溯及 D. Bernouilli 氏(1738). 氣體之分子恆運動不息,其速度僅隨氣體之溫度而變 (§ 156). 此種運動全無定向. 分子運動時,在未與容氣之圍壁或其他分子碰撞以前,其軌道恆爲直線. 此種碰撞均屬完全彈性的 (§ 51), 故撞後能量不損. 但每一碰撞後,通常二分子之能量及衝量,皆彼此互換. 故各分子每遇若此之碰撞,其速度及方向即因之變更. 吾人若『微察』氣體之狀況,即將各分子個別觀察之,則見其繼續變遷而永無寧息. 但即在極小之容積以內,且在極低之壓力下,氣體之分子已屬恆河沙數. 故吾人若『統觀』此容積之全部,則未見其變也. 蓋在大多數之分子中,任一分子速度之量與向每有變更,其他無數分子中必偶有一個作相反之變更,而平均適相抵消,此即所謂動力平衡是.

此可以大都市中同樣生活之居民之狀況比擬之. 吾人試『微察』此種之人羣,而分別詢以各人之生活,則所得之結果必極離奇之至,變化倏忽,無有已時;甲死而乙生,丙去而

了至。但若『統觀』全市民而不問個人之動靜，則恆可得相同之圖表；人口總數，平均年齡，以及其他一切特性之平均數值等，均可歷久不變——恆假定爲同樣生活。此種之『統觀』法卽爲市民統計。由此且可導出更廣之應用，卽無需明瞭各人之遭遇，僅從統計之結果，已可確定關於市民某項平均情形之精密的規律。

凡觀察大多數單體集成之團體時，恆可用統計法（上例自不能應用於一個家庭以內之居民）；氣體既由無數同類之分子所集成，則應用統計法以觀察之，自亦可得十分美滿之結果；此爲一非常重要之事實。由此所得之結果恰與吾人能直接分別觀察各分子時所得之結果相同，惟此法所示者爲極多數之分子集合於一不甚小之場所內時之整個狀況，而細微之分子，卽縱能爲吾人所洞察，所見者亦純屬偶然，無足輕重，與市民統計者對於一人之命運並不特加注意，無以異也。

統計中所應用之數學方法係基於或然率之定律。由此所得之結論，可陳述各單體——在此處卽爲氣體分子——之平均狀況，或確定足以標示其某種狀況之數量的平均值。若吾人所討論者爲理想氣體 (§ 101)，卽各分子間互相作用之力可以略去不計者，則結論尤見簡捷。在此項假設下，靜止而定溫之理想氣體咸具有下列之公共特性（2與3兩項對於非理想氣體亦屬合理）。

1. 在足够長久之時間內,任一分子動能 $\frac{1}{2} \mu v^2$ 之平均值皆相等,全體分子,莫不相同(時間的平均值);且此值又等於一指定之某瞬間全體分子動能之平均值(空間的平均值). 從此可知若吾人所遇之氣體分子純屬同類(質量 μ 相同),則各分子之平均速度 v , 即其時間的平均值,均應相等. 在許多情形中,吾人於計算時可認為全體分子在各瞬間皆具有此值之平均速度.

2. 在動力平衡下,平均言之,分子之運動向恆均勻的分佈於空間內一切之方向.

3. 氣體恆充滿於其所佔之空間,無遠弗屆,無微弗至. 若不計重力之作用,則分子恆平均的均勻分佈於其佔據之空間. 故空間中等容積部份內之分子個數恆相等.

4. 在相同之溫度下,各種不同氣體分子之動能均相等. 是則氣體分子之質量 μ 較小者,其速度較大. 此蓋因 $\mu_1 v_1^2/2 = \mu_2 v_2^2/2$, 故 $v_1^2 : v_2^2 = \mu_2 : \mu_1$.

5. 溫度相同時,分子速度不因氣體壓力而異.

95. **Avogadro 氏定律.** 此為氏所創立之臆說,後章 (§ 156) 當證實之. 其言曰:一 [厘米]³ 內理想氣體分子之個數祇視溫度與壓力而異,與氣體之種類無關. 故在等溫及等壓下,等容積內各種不同氣體分子之個數皆相等 (Avogadro 氏定律, 1811).

吾人試考察 0° 及 760 [毫米] 壓力下 1 [厘米]³ 內之氣體

命其密度爲 ρ , 1 [厘米]³ 內所有之分子之個數爲 n , 各分子之質量爲 μ . 於是 1 [厘米]³ 氣體之質量即其密度爲

$$\rho = n\mu \dots\dots\dots (1)$$

按 Avogadro 氏定律, 一切氣體在 0° 及 760 [毫米] 壓力 (即所謂標準情形) 下每 [厘米]³ 中所有之分子個數 n 均相等, 吾人即稱此數爲 Avogadro 氏常數. 其值爲

$$n = 27,06 \cdot 10^{18}, \text{ 或約爲 } 27 \times 10^{18} \dots\dots\dots (2)$$

等容積內各種氣體質量之比等於其密度之比. 因等溫度及等壓力下一切理想氣體之 n 皆爲同值, 故按 (1) 式, 在等溫下各種理想氣體之密度應正比於其各單個分子之質量. 是以從兩種理想氣體密度之比, 即可計算兩種分子質量之比.

96. 分子量與原子量 克分子與克原子. 所謂某物質之分子量者, 乃指此物質中一個分子之質量而言, 但其質量之單位非爲 [克] 而爲一個氧原子質量之 1/16. 例如氧 O₂ 之分子量爲 32,00, 氫 H₂ 爲 2,0156, 氦 He 爲 4,00 等.

分子量之測定, 可用各種不同之物理的與化學的方法. 最簡單之物理方法, 就其原理言之, 乃將欲測之物質化成理想氣體之狀態而測其密度 ρ . 按 (1) 式, 各種不同之物質化成理想氣體後, 在等壓力及等溫度下分子量應正比於其密度. 氧之密度不難計算 (參閱 § 182), 祇須測出一物質與等壓等溫下氧氣密度之比, 即得該物質之分子量.

所謂 1 [克分子] 之物質者, 其質量之 [克] 數即等於其分子量之值。故氧氣每 1 [克分子] 之質量為 32,00 [克], 氫為 2,0156 [克], HCl 為 36,46 [克]。某物質 1 [克分子] 之質量與其一個分子質量之比等於質量之單位 1 [克] 與氧原子質量之 $1/16$ 之比。換言之, 各物質 1 [克分子] 之質量 M 與該物質一個分子質量 μ 之比皆為常定, $M/\mu = N$, 此 N 者非他, 乃為 1 [克分子] 中所含分子之個數, 蓋

$$N\mu = M \dots\dots\dots (3)$$

此式之兩邊皆示 1 [克分子] 之質量 M , 而為 N 個單質量 μ 聚合而成者。 N 為一普遍常數。吾人稱之為 Loschmidt 氏常數。其值為

$$N = 6,06_0 \cdot 10^{23} \dots\dots\dots (4)$$

1 [克分子] 氫氣 (H_2) 之質量為 2,0156 [克]。故按 (3) 式, 一個氫分子之質量為 $\mu = 2,0156/N = 3,32_4 \cdot 10^{-24}$ [克], 而一個氫原子之質量為 $1,66_2 \cdot 10^{-24}$ [克]。

因一切物質每 [克分子] 中所有分子之個數恆係相同, 故按 Avogadro 氏定律, 不同之物質在理想氣體狀態時, 於等壓力及等溫度之下, 每 [克分子] 所佔之容積皆必相等。吾人可取氧氣為例以計算 0° 及 760 [毫米] 壓力下此項容積之值。此時氧之密度為 0,001429, 故 1 [克] 氧氣之容積 (即其容度 V) 當為 $1/0,001429$ 。氧之分子量為 32, 其 1 [克分子], 即 32 [克] 之氧, 在標準情形下之容積當為 $32/0,001429$, 或約為 22400 [厘

米)³。若以他種氣體計之，如氮(4/0,0001787)，氮(28/0,0012507)等，皆得同值。此項容積稱為克分子容積。

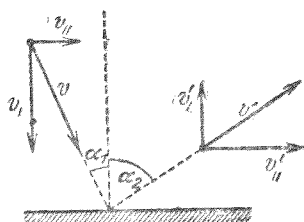
一元素原子量之定義為其一個原子之質量，亦以氧原子質量之 1/16 為單位，與分子量同。原子量表見 § 501。

[克原子]-之定義亦與[克分子]同。1[克原子]元素之質量，以[克]計之，數值上適等於其原子量。每[克原子]中原子之個數等於 1 [克分子]中之分子之個數，故亦等於 N 。

(自從發見氧非純粹之元素而乃由三種同位元素所合成 (§ 517) 以後，將來分子量與原子量是否仍以氧為標準，實為一急切之問題。自物理學觀點觀之，氫原子之質量似為自然之單位)。

吾人當注意 Loschmidt 氏常數與壓力及溫度無關。Avogadro 氏常數則反是，係對於某一定值之壓力及溫度而言，情形稍變，其值即異。

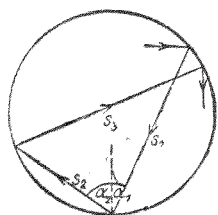
97. 氣體之壓力。今當以 § 94 所揭示之觀念為基礎，解釋氣體在其密閉之容器圍壁上若何發生壓力之情形。氣體分子恆因其運動而繼續碰撞器壁，撞後即被其擲回。碰撞時皆遵守彈性碰撞之定律 (§ 51)，動能毫不損減。因器壁屹立不動，故分子之動能毫不傳遞於器壁；各分子以任何速度而來，撞後仍以相等之速度而去。設



第 83 圖 氣體壓力之導出

某分子以速度 v , 按入射角 α_1 (第 88 圖) 擊於一平滑之壁面, 以反射角 α_2 回躍. 吾人姑假定撞前撞後之速度與壁面之垂線三者在同一平面之內. 於是撞前之速度可分為二分速, $v_{\perp} = v \cos \alpha_1$ 與壁面垂直, 及 $v_{\parallel} = v \sin \alpha_1$ 與壁面平行; 撞後之速度亦可分為二分速, $v_{\perp}' = -v \cos \alpha_2$ 及 $v_{\parallel}' = v \sin \alpha_2$. 此處僅與垂直於壁面之分速有關. 碰撞時器壁施一力於分子, 該分速之方向因之改變, 其變遷值為 $v \cos \alpha_1 - (-v \cos \alpha_2) = v(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)$.

按諸經驗與理論, 吾人深知氣體之壓力與容器之形狀無關; 某定量之氣體在一定之溫度下, 其壓力祇視其所佔容積之大小而異. 欲導出氣體壓力之定律時, 吾人須應用此項事實. 為計算簡捷計, 假定密閉氣體之容器為一中空之圓球, 其半徑為 r (第 89 圖). 器中之氣體分子除壓力極低時



第 89 圖 氣體壓力之導出

外, 在尚未碰撞器壁之前, 必已屢與其他之分子互相碰撞, 因此屢易其運動之方向. 但此種之互撞對於氣體壓力之計算, 可視為無關重要, 蓋分子之個數既多,

若甲分子在未達器壁之先為他分子所碰撞而折其前進之方向, 以致不克到達器壁, 但平均言之, 同時恆必有乙分子受同樣之碰撞而適以甲分子原來之前進方向以達器壁, 此乙分子者, 若無此一撞, 初不能達到器壁也. 故竟可以乙代甲. 若此吾人可祇取氣體分子與器壁之碰

撞,而不涉分子之互撞,此種之忽略初不足以應響所得之結果。

爲更求普遍計,吾人可視分子在器壁上不作有規則之反射,即每次碰撞時入射角不必與反射角相等。命此二角爲 α_1 與 α_2 (第89圖)。吾人祇觀察其動量之垂直於器壁之一分量 μv_f 。未撞前其值爲 $\mu v \cdot \cos \alpha_1$, 既撞後爲 $-\mu v \cdot \cos \alpha_2$, 故碰撞後此分量變遷之總值爲

$$\Delta \mu v_f = \mu v (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2).$$

命 s_1 與 s_2 爲屬於 α_1 與 α_2 二角之弦,即前一次碰撞與此次碰撞間及此次碰撞與下一次碰撞間分子所行之路程,又命 r 爲球之半徑,則

$$\cos \alpha_1 = \frac{s_1}{2r}, \text{ 而 } \cos \alpha_2 = \frac{s_2}{2r}.$$

於是得

$$\Delta \mu v_f = \mu v \frac{s_1 + s_2}{2r}.$$

吾人試認每次碰撞前後分子自由路程半段之長 $s_1/2$ 及 $s_2/2$ 爲屬於各該次碰撞之路程。則分子於每次碰撞進行此段路程 $(s_1 + s_2)/2$ 所需之時間爲

$$\Delta t = \frac{s_1 + s_2}{2v}.$$

故得

$$\frac{\Delta \mu v_f}{\Delta t} = \frac{\mu v^2}{r}.$$

從此可得一結論，即 $\Delta\mu v_{\parallel}/\Delta t$ 一值為一個分子在單位時間內平均給出之動量，與入射角及反射角之大小無關。命 1 [厘米]³ 氣體中之分子共有 n 個，即球形容器內共有 $n \cdot 4\pi r^3/3$ 個分子，則在單位時間內氣體分子給予器壁之動量總值為

$$\frac{4\pi r^3 n}{3} \frac{\Delta\mu v_{\parallel}}{\Delta t} = \frac{4\pi r^2}{3} n\mu v^2.$$

按 Newton 氏第二公理，單位時間內動量之變遷值應等於作用力 k 。故器壁因分子之碰撞而受之力為

$$k = \frac{4\pi r^2}{3} n\mu v^2 \text{ [達因]} \dots\dots\dots (5)$$

此 k 力以球之面積 $4\pi r^2$ 除之，即得器壁所受之壓力：

$$p = \frac{1}{3} n\mu v^2 \text{ [達因]} \cdot [\text{厘米}]^{-2} \dots\dots\dots (6)$$

以上所述，未及動量之切線分量 μv_{\parallel} 。但因此種分量之方向既與器壁平行，則其與壓力自無關係。每一碰撞時此種分量亦受變遷，此僅予球器以微弱之角動量；但其方向時易，且分子之個數又係極多，故平均彼此可以抵消。

(6)式殊屬重要，今更用他法以導出之。設將各分子之速度分為 v_x, v_y, v_z 三個互相垂直之分速。於是 $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$ 。若以 $\overline{v_x^2}, \overline{v_y^2}, \overline{v_z^2}$ 表各分子三分速平方之平均值，則亦可得同樣之式 $\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = v^2$ 。因分子之速度在空間內均勻分佈，故此平均值應彼此相等。於是 $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = v^2/3$ 。試取器壁之一部份，面積為 F [厘米]² 而垂直於 x 方向；更於全體分

子之中,挑選以分速 $+v_x$ 向 F 面而運動者觀之. 此種分子之個數必為在 x 方向內以速度 v_x 運動者之半數,蓋尚有半數以相反之方向而運動也. 命 1 [厘米]³ 中分速等於 v_x 之分子個數為 n_v^x . 為簡單計——但結果仍屬無異——,假定分子在 F 面上皆作單向反射,換言之,皆以等角而反射,則反射後在 x 方向內之速度為 $-v_x$. 若此則各分子遇 F 時動量之變遷值為 $2\mu v_x$. 試以 F 為底, v_x 為高,作一稜柱體,則其中之分子將於 1 秒鐘內盡達 F 面,故共有 $n_v^x F v_x / 2$ 個之分子;而此諸分子在 F 面上所施之力等於 $n_v^x \mu v_x^2 F$. F 面所受之總力可將全體分子之力相加而得,即 $k = \sum n_v^x \mu v_x^2 F$. 若以 n 示 1 [厘米]³ 中分子之個數,則 $\sum n_v^x v_x^2 / n$ 為速度平方 v_x^2 之平均値 $\overline{v_x^2} = v^2 / 3$; 又以 F 除 k , 即得器壁上之壓力為

$$p = \frac{1}{3} n \mu v^2,$$

與(6)式相同.

不同之理想氣體混合時,各種氣體分子之速度彼此不受影響,故其總壓力等於各氣體單獨壓力即所謂分壓力者之和,

$$p = \frac{1}{3} n_1 \mu_1 v_1^2 + \frac{1}{3} n_2 \mu_2 v_2^2 + \dots = p_1 + p_2 + \dots \quad (7)$$

(Dalton 氏定律, 1803).

因 n 為 1 [厘米]³ 中分子之個數,故 $n\mu$ 為 1 [厘米]³ 中所含之質量. 此即為氣體之密度 ρ : 於是

$$p = \frac{1}{3}\rho v^2 \text{ [達因] / [厘米]}^2 \dots\dots\dots (8)$$

故氣體分子之速度 v 可自氣體之壓力及密度計算之。

氫之密度在 0°C 及 760 [毫米] 壓力下之值為 0,00008985. 760 [毫米] 之壓力等於 1013300 [達因] / [厘米]² (§ 103). 將此等之值代入上式, 得氫分子之速度為 $v = 1,837 \cdot 10^6$ [厘米] / [秒] = 1837 [米] / [秒], 或約為每 [秒] 2 [公厘]. 以空氣計之, 其值為 $v = 484$ [米] / [秒], 或約為每 [秒] 0,5 [公里].

93. Boyle-Mariotte 二氏定律. 在 (8) 式中, ρ 若易以容度 $V_s = 1/\rho$ (§ 56), 則得

$$pV_s = \frac{1}{3}v^2.$$

此值對於一氣體在常定之溫度下亦為常定. 若吾人所注意者不為 1 [厘米]³ 之氣體, 而為質量等於 m , 容積等於 V 者, 則 $V_s = 1/\rho = V/m$. 故對於 m [克] 之氣體佔有任何之容積 V 者,

$$pV = \frac{1}{3}mv^2 \text{ [達因]} \cdot \text{[厘米]} \text{ 或 [爾格]} \dots\dots\dots (9)$$

對於定量之氣體, 在定溫時此式之右邊為定值, 故其左邊亦為定值, 於是

$$pV = \text{常數} \dots\dots\dots (10)$$

此即 Boyle-Mariotte 二氏之定律 (1660 與 1676, 其先 Townley 氏亦已知之). 其言曰: 在一定之溫度下, 氣體之壓

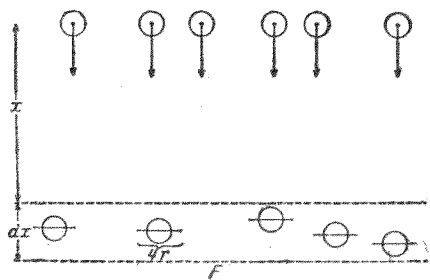
力與其容積互成反比。在定溫下變更一密閉氣體之壓力使自 p_1 至 p_2 ，則其容積必隨之自 V_1 變至 V_2 ，其間之關係為

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \text{ 或 } V_2 : V_1 = p_1 : p_2 \dots\dots\dots (11)$$

凡物體之狀態變遷時，其溫度始終維持常定者，稱曰等溫過程。

因 m 為 V 容積內分子質量之和，故 V 內所含分子動能之總值等於 $mv^2/2$ 。自(9)式知 pV 之相乘積等於此項分子動能總值之 $2/3$ 。

99. 自由路程及碰撞頻率。 氣體之分子常因其運動而與他分子碰撞；各分子每連續兩次與他分子碰撞間所行路程之平均值，稱為平均自由路程（簡稱自由路程）。吾人可設想有一羣 z_0 個之氣體分子，沿同一方向運動，且假設分子均為球形，其半徑均為 r 。當此分子羣前進時，在其所經之各層氣體中輒有數個分子與各層中之分子碰撞，因之折向而離羣。設某層之氣體厚度為 dx ，與分子羣之初位相距 x （第90圖）。命分子羣到達此層時，其 z_0 個分子



第 90 圖 自由路程之導出

中尚剩 z 個。向前直飛，未因碰撞而分散。又命此層之截面面積為 F 。於是其相應之體積為 $dV = Fdx$ 。若 1 [厘米]³

中有 n 個分子，則在此體積中共有 $nFdx$ 個分子。吾人可設想此層中之分子均為靜止。吾人今當研求者即為在此層中碰撞之次數。若此層中全體分子非為圓球而為半徑亦等於 r 之圓板，且圓板之平面恆與分子之前進向垂直，則碰撞之次數仍與分子為圓球時相同。又若視運動之分子均為質點，而同時即視氣體層中靜止之分子，即前假設之圓板，半徑均因之加倍，則對於碰撞之次數仍無影響。此層之厚度 dx 可為極薄，其中之分子無彼此重疊者。吾人所假設半徑等於 $2r$ 之全體圓板面積之總和為 $4\pi r^2 n F dx$ ，而此層之空間面積為 F 。分子羣達到此層時，共有 z 個分子，經過此層後，設有 dz 個分子因碰撞而離散，則 dz/z 之比當等於 $4\pi r^2 n F dx$ 與 F 之比。故

$$\frac{dz}{z} = -n \cdot 4\pi r^2 dx$$

dz 示在 dx 路程中 z 之變遷值。故上式之右邊為負號。以 $x=0$ 時 $z=z_0$ 之關係代入，則此微分方程式之解式為

$$z = z_0 e^{-4\pi n r^2 x} = z_0 e^{-\frac{x}{\lambda}} \dots \dots \dots (12)$$

吾人不難示明 $\lambda = 1/4\pi n r^2$ 一值即為自由路程之平均值。因每 [厘米]³ 中分子之個數 n 正比於密度，而按 (8) 式，密度又正比於壓力，故自由路程反比於壓力，又反比於分子之截面 πr^2 。

平均自由路程之長可另用他法直接測定之 (§ 113) 其

結果大致如下(在大氣壓力及 0° 之時): 空氣中約為 10^{-6} [厘米], 氫中為 $1,8 \cdot 10^{-6}$ [厘米], 二氧化碳中為 $0,7 \cdot 10^{-6}$ [厘米]. 因各氣體每 [厘米]³ 中分子之個數為已知 (§ 95), 故吾人更可從此計算分子截面 πr^2 之值. 分子半徑之數量級約為 10^{-8} [厘米]. 在標準情形下氫氣 1 [厘米]³ 中全體分子截面之和為 8500, 空氣為 17000, 二氧化碳為 26000 [厘米]², 其數量級約為 1—3 [米]².

吾人曾於 § 97 中計算分子速度之值. 從分子速度與平均自由路程之值可計算分子連續兩次互撞相隔之時間, 其倒數即為單位時間內碰撞之次數, 稱為碰撞頻率. 在空氣中, 此值約為每秒 $4,7 \cdot 10^9$ 次, 在氫氣中為 $9,5 \cdot 10^9$ 次, 在二氧化碳中為 $5,5 \cdot 10^9$ 次.

100. 氣體之壓縮係數. 等溫容積變遷. 設有理想氣體儲於一圓筒狀之容器中, 其截面為 q (第 91 圖). 容器為一可以移動之活塞所閉住, 其外有一 k 力作用, 而氣體內則有一壓力 $p = k/q$ 以支持之. 設 k 力增加 dk 之值, 活塞因之向內移過 dx 之距離, 而氣體之容積即因之有 dV 之變遷. 此時命氣體之溫度始終維持常定 (等溫容積變遷). 於是壓力因之增加 dp , 而按 (10) 式



第 91 圖 氣體之等溫壓縮

$$d(pV) = pdV + Vdp = 0 \quad \text{或} \quad -\frac{dV}{V} = \frac{dp}{p} = \frac{dk}{qP} \dots\dots (13)$$

此式與(6)式(§ 91)用以作為液體壓縮係數之定義者完全相似。此式中新加之力 dk 相當於該式中之總力 k (此處壓力 p 之意義與 § 91 中所遇者不同,該節中之壓力為由外方施於液體上之力,以使之變遷之容積 ΔV 者)。將此二式比較之,則見氣體之壓力 p 相當於液體之壓縮係數 χ 。故理想氣體之壓縮係數等於其壓力。但此僅對於等溫之容積變遷時方為合理(參閱 § 172)。

活塞向內移過一短距離 dx 時須反抗氣體壓力所施於活塞內面之力 pq 而作 dA 之工,其值等於力與路程之相乘積,即

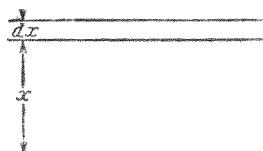
$$dA = p \cdot q \cdot dx = p \cdot dV \dots \dots \dots (14)$$

容積增大時,氣體之壓力自行作等值之工,故吾人可由此得一外工作(參閱 § 85, 6 式)。

101. 理想氣體與真正氣體。 真正氣體對於以前各節中導出之氣體規律雖不能完全遵守,但相去甚近。絕對遵守各律之氣體,吾人已稱之為理想氣體,在尋常之壓力與溫度下空氣,氧,氮,氫以及稀有氣體均頗近似理想氣體。在低溫度及高壓力下,即見差別 (§ 164)。在以前導出各規律時,皆假設毫無交互作用存乎分子之間,尤應毫無引力存在,此為所以差別之第一原因。壓力不甚高時,氣體分子間之平均距離頗大,故其交互作用非常微弱。壓力甚高,則此平均距離較短,而交互作用顯矣。真正氣體與理想氣體差別之

另一原因,在前者分子本身之體積較之氣體所佔之容積為值非小而不能略去(密度頗大)。以下各節所述者恆假設為理想氣體。

102. 重力作用下之氣體。因液體之壓縮性頗小,其壓力雖以深度而增加,而其密度仍可視為不變。但氣體則不然。在一重力作用下之氣體中,例如地面上之大氣,試取相離 dx 極近之二平面,均與重力之方向垂直(第92圖) 命 x 之正方向為鉛直向上,則 x 增而 p 減。命在高度 x 處之氣壓為 p , 在高度 $x+dx$ 處為 $p+dp$ 。於是



第 92 圖 氣體壓力公式之導出

$$dp = -\sigma dx \text{ [克*] / [厘米]}^2 = -\rho g dx \text{ [達因] / [厘米]}^2,$$

上式中 ρ 為該處氣體之密度, σ 為比重, g 為重力加速度(參閱 § 87)。又按 § 97, (8) 式, 氣體之密度在定溫時正比於其壓力。設在海面上即 $x=0$ 處氣體之壓力為 p_0 , 密度為 ρ_0 , 則 $\rho = \rho_0 \cdot p / p_0$, 而 $dp = -\rho_0 g p / p_0 \cdot dx$ 。此微分方程式之解式為

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} x} = p_0 e^{-\beta x} \text{ [達因] / [厘米]}^2 \dots \dots \dots (15)$$

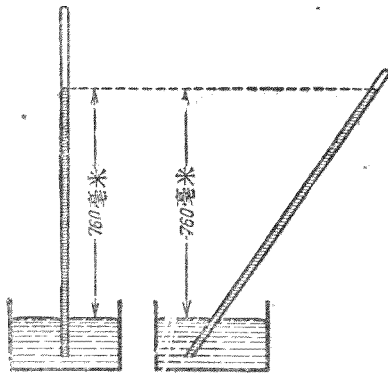
式中 $\beta = \rho_0 g / p_0$ 。此即所謂氣壓高度公式是也。

(15) 式祇可應用於靜止之單純氣體, 即其各處之組成成份皆為均勻者。倘由多種氣體混合而成, 則(15)式示各種氣體在平衡狀態時之分壓力, 其值可將各該種氣體 β 之

值代入而得。氣體之總壓力即等於分壓力之和。

103. 大氣壓力。由地球之大氣而生之壓力，即所謂大氣壓力者，對於地面上許多現象極關重要，且亦極饒興趣。

Torricelli 氏(1643)首先用下法測定空氣壓力之值。將一長約 1 [米] 之玻璃管一端封固，滿注極純潔極乾燥之水銀於其中，以拇指密閉之，而倒立於一水銀槽內，管口向下。於是撤去拇指，一部分水銀即因之流下，管內水銀柱之上部即成



第 93 圖 Torricelli 氏之試驗

真空。此時留於管中之水銀柱高約 760 [毫米]，其值視外面之空氣壓力而異(第 93 圖)。試將玻璃管傾側，則管中水銀柱上昇，直至其頂點與槽中水銀面間之垂直距離仍為同高而止(若更將此管傾斜，則水銀柱與封

固之管端相觸時，可聞碰擊之聲，此可證明管之上端確為真空)。

由此實驗可證明大氣壓力之存在。按 § 87，在連通管中靜止液體任一水平面上各處之壓力皆應相等。是則槽內水銀面上所受之壓力與管中在此同平面上所受之壓力必當相等。外面之水銀面上所受者為大氣壓力 p ，而管內同平面上之壓力則由於該面積上部之水銀柱。水銀柱之

截面爲 1 [厘米]², 長爲 76 [厘米]者(水銀之密度爲 13.6), 其質量爲 $76 \cdot 13.6 = 1033$ [克] = 1.033 [仟克]. 此水銀柱因重力之作用而施於其底面之力 (§ 55) 爲 $1033 \cdot 981$ [達因] = 1013300 [達因]. 故 1 [大氣壓] 之值約爲每 [厘米]² 1 百萬 [達因], 或爲每 [厘米]² 1 [仟克*] 強. 是即謂每 [厘米]² 地面上之空氣柱約重 1 [仟克*]. 苟包圍於地面者非爲大氣而爲一層厚約 10 [米] 之水, 則地面所受之壓力與 1 [大氣壓] 相埒.

對於大氣而言, 若高度之單位用 [米], 則 (15) 式中之常數 β 在 0°C. 時之值爲 1.7990. p_0 爲海面上之大氣壓.

高度相差不大時, 空氣壓力之相差頗微. $x=4$ [米] 時, 空氣壓力之減低者僅約 $1/2000$. 但用極精密之儀器 (氣壓高度計), 縱高度差僅

第 4 表 0°C. 時各高度處之氣壓

在 1 [米] 以內者, 此極微之氣壓差亦可藉以測知之. 高度差稍大, 則氣壓差大著. 8 [仟米] 高處之氣壓僅約

高度(以[米]計)	氣壓(以毫米[Hg]計)
0(海面)	760
500	714
1000	671
2000	592
4000	461

爲海面上者之 $1/4$. 故利用氣壓與高度之關係以測高度之差, 實爲高山測量重要之方法 (氣壓測高法). 以 $\beta=1/7990$ 代入 (15) 式, 又引用 Brigg 氏對數, 得

$$x = 18400 \log_{10} \frac{p_0}{p} \text{ [米].}$$

以上所述者未及溫度之變遷，故尚須略加改正。第4表示大氣壓力在各不同高度處之值。

因吾人極精密測量大氣壓力時恆用氣壓計，即基於 Torricelli 氏之實驗測量水銀柱之長，故大氣壓力以及任何其他氣體之壓力通常亦即以『若干[毫米]水銀柱』計之（[毫米] Hg，或僅記[毫米]）。凡壓力之等於 760 [毫米] Hg 者，吾人即稱之曰一個[大氣壓]（1 [氣壓]）。在工程界中所用之大氣壓等於 1 [仟克*]/[厘米]²，而物理學中所用之大氣壓則等於 1,033 [仟克*]/[厘米]²。在 C.G.S. 制中壓力之單位，即 1 [達因]/[厘米]²，通常輒稱之為 1 [巴]。由此導出之單位為 1 [仟巴] = 10³ [達因]/[厘米]² 及 1 [百萬巴] = 10⁶ [達因]/[厘米]²。1 [百萬巴] = 1,019 [仟克*]/[厘米]² = 750,06 [毫米] Hg，故幾與 1 [大氣壓] 相等（在氣象學中，亦有用 10⁶ [達因]/[厘米]² = 1 [巴] 而 10³ [達因]/[厘米]² = 1 [毫巴] 者。參閱 § 204）。

大氣中下層空氣之成份 78% 為氮，21% 為氧，而其餘則大部分為稀有氣體氫（體積百分率）。關於大氣之其他一切詳情，尤如其成份等，均見 § 204。

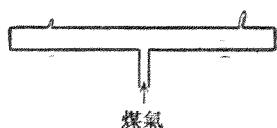
104. 空氣壓力之作用。 吾人咸知高樓上煤氣管中之壓力（事實上此乃指其超過空氣之壓力），似較底層者為大，——與自來水管中之壓力適屬相反——，其所以然者，亦因氣體壓力之隨高度遞減所致。設 A 與 B（第 94 圖）為一鉛

直煤氣管之兩孔。管外爲空氣。此處高度相差不大，氣體密度之隨高度而變遷，可略去不計。命 σ_1 爲空氣之比重， σ_2 爲煤氣之比重。 x 爲 A 與 B 間高度之差。設 A 處之空氣壓力爲 p_1 ，則在 B 處者爲 $p_1 - \sigma_1 x$ 。又設管中 A 處之氣體壓力爲 p_2 ，則在 B 處者爲 $p_2 - \sigma_2 x$ 。在 A 處煤氣壓力超過空氣壓力之值爲 $p_2 - p_1$ ，在 B 處爲 $(p_2 - \sigma_2 x) - (p_1 - \sigma_1 x) = p_2 - p_1 + (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot x$ 。因 $\sigma_1 > \sigma_2$ ，故 B 處大於 A 處。



第 94 圖
煤氣管中壓力超過空氣壓力之理

此項現象更可用 Behn 氏管(第 95 圖)示明之。管具二細孔，導煤氣入管中，而於二孔處燃之以火。管身水平時，二火焰同高。祇需一極微之傾側，已足使上孔之焰增大許多，而下孔之焰顯見縮小。

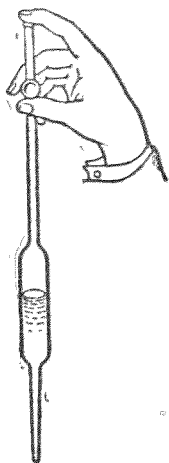


第 95 圖 Behn 氏管

若欲增強此項作用，可將煤氣管口開放極小，俾管內煤氣之壓力僅稍大於空氣之壓力(但須謹防爆炸)。

爐竈之煙囪亦與煤氣管有相同之作用。充滿於煙囪中者爲熱空氣，其密度較小於冷空氣。當爐之下部幾閉塞不通時，煙囪管之上口爲大氣壓力。煙囪內熱空氣壓力之向下遞增遠不及外面冷空氣之速，故爐內下部之氣壓較爐外爲小。外面空氣遂因之擠入爐中，而爐得『通風』；燃燒所必需之氧即隨之輸入。但須燃燒有頃，待煙囪中充滿熱空

氣後，爐方暢旺『通風』。煙囪愈高，壓力之相差愈甚，而通風愈暢。工廠中之煙囪恆高聳雲表，職是故也。



第 96 圖 移液管

苟無重力之作用，則上述各種現象，皆不能發生。例如地球上通風暢旺之煙囪，倘以之移築於月球之上，即使其他環境完全相同，但因重力太小，而作用將大減，或竟完全失其效用。

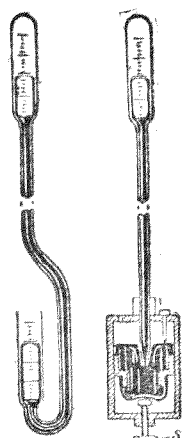
移液管(第 96 圖)亦賴空氣壓力之作用。此為一玻璃管，以之浸入液體中，用手指密閉其上口。自液體中提出時，液體仍留管中而不落。當最初提出時，確有數滴液體流出，然空氣不能流入，故管內密閉之空氣容積因之增大，其壓力因之減低。當管內空氣之壓力與由液體柱重量而生之壓力二者之和等於管下之大氣壓力時，液體柱自成平衡而不再降落。

移液管僅能用以移取濡濕管壁之液體，即液體之能附着 (§ 93) 於管壁者。否則空氣能強入管內液體與管壁之間，而液體將因以流出。若水銀能濡濕管壁，則 Torricelli 氏之實驗 (§ 103) 可不需水銀槽以承於玻璃管之下。

用吸取唧筒以吸水時，其高度不能超過 10 [米]。蓋吸取者為外部空氣壓力之作用，而 10 [米] 以上之水柱壓力即不足以與空氣壓力維持平衡也。

105. 氣體壓力之測量. 利用水銀氣壓計以測量空氣之壓力,係基於 Torricelli 氏之實驗 (§ 103), 即測量一水銀柱之高,其壓力足以與空氣壓力維持平衡者. 第 97 圖示兩種實用之水銀氣壓計.

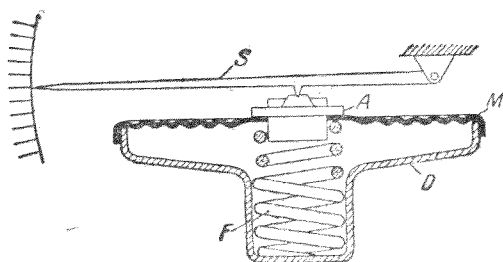
此種氣壓計所示之值通常尚須加以改正,蓋一方面水銀之比重隨溫度而變,以致水銀柱之高度亦因之而變,而第二方面旁附之刻度尺用以計水銀柱之高度者,通常用黃銅製成,亦隨溫度而變也.



第 97 圖 兩種水銀氣壓計

水銀之比重大而汽壓 (§ 180) 小,故最適宜於氣壓計之用. 其他液體亦可應用,但液體柱將因之增長. 十七世紀之時, Otto von Guericke 氏曾製一水柱氣壓計. 其水柱約達 10 [米] 之長.

倘不需十分精確,則可用無液氣壓計 (第 98 圖). 其構造之主要部份為一密閉不通空氣之金屬匣 D , 具有可以彎曲之器壁. 外部空氣之壓力大於匣內密閉空氣之壓力時, 器壁即向內彎曲,反



第 98 圖 無液氣壓計 D 金屬匣, F 彈簧, M 金屬膜, J 承點, S 指針.

之則向外。彎曲之多寡，由槓桿作用傳達於指針 S ，在刻度尺上直接示出空氣壓力之值。

關於空氣壓力之其他測量法，參閱 § 181。

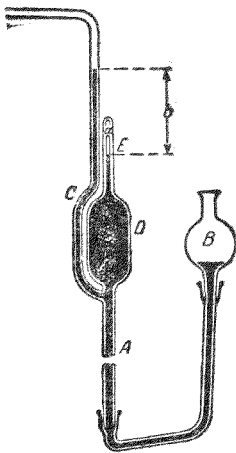
欲測較低之氣壓(約 5-50 [毫米] Hg)，可用短型水銀壓力計(第 99 圖)，以其易於納入抽去一部分空氣之容器中，或直接與此器接連，而通常僅欲測量較低之氣壓也。若壓力極低，則兩邊水銀柱高度之差每不能精確量出；且若氣壓在 1 [毫米] 左右者，此法直已不能應用。於是



第 99 圖 短型水銀壓力計，開口一端與欲測氣壓之處相連。

MacLeod 氏之壓力計尙焉(第 100 圖)。其作用乃在將欲測之氣體分出一小部份，壓之使其

容積縮小至一定值之比；同時其壓力必隨之增高，務使達一可以測量之值。例如氣體之壓力原為 $1/1000$ [毫米]，今壓之使其縮至原容積之 $1/10000$ ；按 § 98, (10) 式，此時之壓力可增至 10 [毫米]。二水銀柱之高度有若此之差，自易測出。用時先將 MacLeod 氏壓力計之 C 管接至欲測壓力之氣體所在之處。 B 為儲水銀之器，以厚壁橡膠管與壓力計連通。



第 100 圖 MacLeod 氏壓力計

A 管(圖示中斷狀，其長約 80 [米])中水銀柱初時之高度相當於壓力計內外空氣壓力之差(約 760 [毫

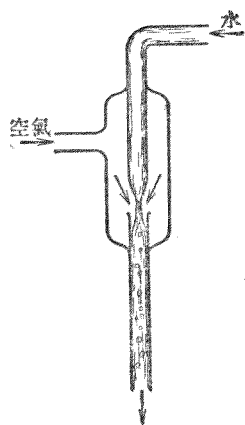
米]). 提高 B 器時,壓力計中之水銀面亦同時升高,閉住 D 器,使不與其餘之氣體相通. 再行提高,則此器中之氣體被壓入狹小之 a 管,直至 E 處而止. E 處刻有度數,示明欲使密閉之氣體壓縮至原容積之 $1/100$ 或 $1/1000$ 或 $1/10000$ 時,水銀面究應升至若干高度. 此時氣體之壓力即可自 a 管及 c 管中水銀面之差值 b 計出之 (c 管中水銀面所受極小之壓力可略去不計). 於是未壓前氣體之壓力必爲此時壓力之 $1/100$ 或 $1/1000$ 或 $1/10000$. 利用此種壓力計,可精確測至 $1/10000$ [毫米] Hg 之壓力. 但此法祇可用於與理想氣體相差不遠之氣體.

106. 抽氣機. 抽氣機之用途乃在變更一容器中空氣或其他氣體之壓力. 在物理學中,能產生低氣壓之抽氣機尤屬重要. 一塵不染,萬物無存之空間,稱曰真空. 但空間中一切氣體已抽去其大部分者,常亦稱爲真空,故有不良真空及良善真空(高度真空)之分. 將空氣或其他氣體自一空間內抽出時之手續稱曰抽空,而所用之機械曰真空抽機.

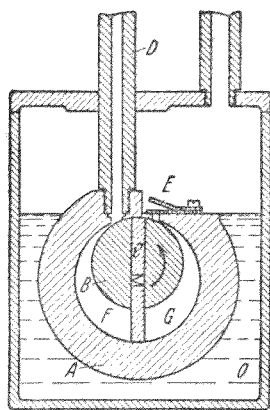
抽氣機之形式最簡者,即爲所謂唧筒抽氣機. 此機之首創尙遠在三十年戰爭之時,爲 Magdeburg 市長 Otto von Guericke 氏所製造(原機現存於德國 München 城之國家博物院). 惟此種抽氣機在近代之實驗室中已不復用之矣.

Bunsen 氏之水流抽氣機(第101圖)處理簡便,故常用之. 受有壓力之水由自來水管流入一下口狹小之管中,自此下

口流出後，在空中經過一短距離，復流入一較廣之管中，而自其下口流出。一方面由於上管下口之狹小，另一方面因水流離開此管口後其截面更狹，故此管口附近之壓力特低。（欲精確明瞭其所以然之故，可參閱 § 110）。周圍之空氣因之隨同流出。抽氣機之旁附一側管，接通欲抽空之空間，機中空氣稀薄後，其中之空氣即流入機內。但抽氣機之內部恆滿儲飽和之水汽 (§ 180)。故抽氣之作用為此項汽壓（在



第 101 圖 水流抽氣機



第 102 圖。Gaede 氏轉動抽氣機

平常室內溫度時，其值為 10—20 [毫米] Hg) 所限制。水流抽氣機大都作為高度真空抽氣機初步抽氣之用。

欲產生極低之氣壓，直達 0.2 [毫米] Hg 者，今日皆用 Gaede 氏所發明之轉動抽氣機，其略圖如第 102 圖所示。在一圓筒狀之金屬體 A 中有一偏心之圓柱體 B，可繞其柱軸而轉動，圓筒之外滿注以油 O，以防漏氣。圓柱體上具有二滑動

桿 C , 藉一彈簧之助而緊壓於 A 之內壁, 可絕不漏氣。 D 管之一端即通於 A 內之空間, 其他端通至欲抽空之容器, 又有一向外之活瓣 E , 以啓閉此部份之空間。 轉動時, 圓筒內 F 部份之空間繼續增大, D 中之空氣即被吸入, 同時 G 部份之空間繼續縮小, 空氣即被壓由 E 向外流出。 每轉過半週後, 其情形又復相同, 與 D 相連之容器因之逐漸抽空。

欲得較由轉動抽氣機所得者更低之壓力, 可用(先以轉動抽氣機抽空之)汞汽抽氣機 (Quecksilberdampfstrahlpumpe) 及汞擴散抽氣機 (Quecksilberdiffusionspumpe), 前者構造之原理與水流抽氣機同。 此種之抽氣機此處不能詳述。 最低之壓力, 可先用上述之抽氣機, 再用由液態空氣或液態氫冷卻之炭以吸收其中剩餘之氣體以圖之 (§ 191)。

關於利用抽氣機之實驗, Otto von Guericke 氏所述者特多。 其最著者如『Magdeburg 半球』, 氏嘗於 1654 年在 Regensburg 舉行之帝國會議席上公演之。 此為兩個頗大之半球, 由銅製成(原物現保存於德國 München 城之國家博物院), 能互相密合, 其中之空氣可以抽氣機抽去之。 苟抽至一足夠之程度, 則球外之空氣壓力不復能如前與球內之空氣壓力相平衡, 此部份之空氣即施一頗大之力於球之外面, 使二半球互相緊合。 氏遂命兩方各以良馬八匹將兩半球拉開, 但結果馬力不勝。 此實驗可用較小而精製之二半球以仿行之。 惟此時二半球所受之力自必較弱, 蓋此力與

球之截面成正比也。若截面為 5 [厘米] 半徑之圓，即其面積約為 80 [厘米]² 者，則因每 [厘米]² 上之壓力約為 1 [仟克*]，故二半球所受之力約為 80 [仟克*]。

以抽氣機抽去氣體使之稀薄而觀察其中氣體放電之現象，更屬奇妙 (§ 290)。

107. 氣體之浮力。 物體在氣體中亦感受浮力，且其所失之重亦等於為其所擠開之一部份氣體之重量，與在液體中者完全相同 (§ 89)。此項失重為值甚微故浮力亦甚小，通常輒略去不計（在空氣中，1000 [厘米]³ 之容積僅約 1,2 [克*]）。但對於精密之絕對稱物法 (§ 76)，則須注意及此。通常砝碼每為黃銅所製，而欲稱之物體則由他物質所成，故物體及砝碼之體積不同，其浮力亦自必相異。若物體之比重為已知，則吾人可以簡單之計算求得應加之改正。設 k_1 為物體之真重量， V_1 為其體積， σ_1 為其比重， k_2 為天平平衡時所用砝碼之真重量， V_2 為其體積， σ_2 為其比重，而 σ 為空氣之比重。則通常 k_1 與 k_2 不等，但因浮力之作用及 $V_1 = k_1 / \sigma_1$ 與 $V_2 = k_2 / \sigma_2$ 之二關係式，故得

$$k_1 - V_1 \sigma = k_2 - V_2 \sigma, \text{ 或 } k_1 = k_2 \frac{1 - \frac{\sigma}{\sigma_2}}{1 - \frac{\sigma}{\sigma_1}}.$$

砝碼通常皆為黃銅所製 ($\sigma_2 = 8,4$) 空氣之比重 σ 可取其近似值 0,0012。因 σ 為值頗小，故上式可書成

$$k_1 = k_2 \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_2} + \frac{\sigma}{\sigma_1} \right) = k_2 \left(1 - 0,000143 + \frac{0,0012}{\sigma_1} \right).$$

此種計算，稱為真空稱量之改正。

空氣之浮力可用 Otto von Guericke 氏所設計之實驗以說明之。等臂小天平（氣體靜力天平）之兩端懸有二物體，在空氣中似為等重，而體積不相等者（如一黃銅球與一空玻璃球）。事實上玻璃球所受之空氣浮力較大，故當較黃銅球為重。將此天平置於抽氣機之鐘罩內而抽去其空氣，則因空氣壓力漸減，浮力亦漸減，將見玻璃球下降。

氣球與飛艇皆基於空氣浮力之理而作。其容積之大部份充滿頗輕之氣體，如氫，煤氣，或氦等，而其全身可較輕於地面上之空氣，因得浮蕩於空中。但空氣之比重隨高度而漸減，故氣球直上至某高度處，空氣之比重適與氣球之平均比重相等時，氣球將不能再行上昇矣。

較輕之氣體在較重之氣體中亦恆受浮力之作用。氫與煤氣在空氣中上昇，二氧化碳與一氧化碳則下降至地面。此蓋因任何之物體組恆欲覓其位能最小之處所故也。基於此理，因熱空氣之比重在相同壓力下較冷空氣為輕，故前者可在後者中上昇。氣象之變遷，大部份之原因即在乎此（§ 204 及以下）。浮力為重力之作用，無重力之處即無浮力。蠟燭之得以繼續燃燒，亦有賴於空氣之浮力，蓋由燃燒所生之熱氣須藉空氣浮力而上昇，鄰近之空氣（氧）方能來補其

缺。倘無浮力，蠟燭將窒息於其本身所發出之熱氣體中，燃燒自不能繼續進行矣。

關於液體及氣體浮力之機構，就其本義言之，亦頗有足述者。今姑舉一十分粗略之『浮力』實驗。一器中滿儲以小鋼珠（如用以承軸者），置較大之木球鉛球各一於此諸小珠間，將承器輕輕搖動，則木球上昇而『浮』於小珠之面，一似木塞之浮於水面者然，同時，鉛球則沉至器底。吾人試先將此實驗加以說明。若珠與球均極光滑，毫無摩擦阻力，即各球彼此滑過時不需任何作用力者，則不必搖動承器，木球自浮，鉛球自沉。蓋此為全體球與珠位能最小之狀態，亦即穩定平衡之狀態也。實驗時所以輕搖承器者，僅在給與各球以遷移所需之運動自由度而已。鉛球在小鋼珠中自必亦受『浮力』之作用，蓋因鉛球上面之鋼珠有重量，致使鉛球下面諸鋼珠向上壓鉛球之力，當較壓於其上面者之壓力為大，故此項情形頗可澈底明瞭。吾人試再一究與此同樣明澈之情形，即關於氣體中之浮力者。驟觀之，此實驗亦頗為近似，蓋鋼珠可比之氣體分子，而承器之搖動，可比之氣體分子之運動。但事實上此處確有顯著相異之處。凡在氣體中之物體所受之氣體壓力恆係由於氣體分子與此物體表面之碰撞 (§ 97)，而非由於氣體分子之永久停留於其上，如上述之鋼珠然。在一定溫度時，氣體各部份此種碰撞之強度到處皆屬相同。氣體中高度不同之處壓力所以相差以致

發生浮力者，其原因乃在高度愈降則氣體之密度愈增，於是其分子之個數以及碰撞之頻率均因之而增。故物體在氣體中，每秒鐘內其底面被擊之次數恆較多於其頂面。為簡明計，試仍取一截面為 q 之圓柱體，并以指數 1 及 2 表其頂面及底面。於是按 § 97 (6) 式，其所受之浮力應為

$$k = q(p_2 - p_1) = q \frac{1}{3} \mu v^2 (n_2 - n_1).$$

(n_1 與 $n_2 = 1$ [厘米]³ 中之分子數)。氣體之密閉於一容器中者，驟視之，浮力似又當隨分子速度 v 而異，而此又當隨溫度而變 (§ 156)。此說誠然，蓋器中分子之個數決不因溫度之昇降而增減。但不同二水平面間分子數之差 $n_2 - n_1$ 亦必因之而變。此事至少在原理上不難直接了解。溫度愈高，分子之熱運動愈烈，而其速度 v 愈大。分子之無秩序的運動欲使全體分子勻佈於其全部能及之空間，但重力之作用則欲吸引全體分子使其降至可能的最低面，於是密度遂因此而不勻。分子運動愈烈，則其反抗重力之作用愈強，故容器中分子之散佈亦愈勻。吾人不難證明 $n_2 - n_1$ 與 v^2 適成反比，且浮力 k 之公式與 § 89, (3) 式完全相同 (此種分子運動之作用可粗略的以液體中之沉澱物一經拌擾後之分佈情形比擬之)。

液體中所以有浮力之詳情極為複雜。此亦與氣體相同，由於液體分子之有碰撞作用。但液體頗難壓縮，故物體

浸於液體中時,其下面之液體分子較密,於其上面者絕微,但因物體之壓力可使其下面各分子之碰撞頻率增加,而液體之內乃發生浮力。

上述之例,闡釋特詳,蓋亦欲使吾人特加注意,斷不可徒以二事外貌之相似,即貿然斷定其基本性質即為相同。類此之例頗多,其實不外為一種比擬;然而比擬者,初未可用以說明某事之本性者也。

第十一章

流動液體與流動氣體之力學

108. 流動液體與流動氣體概論. 流動之液體與氣體, 祇須其體積或容積之變遷頗小, 可以略去不計者, 其運動之定律均可以同一之觀點導出之. 液體之壓縮性頗小, 故恆與此條件相合. 就氣體言之, 其容積變遷在 1% 以下者可略去不計. 例如在大氣中其流速不逾每 [秒] 50 [米], 高度差不逾 100 [米] 者, 其運動定律與液體同. 此在一切正常情形中咸庶幾近之. 故液體與氣體統稱曰『流體』.

研究流動液體之學曰液體動力學, 其應用於氣體者亦稱氣體動力學. 若討論者為一度之問題, 如流體之在管中流動者, 則又稱曰應用流體力學. 以下所述者僅限於定流之情形, 即液流或氣流中各定點處流動質點之速度與方向不隨時間而變者.

流體中之流線者, 為到處與流動質點方向相合之線. 故在定流中, 流線為流動質點軌道之圖形. 經過一小形閉合曲線上各點之一切流線可組成一流管. 在流管內流動之流體稱曰流莖 (Stromfaden). 流體無有自流管之側流出者, 亦無在一處繼續囤積者, 故單位時間內同一流管中恆有等量之流體流過其各截面 (所謂連續條件)

以此之故，流管決不能在流體內任何一處自行起始或終止。流管或起於流體界面之一處，而趨向其界面之另一處，或在流體中自成一通路，無起點亦無終點；後者成爲渦旋。故有無渦流場與旋渦流場之區別（參閱此項觀念在電場與磁場中之意義，§ 328 與 349）。

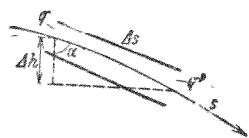
單位時間內流過各截面流體之量正比於各該截面之面積 q 以及流過各該面時之速度 v 。故按連續條件，在同一流管之內，

$$qv = \text{常數} \dots\dots\dots (1)$$

由此可知一簡單之事實，即管內之流體在最狹處流過最速。

一切之流體皆有所謂內摩擦 (§ 113) 之作用，以致流動之情形多寡受其影響。在許多情形中，此項影響頗小，可略去不計。吾人所假設之無摩擦流體，稱爲理想流體者即此。於是真正之流體遂稱爲粘滯流體以別之。今先述理想流體。

103. Bernouilli 氏方程式。試取極短之一段流管元，長爲 Δs 者觀之。命其流入口之垂直截面爲 q ，流出口之垂直截面爲 q' ，此與 q 僅有些微之差（第 103 圖）。命流線之坐標爲 s ，而流管與鉛直線之交角爲 α 。



第 103 圖 Bernouilli 氏方程式之導出

命 q 處之壓力爲 p ， q' 處者爲 p' ，與 p 亦僅有些微之差。命液體之密度爲 ρ ，則此段流管元中所含之流體質量

爲 $\Delta m = \rho g \Delta s$. 沿 s 方向作用於質量 Δm 者, 有 $p q - p' q'$ 之力, 來自其兩端壓力之差. 此外尚有重力 $-\Delta m g \cos \alpha$, 若以 h 表此段流管元在任意一固定水平面上之鉛直高度, 則因 $\cos \alpha = \Delta h / \Delta s = dh / ds$, 而此重力等於 $-\Delta m g dh / ds$. 因 $p' q'$ 與 $p q$ 相差絕微, 故按 Taylor 氏定理, 得 $p' q' = p q + \Delta s d(p q) / ds$. 作用於質量 Δm 上之總力等於 $\Delta m dv / dt$ ($v =$ 流速), 故得

$$\Delta m \frac{dv}{dt} = -\Delta s \frac{d(pq)}{ds} - \Delta m g \frac{dh}{ds}.$$

更以 $dv / dt = dv / ds \cdot ds / dt = v dv / ds$ 代入而乘以 ds , 則

$$\Delta m \cdot v dv + \Delta s \cdot d(pq) + \Delta m \cdot g dh = 0.$$

將此式積分之, 得

$$\frac{1}{2} \Delta m v^2 + \Delta s p q + \Delta m g h = \text{常數}$$

或更以 $\Delta s \cdot g = \Delta m / \rho$ 除之, 則

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g h = \text{常數} \dots \dots \dots (2)$$

($\rho =$ 流體之密度). 此即 Bernouilli 氏方程式 (1738) 此式示出流體中速度, 壓力, 與高度三者間之關係.

更以 ρg 除(2)式, 則

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + h = \text{常數} \dots \dots \dots (3)$$

此式中之三項皆有長度(頭)之因次. 吾人稱 $v^2 / 2g$ 一項爲速頭. 此等於流體自由下落得有速度 v 時所歷之高度

(§ 57, 18 式) $p/\rho g$ 一項稱為壓頭, 蓋因其值等於靜止流體柱所施流體靜壓力 p 時應有之高度 (§ 87, 2 式). h 稱為水頭. 故流體內此三種高度之和應為常定. 若 $v=0$, 則 (2) 式或 (3) 式完全與流體靜壓力之定律相符合.

在一流動之流體中, 壓力 p 與流體靜壓力二者之差稱為流體動壓力. 其值可大於零, 可小於零. 不論氣體或液體, 凡於流動時遇有固定之任何阻礙物以致影響其流動者, 流體動壓力之定律恆頗屬重要. 此時唯流體與阻礙物之相對運動是問, 阻礙物或靜止於液流或氣流之中, 作中流之砥柱, 或運動於靜止媒質之內, 其所遇之壓力, 固無分彼此, 完全相同者也. 紙鳶之飄蕩於風中, 飛機之翱翔乎雲表, 原理上初無二致. 飛機工程中之模型實驗, 大都均以靜止之模型於風管中行之.

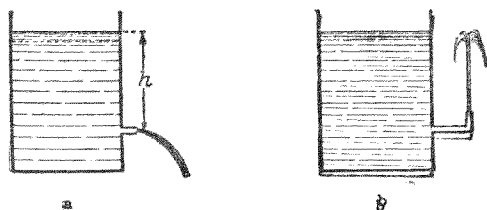
110. Bernouilli 氏方程式之應用. 今試述一二關於 Bernouilli 氏方程式應用之例. 一容器中儲有密度為 ρ 之液體, 其液面下 h [厘米] 處有一出口, 液體自此射出 (第 104 圖 a). 液面上及出口處之壓力均為大氣壓力 $p=b$. 命出口處之水頭為 $x=0$, 液面之水頭為 $x=h$. 若容器頗大, 液體流出時液面下降頗緩, 可命液面下降之速度為 $v=0$. 於是按 (2) 式,

$$\frac{b}{\rho g} + h = \frac{b}{\rho g} + \frac{v^2}{2g},$$

或

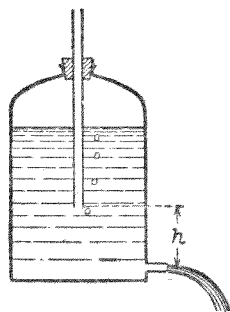
$$v = \sqrt{2gh} \dots\dots\dots (4)$$

此即 Torricelli 氏定理 (1646, 但於紀元後 100 年時 Hero von Alexandrien 已知之), 液體射出之速度似與自由下落 h 高



第 104 圖 Torricelli 氏定理

度後之速度相同。故出口處之速頭應等於液面之水頭。出口處之導管段若係鉛直向上, 則液體必重行上昇至 h 之高度 (第 104 圖 b)。但事實上因有摩擦阻力存在以及液滴之下落, 故每不能完全昇至同高。液面逐漸下降, 流出之速度亦逐漸減小。欲得常定之流出速



第 105 圖 Mariotte 氏瓶

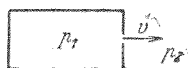
度者, 可用 Mariotte 氏瓶 (第 105 圖)。一密閉之瓶中有一開口之管伸出瓶外, 管之下口插入瓶內之液中, 此下口在瓶之流出口上 h [厘米] 處。若此則管之下口所在之水平面上壓力恆為大氣壓力 (瓶內液面上之空氣壓力加 h 以上液體層之壓力等於大氣壓力, 液體流出, 空氣即自伸出瓶外之管經過液體成為氣泡而迫入瓶內)。將 (2) 式

應用之於管之下口所在之水平面及流出口二處，仍可得與(4)式相同之式，惟 h 之意義已變。此處因 h 為常定，故 v 亦為常定。

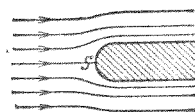
一容器內設儲有壓力為 p_1 之氣體，器壁上有一細小之孔。器外之壓力為 p_2 ，較器內者為小。內部之氣體靜止，而在細孔附近者則以速度 v 射出(第106圖)。設二壓力及其差值均甚大，故高度 h 雖或偶有相差，亦可略去不計(非以水平向流出)。於是按(2)式，

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v^2, \text{ 而 } v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \dots\dots\dots (5)$$

壓力差 $p_1 - p_2$ 相同時，各種不同氣體之流出速度各反比於其密度之方根 (Bunsen 氏射流定律) 測定氣體之密度可用此法。



第106圖 Bunsen 氏流出定律

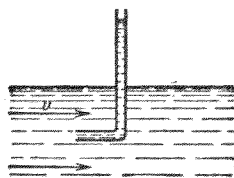


第107圖 被擋壓力 Prandtl 氏原作

設液體中有一阻礙物，則液體將繞之流過，其在阻礙物之前者即為之擋住。液體被擋之點 S 稱為擋點，即液流開始向二邊分流之處，其流速為 $v=0$ (第107圖)。在此點同一水平面上(地位高相等)離阻礙物頗遠之處，液流之速度與壓力設為 v_0 與 p_0 ，而在被擋之點，壓力為 p 。於是按(2)式，

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 = p \text{ 或 } p - p_0 = \frac{1}{2} \rho v^2 \dots \dots \dots (6)$$

$p - p_0$ 一值稱為被擋壓力 (Staudruck)。利用(6)式,可得一重要之法以測量江河等水流中任意一點之流速,即由 p_0 與 p 之值以計算之。欲測被擋壓力,可用 Pitot 氏管(第108圖)。最簡單者,此即為一彎曲之管,反



第108圖 Pitot 氏管

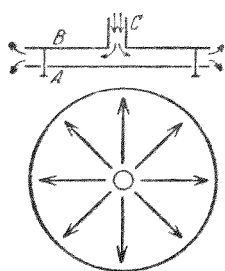
向置於液流中,作為一阻礙物。水即上昇管中,其較管外水面之高度相當於被擋壓力。Prandtl 氏管製一合組之儀器,可藉以同時測出 p_0 與 p 之值。

若液流為水平向 ($h = \text{常數}$), 則(2)式最為簡單,

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p = \text{常數} \dots \dots \dots (7)$$

自此式可知在水平流動之液體中,速度愈大者,壓力愈小。故在一水平之管中,管身較狹之處壓力亦較小。在廣泛之液流中,對於各流莖亦為合理。噴霧器即本是理而作。空氣流自一狹小之管口噴出,一管與此氣流垂直者,插於欲噴之液中,此管之上端亦具有細小之口。管口四週之空氣被氣流帶動,其速度較在遠處者為大,而遠處之壓力為大氣壓力,故此處之空氣壓力較小於大氣壓力。液面上亦為大氣壓力,液體因之被壓上昇管中,為空氣流所吹散作霧狀而隨之噴出管外。水流抽氣機 (§ 106, 第101圖)亦為(7)式之應用。煙囪之通氣作用亦與噴霧器之理相似,有風時較無風

時爲佳。

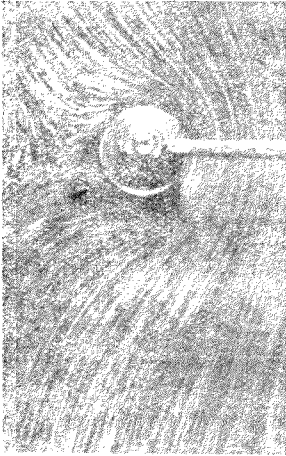


第 109 圖 氣流中流體
動壓力之表演

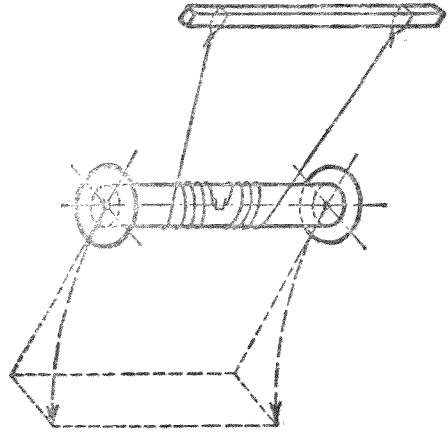
一圓板 B 之中心處具有一管 C (第 109 圖), 與另一活動之圓板 A 相離頗近。吹氣入 C , 則 A 板非特不爲吹落, 且反被吸引向上 (氣體動力幻象)。二板外面及其邊緣周圍均爲大氣壓力。因氣流之截面在二板中心處較邊緣外者爲小, 故其速度自中央向邊緣而遞降, 而二板間之壓力亦較外面之壓力爲小, A 板因之被壓向 B 。迨二板相觸, 氣流停止, 板即下落, 若此周而復始, 循環不已。 A 板因作週期的跳躍, 條上條下。鼾聲之作, 亦由於軟口蓋與此相似之週期運動。此實驗中二板之相隔不可超過某距離, 否則壓力之差將爲太小。

試製一圓錐狀之紙袋, 其尖端須密不漏氣, 使適能納入一玻璃漏斗之中。吹氣入漏斗之管, 則紙袋可反抗氣流而密貼於漏斗之內壁。其說明與第 109 圖同。

Magnus 氏效應 (1850) 亦基於 Bernouilli 氏方程式。其密嚴之理論, 須顧及摩擦阻力, 此處未能詳述。茲僅以其基本之原理爲限。圓柱體在液流中轉動時, 若其軸與液流之方向垂直者, 恆受一垂直於液流方向之力之作用, 此即 Magnus 氏效應。第 110 圖示一水流中模型實驗之照相。吾人可見圓柱體轉動之作用使液體之流線向右擠聚, 以致右方之液



第 110 圖 轉動圓柱體周圍
之流線 (Prandtl 氏原作)

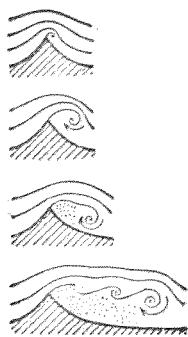


第 111 圖 Magnus 氏效應之表演

體較左方流速為大，右方之液體壓力因之較小於左方(7式)，而圓柱體被壓向右。此項效應在 Flettner 氏轉動機中已用作船舶之推進機。轉動之圓柱體在風中因有 Magnus 氏之效應，其作用乃相當於帆。

第 111 圖示一簡單之實驗，可示明 Magnus 氏效應。此項效應在彈道學中頗佔重要，彈丸因在槍管中受有向右旋轉之來福線 (Rechtsdrill) 之作用而在空氣中恆向右偏轉。被毆打而急轉之網球在空氣中亦恆繞一彎曲之軌道。

111. 分界面，渦旋。若有速度不同之二液流互相接觸，其後即彼此平行而繼續前進，則其分界面兩邊之壓力雖可相等，但其速度仍不相連續。此項情形不合於(2)式，且亦並非定不變。通常沿此分界面有渦旋出現，隨液流而前



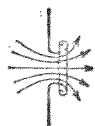
第 112 圖 鋒利邊緣處渦旋系之演成 (Prandtl 氏原作)

進；二液流一似相依而滾動，其在速度較大之一邊者，渦旋順液流之方向而轉動，其在速度較小之一邊者，則反是（此項現象可以鋼珠承軸轉動時之情形粗略比擬之）。

凡遇液流不連續之處或其分界面之處，恆有發生渦旋之傾向。第 112 圖示一鋒利之邊緣處此種渦旋系逐漸生成之狀。在鋒緣後方港灣之處者為死

水，與液流間有一層渦旋以為之界。

液體或氣體迅速流過一邊緣鋒利之孔隙時，即在孔旁成一環狀閉合之渦旋（第 113 圖）。此種現象可用一後壁為



第 113 圖 流體出口處渦流之生成 (Prandtl 氏原作)

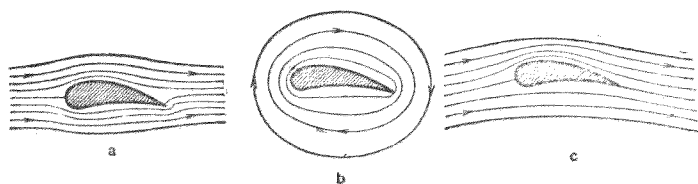
彈性體前壁開有一孔之匣以示明之，匣內空氣中混以少許之烟。輕按後壁，渦旋即出，前進頗速，可達數[米]之遙，方為空氣阻力所毀

滅。因其中有烟混雜，故此種渦旋不難目睹。燃着之燭為此種渦旋所襲擊時，將急閃而熄滅，是知渦旋之中，空氣之環流頗烈。此種環

狀渦旋在空中可歷時頗久。其渙散之原因端為摩擦阻力；若在理想流體之中，渦旋一經成立，可永不消滅。惜其中無法以產生渦旋。

112. 翼板。工業上關於翼板之重要理論，此處僅能略

述其基本之原理。翼板在空氣中運動，或空氣吹過靜止之翼板（如在飛機之模型實驗時），翼之周圍即生一氣流，此氣流可視為由一純粹之位流(Potentialströmung)（第114圖a）及一環流(Zirkulation)（第114圖b）二者所合成，其合成之狀以第114圖c示之。在此圖中，可見翼上之流線密集，翼下則遠較為稀；按(2)式可知翼上之空氣壓力應較翼下者為小。機翼因之感受一浮力，飛機藉以上昇。紙鳶之騰空，推進機之前進，風車之轉動，皆可以同理說明之。不特此也，帆與舵以及鳥類之翼，其作用之原因亦正復相同。



第 114 圖 飛機翼之理(Prandtl 氏原作) a. 位流 b. 環流 c. 合流

113. 粘滯流體. 內摩擦. 前謂絕對無摩擦阻力者僅為一種理想之情形，真正之液體與氣體決不能免此。一切流體皆有粘滯性，以致流動之液體或氣體中恆有內摩擦阻力發生。在一流體之中，與流線垂直之方向上速度逐漸下降，即相鄰各流管之流速不同；此種流管之間恆有作用力使較速之流莖減緩，較緩之流莖加速，務使各處之流速平均而止。內摩擦阻力者，即由此呈顯之。此力一方面正比於二流管接觸面之面積。而另一方面在與流線垂直之方向上

速度之變遷愈速，即在與界面垂直之方向上速度遞降度愈大者，此力亦愈大。命沿此方向之坐標為 x ，則速度遞降度等於 dv/dx 。二流管間接觸面之面積若為 F ，則此力之值為

$$k = \eta F \frac{dv}{dx} \text{ [達因]} \dots\dots\dots (8)$$

η 為該流體特有之常數，稱為其內摩擦係數，或粘滯係數。其單位為 $1 \text{ [達因]} \cdot \text{[厘米]}^{-2} \cdot \text{[秒]}$ 。

液體內摩擦之本性，今日尙未能完全明瞭；但關於氣體者，則可以氣體動力論為基礎而說明其一切之詳情。氣體之內摩擦與固體之摩擦名雖同而實不相同。二者實為完全異類之現象。在一靜止而溫度均勻之氣體中，全體分子之速度平均相等，且其速度均勻分佈於各方向。但在一流速為 v 之氣流中，此無秩序之分子運動，應加以單向流速之作用。故分子應具有在此流向上新添之速度。諸分子因其無秩序之運動而在氣流之各流管間繼續互相交換，有出自較速之流管而入較緩之流管者，亦有反其道而行者，紛擾無已。若此，則不免有動量（衝量）自一流管轉入他流管之中。較速之流管中苟有速度較大之分子躍出，而有速度較小之分子躍入，則其衝量將因之減小；反之，較緩之流管中衝量將因之增加。苟無外來之作用以恢復其原有之狀態，則氣流中速度之差必將逐漸消滅。某分子與一流管中任一分子相撞後，該分子所給予此流管之衝量可視為業經交割

終了。此來撞之分子所自出發之處與流管相距遠近之數量級，約等於該分子之平均自由路程。此項路程之值愈大，則速度之相差愈甚。命該分子所自出發處之速度為 v ，與此相距約等於平均自由路程 λ 之區域內之速度為 v' 則按 Taylor 氏定理， $v - v' = \lambda dv/dx$ ，而此值應正比於自第一區域轉入第二區域中之衝量。凡有衝量之變遷，恆必相當於一力 (§ 25) 故氣流中之各流管咸感受加速或減緩之力；此種之力亦皆與 $\lambda dv/dx$ 為正比。與 (8) 式相較，知氣體之內摩擦 η 必正比於其平均自由路程 λ 。命 n 為一 [厘米]³ 內分子之個數， μ 為一分子之質量， $n\mu = \rho$ 為氣體之密度， u 為氣體分子之平均速度，則按諸理論，得

$$\eta = \frac{1}{3} n\mu u \lambda = \frac{1}{3} \rho u \lambda \text{ [達因]} \cdot \text{[厘米]}^{-2} \cdot \text{[秒]} \dots\dots (9)$$

利用此式，可得一測定氣體中自由路程最佳之法。

114. 管中之液流。 一切現象中，粘滯性佔有主要位置者，當以細管中之液流為最著。設有一圓筒狀之管，半徑為 r ，其中有一同軸之圓柱狀流莖，半徑為 x (第 115 圖)。在此管之一端壓力為 p_1 ，他端為 p_2 ，而 $p_1 > p_2$ 。故沿流向作用於



第 115 圖 Poiseuille 氏定律之導出

該流莖之力為 $(p_1 - p_2)\pi x^2$ 。此流莖之側面積為 $F = 2\pi x l$ ；按 (8) 式，作用於此面上之力為 $\eta 2\pi x l dv/dx$ 。若管之截面為均

勻,且流速常定,則流體無加速度,而此二力之和必爲零,即

$$(p_1 - p_2) \pi x^2 + \eta \cdot 2\pi x l \frac{dv}{dx} = 0 \text{ 或 } \frac{dv}{dx} = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} x.$$

將此式積分時,須注意靠近管壁之一層液體恆附着於管壁,其速度爲 $v=0$. 於是得

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (r^2 - x^2) [\text{厘米}] \cdot [\text{秒}]^{-1}$$

再行積分之,可得 1 秒鐘內流過該管各截面之流體之容積爲

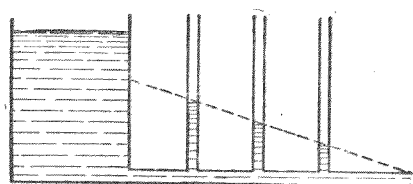
$$V = \frac{\pi r^4}{8\eta l} (p_1 - p_2) [\text{厘米}]^3 \dots\dots\dots (10)$$

此項定律爲 Hagen 氏於 1839 年所發見,但後人均以其第二發見者之名而稱之爲 Poiseuille 氏定律.

在一細管中速度之分佈可以第 116 圖示之. 自管壁



第 116 圖 細管中之液流
向量箭矢用以表示流速



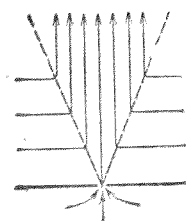
第 117 圖 管中之壓力遞降度

向管心速度漸增. 上式僅對於細管爲合理,而不能適用於廣大之管. 自 (10) 式可知 1 秒鐘內流過一細管之液量正比於該管二端之壓力差. 管中之壓力遞降度可以第 117 圖所示之實驗表演之,頗爲明顯.

以上所述管中之液流係假定其各流莖互相滑過，即所謂平流者，Poiseuille 氏定律僅在此項假設下方為合理。流速不大時，此確合乎實際之情形。但速度頗大者，管內將發生渦流，而平流遂化為亂流，於是以上所述者即不能符合。此時管內所遇之阻力大增，而 1 秒鐘內流過管中之液量約與 $p_1 - p_2$ 之方根成正比。

Poiseuille 氏定律對於人與獸之器官亦頗屬重要，蓋血液之流於血管中，亦合乎此項定律。液體流過多孔性之物質時，例如地下泉之流於地中，亦莫能背此定律。

115. 液體射線與氣體射線。 液體或氣體以某速度自一狹小之孔衝出而入於一廣大之空間，其中皆為相同之物質所充滿者，亦成亂流。此時衝出之流體即成自該小孔射出之射線。射線周圍之流體於是即被拖帶隨之同行，而併入射線之內(第 118 圖)。故射線自行膨大，其截面正比於其與小孔之距離而漸增。射線所帶物質之質量 m 亦因之漸增，但按諸衝量定理 (§ 33)，射線之動量 mv 應為常定，故射線離孔愈遠者，其速度 v 應愈減；至某距離後，其速度已減為零。其時周圍之媒質自側面併入射線之中，故咸自各方流向射線。賽璐珞球等輕小物體之得以浮於一股噴射之空氣流中者亦即以此。球置於空氣射線中時可為射線之壓力



第 118 圖 液體或
氣體射線之流線
(Prandtl 氏原
作)

所托住，而自各方流來之空氣則將其維持於定位，不使偏側。此項實驗不特在空氣鉛直向上噴射時為可能，其射向之傾斜角不為太大者，球亦不致下落。惟此時球必轉動不已，蓋球有重量而稍落於射線軸之下，故其上半球所在之區域中之流速較大於其下半球所在之區域中者（球在噴射之水流上亦跳躍不已而不致落下，惟其理與此不同）。

Bunsen 氏燈亦基於上述構成射線之理而作（第 119 圖）。



第 119 圖
Bunsen 氏管

自管口 A 流出之氣體挾其近旁之空氣以同行，而在 B 管中互相混合。

116. Stokes 氏落體定律。任何物體穿過液體或氣體而運動時，恆必受阻力。此項阻力並非由於物體與其周圍媒質直接之摩擦。蓋與物體直接接觸之一層流體恆附着於物體之上，已見前述；故此項阻力實乃由於此周圍媒質中之內摩擦而來。阻力之強弱，除視媒質之種類而異外，運動體之速度與其形狀亦均有關係。其某種情形中，半徑為 r 之圓球以速度 v 在一液體或氣體中運動，液體或氣體之粘滯係數為 η 者，按 Stokes 氏落體定律，其所遇阻力之值為

$$k = 6\pi\eta rv \quad [\text{達因}] \dots\dots\dots (11)$$

球體在一氣體中運動時，苟其半徑頗小，與氣體之自由路程相埒者，上式尚須加以改正。

普遍言之，速度不為太大者，阻力為

$$k = av \text{ [達因]} \dots\dots\dots (12)$$

即阻力正比於速度 v , 其 a 一值視液體或氣體之種類以及物體之形狀而異。一物體在一有內摩擦之媒質中下落, 當開始運動時所受之力為重力 mg 減去浮力 A , 因之得一加速度; 其後下落之速度愈增, 則所遇之摩擦阻力亦隨之愈增, 不久, 重力減去浮力 $mg - A = k'$ 之加速度, 可適為摩擦阻力所抵消, 而達一平衡之狀態, 此後物體即以常定之速度下落。此時

$$k = k' = av, \text{ 或 } v = \frac{k'}{a}.$$

形狀相同之物體, 其重量 mg 及其浮力 A , 亦即 k' 力, 隨物體單向大小之三次幂而增加, 而摩擦阻力則僅隨較低之幂次 (例如 11 式) 而增加。故同物質同形狀之物體下落時, 體積小者恆較緩。塵埃及水滴等纖小物體之浮游於空中, 其實乃為受上述諸力作用後之極緩的下落運動也。

第四編 振動與波動

第十二章 機械振動與機械波動

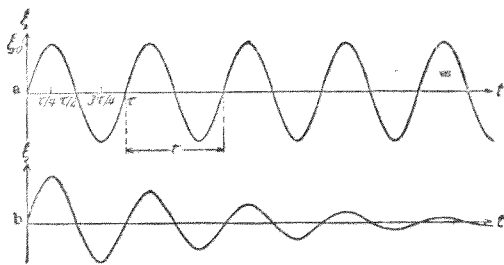
117. 振動之意義。所謂機械振動者係指一物體或其一部份對於一自然靜止位置所作之週期運動而言，此靜止位置者，係物體受任何作用力而平衡之位置。當物體或其一部份稍離其靜止位後，設因有某力之作用而仍回原處；但既至原處後，通常每不能立即停止，而對於此靜止位之振動即於以發生。若運動時能量不損，即振動能量始終持常，則振動可永不停息（等幅振動）。若能量向外輸出，則振動之強度逐漸減弱，終乃停止（減幅振動）。

欲使物體離開其靜止位，須賴有工作加於其上，故其位能必因之增加。既脫牽制，則位能漸化為動能。物體返至原位時，位能已悉行化成動能。此時物體藉其慣性而越過原位，其動能又逐漸化為位能，蓋此後又需工作以反抗使物體回至原位之力也。若能量不損，則動能與位能互換不已。前述之擺動（§ 60）即屬此種運動。

最簡單之振動當推簡諧振動，或稱正弦振動。命 ξ 為一物體或其一部份與其靜止位置間之距離。等幅簡諧振動可以下式表之。

$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t + a) \dots \dots \dots (1)$$

(因 $\sin a = \cos(a - \frac{\pi}{2})$), 故由簡單之變換, \sin 恆可以 \cos 代之。此時所變者僅為 a 值。物體與其靜止位置間之距離為時間 t 之純粹週期函數。 ξ_0 稱為振動之振幅, 為每次振動 ξ 之最大值; a 稱為振動之相常數, 或稱位相, 其值視吾人所取時間 t 之初值而定。故對於單獨之一個振動而言, 此常數在物理學上無甚重要意義; 且起首時間可任意選擇, 若選擇得宜, 此常數恆可消去。例如在上式中吾人所取之時間若適足使 $a = \pi/2$, 則 $\xi = \xi_0 \cos \omega t$ 。故簡諧振動可以正弦亦可以餘弦表之, 就單獨一個振動而言, 二者意義相同。但若有二個以上之振動同時發生, 則各振動須以其位相之差辨別之。 ω 亦為一常數, 其值視振動之特別情形而定, 稱為振動之角速, 或圓周頻率。第 120 圖 a 示 ξ 與 t 之關係, 即按 (1) 式而取 $a = 0$ 者。



第 120 圖 簡諧振動 a. 等幅 b. 減幅

命 $\omega = 2\pi\nu$, 或 $\omega = 2\pi/T$, 且命 $a = 0$, 則

$$\xi = \xi_0 \sin 2\pi\nu t = \xi_0 \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \dots \dots \dots (2)$$

故

$$\tau = 1/\nu = 2\pi/\omega \dots \dots \dots (3)$$

τ 之意義可從下述之思索得之。當時間由 t 而增至 $t + \tau$ 時，正弦函數中之 $2\pi t/\tau$ 一項由 $2\pi \frac{t}{\tau}$ 而增至 $2\pi \frac{t+\tau}{\tau} = 2\pi \frac{t}{\tau} + 2\pi$ ， ξ 之值由增而減，復由減而增，若是經過其一切可能值一週，而仍回至原值（第120圖 a）。故每隔 τ 之時間後，振動體恆進行相同之步驟；此適為振動一來一往之時間。吾人因稱 τ 為振動週期，而 $\nu = 1/\tau$ 為每秒鐘內振動之次數，稱為振數或稱頻率（切勿與其 2π 倍之圓周頻率 ω 互混）。頻率 ν 之單位今日亦有用 1 [赫芝]（以紀念電波之發見者 Heinrich Hertz 氏）者。某振動之頻率為 ν [赫芝] 者，謂每秒鐘內振動 ν 次。

通常之振動非為簡諧振動而屬於一較為普遍之週期函數 $\xi = f(t)$ 。按 Fourier 氏定理，在此處所遇之一切情形中，此種之函數恆可展成下列之級數：

$$\begin{aligned} \xi = f(t) = & A_1 \sin(\omega t + a_1) + A_2 \sin(2\omega t + a_2) \\ & + A_3 \sin(3\omega t + a_3) + \dots (4) \end{aligned}$$

故任何振動皆可視為由角速 ω ， 2ω ， 3ω 等各種簡諧振動相加而成。角速為 ω 之振動稱為基振，後列者順次稱為一次倍振，二次倍振，三次倍振等等。

118. 振動方程式. 阻尼振動. 各種機械振動之中,以受彈力作用者最為重要. 設有一質量 m , 受有此種之力而靜止於其平衡位置;祇須偶離此位,則即有對於此位之振動發生. 若其與平衡位置之距離頗小,則使其復位之力 k 應合於 Hooke 氏定律 (§ 82), 換言之,此力應與物體離開靜止位置之距離 ξ 成正比. 故

$$k = m \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\alpha\xi \dots\dots\dots (5a)$$

設在時間為 $t=0$ 時物體離其靜止位置最遠,其距離為 ξ_0 . 於是上列微分方程式之解式為

$$\xi = \xi_0 \cos \omega t, \text{ 其中 } \omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m}} \dots\dots\dots (6a)$$

故物體作簡諧運動,其角速為 ω , 振幅為 ξ_0 . 此振幅不隨時間而變,故為等幅振動. 角速 ω 稱為該物體系之固有角速, 頻率 $\nu = \omega/2\pi$ 稱為其固有頻率.

振動中,振動系之動能與位能互相繼續交換. 等幅振動中能量之和恆為常定. 但事實上輒因摩擦阻力等之影響而不免有能量消失於其周圍媒質之中,故振動能量恆隨時間而遞減. 由於摩擦而引起阻制運動之力通常可視為正比於振動體之速度 $d\xi/dt$, 即等於 $-\rho d\xi/dt$ (§ 116, 12 式), 其 ρ 為一常數,視振動之特殊情形而定. 就此種阻尼振動(或稱減幅振動)者言之,(5a)式應改為

$$k = m \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\alpha \xi - \rho \frac{d\xi}{dt} \dots\dots\dots (5b)$$

假定阻尼不大,且起始條件與前相同,則此微分方程式之解式爲

$$\xi = \xi_0 e^{-\beta t} \left(\cos \omega t + \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t \right),$$

其中
$$\beta = \frac{\rho}{2m}, \quad \omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m} - \left(\frac{\rho}{2m}\right)^2} \dots\dots\dots (6b)$$

故阻尼振動之角速較等幅者爲小。 $\xi_0 e^{-\beta t}$ 一值爲振動之振幅。此值隨時間而遞減,直至等於零而止(第120圖b)。命 τ 爲一次完全振動之週期,又命 $\beta\tau = \Lambda$, 則自 $t=0$ 起,各次之振幅順次爲 $\xi_0 = \xi_0$, $\xi_1 = \xi_0 e^{-\Lambda}$, $\xi_2 = \xi_0 e^{-2\Lambda}$, 餘依此類推;普遍言之, n 次後之振幅爲 $\xi_n = \xi_0 e^{-n\Lambda}$ 。故二次連續振幅自然對數之差

$$\log \xi_n - \log \xi_{n+1} = \Lambda$$

爲一常數。吾人稱 Λ 爲阻尼振動之對數減縮。

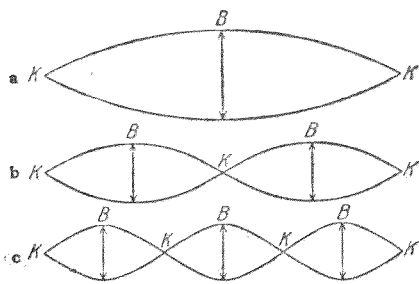
(5b)式以 m 除之,而以等幅振動之角速 $\sqrt{\frac{\alpha}{m}} = \omega_0$ 代入,

且仍命 $\frac{\rho}{2m} = \beta$, 則該式變爲

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2 \xi = 0 \dots\dots\dots (7)$$

對於任何阻尼簡諧運動,祇須摩擦阻力正比於速度者,上式爲一普遍式。

119. 絃線振動. 緊拉一長而細之固體之二端,而令其他部份作彈性振動者,稱為絃線振動,乃為彈性振動中常見之一種. 樂器之絃即為其例. 試取一長約數[米]之橡膠管以為絃線之模型,管之一端,固繫於牆上之一定點,而以手緊拉其他端. 撥開手與牆間一段之管使離其靜止位,則管即開始作減幅振動. 若握管之手按管之固有振動節拍頻頻搖動,則管可振動不休. 此種振動可以第121圖a示之. 中



第 121 圖 絃線振動

中央部份 B 稱為振腹,其兩端 K 稱為振節. 手之一端亦為一固定端. 振動時動能因空氣之摩擦而逐漸消散,手之頻頻搖動者,僅用以補償此項損失而已. 若長度不變,而增加其張力 k ,則手須搖動更速. 蓋橡膠管之固有頻率 ν 在某限度以內與張力之方根成正比. 若張力常定,而變更其長度 l ,則頻率與長度成反比. 故得

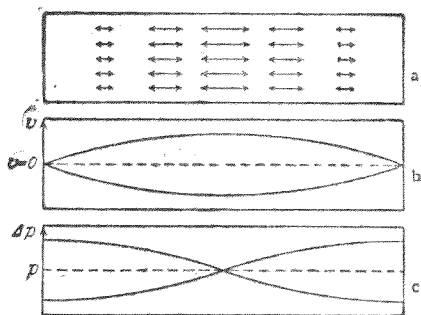
$$\nu = \text{常數} \cdot \sqrt{\frac{k}{l}} \dots \dots \dots (8)$$

若手之搖動較前加速二倍,三倍,或四倍等等,則此拉緊之管仍可繼續振動不已. 但此時之振動之形狀乃如第 121 圖 b, c 所示. 此種振動稱為管之倍振. 一次倍振時,除兩端

外,中央亦爲振節 K ,而在全長之 $1/4$ 及 $3/4$ 處各有一振腹 B ,故此時之振動恰似由相等之二段所合成,其每段之長各爲原長之半. 二次倍振時,兩端及全長之 $1/3$ 及 $2/3$ 處各有一振節 K ,而全長之 $1/6, 3/6=1/2$ 及 $5/6$ 處各有一振腹 B ,餘依此類推.

彈性棒之一端或兩端固定而振動時,其情形與上述者相似. 一端固定時,自由端恆爲振腹;兩端同時固定時,中央恆爲振腹或爲振節.

120. 氣柱振動. 第 122 圖示兩端封閉之管,內儲空氣或其他氣體. 因氣體有彈性,故此種之氣柱亦可發生振動,氣體之質點沿管軸之方向作週期的前後運動. 基振時,中央部份振動最強,兩端始終靜止(第 122 圖 a 及 b). 故氣柱之兩端爲振節,中央爲振腹. 氣柱亦可發生倍振,其頻率二倍,三倍,或四倍於基振. 基振之頻率 ν 可以氣柱之長度 l 與聲之速度 c (§ 138) 表之如下:

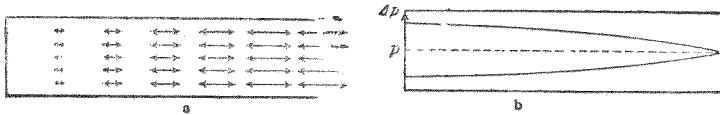


第 122 圖 氣柱振動. a. 氣體分子之運動, b. 運動振幅之圖表法(由 a 而得), c. 壓力之幅.

$$\nu = \frac{c}{2l} \dots\dots\dots (9)$$

氣體質點運動時，週期的壓力變化 Δp 恆必隨之而生。閉管之兩端及倍振時之各振節處變化最烈，而在振腹處則毫無變化。故振腹恆與壓節相合，而振節恆與壓腹相合(第122圖c)。

兩端開口之管中氣柱亦可發生振動。開口之兩端恆為振腹(壓節)。基振時，管之中央為振節(壓腹)。兩端封閉之管中氣柱振動時，各處之情形均適與兩端開口者相反；基振然，倍振亦然。但其頻率仍如(9)式所示。



第123圖 氣柱一端閉一端開時之基振。a. 分子之運動，b. 壓力之幅。

氣柱之一端閉一端開者(第123圖a及b)，振動時閉端恆為振節(壓腹)而開端恆為振腹(壓節)。基振之頻率為

$$\nu = \frac{c}{4l} \dots\dots\dots (10)$$

故長度相同時，其頻率僅為兩端均閉或兩端均開者之半。在此情形中祇有頻率為基振之三倍，五倍，或七倍等奇次倍之倍振可以發生。

上述之規律，可用風琴管(§145及150)以證實之。

121. 強迫振動 共振。 設一振動體，其固有頻率為 ν_0 ，受一強弱週期變化之力 $k = k_0 \sin 2\pi\nu t$ 之作用。於是物體即以作用力之頻率 ν 而振動(強迫振動) 此處尚須假設有

一爲值不大之阻尼存在，蓋否則除共振外（見下）物體將不能均勻振動也。

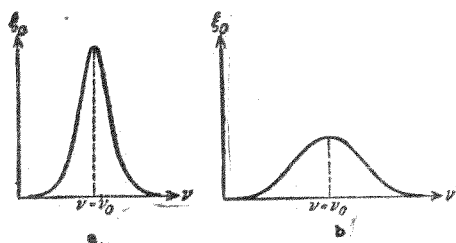
若阻尼不爲甚大，則 $\nu = \nu_0$ 時強迫振動之振幅 ξ_0 爲最大。此時

之情形稱爲共振。 ν 與 ν_0 相差漸遠， ξ_0 愈小（第124圖）。

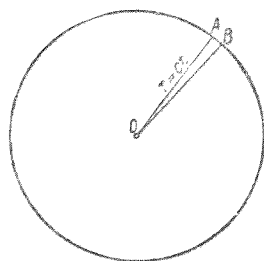
阻尼愈小，則物體顯著的與作用力共同振動之界限愈狹，但在此共振限以內振幅愈大。作用力與強迫振動二者間有位相差，其值視頻率及阻尼之大小而異。

物體共振時，其振動有時可十分強烈。工廠中可以振動之部份（機械之架子，房屋之基址）皆各有其固有振動，其恰與機械之轉動次數相合者須摒除弗用，否則房屋有傾覆之虞；設計建築工廠者不可不注意之。大隊軍警，步伐整齊，經過橋梁者，常懸爲禁例，蓋步伐之節拍若偶與橋梁之固有振動相合時，橋梁即可發生劇烈之共振而成意外之災。尙有其他之共振，見 § 145。

122. 擾動之傳播。物體之一部份設受任何作用而離開其自然靜止之位置，即該處之體內平衡，因之受擾動，則此種擾動即可傳至其鄰近之部份。擾動在物體中傳播，即稱波動。若物體之性質不以方向而異，則擾動將向各方以相



第124圖 強迫振動之振幅 ξ_0 爲強迫頻率 ν 之函數。 a. 阻尼頗小， b. 阻尼甚大。



第 125 圖 球面波

等之速度 c 而前進。設在時間為 $t=0$ 時，此擾動在原點 $r=0$ 處出發；經過 t 時間後，擾動必已傳至一半徑為 $r=ct$ 之球面。此種波動稱為球面波（第 125 圖）。

今試在此球面波中取一極小之部份（如第 125 圖之 OAB ），與原點 O 相距甚遠；此球面上極小之部份 AB 常可視作平面。若此設想之波動稱為平面波。

在球面波中截取一極狹之錐體，其截面可視為無限小者，吾人輒稱之為射線或射線束。射線可以直線表示之。（此種表示法主要者多用於光波中，即所謂光線，參閱 § 397）。故球面波可視為由無數之射線所集成。

123. 週期波。 各種波動之最可注意者，厥為媒質內某點處有一週期擾動發生時之情形，該點即為週期波之出發點。此可為該處之一振動體，能使其鄰近媒質中各點皆隨之作週期運動者。此等部份因作強迫振動，其頻率 ν 與振動體之頻率相等。設振動體之角速為 ω ，則其振動式應為 $\xi = \xi_0 \sin \omega t$ 。於是媒質中各部份之振動當如下式

$$\eta = \eta_0 \sin (\omega t + a) \dots \dots \dots (11)$$

式中 η 為各該部份離開靜止位置之距離， η_0 為其振幅。若 c 為此擾動傳播之速度，則自擾動中心傳至 r 距離之遠處所需之時間當為 r/c ，故與擾動中心相距 r 處在時間 t 時之

擾動情形應與擾動中心處在時間 $t-r/c$ 時者相同。若擾動中心(即 $r=0$)處位相 a 之值爲零,則(11)式中之 a 應等於 $-\omega r/c$, 於是在 r 距離處

$$\eta = \eta_0 \sin \omega (t - r/c) \dots\dots\dots(12)$$

球面波之振幅 η_0 視距離波心之遠近而異。平面波之振幅可視爲常定。設平面波中在波之前進方向上有彼此相距 x 之二點,則此二點位相之差應爲 $\omega \cdot \frac{x}{c}$ 。

由同波源發出之同一作用——即擾動中心處之同一事變——同時到達之諸點全部所組成之面稱爲波面。球面波之波面爲球面,平面波者爲平面。

在許多情形中,波動之傳播祇限於兩物體(液體或氣體)之分界面。水面波即其一例;又如兩層異向空氣流之接觸面間亦可有波動發生。此後者之波動,吾人可自其分界面上波狀雲之出現而知之。

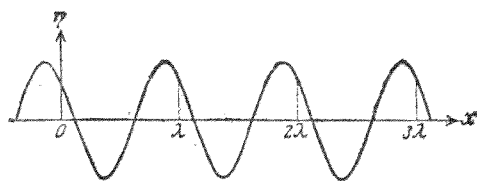
液體表面之平衡狀態受擾動後使之發生週期波動者,有二種完全不同之力。液面之一部份離開其平衡位置後,其所受之第一種力爲重力,欲使液面回復水平,第二種力爲表面張力 (§ 92),欲使液面之面積縮成最小,即欲使自由液面成爲平面。滔天巨浪,江海奔騰,幾全爲重力之作用所獨霸(重力波)。至若微風習習,吹皺池塘,或輕叩水盂,波紋蕩漾,則表面張力特佔優勢(表面張力波)。

波動在物體中傳播之速度 c 視該物質之特性而異(參

閱 § 125). 波速之定義與物體速度之定義同 (§ 17). 欲測波速, 可在波之傳播方向上任意取相距 x 之 A, B 二點, 而測量擾動自 A 至 B 所需之時間 t , 於是 $c=x/t$. 週期波之波速更可以他法測之 (§ 127).

今試舉一擾動在緊張之橡膠管中 (§ 119) 傳播之速度以爲例. 吾人可用下法測量之. 以手急擊管之一端, 則此擾動即沿橡膠管而傳播, 及至他端仍復折回, 如是往返不已. 於是測量此擾動在管上來往 n 次所需之時間 t . 若 l 爲管長, 則此時擾動所經之路程爲 $x=2nl$, 因得 $c=2nl/t$. 吾人從此更可證明管愈緊張, c 值愈大.

124. 波長. 試就一平面週期波論之. 在一點 $x=0$ 處, 此波之振動設以下式表出,



第 126 圖 波長之定義

$$\eta = \eta_0 \sin \omega t \dots\dots\dots (13)$$

按(12)式, 離此點 x 處(第 126 圖)之振動式當爲

$$\eta' = \eta_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \dots\dots\dots (14)$$

通常在同一時間 t 時, η' 與 η 異值. 祇當

$$\sin \omega(t-x/c) = \sin \omega t, \text{ 或 } \omega(t-x/c) = \omega t \pm 2n\pi$$

時, η' 與 η 二值方能在任何時間始終相等. 式中之 n 爲任意之正整數. 此式更可化之如下:

$$x = \pm n \frac{2\pi c}{\omega} = \pm n \frac{c}{\nu} = \pm n\lambda \dots\dots\dots (15)$$

合此條件之最近一點可以 $n=1$ 代入而得, 即 $x=c/\nu=\lambda$. 吾人稱 λ 爲波長. 在波動之前進方向上狀況相同(即相常數相同)各點間彼此之距離恆爲波長之一倍或二倍或三倍等等. 自上式得

$$\lambda = \frac{c}{\nu}, \text{ 或 } \lambda\nu = c \dots\dots\dots (16)$$

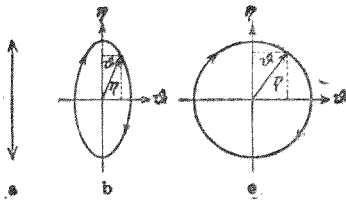
故 ν 相同時, 波長尙須視其所在之媒質之種類而異, 即視該媒質中波速 c 之數值而異.

125. 縱波與橫波. 偏極. 一波中擾動部份之運動或爲在其前進向之前後運動, 或爲在垂直於此間之平面內上下左右以及其他一切可能之運動. 波動之屬於前者稱爲縱波; 屬於後者稱爲橫波.

縱波在一切物體中俱能發生, 機械性之橫波則祇能在固體中出現. 二波同見之處, 橫波之傳播恆速於縱波. 自地震之震源發出之波, 縱橫二種悉備, 在地殼中四播; 此外且尙有表面波, 沿地面進行. 因各波之速度不同, 故不能同時達到地面上之他處. 觀察點之距離愈遠者, 其時間相差愈

久。吾人可從此約計震源之遠近。

機械波之爲縱波抑爲橫波，通常不難直接判別之。有



第 127 圖 偏極振動。

a. 直線， b. 橢圓， c. 正圓。

一點關於以後在光學上之應用頗屬重要者，請先略言之。

縱振動除頻率外可僅由其強度（振幅）決定之。橫振動則

不然，頻率與振幅既同矣，但其在垂直於前進向之平面上運

動時，或上或下，或左或右，尚可變化萬千。橫波之祇以單一方向振動者，稱爲直線偏極（第 127 圖 a）。但橫波又可在互相垂直之二方向上同時振動，即由二個直線偏極振動，其角速 ω 相等者所合成。命二者之振幅各爲 η 與 ϑ ；其位相之差爲 $\pi/2$ 。則此二振動可以下列二式表之，

$$\eta = \eta_0 \sin \omega t, \text{ 及 } \vartheta = \vartheta_0 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \vartheta_0 \cos \omega t.$$

此種振動，如第 127 圖 b 所示者，稱爲橢圓偏極。若二振幅 η_0 與 ϑ_0 相等，則成爲正圓偏極振動（第 127 圖 c）。

前例中緊張橡膠管之簡單振動即屬直線偏極。若令此橡膠管穿過一裂縫，則僅當裂縫之方向與橡膠管振動之方向相合時，振動方不受牽制。否則振動將不能完全通過，或竟因之完全停頓。故將裂縫逐漸旋轉，即足以逐漸縮減橡膠管之振動。橫振動恆能偏極；吾人恆可製就一種裂縫

狀之紋型，以波動之前進向爲軸而轉動之，每因此紋型位置之不同，而橫振動或可完全通過，或僅可通過一部份，或全不能通過；此乃爲橫振動所獨具之特性。按此法證得任何波動之有偏極性者，即可單義的決定其必爲橫波。

在固體或液體中縱波傳播之速度爲

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ 或 } = \sqrt{\frac{\chi}{\rho}} \text{ [厘米]/[秒] } \dots\dots\dots (17)$$

式中 E 爲所涉物質之彈性係數 (§ 82), χ 爲壓縮係數 (§ 100), 而 ρ 爲其密度(均用 C.G.S. 制單位)。此式稱爲 Newton 氏式, 可由彈性之理論導出。若在氣體中, 則

$$c = \sqrt{\frac{p \cdot \kappa}{\rho}} \dots\dots\dots (18)$$

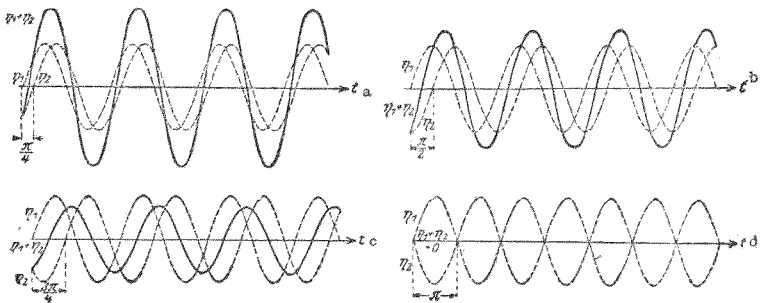
(p = 氣體之壓力)。 κ 之值在單原子氣體中爲 1,67, 在雙原子氣體如空氣中爲 1,40, 而在其他一切氣體中爲 1,33 (參閱 § 172, 即可明瞭此式中何以含有 κ 一數之故。按 § 100, 理想氣體之壓縮係數等於 p , 驟視之, 氣體中之波速似當爲 $c = \sqrt{\frac{p}{\rho}}$)。

126. 干涉。 設有二平面波, 振幅與頻率均相等, 但其位相不同, 相遇於同一地點。命第一波所激起之擾動爲 $\eta_1 = \eta_0 \sin \omega t$, 第二波所激起者爲 $\eta_2 = \eta_0 \sin (\omega t - \alpha)$ 。於是二波會合後該處之總擾動應爲

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = \eta_0 [\sin \omega t + \sin (\omega t - a)]$$

$$= 2\eta_0 \cos \frac{a}{2} \sin \left(\omega t - \frac{a}{2} \right) \dots \dots \dots (19)$$

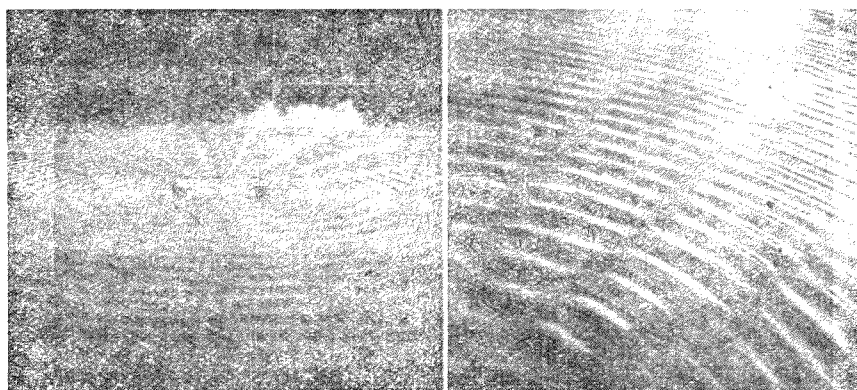
位相之差 a 爲一常數，即不隨時間 t 而變，故 $2\eta_0 \cos a/2$ 一項可視爲總振動之振幅。若 $\cos a/2 = \pm 1$ ，即 $a = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots, = 2n\pi$ (n 爲整數)，則振幅爲最大，其值等於 $2\eta_0$ 。當此之時，吾人稱二波爲『同相』。但若 $\cos a/2 = 0$ ，即 $a = (2n+1)\pi$ ，則振幅爲零。介乎其間者，振幅之值可由 0 至 $2\eta_0$ 。故二振動同時之作用恆視位相差 a 之不同而異，彼此有時增強，有時減弱，有時竟全相消(第 128 圖)。



第 128 圖 波之干涉。位相之差 a. $\pi/4$, b. $\pi/2$, c. $3\pi/4$, d. π 。

此種現象稱爲干涉。凡任何現象之能發生干涉者，吾人恆可單義的決定其必爲週期振動。

第 129 圖示二物體在水面上作上下週期運動時激成兩組水波互相干涉之狀。波場中水點之運動何處最強何處最弱，瞭然可睹。

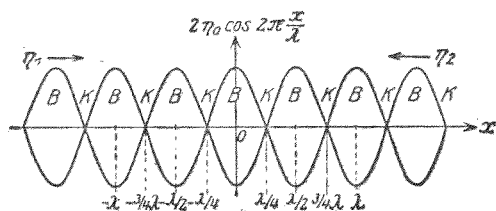


第 127 圖 水波之干涉(Grimsehl 氏原作)右圖爲左圖一部份之放大

127. 駐波 設有頻率與振幅皆爲相等之二平面波恰沿相對之方向而前進。在 $x=0$ 處，命時間 $t=0$ 時，二波位相之差爲 0，即其方程式俱爲 $\eta_1 = \eta_2 = \eta_0 \sin \omega t$ 。今當討論離此 x 處一點之情形(第 130 圖)。按 § 123，向右前進之波到達該點時之振動可以 $\eta_1 = \eta_0 \sin \omega (t - x/c)$ 表之，而向左前進者可以 $\eta_2 = \eta_0 \sin \omega (t + x/c)$ 表之。故該點之總擾動當爲

$$\begin{aligned}
 \eta &= \eta_1 + \eta_2 \\
 &= \eta_0 \left[\sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \sin \omega \left(t + \frac{x}{c} \right) \right] \\
 &= 2\eta_0 \cos \omega \frac{x}{c} \sin \omega t = 2\eta_0 \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin \omega t \dots\dots (20)
 \end{aligned}$$

式中 $2\eta_0 \cos \frac{x}{\lambda}$ 一因數之值與時間無關，故可視爲在 x 處之振幅。但此值隨距離 x 而週期的增減。當 $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0$ ，



第 130 圖 駐波。在此情形中兩正弦曲線所

表示者非為 η_1 及 η_2 ，而為 x 方向上各點處 $\eta_1 + \eta_2 = \eta$ 起落之值。

即 $x = \pm \frac{\lambda}{4}, \pm \frac{3}{4}\lambda$, 或 $= \pm \frac{2n+1}{4}\lambda$ 時, 其值為 0; 當 $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm 1$,

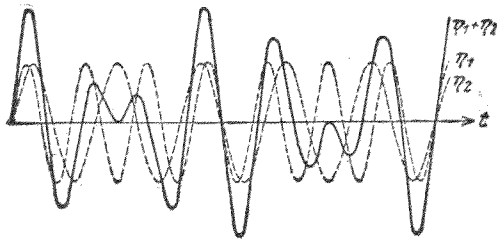
即 $x = \pm \frac{n}{2}\lambda$ 時, 其值為最大。 n 為一整數。 故沿此二波之

路程上振幅最大及振動消滅之各點交互排列。 前者仍稱振腹, 後者仍稱振節 (§ 119)。 此種現象稱為駐波。 相鄰二節或二腹間之距離皆等於波長之半。 實測駐波中相鄰二節或二腹間之距離即可由此測定波長 λ 之值; 若頻率 ν 亦為已知, 則按(16)式更可從此計算波動之傳播速度 c 。 波動為牆壁反射時, 入射波與反射波常因彼此干涉而成駐波。

物體之各種振動 (如樂器之絲絃等) 均可視為駐波, 蓋物體中恆有二波相反進行, 每達邊緣輒行反射而互相干涉。

128. 振拍。 振拍亦為干涉現象之一。 設二波之振幅不甚懸殊, 且其頻率 ν_1 與 ν_2 亦相差不遠, 其 $\nu_1 - \nu_2$ 且遠較 ν_1 與 ν_2 為小者, 若相遇於一點, 則振拍生焉。 振幅 η_0 相等時由此二波激起之總擾動可以下式表之。

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_1 + \eta_2 = \eta_0 (\sin 2\pi\nu_1 t + \sin 2\pi\nu_2 t) \\ &= 2\eta_0 \cos 2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t \cdot \sin 2\pi \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} t \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

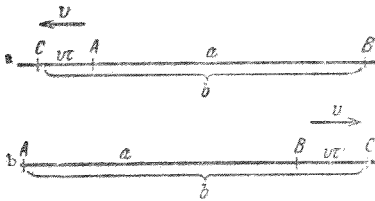


第 131 圖 振拍 $\nu_1 : \nu_2 = 6 : 5$

按假設, $\nu_1 - \nu_2$ 為值頗小, 故式中 $\cos 2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t$ 一項變遷頗緩, 吾人可視 $\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$ (即 ν_1 與 ν_2 之平均值, 且此二者亦幾相等) 一項為此擾動之頻率, 而 $2\eta_0 \cos 2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t$ 一項為其週期變遷頗緩之振幅。此種振拍之經過情形可以第 131 圖示之, 但圖中為明瞭計, 所取 $\nu_1 : \nu_2$ 之比頗大。

129. Doppler 氏效應。設有一物體以速度 v 運動於一媒質之中, 一波 $\eta = \eta_0 \sin 2\pi\nu t$ 連續自物體發出。今當討論在此物體背之離開之一點處振動之情形。

當時間為 $t=0$ 時, 設此以 v 速運動之振動體之位置為 A 。觀察者靜止於 B (第 132 圖 a)。振動體之週期為 $\tau = 1/\nu$ 。命 $t=0$ 時物體適發出一振動之最大值 ($\eta = \eta_0$)。由此發出之波設以速度 c 而傳播, 則此最大振動須經過 $t_1 = a/c$ 之時間後方能到達觀察者。一週期 τ 後, 動體設已行至 C 點; 此



第 132 圖 Doppler 氏效應之導出。

- a. 振動源運動，觀察者靜止。
- b. 振動源靜止，觀察者運動。

時即發出第二次之最大振動。此時動體離觀察者之距離已增加 $v\tau$ 而成爲 $b = a + v\tau$ 。故此項振動到達觀察者所需之時間爲 b/c 。是時爲 $t_2 = \tau + b/c$ 。於是觀察者感覺連續二次最大振動

相隔之時間並非爲 τ ，而爲 $\tau' = t_2 - t_1$ 。從以上諸式，不難算出 $\tau' = \tau(1 + v/c)$ 。因知自動體發出之波，就靜止之觀察者視之，似覺其振動週期增長，而頻率 $\nu' = 1/\tau'$ 減少，即

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{v}{c}} \dots\dots\dots (22a)$$

反之，若振動體向觀察者而來，則其速度之符號應改爲負，即 $\nu' = \nu/(1 - v/c)$ 。此種現象在聲學 (§ 146) 及光學 (§ 451) 中極佔重要，稱爲 Doppler 氏效應，以紀念其發見者。

若振動體靜止而觀察者運動，則情形又不相同。設觀察者以速度 v 背振動體而去(第 132 圖 b)。振動體則靜止於 A 點。當 $t=0$ 時，仍命其發出一最大振動；到達觀察者時，觀察者方經 B 點，與 A 之距離爲 a 。此時之時間爲 $t_1 = a/c$ 。第一次最大振動發出後，經 τ 之時間而發第二次。此與行動之觀察者相遇於 C 點。此時觀察者與振動體之距離較前增加 BC ，命其兩次接得最大振動相隔之時間爲 τ' ，則 $BC = v\tau'$ 。故此時其與振動體之距離應爲 $b = a + v\tau'$ 此第二

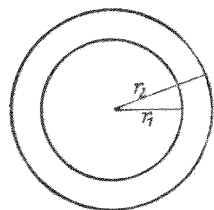
次最大振動到達觀察者之時間 t_2 , 可用二法計算之。其一為 t_1 加以觀察者自 B 行至 C 所需之時間, 即 $t_2 = t_1 + \tau'$ 。其二為連續兩次最大振動發出時實際相隔之時間 τ , 加以波動自 A 至 C 所需之時間, 於是 $t_2 = \tau + b/c$ 。由上述之關係, 藉簡單之運算, 即得 $\tau' = \tau / (1 - v/c)$, 而觀察者所感觀之頻率為

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{v}{c}\right) \dots\dots\dots (22b)$$

若運動之方向相反, 則 $\nu' = \nu(1 + v/c)$ 。

是知在此二種情形中, 觀察所得之頻率須視觀察者靜止振動體運動抑或相反而異。但在一切重要之機械振動情形中, v 恆遠小於 c , 即波之傳播速度恆遠較振動體或觀察者運動之速度為大, 故上述二種情形在實用上可視為無甚差別。因 v/c 為值頗小, 故在第一種情形中吾人亦可書成 $\tau' = \tau(1 + v/c)$, $\nu' = \nu(1 - v/c)$, 與第二種情形中之式相同。(參閱 § 534)。

130. 波動中能量之傳遞。距離定律。振源在一媒質中使媒質之一部份隨之運動而產生波動時, 振源恆逐漸消費其振動能量而作工。媒質中各部份所荷之能量若不因摩擦阻力而化為熱能, 則恆又轉授予其近傍之他部份。故在一波動之中, 能量可經由媒質而游蕩。波動者, 所以傳遞。



第 133 圖 波動中能量之傳遞

一處之能量至他處者也。

今試就球面波討論之，且假設在媒質內能量毫不損耗。以振源為中心，作一球面，半徑為 r_1 ，其外更作一球面，半徑為 r_2 (第133圖)。命 E 為振源每秒鐘發出之能量，則經過第一球面上每 [厘米]² 之能量為 $J_1 = E/4\pi r_1^2$ ，經過第二球面上每 [厘米]² 之能量為 $J_2 = E/4\pi r_2^2$ 。吾人稱此為在 r_1 與 r_2 距離處之能流密度。其比率為

$$J_1 : J_2 = 1/r_1^2 : 1/r_2^2 = r_2^2 : r_1^2 \dots \dots \dots (23)$$

故能流密度 J 隨其與振源距離之平方而遞減。此僅對於波動之在空間內自由傳播時為合理。

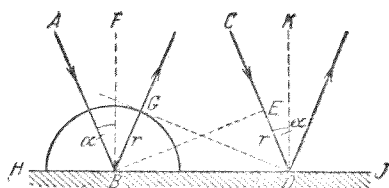
131. 兩媒質分界面上之現象。 波動遇兩種相異媒質之分界面時，輒受不同之變化。其一部份未入第二媒質即被擲回 (反射)，他部份則越界面而入第二媒質，但通常其前進方向每因之改變，而成折線。故波動每遇兩媒質之分界面時，其能量恆分成二部。其多寡之比可大有不同，有時反射之部份居其大半，有時折射之部份獨佔優勢。此為最常遇之情形。

132. 反射。 射線之反射恆按下述之定律：反射線必在入射線與法線所成之平面內，且反射線與法線所成之反射角 α 必等於入射線之入射角 α (第134圖)。此所謂法線者，乃為在入射點所作垂直於反射面之直線。

為以後關於折射之應用起見，茲特再述一 Fresnel 氏所



第 134 圖 反射定律之說明

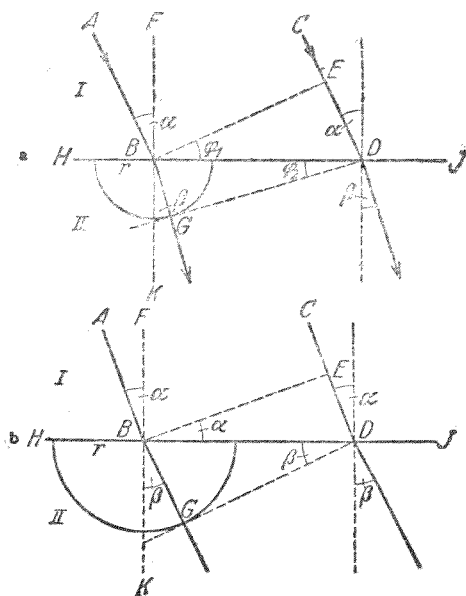


第 135 圖 Fresnel 氏之反射線作圖法

創之作圖法，由此仍可得相同之結果。命 AB 與 CD 為一平面波中互相平行之二射線，各以入射角 $\alpha = \angle ABF$ 向 HI 面投射（第 135 圖）。當 AB 射線上之波面 (§ 123) 到達此面之 B 點時， CD 射線上之波面方至 E 點，離 HJ 面尚有 ED 之路程。當此第二射線到達 D 點時，第一射線早已在 B 點反射沿新方向而前進 r 之路程， r 之長適與 ED 相等。故當此之時，第一射線必已到達一以 B 點為圓心， r 為半徑所作成之圓周上之一點。自 D 點作此圓周之切線，其切點為 G ，Fresnel 氏即謂第一射線之新方向當為 BG 。 DG 為反射平面波之波面。今因 $BD = BD$ ， $BG = ED$ ， $\angle BGD = \angle BED = 90^\circ$ ，故 $\triangle BGD = \triangle BED$ ，而 $\angle GBD = \angle EDB$ 。故謂 $\angle FBG = \angle EDK = \angle ABF = \alpha$ 。此即反射定律。此平面波之其他各射線亦均合是律。反射線與入射線及法線均在同一平面之內。

133. 折射。一射線離媒質 (I) 入另一媒質 (II) 後，其前進之方向可用與上節完全相似之 Fresnel 氏作圖法以定之（第 136 圖）。 AB 與 CD 為屬於同一平面波之二射線，各以 α

角入射於媒質 (I) (II) 之界面 HJ 上。當 AB 射線到達 B 點時, CD 射線方達 E 點, 與 § 132 同。設在媒質 (I) 中波之傳



第 136 圖 Fresnel 氏之折射线作圖法

a. $c_1 > c_2$, b. $c_1 < c_2$.

播速度為 c_1 , 在 (II) 中者為 c_2 。當波沿 CD 射線在媒質 (I) 中自 E 至 D 時, 其沿 AB 射線在媒質 (II) 中前進 r 之路程應按速度之定義有 $r:ED = c_2:c_1$ 之關係。若二速度均為已知, 或祇知其比, 則 r 即可作出。在媒質 (II) 中作一半圓, 仍以 B 為圓心, r 為半徑, 從 D 作圓之切線, 切點為 G , 與 § 132 完全相同。於是 BG 即為射線在媒質 (II) 中之前進向。按圖, 得 1. $BD = ED/\sin \varphi_1$, 2. $BD = BG/\sin \varphi_2$ 。今 $\varphi_1 = \alpha$, $\varphi_2 = \beta$, 故得:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{ED}{BG} = \frac{c_1}{c_2} = n_{12} \dots \dots \dots (24)$$

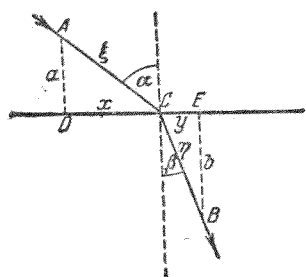
此即折射定律。 $c_1/c_2 = n_{12}$ 稱為兩媒質間相互之折射率或稱折射係數。其值可隨波之頻率而異。若 $c_1 > c_2$ ，則射線向法線彎折 ($\alpha > \beta$, 第 136 圖 a), 反之, 則背之彎折 ($\alpha < \beta$, 第 136 圖 b)。

與折射有連帶關係之全反射, 當俟 § 411 中述之。

134. Fermat 氏原理。 Fermat 氏嘗建立一原理, 謂波

動在兩定點間傳播時所取之路程恆為進行時需時最短或最長者。

但大多數之情形恆屬最短者, 需時最長者絕少。波動與物質交互作用時, 最短時間之路程通常非為幾何學上之最短者, 故非為兩定點間之直線。試即取折射之情形為例。



第 137 圖 由 Fermat 氏原理導出折射定律

設有一射線離一媒質而折射入他媒質。命第一媒質中之速度為 c_1 , 第二媒質中者為 c_2 。在射線上任取二點 A 與 B , 各在一媒質中(第 137 圖), 而計算此射線自 A 至 B 所需之時間 t 。假設 (24) 式之折射定律尚為未知, ACB 之路程可任意選擇, 換言之, 關於 DE 直線為 C 點所分成之二段 x 與 y 祇知其和為 DE , 而未知其二段之比。

波動自 A 進行至 B 所需之時間 t 為(第 137 圖)

$$t = \frac{\xi}{c_1} + \frac{\eta}{c_2} = \frac{1}{c_1} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{c_2} \sqrt{y^2 + b^2}$$

欲此值爲最小(或最大),其必需之條件爲 $\delta t = \frac{\partial t}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{\partial t}{\partial y} \cdot \delta y = 0$,

即

$$\delta t = \frac{1}{c_1} \frac{x \delta x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{1}{c_2} \frac{y \delta y}{\sqrt{y^2 + b^2}} = 0.$$

但因 $x + y = DE = \text{常數}$, $\delta x + \delta y = 0$, 即 $\delta y = -\delta x$, 故

$$\frac{1}{c_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{c_2} \frac{y}{\sqrt{y^2 + b^2}}, \text{ 即 } \frac{1}{c_1} \frac{x}{\xi} = \frac{1}{c_2} \frac{y}{\eta}.$$

從第137圖可得

$$\frac{1}{c_1} \sin \alpha = \frac{1}{c_2} \sin \beta$$

此與(24)式完全相合。

135. 波之吸收. 波動進行時,其所具能量之一部份因化成他種之能,如熱能等,而消失者,稱曰波之吸收. 當平面之簡諧波前進路程元 dx 時若失去 dE 之能量,則

$$dE = -E \cdot \alpha \cdot dx,$$

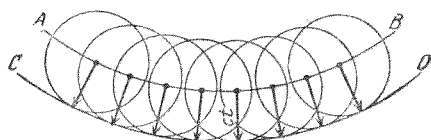
E 爲在 x 點餘存之能量, α 爲吸收係數. 其值視波動之頻率而異. 上式之解式爲

$$E = E_0 e^{-\alpha x}, \dots \dots \dots (25)$$

式中之 E_0 爲在 $x=0$ 處所有之能量.

136. Huygens 氏原理. 設 AB (第138圖) 爲球面波中

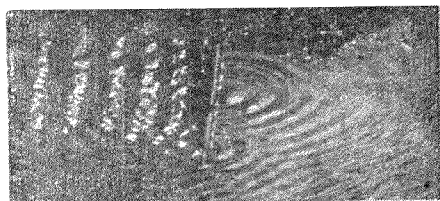
一部份波面之截面。Huygens 氏之原理(1690)謂波動在空間所經之各點,根本上恆可視為新生之同樣球面小波之波心,而可從此發出小球面波向四方傳播。



第 138 圖 Huygens 原理之說明

但通常由波面上一點發出之波祇能向一方進行,蓋諸小波於中途苟不遇障礙,則除此方向外,其他各方之波動皆彼此干涉而消滅,此不難嚴格證明之。若欲求 t 時間後波面之位置,吾人祇須以第一波面上之各點為圓心各作一圓,半徑為 $r=ct$ (c =波速)。此諸圓之公共包跡 CD 即為 t 時間後之波面。如第 138 圖所示,波動自由擴展時之波面仍為球面,與以前之假設相符,故波動若不遇障礙,恆以直線前進。

137. 繞射。按上節所述,波動之所以直線前進,乃因自波面上一點所發出之小波向各方傳播時,除前進射線之延長線外,其他各方之波動均受他小波之干涉而消滅。吾人若用任何限制——置於波程中之障礙物以屏蔽波之一部份——



第 139 圖 水波遇孔隙後之繞射
Grinsehl 氏原作

以阻止此種小波之一部份,使其不能前進,則不受攔阻之諸小波雖仍繼續前進,但干涉作用將受屏蔽之影響而不能完全。若遇此種情形時,直線之前進每遭擾亂。此現象稱曰

繞射.

繞射之情形頗可於水波中觀察之。第 139 圖示一平面之水波,向一木板前進,板上有一孔。大部份之水波俱遇此板而反射,僅在小孔處者穿板而過,向彼方以圓形傳播,恰如小孔即為一波心者然。第 139 圖又示明由於波之反射(圖之左方)而呈之駐波 (§ 127)。關於繞射之其他詳情,當俟光學中討論之。

第十三章 聲學

138. 聲之本性及其傳播。凡物理現象之影響於吾人之聽官者，統稱曰聲。一切聲之來源皆為振動之物體。物體振動時，其周圍之媒質如空氣中即產生一頻率與之相等之波動，向各方傳播，迨入耳中，鼓膜被迫振動，刺激聽官而成聲。

聲之速度可由 § 125, (17) 與 (18) 二式計算之。在空氣中 0° 時之聲速為 331,5 [米]/[秒]， 20° 時約為 340 [米]/[秒]，或約為 $1/3$ [仟米]/[秒]。但此僅在聲波中出現之壓力的變遷為值頗小時為然，即聲之強度須不超過某項限度者。強烈之爆聲在相當條件下可達更速之速度。聲波自由傳播時恆以直線前進。若中途遇有障礙物體，則沿其邊緣繞射 (§ 137)，而一部份之聲波可達物體之後方(所謂『隔牆有耳』者以此)。

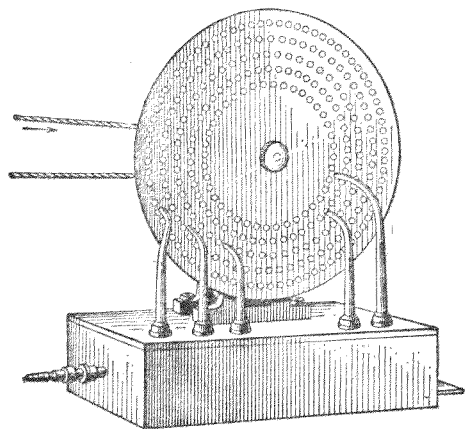
吾人可直接測量空氣中之聲速，例如甲乙二處相距 x [米]，甲處燃燄，乙處測量自見火光起至聞燄聲止所歷之時間 t 。於是 $c=x/t$ 。否則測量爆聲發出後遇一平面壁反射而回所聞迴聲間之時間亦可。更精確者，測量聲之頻率與波長，而按 $c=\lambda\nu$ 之式 (§ 124) 計算其速度。但此法僅可應用於週期性之聲波，具有一定之波長者。

139. 噪聲,複音,純音. 吾人聽官所感覺之聲可分爲二類,一爲噪聲,一爲複音與純音. 後二者與前者之區別在其有顯然可辨之音調.

噪聲之原因爲無週期性之聲波,其空氣壓力之變遷漫無規律. 純音爲具有純粹週期性之聲波而相當於一簡諧波,可以 $\eta = \eta_0 \sin 2\pi\nu t$ 表之者. 複音爲純音之混合,通常尤指一較強之基音(基振, § 117) 和以數個較弱之倍音(倍振)者而言.

強度相等而頻率有簡單之比之數複音或數純音同奏時稱爲和音.

140. 音調. 頻率. 波長. 試取一圓板,其周緣鑽有許多等距之小孔(第140圖),將其急轉之,而向孔吹氣,則每可聞一複音;孔數愈多,或轉動愈速,則其音愈高. 此種儀器稱爲驗



第 140 圖 小孔驗音盤

音盤. 齒輪轉動時若以厚紙觸之,亦可發聲. 此等實驗中所聞之音皆由於空氣週期性之吹擊而起(圓形之鋸亦可發音). 空氣之吹擊愈頻,則複音中基音之頻率愈大,而複音之音調愈高. 人耳所能聞

辨最低之純音而尚不失其真(非如蜂之嗡嗡聲)者(Subcontra-C),其頻率約爲每秒 16 次。大風琴之中備有此音。最高之可聞限度在青年人約爲每秒振動 20000 次;一至中年,此限度已大見縮減。音樂上所用之純音通常在每秒振動 16 次與 4000 次之間。

按 § 124, (16) 式,空氣中純音之波長與其頻率 ν 之關係爲 $\lambda = c/\nu$ 。故上述可聞限之波長約爲 20 [米] 及 2 [厘米]。

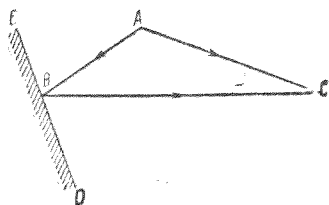
141. 聲之反射。聲波亦遵守反射之定律 (§ 132)。遇平面之牆及森林周緣等處均反射頗佳(回聲)。所謂某處之『音響』者,即視該處之反射情形而定。棉毛織物如氈毯等對於聲波之反射不良,故一切聲音咸遇之而消滅。在廣大之場所中(教堂,大廳),其四周有平滑之牆壁者,恆覺反射頗強;聲波來回之路程既遙,回聲與原聲相隔之時間自久,因成不悅耳之囂聲(交混回響)。室內音響學在建築學中實爲一重要而困難之問題,其實際上主要之解答,在今日尚僅以極普通之經驗爲基礎。吾人迄未能對於某種實例作精確之預算。

按幾何學上橢圓之特性,知自一焦點(橢圓圍牆)發出之聲,反射後恆集中於他一焦點。有所謂私語室者,即本是理而建築。

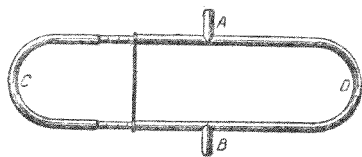
聲波傳入海中,至海底而反射,若測得聲波上下往返所需之時間,即可用以計算海之深度(回聲垂線測深法)。同理,

由爆炸時所發之巨聲在地層內不連續面上之反射可計算礦脈所在之處。

142. 聲之干涉. 欲證明聲之干涉 (§ 126), 最好用同一聲源之波, 蓋若此方足保證此兩振動必為完全相同也。置音叉於平面壁 DE 前之 A 點 (第 141 圖), 則在任何點 C 必可同時聞得直接及反射之音。此二音所經路程之差為 $AB+BC-AC$ 。此差值若等於波長之整數倍 ($n\lambda$), 則按 § 126, 二波互相增強, 若等於半波長之奇數倍 $[(2n+1)\lambda/2]$, 則彼此干涉而消滅。苟二波強度不等, 則縱不完全消滅, 亦必降至最低。至於何處音強, 何處音減, 則視空間之 C 點及聲源 A 之位置而定。故若固定聲源之位置而吾人對反射壁運動, 或吾人靜止而將聲源運動, 則音強必隨之變化。作此實驗時, 最佳須用粗厚而音調較高之音叉, 蓋波長愈短, 空間各點強弱之變化愈烈。



第 141 圖 聲之干涉



第 142 圖 Quincke 氏管

欲觀察聲之干涉亦可用 Quincke 氏管 (第 142 圖)。管之半部可任意拉出, 如伸縮喇叭狀。自 A 管導入一純音, 而自 B 管聽之。若拉出之部份適使 ACB 與 ADB 路程之差等

於波長之半，則所聞之音最弱。利用此法可測空氣中純音之波長。

143. 聲之駐波。 聲之駐波 (§ 127) 可用平面牆壁之反射以產生之。入射波與反向之反射波相重於聲源及牆壁間之空中。最強與最弱之音可直接以耳聽之。更佳者可用『靈燄』(煤氣燄在適當壓力下燃燒於一長管之一端，遇強音時，燄即縮短)，吾人直可目見之。音之最強處在壓力變遷最甚之處，即空氣振動最弱之處，此處即為壓腹（亦即振節）。

用上法測得兩處最強音相隔之距離，按 § 127 應為此振動波長之半。若頻率 ν 為已知，則按 § 124, (6) 式，從此項距離可計算聲波之速度 c 。Kundt 氏管即為利用此理以測各種氣體中之音聲速者，將欲測之氣體儲於一玻管中，而設法使管中產生駐波。管中置有乾燥之軟木屑或石松之種子，最佳者用水晶之粉末。駐波產生後，粉末即自運動最烈之處即壓節移動而羣集壓腹 (Kundt 氏粉末圖形)。於是吾人



第 143 圖 Kundt 氏管中之粉末圖形

可直接測量兩腹間之距離而得波長。第 143 圖所示之儀器特用以測空氣中之聲速。法先夾住金屬棒或玻璃棒全長之 $1/2$ 一處，或其 $1/4$ 與 $3/4$ 二處 (A, B) 而摩擦之，使棒內

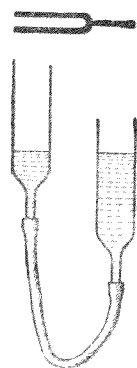
產生縱振動，由棒端之軟木片傳達於管內之空氣。

144. 拍音,合音. 頻率相差極微之二純音同時合奏時,即可發生振拍 (§ 128). 試取相同之二音叉,以少許白蠟塗於一叉之端,或將琵琶上相同之兩弦略鬆其一;於是二音不協,拍音遂生. 拍音者,音強時揚時抑之謂也. 拍之遲速可有不同;兩音之頻率相差愈少者,拍愈慢. 因吾人之耳對於每秒 16 次以上之振動不能一一判別,故頻率之差數 $\nu_1 - \nu_2$ 在每秒 16 拍以上者,即不覺其爲拍音. 若音調不高,則此時音調之差可直接以耳察出之;遇兩音頻率相差極微時,用拍音以定其差數,實爲一最可靠之法. 樂師調節鋼琴或琵琶之同弦時,恆注意使拍音適能消去以圖之.

設有二音同時入耳,其頻率 ν_1 與 ν_2 之差在每秒 16 以上者,吾人即不覺其有拍音. 聚精會神而聽之,則覺除二音外,尙可聞其他之音,其頻率等於二音之和 $\nu_1 + \nu_2$ 與二音之差 $\nu_1 - \nu_2$ 者. 若處置得宜,則尙可聞更多之音,其頻率可以一普遍式 $\nu = m \cdot \nu_1 \pm n \cdot \nu_2$ 表之,式中 m 與 n 均爲整數. 此種之音稱爲合音,或分別稱之爲疊合音與差音(Sorge 氏, 1744). 第一差音 $\nu_1 - \nu_2$ 最易聽得. 原音進入耳中時初未含有此種之音. 此皆在耳內方始造成;而其所以產生者,乃由於鼓膜向內向外彎曲時所遇之彈性阻力不等所致. 按振動之數學的解析,此種不對稱之振動膜遇頻率不等之二音衝擊時,其強迫振動中必含有此種之疊合振與差振.

以同一之風箱吹二個風琴管時，亦生合音，尤以其第一差音產生最易。但在此情形中差振即在風箱內產生，故所發之音中，除二原音外，事實上已含有此音。

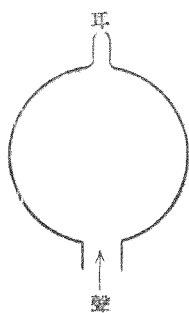
145. 共鳴。調諧之空氣柱。 試開鋼琴之蓋，將踏板提起，而向之唱入一音，則每聞琴中亦發一音以和之。此因琴內頻率相同之某鋼絲與之共振 (§ 121) 而成。物體常有因某純音之彈奏而自行叮噹作聲者，亦同此理。吾人向一玻璃杯大聲叫喊時，苟適為玻璃杯之固有音調，則可發生強烈之共振，玻璃杯直可跳躍空中。在狹小之空間內，吾人每聞某一定之純音特著。此音即相當於該密閉氣柱之基音。裝置音叉於空匣之上，設法使匣中氣柱之固有振動與音叉之振動相符。若此則音叉所發之音可遠較無匣時為響。所以然者因此時聲能量之為匣中振動氣柱所散播於空中，可遠較單獨之音叉為速；音叉既不斷的傳其能量於共鳴匣，則其能量之消失自亦愈速。立音叉於桌面，亦可稍稍增響。擦絃樂器與其他樂器之共鳴底板以及傳話器等，蓋無一非欲加強聲波在空氣中之散播者。擦絃樂器共鳴匣之特種形式乃根據經驗而來，最適宜於使樂器所發全部之音均勻圓渾。（所謂共鳴，非作嚴格之意義講）。至如此種形式何以特為適宜，且髹漆之影響何



第 144 圖 空氣柱
之共鳴

以亦屬非常重要，則吾人至今尙未得一滿足之說明。此類特殊之形式，爲昔日提琴製造家完全本其經驗所發明，其偉大之成就，吾人至今猶欽佩無已也。

置音叉於第 144 圖所示儀器一管之口，而昇降管中之水面，則當管中之氣柱爲某一定長時，由於共鳴之作用而可聞一頗響之音。又如置一頻率約爲 4-500 之音叉於吾人之口前，將口部張開，則不難將口腔張成某一特種之位置，覺口腔亦與之發生共振。



第 145 圖
Helmholtz 氏
共鳴器

Helmholtz 氏利用密閉空氣團中之共振以分析複音，即測定複音中所含之純音。氏用一套如第 145 圖所示之「共鳴器」，器有一口，可插入耳中。分析時祇須選擇某器能與欲測之複音發生最強之共振者即得。

調諧空氣柱之性質可用一風琴管以風箱吹之使發生振動而研究之。例如將手閉住一唇管之開端，其音調即下降一均（讀若韻，Oktave）。若以頗強之氣流吹之，則發倍音。管口開閉之影響尙可以下述簡單之實驗示明之。試取一兩端開口之紙筒，以手掌擊其一端，若擊後手掌仍留筒口，則吾人所聞之音相當於筒中之氣柱一端開一端閉時之固有振動。若急擊之，或僅用一手指，則氣柱兩端皆開而振動，其頻率應二倍於前（§ 120），而所聞之音必較前提高一均。細管（音鍵，簫管）之一端開口者，若以氣吹

之，亦能發音。風吹煙突，輒聞嘯聲，亦此理也。

吾人能以舌與口發尖銳之嘯聲，是乃由於激動口腔內空氣之固有振動或其倍振而成，其音調在某限度內可藉口腔及舌適宜之形狀與位置以變換之。

146. 聲之 Doppler 氏效應。 此項效應 (§ 129) 爲吾人常見現象之一。火車馳近時之汽笛聲似較離開時爲高。腳踏車之鈴聲與汽車之喇叭聲亦然。聲源運動愈速者，此項效應愈強，即當其經過吾人近旁時，其音調之突變愈顯。聲源靜止而吾人運動，例如在前進之火車中聞站上之號鐘，亦覺有 Doppler 氏效應。

吾人坐於汽車中向一牆壁（例如穿過城門）疾駛時，試按喇叭，則所感覺之 Doppler 氏效應特著。喇叭之音調到達牆壁時，其頻率已因 Doppler 氏效應而增加，遇壁而以相等之頻率反射。此時汽車與反射之聲波反向而運動，又遇一新生之 Doppler 氏效應，其頻率更因之增高。

147. 音階。 今日之音樂以音階爲基礎。此乃爲一組之純音，其頻率互成簡單之比率者。音階可分爲大音階與小音階二類。請先述大音階。大音階之基音稱爲 c ，爲簡明計，吾人選擇其單位時，即以其頻率爲 1。 c 大音階即由下列諸純音而成：

	基音	二度	大三度	四度	五度	大六度	大七度	八度
頻率	c	d	e	f	g	a	b	c'
	1	$9/8$	$5/4$	$4/3$	$3/2$	$5/3$	$15/8$	2
比率		$9/8$	$10/9$	$16/15$	$9/8$	$10/9$	$9/8$	$16/15$

吾人若任取其他頻率不同之純音爲基音，則屬於該基音之大音階中各純音頻率之比率恆應與此相同。試於大音階中將任何二純音之比值全數一一寫出，則凡自 1 至 16 諸數，除 7, 11, 13, 14 四數外，其餘十二數所能造成一切之分數，其比值在 1 與 2 之間者，莫不咸備——僅缺 $9/5$ 一分數。二純音 $\nu_1 : \nu_2$ 之比稱曰音程。

在 c 小音階中，以小三度 $es=6/5$ 代大三度，而以小六度 $as=8/5$ 代大六度。上昇時仍用大七度 b ，而下降時則以 $b=9/5$ 代之，是則大音階中所缺之音程在此處出見矣。

凡樂器之按照上表調音者，聞之覺其調諧完全純粹，盡善盡美。故稱此種音階爲自然和諧音階。其中相鄰二音間有三種不同之比率(音程，或音步)：大全音程 $9/8=1,125$ ，小全音程 $10/9=1,111$ 與半音程 $16/15=1,077$ 是。兩個半音程所成之音程爲 $16/15 \cdot 16/15 = 256/225 = 1,138$ ，與大小全音程均異。

此種純粹調音法不能施用於鋼琴等有固定音鍵之樂器。此種樂器中一均內包含 12 音程，每均內之各純音須不僅限於 c 大音階，即以其他基音造成之音階亦須合用。例如 a 爲 c 大音階之大六度，但同時須爲 g 大音階之二度， f 大音階之大三度， e 大音階之四度，或 d 大音階之五度。但 $g=3/2$ 之二度應爲 $a=3/2 \cdot 9/8 = 27/16$ ， $f=4/3$ 之大三度應爲 $a=4/3 \cdot 5/4 = 5/3$ ， $e=5/4$ 之四度應爲 $a=5/4 \cdot 4/3 = 5/3$ ，而 $d=9/8$

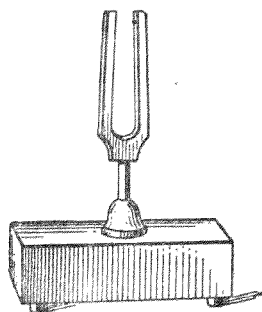
之五度應爲 $a=9/8 \cdot 3/2=27/16$ ，可見 c 大音階之 a 合於 f 及 e 大音階，而不合於 g 及 d 二大音階。其相差等於 $81/80$ (即所謂 Pythagoras 氏小音程 Komma)。對於其他之音階亦可同樣證之。

爲免除上述之困難計，吾人乃協議將一均分成 12 等音程(半音步)，即自基音起，每歷 12 相等之音程而成一均(Stifel 氏, 1544, Werkmeister 氏, 1760)。此種音階稱爲等程音階。命其相鄰二音之比率爲 x ，欲滿足上述之條件，須使 $x^{12}=2$ ，即 $x=\sqrt[12]{2}=1,059$ 。按此調音時，其全部之音程均感少許不純粹，但相差頗微，在實用音樂中可不致察出(全音程之值爲 $1,059^2=1,121$)。純粹調諧時，各音無此優彼劣之分，其裨益亦正復非淺。按此法而調音，所謂轉調法 (Modulatio.) 者(即由一種音調變爲他種)方有可能性，故近代之音樂祇可以此爲基礎而探求之。

今日音樂中所取之基音曰國際基音 a' ，(a 之右上角加撇)國際間一致規定其頻率爲 435。

近又有人從事試驗在音樂中採取三分音程 ($\sqrt[3]{2}$) 及四分音程 ($\sqrt[4]{2}$)，以冀改進音樂者。但此項努力迄今尚未有具體之成就。

欲產生一定頻率之純音可用音叉(第 146 圖)，音叉所發之音幾無倍音攙雜，故頗見純粹。若欲其發強烈之音，則須將其立於一共鳴匣之上，匣之一邊開口，匣之形狀大小務須



第 146 圖 音叉

選擇使其中之空氣柱能與音叉發生共振 (§ 145)。

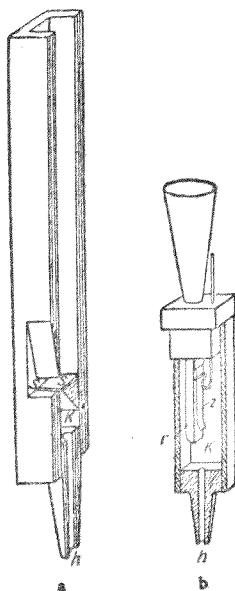
148. 諧和與不諧和。二純音或數純音同時並奏，有時悅耳（諧和），有時刺耳（不諧和）。按諸經驗，知二純音頻率之比為愈簡單之數值者，愈覺其諧和。故諧和之最佳者，當為任一音與其八度，其次為五度，又次為四度，三度及六度。二度與七度已覺不甚諧和，但為實用音樂上重要之音程。二音同奏時諧和之程度不僅與二音頻率之比有關係，且尚須視頻率之差而定。頻率之比相同時，低音之相差較高音為小。相差過微時，將生顯著之拍音 (§ 144)。此極不悅耳者也。故鋼琴低奏時，輒感三度音似欠諧和，亦即以此。

149. 絲絃樂器。絲絃樂器中以緊張之動物腸，金屬絲，以及其他之絲線為絃，而藉其固有振動以發音。發音之手續，有擦絃者（Geige, Bratsche, Violoncello, Kontrabass 等各種提琴），有擊絃者（如鋼琴），有撥絃者（如 Zither, Laute, Mandoline, Harfe, Pizzicato 等樂器）。音之品色與激動絲絃之方法及部位極有關係。變更絃之張力，恆可使之發一指定頻率之音（調諧）。大多數之絲絃樂器不僅利用在固定支柱間定長絃段（空弦）之振動，即其他之音亦可用手指按於絃上以減短其有效長度——即增高其振動之頻率，亦即增高其音調

——以產生之。奏擦絃樂器時，又有應用胡笳音 (Flageolet-töne) 者，乃以手指輕按絃長之 $1/2$, $1/3$, $1/4$ 等處而成，此時絃之全部發生振動，但同時有 1 個，2 個，或 3 個等之振節。此音之成係利用空絃之倍振(參閱 § 119, 第 121 圖)。

以前所用種種之絲絃樂器皆有一缺點，即振動之絃須完成雙重之任務，第一方面須調諧一音之頻率，務使其儘量純粹，而第二方面又須供給發音時所需之能量。欲使其同時雙方兼顧，勢難勝任愉快。故最近有 Nernst-Bechstein 二氏翅形大鋼琴者，其中之絃祇負第一種之任務。其振動僅用以產生一節拍與之相同之交流感應電流 (§ 317)，而其聲能之散播則藉助於一電波放大器 (§ 394)，及一揚聲器。利用此法除其他利益外，音之品色亦大見改善。

150. 樂管。風琴。其他之樂器大多數均利用氣柱之振動。最重要者當推風琴。樂管有二種：即唇管與簧管是。唇管(第 147 圖 a)中，空氣自 h 吹入，經狹縫 SS 而衝於鋒利之邊緣，即所謂唇上。當氣流經過此處時，最初先發噪聲，即由一切可能之振動混合而成者。其中恆必含有管內氣柱之固有振動，於是



第 147 圖 a 唇管 b 簧管

激動氣柱，隨之共振。此又回授於氣流，氣流即以氣柱固有振動之節拍而開始振動。此又使氣柱發生更強之共振，而強烈之音因以發生。唇管又可分為二種：一端開通者為開管，一端閉塞者為閉管。若管長相等，則後者所發之音恆較前者適低一均，參閱 § 120，其理自明。因二管倍音之種類不同，故音色亦異。在簧管（第 147 圖 b）中空氣自管口吹入後，經過一孔，孔之附近裝有金屬簧片之舌，幾閉管孔，舌之大小厚薄，視欲發之音而定。氣流吹入，舌被振動，自必按其節拍啓閉管孔。氣流因之亦按此節拍忽斷忽續，管中之氣柱原係與此音調諧者，遂被激而振動。口琴之發聲，純基乎簧舌之作用及由此產生之週期的氣流衝擊。此處並無空氣柱之振動。

風琴中有所謂音掣者，乃用以變更音色，在擇定某一基音後，可使其他純音隨同低聲伴奏。故利用此器，可模仿他種樂器所發之音，在某限度內，頗為酷肖。

Harmonium 為一種小風琴，僅具簧管者。

151. 吹奏樂器及其他樂器。吹奏樂器者，吾人以口吹之，其氣柱因口腔中之氣流而振動者也。最屬重要者，第一類為竹木所製：如 Flöte, Klarinette, Oboe 及 Fagott 等。第二類為金屬所製：如角，號，Kornett, Posuune, 以及 Saxophon 等。Flöte 為唇管，其餘均為簧管。

木製或竹製吹奏樂器之側恆具多孔，或用手指或用樂

鍵任意啓閉之，以變更振動氣柱之有效長度，而音調即由此變化。較高之音調可用所謂過吹法者以產生之。氣流之強度超過某一定之界限後，則不發基音，而發倍音，惟究屬第幾次倍振，則須視吹時氣流之強度而定。初段諸倍音較低，彼此相離頗遠，較高之倍音恆逐漸接近，終可自成一組之音，合於音階中之諸純音，而連續無缺。奏者之技術，即在若何運用適宜之吹法及口腔特別之位置以直接吹出所欲之倍音。

金屬樂器中除 Zugposaune 外，皆有活瓣，可藉以溝通氣路側面之支溝，以延長氣路之長度，而變更其音調之高低。同時活瓣即將直接之氣路閉住。Zugposaune 可以伸縮，氣路之長短即由此變更之。過吹法在金屬樂器中較上述者尤屬重要。Saxophon 通常多由金屬製成，間亦有木製者，其奏法及吹法均與木製吹管樂器最相接近，尤肖 Klarinette，故在樂器中佔一特別位置。

尚有多種樂器係利用金屬或非金屬之平面或曲面板或棒等物之固有振動（如鐘，Becken, Triangel, Xylophon, Gong 等），或利用緊張薄膜（犢皮）之振動，如鼓及 Pauke。此種樂器組織複雜，恆發許多複雜而不和諧之倍音，故各有其特具之音色。

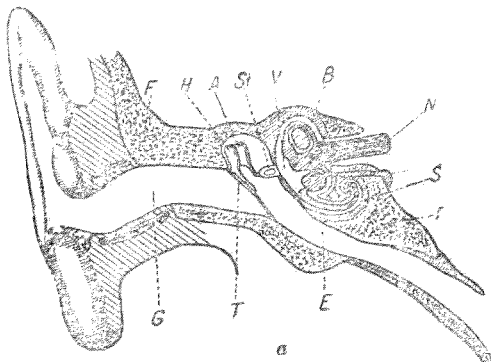
152. 耳、喉頭。耳(第148圖)之構造如下:

1. 外耳(耳管 G)，爲鼓膜 T 所閉住，鼓膜爲一薄皮之膜。

外耳道藏於顛骨 *F* 之中,藉耳郭之助,得收集外來之聲波。

2. 中耳,由耳咽管 *E* (以抵消空氣之壓力) 通至鼻腔,在耳咽管中有一組小踝節骨,即錘骨 *H*,砧骨 *A*,及鐙骨 *SI* 是,此三小骨能將鼓膜所受外來之振動傳至卵圓窗,此窗者,隔離中耳與內耳者也。三小骨自成一組之槓桿;鼓膜之振動幅大而力弱,而卵圓窗之振動則力強而幅小,前者之振動得以傳達於後者,唯此組槓桿是賴。

3. 內耳,或稱內耳迷路,構造頗為複雜,在顛骨內成一



孔穴。此由下列各部所組成:前庭 *V*,三條之半規管 *B*,壺腹及耳蝸 *S*。各部份



第 148 圖 人耳之略圖 a 截面略圖 b Corti 氏管官之截面

中,半規管似與聽覺無甚關係,僅為人類之一種平衡器官。(在許多獸類中,此器官亦與聽覺相連)。壺腹似為專司察覺噪聲之器官,而耳蝸則司樂音。此管共有 $2\frac{1}{2}$ 轉之彎曲,中有骨質之螺旋膜,將其隔分為二;管端為圓窗,由一薄膜與中耳隔離。內耳之全部充滿一種液體,稱為內耳液,卵圓窗之振動即由此液傳至內耳。沿耳蝸之彎曲滿佈無數之纖

維(第148圖b),稱爲Corti氏器官。此種纖維決定人類對於樂音之可聞限度;凡限內之音入耳時,纖維即隨之振動(聽覺之共振理論, Helmholtz氏, 1867)。因此刺激神經之末端N, 由此再傳至腦之聽覺中心,而吾人之聽覺於以生。

喉頭中振動之器官爲聲帶,乃爲一薄膜,其張力(固有頻率)可任意變換者。氣流自肺部經由氣管衝出時,聲帶即因之振動,有如簧管中簧舌之效用,能使氣流作週期的擒縱。由是使口腔及與之相連之空間發生共振而成聲。

153. 語言及母音。子音發音之情形頗複雜,此處不能詳述。各母音中各含有絕對頻率一定不變之幾個純音,稱爲母基音(Formanton)(Helmholtz氏, 1857, Donders氏 1858)。此各母音所以各有特別之音色也——母音雖可唱成高低大不相同之音調,但此亦並無妨礙。母基音之成非由於聲帶,而爲鼻腔及喉腔之振動。試開鋼琴之蓋,提起踏板,向之唱一母音,則鋼琴中必有某數個純音與之共振而發出一清晰可聽同樣之母音,是即母音之音色由於頻率一定之幾個純音互相混合而成之明證也。試於一純音之內雜以一母基音,雖極微弱,仍能使其表出母音之特性。留音機之話片,若不依準確之速度轉動,則因母基音之音調改變而影響於母音之特性。

