Грид: Иванъ Соколовъ при Академ: наукъ и Худож: въ С: П: бург

NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. I.

ad Annum MDCCXLVII. et MDCCXLVIII.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCL.

SVMMARIVM
DISSERTATIONVM
QVAS CONTINET
NOVORVM COMMENTARIORVM
TOMVS I.

Quae a PETRO MAGNO, immortalis memoriae Imperatore, anno MDCCXXIV. fundata, et a dilectissima Tori Socia, Eiusque in Imperio Successore, Clementissima CATHARINA a. MDCCXXV. instaurata erat Academia Imperialis Scientiarum Petropolitana; ea tandem a. MDCCXLVII. a paternarum virtutum Herede, feliciter hodie toti Russiae imperante, ELISABETA AVGVSTA, *Deliciis generis humani*, praeclaris legibus lautoque stipendio munificentissime ornata, aucta et firmata est.

Iudicauerat scilicet prouida *Patriae Mater*, vestigiis Augustissimorum Parentum insistens, ad scientias et artes in vastissimo totius orbis Imperio prouehendas, omnino opus esse, vt conseruetur eiusmodi societas eruditorum virorum, qui illas nouis inuentis ditare, ab aliis inuenta examinare et perficere, veraque a falsis separare, denique cauere possint, ne sumtus in res penitus inutiles, aut impossibiles impendantur, hosque coniunctis viribus longe maiores facere posse progressus, quam quidem a singulis, tametsi praestantissimis, exspectari debeant.

Eiusmodi autem societas statutis et sanctionibus convenientibus vel ideo munienda fuerat, vt vnusquisque sodalium, quid a se requiratur aut sibi agendum sit, perspectum haberet.

Operae ergo pretium visum est, praeclara haec statuta antea exponere, quam de argumento dissertationum in *Nouis Commentariorum* tomis digestorum, fusius verba faciamus.

Paucis tamen antea lector monendus est, omnes dissertationes, quae ad praecedentes Commentariorum tomos vsque ad annum MDCCXLVI. spectant, iam sub prelo sudare, et illis coronidem imposituras esse: hunc autem et sequentes tomos *Nouorum Commentariorum* nomine ideo venire, quia Academia nunc nouis legibus instructa est, et classes hic aliter, ac in praecedentibus tomis fieri solebat, dispositae inueniuntur. Scilicet noua haec volumina, mathematico-physicis meditationibus, exclusis, quae ad classem historicam pertinent, disquisitionibus, potissimum dicata sunt. Hinc classis prima horum *Nouorum Commentariorum*, quae *Mathesin* proprie spectant, complectitur; altera *physico-mathematica*, quae ad Physicam experimentalem et Mechanicam pertinent, comprehendit; tertia *physica*, anatomicas, botanicas et chemicas exhibet dissertationes, et quarta denique *astronomica*, quae ob rationem pag. 466. Tom. I. Comm. allatam, ad finem cuiusque Tomi *Nouorum Commentariorum* reiicietur, obseruationes potissimum sistit astronomicas.

Nec silentio praetereundum est, recensiones has, quae forte nonnullis iusto longiores videbuntur, indigenarum huius Imperii caussa potissimum typis mandatas esse, vt eo melius intelligat proficiendi cupidissima Natio, quid dissertationum harum auctores ad incrementum scientiarum conferre studuerint.

IN-

INSTITVTA ACADEMICA

EDICTVM
IMPERATORIAE MAIESTATIS SENATVI PROPOSITVM DE REBVS ACADEMICIS.

Immortalis memoriae AVGVSTA, dilectiſſima noſtra *Parens*, *Domina* atque *Imperatrix* CATHARINA ALEXIAS omnium, qui Imperio EIVS ſubiecti fuerant, commodis materno amore atque cura proſpiciens, cupiensque perficere, quae *Parens Noſter* Deſideratiſſimus PETRVS MAGNVS animo complexus fuerat ingentia molimina, inſtituit erudiendorum populorum ſuorum cauſa Academiam Scientiarum, cui non longo poſt interuallo, quam tutelam Imperii Ruſſici ſuſceperat, ſummam a PETRO MAGNO conſtitutam viginti quatuor millium nongentorum et duodecim rubellorum repraeſentari iuſſit.

At quum Dominus atque *Parens Noſter* in animo habuerit huic et Academiam artium, ſine qua maturiores ab ipſa ſcientiarum Academia vix ſperare licet fructus, coniungere, (quae res paullatim inſtituta auctaque Imperio haud aſpernandos Noſtro fructus tulit) cui tamen Academiae artium ſuſtinendae atque perficiendae nondum, quae debet, ſumma conſtituta eſt, Nos, quibus ſalus populorum Noſtrorum et artium incrementa curae ſunt, ſcopum, quem ſibi propoſuerant Parentes Noſtri, tenendum tuendumque ſuſcepimus: Itaque ſummae ſupra memoratae clementiſſime iubemus adiici octo et viginti millia rubellorum, trecentos et octoginta ſex, tuendae Academiae artium, et ornando augendoque cimeliophylacio atque bibliothecae Noſtrae. Ex quo adparet, ſummam vniverſam, quae impenditur quotannis tolerandis ſumtibus vtriuſque quum ſcien-

tiarum

tiarum tum artium Academiae, nec non Vniuerſitatis, (quae quidem ſumma ex curia reditus Imperii Noſtri diſpenſante tranſſcribenda eſt) eſſe quinquaginta trium millium, ducentorum et nonaginta octo rubellorum; eam autem pecuniam ſecundum tenorem libelli, qui ſtatum continet academicum, quem quidem Nos clementiſſime adprobauimus, adminiſtrari iubemus. Ac ne doctis viris in exſoluendis ſalariis mora aliqua interiiciatur, volumus ac iubemus clementiſſime, vt iſta pecunia ſemper, quum eam popoſcerit Academiae Praeſes, aut illo abſente Cancellaria academica, nulla interpoſita mora erogetur. Quibus autem modis ſeſe academici viri et in reliquis rebus gerere debeant, monſtrabunt leges academicae, quas quidem Nos clementiſſime comprobauimus.

Quocirca omnes qui Noſtro Imperio ſubiecti ſunt, quum generoſi, tum

cete-

ceteri, cuiuscunque demum ſint conditionis atque ordinis, ſolis capite cenſis exceptis, admonentur, ne negligant neue vereantur liberos ſuos atque neceſſarios Academiae tradere, inſtruendos liberalibus artibus atque doctrina ciuilium rerum, quo Nobis et reipublicae fiant vtiliores. Imbuentur autem iis artibus, earumque ſcientia rerum, ad quas quemque naturalis fert propenſio, nullam inſtitutionis ſoluturi mercedem, cautione tamen ea, vt alimenta et ceteras neceſſitates ſibi proſpiciant ipſi. Senatum autem Noſtrum volumus mandatum hoc Noſtrum curare diligenter.

Tabulis authenticis *Imperatoria Maieſtas* ſubſcripſit nomen infra poſitum

ELISABETA.

Villa regia, a. 1747. Iul. 24.

LEGES

LEGES
IMPERATORIAE SCIENTIARVM
ET ARTIVM
ACADEMIAE PETROPOLITANAE.

Longam de vtilitate liberalium diſciplinarum et artium in regnis rebuſque publicis inſtituere orationem ſuperuacaneum videtur; neque tamen alienum fuerit docere, qua potiſſimum via eae tractari et in patriae commodum conuerti debeant. PETRVS *Magnus* glorioſiſſimus *Ille* Ruſſorum *Imperator*, iam ſuo aeuo ad vtramque, quum ſublimiorum diſciplinarum tum ingenuarum artium, Academiam formandam, animum adpulit, et quae de inſtituenda Scientiarum Academia propoſita fuerant, publica auctoritate ſanciuit, dilato interim Academiae artium ſtabiliendae conſilio. Ceterum auſpiciis glorioſiſſimae Ruſſorum *Imperatricis* CATHARINAE, etſi fundamenta ſatis firma vtrique propoſito tenendo videbantur poſita, tamen nondum tanto ſatis dignos inſtituto vel Scientiarum vel artium Academia tulit fructus, legum videlicet ignara, necdum certa formula conſtituta, quid cuique ſequendum, quidue fugiendum, quaenam cuiusque conditio, quiue aut quanti ſumtus in quemque erogandi eſſent. Quibus incommodis haud dubie PETRVS *Imperator*, ac poſt Eum CATHARINA *Imperatrix* obuiam iſſent ipſi, niſi morte praeuenti fuiſſent.

ACADEMIA DVAS CONTINET CLASSES, QVARVM ALTERA SVO SIBI NOMINE ACADEMIA, ALTERA NOVO VOCABVLO VNIVERSITAS ADPELLATVR.

1.

Superiore ſignificatione Academia eſt coetus doctorum hominum, qui de rerum natura et effectibus omnium, quae ſunt in hoc Vniuerſo corporum, inquirere, et quae ipſi norunt, aliis demonſtrare, denique maturiores ingenii foetus in lucem edere ſatagunt. Igitur dignus Academia vir non contentus eſt cognitione rerum iam inuentarum, progreditur vlterius, praeclari alicuius inuenti auctor ipſe, vel certe particeps. Ex quo adparet, academicos viros indefeſſo ſtudio teneri vel adnotandi, quae ſunt memoratu digna, vel legendi idoneos ſcriptores, vel componendi libros. Neque vero, qui ſe totum in hac cura conſumſerit, erudiendae vacare poteſt iuuentuti. Sunt igitur Academici, docendi muneris expertes, niſi ſi quos habeant penes ſe Adiunctorum vocabulo inſignitos, aut ſtudioſos peculiari ſuae curae traditos: ſunt item Profeſſores Vniuerſitatis, qui docendi munus ſuſtinent; de quibus inferius, quum de Vniuerſitate ſermo erit, agetur. Ceterum ſi neceſſitas exigat, non alienum exiſtimabit ab inſtituto Academicus, et Vniuerſitati operam ſuam commodare; modo ne talis cura eum ab aliis iisque grauioribus negotiis auertat. Iudicium et cura totius negotii penes Academiae Praeſidem eſto.

2.

Nemo eſt, opinor, qui inſitias ire audeat, homines peritos curſus coeleſtium corporum, et nauigationis et Geogra-

graphiae, quum terrarum orbis, tum patriae ſuae, cuiuis regno magno eſſe et adiumento et ornamento. Igitur in republica academica prima claſſis eſt Aſtronomorum et Geographorum. Sunt enim ii, quorum ex ſcholis prodire ſolent rerum maritimarum peritiſſimi, qui non ſolum terraſque tractusque maris, coelumque profundum deſcribere, ſed et interdum vincula rerum perrumpere, nouoſque, ſi fortuna adſit, nobili auſu et felici ſucceſſu detegere orbes queant.

3.

Quamuis Ruſſorum Imperium ſolum habeat herbis, plantis, lapidibus, ſalibus, metallis gignendis prae aliis terris longe foecundiſſimum, atque adeo multa quum in viſceribus, tum in ſuperficie terrae deprehendantur, quibus curioſi naturalium rerum inueſtigatores ingenia exercere poſſint; tamen multo maxuma hominum pars earum rerum, quarum vberem nobis largitur prouentum, nomina et adpellationes, nedum virtutes et efficacitates ſatis nouit. Igitur opus eſt alia claſſe Phyſicorum, quae quidem conſtabit Botanico eodemque rerum naturalium inueſtigatore hiſtorico, Anatomico item et Chemico.

4.

Etſi ſtatus regiminis politici, artes, publicae opificum officinae, exercitus, claſſes, commercia cum exteris, cetera denique in Imperio ſatis ſalua eſſe videantur, tamen vt conſeruentur, quae recte conſtituta ſunt, opus eſt quibusdam adminiculis. Opus eſt, v. g. variis machinis et inſtrumentis bellicis quum pedeſtris exercitus tum vſibus claſſium adcommodatis. Taceo arbitectonicam ciuilem et militarem, *taceo artem fundendi tormenta bellica, repurgationem fossarum, fluminum, et alterius in alterum deriuationem: omitto officinas pannorum quum sericorum tum laneorum, praetereo agriculturam, hortos et innumera alia, quibus eget ciuitas. Quapropter tertiam duabus prioribus adiungi placet, classem videlicet physicam cum mathematica coniunctam, eamque occupabit Academicus, rerum naturam, variosque naturae rerum effectus demonstrans experimentis; itemque alter Mechanicus, cuius partes erunt excogitare varia instrumenta et machinas arbitectonicae quum militari tum ciuili adcommodatas.*

5.

Istas, quas modo recensui rerum naturalium disciplinas, regnis rebusque publicis vtilissimas esse, nemo sanus, opinor, negauerit. Verum sunt nonnulla, quae perfectiorem reddere possint statum Academiae, si addantur, puta, examina ponderis atque mensurae, rerum item naturalium et artificiosarum inter se aequationes. Igitur adsciscendus est, mathesi sublimiori totum qui sese tradidit, cuius partes erunt reliquorum problemata academicorum soluere, et expedire praeterea, si qua forte aliunde missa proponantur explicanda.

6.

Porro requiritur, qui Academicorum res gestas memoriae tradat Secretarius, cuius de officio dicetur infra.

7.

In consortium academicornm ordinariorum recipiuntur et honorarii, quos et ipsos munere Academicorum fungi verum

rum eſt. Quocirca quum ipſis mittentur grauioris paullo momenti heuremata Academicorum, ſententiam ſuam de iis expromere ne vereantur, neue grauentur, quae ipſi commenti ſunt egregia, cum Academia communicare. Quae vt aequiore animo faciant, oſtenditur ſingulis auctoramentum, quod tamen ducenorum ſummam rubellorum excedere non debet. Neque vero plures quam decem eodem tempore cooptari viſum eſt. Et ii quidem, qui ſunt in praeſentia academici honorarii, locum quem tenent, tenebunt. Ceterum Academia id aget, vt deinde ex praecipuis Europae regnis, rebuſue publicis eligantur ſinguli, quorum miniſterio commercium litterarium per vniuerſam Europam vigeat. Praeter iſtos decem, quos dixi honorarios, Praeſidi ſi viſum fuerit, licebit et alios eruditione claros et illuſtres nobilitate viros, quamcunque demum diſciplinam profiteantur, ſiue Ruſſi fuerint, ſiue peregrini; titulo honorariorum recipere, excepto tamen honorario.

8.

Sunt ergo in Academia Scientiarum decem ordinarii, quos abolita Profeſſorum adpellatione, nominari deinde placet Academicos. Sunt praeterea decem honorarii, et ii quidem extra limites Ruſſici Imperii. Hi omnes in id vnice incumbent, vt quae ab natura et arte proficiſcuntur, ad ſummum perfectionis prouehant faſtigium.

9.

Academico adiungitur Adiunctus, ſuo quisque Academico operam praeſtans vicariam. Itaque Academicus curam habebit Adiuncti, et Adiunctus ita ſeſe geret, vt dignus eua-

dat, qui, quum aliquando excesserit Academicus, in eius locum succedat. Praeterea Adiunctus in rebus ad disciplinam suam spectantibus Academico suo erit pro interprete.

10.

Quum tale collegium constet viris eruditione praecellentibus, qui claris ingenii foetibus orbi litterario studia sua dudum adprobauerint, neque tamen alio pacto euocari queant nisi mutua stipulatione, manifestum est, stipendia in eos aequis portionibus conferri minime posse, sed aliis minora, maiora aliis pro re nata dari oportere. Porro quum dignitatis augendae nulla aut exigua admodum sit copia, incommodum istuc munificentia compensandum videtur. Sed arbitrium et ius erogandorum salariorum est penes Praesidem, qui bene meritos vel praemio vel auctiori stipendio afficiet, modo liberalitas ista expensarum modum, qui Maiestatis Imperatoriae *auctoritate constitutus est, ne excedat. Pari modo Adiunctorum alii ab aliis distinguendi sunt; et eorum quidem, qui luxu et inertia torpent, prauitas coërcenda; aliorum autem, qui in rebus gerundis strenuam nauare operam solent, solertia beneficio remuneranda videtur, inprimis si faueant testimonia Academicorum.*

DE OFFICIO ACADEMICORVM ET ADIVNCTORVM.

11.

Academicis, Adiunctis, Vniuersitati, Cancellariae et ceteris, quotquot sunt, Academiae partibus, constitutus ab Imperatoria Maiestate *Praeses auctoritate praeest, omniumque rerum curam, administrationem et regimen tenet. Is*

ante

ante omnia videbit, ne recipiantur, qui nullius ſunt frugis, neue impenſae fruſtra fiant. Ceterum Academia Scientiarum et artium more aliarum in Europa Academiarum ſub auſpiciis et tutela Imperatoriae Maieſtatis et ſub ductu Praeſidis, ab aliis iurisdictionibus libera et immunis agito, nec niſi a Praeſide, aut ſi is abſit, ex Academiae Cancellaria edicta Maieſtatis Imperatoriae accipito.

12.

Adſciſcendi Academici aut ab Academia remouendi poteſtas et iudicium penes Praeſidem eſto.

13.

Et eruditione inſignem et moribus egregium bonumque virum decet eſſe, quicunque locum Academici affectat, ſiue Ruſſorum ex gente fuerit, ſiue aduena. Adiunctorum tamen ex grege nemo niſi ruſſicae gentis eſto. Neque vero quemquam in Academiam, ſiue Academici ſiue Adiuncti partes tuendas poſcat, recipiendum puto, niſi ſpecimen aliquod doctrinae ſuae orbi erudito oſtenderit.

14.

Principio cuiuſque anni, hoc eſt, primis Ianuarii diebus quilibet Academicus in congreſſibus academicis demonſtrare debet, quae qualiaue ſtudia illo anno ſibi propoſuerit pertractanda; et quarto quoque menſe, quum tempus inſtat repraeſentandi ſalaria, codicillis notum facere debet Praeſidi, quid praeſtiterit ipſe, quantosue progresſus fecerit Adiunctus, laborum eius ſocius.

15.

15.

Acroases Academicae singulis dierum hebdomadibus ternae sunto. In congressibus Academici commentationes suas ceteris coram legunto, ordine quo quisque receptus est, et eas quidem ab hora nona ad duodecimam. Si quis dissertationem suam legendo nondum absoluerit, reiiciet eam in proxime sequentem congressum, non exspectato tempore vicis suae. Adiunctis sententias suas expromere libere, vnaque cum Academicis ad eandem mensam adsidere licet.

16.

Quilibet Academicorum id proprie aget, quod suarum est partium: Itaque non opus est, vt v. g. Mathematicorum lineas moretur Botanicus, aut Anatomicus coelum curet Astronomorum.

17.

Nulla heuremata Academicorum, quamuis egregie excogitata, in commentarios Academiae Scientiarum nisi iussu Praesidis referri possunt. Etenim Academicus, nedum Adiunctus, nihil publicorum negotiorum attrectare potest, inuito Praeside, aut, si is absit, Cancellaria.

18.

Vt autem magis ex voto procedant omnia, Academiae Secretarius ephemerides conficiet rerum ab Academicis gestarum; deinde digeret doctas Academicorum commentationes et inuenta, quorum nihil ex tabulario auferri potest sine chirographo; tum commercium litterarium instituet cum viris doctrina praestantibus; postremo ordinabit

omnia

omnia mandata et edicta, quae a Praeside, vel si is absit, ex Cancellaria mittentur. Quae vt commodius fiant, adiungitur Secretario Tabularius.

19.

Et diarium et commentationes Academicorum, denique omnia, quae ex isto coetu in lucem proferuntur, latine aut russice scribi debent; gallica autem germanicaue lingua nihil quicquam publicarum rerum traditor.

20.

Si qua Academico intercesserint negotia cum foro alieno, de istis communicare debet cum Praeside, aut illo absente cum Cancellaria. Neque enim studia Academicorum strepitu ciuitatis aut tumultu forensi disturbari conuenit.

21.

Principio cuiusque anni Praeses per Secretarium publicabit problema, quod erudito orbi soluendum tradet, proposito praemio, quicunque feliciorem prae ceteris solutionem illius argumenti exhibuerit. Tractabuntur autem ista exemplo et more aliarum Academiarum.

22.

Commentationes, et quae quisque Academicorum praeclara excogitauerit alia, Secretario Academiae ipse sua manu adseruanda tradet, syngrapho ab eo accepto. Is deinde cauebit, ne quid horum pereat, neue detrimentum capiat. Si quae facta sunt experimenta in aedibus priuatis, ea institui debent iterum, sed publice, sed prae-

ſente Praeſide, in loco ad talia negotia deſtinato.

23.

De controuerſiis, quae forte inter Academicos exorientur, diſceptabunt modeſte, vt graueis decet viros, qui reuerentiam habent et famae et loci. Eos autem, qui praeter opinionem mutuis ſeſe lacerabunt contumeliis, Academiae Secretarius interpellando ab iniuria cobibebit, ceterum rem integram apud Praeſidem deferet.

24.

Academicorum quotquot ſunt, recens editos ſuae profeſſionis libros legunto. Quocirca ſimulac reſciuerint diuulgatos, poſcere eos ex bibliotheca, et adnotationibus illuſtrare, et quae viſa fuerint alicuius momenti, cum ceteris ſodalibus communicare debent. Et eas quidem adnotationes, dummodo ſit operae pretium, Praeſes in ruſſicum ſermonem conuerti, preloque ſubiici iubebit.

25.

Si quando reſciuerint Academici de nouo aliquo experimento, is, cuius intereſt, frequente Academicorum coetu illud ſub examen reuocare diligenter, rerumque momentis atque ponderibus adcurate penſitatis, in ephemerides, quidquid de toto negotio iudicauerit, inſerere debet.

26.

Praeterea Academici component libros, argumentum artis et ſolertiae ſuae, qui rei ruſſicae et decori ſint et emolumento; et eos quidem libros ruſſice reddi atque imprimi reip. intereſt. Nullus tamen

liber-

liber typis mandari poteſt, quin perlectus ſit totus praeſentibus Academicis omnibus, vel certe iis, quibus id negotii Praeſes dederit; et quum publicandus eſt liber, publicabitur ille perſcripta Praeſidis auctoritate, cui chirographum e regione adponet Secretarius.

27.

Si quid forte ex aliis regionibus huc mittetur reuocandum ſub examen, vel publico teſtimonio comprobandum, de hoc Academici graue, ſincerum atque firmum dabunt teſtimonium, ac rationem iudicii ſui exponent Praeſidi codicillis.

28.

Alienorum hominum, quem non duxerit ipſe Praeſes, aut huius iuſſu Secretarius, coetum Academicorum ingrediatur nemo, ne is quidem, qui doctas ſuas curas atque meditationes cum Academicis communicaturus venit.

29.

Conuentus Academicorum ſolennes quotannis terni ſunto. Binae in illis conuentibus praeleguntor diſſertationes, altera earum latino, altera ruſſico ſermone. Ipſi ſuorum ex numero eligent, quos quidem cenſent ad tale negotium maxime idoneos. Latinam tamen diſſertationem reddi prius ruſſice, eamque typis imprimi et inter auditores diſtribui oportet, quam in conuentu ſolenni legatur. Primus quiſque conuentus immortali PETRI *Magni, Academiae Fundatoris memoriae ſacer eſto, idemque primis Ianuarii diebus habetor: alius immortali* CATHARINAE *Imperatricis memoriae, primis Maii diebus dicator: ter-*

 tius

tius conuentus indicitor , quum praeterierit dies festus , memoriae Sachariae vatis sacer et ELISABETAE.

30.

Primum inter Academicos locum in conuentibus occupat Praeses. Inter ceteros , qui prior in Academia prouinciam capessiuit , is et priorem in consessibus Academicorum locum obtinet.

31.

In cognoscendis causis quae ad incrementa pertinent rei litterariae , quod maior Academicorum pars iudicarit, id ius ratumque esto ; quae tamen coram Praeside fieri debent omnia. Quod si is absit , tum vero rei litterariae causas tractat et cognoscit Academicorum senior.

32.

Circa finem Nouembris mensis Secretarius publicabit cum interpretatione russica capita omnium , quae per annum vertentem factae sunt dissertationes , quibus callidas adiunget epicriseis suas.

33.

Praeses , quae in Academia instituta rite sunt , ea quam maxima potest cura tueri debet. Quum primum conuenerint Academici , repraesentandae sunt istae leges coram , quarum exemplum semper penes se habebit Secretarius , ne quis obtentum quaerat , quasi nesciat.

FRVCTVS , QVI PROVENIVNT EX INDVSTRIA ACADEMICORVM.

34.

Si quando , qui rebus Imperii administrandis praesunt , poscent Academiam Scientiarum vel formam operis alicuius,

vel

vel inuentionem machinae, vel nodorum paullo difficiliorum solutionem, vel notitiam rerum quae vel ad Geographiam, vel ad Nauigationem, vel Botanicen, vel Chemiam pertinent; denique si qua sint alia, quae vel maritimarum, vel rerum vrbanarum tribunal requirat, aut quae rebus metallicis, aut salibus, aut agriculturae, aut aliis rebus perficiendis conducant; ea Praeses curabit omnia, Academicorum ex numero sine mora destinando talibus negotiis maxime idoneos, qui quidem indefesso studio operi intenti, quicquid praestiterint, Cancellariae indicabunt: Ast Cancellaria, more inter tribunalia recepto, omnem cum illo, cui opera Academicorum vsus fuerit, tribunali rem communicabit. Porro quaecunque praeclara, ornandis vel ciuilibus, vel rebus militaribus excogitauerint Academici, ea Praesidi aperient, aut quum is absuerit, Cancellariae, quae quidem nulla interposita mora, quo debent loco, reddenda ea curabit.

35.

Euenit interdum, vt peregre arcessendus videatur homo aliquis, qui certis negotiis vel in tribunali rerum maritimarum, vel alibi praeficiatur. Quem si arcessant ipsi, periculum est ne fugiant, vt aiunt, praeter casam. Petent ergo rite et more tradito ab Academiae Cancellaria, quae, si praesto sit indigena, eum tradet; sin minus, rectius talem hominem euocabit ipsa. Huius etenim est scire, quibus ex locis idonei rebus gerendis homines acciri debeant.

ALTERA ACADEMIAE PARS QVAE EST VNIVERSITAS.

36.

Neque vero Russia hoc vno contenta est, vt alat viros eruditione claros, quorum ex industria nonnullos fructus capiat; id potius agit, vt perpetuo habeat viros dignos, qui in aliorum locum, si opus sit facto, sufficiantur, maxime iuuenes. At quum Academia in praesentia sine ope maximam partem alienigenarum sese tueri vix possit, in reliquum autem tempus constare debeat tota indigenis, idcirco cum Academia coniungitur pars ea, quae vocatur Vniversitas.

37.

Vniuersitas est frequentia hominum partim docentium, partim discentium. Illi Professores, hi studiosi vocitari consueuerunt. Professores non linguas docent, sed doctrina rerum imbuunt. Igitur studiosos par est latine iam scire, vt Professorum lectiones intelligant, quae non nisi latino aut russico sermone tradentur. Horum triginta maxime idonei et in latina lingua exercitati ex ludis litterariis, quibus ex locis visum fuerit Praesidi, exciti nomina profitebuntur apud Academiam, publicaque largitate sustentabuntur et gratuitis habitationibus, separatis quidem illis, sed tamen intra eosdem penates. Atque vt iste numerus constans sit et perpetuus, instituitor Gymnasium, in quo adolescentulorum viginti publicis Academiae sumtibus alantur. Et eorum quidem qui sunt strenui, in supplementum Academiae studiosorum scribuntor; alieniores a musis per officinas Academiae artium disperguntor. Numerus discipulorum et studiosorum, in quos publica erogantur stipendia, constituto maior ne esto.

Nam

Nam ceterorum qui ſponte ſua veniunt, ſuo aere litterarum ſtudiis vacaturi, numerum definire haud ſane libet. Ceterum pro inſtitutione poſcendi aliquid neque Academici, neque Profeſſores neque Praeceptores quicquam iuris habent.

38.

Forma Vniuerſitatis ad exemplum ceterarum in Europa Vniuerſitatum dirigitor. Aperiuntor ante omnia ſcholae, in quibus doceantur a praeceptoribus linguae, latina, graeca, gallica atque germanica. Ex ſcholis transſcribentur in Academiam ſtudioſi, imbuendi a Profeſſoribus diſciplinis, quae vel latino vel ruſſico ſermone tradentur. Diſciplinarum claſſes ſunto tres, Mathematum, Phyſices et Humaniorum.

39.

Si diſciplinarum ratio ita conſtituta eſt, adparet, virorum eruditione praeſtantium in Ruſſia copiam etiam nunc deſiderari. Huic incommodo medebitur Vniuerſitas, quae ſufficiet viros, quibus non ſolum academica, ſed et alia longe grauiſſima negotia committi tuto poſſint. Neque enim eruditio cuiquam erubescenda, immo vero maximae laudi ducitur, eſſe in omni ſtatu tam militari quam ciuili, domi foriſque ruſſicae gentis viros doctrina praeſtantes, rebus gerendis idoneos.

40.

Quapropter et ex Academia equeſtri, ſi qui ſunt, qui politicarum ſtudio rerum exerceri cupiunt, ad vniuerſitatem mittendi ſunt, iis inſtituendi diſciplinis, quae apud ipſos non tractantur. Quo facto et Profeſſores negotium habe-

habebunt, neque locus excusationi relinquetur, quasi nemo sit, in quo erudiendo animum habeant occupatum.

41.

Ad Vniuersitatem omnibus, quibus ingenii vigor inest, cuiuscunque demum sint conditionis, aditus patet, solis capite censis exceptis. At si qui istorum ante recepti tirocinii rudimenta iam posuerunt, eorum opera Academia et in reliquum tempus vtetur. Generosos publicis Academiae sumtibus ali non placet, nisi forte eos, quibus est res familiaris tenuior. Iidem, quum in examine solenni Academicis adprobauerint profectus suos, eandem ac Academiae equestris iuuenes spem apiscendorum honorum habent. Quilibet eorum, qui se nobiles ferunt, quum nomina dabunt Vniuersitati, repraesentare debent datum ex curia heraldica testimonium, nobilitatis suae indicem.

42.

Qui propriis student sumtibus, ii sui iuris censendi, neque contra voluntatem suam retinendi sunt. At de his, qui sublimioribus sese tradiderunt studiis, ad legitima tribunalia referendum est, vt ad altiores promoueri queant gradus, iique dignitate et loco pares sunto his, qui ordines ducunt in exercitibus.

43.

Inter initia rerum Professores, quamcunque demum profiteantur de rebus coelestibus doctrinam, nullo discrimine admittuntur. Ceterum quum ingrediuntur prima muneris sui spatia, iure iurando obstringi debent, ne vel praeceptis vel consilio auditorum suorum auribus instillent quid-

quam

quam, quod orthodoxae Graecorum confessioni sit contrarium. Praeterea sacerdos aliquis doctrina clarus, ex numero hieromonachorum instruendus est publico Academiae salario, qui singulis Saturni diebus in auditorio magno elementa fidei tradat in catechesibus, simulque operam det, vt diuinae leges et sanctorum ecclesiae patrum tradita ab omnibus obseruentur.

44.

Professores et praeceptores, nec non studiosi et discipuli, siue suis, siue academicis sumtibus in Vniuersitate studeant, legibus obtemperare debent omnes. Eas autem leges condet Praeses ad exemplum aliarum, quae sunt in Europa Vniuersitatum, statuetque, quo tempore et quibus modis ratio docendi et discendi instituenda sit.

DISCIPLINAE, QVARVM SCIENTIA INSTRVVNTVR TIRONES IN VNIVERSITATE.

45.

1. *Institutio latini sermonis, quae quidem fieri debet lingua russica: gallicae et teutonicae linguae vsu in tradendis linguae latinae praeceptis plane interdicitur.*
2. *Poësis.*
3. *Lingua graeca.*
4. *Latini sermonis elegantiae et fundamenta stili cultioris.*
5. *Arithmetica.*
6. *Ars delineandi.*
7. *Geometria et aliae Matheseos partes.*
8. *Geographia, Historia, Genealogia et Ars heraldica.*
9. *Logica et Metaphysica.*

10. *Physica theoretica et experimentalis.*
11. *Antiquitates et historia litteraria.*
12. *Ius naturae et philosophia practica.*

46.

Omnes Praeceptores russica, at Professores latina lingua docento.

47.

Studiosi ad gradus Magistrorum, Adiunctorum, Professorum, et Academicorum promoueri possunt, ex more et consuetudine recepta in Vniuersitatibus. Sed de his plura dicentur in legibus Vniversitatis, quas Praeses promulgabit.

48.

Ordo disciplinarum est talis: primo addiscenda est lingua latina, vt quiuis auctor classicus facile et sine cunctatione intelligi possit, eodemque temporis tractu incumbendum est in studium graecae linguae, et geographiae, et historiae et arithmeticae. Quum iam discipuli in gymnasio tantos progressus fecerint, vt lectiones latine propositas intelligere possint, tum vero transscribendi in Vniuersitatem et institutioni Professoris Eloquentiae tradendi sunt, qui exorsus ab arte poëtica deinde perget ad institutionem Rhetoricae latinae. Rhetorices russicae praecepta separatim tradi neutiquam opus est; latinae enim eloquentiae regulas qui nouit, eas ad cuiusuis alterius linguae vsum adcommodare facile potest. Itaque neque tempus frustra perdendum, neque ingenia tironum superuacaneis disciplinis oneranda videntur. Rhetoricis exercitationibus interponi potest gallicae linguae, aut si cui cordi est, delineandi studium. Quibus absolutis audient studiosi lectiones logicas et metaphysicas;

tum

tum incumbent in ſtudia phyſices theoreticae et experimentalis, cum quibus coniungent hiſtoriam, primo ciuilem, deinde litterariam, poſt genealogiam, tum heraldicam, poſtremo philoſophiam practicam. Neque vero iſtae diſciplinae confuſe et quaſi per ſaturam, ſed ordine et ſigillatim tractandae ſunt, inprimisque cauendum, ne tenera ſtudioſorum ingenia pluribus ſimul propoſitis diſciplinis obruantur. Promouendi autem et in aliarum diſciplinarum inſtitutionem tradendi ſunt, quum praeceſſerit examen.

49.

Poſtremo Praeſes quarto quoque menſe, poſtquam certior factus fuerit ab academicis, quid praeſtiterint ipſi, quoſue progreſſus fecerint ipſorum adiuncti et ſtudioſi, examinare debet gymnaſii tirones et ſtudioſos Vniuerſitatis, quo ſciat labores docentium et diligentiam ſucceſſusque diſcentium. Tali modo neque ratio publicarum impenſarum neque ſumma Imperatoriae Maieſtatis *munificentia curaque fruſtra erunt.*

DE CANCELLARIA.

50.

Forma Cancellariae edictis Imperatoriae Maieſtatis *ad amuſſim reſpondere debet. Haec eſt ſedes illa locusque, ex quo Praeſes vniuerſo corpori academico moderatur. Ceteros, qui vna cum Praeſide rebus academicis praeficiuntur, ſubliminiores diſciplinas et linguas nonnihil attigiſſe decet, quo rectius intelligant, quid a quoque exigi oporteat. Iidem, quum Praeſes abeſt, coniunctim res Academiae adminiſtrant, eadem auctoritate, qua pollet ipſe, quum coram adeſt Praeſes; ideoque et in conuentibus aca-*

demicis conſeſſus et ſententiae dicendae ius habent. Porro qui praeſunt Cancellariae academicae, cum extraneis pactiones faciunt, et augendi minuendiue ſalaria pro dignitate et meritis cuiusque poteſtate pollent. Praeterea labores cuiusque habent perſpectos, et diligenter examinant, an, quae quisque facit, eo modo faciat, quo facere debet lege pactionis, qua ſemet obſtrinxit: Eorum denique eſt, de rebus ad Academiam pertinentibus communicare cum omnibus, quorum id intereſt, collegiis, ad eorumque manus perueniunt edicta Imperatoria *et libelli memoriales. Vt paucis expediam, quum doctores, tum diſcentes, nihil quidquam quod ad eorum forum non pertineat, ſponte ſua ſuſcipere, ſed omnia ad Cancellariam referre debent, quae quidem cunctarum rerum curam gerendo, rationes aerarii disponet, illudque ſartum tectum, et ab omni incommodo et detrimento ſincerum atque integrum conſeruabit, et quid ex quoque negotio emolumenti naſcatur, cum cura explorabit. Qui rebus gerendis praeſunt, eundem dignitatis gradum tuentur, atque ii, qui in ceteris collegiis iisdem honorum vocabulis vtuntur; praeterque eos in Cancellaria ſunto Secretarius, actuarius, commiſſarius, curator regeſtorum, inſtitor, chirurgus eiusque ſocius et adminiſter, interpres, duo Cancellariae ſcribae rebus ruſſicis, vnus germanicis negotiis curandis; duo item alii, ordinis ſequioris, iisdem ruſſicis, itemque vnus ſcribendis rebus germanicis, et octo amanuenſes.*

BIBLIOTHECA ET CIMELIOPHYLACIVM.

51.

Bibliothecarius ſub regimine Praeſidis praeeſt Imperatoriae

ratoriae Maiestatis *bibliothecae et cimeliophylacio*, *ac secundum hunc is qui vicem eius sustinet. Amborum est ordinare et ornare bibliothecam et cimeliophylacium*, *eaque nouis libris nouaque supellectile instruere. His dicto audientes sunto pictor animalium et plantarum*, *nec non medicamentarius*, *qui conseruabit anatomica et alia vnguentariorum praeparata*; *item duo interpretes*, *quorum alter germanica russice*, *alter russica germanice reddere sciat*; *et hi quidem quum propter litterarum*, *res per Europam gestas continentium*, *tum propter aliorum scriptorum*, *quae publicae luci exponi debeant*, *interpretationes.*

52.

Quum magna adhuc sit penuria, *in bibliotheca librorum*, *rerum in cimeliophylacio*, *curiosorum hominum perlustratione dignarum*, *huic incommodo minuendo destinatur quotannis ex reditibus bibliopolii summa binorum millium rubellorum*: *ad coëmendos autem varios cimeliophylacio necessarios adparatus*, *puta spiritum vini*, *vitrea*, *camphoram et id genus alia*, *statuenda est certa pecuniae summa*, *quam quidem in alios impendere sumtus nemini licet.*

53.

Denique certa pecuniae summa constituitur botanico horto et laboratorio chemico tuendis, *comparandis item variis*, *quibus vsus est in astronomia*, *physica experimentali et aliis disciplinis*, *instrumentis*, *et ceteris rebus necessariis*, *postremo tribuendis praemiis*, *quibus donantur homines ingeniosi et eruditi*, *de quibus supra art.* 21. *facta mentio est.*

ARTES.

TYPOGRAPHIA.

54.

Typographiae ſunto duae, quarum in altera exoticarum, in altera ruſſicae linguae libri imprimantur. Vtrique praepoſitus eſt prouiſor, qui cunctorum operariorum curam gerit, videtque vt eorum quilibet ſua cum ſtudio agat atque cura. Ac ne quid fraudis maliue doli proficiſci posſit ex operis, idem ille prouiſor typos, formas, prela quam diligentiſſime cuſtodiet. Sed de his ampliora ſeparatim dabuntur mandata. De numero autem et conditionibus iſtorum libellus, qui ſtatum Academiae continet, plura tradet.

BIBLIOPOLIVM.

55.

Bibliopolio praeficitur prouiſor, cuius eſt cum transmarinis bibliopolis ſocietatem commercii epiſtolaris de libris venalibus iungere, et curare rationes accepti et expenſi. Huic duo adiunguntur ſocii, qui libros in taberna libraria ordinent, eosque mundos terſosque praeſtent, diſponant item exemplaria, et librorum emtionem ac venditionem in codicem referant. Bibliopolii ratio ad morem et rationem bibliopoliorum, quae ſunt apud exteros, exigenda, et de acceptis et expenſis, item de numero librorum vni Cancellariae ratio reddenda videtur; hoc enim loco moris, qui in collegio rerum maritimarum obtinet, ratio haberi nulla poteſt; fieri enim nequit, vt conſtans libris pretium ſtatuatur; praeterea venditio librorum variis fit modis, vt taceam auctorum et editionum diuerſitatem, quae pene innumera eſt.

ARS FVNDENDI TYPOS.

56.

Horum numerum, quo minor definiri in Academia non potest, et conditionem libellus statum academicum continens, demonstrabit.

ARS COMPINGENDI LIBROS.

57.

Refertur et de his in eodem de statu Academiae libello. Neque vero Academiae tantum, sed et omnibus Imperii locis, ex quibus pueri discendae huius artis causa mittentur, eorum opera vtilis est.

ARS IMPRIMENDI FIGVRAS AENEAS.

58.

Numerus et munia horum in eodem libello designantur.

ARTIFICES ET OPIFICES ALII.

59.

Architectus, tres caelatores, quorum hic imaginibus, ille regionibus, iste litteris aeri incidendis inseruiat, pictor idemque inuentor, mechanicus fabricandis instrumentis mathematicis, item alius barometris faciendis, concinnator horologiorum, faber ferarius et cum dilatore tornator. Habebunt ii adiutores singuli singulos, singulosque aut binos discipulos, secundum normam libelli, qui statum continet Academiae. Merces et auctoramentum eis statuetur pro ratione meritorum.

60.

Ex quibusuis Imperii locis ad quascunque artes aut opificia perdiscenda recipiuntur discipuli gratis; at sustentationis

tationis et alimentorum, a quibus traditi ſunt, hi curam habebunt.

61.

In officinis operariorum vſus eſt variis adparatibus; itaque praeficitur apothecae inſpector, cui poſtremae ſortis omnium Academiae claſſium mercenarii atque operae parebunt.

62.

Certa ſtatuitur ſumma coëmendis lignis atque candelis in vſum officinarum et ceterorum, qui in academicis aedibus publicis commodis inſeruiunt.

63.

Pari modo ſumma mediocris deſtinatur ſuſtentandis impenſis extraordinariis, coëmendis item chartis, calamis ſcriptoriis, atramento, cerae ſignatoriae et ceteris, quorum adcurata iniri ratio non poteſt: ceterum qui facti ſunt in haec atque huiuscemodi ſumtus, percenſendi et in commentarios referendi ſunt omnes. Leges et mandata omnibus, qui in officinis operam nauant, dabit Praeſes, quo quisque ſciat, quid ſibi faciendum, quidue vitandum ſit.

64.

In manu Praeſidis poſitum eſt, hiſce ſtatutis pro re nata vel aliquid addere vel immutare nonnulla, ſi quidem artibus amplificandis iſta conducere et e republica litteraria eſſe cognouerit; modo ne ea fiant ſine grauiſſimis cauſis. Illud vnum animo eius penitus infixum haerere debet,

an-

annui qui impenduntur in Academiam Scientiarum et Artium ſumtus, conſtitutam conceſſamque ſummam ne egrediantur.

Tabulis authenticis Sereniſſima Imperatrix *ſubſcripſit ſolenni formula*,

RATA HAEC SVNTO,

easque tabulas ſigillo publico muniuit.

* * *

Nunc diſſertationum ab Academicis in priuatis conventibus vi horum inſtitutorum ab an. 1746. praelectarum, breuem exhibemus conſpectum, quem poſtea commentationes ipſae, eo quo recenſitae ſunt ordine, excipient.

MATHEMATICA.

L. EVLERI, DE SVPERFICIE CONORVM SCALENORVM ALIORVMQVE CORPORVM CONICORVM DISSERTATIO.

Varia veterum circa ſectiones conicas et conorum naturam in vulgus nota ſunt molimina, haec autem ad conos rectos ſolummodo, non vero ſcalenos aut alia corpora conica, quorum ſuperficies determinanda erat, ſpectant. Primus, qui derelicta a veteribus argumenta pertractauit, fuit Cel. Varignonus, qui in Cent. II. Miſcell. Berol. lineam curuam exhibuit, cuius conſtructio a quadratura circuli pendet, mediante cuius rectificatione area coni ſcaleni aſſignari queat. Huic diſſertationi magnus Leibnitzius additionem ſubiunxerat, in qua idem negotium per rectificationem curuae Algebraicae ſoluere anniſus fuerat, ſphalma autem, quod in ſolutionem hanc ingenio Leibnitziano alias digniſſimam et maxime aeſtimandam, inaduertentia viri alias ſagaciſſimi irrepſerat, illam inutilem plane reddiderat.

Propoſitum igitur fuit Cel. Eulero, ſuperficiem coni ſcaleni, ope rectificationis lineae algebraicae exhibere; porro, explanationem ſuperficiei cuiuscunque per lineam curuam algebraicam abſoluere, et lapſum ſummi emendare Leibnitzii. Id quod abunde praeſtitit, dum non ſolum fontem aperit e quo conſtructio curuae Varignonianae fluit, ſed et methodo Hermanniana docet, quomodo ſcopus, quem Varignonius et Leibnitzius ſibi propoſuerunt, obtineri poſſit, et loco curuae, cuius arcus ſuperficiei conicae non eſt proportionalis, ſed qui perpetuo quadam quantitate algebraica augeri aut minui debet, aliam aſſignari docet, quae ſine aſſumta alia quantitate ſuperficiei conicae portionem quamuis metiatur.

Expeditis ſic conis ſcalenis, conos quoscunque conſiderat, qui formantur dum linea recta per verticem perpetuo tranſiens, circa lineam quamcunque circumducitur, harumque ſuperficiem, variis modis inueniri poſſe docet.

Tandem conſtructionem Leibnitzianam elegantiſſimam emendare aggreditur, in quo peculiari modo procedit, et fuſe demonſtrat, non ſolum quomodo illa inuenienda ſit, ſed et, quod praecipuum erat, curuam Leibnitzianam ſi in rectam quampiam conſtantem ducatur, praebere ſuperficiem

ciem conicam quaesitam, sed quae antea portione quadam minui debeat.

Sicque Celeberrimus auctor constructionem Leibnitzianam emendatam, ad conos, quorum bases sunt figurae quaecunque, extendit, eamque reddidit vniuersalissimam.

L. EVLERI THEOREMATA CIRCA DIVISORES NVMERORVM.

Doctissima haec dissertatio ita comparata est, vt ab harum rerum intelligentibus legi oporteat, quibus proin ieiuna quaedam recensio parum, ceteris autem lectoribus nihil commodi allaturam esse persuasi sumus. Introitus autem viri Celeberrimi in hanc dissertationem meretur, vt hic in conspectum producatur. Scilicet, summos semper Geometras agnouisse asserit, plurimas in natura numerorum praeclarissimas absconditas esse proprietates, quarum cognitio fines matheseos non mediocriter esset amplificatura, tametsi iis, qui eas ad Arithmetices elementa referant, aliter visum nec creditum sit, iis aliquid inesse, quod vllam sagacitatem aut vim analiseos requirat. Hic Fermatium, insignem Geometram testem adducit, qui diligentius in hoc genere versatus, plurima huiusmodi theoremata produxit, quorum veritas euicta videtur, quamuis eius lateat demonstratio.

Sicque vtique attentionem meretur, quae porro proponit in mathesi pura, in Arithmetica scilicet, quae tamen prae reliquis matheseos partibus maxime pertractata et perſpecta haberi ſoleat, dari tales veritates, quas cognoſcere, non autem demonſtrare valeamus, cum nulla in Geometria occurrat propoſitio, cuius veritas ſiue falſitas firmiſſimis rationibus euinci nequeat.

Porro demonſtrat in Arithmetica, vbi numerorum natura perpenditur omnium abſtruſiſſimas contineri veritates, quoniam veritas eo magis abſtruſa cenſenda, quo minus ad eius demonſtrationem aditus pateat.

Nec eum moratur ſummorum mathematicorum auctoritas, veritates huiusmodi prorſus eſſe ſteriles et haud dignas, in quarum inueſtigatione opera collocetur, quandoque pronuntiantium. Quoniam praeter quod omnis cognitio veritatis per ſe excellens ſit, etiamſi ab vſu populari abhorrere videatur, etiam veritates omnes, quas nobis cognoſcere licet, ita inter ſe eſſe connexas, vt nulla ſine temeritate tanquam prorſus inutilis repudiari poſſit. Accedit ſi vel maxime propoſitio quaedam demonſtrata nihil ad vtilitatem praeſentem conferre videatur, quod tamen methodus, qua eius vel veritas vel falſitas eruitur plerumque viam ad alias veritates vtiliores cognoſcendas patefacere ſoleat.

Haud ergo inutiliter operam ac ſtudium in indagatione demonſtrationum quarundam propoſitionum ſe impendiſſe confidit Cel. auctor. quibus inſignes circa diuiſores numerorum proprietates continentur.

Neque enim hanc de diuiſionibus doctrina omni carere vſu, ſed nonnunquam in Analyſi non contemnendam praeſtare vtilitatem affirmat. Non dubitat porro vir Cel. methodum ratiocinandi, qua vſus eſt, in grauioribus

oribus aliis inuestigationibus aliquando non parum subsidii afferre posse.

Propositiones quas hic demonstratas exhibet, diuisores numerorum respiciunt in hac formula $a^n \pm b^n$ contentorum, quarum nonnullae iam ab ante memorato Fermatio sed sine demonstratione sunt publicatae.

De cetero omnes Alphabeti litteras hic constanter numeros integros indicare monet.

Ex reliquis elegantibus meditationibus breuiter notamus, demonstrationem Theorematis quinti sibi peculiarem esse, prouti §. 20 ipse adserit Cel. auctor.

Porro quod §. §. 24, 28, 31, 32 et 38 compendia quaedam insignia adducat, quodque citato §. 32 problema difficillimum Fermatii, qua numerus primus dato maior quaerebatur, adhuc manere insolutum affirmet, et tandem, quod veritates nonnullas, quas nosse, non autem demonstrare licet, §. 59 et *69* et alias nondum ex omni parte demonstratas §. *63* et *66* adducat.

L. EVLERI VARIAE DEMONSTRATIONES GEOMETRICAE.

In hac dissertatione vir Celeberrimus non solum theorema quoddam a Fermatio Geometris demonstrandum propositum, sed et nonnulla alia de areis trianguli et quadrilateri circulo inscriptis, praesertim autem theorema quoddam circa naturam trapezii demonstrat, quod et a nonnuliis aliis Geometriae amatoribus, quibus vir Celeberrimus idem proposuerat, demonstratum esse nouimus.

e 3 Fatetur

Fatetur Celeberr. auctor theoremata haec primo intuitu nihil difficultatis inuoluere videri, earumque veritatem per analysin haud difficulter agnosci. Sed longe aliter se rem habere, si ab iis, qui artis analyseos expertes sunt intelligi debeant, quem in finem memoratus Fermatius eiusmodi demonstrationem geometricam requisiuerit, quae more veterum Geometrarum sit adornata, quae ab iis etiam qui analysi non sint adsueti intelligi possit.

Rem igitur aggressus vir Celeberrimus omnium horum theorematum demonstrationes pure Geometricas tradidit, in quibus nullum analyseos percipiatur vestigium, quae ita comparata sunt, vt hic recenseri non commode possint et a Geometriae cultoribus in ipsa dissertatione legi debeant.

L. EVLERI DE PROPAGATIONE PVLSVVM PER MEDIVM ELASTICVM.

Arduam sane materiam, quae tamen in Physica simul maximi est momenti, sibi pertractandam sumsit vir Cel. dum in propagationem pulsuum per medium elasticum inquirere conatur, siquidem hac theoria inuenta, quae circa soni et luminis propagationem occurrunt phaenomena, simul cognita erunt et exacte determinata.

Hinc ad resoluendam hanc maximi momenti quaestionem viam sternens ex primis principiis mechanicis, a casu simplicissimo orditur, vnicam prticulam solummodo considerando, et tandem inuenit, eam circa punctum medium

medium alternis motibus inſtar penduli motum iri, huncque motum perpetuo eſſe duraturum, niſi quatenus a reſiſtentia diminuatur.

Hoc caſu facillime expedito §. 8 duo corpuſcula conſiderat, hic autem, quod bene notandum, motum inuenit a priori maxime diſcrepantem, neque amplius oſcillatorio motui ſimilem, qui ob hoc ipſum et multo difficilius definiri poſſit.

Fatetur tamen ingenue inuentionem numeri accuratam, quo celeritas propagationis pulſuum per quoduis medium elaſticum definiatur, maxime eſſe arduam, nec ſine inſigni amplificatione doctrinae ſerierum expectari poſſe. Methodum tamen, qua Cel. Newtonus ad propagationem pulſuum vſus ſit, non parum eſſe elegantem, et tametſi a rigore Geometrico valde abhorreat, pro idonea approximatione haberi poſſe, qua occaſione, quomodo per experientiam valoris deſiderati proxime determinari poſſint declarat.

Simulque docet, ſi veri valores non exactiſſime inueniantur, nos tamen modum, quo pulſus per medium propagentur elaſticum, ſatis clare perſpicere poſſe, et in diverſis fluidis elaſticis, celeritates, quibus pulſus per ea propagentur, eſſe in ratione ſubduplicata compoſita ex directa elaſticitatum et inuerſa denſitatum affirmat.

Haec tamen iam aliunde conſtare dicit, et a Newtono firmiter iam eſſe demonſtrata, quoniam ad hoc non opus ſit, vt ipſa ſingularum particularum fluidi elaſtici agitatio ſit perſpecta.

Tandem ex iis quae ſupra allata ſunt de motu vnius particulae oſcillatorio, duarum autem ſeu plurium parti-

culárum

cularum non amplius oſcillatorio, ſed eo magis ab eo diuerſo, quo numerus particularum maior, intelligi aſſerit, ſonum neutiquam eo modo quo nonnulli eximii viri volunt, per aërem propagari, qui ſtatuunt, cum chorda, ſiue aliud inſtrumentum ſonorum impellitur, dari in aëre eiusmodi particulas, quae ſimilem motum oſcillatorium excipiant, eoque organum auditus excitent.

Cum autem vir Cel. iam in tractatu ſuo de lumine et coloribus plura alia incommoda oſtenderit, quibus haec laboret ſententia, ex hac diſſertatione patere ait, quod nequidem cum vera theoria pulſuum per medium elaſticum propagatorum conſiſtere poſſit, ſicque per eandem diſſertationem corroborata eſt ratio propagationis pulſuum, quam in ſcripto memorato fuſius expoſuerat Celeberrimus auctor.

L. EVLERI, EXAMEN ARTIFIICII NAVES A PRINCIPIO MOTVS INTERNO PROPELLENDI, QVOD QVONDAM AB ACVTISSIMO VIRO IACOBO BERNOVLLI EST PROPOSITVM.

Quae ante biennium Geneuae edita ſunt opera Iacobi Bernoulli continent inter alia ſchediasma, cui titulus eſt: *artificium impellendi nauem a principio motus intra ipſam nauem concluſus.* Hoc artificium, cum Celeb. Eulero maxime videretur paradoxon, hunc mechaniſmum diligentius expendere et ad leges motus examinare operae pretium fore putauit.

Equidem haud ignorauit Vir acutiſſimus Bernoulli, actioni reactionem perpetuo eſſe aequalem, e quo ſequiquitur ſi homines aut aliae machinae intra nauim conſtitutae vel maxime eam propellere niterentur, omnes conatus hos irritos fore; putauit autem, hanc veritatem tantum ad vires ſic dictas mortuas, quae ſolis preſſionibus continentur, non autem ad alterum virium genus, quae viuae appellantur, et a percuſſione oriuntur, reſtringi debere.

Dum autem Celeberrimus Eulerus contra plurimorum recentiorum philoſophorum ſententiam (qui ſummum inter vires viuas et mortuas diſcrimen ſtatuunt,) euicerit, hoc diſcrimen omni fundamento carere; hinc veretur, ne motus, quem Bernoullius naui ope percuſſionum imprimere conatus eſt, plane euaneſcat.

Machina autem Bernoulliana propoſita ita ſe habet: in naui conſtitui iubet tabulatum firmum in ſitu ad horizontem perpendiculari quod ſit perfecte elaſticum, puta chalybeum aut reticulatum eo ſaltim in loco vbi ictus recipit. Huic tabulato ſit appenſum pendulum cum annexo pondere, quod ope automati aſcendendo et deſcendendo naui motum quendam imprimere poſſit, ratione habita exceſſus virium viuarum ſupra mortuas, quae vltimae nauem retro pellere debent.

Tametſi autem vim, qua nauis a penduli percuſſionibus propellitur, non multo maiorem calculo inſtituto deprehenderit, altera vi a tenſionibus orta, tamen naui ab ea non mediocrem motum imprimi exiſtimat, vt etiam, aquae reſiſtentiae ratione habita, nauis non contemnendam celeritatem acquirere poſſit, quam in naue roſtrata ſingulis minutis primis ad 260. pedes extendit,

f quae

quae celeritas tanta, vt consueta remigatione vix maior obtineri possit, huicque longe anteferenda, et maximo cum fructu venti loco adhibenda, prouti fusius Celeb. Eulerus ostendit.

Dum autem considerat, hanc vtilitatem nimis magnam esse in re nautica, quam vt diu latere potuisset, praesertim dum non admodum abscondito mechanismo contineatur, et ideo ob ipsam commodorum magnitudinem in suspicionem incurrat, quae adhuc augeatur, quod descriptio huius artificii tantum in opusculis posthumis reperiatur, nec viuente viro sit deuulgata. Hinc admodum probabile videtur virum beate defunctum, nisi de successu felici ipse dubitasset, non celaturum fuisse tantum inuentum, quod omnibus eius reliquis inuentis, etiamsi sint maxima, palmam praeripuisset.

Quapropter nihil se meritis summi viri detracturum confidit, si demonstrauerit, huiusmodi penduli ictibus naui nullum prorsus motum imprimi.

Vt autem inuestigatio effectuum penduli commode peragatur, definire conatur, quantum nauis a pendulo retro agatur, dum descendit per quadrantem, deinde ictum considerat, quo nauis propellitur, motumque, qui naui proram versus imprimitur, exacte determinat et tandem despicit, vtrum nauis postquam pendulum recesserit, motum habeat reliquum antrorsum directum nec ne, et quantus is sit futurus. Et quoniam motus huius reciproci determinatio, si resistentiae aquae rationem habere voluisset, maxime difficilis futura fuisset, haud sine calculo molestissimo expedienda, igitur aliam viam faciliorem

pro-

proponit §. 11. 12. 13. et primo pendulum ſimplex conſiderat, vbi legem conſtanter conſeruat, vt celeritates per radices quadratas ex altitudinibus ipſis debitis et temporis elementa per ſpatiola interea percuſſa ad celeritates applicata exprimat.

§. 18 tandem demonſtrat motum quem percuſſio penduli naui imprimere conatur, proram verſus praeciſe aequalem eſſe illi, quem vires pendulum tendentes, quamdiu deſcenſus et aſcenſus vnus abſoluitur in contrariam directionem generare valeat, ex quo apparet, etiamſi nauis ab ictu penduli propulſionem proram verſus accipiat, tamen totum hunc motum deinceps ab aſcenſu penduli omnino ſublatum iri, et quoniam deſtructio haec poſt ſingulos ictus eueniat nullum omnino motum progreſſiuum naui conciliari poſſe, prouti Celeb. Bernoullius putauerat, per errorem ad id ſtatuendum, inductus, quem in determinatione vis propellentis a percuſſione oriundi commiſerat, quem ipſum errorem Cl. Cramerus eius commentator, probe animaduerterat, non autem ob calculi moleſtiam correxerat.

§. 19 et ſequentibus oſtendit, perfectam hanc virium propellentium et repellentium compenſationem quoque locum habere, ſi pendulum non totum quadrantem ſed et minores arcus abſoluat.

Poſtquam de pendulis ſimplicibus hucusque egiſſet §. 22. pendula adgreditur compoſita, in quibus idem obtinenere affirmat, ita vt hanc aequalitatem perfectam inter vires propellentes et repellentes primis mechanicae principiis adnumerare haud dubitet et tandem concludat, na-

 ves

ves nonſolum hoc modo Bernoulliano propelli non poſſe, ſed quascunque alias machinationes, quae totae naui ſint incluſae, nullique principio externo innituntur, aeque eſſe inutiles, neque nauibus vllum motum imprimere valere.

Quomodo ſtabilito hoc principio problemata, huc pertinentia, ſolutu longe difficillima, ſolui poſſint §. 23. oſtendit, hoc firmiſſime affirmando, in quocunque caſu, perfectam ſemper inter vires nauem propellentes, et eas quae in regionem oppoſitam effectum exerant, fore aequalitatem.

Cuius principii rationem §. 24. ſeqq. affert; qua occaſione memorabile paradoxon mechanicum proponit §. 26. „quod ſcilicet frictio ipſa motus cuiuspiam cauſa eſſe „poſſit, ita vt frictione ſublata nullus plane motus ſecu„turus ſit.„

Haec dum §. 27. ſequentibus ad reſiſtentiam aquae applicat, dubium quod ex ea oriri poſſet, ſoluit et tandem concludit, nullo modo naui ab hucusque deſcriptis pendulis celeritatem conſtantem antrorſum directam imprimi poſſe.

G. W. KRAFFTII DISSERTATIO GEOMETRICA DE PROBLEMATIBVS ALIQVOT CONICIS PER ANALYSIN CONCINNE SOLVENDIS.

Clariſſimus diſſertationis huius auctor viam monſtraturus, quomodo varia problemata conica per Analyſin concinne ſolui poſſint, praemiſſis tribus theorematibus, duo

duo ſequentia ſoluta exhibet problemata, alterum, *datis duabus diametris coniugatis ellipſeos inuenire axes*, et alterum *data vna diametrorum coniugatione inuenire alteram ſub angulo quouis dato.* Speciatim autem circa primum notat, problema hoc, ſi praeter diametros coniugatas perimeter detur, facile ſolui poſſe, prouti *Apollonius* prop. 46 et 47 libr. II. fecerit: quodſi autem non data ſit, prouti obtinet, tunc ſolutionem difficiliorem fore. Interim non negat conſtructionem huius problematis iam in *Pappi* exſtare collectionibus, ſed abſque demonſtratione, quam *Fred. Commandinus* ſupplere haud feliciter conatus ſit, teſtantibus *Greg a St. Vincentio* et *Blondello*, qui in Comm. Acad. Reg. Scient. Gallico idiomate ab Ao. 1666 — 1699 editis idem ſolutum dederit, cum quibus conferenda ſint, quae *Marchio Hospitalius* in libr. II. prop. II. ſectionum conicarum adtulerit.

Interim ſperat Cl. auctor ſi cui placuerit, omnes has demonſtrationes *Vincentii*, *Blondelli* et *Hoſpitalii*, cum illa quam hic dederit, comparare, illum inuenturum, eam reliquas et concinnitate ſuperare et euidentia.

G. W. KRAFFTII DEMONSTRATIONES DVORVM THEOREMATVM GEOMETRICORVM.

Conſueuerunt iam diu primi ordinis Geometrae, ſi nouam quandam demonſtrationem veritatis cuiuſdam inuenerunt Geometricae, propoſitionem ipſam cum amicis

cis, cum quibus ipſis commercium intercedit literarium communicare, vt demonſtrationem eiusdem proprio, vt aiunt, marte, inueniant, ſicque magis confirmetur, ſi a pluribus eadem demonſtratio allata ſit, aut fines amplificentur ſcientiae, ſi nouum vel prorſus aliud fundamentum pro demonſtratione inuentum ſit.

Hinc factum eſt, vt Cel. Eulerus veritatem theorematis, quam in hoc ipſo nouorum Comm. Tomo et quidem § 26. ſeqq. diſſertationis quae inſcribitur, *Variae demonſtrationes Geometricae* ſupra pag. 64 ſeqq. demonſtratam dedit, Cl. Krafftio in literis d. 17 Febr. 1748 proponeret. Quod theorema non modo nouum viſum, ſed et generalitate ſua mirum in modum eidem placuit, hinc praemiſſo quodam lemmate e trigonometria petito, demonſtrationem ab Euleriana tametſi diuerſam non autem minus firmam, propoſiti exhibet theorematis.

Cum autem eodem fere tempore in aliud incidiſſet theorema, Cl. Krafftius quod a *Rob. Smith*, inter opuſcula *Coteſii* ſed ſine demonſtratione editum fuerat, quam quidem alii Geometrae, et inter reliquos Celeberrimus, cuius obitum nunc orbis luget eruditus, dederat *Bernoullius*, ſubtilem tantoque Geometrae dignam, vires ſuas experiri voluit Cl. Krafftius, et ex eodem quod ſupra praemiſerat, lemmate, caſus aliquot huius theorematis deducere, et ſic nobiliſſimo huic cyclometriae atque abſtruſiſſimo theoremati lucem clariorem conciliare, ſimul tamen in quolibet propoſitorum exemplorum caſu rigidiſſime probare anniſus eſt.

PHYSI-

PHYSICO - MATHEMATICA.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE TVBINGAE 1745 et 1746. a *G. W. Krafft factae.*

Exhibuit Vir Clarissimus duabus dissertationibus obseruationes suas Tubingae institutas et quidem in primo dissertationis primae paragrapho instrumenta, quibus vsus est, et reliquas obseruationum circumstantias adducit, quae in dissertatione ipsa relegenda.

§. 2. et 3. Obseruationis altitudinis barometricae maximae et minimae differentiam 1. poll. Lond. 56. Cent. mediamque altitudinem barometri 28^{p}. 58^{c}. nulla habita instrumenti supra *Nicri* fluuii ripam eleuati ratione, quae 60. pedes adaequat, affert. Hinc §. 4. notat 1.) barometri variationem annuam Tubingae longe minorem esse quam est Petropoli, et 2.) variationes menstruas barometri in primis et vltimis anni mensibus plerumque esse maiores, quam in mediis, prouti id idem etiam Petropoli obseruauerat.

§. 5. et 6. Obseruationes exhibet thermometricas easque cum Petropolitanis comparat, notando iis diebus, quibus Petropoli cessauit frigus his iisdem illud Tubingae ortum esse, ita vt fere materia quaedam mota ex nostra regione in illam produxisse id videatur.

Maximum calorem h. 2. et 3. p. m. in diebus aestiuis et calidis, solis radiis libere ad thermometrum allabentibus thermometro Fahrenheitiano gradum 103. Tubingae iisdem sub circumstantiis vno gradu minorem scil. 102. obseruauit. Contra

Contra calorem aëris vmbrosi Petropoli minorem quam Tubingae inuenit scil. Petropoli 83°. Tubingae 89°.

Maximum autem frigus in thermometris Petropoli aëre libero in obseruatorio Imper. ibidem expositis deprehendit 1740. 25. Ian. st. v. 30°. infra 0°. Tubingae autem An. 1745. d. 21. Ian. frigus maxime insolens ibi visum, thermometro Fahrenheitiano saltem 13°. infra 0 monstrante.

§. 7. Nonnulla lucis borealis vestigia obseruata adducit, et §. 8. appendicis loco obseruationes in specu prope Reutlingam haud incelebri institutas et declinationem acus magneticae a tonitrubus et fulguribus mutatam affert, testaturque se praeeunte Grahamio quoque declinationem illam (si exacte ad eam attendatur) singulis horae quadrantibus aliquot minutis primis mutatam deprehendisse.

In sequenti dissertatione, quae obseruationes anni 1746. comprehendit, §. 1 et 2. ex obseruatione maxima et minima barometri quodammodo mutata, differentiam 1^{p}. 71^{c}. et mediam 28^{p}. $50\frac{1}{2}^{c}$. deducit.

§. 3. autem maximum calorem huius aestatis longe lateque per totam Europam feruentissimae, die 25. Iul. 94°. in aëre vmbroso boream versus obseruauit.

§. 4. Varias obseruationes aurorae borealis mensibus Ian. Sept. Oct. Nou. et Dec. institutas affert, et

Tandem §. 5. instar appendicis, locum quendam e Historia imperii Ottomanici a Principe Moldauiae Demetrio Cantemiro conscripta fol. 364. sub Osmanno II. §. 3. citat, e quo verosimiliter probat; anno iam 1620. d. 22. Febr. st. v. spinam illam celestem seu lumen Cassinianum

nianum ibi obseruatam esse, sicque eius epocham quam An. Christi 1659. affigere solent, per 39 annos retrahit.

Ad reliquas huius classis Pyhsico-Mathematicae dissertationes quod attinet, grato animo agnoscimus, quod nobis otia fecerint Clarissimi earundem auctores, dum breuem doctissimorum suorum laborum conspectum ipsi conficere haud grauati fuerunt, idcirco eundem ipsissimis eorum verbis exhibere nulli dubitauimus, idque lectores nostros latere noluimus.

DE QVANTITATE CALORIS, QVAE POST MISCELAM FLVIDORVM CERTO GRADV CALIDORVM ORIRI DEBET COGITATIONES.

Item

FORMVLAE PRO GRADV EXCESSVS CALORIS, SVPRA GRADVM CALORIS MIXTI EX NIVE ET SALE AMMONIACO, POST MISCELAM DVARVM MASSARVM AQVEARVM, DIVERSO GRADV CALIDARVM, CONFIRMATIO PER EXPERIMENTA. A. G. W. RICHMANN.

Calorem quidem fluidorum et quomodo calor fluidi vnius ad calorem alterius fluidi habeat, definire non licet: definiri tamen potest excessus caloris vnius fluidi supra gradum caloris alterius fluidi, et ratio excessuum caloris duorum fluidorum supra gradum caloris constantem. Huic rei inseruiunt thermometra. Si materiae fluidae homogeneae diuersarum temperierum miscentur, media quaedam temperies post miscelam oriri debet in mixto, vel potius medius quidam excessus caloris supra gradum caloris definitum.

Quomodo hic excessus post miscelam cognitis massis singulis et singularum massarum excessu caloris supra gradum caloris conſtantem definiatur, oſtenſum eſt ab auctore in cogitationibus de quantitate caloris, quae poſt miſcelam fluidorum certo gradu calidorum oriri debet. Nimirum ſingularum maſſarum exceſſum caloris ſupra gradum caloris conſtantem multiplicandum eſſe in maſſas ſingulas et ſummam factorum per ſummam maſſarum dividendam eſſe. Hoc ibidem Cl. Krafftii experimentis probatum et nouis ſtabilitum eſt in confirmatione formulae pro gradu exceſſus caloris ſupra gradum caloris mixti ex niue et ſale ammoniaco poſt miſcelam maſſarum aquearum diuerſo gradu calidarum.

INQVISITIO IN LEGEM SECVNDVM QVAM CALOR FLVIDI VASE CONTENTI CERTO TEMPORIS INTERVALLO, IN TEMPERIE AERIS CONSTANTER EADEM DECRESCIT VEL CRESCIT, ET DETECTIO EIVS, SIMVLQVE THERMOMETRORVM PERFECTE CONCORDANTIVM CONSTRVENDI RATIO HINC DEDVCTA. AVCT. G. W. RICHMANN.

Decreſcit calor aquae in aëre frigidiori et creſcit in aëre calidiori aqua. Qua lege hoc fiat inueſtigauit autor idem, et ex multis obſeruationibus quas communicauit in inquiſitione ſua in legem decrementi et incrementi caloris deriuauit, (1) decrementa et incrementa in paruis temporibus aequalibus in genere eſſe, in ratione compoſita ex directa ſuperficierum integrarum, et differentiarum inter temperiem aquae et aëris et inuerſa maſſarum. (2) hinc deduxit, differentias temperierum inter temperiem aquae et aëris, in temperie aëris conſtanti, temporibus ſecundum arithmeticam progreſſionem ſeſe excipientibus, ſecundum progreſſionem geometricam de-

decreſcere. Si. e. g. differentia initio eſt 100, et poſt quinque min. pr. 95. gr. poſt 10. minuta erit $90\frac{1}{4}$ gr. (3) Ex lege decrementi et incrementi caloris etiam deriuauit autor thermometra perfecte concordantia et aeque velocia non obtineri, niſi ſuperficies bulborum Thermometricorum ſint, vt volumina bulborum.

TENTAMEN LEGEM EVAPORATIONIS AQVAE CALIDAE IN AERE FRIGIDIORI CONSTANTIS TEMPERIEI DEFINIENDI. AVCT. G. W. RICHMANN.

Inquiſiuit etiam idem autor in euaporationem, et primo euaporationem ex ſuperficie aquae calidioris aëre examinauit, et inuenit ex obſeruationibus in tentamine ſua definiendi legem euaporationis, quantitates euaporatas in conſtanti aëris temperie eſſe ferme in ratione ſpatiorum Logarithmicae cuius ſemiordinatae exhibent differentias inter temperiem aquae et aëris, ſeſe ſucceſſiue excipientes, et abſciſſae tempora, vel, ob conſtantem ſubtangentem, eſſe vt differentias differentiarum inter temperiem aquae et aëris.

MEDITATIONES DE CALORIS ET FRIGORIS CAVSA. AVCT. M. LOMONOSOW.

Calorem in motu materiae conſtare oſtenditur, §. 1. Motum illum calidis corporibus ineſſe, quamuis non ſemper percipiatur ſenſu, §. 2. Calorem conſtare in motu materiae inteſtino probatur, §. 3. Motum inteſtinum materiae coherentis caloris cauſam eſſe aſſeritur §. 4,

 quod

quod §. 5, confirmatur. Motus inteſtinus triplex indicatur, progreſſiuus, tremulus, gyratorius, §. 6. Calorem conſiſtere in motu materiae coherentis inteſtino gyratorio docectur, §. 7-11. Ad obiectionem reſpondetur, §. 12. Conſectaria nonnulla eliciuntur, §. 13. Theoria ad phaenomena prouocatur, §. 14. Quartuordecim phaenomenis confirmatur, §. 5-25. Quid de intumeſcentia calentium corporum iudicandum ſit innuitur, §. 26. Summum frigoris gradum in orbe noſtro terraqueo non dari ex propoſita theoria infertur, §. 27. Hypotheſis de propria calori materia per corporum poros vagabunda ad examen vocatur, §. 28. Corporibus aucto calore intumenſcentibus acceſſum calorificae alicuius materiae non argui §. 29. et 30; nec incremento ponderis calcinatorum, nec condenſatione radiorum ſolis per inſtrumenta cauſtica, nec denique experimentis circa materiam frigorificam inſtitutis idem euinci oſtenditur, §. 31-33. Quod aetheris officium ſit circa producendum calorem indicatur, §. 34. Frigoris propria materia breuiter refutatur 35.

TENTAMEN THEORIAE DE VI AERIS ELASTICA. AVCT. M. LOMONOSOW.

Poſt inuentam antliam pneumaticam multa quidem in natura aeris detecta, verumtamen cauſa elateris nondum ſatis explicata eſſe cenſetur, §. 1. Hypotheſes viribus centralibus innixae prae reliquis placent, §. 2. Quid in illis deſideretur, aut potius ſuperfluum ſit, oſtenditur

ditur, §. 3. A clara notione elateris aeris explicandi initium capitur, §. 4. Elaterem aeris non ab organicis et compositis quibusdam moleculis, sed a simplicissimis et solidissimis atomis illius proficisci ostenditur, §. 5 - 7. Figura atomis elaterem producentibus sphaerica et superficies asperula conuenientissima esse indicantur, §. 8 et 9. Particulas aeris elaterem producentes non interfuso aliquo fluido, aere ipso subtiliore, sed mutua ipsarum actione a se inuicem pelli docetur, §. 10 - 12. Particulas aeris calore in gyrum actas et asperis superficiebus collisas a se inuicem resilire, indeque elaterem illius pendere probatur, §. 12 - 17. Exemplo explicatur theoria, §. 18 praecipua phoenomena, quae aer exserit, explicantur, eoque theoria proposita magis adstruitur 19. et seqq.

DISSERTATIO DE ACTIONE MENSTRVORVM CHYMICORVM IN GENERE AVCT. M. LOMONOSOW.

Inter abstrusas Chymicorum phoenomenum causas ea solutionis inuestigatione digna inprimis esse iudicatur, §. 1 et 2. Vulgaris explicandi ratio in sola pororum et corpusculorum magnitudine et figura quaesita reiicitur, §. 3 - 6. Ingressum menstruorum in poros soluendorum fieri ob homogeneitatem materiae ostenditur, §. 7 - 10. Propositum indicatur, §. 11 et 12. Phaenomena solutiones comitantia inter se contraria, nempe spirituum acidorum cum metallis incalescentia et aquae cum salibus refrigeratio pro fundamento ponuntur, §. 13. Metalla aëris vi

 elasti-

elaſtica in poris eorum renata ſolui docetur, §. 51 - 27. Veritas experimentis confirmatur §. 28 et 29, et §. 30 - 34, phoenomenis explicatis vlterius probatur. Mathematico calculo denique adſtruitur, §. 35 - 38. Sales in aqua ſolui ſola frictione et confuſione corpusculorum illius cum aqueis particulis ſalium oſtenditur, §. 39 - 47 Solutiones in mediatas et immediatas diuiduntur, §. 48 et 49. Suſpenſarum in menſtruo particularum fit mentio §. 50.

DE MOTV AERIS IN FODINIS OBSERVATO. AVCT. M. LOMONOSOW.

Primo phoenomeni obſeruatio et deſcriptio ex Georgio Agricola proponitur. Tandem §. 1 - 9. definitones cum corollariis exhibentur. Denique §. 10 - 24. oſtenditur, ex diuerſa denſitate aëris fodinarum ab ea quam externus habet, motum hunc naſci, et cum in fodinis aëris calor ſit conſtans, externi vero varius, et quidem maior aeſtate, hyeme minor, reciprocantes fluxiones inde proficisci. Vltimo vſus huius theoriae breuiter indicatur.

DE INSIGNI PARADOXO PHYSICO AERE SCIL. IN 1837. VOLVMINIS PARTEM AQVA GELASCENTE REDVCTO, ET DE COMPVTATIONE VIS QVAM AQVA GELASCENS ET SESE IN MAIVS VOLVMEN EXPANDENS IN SPHAERA CAVA FERREA, BOMBA, DICTA, AD EAM DISRVMPENDAM IMPENDIT, COGITATIONES ET CONSILIVM QVOMODO REPETI DEBEAT EXPERIMENTVM. AVCT. G. W. RICHMANN.

Auctor examinauit quantum paradoxo Haleſii experimento de compreſſione aëris, aqua congelaſcente in in 1837 voluminis partem redacti, tribuendum ſit et concluſit nihil certi hinc deduci poſſe. Simulque in calculo, Cl. de Buffon, qui Cel. Halleſii computationem vis comprimentis aërem emendare voluit, errorem detexit.

TENTAMEN EXPLICANDI PHAENOMENON PARADOXON SCIL. THERMOMETRO MERCVRIALI EX AQVA EXTRACTO, MERCVRIVM IN AERE AQVA CALIDIORI DESCENDERE ET OSTENDERE TEMPERIEM MINVS CALIDAM, AC AERIS AMBIENTIS EST. A. G. W. RICHMANN

Phaenomenon in Obſeruationibus thermometricis paradoxon ſequens occurrit. Si in aëre temperiei definiti gradus ex aqua temperiei paulo minoris gradus thermometrum extrahitur, tantum abeſt, vt aſcendat mercurius in thermometro, vt potius deſcendat modo plus modo minus. Huius paradoxi explicationem aliqualem idem autor ſuſcepit in tentamine explicandi phaenomenon paradoxum ſcil. thermometro mercuriali ex aqua extracto mercurium in aëre aqua calidiori deſcendere, et oſtendere temperiem minus calidam ac aëris ambientis eſt, et viſum eſt ei, materias quasdam in aëre volitare, quarum concurſu et vnione cum cuticula aquea bulbum thermometri ambiente, inter euaporandum, refrigerium oriretur.

SYNOPSIS METHODI NOVAE TVBOS MAIORES TRACTANDI. AVCT. C. G. KRATZENSTEIN.

Cum aſtronomis in obſeruationibus coeleſtibus nihil magis incommodo ſit, quam tractatio tuborum praeſertim maio-

maiorum, licet etiam optimis fulcris Hugenianis, Hirianis etc. vtantur, autori visum est, hocce incommodum non melius posse remoueri, ac si tubus plane immobilis in situ quodam commodo, e. g. horizontali constituatur, et tum radii obiectorum, in vna eademque semper directione fixati quasi, ad tubum deferantur. Exhibita nuper per Cel. S' Grauesande in nouiss. edit. physices machinula quadam incogniti inuentoris, quae ad experimenta optica melius instituenda speculum per horologium in eo semper positu gerit, vt radius solis in cameram obscuram reflexus eandem semper seruet directionem, non dubitauit autor hanc intento scopo suo optime posse accommodari. Describit itaque hanc machinam mutatis nonnullis dispositionibus, prout ipsi scopo astronomico magis conuenire visum fuit.

Huc pertinent loculamentum anterius ex horologio remotum, quia rotarum in illo contentarum vacillatio euitari nequit, et dispositio fulcri, vt totum instrumentum statim in situm obseruationi conuenientem redigi possit. Determinat deinde dispositionem et diuisionem rotarum singularum, quam Cel. S' Grauesande horologipoeorum iudicio reliquit; ostendit denique in quo vsus et commoditas huius methodi consistat.

Spectator nimirum iam ad tubum quoad eius directionem sedet otiosus et quietus, metitur diametros apparentes, delineat maculas, determinat phases et adtendit ad motum vertiginis planetarum, absque quod motus eorum diurnus et progressiuus ipsi vllo incommodo esse possit. Et quis dubitabit ad multa phaenomena e. g. annulum nullum Saturni, ſtrias, Iouis etc. dum quaſi quieſcunt, multo melius poſſe attendi, ac dum motu continuo feruntur et obſeruatorem duplici labore occupatum tenent.

Obiectiones quae contra hanc methodum ex imperfectione ſpeculorum metallicorum fieri poſſent, inde refutat, quia noſtris temporibus actu conſtruuntur ſpecula metallica tantae perfectionis, vt cum optimis vitris obiectiuis de praecellentia certare poſſint.

SVPPLEMENTVM AD DISS. DE VI AERIS ELASTICA. AVCT. M. LOMONOSOW

Cauſa huius ſupplementi proponitur, §. 1. Bernoulliana deductio citatur, elaſticitates aëris in magnis compreſſionibus denſitatibus proportionales non eſſe §. 2. Deinde ad §. 10 vsque ex ruptis vi aquae globis per calculum deducitur conſectarium Bernoulliano geminum. §. 11. - 13. quomodo id cum propoſita ſuperius theora conſentiat, oſtenditur.

PHYSICA.

I. WEITBRECHTII, DE VTERO MVLIEBRI OBSERVATIONES ANATOMICAE.

Quas deſideratiſſimus Collega paucis ante obitum hebdomadibus conuentui exhibuerat obſeruationes Anatomicas, dum recenſere adgredimur, non nobis propoſitum eſt, eas integras hic inſerere; quoniam citra mutilationem vix contractionem pati videntur, ſed ſaltim paucis exponere, quae potiſſimum ex obſeruationibus ſuis circa quatuor cadauera foeminina, mulieris ſeptem menſes praegnantis, duarum vetularum et virginis theatro Anatomico anno 1746. illatis, praeſertim autem circa vterum praegnantem inſtitutis, deduxerit corollaria, quae ſi non noua omnia videbuntur, aliqua tamen cum Cl. Auctore ſperamus fore, quae ad huius partis hiſtoriam amplificandam et perficiendam facere poterunt: ſed ad propoſitum.

§. 1. et 2. Cl. Auctor diſcrimen inter tumorem circa praegnantes et anaſarcodem aut aſciticum eum in finem adducit, quia cautelas quasdam ſuggerit, quae in mulierculis vere an falſo grauidis, ex ſolo habitu externo diiudicandis, obſcurae ſaepe rei, lumen adſpergere poſſunt.

§. 4. Mentem ſuam de diſputatione quae inter artis obſtetricandi magiſtros viget, circa determinationem craſſitudinis vteri grauidarum aperit et phaenomena a ſe obſeruata magis fauere docet ſententiae illorum, qui vterum grauidum attenuari perhibent.

Porro veretur, ne qui a Mauricello diſſentiunt, cauſa ſua cadant.

§. 7. Docet, difficile indagatu eſſe, an vteri interna cauitas ſingulari tunica inueſtiatur, obſeruationes autem ſuas magis illorum ſententiae fauere, qui illam negant.

§. 9. Quomodo cauitas vteri praegnantis et virginei inter ſe differant explicat, huncque non dici poſſe concauum ſ. in eo cauitatem aliquam ſpatioſam, laqueatam, turgidulam non eſſe fingendam, quoniam paries eius anterior et poſterior ſibi ceu planum plano accumbunt

bunt, et ſolo muco interſtinguuntur, ne concreſcant; Ille vero in ampullam expandatur. Hinc praegnantem vterum recte veſicae inflatae, virgineum vero lagenae compreſſae aequiparari.

§. §. 10. et ſeq. quae circa ceruicem vteri, haud exiguam quippe huius organi portionem, obſeruauerit, profert, et exinde §. 14. ſeq. notat, haec obſeruata ad multas veritates viam pandere. Primo ſcilicet exinde aſſertum *Graſii* confirmari docet, qui ſtabiliuit, collum non ſequi dilatationem vteri grauidi, ſed priſtinum fere ſtatum retinere, id quod de mediis geſtationis menſibus intellectum vult. Exinde opinionem eorum confellit qui vteri praegnantis ceruicem ſibi fingunt, ceu vnicum oſculum, annulo quaſi membraneo occluſum, qui paulatim mollior fiat et amplior, donec ita hiet vt foetum transmittere poſſit; hinc a *Deuenter* in novo Lumine Obſt. p. 4. pictam figuram corrigendam cenſet.

§. 15. Exinde apparere ait, quam difficile ſit primis menſibus ex ſolo tactu diiudicare, num foemina praegnans ſit, nec ne, et ex ſolo augmento ceruicis aliquid veri concludere, exercitatiſſimam manum et acutum iudicium requirere, id quod ab obſtetricibus popularibus non facile expectandum ſit.

§. 16. Rationem affert, quare (aliis tamen cauſis neutiquam poſthabitis) mulieres, quae primis vel mediis menſibus abortum patiuntur, doloribus multo vehementioribus et acutioribus diſcruciari ſoleant, quam ſi iuſtum parturiendi terminum attigerint.

§. 17. Ex compreſſa ceruicis figura et muco lento tenaci totam cauitatem et omnia eius foraminula ab vno osculo ad aliud obsidente, recte colligi posse arbitratur, vterum praegnantem perfecte clausum esse, omnemque igitur introitum vel aëri vel alii cuipiam humori denegari nullamque in systemate vermiculari superfoetationem fieri posse,

§. 18. Tandem etiam has obseruationes ad illustrandam historiam ouulorum *Nabothianorum* facere commemorat, suamque coniecturam sequentibus exponit. Quod arbitretur istas vesiculas *Nabothianas* non esse particulas organicas aut constitutiuas corporis animalis, non igitur esse ouula neque etiam esse hydatides morbosas, sed esse corpuscula plane fortuita, maceratione et contrectatione nata. Quam suam coniecturam admodum reddit probabilem et postquam figuras duas (quarum altera vterum ex muliere septimum mensem praegnantis secundum longitudinem apertum, vt cauitas interior laterum, crassitudo et sinus venosi cum directione fibrarum pateant, comprehendit, altera vero ceruicem vteri praegnantis apertam cum portione vaginae sistit,) explicuerat, dissertationi huic eruditae finem imponit.

A. K. BOERHAAVE, HISTORIA ANATOMICA OVIS PRO HERMAPHRODITO HABITI.

Dum Celeberrimus Auctor in dissectionibus cadauerum saepenumero, tam in masculino, quam foeminino sexu institutis, praecipue attentus fuit ad corporis humani, quoad partes externas in genere, speciatim autem ad genitalium et pudendorum diuersitatem, vix vnquam eandem perfecte figuram tam in internis quam externis a se obseruatam ait, licet partes constituentes in genere similes fuerint.

Consuesse quidem plerosque, si pudenda vel defectu vel augmento peccent, et deformationem quandam monstrent de hermaphroditis cogitare, qui an re ipsa dentur, scilicet in vtramque venerem paratos cum foeminis concumbentes et vicissim viros admittentes, nonsolum non determinat vir Clar. (ad negatiuam potius procliuis sententiam) sed et testimonio auctorum suffultus, vehementer dubitat, an tales existant, in quibus vnus sexus praevaleat, addito genitalium alterius quodam supplemento, quoniam hi attentius examinati vltimum hoc deformatum nec peruium, nec ad opus aliquod venereum aut vrinae excretionem aptum, gerant. Hac occasione mentionem iniicit memorabilis historiae quam *Regnerus de Graf*, de puero post mortem puella inuento narrat et quae ipse notauerat circa pauperem foeminam, viginti et vltra annis hermaphroditum a natiuitate declamatam, affert.

His praemissis rariorem illum casum, forsan in historia naturali nullibi notatum commemorat de quatuor hominibus sibiricis ex duobus parentibus natis, eadem exacte genitalium deformatione praeditis, quos occasione descriptionis a Cl. *Gmelino* in Sibiria factae et ad Academiam Imperialem missae, e Sibiria arcessere, operae pretium iudicatum fuit.

Postquam autem paucis diuersas hac de re Academicorum *Gmelini*, *Weitbrechtii* et *Wildii* sententias in prolixioribus dissertationibus expositas, quam vt in

Commentariis locum inuenirent, (quem in finem nec conſcriptae videantur) recenſuiſſet, ſimulque miratus eſſet, quod ad hanc litem componendam, nemo de demetiendo corpore cogitauerit, quoniam conſtat, viri corporis truncum conuergere inferiora verſus, foeminae contra latius diuergere. Bono quodam fortunato accidiſſe ait, quod ouis mas, ob partium genitalium deformationem pro hermaphrodito habitus, ad Academiam allatus ſit, quem obſeruatis in hominibus ſibiricis ſimillimum examinando deprehendit, prouti ex deſcriptione prolixiori huius anatomes, figurisque ad illuſtrationem dictorum aeri inciſis vberius perſpici poteſt.

E qua deſcriptione patere ait, ouem hic pro hermaphrodito habitum verum fuiſſe marem, in quo partes genitales externae defectu peccent; et nihil omnino in his apparuiſſe, quod alterius ſexus ſignum indicauerit, aut additamentum.

Tandem putat, ſi deſcriptio partium genitalium externarum atque harum figura, in oue cum deſcriptione et figuris, quas laudati viri Celeb. de hominibus Sibiricis dederint, comparetur, apparere, has ita inter ſe convenire, vt facile ex inquiſitione Anatomica partium internarum, quam in oue equidem ipſe vir Celeberrimus inſtituere potuit, quod ſupra commemoratis viris in vivis hominibus facere haud licuit, litem de ſexu finitam eſſe. Quodque, vt hic ouis, ita homines Sibirici habendi ſint pro maribus non pro foeminis, quodque mixtus in illis neutiquam ſit ſexus, et immerito illis nomen hermaphroditorum imponatur.

ABR.

ABR. KAAV BOERHAAVE OBSERVATIONES ANATOMICAE

Quinque hac diſſertatione cum lectoribus communicat obſeruationes Cel Boerhaauius, de quibus praeguſtum aliquem dare propoſitum nobis eſt.

Principio monet Cel. auctor fieri forſan poſſe, vt qui hic exponantur caſus, iam alibi ab auctoribus annotati inueniantur, hoc ipſum autem vix euitari poſſe, quoniam inter tot diſſectiones aut luſtrationes cadauerum, quae ipſi offeruntur, plus intentus eſſe debeat in vſum anatomes, aut cauſam mortis inueſtigandam, quam in lectionem variorum librorum; quae autem inſolita ipſi occurrunt, ſe fideliter in aduerſaria in futuros vſus referre ſolere, hinc ſi accidat, vt caſus talis, ex aduerſariis prolatus, ab aliis annotatus inueniatur, veritatis ſimplicitatem eo firmiorem euaſuram ſperat.

Circa cerebrum inflammatum in prima obſeruatione, in latere dextro durae matris itidem valide inflammatae, partem concauam totam ſuccinctam fuiſſe membrana animaduertit, eamque fuſe deſcribit, in medio tamen relinquit, an pars ſit peculiaris in hoc homine connata, an a ſumma inflammatione orta, aut humores craſſiores ſeroſi a vaſibus nimium dilatatis, borea et frigore ſuperueniente, concreti hanc formauerint.

Quae circa cranium militis claſſiarii obſeruata ſunt, vbi ſcutum oſſeum cum dura matre concretum inuenit prolixe ſecunda exponit obſeruatio, quae non ſolum harum cauſam adducit, ſed et alias notatu dignas hac occaſione offert, annotationes et meditationes.

Ter-

Tertia obſeruatio continet cerebri inflammationem in ſuppurationem et gangrenam ſe terminantem, vbi rupta in anteriori cerebri loco vomica mortem ſubitaneam homini ebrio conciliauerit, qua occaſione profert alias obſeruationes, et varios allegat auctores, qui de abſceſſibus intra cranium, inter duram matrem et cranium intra duram et piam matrem et in cerebri ventriculo in ipſaque cerebri ſubſtantia aliquid memoriae prodiderunt, inter quos et Hippocratem adducit.

In quarta obſeruatione occaſione pericardii cum corde concreti prolixe neceſſitatem et praeſentiam pericardii validiſſimis adſtruit argumentis et ſuam autopſiam doctiſſimi aduerſarii autopſiae in elephante diſſecto opponit.

Quinta tandem obſeruatio, quae in cadauere viri in noſocomio maritimo Petropolitano lenta febri enecto notata fuerunt exponit, ſcilicet omnia viſcera abdominis et thoracis vidit inter ſe concreta, ſuo tamen loco diſpoſita, vt nullum plane liberum foret, et omnes has concretiones (vti tunc temporis auditoribus ſe exhibuiſſe teſtatur) fuiſſe per membranas extenſas, quae duplicaturae concretae tenacula effecerunt. Qua occaſione, quam de harum ortu fouet, ſententiam more ſolito, id eſt doctiſſime exponit.

ST. KRASCHENINNIKOW DESCRIPTIONES RARIORVM PLANTARVM.

Quatuor in hac diſſertatione nouarum plantarum ſpecies deſcribit clare doctus D. Adjunctus, quae in horto

horto Academico botanico e ſeminibus ad Academiam miſſis, floruerunt, *Perſicariam* ſcilicet, *Saluiam*, *Lunariam* et *Thalictrum*, copioſeque recenſet, quae circa vegetationem ſingularum obſeruauerit, quae in ipſa diſſertatione relegenda ſunt.

Quod ad *Perſicariam* attinet, nos pro more breuiter notamus, illam ſeptentrionalibus imperii Sinarum regionibus familiarem eſſe, ibidemque ad conficiendum coeruleum pigmentum, *Indigo* dictum, materiam praebere, id quod a Rev. Gaubilo, Academiae noſtrae membro honorario, didiciſſe ſe ſcribit. Addit porro rationem, cur eam Perſicariae foliis ouatis glabris nomine ſalutauerit.

De *Saluia* refert, eam non tantum foliis cordatis obtuſe crenatis, aut ſpicis florum nutantibus, ſed caulibus nudis, ramis cauli approximatis et parallelis, non difficulter a congeneribus diſtingui poſſe.

De natali huius plantae loco ſibi quidem pro certo non conſtare fatetur, auditu tamen ſe percepiſſe ſcribit, eam e ſeminibus a *Cl. Gerbero*, Florae Tanaicenſis auctore lectis, propagatam, hincque credibile eſſe naſci eam in adiacentibus Tanai regionibus.

Lunariam quod ſpectat, quoniam Stellerus eam in America ſeptentrionali maturum iam fructum ferentem legerit, et ſub nomine Leucoii ſaxatilis deſcriptam dederit, idcirco primo Stelleri deſcriptionem ſiſtit, tum ſuam adiicit, partim ad ſupplendam Stelleri deſcriptionem, partim vt appareat, quantum diuerſa ſoli natura vnam eandemque plantam immutare valeat: Rationem deinde reddit, cur Lunariae eam iunxerit et non nouum genus conſtituerit.

Tandem *Thalictrum*, quod e ſeminibus a Stellero in Camſchatka lectis, prodiit, pro noua ſpecie deſcribit, differentiamque eius a congeneribus addit.

ASTRONOMICA.

DE MOTV NODORVM LVNAE EIVSQVE INCLINATONIS AD ECLIPTICAM VARIATIONE. A. L. EVLERO.

Quicunque theoriam lunae breuiter, ſed clare ac perſpicue pertractatam legere geſtiunt, iis diſſertationem hanc Cel. Euleri, nec non ſequentem, quae quantum motus terrae a luna perturbetur accuratius inquirit, merito commendamus. Inſtituti noſtri ratio equidem poſceret, vt praecipua contenta hic exponamus, veremur tamen valde, ne, dum breuiores Cel. auctore eſſe volumus, lectoribus noſtris obſcuriores fiamus, hinc aliquem ſaltem praeguſtum altarum harum ſpeculationum dediſſe, ſontemque ipſum monſtraſſe contenti erimus.

Lunam ſcilicet, corpus inter omnia coeleſtia nobis proximum, cuius diſtantiam ope parallaxeos ſine ſenſibili errore aſſignare valemus, quo ſubſidio circa ſolem, praecipue autem fixas adhuc caremus, motum habere aſſerit vir. Cel. adeo implicatam, totque perturbationibus obnoxium, vt nullis adhuc certis legibus circumſcribi

et

et ope tabularum exacte determinari potuerit, quoniam non in vno eodemque plano, ſicut planetae, motum abſoluat, et eius diſtantia maxima et minima variabilis ſemper et inconſtans deprehendatur. Hinc inaequalitatem eius non ad vnicam aequationem reuocare licuiſſe, ſed plures fuiſſe condendas tabulas aequationum, quae quamuis calculum effecerint moleſtiſſimum, tamen non perfecte cum coelo conſentire deprehenſas fuiſſe.

§. 2. Docet, non obſtante motu hoc perturbato theoriam ſummi *Neutoni*, *Kepleri* legibus ſuperſtructam maximopere conducere ad ſoluendas difficultates circa motum contumaciſſimi huius ſideris obuias, tametſi attractionem, quam ſectatores *Neutoni* ad omnia prorſus corpora extendere atque adeo proprietatibus materiae annumerare ſunt conati, tanquam auſum nimis temerarium reiiciat, quoniam pro vſu Aſtronomico ſufficiat, noſſe eiusmodi vires in mundo re ipſa exiſtere, quarum effectus, cum ſolus ſpectetur, perinde ſit cauſa ſiue cognita ſiue incognita.

Id ſaltim nos lucrari, quod poſitis his principiis, quo omnia corpora coeleſtia ſe mutuo attrahere ſtatuuntur, determinatio motuum qui in coelo fiunt ad reſolutionem problematum mechanicorum reducatur, prouti fuſius et eleganter §. 3. exponitur, et tandem euincitur Magnum *Neutonum*, qui ipſe primum hoc negotium aggreſſus, incredibileque ſtudium in hac quaeſtione enodanda poſuit, ſummas difficultates ob oculos ponere, quibus iſte calculus adhuc laboret, tantum abeſſe, vt ſuſceptum hoc opus aut ipſe, aut qui poſt eum huic negotio ſe applicuerunt, confecerit, praesertim dum hi vltimi vix idem praestiterint, in quo *Neutonum* feliciter praeeuntem habuere, non tamen negat tabulas Astronomicas ad mentem huius viri summi conditas, multo propius locum lunae quouis tempore, quam reliquas exhibere.

§. 4. Exponit vir Cel. quid eum impediuerit, vt tentatum hunc a se laborem non perfecerit, et tandem aperit, quomodo in praesentem modum quo problema hoc soluere adgreditur inciderit, quo mediante lineam nodorum lunae et inclinationis eius ad eclipticam variationem, quae res aliis methodis vix calculo comprehendi possunt, satis commode definire ipsi licuit, et cui viae insistendo haud dubitat, quin reliqua motus lunae phaenomena multo felicius explicari queant.

§. 5. A faciliori problematis solutione orditur, et notari vult, quoniam spectatorem in terra concipiat eiusque respectu motum omnem diiudicat, motum terrae tam in solem quam in lunam contrario modo inducendum et singulas vires, quibus terra sollicitatur pariter in contrariis directionibus tam soli quam lunae affigendas esse.

Paragraphis sequentibus vires determinat quibus motus solis perturbatur et sic totam solis theoriam §. 11. absoluit simulque methodum qua vtitur clare exponit.

Hinc §. 12 ad lunam progreditur et vt terram quiescentem obtineat etiam hic, prouti supra in sole factum, in directionibus contrariis vires, quibus terra incitatur in lunam transfert.

Et tandem §. 19. determinat celeritatem lineae nododorum retrogradam directe esse, vt cosinus distantiae lunae a sole, sinus distantiae solis a nodo et sinus distanniae lunae a nodo coniunctim, reciproce vero vt cubus distantiae solis a terra et celeritas lunae secundum longigitudinem, ita vt motus lineae nodorum ab his quinque elementis pendeat, hanc autem expressionem mirifice cum *Neutoni* determinatione L. III. pag. 30 princ. congruere docet.

In sequentibus paragraphis vsque ad 31 §. quid singulae hae aequationes, si fiant, maximae efficere possint, adducit, et ob harum nonnullarum in tabulis Astronomicis neglectum ipsas non mediocri emendatione indigere asserit, in reliquis 32 - 34 §. variationem inclinationis orbitae lunae quoque determinat, et quamuis differentiam inter inclinationem maximam et minimam duobus fere minutis primis maiorem quidem quam tabulae exhibere solent deprehendat, tamen ideo eam in suspicionem cadere haud posse affirmat, tum quoniam in tabulis quaedam aequationes, vti supra innuimus, neglectae, tum quia per obseruationes vehementer est difficile hos limites exactissime constituere.

QVANTVM MOTVS TERRAE A LVNA PERTVRBETVR ACCVRATIVS INQVIRITVR. A. L. EVLERO.

In superiori dissertatione dum Cel. Eulerus nouas pro motu solis tabulas condere conatus fuit, assumpserat commune centrum grauitatis terrae et lunae, in ellipsi circa solem in eius foco existentem, reuolui atque ex loco lunae aberrationem centri terrae ab ista ellipsi ad quodvis tempus aſſignauerat. Haec autem hypotheſis cum ad veritatem proxime quidem accedat, non autem cum ea perfecte conueniat, idcirco ſibi propoſuit vir Cel. in iſtum errorem diligenter inquirere, quo iſta hypotheſis a veritate recedat, et hunc in finem deuiationem terrae de orbita elliptica ex ipſis ſollicitationibus lunae inveſtigare conatur, nulla communi centri grauitatis ratione habita, quod quidem negotium ad maxime complicatos calculos auctorem deduxit, cum illa hypotheſis rem facillime expediuiſſet.

Nos miſſis his difficultatibus in diſſertatione ipſa feliciter expeditis paucis attingimus, virum Cel. inter maximorum Geometrarum *Neutoni* et *Danielis Bernoullii*. quorum prior maſſam terrae ad maſſam lunae vt 39. ad 1, alter vt 62. ad 1. ſtatuit, mediam quandam determinationem inueniſſe, ſtatuendo maſſam terrae quadrageſies octies grauiorem eſſe luna, maximam correctionem loci ſolis in ecliptica 16″. 38‴, et maximam correctionem log. diſtantiae ſolis in ſyzigiis 34 ad logarithmum e 6. notis conſtantem vel addendam vel ſubtrahendam eſſe, et tandem demonſtraſſe, quod tabulae ſuae ſolares, prouti ex hac diſſertatione ſequi videbatur, nondum notabili indigeant emendatione.

G. W. KRAFFTII OBSERVATIO ECLIPSIS SOLARIS DIE 25. IVL. 1748. TVBINGAE FACTA.

Quomodo vir Cl. eclipſin ſolis cum maculis in eo haerentibus d. 25 Iul. 1748 ſt. n. Tubingae obſerſeruauerit, quaeque ſimul inſtituerit obſeruationes meteorologicas, hic commode, niſi deſcribendae eſſent, referri non poſſunt.

Quod idem de Cl.

HEINSII OBSERVATIONE ECLIPSIS LVNAE PARTIALIS d. 30 Aug. 1746 INSTITVTA,

vt et de Cl.

BRAVNII ET POPOVII IN OBSERVATORIO IMPERIALI DIE $\frac{14}{25}$ IVL. ET $\frac{29 \text{ Iul.}}{9 \text{ Aug.}}$ 1748 HABITIS OBSERVATIONIBVS ECLIPSIS SOLIS ET LVNAE

intelligendum, quapropter harum rerum curioſos ad Commentarios ipſos remittimus.

C. N. DE WINSHEIM, DE ABERRATIONE FIXARVM.

Recenſionum harum auctor, has de aberratione fixarum manuductiones, rogatus a collegis in vſum obſeruatorii Petropolitani in ordinem redegit, easque ideo publici iuris fieri permiſit, quoniam experientia iam edoctus fuit, etiam mediocria ingenia, qui nullam vel paruam analyſeos habuerunt cognitionem, doctrinam hanc, non aeque clare ac perſpicue vbique propoſitam, mediantibus his regulis, captui eorum magis accommodatis, ſibi admodum reddidiſſe familiarem.

OBSERVATIONES ALIQVOT COELESTES LIPSIAE 1746. aeſtate habitae, A. G. Heinſio.

Cl. Heinſius ante omnia inſtrumenta ſua deſcribit, quibus in praeſentibus vſus eſt obſeruationibus, eum potiſ-

potiſſimum in finem, vt in ſequentibus ad hanc deſcriptionem lectores ablegare poſſit. Hinc quadrantem cum ſuo errore, horologium oſcillatorium, nec non teleſcopium catadioptricum Gregorianum cum ſuis ſpeculis et ocularibus fuſe deſcribit, ſimulque indigitat, quo apparatu in ſequentibus obſeruationibus eclipſium Iouialium vſus ſit, ſcilicet eo, quo per teleſcopium obiecti diameter 52. vicibus maior appareat, quam nudo oculo, quem vel ideo elegerit, quoniam in hoc ſtatu maximam lucis ſatellitum copiam obtinuit, ad quam conditionem reſpiciendum erat, cum in his obſeruationibus Iupiter plerumque in vicinia horizontis verſaretur, et altitudo meridiana Iovis vix 18. gradus ſuperauit, figuram tamen Iouis oualem faſcias atque ſatellites Iouis ſe diſtinctiſſime hoc ſuo apparatu coelo ſereno vidiſſe teſtatur vir Clariſſimus.

Deinde quatuor emerſiones d. 27. Iun. 4. 20. et 27. Iulii obſeruatas adducit; porro obſeruationes eleuationis poli Lipſienſis reſpicientes, partim ex altitudine ſolis circa ſolſtitium, partim ex altitudinibus nonnullarum fixarum ſumpta declinatione earumdem e catalogo Halleii et Caſſinii affert, mediamque quandam eleuationem ex iis deducit, quam cum eleuationibus a reliquis Aſtronomis aut captis, aut in catalogum latitudinum relatis, comparat.

Vltimo nonnullas obſeruationes refert meteorologicas pro maximo aeſtu Lipſiae d. 15. Iul. ſt. n. 1746. obſeruato determinando, quem cum aeſtu Petropoli olim ab auctore notato, et quem in inſula Borbonica 1734. obſeruatum fuiſſe in Commentariis legerat Pariſinis, comparat.

Con

CONTINVATIO OBSERVATIONVM ASTRONOMICARVM
Lipſiae habitarum 1746. ſt. n. Auct. G. Heinſio.

Hic vnicam adhuc emerſionem 1 ſatellitis d. 12. Aug. obſeruatam et eclipſin lunae partialem d. 30. Aug. 1746. a ſe conſpectam exhibet Cl. Heinſius, de quibus hic dicere nil attinet, quoniam iam ſupra lectores ad Commentarios ipſos ratione huius et ceterarum ibi commemoratarum obſeruationum ablegauimus.

CONTINVATIO OBSERVATIONVM LIPSIAE
habitarum 1747. ſt. n.

Pergit Cl. Auctor cum Academia communicare, quas iisdem inſtrumentis, quae in ſuperiori diſſertatione deſcripſerat et ſub eodem teleſcopii apparatu obſeruauit duas emerſiones 1 ſatellitis Iouis, deinde quas circa ſolſtitium brumale inſtituit obſeruationes altitudinum ſolis affert, et collatis inter ſe praecedentibus obſeruationibus, eleuationem poli Lipſienſem $51^{\circ}.\ 22'\frac{1}{4}$ figit.

Porro exhibet, quas de ſtellis variabilibus in conſtellatione Cygni nominatim P. et x Bayeri inſtituit obſeruationes, cum iis, quae a Cl. Aſtronomo *Godofr. Kirchio* et *Maraldi* habitae ſunt, reuolutionemque variabilis in collo Cygni x ſcil. *Bayeri* rotunde $405\frac{1}{2}$. dierum determinat.

Tandem ſubiungit nonnullas obſeruationes meteorologicas exhibentes maximam barometri altitudinem extraordinariam, nec non gradum maximi caloris et frigoris a thermometro mercuriali indicatum.

OBSERVATIO ECLIPSIS SOLARIS
die 25 Iul. 1748. Lipſiae habita a G. Heinſio.

Quomodo ad obſeruationem hanc commode peragendam ſe praeparauerit, ſtatum duorum ſuorum horologiorum oſcillatoriorum reſpectu temporis veri examinando exponit Vir Clariſſimus et quae ipſa die, qua eclipſis celebranda, obſtiterint impedimenta commemorat, quo minus initium eclipſis exacte obſeruare potuerit. Deinde praecipuas obſeruationes inſtitutas eſſe docet per tubum Aſtronomicum 3. pedum pariſ. longum, obiecta ſecundum diametrum 14. vicibus amplificantem, eaque clare repraeſentantem, quem machinae parallacticae impoſitum, reticuloque inſtructum ob ſitum obſeruatorii ſui et ob campi repraeſentationis $1\frac{1}{2}$. fere graduum prae ceteris ad hoc negotium aptum iudicauerat.

Ex mora diſci ſolaris per filum horarium diebus praecedentibus ſaepenumero explorata tempus ſolare et diametrum ſolis in partibus diurni deduxit.

Reliquas autem obſeruationes et deductiones iuxta methodum, quam fuſe in deſcriptione eclipſis ſolis d. 4. Aug ſt. n. 1739. Petropoli obſeruatae expoſuerat, inſtituit, prouti rerum coeleſtium ſcrutatores maxima cum voluptate a §. 4. ad 11. videbunt, in quo 11mo ſequentia elementa deducta exhibet. Coniunctionem ſolis et lunae

nae veram reſpectu eclipticae, latitudinem lunae borealem, inclinationem orbitae lunae viſae ad circulum latitudinis verſus orientem, parallaxim lunae horizontalem, diametrum lunae horizontalem et diametrum ſolis.

Maculas ſolis in ſole conſpicuas quod attinet, harum poſitiones dum diebus 24. et 25. hor. pom. reſpectu diſci et diametri ſolis per appulſus limborum ſolis etc. determinatas adducit, et poſtea appulſus limbi lunaris ad nonnullas maculas durante eclipſi obſeruatas §. 13. affert.

§. 14. tandem commemorat ſe tempore obſeruationis maximae circa eam regionem marginis lunaris, qui extra ſolis diſcum extitit, et cornua in peripheria ſolis definiuit, nec vllum lumen nec annulum lucidum cuiusmodi ex atmoſphaera lunae vel inflexione radiorum ſolarium ad iſtam lunae marginem oriundum, alias ſuſpicari licuiſſet, per tubum machinae parallacticae impoſitum animaduertere potuiſſe, cornua potius optime terminata apparuiſſe.

Neque in fine eclipſis lunam, penitus e diſco ſolis egreſſam, ad marginem limbi ſolis adhuc maxime vicinum eiusmodi lumen per tubum Gregorianum oſtendiſſe, licet totus fere ſol extra campum repraeſentationis tubi poſitus fuerit, vt eiusmodi lumen, ſi quod daretur, ſenſibile effici poſſit.

Ve-

Venerem quoque ab aliis ſpectatoribus nudis oculis conſpectam, ab obſeruatore ad alias obſeruationes attento non animaduerſam eſſe aſſerit.

Et tandem §. 15. qui diſſertationem claudit, quae ab amico, tempore eclipſis inſtitutae ſunt obſeruationes meteorologicae, praecipue quae thermometro in loco vmbroſo conſtituto et deinde ſoli expoſito acciderint, adducuntur.

INDEX
DISSERTATIONVM

Mathematicarum.

Phyſico-Mathematicarum.

Geor-

Georg.

Phyſicarum.

Aſtronomicarum.

Chr.

* * *

* *

*

MATHEMATICA.

DE SVPERFICIE
CONORVM SCALENORVM,
ALIORVMQVE CORPORVM CONICORVM.

AVCTORE
L. EVLERO.

§. 1.

Quamquam natura conorum a longo iam tempore ita eſt inueſtigata, vt nihil praetermiſſum videatur, in quo laboraremus; tamen in dimetiendis conorum ſuperficiebus vltra conos rectos, quorum axes ad baſes ſunt normales, non proceſſerunt veteres. Celeb. Varignonius in Miſcell. Societatis Regiae Berolinenſis Continuatione II. argumentum hoc prorſus nouum primus tractauit, atque lineam curuam, cuius conſtructio a quadratura circuli pendet, inuenit per cuius rectificationem area cuiusque coni ſcaleni aſſignari queat. Subiuncta autem huic diſſertationi ibidem reperitur additio Magni Leibnizii, in qua idem negotium per rectificationem curuae algebraicae expeditur. Conſtructio huius curuae eximium exemplum profundiſſimi Auctoris ingenii exhibet; verum inaduertentia Viri alias ſagaciſſimi in hanc ſolutionem ſphalma quodpiam irrepſit, quod vti facile emendari poteſt, ita quoque praeſtantiae ſolutionis parum detrahit. Exprimit enim ſuperficiem coni ſcaleni rectangulo ex linea recta magnitudine data Tab. I.

in

in arcum lineae curuae, cuius constructionem exposuerat, cum iste arcus antea quantitate quapiam algebraica minui debuisset. Quamobrem operam meam non inutiliter mihi equidem collocasse videor, si primo superficiem coni scaleni ope rectificationis lineae algebraicae ordinis sexti exhibuero, tum vero explanationem superficiei conoidalis cuiuscunque per lineam curuam algebraicam absoluero, simulque lapsum summi Leibnizii emendauero.

Fig. 1. §. 2. Sit circulus AMB basis coni scaleni, cuius vertex in sublimi positus sit V. vnde ad planum basis demittatur perpendiculum VD; et ex puncto D per centrum basis C agatur recta DACB. Superficies igitur haec conica generatur, dum linea recta perpetuo per punctum V transiens circa peripheriam circuli AMB circumducitur, huiusque superficiei portio arcui AM respondens includetur arcu AM et binis rectis ex punctis A et M ad verticem V ductis. Huiusmodi portioni gibbae figuram planam aequalem inueniri oportet. Ponatur radius basis $AC = BC = a$. longitudo axis $VC = f$ perpendiculum $VD = b$, et interuallum $CD = c$, ita vt sit $ff = bb + cc$. Hinc erit latus coni minimum $VA = \sqrt{(bb + cc - 2ac + aa)}$ et latus maximum $VB = \sqrt{(bb + cc + 2ac + aa)}$. Sumto nunc arcu quocunque AM, ponatur angulus $ACM = u$, erit arcus $AM = au$; eiusque elementum $Mm = adu$. Ducatur in puncto M tangens MQ, et ex D in eam ducatur perpendicularis DQ, erit recta VQ normalis in tangentem MQ. Quare si ductae concipiantur rectae VM et Vm, erit area trianguli $MVm = \frac{1}{2} Mm \,.\, VQ$; quae areola erit differentiale portionis superficiei conicae AVM, quam quaerimus.

§. 3. Vt igitur longitudinem perpendicularis VQ inueſtigemus, in radium CM, ſi opus eſt, productum ex D ducamus normalem DN, quae parallela erit et aequalis tangenti MQ, et propterea $DQ = MN$. Cum ergo in triangulo rectangulo DCN ſit hypotenuſa $CD = c$ et angulus $DCN = u$, erit $CN = c \operatorname{cof} u$, hincque $MN = DQ = c \operatorname{cof} u - a$. Iam quia triangulum VDQ ad D eſt rectangulum, erit $VQ = \sqrt{(bb + cc \operatorname{cof.} u^2 - 2ac \operatorname{cof.} u + aa)}$; ex quo area trianguli elementaris MVm erit $= \frac{1}{2} Mm . VQ = \frac{1}{2} adu \sqrt{(bb + (c \operatorname{cof} u - a)^2)}$. Quamobrem ſuperficies conica AVM erit $= \frac{1}{2} a \int du \sqrt{(bb + (c \operatorname{cof} u - a)^2)}$. Vnde perſpicitur, ſi conus eſſet rectus, quo caſu interuallum $CD = c$ euaneſceret, ſuperficiem coni recti arcui AM reſpondentis fore $= \frac{1}{2} a \int du \sqrt{(aa + bb)} = \frac{1}{2} au \sqrt{(aa + bb)}$. Aequaretur ergo areae trianguli, cuius baſis $= au =$ arcui AM et cuius altitudo ſit $= \sqrt{(aa + bb)} = VA$: vti ex elementis conſtat.

§. 4. Ex aequatione $AVM = \frac{1}{2} a \int du \sqrt{(bb + (c \operatorname{cof} u - a)^2)}$ ſtatim fluit conſtructio curuae Varignonianae, per cuius rectificationem ſuperficies conica exhiberi poteſt. Formetur enim inter coordinatas orthogonales p et q eiusmodi curua vt ſit $dp = b du$ et $dq = du (c \operatorname{cof} u - a)$, erit elementum huius curuae $= du \sqrt{(bb + (c \operatorname{cof} u - a)^2)}$. Hinc arcus iſtius curuae per $\frac{1}{2} a$ multiplicatus praebebit rectangulum, cuius area aequalis erit ſuperficiei conicae AVM. Erit ergo huius curuae abſciſſa $p = bu = \frac{VD.AM}{AC}$: et applicata $q = c \int du \operatorname{cof} u - au = c \operatorname{fin} u - au$ vnde abſciſſae $p = \frac{b}{a} . AM$ reſpondebit applicata $q = QM - AM$ quae propterea curua ope rectificationis circuli facile construitur. Attendenti autem statim patebit hanc curuam eandem esse, quam Varignonius tradidit.

§. 5. Si hanc superficiem conicam per quadraturas curuarum exprimere velimus, id quidem infinitis modis tam per curuas algebraicas quam transcendentes sine vllo negotio fieri posset. Verum iam pridem summi Geometrae constructiones problematum transcendentium quae fiant per rectificationes curuarum praecipue algebraicarum, illis quae per quadraturas efficiuntur, longe antetulerunt: cum facilius sit longitudinem cuiusque lineae curuae saltem proxime practice assignare, quam eius aream. Hancobcausam eo tempore, quo ista quaestio in Miscellaneis Soc. Regiae est agitata Celeb. Varignonius non parum praestitisse merito est visus, quod explanationem superficiei conicae scalenae ad rectificationem lineae curvae reduxerit, cuius constructio ope rectificationis circuli tam facile expediri possit. Maximi autem sine dubio esset aestimanda solutio Leibnizii, qua idem, quod Varignonius, per curuam algebraicam idque pro omnibus omnino superficiebus conicis praestitit, nisi ob errorem ante memoratum vsu careret. Nunc autem, postquam a Hermanno methodus latissime patens est inuenta quadraturas omnium curuarum ad rectificationes curuarum algebraicarum reuocandi, fere sine vllo negotio scopus, quem Varignonius et Leibnitius sibi proposuerant, obtineri poterit.

§. 6. In hunc finem eliminemus ex formula inuenta $\frac{1}{2}a \int du \sqrt{(bb+(c\cos u-a)^2)}$ quantitatem transcendentem u, ponendo cosinum anguli $u=z$, ita vt, ducto ex M ad diame-

diametrum perpendiculo MP ſit $CP = az$, et $MP = a\surd(1 - zz)$, erit $du = \frac{-dz}{\surd(1-zz)}$, et ſuperficies conica quaeſita $AVM = -\frac{1}{2}a\int \frac{dz\surd(bb+(cz-a)^2)}{\surd(1-zz)}$. Sit iam curuae algebraicae, ope cuius rectificationis haec ſuperficies menſurari queat, abſciſſa $= x$ et applicata $= y$, ponaturque $dy = pdx$, vt ſit eius elementum $= dx\surd(1+pp)$. Efficiendum ergo eſt vt integratio $\int dx\surd(1+pp)$ ab integratione formulae $\int \frac{dz\surd(bb+(cz-a)^2)}{\surd(1-zz)}$ pendeat. Primo autem requiritur, vt $\int pdx$ fiat quantitas algebraica; alioquin enim curua non foret algebraica. Cum igitur ſit $\int pdx = px - \int xdp$, ponatur $\int xdp = q$, fietque $x = \frac{dq}{dp}$ et $y = \int pdx = \frac{pdq}{dp} - q$. Vocetur arcus iſtius curuae $= s$, et cum ſit $s = \int dx\surd(1+pp)$ fiet $s = x\surd(1+pp) - \int \frac{xpdp}{\surd(1+pp)}$; ſicque rectificatio curuae ab integratione formulae $\int \frac{xpdp}{\surd(1+pp)}$ pendebit, quae formula ob $xdp = dq$ abit in hanc $\int \frac{pdq}{\surd(1+pp)}$, quae vlterius reducitur ad $\frac{pq}{\surd(1+pp)} - \int \frac{qdp}{(1+pp)^{3:2}}$: ita vt futurus ſit arcus curuae $s = \frac{dq\surd(1+pp)}{dp} - \frac{pq}{\surd(1+pp)} + \int \frac{qdp}{(1+pp)^{3:2}}$. Statuatur nunc $\int \frac{qdp}{(1+pp)^{3:2}} = \int \frac{dz\surd(bb+(cz-a)^2)}{\surd(1-zz)}$, fietque $q = \frac{dz(1+pp)^{3:2}\surd(bb+(cz-a)^2)}{dp\surd(1-zz)}$ vbi pro p functionem quamcunque algebraicam ipſius z aſſumere licet. Quo facto erit q functio algebraica ipſius z cognita, ex eaque porro ipſae coordinatae curuae quaeſitae x et y definientur.

§. 7. Deſcripta ergo hac curua ope coordinatarum $x = \frac{dq}{dp}$ et $y = \frac{pdq}{dp} - q$, ſi eius arcus vocetur $= s$ ob $s = \frac{dq\surd(1+pp)}{dp} - \frac{pq}{\surd(1+pp)} + \int \frac{qdp}{(1+pp)^{3:2}}$, fiet formula noſtra, ex qua

ſuperficiei

ſuperficiei conicae portio AVM determinatur $\int\frac{dz\surd(bb+(cz-a)^2)}{\surd(1-zz)}$ $= s - \frac{dq\surd(1+pp)}{dp} + \frac{pq}{\surd(1+pp)} +$ Conſt. Quae conſtans ſi ita determinetur, vt poſito $z=0$, ipſa formula euaneſcat, tum rectangulum $\frac{1}{2}a(\int - \frac{dq\surd(1+pp)}{dp} + \frac{pq}{\surd(1+pp)} +$ Cōſt.) aequabitur portioni ſuperficiei conicae EVM, poſito ſcilicet angulo ACE recto.

§. 8. Ponamus, vt rem exemplo illuſtremus $p = \frac{z}{\surd(1-zz)}$, vt ſit $\surd(1+pp) = \frac{1}{\surd(1-zz)}$ et $dp = \frac{dz}{(1-zz)^{3:2}}$; erit $q = \frac{\surd(bb+(cz-a)^2)}{\surd(1-zz)}$ et $\frac{dq}{dp} = \frac{bbz+(c-az)(cz-a)}{\surd(bb+(cz-a)^2)}$ $= x$ et $y = \frac{(a(cz-a)-bb)\surd(1-zz)}{\surd(bb+(cz-a)^2)}$: Hinc prodibit portio ſuperficiei conicae EVM $= \frac{1}{2}a(s - \frac{c(cz-a)\surd(1-zz)}{\surd(bb+(cz-a)^2)} +$ Conſt.), ſi quidem haec conſtans ita accipiatur, vt iſta formula euaneſcat poſito $z=0$. Simili autem modo aliis quibuscunque valoribus pro p accipiendis innumerabiles aliae curuae algebraicae obtinebuntur, quarum rectificatione portio ſuperficiei conicae quaecunque in plano exhiberi poterit.

§. 9. In huiusmodi autem lineis curuis non ipſe arcus ſuperficiei conicae eſt proportionalis, ſed eum perpetuo quapiam quantitate algebraica vel augeri vel diminui oportet, vt prodeat expreſſio ſuperficiem conicam abſolute menſurans. Qua circumſtantia etſi praxis non impeditur, tamen eiusmodi lineae curuae, quarum longitudo ſtatim ipſa ſine adiuncta alia quantitate quaeſitum praebet, illis non immerito anteferri ſolent. Hancobrem non abs re erit eiusmodi curuam algebraicam aſſignare, quae ipſa, vti curua illa Varignonii transcendens, ſine aſſumta alia quantitate

titate superficiei conicae portionem quamuis metiatur. Cum igitur portio EVM exprimatur hac formula $\frac{1}{2}a\int\frac{dz\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{\sqrt{(1-zz)}}$, curua algebraica inuestigari debebit cuius elementum sit $=\frac{dz\sqrt{(bb+(cz-a)^2)}}{b\sqrt{(1-zz)}}$. Huius enim curvae si arcus quantitati z respondens ponatur $=s$, erit superficiei conicae portio $EVM=\frac{1}{2}abs$.

§. 10. Sint coordinatae huius curuae quaesitae x et y, quae cum per functiones algebraicas ipsius z exprimi debeant, statuatur $dx=\frac{dz(m+kz)}{\sqrt{(1-z)}}$ et $dy=\frac{dz(n+kz)}{\sqrt{(1+z)}}$ sic enim sumtis integralibus fiet

$$x=2m+\tfrac{4}{3}k-(2m+\tfrac{4}{3}k+\tfrac{2}{3}kz)\sqrt{(1-z)}$$

$$y=-2n+\tfrac{4}{3}k+(2n-\tfrac{4}{3}k+\tfrac{2}{3}kz)\sqrt{(1+z)}$$

Eiusmodi constantibus adiectis, vt posito $z=0$, quod euenit in puncto E, ambae coordinatae x et y euanescant. Hinc elicietur ista aequatio:

$$\left.\begin{matrix}+xx-4mx-\tfrac{9}{3}kx\\+yy+4ny-\tfrac{8}{3}ky\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}4(n-m)(n+m)z+\tfrac{8}{3}(n-m)kzz\\-\tfrac{9}{3}(n+m)kz\quad-\tfrac{8}{3}kkzz\end{matrix}\right)$$

Vnde valor ipsius z per x et y facile definitur, qui in altera aequatione substitutus dabit aequationem algebraicam inter x et y, qua natura curuae quaesitae continebitur.

§. 11. Cum iam sit $dx=\frac{(m+kz)dz}{\sqrt{(1-z)}}$ et $dy=\frac{(n+kz)dz}{\sqrt{(1+z)}}$. fiet huius curuae elementum:

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)}=dz\sqrt{\left(\frac{m^2+2mkz+k^2zz}{1-z}+\frac{n^2+2nkz+k^2zz}{1+z}\right)}$$

seu $$\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{dz\sqrt{\left(\begin{matrix}+nn-nnz+2nkz-2nkzz\\+mm+mmz+2mkz+2mkzz\end{matrix}+2k^2z^2\right)}}{\sqrt{(1-zz)}}$$

Quod aequale ponatur formae $\frac{dz\sqrt{(aa+bb-2acz+cczz)}}{b\sqrt{(1-zz)}}$ prodibuntque ex comparatione terminorum homogeneorum hae aequationes.

$$aa + bb = (nn + mm)bb$$

$$2ac = (n-m)(n+m)bb - 2(n+m)kbb$$

$$cc = 2k^2 b^2 - 2(n-m)kbb$$

Ex harum vltima fit $n - m = k - \frac{cc}{2kbb} = \frac{2kkbb - cc}{2kbb}$ qui valor in fecunda fubftitutus dat:

$$2ac = -\frac{(n+m)(2kkbb+cc)}{2k}$$

ergo erit $n + m = \frac{-4ack}{2kkbb+cc}$. Cum ergo fit:

$$n - m = \frac{2kkbb - cc}{2kbb}$$

ex his aequationibus ambae litterae m et n definiuntur.

§. 12. Supereft ergo vt tertia incognita k per primam aequationem definiatur. Cum autem quarta incognita b maneat indeterminata, ei pro lubitu valor affignari poterit, ftatuamus ergo $bb = \frac{cc}{2kk}$, vt euadat $n - m = 0$: eritque $n + m = -\frac{2ak}{c}$, ac propterea $m = n = -\frac{ak}{c}$, vnde facta in prima aequatione fubftitutione etiam incognita k ex calculo egreditur. Fieri ergo nequit $m = n$. Quocirca ftatuamus $2kkbb = gcc$ feu $bb = \frac{gcc}{2kk}$ eritque $n - m = \frac{(g-1)k}{g}$ et $n + m = \frac{-4ak}{(g+1)c}$. Vnde fit $n = \frac{(g-1)k}{2g} - \frac{2ak}{(g+1)c} = \frac{(gg-1)ck - 4agk}{2g(g+1)c}$ et $m = \frac{-2ak}{(g+1)c} - \frac{(g-1)k}{2g} = \frac{-4agk - (gg-1)ck}{2g(g+1)c}$.

§. 13. Ex his valoribus nunc obtinebitur:

$$mm + nn = \frac{16aaggkk + (gg-1)^2 cckk}{2gg(g+1)^2 cc}$$

Hinc ex prima aequatione $aa + bb = (nn + mm)bb$ fiet $aa + bb = \frac{16aagg + (gg-1)^2 cc}{4g(g+1)^2}$

fit

fit $aa + bb = ee$, haecque aequatio euoluta dabit:

$$\begin{array}{llll} ccg^4 - 4eeg^3 & -2ccgg & -4eeg & +cc = 0 \\ & +16aagg & & \\ & -8eegg & & \end{array}$$

ex qua valorem ipſius g quaeri oportet.

§. 14. Quanquam haec aequatio eſt quarti ordinis, tamen quia non mutatur, ſi loco g ponatur $\frac{1}{g}$, ea ad reſolutionem aequationis quadratae reuocari poteſt. Fingantur eius factores $cgg - 2pg + c = 0$ et $cgg - 2qg + c = 0$ et productum illi aequationi aequale efficiatur. Erit autem hoc productum:

$$\begin{array}{l} ccg^4 - 2cpg^3 + 2ccgg - 2cpg + cc = 0 \\ \quad - 2cqg^3 + 4pqgg - 2cqg \end{array}$$

Quae forma cum aequatione inuenta comparata dabit:

$$p + q = \frac{2ee}{c} \text{ et } pq = 4aa - 2ee - cc$$

unde fit: $(p-q)^2 = \frac{4e^4}{cc} - 16aa + 4ee + 4cc$ et $p - q = \frac{2}{c}\sqrt{(e^4 - 4aacc + 2ccee + c^4)}$. Conſequenter

$$p = \frac{ee + \sqrt{(e^4 - 4aacc + 2ccee + c^4)}}{c} \text{ et}$$

$$q = \frac{ee - \sqrt{(e^4 - 4aacc + 2ccee + c^2)}}{c}.$$

§. 15. Inuentis nunc p et q ex aequationibus ſuperioribus valores ipſius g ita definientur vt ſit $g = \frac{p \pm \sqrt{(pp - cc)}}{c}$ et $g = \frac{q \pm \sqrt{(qq - cc)}}{c}$. Cum igitur nunc quatuor valores pro quantitate g inuenerimus, habebimus primo $bb = \frac{gcc}{2kk}$ ſeu ſumta quantitate b pro arbitrio erit $k = \frac{c}{b}\sqrt{\frac{1}{2}g}$; vnde porro inueniuntur.

$$m = \frac{-(g-1)k}{2g} - \frac{2ak}{(g+1)c}$$

$$n = \frac{+(g-1)k}{2g} - \frac{2ak}{(g+1)c}.$$

Ex cognitis denique valoribus litterarum m, n, et k curua quaesita per coordinatus x et y supra exhibitas algebraice describetur, quo facto si eius arcus quantitati z respondens dicatur $= s$, erit superficiei conicae portio $EVM = \frac{1}{2}abs$.

§. 16. Vt exemplum praebeamus, faciat axis coni VC cum basi angulum $60°$, incidatque perpendiculum VD in peripheriam, basis erit CD $=$ CA et propterea $c = a$; porro erit $CV = f = 2a$ et $bb = 3aa$ vnde fit $ee = 4aa$ atque $p = a(4 + \sqrt{21})$ et $q = a(4 - \sqrt{21})$. Hinc fit $g = 4 + \sqrt{21} + 2\sqrt{(9 + 2\sqrt{21})}$, quia duo reliqui valores fiunt imaginarii. Erit ergo

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}g} = \tfrac{1}{4}\sqrt{14} + \tfrac{1}{4}\sqrt{6} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(3 + \sqrt{21})}$$

sit $b = 1$ erit $k = \frac{a}{4}(\sqrt{14} + \sqrt{6} + 2\sqrt{(3 + \sqrt{21})})$.
Hinc porro irrationalibus debite reductis inuenitur

$$m = \tfrac{a}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{14} - 2\sqrt{(3 + \sqrt{21})}) \text{ et}$$
$$n = \tfrac{a}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{14} - 2\sqrt{(3 + \sqrt{21})}).$$

quibus valoribus inuentis describatur curua inter coordinatas x et y ita, vt sit

$$x = \tfrac{4}{3}k + 2m - (2m + \tfrac{4}{3}k + \tfrac{2}{3}kz)\sqrt{(1 - z)}$$
$$y = \tfrac{4}{3}k - 2n + (2n - \tfrac{4}{3}k + \tfrac{2}{3}kz)\sqrt{(1 + z)}.$$

Cuius curuae si arcus sinui anguli ECM, qui est $= z$ respondens ponatur $= s$ erit superficiei conicae portio $EVM = \frac{1}{2}as$.

§. 17. Expeditis conis scalenis, qui cum bases habeant circulares, perpendiculum ex vertice in planum basis demissum extra eius centrum cadit, nunc conos quoscunque considerabo, qui formantur, dum linea recta per verticem perpetuo transiens circa lineam quamcunque circumducitur. Sit

igitur

igitur figura quaecunque AM basis huiusmodi coni, et punctum V in sublimi positum eius vertex, vnde in basin demittatur perpendiculum VD. Ex D ad punctum curuae AM quodcunque M ducatur recta DM, et in M ducatur recta tangens curuam MQ, in quam D perpendiculum demittatur DQ: et cum basis cognita ponatur, relatio assignari poterit inter DM et DQ. Sit igitur $DM = x$, $DQ = y$, atque habebitur aequatio inter x et y. Ponatur praeterea huius coni altitudo $VD = b$, sumto autem huius curuae elemento Mm, si ducatur Dm et ex M in Dm perpendiculum demittatur Mn, erit $mn = dx$, et ob $MQ = \surd(xx - yy)$ similitudo triangulorum DMQ, Mmn dabit $Mn = \frac{ydx}{\surd(xx-yy)}$ et $Mm = \frac{xdx}{\surd(xx-yy)}$. Fig.2.

§. 18. His praemissis si in peripheria basis punctum fixum A tanquam principium assumatur. Superficiei conicae portio AVM erit integrale trianguli elementaris MVm. Ad areolam ergo huius trianguli exprimendam, iungatur recta VQ, quae in tangentem MQ erit normalis, ac propterea area trianguli MVm fiet $= \frac{1}{2} Mm . VQ$. Est vero ob triangulum VDQ ad D rectangulum, $VQ = \surd(bb + yy)$ vnde cum sit $Mm = \frac{xdx}{\surd(xx-yy)}$, habebitur area trianguli elementaris $MVm = \frac{xdx\surd(bb+yy)}{2\surd(xx-yy)}$. Atque hinc erit superficiei conicae portio quaesita $AVM = \frac{1}{2}\int\frac{xdx\surd(bb+yy)}{\surd(xx-yy)}$.

§. 19. Maxime naturalis via hanc superficiem exprimendi est, vt ea in planum explicetur. Concipiatur igitur conus charta superductus, quae secundum rectas AV et MV et basin AM excissa in planum explicetur Fig. 3.

VAM; haecque figura mixtilinea VAM aequalis erit portioni ſuperficiei conicae $AVM = \frac{1}{2}\int\frac{xdx\sqrt{(bb+yy)}}{\sqrt{(xx-yy)}}$. Huius figurae explicatae ducatur in M tangens MQ, et in eam ex V demittatur perpendiculum VQ. Cum igitur hoc triangulum VMQ ſimile et aequale ſit triangulo VMQ in fig. 2. erit $VM = \sqrt{(bb+xx)}$ $VQ = \sqrt{(bb+yy)}$ et $MQ = \sqrt{(xx-yy)}$. Conſtituto autem triangulo elementari MVm, ductaque Mr ad Vm perpendiculari, erit vt ante $Mm = \frac{xdx}{\sqrt{(xx-yy)}}$, at $mr = \frac{xdx}{\sqrt{(bb+xx)}}$, et $Mr = \frac{xdx\sqrt{(bb+yy)}}{\sqrt{(bb+xx)(xx-yy)}}$.

§. 20. Inquiramus nunc in conſtructionem huius curvae ex data baſi coni in fig. 2. Ponamus in hunc finem angulum $AVM = v$ et diſtantiam $VM = z$, erit ſtatim $z = \sqrt{(bb+xx)}$. Tum vero erit $dv = \frac{Mr}{VM} = \frac{xdx\sqrt{(bb+yy)}}{(bb+xx)\sqrt{(xx-yy)}}$. Vocemus ſimili modo in fig. 2. angulum $ADM = u$ erit $du = \frac{Mn}{DM} = \frac{ydx}{x\sqrt{(xx-yy)}}$; Hinc fit $x^4du^2 - xxyydu^2 = y^2dx^2$ et $y^2 = \frac{x^4du^2}{dx^2+x^2du^2}$ ideoque erit $\sqrt{(bb+yy)} = \frac{\sqrt{(bbdx^2+(bb+xx)x^2du^2)}}{\sqrt{(dx^2+x^2du^2)}}$ et $\sqrt{(xx-yy)} = \frac{xdx}{\sqrt{(dx^2+x^2du^2)}}$: vnde oritur $dv = \frac{\sqrt{(bbdx^2+(bb+xx)xxdu^2)}}{bb+xx}$. Quia igitur vel u vel y per x datur, inueniri poterit angulus v, quo cognito curua AM circa V in plano deſcribetur, cuius area AVM aequalis erit ſuperficiei conicae quaeſitae.

§. 21. Quoniam aſſignatio ſuperficiei conicae pendet ab integratione formulae $\int\frac{xdx\sqrt{(bb+yy)}}{\sqrt{(xx-yy)}}$, hoc negotium tam per quadraturas quam rectificationes curuarum algebraicarum innumerabilibus modis facile expediri poteſt.

Vt

Vt autem conſtructionem Leibnizianam, quae eſt elegantiſſima, emendemus, peculiari modo nobis erit procecedendum. Perſpicuum autem eſt Virum ſummum ſuam conſtructionem ex conſideratione rectarum ad datam curuam ſub angulis quibuscunque ductarum deduxiſſe; hae enim rectae ſuis concurſibus formant nouam curuam, cuius rectificatio tam ſimpliciter exprimitur, vt quaeuis quadratura eo facile reducatur. Atque ex hoc ipſo fonte Celeb. Hermannus methodum ſuam ingenioſiſſimam quadraturas curuarum quascunque ad rectificationes curuarum algebraicarum reducendi hauſit, quam methodum poſtea Celeb. Ioh. Bernoulli ex geometria in analyſin puram translatam dilucide propoſuit.

§. 22. Sumamus pro curua data AM illam ipſam Fig. 4.
figuram, quae ante baſin coni conſtituerat, atque in eius ſingulis punctis $M\,m$ in datis cum hac curua angulis ductae concipiantur rectae MS, ms quae ſuis contactibus forment nouam curuam FSs; per cuius rectificationem ſuperficiem conicam exprimi oporteat. Ponatur arcus curuae cognitae $AM = s$. ſitque angulus $SMm = v$, quem recta SM cum curua AM in puncto M conſtituit, et ſumto elemento $Mm = ds$, erit angulus $smN = v + dv$. Quo hinc concurſus rectarum MS et ms ſeu punctum S determinetur, conſideretur centrum circuli oſculatoris in Mm, quod ſit in R, et vocetur radius oſculi $MR = mR = r$, erit angulus $MRm = \frac{ds}{r}$: atque ob rectas RM, Rm ad curuam AM normales, erit angulus $RMS = 90° - v$ et angulus $RMS = 90° - v - dv$. Vnde cum ſit $RoS = MRm + RMS = MSm + Rms$, fiet ang. $MSm = MR$

$m +$

$m + \mathrm{RMS} - \mathrm{R}ms = \frac{ds}{r} + dv$. Nunc in triangulo MS m ob datos angulos et latusculum $\mathrm{M}m = ds$, fiet $\frac{ds}{r} + dv : ds = \text{fin.}\, v : m\mathrm{S}$ vel MS, eritque igitur $\mathrm{MS} = \frac{rds\, \text{fin.}\, v}{ds + rdv}$; ex qua formula constructio curuae FS consequitur.

§. 23. Ponatur haec recta $\mathrm{MS} = z$, vt sit $z = \frac{rds\, \text{fin.}\, v}{ds + rdv}$; eritque $ms = z + dz$. Ex m in MS ducatur normalis mk, ob angulum $m\mathrm{M}k = v$, erit $mk = ds$ fin. v et $\mathrm{M}k = ds$ cof. v. Cum igitur fit $\mathrm{S}s = ms - k\mathrm{S} = ms - \mathrm{MS} + \mathrm{M}k$, fiet $\mathrm{S}s = ds$ cof. $v + dz$. At eft Ss elementum curuae FS, ex quo erit longitudo huius curvae $\mathrm{FS} = \int ds$ cof. $v + z +$ Conft. Ad hanc constantem definiendam respondeat curuae FS, punctum F curuae datae AM puncto A, ita vt recta AF fit tangens curuae quaesitae FS in puncto F. Hinc cum fit $\mathrm{MS} = z$, prodibit $\mathrm{FS} = \int ds$ cof. $v + \mathrm{MS} - \mathrm{AF}$, fi quidem integrale $\int ds$ cof. v ita capiatur, vt euanefcat pofito $s = 0$. Quo facto viciffim integrale formulae $\int ds$ cof. v per rectificationem curvae FS exhiberi poterit, erit fcilicet $\int ds$ cof. $v = \mathrm{FS} + \mathrm{AF} - \mathrm{MS}$.

§. 24. His praemiffis fit D veftigium verticis coni in plano bafis, feu punctum, in quod perpendiculum ex vertice coni in planum bafis demiffum incidit, cuius perpendiculi altitudo VD fupra pofita eft $= b$. Ducta porro ad M tangente MQ, in eamque ex D demiffo perpendiculo DQ, vocauimus $\mathrm{DM} = x$ et $\mathrm{DQ} = y$, eratque elementum $\mathrm{M}m = \frac{xdx}{\sqrt{(xx - yy)}}$, quod nunc appellamus $= ds$. Quare cum inuenerimus fuperficiem conicam arcui bafis AM refpondentem $= \frac{1}{2}\int \frac{xdx\sqrt{(bb + yy)}}{\sqrt{(xx - yy)}}$, erit ifta fupersuperficies $= \frac{1}{2}\int ds\sqrt{(bb+yy)}$. Quo igitur haec superficies per rectificationem curuae FS exprimatur, angulus v vbique ita constitui debet, vt formulae $\int ds \cos. v$ integratio ad integrationem formulae $\int ds\sqrt{(bb+yy)}$ perducatur.

§. 25. Ponamus in hunc finem $\cos. v = \frac{\sqrt{(bb+yy)}}{k}$: et cum cosinus ipsius v vltra radii magnitudinem, quam vnitate metimur nunquam excrescere possit, quantitas k tanta assumi debet, vt $\sqrt{(bb+yy)}$ eam nunquam superare queat. Quare notetur maximus valor, quem formula $\sqrt{(bb+yy)}$ vsquam in cono induere potest, eique k vel aequalis vel etiam maior assumatur. Hoc igitur modo si angulus v fuerit definitus, obtinebitur superficies conica arcui basis AM insistens $\frac{1}{2}\int ds\sqrt{(bb+yy)} = \frac{1}{2}k\int ds \cos. v$; ideoque exprimetur rectangulo $\frac{1}{2}k(FS + AF - MS)$ si scilicet rectae MS vbique ita constituantur, vt sit $\cos. SMm = \frac{\sqrt{(bb+yy)}}{k}$ seu $\sin. RMS = \frac{\sqrt{(bb+yy)}}{k}$ hincque construatur curua FS, rectanguli $\frac{1}{2}k(AF + FS - MS)$ area aequabitur superficiei conicae quaesitae, quae igitur per rectificationem curuae algebraicae FS exhibebitur. Cum enim vbique tam angulus RMS quam longitudo MS algebraice assignari queant, ipsa curua FS erit algebraica.

§. 26. Sumto autem $\cos. v = \frac{\sqrt{(bb+yy)}}{k}$ erit $\sin. v = \frac{\sqrt{(kk-bb-yy)}}{k}$ et differentiando $dv \cos. v = \frac{-yky}{k\sqrt{(kk-bb-yy)}} = \frac{-ydy}{kk \sin. v}$. vnde fit $dv = \frac{-ydy}{kk \sin. v \cos. v}$. Cum autem natura curuae AM aequatione inter variabiles $DM = x$ et $DQ = y$ exprimatur, erit radius osculi $MR = r = \frac{xdx}{dy} =$

$\frac{ds\sqrt{(xx-yy)}}{dy}$, vnde fit $dy = \frac{ds\sqrt{(xx-yy)}}{r}$ ideoque $dv = \frac{-yds\sqrt{(xx-yy)}}{kkr\,\text{ſin}.v\,\text{coſ}.v}$. Quia ergo ſupra inuenimus $MS = z = \frac{rds\,\text{ſin}.v}{ds+rdv}$, nunc habebimus $MS = z = \frac{kkr\,\text{ſin}.v^2\,\text{coſ}.v}{kk\,\text{ſin}.v\,\text{coſ}.v - y\sqrt{(xx-yy)}}$ Quam expreſſionem ſequenti modo geometrice conſtruere conabimur.

Fig. 4. et 5. §. 27. Sit iterum curua AM baſis coni, D veſtigium verticis, et M punctum huius curuae quodcunque in quo ducatur tangens MQ et normalis MK. Ductaque recta DM ex D in tangentem demittatur perpendiculum DQ, ſimulque tangenti agatur recta indefinita DC, in qua capiatur DC = altitudini coni $= b$, ductaque CQ erit $CQ = \sqrt{(bb+yy)}$. Tum in normali ad curuam capiatur $MK = k$, ſuper qua tanquam diametro deſcripto ſemicirculo KPM applicetur chorda KP = CQ, ſi ducatur MP, erit ſinus anguli KMP $= \frac{KP}{k} = \text{coſ}.\,v$, vnde recta MP erit poſitio rectae MS, ſumatur in normali ad curuam $MR = r$, et cum ſit $DQ = y$, et $MQ = \sqrt{(xx-yy)}$, fiet $MS = \frac{MK.MR\,\text{ſin}.v}{MK - DQ.MQ : MK\,\text{ſin}.v\,\text{coſ}.v}$ ſeu $MS = \frac{MK\,\text{coſ}.v\,.\,MR\,\text{ſin}.v}{MK\,\text{coſ}.v - DQ.MQ : MK\,\text{ſin}.v}$. Cum vero ſit MK coſ. v = KP et MK ſin. v = MP, ex R in MP demittatur perpendiculum RT, et erit MR ſin. v = MT fietque $MS = \frac{KP.MT}{KP - DQ.MQ : MP}$. Capiatur $PX = \frac{DQ.MQ}{MP}$, erit $MS = \frac{KP.MT}{KX}$, vnde longitudo rectae MS facile definitur. Quae operatio ſi in ſingulis punctis M inſtituatur, ſingula puncta S determinabunt curuam quaeſitam FS; qua inuenta erit portio ſuperficiei conicae arcui AM inſiſtentis aequalis areae parallelogrammi rectanguli $\frac{1}{2}$ MK(AF+FS−MS).

§. 28.

§. 28. Si curua AM ſtatuatur circulus, extra cuius centrum cadat punctum D, vt conus abeat in conum ſcalenum ordinarium qualem primo ſumus contemplati, atque curua FS ſecundum praecepta hic data conſtruatur, tum eadem prodibit curua, quam Illuſtr. Leibnizius loco ſupra allegato inuenire docuit. Ex quo manifeſtum eſt non ipſam hanc curuam FS in rectam elongatam, ſi in rectam quampiam conſtantem ducatur, praebere ſuperficiem conicam quaeſitam, ſed arcum illum FS recta AF auctum longitudine rectae MS minui debere. Hoc ergo modo non ſolum conſtructionem Leibnizianam, quae tantum ad conos ſcalenos erat accommodata, emendauimus, ſed etiam ad conos, quorum baſes ſint figurae quaecunque extendimus.

THEOREMATA
CIRCA DIVISORES NVMERORVM.

AVCTORE
L. EVLERO.

Quouis tempore summi Geometrae agnouerunt in natura numerorum plurimas praeclarissimas proprietates esse absconditas, quarum cognitio fines matheseos non mediocriter esset amplificatura. Primo quidem intuitu doctrina numerorum ad arithmeticae elementa referenda videtur, atque vix quicquam in ea inesse putatur, quod vllam sagacitatem aut vim analyseos requirat. Qui autem diligentius in hoc genere sunt versati, non solum veritates demonstratu difficillimas detexerunt, sed etiam eiusmodi, quarum certitudo percipiatur, etiamsi demonstrari nequeat. Plurima huiusmodi theoremata sunt prolata ab insigni Geometra Fermatio, quorum veritas quamuis demonstratio lateat, non minus euicta videtur. Atque hoc imprimis omnem attentionem meretur, in mathesi adeo pura eiusmodi dari veritates, quas nobis cognoscere liceat, cum tamen eas demonstrare non valeamus; atque hoc adeo in arithmetica vsu venit, quae tamen prae reliquis matheseos partibus maxime pertractata ac perspecta haberi solet: neque facile affirmare ausim, an similes veritates in reliquis partibus reperiantur. In Geometria certe nulla occurit propositio cuius vel veritas vel falsitas firmissimis rationibus euinci nequeat. Cum igitur quaeuis veritas eo magis abstrusa censeatur, quo minus ad eius demonstrationem

onem aditus pateat, in arithmetica certe, vbi natura numerorum perpenditur, omnium abſtruſiſſimas contineri negare non poterimus. Non deſunt quidem inter ſummos mathematicos Viri, qui huiusmodi veritates prorſus ſteriles, ideoque non dignas iudicant, in quarum inueſtigatione vlla opera collocetur; at praeterquam quod cognitio omnis veritatis per ſe ſit excellens, etiamſi ab vſu populari abhorrere videatur, omnes veritates, quas nobis cognoſcere licet, tantopere inter ſe connexae deprehenduntur, vt nulla ſine temeritate tanquam prorſus inutilis repudiari poſſit. Deinde etſi quaepiam propoſitio ita comparata videatur, vt ſiue vera ſit ſiue falſa, nihil inde ad noſtram vtilitatem redundet, tamen ipſa methodus, qua eius veritas vel falſitas euincitur, plerumque nobis viam ad alias vtiliores veritates cognoſcendas patefacere ſolet. Hanc obrem non inutiliter me operam ac ſtudium in indagatione demonſtrationum quarumdam propoſitionum impendiſſe confido, quibus inſignes circa diuiſores numerorum proprietates continentur. Neque vero haec de diuiſoribus doctrina omni caret vſu, ſed nonnunquam in analyſi non contemnendam praeſtat vtilitatem. Imprimis vero non dubito, quin methodus ratiocinandi, qua ſum vſus, in aliis grauioribus inueſtigationibus aliquando non parum ſubſidii afferre poſſit. Propoſitiones autem, quas hic demonſtratas exhibeo, reſpiciunt diuiſores numerorum in hac formula $a^n \pm b^n$ contentorum, quarum nonnullae iam ab ante memorato Fermatio, ſed ſine demonſtratione, ſunt publicatae. Quoniam igitur hic perpetuo de numeris integris ſermo inſtituetur, omnes alphabeti litterae hic conſtanter numeros integros indicabunt.

Theo-

Theorema 1.

1. Si p fuerit numerus primus, omnis numerus in hac forma $(a+b)^p-a^p-b^p$ contentus diuiſibilis erit per p.

Demonſtratio.

Si binomium $(a+b)^p$ modo conſueto euoluatur, erit $(a+b)^p = a^p + \frac{p}{1} a^{p-1} b + \frac{p(p-1)}{1.2} a^{p-2} b^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} a^{p-3} b^3 + \ldots + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} a^3 b^{p-3} + \frac{p(p-1)}{1.2} a^2 b^{p-2} + \frac{p}{1} a b^{p-1} + b^p$. qua expreſſione ſubſtituta, binisque terminis, qui easdem habent vncias, coniunctis, erit $(a+b)^p - a^p - b^p = \frac{p}{1} ab(a^{p-2}+b^{p-2}) + \frac{p(p-1)}{1.2} a^2 b^2 (a^{p-4}+b^{p-4}) + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} a^3 b^3 (a^{p-6}+b^{p-6}) + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4} (a^{p-8}+b^{p-8}) a^4 b^4 +$ etc. Hic primo notandum eſt omnes vncias, quamquam ſub forma fractionum apparent, nihilominus eſſe numeros integros, cum exhibeant, vti conſtat numeros figuratos. Quaelibet ergo vncia cum factorem habeat p, diuiſibilis erit per p, niſi is alicubi per factorem denominatoris vel prorſus tollatur, vel diuidatur. At vbique omnes factores denominatorum minores ſunt quam p quia adeo non vltra $\frac{1}{2}p$ creſcunt, ideoque factor numeratorum p nusquam per diuiſionem tollitur. Deinde cum p ſit per hypoth. numerus primus, is nusquam per diuiſionem minuetur. Quocirca ſingulae vnciae $\frac{p}{1}$; $\frac{p(p-1)}{1.2}$; $\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}$; etc. hincque tota expreſſio $(a+b)^p-a^p-b^p$ perpetuo per numerum p ſiquidem fuerit numerus primus, erit diuiſibilis Q. E. D.

Coroll.

Coroll. 1.

2. Si ergo ponatur $a=1$, et $b=1$, erit 2^p-2 ſemper diuiſibilis per p, ſi quidem fuerit p numerus primus. Cum igitur ſit $2^p-2=2(2^{p-1}-1)$: alterum horum factorum per p diuiſibilem eſſe oportet. At niſi ſit $p=2$, prior factor 2 per p non eſt diuiſibilis: vnde ſequitur formam $2^{p-1}-1$ perpetuo per p eſſe diuiſibilem, ſi p fuerit numerus primus praeter binarium.

Coroll. 2.

3. Ponendis ergo pro p ſucceſſiue numeris primis, erit 2^2-1 diuiſibile per 3; 2^4-1 per 5; 2^6-1 per 7; $2^{10}-1$ per 11 etc. quod in minoribus numeris per ſe ſit perſpicuum, in maximis autem aeque erit certum. Sic cum 641 ſit numerus primus, iſte numerus $2^{640}-1$ neceſſario per 641 erit diuiſibilis. Seu ſi poteſtas 2^{640} per 641 diuidatur, poſt diuiſionem ſupererit reſiduum $=1$.

Theorema 2.

4. Si vtraque harum formularum a^p-a et b^p-b fuerit diuiſibilis per numerum primum p, tum quoque iſta formula $(a+b)^p-a-b$ diuiſibilis erit per eundem numerum primum p.

Demonſtratio.

Cum per §. 1. $(a+b)^p-a^p-b^p$ ſit diuiſibilis per numerum p, ſi fuerit primus, atque hic formulae a^p-a et b^p-b per p diuiſibiles aſſumantur, erit quoque ſumma iſtarum trium formularum nempe $(a+b)^p-a-b$ per p, ſi fuerit numerus primus diuiſibilis Q. E. D.

Coroll.

Coroll. 1.

5. Si ponatur $b=1$, cum $1^p-1=0$ ſit diuiſibile per p; ſequitur, ſi formula a^p-a fuerit diuiſibilis per p, tum quoque formulam $(a+1)^p-a-1$ fore per p diuiſibilem.

Coroll. 2.

6. Cum igitur aſſumta formula a^p-a per p diuiſibili, ſit quoque formula $(a+1)^p-a-1$ per p diuiſibilis; ſimili modo in eadem hyphotheſi erit haec quoque formula $(a+2)^p-a-2$, hincque porro haec $(a+3)^p-a-3$, etc. atque generaliter haec c^p-c diuiſibilis per p.

Theorema 3.

7. Si p fuerit numerus primus, omnis numerus huius formae c^p-c per p erit diuiſibilis.

Demonſtratio.

Si in §. 6 ponatur $a=1$, cum ſit $a^p-a=0$ per p diuiſibilis, ſequitur has quoque formulas 2^p-2; 3^p-3; 4^p-4; etc. et generatim hanc c^p-c fore per numerum primum p diuiſibilem. Q. E. D.

Coroll. 1.

8. Quicunque ergo numerus integer pro c aſſumatur, denotante p numerum primum, omnes numeri in hac forma c^p-c contenti erunt diuiſibiles per p.

Coroll. 2.

9. Cum autem ſit $c^p-c=c(c^{p-1}-1)$, vel ipſe numerus c vel $c^{p-1}-1$ diuiſibilis erit per p. vtrumque autem

autem ſimul per p diuiſibilem eſſe non poſſe manifeſtum eſt. Quare ſi numerus c non fuerit diuiſibilis per p, haec forma $c^{p-1}-1$ certe per p erit diuiſibilis.

Coroll. 3.

10. Si ergo p fuerit numerus primus, omnes numeri in hac forma contenti $a^{p-1}-1$ erunt diuiſibiles per p exceptis iis caſibus, quibus ipſe numerus a per p eſt diuiſibilis.

Theorema 4.

11. Si neuter numerorum a et b diuiſibilis fuerit per numerum primum p, tum omnis numerus huius formae $a^{p-1}-b^{p-1}$ erit diuiſibilis per p.

Demonſtratio.

Cum neque a neque b ſit diuiſibilis per p, atque p denotet numerum primum, tam haec forma $a^{p-1}-1$, quam haec $b^{p-1}-1$ erit diuiſibilis per p. Hinc ergo quoque differentia iſtarum formularum $a^{p-1}-b^{p-1}$ erit diuiſibilis per p. Q. E. D.

Coroll. 1.

12. Cum omnis numerus primus praeter binarium, cuius ratio diuidendi per ſe eſt manifeſta, ſit impar, ponatur $2m+1$ pro p, atque perſpicuum erit, omnes numeros in hac forma $a^{2m}-b^{2m}$ contentos eſſe diuiſibiles per $p\,2m+1$, ſiquidem neque a neque b ſeorſim fuerit per $2m+1$ diuiſibilis.

Coroll. 2.

13. Quia b non eſt diuiſibilis per $2m+1$, etiam

b^{2m} et $2b^{2m}$ non diuiſibile erit per $2m+1$. Quare ſi $2b^{2m}$ addatur ad formulam $a^{2m}-b^{2m}$, quae eſt diuiſibilis per $2m+1$, prodibit formula $a^{2m}+b^{2m}$, quae per $2m+1$ non erit diuiſibilis; niſi vterque numerus a et b ſeorſim per $2m+1$ ſit diuiſibilis.

Coroll. 3.

14. Quoniam ob $2m$ numerum parem formula $a^{2m}-b^{2m}$ factores habet $(a^m-b^m)(a^m+b^m)$, neceſſe eſt vt horum factorum alter ſit diuiſibilis per $2m+1$: ambo autem ſimul per numerum $2m+1$ diuiſibiles eſſe nequeunt. Quare ſi $2m+1$ fuerit numerus primus, et neque a neque b diuiſibile ſit per $2m+1$, tum vel a^m-b^m vel a^m+b^m erit diuiſibile per $2m+1$.

Coroll. 4.

15. Si m ſit numerus par puta $=2n$, atque a^m-b^m ſeu $a^{2n}-b^{2n}$ diuiſibilis per $2m+1=4n+1$, tum ob eandem rationem vel a^n-b^n vel a^n+b^n diviſibile erit per numerum primum $4n+1$.

Theorema 5.

16. Summa duorum quadratorum $aa+bb$ per nullum numerum primum huius formae $4n-1$ vnquam diuidi poteſt, niſi vtriusque radix ſeorſim a et b ſit diuiſibilis per $4n-1$.

Demonſtratio.

Si $4n-1$ fuerit numerus primus, neque a et b per illum ſint diuiſibiles, tum $a^{4n-2}-b^{4n-2}$ erit diuiſibile per $4n-1$ (11), hincque iſta formula $a^{4n-2}+b^{4n-2}$ non erit diuiſi-

diuisibilis per $4n-1$, neque propterea vllus eius factor. At cum $4n-2=2(2n-1)$ sit numerus impariter par, formula $a^{4n-2}+b^{4n-2}$ factorem habet $aa+bb$; quare fieri nequit, vt iste factor $aa+bb$, hoc est vlla duorum quadratorum summa sit diuisibilis per $4n-1$. Q. E. D.

Coroll. 1.

17. Cum omnes numeri primi vel ad hanc formam $4n+1$ vel ad hanc $4n-1$ reuocentur, si $4n-1$ non fuerit numerus primus, diuisorem habebit formae $4n-1$; namque ex meris numeris formae $4n+1$ nunquam numerus formae $4n-1$ resultare potest. Quare cum summa duorum quadratorum per nullum numerum primum formae $4n-1$ diuidi possit, per nullum quoque numerum eiusdem formae $4n-1$, etiamsi non sit primus diuidi poterit.

Coroll. 2.

18. Summa ergo duorum quadratorum $aa+bb$, per nullum numerum huius seriei:

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, etc.

est diuisibilis. Omnes ergo numeri primi praeter binarium, qui vnquam diuisores esse possunt summae duorum quadratorum, continentur in hac forma $4n+1$; siquidem numeri a et b inter se communem diuisorem non habent.

Coroll. 3.

19. Cum omnis numerus sit vel primus vel productum ex primis, summa duorum quadratorum nullum numerum primum pro diuisore habebit, nisi qui contineatur

tur in hac forma $4n+1$. Diuisores ergo primi summae duorum quadratorum continebuntur in hac serie: 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, etc.

Scholion.

20. Quod numerus huius formae $4n-1$ nunquam possit esse summa duorum quadratorum, facile intelligitur. Numeri enim quadrati vel sunt pares vel impares, illi in hac forma $4a$, hi vero in hac $4b+1$ continentur. Quare vt summa duorum quadratorum sit numerus impar, alterum par alterum impar esse oportet, hinc oritur forma $4a+4b+1$ seu $4n+1$, ideoque nullus numerus huius formae $4n-1$ summa duorum quadratorum esse potest. Quod vero summa duorum quadratorum ne diuisorem quidem formae $4n-1$ admittat, ab omnibus scriptoribus methodi Diophanteae semper est affirmatum: nemo autem vnquam, quantum mihi constat, id demonstrauit, excepto Fermatio, qui autem suam demonstrationem nunquam publicauit, ita vt mihi quidem videar primus hanc veritatem publice demonstrasse; nullum numerum vel huius formae $4n-1$ vel per numerum eiusdem formae diuisibilem vnquam esse posse summam duorum quadratorum. Hinc ergo sequitur omnem summam duorum quadratorum inter se primorum vel esse numerum primum, vel binario excepto alios diuisores non habere, nisi qui in forma $4n+1$ contineantur.

Theorema 6.

21. Omnes diuisores summae duorum biquadratorum inter se primorum sunt vel 2, vel numeri huius formae $8n+1$.

Demon-

Demonſtratio.

Sint a^4 et b^4 duo biquadrata inter ſe prima, erit vel vtrumque impar, vel alterum par et alterum impar; priori caſu ſummae $a^4 + b^4$ diuiſor erit 2; vtroque vero caſu diuiſores impares, ſi qui fuerint, in hac forma $4n+1$ continebuntur. Cum enim biquadrata ſimul ſint quadrata, nullus diuiſor formae $4n-1$ locum invenit (16). At numeri $4n+1$ vel ad hanc formam $8n+1$ vel ad hanc $8n-3$ reuocantur. Dico autem nullum numerum formae $8n-3$ eſſe poſſe diuiſorem ſummae duorum biquadratorum. Ad hoc demonſtrandum ſit primo $8n-3$ numerus primus, atque per eum diuiſibilis erit haec forma $a^{8n-4} - b^{8n-4}$, vnde haec forma $a^{8n-4} + b^{8n-4}$ per numerum $8n-3$ prorſus non erit diuiſibilis*, niſi vterque numerus a et b ſeorſim diuiſionem admittat, qui caſus autem aſſumtione, quod ambo numeri a et b ſint inter ſe primi excluditur. Cum igitur forma $a^{8n-4} + b^{8n-4} = a^{4(2n-1)} + b^{4(2n-1)}$ diuidi nequeat per $8n-3$, nullus quoque eius factor per $8n-3$ diuidi poterit. At ob $2n-1$ numerum imparem, illius formae factor erit $a^4 + b^4$, qui ergo per nullum numerum primum formae $8n-3$ diuidi poteſt. Hinc omnes numeri primi praeter binarium, qui vnquam formam $a^4 + b^4$ diuident, erunt huiusmodi $8n+1$. Ex multiplicatione autem duorum pluriumue talium diuiſorum nunquam numerus formae $8n-3$ oritur: ex quo ſequitur nullum prorſus numerum huius formae $8n-3$ ſiue ſit primus ſiue compoſitus, ſummam duorum biquadratorum inter ſe primorum diuidere. Q. E. D.

 Co-

Coroll. 1.

22. Cum omnes numeri impares in vna harum quatuor formarum contineantur: $8n \pm 1$ et $8n \pm 3$: praeter numeros in forma prima $8n+1$ contentos nullus alius poterit eſſe diuiſor ſummae duorum biquadratorum.

Coroll. 2.

23. Omnes ergo diuiſores primi ſummae duorum biquadratorum inter ſe primorum erunt vel 2 vel in hac ſerie contenti. 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137, 193, etc. quae complectitur omnes numeros primos formae $8n+1$.

Coroll. 3.

24. Si quis ergo numerus puta N fuerit ſumma duorum biquadratorum, tum is vel erit primus, vel alios non habebit diuiſores, niſi qui in forma $8n+1$ contineantur; vnde inueſtigatio diuiſorum mirum in modum contrahitur.

Coroll. 4.

25. Nullus igitur numerus, qui diuiſorem habet non in forma $8n+1$ contentum, erit ſumma duorum biquadratorum; niſi forte habeat quatuor diuiſores aequales, qui autem in conſideratione biquadratorum reiici ſolent.

Theorema 7.

26. Omnes diuiſores huiusmodi numerorum a^8+b^8 ſi quidem a et b ſunt numeri inter ſe primi, ſunt vel 2 vel in hac forma $16n+1$ continentur.

Demon.

Demonſtratio.

Quia a^8 et b^8 ſimul ſunt biquadrata, eorum ſumma $a^8 + b^8$ alios non admittet diuiſores, niſi qui in forma $8n+1$ contineantur. At numeri in hac forma $8n+1$ contenti ſunt vel $16n+1$ vel $16n-7$. Sit $16n-7$ numerus primus, ac per eum diuidi non poterit forma $a^{16n-8} + b^{16n-8}$ (13). ſeu $a^{8(2n-1)} + b^{8(2n-1)}$, neque propterea vllus eius factor. Verum ob $2n-1$ numerum imparem haec forma diuiſorem habet $a^8 + b^8$, quae ergo per nullum numerum primum $16n-7$ erit diuiſibilis, ac propterea alios diuiſores primos habere nequit, niſi qui in forma $16n+1$ contineantur. Ex multiplicatione autem duorum pluriumue huiusmodi numerorum $16n+1$, perpetuo productum eiusdem formae naſcitur, neque vnquam numerus formae $16n-7$ reſultare poteſt. Vnde cum nullus numerus formae $16n-7$ diuiſor ipſius $a^8 + b^8$ exiſtere poſſit, neceſſe eſt vt omnes huius formae $a^8 + b^8$ diuiſores, ſi quos habet, ſiue ſint primi ſiue compoſiti, perpetuo in hac formula $16n+1$ contineantur. Q. E. D.

Coroll. 1.

27. Nullus igitur numerus, qui in hac forma $16n+1$ non includitur, vnquam eſſe poteſt diuiſor ſummae duarum poteſtatum octaui gradus inter ſe primarum.

Coroll. 2.

28 Si quis ergo voluerit numeri cuiuſpiam huius formae $a^8 + b^8$ diuiſores inueſtigare, is diuiſionem per nullos alios numeros primos niſi in hac forma $16n+1$

con-

contentos, tentet, cum demonſtratum ſit omnes reliquos numeros primos huius formae diuiſores eſſe non poſſe.

Theorema 8.

29. Summa duarum huiusmodi poteſtatum $a^{2^m}+b^{2^m}$ quarum exponens eſt dignitas binarii alios diuiſores non admittit, niſi qui contineantur in hac forma $2^{m+1}n+1$.

Demonſtratio.

Quemadmodum demonſtrauimus omnes diuiſores formae a^2+b^2 in hac forma $4n+1$ contineri, hincque vlterius diuiſores omnes formae a^4+b^4 in $8n+1$ et formae a^8+b^8 in $16n+1$ contineri euicimus; ita ſimili modo oſtendi poteſt formam $a^{16}+b^{16}$ nullos alios diuiſores admittere niſi in formula $32n+1$ contentos. Dehinc porro intelligemus formas $a^{32}+b^{32}$; $a^{64}+b^{64}$ etc. alios diuiſores habere non poſſe, niſi qui in formulis $64n+1$, $128n+1$ etc. includantur. Sicque in genere patebit formae $a^{2^m}+b^{2^m}$ alios non dari diuiſores, niſi qui in formula $2^{m+1}n+1$ contineantur. Q. E. D.

Coroll. 1.

30. Nullus ergo numerus primus, qui in hac forma $2^{m+1}n+1$ non includitur, vnquam eſſe poteſt diuiſor vllius numeri in hac forma $a^{2^m}+b^{2^m}$ contenti.

Coroll. 2.

31. Diuiſores ergo huiusmodi numeri $a^{2^m}+b^{2^m}$ inquiſiturus inutiliter operam ſuam comſumeret, ſi aliis numeris primis praeter eos, quas forma $2^{m+1}n+1$ ſuppeditat, diuiſionem tentare vellet.

Scholion

Scholion 1.

32. Fermatius affirmauerant, etiamſi id ſe demonſtrare non poſſe ingenue eſſet confeſſus, omnes numeros ex hac forma $2^{2^m}+1$ ortos eſſe primos; hincque problema alias difficillimum, quo quaerebatur numerus primus dato numero maior, reſoluere eſt conatus. Ex vltimo theoremate autem perſpicuum eſt, niſi numerus $2^{2^m}+1$ ſit primus eum alios diuiſores habere non poſſe praeter tales, qui in forma $2^{m+1}n+1$ contineantur. Cum igitur veritatem huius effati Fermatiani pro caſu $2^{32}+1$ examinare voluiſſem, ingens hinc compendium ſum nactus, dum diuiſionem aliis numeris primis, praeter eos, quos formula $64n+1$ ſuppeditat, tentare non opus habebam. Huc igitur inquiſitione reducta mox deprehendi ponendo $n=10$ numerum primum 641 eſſe diuiſorem numeri $2^{32}+1$, vnde problema memoratum, quo numerus primus dato numero maior requiritur, etiamnum manet inſolutum.

Scholion 2.

33. Summa duarum poteſtatum eiusdem gradus vti a^m+b^m ſemper habet diuiſores algebraice aſſignabiles, niſi m ſit dignitas binarii. Nam ſi m ſit numerus impar, tum a^m+b^m ſemper diuiſorem habet $a+b$, atque ſi p fuerit diuiſor ipſius m, tum quoque a^p+b^p formam a^m+b^m diuidet. Sin autem m ſit numerus par, in hac formula $2^n p$ continebitur, ita vt p ſit numerus impar, hocque caſu $a^{2^n}+b^{2^n}$ diuiſor erit formae a^m+b^m exiſtente $m=2^n p$. Atque ſi p habeat diuiſorem q, tum

etiam $a^{2^n q}+b^{2^n q}$ erit diuisor formae a^m+b^m. Quocirca a^m+b^m numerus primus esse nequit nisi m sit dignitas binarii. Hoc igitur casu, si a^m+b^m, non fuerit numerus primus, alios diuisores habere nequit, nisi qui formula $2mn+1$ contineantur. Contra autem si differentia duarum potestatum eiusdem gradus proponatur a^m-b^m, ea semper diuisorem habet $a-b$; praeterea vero si exponens m diuisorem habeat p, erit quoque a^p-b^p diuisor formae a^m-b^m. Hinc si m sit numerus primus forma a^m-b^m praeter $a-b$ alium diuisorem algebraice assignabilem non habebit, quare si a^m-b^m fuerit numerus primus, necesse est vt m sit numerus primus et $a-b=1$. Interim tamen ne his quidem casibus forma a^m-b^m semper est numerus primus; sed quoties $2m+1$ est numerus primus, per eum erit diuisibilis. Praeterea vero etiam alios diuisores habere potest, quos hic sum inuestigaturus.

Theorema 9.

34. Si differentia potestatum a^m-b^m fuerit diuisibilis per numerum primum $2n+1$, atque p sit maximus communis diuisor numerorum m et $2n$, tum quoque a^p-b^p erit diuisibilis per $2n+1$.

Demonstratio.

Quia $2n+1$ est numerus primus, erit $a^{2n}-b^{2n}$ diuisibilis per $2n+1$, et cum per hypothesin a^m-b^m sit quoque diuisibilis per $2n+1$. Sit $2n=\alpha m+q$, seu q sit residuum in diuisione ipsius $2n$ per m remanens; et cum $a^{\alpha m}-b^{\alpha m}$ sit quoque per $2n+1$ diuisibilis, multiplicetur haec forma per a^q, erit $a^{\alpha m+q}-a^q b^{\alpha m}$ per

2n

$2n+1$ diuiſibilis: at poſito $\alpha m+q$ pro $2n$ eſt quoque $a^{\alpha m+q}-b^{\alpha m+q}$ per $2n+1$ diuiſibilis: a qua formula ſi prior ſubtrahatur, reſiduum $a^q b^{\alpha m}-b^{\alpha m+q}= b^{\alpha m}(a^q-b^q)$ quoque per $2n+1$ erit diuiſibile. Hinc cum b per hypotheſin diuiſorem $2n+1$ non habeat, neceſſe eſt vt a^q-b^q per $2n+1$ ſit diuiſibile. Ponatur porro $m=\beta q+r$, et cum vtraque haec formula $a^{\beta q+r} -b^{\beta q+r}$ et $a^{\beta q}-b^{\beta q}$ ſit per $2n+1$ diuiſibilis, multiplicetur poſterior per a^r et a priori ſubtrahatur, atque reſiduum $b^{\beta q}(a^r-b^r)$ ſeu a^r-b^r pariter per $2n+1$ erit diuiſibile. Simili modo patebit, ſi fuerit $q=\gamma r+s$ tam formulam a^s-b^s per $2n+1$ fore diuiſibilem; atque ſi per huiusmodi continuam diuiſionem valores litterarum q, r, s, t etc. inueſtigentur, tandem peruenietur ad maximum communem diuiſorem numerorum m et $2n$, qui ergo ſi ponatur $=p$, erit a^p-b^p diuiſibile per $2n+1$. Q. E. D.

Coroll. 1.

35. Si igitur m fuerit numerus ad $2n$ primus, maximus eorum communis diuiſor erit vnitas, ac propterea ſi a^m-b^m fuerit diuiſibile per numerum primum $2n+1$, tum quoque $a-b$ per $2n+1$ erit diuiſibile.

Coroll. 2.

36. Si ergo differentia numerorum $a-b$ non fuerit diuiſibilis per $2n+1$, tum quoque nulla huiusmodi forma a^m-b^m, vbi m eſt ad $2n$ numerus primus, per $2n+1$ diuiſibilis eſſe poteſt.

Coroll. 1.

37. Quodſi ergo m fuerit numerus primus, forma

$a^m - b^m$ per numerum primum $2n+1$ diuidi non potest nisi m sit diuisor ipsius $2n$; posito quod $a-b$ non sit diuisibile per $2n+1$.

Coroll. 4.

38. Existente ergo m numero primo, haec forma $a^m - b^m$ praeter diuisorem $a-b$ alios diuisores habere nequit, nisi qui includantur in hac formula $mn+1$. Vnde diuisores numeri cuiuspiam in hac forma $a^m - b^m$ contenti inuestigaturus diuisionem tantum per numeros primos in forma $mn+1$ contentos tentabit.

Coroll. 5.

39. Nisi ergo numerus $2^m - 1$ sit primus, existente m numero primo, alios diuisores habere non poterit, nisi qui includantur in hac forma $mn+1$.

Coroll. 6.

40. Si ergo m sit numerus primus, diuisores formulae $a^m - b^m$ praeter $a-b$, si quidem a et b fuerint numeri inter se primi, continebuntur in hac serie:
$2m+1$; $4m+1$; $6m+1$; $8m+1$; $10m+1$; etc. si hinc numeri non primi expungantur.

Theorema 10.

41. Si formula $a^m \pm b^m$ diuisorem habeat p, tum quoque haec expressio $(a \pm \alpha p)^m \pm (b \pm \beta p)^m$ per p erit diuisibilis.

Demonstratio.

Si potestates $(a \pm \alpha p)^m$ et $(b \pm \beta p)^m$ methodo consueta euoluantur, in vtraque serie omnes termini praeter

ter primum diuisibiles erunt per p. Scilicet formula $(a \pm \alpha p)^m \pm (b \pm \beta p)^m$ abibit in hanc formam:

$$+ a^m \pm m a^{m-1} \alpha p + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} \alpha^2 p^2 \pm \text{ etc.}$$
$$\pm (b^m \pm m b^{m-1} \beta p - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} b^{m-2} \beta^2 p^2 \pm \text{ etc.})$$

Vnde perspicuum est si $a^m - b^m$ fuerit diuisibile, tum quoque haec forma $(a \pm \alpha p)^m - (b \pm \beta p)^m$ per p erit diuisibilis. Q. E. D.

Coroll. 1.

42. Si igitur $a^m \pm 1$ fuerit diuisibile per p, tum quoque haec formula $(a \pm \alpha p)^m \pm 1$ per p erit diuisibilis.

Coroll. 2.

43. Si $a^m \pm b^m$ fuerit diuisibile per p, tum quoque haec formula $(a \pm \alpha p)^m \pm b^m$, vel haec $a^m \pm (b \pm \beta p)^m$ per p erit diuisibilis.

Scholion.

44. Eodem quoque modo generaliter demonstrari potest, si fuerit $A a^m \pm B b^m$ diuisibile per p, tum quoque hanc formam $A(a \pm \alpha p)^m \pm B(b \pm \beta p)^m$ fore per p diuisibilem. Haecque veritas aeque locum inuenit, siue p sit numerus primus siue secus. Quin etiam non opus est, vt vtriusque potestatis idem sit exponens m, sed etiamsi essent inaequales, conclusio perinde valebit. Tum vero quoque si m fuerit numerus par ex diuisibilitate formulae $a^m \pm b^m$ per numerum p, diuisibilitas etiam huius formulae $(\alpha p \pm a)^m \pm (\beta p \pm b)^m$ sequitur. Verum haec aliaque similia ex algebrae elementis sponte patent.

 Theore-

Theorema 11.

45. Si fuerit $a = ff \pm (2m+1)\alpha$, et $2m+1$ numerus primus, tum iſta expreſſio $a^m - 1$ erit diuiſibilis per $2m+1$.

Demonſtratio.

Cum ſit $2m+1$ numerus primus, per eum diuidi poterit haec formula $f^{2m} - 1$, ſeu haec $(ff)^m - 1$. Hinc per theorema praecedens quoque iſta formula $(ff \pm (2m+1)\alpha)^m - 1$ erit diuiſibilis per $2m+1$. Quare ſi fuerit $a = ff \pm (2m+1)\alpha$, formula $a^m - 1$ per numerum primum $2m+1$ diuidi poterit. Q. E. D.

Coroll. 1.

46. Si ergo fuerit vel $a = (2m+1)\alpha + 1$ vel $a = (2m+1)\alpha + 4$, vel $a = (2m+1)\alpha + 9$; vel $a = (2m+1)\alpha + 16$ vel etc. tum formula $a^m - 1$ ſemper erit diuiſibilis per $2m+1$, ſi quidem $2m+1$ fuerit numerus primus.

Coroll. 2.

46. Cum caſus, quibus ipſe numerus a eſt diuiſibilis per $2m+1$ excludantur, manifeſtum eſt in formula $ff \pm (2m+1)\alpha$ numerum f per $2m+1$ diuiſibilem eſſe non poſſe. Hinc pro f omnes numeri aſſumi poſſunt qui per $2m+1$ non ſint diuiſibiles.

Coroll. 3.

47. Numeri ergo pro f aſſumendi ſunt $(2m+1)k \pm 1$; $(2m+1)k \pm 2$; $(2m+1)k \pm 3$; ...... $(2m+1)k \pm m$: in his enim formulis omnes numeri per $2m+1$ non diuiſibiles continentur. Hinc ſumendis quadratis

dratis formae ipsius a, si quidem partes per $2m+1$ diuisibiles in vnum colligantur, erunt sequentes: $(2m+1)p+1$; $(2m+1)p+4$; $(2m+1)p+q$; .... $(2m+1)p+mm$ quarum numerus est m.

Coroll. 4.

48. Ad valores igitur ipsius a inueniendos, vt a^m-1 per numerum primum $2m+1$ fiat diuisibile, inuestigari oportet residua, quae in diuisione cuiusque numeri quadrati per $2m+1$ remanent. Si enim r fuerit huiusmodi residuum, erit $(2m+1)p+r$ idoneus valor pro a.

Coroll. 5.

49. Omnia haec residua r erunt autem minora quam $2m+1$, neque tamen omnes numeri minores quam $2m+1$ erunt valores ipsius r; quia numerus valorum ipsius r maior esse nequit quam m. Dabuntur ergo semper m numeri, qui pro r adhiberi non poterunt.

Coroll. 6.

50. Valores vero ipsius r erunt primo omnes numeri quadrati ipso $2m+1$ minores, tum vero residua, quae in diuisione maiorum quadratorum per $2m+1$ remanent, neque tamen vnquam numerus omnium diuersorum valorum ipsius r. maior esse poterit numero m.

Scholion.

51. Vt vsus huius theorematis clarius appareat, atque per exempla numerica illustrari possit, sequentia problemata adiicere visum est, ex quibus non solum veritas theorematis luculentius perspicietur, sed etiam vicissim patebit

tebit, quoties a non habuerit valorem hic aſſignatum, toties formulam $a^m - 1$ non eſſe diuiſibilem per $2m+1$. Cum igitur haec formula $a^{2m} - 1$ ſemper ſit diuiſibilis per $2m+1$, quoties $a^m - 1$ diuiſionem per $2m+1$ non admittit, toties $a^m + 1$ per $2m+1$ diuiſibile eſſe oportebit.

Exempl. 1.

52. *Inuenire valores ipſius* $\underline{a}$, *vt* $a^2 - 1$ *fiat diuiſibile per* 5.

Reſidua, quae ex diuiſione quadratorum per 5 remanent ſunt 1 et 4; hinc neceſſe eſt vt ſit vel $a = 5p+1$ vel $a = 5p+4$, ſiue $a = 5p \pm 1$. Priori caſu fit $aa-1$ ſeu $(a-1)(a+1) = 5p(5p+2)$ poſteriori autem $= (5p-2)5p$. vtroque ergo diuiſibilitas per 5 perſpicitur. Sin autem fuerit vel $a = 5p+2$, vel vel $a = 5p+3$ neutro caſu formula $aa-1$ per 5 erit diuiſibilis.

Exempl. 2.

53. *Inuenire valores ipſius* $\underline{a}$, *vt haec forma* $a^3 - 1$ *fiat per* 7 *diuiſibilis.*

Tria reſidua, quae in diuiſione omnium quadratorum per 7 remanent ſunt, 1, 2, 4. Hinc valores ipſius $\underline{a}$ ſunt: $7p+1$; $7p+2$, et $7p+4$, ſin autem fuerit vel $a = 7p+3$ vel $7p+5$ vel $7p+6$, tum non formula propoſita $a^3 - 1$ ſed haec $a^3 + 1$ per 7 fiet diuiſibilis.

Exempl. 3.

54. *Inuenire valores ipſius* a *vt haec forma* $a^5 - 1$ *fiat per* 11 *diuiſibilis.*

Nu-

Numeri quadrati per 11 diuisi dabunt 5 diuersa residua quae sunt: 1, 3, 4, 5, 9. Hinc formula a^5-1 per 11 erit diuisibilis, si fuerit $a=11p+r$ denotante r vnumquemque ex numeris 1, 3, 4, 5, 9. Sin autem pro a sumatur quidam ex his numeris 2, 6, 7, 8, 10 multiplo quocunque ipsius 11 auctus, tum a^5+1 per 11 erit diuisibile.

Theorema 12.

55. Si fuerit $a=f^3\pm(3m+1)\alpha$, existente $3m+1$ numero primo, tum haec forma a^m-1 semper erit per $3m+1$ diuisibilis.

Demonstratio.

Ob $3m+1$ numerum primum erit $f^{3m}-1$ diuisibile per $3m+1$. At est $f^{3m}-1=(f^3)^m-1$, vnde quoque haec formula $(f^3\pm(3m+1)\alpha)^m-1$ erit diuisibilis per $3m+1$. Quare si sumatur $a=f^3\pm(3m+1)\alpha$, tum haec formula a^m-1 erit per $3m+1$ diuisibilis. Q. E. D.

Coroll. 1.

56. Ad valores ergo ipsius a inueniendos, omnia residua quae oriuntur, si cubi per $3m+1$ diuidantur, notari debent. Vnumquodque enim horum residuorum multiplo ipsius $3m+1$ quocunque auctum dabit valorem idoneum pro a.

Coroll. 2.

57. Cum $3m+1$ esse debeat numerus primus, necesse est vt m sit numerus par, sicque numerus primus $3m+1$ vnitate superabit multiplum senarii. Hinc erunt numeri pro m et $3m+1$ adhibendi sequentes:

m	2, 4, 6, 10, 12, 14, 20, 22, 24, 26, 32 etc.
$3m+1$;	7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97, etc.

Coroll. 3.

58. Si ergo numeri cubici per hos numeros primos $3m+1$ diuidantur, sequentia residua remanebunt:

Diuisores	Residua
7	1, 6
13	1, 5, 8, 12
19	1, 7, 8, 11, 12, 18
31	1, 2, 4, 8, 15, 16, 23, 27, 29, 30
37	1, 6, 8, 10, 11, 14, 23, 26, 27, 29, 31, 36
	etc.

In his residuis primo occurrunt omnes cubi diuisoribus minores, deinde si quodpiam residuum fuerit r pro diuisore $3m+1$, tum quoque aliud dabitur residuum $=3m+1-r$. si enim cubus f^3 dederit residuum r, cubus $(3m+1-f)^3$ dabit residuum $-r$ seu $3m+1-r$.

Scholion.

59. Notatu hic dignum est numerum residuorum perpetuo esse $=m$, si diuisor fuerit $=3m+1$. Semper ergo dantur tres cubi, quorum radices sint $< 3m+1$, ex quibus idem residuum resultat. Scilicet hi tres cubi 1^3, 2^3, 4^3 per 7 diuisi idem dant residuum $=1$, et hi tres cubi 2^3, 5^3, et 6^3 per 13 diuisi idem dant residuum 8. Praeterea hic notari conuenit, si pro a alii valores praeter hos assignatos capiantur, tum a^m-1 non esse per $3m+1$ diuisibile, quod etsi verum esse facile de-

pre-

prehenditur, tamen eius demonſtratio ex praecedentibus non ſequitur, pertinetque haec veritas ad id genus, quod nobis noſſe, non autem demonſtrare licet. His ergo caſibus, quibus $a^m - 1$ per $3m + 1$ non eſt diuiſibile, haec formula $a^{2m} + a^m + 1$ diuiſionem admittet.

Theorema 13.

60. Si fuerit $a = f^n \pm (mn + 1)\alpha$ exiſtente $mn + 1$. numero primo, tum haec forma $a^m - 1$ erit diuiſibilis per $mn + 1$.

Demonſtratio.

Ob $mn + 1$ numerum primum erit $f^{mn} - 1$ diuiſibile per $mn + 1$. At eſt $f^{mn} - 1 = (f^n)^m - 1$, vnde quoque haec forma $(f^n \pm (mn + 1)\alpha)^m - 1$ erit diuiſibilis per $mn + 1$. Quare ſi ponatur $a = f^n \pm (mn + 1)\alpha$, haec formula $a^m - 1$ per $mn + 1$ diuidi poterit. Q. E. D.

Coroll. 1.

61. Si ergo poteſtates exponentis n per numerum primum $mn + 1$ diuidantur, ſingula reſidua vel ipſa vel multiplo ipſius $mn + 1$ quocunque aucta idoneos praebebunt valores pro a, vt $a^m - 1$ fiat per $mn + 1$ diuiſibile.

Coroll. 2.

62. Hinc ſi $a^m - 1$ non fuerit per $mn + 1$ diuiſibile, tum valor ipſius a in hac expreſſione $f^n \pm (mn + 1)\alpha$ non continebitur, ſeu nulla dabitur poteſtas exponentis n quae per $mn + 1$ diuiſa relinquat a.

 Scho-

Scholion.

63. Propositionis huius conuersa, si omni modo examinetur, quoque vera deprehenditur; ita vt quoties $a^m - 1$ sit diuisibile per $mn + 1$. toties quoque valor ipsius a in formula $f^n \pm (mn+1)\alpha$ contineatur; seu toties dabitur potestas f^n quae per $mn+1$ diuisa relinquat a pro residuo. Ita cum obseruassem formulam $2^{64}-1$ esse per 641 diuisibilem, ob $m = 64$ fiet $n = 10$, dabitur quoque potestas dignitatis decimae, quae per 641 diuisa relinquat 2. Atque reuera huiusmodi potestatem deprehendi esse 96^{10}. Praeterea vero cum $2^{32}-1$ non sit diuisibile per 641, hoc casu fit $m = 32$ et $n = 20$; nulla igitur datur potestas dignitatis vicesimae, quae per 641 diuisa relinquat 2. Veritas huius posterioris asserti rigorose est euicta, sed adhuc desideratur demonstratio harum propositionum conuersarum: scilicet si $a^m - 1$ fuerit diuisibile per numerum primum $mn+1$, tum quoque semper a esse numerum in hac formula $f^n \pm (mn+1)\alpha$ comprehensum. Atque si a non contineatur in formula $f^n \pm (mn+1)\alpha$ tum quoque $a^m - 1$ per $mn+1$ diuisionem non admittere. Quarum propositionum si altera demonstrari posset, simul veritas alterius esset euicta. Ceterum theorema hic demonstratum huc redit, vt quoties $f^n - a$ fuerit diuisibile per $mn+1$, toties quoque formula $a^m - 1$ sit per $mn+1$ diuisibilis. In hoc genere latius patet theorema sequens.

Theorema 14.

64. Si fuerit $f^n - ag^n$ diuisibile per numerum primum $mn+1$, tum quoque $a^m - 1$ erit diuisibile per $mn+1$.

De-

Demonſtratio.

Cum ponatur formula $f^n - ag^n$ diuiſibilis per $mn+1$, erit quoque haec formula $f^{mn} - a^m g^{mn}$, quippe quae per illam diuidi poteſt, diuiſibilis per $mn+1$. At cum $mn+1$ ſit numerus primus, per eum diuiſibilis erit haec forma $f^{mn} - g^{mn}$; vnde quoque differentia $g^{mn}(a^m - 1)$ ſeu ipſa formula $a^m - 1$ per $mn+1$ erit diuiſibilis, propterea quod g per $mn+1$ diuiſionem admittere nequeat, niſi ſimul f per eundem eſſet diuiſibile, qui caſus in noſtro ratiocinio perpetuo excluditur. Q. E. D.

Coroll. 1.

65. Si ergo $a^m - 1$ per $mn+1$ non fuerit diuiſibile, tum quoque nulli dantur numeri f et g vt haec formula $f^n - ag^n$ per $mn+1$ fiat diuiſibilis.

Coroll. 2.

66. Si ſuperioris propoſitionis conuerſa demonſtrari poſſet, tum quoque euictum foret: quoties $f^n - a$ per $mn+1$ diuidi nequeat, tum ne hanc quidem formulam $f^n - ag^n$ diuiſionem per $mn+1$ admittere poſſe, ſimul vero etiam pateret, ſi $f^n - ag^n$ ſit diuiſibile per $mn+1$, tum quoque dari huiusmodi formulam $f^n - a$, quae ſit per $mn+1$ diuiſibilis.

Theorema 15.

67. Si huiusmodi formula $af^n - bg^n$ fuerit diuiſibilis per numerum primum $mn+1$, tum quoque haec formula $a^m - b^m$ erit per $mn+1$ diuiſibilis.

Demonſtratio.

Si fuerit $af^n - bg^n$ diuiſibile per $mn+1$, tum quoque haec formula $a^m f^{mn} - b^m g^{mn}$ erit per $mn+1$ diuiſibilis. At ob $mn+1$ numerum primum erit quoque haec formula $f^{mn} - g^{mn}$, ideoque et haec $a^m f^{mn} - a^m g^{mn}$ per $mn+1$ diuiſibilis, ſubtrahatur haec ab illa $a^m f^{mn} - b^m g^{mn}$ atque reſiduum $g^{mn}(a^m - b^m)$ ſeu $a^m - b^m$ per $mn+1$ erit diuiſibile. Q. E. D.

Coroll. 1.

68. Si itaque $a^m - b^m$ non fuerit per $mn+1$ diviſibile, tum nulli dabuntur numeri pro f et g ſubſtituendi, vt huiusmodi formula $af^n - bg^n$ ſit per $mn+1$ diuiſibilis.

Coroll. 2.

69. Huius propoſitionis conuerſa, quod, ſi fuerit formula $a^m - b^m$ diuiſibilis per $mn+1$, ſimul dentur numeri f et g, vt $af^n - bg^n$ fiat diuiſibilis per $mn+1$ vtcunque examinetur, vera deprehenditur. Interim tamen eius demonſtratio etiamnum deſideratur.

Scholion.

70. Caſus huius propoſitionis inuerſae demonſtrari poteſt, quo numeri m et n ſunt inter ſe primi: hoc enim caſu ſemper eiusmodi numeri μ et ν exhiberi poſſunt, vt ſit $\mu n \pm 1 = \nu m$. Namque ſi inter numeros m et n ea operatio inſtituatur, quae pro maximo communi diviſore inſtitui ſolet, atque quoti notentur, ex iiſque fractiones ad $\frac{m}{n}$ appropinquantes quaerantur, vltima erit $\frac{m}{n}$, et ſi penultima fuerit $\frac{\mu}{\nu}$ erit $\mu n \pm 1 = \nu m$. Hoc ergo lem-

lemmate praemisso demonstratio propositionis conuersae, qua $\underline{m}$ et $\underline{n}$ sunt numeri inter se primi ita se habebit.

Theorema 16.

71. Si m et n fuerint numeri primi inter se, atque ista formula $a^m - b^m$ diuisibilis sit per numerum $mn + 1$, tum dabitur formula $af^n - bg^n$ diuisibilis per $mn + 1$.

Demonstratio.

Ponatur $f = a^\mu$ et $g = b^\mu$, atque formula $af^n - bg^n$ abibit in hanc $a^{\mu n + 1} - b^{\mu n + 1}$, quare si μ ita capiatur, vt sit $\mu n + 1 = \nu m$, habebitur $a^{\nu m} - b^{\nu m}$, quae cum sit diuisibis per $a^m - b^m$, quoque per $mn + 1$ diuisibilis erit, sicque dabitur casus, quo $af^n - bg^n$ diuisibile erit per $mn + 1$. Sin autem fuerit $\mu n - 1 = \nu m$, tum sumatur $f = b^\mu$ et $g = a^\mu$ fietque $af^n - bg^n = ab^{\mu n} - ba^{\mu n} = ab(b^{\mu n - 1} - a^{\mu n - 1}) = -ab(a^{\nu m} - b^{\nu m})$ ideoque erit per $mn + 1$ diuisibilis. Q. E. D.

Coroll. 1.

72. Si ergo m et n fuerint numeri inter se primi, atque $mn + 1$ numerus primus, tum istae propositiones sunt demonstratae. I. Si $af^n - bg^n$ fuerit diuisibile per $mn + 1$, tum quoque $a^m - b^m$ erit per $mn + 1$ diuisibile, et si illa formula nullo modo sit diuisibilis per $mn + 1$, tum etiam haec non erit diuisibilis. II. Si $a^m - b^m$ fuerit diuisibile per $mn + 1$, tum dabitur numerus huius formae $af^n - bg^n$ per $mn + 1$ diuisibilis, atque si $a^m - b^m$ per $mn + 1$ diuisionem non admittat, tum nullus dabitur numerus formae $af^n - bg^n$ per $mn + 1$ diuisibilis.

Coroll.

Coroll. 2.

73. Si m ſit numerus par, tum b aeque negatiue atque affirmatiue accipi poteſt, hoc ergo caſu ſi $a^m - b^m$ fuerit diuiſibile per $mn + 1$, tum etiam eiusmodi formula $af^n + bg^n$ per $mn + 1$ diuiſibilis aſſignari poterit; id quod etiam inde patet, quod n ſit numerus impar, ideoque poteſtas g^n negatiua fieri queat.

Coroll. 3.

74. Simili modo demonſtrabitur, ſi fuerint vt ante m et n numeri inter ſe primi, atque haec formula $a^m - b^m$ ſit diuiſibilis per $mp + 1$, tum quoque exhiberi poſſe formulam huiusmodi $af^n - bg^n$ diuiſibilem per $mp + 1$.

VARIAE

VARIAE DEMONSTRATIONES GEOMETRIAE.

AVCTORE
L. EVLERO.

§. 1.

Reperitur in commercio epiſtolico Fermatii propoſitio quaedam geometrica, quam Geometris demonſtrandam propoſuit. Quae etſi ad naturam circuli ſpectat, nihilque difficultatis primo intuitu inuoluere videtur, tamen a pluribus Geometris fruſtra eſt ſuſcepta, neque vsquam adhuc eius demonſtratio eſt tradita. Per Analyſin quidem non difficulter eius veritas agnoſcitur, indeque demonſtrationem deriuare non admodum foret arduum, ſed huiusmodi demonſtrationes plerumque ita analyſin olent, vt ab huius artis expertibus vix intelligi queant. Requiritur igitur huius propoſitionis a Fermatio allatae eiusmodi demonſtratio geometrica, quae more veterum Geometrarum ſit adornata, et quae etiam ab iis, qui analyſi non ſint aſſueti, intelligi poſſit. Talem igitur demonſtrationem hic tradam, quae ſequenti lemmate innititur. Tab. II.

Lemmata.

§. 2. Si linea recta AB vtcunque ſecetur in duobus punctis R et S, erit rectangulum ex tota AB in partem mediam RS vna cum rectangulo ex partibus extremis AR et BS aequale rectangulo ex partibus AS et BR, ſeu erit: $AB \cdot RS + AR \cdot BS = AS \cdot BR$. Fig. 1.

Demonstratio.

Cum ſit $AB = AS + BS$, erit vtrumque ducendo in RS,

$$AB.RS = AS.RS + BS.RS$$

addatur $AR.BS$ $AR.BS$ vtrinque, et erit

$$AB.RS + AR.BS = AS.RS + BS.RS + AR.BS$$

At eſt $BS.RS + AR.BS = BS(RS + AR) = BS.AS$,
vnde fit $AB.RS + AR.BS = AS.RS + BS.AS$
Verum eſt $AS.RS + BS.AS = AS(RS + BS) = AS.BR$
Conſequenter habebitur: $AB.RS + AR.BS = AS.BR$

Q. E. D.

Scholion.

Fig. 2. §. 3. Hocce lemma etiam ſequenti modo per ſolam figuram geometricam demonſtrari poteſt. Super data recta AB in punctis R et S vtcunque diuiſa conſtituatur quadratum, $ABab$ et latus Ba ſimili modo ſecetur in punctis r et s, vt ſit $Bs = BS$; $sr = SR$ et $ar = AR$: tum ductis rectis Rb, Sg item sc, rd lateribus quadrati parallelis, erunt partes Ss, cg quadrata circa diagonalem Bb ſita, ideoque erit $\square Ae = \square ae$. Addatur vtrique rectangulum cf, fietque $\square Ae + \square cf = \square ae + \square cf$ ſeu $\square Af = \square ae + \square cf$, ſed $\square ae = \square af + \square er$, vnde $\square Af = \square af + \square er + \square cf = \square af + \square er$. At eſt $\square Af = AS.Br = AS.BR$; et $\square af = ar.BS = AR.BS$ atque $\square cr = AB.rs = AB.RS$, quibus valoribus ſubſtitutis elicietur: $AS.BR = AR.BS + AB.RS$ ſeu $AB.RS + AR.BS = AS.BR$ prorſus vti lemma habet.

Theorema

Theorema Fermatii.

§. 4. Si ſuper ſemicirculi AMB diametro AB Fig. 3. conſtituatur parallelogrammum rectangulum ABFE, cuius latitudo AE ſeu BF aequetur chordae quadrantis eiusdem circuli ſeu lateri quadrati inſcripti, atque ex punctis E et F ad quoduis peripheriae punctum M ducantur rectae EM, FM; his diameter AB ita ſecabitur in punctis R et S, vt ſit: $AS^2 + BR^2 = AB^2$.

Demonſtratio.

Ex puncto M per terminos diametri A et B producantur rectae MAP et MBQ donec baſi EF productae occurrant in punctis P et Q. Iam quia angulus AMB eſt rectus, erit $P + Q =$ ang. recto; at eſt etiam $P + \alpha =$ ang. recto et $Q + \beta =$ ang. recto, ob rectas AE et BF ad EF normales; vnde erit $P = \beta$ et $Q = \alpha$, ideoque triangula PEA et BFQ inter ſe ſimilia: ex quo habebitur $PE : AE = BF : QF$ hincque $PE . QF = AE . BF = AE^2$, et propterea $2 PE . QF = 2 AE^2$. At quia AE aequatur chordae quadrantis, erit $2 AE^2 = AB^2 = EF^2$, ita vt futurum ſit $2 PE . QF = EF^2$. Quare cum hic recta PQ ita in punctis E et F ſecta habeatur, vt ſit duplum rectangulum partium extremarum PE et QF aequale partis mediae EF quadrato; diameter vero AB in punctis R et S ſimili modo ſit ſecta, ſequitur fore quoque duplum rectangulum partium extremarum AR et BS aequale quadrato partis mediae RS, ſeu erit $2 AR . BS = RS^2$. Iam cum ſit $AS + BR = AB + RS$, erit quadratis ſumtis:

$AS^2 + BR^2 + 2AS.BR = AB^2 + RS^2 + 2AB.RS$
Ponatur hic pro RS^2 eius valor $2AR.BS$ fietque
$AS^2 + BR^2 + 2AS.BR = AB^2 + 2AB.RS + 2AR.BS$
At per lemma praemissum est $AB.RS + AR.BS = AS.BR$ ideoque etiam $2AB.RS + 2AR.BS = 2AS.BR$, quo valore in illa aequalitate substituto orietur:

$$AS^2 + BR^2 + 2AS.BR = AB^2 + 2AS.BR$$

auferatur vtrinque pars communis $2AS.BR$ ac remanebit: $AS^2 + BR^2 = AB^2$. Q. E. D.

§. 5. In vulgus deinde nota est regula inueniendi aream trianguli ex datis eius tribus lateribus, quae ita se habet, vt a semisumma laterum singula latera seorsim subtrahantur et solidum seu productum ex his tribus residuis ortum per ipsam semisummam multiplicetut, tum vero ex isto producto radix quadrata extrahatur, quae exhibitura sit aream trianguli propositi. Analytice quidem haec regula facile demonstratur, ac demonstrationes ex analysi concinnatae passim occurrunt, verum eae a more geometrico non mediocriter dissident, vt non nisi a lectoribus in Analysi exercitatis intelligi possint. Quocirca istius regulae hic demonstrationem pure geometricam tradam, in qua nullum analyseos vestigium percipiatur. Petita est ea ex circulo triangulo inscripto, cuius symtomata ab Euclide sufficienter sunt exposita; quibus autem ad demonstrationem formandam opus habeo, ea in sequentibus propositionibus complectar, quae viam ad memoratae regulae demonstrationem parabunt.

Theorema

Theorema.

§. 6. Area cuiusque Trianguli ABC aequatur re- Fig. 4.
ctangulo ex ſemiſumma laterum in radium circuli inſcripti, ſeu area $\triangle ABC$ eſt $\frac{1}{2}(AB+AC+BC)OP$.

Demonſtratio.

Ex centro circuli inſcripti O in ſingula latera demittantur perpendicula OPOQ. OR, quae erunt aequalia radio circuli inſcripti. Ex O ducantur pariter ad angulos rectae OA.OB.OC quibus triangulum propoſitum diuidetur in tria triangula AOB, AOC, BOC, eandem altitudinem $OR = OQ = OP$ habentia, et quorum baſes ſunt latera trianguli AB, AC, BC. Hinc iſta triangula iunctim ſumta aequantur triangulo cuius baſis eſt ſumma laterum $AB+AC+BC$, et altitudo radio circuli inſcripti OP aequalis, cui cum proinde area ipſius trianguli propoſiti ABC ſit aequalis, haec aequabitur rectangulo ex ſemiſumma laterum in radium circuli inſcripti OP, ſeu erit area $\triangle ABC = \frac{1}{2}(AB+AC+BC)OP$. Q. E. D.

Theorema.

§. 7. Si ex centro O circuli triangulo ABC inſcripti in ſingula latera perpendicula demittantur OP, OQ, OR his latera ita ſecabuntur, vt poſita ſemiſumma laterum $\frac{1}{2}(AB+AC+BC) = S$, futurum ſit:
$AR = AQ = S - BC$; $BR = BP = S - AC$ et $CP = CQ = S - AB$.
atque $AR + BP + CQ = S$.

Demonſtratio.

Nam ob perpendicula OP, OQ, OR inter ſe aequalia, ſtatim patet fore $AQ = AR$; $BP = BR$ et $CP = CQ$, vnde erit ſumma laterum $AB + AC + BC = 2AR + 2BP + 2CQ$, ideoque habebitur $AR + BP + CQ =$ ſemiſummae laterum $= S$. Erit ergo

$AR + BC = S$ ideoque $AR = AQ = S - BC$
$BP + AC = S$ ideoque $BP = BR = S - AC$
$CQ + AB = S$ ideoque $CQ = CP = S - AB$.

Q. E. D.

Theorema.

Fig. 5. §. 8. Si vt ante ex centro O circuli triangulo ABC inſcripti in ſingula latera demittantur perpendicula OP, OQ, OR, erit ſolidum ſub partibus $AR.BP.CQ$ contentum aequale ſolido ex ſemiſumma laterum S et quadrato radii circuli inſcripti OP confecto ſeu erit: $AR.BP.CQ = S.OP^2$.

Demonſtratio.

Ductis ex centro circuli inſcripti O ad ſingulos angulos rectis OA.OB.OC, ad earum aliquam CO ſi opus eſt productam ex altero reliquorum angulorum B ducatur normalis BM, quae radio PO producto occurrat in N. Iam cum anguli A, B, C a rectis OA, OB, OC bifariam ſecentur, erit in triangulo BOC angulus extremus $BOM = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$, hinc ob $BOM + OBM =$ recto, erit $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C + OBM =$ recto. Verum quia $A + B + C = 2$ rect. erit quoque $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A =$ recto, ideoque $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C + OBM = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A$ vnde fit $OBM = \frac{1}{2}A = OAR$. Quare cum in triangulis rectangulis BOM et AOR ſit ang. $OBM =$ ang. OAR

ea

ea erunt inter ſe ſimilia; hincque fiet

$AR : RO = BM : MO$, ſeu $AR : OP = BM : MO$

Porro ob triangula rectangula CBM, NBP et NOM inter ſe ſimilia erit:

$BM : BC = MO : ON$ ſeu $BM : MO = BC : ON$

vnde colligitur: $AR : OP = BC : ON$, et aequatis rectangulis mediorum et extremorum erit:

$AR . ON = OP . BC$; atque ob $ON = PN - OP$ $AR . PN - AR . OP = BC . OP$ ſeu $AR . PN = AR . OP + BC . OP = (AR + BC) OP$. Verum $AR + BC = S$ (§. praec.), ita vt ſit $AR . PN = S . OP$. Denique ob triangula COP et NBP ſimilia eſt $PN : BP = CP : OP$, vnde $OP . PN = BP . CP$, et $AR . BP . CP = AR . OP . PN$; ſed prior aequatio per OP multiplicata dat $AR . OP . PN = S . OP^2$. Quocirca concluditur $AR . BP . CP$ ſeu $AR . BP . CQ = S . OP^2$. Q. E. D.

Theorema.

§. 9. Area trianguli cuiusuis ABC reperitur, ſi a ſemiſumma laterum (quae ſit $= S$) ſingula latera ſeorſim ſubtrahantur, ac ſolidum ſub his tribus reſiduis contentum per ipſam ſemiſummam laterum S multiplicetur, atque ex producto radix quadrata extrahatur. Seu erit area trianguli $ABC = \sqrt{S(S-AB)(S-AC)(S-BC)}$.

Demonſtratio.

Per §. 6. area trianguli ABC aequatur rectangulo ex ſemiſumma laterum S et radio circuli inſcripti OP, ſicque erit area trianguli $ABC = S . OP$. Verum cum ex §. praec. ſit $S . OP^2 = AR . BP . CQ$, erit per S vtrin-

que

que multiplicando $S^2.OP^2 = S.AR.BP.CQ$, hincque radicem quadratam extrahendo habebitur:

$$S.OP = \sqrt{S.AR.BP.CQ}$$

ideoque area trianguli $ABC = \sqrt{S.AR.BP.CQ}$.
ſed ex §. 7 patet eſſe:

$$AR = S - BC;\ BP = S - AC \text{ et } CQ = S - AB$$

quibus valoribus ſubſtitutis erit.

Area $\triangle ABC = \sqrt{S(S-AB)(S-AC)(S-BC)}$.

Q. E. D.

Coroll. 1.

§. 10. Hinc etiam concinna expreſſio pro radio circuli triangulo inſcripti OP exhiberi poteſt. Cum enim ſit $S.OP^2 = AR.BP.CQ$ erit $OP^2 = \frac{AR.BP.CQ}{S}$, ideoque $OP = \sqrt{\frac{AR.BP.CQ}{S}}$. Iam ergo pro AR, BP, CQ ſcriptis valoribus ante indicatis habebitur.

Radius circuli inſcripti $OP = \sqrt{\frac{(S-AB)(S-AC)(S-BC)}{S}}$.

Coroll. 2.

§. 11. Quia S denotat ſemiſummam laterum trianguli, ita vt ſit $S = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$ erit hoc valore ſubſtituto:

$$S-AB = \tfrac{1}{2}AC + \tfrac{1}{2}BC - \tfrac{1}{2}AB = \tfrac{1}{2}(AC + BC - AB)$$
$$S-AC = \tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}BC - \tfrac{1}{2}AC = \tfrac{1}{2}(AB + BC - AC)$$
$$S-BC = \tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}AC - \tfrac{1}{2}BC = \tfrac{1}{2}(AB + AC - BC)$$

ſic erit: $S(S-AB)(S-AC)(S-BC) =$

$$\tfrac{1}{16}(AB + AC + BC)(AC + BC - AB)(AB + BC - AC)(AB + AC - BC)$$

ideoque area trianguli quoque ita exprimetur.

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(AB + AC + BC)(AC + BC - AB)(AB + BC - AC)(AB + AC - BC)}.$$

Scho-

Scholion.

§. 12. Vltima haec formula pro inuenienda area cuiusque trianguli eſt maxime nota, ac plerumque in elementis geometriae tradi ſolet, etiamſi eius demonſtratio difficulter per elementa confici poſſit. Similis quoque fere regula habetur pro area cuiusque quadrilateri circulo inſcripti inuenienda, quippe quae pari modo ſatis concinne per ſola latera exprimi poteſt. Eius quidem demonſtratio, ſi analyſis in ſubſidium vocetur, non eſt difficilis, ſed qui eam more apud Geometras recepto adornare ſunt conati, maximas experti ſunt difficultates, Cl: quondam Naudaeus non parum in hoc genere laborauit, et geminam huius quoque regulae demonſtrationem protulit in Miſc. Berol. verum vtraque non ſolum maxime eſt intricata et multitudine linearum in figura ductarum obruta, vt ſine ſumma attentione ne capi quidem poſſit, ſed etiam vbique nimis luculenta veſtigia analytici calculi offendunt, Mihi quidem ſequentibus propoſitionibus praemittendis opus eſt.

Theorema.

§. 13. Si quadrilateri circulo inſcripti ABCD Fig. 6. duo latera ſibi oppoſita AB, DC ad occurſum vsque in E producantur, erit area quadrilateri ABCD ad aream trianguli BCE vt $AD^2 - BC^2$ ad BC^2.

Demonſtratio.

Quia tam angulus BAD quam BCE cum angulo BCD conſtituit duos rectos, erit $BAD = BCE$, ſimiliterque $ADC = CBE$, vnde triangula AED et CEB

erunt similia, eorumque ergo areae se habebunt vt quadrata laterum homologorum, veluti AD et BC: erit itaque
$\triangle AED : \triangle CEB = AD^2 : BC^2$ et diuidendo
$\triangle AED - \triangle CEB : \triangle CEB = AD^2 - BC^2$ hoc est
$\square ABCD : \triangle CEB = AD^2 - BC^2 : BC^2$. Q. E. D.

Coroll. 1.

§. 14. Ex cognita ergo area trianguli CEB inuenietur area quadrilateri ABCD: erit namque

$$\square ABCD = \frac{AD^2 - BC^2}{BC^2} . \triangle BEC$$

seu si area trianguli BEC designetur breuitatis gratia littera T, et area quadrilateri ABCD littera Q, erit

$$Q = \frac{AD^2 - BC^2}{BC^2} . T.$$

Coroll. 2.

§. 15. Tum vero quia est differentia quadratorum $AD^2 - BC^2 = (AD + BC)(AD - BC)$, erit $\frac{AD^2 - BC^2}{BC^2} = \frac{AD - BC}{BC} . \frac{AD + BC}{BC}$ hincque habebitur haec aequatio

$$Q = \frac{AD - DC}{BC} . \frac{AD + BC}{BC},$$ quae sumendis quadratis abit in hanc:

$$QQ = \frac{AD - BC}{BC} . \frac{AD - BC}{BC} . \frac{AD + BC}{BC} . \frac{AD + BC}{BC} . T . T$$

Coroll. 3.

§. 16. Ex superiori autem §. 11. colligitur esse aream trianguli $BEC = T = \frac{1}{4} \sqrt{(BE + CE + BC)(BE + CE - BC)(BE - CE + BC)(CE - BE + BC)}$ vnde $TT = \frac{1}{16}(BE + CE + BC)(BE + CE - BC)(BE - CE + BC)(CE - BE + BC)$. Hinc ergo prodibit valor quadrati areae quadrilateri ABCD seu ipsius QQ combinandis his factoribus ipsius TT cum ante inuentis ita expressus

QQ

$$QQ = \tfrac{1}{16} \cdot \frac{(AD-BC)(BE+CE+BC)}{BC} \cdot \frac{(AD-BC)(BE+CE-BC)}{BC} \cdot \frac{(AD+BC)(BC+BE-CE)}{BC} \cdot \frac{(AD+BC)(BC-BE+CE)}{BC}.$$

Coroll. 4.

§. 17. Quam formam ita enunciare licet, vt dicamus quadratum areae ABCD decies fexies fumtum feu 16QQ aequari producto ex his quatuor factoribus.

I. . . . $\frac{(AD-BC)(BE+CE+BC)}{BC}$

II. . . . . $\frac{(AD-BC)(BE+CE-BC)}{BC}$

III. . . . . . $\frac{(AD+BC)(BC+BE-CE)}{BC}$

IV. . . . . . $\frac{(AD+BC)(BC-BE+CE)}{BC}$.

Theorema.

§. 18. Iisdem pofitis, quae in theor. praec. funt affumta erit $BE+CE : BC = AB+CD : AD-BC$.

Demonftratio.

Cum enim triangula BEC et DEA fint fimilia, erit $BE : DE = BC : AD$ itemque $CE : AE = BC : AD$; vnde ex vtraque prodibit diuidendo

$BE : DE-BE = BC : AD-BC$

$CE : AE-CE = BC : AD-BC$

Cum igitur tam BE ad DE-BE, quam CE ad AE-CE eandem teneat rationem, vt nempe BC ad AD-BC; etiam fumma antecedentium BE+CE ad fummam confequentium DE-BE vna cum AE-CE eandem feruabit rationem eritque:

$BE+CE : DE-BE+AE-CE = BC : AD-BC$

At eft $DE-BE+AE-CE = DE-CE+AE-BE$

 $= CD$

$=CE+AB$ ſicque erit $BE+CE:AB+CD=BC:AD-BC$ et alternando $BE+CE:BC=AB+CD:AD-BC$. Q. E. D.

Coroll. 1.

§. 19. Cum igitur ſit $BE+CE:BC=AB+CD:AD-BC$ erit componendo $BE+CE+BC:BC=AB+CD+AD-BC:AD-BC$ vnde rectangulum extremorum aequale erit rectangulo mediorum, ſcilicet: $(AD-BC)(BE+CE+BC)=BC(AB+CD+AD-BC)$ hincque factorum in §. 17 exhibitorum primus erit I. . $\frac{(AD-BC)(BE+CE+BC)}{BC}=AB+CD+AD-BC$

Coroll. 2.

§. 20. Simili modo ex proportione $BE+CE:BC=AB+CD:AD-BC$ orietur diuidendo: $BE+CE-BC:BC=AB+CD-AD+BC:AD-BC$ vnde ſequentia rectangula inter ſe erunt aequalia: $(AD-BC)(BE+CE-BC)=BC(AB+CD-AD+BC)$ hincque factorum in §. 17 exhibitorum ſecundus erit: II. . . $\frac{(AD-BC)(BE+CE-BC)}{BC}=AB+CD-AD+BC$.

Theorema.

§. 21. Iisdem poſitis, ſcilicet ſi quadrilateri circulo inſcripti ABCD duo latera AB, DC ad concurſum vsque in E producantur, erit:

$$CE-BE:AB-DC=BC:AD+BC$$

Demonſtratio.

Triangula ſimilia BCE et DEA praebent vt ante te has proportiones: $BE:DE=BC:AD$ et $CE:AE=BC:AD$ ex quarum vtraque elicitur componendo

$$BE:DE+BE=BC:AD+BC$$
$$CE:AE+CE=BC:AD+BC$$

Cum ergo tam BE ad $DE+BE$ quam CE ad $AE+CE$ eandem teneat rationem, etiam differentia antecedentium $CE-BE$ ad differentiam consequentium $AE+CE$ demto $DE+BE$ eandem habebit rationem vt BC ad $AD+BC$ erit scilicet:

$$CE-BE:AE+CE-DE-BE=BC:AD+BC$$

At est $AE+CE-DE-BE=AE-BE-DE+CE=AB-CD$ sicque erit $CE-BE-AB-CD=BC:AD+BC$ et alternando $CE-BE:BC=AB-CD:AD+BC$. Q. E. D.

Coroll. 1.

§. 22. Cum igitur hinc sit inuertendo $BC:CE-BE=AD+BC:AB-CD$, erit componendo $BC+CE-BE:BC=AD+BC+AB-CD:AD+BC$. Atque aequatis rectangulis extremorum et mediorum fiet $(AD+BC)(BC+CE-BE)=BC(AD+BC+AB-CD)$ vnde factorum §. 17. exhibitorum quartus erit: IV. . . $\frac{(AD+BC)(BC+CE-BE)}{BC}=AB+AD+BC-CD$.

Coroll. 2.

§. 23. Simili modo ex proportione $BC:CE-BE=AD+BC:AB-CD$ orietur diuidendo $BC-CE+BE:BC=AD+BC-AB+CD:AD+BC$ hincque erit $(AD+BC)(BC+BE-CE)=BC$

 (AB

$(AD+BC+CD-AB)$ vnde factorum §. 17 exhibitorum tertius erit: III... $\frac{(AD+BC)(BC+BE-CE)}{BC} = AD+BC+CD-AB$.

Theorema.

§. 24. Quadrilateri circulo inscripti ABCD area inuenitur, si a semisumma omnium eius laterum singula latera seorsim subtrahantur, haec quatuor residua in se invicem multiplicentur, atque ex producto radix quadrata extrahatur.

Demonstratio.

Si duo latera opposita AB, CD ad concursum vsque in E producantur, atque quadrilateri ABCD area ponatur $=Q$, vidimus §. 17 valorem 16 QQ aequari producto ex quatuor factoribus, quos eosdem factores in §. §. 19. 20 et §. §. 22. 23 succinctius expressimus, ita vt nunc valor ipsius 16 QQ aequetur producto ex his quatuor factoribus.

I. $\frac{(AD-BC)(BE+CE+BC)}{BC} = AB+CD+AD-BC$

II. $\frac{(AD+BC)(BE+CE-BC)}{BC} = AB+CD-AD+BC$

III. $\frac{(AD+BC)(BC+BE-CE)}{BC} = AD+BC+CD-AB$

IV. $\frac{(AD+BC)(BC-BE+CE)}{BC} = AB+AD+BC-CD$

Hinc ergo erit 16 QQ aequale huic producto $(AB+CD+AD-BC)(AB+CD+BC-AD)(AD+BC+CD-AB)(AB+AD+BC-CD)$. Quod si iam ponatur summa omnium laterum $AB+BC+CD+DA = 2S$ vt semisumma sit $=S$. erit:

2 S

$2S-2AB=BC+CD+DA-AB=$ factori III.
$2S-2BC=AB+CD+DA-BC=$ factori I.
$2S-2CD=AB+BC+DA-CD=$ factori IV.
$2S-2DA=AB+BC+CD-DA=$ factori II.

vnde productum ex his quatuor factoribus erit $(2S-2AB)(2S-2BC)(2S-2CD)(2S-2DA)$, quod binariis seorsim sumtis abit in hanc expressionem: $16(S-AB)(S-BC)(S-CD)(S-DA)$ cui propterea valor ipsius $16QQ$ aequatur. Quare vtrinque per 16 diuiso erit $QQ=(S-AB)(S-BC)(S-CD)(S-DA)$ vnde si radix quadrata extrahatur, fiet: $Q=$ Areae $ABCD=\sqrt{(S-AB)(S-BC)(S-CD)(S-DA)}$. Patet ergo aream quadrilateri $ABCD$ inueniri, si a semisumma laterum S seorsim subtrahantur singula latera AB, BC, CD, DA, haecque quatuor residua $S-AB$, $S-BC$, $S-CD$, $S-DA$ in se inuicem multiplicentur, atque ex producto radix quadrata extrahatur. Q. E. D.

Scholion.

§. 25. His Theorematibus de area trianguli et quadrilateri circulo inscripti demonstratis, quae quidem ipsa satis sunt nota, aliud theorema subiungam nusquam ad huc neque prolatum neque demonstratum. Complectitur id singularem proprietatem omnium quadrilaterorum notatu maxime dignam, quae cum cognita parallelogrammorum natura eximiam habet affinitatem. Quemadmodum enim constat in omni parallelogrammo summam quadratorum ambarum diagonalium aequalem esse summae quadratorum quatuor laterum, ita demonstrabo in omni quadrilatero non parallelogrammo summam quadratorum ambarum

barum diagonalium ſemper minorem eſſe ſumma quadratorum quatuor laterum, atque adeo defectum facillime poſſe aſſignari.

Theorema.

Fig. 7. §. 26. Propoſito quocunque trapezio ABCD cum ſuis diagonalibus AC, BD, ſi circa bina latera AB, BC compleatur parallelogrammum ABCE, quod cum trapezio tria puncta A, B, C habebit cummunia, iunganturque reliqua puncta diuerſa D et E recta DE, erit ſumma quadratorum laterum trapezii $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$ maior quam ſumma quadratorum diagonalium $AC^2 + BD^2$, atque exceſſus aequabitur quadrato lineae DE: ſeu erit $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + DE^2$.

Demonſtratio.

Ducatur in parallelogrammo ABCE altera diagonalis BE quae ipſi cum trapezio non eſt communis; tum ponatur CF ipſi AD, et BF ipſi ED parallela et aequalis, et quia $BC = AE$, iſtae lineae concurrent in puncto F, vt triangulum CBF ſimile ſit et aequale triangulo AED. Quo facto iungantur lineae AF, DF et EF. Hinc manifeſtum eſt fore tam ADCF quam BDEF parallelogrammum, atque diagonales illius eſſe AC et DF, huius uero BE et DF: vnde per proprietatem parallelogrammorum notam erit

ex ADCF . . . $2AD^2 + 2CD^2 = AC^2 + DF^2$

ex BDEF . . . $2BD^2 + 2DE^2 = BE^2 + DF^2$

vnde ex vtraque aequatione valorem DF^2 definiendo habebebitur: $2AD^2 + 2CD^2 - AC^2 = 2BD^2 + 2DE^2 - BE^2 = DF^2$ et AC^2 vtrinque addendo fiet: $2AD^2 + 2CD^2 = 2BD^2 + 2DE^2 + AC^2 - BE^2$. Iam vero ex natura parallelogrammi ABCE erit $2AB^2 + 2BC^2 = AC^2 + BE^2$ quae aequatio ad illam adiecta dabit $2AD^2 + 2CD^2 + 2AB^2 + 2BC^2 = 2BD^2 + 2DE^2 + 2AC^2$ ac p 2 diuidendo obtinebitur $AD^2 + CD^2 + AB^2 + BC^2 = BD^2 + DE^2 + AC^2$ seu $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + DE^2$. At AB, BC, CD, DA sunt quatuor latera trapezii propositi ABCD, et AC, BD eius diagonales vnde summa quadratorum laterum aequalis est summae quadratorum ambarum diagonalium et insuper quadrato lineae DE, qua discrimen trapezii a parallelogrammo exponitur. Q. E. D.

Coroll. 1.

§. 27. Quo magis ergo trapezium a parallelogrammo discrepat, seu quo maius euadit interuallum DE, eo magis summa quadratorum laterum trapezii superabit summam quadratorum diagonalium.

Coroll. 2.

§. 28. Quia igitur in omni parallelogrammo summa quadratorum laterum aequalis est summae quadratorum diagonalium, in omni vero quadrilatero non parallelogrammo maior est, sequitur nullum exhiberi posse quadrilaterum, in quo summa quadratorum laterum minor sit quam summa quadratorum diagonalium.

Coroll. 3.

§. 29. Si vtraque diagonalis AC et BD trapezii propoſiti ABCD biſecetur, illa in P haec vero in Q, erit recta PQ ſemiſſis interualli DE, et DE^2 aequalis erit quadruplo quadrato lineae PQ, vnde exceſſus ſummae quadratorum laterum ſuper ſummam quadratorum diagonalium valebit quadratum lineae PQ quater ſumtum.

Coroll. 4.

Fig. 8. §. 30. Theorema ergo propoſitum ſine mentione vllius parallelogrammi ita enunciari poterit: *In omni quadrilatero* ABCD, *ſi eius diagonales* AC *et* BD *biſecentur in punctis* P *et* Q, *eaque iungantur recta* PQ, *erit ſumma quadratorum laterum* $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$ *aequalis ſummae quadratorum diagonalium* $AC^2 + BD^2$ *vna cum quadruplo quadrati lineae* PQ: *ſeu erit* $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2$.

DE PROPA-

DE PROPAGATIONE PVLSVVM PER MEDIVM ELASTICVM

AVCTORE
L. EVLERO.

§. 1.

Medium elaſticum in ſtatu aequilibrii verſari nequit, Tab. III. niſi omnes eius particulae aequalibus viribus elaſticis in ſe mutuo agant. Quod ſi autem vna particula adepta fuerit maiorem elaſticitatem, quam reliquae, tum ob ſtatum aequilibrii ſublatum haec ſeſe expandendo, ac reliquas magis comprimendo tamdiu agitabitur, donec perfectum aequilibrium inter omnes vires fuerit reſtitutum. Particularum enim elaſticarum eiusmodi eſt indoles, vt quo magis expanduntur, eo minorem obtineant vim elaſticam, contra vero, quo magis comprimuntur et in minus volumen rediguntur, earum vis elaſtica augeatur. Quanquam autem hoc incrementum ac decrementum elaſticitatis pro ratione aucti et minuti voluminis diuerſiſſimas proportiones ſequi poteſt, tamen ſi mutatio voluminis fuerit quam minima, augmentum vel decrementum vis elaſticae his ipſis mutationibus proportionale deprehenditur.

§. 2. Difficillima autem maximeque ardua videtur quaeſtio, qua commotio ſingularum particularum medii elaſtici, cum aequilibrium ſemel fuerit ſublatum, quaeritur, ſimul autem reſolutio huius quaeſtionis in phyſica maximi eſt momenti, cum formatio et propagatio ſoni in huiusmodi commotione particularum aeris consistat. Neque etiam amplius dubitare licet, quin ipsum lumen, radiorumque lucidorum propagatio a sublato aequilibrio inter particulas aetheris proficiscatur. Quando enim aeris quaepiam portio in maius minusue spatium compellitur, ob minutam vel auctam eius elasticitatem status aequilibrii cum vicinis aeris particulis turbatur, hincque in istis agitatio oritur, quae sese continuo ad particulas vlteriores extendit, donec vbique tranquillitas fuerit restituta. Hinc igitur sonus, et si in aethere similis agitatio eueniat, inde lumen originem suam trahit.

Fig. 1. §. 3. Cum itaque haec quaestio sit maximi momenti, operam dabo, vt ad eam resoluendam ex primis principiis mechanicae viam sternam. Quo igitur a casu simplicissimo ordiar, primum vnicam considerabo particulam A, quae quidem in se spectata nullius mutationis sit capax, sed quae filis elasticis inertiae expertibus AP et AQ intra parietes firmos P et Q detineatur. Sint autem haec fila seu elastra AP et AQ ita comparata, vt quo fiant breuiora, eo maiori vi elastica polleant; dum autem elongantur, eorum elasticitas diminuatur. His positis manifestum est corpus A fore in aequilibrio, si vtriusque elastri AP et AQ eadem fuerit vis: quod euenire ponamus, si vtriusque elastri longitudo AP et AQ fuerit aequalis. Sit taque $AP = AQ = a$; et vtriusque vis elastica $= g$; quoniam corpusculum A vtrinque aequaliter vrgetur, si semel quieuerit, perpetuo quiescere perseuerabit.

Fig. 2. §. 4. Concipiamus nunc hoc corpusculum A ex situ aequilibrii semel fuisse dimotum, ita vt alterum elastrum

ſtrum longius alterum vero breuius ſit factum. Cum igitur hoc modo ex altera parte vis elaſtica ſit minuta, ex altera vero aucta, neceſſe eſt vt corpuſculum A motum conceperit, quem hic determinabo, in hypotheſi quod elongatio et contractio amborum elaſtrorum ſit minima, ita vt augmentum vel decrementum vis elaſticae ipſi contractioni ſeu elongationi proportionale cenſeri poſſit. Elapſo ergo tempore t peruenerit corpus A, cuius maſſa littera A exprimatur, in ſitum quem figura refert. Ponatur longitudo elaſtri $AP = a + x$; erit ob x prae a valde paruum, eius vis elaſtica $= \frac{ag}{a+x} = g(1 - \frac{x}{a})$: alterius elaſtri AQ longitudo conſequenter erit $= a - x$, eiusque vis elaſtica $= \frac{ag}{a-x} = g(1 + \frac{x}{a})$: vnde corpus A ſecundum directionem AP vrgebitur vi $= \frac{2gx}{a}$.

§. 5. Ponamus tempuſculo dt corpus progredi per elementum ſpatii $= dx$, erit eius celeritas $= \frac{dx}{dt}$. Tempus autem t ita exprimatur, vt haec fractio $\frac{dx^2}{dt^2}$ exhibeat altitudinem celeritati, quam corpus in A habet debitam. Sumto ergo elemento dt conſtante, erit vis ſollicitans $= \frac{2Addx}{dt^2}$, cui aequalis poni debet vis qua corpus actu vrgetur $\frac{2gx}{a}$ quae cum motui renitatur, habebimus hanc aequationem:

$\frac{2Addx}{dt^2} = -\frac{2gx}{a}$ ſeu $Aaddx + gxdt^2 = 0$.

Multiplicetur haec aequatio per dx, et integretur, erit $Aadx^2 + gxxdt^2 = gbbdt^2$; vnde fit $dt = \frac{dx\sqrt{Aa}}{\sqrt{g(bb-xx)}}$; et $t = \frac{\sqrt{Aa}}{\sqrt{g}} \text{A ſin.} \frac{x}{b} - C$ hincque $x = b \text{ ſin.} (t + C)\sqrt{\frac{g}{Aa}}$.

§. 6. Vocetur breuitatis gratia $\sqrt{\frac{g}{Aa}} = n$, et mutatis constantibus valor ipsius x ita exprimetur:

$$x = b \sin.\ nt + c \cos.\ nt$$

quae constantes ex primo aequilibrii turbati statu definiri debent. Posito scilicet $t = 0$, habebitur $x = c$; Deinde cum corporis celeritas sit $= \frac{dx}{dt} = nb \cos.\ nt - nc \sin.\ nt$, initio, quo $t = 0$, eius celeritas erat $= nb$. Quod si ergo corpus A ipso initio quiescens ponatur, atque intervallum AP tum fuerit $= a + \omega$: fiet $b = 0$, et $c = \omega$; vnde quouis tempore t elapso erit situs corporis A

$$PA = a + x = a + \omega \cos.\ nt$$

eiusque celeritas $= -n\omega \sin.\ nt$

vbi signum $-$ indicat eius motum versus parietem P fore directum.

§. 7. Corpus ergo A celeritatem habebit maximam, si angulus nt fiat rectus, quo casu fit $PA = a$ ita vt perpetuo in ipso situ aequilibrii celerrime moueatur. Tum vero cum angulus nt ad duos rectos exsurgit, celeritas iterum fit $= 0$, et interuallum $PA = a - \omega$, quod in altera elongatione maxima a puncto medio euenit. Vnde patet corpus alternis motibus circa punctum medium instar penduli motum iri; huncque motum perpetuo esse duraturum, nisi quatenus a resistentia diminuatur. Pendulum igitur simplex assignari poterit, cuius motus oscillatorius conueniat cum isto corporis A motu reciproco; reperietur autem longitudo huius penduli simplicis isochroni $= \frac{Aa}{2g} = \frac{1}{2nn}$. Quod si ergo fiat $nt = 180^\circ$, vt sit $t = \frac{180^\circ}{n}$; tum tempus t aequabitur tempori vnius oscillationis

lationis penduli, cuius longitudo $= \frac{1}{2nn}$. Hinc generaliter, si angulus 180° exprimatur per π, reperiaturque tempus $t = \pi m$, tum hoc tempus cognoscetur in mensura consueta, quoniam aequabitur durationi vnius oscillationis penduli cuius longitudo est $= \frac{1}{2}mm$: quae mensura in sequentibus adhiberi poterit.

§. 8. Casu hoc primo eoque facillimo expedito Fig. 3. contemplemur duo corpuscula A et B, quae cum inter se tum inter parietes immobiles P et Q elastris PA, AB, BQ detineantur. Sint corpora ambo inter se aequalia, et in aequilibrio constituta, quando tria interualla AP, AB, BQ fuerint aequalia. Ponatur hoc casu vniuscuiusque elastri longitudo $= a$ et vis elastica $= g$: itemque vtriusque corporis massa $=$ A. Quodsi iam corpus A ex statu aequilibrii deturbatur, dum propius vel ad P vel ad B impellitur, corpus quoque B mox ad motum concitabitur, hocque vicissim in A aget; vnde motus in vtroque orietur, qui a casu praecedente maxime discrepabit, neque amplius motui oscillatorio similis erit, atque ob hoc ipsum multo difficilius definietur. Ad eum autem resoluendum ponamus elapso tempore $= t$, ambo corpora in punctis A et B versari, esseque:

$$PA = a + x;\ AB = a + y;\ BQ = a + z$$

ita vt sit $x + y + z = 0$.

§. 9. Erit ergo vis elastica elastri $AP = g(1 - \frac{x}{a})$ elastri $AB = g(1 - \frac{y}{a})$ et elastri $BQ = g(1 - \frac{z}{a})$ vnde corpus A versus Q propelletur vi $= \frac{g(y-x)}{a}$, et corpus B vi $= \frac{g(z-y)}{a}$. Cum iam sit $PA = a + x$, erit corporis

A

A celeritas $= \frac{dx}{dt}$, et vis ad eius motum requisita $= \frac{2Addx}{dt^2}$, quae ipsi vi $\frac{g(y-x)}{a}$ aequalis esse debet. Deinde ob $PB = 2a + x + y$, erit corporis B celeritas $= \frac{dx+dy}{dt}$ et vis ad eius motum requisita $= \frac{2A(ddx+ddy)}{dt^2}$ ipsi $\frac{g(z-y)}{a}$ aequanda; vnde consequimur has binas aequationes: $\frac{2Addx}{dt^2} = \frac{g(y-x)}{a}$; $\frac{2A(ddx+ddy)}{dt^2} = \frac{g(z-y)}{a}$ quarum illa ab hac subtracta relinquit: $\frac{2Addy}{dt^2} = \frac{g(z-2y+x)}{a}$ existente $x+y+z = a$.

§. 10. Haec posterior aequatio ob $x+z = -y$ abibit in hanc: $\frac{2Addy}{dt^2} = -\frac{3gy}{a}$, quae per dy multiplicata et integrata dabit $\frac{2Ady^2}{dt^2} = C - \frac{3gyy}{a}$; vnde fit $dt = \frac{dy\sqrt{2Aa}}{\sqrt{3g(bb-yy)}}$, sit vt supra $\sqrt{\frac{g}{Aa}} = n$ erit $ndt\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{dy}{\sqrt{(bb-yy)}}$: vnde integrando obtinebitur $y = b$ sin. $nt\sqrt{\frac{3}{2}} + c$ cos. $nt\sqrt{\frac{3}{2}}$. Aequatio vero prior hanc induet formam: $\frac{2ddx}{dt^2} = nn(y-x)$, quae transit in $\frac{2ddx}{nndt^2} + x = b$ sin. $nt\sqrt{\frac{3}{2}} + c$ cos. $nt\sqrt{\frac{3}{2}}$. Ad quam integrandam ponatur $x = vu$, et aequatio $\frac{2vddu+4dvdu+2uddv}{nndt^2} + vu = b$ sin. $nt\sqrt{\frac{3}{2}} + c$ cos. $nt\sqrt{\frac{3}{2}}$ discerpatur in has duas: $\frac{2ddu}{nndt^2} + u = 0$ et $\frac{2uddv+4dudv}{nndt^2} = b$ sin. $nt\sqrt{\frac{3}{2}} + c$ cos. $nt\sqrt{\frac{3}{2}}$, quarum prior integrata dabit $u = \alpha$ sin. $nt\sqrt{\frac{1}{2}} + \mathfrak{C}$ cos. $nt\sqrt{\frac{1}{2}}$ vnde et valor ipsius v, hincque porro $x = vu$ inveniri poterit.

§. 11. Ponatur breuitatis gratia b sin. $nt\sqrt{\frac{3}{2}} + c$ cos. $nt\sqrt{\frac{3}{2}} = T$, erit $2uddv + 4dudv = nnTdt^2$; quae per u multiplicata et integrata dabit $2uudv = nndt\int Tudt$ et et $v = \frac{1}{2}nn\int\frac{dt}{uu}\int T\,udt$. At valores u et T seu y in sequentes formas transmutari possunt: vt sit

$T = y = b\,\text{sin.}\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}} + c\,\text{cos.}\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}} = E\,\text{cos.}\,(nt\sqrt{\tfrac{3}{2}} + \mu)$

$u = \alpha\,\text{sin.}\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \beta\,\text{cos.}\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} = F\,\text{cos.}\,(nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \nu)$

vnde fit $\int\frac{dt}{uu} = \frac{\frac{1}{2}}{Fn\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\text{sin.}(nt\sqrt{\frac{1}{2}}+\nu)}{\text{cos.}(nt\sqrt{\frac{1}{2}}+\nu)}$: atque

$Tu = EF\,\text{cos.}\,(nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}+\mu)\,\text{cos.}\,(nt\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\nu)$. Ponatur $\int T\,udt = P\,\text{sin.}(nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}+\mu)\,\text{cos.}(nt\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\nu) + Q\,\text{cos.}(nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}+\mu)\,\text{sin.}(nt\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\nu)$ fietque differentiando

$$Tu = \left(nP\sqrt{\tfrac{3}{2}} + nQ\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)\text{cos.}\,(nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}+\mu)\,\text{cos.}\,(nt\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\nu) \left(-nP\sqrt{\tfrac{1}{2}} - nQ\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)$$

$\text{sin.}(nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}+\mu)\,\text{sin.}(nt\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\nu)$ vnde est $P = -Q\sqrt{3}$; et $\frac{nQ - 3nQ}{\sqrt{2}} = EF$. ergo $Q = \frac{-EF}{n\sqrt{2}}$; et $P = \frac{EF\sqrt{3}}{n\sqrt{2}}$.

Ex his porro fiet: $v = \frac{En}{2F\sqrt{2}}$

$$\int\frac{dt(\sqrt{3}\,\text{sin}(nt\sqrt{\frac{3}{2}}+\mu)\text{cos}(nt\sqrt{\frac{1}{2}}+\nu) - \text{cos}(nt\sqrt{\frac{3}{2}}+\mu)\text{sin}(nt\sqrt{\frac{1}{2}}+\nu))}{\text{cos}(nt\sqrt{\frac{1}{2}}+\nu)^2}$$

seu $v = \frac{-E.\ \text{cos.}\,(nt\sqrt{\frac{3}{2}}+\mu)}{2F\,\text{cos.}\,(nt\sqrt{\frac{1}{2}}+\nu)} + G$ ideoque $x = Gu - \frac{1}{2}y$; Valoribus ergo pro u et y restitutis erit

$x = \alpha\,\text{sin.}\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \beta\,\text{cos.}\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}b\,\text{sin.}\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \tfrac{1}{2}c\,\text{cos.}\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$

$y = b\,\text{sin.}\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}} + c\,\text{cos.}\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$.

§. 12. Elapso ergo tempore t, erit corpus A in A ita vt sit

$PA = a + \alpha\,\text{sin.}\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \beta\,\text{cos.}\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}b\,\text{sin.}\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \tfrac{1}{2}c\,\text{cos.}\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$ eiusque celeritas, qua a pariete P recedit erit: $= n\alpha\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\text{cos.}\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} - n\beta\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\text{sin}\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}nb\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\text{cos.}\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}nc\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\text{sin}\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$.

Eodemque momento alterum corpus erit in B vt sit $PB = 2a + \alpha\,\text{sin.}\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \beta\,\text{cos.}\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}b\,\text{sin.}\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}$

$c\,\mathrm{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$ eiusque celeritas qua pariter a pariete P remouetur, erit $= n\alpha\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\mathrm{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} - n\beta\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\mathrm{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}nb\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\mathrm{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$ $-\tfrac{1}{2}nc\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\mathrm{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$. Corporis ergo A celeritas erit maxima iis temporibus quae ex hac aequatione definientur:
$$0 = -\alpha\,\mathrm{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \beta\,\mathrm{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{3}{2}b\,\mathrm{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}} + \tfrac{3}{2}c\,\mathrm{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$
Corporis vero B celeritas erit maxima, quando t habuerit valorem ex hac aequatione
$$0 = -\alpha\,\mathrm{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \beta\,\mathrm{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{3}{2}b\,\mathrm{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \tfrac{3}{2}c\,\mathrm{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}.$$

§. 13. Ponamus ipso initio, quo erat $t = 0$, ambo corpora quieuisse; alterum B quidem in situ suo naturali alterum vero A versus P retractum fuisse e situ suo aequilibrii, ita vt eius distantia AP fuerit $= a - \omega$. Prior conditio praebet hos valores $\alpha = 0$, et $b = 0$; Deinde ob $AP = a - \omega$ fit $\beta - \tfrac{1}{2}c = -\omega$, et ob $BP = 2a$ erit $\beta + \tfrac{1}{2}c = 0$: ideoque $\beta = -\tfrac{1}{2}\omega$, et $c = \omega$. Hoc ergo casu postquam elapsum fuerit tempus t, erit
$$PA = a - \tfrac{1}{2}\omega\,\mathrm{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\omega\,\mathrm{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$
$$PB = 2a - \tfrac{1}{2}\omega\,\mathrm{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\omega\,\mathrm{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$
Celeritas ipsius $A = \tfrac{n}{2}\omega\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\mathrm{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{n}{2}\omega\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\mathrm{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$
Celeritas ipsius $B = \tfrac{n}{2}\omega\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\mathrm{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{n}{2}\omega\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\mathrm{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$
Quare corpus A maximam acquirit celeritatem cum fuerit $\mathrm{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} + 3\,\mathrm{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}} = 0$ corporis vero B celeritas erit maxima, quando fiet $\mathrm{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 3\,\mathrm{cos}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$. Corporis vero A celeritas euanescet, quoties fit $\mathrm{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{3}\,.\,\mathrm{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}} = 0$ et corporis B celeritas ad nihilum redigitur, quando est: $\mathrm{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{3}\,.\,\mathrm{sin}.\,nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$.

§. 14. Circa motus ergo initium, quando angulus nt est adhuc valde paruus, celeritas corporis ita se habebit, vt sit

cele-

celeritas corporis A $= nn\omega t - \frac{5}{24} n^4 \omega t^3$ et
celeritas corporis B$= -\frac{1}{2} nn\omega t + \frac{1}{6} n^4 \omega t^3$
Initio ergo corpus A a pariete P recedit, corpus vero B ad eundem accedit, donec ad quietem redigatur; atque interea habuerit necesse est maximam celeritatem. Postquam autem versus P accedere desierit, tum demum versus Q promouebitur, et cum acquisierit maximum celeritatis gradum, pulsum acceptum maxima vi in parietem Q exerere erit censendum. Cum igitur corpus B, postquam corpus A iam habuit maximam celeritatem, motu versus Q directo maximum velocitatis gradum adipiscatur, hinc iam euidens est tempore opus esse, antequam pulsus ex corpore A in corpus B transferatur; siquidem in quauis medii elastici particula pulsum tum inesse assumamus, cum maximo velocitatis gradu versus parietem Q mouetur. Si enim in Q organum sensus concipiatur, id hoc momento maximam patietur impressionem.

§. 15. Patet ergo haec duo corpora A et B diversissimos motus recipere posse, prout initio tam eorum situs quam motus fuerit diuersimode comparatus. Quo autem in eam agitationem accuratius inquiramus, cuiusmodi in productione soni et luminis oriri solet, ponamus initio corpus A ex situ suo quietis per interuallum valde paruum $=\omega$ versus P diductum, ibique detentum fuisse, quoad alterum corpus B cedendo quieuerit, tum vero corpus A subito dimitti. Status ergo iste initialis ita erit comparatus, vt posito $t=0$, vtriusque corporis celeritas sit nulla: vnde fit $\alpha=0$ et $b=0$: Deinde quia

 corpus

corpus B ipſo initio nulla vi afficitur, erit quoque eius acceleratio nulla, hincque differentiale ipſius celeritatis $= 0$; ex quo erit $\mathfrak{b} + \frac{3}{2}c = 0$. Denique cum iſto motus initio ſit $PA = a - \omega$ erit $\mathfrak{b} - \frac{1}{2}c = -\omega$; ideoque $c = \frac{1}{2}\omega$ et $\mathfrak{b} = -\frac{3}{4}\omega$. Quibus valoribus ſubſtitutis, poſtquam elapſum fuerit tempus t, erit

$PA = a - \frac{3}{4}\omega \operatorname{cof.} nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \frac{1}{4}\omega \operatorname{cof.} nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$

$PB = 2a - \frac{3}{4}\omega \operatorname{cof.} nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \frac{1}{4}\omega \operatorname{cof.} nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$

Celeritas ipſius $A = \frac{3}{4\sqrt{2}} n\omega \operatorname{ſin.} nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} n\omega \operatorname{ſin.} nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$

Celeritas ipſius $B = \frac{3}{4\sqrt{2}} n\omega \operatorname{ſin.} nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} n\omega \operatorname{ſin.} nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$.

§. 16. Si tempus elapſum t adhuc fuerit tam paruum vt anguli $nt\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ et $nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$ ſit minimi; quia tum erit proxima:

$\operatorname{ſin.} nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} = nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \frac{1}{12} n^3 t^3 \sqrt{\tfrac{1}{2}}$

$\operatorname{ſin.} nt\sqrt{\tfrac{3}{2}} = nt\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \frac{3}{12} n^3 t^3 \sqrt{\tfrac{3}{2}}$ erit

Celeritas ipſius $A = \frac{3}{4} nnt\omega - \frac{1}{8} n^4 t^3 \omega$

Celeritas ipſius $B = \frac{1}{16} n^4 t^3 \omega$

Statim ergo ab initio corpus B tardiſſime moueri incipit cum eius celeritas ſe habeat ad celeritatem corporis A vt $nntt$ ad 12: nt autem ſit fractio minima. Tempore ergo quopiam opus eſt, antequam corpus B ſenſibiliter moueri incipiat. Inueſtigemus ergo momenta, quibus vtrumque corpus maximam celeritatem attingit. Ac primo quidem corpus A celerrime mouebitur, cum fuerit: $\operatorname{cof.} nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \operatorname{cof.} nt\sqrt{\tfrac{3}{2}} = 0$.

Corpus vero B celeritatem habebit maximam, quando ſit $\operatorname{cof.} nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \operatorname{cof.} nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$.

§. 17.

§. 17. Definiamus primum momenta, quibus corpus A maximo celeritatis gradu concitatur, et quia hoc fit, quando ſumma coſinuum angulorum $nt\sqrt{\frac{1}{2}}$ et $nt\sqrt{\frac{3}{2}}$ euaneſcit: primus caſus habebitur, ſi

$$nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\pi - s \text{ et } nt\sqrt{\tfrac{3}{2}} = \tfrac{1}{2}\pi + s$$

vnde fit $\frac{nt(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}} = \pi$ et $nt = \frac{\pi\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$ ſeu $t = \frac{\pi\sqrt{2}}{(1+\sqrt{3})n}$; quod tempus definitur vna oſcillatione penduli, cuius longitudo eſt $= \frac{1}{(1+\sqrt{3})^2 nn} = \frac{Aa}{(1+\sqrt{3})^2 g}$. erit autem hoc caſu $s = \frac{1}{2}\pi - \frac{\pi}{1+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)\pi}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{\pi}{(1+\sqrt{3})^2}$: et celeritas ipſius A $= \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\, n\omega \operatorname{coſ.} \frac{\pi}{(1+\sqrt{3})^2}$. Dehinc vero iterum maximum celeritatis gradum acquirit, ſi ſit $nt\sqrt{\frac{1}{2}} = \pi + s$ et $nt\sqrt{\frac{3}{2}} = 2\pi - s$ ſeu $nt\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{3\pi}{1+\sqrt{3}}$ et $s = \frac{(2-\sqrt{3})\pi}{1+\sqrt{3}}$. Tertio quoque maxima celeritas dabitur in corpore A cum fuerit: $nt\sqrt{\frac{1}{2}} = \pi + s$ et $nt\sqrt{\frac{3}{2}} = 2\pi + s$ vnde fit $nt\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}-1}$, et $s = \frac{(2-\sqrt{3})\pi}{\sqrt{3}-1}$. Generaliter vero corpus A toties habebit maximum celeritatis gradum, quoties fuerit $nt\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{(2i+1)\pi}{\sqrt{3}\pm 1}$ denotante i numerum integrum quemcunque.

§. 18. Corpus autem alterum B maximam celeritatem conſequitur, quando fit:

$$\operatorname{coſ.} nt\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \operatorname{coſ.} nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}.$$

primum ergo hoc euenit quando $nt\sqrt{\frac{1}{2}} = \pi - s$ et $nt\sqrt{\frac{3}{2}} = \pi + s$, ſeu $nt\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{1+\sqrt{3}}$, ideoque $t = \frac{2\pi\sqrt{2}}{(1+\sqrt{3})n}$. Cum igitur corpus A primum maximae celeritatis gradum nanciscatur elapſo tempore $t = \frac{\pi\sqrt{2}}{(1+\sqrt{3})n}$, patet tempus quo corpus B maximam celeritatem acquirit duplo maius eſſe tempore, quo corpori A maximus celeritatis gradus primum inducitur. Si ergo pulſus tum effectum exerere cenſeatur, cum quaeque particula citiſſime mouetur, pulſus a particula A in particulam B hoc eſt per interuallum a transfertur tempore $t = \frac{\pi\surd 2}{(1+\surd 3)n} = \frac{\pi\surd 2 A a}{(1+\surd 3)\surd g}$.

§. 19. Quodſi ergo ponamus pulſum eadem celeritate per reliquas vltra Q ſequentes medii elaſtici partes propagari, et ſi multitudo particularum aliam formulam ſit ſuppeditatura, hinc tempus, quo pulſus ad quamuis diſtantiam transfertur definiri poterit. Sit enim a diſtantia propoſita; eritque multitudo particularum ſeu maſſa A ipſi longitudini a proportionalis. Atque ſi vis elaſtica medii per pondus columnae eiusdem medii exprimatur, ita vt g ſit longitudo columnae; cuius pondus aequetur vi elaſticae, pro A ipſa longitudo poni poterit, atque ideo pulſus per ſpatium a propagabitur tempore $t = \frac{\pi a\surd 2}{(1+\surd 3)\surd g}$: quae formula ſi diuidatur per 250, et longitudines a et g in particulis milleſimis pedis Rhenani exprimantur, exhibebit tempus in minutis ſecundis.

§. 20. Si in hac hypotheſi pro medio elaſtico, per quod pulſus propagatur, aerem ſubſtituamus, erit eius elaſticitas $g = 27980$ ped. Rhen. Vnde tempus quo pulſus in aere ſeu ſonus per interuallum $= a$ propagatur erit $= \frac{\pi a\surd 2}{250(1+\surd 3)\surd 27980000}$ minutorum ſecundorum. Hinc ergo primum patet tempora ſpatiis eſſe proportionalia, pulſusque motu vniformi propagari. Si ergo ponatur $\frac{\pi a\surd 2}{250(1+\surd 3)\surd 27980000} = 1$ prodibit ſpatium a per quod ſonus vno minuto ſecundo propagatur, quod erit in partibus milleſimis pedis rhenani: $a = \frac{250(1+\surd 3)\surd 13990000}{\pi}$ ideoque in

pedi-

pedibus rhenanis $a = \frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{13990000}}{4\pi} = \frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{874375}}{\pi}$ quae formula euoluta dat $a = 813$ ped. Conſtat autem ſonum minuto ſecundo peragrare ſpatium circiter 1000 pedum; quod accrementum a multitudine particularum oritur.

§. 21. Antequam autem plures particulas contemplemur, operae pretium erit annotaſſe ambobus corporibus A et B initio eiusmodi ſitum tribui poſſe, vt motu regulari ad ſimilitudinem penduli oſcillantis moueantur. Hoc autem duplici modo euenire poteſt, ſi quidem vtrumque corpus ab initio quieſcere ponamus, ita vt ſit $\alpha = 0$, et $b = 0$. Primum ſcilicet huiusmodi motus orietur ſi fuerit $c = 0$, et $\mathfrak{b} = -\omega$, quo caſu fit: $PA = a - \omega \cos. nt\sqrt{\tfrac{1}{2}}$; $PB = 2a - \omega \cos. nt\sqrt{\tfrac{1}{2}}$; motusque conformis erit motui penduli, cuius longitudo eſt $= \frac{1}{nn} = \frac{Aa}{g}$. Deinde quoque motus oſcillatorius ſimplex orietur ſi ſit $\mathfrak{b} = c$, et $c = 2\omega$, vt ſit: $PA = a - \omega \cos. nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$ et $PB = 2a + \omega \cos. nt\sqrt{\tfrac{3}{2}}$ hocque caſu longitudo penduli ſimplicis iſochroni erit $= \frac{1}{3nn} = \frac{Aa}{3g}$. Ad oſcillationes ſcilicet prioris generis producendas, initio ambo corpora per aequalia interualla ex locis ſuis naturalibus in eandem plagam deduci debent; pro poſteriori vero genere in plagas oppoſitas. Poſteriori autem caſu oſcillationes celeriores erunt, quam priori.

§. 22. Sint nunc tria corpuſcula A, B, C aequalia *ig. 4.*
filis elaſticis inuicem connexa, quae in aequilibrio verſentur cum aequalibus interuallis tum inter ſe, tum a parietibus P et Q diſtent. Ponatur vt ante vniuscuiusque maſſa $= A$, diſtantia binorum contiguorum naturalis $= a$, et

et vis elaſtica in hoc ſtatu $= g$. Agitata autem ſint haec corpuscula vtcunque, ac poſt tempus t peruenerint in ſitum figura exhibitum, in quo ſit:

$PA = a + x$; $AB = a + y$; $BC = a + z$; et $CQ = a + v$ erit $x + y + z + v = 0$.

Erit ergo vis elaſtica fili $PA = g\left(1 - \frac{x}{a}\right)$; fili $AB = g\left(1 - \frac{y}{a}\right)$ fili $BC = g\left(1 - \frac{z}{a}\right)$ et fili $CQ = g\left(1 - \frac{v}{a}\right)$. Vires autem ad ſingulorum corporum motus conſeruandos requiſitae ſunt:

pro corpore A $= \frac{2A\,ddx}{dt^2}$

pro corpore B $= \frac{2A(ddx + ddy)}{dt^2}$

pro corpore C $= \frac{2A(ddx + ddy + ddz)}{dt^2}$.

§. 23. Ob tenſionem vero ſingulorum elaſtrorum corpus A reuera ſecundum directionem PQ vrgetur vi $= \frac{g(y-x)}{a}$; Corpus B vi $= \frac{g(z-y)}{a}$; Corpus C vi $= \frac{g(v-z)}{a}$ Poſito ergo breuitatis gratia $\sqrt{\frac{g}{2Aa}} = n$ ſeu $\frac{g}{2Aa} = nn$, habebuntur ſequentes aequationes:

$$\frac{ddx}{dt^2} = nn(y - x)$$

$$\frac{ddx + ddy}{dt^2} = nn(z - y)$$

$$\frac{ddx + ddy + ddz}{dt^2} = nn(v - z)$$

ex quibus cum hac $x + y + z + v = 0$ coniunctis motus ad quoduis tempus determinabitur.

§. 24. Quoniam ex praecedentibus forma valorum x, y, z, et v iam colligi poteſt, ponamus:

$$x = \alpha \text{ coſ. } npt + \mathfrak{A} \text{ ſin. } npt$$

$$y = \beta \text{ coſ. } npt + \mathfrak{B} \text{ ſin. } npt$$

$$z = \gamma \text{ coſ. } npt + \mathfrak{C} \text{ ſin. } npt$$

$$v = \delta \text{ coſ. } npt + \mathfrak{D} \text{ ſin. } npt$$

erit

erit primo : $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ et $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D}=0$. Deinde erit poſito dt conſtante :

$$\frac{ddx}{dt^2}=-\alpha nnpp \operatorname{cof.} npt-\mathfrak{A}\, nnpp \operatorname{fin.} npt$$

$$\frac{ddy}{dt^2}=-\beta nnpp \operatorname{cof.} npt-\mathfrak{B}\, nnpp \operatorname{fin.} npt$$

$$\frac{ddz}{dt^2}=-\gamma nnpp \operatorname{cof.} npt-\mathfrak{C}\, nnpp \operatorname{fin.} npt$$

vnde ſequentes orientur aequationes :

$$\begin{array}{l|l} -\alpha pp=\beta-\alpha & -\mathfrak{A}pp=\mathfrak{B}-\mathfrak{A} \\ -(\alpha+\beta)pp=\gamma-\beta & -(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})pp=\mathfrak{C}-\mathfrak{B} \\ -(\alpha+\beta+\gamma)pp=\delta-\gamma & -(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})pp=\mathfrak{D}-\mathfrak{C} \end{array}$$

§. 25. Manifeſtum ergo eſt ex ſimilitudine harum aequationum coefficientes $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ ſimili modo determinari, quo coefficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Hos autem inveſtigantes inueniemus :

$$\beta=\alpha-\alpha pp; \qquad \alpha+\beta=2\alpha-\alpha pp$$

$$\gamma=\beta-(\alpha+\beta)pp; =\alpha-3\alpha pp+\alpha p^4$$

$$\alpha+\beta+\gamma=3\alpha-4\alpha pp+\alpha p^4$$

$$\delta=\gamma-(\alpha+\beta+\gamma)pp=\alpha-6\alpha pp+5\alpha p^4-\alpha p^6.$$

Quare cum ſit $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ habebitur

$$0=4-10pp+6p^4-p^6$$

cuius aequationis factores ſunt :

$$0=(2-pp)(2-4pp+p^4)$$

vnde pro pp ſequentes tres valores reperiuntur :

$$pp=2;\ pp=2+\sqrt{2};\ pp=2-\sqrt{2}.$$

§. 26. Triplices hi valores pro pp inuenti sequentes praebebunt coefficientes:

$pp = 2$	$pp = 2 + \sqrt{2}$	$pp = 2 - \sqrt{2}$
$\alpha = \alpha$	$\alpha = + \alpha$	$\alpha = + \alpha$
$\beta = - \alpha$	$\beta = - (1 + \sqrt{2})\alpha$	$\beta = - (1 - \sqrt{2})\alpha$
$\gamma = - \alpha$	$\gamma = + (1 + \sqrt{2})\alpha$	$\gamma = + (1 - \sqrt{2})\alpha$
$\delta = + \alpha$	$\delta = - \alpha$	$\delta = - \alpha$
$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$	$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$	$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$
$\mathfrak{B} = - \mathfrak{A}$	$\mathfrak{B} = - (1 + \sqrt{2})\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B} = - (1 - \sqrt{2})\mathfrak{A}$
$\mathfrak{C} = - \mathfrak{A}$	$\mathfrak{C} = + (1 + \sqrt{2})\mathfrak{A}$	$\mathfrak{C} = + (1 - \sqrt{2})\mathfrak{A}$
$\mathfrak{D} = + \mathfrak{A}$	$\mathfrak{D} = - \mathfrak{A}$	$\mathfrak{D} = - \mathfrak{A}$

Cum igitur pro pp triplicem valorem inuenerimus, in expressionibus intergralibus assumtis termini sunt triplicandi; eritque:

$$x = \begin{array}{l} + \alpha \cos. nt\sqrt{2} + \alpha' \cos. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + \alpha'' \cos. nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} \\ + \mathfrak{A} \sin. nt\sqrt{2} + \mathfrak{A}' \sin. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + \mathfrak{A}'' \sin. nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} \end{array}$$

$$y = \begin{array}{l} - \alpha \cos. nt\sqrt{2} - (1+\sqrt{2})\alpha' \cos. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - (1-\sqrt{2})\alpha'' \cos. nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} \\ - \mathfrak{A} \sin. nt\sqrt{2} - (1+\sqrt{})\mathfrak{A}' \sin. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - (1-\sqrt{2})\mathfrak{A}'' \sin. nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} \end{array}$$

$$z = \begin{array}{l} - \alpha \cos. nt\sqrt{2} + (1+\sqrt{2})\alpha' \cos. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + (1-\sqrt{2})\alpha'' \cos. nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} \\ - \mathfrak{A} \sin. nt\sqrt{2} + (1+\sqrt{2})\mathfrak{A}' \sin. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + (1-\sqrt{2})\mathfrak{A}'' \sin. nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} \end{array}$$

$$v = \begin{array}{l} + \alpha \cos. nt\sqrt{2} - \alpha' \cos. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - \alpha'' \cos. nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} \\ + \mathfrak{A} \sin. nt\sqrt{2} - \mathfrak{A}' \sin. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - \mathfrak{A}'' \cos. nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} \end{array}$$

§. 27. Si assumamus motus initio, quo erat $t = 0$, singula corpora quieuisse, coefficientes $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ nulli sunt statuendi, sicque post elapsum tempus t situs corporum sequenti modo determinabitur:

$$PA = a + \alpha \cos nt\sqrt{2} + \alpha' \cos nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + \alpha'' \cos nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$
$$PB = 2a + \quad * \quad - \alpha'\sqrt{2} \cos. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + \alpha''\sqrt{2} \cos nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$
$$PC = 3a - \alpha \cos. nt\sqrt{2} + \alpha' \cos. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + \alpha'' \cos. nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}.$$

Hinc

Hinc porro cognoſcentur ſingulorum corporum celeritates, erit enim celeritas ſecundum directionem PQ corporis

$$A = -n\alpha\sqrt{2}.\mathit{fin}.nt\sqrt{2} - n\alpha'\sqrt{(2+\sqrt{2})}\mathit{fin}.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - n\alpha''\sqrt{(2-\sqrt{2})}.\mathit{fin}.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$
$$B = +n\alpha'\sqrt{(4+2\sqrt{2})}.\mathit{fin}.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - n\alpha''\sqrt{(4-2\sqrt{2})}.\mathit{fin}.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$
$$C = +n\alpha\sqrt{2}.\mathit{fin}.nt\sqrt{2} - n\alpha'\sqrt{(2+\sqrt{2})}.\mathit{fin}.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - n\alpha''\sqrt{(2-\sqrt{2})}.\mathit{fin}.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$

Quae expreſſiones ſi denuo differentientur, prodibunt accelerationes ſingulorum corporum ſecundum plagam PQ.

$$A = -2nn\alpha\,\mathit{cof}.nt\sqrt{2} - (2+\sqrt{2})nn\alpha'\,\mathit{cof}.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - (2-\sqrt{2})nn\alpha''\,\mathit{cof}.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$
$$B = +(2+\sqrt{2})nn\alpha'\sqrt{2}.\mathit{cof}.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - (2-\sqrt{2})nn\alpha''\sqrt{2}.\mathit{cof}.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$
$$C = +2nn\alpha\,\mathit{cof}.nt\sqrt{2} - (2+\sqrt{2})nn\alpha'\,\mathit{cof}.nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - (2-\sqrt{2})nn\alpha''\,\mathit{cof}.nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$

§. 28. Ponamus nunc corpus A initio de ſitu ſuo quietis deductum fuiſſe per ſpatiolum $=\omega$ verſus P, ibique tamdiu fuiſſe detentum, donec reliqua corpora ſe ad ſtatum aequilibrii compoſuerint; tum vero corpus A ſubito dimitti, ſicque motum paulatim in corpora B et C transferri. Quo igitur formulas inuentas ad hunc caſum accommodemus, primo erit:

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = -\omega$$

Deinde quia reliqua corpora B et C ipſo motus initio nullam accelerationem patiuntur, erit:

$$(2+\sqrt{2})\alpha'\sqrt{2} = (2-\sqrt{2})\alpha''\sqrt{2}$$

et $2\alpha = (2+\sqrt{2})\alpha' + (2-\sqrt{2})\alpha'' = 2(2-\sqrt{2})\alpha''$

ergo $\alpha'' = \frac{\alpha}{2-\sqrt{2}}$; et $\alpha' = \frac{\alpha}{2+\sqrt{2}}$

ideoque $\alpha' + \alpha'' = 2\alpha$; et $3\alpha = -\omega$. Quamobrem habebimus:

$\alpha = -\frac{1}{3}\omega$; $\alpha' = -\frac{1}{6}\omega(2-\sqrt{2})$; $\alpha'' = -\frac{1}{6}\omega(2+\sqrt{2})$.

§. 29. His igitur valoribus pro α, α', α'' inuentis, momenta aſſignare licet, quibus ſingula corpora maximum celeritatis gradum adipiscuntur. Ac primo quidem corpus A celerrime mouebitur, ſi fuerit:

$0 = 2\cos. nt\sqrt{2} + \cos. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + \cos. nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$
Corpus vero B maximum celeritatis gradum habebit si sit: $0 = \cos. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} - \cos. nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$ At corpus C maximam acquiret celeritatem, quando fit $0 = -2\cos. nt\sqrt{2}\cos. nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} + \cos. nt\sqrt{(2-\sqrt{2}}$.
Hinc facillime momenta assignantur, quibus corpus B celerrime concitatur: primum scilicet hoc fiet, quando erit

$$nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} = \pi - s \quad \text{et} \quad nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} = \pi + s$$

vnde fit $nt\sqrt{(4+2\sqrt{2})} = 2\pi$ et $t = \frac{\pi\sqrt{2}}{n\sqrt{(2+\sqrt{2})}} = \frac{\pi\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{n}$; seu $t = \frac{\pi\sqrt{2(2-\sqrt{2})\Lambda a}}{\sqrt{g}}$. Tanto ergo tempore pulsus in secundum corpus B transfertur: neque vero hoc tempus duplo maius est eo, quo corpus A primum celerrime mouetur, neque pari interuallo pulsus in corpus C progreditur. Haec autem experientiae non aduersantur, qua constat pulsus motu aequabili propagari; numerus enim particularum hic consideratarum nimis est paruus, quam vt inde conclusio ad numerum quasi infinitum inferri queat.

§. 30. Si has formulas attentius consideremus, iam ordinem in angulis, quorum sinus et cosinus hic occurrunt, obseruare licebit. Hoc enim casu, quo tria corpora A, B, C sumus contemplati, anguli $nt\sqrt{2}$, $nt\sqrt{(2+\sqrt{2})}$ et $nt\sqrt{(2-\sqrt{2})}$ ita se habent, vt posito ϱ angulo recto sit:

$$nt\sqrt{2} = 2nt\cos.\tfrac{1}{2}\varrho; \quad nt\sqrt{(2+\sqrt{2})} = 2nt\cos.\tfrac{1}{4}\varrho;$$
$$\text{et} \quad nt\sqrt{(2-\sqrt{2})} = 2nt\cos.\tfrac{3}{4}\varrho.$$

isti ergo anguli ex quadrisectione anguli recti determinantur. Erat vero hic $n = \sqrt{\frac{g}{2\Lambda a}}$. Si pro casu duorum

rum corporum poſuiſſemus pariter $n = \sqrt{\frac{g}{2Aa}}$; tum prodiiſſent hi anguli nt, et $nt\sqrt{3}$; qui ita exhibebuntur per triſectionem anguli recti:

$nt = 2nt \operatorname{coſ.} \frac{2}{3}\varrho$; $nt\sqrt{3} = 2nt \operatorname{coſ.} \frac{1}{3}\varrho$.

ſimili modo in caſu vnici corporis, poſito $n = \sqrt{\frac{g}{2Aa}}$ occurrebat angulus $nt\sqrt{2} = 2nt \operatorname{coſ.} \frac{1}{2}\varrho$: ideoque ex biſectione anguli recti ϱ definitur. Ex his iam colligere poſſumus, ſi numerus corporum ſit $= m-1$ fore angulos ſolutionem ingredientes:

$2nt \operatorname{coſ.} \frac{1}{m}\varrho$; $2nt \operatorname{coſ.} \frac{2}{m}\varrho$; $2nt \operatorname{coſ.} \frac{3}{m}\varrho \ldots\ldots 2nt \operatorname{coſ.} \frac{m-1}{m}\varrho$.

§. 31. Ponamus nunc intra parietes P et Q corpora quotcunque aequalia A, B, C, D, E, etc. in linea recta eſſe conſtituta, quae interpoſitis elaſtris aequalibus in ſe inuicem nitantur. Sit maſſa cuiusque corporis $= A$, longitudo ſingulorum elaſtrorum, cum ſe mutuo in aequilibrio ſeruant $= a$, et vis elaſtica eiusque elaſtri in hoc ſtatu aequilibrii ſit $= g$. Poſtquam autem ab actione quacunque ſtatus aequilibrii fuerit perturbatus, elapſo tempore t ſingula corpora eum ſitum teneant, qui in figura repraeſentatur, ſitque numerus corporum $= \lambda - 1$ erit elaſtrorum PA, AB, BC, etc. numerus vnitate maior $= \lambda$. Fig. 5.
Vocetur nunc:

$PA = a + x$
$PB = 2a + x^{I}$
$PC = 3a + x^{II}$
$PD = 4a + x^{III}$
$PE = 5a + x^{IV}$
:

:

$PG = (\lambda-1)a + x^{(\lambda-2)}$

$PQ = .\ \lambda\ a + x^{(\lambda-2)}$

eritque $x^{(\lambda-1)} = 0$, $x^{(\lambda)} = 0$, $x^{(\lambda+1)} = 0$ etc.

§. 32. Hinc longitudines ſingulorum elaſtrorum cum ſuis viribus elaſticis ita ſe habebunt

Longitudo	vis elaſtica
$PA = a + x$	$g\left(1 - \frac{x}{a}\right)$
$AB = a + x^{I} - x$	$g\left(1 - \frac{x^{I}}{a} + \frac{x}{a}\right)$
$BC = a + x^{II} - x^{I}$	$g\left(1 - \frac{x^{II}}{a} + \frac{x^{I}}{a}\right)$
$CD = a + x^{III} - x^{II}$	$g\left(1 - \frac{x^{III}}{a} + \frac{x^{II}}{a}\right)$

etc.

Vires ergo quibus ſingula copora ſecundum directionem PQ ſollicitantur erunt :

pro corpore	vis ſollicitans
A - - - - - -	$\frac{g}{a}\left(x^{I} - 2x\right)$
B - - - - - -	$\frac{g}{a}\left(x^{II} - 2x^{I} + x\right)$
C - - - - - -	$\frac{g}{a}\left(x^{III} - 2x^{II} + x^{I}\right)$
D - - - - - -	$\frac{g}{a}\left(x^{IV} - 2x^{III} + x^{II}\right)$
	etc.
G - - - - - -	$\frac{g}{a}\left(x^{(\lambda-1)} - 2x^{(\lambda-2)} + x^{(\lambda-3)}\right)$

§. 33. Celeritates porro ſingulorum corporum ſequenti modo exprimentur, ſecundum directionem PQ:

Celeritas corporis A $= \frac{dx}{dt}$

\- - - - - B $= \frac{dx^{I}}{dt}$

Celeri-

Celeritas corporis C $= \frac{dx^{II}}{dt}$

- - - - - - D $= \frac{dx^{III}}{dt}$

:

:

Celeritas vltimi G $= \frac{dx^{(\lambda-1)}}{dt}$

Atque vires, quae ad accelerationem singulorum secundum eandem directionem PQ requiruntnr, erunt

Corpus	sollicitabitur vi
A	$\frac{2Addx}{dt^2} = \frac{g}{a}(x^I - 2x)$
B	$\frac{2Addx^I}{dt^2} = \frac{g}{a}(x^{II} - 2x^I + x)$
C	$\frac{2Addx^{II}}{dt^2} = \frac{g}{a}(x^{III} - 2x^{II} + x^I)$
D	$\frac{2Addx^{III}}{dt^2} = \frac{g}{a}(x^{IV} - 2x^{III} + x^{II})$
:	:
:	:
:	:
G	$\frac{2Addx^{(\lambda-1)}}{dt^2} = \frac{g}{a}(x^{(\lambda-1)} - 2x^{(\lambda-2)} + x^{(\lambda-3)})$

§. 34. Ponamus vt ante $\frac{g}{2Aa} = nn$, et habebimus has aequationes:

$$\frac{ddx}{nndt^2} = x^I - 2x$$

$$\frac{ddx^I}{nndt^2} = x^{II} - 2x^I + x$$

$$\frac{ddx^{II}}{nndt^2} = x^{III} - 2x^{II} + x^I$$

$$\frac{ddx^{III}}{nndt^2} = x^{IV} - 2x^{III} + x^{II}$$

:

$$\vdots$$

$$\frac{ddx^{(\lambda-1)}}{nndt^2} = x^{(\lambda-1)} - 2x^{(\lambda-2)} + x^{(\lambda-3)}$$

Ad quas aequationes resoluendas ponamus:

$$x = \alpha \text{ cos. } ntp$$
$$x^{\mathrm{I}} = \alpha^{\mathrm{I}} \text{ cos. } 2ntp$$
$$x^{\mathrm{II}} = \alpha^{\mathrm{II}} \text{ cos. } 2ntp$$
$$x^{\mathrm{III}} = \alpha^{\mathrm{III}} \text{ cos. } 2ntp$$
$$\vdots$$
$$x^{(\lambda-2)} = \alpha^{(\lambda-2)} \text{ cos. } 2ntp$$

eritque $\alpha^{(\lambda-1)} = 0$, ob $x^{(\lambda-1)} = 0$. Potuissemus hic quoque sinus eiusdem anguli $2ntp$ adiicere, sed cum eorum coefficientes eandem legem teneant, inuentis coefficientibus α, α^{I}, α^{II}, α^{III} etc. cum valoribus constantis quantitatis p, hi termini nullo negotio adiiciuntur.

§. 35. Cum igitur posito dt constante sit:

$$-\frac{ddx}{nndt^2} = 4\alpha\, pp \text{ cos. } 2ntp$$
$$-\frac{ddx^{\mathrm{I}}}{nndt^2} = 4\alpha^{\mathrm{I}}\, pp \text{ cos. } 2ntp$$
$$-\frac{ddx^{\mathrm{II}}}{nndt^2} = 4\alpha^{\mathrm{II}}\, pp \text{ cos. } 2ntp$$
$$-\frac{ddx^{\mathrm{III}}}{nndt^2} = 4\alpha^{\mathrm{III}}\, pp \text{ cos. } 2ntp$$
$$\vdots$$
$$-\frac{ddx^{(\lambda-2)}}{nndt^2} = 4\alpha^{(\lambda-2)}\, pp \text{ cos. } 2ntp$$

se-

ſequentes adipiscemur aequationes :

$$\begin{array}{l|l}
-4\alpha\, pp = \alpha^{I} - 2\alpha & \alpha^{I} = 2(1-2pp)\alpha \\
-4\alpha^{I}\, pp = \alpha^{II} - 2\alpha^{I} + \alpha & \alpha^{II} = 2(1-2pp)\alpha^{I} - \alpha \\
-4\alpha^{II}\, pp = \alpha^{III} - 2\alpha^{II} + \alpha^{I} & \alpha^{III} = 2(1-2pp)\alpha^{II} - \alpha^{I} \\
-4\alpha^{III}\, pp = \alpha^{IV} - 2\alpha^{III} + \alpha^{II} & \alpha^{IV} = 2(1-2pp)\alpha^{III} - \alpha^{II} \\
\vdots & \vdots \\
-4\alpha^{(\lambda-2)}pp = \alpha^{(\lambda-1)} - 2\alpha^{(\lambda-2)} + \alpha^{(\lambda-3)} & \alpha^{(\lambda-1)} = 2(1-2pp)\alpha^{(\lambda-2)} - \alpha^{(\lambda-3)}
\end{array}$$

§. 36. Ponamus nunc eſſe $p = \text{ſin.}\ \Phi$, erit $1-2pp = \text{coſ.}\,2\Phi$, hincque fiet

$$\alpha^{I} = 2\alpha\,\text{coſ.}\,2\Phi$$

$$\alpha^{II} = 4\alpha\,\text{coſ.}\,2\Phi\,\text{coſ.}\,2\Phi - \alpha = \alpha(1+\text{coſ.}\,4\Phi)$$

$$\alpha^{III} = \alpha(2\,\text{coſ.}\,2\Phi + 4\,\text{coſ.}\,2\Phi\,\text{coſ.}\,4\Phi - 2\,\text{coſ.}\,2\Phi) = \alpha(2\,\text{coſ.}\,2\Phi + 2\,\text{coſ.}\,6\Phi)$$

etc.

quo autem lex harum formularum clarius perſpiciatur, ponamus $\alpha = \mathfrak{A}\ \text{ſin.}\ 2\Phi$ eritque

$$\begin{aligned}
\alpha &= \mathfrak{A}\ \text{ſin.}\ 2\Phi \\
\alpha^{I} &= \mathfrak{A}\ \text{ſin.}\ 4\Phi \\
\alpha^{II} &= \mathfrak{A}\ \text{ſin.}\ 6\Phi \\
\alpha^{III} &= \mathfrak{A}\ \text{ſin.}\ 8\Phi \\
\alpha^{(\lambda-1)} &= \mathfrak{A}\ \text{ſin.}\ 2\lambda\Phi = 0.
\end{aligned}$$

Quia ergo $\text{ſin.}\ 2\lambda\Phi = 0$, ſumto ϱ pro angulo recto angulum $2\lambda\Phi$ eſſe oportet aequalem termino cuipiam huius ſeriei $0, 2\varrho, 4\varrho, 6\varrho, 8\varrho$, etc. Generaliter ergo erit $2\lambda\Phi = 2m\varrho$ denotante m numerum quemcunque integrum ; vnde fit $\Phi = \frac{m}{\lambda}\varrho$; et $p = \text{ſin.}\,\frac{m}{\lambda}\varrho$.

§. 37. Pro p igitur tot inuenimus diuerſos valores quot vnitates continentur in numero $\lambda - 1$, ſeu quot fuerint corpora in ſerie PQ: totidemque terminis conſtabunt valores x, x^{I}, x^{II}, etc. Sumto ergo pro m numero quocunque minori quam λ, erit

$$
\begin{aligned}
p &= \text{ſin.}\ \tfrac{m}{\lambda}\ \varrho \\
\alpha &= \mathfrak{A}\ \text{ſin.}\ \tfrac{2m}{\lambda}\ \varrho \\
\alpha^{I} &= \mathfrak{A}\ \text{ſin.}\ \tfrac{4m}{\lambda}\ \varrho \\
\alpha^{II} &= \mathfrak{A}\ \text{ſin.}\ \tfrac{6m}{\lambda}\ \varrho \\
\alpha^{III} &= \mathfrak{A}\ \text{ſin.}\ \tfrac{8m}{\lambda}\ \varrho \\
&\vdots \\
\alpha^{(\lambda-1)} &= \mathfrak{A}\ \text{ſin.}\ 2m\varrho = 0
\end{aligned}
$$

vnde ſequentes obtinebuntur valores:

$$
\begin{aligned}
x = {} & \mathfrak{A}\text{ſin.}\tfrac{2}{\lambda}\rho.\text{coſ.}2nt\,\text{ſin.}\tfrac{\varrho}{\lambda} + \mathfrak{B}\text{ſin.}\tfrac{4}{\lambda}\varrho.\text{coſ}2nt\,\text{ſin}\tfrac{2\varrho}{\lambda} + \\
& \mathfrak{C}\text{ſin.}\tfrac{6}{\lambda}\varrho.\text{coſ.}2nt\,\text{ſin.}\tfrac{3\varrho}{\lambda} \ldots\ldots + \mathfrak{D}\text{ſin}\tfrac{4(\lambda-1)\varrho}{\lambda}.\text{coſ}2nt\,\text{ſin}\tfrac{2(\lambda-1)\varrho}{\lambda} \\
x^{I} = {} & \mathfrak{A}\text{ſin.}\tfrac{4}{\lambda}\varrho.\text{coſ.}2nt\,\text{ſin.}\tfrac{\varrho}{\lambda} + \mathfrak{B}\text{ſin.}\tfrac{8}{\lambda}\varrho\,\text{coſ}2nt\,\text{ſin}\tfrac{2\varrho}{\lambda} + \\
& \mathfrak{C}\text{ſin.}\tfrac{12}{\lambda}\rho.\text{coſ.}2nt\,\text{ſin.}\tfrac{3\varrho}{\lambda} + \ldots\ldots + \mathfrak{D}\text{ſin}\tfrac{4(\lambda-1)\varrho}{\lambda}.\text{coſ}2nt\,\text{ſin}\tfrac{(\lambda-1)\varrho}{\lambda} \\
x^{II} = {} & \mathfrak{A}\text{ſin.}\tfrac{6}{\lambda}\rho.\text{coſ.}2nt\,\text{ſin.}\tfrac{\varrho}{\lambda} + \mathfrak{B}\text{ſin.}\tfrac{12}{\lambda}\rho.\text{coſ}2nt\,\text{ſin}\tfrac{2\varrho}{\lambda} + \\
& \mathfrak{C}\text{ſin.}\tfrac{18}{\lambda}\rho.\text{coſ.}2nt\,\text{ſin.}\tfrac{3\varrho}{\lambda} + \ldots\ldots + \mathfrak{D}\,\text{ſin}\tfrac{6(\lambda-1)}{\lambda}\varrho.\text{coſ}2nt\,\text{ſin}\tfrac{(\lambda-1)\varrho}{\lambda} \\
x^{(\lambda-2)} = {} & \mathfrak{A}\text{ſin}\tfrac{2(\lambda-1)}{\lambda}\rho.\text{coſ}2nt\,\text{ſin}\tfrac{\varrho}{\lambda} + \mathfrak{B}\text{ſin}\tfrac{4(\lambda-1)}{\lambda}\rho.\text{coſ}2nt\,\text{ſin}\tfrac{2\varrho}{\lambda} + \\
& \mathfrak{C}\text{ſin}\tfrac{6(\lambda-1)}{\lambda}\rho.\text{coſ}2nt\,\text{ſin}\tfrac{3\varrho}{\lambda} + \ldots + \mathfrak{D}\text{ſin}\tfrac{2(\lambda-1)^2}{\lambda}\rho.\text{coſ}\,2\,nt\,\text{ſin}\tfrac{(\lambda-1)\varrho}{\lambda}.
\end{aligned}
$$

§. 38. Aequationes iſtae iam ita ſunt comparatae, vt ipſo motus initio, quo erat $t = 0$, ſingulorum cor-

porum

porum celeritates euanefcant; in quem finem finus angulorum $2nt$ data opera omifimus. Pro vario ergo fitu cuiusque corporis initiali, refpectu fitus aequilibrii, vnde valores litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. pendent, innumerabiles diuerfarum agitationum modi refultant, quos quidem fi valores litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. fuerint cogniti, facile determinare licet, cum ex aequationibus inuentis ad quoduis temporis momentum fingulorum corporum tam fitus quam motus affignari queat. Longe autem difficilius eft pro quouis ftatu initiali propofito, idoneos litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. valores inueftigare, cum tot prodeant aequationes, quot adeffe ponuntur corpora: vnde fi horum corporum numerus fuerit indefinitus, via vix patet, quae ad cognitionem iftorum valorum perducat.

§. 39. Si ponamus initio omnia corpora praeter primum in fitu fuo naturali fuiffe conftituta, primum autem interuallo $= \omega$ de loco fuo naturali fuiffe dimotum, neceffe eft vt pofito $t = 0$ fiat $x = -\omega$, et $x^{I} = 0$, $x^{II} = 0$, $x^{III} = 0$, etc. Hinc ergo fequentes aequationes refultabunt.

$$\mathfrak{A}\,\text{fin.}\tfrac{2}{\lambda}\rho + \mathfrak{B}\,\text{fin.}\tfrac{4}{\lambda}\rho + \mathfrak{C}\,\text{fin.}\tfrac{6}{\lambda}\rho + \ldots\ldots + \mathfrak{D}\,\text{fin.}\tfrac{2(\lambda-1)}{\lambda}\rho = \omega$$
$$\mathfrak{A}\,\text{fin.}\tfrac{4}{\lambda}\rho + \mathfrak{B}\,\text{fin.}\tfrac{8}{\lambda}\rho + \mathfrak{C}\,\text{fin.}\tfrac{12}{\lambda}\rho + \ldots\ldots + \mathfrak{D}\,\text{fin.}\tfrac{4(\lambda-1)}{\lambda}\rho = 0$$
$$\mathfrak{A}\,\text{fin.}\tfrac{6}{\lambda}\rho + \mathfrak{B}\,\text{fin.}\tfrac{12}{\lambda}\rho + \mathfrak{C}\,\text{fin.}\tfrac{18}{\lambda}\rho + \ldots\ldots + \mathfrak{D}\,\text{fin.}\tfrac{6(\lambda-1)}{\lambda}\rho = 0$$
$$\mathfrak{A}\,\text{fin.}\tfrac{8}{\lambda}\rho + \mathfrak{B}\,\text{fin.}\tfrac{16}{\lambda}\rho + \mathfrak{C}\,\text{fin.}\tfrac{24}{\lambda}\rho + \ldots\ldots + \mathfrak{D}\,\text{fin.}\tfrac{8(\lambda-1)}{\lambda}\rho = 0$$
$$\vdots$$

:

$$\mathfrak{A}\,\text{sin.}\tfrac{2(\lambda-1)}{\lambda}\varrho+\mathfrak{B}\,\text{sin.}\tfrac{4(\lambda-1)}{\lambda}\varrho+\mathfrak{C}\,\text{sin.}\tfrac{6(\lambda-1)}{\lambda}\varrho+\ldots\ldots+\mathfrak{D}\,\text{sin}\tfrac{2(\lambda-1)^2}{\lambda}\varrho=0$$

quarum aequationum numerus est $=\lambda-1$, ideoque corporum A, B, C, etc. numero aequatur, et vnaquaeque aequatio totidem continet terminos.

§. 40. Videamus ergo, an inductio a casibus facilioribus quicquam ad generalem litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. determinationem conferat. Sit igitur primo vnicum corpus A, et habebitur vnica aequatio, ob $\lambda-1=1$.

$$\mathfrak{A}=-\omega.$$

Sit $\lambda-1=2$ seu $\lambda=3$, habebimus duas aequationes.

I. $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\tfrac{2}{3}\varrho+\mathfrak{B}\,\text{sin.}\tfrac{2}{3}\varrho=-\omega$; $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\tfrac{2}{3}\varrho=-\tfrac{1}{2}\omega$

II. $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\tfrac{2}{3}\varrho-\mathfrak{B}\,\text{sin.}\tfrac{2}{3}\varrho=0$; $\mathfrak{B}\,\text{sin.}\tfrac{2}{3}\varrho=-\tfrac{1}{2}\omega$

Hinc $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\tfrac{2}{3}\varrho=-\tfrac{1}{2}\omega$; $\mathfrak{B}\,\text{sin.}\tfrac{4}{3}\varrho=-\tfrac{1}{2}\omega$; $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\tfrac{4}{3}\varrho=-\tfrac{1}{2}\omega$ et $\mathfrak{B}\,\text{sin.}\tfrac{8}{3}\varrho=+\tfrac{1}{2}\omega$.

Sit $\lambda-1=3$ seu $\lambda=4$, tres habebuntur aequationes.

I. $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\tfrac{2}{4}\varrho+\mathfrak{B}\,\text{sin.}\tfrac{4}{4}\varrho+\mathfrak{C}\,\text{sin.}\tfrac{6}{4}\varrho=-\omega$

II. $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\tfrac{4}{4}\varrho+\mathfrak{B}\,\text{sin.}\tfrac{8}{4}\varrho+\mathfrak{C}\,\text{sin.}\tfrac{12}{4}\varrho=0$

III. $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\tfrac{6}{4}\varrho+\mathfrak{B}\,\text{sin.}\tfrac{12}{4}\varrho+\mathfrak{C}\,\text{sin.}\tfrac{18}{4}\varrho=0$

siue — ergo

I. $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\tfrac{1}{2}\varrho+\mathfrak{B}\,\text{sin.}\varrho+\mathfrak{C}\,\text{sin.}\tfrac{1}{2}\varrho=-\omega$ — $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}$

II. $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\varrho+{*}-\mathfrak{C}\,\text{sin.}\varrho=0$ — $(\mathfrak{A}+\mathfrak{C})\,\text{sin.}\tfrac{1}{2}\varrho=-\tfrac{1}{2}\omega$; $\mathfrak{A}=-\tfrac{1}{4}\omega:\text{sin.}\tfrac{1}{2}\varrho$

III. $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\tfrac{1}{2}\varrho-\mathfrak{B}\,\text{sin.}\varrho+\mathfrak{C}\,\text{sin.}\tfrac{1}{2}\varrho=0$ — $\mathfrak{C}=-\tfrac{1}{4}\omega:\text{sin.}\tfrac{1}{2}\varrho$; $\mathfrak{B}=-\tfrac{1}{2}\omega:\text{sin.}\varrho$

Erit ergo

$\mathfrak{A}\,\text{sin.}\tfrac{2}{4}\varrho=-\tfrac{1}{4}\omega$ | $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\tfrac{4}{4}\varrho=-\tfrac{1}{2}\omega\,\text{cos.}\tfrac{1}{2}\varrho$ | $\mathfrak{A}\,\text{sin.}\tfrac{6}{4}\varrho=-\tfrac{1}{4}\omega$

$\mathfrak{B}$ sin.

$\mathfrak{B}\,\text{sin.}\,\frac{4}{4}\varrho = -\frac{1}{2}\omega$	$\mathfrak{B}\,\text{sin.}\,\frac{8}{4}\varrho = 0$	$\mathfrak{B}\,\text{sin.}\,\frac{12}{4}\varrho = +\frac{1}{2}\omega$
$\mathfrak{C}\,\text{sin.}\,\frac{6}{4}\varrho = -\frac{1}{4}\omega$	$\mathfrak{C}\,\text{sin.}\,\frac{12}{4}\varrho = +\frac{1}{2}\omega\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}\varrho$	$\mathfrak{C}\,\text{sin.}\,\frac{18}{4}\varrho = -\frac{1}{4}\omega$

§. 41. Hos valores iam supra eruimus; nunc igitur vlterius progrediamur ac ponamus $\lambda - 1 = 4$, seu $\lambda = 5$.

$$\mathfrak{A}\,\text{sin.}\,\tfrac{2}{5}\varrho + \mathfrak{B}\,\text{sin.}\,\tfrac{4}{5}\varrho + \mathfrak{C}\,\text{sin.}\,\tfrac{6}{5}\varrho + \mathfrak{D}\,\text{sin.}\,\tfrac{8}{5}\varrho = -\omega$$
$$\mathfrak{A}\,\text{sin.}\,\tfrac{4}{5}\varrho + \mathfrak{B}\,\text{sin.}\,\tfrac{8}{5}\varrho + \mathfrak{C}\,\text{sin.}\,\tfrac{12}{5}\varrho + \mathfrak{D}\,\text{sin.}\,\tfrac{16}{5}\varrho = 0$$
$$\mathfrak{A}\,\text{sin.}\,\tfrac{6}{5}\varrho + \mathfrak{B}\,\text{sin.}\,\tfrac{12}{5}\varrho + \mathfrak{C}\,\text{sin.}\,\tfrac{18}{5}\varrho + \mathfrak{D}\,\text{sin.}\,\tfrac{24}{5}\varrho = 0$$
$$\mathfrak{A}\,\text{sin.}\,\tfrac{8}{5}\varrho + \mathfrak{B}\,\text{sin.}\,\tfrac{16}{5}\varrho + \mathfrak{C}\,\text{sin.}\,\tfrac{24}{5}\varrho + \mathfrak{D}\,\text{sin.}\,\tfrac{32}{5}\varrho = 0$$

sit breuitatis gratia:

$$\alpha = \text{sin.}\,\tfrac{2}{5}\varrho = \text{sin.}\,\tfrac{8}{5}\varrho = -\text{sin.}\,\tfrac{12}{5}\varrho = -\text{sin.}\,\tfrac{18}{5}\varrho = -\text{sin.}\,\tfrac{32}{5}\varrho$$
$$\beta = \text{sin.}\,\tfrac{4}{5}\varrho = \text{sin.}\,\tfrac{6}{5}\varrho = -\text{sin.}\,\tfrac{16}{5}\varrho = \text{sin.}\,\tfrac{24}{5}\varrho$$ erit

$\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{C}\beta + \mathfrak{D}\alpha = -\omega$	$\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{C}\beta = -\frac{1}{2}\omega$
$\mathfrak{A}\beta + \mathfrak{B}\alpha - \mathfrak{C}\alpha - \mathfrak{D}\beta = 0$	$\mathfrak{B}\beta + \mathfrak{D}\alpha = -\frac{1}{2}\omega$
$\mathfrak{A}\beta - \mathfrak{B}\alpha - \mathfrak{C}\alpha + \mathfrak{D}\beta = 0$	$\mathfrak{A}\beta - \mathfrak{C}\alpha = 0$
$\mathfrak{A}\alpha - \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{C}\beta - \mathfrak{D}\alpha = 0$	$\mathfrak{B}\alpha - \mathfrak{D}\beta = 0$

vnde fit $\mathfrak{A}(\alpha^2 + \beta^2) = -\frac{1}{2}\alpha\omega$; $\mathfrak{C}(\alpha\alpha + \beta\beta) = -\frac{1}{2}\beta\omega$ $\mathfrak{B}(\alpha\alpha + \beta\beta) = -\frac{1}{2}\beta\omega$; $\mathfrak{D}(\alpha\alpha + \beta\beta) = -\frac{1}{2}\alpha\omega$ ideoque

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{D} = \frac{-\alpha\omega}{2(\alpha^2 + \beta^2)};\ \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \frac{-\beta\omega}{2(\alpha^2 + \beta^2)}$$

et $\mathfrak{A} : \mathfrak{B} = \alpha : \beta$.

§. 41. Ponamus iam esse $\lambda - 1 = 5$ seu $\lambda = 6$; sitque

$$\alpha = \text{sin.}\,\tfrac{2}{6}\varrho = \text{sin.}\,\tfrac{10}{6}\varrho = \text{sin.}\,\tfrac{50}{6}\varrho$$
$$\beta = \text{sin.}\,\tfrac{4}{6}\varrho = \text{sin.}\,\tfrac{8}{6}\varrho = -\text{sin.}\,\tfrac{16}{6}\varrho = -\text{sin.}\,\tfrac{20}{6}\varrho = \text{sin.}\,\tfrac{32}{6}\varrho = -\text{sin.}\,\tfrac{40}{6}\varrho$$
$$\nu = \text{sin.}\,\tfrac{6}{6}\varrho = -\text{sin.}\,\tfrac{18}{6}\varrho = \text{sin.}\,\tfrac{30}{6}\varrho$$
$$o = \text{sin.}\,\tfrac{12}{6}\varrho = \text{sin.}\,\tfrac{24}{6}\varrho$$

atque habebimus has aequationes:

$$\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{C}\gamma + \mathfrak{D}\beta + \mathfrak{E}\alpha = -\omega$$

 $\mathfrak{A}\beta$

$$\mathfrak{A}\beta + \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{C}0 - \mathfrak{D}\beta - \mathfrak{E}\beta = 0$$
$$\mathfrak{A}\gamma + \mathfrak{B}0 - \mathfrak{C}\gamma + \mathfrak{D}0 + \mathfrak{E}\gamma = 0$$
$$\mathfrak{A}\beta - \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{C}0 + \mathfrak{D}\beta - \mathfrak{E}\beta = 0$$
$$\mathfrak{A}\alpha - \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{C}\gamma - \mathfrak{D}\beta + \mathfrak{E}\alpha = 0$$

Harum media dat $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{E}$, ſecunda et quarta vero $\mathfrak{A} - \mathfrak{C} = 0$; et $\mathfrak{B} - \mathfrak{D} = 0$; ergo erit $\mathfrak{E} = \mathfrak{A}$; $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}$; $\mathfrak{C} = 2\,\mathfrak{A}$. Deinde prima et quinta dat: $\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{C}\gamma + \mathfrak{E}\alpha = -\frac{1}{2}\omega$; $\mathfrak{B}\beta + \mathfrak{D}\beta = -\frac{1}{2}\omega$

Ergo $\mathfrak{A} = \mathfrak{E} = \frac{-\omega}{4(\alpha+\gamma)}$; $\mathfrak{B} = \mathfrak{D} = \frac{-\omega}{4\beta}$; $\mathfrak{C} = \frac{-\omega}{2(\alpha+\gamma)}$
Eſt vero hic $\alpha = \frac{1}{2}$; $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$; et $\gamma = 1$: vnde erit $\mathfrak{A} : \mathfrak{B} = \beta : \alpha + \gamma = \sqrt{3} : 3 = \alpha : \beta$ et ob $\gamma = 2\alpha$ fiet $\mathfrak{A} : \mathfrak{B} : \mathfrak{C} = \alpha : \beta . \gamma$.

§. 42. Hinc iam ſatis tuto per inductionem concluſio colligi poſſet pro generali coefficientium determinatione; ſed quo magis confirmemur, ponamus adhuc $\lambda - 1 = 6$ ſeu $\lambda = 7$; ſitque

$$\alpha = \text{ſin.}\tfrac{2}{7}\varrho = \text{ſin.}\tfrac{12}{7}\varrho = -\text{ſin.}\tfrac{16}{7}\varrho = \text{ſin.}\tfrac{30}{7}\varrho\ \text{ſin.}\tfrac{40}{7}\varrho = -\text{ſin}:\tfrac{72}{7}\varrho$$
$$\beta = \text{ſin.}\tfrac{4}{7}\varrho = \text{ſin.}\tfrac{10}{7}\varrho = -\text{ſin.}\tfrac{24}{7}\varrho = -\text{ſin.}\tfrac{18}{7}\varrho = \text{ſin.}\tfrac{32}{7}\varrho = \text{ſin.}\tfrac{60}{7}\varrho$$
$$\gamma = \text{ſin.}\tfrac{6}{7}\varrho = \text{ſin.}\tfrac{8}{7}\varrho = -\text{ſin.}\tfrac{20}{7}\varrho = \text{ſin.}\tfrac{36}{7}\varrho = -\text{ſin.}\tfrac{48}{7}\varrho = \text{ſin}\tfrac{50}{7}\varrho,$$

atque ſequentes obtinebuntur aequationes:

$$\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{C}\gamma + \mathfrak{D}\gamma + \mathfrak{E}\beta + \mathfrak{F}\alpha = -\omega$$
$$\mathfrak{A}\beta + \mathfrak{B}\gamma + \mathfrak{C}\alpha - \mathfrak{D}\alpha - \mathfrak{E}\gamma - \mathfrak{F}\beta = 0$$
$$\mathfrak{A}\gamma + \mathfrak{B}\alpha - \mathfrak{C}\beta - \mathfrak{D}\beta + \mathfrak{E}\alpha + \mathfrak{F}\gamma = 0$$
$$\mathfrak{A}\gamma - \mathfrak{B}\alpha - \mathfrak{C}\beta + \mathfrak{D}\beta + \mathfrak{E}\alpha - \mathfrak{F}\gamma = 0$$
$$\mathfrak{A}\beta - \mathfrak{B}\gamma + \mathfrak{C}\alpha + \mathfrak{D}\alpha - \mathfrak{E}\gamma + \mathfrak{F}\beta = 0$$
$$\mathfrak{A}\alpha - \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{C}\gamma - \mathfrak{D}\gamma + \mathfrak{E}\beta - \mathfrak{F}\alpha = 0$$

Harum

Harum aequationum secundae, quartae, et sextae satis fit ponendo $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}$; $\mathfrak{E} = \mathfrak{B}$ et $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}$; ex quo tres reliquae abeunt in:

$$\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{C}\gamma = -\tfrac{1}{2}\omega$$
$$\mathfrak{A}\gamma + \mathfrak{B}\alpha - \mathfrak{C}\beta = 0$$
$$\mathfrak{A}\beta - \mathfrak{B}\gamma + \mathfrak{C}\alpha = 0$$

Duabus posterioribus autem satisfit ponendo:

$$\mathfrak{A} = \alpha k;\ \mathfrak{B} = \beta k, \text{ et } \mathfrak{C} = \gamma k$$

est enim $\alpha\gamma + \alpha\beta - \beta\gamma = 0$. Namque cum sit generaliter $\sin. p \sin. q = \frac{1}{2}\cos.(p-q) - \frac{1}{2}\cos.(p+q)$ erit

$$\alpha\gamma = \tfrac{1}{2}\cos.\tfrac{4}{7}\varrho - \tfrac{1}{2}\cos.\tfrac{8}{7}\varrho = \tfrac{1}{2}\sin.\tfrac{3}{7}\varrho + \tfrac{1}{2}\sin.\tfrac{1}{7}\varrho$$
$$\alpha\beta = \tfrac{1}{2}\cos.\tfrac{2}{7}\varrho - \tfrac{1}{2}\cos.\tfrac{6}{7}\varrho = \tfrac{1}{2}\sin.\tfrac{5}{7}\varrho - \tfrac{1}{2}\sin.\tfrac{1}{7}\varrho$$
$$\beta\gamma = \tfrac{1}{2}\cos.\tfrac{2}{7}\varrho - \tfrac{1}{2}\cos.\tfrac{10}{7}\varrho = \tfrac{1}{2}\sin.\tfrac{5}{7}\varrho + \tfrac{1}{2}\sin.\tfrac{3}{7}\varrho$$

ideoque $\alpha\gamma + \alpha\beta - \beta\gamma = 0$. Tum vero erit $k = \frac{-\omega}{2(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)}$.

§. 43. Si igitur in genere pro casu quocunque corporum initio omnia corpora quiescant, ac primum quidem A in distantia ω a situ naturali, reliqua vero cuncta in ipso situ naturali; aequationibus in §. 39. repertis satisfiet ponendo; si $\lambda - 1$ indicet numerum corporum:

$$\mathfrak{A} = k\sin.\tfrac{2}{\lambda}\varrho;\ \mathfrak{B} = k\sin.\tfrac{4}{\lambda}\varrho;\ \mathfrak{C} = k\sin.\tfrac{6}{\lambda}\varrho;$$
$$\mathfrak{D} = k\sin.\tfrac{8}{\lambda}\varrho;\ \ldots\ldots\ldots\ \mathfrak{O} = k\sin.\tfrac{2(\lambda-1)\varrho}{\lambda}$$

Sic enim fiet, vti hic inuenimus $\mathfrak{A} = \mathfrak{O}$; $\mathfrak{B} = \mathfrak{N}$; $\mathfrak{C} = \mathfrak{M}$ etc. Tum vero littera k ita definietur vt sit:

$$k = \frac{-\omega}{2\left(\sin.\frac{2}{\lambda}\varrho^2 + \sin.\frac{4}{\lambda}\varrho^2 + \sin.\frac{6}{\lambda}\varrho^2 + \ldots + \sin.\frac{2(\lambda-1)}{\lambda}\varrho^2\right)}$$

Cum

Cum autem ſit $2 \text{ ſin. } p^2 = 1 - \text{coſ. } 2p$ erit;

$$k = -\omega; \left(\lambda - 1 - \text{coſ.} \tfrac{4}{\lambda} \varrho - \text{coſ.} \tfrac{8}{\lambda} \varrho - \text{coſ.} \tfrac{12}{\lambda} \varrho \ldots\ldots - \text{coſ.} \tfrac{4(\lambda-1)}{\lambda} \varrho\right)$$

Ponamus:

$$s = 1 + \text{coſ.} \tfrac{4}{\lambda} \varrho + \text{coſ.} \tfrac{8}{\lambda} \varrho + \text{coſ.} \tfrac{12}{\lambda} \varrho + \ldots\ldots + \text{coſ.} \tfrac{4(\lambda-1)}{\lambda} \varrho$$

erit ob $\text{ſin. } p \text{ coſ. } q = \tfrac{1}{2} \text{ ſin. } (p+q) - \tfrac{1}{2} \text{ ſin } (q-p)$

$$s \text{ ſin.} \tfrac{2}{\lambda} \varrho = \text{ſin.} \tfrac{2}{\lambda} \varrho + \tfrac{1}{2} \text{ſin.} \tfrac{6}{\lambda} \varrho \ldots\ldots + \tfrac{1}{2} \text{ſin.} \tfrac{2(2\lambda-3)}{\lambda} \varrho + \tfrac{1}{2} \text{ſin.} \tfrac{2(2\lambda-1)}{\lambda} \varrho$$
$$- \tfrac{1}{2} \text{ſin.} \tfrac{2}{\lambda} \varrho - \tfrac{1}{2} \text{ſin.} \tfrac{6}{\lambda} \varrho \qquad - \tfrac{1}{2} \text{ſin.} \tfrac{2(2\lambda-3)}{\lambda} \varrho$$

ideoque $s \text{ ſin.} \tfrac{2}{\lambda} \varrho = \tfrac{1}{2} \text{ſin.} \tfrac{2}{\lambda} \varrho + \tfrac{1}{2} \text{ſin.} \tfrac{2(2\lambda-1)}{\lambda} \rho = 0$

quia eſt $\text{ſin.} \tfrac{2(2\lambda-1)}{\lambda} \varrho = \text{ſin.} (4\varrho - \tfrac{2}{\lambda} \varrho) = - \text{ſin.} \tfrac{2}{\lambda} \rho$

Hancobrem erit $k = \frac{-\omega}{\lambda}$.

§. 44. Quodſi iam hi valores ſubſtituantur, habebitur

$$\frac{-\lambda x}{\omega} = \text{ſin} \tfrac{2}{\lambda} \rho \text{ ſin} \tfrac{2}{\lambda} \rho \text{ coſ} 2nt \text{ ſin} \tfrac{\rho}{\lambda} + \text{ſin} \tfrac{4}{\lambda} \rho \text{ ſin} \tfrac{4}{\lambda} \rho \text{ coſ } 2nt \text{ ſin} \tfrac{2\rho}{\lambda} + \text{etc.}$$
$$\frac{-\lambda x^{I}}{\omega} = \text{ſin} \tfrac{2}{\lambda} \rho \text{ ſin} \tfrac{4}{\lambda} \rho \text{ coſ} 2nt \text{ ſin} \tfrac{\rho}{\lambda} + \text{ſin} \tfrac{4}{\lambda} \rho \text{ ſin} \tfrac{8}{\lambda} \rho . \text{ coſ} 2nt \text{ ſin} \tfrac{2\rho}{\lambda} + \text{etc.}$$
$$\frac{-\lambda x^{II}}{\omega} = \text{ſin} \tfrac{2}{\lambda} \rho \text{ ſin} \tfrac{6}{\lambda} \rho \text{ coſ} 2nt \text{ ſin} \tfrac{\rho}{\lambda} + \text{ſin} \tfrac{4}{\lambda} \rho \text{ ſin} \tfrac{12}{\lambda} \rho . \text{ coſ} 2nt \text{ ſin} \tfrac{2\rho}{\lambda} + \text{etc.}$$
$$\vdots$$
$$\frac{-\lambda x^{(-1\nu)}}{\omega} = \text{ſin} \tfrac{2}{\lambda} \rho \text{ ſin} \tfrac{2\nu}{\lambda} \rho . \text{ coſ} 2nt \text{ ſin} \tfrac{\rho}{\lambda} + \text{ſin} \tfrac{4}{\lambda} \rho \text{ ſin} \tfrac{4\nu}{\lambda} \rho . \text{coſ} 2nt \text{ ſin} \tfrac{2\rho}{\lambda} + \text{etc.}$$

quae ſeries eo vſque continuari debent, quoad numerus terminorum in vnaquaque fiat $= \lambda - 1$. Hinc ergo vniuscuiusque corporis, cuius index a primo computando ſit $= \nu$ ad quoduis tempus aſſignari poterit tam ſitus, quam celeritas.

§. 45. Caſus autem ad propagationem pulſuum magis erit accommodatus, ſi ponamus initio, quo omnia

cor-

corpora erant in quiete; vires acceleratrices ſingulorum praeter primum fuiſſe nullas. Vt igitur ſuperiori modo coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. indagemus, ponamus primo eſſe $\lambda = 2$; et $\text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}\rho = \alpha = \text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}\rho$, erit $\text{ſin.}\ \rho = 2\alpha\alpha$, fietque ex acceleratione primi et ſolius corporis: $2\mathfrak{A}\alpha^4 = \omega$. Ponamus nunc $\lambda = 3$; ſitque.

$\text{ſin.}\ \tfrac{1}{3}\rho = \text{coſ.}\ \tfrac{2}{3}\rho = \alpha$

$\text{ſin.}\ \tfrac{2}{3}\rho = \text{coſ.}\ \tfrac{1}{3}\rho = \beta$;

erit $\mathfrak{A}\alpha^2 . \beta + \mathfrak{B}\beta^2 . \beta = \omega$

et $\mathfrak{A}\alpha^2 . \beta - \mathfrak{B}\beta^2 . \beta = 0$

ſicque patet easdem aequationes vt ſupra reſultare, dummodo ibi pro $\mathfrak{A}$ ponatur $\mathfrak{A}\ \text{ſin.}\ \frac{\rho^2}{\lambda}$; $\mathfrak{B}\ \text{ſin.}\ \frac{2\rho^2}{\lambda}$ pro $\mathfrak{B}$ et ita porro. Sic igitur his conſtantibus mutatis, erit acceleratio ſingulorum corporum iisdem expreſſionibus, quas ſupra pro x, x^{I}, x^{II}, x^{III} etc. invenimus proportionalis.

§. 46. Hinc ergo pro $\mathfrak{A}\ \text{ſin.}\ \frac{\rho^2}{\lambda}$, $\mathfrak{B}\ \text{ſin.}\ \frac{2\rho}{\lambda}$, etc. iidem prodibunt valores, quos ſupra pro litteris $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. inuenimus. Quare elapſo tempore t erit corporis, cuius index in ordine a primo computato eſt $= v$, vis acceleratrix huic expreſſioni proportionalis:

$$\text{ſin}\tfrac{2}{\lambda}\rho . \text{ſin.}\tfrac{2v}{\lambda}\rho\ \text{coſ.}\ 2nt\ \text{ſin}\tfrac{\rho}{\lambda} + \text{ſin}\tfrac{4}{\lambda}\rho . \text{ſin}\tfrac{4v}{\lambda}\rho . \text{coſ}\ 2nt\ \text{ſin}\tfrac{2\rho}{\lambda} + \text{etc.}$$

Quodſi ergo acceleratio corporis vltimi quaeratur, faciendum eſt $v = \lambda - 1$; eritque $\text{ſin.}\ \frac{2v}{\lambda}\rho = \text{ſin.}\ \frac{2}{\lambda}\rho$; $\text{ſin.}\ \frac{4v}{\lambda}\rho = -\text{ſin.}\ \frac{4}{\lambda}\rho$; $\text{ſin.}\ \frac{6v}{\lambda}\rho = \text{ſin.}\ \frac{6}{\lambda}\rho$, etc. Vnde acceleratio vltimi corporis erit iſti expreſſioni proportionalis;

$$\text{ſin}\ \tfrac{2}{\lambda}\rho^2 . \text{coſ}\ 2nt\ \text{ſin}\tfrac{\rho}{\lambda} - \text{ſin}\tfrac{4}{\lambda}\rho^2 . \text{coſ}\ 2nt\ \text{ſin}\tfrac{2\rho}{\lambda} + \text{ſin}\tfrac{6}{\lambda}\rho^2 . \text{coſ}\ 2nt\ \text{ſin}\tfrac{3\rho}{\lambda} - \text{etc.}$$

quae expreſſio poſita $= 0$ ea indicabit temporis momenta, quibus vltimi corporis celeritas eſt maxima ſeu quibus pulſus ipſi ineſſe conſendus erit.

§. 47. Si igitur quaeratur, quantum tempus a motus initio ſit elapſurum, antequam pulſus per totum interuallum PQ propagetur, tempus hoc t definiri debebit ex hac aequatione:

$$0 = \sin\tfrac{2}{\lambda}\rho^2.\cos 2nt \sin\tfrac{\rho}{\lambda} - \sin\tfrac{4}{\lambda}\rho^2.\cos 2nt \sin\tfrac{2\rho}{\lambda} + \sin\tfrac{6}{\lambda}\rho^2.\cos 2nt \sin\tfrac{3\rho}{\lambda} - \sin\tfrac{8}{\lambda}\rho^2.\cos 2nt \sin\tfrac{4\rho}{\lambda} + \ldots\ldots\ldots \pm \sin\tfrac{2(\lambda-1)}{\lambda}\rho^2.\cos 2nt \sin\tfrac{(\lambda-1)\rho}{\lambda}$$

Sit tota longitudo $PQ = f$; et g longitudo columnae, cuius pondus ipſi vi elaſticae huius fluidi aequetur, erit $f = \lambda a$; $A = a$; ideoque $n = \sqrt{\frac{g}{2aa}} = \frac{1}{a}\sqrt{\tfrac{1}{2}g} = \frac{\lambda}{f}\sqrt{\tfrac{1}{2}g}$. Fingatur nunc tempus quaeſitum $t = mf : \sqrt{\tfrac{1}{2}g}$: ita vt, ſi f et g in particulis milleſimis pedis rhenani exprimantur, futurum ſit tempus $t = \frac{1}{250} mf : \sqrt{\tfrac{1}{2}g}$ minutis ſecundis. Totum ergo negotium redit ad determinationem numeri abſoluti m, quam ex hac aequatione erui oportet:

$$0 = \sin\tfrac{2}{\lambda}\rho^2.\cos 2\lambda m \sin\tfrac{\rho}{\lambda} - \sin\tfrac{4}{\lambda}\rho^2 \cos 2\lambda m \sin\tfrac{2\rho}{\lambda} + \sin\tfrac{6}{\lambda}\rho^2.\cos 2\lambda m \sin\tfrac{3\rho}{\lambda} - \sin\tfrac{8}{\lambda}\rho^2.\cos 2\lambda m \sin\tfrac{4\rho}{\lambda} + \ldots\ldots \pm \sin\tfrac{2(\lambda-1)}{\lambda}\rho^2.\cos 2\lambda m \sin\tfrac{(\lambda-1)\rho}{\lambda}$$

§. 48. Pendet ergo determinatio numeri m a numero λ ſeu a numero particularum A, B, C, D, etc. quae in interuallo $PQ = f$ continentur; qui numerus cum in fluidis elaſticis, cuiusmodi ſunt aer et aether cenſeri queat infinite magnus, erit $\lambda = \infty$, et valor numeri m ex aequatione infinita definiri debebit. Cum autem arcus, quorum coſinus hic occurrunt, ſint incommenſurabiles inter ſe, patet hanc inueſtigationem numeri

m

m esse difficillimam, neque sine insigni artificio institui posse.

§. 49. Quoniam in aequatione inuenta terminus vltimum sequens $\sin. \frac{2\lambda}{\lambda}\rho^2 . \cos. 2\lambda m \sin. \frac{\lambda\rho}{\lambda}$ per se euanescit, eum adhuc in aequatione adiicere poterimus. Quo igitur resolutionem aequationis propositae tentemus, singulos cosinus methodo consueta in series infinitas convertamus, denotetque signum summatorium $\int$ summam huiusmodi seriei ad λ terminos continuatae, ita vt sit $\int \cos. v = \cos. v - \cos. 2v + \cos. 3v - 4v + \ldots\ldots \mp \cos. \lambda v$ Signum scilicet $\int$ primo termino huismodi seriei praefixum indicet integrum eiusdem seriei valorem. Facta ergo ante memorata cosinuum resolutione fiet $0 = \int$ $\sin. \frac{2}{\lambda}\rho^2 - \frac{4\lambda^2 m^2}{1.2}\int \sin. \frac{2}{\lambda}\rho^2 \sin. \frac{\rho^2}{\lambda} + \frac{16\lambda^4 m^4}{1.2.3.4}\int \sin. \frac{2}{\lambda}\rho^2 \sin. \frac{\rho^4}{\lambda}$ $- \frac{64\lambda^6 m^6}{1.2.3.4.5.6}\int \sin. \frac{2}{\lambda}\rho^2 \sin. \frac{\rho^6}{\lambda} +$ etc.

§. 50. Vt autem has summas definire queamus, ponamus esse λ numerum parem, reperieturque $\int \cos. v = \cos. v - \cos. 2v + \cos. 3v \ldots . - \cos. \lambda v =$

$$\frac{\cos. \frac{1}{2}v - \cos. (\lambda + \frac{1}{2})v}{2 \cos. \frac{1}{2}v}$$

vbi imprimis notari conuenit, esse casus, quibus haec expressio non veram progressionis summam indicet, qui casus eueniunt; quando est $\frac{1}{2}v$, vel ρ, vel 3ρ, vel 5ρ, etc. his enim fractionis tam numerator quam denominator euanescit. His igitur casibus vera seriei summa reperietur

$$= \frac{\sin. \frac{1}{2}v - (2\lambda + 1)\sin. (\lambda + \frac{1}{2})v}{2 \sin. \frac{1}{2}v}$$

quae ob $\frac{1}{2}v = \rho$ et λ numerum parem, dat $\sin. (\lambda + \frac{1}{2})v = \sin. \frac{1}{2}v = 1$, transit in $-\lambda$, quod idem contingit si fuerit $\frac{1}{2}v = 3\rho$, vel $\frac{1}{2}v = 5\rho$, etc.

§. 51. Ponamus nunc pro v ſucceſſiue angulos: $\frac{2}{\lambda}\rho$; $\frac{4}{\lambda}\rho$; $\frac{6}{\lambda}\rho$; $\frac{8}{\lambda}\rho$; et generalitrr $\frac{2\mu}{\lambda}\rho$; erit facto $v = \frac{2\mu}{\lambda}\rho$; $\text{coſ.}\,(\lambda + \frac{1}{2})v = \text{coſ.}\,(2\mu\rho + \frac{\mu}{\lambda}\rho) = \pm\,\text{coſ.}\,\frac{\mu}{\lambda}\rho$, vbi ſignorum ambiguorum ſuperius valet, ſi ſit μ numerus par, inferius vero ſi μ numerus impar: erit ergo $\int \text{coſ.}\,\frac{2\mu}{\lambda}\rho = \frac{1 \mp 1}{2}$, vnde ſequentes orientur ſummationes:

$\int \text{coſ.}\,\frac{0}{\lambda}\rho = \int 1 = 0$

$\int \text{coſ.}\,\frac{2}{\lambda}\rho = 1$ excipiuntur caſus

$\int \text{coſ.}\,\frac{4}{\lambda}\rho = 0$ $\int \text{coſ.}\,\frac{2\lambda}{\lambda}\rho = -\lambda$

$\int \text{coſ.}\,\frac{6}{\lambda}\rho = 1$ $\int \text{coſ.}\,\frac{6\lambda}{\lambda}\rho = -\lambda$

$\int \text{coſ.}\,\frac{8}{\lambda}\rho = 0$ $\int \text{coſ.}\,\frac{10\lambda}{\lambda}\rho = -\lambda$

$\int \text{coſ.}\,\frac{10}{\lambda}\rho = 1$

$\int \text{coſ.}\,\frac{12}{\lambda}\rho = 0$ $\int \text{coſ.}\,\frac{14\lambda}{\lambda}\rho = -\lambda$

etc. etc.

§. 52. Cum iam ſit $\text{ſin.}\,\frac{2}{\lambda}\rho^2 = \frac{1}{2}(1 - \text{coſ.}\,\frac{4}{\lambda}\rho)$ et $\text{ſin.}\,\frac{\rho^2}{\lambda} = \frac{1}{2}(1 - \text{coſ.}\,\frac{2}{\lambda}\rho)$, ſummae productorum ſuperiorum ſinuum in ſequentes ſummas coſinuum ſimplicium conuertentur:

$$\int \text{ſin.}\,\frac{2}{\lambda}\rho^2 = \frac{1}{2}\int\left(1 - * - \text{coſ.}\,\frac{4}{\lambda}\rho\right)$$

$$\int \text{ſin.}\,\frac{2}{\lambda}\rho^2.\text{ſin}\,\frac{\rho^2}{\lambda} = \frac{1}{8}\int\left(2 - \text{coſ.}\,\frac{2}{\lambda}\rho - 2\,\text{coſ}\,\frac{4}{\lambda}\rho + \text{coſ.}\,\frac{6}{\lambda}\rho\right)$$

$$\int \text{ſin.}\,\frac{2}{\lambda}\rho^2.\text{ſin.}\,\frac{\rho^4}{\lambda} = \frac{1}{32}\int\left(5 - 4\,\text{coſ.}\,\frac{2}{\lambda}\rho - 4\,\text{coſ.}\,\frac{4}{\lambda}\rho + 4\,\text{coſ.}\,\frac{6}{\lambda}\rho - \text{coſ.}\,\frac{8}{\lambda}\rho\right)$$

$$\int \text{ſin.}\,\frac{2}{\lambda}\rho^2.\text{ſin.}\,\frac{\rho^6}{\lambda} = \frac{1}{128}\int\left(14 - 14\,\text{coſ.}\,\frac{2}{\lambda}\rho - 8\,\text{coſ.}\,\frac{4}{\lambda}\rho + 13\,\text{coſ.}\,\frac{6}{\lambda}\rho - 6\,\text{coſ.}\,\frac{8}{\lambda}\rho + \text{coſ.}\,\frac{10}{\lambda}\rho\right)$$

$$\int \text{ſin.}\,\frac{2}{\lambda}\rho^2.\text{ſin.}\,\frac{\rho^8}{\lambda} = \frac{1}{512}\int\left(42 - 48\,\text{coſ.}\,\frac{2}{\lambda}\rho - 15\,\text{coſ.}\,\frac{4}{\lambda}\rho + 40\,\text{coſ.}\,\frac{6}{\lambda}\rho - 26\,\text{coſ.}\,\frac{8}{\lambda}\rho + 8\,\text{coſ.}\,\frac{10}{\lambda}\rho - \text{coſ.}\,\frac{12}{\lambda}\rho\right)$$

$$\int \text{ſin.}\,\frac{2}{\lambda}\rho^2.\text{ſin.}\,\frac{\rho^{10}}{\lambda} = \frac{1}{2048}\int\left(132 - 165\,\text{coſ.}\,\frac{2}{\lambda}\rho - 22\,\text{coſ.}\,\frac{4}{\lambda}\rho + 121\,\text{coſ.}\,\frac{6}{\lambda}\rho - 100\,\text{coſ.}\,\frac{8}{\lambda}\rho + 43\,\text{coſ.}\,\frac{10}{\lambda}\rho - 10\,\text{coſ.}\,\frac{12}{\lambda}\rho + \text{coſ.}\,\frac{14}{\lambda}\rho\right)$$

etc.

In

In quibus ſeriebus haec lex obſeruatur, vt quiſque coefficiens numericus bis ſumtus demta ſumma coefficientium adiacentium praebeat coefficientem reſpondentem in ſerie ſequente; in quo computo ſigna coefficientium non ſunt negligenda; ac praeterea termini primi duplo maiores ſunt aeſtimandi, ſic eſt $+2.40+26+15=+121$, et $-2.48+15-2.42=-165$.

§. 53. Omnes hae ſummae igitur fierent $=0$, niſi caſus ante excepti occurrant, vnde ex his ſummis ſoli illi termini relinquuntur, in quibus ineſt vel coſ. 2ρ vel coſ. 6ρ, vel coſ. 10ρ vel etc. quorum loco poni debet $-\lambda$. Primum autem huiusmodi terminus occurrit in ſumma $\int \text{ſin.}\frac{2}{\lambda}\rho^2 . \text{ſin.}\frac{\rho}{\lambda}^{2\lambda-4}$; eritque ergo haec ſumma $= \pm\frac{\lambda}{2^{2\lambda-3}}$; ſequens autem ſumma $\int \text{ſin.}\frac{2}{\lambda}\rho . \text{ſin.}\frac{\rho}{\lambda}^{2\lambda-2}$ erit $= \mp\frac{(2\lambda-2)\lambda}{2^{2\lambda-1}}$. Hinc aequatio ita incipiet:

$$0 = \frac{2^{2\lambda-4}\lambda^{2\lambda-4}m^{2\lambda-4}}{1.2.3\ldots\ldots(2\lambda-4)} . \frac{\lambda}{2^{2\lambda-3}} - \frac{2^{2\lambda-2}\lambda^{2\lambda-2}m^{2\lambda-2}}{1.2.3\ldots\ldots(2\lambda-2)} . \frac{\lambda(2\lambda-2)}{2^{2\lambda-1}} + \text{etc.}$$

ſeu $0 = 1 - \frac{4\lambda^2 m^2}{(2\lambda-3)(2\lambda-2)} . \frac{2\lambda-2}{4} + \text{etc.}$

ſeu $0 = 1 - \frac{\lambda^2 m^2}{2\lambda-3} + \text{etc.}$

Apparet ergo hanc ſeriem, ſi λ ſtatuatur numerus valde magnus, maxime fore diuergentem, ita vt ex ea etiamſi habeatur, vix quicquam concludi queat.

§. 54. Cum igitur hoc modo pro valore numeri m cognoſcendo nihil colligere liceat, videamus cuiusmodi formas aequatio reſoluenda §. 47. induat, ſi loco λ ſucceſſiue ſubſtituantur numeri 2, 3, 4, 5, etc. Ac primo quidem ſi ſit $\lambda = 2$ habebitur haec aequatio:

 $0 =$

$o = \text{sin.}\, \rho^2 \,\text{cos}.\, 4m \,\text{sin.}\, \frac{\rho}{2}$, ergo $\frac{4m}{\sqrt{2}} = \rho$ et $m = \frac{\rho}{2\sqrt{2}}$, existente $\rho = \frac{1}{2}\pi = 1,57079632$. Atque tempus, quo spatium f a pulsu percurretur erit $= \frac{f}{250} \cdot \frac{\rho}{2\sqrt{g}}$. Sit porro $\lambda = 3$ et orietur haec aequatio:

$$o = \text{sin.}\tfrac{2}{3}\rho^2 \,\text{cos}.\, 6m \,\text{sin.}\tfrac{1}{2}\rho - \text{sin.}\tfrac{2}{3}\rho^2 \,\text{cos}.\, 6m \,\text{sin.}\tfrac{2}{3}\rho$$

seu $\text{cos}.\, 3m = \text{cos}.\, 3m\sqrt{3}$. Sit ergo $3m = 2\rho - s$ et $3m\sqrt{3} = 2\rho + s$ erit $3m(1+\sqrt{3}) = 4\rho$ et $m = \frac{4\rho}{3(1+\sqrt{3})}$

Ponatur $\lambda = 4$ et prodibit:

$$o = \text{sin.}\tfrac{1}{2}\rho^2 \,\text{cos}.\, 8m\,\text{sin.}\tfrac{1}{4}\rho - \text{sin.}\,\rho^2 \,\text{cos}.\, 8m\,\text{sin.}\tfrac{1}{2}\rho + \text{sin.}\tfrac{1}{2}\rho^2 \,\text{cos}.\, 8m\,\text{sin.}\tfrac{3}{4}\rho$$

quae ob $\text{sin.}\,\rho = 1$; $\text{sin.}\tfrac{1}{2}\rho = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$; $\text{sin.}\tfrac{1}{4}\rho = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})}$ et $\text{sin.}\tfrac{3}{4}\rho = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})}$, transibit in hunc:

$$o = \text{cos}.\, 4m\sqrt{(2-\sqrt{2})} - 2\,\text{cos}.\, 4m\sqrt{2} + \text{cos}.\, 4m\sqrt{(2+\sqrt{2})}.$$

§. 55. Ascendamus hinc secundum rationem duplam, sitque $\lambda = 8$, erit:

$$\begin{aligned} o = {} & \text{sin.}\tfrac{1}{4}\rho^2 .\,\text{cos}.\, 16m\,\text{sin.}\tfrac{1}{8}\rho - \text{sin.}\tfrac{1}{2}\rho^2 \,\text{cos}.\, 16m\,\text{sin.}\tfrac{1}{4}\rho \\ & + \text{sin.}\tfrac{3}{4}\rho^2 .\text{cos}.\, 16m\,\text{sin.}\tfrac{3}{8}\rho - \text{sin.}\,\rho^2 .\text{cos}.\, 16m\,\text{sin.}\tfrac{1}{2}\rho \\ & + \text{sin.}\tfrac{3}{4}\rho^2 .\text{cos}.\, 16m\,\text{sin.}\tfrac{5}{8}\rho - \text{sin.}\tfrac{1}{2}\rho^2 .\text{cos}.\, 16m\,\text{sin.}\tfrac{4}{3}\rho \\ & + \text{sin}\tfrac{1}{4}\rho^2 .\,\text{cos}.\, 16m\,\text{sin.}\tfrac{7}{8}\rho. \end{aligned}$$

quae reducitur ad hanc formam magis ordinatam

$$o = \begin{matrix} + \text{sin.}\tfrac{1}{4}\rho^2.\text{cos}.\, 16m\,\text{sin.}\tfrac{1}{8}\rho - \text{sin.}\tfrac{1}{2}\rho^2.\text{cos}.\, 16m\,\text{sin.}\tfrac{1}{4}\rho + \text{sin.}\tfrac{3}{4}\rho^2.\text{cos}.\, 16m\,\text{sin}\,\tfrac{3}{8}\rho \\ + \text{sin.}\tfrac{1}{4}\rho^2.\text{cos}.\, 16m\,\text{cos}.\tfrac{1}{8}\rho - \text{sin.}\tfrac{1}{2}\rho^2.\text{cos}.\, 16m\,\text{cos}\,\tfrac{1}{4}\rho + \text{sin.}\tfrac{3}{4}\rho^2.\text{cos}.\, 16m\,\text{cos}.\tfrac{3}{8}\rho \end{matrix} - \text{sin.}\,\rho^2.\text{cos}.\, 16m\,\text{sin.}\tfrac{1}{2}\rho$$

Simili modo si ponamus $\lambda = 16$, aequatio resultabit, quae sequentem formam induet.

$$\begin{matrix} \text{sin.}\tfrac{1}{8}\rho^2.\,\text{cos}.\, 32m\,\text{sin.}\tfrac{1}{16}\rho - \text{sin.}\tfrac{1}{4}\rho^2.\text{cos}.\, 32m\,\text{sin.}\tfrac{1}{8}\rho + \text{sin.}\tfrac{3}{8}\rho^2.\text{cos}.\, 32m\,\text{sin.}\tfrac{5}{16}\rho \\ \text{sin.}\tfrac{1}{8}\rho^2.\,\text{cos}.\, 32m\,\text{cos}.\tfrac{1}{16}\rho - \text{sin.}\tfrac{1}{4}\rho^2.\text{cos}.\, 32m\,\text{cos}.\tfrac{1}{8}\rho + \text{sin.}\tfrac{3}{8}\rho^2.\text{cos}.\, 32m\,\text{cos}.\tfrac{3}{16}\rho \end{matrix}$$

$$-\sin.\tfrac{1}{2}\rho^2.\cos.32m\sin.\tfrac{1}{4}\rho+\sin.\tfrac{5}{8}\rho^2.\cos.32m\sin.\tfrac{5}{16}\rho-\sin.\tfrac{3}{4}\rho^2.\cos.32m\sin.\tfrac{3}{8}\rho$$
$$-\sin.\tfrac{1}{2}\rho^2.\cos.32m\cos.\tfrac{1}{4}\rho+\sin.\tfrac{5}{8}\rho^2.\cos.32m\cos.\tfrac{5}{16}\rho-\sin.\tfrac{3}{4}\rho^2.\cos.32m\cos.\tfrac{3}{8}\rho$$

$$\begin{matrix}+\sin.\tfrac{7}{8}\rho^2.\cos.32m\sin.\tfrac{7}{16}\rho\\ +\sin.\tfrac{7}{8}\rho^2.\cos.32m\cos.\tfrac{7}{16}\rho\end{matrix}-\sin.\rho^2\cos.32m\sin.\tfrac{1}{2}\rho=0$$

§. 56. Huiusmodi ergo aequatio formari debebit in qua sit λ numerus infinitus seu $\lambda=2^{10}$, ab eiusque resolutione pendebit valor numeri m. Inuentio igitur numeri m accurata, quo celeritas propagationis pulsuum per quoduis medium elasticum definitur, maxime est ardua, neque sine insigni amplificatione doctrinae serierum expectari potest. Interim tamen methodus, qua Celeb. Newtonus ad propagationem pulsuum inuestigandam vsus est, non parum est elegans, et pro idonea approximatione haberi potest, quamuis a rigore geometrico valde abhorreat. Per experientiam autem verus valor ipsius m satis prope cognosci poterit. Cum enim in aere sit $g=27980,000$ ped. Rhen. sonusque vno minuto secundo per interuallum 1100 ped. propagetur, hinc proxime reperietur $m=\frac{5\sqrt{14}}{22}=0,8504$, neque multum differt a sinu anguli $60°$. Ad hunc autem valorem satis celeriter conuergere videntur valores ipsius m pro casibus $\lambda=2$ et $\lambda=3$ inuenti, ex quorum priori prodit $m=0,554$, ex posteriori vero $m=0,766$, vnde iam tuto colligere licet esse $m>0,766$ id quod per experientiam mirifice comprobatur.

§. 57. Quanquam autem hinc verum valorem litterae m elicere non valemus, tamen modum, quo pulsus per medium elasticum propagantur, satis clare perspicimus

mus. Primum enim, cum tempus, quo pulſus per interuallum $= f$ propagatur, inuentum ſit $= \frac{mf}{250 \sqrt{\frac{1}{2}g}}$ videmus in eodem medio tempus ipſi ſpatio eſſe proportionale, ſicque pulſus motu vniformi propagari vti experientia teſtatur. Deinde celeritas iſtius motus, quo pulſus progrediuntur, erit vt $\frac{f}{t}$ hoc eſt vt $\sqrt{g}$. Eſt vero g longitudo columnae eiusdem fluidi, cuius pondus ipſius vi elaſticae aequatur. Vnde ſi vis elaſtica deſignetur per E et denſitas per D, erit pondus columnae g vt Dg, et cum ſit E vt Dg, erit g vt $\frac{E}{D}$. Quare in diuerſis fluidis elaſticis erunt celeritates, quibus pulſus per ea propagantur in ratione ſubduplicata compoſita ex directa elaſticitatum et inuerſa denſitatum, ſeu vt $\sqrt{\frac{E}{D}}$.

§. 58. Haec autem aliunde iam ſatis conſtant, atque a Newtono firmiter ſunt demonſtrata: quoniam ad hoc non eſt opus, vt ipſa ſingularum particularum fluidi elaſtici agitatio ſit perſpecta. Ex hactenus allatis autem ſimul modum, quo ſingulae fluidi elaſtici particulae, dum ipſi in vno loco impulſus infligitur, ſingulis momentis agitantur. Vidimus ſcilicet, ſi vnica particula intra parietes P et Q conſtituatur, eius motum ab impulſu acceptum ſimilem fore motui oſcillatorio penduli, atque ideo perinde vibrationes peragere, ac cordam impulſam. Cum autem duo pluraue corpuſcula intra parietes P et Q collocata concipiuntur, quorum vnum duntaxat impellatur, tum nullum corpuſculum ad ſimilitudinem penduli amplius agitatur, ſed ſingulorum motus ab

hac

hac lege eo magis recedent, quo maior fuerit eorum numerus. Ex quo intelligimus sonum neutiquam eo modo, quo nonnulli eximii Viri volunt, per aerem propagari, qui statuunt, cum corda vel aliud instrumentum sonorum impellitur, dari in aere eiusmodi particulas, quae similem motum oscillatorium recipiant, eoque organum auditus excitent. Quae sententia, cum pluribus aliis incommodis laboret, vti in tractatu meo de lumine et coloribus ostendi, nunc etiam nequidem cum vera theoria pulsuum per medium elasticum propagatorum consistere potest: atque hinc eo magis corroboratur ea propagationis pulsuum ratio, quam in eodem scripto fusius exposui.

EXAMEN ARTIFICII NAVIS
A PRINCIPIO MOTVS INTERNO PROPELLENDI QVOD QVONDAM AB ACVTISSIMO VIRO IACOBO BERNOVLLI EST PROPOSITVM

AVCTORE

L. EVLERO.

§. 1.

In operibus *Iacobi Bernoullii*, quae praeterito Anno Geneuae ſunt edita, pag. 1109 reperitur inſertum ſchediaſma, cui hic titulus eſt praefixus: *Artificium impellendi nauem a principio motus intra ipſam nauem concluſo*; in quo Vir Celeberrimus oſtendere conatur, etiamſi vulgo naues non niſi a viribus extrinſecus petitis propelli poſſe putentur, tamen fieri poſſe, vt nauis a ſola vi interna ad motum incitetur. Quod artificium vt maxime paradoxon videtur, ita ſi quidem optatum effectum praeſtaret, pleriſque aliis modis, quibus naues promoueri ſolent, merito longe eſſet praeferendum. Cum igitur non conſtet, vtrum periculum vnquam ſit factum atque experimentum ex voto ſucceſſerit, operae pretium fore videtur, hunc mechaniſmum diligentius expendere atque ad leges motus examinare.

§. 2. Cum nauta ſtans in littore firmo nauem poſſit conto propellere, in ipſa autem naui conſtitutus idem praeſtare nequeat, propterea quod quantum nauem prorſum impellat, tantumdem eam pedibus carinae innixus retrorſum vrgeat; recte quidem concludi videtur, naui non

non poſſe motum induci a vi, quae tota intra nauem exiſtat. Quantumuis ſcilicet homines aliaeue machinae in naui conſtitutae eandem propellere annituntur, tamen quia reactio actioni perpetuo eſt aequalis, et vtraque a naui aeque ſuſtinetur, nullum inde motum adipiſcitur. Hinc omnes eorum, qui in naui verſantur, conatus ad nauem promouendam ſunt irriti, niſi ſeſe littori aliiue corpori extra nauem ſito applicare queant.

§. 3. Hanc veritatem Bernoullius minime ignoravit, eam vero non ad omnis generis vires patere exiſtimauit, ſed putauit eam ad illas tantum vires, quae vulgo mortuae vocari ſolent, reſtringi oportere, quae ſolis preſſionibus contineantur; alterum autem virium genus quae viuae appellentur atque a percuſſone oriantur, ab hac lege eſſe excipiendum. Hinc non dubitat, quin in naui eiusmodi ictus et percuſſiones effici queant, a quarum impetu naui motus inducatur. Quae opinio, ſi ad mentem plerorumque recentiorum philoſophorum, qui inter vires viuas et mortuas ſummum diſcrimen ſtatuunt, explicetur, firmiſſimo fundamento inniti videatur; cum autem oſtendiſſem hoc diſcrimen omni fundamento carere, nihilque per vires viuas effici poſſe, quod non idem viribus mortuis praeſtari queat, maxime erit verendum, ne omnis motus, quem Bernoullius ope percuſſionum nauibus imprimere conatur, euaneſcat.

§. 4. Machina autem, quam Iac. Bernoulli in hunc finem propoſuit, ita ſe habet: in naui DEFG conſtitui iubet tabulatum firmum AF in ſitu ad horizontem perpendiculari, quod ſit perfecte elaſticum puta chalybeum aut reticulatum, eo ſaltem in loco C vbi ictus Tab. IV. fig. 1.

O 2 recipit.

recipit. Huic tabulato in A appenſum ſit pendulum AB cum annexo pondere B itidem perfecte elaſtico, quod, dum per quadrantem BC deſcendit impellet tabulatum, et ſimul totum nauigium proram G verſus promouebit. Poſt ictum autem ob elaſticitatem reſiliet, iterumque deſcendendo ſimiles ictus continuo repetet; ſicque naui motum perennem inducet. Ne autem iſte penduli motus ob reſiſtentiam aeris ſenſim langueſcat, ſed pendulum conſtanter ad quadrantis initium B aſcendendo pertingat, hoc ope automati, quemadmodum in horologiis pendulis fieri ſolet, obtineri poſſe indicat.

§. 5. Si ad hos ictus ſucceſſiuos, quibus tabulatum A F continuo percutitur, ſolum reſpiciamus, dubium prorſus eſt nullum, quin iis nauis ad motum incitetur, moleſque penduli facile eousque augeri poſſet, vt nauis ſuperata aquae reſiſtentia, quantumuis magnam conſequatur celeritatem. Verum hic quoque animaduertendum eſt pendulum, dum alternatim aſcendit et deſcendit vim contrariam in nauem exerere, qua ea puppim D verſus ſollicitetur. Quoniam enim pendulum in quouis ſitu AM tam a pondere, quam a vi centrifuga tenditur, hanc vim punctum ſuſpenſionis A ſuſtinet, ab eaque ſecundum directionem AM trahitur, quae vis cum perpetuo retrorſum dirigatur, nauis ab ea retrorſum impelletur. Hinc impulſio nauis proram G verſus efficietur tantum exceſſu, quo vires percuſſionis ſuperant has continuas ſollicitationes retro directas, ſiquidem huiusmodi exceſſus detur.

§. 6.

§. 6. Hic quidem maxima philoſophorum pars, qui Leinbizii ideas de viribus fortaſſe male expoſitas ſequuntur, vireſque viuas mortuis quaſi infinities maiores putant, aſſeuerare non dubitabunt, quin nauis hoc modo notabilem motum ſit impetratura, neque admodum neceſſarium putabunt, vt virium illarum nauem retro pellentium ratio habeatur, cum vis percuſſionis nauem propellens ipſis incomparabiliter maior videatur. Interim tamen Vir ſagaciſſimus Iacobus Bernoullius longe aliter exiſtimauit; atque effectum ab iſtis viribus mortuis oriundum ſtudioſe inueſtigauit, eumque ab effectu, quem quilibet ictus producit, ſubduxit, vt veram nauis propulſionem adipiſceretur. Inuenit autem calculo ſubducto, vires percuſſionum aliquantum praeualere viribus pendulum continuo tendentibus, hincque demum concluſit, nauem ope huiusmodi penduli propelli debere.

§. 7. Quamquam autem vim, qua nauis a penduli percuſſionibus propellitur, non multo maiorem deprehendit altera vi a tenſionibus orta, tamen naui ab ea non mediocrem motum imprimi exiſtimat, vt etiam aquae reſiſtentiae ratione habita, nauis non contemnendam celeritatem acquirere poſſet. Euoluto enim caſu, quo penduli pondus centeſimae totius nauis parti aequale aſſumitur, collegit nauem ſingulis minutis primis per ſpatium $82\frac{1}{2}$ pedum propelli debere, vbi quidem diminutionis reſiſtentiae ab idonea prorae figura oriundae nullam habuit rationem. Accommodato autem hoc caſu ad nauem roſtratam, cuius reſiſtentiam decuplo minorem aſſumit, celeritatem ipſi impreſſam vltra 260 pedes ſingulis minutis primis, 15649 pedes vna hora confecturam eſſe contendit, quae celeritas certe tanta eſt, vt conſueta remigatione vix maior obtineri poſſit.

§. 8. Quod ſi ergo iſte naues propellendi modus tantum valeret, dubium certe eſſet nullum, quin is non ſolum remigationi longe eſſet anteferendus, ſed etiam ſaepe maximo cum fructu loco venti adhiberi poſſet. Cum enim pro ratione molis nauis ſatis magna vis ad remos vibrandos requiratur, ita in praeſente mechaniſmo nulla fere vi eſt opus. Poſtquam enim pendulum ſemel ad ſitum ſummum eſt eleuatum, poſt primum ictum ſponte ad eandem fere altitudinem aſcendit, ob maximam cum ipſius corporis tum tabulati elaſticitatem; et, quantum aſcenſus in quaque vibratione tam a reſiſtentia aeris, quam a defectu perfectae elaſticitatis imminuitur, id ab exigua vi facile reparatur, ita vt continuus penduli motus vel a puero conſeruari poſſet. Quin etiam loco vnius penduli, ne nimia eius maſſa impedimento eſſet, plura minora adhiberi poſſent, quae parem vel maiorem effectum praeſtarent; neque difficile foret modum excogitare, quo huiusmodi mechaniſmus ſine vllo nauigationis incommodo ad vſum accommodaretur.

§. 9. Verum haec vtilitas in re nautica nimis eſt magna, quam ut eam tamdiu latere potuiſſe veriſimile ſit, praeſertim cum non admodum abſcondito mechanismo contineatur, atque adeo ob ipſam commodorum magnitudinem merito in ſuſpicionem incurrit. Neque etiam mediocriter haec ſuſpicio augetur, quod deſcriptio huius artificii tantum in opuſculis poſthumis Iacobi Bernoulli repe-

reperiatur, eoque viuente nunquam ſit diuulgata. Minime autem probabile videtur, Virum beate defunctum tantum inuentum quod certe omnibus reliquis ipſius inventis, etiamſi ſint maxima, palmam longe praeriperet, celaturum fuiſſe, niſi de felici ſucceſſu ipſe dubitauiſſet. Quamobrem ſi demonſtrauero huiusmodi penduli ictibus naui nullum prorſus motum imprimi, nihil quicquam de laude ac meritis ſummi huius Viri detrahetur, cum ipſe quoad vixerit, probe cauerit, ne meditatio nondum ſatis polita in publicum protruderetur.

§. 10. Si igitur effectum huiusmodi penduli ictuum inueſtigare velimus, primum dum pendulum per quadrantem BMC deſcendit, quantum nauis ab eo retro vrgeatur, definire debebimus, deinde ipſe ictus erit conſiderandus, quo nauis propellitur motumque qui naui proram verſus inde imprimitur exacte determinari oportebit. Denique cum hic motus a ſequente poſt reflexionem aſcenſu iterum retardetur, videndum erit, vtrum nauis, poſtquam pendulum ad B vsque eſt re uerſum motum habeat reliquum antrorſum directum, nec ne, et quantus is ſit futurus. Quodſi enim nauis, cum initio deſcenſus quieuiſſet, poſt finitum aſcenſum iterum in ſtatum quietis redigatur, ſicque initio ſecundi deſcenſus denuo in quiete verſetur, dubium erit nullum, quin nauis perpetuo in eodem fere loco ſit permanſura, ita vt totus penduli effectus in alternis progreſſionibus et regreſſionibus, quae ſe mutuo exacte deſtruant, conſumatur. Determinatio autem huius motus reciproci, ſi reſiſtentiae aquae rationem habere voluerimus, maxime fieret difficilis, neque ſine calculo moleſtiſſimo expediri poſſet.

§. 11.

§. 11. Hancobrem aliam viam faciliorem inire ſtudebo qua effectus a ſucceſſiuis huius modi penduli percuſſionibus oriundus non minus diſtincte cognoſci et diiudicari queat. Nauim ſcilicet in loco ſuo penitus fixam contemplabor, atque ſollicitationum momentanearum, quibus nauis durante quouis penduli deſcenſu et aſcenſu retro pellitur, ſummam inueſtigabo, deinde ſimili ratione vim ictus, qua nauis propelleretur, ſeorſim exprimam, vt hoc modo tam tota vis, qua nauis a qualibet penduli actione retro impellitur, quam vis propellens innoteſcat. Abſoluitur autem quaelibet penduli actio primum deſcenſu, ſecundo ictu, ac tertio aſcenſu. Quodſi ergo ſumma virium pellentium ex deſcenſu et ſubſequenti aſcenſu natarum aequalis fuerit vi ictus ad nauem propellendam directae, tuto concludere poterimus, naui, etiamſi eſſet libera, nullum motum progreſſiuum induci, ſin autem vel vis percuſſionis vel ſumma virium retrahentium praevaleat, naui liberae quoque vel motus antrorſum vel retrorſum imprimetur.

§. 12. Cum igitur nauis quouis deſcenſus penduli momento puppim verſus ſollicitetur, quaeratur huius vis magnitudo pro quouis penduli ſitu AM, eaque per elementum temporis multiplicetur. Haec expreſſio differentialis deinceps integretur, quae ad totum deſcenſum adaptata praebebit ſummam omnium virium retrahentium, ſimilique modo haec virium ſumma pro aſcenſu colligatur. Conſtat autem ſi nauis actioni harum virium libere obſequi poſſet, tum ab iis ipſi motum inductum iri, cuius quantitas, ſeu productum ex maſſa in celeritatem geni-

genitam illi ipſi integrali exacte futurum ſit aequale. Deinde quaeratur quantitas motus quae naui, ſi libera eſſet, ab ictu penduli imprimeretur, haecque cum illa comparetur, vt pateat vtrum altera ſit maior, an vtraque aequalis. Hocque modo tutiſſime concludere poterimus, vtrum nauis ab his viribus vllum conſecutura ſit motum, nec ne?

§. 13. Cum igitur in hac inueſtigatione multum interſit, vtrum pendulum ſit ſimplex an compoſitum, ponamus primo pendulum eſſe ſimplex, ita vt tota eius maſſa in ipſius centro grauitatis M collecta concipi queat. Deſcribat itaque hoc pendnlum in quolibet aſcenſu et deſcenſu integrum quadrantem BMC. Sit longitudo Fig. 2. penduli $AM = AC = a$, eius pondus $= M$: atque deſcendendo ex B elapſo tempore t iam peruenerit in ſitum AM, in quo a recta verticali AC etiamnum diſtet angulo $CAM = \Phi$: erit celeritas eius in M debita altitudini $LM = a \operatorname{coſ.} \Phi$: hincque ipſa celeritas $= \sqrt{a \operatorname{coſ.} \Phi}$, qua cum tempuſculo dt abſoluat arculum $= -a d\Phi$ erit $dt = -\frac{a d\Phi}{\sqrt{a \operatorname{coſ.} \Phi}}$. Hanc enim legem conſtanter obſeruabo, vt celeritates per radices quadratas ex altitudinibus ipſis debitis, et temporis elementa per ſpatiola interea percurſa ad celeritates applicata exprimam.

§. 14. Inuenta altitudine celeritati penduli in M debita $= a \operatorname{coſ.} \Phi$, erit vis centrifuga $= \frac{2 M a \operatorname{coſ.} \Phi}{a} = 2 M \operatorname{coſ.} \Phi$, qua filum AM tendetur. Deinde cum pendulum a grauitate $= M$ deorſum vrgeatur ſecundum directionem verticalem MP, haec vis ſecundum directiones MQ ad AM normalem, et MR reſoluta dabit pro directione MQ vim $= M \operatorname{ſin.} \Phi$, et pro directione MR vim $M \operatorname{coſ.} \Phi$;

Φ; quarum illa ita tota ad penduli motum accelerandum impenditur, vt filum AM prorſus non tendat. Contra vero altera vis $MR = M \text{coſ.} \Phi$ tota in filo AM tendendo inſumetur. Hinc ergo et a vi centrifuga coniunctim filum AM tendetur vi $= 3 M \text{coſ.} \Phi$, a qua punctum ſuspenſionis A in directione AM ſollicitabitur. Quare ex huius reſolutione naſcetur vis nauem retro vrgens $= 3 M \text{coſ.} \Phi \text{ſin.} \Phi$.

§. 15. Multiplicetur ergo haec vis $3 M \text{coſ.} \Phi \text{ſin.} \Phi$, qua nauis puppim verſus impellitur, per elementum temporis $dt = \frac{-a\,d\Phi}{\sqrt{a \text{coſ.} \Phi}} = \frac{-d\Phi \sqrt{a \text{coſ.} \Phi}}{\text{coſ.} \Phi}$; ac prodibit ſollicitatio momentanea $= -3 M d\Phi \text{ſin.} \Phi \sqrt{a \text{coſ.} \Phi}$, cui elementum motus geniti eſt aequale. Quoniam ergo eſt $-d\Phi \text{ſin.} \Phi = d. \text{coſ} \Phi$; ſi ponatur $\text{coſ.} \Phi = z$ erit ſollicitatio momentanea $= 3 M dz \sqrt{az}$ cuius integrale eſt $2 M z \sqrt{az} = 2 M \text{coſ.} \Phi \sqrt{a \text{coſ.} \Phi}$. Haecque expreſſio praebet ſummam omnium ſollicitationum, quibus nauis retro vrgetur, dum pendulum per arcum BM deſcendit. Fiat ergo $\Phi = 0$, et prodibit ſumma ſollicitationum momentanearum ex deſcenſu penduli integro ortarum $= 2 M \sqrt{a}$, cui cum aequalis ſit ſumma ſimilium ſollicitationum ex ſubſequente aſcenſu reſultans, in qualibet penduli actione nauis retro impelletur a viribus, quarum ſumma eſt $= 4 M \sqrt{a}$; ab hisque naui, ſi libera eſſet motus imprimeretur, cuius quantitas futura eſſet $= 4 M \sqrt{a}$.

Fig. 3. §. 16. Quaeramus nunc etiam quantam vim pendulum exerat in nauem, dum in tabulatum elaſticum AF impingit; vbi quidem tabulatum tanquam immobile ſpectabimus. Incurrit autem in hoc tabulatum corpus penduli, cuius maſſa ſeu pondus eſt $= M$, cum celeri-

tate

tate debita altitudini a, quippe ex qua in deſcenſu eſt delapſum. Quo autem effectum colliſionis diſtinctius intueri queamus, tabulato in C annexum ſtatuamus elaſtrum CD, in quod corpus incurrat, cuius quidem longitudinem quantumuis exiguam concipere licet. Tempore iam $= t$, poſtquam colliſionis initium in D erat factum, pertigerit corpus in M, et elaſtrum in ſtatum MC compreſſerit. Ponatur ſpatium D$M = x$, celeritas corporis in M reſidua debita altitudini $= v$, et vis elaſtri CM, qua ſe expandere conatur $=$ P.

§. 17. His poſitis, dum pendulum vlterius per ſpatiolum $= dx$ penetrabit, erit per leges ſollicitationum M $dv = -$ P dx. Sed quoniam tabulatum AF indeque ipſa nauis in hoc ſtatu antrorſum impellitur vi $=$ P, valorem $\int$Pdt, quamdiu conflictus durat, ſcrutari debemus. Cum autem ſit $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}$; ſuperior aequatio abibit in hanc $\frac{M\,dv}{\sqrt{v}} = -Pdt$, vnde fit $\int$P$dt = -\int\frac{M\,dv}{\sqrt{v}} =$ C $- 2$ M$\sqrt{v}$: quae quantitas cum initio conflictus euaneſcere debeat, erit C $= 2$ M$\sqrt{a}$ ideoque $\int$P$dt = 2$ M$\sqrt{a} - 2$ M $\sqrt{v}$. Cum iam ambo corpora ponantur perfecte elaſtica, finito conflictu corpus habebit celeritatem aequalem illi, qua incurrerat, et quae erat $= \sqrt{a}$, ſed contrarie directam fietque propterea $\sqrt{v} = -\sqrt{a}$. Quo valore ſubſtituto prodibit ſumma virium momentanearum ex conflictu ortarum nauemque propellentium $= 4\,M\sqrt{a}$.

§. 18. Motus ergo, quem percuſſio penduli naui imprimere conatur proram verſus praeciſe aequalis eſt illi, quem vires pendulum tendentes, quamdiu deſcenſus et aſcenſus vnus abſoluitur, in contrariam directionem generare valent. Ex quo manifeſtum eſt, etiamſi navis ab ictu penduli propulsionem proram versus accipiat, tamen hunc totum motum deinceps ab ascensu penduli subsequenteque descensu omnino sublatum iri, quae destructio cum post singulos ictus eueniat, nauis nullum motum progressiuum consequi poterit, vti Celeb. Iacobus Bernoulli est suspicatus. Quanquam enim idem fere raciocinium, quo hic vsus sum instituit, viresque nauem retrahentes simili modo aestimauit, tamen in determinatione vis propellentis a percussione oriundae, errorem quendam commisit, quem Cl. Cramerus eius Commentator probe animaduertit, neque tamen ob calculi, qui ipsi subeundus videbatur, molestiam correxit.

§. 19. Neque vero haec perfecta virium propellentium et repellentium compensatio tantum locum habet, cum pendulum per integrum quadrantem mouetur; sed etiamsi minores arcus oscillando absoluat, perinde obseruabitur, id quod ostendisse operae erit pretium. Descendat ergo pendulum ante consideratum simplex AM per arcum quadrante minorem HMC, sitque positis vt ante longitudi-
Fig. 4. ne $AM = a$, et pondere corporis $M = M$, angulus $HAC = \theta$: et elapso tempore $= t$ descripserit arcum HM, sitque angulus $MAC = \Phi$; erit ductis horizontalibus HI et MK, altitudo $AI = a \cos. \theta$ et $AK = a \cos. \Phi$. Hinc ergo erit $IK = a(\cos. \Phi - \cos. \theta)$ quae est altitudo celeritati corporis in M debita: quare eius vis centrifuga erit $= 2M(\cos. \Phi - \cos. \theta)$, qua filum penduli AM tendetur. Cum autem tempusculo dt pendulum per arculum $= -a\,d\Phi$ descendat cum celeritate $= \sqrt{a(\cos. \Phi - \cos. \theta)}$, erit $dt = \frac{-d\Phi \sqrt{a}}{\sqrt{(\cos. \Phi - \cos. \theta)}}$.

§. 20.

§. 20. Conſideretur nunc etiam vis grauitatis, qua pendulum in M ſecundum MP deorſum vrgetur vi $= M$; hinc per reſolutionem naſcetur vis pendulum tendens M R $= M \cos. \Phi$. Quamobrem filum AM omnino tendetur vi $= 3 M \cos. \Phi - 2 M \cos. \theta$; quae cum habeat directionem obliquam, pro directione horizontali dabit vim $= 3 M \cos. \Phi \sin. \Phi - 2 M \cos. \theta \sin. \Phi$. Haec ergo per elementum temporis $dt = \frac{-d\Phi \sqrt{a}}{\sqrt{(\cos. \Phi - \cos. \theta)}}$ multiplicetur, vt prodeat ſollicitatio momentanea $= \frac{-M d\Phi \sin. \Phi (3 \cos. \Phi - 2 \cos. \theta) \sqrt{a}}{\sqrt{(\cos. \Phi - \cos. \theta)}}$. Ponatur $\cos. \Phi = z$, et $\cos. \theta = b$ erit $-d\Phi \sin. \Phi = dz$, et ſollicitatio momentanea erit $= \frac{+M dz (3z - 2b) \sqrt{a}}{\sqrt{(z - b)}}$; cuius integrale eſt $= (+ 2 M z \sqrt{a (z - b)} = (+ 2 M \cos. \Phi \sqrt{a} (\cos. \Phi - \cos. \theta)$; quod quia initio vbi $\Phi = \theta$ euaneſcere debet, erit $C = 0$, ita vt ſumma omnium virium momentanareum deſcenſui per arcum HM reſpondentium ſit $= 2 M \cos. \Phi \sqrt{a (\cos. \Phi - \cos. \theta)}$.

§. 21. Ponatur iam $\Phi = 0$, ac pro toto penduli deſcenſu erit ſumma ſollicitationum momentanearum $= 2 M \sqrt{a (1 - \cos. \theta)} = 2 M \sqrt{CI}$: ſeu cum $\sqrt{CI}$ exprimat celeritatem penduli in imo puncto C, iſta ſumma aequabitur duplae quantitati motus, quem pendulum in C acquirit. Cum iam aſcenſus ſimilis ſit deſcenſui, ſumma virium nauem retro pellentium, quae tam ex aſcenſu quam deſcenſu originem trahunt, erit $= 4 M \sqrt{CI}$. Ex §. 17 autem obtinebimus vim, quae ex ictu reſultat, ſi loco celeritatis ibi conſideratae $\sqrt{a}$ ſubſtituamus hanc, qua pendulum in tabulatum incurret, quae eſt $= \sqrt{CI}$. Quo facto reperietur quoque vis ex percuſſione orta $= 4 M \sqrt{CI}$; atque adeo etiam hoc caſu vires in deſcenſu et aſcenſu retro pellentes ſimul ſumtae aequales erunt vi, qua nauis ab ictu antrorſum propellitur Neque ergo hoc quoque caſu ab impulſionibus penduli naui motus progreſſiuus induci poterit.

§. 22. Quae hactenus de pendulis ſimplicibus ſunt demonſtrata, ita cum lege quadam conſtantiſſima naturae coniuncta videntur, vt iam pro certo affirmare poſſimus, in pendulis quoque quibusuis compoſitis eandem perfectam aequalitatem inter vires propellentes ac repellentes deprehenſum iri. Quod etſi ex natura centri oſcillationis facile oſtendi poſſet, tamen ceteris naturae legibus tam videtur conſentaneum, vt primis mechanicae principiis merito ſit annumerandum. Quemadmodum ergo in preſſionibus, ſeu viribus mortuis actioni ſemper aequalis et contraria reactio, ita quoque in percuſſionibus ſimilis aequalitas locum habet, quod eo minus eſt mirandum, cum quaelibet percuſſio ad preſſiones reuocari queat. Plus itaque virium quilibet ictus praeſtare nequit, quam ad motum corporum collidentium generandum requiritur, atque hancobrem naues non ſolum hoc modo Bernoulliano propelli non poſſunt, ſed quaecunque aliae machinationes, quae totae naui ſunt incluſae nullique principo externo innituntur, aeque erunt inutiles, neque nauibus vllum motum imprimere valebunt.

§. 23. Stabilito igitur hoc principio viciſſim eiusmodi problemata reſoluere poterimus, quae alias ſolutu longe futura eſſent difficillima. Vti ſi pendulum ſuperius praeterea fuerit flexile, atque non in circulo ſed alia quacunque linea curua moueatur, praetereaque reſiſtentia aliaque motus impedimenta affuerint, quae res calculum inſuperabilem redderent; vel ſi alia quaecunque machina in naui

con-

conſtituatur, quae partim preſſionibus partim percuſſionibus in nauim agat; nihilominus certiſſime affirmare poterimus, perfectam continuo exiſtere aequalitatem inter vires nauem propellentes et eas, quae in regionem oppoſitam effectum exerant. Ac ſi vires quidem ſint omnes prementes ſeu mortuae, iſtud aequilibrium quolibet inſtanti exiſtit, ſin autem machina inſuper percuſſiones complectatur, tum quidem non quouis momento aequilibrium cernetur, ſed fieri poteſt vt nauis per aliquod temporis interuallum a viribus prementibus propellatur; qui autem effectus deinceps ſubito ab inſequente percuſſione penitus deſtruatur. Quamdiu ſcilicet ipſa machina in motu verſatur, et extra aequilibrii ſtatum eſt poſita, naui motus imprimetur, quam primum autem machina in priſtinum ſtatum reſtituitur, ſimul nauis in ſitum primum redigetur.

§. 24. Ratio autem huius principii multo clarius perſpicietur, ſi primum aquam omni reſiſtentia carentem aſſumamus, ita vt nauis perpetuo motum impreſſum ſine vllo impedimento proſequi poſſit. In hac hypotheſi, ſi ſuper naui huiusmodi pendulum aliaue quaecunque machina agitetur, quae nullum recipiat motus principium externum, ex legibus motus manifeſtum eſt commune grauitatis centrum ipſius nauis ac machinae quieſcere debere; niſi quatenus verticaliter vel aſcendit vel deſcendit. Haec enim lex non ſolum obſeruatur, cum machina per preſſiones in nauem agit, quo caſu tam in nauem quam in machinam aequales vires exeruntur: ſed etiam ſi ictus ſeu percuſſiones peraguntur, centri grauitatis ſtatus non ſecus perturbabitur. Quomodocunque ergo machina intra nauem exiſtens fuerit comparata, eiusque actio tam ex

preſſio-

preſſionibus quam percuſſionibus compoſita, centrum commune grauitatis ſecundum horizontem nullum motum conſequi poterit, neque idcirco vlla huiusmodi machina apta erit ad nauem promouendam.

§. 25. Quodſi vero reſiſtentia aquae ſimul conſideretur, tum lex ante memorata de centro grauitatis aliquantum infringitur, dum nauis a machina ſollicitata tantum non cedit, quantum per illam legem cedere deberet, ſimilique modo in colliſionibus ob reſiſtentiam aquae commune centrum grauitatis non perfecte quieſcet. Difficillimo etiam calculo opus eſſet, ſi quis ſingulos hos effectus ſecundum praecepta mechanica euoluere vellet. Cum autem totus reſiſtentiae effectus in motu minuendo conſumatur, neque ab ea vllus motus produci poſſit: reſiſtentia aquae certe in cauſa eſſe non poterit, vt navi motus imprimatur, cum eadem nauis reſiſtentia ſublata quieſcere deberet. Vnde ſummo iure concludimus, quemadmodum nauis remota aquae reſiſtentia a viribus internis nullum motum progreſſiuum adipiſci poteſt, ei multo minus, ſi reſiſtentia aquae accedat, ab huiusmodi viribus vllum motum imprimi poſſe.

Fig. 1. §. 26. Quamquam hoc ratiocinium omni exceptione maius videtur, tamen dantur caſus, quibus ob ipſam reſiſtentiam motus producitur, cum nullus ea remota oriretur. Si enim nauis DEFG baſi ſua EF in plano aſpero incumberet, ſuper quo ſine ſenſibili frictione promoueri nequeat, perſpicuum eſt frictionem tantam eſſe poſſe, vt a viribus pendulum tendentibus ſuperari nequeat, ſicque ab iis naui nullus motus retrorſum imprimatur. Nihilo tamen minus ab ictu penduli contra tabel-

bellatum AF frictio vinci poterit, quo fiet vt nauis a singulis percussionibus penduli aliquantum prorsum protrudatur, quae promotio cum a viribus contrariis non destruatur, nauis vtique promouebitur, qui effectus nullo modo obtineretur, si nulla frictio adesset. In quo memorabile paradoxon mechanicum continetur, quod ipsa frictio motus cuiuspiam causa esse queat, ita vt frictione sublata nullus plane motus sequeretur.

§. 27. Eo maior igitur hinc causa dubitandi suboritur, vtrum ob aquae resistentiam naui ab huiusmodi penduli ictibus nullus motus induci queat, etiamsi certum sit, si resistentia abesset, ipsi hoc modo nullum motum imprimi posse. Quod dubium vt tollamus, consideremus nauem alternatim a duabus viribus; p et P sollicitari, a quarum altera p tempore $= t$ proram versus, ab altera autem P tempore $=$ T puppim versus vrgeatur, hae autem vires p et P ratione temporum t et T ita sint comparatae, vt sit $pt = PT$, quam aequalitatem determinatio virium tam propellentium quam repellentium ante instituta suppeditauit. Quamuis autem neque vis p neque P, quamdiu vtraque agit, inuenta sit constans, tamen commoditatis calculi gratia vtramque constantem sine errore assumere poterimus, cum leuis inaequalitas nullius motus causa esse queat, qui ex aequalitate non aeque sequeretur.

§. 28. Ponamus igitur vim p prius agere, qua nauis propellatur, atque initio nauem fuisse in A, vbi celeritatem habuerit proram versus $= \sqrt{b}$, iamque confecisse spatium $AP = x$ atque in P celeritatem habere de- Fig. 5.

bitam altitudini $= v$. Cum igitur reſiſtentia ſit vt quadratum celeritatis, ponatur ea $= \frac{v}{k}$; fietque $dv = pdx - \frac{vdx}{k}$. Ponatur tempus quo ex A in P peruenerit $= t$, erit $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}$ et $dx = dt\sqrt{v}$ quo valore loco dx ſubſtituto habebimus $k\,dv = (kp - v)\,dt\sqrt{v}$. Sit $\sqrt{b} = c$ et $\sqrt{v} = u$, vt irrationalitas tollatur, erit $2kdu = (kp - uu)dt$. Quia igitur ſi $t = 0$ fit $u = c$, integrale huius aequationis etiamſi per logarithmos exhiberi poſſet, tamen expediet per ſeriem ſequenti modo exprimere:

$$u = c + At + Btt + Ct^3 + Dt^4 + \text{etc.}$$

ex qua fit:

$$\frac{2kdu}{dt} = 2Ak + 4Bkt + 6Cktt + \alpha Dkt^3 + \text{etc.}$$

$$\begin{aligned} kp - uu = kp &- 2Act - 2Bctt - 2Cct^3 \\ &- cc \quad - AAtt - 2ABt^3 \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Coaequatio coefficientium igitur dabit:

$$A = \tfrac{1}{2}p - \frac{cc}{2k}.\ B = \frac{-cp}{4k} + \frac{c^3}{4k^2}:$$

$$6Ck = \frac{ccp}{2k} - \frac{c^4}{2kk} - \tfrac{1}{4}pp + \frac{ccp}{2k} - \frac{c^4}{4kk} = -\tfrac{1}{4}pp + \frac{ccp}{k} - \frac{3c^4}{4kk}$$

$$\text{Ergo } C = \frac{-pp}{24k} + \frac{ccp}{6kk} - \frac{c^4}{8k^3}$$

$$8Dk = \frac{cpp}{12k} - \frac{c^3p}{3kk} + \frac{c^5}{4k^3} + \frac{cpp}{4k} - \frac{c^3p}{2kk} + \frac{c^5}{4k^3}$$

$$\text{ſeu } D = \frac{cpp}{24kk} - \frac{5c^3p}{48k^3} + \frac{c^5}{16k^4} \text{ etc.}$$

Ex his ergo oritur celeritas nauis quaeſita finito tempore t:

$$u = c + \tfrac{1}{2}t\left(p - \frac{cc}{k}\right) - \frac{ctt}{4k}\left(p - \frac{cc}{k}\right) - \frac{t^3}{24k}\left(pp - \frac{4ccp}{k} + \frac{3c^4}{kk}\right)$$
$$+ \frac{ct^4}{48kk}\left(2pp - \frac{5ccp}{k} + \frac{3c^4}{kk}\right) + \text{etc.}$$

§. 29. Simili modo ſi finito hoc tempore t celeritas nauis antrorſum ponatur $= C$ vt ſit $C = u$, tumque vis P nauem retrahat tempore T, ſi elapſo hoc tempore T celeritas nauis reſidua ponatur $= U$, reperietur

U

$$U = C - \tfrac{1}{2}T\left(P + \tfrac{CC}{k} + \tfrac{CTT}{4k}\left(P + \tfrac{CC}{k}\right) - \tfrac{T^3}{24k}\right.$$
$$\left(PP + \tfrac{4CCP}{k} + \tfrac{3C^4}{kk} + \tfrac{CT^4}{48kk}\left(2PP + \tfrac{5CCP}{k} + \tfrac{3C^4}{kk}\right) - \text{etc.}\right.$$

Quia vero eſt $pt = PT$ ponamus $pt = PT = Q$ erit $p = \frac{Q}{t}$ et $P = \frac{Q}{T}$, quibus valoribus loco p et P ſubſtitutis, erit

$$u = c + \tfrac{1}{2}Q - \tfrac{cct}{2k} - \tfrac{cQt}{4k} - \tfrac{QQt}{24k} + \tfrac{c^3tt}{4kk} + \tfrac{ccQtt}{6kk} + \tfrac{cQQtt}{24kk} - \text{etc.}$$
$$U = C - \tfrac{1}{2}Q - \tfrac{CCT}{2k} + \tfrac{CQT}{4k} - \tfrac{QQT}{24k} + \tfrac{C^3T^2}{4kk} - \tfrac{CCQT^2}{6kk} + \tfrac{CQQT^2}{24kk}\ \text{etc.}$$

Cum autem tempus percuſſionis t ſit quaſi infinite paruum poſito $t = 0$, erit $u = c + \frac{1}{2}Q = C$, vnde ab ſubſequente penduli actione ab eius tenſione oriunda fiet:

$$U = c - \tfrac{T}{24k}(12cc + 6cQ + QQ) + \text{etc.}$$

vbi reliquos terminos negligimus, quia prae his duobus ſunt valde parui.

§. 30. Hinc ergo manifeſtum eſt fore $U < c$, ideoque celeritatem nauis a quauis penduli actione, quae primum ex ictu tum vero ex tenſione penduli componitur, diminui debere. Etiamſi ergo nauis iam habeat celeritatem quamquiam antrorſum directam, eam tamen ab actione penduli mox amittet, vnde multo minus cum quieuerit, a pendulo vllum motum adipiſci poterit. Quod ſi vero obiiciatur nauem forte a pendulo retrorſum repelli permutandis velocitatibus u et U, ſimili modo oſtendetur, celeritatem quoque retrorſum directam, ſi quam nauis habuerit, ab actione penduli continuo imminui debere, atque adeo nullo modo naui ab huiusmodi pendulo imprimi poſſe.

DISSERTATIO GEOMETRICA, DE PROBLEMATIBVS ALIQVOT CONICIS PER ANALYSIN CONCINNE SOLVENDIS.

AVCTORE
GEORG. WOLFFG. KRAFFT.

Theorema.

§. 1.

Tab. V. Fig. 1. Si fuerint, in Ellipsi AMB, axis AB, tangens puncti M cuiuslibet MT; centrum C, ordinatim applicata ad axem PM: erunt CP, CA, CT, proportionales continue.

Demonstratio.

Positis $AC = CB = m$, semiaxe coniugato $CD = n$. Abscissa e centro computata $CP = x$, ordinatim applicata $PM = y$; erit ex natura Ellipseos $PM^2 (y^2) : CD^2 (n^2) = AP \times PB (m^2 - x^2) : AC \times CB (m^2)$; adeoque aequatio naturam Ellipseos exprimens haec, $y^2 = n^2 - \frac{n^2 x^2}{m^2}$. Ducta ordinatim applicata priori infinite vicina pm, et recta MN ad axem AB parallela, erit, ex natura trianguli characteristici MNm infinite parui, $mN (dy) : MN (-dx) = PM (y) : PT (\frac{-y dx}{dy})$. Est adeoque, substituendo pro dy valorem ipsius ex aequatione Ellipseos desumtum $-\frac{n^2 x dx}{m^2 y}$, subtangens $PT = \frac{m^2 y^2}{n^2 x}$; et rursus substituendo valorem ipsius y^2, fit eadem subtangens $PT = \frac{m^2}{x} - x$; ergo $CT = x + PT = \frac{m^2}{x}$; vnde oritur analogia

analogia $x : m = m : CT$; vel $CP : CA = CA : CT$. Q. E. D. Eſt haec propoſitio *Appollonii*, *Conicorum* 37, lib. I. quam vero ſic telae demonſtrationis noſtrae intexere volui.

Theorema.

§. 2. In Ellipſi ſumma quadratorum ex ſemidiametris quibuscunque coniugatis, aequalis eſt ſummae quadratorum ex ſemiaxibus eiusdem Ellipſeos.

Demonſtratio.

Sint axis maior AB, et ſemiaxis coniugatus CD; Fig. 2. puncti M cuiuslibet tangens MT, ordinatim applicata MP; ſemidiametri coniugatae MC et CH; et puncti H ordinatim applicata ad axem HQ. Quibus ita poſitis ſtatuantur $CP = x$, $PM = y$, $CQ = t$; $CA = CB = m$, $CD = n$. Atque habebuntur, ex theoremate praemiſſo, $PM = y = \frac{n\surd(m^2 - x^2)}{m}$; $PT = \frac{m^2 - x^2}{x}$. Iam, quoniam ſemidiameter CH parallela eſt tangenti TM; erunt triangula PMT et QHC ſimilia. Igitur $PT\left(\frac{m^2 - x^2}{x}\right) : PM\left(\frac{n\surd(m^2 - x^2)}{m}\right) = QC(t) : QH\left(\frac{ntx}{m\surd(m^2 - x^2)}\right)$. Erit porro, ex natura Ellipſeos, $PM^2\left(\frac{n^2m^2 - n^2x^2}{m^2}\right) : QH^2 = AP \times PB\,(m^2 - x^2) : AQ \times QB\,(m^2 - t^2)$, vnde conficitur $QH = \frac{n\surd(m^2 - t^2)}{m}$. His itaque duobus valoribus inuentis ipſius QH inter ſe aequatis, oritur facili calculo $t = CQ = \surd(m^2 - x^2)$, et ſubſtituto hoc valore, $QH = \frac{nx}{m}$. Hinc porro deducuntur $CM^2 = PM^2 + CP^2 = \frac{n^2m^2 - n^2x^2}{m^2} + x^2$; nec non $CH^2 = CQ^2 + QH^2 = m^2 - x^2 + \frac{n^2x^2}{m^2}$. Itaque erit

 CM

$CM^2 + CH^2 = \frac{n^2m^2 - n^2x^2}{m^2} + x^2 + m^2 - x^2 + \frac{n^2x^2}{m^2} = \frac{n^2m^2}{m^2} + m^2 = n^2 + m^2 = CD^2 + CA^2$. Q. E. D.

Theorema.

Fig. 3. §. 3. Sint Ellipſeos axes dimidii CA, CD, et ſemidiametri coniugatae quaecunque MC, CH: atque rectangulum ſub dimidiis axibus aequale erit parallelogrammo ſub dimidiis diametris coniugatis.

Demonſtratio.

Per extremum diametri M ducatur tangens TME; erit haec parallela ipſi CH; per extremum diametri H ducatur alia tangens HE; erit haec iam parallela ipſi CM; adeoque erit parallelogrammum ſub dimidiis diametris coniugatis CMEH. Ponantur denuo $AC = m$, $CD = n$, $MC = a$, $CH = b$, $CP = x$; atque habebitur (§. 1) $CP(x) : CA(m) = CA(m) : CT(\frac{m^2}{x})$; $PT = \frac{m^2}{x} - x$; $PM = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, conſequenter $TM = \sqrt{(\frac{m^4}{x^2} + a^2 - 2m^2)}$. Sed eſt ex natura Ellipſeos $PM^2(a^2 - x^2) : CD^2(n^2) = AP \times PB(m^2 - x^2) : AC^2(m^2)$, vnde deducitur $x^2 = \frac{m^2(a^2 - n^2)}{m^2 - n^2}$; qui valor ſubſtitutus efficit $PM = \frac{n\sqrt{(m^2 - a^2)}}{\sqrt{(m^2 - n^2)}}$, $CT = \frac{m\sqrt{(m^2 - n^2)}}{\sqrt{(a^2 - n^2)}}$, et $TM = \frac{\sqrt{(m^2 - a^2)}\sqrt{(m^2 - a^2 + n^2)}}{\sqrt{(a^2 - n^2)}}$; vel, ob $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$ (§. 2), erit $TM = \frac{b\sqrt{(m^2 - a^2)}}{\sqrt{(a^2 - n^2)}}$; adeoque poſito ſinu toto $= 1$, erit ſinus $T = \frac{PM}{TM} = \frac{n\sqrt{(a^2 - n^2)}}{b\sqrt{(m^2 - n^2)}}$. Porro in triangulo CTM eſt $CM(a) : \text{ſin.}\, T\,(\frac{n\sqrt{aa - nn}}{b\sqrt{mm - nn}}) = CT(\frac{m\sqrt{mm - nn}}{\sqrt{aa - nn}}) : \text{ſin.}\, CMT(\frac{mn}{ab}) = \text{ſin.}\, MCH = \text{ſin.}\, HCF$, ob parallelas ME et CH. Demiſſa nunc ex H perpendiculari HF in productam MC, erit in trian-

triangulo CHF sinus totus (1) : CH (b) = sin. HCF ($\frac{mn}{ab}$) HF ($\frac{mn}{a}$). Est igitur area parallelogrammi CMEH = CM × HF = $a \times \frac{mn}{a} = mn$ = AC × CD = rectangulo sub dimidiis axibus. Q. E. D. Habet hoc elegans theorema *Gregorius a Sancto Vincentio*, de Ellipsi, prop. 72, sed longe aliter demonstratum. Vtilissimum vero est theorema hoc ad varias applicationes concinnas, praecipue ob commodam expressionem sinus anguli MCH, quem duae diametri coniugatae quaecunque inter se faciunt. qui sinus nimirum est $\frac{mn}{ab}$. Commode et perspicue iam hinc soluitur etiam sequens

Problema.

§. 4. Datis duabus diametris coniugatis Ellipseos: inuenire axes.

Solutio.

Sint datarum diametrorum dimidia MC = a, CH = b; semiaxes quaesiti AC = x, CD = y; anguli dati MCH, quem suppono obtusum, sinus = e, cosinus = $-f$; erit ergo anguli HCF sinus = e, cosin. = $+f$. Ex H in MCN demittatur perpendicularis HF, atque erit *primo*, $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. (§. 2.) Deinde in triangulo CFH erit analogia haec, sinus totus (1): CH (b) = sin. HCF (e): HF (be); et simili modo CF = bf. Erit ergo *secundo* $xy = abe$, (§. 3.) aut vero $2xy = 2abe$, quibus additis ad aequationem modo positam primam, obtinebitur $x^2 + 2xy + y^2 = a^2 + b^2 + 2abe$, aut vero extracta radice, $x + y = \pm \sqrt{(a^2 + 2abe + b^2)}$. Subtractis autem $2xy = 2abe$ ab aequatione modo inventa Fig. 4.

venta prima, eruitur $x^2-2xy+y^2=a^2+b^2-2abe$, aut vero rurſus extracta radice fit $x-y=\pm\sqrt{(a^2-2abe+b^2)}$. Datis autem ſumma et differentia ſemiaxium: dantur ſemiaxes ipſi. Requiritur iam modo, vt valores inuenti commode poſſint conſtrui. Hunc in finem conſiderari debet, eſſe $e^2+f^2=1$. Ergo $x+y=\pm\sqrt{(a^2+2abe+b^2e^2+b^2f^2)}=\sqrt{(\overline{a+be}^2+b^2f^2)}=\sqrt{(\overline{MC+HF}^2+CF^2)}$. Nec non $x-y=\sqrt{(a^2-2abe+b^2e^2+b^2f^2)}=\sqrt{(\overline{a-be}^2+b^2f^2)}=\sqrt{(\overline{MC-HF}^2+CF^2)}$. Hinc $x+y$ et $x-y$, per triangulum rectangulum, ex theoremate *Pythagorico*, nullo labore capiuntur, quarum deinde ſumma eſt axis transuerſus, differentia vero axis coniugatus. Reſtat determinandus ſitus axeos. Super diametro coniugata CH deſcriptus ſit ſemicirculus, quem axis ſecet in Q: erit CQH rectus angulus; hinc ex natura Ellipſeos eſt $QH^2 : CD^2 = BQ \times QA\ (\overline{AC-CQ} \times \overline{AC+CQ} = AC^2-CQ^2 = AC^2-CH^2+QH^2) : AC^2$; vnde mediis et extremis in ſe ductis, factaque reductione, oritur $QH = \frac{CD\sqrt{(AC^2-CH^2)}}{\sqrt{(AC^2-CD^2)}}$. Cum igitur datae iam ſint magnitudine AC et CD: poterit hac leui constructione obtineri HQ, qua poſita in ſemicirculo ex H in Q, dabitur Q punctum; et ducendo dein per datum C, et inuentum Q, lineam rectam ACB, dabitur in hac poſitio axeos tranſuerſi. I. Q. E. I.

Scholion.

§. 5. Si praeter diametros coniugatas data etiam ſit perimeter Ellipſeos, quod Veteres in hoc negotio fere ſemper ſuppoſuerunt; tum facilius hoc problema reſoluitur, vitur, vti docet *Appollonius* prop. 46 et 47 lib. II. Fig. 5. Ex dato enim per diametros coniugatas centro Ellipſeos C, deſcribatur arcus circuli AB quolibet radio, ſecans perimetrum datam in A et B; arcus interceptus biſecetur in D; tranſibit axis per data iam duo puncta C et D. Euidens enim eſt, fore vt haec CD ordinatam AB biſecet ad angulos rectos. Quodſi vero perimeter data non ſit: difficilior euadit huius problematis ſolutio, vti iam vidimus. Huius itaque ipſius, quod modo ſolvimus, problematis conſtructionem primus dedit *Pappus Alexandrinus*, in Collect. Mathem. Libro VIII. prop. 14; ſed nullam addidit demonſtrationem; hanc ſupplere conatus eſt commentator Pappi, *Fred. Commandinus*, verum non ſatis feliciter; quod teſtantur *Gregorius a S. Vincentio* de Ellipſi prop. 90, et *Blondellus*, in Memoires de l' Acad. des Sciences depuis, 1666 jusqu' à 1699, pag. 464; qui idem hic etiam de hoc problemate, ex occaſione aedificandorum fornicum, agit, nouam eius conſtructionem exhibet, et mancam *Commandini* demonſtrationem emendat. *Pappi* conſtructionem habet quoque *Gregorius a S. Vincentio*; nec ab eadem multo abludentem tradit *Hoſpitalius*, des ſections coniques, Lib. II. prop. 11. Si quis vero hanc noſtram comparare voluerit cum enarratis ſolutionibus: inueniet eam concinnitate et euidentia reliquos facile ſuperantem.

Problema.

§. 6. Data vna diametrorum coniugatione: inuenire alteram ſub angulo quouis dato.

Solutio.

Fig. 4. Inueniantur ex data diametrorum coniugatione axes, (§. 4), quorum dimidia sint $AC = m$, $CD = n$; semidiametri quaesitae vero sint $MC = x$, et $CH = y$, constituentes inter se angulum MCH datum, quem suppono obtusum, cuius adeo sit sinus $= e$, cosinus $= -f$. Atque erit *primo* $x^2 + y^2 = m^2 + n^2$, (§. 2). Erit *secundo* $\frac{mn}{xy} = e$, (§. 3), vel $\frac{2mn}{e} = 2xy$. Additis igitur sibi his duabus aequationibus prodit $x^2 + 2xy + y^2 = m^2 + n^2 + \frac{2mn}{e}$, siue, extractis radicibus, erit $x + y = \pm\sqrt{(m^2 + n^2 + \frac{2mn}{e})}$. Subtractis vero a se his prioribus, aequationibus, extractisque rursus radicibus, oritur $x - y = \pm\sqrt{(m^2 + n^2 - \frac{2mn}{e})}$. Data itaque denuo summa et differentia diametrorum quaesitarum, dabuntur illae ipsae magnitudine. Vt vero cognoscatur earum positio: sit M punctum illud perimetri Ellipticae, quod ex sectione diametri quaesitae oritur, et inde ad axem semiordinata PM; atque erit $CP = \frac{m\sqrt{(x^2 - n^2)}}{\sqrt{(m^2 - n^2)}}$, et $PM = \frac{n\sqrt{(m^2 - x^2)}}{\sqrt{(m^2 - n^2)}}$; (§. 3.) cum igitur data iam sit magnitudo ipsius x: poterunt facili constructione reperiri hae duae CP et PM, atque exinde situs diametri MN cognosci, cui deinde sub imperato angulo MCH iungatur altera diameter priori coniugata. Ab aliis problematibus, quae simili concinnitate ex his principiis solui possunt, iam abstineo, contentus viam ad illa adeunda me monstrasse.

DEMON-

DEMONSTRATIONES DVORVM THEOREMATVM GEOMETRICORVM.

AVCTORE
G. W. KRAFFT.

Primum horum Theorematum beneuole mecum communicauit, sine subiuncta demonstratione, Celeberr. Dom. *Leonh. Eulerus*, in literis d. d. 17. Febr. 1748. ad me scriptis; quod nouum non modo visum est, sed et generalitate sua mirum in modum mihi placuit; huius itaque demonstrationem sequentem in modum postea adornaui, vt praemittere debeam ex Trigonometria petitum sequens.

Lemma.

Data sint trianguli acutanguli duo latera BA *et* BC, *cum angulo intercepto* B: *quaeritur magnitudo lateris tertii* AC. Ponantur BA $= \alpha$, BC $= \beta$, anguli acuti B sinus μ, cosinus $\lambda = \sqrt{(1-\mu^2)}$, posito sinu toto $= 1$; et demittatur perpendicularis CD. Erit iam in triangulo rectangulo BDC analogia haec: sinus totus (1): BC (β) = sin. DCB (λ): DB ($\beta\lambda$); hinc est segmentum AD $= \alpha - \beta\lambda$; porro est in eodem triangulo rectangulo BDC etiam haec analogia; sinus totus (1); BC (β) = sinus DBC (μ): DC ($\beta\mu$); ex his iam per Theorema Pythagoricum erit AC $= \sqrt{(AD^2 + DC^2)} = \sqrt{(\alpha^2 - 2\alpha\beta\lambda + \beta^2\lambda^2 + \beta^2\mu^2)} = \sqrt{(\alpha^2 - 2\alpha\beta\lambda + (\lambda^2+\mu^2)\beta^2)} = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\lambda)}$, ob $\lambda^2 + \mu^2 = 1$. Facile autem apparet, in eo casu, in quo sit angulus B obtusus, eius cosinum λ Tab. V. fig. 5.

ſumi debere negatiuum, vt nempe tum ſit $AC = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\lambda)}$. Quae determinatio Trigonometrica huius lateris AC, quamuis nulla fere difficultate eruatur, vſum tamen inſignem habet in ſoluendis tam plurimis problematibus, quam adſtruendis theorematibus Geometricis, qui idem etiam ſeſe oſtendit in hoc ſequenti meo propoſito, cuius iam ipſum eſt ſubiunctum

Theorema.

Fig. 7. *Si quadrilateri cuiuscunque* ABCD *diagonales* AC, DB, *biſecentur in* F *et* G; *ducaturque recta* FG; *erit ſumma quadratorum e lateribus aequalis ſummae quadratorum e diagoniis una cum quadruplo quadrati* FG; *hoc eſt, erit* $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + DB^2 + 4FG^2$.

Demonſtratio.

Ponantur breuitatis cauſſa ſequentes valores,

$$\begin{array}{llll} AC = 2A & \text{erunt} & AE = A + a = M \\ DB = 2B & & BE = B - b = N \\ FE = a & & CE = A - a = P \\ EG = b & & DE = B + b = Q \end{array}$$

$$\text{vnde } M - P = 2a$$
$$N - Q = -2b.$$

Sitque anguli AED acuti ſinus μ, coſinus λ; obtuſi vero AEB ſinus iterum μ, ſed coſinus $-\lambda$. Erunt nunc ex praemiſſo Lemmate

$$AB = \sqrt{(M^2 + N^2 + 2MN.\lambda)}$$
$$BC = \sqrt{(N^2 + P^2 - 2NP.\lambda)}$$
$$CD = \sqrt{(P^2 + Q^2 + 2PQ.\lambda)}$$

DA

$$DA = \sqrt{(M^2 + Q^2 - 2MQ.\lambda)}$$
$$FG = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab.\lambda)}$$

Hinc itaque, ſubſtitutis hiſce valoribus, deprehendetur, eſſe $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = M^2 + N^2 + 2MN.\lambda + N^2 + P^2 - 2NP.\lambda + P^2 + Q^2 + 2PQ.\lambda + M^2 + Q^2 - 2MQ.\lambda = 2(M^2 + N^2 + P^2 + Q^2) + 2\lambda(MN - NP + PQ - MQ) = 2(M^2 + N^2 + P^2 + Q^2) + 2\lambda(\overline{M - P} \times \overline{N - Q}) = 2(A^2 + 2Aa + a^2 + B^2 - 2Bb + b^2 + A^2 - 2Aa + a^2 + B^2 + 2Bb + b^2) - 8ab\lambda, = 4(A^2 + B^2 + a^2 + b^2 - 2ab\lambda) = 4(A^2 + B^2 + FG^2) = 4A^2 + 4B^2 + 4FG^2 = AC^2 + DB^2 + 4FG^2$.

I. Q. E. D.

Per ſe itaque patet, ſi quadrilaterum fuerit parallelogrammum: tum FG in nihilum abire, adeoque futurum eſſe $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + DB^2$.

Alterum Theorema non oſtendit minus vſum Lemmatis iam explicati, ſed et multo difficilius demonſtratur, ob ſummam, in qua poſitum eſt, atque extenſiſſimam vniverſalitatem. Inuentorem habet hoc alterum Theorema Celeberr. *Coteſium*, in cuius opuſculis poſtremis editum illud eſt a *Rob. Smith*, ſed ſine demonſtratione; quam deinde alii Geometrae addiderunt; omnibus autem in hac reperiunda palmam praeripuit, vti alias ſemper, *Ioh. Bernoullius*, quem nuper admodum viuis ereptum luget adhuc, diuque lugebit, ciuitas omnis Geometrica. Hanc viri, poſt fata etiam illuſtris, demonſtrationem videre licet in Eiusdem Operibus, Tomo IV. pag. 67, perfecta Inductione, atque euidenti ſerierum conſecutione elabora-

 tam;

tam; quae vero, vti tam ſubtilis theorematis indagatio requirit, ſubtilis etiam eſt, neque adeo captu admodum facilis. Sequentes vero meas demonſtrationes, Lemmati ſuperiori innixas, minime pro apodixi aliqua vniuerſali vendito; ſed pro tali, quae in caſibus aliquot, exempli gratia adductis, legitime procedat, adeoque nobiliſſimo huic Cyclometriae, atque abſtruſiſſimo Theorematì clariorem lucem conciliet; ſed ſimul illud, in quolibet propoſitorum exemplorum caſu, rigidiſſime probet. Eſt vero tale ipſum hoc *Coteſianum*

Theorema.

Fig. 8. *Si peripheria circuli, cuius diameter* AI, *centrum* O, *diuiſa fuerit in partes aequales, ſed numero pares; et ex puncto diametri quocunque aſſumto* P *ducantur in diuiſionum omnes notas rectae* PB, PC, PD *&c. Si iam initium fiat in diametro ipſa, et multiplicentur ſingulae alternae hae lineae in ſe; erit factum* $AP \times CP \times EP \times GP \times IP \times LP \times NP \times PP$ *&c. vſque ad numerum horum factorum* λ, $= AO^{\lambda} - PO^{\lambda}$. *Si vero initium fiat ab illa recta, quae diametro proxima eſt, erit denuo factum harum alternarum* $BP \times DP \times FP \times HP \times KP \times MP \times OP \times QP$ *&c. vſque ad numerum horum factorum* λ, $= AO^{\lambda} + PO^{\lambda}$. Huius iam Theorematis elegantiſſimi aliquot caſus dabo demonſtratos, quoniam generalis omnium caſuum euictio, *Bernoulliana* memorata melior inueniri vix poterit.

Praeter Lemma ſuperius autem, ſuppono adhuc, poſito anguli ſimpli coſinu $= b$, eſſe coſinum

anguli dupli $= 2b^2 - 1$

tripli $= 4b^3 - 3b$

qua-

quadrupli $= 8b^4 - 8b^2 + 1$
quintupli $= 16b^5 - 20b^3 + 5b$;

Deinde ex polygonorum regularium in circulum inſcriptione, poſito vbique radio $= 1$, eſſe coſinum anguli

90° - - - - - - -	0
72 - - - - - - -	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
60 - - - - - - -	$\frac{1}{2}$
54 - - - - - - -	$\frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{4}$
45 - - - - - - -	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
36 - - - - - - -	$\frac{\sqrt{(2\sqrt{5}+6)}}{4}$
30 - - - - - - -	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
18 - - - - - - -	$\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}$
0 - - - - - - -	1

Quibus itaque praemiſſis, aſſumamus peripheriam circuli diuiſam eſſe in partes quatuor; demonſtrandum eſt, eſſe $AP \times CP = AO^2 - PO^2$; et $BP \times DP = AO^2 + PO^2$. Quod faciliime fit ad hanc analogiam, quam in ſequentibus quoque retinebo. Ducto radio BO, ſit $PO = a$, $AO = r$; atque erit anguli POB recti coſinus $= 0$; igitur ex Lemmate habetur $BP = \sqrt{(r^2 + a^2)} = DP$; quod etiam per ſe clarum eſt; pono habemus $AP = r - a$, $CP = r + a$; quare erit omnino $AP \times CP = \overline{r-a}.\overline{r+a} = r^2 - a^2 = AO^2 - PO^2$. Et rurſus $BP \times DP = BP^2 = r^2 + a^2 = AO^2 + PO^2$. Vbi in hoc et ſequentibus quoque caſibus per ſe clarum eſt, poſito puncto P extra circulum, proditura eſſe haec facta talia, $PO^2 - AO^2$. Fig. 9.

Se-

Fig. 10. Secundo ponamus, peripheriam circuli diuiſam eſſe in partes ſex; demonſtrandum eſt, eſſe $AP \times CP \times EP = AO^3 - PO^3$; et $BP \times DP \times FP = AO^3 + PO^3$. Ductis ergo radiis BO, CO, ſit denuo $PO = a$, $AO = r$, atque erit anguli POB $60°$ coſinus $= \frac{1}{2}$, coſinus autem dupli POC $= -\frac{1}{2}$; quibus datis ex Lemmate partim, partim per ſe, erunt $AP = r - a$, $BP = \surd\,(r^2 + a^2 - 2ar.\frac{1}{2}) = FP$; $CP = \surd\,(r^2 + a^2 + 2ar.\frac{1}{2}) = EP$; $DP = r + a$. Quare erit $AP \times CP \times EP = AP \times CP^2 = \overline{r-a}\,(r^2 + a^2 + ar) = r^3 - a^3 = AO^3 - PO^3$. Et rurſus $BP \times DP \times FP = DP \times BP^2 = \overline{r+a}.\,(r^2 + a^2 - ar) = r^3 + a^3 = AO^3 + PO^3$.

Fig. 11. Tertio ponamus, peripheriam circuli diuiſam eſſe in partes octo; demonſtrandum eſt, eſſe $AP \times CP \times EP \times GP = AO^4 - PO^4$; nec non $BP \times DP \times FP \times HP = AO^4 + PO^4$. Ductis ergo radiis BO, CO, DO, ſint rurſus $PO = a$, $AO = r$; atque erit anguli POB, ſemirecti, coſinus $= \frac{\surd 2}{2}$, coſinus dupli autem $POC = 0$, coſinus tripli $POD = \frac{-\surd 2}{2}$; quibus datis partim per ſe, partim ex Lemmate, oritur $AP = r - a$, $BP = \surd(r^2 + a^2 - 2ar.\frac{\surd 2}{2}) = HP$; $CP = \surd\,(r^2 + a^2 - 2ar.0) = GP$; $DP = \surd\,(r^2 + a^2 + 2ar.\frac{\surd 2}{2})$; $EP = r + a$. Quare prodibit $AP \times CP \times EP \times GP = AP \times CP^2 \times EP = \overline{r-a}.\,(r^2 + a^2).\,\overline{r+a} = r^4 - a^4 = AO^4 - PO^4$. Tum vero etiam $BP \times DP \times FP \times HP = BP^2 \times DP^2 = (r^2 + a^2 - ar\surd 2)\,(r^2 + a^2 + ar\surd 2) = r^4 + a^4 = AO^4 + PO^4$.

Atque ſimili iam huic modo demonſtratio haec in reliquis caſibus perficitur, quod monuiſſe ſufficit.

PHISICO-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE, FACTAE An. 1745, TUBINGAE,

a

Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

Simul ac ſedem hic loci figere mihi licuit, non negligenter in id etiam incubui, vt et inſtrumenta adcurata, et commoda loca ſeligerem, quae continuandis obſeruationibus meteorologicis, in Academia Imperiali Petropolitana per longam annorum ſeriem multo labore inſtitutis, inſeruire poſſent. Leguntur dictae hae obſeruationes in *Commentariorum Acad. Scient Imper. Petropol.* Tomo IX, et ſequentibus, in quibus aliqua ſaltim huc facientia, nec animaduerſione plane indigna, pertinaci induſtria reperiſſe me confido. In his autem *Tubingae* factis obſeruationibus vtor, plane vti in praecedentibus, Barometro ſimplici, bene conſtructo, locato in conclaui vix aliquantum calefacto durante hyeme, atque eodem modo etiam diuiſo vti *Petropolitanum* fuit, ſcilicet in pollices *Londinenſes* duodecimales, et horum partes centeſimas, quas punctulo a pollicibus ſeparaui; quam diuiſionem data opera hunc in finem retinui, vt eo facilius has cum praecedentibus meis obſeruationibus connectere atque comparare poſſim. Tubuli, in quo mouetur mercurius, diameter eſt $\frac{1}{8}$ praecedentis pollicis, atque ipſum hoc inſtrumentum ſitum eſt in altitudine 60 pedum Londinenſ. ſupra libellam proxime praeterfluentis fluuii

Nicri. Thermometrum deinde, quo vſus ſum, methodo *Fahrenheitiana* diuiſum, conſtructum habeo ab inſigni illo artifice Amſtelodamenſi, *Henr. Prinz*, ad illa praecepta, quae exponit Celeberr. *Petrus van Muſſchenbroek* in *Tentaminibus Experimentorum Naturalium Academiae del Cimento*, *pag.* 10. *ſeqq.* et quod ipſum a ſingulari huius Viri perſpicaciſſimi in me beneuolentia ſum adeptus. Locatum vero illud obſeruo in aëre libero, ſed vmbroſo, qui ab omni calore peregrino remotus eſt, excepto pauculo aliquo, qui in diebus aeſtiuis, ſummo mane, ad illud a ſole allabitur, nulla mihi cura euitandus. Huius itaque vtriuſque inſtrumenti fide ſequentia, quae annotaui, conſtant.

§. 2. Notaui igitur Barometri altitudines maximas et minimas in ſingulis menſibus anni 1745. ex quotidianis obſeruatis, ſequentes, quas vna cum vtriuſque differentia huic tabellae includo.

	max.	min.	diff.
Ianuarius	29. 36	28. 60	0. 76
Februarius	29. 30	28. 14	1. 16
Martius	29. 30	28. 03	1. 27
Aprilis	28. 94	28. 08	0. 86
Maius	28. 68	28. 03	0. 65
Iunius	28. 79	28. 10	0. 69
Iulius	28. 75	28. 21	0. 54
Auguſtus	28. 71	28. 30	0. 41
September	29. 04	28. 41	0. 63
October	29. 08	28. 41	0. 67
Nouember	28. 98	27. 80	1. 18
December	29. 07	28. 03	1. 04

§. 3.

§. 3. Ex his Barometri altitudinibus apparet, maximam earum hoc anno fuiſſe 29. 36. quae viſa fuit Ianuarii 2, hora 7 *p. m.* coelum nubibus continuis occupantibus, et inſequente vento fortiſſimo SW diebus aliquot ſuccedentibus, quibus delapſus ſubito iterum eſt mercurius. Minima autem harum altitudinum fuit 27. 80. quae accidit Nouembris 26 circa horam 5 *p. m.* quo ipſo ſolo die mercurius repente et decidit, atque iterum aſcendit, in tempeſtate dubia pluuias inter et ſerenitatem, inſequente iterum ſatis forti SW vento, ſed variabili, et niue, quae prima huius hyemis in remotis montium iugis conſpicua nobis fuit. Harum duarum altitudinum differentia eſt 1. 56, vt adeo media Barometri eleuatio apud nos hucuſque aeſtimanda ſit 28. 58, nulla habita inſtrumenti ſupra *Nicri* fluuii ripam eleuati ratione, quae, vti modo dictum eſt, 60 pedes adaequat.

§. 4. Ex his iam primis harum obſeruationum initiis duo conſequuntur. Primum, Barometri variationem annuam hic loci eſſe multo minorem, quam eſt *Petropoli.* Nam cum *Petropolitana* haec variatio inuenta ſit, nouendecim annorum interuallo 2. 77. vid. *Commentar. Petropol.* Tomus IX, pag. 359; haec noſtra *Tubingenſis* non eſt niſi 1. 56. vnius quidem anni ſpatio definita, ſed ſine dubio prope tamen veram conſtituta. Secundum, Barometri variationes menſtruas in primis et vltimis anni menſibus eſſe maiores quam in mediis, ſi ſolum Ianuarium excipias: qui vero ab initio admodum fuit tepidus, donec in ſui medio ad ſummum frigus ſubito deſcenderet;

ita vt omnia illa his obſeruationibus confirmentur, quae in *Commentar. Petropol.* Tomo IX, pag. 325. aſſerui.

§. 5. Ex obſeruationibus Thermometri, in äere vmbroſo Boream verſus conſtituti, ſequentem formo tabellam, quae cuiusque menſis exhibet gradum caloris maximum, minimum, atque differentiam vtriusque, ita quidem, vt, quoniam gradus *Fahrenheitiani* numerantur ab o, ſurſum et deorſum inſcripti, illos qui ſunt infra o denotem ſigno negationis in Algebra recepto; adeoque − 13 ſignificat gradum 13. infra o.

	calor max.	min.	diff.
Ianuarius	45	−13	58
Februarius	47	8	39
Martius	67	− 5	72
Aprilis	72	32	40
Maius	76	42	34
Iunius	85	48	37
Iulius	89	48	41
Auguſtus	87	50	37
September	85	41	44
October	71	28	43
Nouember	51	21	30
December	45	10	35

Vnde apparet, maximum calorem huius anni fuiſſe 89 graduum, qui incidit in diem 8 Iulii, in qua ſerenitas aliquot dierum ſubito mutata fuit in grauiſſimas fulminationes, die 9 inſequenti denuo recurrentes, ſine vllo vento. Minimus vero calor, hoc eſt, maximum frigus, gra-

gradum tenuit 13 infra 0, quod debetur diei 21 Ianuarii, quae intenſiſſimum et rarum his terris frigus ſentiendum nobis praebuit, in ſerenitate perfecta, nebulis autem quandoque permixta, flante tenuiſſimo Euro. Idem hoc frigus, eodem gradu et die, obſeruatum quoque eſt *Stuttgardiae.* Sed *Petropoli* aliter ſe haec res habuit, vti ex obſeruationibus menſis Ianuarii ab *Imper. Scientiar. Academia* mecum communicatis perſpicio; ibi enim per dies Ianuarii 12. 13. etc. vſque ad 20. frigus vehemens erat, graduum circiter 8. et 0; ſed ipſo die 21 erat remiſſius, nempe graduum 20; quibus itaque diebus ceſſauit ibi frigus: his iisdem coepit apud nos oriri; ita vt fere materia quaedam mota ex illa regione in noſtram produxiſſe id videatur. *Stuttgardiae* autem experimenta capiente Celeberr. Dom. D. *Ioh. Georg Du Vernoi* die eodem 21. Ian. ſequentes liquores, äeri libero expoſiti, congelati fuerunt; vinum album tempore 15. min. prim. vinum Burgundicum in 20. min. Spiritus autem frumenti poſt 12 demum horas frigore coagulari coepit.

§. 6. Addam his comparationes quasdam frigoris et caloris *Petropolitani*, in climate valde iam boreali, obſeruatorum, cum iisdem in climate noſtro temperatiori. Ibi quidem ſolis radii, libere ad Thermometrum allabentes, in diebus aeſtiuis et calidis, horisque poſtmeridianis 2. et 3. nunquam altius mihi hoc adegerunt, quam ad gradus *Fahrenh.* 103; heic loci autem iidem radii liberi ſuſpenſum mercurium tenuerunt ad gradus 102. Maximum frigus hucuſque *Petropoli* inſtrumentis in äere libero *Obſeruatorii Imperialis* ibidem expoſitis deprehenſum fuit anno 1740. Ianuarii 25 ſt. v. graduum 30 infra 0; atque paullo minus anno 1733. Ianuarii 16 ſt. v. $28\frac{1}{2}$ infra 0; *Tubingae* autem frigus, quod die 21 Ian. huius anni 1745. ſenſimus, maxime inſolens viſum incolis, non erat niſi eorundem graduum 13 infra 0. Porro *Petropoli* calorem äeris vmbroſi maiorem nunquam obſeruaui quam 83 graduum: hic vero hoc anno 89 graduum.

§. 7. Lucem borealem, inter nubes quaſi ludentem, obſeruaui in fine praecedentis anni 1744, Nouembris 25, hora 9 nocturna. Deinde anni huius die 2 Iunii, quo nempe ex aliquot tenuibus nubeculis albicantibus, Boream verſus poſitis, ſubito extinctis atque iterum accenſis, lucem borealem viſus ſum agnoſcere, hora 10 *p. m.* in ſerenitate perfecta. Denique Decembris 29 aurorae borealis veſtigia diſtincta apparuerunt inter nubes hinc et inde valde hiantes hora 9 nocturna. Ianuarii vero 18. huius anni 1745, quo die integro nubibus tectum hic fuit coelum, ſupra laudatus D. D. *Du Vernoi Stuttgardiae* auroram obſeruauit borealem, quae arcum pallidiorem efformare videbatur.

§. 8. Adiiciam his obſeruationes adhuc duas a me factas hoc anno. Nempe Auguſti 12 profectus ſum ad viſendum ſpecum illum prope *Reutlingam* haud incelebrem *Das Nebel-Loch* dictum, qui ſupra medium iugi alicuius montium editorum aditum ſui aperit inter ſyluas, ab initio decliuis valde eſt, ſed dein horizontaliter fere ſub terra protenditur ad diſtantiam aliquot centenorum paſſuum. In vltimis igitur huius ſpecus partibus Thermometrum eo mecum allatum oſtendebat gradus 48, quos calori

calori moderato et temperato aſſignat hodie in his inſtrumentis artifex celebris Amſtelodamenſis ſupra laudatus, *Henr. Prinz*, ſecutus *Fahrentheitium*; cum in ingreſſu atque egreſſu ſpecus idem monſtraret, die quippe aeſtuoſa et ſerena, gradus 66. In eadem vero hac parte ſpecus poſtica peluis lapidea eſt, in qua colliguntur aquae deſtillantes circumquaque, limpidiſſimae, quod in calice vitreo faci admoto cognoui, puriſſimae, ſed gradum caloris tenentes non niſi 42. Quem defectum huius caloris ab illo, qui aëri circumfluo inhaeret 48 graduum nulli alii cauſſae adſcribere poſſum, quam quod haec aqua a pluuiis orta, ſed tranſiens deinde et transſudans per ſatis magnam ſoli craſſitiem variis ſalibus referti, haec ſoluit continuo, et ſecum aduehit vſque in peluim, ita vt haec aqua non aliter conſideranda ſit, ac ſi perpetuo aliquid ſalis ipſi iniiceretur, ex cuius ſolutione hanc ſuam refrigerationem recipit.

§. 9. Secunda obſeruatio ſpectat ad directionem acus magneticae. Hanc 6 pollices longam, pyxidi ſuae incluſam, libero in aëre fixe poſitam, conſtitui ad parietem lapideum feneſtrae alicuius in *Collegio Illuſtri*, palatio ex lapidibus quadratis conſtructo, Boream verſus vtcunque expoſitae; huiusque acus declinationem, non veram quidem, ſed qualem reſpectu parietis lapidei habebat, deprehendi per multos dies fuiſſe praeciſe 11 graduum. Cum vero d. 31 Auguſti huius anni 1745 tonitrua vehementiſſima toto die audirentur, conſpicerenturque fulgura frequentiſſima: vidi hora 3 p. m. hanc declinationem acus magneticae ſubito mutatam in 10° 45′; de qua mutatione certus plane ſum; eamque eo magis adſcribo fulminationibus illius diei creberrimis, quia de eodem hoc phaenomeno iam conſtat ex *Iournal des Savans*, tom. V. pag. 74; atque ex Celeberr. *Petri van Muſſchenbroek* Diſſertatione de Magnete, Exper. 106. ſed ſimul obſeruationes *Grahami* in *Tranſact. Philoſoph. Angl.* No. 383. teſtantur, eandem hanc declinationem, ſi exacte ad eam attendatur, ſingulus horae quadrantibus mutatam aliquot minutis primis deprehendi, in tempeſtate etiam ordinaria et ſtatu aëris quieto.

OBSER-

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE, FACTAE An. 1746. TVBINGAE,

a

G. W. KRAFFT.

§. 1.

Barometro atque Thermometro iisdem, eodemque adhuc modo diſpoſitis et conſtitutis, quem in deſcriptione obſeruationum meteorologicarum ſuperioris anni indicaui: obſeruatae mihi fuerunt hoc praeſenti anno, in ſingulis menſibus, altitudines Barometri maximae et minimae ſequentes, quas, vna cum earumdem differentiis, hic appono; intelligendo pedis Londinenſis pollices duodecimales, atque eorumdem partes centeſimas;

	max.	min.	diff.
Ianuarius	29. 18	27. 95	1. 23
Februarius	29. 15	28. 10	1. 05
Martius	28. 89	27. 65	1. 24
Aprilis	28. 65	27. 98	0. 67
Maius	28. 94	28. 30	0. 64
Iunius	28. 76	28. 20	0. 56
Iulius	28. 80	28. 41	0. 39
Auguſtus	28. 87	28. 41	0. 46
September	29. 00	28. 33	0. 67
October	28. 88	28. 16	0. 72
Nouember	29. 00	28. 02	0. 98
December	29. 04	27. 93	1. 11

§. 2. Ex quibus apparet, altitudinem Barometri hoc anno fuiſſe maximam 29. 18, minimam vero 27.

65. manet itaque altitudinum hucuſque hic loci obſeruatarum adhucdum maxima illa, quae ſuperiori anno annotata fuit, nimirum 29. 36; ſed mutanda eſt ſuperioris anni obſeruata minima altitudo, quae nunc habetur 27. 65. et viſa fuit huius anni menſe Martio, die 3. circa meridiem, flante fortiſſimo vento S W. et cadente copioſa pluuia. Prioris igitur maximae, et huius nouae iam minimae, differentia eſt 1. 71; vt adeo media Barometri altitudo apud nos nunc aeſtimanda ſit 28. 50½. nulla habita inſtrumenti, ſupra *Nicri* fluuii libellam eleuati, ratione, quae, vti in praecedentis anni deſcriptione dictum fuit, 60 pedes adaequat.

§. 3. Ex obſeruationibus Thermoſcopii, in aëre vmbroſo Boream verſus, conſtituti, ſequentem iterum formo tabellam, quae cuiusque menſis exhibet gradum caloris maximum, minimum, atque differentiam vtriusque, ita quidem, vt vbique ſint intelligendi gradus *Fahrenheitiani*;

	max.	min.	diff.		max.	min.	diff.
Ian.	50	9	41	Iul.	94	54	40
Febr.	51	−3	54	Aug.	85	47	38
Mart.	60	14	46	Sept.	82	44	38
Apr.	67	31	36	Oct.	66	30	36
Maius	83	48	35	Nov.	48	24	24
Iun.	75	52	23	Dec.	49	28	21

Ex quibus conſtat, maximum calorem aeſtatis huius, longe lateque per totam Europam feruentiſſimae fuiſſe hic loci 94 graduum, qui incidit in diem 15 Iulii, quo ipſo etiam vehemens, ſed breuis, tempeſtas coorta fuit. Minimus vero calor, ſiue maximum frigus, gradum tenuit 3 infra 0, quod ſenſimus die 15 Febr. in ſerinitate, quam tenuis nebula paullo diminuit.

§. 4. Quas aurorae borealis apparitiones vidi: eas ſequentibus abſoluam. *Ianuarii* 31 circa horam 10 p. m. veſtigia mihi huius viſa ſunt, ſed dubia, quoniam luna nubibus permixta lucebat. Similis ſuſpicio mihi oblata quoque fuit *Febr.* 4, circa horam 7 p. m. inter nubes et pluuias. Poſtea interquieuit plane ſplendor hoc ſeptentrionalis, quantum ego quidem obſeruare potui, vſque ad diem 22 *Octobr.* in quo cum nubes continuae, ac pluuiae rarae, eſſent: obſeruaui tamen hora 10. p. m. diſtincte auroram borealem, inter nubes fere continuos deliteſcentem, nullo vento flante, conſtantem, arcu tranquillo, lucido verſus boream, ſed multis faculis ludentem quoque verſus auſtrum; donec eadem haec aurora circa horam 11 inciperet formare arcum aliquem humilem, ſubdubium, ſed mihi tamen viſum declinantem aliquantum ab auſtro ad ortum. Rediit haec aurora die ſequenti, *Octobris* 23, ſed deſtituta vtroque arcu, in qua boream verſus apparebat ſola aliqua illuminatio indeterminata. Vtroque die nullae videbantur ſtellae. *Die* poſtea 24 denuo deprehendi ſigna quaedam huius lucis inter nubes continuas; *die* 26 non potui vacare obſeruando huic phaenomeno, ob negotia; ſed certiorem me reddidit Clariſſ. Dom. M. *Biſchoff*, vicinae nobis eccleſiae Bernhuſanae tum temporis Vicarius, viſam ſibi hoc quoque die fuiſſe auroram valde amplam et diffuſam; cuius deinde adhuc veſtigia clara denuo deprehendi *die ſequenti* 28. Ita haec continua, per aliquot dierum interualla, apparuit coeli deflagratio. *Nouembris* 10, rursus inter nubes, visa mihi fuit clarissime lux borealis, ludens septentriones versus globis lucidis, et saepius transuersim motis. *Nouembris* 20 iterum apparuit lux borealis lucida, humilis et tranquilla. Sed *Decembris* 7 alia, diffusa et coruscans; quam apertam secuta sunt vestigia tantum aliqua die 18 *Decembris*; et quarum omnium agmen quasi clausit vltima, die 24 Decembris, quae hora $7\frac{1}{2}$ p. m. inter tenues nubeculas, septentriones versus positas, magnis illuminationibus aperte se prodidit.

§. 5. Appendicis loco commemorabo hic phaenomenum, quod summo iure huc referri meretur atque accenseri maxime memorabilibus. Excerptum illud est ex libro illustri, Russica lingua conscripto, cuius in linguam Germanicam versi titulus est, *Geschichte des Osmannischen Reiches, durch Demetr. Cantemir, Fürsten der Moldau.* In huius folio 364, sub Osmanno II. §. 3, leguntur sequentia verba: *sub imperio huius Imperatoris apparuit Constantinopoli insolens meteorum, quale nunquam antea visum fuit, neque forsan vnquam visura est subsequens aetas. Anno 1029, die 28 mensis Rebiul aerwel, conspiciebatur coelo gladius incuruatus, lanceae longitudinem quinquies sumtam adaequans, et latitudinem tenens trium pedum. Porrigebatur illud ab oriente occidentem versus; apparebat post occasum solis, in splendore claro, per interuallum integri mensis.* Annus indicatus, Turcicae aerae, est annus post Christum natum 1620, mensis autem et dies indicant in Calendario veteri Iuliano diem 22 Februarii. Ex quibus circumstantiis manifestum est, nihil aliud fuisse descri-

scri-

ſcriptum hoc prodigium, quam lumen *Caſſinianum*, inſolito quodam fulgore apparens. Nam conſpici hoc quandoque ſolet inſtar falcis, ad modum gladii incuruati; vid. Celeberr. *De Mairan*, *Traité de l' Aurore Boreale*, pag. 22; longitudinem tenet multo maiorem, quam eſt ipſivs latitudo, et, quod omnem probabilitatem ſummo rigore adimplet, extenditur in Februario menſe ab oriente verſus occidentem, ſi incipias progredi viſu a cuſpide ad baſin ipſius; ac denique, quod caput eſt rei, eodem menſe praeſens ſe ſiſtit poſt ſolis occaſum. Si in hac igitur deſcriptione remoueamus ab animo ſimilitudinem haud plane ineptam, et genti, apud quam viſum eſt eo tempore phaenomenum, familiarem et vſitatam; ſi omittamus quoque menſuram, non aſtronomica accuratione, ſed vulgi trepido iudicio, captam: videbimus planam et ſimplicem deſcriptionem, non prodigii alicuius, ſed meteori in curſu naturae ordinarii, nempe lucis *Caſſinianae*; cuius adeo Epocha, quantum ex certis hiſtoriis conſtat, retrahenda nunc erit ad annum Chriſti 1620, quam alias affigere ſolent anno Chriſti 1659.

DE QVAN-

DE QVANTITATE CALORIS, QVAE POST MISCELAM FLVIDORVM, CERTO GRADV CALIDORVM, ORIRI DEBET, COGITATIONES,

AVCTORE

G. W. Richmann

Praelecta in conuentu Academico Clariſſ. Krafftii diſſ. de calore et frigore, formulam, quam ingenioſe invenit ad quantitatem ſiue gradum caloris mixtorum fluidorum determinandum, examinans reuocaui ſimul in memoriam, quae olim de hac materia meditatus ſum. Euolui ergo ſcripta mea et collectanea, et inueni formulam, quam cognoſcendae quantitati caloris in mixto aptam iudicaueram, ſi modo rite conſtructum thermometrum adhiberetur. Statim comparaui eam cum Clariſſ. Krafftii, atque ad caſus in diſſertatione ipſius adductos adplicaui, vidique maiores oriri gradus calorum ſecundum meam formulam, quam ſecundum Clariſſ. Krafftii, ſimulque a gradibus thermometro inuentis multum abludere debere; rem ergo totam negligendam, curioſitatis tamen gratia antea inquirendum putaui, qua via in formulam inciderim. Quod cum propter ſimplicitatem ſtatim apparebat ſimulque formula rationi valde conſormis videbatur, apud me conſtituebam eam cum ſocietate communicare, quod ſequentibus faciam.

§. 1. Concepi calorem fluidi certae temperiei diſtributum aequaliter per totam maſſam fluidi, et ſimul

cogitaui

cogitaui, ſi idem caloris gradus per duplam triplam quadruplam etc. maſſam diſtributus eſſet, calorem hinc generatum eſſe debere prioris ſubduplum, ſubtriplum, ſubquadruplum etc. et ingenere calorem eundem eſſe in ratione inuerſa maſſarum, per quas diſtributus eſt.

§. 2. Ponatur ergo

1) Maſſa fluidi $= a$, calor diſtributus per hanc maſſam $= m$, alia maſſa, per quam idem calor m maſſae (a) diſtribui debet, ponatur $= a + b$, erit calor hinc generatus $= \frac{am}{a+b}$. per (§ 1).

2) Per maſſam b praeterea calor $= n$ ponatur diſtributus, diſtribuatur idem calor n pariter per maſſam $a + b$, per quam iam calor m maſſae (a) diſtributus concipitur, erit calor, a calore n per maſſam $a + b$ diſtributo, ortus $= \frac{bn}{a+b}$. (per § 1.)

3) Tali ratione calor maſſae (a) $= m$ et calor maſſae $(b) = n$ aequaliter diſtribuuntur per eandem maſſam $a + b$; et calor in hac maſſa, ſiue in mixto ex (a) et (b), aequalis eſſe debet ſummae calorum $m + n$ diſtributorum per maſſam $a + b$, ſiue $= \frac{ma+nb}{a+b}$. (per n. 1 et 2).

§. 3. Vt formulam generalioris vſus obtinerem, ex qua etiam gradus caloris determinari poſſet, ſi tres, quatuor, quinque etc. maſſae eiusdem fluidi diuerſo gradu calidae miſcerentur, nominaui maſſas eas a, b, c, d, e etc. et calores reſpondentes m, n, o, p, q, etc. et ſimili plane modo concepi quemque calorem per ſummam maſſarum omnium diſtributum, e:g: calorem maſſae (a) $= m$ diſtributum per maſſas $a + b + c + d + e$ etc.

 $=$

$=\frac{am}{a+b+c+d+e}$ etc. (per § 2). Calorem massae b, $= n$, distributum per eandem summam massarum $=$ $\frac{bn}{a+b+c+d+e}$ etc. calorem massae $c = o$, etc: $= \frac{co}{a+b+c+d+e}$ etc. calorem massae d, $= p$, etc: $= \frac{dp}{a+b+c+d+e}$ etc. calorem massae e, $= q$ etc: $= \frac{eq}{a+b+c+d+e}$ etc. et calorem post misceIam omnium massarum calidarum $= \frac{am+bn+co+dp+qe}{a+b+c+d+e}$ etc. i. e. summa massarum fluidi, per quas calor singularum massarum in mixtione aequaliter distribuitur, est ad summam omnium factorum ex massis singulis in singularum massarum calores, vt vnitas ad calorem in mixto.

§. 4. Si nunc thermometrum adhibetur ad calorem mixti mensurandum, primo gradus caloris ebullientis aquae ponitur 212 gr. et secundo calor niuis vel glaciei cum sale ammoniaco mixtae o, tertio excessus càlorum fluidorum examinandorum super o ponuntur proportionales altitudinibus mercurii in thermometro, quae oriuntur instrumento fluidis examinandis immerso, et mensurandi initio facto â o: reuera igitur excessus caloris supra calorem glaciei cum sale ammoniaco mixtae notantur et secundum formulam allatam, si thermometrum Fahren: adhibetur, inuenitur excessus caloris mixti super gr. o Therm. Fahr: non verus calor.

§. 5. Cum mixtum aliquod dicta ratione in vase examinandum est, facile patet,

1) Calorem mixti non solum distribui per propriam massam, sed etiam per vasis parietes et thermometrum ipsum.

2)

2) Thermometri ipſius et vaſis calorem diſtribui per mixtum, per vaſis parietes, in quo fit mixtio, et thermometrum.

3) partem caloris mixti per interuallum temporis, in quo fit experimentum, tranſire in liberum aerem, vbi, quemadmodum in Clariſſ. Krafftii experimentis de calore et frigore ſtabilitur, calor ex fluido eo tardius aufugit, quo magis accedit calor fluidi ad calorem atmoſpherae ambientis. Si temporis tamen interuallum, per quod fit experimentum, minus eſt, decrementum caloris ex hac cauſa praeſertim in maſſis maioribus examinandis inſenſibile eſſe debet; hinc negligi poteſt in calculo.

§. 6. Si circumſtantiae § praeced. *n*. 1. 2, in maſſis examinandis minoribus negligantur, fieri poteſt, vt gradus thermometro inuenti non concordent cum formula allata, quae vnice exprimit calorem mixti ortum ex caloribus omnium ingredientium diſtributis per omnium ingredientium maſſas aequaliter. Cum enim calor etiam thermometro et vaſi communicatur et per illa diſtribuitur, licet non mixtio fiat, maſſa etiam thermometri et vaſis in formula eſt exprimenda et poſito per maſſam vaſis et thermometrum etiam aequaliter diſtribui calores, erit, poſitis vt ſupra maſſa vna $= a$ maſſa altera $= b$ maſſa thermometri $= c$, maſſa vaſis $= d$, calore maſſae a, $= m$, calore maſſae b, $= n$, maſſae c, $= o$, maſſae d, $= p$, ſumma calorum, m, n, o, p, diſtributorum per ſummam maſſarum a, b, c, d, $=$ $\frac{am+bn+co+dp}{a+b+c+d.} =$ gradui caloris, quem thermometrum oſtendere debet, ſi mixto immergitur, verus autem mixti calor,

 qui

qui iacturam non patitur, ſuperare debet calorem thermometro indicatum quantitate $\frac{am+bn}{a+b} - \left(\frac{am+bn+co+dp}{a+b+c+d.}\right)$.

§. 7. Hic mihi videor aſſecutus eſſe primariam rationem, cur mea formula non concordet cum Clariſſ. Krafftii, ipſius enim formula exprimit calorem thermometri ſui et vaſis, in quo maſſas fluidi miſcuit et maſſarum ipſarum, diſtributum per ſummam maſſarum fluidorum mixtorum, thermometri et vaſis, mea vero caloris gradum ortum ex caloribus vtriusque ingredientis mixti, diſtributis per maſſam mixti.

§. 8. Vt comparari poſſint gradus calorum in mixtis thermometro inuenti cum numeris graduum per formulam Clariſſ. Krafftii et meam computatis, tabulam hic apponere liceat, notando ſimul quantum calculus vterque diſcrepet ab experimentis ipſius in diſſertatione de calore et frigore communicatis.

In columna I. ſunt numeri, qui indicant, quota menſura affuſa ſit? vel etiam maſſam mixti.

In columna II. ſunt numeri, qui indicant gradus caloris mixti ſecundum formulam Clariſſ. Krafftii computatos.

In columna III. ſunt numeri, qui indicant, quantum gradus calculi ipſius diſcrepent a gradibus thermometro inuentis.

In columna IV. ſunt gradus thermometro a Clariſſ. Krafftio inuenti.

In columna V. ſunt numeri, qui indicant, quantum gradus, thermometro inuenti à Clariſſ. Krafftio, differant a gradibus calculi mei.

In columna VI. exſtant gradus calculi mei.

In columna VII. ſunt gradus ſec. formulam meam (§ 6) computati, aſſumtis maſſa vaſis vnius menſurae et maſſa thermometri dimidiae menſurae, calore vero vtriusque poſito aequali calori ingredientis minus calidi: menſura vero vna poſita eſt a Clariſſ. Krafftio in ipſius experimentis de calore et frigore vnius et dimidii pollicis cubici.

In 1. Tab. ſumſit Clariſſ. Krafftius quatuor menſuras aquae ad gr. 42. calidae et affudit eis quintam aquae ebullientis, examinatoque per therm: calore, 5 menſuris ſextam.

In tab. 2. ſumſit menſuras 20. ad gr. 38 calidas et affudit eis 2. menſ. aquae ebul. examineque facto 22 menſuris 2. addidit ect.

	C. I.	C. II.	C. III.	C. IV.	C. V.	C. VI.	C. VII.
Tab. I.	5	68. 12	0. 12	68	8. 00	76. 00	68. 15
	6	86. 28	1. 28	85	7. 00	92. 00	87. 20
	7	98. 73	0. 73	98	5. 14	103. 14	99. 88
	8	108. 73	1. 73	107	5. 25	112. 25	110. 00
	9	115. 75	2. 75	113	5. 66	118. 66	115. 62
	10	120. 42	2. 42	118	4. 90	122. 90	121. 48
	11	124. 37	1. 37	123	3. 54	126. 54	125. 46
	12	128. 52	0. 52	128	2. 42	130. 42	129. 59
	13	132. 80	2. 80	130	4. 46	134. 46	133. 80
	14	134. 34	0. 34	134	1. 85	135. 85	135. 61
Tab. II	22	49. 80	2. 20	52	1. 82	53. 82	52. 00
	24	61. 92	0. 08	62	3. 33	65. 33	63. 85
	26	70. 58	1. 42	72	1. 54	73. 54	72. 34
	28	79. 42	0. 58	80	2. 00	82. 00	81. 03
	30	86. 52	-1. 52	85	3. 80	88. 80	88. 00
	32	90. 87	0. 13	91	1. 94	92. 94	92. 25
	34	96. 26	0. 74	97	1. 12	98. 12	97. 54
	36	101. 72	1. 28	103	0. 39	103. 39	102. 90
	38	107. 24	0. 76	108	0. 74	108. 74	108. 32
	40	111. 83	-0. 83	111	2. 20	113. 20	112. 86
	42	114. 55	0. 45	115	0. 81	115. 81	115. 49
	44	118. 25	-1. 25	117	2. 41	119. 41	119. 13
	46	120. 04	-1. 04	119	2. 13	121. 13	120. 88
	48	121. 85	0. 15	122	0. 87	122. 87	122. 64
	50	124. 65	-0. 65	124	1. 60	125. 60	125. 39
	52	126. 49	-1. 49	125	2. 38	127. 38	127. 20
	54	127. 37	-1. 37	126	2. 22	128. 22	128. 05
	56	128. 25	-0. 25	128	1. 07	129. 07	128. 92
	58	130. 13	-1. 63	128½	2. 37	130. 87	130. 26
	60	130. 54	-1. 54	129	2. 27	131. 27	131. 00

§. 9.

§. 9. Si tabulas has attentius consideramus obseruamus

1. gradus calorum thermometro inuentos in prima tabula minores esse semper gradibus per formulam Clariss. Krafftii et meam inuentis, in secunda vero tabula decem experimenta eos ostendere maiores, decem reliqua experimenta minores quam gradus per formulam ipsius repertos, semper vero minores gradibus secunduum formulam meam computatis.

2.) Comparatis gradibus calorum tabulae I. ex formula Clariss. Krafftii computatis cum gradibus Thermometro inuentis differentiae graduum istorum non decrescunt, sed modo crescunt modo decrescunt. Comparatis vero gradibus Tab. I. ex formula mea deductis cum gradibus Thermometri differentiae tantum non semper decrescunt voluminibus mixti crescentibus: experimentum tamen nonum nimis assertioni contrariatur, vt etiam propter hanc disparitatem mihi conjectura subnascatur, nouam se experimento immiscuisse circumstantiam, quae variationis huius causa fuit.

3.) In tabula secunda nec differentiae graduum, ex formula mea nec ex Clariss. Krafftii computatorum a gradibus thermometro inuentis, voluminibus crescentibus decrescunt, sed modo crescunt modo decrescunt.

4.) Gradus in Tab. 1 sec. Clariss. Krafftii formulam computati non tantum differunt a gradibus Thermometro inuentis, quam secundum meam formulam computati, at si Thermometri et vasis simul habetur ratio, parua est differentia, vt collatis Col. VII. et III. IV. videre est.

5.)

5.) Varia in ſecunda Tab. experimenta magis reſpondent meo calculo, quam Clariſſ. Krafftii et ſi thermometri et vaſis ſimul habetur ratio, vt Col: VII. fit, etiam in caeteris experimentis calculus meus ad gradus experimentorum propius accedit, ac ſine hac conſideratione.

§. 10. Vt rationes horum phaenomenorum ob oculos ponamus, inquiramus, an in experimentis I. et II. dae tab. capiendis diſparitas quaedam occurrat, cui hae diſcrepantiae attribui poſſint? Quantum ego quidem perſpicere valeo, nullam aliam, vt iam ſupra ingenere monui, offendo diſparitatem, quam quod in experimentis Tab. I. minores fluidi maſſae adhibitae fuerint, in experimentis ſecundae tabulae maiores, vt ex comparatione numerorum Col. 1. ex I. et IIda Tab. patet. Maſſa mixti in experimento I. primae tab. eſt quinque menſurarum vel $7\frac{1}{2}$ digt. cub. Deinde in ſubſequentibus experimentis creſcit maſſa ſemper vna menſura, vt tandem in vltimo experimento fiat 14 menſurarum. Cum nunc thermometri et vaſis maſſa facile ſit $2\frac{1}{4}$ digit. cub. vel vnius et dimidiae menſurae, vt ſuppoſuimus (§. 8), in experimento primo calor mixti nonſolum diſtribuitur per quinque menſuras ſed etiam per vnam menſuram et eius dimidiam ſcil. vaſis et thermometri maſſam. Maſſa mixti in experimento I. ſecundae Tab. eſt viginti duarum menſurarum vel 33. digit. cub. in ſubſequentibus experimentis creſcit ſemper duabus menſuris, vt tandem in vltimo experimento fiat 60 menſurarum vel 90 digit. cub. In tantis maſſis calor non potuit tam ſenſibiliter in paruo temporis interuallo, quo experimentum fiebat, decrecreſcere, parte exigua caloris per thermometrum et tenues vaſis parietes diſtributa, quam in minoribus maſſis Tab. 1. In experimento I. ſecundae Tab. calor mixti in vaſe, thermometro immerſo, per $35\frac{1}{4}$ dig. cub. diſtributus fuerit neceſſe eſt, cum calor per mixti ſolius maſſam per 33 digitos cub: diſtribui debeat. Haec volumina differunt multo minori parte voluminis mixti ac reſpondentia volumina tabulae Imae, praeſertim primis experimentis, et idem notandum de ſubſequentibus experimentis. Hinc calor in experimentis Tab. I. plus a formula mea aberrare debuit, quam in experimentis Tabulae 2dae, in quibus minor caloris iactura; vt collata col. VI. Tab. I. cum col. VI, Tab. II. videre eſt.

Pone nunc Clariſſ. Krafftium in iis experimentis, quibus ad ſtabiliendam formulam vſus eſt, adhibuiſſe minores fluidi maſſas, quarum calor diſtributione per Thermometrum et vas decrementum pati debuit, certe thermometrum in iis experimentis minores gradus oſtendere debuit, quam oſtendiſſet, maſſis maioribus electis, quarum calor diſtributione tali decrementum tantum pati haud potuiſſet. Si nunc gradibus iſtis minoribus, qui vero mixti calori menſurando inſeruire haud poterant, ad formulam ſuam condendam Clariſſ. vir vſus eſt, ſemper per eam formulam minores inueniuntur gradus calorum quam par eſt, et nunquam, niſi maſſae fluidi parum differentes ab iis, quas adhibuit ad formulam ſuam ſtabiliendam, eligantur, thermometrum oſtendet gradus calorum ſec. formulam, ſed maiores, ſi maſſae maiores examinantur; cum tamen per naturam rei nunquam gradus thermometro inuenti gradus per veram formulam determinatos ſuperare debent, ob decrementum caloris durante experimento. (Collato §. 6.)

§. 11. Ex hisce liquet (1 cur in multis experimentis Tab. II. adductis Thermometrum gradus oſtenderit maiores quam formula Clariſſ. Krafftii requirebat

2) cur in experimentis Tab. I. adductis Thermometron ſemper oſtenderit minores gradus, quam formula Cl. Krafftii requirebat, quia ſcilicet minores maſſas elegit non multum differentes ab iis, quibus vſus eſt ad experimenta, quae ad formulam ſuam condendam adhibuit.

3) Cur ſemper thermometron oſtenderit gradus minores in vtraque tabula, quam ſecundum formulam meam oſtendere debuiſſet, quia ſcil. formula mea exprimit verum vtriusque ingredientis calorem diſtributum per maſſam mixti, thermometrum vero calorem mixti cauſis recenſitis imminutum prodit. Hinc calculus col. VII. vbi ratio ſimul habita eſt thermometri et vaſis, parum differt ab experimentis.

4) Cur comparatis gradibus Tab. I. ex formula mea deductis cum gradibus Thermometri differentiae iſtorum graduum voluminibus creſcentibus tantum non ſemper decreſcant, quia ſcil. maſſis creſcentibus minor caloris iactura fieri debet. In gradibus ex Clariſſ. Krafftii formula deductis id non apparet, ſi comparantur cum gradibus Thermometri, indicio, quod iſta formula non exprimat verum mixti calorem, ſed calorem mixti poſt iacturam quandam factam: patet

5) cur in tabula 2da hoc non obſeruetur, quia ob maiores maſſas decrementa ex cauſis, quae in experimen-

mentis Tab. I. occurrunt, fiunt minoris momenti, quam caeteri errores, quibus cautiſſimus quisque obnoxius eſſe ſolet, et qui modo huic modo iſti experimento ſe immiſcent: patet etiam

6) cur in tabula 2da multa experimenta aeque meo calculo reſpondent, quam Clariſſ. Krafftii et quaedam magis meo quam ipſius, quia ob maiores maſſas iactura caloris in his experimentis interuallo temporis paruo, quo experimentum quodque durat, parua eſſe debet.

§. 12. Conſideratis his omnibus, cautiones nobis colligere poſſumus, quibus opus eſt, ſi eiusmodi experimenta rite inſtituere volumus.

1) rationem maſſae vaſis et thermometri habere debemus, calorisque, qui per vtramque maſſam diſtributus eſt.

2) maſſae examinandae, quae ſi minor eſt, diſtributione caloris per corpora, quae contingit e. g. vas in quo fit experimentum et thermometrum, inſignem caloris iacturam patitur.

3) temperiei aeris, in quo fit experimentum, quae, ſi frigidior, quam maſſae examinandae, pars caloris ex hac in aerem tranſit, quamdiu mercurii, in thermometro maſſae examinandae immerſo, contenti altitudo in calore maſſae examinandae praeualente creſcit, praeſertim cum maſſa mixti eſt minor, eaquepropter ſuperficies eius reſpectiue maior, hinc calori perdendo aptior.

4) Per Clariſſ. Krafftii experimenta in diſſ. de calore et frigore etiam ſtabilitur, calorem ex fluido eo tardius aufugere, quo magis accedit calor fluidi ad calorem

atmoſphaerae ambientis, hinc non inutile eſſe videtur nonſolum temperiem aeris, in quo fit experimentum, cognoſcere, ſed etiam interuallum temporis, per quod experimentum durat, vt hinc indicare liceat, quantum caloris aufugerit. Si ratio huius momenti habeatur, coniectura probabili aſſequi poterimus rationem, cur in experimentis non decreuerint differentiae graduum thermometro inuentorum a gradibus calculi conſtanter voluminibus creſcentibus, vni enim experimento fortaſſis plus temporis inſumtum eſt quam alteri et in vltimis experimentis temperies mixti a temperie aeris plus receſſit, eaquepropter eodem temporis interuallo plus caloris aufugit ex hac cauſa, vt tali ratione in vltimis experimentis per hanc cauſam iactura caloris ſit maior, iactura ex diſtributione caloris per thermometrum et vas vero minor; quamobrem decrementum caloris in primis experimentis decremento caloris in vltimis aliquo modo aequale redditur.

5) Valde probabile mihi videtur differentiam oriri debere inſignem in experimentis huiusmodi, ſi frigidius fluidum calidiori affunditur, cum frigidius fluidum vt denſius ima petere debeat et calidius in frigidiori aſcendere, conſequenter miſcela celerius fieri, quam ſi calidius frigidiori affunditur, quo caſu ſimul plus caloris aufugere videtur ex ſuperficie aquae calidae ſuper aquam frigidam ſtagnantis. Haec adhuc poteſt addi ratio cur gradus thermometro ſint inuenti minores quam formula mea poſtulat. Hic etiam notandum, thermometrum ante peractam mixtionem et diſtributionem caloris, gradum oſten-

ſtendere poſſe vel minorem vel maiorem, prout in fluido ſuſtentatur.

6(Figura etiam vaſis, in quo fit miſcela variationis cauſa eſſe poteſt, ſi orificium eſt anguſtius, calor minus cito caeteris paribus aufugere debet. Si ſuperficies eſt maior reſp. maſſae fluidae examinandae, citius diſſipari debet calor caeteris paribus. Si vas in quo miſcela fit eſt ſphaericum et orificium vaſis quantum poſſibile anguſtum tardiſſime calor aufugere debet caeteris paribus: Figurae ergo vaſis etiam ratio venit habenda.

7) Denſitas tandem parietum vaſis variationem efficere poteſt, dum, quo denſiora ſunt corpora eo citius caeteris paribus conferant ad refrigeranda alia corpora.

8) Cum tandem thermometri ipſius capacitas calore augetur, dum vitrum expanditur, mercurius propter hocce capacitatis incrementum deſcendere debet et ſi hoc non fieret, altius eleuaretur. In gradu caloris ſuptuageſimo ſecundo ſec. Muſſchenbroekii Eſſai. de Phyſ. (p. 469) fluidum thermometri lineam vnam propter dilatationem vitri depreſſum fuit.. Huius tamen rei ideo habenda non videtur ratio, quia dilatatio vitri in eadem ratione ferme fit in qua fit expanſio Mercurii in thermometro. Si tamen de vno et altero gradu ſermo eſt, non iniuria quaeritur, an dilatatio haec ſit plane contemnenda? cum nondum accurato examine conſtet, exactiſſime in ratione dilatationis vitri expanſionem Mercurii fieri.

§. 13. En quam multae cautelae adhibendae ſunt in experimentis hiſce rite capiendis. Exemplum hic ſe nobis offert inſigne, abſtractiones mathematicas in re-

 bus

bus physicis omni cura et quantum possibile esse fugiendas, circumstantiasque omnes in singularibus casibus attendendas. Neque mirum est cur calculi saepissime egregii nimia circumstantiarum variarum accumulatione tantum non prorsus inutiles fiant. Ne tamen in nostris experimentis tot cautelis opus habeamus,

Massa examinanda maior est eligenda, quo casu in interuallo temporis, quo experimentum finiri potest, caloris decrementum erit insensibile et cautelae praeced. §. *n.* 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. euanescent.

§. 14. Generatim hic notari potest in experimentis physicis, in formulis, mensuris vel ponderibus vel potentiis incognitis detegendis inseruientibus, tantum non semper pro cognitis eligendas esse maiores corporum mensuras, pondera vel potentias, quo casu si in excessu vel defectu peccauerimus paululum in exprimendis cognitis per experientiam quantitatibus, quod facile fieri potest, defectus ille vel excessus multiplicatus sec. formulam non parit in determinatione incognitorum tantam à vero discrepantiam, quam si minores quantitates elegeris et eundem errorem in excessu vel defectu commiseris.

Eiusmodi ergo leges seruabo, si nouis experimentis in temperiem mixtorum inquisiuero, quod nunc, quia instrumentis commodis careo, differre cogor, breui tamen exequi animus est ad cogitationes meas de calore et frigore mixtorum perficiendas et ad formulam meam de calore mixtorum à posteriori confirmandam.

§. 15. Coronidis loco apponere liceat duo sequentia problemata ex mea formula facile posse resolui.

I.

I. Data maſſa fluidi $= a$, datae temperiei $= m$, et data temperie n homogenei fluidi inuenire maſſam x, quae mixta cum maſſa data $= a$ producit calorem datum $= c$. Eſt enim, formula ſuperiori poſita $\frac{am + nx}{a + x} = c$, $x = \frac{(c - m)a}{n - c}$.

II. Datis maſſis fluidi a, et b, et data temperie maſſae a, $= m$ inuenire temperiem x alterius b, quae mixta cum maſſa a producit temperiem datam $= c$. Eſt, poſita formula $\frac{am + bx}{a + b} = c$, $x = \frac{(a + b)c - am}{b}$.

* Licet ex §. 4 id patere poſſit, hic nihilominus monendum iudicaui, me per calorem et temperiem fluidi non intelligere verum calorem ſed exceſſum gr. therm. Fahren. ſuper o. Verorum enim calorum rationes nondum poſſunt aſſignari: ſi m eſt gradus thermometri maſſae a, verus calor eſt m addito incognito x, ſi n eſt gradus therm. maſſae b, verus calor eſt $n + x$, hinc mixti calor verus ſec. formulam datam $\frac{(m + x)a + (n + x)b}{a + b}$ $= x + \frac{ma + nb}{a + b}$.

FORMV-

FORMVLAE PRO GRADV EXCESSVS CALORIS SVPRA GRADVM CALORIS MIXTI EX NIVE ET SALE AMONIACO POST MISCELAM DVARVM MASSARVM AQVEARVM DIVERSO GRADV CALIDARVM CONFIRMATIO PER EXPERIMENTA.

AVCTORE
G. W. Richmann.

§. 1.

Dedi formulam pro gradu exceſſus caloris ſupra gradum caloris mixti ex niue et ſale Ammoniaco poſt miſcelam duarum maſſarum aquearum diuerſo gradu calidarum an. 1744 d. 19. Oct. Vſus ſum experimentis Clariſſ. Krafftii ad formulam meam firmandam, nunc, quae ipſe experimenta hunc in finem inſtituerim cum ſocietate communicabo.

Experim. I.

§. 2. In vaſe fictili, in quo aqua ponderis 12 vnciarum ſtagnabat ad altitudinem 4 pollicum Londinenſum, et cuius orificii circularis aëri expoſiti diameter erat 3 pollicum ferme, calor à gradu (calore aëris ambientis exiſtente 66 graduum;) 128 ad gr. 67 quatuor horis decreuit, et quidem

in 5 minutis primis a gr. 128 ad gr. 122.
10 - - - - - - - 116.
15 - - - - - - - 110.
20 - - - - - - - 108.
25 - - - - - - - 104.

in

in 30 minutis primis à gr. 128 ad gr. 101.					
35	- - - - - - - - - - -	98.			
40	- - - - - - - - - - -	96.			
45	- - - - - - - - - - -	94.			
50	- - - - - - - - - - -	92.			
55	- - - - - - - - - - -	90.			
60	- - - - - - - - - - -	88.			
65	- - - - - - - - - - -	86.			
70	- - - - - - - - - - -	$84\frac{1}{3}$.			
90	- - - - - - - - - - -	83.			
110	- - - - - - - - - - -	82.			
135	- - - - - - - - - - -	80.			
165	- - - - - - - - - - -	79.			
200	- - - - - - - - - - -	78. etc.			

Experim. II.

In eodem vaſe fictili aqua in eadem altitudine ſtagnans, ad gr. 116 calida, caloris decrementum patiebatur in aëre gr. 67 calido et quidem.

à gr. 116 ad gr.	112.	minutis tribus primis
- - - - - -	108 - - - -	7
- - - - - -	104 - - -	12
- - - - - -	100 - - -	$18\frac{1}{2}$
- - - - - -	96 - - -	$26\frac{1}{4}$
- - - - - -	92 - - -	35.
- - - - - -	88 - - -	45.
- - - - - -	84 - - -	56.
- - - - - -	80 - - -	72.
- - - - - -	76 - - -	90.

Hora vna ergo et 30 minutis primis â gr. 116. ad gr. 76 peruenit aquae temperies, et quia discrepantia caloris aëris externi in primo experimento à calore aëris secundo experimento est parua, eodem tempore ferme ad gradum caloris eundem calor massae aqueae decreuit. Aquaque in vtroque experimento quatuor horis circiter calorem 67 gr. obtinuit.

Ex vtroque experimento cernimus, eo celerius calorem aufugere quo maior est differentia inter calorem aquae et aëris ambientis, vel calorem primis temporibus celeriter decrescere, posterioribus tardius: in qua ratione vero decrementa sint aequalibus temporibus et in qua ratione tempora sint, si decrementa sint aequalia, an in constanti, an variabili, non videtur determinari posse ex experimentis.

Experim. III.

In aëre ad gr. 66 calido, aquae ad gr. 64 calidae, ponderis 24 vnciarum, affudi massam aquae ponderis 12 vnciarum ad gr. 178 calidam et post miscelam obseruatus est gradus caloris 100.

Experim. IV.

Massa frigidiori ad gr. 88 calida aequali existente massae calidiori, ad gr. 172 calidae, gradus caloris post miscelam obseruatus est 126, calore aëris ambientis existente 66. gr.

Experim. V.

Massa frigidiori ad gr. 77. calida, mixta cum duabus calidioribus massis, massae frigidiori aequalibus, ad gr. 156. calidis, eodem existente aeris ambientis calore ac exp. praec. gradus caloris post miscelam obseruatus 126.

Ex-

Experim. VI.

Maſſis duabus frigidioribus ad. gr. 70 calidis, aequalibus maſſae ad gr. 148 calidae, et mixtis cum eadem, gradus caloris poſt miſcelam obſeruatus eſt 94, eodem adhuc exiſtente gradu caloris aëris ambientis.

§. 3. Si haec experimenta conſideramus et conferimus, maſſamque frigidiorem ponimus $= a$, maſſam calidiorem $= b$. Calorem maſſae $a = m$, calorem maſſge $b = n$, eſt gradus caloris poſt miſcelam

(1) $\frac{am + bn}{a + b}$ ſecundum formulam meam

(2) Clariſſ. Krafftius dedit formulam $\frac{11 . am + 8bn}{11a + 8b}$.

(3) Celeberr. Boërhaue, aequalibus maſſis exiſtentibus, formulam ſuppeditauit $\frac{n-m}{2}$, conſ. Pars I. Chymiae, exper. XX de igne, coroll. 11.

§. 5. Eſt itaque gradus caloris poſt miſcelam

	ſecundum Exp.	ſec. form. I.	ſec. form. II.	ſec. form. III.
Ex. III.	100.	102.	$94\frac{2}{5}$.	- - - - - -
Ex. IV.	126.	130.	$123\frac{7}{19}$	42.
Ex. V.	126.	$129\frac{2}{3}$.	$123\frac{22}{27}$	- - - - - -
Ex. VI.	94.	96.	$90\frac{4}{25}$.	- - - - - -

§. 5. Ex experimento IV. collato cum formula Cell. Boerhauii elucet formulam illam veritati repugnare, cum affuſione calidioris ſec: illam frigidior reddi debeat aqua, quod impoſſibile eſt.

§. 6. Cum formula ſecunda ſemper det gradum minorem caloris, quam experimenta, formula illa licet verae ſit propinqua, nihilominus non poteſt haberi pro formula vera. Inter experimentum enim ſemper aliquid caloris aufugere debet et diſtribui in parietes vaſis. Alteterum indicium imperfectlonis eius eſt et quidem euidentiſſimum, quod

(1) In experimento quarto creſcat calor plus quam experimento quinto, cum vtroque experimento calor non creſcre ſed aequaliter minui deberet ſec: (Exp. I. II.); quod

(2) In experimento V. calor augeatur minus quam in experimentis VI. et III. cum ſec. Exp. I. II. calor experimento V non augeri poſſit ſed plus minui debeat, quam calor in experimentis VI. et III, ſi experimenta inſtituuntur aequalibus temporibus; quod

(3) In experimento VI. III. calores non ſolum creſcant, ſed etiam calor in experimento VI minus creſcat, quam experimento III, cum ſec: Exp. I. et II. aequaliter minui deberent calores, et ſi quaedam eſt differentia, calor experimento tertio paulo plus minui debeat, quam calor experim. VI.

§. 7. Cum formula prima ſemper det gradum caloris maiorem quam experimenta, vnum adeſt indicium praeſtantiae eius. Cum ſecundum experim: I. et II. plus caloris aufugere debuerit aequali tempore, in experimento IV et V quam experimento VI. et III. in experimentis VI. et III. vero aequales caloris gradus et haec omnia formulae primae reſpondeant, habemus ſecundum indicium euidentiſſimum perfectionis formulae primae. Experimento IV et V enim aufugerunt gradus quatuor circiter experimento VI. et III. duo. Contrarium obtinet vt iam

monitum,

monitum, ſi attendimus ad formulam II, vbi experim. IV. creſcit calor $2\frac{12}{19}$ gr. experim: V. $2\frac{5}{27}$ gr. exp. VI. $3\frac{21}{27}$ gr., in exp. III. $5\frac{3}{5}$ gr. Quod nullo modo fieri poteſt, cum calor aëris ambientis ſit minor, quam mixti. Hiſce credidi formulam datam $\frac{am+bn}{a+b}$ confirmari ſatis poſſe. Monere tantum liceat, me in experimentis recenſitis vſum fuiſſe duobus thermometris Mercurialibus, Fahrenheitianis, optime conſtructis ab artifice Amſtelodamenſi Prins, et reſpondentibus: pars thermometri capacior, quae aquae immergebatur erat conica, coni craſſities maxima erat quatuor ferme linearum Londinenſium et altitudo duodecim linearum, et non occupabat maius ſpatium, quam illud, quod aqua ponderis 30 granorum circiter occupare poteſt.

INQVISITIO IN LEGEM, SECVNDVM QVAM CALOR FLVIDI IN VASE CONTENTI, CERTO TEMPORIS INTERVALLO, IN TEMPERIE AERIS CONSTANTER EADEM DECRESCIT VEL CRESCIT, ET DETECTIO EIVS, SIMVLQVE THERMOMETRORVM PERFECTE CONCORDANTIVM CONSTRVENDI RATIO HINC DEDVCTA.

Auct. G. W. Richmann.

§. 1.

In confirmatione meae formulae pro gradu exceſſus caloris ſupra calorem mixti ex niue et ſale Ammaniaco poſt miscelam duarum maſſarum aquearum diuerſo gradu calidarum, in nota ad exp. II. dubitaui, an determinari poſſit, in qua ratione decrementa ſint in aequalibus temporibus etc. Poſtquam vero attentius rem conſideraui experimentaque omni ſolertia repetii et comparaui, ſimilitudinem quandam in iis contemplatus incidi in legem, ſecundum quam decrementa fiunt. Cum haec plane noua ſint et ſcientiae naturali ſine dubio incrementum afferant, officii mei erit, ea, qualiacunque ſint, cum ſocietate communicare.

§. 2. Primo quidem, vt res clariſſime pateat, experimenta exhibebo, compendii tamen cauſa, et vt facilius calculus cum obſeruationibus conferri poſſit, ſtatim adponam gradus caloris fluidi, diuerſis temporibus, ſecundum legem inuentam erutos. Deinde ex obſeruationibus conſectaria deriuabo, quae mihi ad legem detegendam inſeruierunt.

§. 3. Ante omnia cum thermometris ipſis, quibus vsus ſum, periculum facere conſtitui, vt conſtaret quantum iis fidendum eſſet in obſeruationibus ſequentibus,

Experim. I.

Thermometrum primum erat mercuriale Fahrenheitianum ab artificie Amſtelodamenſi Prins rite conſtructum, cuius bulbus coniformis quartam partem circiter digiti cubici occupabat. Illud temperiem 64. gr. conſecutum in temperie aeris 40. gr.

poſt. 30. min. pr.	oſtendebat	gr. 42.		Calc.
poſt. 60. min. pr.	- - - -	gr. 40.	-	$40 + \frac{1}{8}$.

Exeperim. II.

Idem Thermometrum a gradu caloris quadrageſimo in temperie aeris 64. gr. oſtendebat

poſt 10. min. pr.	gr.	50		Calc.
poſt 20.	- - -	55	- -	$55\frac{5}{6}$.
poſt 30.	- - -	58	- -	$59\frac{1}{4}$.
poſt 40.	- - -	60	- -	$61\frac{5}{6}$.
poſt 60.	- - -	64	- -	$63\frac{17}{311}$.

§. 4. Collato experim. I. et II. videre licet 1) decreſcere thermometri calorem a gr. 64 ad gr. 40 aeris ambientis eodem ferme tempore, quo calor thermometri a gr. 40 ad gr. 64. creſcit in temperie aeris 64. gr. i. e. *exceſſus caloris aeris ſuper calorem, quem thermometrum oſtendit, communicatur cum thermometro per idem tempus, quo perit in aere, qui temperiem habet, temperiei, quam thermometrum ab initio habebat, aequalem.*

2) Si

2) Si in thermometro mercurius in quinque minutis primis per gradum vnum mouetur â gr. 58 ad gr. 59, differentiam inter temperiem mercurii et aeris initio esse 6 gr. si vero in quinque minutis per gradus duos et dimidium â gr. 50 ad gr. $52\frac{1}{2}$ mouetur, eam esse 14 graduum, et si quinque minutis per $1\frac{1}{2}$ gr. mouetur mercurius dictam differentiam esse 9 graduum.

3) errorem committi saepius, si status aeris praesens resp. caloris ex gradu, quem thermometrum ostendit, indicatur.

Experim. III.

§. 5. Alterum thermometrum, quo vsus sum, erat pariter Fahrenheitianum ab eodem artifice simili industria constructum et cum priori ferme concordans. Bulbus eius coniformis tamen minor erat bulbo prioris. In hoc thermometro mercurius in temperie aeris 67. gr. a gr. 25 in 3 min: ascendebat ad gr. 39. Calc.

- 6		49.
- 8	54	
- 9		54. 55.
- 12		58. 71.
- 13	60	
- 15		61. 47.
- 18	64 -	63. 31
- 23	$65\frac{1}{2}$.	
- 24		65. 37.
- 33	67	67. 515.

§. 6. Si ergo mercurius in tribus minutis primis per 14. gradus mouetur, differentia inter temperiem eius et temperiem aeris initio est 42 gr. si in quinque min: prim.

prim: per quindecim gradus mouetur, differentia dicta est initio 28. gr. si per 6 gradus, illa est 13 gr. si eodem tempore per 4. gr. illa est 7. graduum, si per $1\frac{1}{2}$, trium graduum.

Potest etiam temperies aeris semper differre a temperie mercurii. Pone temperiem mercurii 25 gr. et aerem etiam temperiei 25 graduum; pone mutari temperiem aeris et fieri 67. gr. mercurius incipiet ascendere et minuto primo temporis nondum absoluet quinque gradus. Pone mutari iterum aeris temperiem, vt fiat 0—12 gr. descendet iterum mercurius aequali celeritate (§4); pone rursus temperiem aeris tertio minuto primo mutari et fieri 67. gr. rursus mouebitur contraria directione et sic porro. Tali ratione differentia minima 37. gr. differentia maxima 42. gr. esse potest. Difficulter tamen crediderim tantum saltum in natura fieri, minorem tamen differentiam per aliquod interuallum temporis saepius conseruari, phaenomena quaedam obseruata persuadent, vt credam.

Experim. IV.

§. 7. In temperie aeris, quae a gradu 62 ad gr. 66. crescebat durante experimento, $\frac{7}{16}$. partes librae aquae, in poculo vitreo conico, temperiei 38 graduum, obseruaui acquirere

	obseru.	calc.
post 8 min. prim. - - - gr.	40	
16 - - - - - - - -		$41\frac{5}{8}$.
20 - - - - - -	43	
24 - - - - - - - -		$43\frac{57}{72}$.
25 - - - - - -	44	
30 - - - - - -	45	
32 - - - - - - - -		$45\frac{45}{864}$.

	obſeru.	calc.
35 min. prim.	46	
40		$46 \frac{1}{2}$.
45	48	
48		$47 \frac{3}{4}$.
55	50	
56		49
64		50. 40
66	52	
72		51.14
80	54	52
104		$54 \frac{1}{4}$
106	57	
112		54. 9
136		56. 5
140	60	
160		$57. \frac{12}{36}$
180	62	

Experim. V.

Aqua temperiei 64. gr, in aere temperiei 40. et 39 gr. eiusdem quantitatis in vaſculo eodem conſequebatur

	obſ.	calc.
in 30 min. prim.	gr. 54	
60	50	$48. \frac{1}{6}$
90	46	44. 760
120	44	42. 778
150	43	41. 620.
180	42	41
240	40	40. 900.

§. 9.

§. 9. Si ad experimentum quartum et quintum reflectimus, iudicatu facillimum eſt, aquam tardius adhuc gradum 62 et 40 aſſecutam fuiſſe, ſi temperies aëris conſtans manſiſſet ſcil. 62 et 40 graduum. Cum vero creſcebat ibi a gr 62 ad gr 66. et hic a gtadu 39 ad 40 et iterum decreſcebat ad gr. 39, ibi aqua citius gradum 62 obtinuit, et hic citius gr. 40. Neque hic tacebo, vaſa cum aqua aëri expoſita contigiſſe ex parte aiia corpora praeter aërem, de quorum temperie non potui eſſe certus. Si ad experim. I. II. et III. reſpicimus facile maiores mutationes aëris, thermometro vix indicandae, diſcrepantiam efficere potuerunt. Hoc in ſequentibus etiam notandum.

Experim. VI.

§. Aquam eadem quantitate, Temperiei 141. gr. in eodem vaſe in aëre temperiei 63 gr. ad 65 obſeruaui acquirere

			obſeru.		calc.
poſt	5	min. prim.	gr. 132		
	10	- - - - - -	123	- -	124
	15	- - - - - -	116	- -	113. 70
	20	- - - - - -	111	- -	110 80
	25	- - - - - -	104	- -	105. 30
	30	- - - - - -	101	- -	100. 50
	35	- - - - - -	98	- -	96. 25
	40	- - - - - -	92	- -	92. 40
	55	- - - - - -	86	- -	83. 60

Etiam hic vaſculum cum aqua aëri expoſitum contingebat ex parte alia corpora, temperiesque aëris non permanebat conſtans. Vt remedium aliquod afferrem ſequenti modo inſtitui experimenta ſequentia.

Experim. VII.

§. 11. Phialam vitream cum ventre ſphaerico et collo anguſto ſuspendi ex filo tenui, vt tantum ab aëre temperiei 68 graduum contingeretur, aquamque ebullientem infudi. Aqua cum phiala, hinc tota maſſa frigori expoſita erat $\frac{56}{32}$ librae. Thermometro immiſſo obſeruaui decreſcere calorem a gr. 177 $\frac{1}{5}$

				obſeru.		calc.
1)	per	5	min prim. ad gr.	171		
2)	-	10	- - - - -	164$\frac{1}{2}$	-	165. 15
3)	-	15	- - - - -	158$\frac{1}{2}$	-	159. 63
4)	-	20	- - - - -	153+	-	154. 43
5)	-	25	- - - - -	148	-	149. 52
6)	-	30	- - - - -	143+	-	144. 89
7)	-	35	- - - - -	139	-	140. 53
8)	-	40	- - - - -	135	-	136. 41
9)	-	45	- - - - -	131	-	132. 52
10)	-	50	- - - - -	127$\frac{1}{2}$	-	128. 86
11)	-	55	- - - - -	124	-	125. 40
12)	-	60	- - - - -	120$\frac{1}{2}$	-	122. 14
13)	-	65	- - - - -	118	-	119. +
14)	-	70	- - - - -	115$\frac{1}{2}$	-	116. 16
15)	-	75	- - - - -	113	-	113. 43
16)	-	80	- - - - -	111	-	110. 82
17)	-	85	- - - - -	108$\frac{1}{2}$	-	108. 41
18)	-	90	- - - - -	106+	-	106. 13
19)	-	95	- - - - -	104	-	103. 96

		obseru.	calc.
20)	- 100 - - - - -	102 -	102
21)	- 105 - - - - -	100 ½ -	99
22)	- 110 - - - - -	99 -	98. 18
23)	- 115 - - - - -	97 ½ -	96. 46
24)	- 120 - - - - -	96 + -	94. 85
25)	- 125 - - - - -	95 -	93. 32
26)	- 130 - - - - -	94 -	91. 89
27)	- 135 - - - - -	92 ¾ -	90. 53
28)	- 140 - - - - -	91 ¼ -	89. 25
29)	- 145 - - - - -	90 -	88.
30)	- 150 - - - - -	89 -	86. 90
40)	- 200 - - - - -	81 ½ -	78. 53
50)	- 250 - - - - -	76 -	73. 87
60)	- 300 - - - - -	74 ¼ -	71. 27
70)	- 350 - - - - -	71 ¾ -	69. 82
80)	- 400 - - - - -	70 ½ -	69. 17
90)	- 450 - - - - -	70 -	68. 56
100)	- 500 - - - - -	69 -	68. 32

Experim. VIII.

§. 12. Phialam multo minorem priori similem elegi et aquam ei infudi calidam. Phialae cum aqua pondus erat $\frac{18}{32}$ librae. Obseruaui deinde in temperie aëris eadem ferme scil. 68. graduum calorem decrescere a gradu 158 ½

		obseru.	calc.
1)	5 min. prim. ad gr.	150 ½ -	
2)	10 - - - - - -	142 ½ -	143. 16
3)	15 - - - - - -	136 -	136. 50
4)	20 - - - - - -	129 ½ -	130. 50

 5)

			obſeru.		calc.
5)	25	min. pr. - - -	124	-	124.9
6)	30	- - - - -	118	-	119.9
7)	35	- - - - -	114	-	113.3
8)	40	- - - - -	109 $\frac{3}{4}$	-	111.1
9)	45	- - - - -	106 +	-	107.3
10)	50	- - - - -	102 $\frac{1}{2}$	-	103.8
11)	55	- - - - -	100	-	100.6
12)	60	- - - - -	97	-	97.8
13)	65	- - - - -	94 $\frac{1}{2}$	-	95.1
14)	70	- - - - -	92 +	-	92.7
15)	75	- - - - -	90 +	-	90.6
16)	80	- - - - -	88 $\frac{1}{2}$	-	88.6
17)	85	- - - - -	87	-	86.7
18)	90	- - - - -	86	-	85.5
19)	95	- - - - -	84 $\frac{1}{2}$	-	83.5
20)	100	- - - - -	83	-	82.22
21)	110	- - - - -	80 $\frac{1}{2}$	-	79.8
24)	120	- - - - -	78 $\frac{1}{2}$	-	77.8
26)	130	- - - - -	76 $\frac{1}{2}$	-	76.15
28)	140	- - - - -	75	-	74.8
30)	150	- - - - -	74 $\frac{1}{2}$	-	73.6
32)	160	- - - - -	73 $\frac{3}{4}$	-	72.68
36)	180	- - - - -	72	-	71.23
40)	200	- - - - -	71	-	70.23
44)	220	- - - - -	70	-	69.54

§. 13. Si ad experim. VII. et VIII attendimus, dum phiala cum aqua contingeretur ab aëre ſolum, non a corporibus aliis diuerſae temperiei; non potuit hic a lege

lege tantum aberrari. Attamen effici non poterat, vt temperies aëris perfectiſſime conſtans maneret. Etiam horologium, quo vſus ſum, dum experimenta per multas horas continuarem, tardius mouebatur vltimis temporibus, quam ab initio.

§. 14. Vt confirmarem ea, quae ex parte in annotationibus ad experimenta allata ſunt, conſtitui ſimul cum thermometro in experim. III. deſcripto, mutationes aëris quolibet tempore annotare, credens hac ratione facile iudicium ferri poſſe, inprimis, ſi ad Exp. I. II. III. attendatur, cur calor magis creſcat vel decreſcat ac ſecundum calculum creſcere et decreſcere deberet. Hunc in finem etiam differentias inter obſeruationes et calculum addidi in vltima columna, et ſi calculus obſeruationem ſuperauit, id ſigno +, contrariumſigno — indicaui.

Experim. IX.

§. 15 Phialae, qua vſus ſum experim. VII aquam ebullientem eiusdem quantitatis infudi et in temperie aëris 20 graduum obſeruaui decreſcere calorem a gr. 182.

		obſ.	cal. aër.	calc.	differ.
1)	in 5 min. prim. ad gr.	173	$19\frac{1}{4}$		
2)	- 10 - - - -	$164\frac{1}{4}$	$19\frac{1}{4}$	164. 5	+ 0. 25
3)	- 15 - - - -	$155\frac{1}{2}$	$19\frac{1}{4}$	156. 4	+ 0. 90
4)	- 20 - - - -	148	$19\frac{1}{4}$	148. 9	+ 0. 90
5)	- 25 - - - -	141	$19\frac{1}{4}$	141. 7	+ 0. 70
6)	- 30 - - - -	134	$19\frac{1}{4}$	134. 9	+ 0. 90
7)	- 35 - - - -	$127\frac{1}{4}$	$19\frac{3}{4}$	128. 5	+ 1. 25
8)	- 40 - - - -	$121\frac{1}{2}$	20	122. 5	+ 1. 00
9)	- 45 - - - -	116	20	116. 9	+ 0. 90

10).

			obſeru.	cal.aër.	calc.	diff.
10)	50	min. pr.	$110\frac{1}{2}$	20	111.	+0. 50
11)	55		$105\frac{1}{2}$	20	106.4	+0. 90
12)	60		$101\frac{1}{4}$	20+	101. 58	+0. 33
13)	65		$96\frac{1}{4}$	20+	97.5	+1. 25
14)	70		93	$20\frac{1}{2}$	92.8	−0. 20
15)	75		$89\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{2}$	88.73	−0. 77
16)	80		86	21	84.91	−1. 09
17)	85		83	21	81.30	−1. 70
18)	90		$79\frac{3}{4}$	21	77.90	−1. 85
19)	95		76	21	74.67	−1. 33
20)	100		$73\frac{1}{2}$	21	71.64	−1. 86
21)	105		$71\frac{1}{4}$	21	68.77	−2. 48
22)	110		$68\frac{3}{4}$	$21\frac{1}{4}$	66.06	−2. 69
23)	115		$66\frac{1}{4}$	$21\frac{1}{4}$	63.49	−2. 76
24)	120		64	$21\frac{1}{4}$	61.09	−2. 91
25)	125		62	$21\frac{1}{4}$	58.80	−3. 20
26)	130		60	$21\frac{1}{4}$	56.65	−3. 35
27)	135		58	$21\frac{3}{4}$	54.61	−3. 39
28)	140		$56\frac{1}{2}$	$21\frac{3}{4}$	52.69	−3. 81
29)	145		$55\frac{1}{2}$	22	50.86	−4. 64
30)	150		$53\frac{1}{2}$	22	49.15	−4. 35
31)	155		52	22	47.53	−4. 47
32)	160		$50\frac{1}{4}$	22	46.00	−4. 25
34)	170		48	$21\frac{3}{4}$	43.19	−4. 81
36)	180		$45\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{2}$	40.69	−4. 81
38)	190		$41\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{2}$	38.40	−3. 10
42)	210		$34\frac{1}{5}$	19	34. 41	+0.21.

Experi-

Experim. X.

§. 16 Phialam vitream (Experim. VIII.) adhibui, ei $\frac{18}{32}$ librae aquae ebullientis infudi, et in aëre temperiei 23. gr. obferuaui decrefcere calorem aquae a gradu 175

		obferu.	calor aëris.	Calc.	diff. inter obf. et calc.
1)	5 min. prim. ad gr.	$161\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$		
2)	10	149	$22\frac{1}{2}$	149.2	+0. 20
3)	15	137	$22\frac{1}{2}$	137.9	+0. 90
4)	20	127	22	127.7	+0. 70
5)	25	116	22	118.4	+2. 40
6)	30	108	22	109.9	+1. 90
7)	35	100	22	102.2	+2. 20
8)	40	$93\frac{1}{2}$	22	95.2	+1. 70
9)	45	87	$22\frac{1}{2}$	88.8	+1. 80
10)	50	81	$22\frac{1}{2}$	82.9	+1. 90
11)	55	$75\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	77.6	+2. 10
12)	60	$71\frac{1}{4}$	23	72.7	+1. 45
13)	65	$67\frac{1}{2}$	23	68.3	+0. 80
14)	70	$63\frac{3}{4}$	23	64.3	+0. 55
15)	75	$60\frac{1}{4}$	23	60.6	+0. 35
16)	80	$58\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{2}$	57.3	− 1. 20
17)	85	$54\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{2}$	54.2	− 0. 30
18)	90	53	24	51.4	− 1. 60
19)	95	$50\frac{1}{2}$	24	48.9	− 1. 60
21)	105	$46\frac{1}{4}$	24	44.5	− 1. 75
23)	115	43	23	40.8	− 2. 20
25)	125	40	22	37.85	− 2. 15

	obſeru.	calor aëris.	calc.	diff. inter obſ. et cal.
27)135 - - - - -	35½ -	22 -	35.33	— 0. 17
29)145 - - - -	33½ -	22 -	33.24	— 0. 26
31)155 - - - -	31½ -	22½ -	31.5	— 0. 0
33)165 - - - -	30 -	22½ -	30.06	+ 0. 06
35)175 - - - -	28¼ -	22½ -	28.80	+ 0. 55
37)185 - - - -	27½ -	22½ -	27.8	+ 0. 30
39)195 - - - -	27¼ -	22½ -	27. +	— 0. 25
41)205 - - - -	27 -	23 -	26.35	— 0. 65
43)215 - - - -	26½ -	23 -	25.78	— 0. 72
49)245 - - - -	25½ -	23 -	24.59	— 0. 91
52)260 - - - -	25½ -	24 -	24.2	— 1. 30
56)280 - - - -	25 -	24 -	23.83	— 1. 17

§. 17. Cum ex praecedentibus admiranda harmonia calculi et obſeruationum eluceat ſatis, ne contra officia veritatis amatoris videar experimenta accommodaſſe calculo, adducam experimentum alienum huc pertinens, ſcil. Clariſſ. Krafftii ex diſſ. eius de calore et frigore. In prima columna poſui tempus praeterlapſum ab initio obſeruationum, vt in praecedentibus experimentis factum: in ſecunda columna gradus temperiei aquae quolibet tempore reſiduos: in tertia gradus ſecundum legem a me inventam erutos: in quarta gradus reſiduos ſecundum hypotheſin, decrementa eſſe in ratione ſubduplicata temporum praeterlapſorum.

Clariſſ. Krafftius in temperie aëris 76. graduum obſeruauit, thermometro aquae calidae immiſſo, a gr. 112 deſcendere mercurium

1) min.

	obferu.	calc. fec. leg. meam	calc. fec. hyp. allatam
1) min. prim. ad	110	- - - -	107. 4
2) - - - -	109	109. 1	107.
4) - - - -	106½	106½ hyp.	101. 8
6) - - - -	104	103. 98	100. 74
8) - - - -	- -	101. 84	98. 99
9) - - - -	101	100. 67	98. 2
11) - - - -	99	98. 68	96. 75
14) - - - -	96	96.	94. 79
16) - - - -	94½	94. 54	93. 6
18) - - - -	93	92. 90	92. 5
23) - - - -	90	89. 70	89. 5
25) - - - -	89	88. 60	89.0 ex hyp.
27) - - - -	88	87. 59	88. 1
31) - - - -	86	85. 79	86. 6
36) - - - -	84½	84. 09	84. 40
39) - - - -	83	83. 00	82. 78
42) - - - -	82	82. 17	82. 2
46) - - - -	81	81. 21	80. 8
50) - - - -	80½	80. 41 +	79. 8
54) - - - -	79	79. 73	78. 2
59) - - - -	78	79. 02	76. 67
62) - - - -	77¾	78. 66	75. 80
66) - - - -	77	78. 25	74. 63
73) - - - -	76½	77. 68	72. 07
81) - - - -	76	77. 21	70. 60

 §. 18.

§. 18. Si praecedentem paragraphum conſideramus et conferimus calculum ſecundum legem meam cum experimentis, miram conuenientiam cernimus, vt hinc iudicandum ſit, aëris temperiem tempore experimenti fuiſſe maxime conſtantem, et omnem poſſibilem ſolertiam ab experimentatore adhibitam fuiſſe. Mira vero harmonia ſola ſatis demonſtrat legis inuentae veritatem. Si gradus Columnae quartae vero aſſpicimus, qui ſec. hyp. eruti ſunt, decrementa eſſe in ratione ſubduplicata temporum, diſcrepantiam initio et fine obſeruationum, vbi a ſuppoſito gradu gradus maxime diſtant, tantam obſeruamus, vt prorſus non ſatisfaciat fini. Taceo impoſſibile ex calculo ſequi, ſcil. temperiem aquae ſec. calculum ita decreſcere debere, vt aëris temperies eam 6 gradus ſuperet, quod repugnat.

§. 19. Si nunc ad experimentum VII. reſpicimus, facile apparet, *decrementa caloris in temporis particulis paruis aequalibus, ſi maſſa frigori expoſita ſuperficiesque eius et temperies aëris refrigerantis manet eadem, eſſe vt differentias inter temperiem maſſae refrigerandae et temperiem aëris refrigerantis.* Deſcendit enim mercurius quinque minutis primis per $6\frac{1}{5}$ gradus, ſcil. a gradu $177\frac{1}{5}$ ad gr. 171. Deſcendit vero etiam a gr. $115\frac{1}{2}$ ad 113, i. e. per $2\frac{1}{2}$ gr. pariter per quinque minuta prima. Sunt ergo decrementa vt $6\frac{1}{2}$ ad $2\frac{1}{2}$. Cum temperies aëris refrigerantis ſit 68. graduum, erit differentia inter temperiem aëris et temperiem $177\frac{1}{5}$ gr. 109. 2. et differentia inter temperiem aëris eandem et temperiem $115\frac{1}{2}$ gr. 47. 5. Eſt vero 109. 2 ad 47. 5 $= 6\frac{1}{5} : 2\frac{761}{1092}$, ergo ferme $= 6\frac{1}{5}$ ad ad $2\frac{1}{2}$. Ab 104. ad gr. 102 in quinque minutis percurrit mercurius duos gradus, differentia inter temperiem aëris et maſſae refrigerandae eſt hic 36. 0. Eſt vero $109.2 : 36.0 = 6\frac{1}{5} : 2\frac{48}{1092}$ i. e. ferme vt $6\frac{1}{5} : 2$. A gradu $81\frac{1}{2}$ in quinque minutis mercurius deſcendit per $\frac{11}{20}+$ gr. Eſt hic differentia inter temperiem aëris et maſſae refrigerandae 13. 5. Eſt autem $109.2 : 13.5 = 6\frac{1}{5} : \frac{837}{1092}$ vel $0.766 > 0.550$ vel $\frac{11}{20}$, vt eſſe debet. Simili ratione examinari poterunt reliquae experientiae, inprimis §. §. 12. 15. 16. 17; luculenter apparebit propoſitionem confirmari, et ſi quae obſeruatur diſcrepantia, illam attribuendam eſſe inconſtantiae aëris, qui inter experimentum modo fit calidior modo frigidior, et ſpatium paruum obſeruandi difficultati.

§. 20. *Si maſſa refrigeranda et ſuperficies eius manet eadem, temperies aëris vero, in quo experimentum fit, eſt diuerſa, decrementa caloris aequalibus temporis particulis ſunt iterum vt differentiae inter temperiem aëris et maſſae refrigerandae.* Conferantur obſeruationes experim. VII. et IX. maſſa vtrobique eſt eadem et eadem etiam ſuperficies maſſarum; differentia vero inter temperiem maſſae refrigerandae et aëris refrigerantis ibi eſt initio 109. 2, hic initio 162. 0. In quinque primis minutis primis ibi mercurius abſoluit $6\frac{1}{5}$, hic 9. gradus. Eſt vero $109.2 : 162.0 = 6\frac{1}{5} : 9\frac{216}{1092} = 6\frac{1}{5} : 9$ ferme.

Abſoluit mercurius experim. IX. a gr. $110\frac{1}{2}$ ad gr. $105\frac{1}{2}$ quinque gradus, quinque minutis. Eſt vero hic differentia inter temperiem aëris et maſſae refrigerandae 90. 5. Hinc $109.2 : 90.5 = 6\frac{1}{5} : 5\frac{151}{1092} = 6\frac{1}{5} : 5$ ferme.

Diſcrepantia, vt iam ſatis monitum, attribuenda eſt inconſtantiae temperiei aëris vel obſeruandi difficultati. Simili modo caetera exempla examinari poterunt, quae adducere ſuperfluum iudico.

§. 21. *Si maſſae ſunt diuerſae et ſuperficies maſſarum ſunt diuerſae, differentiae vero inter temperiem aëris et aquae eaedem, decrementa aequalibus temporis particulis ſunt in directa ratione ſuperficierum et inuerſa maſſarum.* Conferantur obſeruationes experim. VII. cum obſeruationibus experim. VIII. maſſa refrigeranda ibi eſt ad maſſam refrigerandam hic vt $28:9$. Superficies vero phialarum ſunt, quia ſunt corpora ſimilia vt $28^{2:3}:9^{2:1}$ $=91809:43264$. Ratio ergo compoſita ex directa ſuperficierum et inuerſa voluminum eſt $=\frac{91809}{28}:\frac{43264}{9}$ $=3278:4807$. Experim. VII. mouetur mercurius quinque minutis primis a gr. $158\frac{1}{2}$ ad gr. 153, i. e. per $5\frac{1}{2}$ gradus, et in experim. VIII. a gr. $158\frac{1}{2}$ ad $150\frac{1}{2}$. i. e. per octo gradus pariter quinque minutis primis, temperies aëris vtrobique eſt eadem. Eſt autem $3278:4807$ $=5\frac{1}{2}:8\frac{214}{3278}$. parum abludens a $5\frac{1}{2}:8$.

Mouetur mercurius experim. VIII. a gr. 90 ad gr. $88\frac{1}{2}$ per $1\frac{1}{2}$ gr. quinque minutis primis. Experim. VII. vero a gr. 90 quinque minutis per gradum vnum. Eſt vero $3278:4807=1:\frac{4807}{3278}=1:1\frac{1529}{3278}$, ferme vt $1:1\frac{1}{2}$. Hoc ex omnibus reliquis exemplis elucet, poſitis conditionibus.

§. 22.

§. 22. *Si maſſae refrigerandae ſunt diuerſae, ſuperficies diuerſae, differentiae inter temperiem maſſarum refrigerandarum et aëris refrigerantis diuerſae; decrementa aequalibus temporis particulis obſeruantur in ratione compoſita ex ratione directa ſuperficierum et differentiarum inter temperiem aëris et maſſarum refrigerandarum, ſimulque ex inuerſa ratione maſſarum refrigerandarum ipſarum.* Hoc vt adpareat, conferantur obſeruationes experim. VII. cum obſeruationibus exper. X. Eſt ratio directa ſuperficierum et inuerſa maſſarum vt ante $= 3278 : 4807$. Eſt ibi differentia inter 177. 2 et 68. 0 = 109. 2. hic vero differentia inter 175. 0 et 23. 0 = 152. 0. Conſequenter ratio tota compoſita $3278 . 1092 : 4807 . 1520 = 3579576 : 7306640 = 447447 : 913330$. Spatium vero a mercurio tranſitum a gr. $177\frac{1}{5}$ in quinque minutis primis eſt $= 6\frac{1}{5}$, ſpatium eodem tempore experm. X. a gr. 175 ad $161\frac{1}{2}$ abſolutum $= 13\frac{1}{2}$.

Eſt vero $447447 : 913330 = 6\frac{1}{5} : 12\frac{293292}{447447}$ ergo non multum recedens a $6\frac{1}{5} : 13\frac{1}{2}$. Idem aliis exemplis poteſt oſtendi, quae facile ex obſeruationibus peti poterunt.

§. 23. Itaque concludimus ex experimentis, decrementa caloris, et ſi reſpicimus ad experim. II. et IV. etiam incrementa caloris eſſe in ratione compoſita ex directa ratione ſuperficierum et differentiarum inter temperiem maſſarum refrigerandarum vel calefaciendarum et aëris pariter directa, ſimulque ratione inuerſa ipſarum maſſarum refrigerandarum vel calefaciendarum; ſi ſcil. tempora ſunt aequalia et parua. Hac propoſitione ſtabilita nos legi condendae pares erimus, ſecundum quam decrecrementa vel incrementa caloris quolibet tempore praedicere poterimus in temperie aëris conſtanti.

§. 24. Sit differentia inter temperiem aëris refrigerantis et maſſae refrigerandae $= a$, ſit decrementum tempore $t. = b$. erit differentia inter temperiem aëris refrigerentis et maſſae refrigerandae tempore t praeterlapſo reſidua $= a - b$. Et cum decrementa aequalibus temporis particulis ſint vt differentiae inter temperiem maſſae refrigerandae et aëris per antecedentia (§. 19.) erit $a : a - b = b : b \frac{(a-b)}{a}$, vel decrementum tempore $2t$, differentia igitur inter temperiem maſſae refrigerandae et aëris erit poſt tempus $2t = a - b - b \frac{(a-b)}{a} = \frac{a^2 - ab - ab + bb}{a} = \frac{a^2 - 2ab + bb}{a} = \frac{(a-b)^2}{a}$. Eadem ratione erit $a : \frac{(a-b)^2}{a} = b : b \frac{(a-b)^2}{a^2}$ ſiue decrementum tempore $3t$; differentia igitur inter temperiem maſſae refrigerandae et aëris erit poſt $3t = \frac{(a-b)^2}{a} - b \frac{(a-b)^2}{a^2} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a} - \frac{ba^2 + 2ab^2 - b^3}{a^2}$, aequalis $\frac{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{a^2} = \frac{(a-b)^3}{a^2}$ et ſic porro. Erunt ergo differentiae inter temperiem aëris et maſſae refrigerandae temporibus aequalibus continuo ſibi ſuſccedentibus paruis et decrementa, vt ſequens tabula exhibet.

§. 25. Prima columna exhibet temporum aequalium numerum, ſecunda columna differentias inter temperiem maſſae refrigerandae et aëris poſt determinatum tempus ſuperſtites; tertia columna exhibet decrementa aequalibus temporibus.

I.	II.	III.
0	a	0
$1\,t$	$a-b$	b
$2\,t$	$\frac{(a-b)^2}{a}$	$b\,\frac{(a-b)}{a}$
$3\,t$	$\frac{(a-b)^3}{a^2}$	$b\,\frac{(a-b)^2}{a^2}$
$4\,t$	$\frac{(a-b)^4}{a^3}$	$b\,\frac{(a-b)^3}{a^3}$.
$5\,t$	$\frac{(a-b)^5}{a^4}$	$b\,\frac{(a-b)^4}{a^4}$
$6\,t$	$\frac{(a-b)^6}{a^5}$	$b\,\frac{(a-b)^5}{a^5}$
$7\,t$	$\frac{(a-b)^7}{a^6}$	$b\,\frac{(a-b)^6}{a^6}$
$8\,t$	$\frac{(a-b)^8}{a^7}$	$b\,\frac{(a-b)^7}{a^7}$ etc. hinc
$n\,t$	$\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$	$b\,\frac{(a-b)^{n-1}}{a^{n-1}}$

§. 26. Ex praecedenti tabula progressio clarissime patet, et quolibet momento differentia inter temperiem massae refrigerandae et aëris definiri potest. Est scil. differentia inter temperiem initialem massae refrigerandae et aëris scil. *a* euecta ad dignitatem, cuius exponens vnitate minor est numero momentorum aequalium elapsorum, ad differentiam inter temperiem massae refrigerandae et aëris post primum momentum residuam, evectam ad dignitatem, cuius exponens aequalis est numero momentorum aequalium praeterlapsorum, vt vnitas ad differentiam inter temperiem aëris et massae refrigerandae praeterlapso tempore residuam; quae si tali ratione inuenitur, ei addi potest temperies aëris, vt temperies ipsa habeatur.

§. 27. Patet porro (1) Logarithmum $a-b$, posse multiplicari per exponentem eius, ad obtinendum logarithmum numeratoris. (2) Logarithmum a poſſe pariter multiplicari per exponentem eius, ad obtinendum logarithmum denominatoris. (3) Logarithmum denominatoris poſſe ſubtrahi a logarithmo numeratoris ad obtinendum logarithmum quoti.

§. 28. Poteſt etiam quolibet tempore indicari decrementum, eſt ſcil. a euecta ad dignitatem cuius exponens eſt vnitate minor numero momentorum elapſorum, ad $(a-b)$ euectam ad dignitatem cuius exponens pariter eſt vnitate minor numero momentorum aequalium elapſorum, ſic decrementum primo momento ad decrementum per aequale tempus poſt certum temporis interuallum. Similique ratione etiam hic logarithmis vti poterimus.

§. 29. Vt ſine moleſtia pateat, quomodo calculus obſeruationibus appoſitus ſit factus, notetur in primo experim. a eſſe $= 24$ $b = 22$: in ſecundo experim. a eſſe $= 24$. $b = 14$; in 3tio experim. $a = 42$. $b = 14$, in 4to, $a = 24$, $b = 2$; in 5to $a = 24$, $b = 10$; in 6to $a = 78$, $b = 9$; in 7mo $a = 109.2$, $b = 6.2$. in experim. 8vo $a = 90.5$, $b = 8.0$. experim. 9no $a = 162$ $b = 9$. experim. 10mo, $a = 152$, $b = 13\frac{1}{2}$.

§. 30. In experimento quod mutuati ſumus a Clariſſ. Krafftio ex diſſertatione eius de calore at frigore decrementum initiale ſequenti ratione elicui. Decrementum duobus min. prim. a gr. $106\frac{1}{2}$ eſt ſecundum obſeruationem 2 gr. et dimidii; hinc vno min. primo ferme $1\frac{1}{4}+$gr. Cum nunc ſpatia aequalibus temporibus a mercurio tranſita ſint vt differentiae inter temperiem maſſae refrigerandae et aëris refrigerantis, erit $30\frac{1}{2} : 36 = 1\frac{1}{4} + : \frac{90}{61} +$ vel ad $1.475+$, erit ergo, $b = 1.475$. Cum $a = 36$.

ooo-

000, erit $a-b=36.000-1.475=34525-$, erit igitur $\frac{(a-b)^2}{a}=\frac{3452^2}{3600}$ siue differentia inter temperiem massae refrigerandae et temperiem aëris post duo min. prim. et $\frac{(a-b)^3}{a^2}$ erit $=\frac{3452^3}{3600^2}$ aequalis differentiae inter temperiem aëris et massae refrigerandae tertio min. prim, secundum legem expositam, et sic porro.

§. 31. Geometris facillime patet, notissimam curvam Logarithmicam magni vsus esse in decrementis, singulis temporibus determinandis, quod tandummodo indicare hic volui, cum sufficiat, quod ostenderim, quomodo lege detecta vti possimus ad detegenda decrementa et incrementa caloris in constanti aëris temperie, adhibitis logarithmis numerorum vulgarium.

§. 32. Dum experimenta VII. VIII. IX. X. considero, aëris temperiem posse assumi constantem per totum experimenti tempus absque sensibili errore cerno. Videmus vero etiam, crescente vel decrescente calore aberrare a lege decrementa, conditio enim legis ex parte tollitur. Ipsa sic aberrationis ratio est criterium veritatis legis; considerentur obseruationes experim: IX et X, vbi additae sunt mutationes aëris; quia experim. IX ab initio decreuit calor aëris, statim maiorem calorem exhibet calculus quam obseruationes vsque ad min. pr. 40. Deinde ob crescentem iterum calorem aëris etiam calculus magis magisque respondere incipit obseruationibus, donec ferme cum iis congruit post min. pr. 60. Quia vero postea temperies aëris magis adhuc crescit, vt superet gradum 20, min. primo 70; calculus iam incipit minorem temperiem exhibere, quam obseruationes,

quod

quod vſque ad min. primum 180, cernere eſt, vbi incipit denuo decreſcere aëris temperies, et calculus magis magiſque iterum reſpondere obſeruationibus, donec poſt min. primum 210 cum obſeruationibus ferme conueniat.

Eperimento X. minuto primo 15. decreuerat calor aëris a gr. 23 ad $22\frac{1}{2}$, calor maſſae refrigerandae ad gr. 137. Calculus exhibet gr. 137.9, quia calor aëris decreuerat. Sic calculus ob calorem aeris decreſcentem vſque ad min. pr. 65, maiorem exhibet gradum quam obſeruationes. Deinde vero, quia calor aeris min. primo 60 iam rvrſus creſcere incipit, etiam calculus incipit reſpondere magis magiſque obſeruationibus et min. primo 70, ferme eundem gradum exhibere. Quia poſtea vero calor aëris augetur magis, calculus incipit exhibere minorem gradum ac obſeruationes, quod inter min. primum 80 et 115 cernere eſt. A min. primo 115 autem rurſus decreſcit calor aëris; hinc fit, vt calculus denuo reſpondere incipiat obſeruationibus, quod inter min. primum 115 at 195 videre eſt. A minuto primo 205 ad 280 creſcit iterum calor aëris ad gr. 24, quare temperies maſſae refrigeratae maior obſeruatur ac calculus exhibet. Haec omnia ſunt euidentiſſima criteria legis feliciter detectae, vt plura addere in confirmationem ſupervacaneum ſit.

§. 33. Tandem ſi ea perpendimus, quae §. 19. 20. 21 aſſerui et probaui, decrementa ſcil. vel incrementa caloris aequalibus temporum particulis eſſe in ratione compoſita ex directa ſuperficierum et inuerſa maſſarum refrigerandarum vel calefaciendarum ratione, ſi temperies aëris ponuntur aequales et differentiae inter temperiem maſſarum refrigerandarum et aëris; cuique facile patet

patet, collatis ſimul iis, quae §. §. 4. 5 et 6. annotata ſunt, ad elaborationem thermometrorum perfecte concordantium requiri, vt ſuperficies bulborum thermometricorum, eandem rationem habeant, quam habent volumina bulborum thermometricorum.

Nunquam enim decrementa vel incrementa aequali tempore, mutatione aëris eadem facta erunt aequalia, niſi (poſitis dictis voluminibus V : v et ſuperficiebus S : s.) $\frac{S}{V}$ ſit $= \frac{s}{v}$; conſequ. $S\,v = s\,V$ et $S : s = V : v$. Collatis §. §. 3. 4. 5. 6 ſimul patet, ea thermometra, quae adhibui non fuiſſe perfecte concordantia; quia differentia inter temperiem aëris et temperiem thermometri in experim. I. II. exiſtente 24 gr. thermometrum temperiem aëris conconſecutum eſt ſexaginta minutis primis, in experim. III. vero thermometrum alterum, differentia inter temperiem aëris et thermometri exiſtente 28 graduum, temperiem aeris conſecutum eſt triginta minutis primis. Nonſolum vero thermometrorum harmonia tali ratione exactior obtinetur, ſed etiam ſequens problema magni momenti et meteorologiae perficiendae inſeruiens ſolui poterit, ſi in ſubſidium vocantur, quae in hac diſſertatione probaui ſcil.

Temperiem aëris inuenire eam; quae, ſi conſtans eſſet per totum diem, vel etiam per multorum dierum interuallum, quin totum annum, eundem effectum produceret in refrigerandis vel calefaciendis per idem tempus corporibus, ac omnes gradus diuerſi caloris ſibi per totum diem, vel longius interuallum e. g. totum annum ſuccedentes. Quia vero in hoc negotio machina quadam et apparatu opus eſt, rem differam, pedemque hic figo.

TENTAMEN LEGEM EVAPORATIONIS AQVAE CALIDAE IN AERE FRIGIDIORI CONSTANTIS TEMPERIEI DEFINIENDI.

AVCTORE
G. W. Richmann.

§. 1.

Qua lege euaporatio aquae calidae in certa aëris temperie minus calida fiat, nondum definitum eſt a ſcientiae naturalis cultoribus. Huius problematis ſolutionem ad phyſicae incrementum aliquid allaturum non dubitaui; hinc cum quadam pertinacia nonſolum experimenta huc facientia inſtitui, ſed etiam iis attente comparatis priorum Academiae traditarum inquiſitionum adminiculo in legem, quam experimentis non prorſus contrariam deprehendi, incidi. Haec qualiacunque tentamina initio euulgare nolui, antequam noua experimenta cum peculiari machina ceperim, quam deſcriptam ſub finem anni 1747 tradidi et qua euaporationem exactius menſurari poſſe ſperaui. Cum vero nunc laborum, quibus incubui, ex parte rationem reddere velim, cogitata et experimenta, quae imposterum perficere annitar, cum ſocietate communicabo.

§. 2. Simulac mihi ſubnaſcebatur ſuſpicio euaporationem aquae calidae in aëre minus calido decreſcere vti differentiae inter temperiem aquae et aëris decreſcunt, in legem decrementi caloris inquirere incepi et detexi differentias iſtas decreſcere aequalibus temporibus ſecundum pro-

greſſio-

gressionem semiordinatarum logisticae temporibus per abscissas expressis; vti ex inquisitione mea in legem secundum quam calor fluidi vase contenti etc. in temperie aëris constanter eadem crescit vel decrescit, patet. (*)

§. 3. Posito eandem continuo differentiam inter temperiem aquae magis calidae et aëris minus calidi esse, nullum est dubium, aequales aquae quantitates, caeteris om-

---

(*) Cum (1) vis elastica aëris calore augeatur ita, vt haec vis ad aëris ambientis frigidioris vim elasticam sit vt volumen quod aër calore acquirit ad volumen aëris ambientis minus calidi; et (2) refrigeratio pendeat maximam partem a differentia virium elasticarum, ascendatque aër calidus a superficie corporis aeque calidi in aëre minus calido vi proportionali excessui vis elasticae aëris magis calidi super vim elasticam aëris minus calidi et tali ratione corporis calor a cuius superficie aër ascendit, simul decrescat: (3) vero excessus vis elasticae aëris calidioris super vim elasticam aëris minus calidi proportionatus sit differentiae temperierum; non mirum est, decrementa caloris aequalibus temporisculis esse vti differentias inter temperiem aquae et aëris. Si enim volumen aëris temperie aquae gelascentis expansi ponitur 1000 volumen aëris calore aquae ebullientis expansi obseruatum est 1500. et volumen aëris calore summo aestiuo expansi 1166. conf. Hauksbéii Phys. Mechan. Exp p. 170. Tentamina experimentorum in Acad. del Ciment. p. 39. ed. Musschenbr. Cum vires elasticae sint in eadem ratione, differentia inter vim elasticam aëris aqua ebulliente generatam et vim elasticam aëris aqua gelascente generatam est vt 500; differentia vero inter vim elasticam aëris calore summo aestiuo generatam et vim elasticam aëris aqua gelascente generatam vti 166. Est vero $500 : 166 = 180 : 59\frac{38}{50}$ i. e. vti differentia inter temperiem aquae ebullientis et temperiem aquae gelascentis ad differentiam inter calorem summum aestiuum et temperiem aquae gelascentis. Si enim ad $59\frac{38}{50}$ additur temperies aquae gelascentis 32. graduum, oritur temperies $91\frac{38}{50}$ graduum, siue calor summus aestiuus.

nibus paribus, aequali tempore euaporare, euaporationes inaequalibus vero temporibus eſſe in ratione temporum.

§. 4. Si vero tempora et caetera omnia ponuntur aequalia praeter differentias inter temperiem aquae et aëris nondum forte affirmare licebit euaporationes eſſe in ratione differentiarum inter temperiem aquae et aëris. Quod ſi obtinet, euaporationes temporibus inaequalibus et differentiis dictis pariter inaequalibus, caeteris vero omnibus paribus, erunt vti ſpatia logiſticae, cuius ſemiordinatae ponuntur in ratione differentiarum dictarum et abſciſſae in ratione temporum.

§. 5. Ponatur logiſticae axis AC, cuius partes aequales exprimant tempora aequalia, quibus euaporatio fit; ſemiordinata AB exprimat differentiam initialem inter temperiem aquae et aëris aqua frigidioris; decreſcet aquae calor in aëre frigidiori conſtantis temperiei, vti ſemiordinatae logiſticae decreſcunt, et erit poſt tempus AF differentia inter temperiem aquae et aëris vti ſemiordinata FG et euaporatio tota poſt idem tempus vti ſpatium logiſticae ABFG; poſt tempus AC vero erit differentia inter temperiem aquae et aëris vti CD et euaporatio totalis poſt idem tempus vti ſpatium logiſticae ABCD. Si nunc logiſticae ſubtangens, quae eſt conſtans ponitur $= a$, erit ſpatium $ABFG = a\,(AB - FG)$ et ſpatium $ABCD = a\,(AB - CD)$. Conſeq. $ABFG : ABCD = AB - FG : AB - CD$; i. e. Euaporationes erunt vti differentiae differentiarum inter temperiem aquae et aëris diuerſis temporum interuallis.

§. 6. Hoc an ita habeat, accuratiſſimis experimentis examinandum eſt. Talia quidem nondum inſtituere licuit, quae tamen huc facientia ope vulgaris bilancis inſtitui, afferam. Quodlibet experimentum in tabula quadam exhibui, in cuius columna I. tempus euaporationis exiſtit, in columna II. temperies aëris, in columna III. temperies aquae, in columna IV. differentiae inter temperiem aquae et aëris, in columna V, pondus aquae euaporatae ſecundum obſeruationem, in VI tandem pondus aquae euaporandae ſecundum legem ſuppoſitam.

Experim. I.

Vas metallicum cylindricum diametri quatuor digitorum, quod capiebat tres libras aquae, mediante fune ex brachio bilancis ſuſpendi et aquam feruentem infudi, thermometrum dein huic aquae immerſi et ad aequilibrium perduxi bilancem; ſtatimque notaui tempus, temperiem aëris externi, temperiem aquae, et ſimul pondus vnius drachmae impoſui lanci, cui aqua euaporanda impoſita erat. Aequilibrium ſic tollebatur: expectaui deinde, donec tantum aquae euaporaret, vt aequilibrium reſtitueretur; notaui iterum tempus, temperiem aquae et aëris, ſimulque pondus aquae euaporatae. Hoc continuaui, vti patet ex ſequenti tabula.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
poſt 0 min. pr.	68 - -	175 - -	107 - -	0 - -	0.
3 - - -	68 - -	168 - -	100 - -	1 drach.	1.15 dr.
6 - - -	68 - -	164 - -	96 - -	2 - -	1.87.
10 - - -	68 - -	160 - -	92 - -	3 - -	2.47.
15 - - -	68 - -	155 - -	87 - -	4 - -	3.30.

post 21 min. pr.	68	149	81	5	4.42.
28	68	144	76	6	5.27.
36	68	138	70	7	6.05.
45	67	$131\frac{1}{2}$	$64\frac{1}{2}$	8	7.03.
$57\frac{1}{2}$	67	124	57	9	8.18.
72	67	$117\frac{1}{2}$	$50\frac{1}{2}$	10	9.33.
91	67	110	43	11	10.48.
130	67	98	31	12	12.44
152	67	$93\frac{1}{2}$	$26\frac{1}{2}$	13	13.16.
176	67	90	23	$13\frac{1}{4}$	13.76.
212	67	84	17	$13\frac{1}{2}$	14.42.
275	67	79	12	14	15.55.
367	65	71	6	15	16.67.
446	64	68	4	$15\frac{1}{3}$	16.77
1095	63	63	0	17	17. hyp.

Barometri altitudo primis 446 minutis primis non obſeruata eſt ſenſibiliter mutata.

Experim. iteratum.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
post 0 min. pr.	62	176	114	0	0
$3\frac{1}{2}$	62	170	108	1 dracm.	$\frac{9}{11}$ dr.
7	$62\frac{3}{4}$	$165\frac{1}{2}$	$102\frac{3}{4}$	2	$1\frac{46}{113}$.
12	62	160	98	3	$2\frac{6}{113}$.
$17\frac{1}{2}$	63	154	91	4	$3\frac{12}{113}$.
$23\frac{1}{2}$	64	148	84	5	$4\frac{6}{113}$.
$30\frac{1}{2}$	64	143	79	6	$4\frac{81}{113}$
$39\frac{1}{2}$	64	$136\frac{1}{4}$	$72\frac{1}{4}$	7	$5\frac{75}{113}$
52	64	128	64	8	$6\frac{84}{113}$

poſt

post $66\frac{1}{2}$ min.	pr. 63	120	57	9	$7\frac{89}{110}$.
$88\frac{1}{2}$	63	$112\frac{1}{4}$	$49\frac{1}{4}$	10	$8\frac{72}{110}$.
$119\frac{1}{2}$	63	$101\frac{1}{2}$	$38\frac{1}{2}$	11	$10\frac{30}{110}$.
172	63	90	27	12	$11\frac{84}{110}$.
$283\frac{1}{2}$	$62\frac{3}{4}$	75	$11\frac{1}{4}$	13	$13\frac{87}{110}$.
630	57	$61\frac{1}{4}$	$4\frac{1}{4}$	15	15 hyp.

Barometri altitudo non mutabatur tempore experimenti.

EXPERIMENTVM DENVO ITERATVM.

Vas aliud cylindricum diametri trium digitorum adhibui, quod capiebat libram vnam et dimidiam et eadem obseruaui, quae in experimentis praecedentibus.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
post 0. min.	pr. 58	166	108	0	0
1.	58	162	104	30 grana	23 gr.
$2\frac{1}{2}$	59	158	99	60	52.
$4\frac{1}{2}$	59	154	95	90	75.
7	60	150	90	120	104.
9	60	146	86	150	127.
$11\frac{1}{2}$	60	$142\frac{1}{2}$	$82\frac{1}{2}$	180	147.
15	61	$137\frac{1}{2}$	$76\frac{1}{2}$	210	181.
$18\frac{1}{2}$	61	133	72	240	208.
23	61	128	67	270	236.
29	61	123	62	300	265.
36	61	116	55	330	306.
43	61	112	51	360	328.
53	61	106	45	390	368.
64	61	100	39	420	390.
81	61	93	32	450	430.

poſt	104	62	86	24	480 grana	475.
	176	62	73½	11½	540	546.
	316	62	64	2	600	600.
	396	62	62	0	620	611.

Barometri altitudo parum mutabatur tempore experimenti dimidiam lineam decreſcebat.

EXPERIMENTVM ITERATVM TERTIO.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
poſt 0	67	177	110	0	0
5	67	156	88	8 ſemidr.	11$\frac{44}{110}$ ſ.dr.
10	67	147	80	14	15$\frac{6}{11}$
12	67	144	78	16	16$\frac{6}{11}$
22½	65	132	67	24	22$\frac{3}{11}$
26½	65	127½	62½	26	24$\frac{6}{11}$
30	65	124	59	28	26$\frac{4}{11}$.
35	65	121½	56½	30	27$\frac{7}{11}$.
39½	66	118	52	32	30$\frac{6}{11}$.
44	67	113	46	34	33.
51	68	109	41	36	35$\frac{8}{11}$.
60	69	105	36	38	38$\frac{38}{110}$.
70	69	101	32	40	40$\frac{46}{110}$.
84	68½	95¼	26¼	42	43$\frac{58}{110}$.
98	69	90½	21½	44	45$\frac{94}{110}$.
117	66	85	19	46	47.
158	65	78	13	49	50$\frac{59}{110}$.
179	64	74	10	51	51$\frac{90}{110}$.
224	64	68	4	53	54$\frac{102}{110}$.
332	63¾	64	¼	55	56$\frac{95}{110}$.
380	64	64	0	57	57 hyp.

Ba-

Barometri altitudo non mutabatur tempore experimenti.

§. 7. Circa haec experimenta notandum

a) Initio, vbi euaporatio eſt celerrima propter celeriorem aëris motum cum euaporatione coniunctum bilancem oſcillare, vt non appareat, quando aequilibrium reſtituatur.

b) Aëris temperiem non manere conſtantem neque aequaliter tranquillum, quod tamen requiritur, ſi calculus allatus locum habere debet. Hinc forte nec differentiae inter temperiem aquae et aëris ſeſe logiſticae accommodant exacte. Primo incommodo impoſterum obuiam ire tentabo machina quadam euaporationi deſtinata. Secundum incommodum difficulter tollitur. Apparet tamen, etiam haec experimenta, quae attuli, legem euaporationis allatam probabilem reddere, et niſi parietes vaſorum denſiores et corpora contingentia denſiora e. g. lanx diutius retinuiſſent calorem aqua, decrementa etiam caloris ſe propius accommodaſſe logarithmicae, vti ex experimentis, quae de decremento caloris communicaui, ſatis videre licuit. Cum tandem poſt euaporationem, per interuallum temporis factam ſuperficies totius maſſae euaporandae mutetur et minor fiat et maſſa ipſa etiam minuatur, decrementaque caloris in temporibus paruis aequalibus ſint in ratione compoſita ex directa differentiarum temperierum aquae et aëris et ſuperficierum, ſimulque inuerſa voluminum, vt in diſſ. de inquiſitione decrementi caloris oſtendi, et horum ratio in calculo non habita ſit, cogitare licet, ſi talem apparatum adhibere licuiſſet, vt horum omnium rationem in calculo habere potuiſſem, etiam calculum ipſum experimentis exactius reſpondiſſe.

MEDITATIONES DE CALORIS ET FRIGORIS CAVSA,

AVCTORE
Michaele Lomonoſow.

§. 1.

Calorem (*) motu excitari notiſſimum eſt: manus per mutuam frictionem caleſcunt, ligna flammam concipiunt, ſilice ad chalybem alliſo ſcintillae proſiliunt, ferrum crebris et validis ictibus malleatum excandeſcit; quibus ceſſantibus calor diminuitur et productus ignis tandem extinguitur. Porro calore concepto, corpora vel in partes inſenſibiles reſoluta per aërem diſſipantur, vel in cineres fatiscunt, aut debilitata partium cohaeſione liqueſcunt. Denique corporum generatio, vita, vegetatio, fermentatio, putrefactio, calore promouentur, frigore retardantur. Ex quibus omnibus euidentiſſime patet, *rationem ſufficientem caloris in motu eſſe poſitam.* Quoniam autem motus ſine materia fieri non poteſt, neceſſum igitur eſt, *vt ratio ſufficiens caloris conſiſtat in motu alicuius materiae.*

§. 2. Quamuis autem in corporibus calidis plerumque nullus motus viſu percipiatur, tamen per effectus ſaepius ſe manifeſtat. Ita ferrum ad ignitionem prope cale-

(*) quo nomine et vim eius intenſiorem, ignem vulgo dictam, intelligimus.

calefactum, licet ad oculum quiescere videatur, corpora tamen sibi admota alia fundit, alia in vapores resoluit, hoc est, partibus eorum in motum excitatis; sibi quoque motum alicuius materiae inesse ostendit. Equidem non ibi motus adeo negandus est, vbi nullus in oculos incurrit: quis enim negabit vento impetuoso syluam perflante, folia arborum et ramos agitari, licet e longinquo spectans nullum motum visu assequeretur? Quemadmodum vero hic ob distantiam, sic in corporibus calidis, ob tenuitatem particularum motae materiae, agitatio visum effugit: in vtroque enim casu angulus visionis tam acutus est, vt neque ipsae particulae sub eo constitutae, neque motus earum videri possit. Sed neminem nisi qualitatum occultarum patronum aliquem fore arbitramur, qui calorem, tot mutationum instrumentum, otiosae cuidam et omni motu, adeoque et vi mouendi destitutae materiae tribuat.

§. 3. Quoniam vero corpora duplici motu agitari possunt, *totali*, quo, quiescentibus iuxta se inuicem partibus, totum corpus mutare continuo suum locum, vel *intestino*, qui in mutatione situs insensibilium partium materiae concipitur; et quia totali saepius pernicissimo nullus, et nullo magnus calor obseruatur; patet ergo *calorem consistere in motu materiae intestino.*

§. 4. Materia in corporibus duplex est, *cohaerens*, nempe quae cum toto corpore mouetur et impetum facit, atque fluminis instar poros illius *interlabens*. Quaeritur itaque, quaenam earum in motu constituta calorem gignat. Huic quaestioni vt satisfiat, excutienda sunt palmaria phae-

nomena

nomena, quae circa corpora calida obſeruantur. Ea vero conſideranti occurrit, 1) calorem in corporibus eo maiorem exiſtere, quo cohaerens eorum materia eſt denſior, et contra. Ita laxior ſtupa flammam concipit magnam quidem, ſed aeſtu multo minore praeditam, quam, vbi illa ſtrictius compacta incenditur. Stramine, quod in mitem flammam alias expandi ſolet, fertilium Ruſſiae camporum, ſyluis carentium, incolae lignorum inſtar vtuntur, indenſos et craſſos rudentes contorto; ligna poroſiora leniore aeſtu ardent, quam quae ſolidiora ſunt, et carbones foſſiles lapideam materiam poris ſuis continentes validius vrunt, quam carbones lignorum vacuis interſtitiis ſpongioſi. Denique aer inferioris atmoſphaerae denſior aura ſuperioris, maiore, quae ambit, afficit tepore, quam illa, vt calidiſſimae valles montibus aeternam glaciem ſuſtinentibus cinctae loquuntur. 2) Conſtat corpora denſiora ſub eodem volumine plus materiae cohaerentis continere, quam interlabentis. Quoniam autem ex legibus mechanicis notum eſt, quantitatem motus eo maiorem eſſe, quo copioſior eſt materia mota, et contra; itaque ſi caloris ratio ſufficiens poſita eſſet in motu inteſtino materiae interlabentis, corpora rariora, ob maiorem copiam in poris eorum materiae interlabentis, maioris caloris capacia eſſent, quam quae denſiora ſunt. Verum quoniam contra quantitas caloris reſpondet potius materiae corporum cohaerentis; Patet igitur *caloris rationem ſufficientem contineri in motu corporum inteſtino materiae cohaerentis.*

§. 5. Confirmatur haec veritas actione coeleſtis illius ignis, cauſticarum ope machinarum corporibus impreſſi, qui

qui remoto foco, eo diutius in illis viuit, quo magis ſunt ſolida, ita vt in rariſſimo illorum aëre nullum ſenſibile tempuſculum duret. Accedit inſuper, quod pro diuerſa corporum grauitate atque duricie diuerſus deprehendatur, ita vt eius intenſionem ponderi corporis cum ratione cohaeſionis partium illius conſpiranti proportionalem eſſe experientia edocuerit, manifeſto indicio, cohaerentem materiam corporum materiam caloris eorum eſſe. Quamuis autem materia cohaerens duplex ſit, propria, ex qua corpus conſtat, et peregrina, quae in ſpatiolis a propria materia vacuis hoſpitatur; verum tamen quoniam vtraque cum ipſo corpore mouetur, et in vnam maſſam coaluit, fieri profecto non poteſt, quin propria in motum calorificum exagitata, eodem ſimul moueatur peregrina, et vice verſa: quemadmodum ſpongia calida frigidiorem aquam in poros receptam calefacit, et viciſſim, calidior aqua frigidiorem ſpongiam.

§. 6. Motum inteſtinum triplici ratione fieri poſſe concipimus; nimirum 1) ſi particulae corporis inſenſibiles locum continuo mutant, vel 2) in eodem loco perſiſtendo continuo gyrantur, aut denique 3) per inſenſibile ſpatiolum inſenſibili tempuſculo vltro citroque continuo agitantur. Primum genus *progreſſiui*, alterum *tremuli*, tertium *gyratorii* motus inteſtini nomine ſalutamus. Rurſum itaque ratio reddenda eſt, a quonam iſtorum motuum calor proficiſcatur. Quod vt appareat, principiorum loco ſequentia ponenda ſunt. 1) *Eum motum inteſtinum caloris cauſam non eſſe, ſiquem in quibusdam corporibus calidis nullum eſſe fuerit demonſtratum.* 2) *Nec eum* *motum intestinum causam caloris existere, quo praeditum est corpus minus calidum, quam aliud, quod eodem motu caret.*

§. 7. Corporum liquidorum particulae tam leui nexu inter se cohaerent, vt diffluant, nisi duro aliquo corpore cohibeantur, atque nulla fere vi externa opus sit ad tollendam earum cohaesionem, sed sponte sua diuelli, a se inuicem recedere atque motu progressiuo moueri possint. Vnde fit, quod nulla signa durabilia liquoribus imprimi queant, sed omnia momento obliterentur. An progressiuus intestinus motus in omni corpore liquido, etiam gradu caloris vitalis frigidiore, actu fiat, nec ne, non hic disquirimus, cum proposito nostro satisfactum iri non dubitemus, si ostenderimus dari casus frequentissimos, in quibus ille clarissime patet. Id circo solutiones salium in aqua primo in medium producimus. Fit enim lege constanti, vt aqua ad sensum quieta manui sensibile frigus imprimens salem marinum, nitrum, salemue Ammoniacum in medio fundo vasis positum soluens, eum quaqua versus distrahat per totum sui volumen. Quod cum fieri alias nequeat nisi aqueae particulae abreptas salinas moleculas a frusto salis remoueant; satis ergo elucet aqueas particulas ipsas motu progressiuo ferri, vbi salem aliquem dissoluunt. Idem contingere in argento viuo, cum metalla corrodit et particulas eorum distrahit, in spiritu vini, cum tincturas ex vegetabilibus elicit, nemo ibit inficias.

§. 8. Contra autem particulae corporum solidorum praesertim duriorum inorganicorum tam arcto nexu vinctae deprehenduntur, vt vi externa eas diuidenti admodum resistant: quamobrem fieri non potest, vt sponte

sua

ſua rupto cohaeſionis vinculo a ſe inuicem recedant et motu inteſtino progreſſiuo ferantur. Vnde fit, quod etiam ſubtiliſſima ſigna illis inciſa per ſecula durent, nec niſi continuo vſu aut aeris iniuria, aut denique corpore ipſo in ſtatum fluiditatis reducto obliterentur. Magnum his momentum affert aurum, quod ſuperficiei vtenſilium ex argento fabrefactorum inductum per longum tempus eidem adhaeret, nec niſi frequenti vſu diminuitur. Contra vero momento temporis ſuperficiem relinquit et per totam argenti maſſam diſtrahitur, quam primum res ex eo facta et de aurata igne funditur. Haec omnia manifeſto indicant particulas corporum ſolidorum praeſertim duriorum et inorganicorum motu progreſſiuo haud moueri.

§. 9. His ita comparatis, conſideremus primo vas aliquod argenteum, ſeu aliam rem ex eiusmodi metallo fabrefactam, auro obductam et ſubtiliſſimis ſignis inciſis caelatam, ad eum gradum calefactam, in quo aqua ebullire ſolet. Videbimus aurum in ſuperficie inconcuſſum, ſigna nec minimum immutata, ipſam duriciem corporis eandem perſiſtere, eaque ſeparationem inſenſibilium particularum prorſus excludi. Hoc autem clariſſime oſtenditur corpus poſſe eſſe magnopere calidum, ſine motu inteſtino progreſſiuo. Secundo conferemus duriſſimum aliquem lapidem, ex gr. adamantem, qui ad gradum liquefacti plumbi calefactus eſt., (quod ſaepius ſine damno et vlla mutatione gemmae, artifices eum polituri facere ſolent) cum aqua vtcunque frigida ſalem ſoluente, eoque ipſo frigidiore facta, vel cum Mercurio argentum corrodente; priorem inueniemus ſine motu inteſtino progreſſiuo calidiſſimum,

 poſte-

posteriorem eodem motu agitari, calorem tamen adeo exiguum in se prodere, euidentissime que ostendere, saepius fieri, vt corpora motu progressiuo intestino praedita multo minus calida sint iis, quae eodem motu destituuntur. Ex his autem vi principiorum superius (§. 6.) allatorum sequitur *motum materiae cohaerentis intestinum progressiuum caloris caussam non esse.*

§. 10. Ex definitione motus intestini tremuli (§. 6.) clare perspicitur, illo corporis partes agitante, ipsas cohaerere non posse. Quamuis enim distantiae, quibus subtilissimae vibrationes absoluutur, sint maxime exiguae, fieri tamen non potest, quin particulae a mutuo contactu recedant, et plerumque extra illum versentur. Ad sensibilem cohaesionem portium corporis requiritur non interruptus earundem mutuus contactus; corporis ergo partes nulla cohaesione sensibili vinciri possunt, si illae tremulo intestino motu concutiuntur. Verum quoniam pleraque corpora ad ignitionem vsque vstulata fortissimam partium cohaesionem conseruant; id circo patet *calorem corporum a motu intestino tremulo materiae cohaerentis haud proficisci.* (§. 6.)

§. 11. Remotis igitur progressiuo et tremulo intestinis motibus, necessario sequitur *calorem consistere in motu intestino gyratorio* (§. 6.) *materiae cohaerentis* (§. 4.) necesse enim est vt cuidam ex tribus tribuatur.

§. 12. Quaeri autem hic potest, vtrum particulae corporum solidorum durante firma cohaesione mutua iuxta se inuicem gyrari possint. Huic quaestioni vt satisfiat, sufficit in mentem reuocare duo marmora politis super-

ſuperficiebus in contactu poſita iuxta ſe inuicem facile moveri, fortiſſima cohaeſione, qua vinciuntur, nihil obſtante; item vitra lenticularia vbi poliuntur, formae celerrime in gyrum agitatae ita adhaerere, vt ea ſecundum lineam plano contactus perpendicularem ſine damno removeri nequeant. His conſideratis clariſſime concipi poteſt, particulas corporum minutiſſimas iuxta ſe inuicem, cohaeſione haud obſtante, gyrari poſſe, eo facilius, quo plana contactus ad ſuperficies integras fuerint in ratione minore. Ceterum fluidorum particulas, cum plerumque motu inteſtino progreſſiuo moueantur, cohaeſione nil morante, etiam in gyrum agi poſſe, ſalua eadem, aperte patet.

§. 13. Ex hac noſtra theoria ſequentia corollaria deducuntur. 1) Ad motum noſtrum calorificum nulla corpuſcula materiae ſphaericis eſſe aptiora, cum non niſi in puncto vnico ſe mutuo contingere poſſint, et frictionem vix aliquam in ſe inuicem exercere. 2) Cum omnis motus prout quantitas intendi et remitti poſſit, idem ergo de calorifico motu eſt ſentiendum. Quo autem motus eſt maior, eo effectus validior eſſe debet; vnde creſcente motu calorifico, hoc eſt, actis celerius in gyrum particulis materiae cohaerentis, calorem intendi, decreſcente remitti neceſſe eſt. 3) Corporum calidorum particulas celèrius gyrari, frigidorum tardius. 4) Corpora calida contactu frigidorum refrigerari, retardato per illum motu calorifico, et contra frigida calefieri, eodem per contactum accelerato. 5) Quando itaque manus calorem ſentit in aliquo corpore, particulae materiae cohaerentis manus in celeriorem motum gyratorium excitantur; ſin vero ſenſu frigidioris materiae afficitur, gyratorius illarum motus retardatur. §. 14.

§. 14. Nulla demonſtrandi methodus certior eſt ea mathematicorum, qui deductas a priori propoſitiones exemplis vel examine inſtituto a poſteriore confirmare ſolent. Id circo noſtram theoriam vlterius proſequuturi, ad exemplum eorum phaenomena praecipua, quae circa ignem et calorem obſeruantur, explicando aſſertum §. 11. veriſſimum eſſe confirmabimus.

Phaenom. I. §. 15. Corporibus duris ſe mutuo fricantibus, vnum eorum ſuper alterum mouetur ſuperinceſſu radente, vnde ſequitur particulas in ſuperficiebus frictionis conſtitutas in ſe mutuo impingere. Ponamus ergo corpus AB moueri ſuper corpore CD ex B verſus A; particula *a b* impinget parte ſuperficiei *b* in partem ſuperficiei *c* particulae *cd*, adeoque particula *a b* ſollicitabit ad motum particulam *cd*, et contra particula *c d* vi reſiſtentiae ſuae ſollicitabit ad motum contrarium particulam *ab*. Cum vero vtraque corpori duro inhaereat, ideo loco ſuo cedere et motu progreſſiuo moueri non poteſt, motus autem corporis AB non ceſſat; conſequenter particula *c d* mouebitur circa centrum ſuum verſus eam directionem, ſecundum quam vrgetur a particula *ab*, particula vero *a b* mouebitur circa centrum ſuum ſecundum eam directionem, verſus quam retardatur a particula *cd*, hoc eſt vtraque mouebitur motu gyratorio. Hac ratione ſingulis particulis, quae in plano frictionis conſtitutae ſunt, in gyrum actis, etiam reliquae particulae, corpora AB et CD conſtituentes, propagata frictione in motum gyratorium excitantur. Hinc igitur patet, quî fiat, vt corpora ſolida per frictionem mutuam incaleſcant; denique ſequentia

Tab. VI.

corol-

corollaria eliciuntur. 1) Quo fortius fricandae ſuperficies corporum AB et CD comprimuntur, quoque celerius iuxta ſe innicem mouentur, eo validius particulas *ab* et *cd* ad motum gyratorium ſollicitari, eoque celerius corpora ipſa incaleſcere. 2) Quoniam corporum liquidorum particulae leuiſſime inter ſe cohaerent, et loco facillime cedunt, particulae igitur *ab* et *cd*, ſi fuerint in ſuperficiebus corporum liquidorum, cedendo ſibi inuicem, eum motum gyratorium concipere nequeunt, quem ſolidis affixae acquirunt. Hoc autem efficitur, vt non ſolum fluida per frictionem, quae inter maſſas liquoris exagitati exoritur, ſed ne ſolida quidem, quam diu ſuperficies liquido corpore delibutas habent, vnquam ſenſibiliter incaleſcant.

Phaenom. 2.
Phaenom. 3.

§. 16. Quando virga ferrea longiore fricatur clauus, tum ſingulae particulae in ſuperficie virgae conſtitutae impingunt in particulas claui, ſibi obuias. Quoniam autem ſuperficies virgae radens maior eſt, quam ſuperficies claui, maior ergo vis particularum impingit in ſuperficiem claui, quam inſuperficiem virgae; conſequenter particulae clauum conſtituentes crebrioribus ictibus exagitatae promptius in motum gyratorium excitari debent, quam particulae ex quibus virga conſtat. Vnde mirum non eſt, clauum prius incaleſcere quam virgam.

Phaenom. 4.

§. 17. Ferrum frigidum vbi exagitatur malleis, praeſertim ad angulos abliquos illiſis, pars maſſae ferreae malleo impetita cedit, iuxta ſibi vicinam, quae ictum non ſenſit, pellitur, et non ſecus ac corpus arctiſſime alteri ſuperficie tenus applicatum, validiſſimoque ſuperinceſſu radente

dente incedens eam fricat; ingruente vero frequentiore ictuum impetu, frictio inter exagitatas ferreae massae partes multiplicatur, motus que gyratorius particularum ferri vsque adeo increscit, vt illud aliquando ad rubedinem ignescat. Non aliter fit, quando bacillus quicunque me-
Phaenom. 6. tallicus, non elasticus praesertim, reciprocis inflexionibus multoties incuruatur: etenim in latere eius conuexo partes massae secundum directiones contrarias distrahuntur, iuxta se inuicem superincessu radente serpunt, fricantur, gyrantur, et curuatura bacilli incalescit.

§. 18. Si corpus magis calidum A est in contactu cum alio corpore B, quod est minus calidum, particu-
Phaenom. 7. lae corporis A in contactu constitutae, quoniam celerius gyrantur, quam particulae corporis B illis contiguae (§. 13) celeriore igitur rotatione accelerant motum gyratorium particularum corporis B, scilicet partem motus sui illis communicant; adeoque tantum his decedit quantum accedit illis: hoc est quando particulae corporis A motum gyratorium particularum corporis B accelerant, suum tardiorem reddunt. Hinc fit, vt corpus A per contactum calefaciens corpus B ipsum refrigeretur.

§. 19. Ceterum particulae corporis B in superficie contactus motae contingunt alias particulas eiusdem corporis a superficie contactus remotiores, quae motu suo per mutuam frictionem cum anterioribus accelerato etiam alias sibi vicinas in gyrum agunt, et sic motus intestinus gyratorius a superficie contactus vsque ad superficiem oppositam successiue propagatur. Contra vero particulae corporis A in plano contactus constitutae quoniam in motu tu ſuo retardantur, (§. 18.) ideoque alias ſibi contiguas, hae vero alias atque alias ſucceſſiue vſque ad ſuperficiem contactui oppoſitam praepediunt. Hinc perſpicitur, vnde fiat, vt corporis minus calidi, appoſiti corpori magis calido, ſuperficies in contactu conſtituta prius incaleſcat, quam auerſa, et corporis calidioris admoti corpori frigidiori contigua ſuperficies prius refrigeretur, quam eidem oppoſita.

§. 20. Si corporis minus calidi A ſuperficiebus op- phaenom. 9
poſitis admouentur duo corpora magis calida B et C, ab vtraque ſuperficie propagabitur motus inteſtinus gyratorius verſus alteram, adeoque integrum corpus A celerius occupabit, quam ſi ab vno latere profectus ad alterum pertingere opus haberet, ad moto nempe corpore alterutro B vel C; pariter ſi corpus A eſt magis calidum quam B et C, corpora vtrinque illi admota; motus gyratorius particularum eius celerius debet retardari quam ſi corpus A vno latere eſſet in contactu cum corpore minus calido B vel C. Hinc ſequitur particularum motum gyratorium eo celerius intendi vel remitti, quo maior ſuperficies exponitur corpori calidiori vel frigidiori ambienti. Quoniam autem ſuperficies corporum ſimilium ſunt in duplicata, ſoliditates vero in triplicata ratione diametrorum, rurſum igitur euidens eſt, quare corpora calida eiusdem generis, maioris voluminis in eodem medio ambiente, ex gr. aere, et eiusdem figurae tardius refrigerantur, frigida vero tardius calefiunt, quam ſi eiusdem voluminis eſſent. phaenom. 10

§. 21. Corpora mota et quieſcentia reſiſtunt pro ratione inertiae, quam grauitati proportionalem eſſe conſtat; particulae igitur grauiores difficilius eadem vi in motum calorificum excitantur, vel motae retardantur, quam quae leuiores ſunt. Iterum ergo perſpicuum eſt; cur corpora frigida ſpecifice grauiora in eodem medio calefaciente tardius calefiant, calida vero in eodem medio frigido tardius refrigerentur, quam ſpecifice leuiora.

phaenom. 11 §. 22. Duriorum corporum particulas fortius cohaerere quam molliorum, certum eſt. Inde vero amplioribus planis contactus easdem iungi haud incongruum videtur. Pro ratione vero planorum contactus etiam particulas ipſas craſſiores eſſe oportere probabili adeo coniectura conſequimur, hoc eſt corporum duriorum particulas eſſe mole maiores iis, quae molliora conſtituunt. Accedit, quod duriorum corporum particulae plerumque ad tactum ſint aſperae atque adeo ſenſibus craſſitudinem ſuam exerant? Quoniam autem corpora maioris voluminis, ceteris paribus, difficilius ex quiete in motum excitari, et mota retardari atque cohiberi poſſunt, quam minora; vnde craſſiores particulae duriorum corporum haud tam facile calorificum motum et recipiunt et ammittunt, quam ſubtiliores molliorum. Non abſcure igitur hinc colligi poteſt ratio, cur duriora corpora ad calorem concipiendum et amittendum ſunt tardiora, quam illa, quae molliora ſunt.

phaenom. 12 §. 23. Particulae corporum calidorum quoniam gyrantur, rationi itaque conſentaneum eſt, eas motis ſuperficiebus ſuis in ſe inuicem agere, adeoque vnamquamque ab alia ſibi vicina pelli, eo fortius, quo motus gyratorius eſt pernicior. Huic repulſioni quoniam contraria eſt cohaeſio particularum, id circo vna earum alteri

derogat

derogat, atque adeo crefcente motu gyratorio cohaefionem particularum minui oportet. Vnde minime mirum eft vi caloris folidorum etiam corporum duritiem debilitari, imo ita infringi, vt prorfus tollatur particularum cohaefio, quorum prius in liquefactis, pofterius in refolutis in vapores experimur.

§. 24. Hinc fequitur 1) liquiditatis et fluiditatis corporum caufam effe motum particularum gyratorium, cuius vis repulfiua fufficit ad illarum cohaefionem eoufque infringendam, donec vel libere iuxta fe inuicem labi et diffluere poffint, vel fublato prorfus earum nexu per auras diffipari. 2) Euaporationum et exhalationum caufam plerumque in eo confiftere, vt pro vario aeris ftatu, varia vi concurrente calorifico, eoque centrifugo fimul motu, particulae corporum auulfae diffipentur. 3) Corpora fluida et liquida femper calorem in fe, licet minimum, habere, quantumuis frigida appareant.

§. 25. Corpus A agens in corpus B maiorem celeritatem motus illi imprimere non poteft, quam habet ipfum. Si igitur corpus B fuerit frigidum et immerfum corpori fluido calido A; particularum corporis A motus calorificus excitabit in motum calorificum particulas corperis B; verum in particulis corporis B celerior motus excitari non poterit, quam qui eft in particulis corporis A, atque adeo corpus frigidum B immerfum corpori A maiorem calorem, quam A habet, concipere non poffe patet. Hinc autem perfpicitur ratio ob quam ftannei vafis, aqua pleni, fundum validae adeo flammae, qua alias hoc metallum facile funditur, refiftere folet. phaenom. 13 phaenom. 14

Etenim quamuis flamma particulas ſtanni in celerrimum motum ſollicitet; aqua tamen ſuperincumbens, cum eam celeritatem motus calorifici acquirere non poſſit, qua ſtanneae particulae indigent ad ſuam cohaeſionem infringendam, retardat ergo earum motum gyratorium, nec fundi metallum permittit.

§. 26. Reddenda hic videtur eſſe etiam ratio extenſionis corporum, quae plerumpue cum calore eorum augeri et minui ſolent. Verum quoniam ea non a calore immediate, ſed ab aëre elaſtico poris corporum incluſo proficiſcitur; ad aliam ergo occaſionem huius phaenomeni expoſitionem reſeruamus. Ceterum nulla motus celeritas tam pernix aſſignari poteſt, qua alia maior mente non concipiatur. Quod cum etiam ad calorificum motum iure referri poſſit; caloris ergo ſummus et vltimus gradus poſſibilis reſpectu motus non eſt. Contra vero idem motus eouſque diminui poteſt, vt tandem corpus prorſus quieſcat, nec vlla motus diminutio vlterius ſubſequi poſſit. Summum igitur gradum et vltimum frigoris in abſoluta quiete a motu gyratorio particularum conſiſtere et dari poſſe neceſſe eſt.

§. 27. Quamuis autem ſummus frigoris gradus ſit poſſibilis, verum documenta non deſunt, quibus aſſeritur, illum in hoc orbe terraqueo haud vſpiam dari. Etenim omne, quod nobis frigidum apparet, eſt ſolummodo minus calidum, quam organa noſtra, quibus ſentimus. Ita frigidiſſima aqua eſt adhuc calida, cum glacies, in quam aqua acutiore gelu conſtringitur, ſit illa frigidior, hoc eſt minus calida. Profecto ſi cera, quae liqueſcit, ſit vere calida

lida, cur igitur aqua, quae nobis frigidiſſima apparet, re-vera calida non ſit, cum nil aliud ſit quam glacies lique-facta. Nec tamen putandum eſt congelationem corporum ſummi frigoris eſſe criterium: etenim metalla ſtatim poſt liquefactionem conſolidata ſunt etiam glacies ſui generis, ſunt tamen ita calida, vt corpora cambuſtilia ſibi admo-ta accendant. Ceterum dantur corpora fluida, quae nullo gradu frigoris cognito congelantur. Quorum flui-ditas quoniam a motu calorifico proficiſcitur (§. 24.) pa-tet igitur fluida illa corpora calore, quantuscunque ille ſit, ſemper gaudere. Porro corpora eundem gradum ca-loris habere ſolent, quo praeditum eſt medium, in quo illa tempus notabile verſantur. Cum vero aer ſemper et vbique fluidus obſeruatur; adeoque calidus (per demonſtrata) exiſtit, omnia ergo corpora, quae ambit atmoſphaera tel-laris, ſunt calida, licet ſenſibus frigida appareant; adeoque ſummus gradus frigoris in globo noſtro terraqueo non datur.

§. 28. Cum itaque motum inteſtinum gyratorium materiae cohaerentis cauſam caloris eſſe a priori demon-ſtratum et a poſteriori confirmatum habeamus; ad mentem, quam moderni philoſophi plerique de calore habent, examinandam conuertimur. Tribuitur hac noſtra tem-peſtate caloris cauſa peculiari cuidam materiae, quam plerique calorificam, quidam aetherem, non nulli etiam ignem elementarem appellant. Eo autem maior quanti-tas eius in quocunque corpore adeſſe dicitur, quo ma-ior in eo calor obſeruatur, ita vt pro diuerſo gradu ca-loris eiusdem corporis etiam quantitas materiae calorificae in illo augeatur minuaturue. Et licet aliquando intensitate motus huiusce materiae corpus ingressae calorem in eo augeri doceatur, maxime tamem ingressus et decessus illius in diuersa quantitate pro genuina causa aucti vel diminuti caloris celebratur. Quae opinio cum in multorum mentibus tam altas egit radices, tantumque invaluit, vt passim in Physicorum scriptis legas, memoratam superius materiam quasi phyltro quodam amatorio allectam in corporum poros irruere, aut contra horrore quasi exagitatam ex poris erumpere; quamobrem muneris nostri esse ducimus hanc hypothesim ad examen reuocare. Praesentim autem fontes ipsi lustrandi sunt, ex quibus haec opinio premonauit. Eorum autem praecipui sunt quatuor, quos equidem ad alia potius naturae phaenomena diluenda deriuari oporteret.

§. 29. Post quam calescentium corporum phaenomena attentius considerare coeperunt philosophi, facile animaduerterunt, crescente calore, etiam volumen corporis cuiusque augeri. Et cum nihil praeter calorem illis accessisse certo scirent, atque elementaris antiquorum ignis animis adhuc inhaereret; concludere inde non dubitarunt, materiam aliquam igni propriam, poros corporum, cum incalescunt, intrare, eaque distendere; qua decedente eadem refrigerari, contrahi. Lubenter equidem his assensum praeberemus, si quam facile sit haec supponere, tam pronum quoque esset ostendere id, quo calorifica materia in corpora subito incalescentia compellatur. Qui enim fit, quaeso, vt hyeme frigidissimo gelu late omnia occupante, aut

aut in gelidiſſimo fundo maris (*) adeoque iuxta hanc hypotheſim, calorifica materia fere prorſus deficiente, puluis pyrius exigua ſcintilla, repente nata, accenſus ſtupenda flamma ſubito expandatur? Vnde et qua tam mirabili virtute ignea illa materia momento temporis contrahitur? Verum tamen conuolet ea ocyſſime, quacunque de cauſa id fiat, ex remotiſſimis etiam locis et puluerem pyrium accendat, expandat? Sed tum neceſſum erit, aut alia corpora illum ambientia aduolante igne prius quam ipſum calefieri et expandi, aut ignem illum aduolantem extra puluerem nec calefacere nec expandere aliquid, adeoque naturae ſuae obliuiſci fatendum erit, quorum tamen prius experientiae, poſterius ſanae rationi apertiſſime repugnat.

§. 30. Ceterum rerum natura ita comparata eſt, vt cauſa creſcente, etiam effectus eius augeatur, et contra eadem decreſcente effectus quoque minuatur. Quamobrem vbi in duobus corporibus idem gradus caloris obſeruatur, tum, ceteris paribus, etiam idem extenſionis incrementum aut decrementum in vtroque eſſe debet. At quanta in hoc diuerſitas deprehenditur! Praetereo aerem, qui a gradu congelationis ad ebullitionem aquae tertia ſui parte extenditur, cum ea interim vna vigeſima ſexta parte totius voluminis augeatur. Ipſa eiusdem fere liquiditatis corpora, vt Mercurius, aqua, ſpiritus vini, et olea diuerſa, item et ſolida, vt metalla, vitrum etc. mirum quantum diſcriminis habent inter extenſionis incrementa in eodem gradu caloris acquiſita. Ne hic tamen maiorem par-

(*) Boerhaaue Elem. Chym. par. 2. ex Sinclairi ante grauitatis p. 302.

partium cohaesionem expansionis impedimento esse quis putet: quippe chalybem fortiore partium cohaesione gaudere quam ferrum nemo est qui ignorat, maiora tamen incrementa extensionis capere, ferrum autem minora experientia docuit. Sic et aurichalcum, corpus cupro durius, eodem calore magis quam id expanditur. Nec etiam aliqua retardatio incalescentiae a maiore pondere profecta, aut quaecunque alia circumstantia, quae in diversis corporibus expansionis impedimento foret, fingi potest, quin exempla contraria occurant, quae ficta destruant, quam diu expansio calefactorum ingredienti materiae tribuitur. Sed haec in diuersis. At vnum idemque corpus aliquando crescente calore in minus spatium contrahitur, eg. aqua ex glacie nata est specifice grauior illa, vt etiam ad insignem gradum calefacta eandem fundum petere prohibeat. Sic ferrum et pleraque alia corpora, quamdiu dura sunt, iisdem ipsis liquefactis ob maius volumen innatant, quamuis eum gradum caloris non dum habeant, quo liquescere solent. Ex his autem omnibus clarissime apparet, expansione incalescentium contractioneque eorum, quae refrigerantur, calorificae materiae miram illam peregrinationem minime probari.

§. 31. Sed hunc pugilem propria sua extensionis vastitate iam labefactum alius forte qui succedit, eriget, et maiore grauitate nos opprimet. Nempe non molis modo, sed etiam ponderis incremento vagabundus ille ignis praesentiam suam in corporibus demonstrare Philosophis videtur, praesertim Chymicis. Celeberrimus Robertus

tus Boyle primus, ni fallor, experimentis docuit corpora per calcinationem pondere augeri (*) adeoque ignis et flammae partes ſtabiles et ponderabiles reddi poſſe. Quod ſi de igne aliquo elementari intelligi poſſet, firmum haberet infirmanda hic opinio propugnaculum. Verum tamen pleraque fere omnia experimenta illius, circa augmentum ponderis per ignem inſtituta, huc redeunt, vt vel flammae, qua corpora vſtulauit, aut aeris, calcinationis tempore ſuper corpus calcinandum fluentis, partes graues eſſe iis demonſtretur. Etenim vbi lamina metallica flamma ſulphuris accenſi vſtulatur, intumeſcit quidem et pondere augetur; nihil aliud tamen aucti ponderis cauſa eſt, praeter acidum ſulphuris, quod a phlogiſto liberari et campana colligi et capi ſolet, tum poros cupri et argenti penetrat, illiſque concretum, pondus auget. Sic vbi plumbum in minium calcinatur, flammam atram et fuligine turgidam in liquefactum metallum conſulto dirigunt artifices: haec enim ſola plumbi calcem rutilo illo colore ornat, et pondus eius cum lucro artificum auget. Reliqua laudati auctoris experimenta in mantiſſa opuſculo ſubiuncta maioris quidem momenti eſſe videntur, verum omni ſuſpicione prorſus libera non ſunt, cum auctor ipſe illis praeſto non adfuerit, verum operatori cuidam ſaepius peragenda remiſerit. At eſto, quod praeter partes corporis accenſi vel particulas in aere circumuolitantes, qui ſuper calcinata continuo fluit, accedat metallis calcinatione durante quaedam alia materia, quae pondus calcium auget. Quoniam autem calces ab igne re-

 mo-

(*) In tractatu de ponderabilitate ignis et flammae.

motae acquiſitum pondus etiam frigidiſſimo gelu continuo ſeruant, nullum tamen exceſſum caloris in ſe oſteredunt; accedit igitur calcinationis actu materia quaedam corporibus, verum non illa, quae igni propria eſſe praedicatur. Cur enim ea in calcibus naturae ſuae obtiuiſceretur, non video. Porro calces metallorum in formam metallicam reductae pondus acquiſitum a mittunt. Cum vero reductio aeque ac calcinatio eodem imo fortiore igne perficiatur, nulla profecto ratio reddi poteſt, cur idem ignis modo corporibus ſemet inſinuet, modo ex iiſdem excutiatur. Ceterum non abſimilia experimenta inſtituerunt viri celebres Boerhaauius (*) et du Clos (**) quae contrarium tueri videntur. Prior enim ferri libras quinque et vncias octo, vt ante ignitionem ita quoque ignitum et extinctum ponderauit, ſed nullum ponderis incrementum decrementumue deprehendit. Poſterior ponderis augmentum, quod mineralibus per calcinationem accedit, deducit a partibus ſulphureis, aeri (vt ſupra diximus) innatantibus, qui ſuper mineralia ad calcinandum expoſita continuo fluit, et illas igne ita reſolutis inſinuat; id autem experimento demonſtrat: nimirum quod ex regulo antimonii in aere libero calcinato ope ſpiritus vini tincturam rubram extrahi obſeruauit, qua ſeparata, maſſam relinqui eius ponderis, quod regulus habebat ante calcinationem. 2) Regulum antimonii aliter, nempe ſine augmento ponderis, calcinatum eiusmodi tincturam non ſuppeditare. Firma igitur non ſunt etiam illa argumenta, quae ad peculiarem igni mate-

(*) Elem. Chim. Par. 2 deigne exper. 20.
(**) Memoires de l'Acad. Royl. des Sciences année 1667.

materiam vindicandam ex augmento ponderis calcinatorum corporum afferuntur.

§. 32. Radii ſolis ſpeculo vitreo cauſtico excepti et collecti non minus valide vrunt, quam viuide lucent, qua re ad oculum et quidem ſole teſte demonſtrari creditur, calorificam materiam ſeu ignem elementarem a ſole profectum in foco condenſari, eoque ſplendorem et calorem intendi. Facile autem apparet ſupponi hic luminis materiam a ſole tanquam a fonte fluminis inſtar diffundi. Quae hypotheſis ei ſimillima eſt, ac ſi aerem a corpore ſonoro eadem, qua ſonus propagatur, celeritate quaqua verſum diffundi doceretur. Nec minus euidens eſt ibidem aetherem et radium confundi, qui tantum inter ſe differunt, quantum motus et materia inter ſe diuerſa ſunt, atque adeo ex foco ſpeculi condenſationem materiae igneae remoueri et conſpirationem motus calorifici ſubſtitui poſſe liquet. Materiam aetheris in foco vitri vel ſpeculi cauſtici condenſari qui affirmat, is, me iudice, non aliter ſentit, ac ſi contenderet in foco fornicis elliptici non radios ſonoros conſpirare, ſed materiam aeris ipſam comprimi. Ceterum focum ſolarem non propter maiorem denſitatem materiae aethereae, ſed propter motum eius calorificum urentiſſimum eſſe focus a lunari ſidere reflexorum ſolis radiorum manifeſto indicat. Is enim cum ſit luccidiſſimus, vrentiſſimum quoque eſſe oporteret, ſi ille ipſe et calor a denſitate materiae proficiſceretur. Sed abeſt calor; aut ergo materiae aethereae condenſatio, aut conſpiratio motus eius lucidum focum efficiat. Materiae condenſationem excludere eſt pugnare contra hypotheſim;

conſpirationem motus remouere eſt materiam igneam ſaepe frigidam, hoc eſt ignem non ignem eſſe, fatendum erit. Haec qui mente a praeiudiciis libera conſiderabit, nobiſcum ſentiet, aeſtu qui in foco cauſticae machinae generatur, materiam calori propriam minime demonſtrari poſſe.

§. 33. Sale culinari niui vel glaciei raſae mixto confici ſolet a Phyſicis materia, frigorifica ab effectu dicta, quod aquam ſibi in vaſe aliquo inſertam in glaciem conuertere ſoleat. Quod dum fit, nix ipſa cum ſale liqueſcit. Hinc rurſum concludi ſolet, materiam illam igneam ex aqua in niuem circumpoſitam demigrare et acceſſu illius hanc liqueſcere, illam vero ob deceſſum eiusdem in glaciem conſtringi. Eggregie quidem! Sed reſtat aliquid tentandum, priuſquam palmam nobis eripi patiamur. Inſere, quaeſo, niui thermometrum ſimul cum aqua in vitro contenta, admiſce niui ſalem; videbis quidem aquam in glaciem conuerti et mixturam frigorificam deliqueſcere, ſpiritum tamen in thermometro deprimi, manifeſto indicio, eo ipſo tempore, quo aqua conglaciatur, mixturam frigorificam frigidiorem reddi, adeoque nullum ignem elementarem in eam ex aqua prorumpere; ſed potius niuem tepidioris aquae contactu prius reſolutam ſalem aggredi, ſoluere, refrigerari, maioremque gradum caloris, quam aqua in glaciem abiens habere ſolet, aquirere, inde aquam puram in vaſe cangelaſcere, ipſam vero niuem ob ſalem abſorbtum liquidam perſeuerare. Quis enim ignorat in aqua ſale impregnata aliam puram vitro incluſam ad gradum thermometri Fahrenheitiani 26 in glaciem conuenti, ſalſa liquida manente. §. 34.

§. 34. His omnibus nil aliud contendimus, quam calorem corporum condenſationi ſubtilis alicuius et ad illum dunctaxat deſtinatae materiae vindicandum non eſſe, ſed eum conſiſtere in motu inteſtino gyratorio materiae cohaerentis corporis calidi; eoque ipſo non ſolum aſſerimus etiam ſubtiliſſimam illam materiam aetheris, qua omnia ſpatia a ſenſibilibus corporibus vacua replentur, eiusdem motus et caloris eſſe capacem; verum etiam affirmamus, illam impreſſum ſibi a ſole motum calorificum etiam telluri noſtrae et reliquis corporibus mundi communicare, eaque calida reddere, atque adeo eam eſſe medium, quo corpora a ſe inuicem remota, nullo ſenſibili intercedente, calorem communicent.

§. 35. Remota materia calori alias enice conſecrata finis verbis imponendus eſſet, ſi a parte contraria novum nobis negotium non inſurgeret. Non enim deſunt, qui etiam frigori ſpecialem ſubſtantiam dicauerint, nimirum cauſam eius poſitiuam in ſalibus ſtatuerint, producto per ſolutionem eorum in aqua frigore moti. At quoniam iidem ſales etiam calorem non raro gignunt, vt ſal communis affuſo oleo vitrioli ſeruet et incaleſcit; id circo nos quoque pari iure caloris cauſam ſalibus ad ſcribere poſſemus, ſi tam incondite diſputare non indignum eſſe putaremus.

TENTAMEN THEORIAE DE VI AERIS ELASTICA,

AVCTORE
Michaele Lomonoſow.

§. 1.

Poſtquam antliae pneumaticae vſus innotuit, mirum quantum ſcientia naturalis cepit incrementum, ea potiſſimum parte, quae de natura aëris doctrinam complectitur. Proprietates enim illius, quae ante ſeculum prorſus ignotae fuerant, iam hodie non ſolum cognitas habemus, verum etiam mathematicis legibus definitas et in ſummo fere faſtigio diſtinctae cognitionis conſtitutas miramur. Quamuis autem elaſtica eius vis ſaepius quam reliquae proprietates illius Phyſicorum ſcriptis celebratur, et cuilibet forum ſcientiae naturalis ingredienti inter palmarias rerum naturalium qualitates ſeſe offert; nihilo tamen minus cauſa illius non dum ſatis perſpecta habetur, in eaque explicanda etiam celebrium naturae ſcrutatorum ingenia caſſo molimine torſa ſunt. Vnde ſcriptores Phyſici plerunque intacta elateris cauſa in ſolis effectibus illius deſcribendis acquieſcunt. Aut ſiqui cauſas aſſignant; eae tamen et inualido pede nituntur, et phaenomenis circa elaterem aeris obſeruatis explicandis non ſufficiunt. Plerumque autem eo ipſo plane nullae ſunt, quod nihil praeter quaeſtionem ipſam, verbis duntaxat mutatis in ſe contineant.

§. 2. Prae omnibus vero, quae hucusque ex Physicorum scriptis nobis innotuerunt, hypothesibus, ad explicandam vim aeris elasticam formatis, plausibiliores esse videntur eae, quae legibus motuum centralium superstructae sunt. Non enim eadem quaestio variata phrasi involuta in illis pro causa ipsa affertur, aut quae proponuntur a motus regulis aliena sunt. Et nos suscepto hoc negotio actum equidem ageremus; si non quaedam ad huc desiderari, aut verius exundare in praeclaro hoc invento videremus.

§. 3. Superfluum nempe esse censemus, vt ad elateris aeris causam exponendam in auxilium vocetur eiusmodi peregrinum fluidum, qualia plerique consuetudine seculi, subtilium materiarum feracis, ducti, iusto saepius ad explicanda rerum naturalium phaenomena vsurpare solent. Ipsius enim aëris subtilitate atque agilitate contenti, in propria eius materia elateris causam quaerimus. Id autem non iniuria facere nos aestimabit, quicunque meditationes nostras de caloris causa legit, et quae sequuntur, cum iisdem conferet.

§. 4. Vt vero in suscepto hoc negotio iusto ordine progrediamur, a clara notione elateris aeris incipimus: id circo et definitionem tractationi huic praemittimus atque vim illam in conatu aeris quaqua versum sese expandendi consistere dicimus. Hinc autem concludimus particulas aëris insensibiles a se inuicem recedere, quam primum remotis obstaculis re ipsa expanditur. Vbi tandem duo consideranda veniunt, natura particularum ipsarum et vis qua a se inuicem remouentur.

§. 5.

§. 5. Particulae aëris duplici modo concipi poſſunt, nimirum vel ſingulae ita ſunt comparatae, vt vi compoſitionis alicuius, organicaeve ſtructurae partes ſuas, ex quibus conſtructae ſunt, extendere nitantur, adeoque ſingulae in maius et minus ſpacium expandi contrahique poſſint; aut ab omni compoſitione phyſica organicaque ſtructura alienae, non ſolitariae, ſed in aggregato elaſticam virtutem exerceant.

§. 6. Prius praeter id, quod ſimpliciſſimo naturae ingenio ſit maxime incongruum, etiam pelluciditatem et inconciſſam aeris durabilitatem tollere videtur. In compoſitis enim et organicis dari debent partes, quae vi caloris, ad excitandum maiorem elaterem, magis magisque exagitentur. Vnde cum aer calore ſolis rareſcit, fiat neceſſe eſt, vt radii illius quamlibet particulam penetrent. Quibus quoniam ex fluido aethereo ambiente (vel ſi mauis ex vacuo) in ſolidas particulas, quae in illo ſubſident, adeoque ſpecifice grauiores ſunt, infinities tranſeundum erit; id circo fieri id nequit, niſi in qualibet particula aeris in ingreſſu et egreſſu refractionem patiantur. Et quamuis in particulis eiusmodi refractio forte fiat infinite parua; a ſuperficie tamen atmoſphaerae ad tellurem vsque ipſam in particulis numero infinitis refracta lux ita foret debilitata, vt nos ſempiterna in nocte verſari oporteret. Id autem ſimili exemplo confirmatur: particulae enim ſeu moleculae aquae ex atomis eius aggregatae, quae nubes conſtituunt, etiamſi leuiter admodum lucem ſingulae refringunt, et in ſpatio non nimis magno pelluciditati aëris non officiunt; denſius tamen et altius congeſtae piceo colore coelum obducunt, et lucis meridianae vſum fere omnem aliquando prohibere ſolent.

§. 7.

§. 7. Denique vbi tantas aeris viciſſitudines, rapidiſſimos motus, perniciſſimas colliſiones et fortiſſimas frictiones cum corporibus duriſſimis, premente integra atmoſphaera conſideramus, et Robervallii experimentum, qui per 15 annos aerem valide compreſſum detinuit et tandem elaterem eius illibatum invenit, in mentem revocamus; tum ſingulas particulas aëris, tam ſubtiles, organicas aut compoſitas eſſe et multis partibus ſtupendae exilitatis, ſumme mobilibus indeque leviſſime inter ſe connexis conſtare, ne concipere quidem poſſumus. Id circo quod §. 5 poſterius eſt, amplectimur, nullique dubitamus *particulas aeris*, nempe eas, *quae in exercendo elatere a ſe invicem recedere nituntur*, *ab omni compoſitione Phyſica*, *atque organica ſtructura liberas*, *et*, vt tantis viciſſitudinibus ferendis, ſtupendis que effectibus producendis pares ſint, *ſolidiſſimas atque nulli inflexioni obnoxias eſſe*; adeoque iure *atomos* vocari debere. Quae quoniam in res corporeas naturaliter agunt, ipſae etiam ſint corporae atque *extenſae*, neceſſe eſt.

§. 8. Quod ad figuram atomorum aeris ſpectat, nullam equidem aliam agilitati, firmitati, ſimplicitati atque molliſſimae aeris naturae magis convenire poſſe cenſemus, quam quae ad ſphaericam proxime accedit; idque ex reflexione aeris in fornicibus ellipticis obſervata non obſcure colligimus. Quoniam autem calidus aer frigida, quae ambit corpora calefacit; atomi ergo illius particulas corporum contiguorum in gyratorium (qui calorem efficit (*) motum excitant. Hoc tamen fieri non poteſt,

(*) vide meditationes noſtras de cauſa caloris.

quin oriatur inter illas frictio ; oriri vero frictio non potest, *nisi atomi aereae sint asperae.*

§. 9. Hoc autem rerum naturae maxime consentaneum est. Quippe in omnibus corporibus mundi totalibus atque partialibus, ea figura, quam quodlibet peculiarem sibi habet, nuspiam tam adaequata reperitur, quin inaequalitates aliquas in se prodat. Quae quidem ita adsunt, vt ipsa figura, ob pusillam rationem illarum ad totum, seruet suam speciem. Quemadmodum itaque natura telluris nostrae globum montibus, et corpora illius partialia, etiam quo ad sensum laeuissima, et si cum illa comparentur, perpusilla, ad vsus suos inaequalitatibus aspera esse voluit; ita quoque aereas atomos, licet ab omni compositione physica alienas, industria eiusdem naturae, in simplicitate quoque sua callidae, prominentiis subtilissimis firmissimisque ad effectus vtilissimos instructas esse ex analogia colligitur.

§. 10. Remouentur autem atomi aeris elaterem exercentes a se inuicem vel immediata quadam reciproca actione, aut mediante aliquo fluido inter illas diuersante, adeoque multo subtilioribus particulis constante. Vtrum horum in elatere producendo locum habeat, disquirendum nobis incumbit. Ad hoc autem inseruiet nobis proprietatum virtutis elasticae primaria: scilicet, quod aër eo maiore vi elastica gaudeat, quo magis vi externa condensatur, quoque propius atomi eius ad se inuicem accedunt.

§. 11. Ponamus vero primum particulas aeris dispergi actione alicuius fluidi subtilissimi inter illas hospitantis. Quando igitur aer inuase aliquo solido in minus spatium vrgetur, flui-

fluidum illud ipſum ſimul comprimitur aut non comprimitur. Si prius, erunt 1) latera vaſis ſolidi ſubtiliſſimo illi fludo imperuia, adeoque particulae eius debebunt eſſe vix aut neuix quidem aereis atomis ſubtiliores contra dicta §. 10; 2) Fluidum hoc aget ipſum in cohibentia vaſa, adeoque non erit neceſſarium, vt particulae aeris fluido illi innatent, cum illud in effectus elateris in corpora exercendos ſolum ſufficiat; 3) particulae illius conatum habebunt a ſe inuicem recedendi, quare ratio huius rei denuo reddenda erit, atque adeo propoſita quaeſtio haud ſoluta manebit. Sin vero poſterius, tum 1) dictum fluidum in parietes vaſorum etiam ſolidiſſimos nullam fere vim exercebit, quare nec in tenuiſſimas aeris atomos, quamcunque vim leuitate et volubilitate ſua facile eludentes, agere quid poterit; 2) vbi aer in vaſe campreſſus condenſabitur, fluidi quod vaſa iam facillime penetrat, eadem denſitate manente; erit atomorum aeris quantitas in maiore ratione ad quantitatem fluidi, quam fuit ante compreſſionem. Id circo vis fluidi pro ratione quantitatis eius minor erit, minores quoque in atomos aeris effectus exſeret; atque adeo aere vi externa in minus ſpatium compreſſo elaſtica eius virtus decreſcet.

§. 12. Haec omnia euidentiſſime demonſtrant vim aeris elaſticam a fluido aliquo inter eius particulas diuerſante proficiſci non poſſe. Cumque dicta vis pro ratione denſitatis materiae aeris propriae, caeteris paribus creſcere et decreſcere ſoleat; dubitandum itaque non eſt *illam ab immediata quadam mutuaque atomorum eius actione proficiſci.*

 §. 13.

§. 13. Corpus vnum in alterum immediate agere nequit, nisi ipsum contingat; atomi igitur aeris vbi in se mutuo immediate agunt, in contactu sint, necesse est. Porro quoniam aer noster atmosphaericus vi externa adactus tricesies amplius minore spatio comprehendi potest; id circo inter atomos eius dantur interstitia a propria materia eius vacua, quibus plurimae eiusmodi atomi contineri possunt: vnde illae in contactu non sunt. Duae istae apparenter contradictoriae, verissimae tamen, propositiones conciliari aliter nequeunt, nisi hi duo contrarii status atomorum aeris tempore distinguantur; nempe vt ipsae alternis vicibus illos subeant. Alternatio vero istiusmodi ita fiat necesse est, vt nec in omnibus atomis simul idem status contingat, nec sensibile aliquod tempus duret. Alterum enim stupendas in extensione mutationes saepius produceret, alterum vero efficeret, vt expansiones aeris tardae nimium et otiosae redderentur. Patet igitur atomos aeris singulas insensibilibus tempusculis cum aliis sibi vicinis confusa reciprocatione collidi, et cum aliae in contactu sunt, alias tum a se inuicem resilire et in reliquas viciniores tandem incurrere, denuo resulturas, ita vt eiusmodi frequentissimis reciprocisque arietationibus a se inuicem continuo pulsae seorsum dispergi nitantur.

§. 14. His expositis demonstrandum restat, quonam pacto atomi aereae in se mutuo ita agant, vt vna alteram retorqueat. Ad hoc autem non aliud quid argumenta suggerere potest, quam eiusdem elastici aëris palmaria proprietas. Scilicet, quod notissimum est, crescente aeris calore etiam elaterem eius magis magisque inualescere, decre-

decreſcente vero eundem ſimul debiliorem reddi, ita, vt caeteris paribus, in ſummo, quem nouimus, calore elater maximus, in minimo vero, ſeu frigore, quod hunc vsque in diem obſeruatum eſt, maximo, minimus conſtante lege deprehendatur. Vnde patet, atomos aereas pro ratione aucti vel diminuti caloris per mutuum contactum fortius aut remiſſius in ſe inuicem agere, atque adeo calore, ſi vnquam fieri poteſt, prorſus ceſſante, illas omni laudata actione deſtitui debere. Hinc *autem* ſequitur *mutuam actionem atomorum aeris a ſolo calore proficiſci.*

§. 15. Calor conſiſtit in motu gyratorio particularum corporis calidi (*) quidquid igitur calor efficit, a motu gyratorio particularum corporis calidi proficiſcitur, atque adeo mutua atomorum aeris actio pendet a mutu gyratorio earundem. Verum duo corpora ſphaerica abſolute laeuia in contractu iuxta ſe inuicem poſita et quam ocyſſime in gyrum acta in ſe mutuo ita agere non poſſunt, vt a ſe inuicem diſſiliant. Demonſtrata igitur ſuperius §. 8. veritas denuo confirmatur, et prouidae naturae ingenium elucet, quae vnico eodemque medio varios effectus in corporibus ſaepiſſime producere ſolet, vti hic atomorum aeris aſperitate et calorem eius corporibus aliis communicat (§. 8) et elateri exercendo inſeruit.

§. 16. Sint igitur duae atomi aeris A et B a ſe inuicem diſtantes ita vt A ſit ſuperior atomo B. Vtraque ocyſſime moueatur in gyrum ita, vt pars ſuperficiei atomi A atomum B ſpectans feratur ſecundum directionem contrariam ei, verſus quam dirigitur pars ſuperficiei atomi B, ſpectans atomum A, prout telorum ſigna in- Tab. VII. Fig. 1.

(*) Meditationes de calore.

indicant. Durante gyratorio mutu, decidat vi gra-
Fig. 2. vitatis atomus A ſuper atomum B; in contractu
Fig. 3. inaequalitates coincident ita, vt vel prominentia *a* atomi A incidat in cauitatem *b* atomi B; vt eſt in figura 2; vel premat etiam prominentiam *d* atomi B, quemadmodum figura 3 repraeſentat. In caſu priore prominentia *a* atomi A ex cauitate *b* aſcenſura prominentiam
Fig. 4. *f* ſuperare debet, adeoque atomi A et B a ſe inuicem recedent per diſtantias *g f* vel *a b*, eo tempuſculo, quo tendentes ſecundum contrarias directiones ſuperficies atomorum A et B arcum *g a* percurrunt. In caſu poſteriore atomi in contactu eousque iuxta ſe procedent, donec prominentia
Fig. 3. *a* atomi A inciderit in cauitatem *e* atomi B. Deinde vero ſequentur omnia, quae fieri debent in caſu priore.

§. 17. His ita comparatis atomi aeris cum ſingulae ſint graues, vi grauitatis ergo vna ſupra alteram cadat neceſſe eſt. Quo facto tandem motu gyratorio celeriter rotatae poſt contactum ſtatim ſeorſum repellentur, eo modo vt paragrapho ſuperiore explicauimus. Quoniam autem in tanta frequentia atomorum fieri non poteſt, vt quaelibet cadat in ſummum punctum ſuperficiei inferioris atomi; id circo actio earum repulſiua ſaepiſſime ſecundum lineas ad horizontem plus minusue inclinatas fieri debet, atque adeo vis aeris elaſtica verſus omnes plagas ſeſe exſerere.

§. 18. Explicatam hactenus atomorum actionem oſtendunt etiam turbines, quibus pueri ſuper glacie ludere ſolent. Duo enim eiusmodi turbines in gyrum cellerrime acti, poſtquam tardo quidem paſſu in contactum admoti fuerint, rapidiſſime reſilire ſolent; quae repercuſ-

ſio

ſio ab inaequalitate ſuperficierum prouenit. Eae enim quo ſinuoſiores ſunt in contactu, eo pernicius turbines reſiliunt. Id vero ter aut etiam quater inter duos turbines fieri poteſt, antequam gyratione ceſſante concidant, quod fit, vbi flugellis concitari deſinunt.

§. 19. Quamuis propoſita hic theoria non infirmis nititur argumentis; maior tamen euidentia inde nobis eluceſcet, ſi proprietates aeris et phaenomena, quae in eo obſeruari ſolent, per illam ita explicari patuerint, vt cauſae eorum clare imo etiam diſtincte percipiantur. Optima namque illa theoria eſt, quae non ſolum cum nulla proprietate eius rei, pro qua explicanda condita eſt, pugnat; verum etiam earum explicatione non ſecus ac firmiſſimis vtitur argumentis ipſam corroborantibus, id circo et noſtram in ſequentibus examinamus, primarias aëris proprietates variaque phaenomena excutinentes.

§. 20. Atmoſphera conſtat ex infinito numero atomorum aeris, quarum inferiores repellunt ſuperincumbentes atomos ſurſum verſus tantum, quantum omnes reliquae ad ſummam vsque ſupeficiem atmoſphaerae ſuperingeſtae cedunt. Atomi reliquae, quo longius a terra diſtant, eo minorem contra vim arietantium et grauium atomorum nituntur, ita vt ſupremae ipſam ſuperficiem atmoſpaerae occupantes propria tantum grauitate ſua deorſum premantur, atque a proxime inferioribus repercuſſae, tamdiu inſublime ferantur, quamdiu impetus a repercuſſione impreſſi grauitatem earum ſuperant. Qua tandem praeualente deorſum labuntur ab inferioribus rurſus repercutiendae. Hinc autem ſequitur 1) aerem atmoſphaerae eo rariorem eſſe debe-

debere, quo remotior eſt a centro telluris, 2) aërem in infinitum expandi non poſſe: dari enim debet terminus, vbi grauitatio atomorum aeris ſupremorum vim, mutua colliſione ipſis impreſſam, ſuperet.

Fig. 4. §. 21. Superficies atomorum aeris A et B quo celerius percurrunt arcum *ag*, eo ocyus atomi ipſae abſoluunt diſtandiam *ab* vel *fg* a ſe inuicem recedendo, adeoque maiorem celeritatem per repercuſſionem acquirunt, fortius in obſtantia corpora agunt, iisque remotis longius a ſe inuicem diſſiliunt. Quoniam autem motis celerius ſuperficiebus, etiam atomi aeris celerius rotantur, gyratorio autem motu accelerato etiam calor increſcit (*); vnde mirum non eſt aera calidiorem maiorem vim elaſticam habere.

§. 22. Denique experientia docuit ſummum, qui in exteris ad hybernum occaſum ſolis ſitis regionibus obſeruatur, frigoris gradum ſuperari rigore hyemis huius noſtrae regionis, qui tandem ſaeuiſſimo gelu in Iacutarum regione omnia fere fluida praeter aerem conſtringenti multum cedit. Ratione autem conſequimur (vt in meditationibus noſtris de cauſa caloris et frigoris oſtenditur) nullibi in hoc telluris noſtrae globo abſolutum frigus dari poſſe, id circo neque atomos aereas vſpiam a motu gyratorio aliquando ceſſare, atque adeo, neque aërem ſine elatere reperiri poſſe patet.

§. 23. Sonus producitur, quando corpus aliquod in motum tremulum excitatum, eundem imprimit particulis aeris ſibi proximis, quae cum ſequentibus continua ſerie

(*) Medit. de cal.

ſerie eum communicant ad diſtantiam vi percuſſionis proportionalem. Quoniam autem atomi aeris plerumque a contactu remotae ſunt; neceſſe eſt ergo, vt quaelibet atomus ad excitandum in altera motum ſonorum, ſibi a corpore ſonante impreſſum, ad eandem primo accedat atque tempuſculum infinite quidem paruum in motu conſumat, priusquam ictum illi impingat, quae infinite parva tempuſcula ab atomis numero fere infinitis in notabiliore diſtantia ad ſucceſſiuam communicationem adhibita infinities ſumta ſenſibile aliquod temporis momentum efficient. Vnde neceſſe eſt, vt ſonus poſt ictum, a quo producitur, notabili interuallo temporis e longinquo audiatur.

§. 42. Quando aer premit ſuperficiem alicuius corporis; cuius pori maiores quidem ſunt atomis aeris, diametros tamen habent minores diſtantiis, quae tremulatione illarum deſcribuntur; tum atomi aeris per repercuſſionem ad orificia pororum in peculiarem, quendam motum dirigantur, neceſſe eſt. Etenim ſit Porus P inter particulas A et B in ſuperficie corporis ſolidi, vel etiam fluidi denſioris, ſitus, quam premit aer; feriat atomus aliqua aeris particulam A ex *a* in *b*, ab illaque reſiliat verſus *c* ita vt lineam *m m* ſecet; eodem quoque modo incurrat alia aeris atomus in particulam B ex *d* in *e* et reſiliat verſus *c* ita vt linea *e c* cum *b c* efficiant angulum *b c e*. Denique in currant aliae atomi aeris in loca ſuperficiei vtriusque particulae poro P propiora vsque ad *f* et *g*, nempe donec a particulis reflexae via ſua deſcribant lineas efficientes angulum apicem ſuum *b* Fig. 5.

 ex

ex poro exſerentem, vti linae *f h* et *g h* atque reliquae a poro P remotiores repraeſentat; tum omnes aeris atomi quae ſecundum has lineas tendunt, coniunctis et quidem pro ratione plani maioribus viribus atomos reliquas, quae inter lineas *n n* et *r r* in porum diriguntur, repellere debent, adeoque ab ingreſſu, quem in illum adornant, prohibere. Haec ſunt de iis, quae perpendiculariter in planum corporis incidunt; ſed pleraeque fere omnes aeris atomi, quae obliquae illud feriunt, ſimilem effectum producant neceſſe eſt. Feriat enim atomus aeris particulam A ex *a* in *b*; reſiliet ab illa verſus *c*. Percutiat denique alia atomus eandem particulam ex *d* in *e*; tum reſiliet et impinget in particulam B in *f* atque tandem reflectetur verſus *g*. Vtrumque tamen vrgebit contra atomos aeris in porum recta tendentes. Mirum igitur non eſt aerem multorum corporum poros, quibus atomos eius minores eſſe aliunde patet, vix aut ne vix quidem penetrare. Denique ſequitur aerem eo fortius a poris corporum arceri, quo labia eorum extrorſum verſus magis diducuntur; quod ex figura facile intelligitur.

Fig. 6.

§. 25. Sonus tremulo motu atomorum propagatur. Verum ſecundum noſtram theoriam elater conſiſtit in iſtiusmodi motu confuſo; quaeri igitur a nobis poteſt, cur non audiatur continuo quidam ſonus a continua vibratione atomorum elaſtici aeris. Ad quod reſpondemus, ſonum auri imprimi tympano vi aeris moto; eo autem quieſcente id non fieri. Tympanum vero quoniam tam externi aeris, quam interni, cauitatem ipſo munitam replentis, paribus iſtiusmodi tremulationibus ab vtraque parte afficitur, ideo in in aequilibrio constitutum, nullo motu agitatur, nullasque ideas sonus imprimit. Quamprimum autem hoc aequilibrium tollitur, subsequuntur etiam tympani motus sonusque percipitur. Id circo vasculo duro et concauo auri admoto resilientium alateribus eius atomorum elastici aeris tremulationes concentrantur, maiore vi in tympanum agunt, quam arietationes atomorum internarum in cauitate post tympanum inclusarum, atque adeo illo in motum hac ratione excitato, confuso quodam sono aurem afficiunt. Qui susurrus quoniam semper in conuexis percipitur, quandocunque auri admouentur; apparet igitur manifesto, in elastico aere atomos iugiter tremulo motu agitari.

§ 26. Aer tamdiu persistere potest elasticus, quamdiu causa elateris, hoc est mutua atomorum arietatio non cessat. Contra vero sublata quocunque modo hac actione, elaterem eius etiam tolli necesse est. Si igitur atomi aeris singulae seorsim, vel paucae simul particulis alicuius corporis inter se satis cohaerentibus in earum interstitiis ita comprehendantur, vt nec illas a cohaesione separare nec in se inuicem agere possint; aerem tum vi elastica orbari debere dubium non est. Porro cohaesione particularum corporis illius sublata, atomi aeris sibi relictae elasticam virtutem denuo recuperabunt. Et, si particulae corporis, quae aerem hac ratione in poris captiuum detinuerunt, diametros habent minores iis distantiis, quas percurrunt atomi aeris liberae tremulatione qualibet; tum aer ex poris liberatus in spatium expandetur maius, quam quod corpus accupat, in cuius poris latitabat.

§. 27. Id vero iam olim re ipſa experti ſunt viri celeberrimi et de orbe litterario optime meriti Robertus Boyle, Hermannus Boerhaaue, et recentius clariſſ. Haleſius, qui ſubtilem et elaſticam illam materiam, ex corporibus reſolutis productam, aerem appellare non dubitauerunt. Et nos met ipſos multiplex experientia docuit idem, praeſertim vbi ex ſolutione cupri, aqua forti inſtituta, elaſticum fluidum copioſe productum verum aere eſſe deprehendimus. Etenim in vaſe quo fluidum illud captum erat, continebatur alcali fixum, in aqua copioſe ſolutum, quo rutilus ille vapor, ſolutione durante aſcendens, acidoque ſubtili turgidus, capiebatur: huic enim nonnulli, qui renatum aerem ſuo nomine appellare metuunt, et neſcio quod Gas vocitare amant, elaſticam, vim fluidi tribuunt. Nihilo tamen minus per aliquot hebdommadas fluidum illud perſtitit, omnes veri aeris qualitates retinens.

§. 28. Plura quidem de aere in poris corporum deliteſcente, eaque varia, et quaedam forte noua proponere hic poſſemus; verum cum ea ad ſingulares eiuſdem captiui aeris effectus explicandos pertineant potius, quam ad cauſam elateris illius illuſtrandam; quamobrem illa ad peculiarem tractationem reſeruamus.

DISSER-

DISSERTATIO
DE ACTIONE MENSTRVORVM CHYMICORVM IN GENERE

Auctore M. Lomonosow.

§. 1.

Quamuis ab omni aeuo multam curam atque operam viri solertes ad Chymiam contulerint, et praesertim centum retro annis quasi conspirati eius cultores penitiorem corporum naturalium mixtionem certatim indagauerint; nihilominus tamen scientiae naturalis pars nobilissima profundis etiamnum tenebris inuoluitur et propria sua mole laborat. Latent genuinae rationes mirabilium phaenomenorum, quae per labores Chymicos natura producit, ideoque ignoratur adhuc rectior via, cuius ductu multa detegi possent, quae vtilia forent ad promouendam humani generis felicitatem. Equidem fatendum est, prostare plurima experimenta Chymica, de quorum certitudine non dubitamus; inde tamen pauca ratiocinia, in quibus iudicia Geometricis demonstrationibus exercitata acquiscere possunt, deducta esse iure querimur.

§. 2. Inter palmarias operationes Chymicas est corporum solutio, quae ante reliquas meretur, vt examini Physico subiiciatur; nam et in Chymicorum officinis corporibus examinandis saepissime inseruit, et in collegiis Physicis inter alia experimenta curiosorum oculis subiici solet; verum tamen causae eius nondum ita perspectae habentur, vt phaenomena, quae in hoc negotio sese exserunt, inde explicari possint.

§. 3. Qui ſolutionum cauſas vulgo exponunt, menſtrua omnia ſoluendorum corporum poros ingredi (quod tamen non vbiuis locum habere inferius patebit) et tandem eorum particulas abrumpere affirmant. Sed quibus viribus iſte abruptionis effectus producatur, praeter cuneos, vncinulos et alia neſcio quae inſtrumenta, quae menſtruis precario tribuuntur, haud vlla ratio vel vtcunque plauſibilis affertur.

§. 4. Vnum idemque menſtrum non in ſingula corpora agere potis eſt, ſed ad quodlibet ſoluendum adhibetur menſtrunm conueniens; quod explicaturi in diuerſa magnitudine et figura pororum ſoluendi corporis et particularum menſtrui opem quaerere ſolent, quibus viam menſtruo poros ingredienti facilitari vel praecludi arbitrantur: eg. quod ſpiritus nitri argentum, cuprum, ferrum et reliqua metalla ignobiliora ſoluat, aurum vero non attingat, ratio reddi ſolet, poros auri prout omnium corporum denſiſſimi eſſe ſtrictiſſimos, eoque fieri vt particulae ſpiritus nitri eos ingredi nequeant. Equidem fatemur particulas menſtrui grandiores poros ſoluendi ſubtiliores ingredi non poſſe; particulas tamen ſpiritus nitri multo ſubtiliores eſſe poris auri ex ſequentibus colligimus. Spiritus nitri et ſpiritus ſalis ſeorſim ſumpta aurum quidem non ſoluunt; at in aquam regis commixti peculiare auri menſtruum exiſtunt. Conſequenter poros eius ingrediuntur (quod actu fieri §. 20. demonſtrabitur) vnde euidens eſt particulas ſpiritus nitri et ſpiritus ſalis, ſimul in corpuſcula mixta iunctas, eſſe poris auri minores, atque adeo a ſe inuicem ſeparatas multo minore extenſione praeditas eſſe

debe-

debere iisdem auri meatibus. Non tamen dubito fore, plerosque qui obiiciant spiritum nitri spiritu salis subtilisari, hoc est, particulas eius minores reddi. Verum quodsi hoc verum foret, spiritus nitri a spiritu salis sollicite separatus, cum iam esset subtilior factus, solus aptus foret ad aurum soluendum, quod tamen nequaquam succedit.

§. 5. Nec alia documenta desunt, quibus euincitur magnitudine pororum ingressum liquidorum in corpora solida minime facilitari. Etenim Mercurius poros auri corporis densissimi facile sponte sua peruadit, at ligna, corium, chartam, corpora porosissima non penetrat, nisi vi adigatur.

§. 6. Nec maior sane spes exponendi causas varii in poros corporum ingressus menstruorum posita est in varia pororum et particularum figura. Enimuero si qualitates corporum particulares ab illa pendent, magna profecto figurae discrepantia particulas Mercurii et aquae fortis intercederet, cum tot qualitatibus, nempe transmissione et reflexione radiorum, sapore, grauitate et diuersis virtutibus, quas in homogenea corpora exercent, haec duo corpora inter se differant. Nihilominus tamen vtrumque menstruum poros similes, eiusdem quippe corporis e. g. argenti penetrat. Ceterum vbi meatus satis patent, figuram corporum eorundem ingressui minus obstare etiam rudior Minerua docet: siquidem per ampliorem portam homines, iumenta et plaustra intrare videmus, figurae varietate nihil obstante.

§. 7. Ingressus liquidi in poros solidi nil aliud est, quam vtriusque corporis in vnum combinatio, qualis est liqui-

liquidorum corporum confuſio. Quae in eo ſolum diſcrepant, quod vbi duo corpora liquida confunduntur, vtrumque motu intectino progreſſiuo alterius poros inuicem penetrat, verum vbi corpus liquidum cum ſolido iungitur, tum ſolum corpus liquidum mediante motu progreſſiuo inteſtino poros ſolidi ingreditur.

§. 8. Liquida per confuſionem alia libentius alia difficilius permiſcentur, e. g. aqua cum ſpiritibus aquoſis, vt ſunt acidi et ardentes, facile confunditur, at cum oleis iungi detrectat, pari ratione corpora ſolida liquefacta, vt metallica metallis, terrea terris, ſalina ſalibus multo facilius vniuntur, quam metallica corpora terris vel lapitibus aut ſalibus fuſis. Ex quo elucet, particulas corporum fluidorum eiusdem generis facilius motu progreſſiuo iuxta ſe inuicem ſerpere et poros peruadere, quam particulas corporum liquidorum heterogeneorum.

§. 9. Homogeneitatis igitur ratio etiam in ingreſſu liquidorum in poros ſolidorum corporum haberi debet. (§. 7) hoc eſt fluida poros ſolidi homogenei facilius, heterogenei difficilius ingrediantur neceſſe eſt. Quod ſequenti experientia comprobatur. Metalla nobiliora vbi a vilioribus in furno decimaſtico ſecernuntur, tum plumbum fuſum cupellam non ingreditur, quin prius vitreſcat. Nimirum quamdiu inflammabilem materiam, quae metallis et ſplendorem et ductilitatem conciliat, in mixtione ſua retinet, tamdiu cum cineribus cupellam conſtituentibus miſceri et poros illorum peruadere non poteſt. At poſtquam phlogicton vi ignis a reliquis plumbi miſcibilibus excutitur, tum id amiſſa ductilitate et ſplendore metallico vitreſcit,

trescit, poros cupellae prout corporis etiam vitrescibilis et ideo sibi homogenei penetrat, atque omnia quae vitrefactioni obnoxia sunt, secum in eos inuehit. Vnde mirum non est, aurum et argentum intra cineres cupellae minus ingredi, cum nunquam vitrescant.

§. 10. Quoniam igitur homogeneitas, qua ingressus liquidorum in solida facilitatur, consistit in identitate ipsius materiae, frustra sane ratio, ob quam certa quaedam menstrua soluendorum corporum poros facile ingrediuntur, in poris ipsis, hoc est non in materia, quaeritur, cum pori nil aliud sint, quam spatiola ab ipsa materia corporis vacua.

§ 11. Cum itaque fere omnia, quae hactenus de caussis solutionum alias proposita sunt, haud firmo pede nitantur, ideo non inutile fore iudicauimus, vt experimentis Chymicis et Physicis, quae ad explicandam solutionem conferre aliquid visa sunt, seuerius excussis et inter se collatis, magis exactam theoriam de hoc themate conderemus. Non tamen hic apud nos statuimus enucleare singulas virtutes specificas, quibus diuersa menstrua agunt in diuersa corpora soluenda (quod non ante exponi et dilucidari poterit, quam vbi principiorum Chymicorum numerus fuerit decisus, eorumque natura distincte cognita) sed tantum in animum induximus exponere solutionum caussas in genere.

§. 12. Genericas igitur solutionum caussas daturi ostendere tenemur, quibus viribus, quaque ratione menstruum soluendi particulas diuellere possit, sublata mutua earum cohaesione. Verum cum particulae menstrui agentes, tum etiam ipsa actio, sensibus haud distincte repraeſentantur; reſtat itaque vt ad ſola phaenomena ſolutiones comitantia attenti veritatem inueſtigare periclitemur.

§. 13. Quae cum inter ſe conferimus, alia aliis gemina, alia vero contraria offendimus. Ad poſteriora ſpectant illa notiſſima, quod nempe ſpiritus acidi ſoluendo metalla incaleſcant, aqua vero ſoluendo ſales magis frigida reddatur. Contraria iſta phaenomena cauſa exſtiterunt, vt ſuſpicaremur, metalla in ſpiritibus acidis alia ratione ſolui, quam ſales in aqua. Et cum experimenta circa ſolutiones in vacuo a nobis inſtituta conceptae antea noſtrae theoriae ex aſſe reſpondere videremus, eandem nunc certis principiis ſuperſtructam, dictis experimentis confirmamus.

§. 14. Aquis fortibus in metalla agentibus efferueſcentia ſuboriri ſolet, quam contemplaturus accepi filum ferreum breue et tenue, vtramque eius extremitatem orbiculo vitreo agglutinaui cera; ſuper medium fili inſtillaui guttam ſpiritus nitri, aqua diluti, eum in finem, vt ſolutio leni paſſu procederet (praeceps enim eiusmodi operatio eſt nimium confuſa; contemplationemque turbat) in guttulam ferrum ſoluentem direxi microſcopium ſatis acutum. Prorumpebant a ſuperficie fili bullulae aereae ſimul cum particulis ferri, quae erant colore fuſco, et non ſecus ac ipſae bullulae, vitrabantur ſecundum directionem filo ferreo perpendicularem, et quamuis ſitum eius ſaepius immutarem, perpendicularis tamen directio durabat. Poſt haec adhibito ſpiritu fortiore ſolutionem fili rurſus per microſcopium luſtrabam; vibrabatur ingens vis particula-cularum cum innumeris bullulis continua ſerie ſuccedentibus, quae perpendiculari directione a ſuperficie fili ferebantur, et ad lumen candelae innumeros fontes ſalientes lucidos, vel potius ignes feſtiuos cumulatim per aerem miſſos repraeſentabant. Particulae ferri in caſu poſteriore non prius conſpiciebantur, quam vbi a filo longius repulſae confuſis motibus in menſtruo agitarentur.

§. 15. Quoniam itaque particulae metalli vibrantur vi menſtrui ſecundum directionem perpendicularem ad corporis ſoluendi ſuperficiem, quamobrem ponamus particulam *a f* propellendam eſſe actione menſtrui a ſuperficie BC corporis BCDE ſecundum directionem *ag*; neceſſe igitur eſt, vt menſtruum agat in illam ſecundum eandem directionem; hoc eſt, eam impellat ex *a* verſus *g*. ſed impellere ex *a* verſus *g* non poteſt, quin impingat in partem ſuperficiei eius *ff* a proxima ſoluendi ſuperficie BC auerſam, in hanc vero impingere menſtruum nequit, niſi prius ſit inter particulam *a f* et reliquas partes ſoluendi, in ſpatiolis *ff* conſtitutum; hoc eſt ſpiritus acidi ſoluere metalla nequeunt, niſi ingrediantur poros eorum.

§. 16. Metalla validiſſimo igne fuſa feruent, et non ſecus ac ſpiritus acidi atque aqua bullas aereas proiiciunt, manifeſto indicio in metallis non aliter ac in ſpiritibus acidis atque aqua contineri aerem per poros eorum diſſeminatum, qui calore ex illis excutitur, propria leuitate ſurſum aſcendit et bullas format.

§. 17. Quamprimum metallum ſpiritui acido immergitur, ſtatim bullas aereas a ſuperficie ſua vibrat; vnde patet aerem per poros vtriuſque vel alteriusvtrius corporis disseminatum tempore solutionis expandi, consequenter vim eius elasticam actu exseri; quod triplici de causa proficisci solet; 1.) quando pressio aeris externi tollitur; 2.) si aer ipse maiorem gradum caloris in se recipit; 3.) denique quando maior quantitas aeris in idem receptaculum intruditur.

§. 18. Cum autem solutiones metallorum, comitante efferuescentia menstrui, sub graui atmosphaera semper succedant; a causa igitur priore memoratam aeris expansionem haud proficisci euidentissimum est. Porro spiritus acidus metalla soluens prius ebullit, quam incalescit, et calor qui ebullitionem sequitur, semper multo minor est, quam qui alias in spiritibus acidis igni expositis efferuescentiam excitat, expansio igitur aeris, quae in spiritibus acidis metalla soluentibus ebullitionem generat, ab aucto calore minime dependet, atque adeo ratio sufficiens ebullitionis aquae fortis continetur in constipatione aeris disseminati per poros ipsius aquae fortis, vel metalli.

§. 19. Indigitata aeris condensatio vel in poris spiritus soluentis vel ipsius metalli fiat necesse est. Verum quoniam particulae spiritus tanquam corporis fluidi leuissime cohaerent, vnde aeri in poris suis sese condensanti et ob maiorem elaterem expandenti resistere non possunt, adeoque illi crescenti cedere debent, vt aer placide in bullulas expansus leuitate sua ad liquoris superficiem sine vlla agitatione ascendat. Verum bullulae aereae durante solutione expansae a superficie metalli perpendiculariter cum impetu vibrantur in quolibet eius situ (§. 14.) fieri igitur nequit, vt aer ille in poris spiritus soluentis conden-

dense-

denſetur, conſequenter in poris corporis ſolidi, hoc eſt, metalli ipſius, a cuius ſuperficie minutis bullulis proſilit.

§. 20. Cum vero in poris metalli aer condenſari nequeat, niſi haerenti in illis aeri nouus accedat, durante autem ſolutione, nullus accedere poteſt, quin cum menſtruo in poros ingrediatur, is nimirum qui in poris eius continetur. Quod etiam ſequentibus comprobatur.

§. 21. Aer per poros fluidi diſſeminatus etiam anguſtiſſimos et compreſſos ſolidorum poros penetrat, quos ſolus peruadere nequit. Ratio huius rei ex theoria noſtra de vi aeris elaſtica §. 24 et 26, facile perſpici poteſt, et veritas ipſa experimentis ab Excell. Wolfio circa poros veſicae inſtitutis comprobata Phyſicis eſt notiſſima.

§. 22. In ſpiritibus acidis ſub campana Antliae conſtitutis, ſubducto per ſuctionem aere, ebullitio multo difficilius excitatur, quam in aqua, vnde apparet, aerem poris ſpirituum acidorum firmius inhaerere, quam poris aquae, conſequenter eundem aerem poros corporum ſolidorum facilius penetrare cum dictis ſpiritibus quam cum aqua.

§. 23. Corpora fluida homogenea quamprimum ſe mutuo contingunt, in vnum confluunt, vt gutta aquae guttam aquae alteram ſibi admotam aſſociat, duo globuli Mercurii quamprimum ad mutuum contactum admittuntur, repente ſe inuicem amplectuntur et vnicum efformant globulum; dubitari igitur nequit, quin etiam particulae aeris cum ſpiritu acido in poros metalli aduectae, et per tam minutam diuiſionem menſtrui liberiores factae

 cum

cum haerentibus inter metalli particulas aereis moleculis coaceruentur.

§. 24. His ita comparatis quid ſequi debeat, facilius perſpici poteſt, ſi prius proprietas illa aeris, quae ſuperius (*) explicatur, quaeque a nobis *vis aeris elaſtica renata* ſolutatur, in mentem reuocetur.

§. 25. Nimirum aeris indoles ea eſt, vt quamdiu particulae eius minutiſſimae a mutuo contactu ſemotae et particulis alicuius corporis denſioris intercluſae haerent, nulla fere vi elaſtica pollent; Verum hiſce carceribus liberatae, ſuique iuris factae et ad mutuum contactum ad miſſae emortuum quaſi elaterem recuperant, eumque in obſtantia corpora exercent. Quod multis experimentis clariſſimus Haleſius euidentiſſime oſtendit, et nos non pauca in eundem finem inſtituimus, ex quibus ſequens experimentum ad propoſitam noſtram theoriam condendam prae reliquis conuenit. Spiritus nitri drachmas 5 infudi vitro colli anguſtioris eique immiſi cupri drachmas 2, et ſtatim collo vitri veſicam compreſſam, aere, quantum fieri potuit, expulſo firmiter alligaui, ſolutio poſt horae circiter quadrantem ceſſauit, et veſica aere ex metallo et ſpiritu egreſſo fuit valide inflata. Quam poſtquam ſuper collum vitri filo conſtrixi, a vitro remoui, vero aere plenam eſſe non dubitaui: nam digito compreſſa rurſus priſtinam figuram recuperabat, et niui admota flaccidior, camino autem appoſita rurſus turgida facta eſt, et acu perforata et compreſſa expulſo aere leuia obiecta et flammam candelae agitabat. Dimenſione ſollicite inſtituta deprehendi

(*) Tentamen theoriae de vi aeris elaſtica. §. 26.

di volumen aeris renato elatere expanſi ad volumem ſpiritus et mettalli fuiſſe vt 68 ad 1; ad metallum vero, cuius vna drachma erat ſoluta, vt 2312: 1. Ex his experimentis euidentiſſime elucet, aerem per poros corporum diſſeminatum integro fere ſui elatere deſtitui, et contra particulis eius ex anguſtiis corporum liberatis et ſe mutuo contingentibus, elaterem illius denuo reſtitui.

§. 26. Renata haec aeris elaſtica virtus quam ſit valida, ſtupendi eius effectus loquuntur. Ea enim vaſa, in quibus aqua in glaciem conſtringitur, rumpuntur, ſclopeta ferrea vaſto fragore edito diſſiliunt. Nimirum urgente frigore, aqua in minus ſpatium coercetur, pori eius ſtrictiores redduntur, aer ex illis eliditur, teſtantibus bullis frequentibus, quas frigens aqua emittere ſolet, particulae eius eliſae ſibi mutuo occurrunt, et homogeneitatis cauſa in vnum coaceruantur, innatum ſibi, ſed ante per ſegregationem amiſſum, elaterem recuperant, extenduntur, bullulas formant, et ſic ex concurſu innumerarum aeris particularum innumeris bullis natis aqua in glaciem iamiam abiens expanditur, et ſolidiſſima illa vaſa, quibus incluſa eſt, disrumpit. Veritas haec eo etiam demonſtratur, quod glacies ex diſruptis vaſis recepta innumeris ſcateat bullis, ideoque omni fere pelluciditate caret.

§. 27. His conſideratis non erit arduum oſtendere ipſam vim, qua particulae metalli auulſae per ſpiritus acidos vibrantur. Siquidem particulae aeris, quae cum ſpiritu poros metalli ſoluendi intrant, iunguntur cum illis, quae antea in metallo haerebant (§. 21.) quo facto amiſſam vim elaſticam reſumunt, (§. 24. 25. 26.) in

maius

maius ſpatium expandi conantur; et cum pororum anguſtias ferre nequeant, exitum quaerunt; qui quoniam ſuccedentibus acidi corpuſculis obſeſſus et obſtructus eſt, obſtantes igitur ſibi particulas metalli abrumpunt et per ſpiritum vibrant. Ex quo patet, particularum ſpiritus acidi in ſoluendo officium eſſe, particulas aeris in poros metalli inuehere, aeris vero, renato elatere particulas metalli auellere.

§. 28. Ad hanc theoriam examinandam et confirmandam ſequentia experimenta inſtituta ſunt. Aquae fortis drachmas quinque vitro cylindrico infudi, atque ſub campana antliae pneumaticae conſtitui. Aliquot agitationibus emboli aere exantlato, ſurgebant bullae aereae ex aqua forti vtcunque frequentes, tamen exiguae; poſt horae quadrantem, menſtruum expoſui aeri libero, eique nummulum cupreum, qui noſtracibus Denga dicitur, immiſi. Poſt 20 minuta prima, affuſa aqua copioſa nummulum a ſordibus et adhaerente humore liberatum ponderaui, quo conſtitit eum 74 grana amiſiſſe. Denique alterum cupreum nummulum, priori aequalem et ſimilem, eiusdem aquae fortis drachmis 5, ſed ex qua aer non erat ſubductus, in eodem vaſculo immerſum ſolutioni expoſui eodem in loco. Poſt 20 minuta prima nummulus 85 granis leuior factus eſt. Ex hoc experimento elucet, acidum ſpiritum fortius in metalla agere, ſi maiore copia aeris diſſeminati fuerit praeditus, ſcilicet quaelibet aquae fortis portiuncula maiorem quantitatem aeris ſecum in poros metalli inuehit, vis elaſtica celerius renaſcitur, frequentius fruſtula metalli abrumpit.

§. 29.

§. 29. Deinde accepi aquae fortis eiusdem duas portiones aequales et in duo vitra aequalia et similia infudi, vtrique immisi eodem momento singulos nummulos cupreos nostratibus Poluschkas dictos, quorum quilibet pendebat grana 50, altero vasculo relicto in aere libero, alterum sub campana Antliae constitui. Vterque nummulus primo cum pari efferuescentia menstrui soluebatur. Verum repetitis aliquot agitationibus emboli et aere ex campana subducto menstruum multo vehementius ebulliebat, maioribus et frequentioribus bullis surgentibus, quam experimento praecedente. Praeterlapsis 11 minutis primis vtrumque nummulum ex menstruo simul depromtum et a sordibus atque adhaerente humore liberatum ponderaui. Qui sub campana solutioni erat expositus, amisit grana 10, qui vero in libero aere soluebatur, perdidit grana 26. In hoc igitur experimento excessus cupri soluti in aqua forti integro aere disseminato praedita multo maior est ratione praecedentis: nimirum in priore erat vt 11 ead 74, in posteriore vt 16 ad 10. Facti ratio sequens est. Aqua fortis metallum sub compana antliae soluens incaluit, maiorem quantitatem aeris dimisit quam experimento praecedente, vnde maiore etiam copia aeris disseminati menstruum fuit priuatum, atque adeo minori vi in metallum agere debuit.

§. 30. Nec tamen alia quoque phaenomena solutiones metallorum comitantia propositae hactenus theoriae non respondent, in quibus primas obtinet cum ebullitione menstrui coniunctus calor. Renato in poris metalli aeris elatere particulae ipsius abripiuntur, per menstruum vibrantur, particulas illius fricant et in motum gyratorium excitant, qui quoniam caloris caufa exiftit (*), mirum igitur non eft, aquas fortes metalla foluentes incalefcere.

§. 31. Spiritus nitri cum zinco maxime efferuefcit et incalefcit valide, cum ferro paulo minus, fed plus minus cum cupro, multo lenius cum argento, admodum parum cum plumbo et Mercurio. Vnde patet metalla et femimetalla fpecifice leuiora maiorem ebullitionem et calorem in fpiritu nitri producere, quam fpecifice grauiora; quod cum noftra theoriae egregie confentit. Etenim metalla et femimetalla fpecifice leuiora ex minore quantitate materiae cohaerentis conftare Phyfici non dubitant, confequenter maioribus vel frequentioribus poris praedita effe, quam fpecifice grauiora. Vnde maiorem quantitatem aeris differminati in iis contineri, copiofioremque aerem cum menftruo ingeri, atque adeo maiorem vim elafticam renafci, fortius in particulas metalli agere, violentius easdem vibrare, particulas fpiritus nitri pernicius in gyrum agi, atque validiorem ebullitionem et calorem gigni.

§. 32. Si ferrum in alcali diffoluitur et aceto praecipitatur, calcem fpiritus nitri foluit fine ftrepitu. Item quando viride aeris in aceto deftillato folutum cum aqua forti confunditur; aqua fortis cuprum in fe recipit, fed nulla efferuefcentia fuboritur. In vtroque cafu quoniam particulae metallorum mutua cohaefione deftitutae funt, vi igitur non indigent, qua alias diuelli folent; fed

(*) De caufa caloris et frigoris meditationes. §. 11.

ſed ſtatim particulis menſtrui accedentibus adhaerent, cumque illis progreſſiuo motu incedentibus diſtrahuntur. Vnde nulla conſtipatio particularum aeris diſſeminati ſubſequitur, vis elaſtica non reuiuiſcit, nulla effervefcentia aut calor exoritur.

§. 33. Quando duae portiones aequales eiusdem ſpiritus acidi, ſatis concentrati, ad ſoluendum metallum adhibentur, vna tamen earum diluitur modice aqua affuſa. Poſterior maiorem quantitatem ſoluit, quam prior, ob maiorem ſcilicet quantitatem aeris per maius volumen diſſeminati.

§. 34. Ad ſoluendum metallum adhibito ſpiritu nitri ſatis valido, ſolutio breui tempore abſoluitur, menſtruo non amplius agente. Verum ſi poſt aliquot dies metallum eidem ſpiritui rurſus immergitur; quantitas eius non contemnenda denuo ſoluitur. Nimirum praecipiti ſolutione furente, ſpiritus aere ita orbatur, vt in metallum amplius agere nequeat. At ſuper incumbentis aeris particulis ſucceſſu temporis in poros ſuos receptis, rurſus ſolvendi, virtutem acquirit.

§. 35. Summa certitudo in rebus Phyſicis comparatur, ſi theſes a priori erutae et dumonſtratae atque experimentis et phaenomenis confirmatae etiam Mathematico examini reſpondent. Ad hunc itaque euidentiae gradum propoſitam theoriam deducturi oſtendere tenemur, nunquid vis aeris elaſtica in poro metalli renata ad auellendam eius particulam ſufficiat.

§. 36. Primo igitur videndum eſt quanta ſit vis, quae ad hunc effectum producendum requiritur, h. e.

quam firma ſit mutua cohaeſio particulae, quae renata vi aeris in poro metalli ab eius ſuperficie auellitur. Celeberrimus Muſchenbroekius per experimenta inuenit ad rumpendum filum cupreum, cuius diameter eſt $\frac{1}{10}$ pollicis pedis Rhenani in 12 eiusmodi partes diuiſi, ſeu $1\frac{19}{120}$ lineae pedis regii Pariſini requiri pondus $299\frac{1}{4}$ librae Amſtelodamenſis, quae aequalis eſt Pariſinae. Per Microſcopium, quod diametrum corporis auget ad 360 obſeruaui particulas minimas cupri ſoluti in ſpiritu nitri habere in diametro apparenti $\frac{1}{2}$ lineae pedis Pariſini. Vera igitur earum diameter aequalis eſt $\frac{1}{720}$ lineae. Concipiamus ex particulis iſtius modi iuxta ſe inuicem continua ſerie diſpoſitis et cohaerentibus conſtare filum, cuius diameter aequalis eſt diametro ipſarum particularum. Quoniam vires, ad rumpenda corpora homogenea neceſſariae, ſunt in ratione duplicata diametrorum ipſorum corporum; ad rumpendum igitur tenuiſſimum illud filum requiſita vis erit ad pondus $299\frac{1}{4}$ lib. vt diameter eiusdem fili quadrata ad quadratam diametrum fili pondere $299\frac{1}{4}$ librarum rupti, hoc eſt $= (\frac{1}{720})^2 : (1\frac{19}{120})^2 = (\frac{1}{720})^2 : (\frac{834}{720})^2 = 1 : 695556$; conſequenter aequalis $\frac{1197}{2782224}$ librae ſeu $3\frac{846288}{2782224}$ grani. Quae vis aequalis eſt cohaeſioni particulae cupri, auellendae elatere aeris, renato in poro metalli.

§. 37. Qui aerem ex metallo cumulatim prorumpentem durante ſolutione conſiderat, facile concedet, eum magnam partem ſpatii in veſica collo vitri alligata occupaſſe (§. 25). Non equidem negamus ſurgentibus ex cupro bullis et per ſpiritum ad ſuperficiem eius tendentibus aeris particulas per menſtruum diſſeminatas accreſcere,

ſcere, ſimul veſicam ingredi, eamque diſtendere; verum tamen hoc ſub initium ſolutionis fieri ſolet. Etenim eadem diutius durante bullae ex metallo prorumpentes non ſolum minus ampliores redduntur, verum etiam prorſus euaneſcunt, priusquam ſuperficiem menſtrui attingunt, auido nempe aeris menſtruo (§. 25) eas rurſus per poros diſtrahente, id vero non ſolum in cupro, verum etiam in plumbo et Mercurio ſolutioni expoſito obſeruauimus. Eo autem fit vt non minor copia aeris in metallo renati per poros menſtrui rurſus diſpergatur, nec veſicam ingrediatur, quam initio ſolutionis bullis ſurgentibus in illam accedit. Adde quod ſtatim poſt ſolutionem affuſo alcali fixo ſpiritus vehementer ebulliebat, manifeſto indicio magnam vim aeris in poris eius actui ſolutionis ſuperfuiſſe. Verum ne quid precario aſſumere videamur, ponamus 1312 partes (§. 25) aeris expanſi ex poris menſtrui in veſicam acceſſiſſe, reliquas autem 1000 partes reuera in poris metalli renatas et dilatatas fuiſſe. Erit ergo volumen metalli ſoluti ad volumen aeris in poris eius renati et in veſica expanſi vt 1 ad 1000; conſequenter in quamlibet particulam cupri auellendam agebat portio aeris, quae expanſa erat ad particulam ipſam ratione voluminis vt 1000 ad 1; atque adeo diameter bullae aeris poſt auulſionem corpuſculi expanſae erat ad diametrum corpuſculi vt 10 ad 1, hoc eſt aequalis $\frac{1}{72}$ lin.

§. 38. Mercurii pollex cubicus ponderat vncias 8, drachmas 6 et grana 8. Cylindrus ergo Mercurii ab aere ſuſtentatus, 28 pollices Pariſinos altus, cuius diameter eſt $\frac{1}{72}$ lineae, ponderat fere $\frac{7838595072}{63207309312}$ grani; quod

 pon-

pondus quoniam aequale eſt preſſioni columnae aeris ſuper bullulam ex poro metalli egreſſam incumbentis, (§. 37.) quae illum ſuſtentat, quamobrem elater bullulae illius aequalis eſt ponderi dictae columnae Mercurii. Verum quoniam haec bullula ante expanſionem, dum in poro metalli in corpuſculum agebat, coarctata erat in ſpatium millies anguſtius. (§. 37.) (Praetereo hic pororum anguſtias: nam aer ante renatam elaterem non integrum metalli volumen occupabat, ſed propria huius materia magnam partem tenebat) elater igitur eius erat tum millies maius, hoc eſt, aequalis ponderi 124 $\frac{888717312}{13207309312}$ grani, adeoque cohaeſionem particulae cupri (§. 37.) ſuperabat plus quam duabus drachmis. Vnde mirum ſane non eſt particulas cupri abruptas tam celeri motu a ſuperficie ipſius metalli per menſtruum vibrari.

§. 39. His expoſitis inueſtiganda nobis reſtat illa vis, qua ſalium aquae immerſorum particulae a mutua cohaeſione ſeiunguntur et per aquam diſtrahuntur. Quod vt in apricum prodeat, primo notandum eſt omnes ſales abundare inſigni quantitate aquae, quae per deſtillationem in vas recipiens copioſa ex illis elicitur. Et quamuis a quibusdam ſalibus volatilibus nulla ſeparari poteſt, ex analogia tamen et facili cum aqua coniunctione idem de illis aſſerimus.

§. 40. Sales in aqua ſoluti poſt lenem euaporationem in cryſtallos pellucidas concreſcunt, conſequenter in aqua formam ſuam induunt, atque adeo neceſſarium eſt, vt pori ſalium ſint aqua pleni. Quod etiam eorum

pel-

pelluciditate comprobatur: corpora enim porosa et alias minus pellucida, aqua tamen imbuta diaphana fieri solent. Vnde vitriolum leni tepore ad albedinem calcinatum, ita tamen, vt partes eius minutissimae non dilabantur, opacum redditur; at postquam affusam aquam poris imbibit, rursum pelluciuitatem recuperat. Saccharum per crystallisationem in aqua concretum pellucidum est, at quod per inspissationem in conis cauis formari solet, vix aut ne vix quidem radios lucis transmittit; verum aqua in poros eius accedente ad pelluciditatem propius accedit.

§. 41. Cum itaque salium (nempe non calcinatorum) pori aqua pleni sint, fieri igitur nequit, vt aquae immersi eam in se recipiant. Vnde patet etiam aerem per aquam disseminatum poros salium minus ingredi, adeoque nec in illis renato elatere expandi, nec in particulas salium agere posse.

§. 42. Afferti veritatem confirmat sequens experimentum. Vasculum vitreum aquae semiplenum posui sub campana Antliae et reiteratis aliquot agitationibus emboli aerem subducebam; surgebant bullae aereae vtcunque frequentes. Tandem aerem ex aqua abunde subductum esse ratus, vasculum exposui aeri libero simul cum altero vasculo aequali et simili, in quo eiusdem aquae (ex qua aer non erat subductus) aequalis quantitas continebatur. Vtrique immisi salis gemmae singula frustula aequalia figurae cubicae, quorum quodlibet pendebat grana 50; post horae vnius spatium frustulum salis, quod solvebatur in aqua exantlata, amisit grana 27, alterum vero grana 15.

§. 43.

§. 43. Ex hoc experimento patet 1) aerem per poros aquae disseminatum non solum ad solutionem salium nihil conferre, verum eidem esse impedimento. Quomodo autem impedimento esse possit §. 47. exponimus et hoc ipso nostram theoriam confirmamus; 2) necessario sequitur particulas salium separari actione particularum ipsius aquae.

§. 44. Quando corpora solida liquida redduntur, particulae eorum excitantur in motum gyratorium celeriorem. Quando igitur sal in aqua liquescit, motus gyratorius particularum eius accederatur. Ceterum quoniam sales soluuntur actione particularum ipsius aquae (§. 43.) consequenter particulae aquae tanquam corporis liquidi celeriore motu gyratorio rotatae et particulis salis aquae immersi admotae, eas, simulqne homogeneas sibi particulas aqueas mixtionem salis constituentes radunt, et motum earum gyratorium accelerant. Quo facto particulae salis a reliqua massa separantur, et aqueis particulis adhaerentes motu progressiuo cum illis incedunt et per ipsum menstruum distrahuntur.

§. 46. Quando aliquod corpus alterius motum accelerat, eidem partem sui motus communicat, communicare autem partem non potest, quin illi eadem pars decedat. Quamobrem particulae aquae accelerando motum gyratorium particularum salis, partem sui motus gyraiorii ammitunt. Qui quoniam caloris causa existit, mirum igitur non est, aquam soluto sale refrigerari.

§. 47.

§. 47. Aere per poros aquae diſſeminato, particulae aquae, aereis interpoſitae, aliquantum rariores ſunt; quod ſeqnenti experimento demonſtratur. Aqua exantlata infundatur vitro colli anguſtioris, relicto ſuper ea ſpatiolo aere pleno. Collum obturatum operculo oblinatur cera, ne aeri externo pateat aditus, poſt diem vnum aut alterum aer ſuper aquam relictus eam ingredietur et vas aqua plenum reddetur, certo indicio aquam ab aere per eum diſſeminato diſtendi. Submerſo igitur ſale in aqua, aere diſſeminato turgida, minor copia particularum ipſius menſtrui ſuperficiem ſalis attingit, in eamque remiſſius agit; atque adeo ſolutio fit tardior.

§. 48. Expoſitarum hactenus actionum, quibus menſtrua ſoluunt corpora ſibi immerſa, priorem *mediatam*, poſteriorem *immediatam* appellare lubet. Etenim in caſu priore menſtruum abripit particulas corporis ſoluendi mediante renato elatere aeris, in caſu poſteriore ipſum menſtruum agit propriis ſuis particulis. Cum vero mediata ſolutio calorem, immediata autem frigus producat, phaenomena haec tanquam ſigna vtriusque cenſeri debent.

§ 49. Praeter ſolutiones metallorum in ſpiritibus acidis, et ſalium in aqua, exponendae ſuperſunt amalgamationes, ſolutiones partiales, nempe extractiones et decoctiones, item ſolutiones bituminum in oleoſis etc. quae licet ab illis diſcrepare videntur, tamen alterutro vel vtroque ſimul modo eas perfici non dubitamus. Sed quoniam pauca experimenta extant, quae ad eas exponendas quid conſe-

 runt,

(**) Ibidem §. 14. 15.

runt, nec nobis ad noua inſtituenda commoditas data fuit, quamobrem illis exponendis in praeſentia ſuperſedemus.

§. 50. Caeterum muneris noſtri erat, vt rationem redderemus, quare particulae metallorum et ſalium ſpecifice grauiores in menſtruis ſuis pendeant, nec lege communi in liquoribus ſpecifice leuioribus ſubſidant. Verum quoniam hoc ante nos iam a viris eruditiſſimis Freindio (*) et Heinſio (**) ſatis dilucide explicatum habemus, ideo eidem reiterando non immoramur.

(*) In praelectionibus Chymicis. (**) In deſcriptione cometae Anni 1744.

DE

DE MOTV AERIS IN FODINIS OBSERVATO.

AVCTORE
Michaele Lomonoſow.

Cum anno 1740 Freibergae in Misnia degerem, vbi Chymiae et rei metallicae operam dabam; accidit aliquoties vt fodinas inuiſens obſeruarem motum aeris, qui per puteos, cuniculos et foſſas latentes etiam tranquilliſſimo coelo nullis machinis pneumaticis impulſus ita ferebatur, vt aliquando lampades foſſoribus vſitatas extingueret. Huius tunc phaenomeni proprietates ſatis perſpicere non mihi licuit, cum aliis rebus, quae ad praxim metallicam ſpectabant et vbique annotandae occurrebant, eſſem intendus. Verum poſtquam in patriam redux Georgii Agricolae libros de re metallica euoluerem, memoratum phaenomenon diſtincte deſcriptum inueni. (*) Verba laudati auctoris haec ſunt: „Aer exterior ſe ſua „ſponte fundit in caua terrae, atque cum per ea penetrare poteſt, rurſus euolat foras: ſed diuerſa ratione hoc „fieri ſolet. Etenim vernis et aeſtiuis diebus in altiorem „puteum influit et per cuniculum vel foſſam latentem, „permeat, ac ex humiliori effluit: ſimiliter iisdem die„bus in altiorem cuniculum infunditur et interiecto puteo „defluit in humiliorem cuniculum atque ex eo emanat. „Autumnali autem et hyberno tempore in cuniculum vel „puteum humiliorem intrat et ex altiori exit. Verum

(*) Lib. 5. pag. 82.

„ea fluxionum aeris mutatio in temperatis regionibus et „locis fit initio veris et fine autumni; in frigidis vero in „fine veris et in initio autumni. Sed aer vtroque tempo„re, antequam curſum ſuum illum conſtanter teneat, ple„rumque quatuordecim dierum ſpatio crebras habet muta„tiones, modo in altiorem puteum vel cuniculum influens, „modo in humiliorem. Hanc igitur deſcriptionem a viro rei metallicae peritiſſimo nobis relictam cum viderim legibus aerometricis et hydroſtaticis eſſe conſonam, nullus dubitaui theoriam huius phaenomeni iisdem legibus ſuperſtrui et Geometrarum methodo concinnari poſſe.

Tab. VI. Fig. 1.

Definitio 1.

§. 1. Puteus eſt foſſa profunda anguſtior, ad horizontem perpendicularis A B, vel ad eundem plus aut minus inclinata C E.

Definitio 2.

§. 2. Foſſa latens B E dicitur, quae ab ima parte putei B ad imam partem alterius putei E horizontaliter ducta illos coniungit ſeu communicat.

Corollarium.

§. 3. Fodina, quae conſtat ex duobus puteis, foſſa latente coniunctis ſeu communicatis, refert exacte tubos communicantes, quibus vtuntur Phyſici ad aequilibrium fluidorum demonſtrandum, quamobrem corpora fluida eiusmodi fodinae inſuſa legibus hydroſtaticis vt in ſyphonibus obtemperare debent.

Scholium

Scholium.

§. 4. Putei A B et E C crurum ſyphonis, foſſa autem latens B E baſeos illius vicem explent.

Definitio 3.

§. 5. Puteus altior C E dicitur, cuius apertura ſuperior C patet in parte montis editiore. Puteus humilior A B eſt, cuius apertura ſuperior A patet in parte montis humiliore.

Corollarium.

§. 6. Si vterque puteus et foſſa latens replentur fluido, quod aerem externum grauitate ſpecifica ſuperat, fluidum in puteo altiore praeponderabit fluido in puteo humiliori.

Definitio 4.

§. 7. Cuniculus eſt foſſa horizontalis F G vel H K, cuius apertura patet in parte montis decliri, ſuperior F G dicitur, quae montis partem editiorem occupat, inferior H K, quae humiliorem. Fig. 2.

Definitio 5.

§. 8. Puteus interiectus G K eſt, qui cuniculum ſuperiorem F G cum cuniculo inferiore H K coniugit ſeu communicat.

Corollarium.

§. 9. Cum etiam fodina FGKH tubos communicantes horizontaliter inclinatos repraeſentet, quamobrem circa aequilibrium corporum fluidorum illorum officio fungi poteſt.

Experientia 1.

§. 10. Aer in fodinis qualibet anni tempeſtate habet eundem gradum caloris, vbi foſſores nullam iniuriam a frigore vel aeſtu ſentiunt. Contra vero in libero aere hyberno tempore frigus, aeſtiuo aeſtus dominatur.

Corollarium.

§. 11. Aeſtate igitur aer in fodinis eſt frigidior externo, hyeme autem eodem calidior, adeoque aeſtate ſpecifice grauior externo, hyeme ſpecifice leuior.

Experientia 2.

§. 12. Aer externus tempore aeſtiuo vel hyberno dum ſponte ſua vel induſtria foſſorum in caua terrae infunditur, calorem vel frigus foris ſibi impreſſum repente ammittit, et eandem temperiem in ſe recipit, qua latera foſſarum ſunt praedita, ſeu quam habebat aer, qui ante fodinam replebat.

Scholium.

§. 13. Quam repente aer calorem acquirit et amittit, reſpiratio quolibet momento temporis loquitur, vbi frigidum aera pulmonibus haurimus, calidum effundimus, qui ex ore emanans proxime admotam manum tepore, remotiorem vero leui frigore afficit.

Corollarium.

§. 14. Aer, qui in fodinas infunditur aeſtate redditur externo ſpecifice grauior, hyeme eodem ſpecifice leuior. (§. 11.)

Theorema

Theorema 1.

§. 15. Tempore aeſtiuo aer debet infundi in puteum altiorem C E et ex puteo humiliori A B egredi. Fig. 1.

Demonſtratio.

Aer in fodinis aeſtiuo tempore eſt ſpecifice grauior quam externus (§. 11.) quamobrem aer in puteo altiore C E praeponderabit aeri in puteo himiliori A B, (§. 6.) Conſequenter ex C deſcendet vsque ad D, vt cum aere in puteo A B contento aequilibrium acquirat; poſt deſcenſum expellet ex puteo A B quantitatem aeris aequalem quantitati, quae continebatur in parte C D putei E C. Interea aer externus propria ſua grauitate deſcendet in puteum EC vsque ad D, habebitque eundem gradum caloris, quem habet reliqua pars aeris in fodina contenta (§. 12) h. e. erit ſpecifice gravior externo (§. 14.) Conſequenter aer in puteo C E eadem ratione vt ante, praeponderabit aeri in puteo A B contento, et deſcendens vsque in D, illum per A expellet ex puteo A B, in partem C D putei E C, externum aerem rurſum admiſſurus. Et hac ratione iſte aeris motus tamdiu continuabitur, quousque aer in fodina contentus manebit ſpecifice grauior externo, hoc eſt, tempore aeſtiuo aer infundetur in puteum altiorem, ex humiliore effluet. Q. E. D.

Scholium.

§. 16. Aer ex puteo humiliore A B egreſſus in eum qui ſuccedit, integro ſuo pondere agere et aequilibrium in fodina reſtituere non poteſt; quippe quam primum

mum ex apertura A verſus L effluit, calore rareſit, cum reliquo aere commiſcetur et diſtrahitur.

Theorema 2.

Fig. 2. §. 17. Tempore aeſtiuo aer debet infundi in cuniculum ſuperiorem F G, et e cuniculo inferiore H K effluere.

Demonſtratio.

Vtriusque putei aperturis H et F inſiſtunt columnae aeris ad ſuperficiem atmoſpherae exporrectae. Quae inſiſtit aperturae F, breuior eſt altera columna inſiſtente aperturae H, parte H P, quem defectum ſubſtituit columna aeris in puteo interiecto G K contenta. Quoniam autem tempore aeſtiuo aer in fodinis eſt ſpecifice grauior aere externo (§. 11.) quamobrem pars columnae atmoſphaericae in puteo interiecto contenta G K erit ſpecifice grauior parte columnae P H. Reliquae autem columnarum partes ad ſuperficiem atmoſphaerae exporrectae ſunt eiusdem altitudinis et grauitatis ſpecifice (nam in eadem fere atmoſphaerae parte ſubdio ad vnum terminum extenduntur) quamobrem columna aeris, quae inſiſtit aperturae F cum parte ſpecifice grauiore G K praeponderabit columnae inſiſtenti aperturae H cum parte ſpecifice leuiore H P. Conſequenter ſublato aequilibrio aer in puteo interiecto G K deſcendet in cuniculum inferiorem H K, et quantitatem aeris ſibi aequalem ex eo foras per H protrudet. In puteum interiectum G K aer defluet ex cuniculo F G, eique ſuccedet externus; qui tandem refrigeratus (§. 12.) in puteum G K influet, et ſublato iterum aequilibrio per cuniculum H K foras egredietur;

et

et ſic continuo aer in cuniculum ſuperiorem ingredietur, ex inferiore effluet, quousque aer externus manebit ſpecifice leuior interno, hoc eſt, quamdiu aeſtas durabit. (§. 11.) Q. E. D.

Corollarium 1.

§. 18. Vbi aeſtas longiori tempore permanet, ibi etiam aer diutius eam directionem motus conſeruabit, qua ingreditur in puteum vel cuniculum altiorem ex humiliore effluit. Et contra vbi aeſtas breuis eſt, ibi etiam haec fluxio aeris breuiore tempore durabit.

Corollarium 2.

§. 19. Mirum profecto non eſt in oris temperatis eiusmodi fluxionem incipere initio veris et fine autumni ceſſare, in frigidis autem initium capere ſub finem veris et ſub initium autumni deſinere.

Theorema 3.

§. 20. Brumali tempore aer infundi debet in puteum humiliorem A B, et ex puteo altiore E C effluere.

Demonſtratio.

Puteus CE eſt altior puteo AB (per hypoth.) et aer in fodinis tempore hyberno ſpecifice leuior externo (§. 11.). Igitur pars A L columnae inſiſtentis extremitati B erit ſpecifice grauior parte DE columnae inſiſtentis extremitati E; (§. eod.) Quamobrem columna inſiſtens extremitati B praeponderabit columnae inſiſtenti extremitati E, adeoque aer externus irruet in aperturam A putei AB, ac illum, qui ceteras partes fodinae occupat per aperturam C protrudet foras. Et quoniam aer fodinam ingreſſus hyeme redditur ſpecifice grauior externo (§. 14.) quamobrem ſemper aequilibrio ſublato aer hyberno tempore in puteum humiorem influet, ex altiore effluet. Q. E. D.

Corollarium. 1.

§. 21. Quoniam fodina F G H K eadem ratione eſt comparata, vt fodina A B C E, nimirum pars H P columnae aeris ad ſuperficiem atmoſphaerae exporrectae, aperturae H inſiſtentis, tempore brumali eſt ſpecifice grauior parte G K, quae replet puteum interiectum, quamobrem aer hyberno tempore infundetur in cuniculum inferiorem, ex ſuperiore egredietur

Corollarium 2.

§. 22. Aer externus continuo ingreditur in puteos et cuniculos inferiores, ex ſuperioribus egreditur, quamdiu manet ſpecifice grauior interno, conſequenter vbi hyems pluribus menſibus dominatur, ibi etiam motus aeris ab apertura inferiore verſus ſuperiorem diutius durare debet, quam vbi hyems eſt breuior, adeoque in regionibus frigidis aer externus incipere debet fluxionem per fodinas ab apertura putei vel cuniculi humilioris verſus aperturam putei vel cuniculi altioris ſub initium autumni, eamque finire ſub exitum veris: ſub caelo autem tamperato motus hic initium capere debet ſub finem autumni, ſub initium veris ceſſare.

Co:

Corollarium 3.

§. 23. Vere et autumno, quando frigus et calor luctantur, aer externus tum calidior tum frigidior redditur interno, qui fodinas occupat, adeoque fit externo tum ſpecifice leuior, tum grauior. Mirum igitur non eſt his anni tempeſtatibus motum illius quatuordecim dierum circiter ſpatio contrariis directionibus fondinas alternatim permeare

Scholium 1.

§. 24. Hanc theoriam de aeris motu ſpontaneo in fodinis non inutilem fore arbitramur praefectis fodinarum et foſſoribſis. Etenim (ſi locorum ſitus patitur) puteis, cuniculis et foſſis ea ratione ductis, hi laboribus, illi ſumptibus parcere poſſunt: ſiquidem ad conſtruendas machinas pneumaticas, ad easque mouendas, propter aerem ſubterraneis vaporibus infectum expellendum, non exigua pecunia et opera impenditur.

Scholium 3.

§. 25. Nec in phaenominis rerum naturalium explicandis non aliqua hinc opera expectari poteſt. Athanaſius Kircherus in Mundo ſuo ſubterraneo refert, dari in Italia quasdem ſpeluncas, quae certis anni tempeſtatibus aerem effundunt et in agris vicinis ventum producunt, quod propoſitae huius theoriae auxilio dilucidari poſſe cenſemus.

DE INSIGNI PARADOXO PHYSICO, AERE SCILICET IN 1837 VOLVMINIS PARTEM AQVA GELASCENTE REDVCTO, ET DE COMPVTATIONE VIS, QVAM AQVA GELASCENS ET SESE IN VOLVMEN MAIVS EXPANDENS IN SPHAERA CAVA FERREA, BOMBA DICTA, AD EAM DISRVMPENDAM IMPENDIT, COGITATIONES

G. W. Richmanni.

§. 1.

Nobiliores quidem videntur illius in rebus physicis partes, qui nouis inueniendis occupatus est, quam eius, qui in ea, quae pro certis et veris habentur, inquirit, et nonsolum, quae talia deprehendit, sed etiam quae incerta et falsa detegit, notat, vt aliis in errores incidendi occasio praecidatur. Non tamen prorsus negligendas sed omnino scientiae naturalis cultore dignas et vtiles puto has posteriores etiam curas. Hinc non inutile arbitror, si paradoxon Celeb. Halesi experimentum examinavero et inquiram, quantum illi tribuendum sit.

§. 2. Describit illud Celeb. autor in egregio suo opere, statica vegetabilium dicto, in appendice. Merita huius viri in scientiam naturalem tanti aestimo, vt tantum absit, vt celeberrimi et ingeniosissimi experimentatoris laudi dubiis meis detrahere velim, vt semper mihi gloriosum ducam ipsius vestigia premere et ad exemplum eius de scientia naturali bene mereri. Improuisis et

variis

variis circumſtantiis concurrentibus perſpicaciſſimus ſaepius experimentator confunditur vt interdum falſa pro experientia comprobatis commendet. Imprimis hoc fit, ſi ob celeritatem phaenomeni omnes circumſtantias obſeruare non licet. Caute hinc procedendum eſt in aſſenſu experimentis eiusmodi praebendo, inprimis ſi aliquod paradoxon continent, et prius, quomodo inſtituta ſint exactiſſime noſſe debemus, antequam iudicium de iis ferre licet.

§. 3. Compreſſio aëris tanta, qua in 1837 voluminis partem reductus, hincque duplam aquae et lapidis ferme denſitatem obtinuiſſe aſſeritur, omnino tale paradoxon phyſicum mihi eſt, et hinc priusquam aſſenſus praeberi poterit, antea, quomodo inſtitutum ſit experimentum, bene examinandum eſt.

§. 4. Ad hanc ſtupendam denſitatem aëri tribuendam ſequenti methodo ingenioſiſſima vſus eſt Cel. Hales. Elegit ſphaeram ferream cauam, cuius capacitatis diameter $6^{II} 5^{III}$ Lond. erat, et minima parietum craſſities $1^{II} 2^{III}$ L. Hanc ſphaeram cum vehementer gelabat, aqua impleuit, et tubum vitreum ab vna parte hermetice clauſum, cuius capacitatis longitudo erat $4^{II}. 0^{III} 6^{IV}$ et diameter $1^{III} 6^{IV}$. vt drachmam vnam et ſex grana aquae recipere poſſet, phialae paruae vitreae immiſit, in cuius fundo parum argenti viui cum ſupernatante ſpiritu Terebinthinae per Indigo colorato ſtagnabat, phialam deinde cum tubo vitreo aquae ſphaera ferrea contentae immerſit. Hoc facto foramini ſphaerae ferreae lignum denſum rite tornatum immiſit et ope praeli adegit fortiſſime, ligno prius materia ex maſtige, cera et Terebinthina parata obducto. Tandem materia frigorifica ex copiosa glacie contusa et tertia parte salis marini parata sphaeram operuit. Post paruum temporis interuallum sphaera fracta in tres partes dissiliit, quae tamen ab inferiore parte sese contingebant. Glacie copiosis bullulis aereis distincta parietes partium dictarum sphaerae obducti obseruabantur, et crassities glaciei erat ferme $\frac{3}{4}$ partium digiti. Phiala et tubus vitreus in frustula parua dissilierant. Vtraque tamen extremitas tubi, cum ibi finiretur, vbi glacies parietes obduxit, cum glacie coaluerat. Interna superficies frustulorum tubi vitrei fracti in ipso vertice etiam Terebinthina colorata et mercurio maculata obseruabatur.

§. 5. Dum celeb. Hales hoc phaenomenon contemplatur, putat, hinc concludi posse aerem in tubo vitreo sic compressum fuisse, vt spiritus Terebinthinae tantum non ipsum tubi verticem attingere debuerit. Per mercurium enim vel vitrum aerem transisse et se cum aqua miscuisse impossibile iudicat. Vt vero condensationem definiret, inquisiuit in cohaesionem ferri, quam aquae gelascentis pressioni in sectionem capacitatis sphaerae maximam circularem et hanc aeris in tubo inclusi elasticitati aequalem posuit, et hinc deduxit, aerem in 1837 voluminis partem coactum fuisse. Hinc cel. Musschenbroek in elem. Phys. §.794. sequentem legitime elicit conclusionem: *ita aer fuisset duplo densior quam aqua, et vltra, adeoque, cum incondensabilis sit, particulae aerem componentes, erunt prorsus diuersae indolis, quam aqueae; caeteroquin enim modo in volumen 800 minus circiter comprimi potuissent, tumque eiusdem densitatis ac aqua, viribus quibusvis comprimentibus*

re-

reſtitiſſent. Concluſio tamen haec, licet legitima, ſit inanis, ſi experimentum ipſum eſt fallax. Minorem tamen Cel. Hales inuenit denſitatem, ac ex datis colligere licet.

§. 6. Plane aliter hinc ſentio ac Cel. de Buffon, qui in verſione operis ſtaticae vegetabilium in linguam Gallicam calculum Haleſi emendaturus minorem denſitatem inuenit, quia ſectionem ſphaerae maximam, cum ſectione capacitatis ſphaerae maxima comparaturus pro diametro ſphaerae aſſumſit diametrum capacitatis ſphaerae ſimplici craſſitie parietum auctam, cum tamen diametrum capacitatis ſphaerae duplici craſſitie parietum augere debuiſſet ad diametrum ſphaerae totius definiendam. Hoc errore admiſſo planum cohaeſionis multo minus inuenire debuit ac Cel. Hales, hinc denſitatem etiam aeris compreſſi minorem.

§. 7. Ad calculum rite inſtituendum, preſſio aquae gelaſcentis in ſectionem capacitatis ſphaerae maximam cohaeſioni parietum ſphaerae ferreae circiter aequalis poni debet. Ponatur nunc cum autore diameter capacitatis ſphaerae $= 6^{II}\ 5^{III}$, L. et craſſities parietum minima $= 1^{II}\ 2^{III}$ L. diameter ſphaerae ipſius erit $= 8^{II}\ 9^{III}$ L. Poſitaque diametro ad periph. $= 113 : 355$, erit ſectio capacitatis ſphaerae maxima $= 33^{II}\ 18^{III}$ □, et ſectio ſphaerae maxima $= 62^{II}\ 21^{III}$, □. Hinc ſectio annularis parietum ſphaerae, quae ſimul eſt planum cohaeſionis $= 29^{II}.\ 03^{III}$ □, quod Cel. Buffon ob errorem admiſſum $= 13^{II}.\ 40^{III}$ □ inuenit. Sit cohaeſio fili ferrei diametri $\frac{1}{10}$ dig. Rhen. ſecundum experimenta Muſſchenbroeckii

broeckii in introd. de cohaerentia corporum, 450 librarum Amſtelod. vel 418 $\frac{1}{2}$ librar. Lond. poſita libra Amſt. ad libram Lond. vti 93 ad 100. Cum menſura Rhenana ſit ad menſuram Lond. vt 139 ad 135, erit 1^{III} Rhen. = 103^{V} Lond. ferme, et hinc ſectio fili ad axin normalis 8332^{V} □. Quoties haec ſectio in plano cohaeſionis 2903^{III}□ continetur, toties continentur $418\frac{1}{2}$ librae Lond. in numero librarum cohaeſionem parietum ſphaerae exprimente 1548120. Atmoſphaera ponitur in pollicem Lond. quadratum premere pondere 15. $\frac{5}{10}$ libr. Lond. hinc preſſio atmoſphaerae in ſectionem capacitatis ſphaerae maximam erit 508 libr. Lond. ferme. Hinc tota reſiſtentia quae aquae gelaſcenti ſit eſt 1458628 libr. Lond. circiter, ſi cohaeſio ferri fuſi ponitur aequalis cohaeſioni ferri cuſi. Preſſio gelaſcentis aquae in ſectionem capacitatis ſphaerae maximam 3318^{III} □ comparari poteſt cum preſſione atmoſphaerae in aequalem ſuperſiciem, quae eſt 508 libr. Lond. Eſt hinc preſſio aquae gelaſcentis in ſectionem capacitatis ſphaerae maximam ad preſſionem atmoſphaerae in aequalem aream vt 1458628 ad 508, vt 2871 ad 1 ferme. Si tandem volumina aeris ponuntur in ratione inuerſa virium comprimentium, aer in tubo vitreo compreſſione aquae gelaſcentis in partem voluminis 2871 reductus eſt, niſi ſe torturae huic ſubduxerit per poros vitri vel mercurii; quare vitri puriſſimi denſitatem ſuperaverit neceſſum eſt. Si ferri fuſi tamen cohaeſio ponitur ad cohaeſionem ferri cuſi vt 1 : 2, in partem voluminis 1435 aër redactus dici debet, diſcrepantiae huius Cel. Hales rationem habuiſſe non apparet.

§. 8.

§. 8. Si alia fluida praeter argentum viuum confideramus, aër in eorum interftitiis contentus ad aequilibrium quoddam videtur eniti, et fi in fluidis tanta copia adeft, vt externus premens et cohaefio partium fluidi non fufficiat illi coercendo, erumpere, fi vero parciori adeft copia, admittere aërem externum et cum illo vniri, hocque lentiffime fieri, fi differentia virium contranitentium minor eft. Quo maior vero haec differentia eft eo celerior eft aëris in fluidis inclufi mixtio cum aëre externo, vel externi aëris receptio in interftitia fluidi, fi hic minus refiftitur. Sic videmus, aqua fub campana orbi antliae pneumaticae impofita et preffione aëris externi minuta, ftatim aërem in aqua contentum ex aqua forma minimarum bullularam affcendere et campanam occupare, aquamque tali ratione aëre fuo ex parte orbatam et aëri libero expofitam fenfim aërem recipere in interftitia, non fecus ac fpongia aquam in fua interftitia recipit. Pariter aqua per poros ligni et multa alia corpora tranfit.

§. 9. Si ergo ad haec phaenomena non refpicere licet, quia aër cum argento non aeque facile mifcetur ac cum aliis fluidis; obferuauit enim celeb. Hales aërem in 37 voluminis partem reductum non penetraffe neque vitrum neque argentum viuum; nondum tamen hinc certus effe poffum, ne maiori quidem compreffione adhibita mixtionem et penetrationem oriri poffe. Si enim confidero compreffione aucta etiam particulas aëris minui debere, non videtur repugnare, particulas ita minui, vt interftitiis et poris vitri et mercurii recipi poffint, non minus ac particulae aeris naturalis denfitatis per poros ligni transeunt.

eunt. Si ergo ſpiritus tereb. verticem tubi plane attigit, vt experimentum docuit Clariſſ. Hales, exinde maiori cum veritatis ſpecie concludi poſſe videtur, particulas aëris ita paruas factas, vt tandem per poros vel vitri vel mercurii vel vtriusque tranſierint et ſpiritui terebinthinae et mercurio locum conceſſerint.

§. 10. Cum haec admodum ſpecioſa mihi videantur, repetendum puto experimentum cum ſphaeris diuerſis, quarum parietes craſſitie diſcrepent, vt pateat, an volumina aëris poſt compreſſionem ſint vt vires comprimentes inuerſe. Tubus vitreus in medio capacior adhibeatur, vt ſpatia aëris melius comparari poſſint maiori quantitate aëris compreſſa et ea quidem quam ipſe ſuadet Celeb. autor praecautione. Obſeruauit enim aquam in medio ſphaerae in glaciem non abiiſſe, et hinc iudicauit tubum vitreum cum phiala, ſi in medio ſphaerae rite fulciretur, nulli rupturae periculo obnoxium futurum et ſic altitudinem fluidi in tubum compreſſione eleuati et volumen aëris compreſſi poſt ruptam ſphaeram proditum iri colore coeruleo, quo parietes tubi interni maculari deberent.

§. 11. Si experimentum ſuccedit et 1) altitudo aſcenſus ſpir. tereb. colorati in tubo, poſt fractam ſphaeram ferream illibato, conſequenter ſpatium aëris poſt compreſſionem innoteſcit, et 2) ſpatium iſtud eſt inuerſe vt vis premens, ſi 3) aër in tubo vitreo compreſſione ceſſante idem volumen iterum habet, quod ante compreſſionem habebat, non dubitandum eſt amplius de iis, quae Celeber. Hales aſſeruit. Si vero totus tubus vsque

que ad verticem ſpiritu terebinthinae coloratus eſt, non dubitabo aſſerere, aërem ob diminutionem particularum compreſſione factam ſe per poros vitri vel mercurii ſubduxiſſe.

§. 12. Nihil reſtat, quam vt indicem, quomodo experimentum Haleſi repetendum ſit ita, vt tubus vitreus cum phiala non frangatur, conſequenter de ſtatu aëris, in tubo in ſtatu compreſſionis contenti, iudicium ferri poſſit. Vt hoc obtineatur, expedit conum ligneum, quo obturatur foramen ſphaerae ferreae, cum cauda parallelepipedali inſtruere, quae tantae longitudinis ſit, vt extremitas, ſi immititur ſphaerae, ſesquidigitum diſtet a parietibus ſphaerae. Huic perallelepipedo phiala cum tubo ita adplicanda et firmanda eſt, vt ſi longitudo tubi in duas partes diuidatur, punctum diuiſionis cum centro ſphaerae coincidat cono foramini immiſſo et praelo fortiſſime adacto. Si nunc totus apparatus ſphaerae immittitur et conus cum praelo ſic firmatur vt rupta ſphaera immobilis et praelo connexus maneat, totus apparatus immobilis manebit et illibatus, vt quid in tubo factum ſit, cognoſci poſſit.

TENTAMEN EXPLICANDI PHAENOMENON PARADOXON SCIL. THERMOMETRO MERCVRIALI EX AQVA EXTRACTO MERCVRIVM IN AERE, AQVA CALIDIORI, DESCENDERE ET OSTENDERE TEMPERIEM MINVS CALIDAM, AC AERIS AMBIENTIS EST.

AVCTORE
G. W. Richmann.

§. 1.

Cum experimenta de decremento caloris aquae instituerem, saepius turbatus sum phaenomeno quodam, quod frustra diu animo volui, in rationem phaenomeni inquirens. Tandem vero aliquid, quod maxime probabile visum est, subiit mentem, quod nunc cum societate communicabo, Forte haec qualiscunque inquisitio efficiet, vt paradoxa phaenomena de frigore horrendo aëris nebulosi in Sibyria a Cel. Gmelino et aliis obseruato, explicari saltim ex parte possint. Prius tamen obseruationes paradoxi istius, iteratas saepius, recensebo, quam rationem phaenomeni exponam.

§. 2. Experim. I. anno 1747 dei 7 Ian.

In temperie aëris 59 gr. Therm. Fhar. aqua temperiei 58 gr. collocata erat, cui thermometrum erat immersum, extracto thermometro ex aqua, quinque minutis primis ad gr. 49 $\frac{1}{4}$ descedenbat mercurius in aëre temperiei 59 graduum; deinde ascendebat in 25 min. pr. sensim ad gr. 56, decreuerat vero tem-

temperies aëris interea a gr. 59 ad gr. 57um. Dum aquae iterum immittebatur thermometrum, oſtendebat temperiem aquae $58\frac{1}{4}$ gr. Dum vero iterum extrahebam, deſcendebat mercurius ad gr. 54 vno minuto et dimidio, aſcendebat deinde in temperie aëris conſtanter eadem 58 gr. ad gr. $55\frac{1}{4}$ quatuor minutis primis, haerebat adhuc circa eundem gradum poſt 12 min. pr. Immerſo iterum thermometro aquae thermometrum oſtendebat temperiem aquae 58 gr.

§. 3. Experim. II. die 8 Ian. 1747.

Cum temperies aëris erat 64 graduum extracto thermometro ex aqua temperiei 63 graduum, mercurius deſcendebat quinque minutis primis ad gr. 54. Incepit deinde aſcendere iterum mercurius et in tribus minutis ad gr. 56, in 8 min. prim ad gradum 59, in 12 min. prim. ad gr. 60 et tandem in 25 min. pr. ad gr. 64 peruenit, aquae vero iterum immiſſum 63 gr. oſtendebat. Hoc experimentum eodem die ſexies repetii, et ſemper obſeruaui thermometro ex aqua 63 gr. extracto mercurium in aëre temperiei 64 graduum quinque ferme minutis primis deſcendiſſe ad gr. 54tum et deinde aſcendiſſe tardiori motu.

§. 4. Experim. III. die 9 Ian. 1747.

Extraxi thermometrum ex aqua temperiei 48 graduum in aëre temperiei 50 gr. et deſcendit mercurius ad gradum 46 et deinde iterum aſcendit ad gradum quinquageſimum temperiei aeris.

§. 5. Experim. IV. die 15. Ian. 1747.

In temperie aëris 62 graduum extraxi thermometrum ex aqua temperiei $60\frac{1}{4}$ gr. et deſcendebat mercurius

rius ad gr. 51 in quinque circiter minutis primis et dein in 9 min. pr. ad gr. 59 aſcendebat et in 12 min. pr. ad gr. 60 et poſt 17 min. pr. ad gr. $62\frac{1}{2}$. Aëris ambientis temperies interim ad gr. 63 creuerat, vt hinc mercurius in aëre, cuius temperies creuit, nihilominus deſcenderit. Paradoxon tali ratione augetur.

Immittebatur thermometrum iterum aquae et oſtendebat gr. $60\frac{1}{4}$, circa quem gradum per horam vnam atque alteram conſtanter haerebat mercurius, licet interea aëris temperies ad gr. 64 creuiſſet. Extracto thermometro etiam in tali aëre deſcendit mercurius tribus miminutis primis ad gr. 54, poſtea vero incepit aſcendere et in duobus minutis primis attingebat 56 gr. in 4 min. primis 58 gr. in 6 min. pr. 60 gr. poſt 15 min. prim. adhuc circa 60 gr. haerebat, poſt 26 min. prima circa 61 gr. et poſt 30 min. pr. ad 62 gr. et poſt 35 min. pr. ad gr. 64 peruenerat. Hactenus attonitus phaenomenon hoc obſeruavi et quantacunque ſolertia circumſtantias perpenderem, nullam phaenomeni cauſam detegere potui. Tandem incidit in mentem mutare experimentum.

§. 6. Experim. V. eodem die.

Sumſi manu, quae calidor erat ac aër et aqua, aquam temperiei $60\frac{1}{4}$ gr. et aſperſi thermometrum ſiccum, deſcendebatque mercurius a gr. 64 ad gr. 60 tribus min. pr. et deinde a gr. 60 ad gr. 59 min. primo temporis, haerebat circa $58\frac{1}{2}$ per tria min pr. deinde aſcendere incipiebat, et 4 min. pr. ferme attingebat gr. 60, poſt 9 min pr. 62 gr. poſt 12 min. pr. 63 et tandem poſt 17 min. pr. gradum 64 aëris ambientis. Bulbus etiam thermometri, dum tangebam, ſiccus erat. §. 7.

§. 7. Experim. VI. die 5 Aug. 1748.

Thermometro in aëre externo oſtendente gr. 68 et in aqua 66 gradum Thermometrum ex aqua extractum poſt 9 min. prim. oſtendebat gr. 64.

§. 8. Eperim. VII. die 6 Aug. 1748.

In aëre temperiei 63 gr. ex aqua temperiei 63 gr. thermometrum extraxi, mercurius poſt min. pr. oſtendit gr. 62, poſt duo min. pr. 61, poſt 3 min. pr. 60 gr. poſt 5 min. pr. adhuc haerebat circa 60 gr. Deinde aſcendere incepit, et poſt 9 min pr. aſcendit ad $60\frac{1}{2}$ gr. poſt 15 min pr. ad 61. Tandem priorem terminum 63 gr. iterum attingebat, et bulbus thermometri prorſus ſiccus deprehendebatur.

§. 9. Experim. VIII.

Eodem die in eadem aëris temperie aquae immerſi thermometrum, quod oſtendebat gr. 63 et deinde extraxi, poſt duo min. pr. oſtendebat gr. 61, poſt 4 min. pr. 60 gr. poſt 9 min. pr. adhuc oſtendebat gr. 60, cum contrectarem bulbum thermometri, deprehendi adhuc humidum. Simulac vero humiditatem abſterſi, ſtatim ad gr. 63 aëris ambientis eleuabatur mercurius. Hic illud notari meretur, tardum fuiſſe deſcenſum cum in omnibus ferme caeteris experimentis celerior fuerit. Coelum enim eo die fuit nubibus obtectum et vehemens ventus occidentalis flabat, praecedente proxima nocte pluuia vehementi; ob humiditatem hinc aëris difficulter thermometrum ſiccum reddebatur.

§. 10. Ex hiſce obſeruationibus ſatis patet,

1) Altitudinem mercurii in thermometro ex aqua extracto

tracto in temperie aëris maiori vel aequali temperiei aquae, ex qua extrahitur, decrescere.

2) Deinde iterum crescere, donec temperiem aëris ostendere incipit.

3) Tempus, quo altitudo decrescit breuius esse tempore quo iterum crescit.

4) Simulac thermometrum ex aqua extractum eundem ostendit gradum, quem aër, etiam thermometri bulbum siccum esse. §. 6. §. 8.

5) Quamdiu vero thermometrum ex aqua extractum non ostendit temperiem aëris, tamdiu bulbum thermometri humidum esse. §. 9.

6) A sola humectatione ergo oriri descensum descriptum mercurii in thermometro, eaque quomodocunque facta descensum fieri, et thermometrum siccum redditum ostendere temperiem aëris.

7) Descensum hunc mercurii modo maiorem modo minorem esse.

§. 11. Saepius etiam obseruaui thermometrum in aëre libero ostendere gradum quendam infra gradum conglaciationis aquae cum tempestas pluuiosa et mitior videbatur. Subiit animum ob humiditatem thermometro adhaerentem simile quid hic factum et thermometrum non ostendisse veram aeris temperiem. Similis obseruatio est Celeb. Krafftii in experimentis physicis suis p. 204. vbi scribit: *Si thermometrum libero are quaquauersum circum datum neque vlli alii corpori contiguum, quod calorem aliquem illi largiri possit, suspendatur, et aqua ob eandem causam non vase contineatur, sed in linteo tenuissimo et purif-*

purissimo madefacto expansa sit, obseruabitur hoc linteum iam a frigore rigidum, cum gradum 33 *idem thermometrum notat.* Nisi dicere velis aëris temperiem reuera frigidiorem fuisse ac thermometrum notabat, mercuriumque nondum temperiem aëris assumisse, eaque propter expansam aquam sec. legem decrem. caloris ob auctam superficiem citius obtinuisse gr. 32. ac mercurius in bulbo thermometri.

§. 12. Causam phaenomeni quod attinet, a dilatatione vitri ob calorem aëris maiorem calore aquae fieri debere descensum mercurii, nullo modo potest affirmari, cum differentia inter temperiem aëris et aquae sit exigua et interdum nulla, interdum minor nihilo, et hinc dilatatio vitri sit insensibilis vel prorsus nulla vel etiam in contractionem abeat. Idem iudicauit Cel. Gmelin in Praefatione Florae suae Sibiricae praemissa.

Humiditatem vero bulbi thermometrici cum hoc phaenomeno necessario connexam esse patet ex recensitis experimentis. Exponendum ergo restat, quomodo humiditas huius phaenomeni causa esse queat.

§. 13. Si respicio ad quaedam experimenta, cum mixtione materiarum quarundam cum aqua frigus producitur, reuoco in memoriam inprimis ea, quae Cel. Muschenbroeck in P. 2 tentaminum Acad. Flor. p. 135 in additamentis suis notauit: scil. salis vrinae volatilis drachmas duas affusas ad aquae vnciam produxisse frigus, descendente liquore in thermoscopio a gradu quadragesimo quarto ad gr. 42. et ibid p. 136. sesquiunciam aquae affusam fuliginis e camino vnciae semissi generasse frigus descendente thermoscopio ex gr. 44to ad gr $42\frac{1}{2}$.

§. 14. Oborta eſt ſuſpicio ſimiles materias in aëre tunc temporis volitaſſe, quae iunctae cuticulae aquae, qua obductum erat thermometrum, frigus produxerunt, quod mercurium in thermometro deſcendere coëgit. Vt rem ſtabilitum irem, tentaui vaporibus ſalis volatilis vrinae, ſale volatili ſub thermometri bulbo in quadam diſtantia poſito, cuticulam aqueam thermometri refrigerare, at nullam hinc mutationem, quam ſperaui tamen, factam eſſe ingenue confiteor.

§. 15. Interim tamen, quia non ſemper eadem mutatio, ſi experimentum inſtituitur, oritur, ſed modo minor modo maior, et mutatio haec neceſſario ab humiditate pendeat, ea vero ſemper eadem quantitate adhaereat, ſcil. ea, quae bulbo thermometri eiusdem adhaerere poteſt, cauſa mutationis ex parte in conſtitutione aëris ambientis latere videtur. Is vero cum calidior ſit aqua et nihilominus faciat, vt mercurius deſcendat, modo plus modo minus, peculiari materia frigorifica modo minori modo maiori quantitate grauidus eſſe videtur, quae cum cuticula aquea concurrens refrigerii huius cauſa eſſe poteſt.

An in aëre ſalia talia volitent vel etiam tales materiae quae concurſu ſalia talia conſtituere poſſint, quae cum aqua concurrentia frigus producere queant, et qualia haec ſint? chymicis diiudicandum relinquo.

C. G.

C. G. KRATZENSTEIN MECHANICAE COELESTIS SPECIMEN PRIMVM

CONTINENS:

NOVAM TVBOS LONGIORES COMMODISSIME TRACTANDI METHODVM.

§. 1.

Quotiescunque attentus coeli contemplator aut phaſes eclipſium ſolis et lunae determinare, aut maculas eorumdem delineare, aut diametrum planetarum adparentem per micrometrum dimetiri intendit; toties ipſi optandum foret, vt dicere poſſet: ſol ſiſte gradum; et luna, ne progrediaris vltra. Siquidem motus eorum diurnus aſtronomi operam quouis momento illudit.

§. 2. Nihil vero eſt tam arduum nihilque tam paradoxon, quod vnquam philoſophi efficere non conati ſint. Quamquam enim ſolem ipſum in motu ſuo apparente impedire non audeant, tentauerunt tamen radios eiusdem figere. Primus, qui, quantum ſcio, huius rei periculum fecit, fuit Farenheitius, qui duobus ſpeculis, ope manubrii verſatilibus, radios ſolares, quamdiu voluit, in eadem ſemper directione conſeruauit. Cum vero radii ſolares per duplicem reflexionem a ſpeculo metallico admodum debilitentur; et praeterea tractatio ſpeculorum manualis ſatis taedioſa ſit et ſocium expoſcat; cel. Graueſande in tomo II. edit. nouiſſ. elem. phyſ cum publico communicauit machinam, huic ſcopo magis accommodatam; vbi ſcilicet ſpeculum ſimplex metallicum per horologium ita dirigitur, vt radius ſolis reflexus in eadem continuo, quae placuerit, maneat directione; eamdemque dicauit experimentis opticis, circa radios ſolares in camera obſcura inſtituendis.

§. 3. Nouam vero haec machina nobis ſuppeditavit meditationem. Cum nimirum in aſtronomia practica ſuſtentatio, eleuatio et directio tuborum praeſertim longiorum ad deſideratam altitudinem et plagam maximas difficultates inuoluat; naturalis eſt concluſio, omnes haſce difficultates euaneſcere, ſi tubus ſemel pro ſemper in ſitu quodam commodo, e. g. horizontali, firmetur et obiectum deſideratum per radium reflexum et fixum continuo ad tubum deferatur; id quod per memoratam machinam praeſtare licet. Operae itaque pretium fore duco, ſi eam ex Graueſandio, quoad eſſentialia quidem non mutatam, emendatam tamen et huic ſcopo magis accommodatam, hic exponam.

§. 4. Vt eo facilius et iucundius diiudicari queat machinae effectus, in explanatione eiusdem methodum obſeruabimus heuriſticam. Erit haec ſimul demonſtrationis loco, quam Graueſandius paullum intricatam, exque alio fonte deductam ſubiunxit. Concipiamus obſeruatorem in ſphaera parallela, i. e. ſub polo, ſolem vero vel quemuis planetam in aequatore eſſe conſtitutum; et radium reflexum continuo horizontaliter in linea meridiana, in qua tubus locatus ſit, eſſe ſeruandum. Iam ex catoptricis conſtat, radium reflexum ſemper duplum anguli, per motum ſpeculi deſcripti, percurrere. Si itaque ad motum radii incidentis accedat motus ſpeculi aequiualens motui radii reflexi, neceſſario ſequitur, ipſum tum radium reflexum perſiſtere debere immobilem. Si e. g. Sol ab

hora

hora VI. matutina vsque ad horam VI. vefpertinam femicirculum percurrit, fpeculum quadrantem tantum percurrere debebit. Iam ex natura circuli notum eft, angulum ad peripheriam femper effe dimidium anguli centralis. Ideoque fi fpeculum in peripheria circuli fuerit conftitutum et promoueatur per radium circuli, mediante crure ad centrum fpeculi affixo, quod crura anguli ad peripheriam repraefentat, ftatim quaefitum obtinebitur.

§. 4. Defcribatur itaque in plano horizontali circulus horarius *a b g d* (n. 1) circa cuius centrum *c* index in extremitate furcatus *c b* fit mobilis. In peripheria huius circuli, et quidem in puncto pro lubitu adfumto, e. g. meridiano, conftituatur fpeculum, in centro auerfae partis cauda ad fuperficiem perpendiculari inftructum, quae ab extremitate indicis bifurcata excipi poffit. Sit iam punctum orientis in O, meridiei in S et occidentis in W et index circa ortum folis ad horam VI. matutinam conuerfus. Quoniam tum angulus *b a c* eft femirectus, fpeculum ad radium incidentem erit inclinatum ad angulum itidem femirectum; vnde per principia catoptrica angulus, quem facit radius incidens cum reflexo, erit rectus; verget hic itaque fecundum ductum lineae meridianae ad S. Hora meridiana index conuertatur in XII (n. 2) et radius incidens ad fuperficiem fpeculi erit perpendicularis; ideoque radius reflexus iterum in meridiana cogitur incedere. Hora VI. vefpertina index ducatur ad *d* (n. 3) et planum fpeculi iterum efficiet angulum femirectum cum radio occidentalis folis incidente. Hic itaque eodem, vt priori, modo ad angulum rectum i. e. in linea meridia-

Tab. VIII. Fig. 1.

na ad S (n. 3) reflectetur. Eadem ratione quauis intermedia hora radius in ea manebit fixus.

§. 5. In hoc casu, quia sol vel planeta nullam habet declinationem, sed in ipso horizonte mouetur, speculum in situ verticali horizontaliter conuertitur. Cum vero sol vel planeta habuerit aliquam declinationem ideoque et altitudinem supra horizontem, et tamen radius reflexus iterum desideratur horizontalis, speculum non retinere potest situm verticalem, sed obliquam obtinebit positionem, quam statim determinabimus.

§. 6. Ponamus itaque declinationem esse aequalem

Fig. 2. angulo *c g h*, radius solis, qui supra centrum *c* circulum diurnum describit erit $= hg$. Haec linea vero est $=$ secanti anguli declinationis *c g h* ad radium *c g*. Quoniam adeo per antecedentia speculum in peripheria circuli, circulum solis diurnum repraesentantis, constituendum est, eleuetur speculum ad altitudinem tangentis anguli declinationis vsque ad *a* distantia vero *a h* fiat $=$ secanti declinationis *h g*, patet centrum speculi iterum esse in peripheria circuli, radio obliquo $hg = ha$ descripti. Porro propter parallelismum linearum *a h* et *c g* angulus *a h g* est angulus complementi declinationis ad $180°$; ideoque, quia triangulum *a h g* per constructionem est aequicrurum, angulorum *a* et *g* vterque erit $= \frac{1}{2}$ angulo declinationis *c g h* et hic est angulus inclinationis lineae perpendicularis ex centro speculi ductae ad horizontem. Cum iam sol continuo moueatur in eadem altitudine *hc* angulus inclinationis ad speculum erit aequalis dimidio angulo declinationis; ideoque, quia angulus, quem faciunt radius in-

incidens et reflexus inter ſe, ſemper aequalis eſt duplo angulo inclinationis, hic aequabit angulum declinationis vel altitudinis ſolis ſupra horizontem, adeoque radius reflexus iterum redibit in linea horizontali. Redibit quoque ſecundum quamuis aliam directionem, quam habuit linea *a b*.

§. 7. Cum vero machina vtamur in ſphaera obliqua, planum circuli diurni ad planum aequatoris reddatur parallelum i. e. inclinetur ad eleuationem aequatoris, tum reliqua momenta inter ſe eamdem retinebunt relationem et diſtantia aeque ac altitudo centri ſpeculi ad quamvis declinationem ſolis vel planetae per trigonometriam facile poterit determinari, id quod in machina, ad noſtram eleuationem aequatoris compoſita, deinde ſuppeditabimus.

§. 8. Quoniam cel. Graueſand helioſtatae ſuae automaticae ſtructuram internam non determinauit ſed horologipoei iudicio reliquit, nos eam hic ſubiungimus. Fiat itaque 1) horologii theca ex duabus laminis quadratis 4 pollices latis, quibus rotarum axes inſinuari poſſint. Vnam harum ſiſtit *abcd* 2) Rota prima (das Schneckenrad) inſtruatur dentibus 48 eiusdemque axi affigatur conus truncatus cochleatus *f*, cuius ſulcus vnam et dimidiam circiter conuerſionem faciat. Huic ſulco catenula vel chorda *g* inſeritur, qua mediante vi elateris in capſula cylindrica *h* incluſi rota in motum concitatur. 3) Rota haec prima impellat tympanum dentium 12 alterius rotae *k* dentium 36. 4) Haec impellat tympanum dentium 6 rotae tertiae *m* dentium 42, cuius axis indicem gerit minutorum primorum 5) Haec circumagat rotam quartam et mediante hac quintam, quarum ambarum tympanum dentibus Tab. IX. Fig. 5.

6

6 et peripheria 42 dentibus eſt inſtructa. Poſterior harum vero non ſit coronaria, quemadmodum vulgo fieri ſolet, ſed radiata. 6) Haec quinta agitet rotam vltimam *n* ſerratam, 15 dentibus inclinatis inſtructam, mediante tympano 6 dentium. 7) Supra centrum huius rotae collocetur axis pinnatus *r*, cum pendulo *p*, 7″ circiter longo, connexus. Si iam axi rotae primae affigatur index, partes principales horologii erunt conſtructae.

§. 9. Opus erat in noſtro horologio euitare rotas loculamenti anterioris (das Vorlegewerck) quia alias index aliquantum hinc inde vacillat. Hinc etiam elater mediante ipſo indice intendendus eſt. Adducitur deinde index ad horam deſideratam, dum pendulum attollitur, ita, vt omnes rotae in motum concitentur; Attenditur tum ad indicem minutorum, et dum hic momentum praeſens indicat, pendulum liberatur et ad oſcillandum concitatur. Iam ex conſtructione horologii facile deducitur, quod ſi pendulum inſtruatur tanto ponduſculo, vt intra minutum primum $171\frac{1}{2}$ vibrationes abſoluat, rota prima intra 24 horas et tertia intra horam ſemel circuitum ſuum perficient.

§. 10. Quo vero index horarius ad ſpeculum convertendum ſit idoneus, in eius altera extremitate, ab axe 5 pollices diſtante, perpendiculariter adferruminetur tubulus
Fig. 6. *v* (n. 1) qui in cauitata ſua axin verſatilem furcae *u* (n. 3) gerat. Intra crura furcae ſuſpendatur axis *x* tubulum minorem pro inſinuanda cauda ſpeculi gerens. Et ſi machina etiam in minimis altitudinibus vſui eſſe debet, altitudo furcae ſupra indicem aequalis ſit tangenti eleuationis aequa-

quatoris ad radium diametri horologii cum excessu indicis. Adeoque in nostro horologio erit 4 pollicum.

§. 11. Vt horologium secundum eleuationem aequatoris disponi queat, in inferiori lamina firmetur arcus xy, n. 2. Tab. IX. fig. 6. in suos gradus diuisus, et per fulcimentum horologii transiens, ita, vt mediante cochlea z horologium in qualibet inclinatione firmari queat. Eadem ex ratione etiam pendulum mediante cochlea ad axin suum ita semper firmari potest, vt eo oscillante pinnae per dentes rotae vltimae vtrinque aequaliter attollantur.

§. 12. Deinde quoque circulus horarius in horologio ita construatur, vt circa centrum conuerti queat. Dum enim machina circa planetas vsu venit, pro ascensione recta planetae semper alia hora lineae meridianae horologii debet respondere.

§. 13. Adornandum iam erit speculum. Quia hoc mediante cauda sua horizontaliter et verticaliter mobile esse debet, suspendendum erit in linea per centrum ipsius transeunte intra furcam fc, n. 1. mediantibus cochleis acuminatis f et r. Fig. 6. Axis vero furcae cauus $a\ b$ versatilis sit super cylindro acuminato d, n. 2. cuius altera pars in arundine fulcimenti $e\ g$ Fig. 6. pro lubitu attolli et deprimi et mediante cochlea k firmari potest.

§. 14. Paretur iam asser rotundus planus, cuius alteratio per repagula in auersa parte firmata praecaueatur. In tribus punctis circa peripheriam instruatur cochleis, quarum ope in situm horizontalem disponi possit. Per eius medium ducatur linea, quae meridianam repraesentet, in cuius parte septentrionali disponatur horologium, ita, vt linea horae duodecimae ſuper eam tranſeat; quo in ſitu per cochleam in auerſa aſſeris parte firmetur. In altera parte huius lineae fiat ſulcus *mnop*, vt fulcimentum ſpeculi mediante pede π in eo hinc inde duci et plus vel minus horologio admoueri poſſit.

15. Vt iam praeparata machina eo commodius ad obſeruationes vti poſſimus, determinanda iam erit altitudo ſpeculi et diſtantia eiusdem ab axe indicis in quouis caſu neceſſaria. Cum ex ſuperioribus conſtet, diſtantiam centri ſpeculi aequalem eſſe ſecanti declinationis ſolis vel planetae; concipiamus axin indicis eſſe prolonga- Fig. 3. tum vltra ſuperficiem horologii *t v* vſque in *f*, ex *a* vero, extremitatem indicis deſignante, erigatur perpendiculum *a b* ad altitudinem furcae; et per *b* ducatur *b e*, parallela ad *t a*. Si iam declinatio ſolis ſit $=$ angulo *e b f* erit *e f* tangens declinationis, a cuius vertice *f* diſtantia ſpeculi *fg* in plano *b n* eſt determinanda. Demittatur ex *f* perpendicularis *f x* ad *k b* et in triangulo rectangulo *b x f* ex data hypothenuſa *b f* et angulo *f* inveniatur crus oppoſitum *b x*, quod ad horizontalem *g f* $=$ *f b* adiunctum, dabit diſtantiam *k b*. Demmittatur iam ex tubulo furcae indicis ad horam XII. conuerſi perpendicularis *b n* ad planum aſſeris; et aſſumatur punctum *n* tanquam terminus, a quo diſtantia metienda ſit; iuxta ſulcum *op* vero notentur diſtantiae pro ſingulis declinationibus repertae. Ad altitudines vero correſpondentes determinandas in eodem triangulo rectangulo *b x f* ex data hypothenuſa *b f* et angulo *x b f* inueniatur crus *f x*, quod aequat altitudinem centri ſpeculi ſupra axin tubuli, a fur-

ca

ca indicis geſtati. Singulae altitudines repertae notentur in atlante ſpeculi, qui pro lubitu attolli poteſt, initium faciendo, cum cauda ſpeculi per tubulum tranſiens fuerit in ſitu horizontali. Pro noſtra eleuatione aequatoris et machina ſequentes reperiuntur altitudines et diſtantiae centri ſpeculi a termino *b* in digitis eorumque partibus centeſimis.

	Borealis				Auſtralis		
Declinat.	30°	20°	10°	0°	10°	20°	30°
Diſtantiae	8″,66	8,74	8,97	9,33	9,85	10,56	11,54
Altitud.	5,00	4,08	3,26	2,50	174	0,92	0,00

§. 16. Redigatur iam baſis machinae in ſitum horizontalem ſuper menſa commoda et firma *abcd.* Ita, Fig. 4. vt eius linea meridiana cum vera congruat; et horologium inclinetur ad eleuationem aequatoris. Pendulum deinde et huic inclinationi horologii et quoad longitudinem motui diurno planetae conformetur, id quod per experientiam facile determinari poteſt; *e. g.* ad lunae obſeruationes in tantum erit elongandum vt index intra 25 horas periodum ſemel abſoluat, vel intra 24 horas vnam horam retardet. Quaeratur tum declinatio planetae et momentum culminationis eiusdem Ad normam prioris diſponatur ſpeculum quoad altitudinem et diſtantiam ab horologio; ad poſterioris vero normam conſtitiatur circulus horarius reſpectu meridiani horologii (§. 12.) Reducatur denique index ad momentum temporis veri; dico radium planetae reflexum iam continuo ſuper linea meridiana horizontaliter inceſſurum fore.

Pp 2 §. 17.

§. 17. Diſponendus nunc erit tubus pro obſeruatione. Hic licet longiſſimus ſit et grauiſſimus, abſque vllo prolixo adparatu tamen poterit reponi ſuper aliquot
Tab. VIII. fig. 4. ſcabellis vel menſis $efgh$ aut plane in pariete domus ſecundum lineam meridianam, boream verſus, firmari. In foco vitri obiectiui ante micrometrum conſtituatur diaphragma ex charta tenui oleo imbuta vel vitro per attritionem leuiter obfuſcato. In medio eiusdem ſit apertura campo viſionis tubi aequalis ad radios lucis transmittendos. Inſeruit hoc diaphragma, in quo imago planetae delineatur, ad eam deinde facilius ad oculum deferendam. Arundo tubi ex aſſeribus in figura quadrata aut ſexangulari poteſt conglutinari, vbi ſufficit, ſi ad diſtantiam ſingulorum 10 pedum ſcabellis fulciatur. Vel etiam ſi tubis abſque arundinibus vti placet, ſufficit, ſi vitrum obiectiuum annulo inueſtiatur et in ſcabello verticaliter firmetur. In altero ſcabello collocetur oculare cum diaphragmate et micrometro, breuiori tubo incluſum. Ambo ſcabella ita diſponantur, vt axis per centra vitrorum tranſiens ſit horizontalis et cum linea meridiana horologii ſimulque cum centro ſpeculi congruat. Dico ſub hac diſpoſitione planetam quoad integram moram ſupra horizontem per tubum immobilem poſſe obſeruari.

§. 18. Collocauimus iam tubum in linea horizontali verſus ſeptentrionem. Poteſt vero habere quemuis alium ſitum et inclinationem, quem locus obſeruationis concedit, dummodo planeta radios ſuos ad ſpeculum transmittere poſſit, et ſpeculi altitudo et diſtantia ſecundum inclinationem lineae gf fuerint determinatae. Poteſt

etiam

etiam haec determinatio mechanice fieri abſque calculo. Axi ſcilicet indicis excauato immittatur ſtilus tenuis ad eam altitudinem, in qua per tubulum ſuper indice, ad horam praeſentem conuerſo, planeta extremitatem ſtili ſtringere videatur, ſic habebitur ſimul et linea meridiana horologii, et tangens et ſecans declinationis, quae poſterior in cauda ſpeculi ſignata quamlibet eius poſitionem concedit, ſi modo terminus iſte ſignatus cum extremitate ſtili congruat. Sed quoniam in omnibus aliis diſpoſitionibus aliquo tempore apparitionis planetae radius incidens angulum facit nimis acutum, vnde viuidum obiectum in tubum deferri nequit, noſtra reliquis erit praeferenda, vbi angulus incidentiae raro infra 45° deſcendit, adeoque repraeſentationes magis viuidae ſunt.

§. 19 Attendamus nunc ad commoditatem, quae ex noſtra methodo in obſeruatorem redundat. Hic ſellae coram vitro oculari inſidens otioſum agit ſpectatorem reſpectu directionis tubi. Haec ſua otia vero impendere poteſt ad eo adcuratiorem obſeruationem phaenomenorum coeleſtium. Diametros adparentes planetarum iam ope micrometri nullo fere negotio determinat, expectant enim menſurationem. Eclipſes ſolis et lunae earumque phaſes quietus attendit. Macularum ſolarium et lunarium figuram et ſitum commode delineat. In genere omnia redeunt inde commoda, quae et ex fixatione radiorum et ex firmo et commodo ſitu tubi fluunt. Longiſſimi tubi centum et vltra pedum, licet optimae notae, nullius tamen fere vſus ſunt, dum vix vltra altitudinem viginti aut triginta graduum attolli, ideoque in contemplandis

 planetis

planetis tantum vſui eſſe poſſunt, dum verſantur circa horizontem. Hic vero vaporibus plerumque obnubilati adparent et potiora phaenomena ſua abſcondunt; de qua re in aſtrotheologia ſua conqueritur Derhamus. Hinc procul dubio neque de ſatellite Veneris neque de motu vertiginis Mercurii ſatis conſtat. Concidit hic titubatio tubi, quae etiam in minoribus, praeſertim vento eos feriente, obſeruatorem turbat. Euaneſcit hic incommoda corporis inflexio, cum altitudo planetae vltra 45° aſcendit; quae ſimul efficit, vt obſeruator tantum per vices tubum inſpicere queat. Abeſt difficultas planetam ad oculum redigendi. Carere denique poſſumus praegrandi illo et pretioſo adparatu, qui ad methodum hugenianam, caſſinianam et bianchinianam requiritur. Tacemus, quod hac methodo optime curioſis aliis, tubi tractationem ignorantibus, quaeuis phaenomena coeleſtia facillime monſtrare poſſimus; nec non, quod obſeruator hyemali tempore in cubiculo perſiſtere poſſit, ſi tantum machinam ante feneſtram reponat, et radiis tranſitum per foramen concedat.

§. 20. Nec vero ſilentio praetereundum erit, quibuſnam noſtra methodus prematur difficultatibus. Grauiſſima harum conſiſtit in exquiſita praeparatione ſpeculi metallici, dum vitreum propter duplicem reflexionem adhiberi nequit. Deſideratur vero in eo perfectio ſuperficiei in eodem gradu, ac in maioribus vitris obiectiuis. Interim, licet plana ſuperficies admodum difficile in eiusmodi perfectionis gradu ſpeculis concilietur, valent tamen noſtri aeui artifices eis ſuperficiem conuexam vel concauam vam ſatis adcuratam inducere, quemadmodum nouiſſime fabricati tubi newtoniani et gregoriani docent. Conducit tamen, ſi radius ſphaericitatis ſpeculi, quantum fieri poteſt, ſuperet radium ſphaericitatis vitri obiectiui. Alias enim longitudo tubi ſenſibiliter augetur vel minuitur. Contrahitur nimirum per ſpeculum concauum et elongatur per conuexum. In priori caſu augetur quidem claritas obiecti ſed minuitur vis augens tubi. In poſteriori caſu tubus quidem magis auget diametrum obiecti, ſed paullo obſcurius illud ſiſtit, cui tamen per vitrum oculare maioris foci facile ſuccurritur. Magnitudinem ſpeculi determinat ſecans anguli ſemirecti ad radium diametri aperturae vitri obiectiui. Reliquae difficultates omnes per adcuratam machinae diſpoſitionem euitantur.

§. 21. Indicabimus quoque paucis differentiam inter noſtram machinae adornationem et inter graueſandianam. Haec in eo conſiſtit vt 1) in noſtra diſpoſitio ſpeculi et horologii per huius motum non tam facile turbari queat. 2) Graueſandius opus habet peculiari inſtrumento, quod poſitorem vocat, cuius ope ſitum ſpeculi determinat, dum hunc poſitorem in quauis noua diſpoſitione fulcimento ſpeculi imponit illudque ad diſtantiam ſecantis declinationis, quae in poſitore deſignata eſt, ab axe horologii remouet, qua prolixitate in noſtra ſuperſedere poſſumus. 3) Propter exiguam nimis furcae indicis altitudinem radius in minori altitudine ſupra horizontem meridiem verſus horizontaliter plane reflecti nequit, quae directio tamen potiſſimum deſideratur. 4) Graueſandiana propter immobilitatem circuli horarii motui

tui ſolis tantum quadrat, noſtra vero pro omnibus planetis accommodari poteſt. Denique 5) noſtra ſub quali bet eleuatione aequatoris inſeruit, cum graueſandiana tantum in illis locis adhiberi queat, vbi eleuatio aequatoris ab obliquitate horologii non multum diſcrepat.

§. 22. Superaddimus adhuc, quod M. Boſſat iam inciderit in eiusmodi methodum, obiecta per duo ſpecula, manu conuertenda, in tubum reflectendi. Haec vero partim propter taedioſam tractationem manualem, partim propter inſignem difficultatem, planetam hac ratione ad oculum redigendi, partim etiam propter obſcuritatem obiecti ex duplici reflexione ab aſtronomis non fuit recepta.

SVP-

SVPPLEMENTVM AD MEDITATIONES DE VI AERIS ELASTICA,

AVCTORE
Michaele Lomonoſow.

§. 1.

Cum meditationes noſtrae de vi aeris elaſtica in conventu Academicorum praelegerentur, monuit clariſſimus Richmannus nos proprietatem aeris elaſtici palmariam praeteriiſſe; nempe ex theoria noſtra rationem nullam reddidiſſe, cur elaſtica vis aeris proportionalis ſit eiusdem denſitatibus: tum id me dubitatione turbatum praetermiſiſſe, reſpondi, promiſique me inpoſterum ſatisfacturum. Dubitatio vero hac de lege orta eſt primum ex inconuenientia theoriae noſtrae cum illa, quam dubitationem tandem aſſertum celeberrimi Bernoullii magnopere auxit.

§. 2. Deduxit nempe Bernoullius(*) ex ictibus globorum tormentariorum *auram illam elaſticam, quae ex puluere pyrio accenſo elicitur, aut non aerem eſſe communem, aut elaſticitates in maiore ratione creſcere, quam denſitates: non poſſe enim denſitatem aeris, qui a puluere pyrio inflammato oritur, eſſe plus quam millies denſitate aeris ordinarii maiorem, ſi puluis pyrius vel totus ex aere compreſſo compoſitus ſit, quod ex grauitate pulueris ſpecifica*

(*) Hydrodynamica p. 243.

concludit. Imo elaſticitatem aurae illius longe maiorem fieri oportere affirmat, ſi omnis puluis ad explodenda tormenta adhibitus et quidem in inſtanti flamma conſumeretur.

§. 3. Quod aura illa ſit verus aer atmoſphaericus, demonſtramus alias (*) An vero affirmandum ſit, elaſticitates aeris denſitatibus eius proportionales eſſe, id non obſcure patebit, ſi ex aliis experimentis ob id inſtitutis deductiones Bernoullianis ſimiles, ipſasque corroborantes elici potuerint. Hunc in finem nulla alia experimenta aptius adhiberi poſſe cenſemus, quam vbi compreſſus admodum aer, in cohibentia vaſa agit, ipſaque diſrumpit, ex quorum reſiſtentia vis eius elaſtica determinari et cum volumine comparari poteſt.

§. 4. Cum vero notiſſimum ſit, aqua in glaciem abeunte, volumen eius creſcere, et ſtupenda vi cohibentia vaſa rumpere. Id autem ab aere ex poris aquae iam iam congelaſcentis liberato, et in bullas collecto

Tab. X. Fig. 1. 2. 3. 4. proficiſci, extra omne dubium eſt. Hunc in finem confici curauimus aliquot globos vitreos diuerſae magnitudinis, cauos, cum tubulis craſſis anguſti luminis, quos aqua repletos exponebamus magno, qui hac (**) hyeme ſaeuiebat, frigori. Conglaciata aquae portio, quae quaſi cruſta quaedam latera cauitatis occupabat, ſingulos globos diſrupit, praeter eos quorum foramen conglaciata prius aqua non ſatis obturatum fuit, ideoque vi glaciei internae cylindrus glacialis *d* ex lumine extrudebatur. Disruptio facta eſt ſecundum varias directiones, plerumque tamen ſecundum

(*) Meditationibus ipſis (§. 27.) et ſingulari diſſertatione quam paramus,

(**) Anno 1749.

dum longitudinem tubuli, vt in figuris 2. 3, 4, oftenditur lineis *m m.* Poft ruptionem reliquum aquae effluebat, et cauitatem *c* relinquebat.

§. 5. Huiusmodi globorum vitreorum maximus, quem adhibuimus, habebat diametrum 26 linearum Parifini Regii pedis, diameter cauitatis erat 8 linearum, crufta glacialis $1\frac{1}{2}$ lineas circiter craffa (hanc menfurare cum debita accuratione non potuimus ob inaequalitates, quas effluentis ex medio *c* refiduae aquae repertina ad ipfam cruftam congelatio, praefertim in parte interiore cruftae produxerat, et crafficiem illius augebat; maximam tamen, quam fieri potuit, hic affumimus) adeoque diameter cauitatis in crufta erat 5 linearum. Hinc per calculum deducitur planum ruptionis, excepto tubulo, fuiffe 480 lineas quadratas, planum circuli maximi, quem habere debet globus ex crufta glaciali formatus, 41 lin. quadratas. Cylindrus vitreus $\frac{25}{100}$ pollicis Rhenani ruptus eft 150 libris(*) vnde per calculum deducitur cylindrum vitreum 1 pollicem Regium Parifinum in diametro habentem rumpi debere 2572 libris; adeoque cylindrum, cuius planum ruptionis eft 480 lin. qu. ad ruptionem requirere libras 10925 circiter.

§. 6. Si aqua integra in cauitate globi vitrei conglaciata fuiffet, vis glaciei disrumpens aeftimanda foret ex plano circuli cauitatem integram bifariam diuidentis; fed quoniam in medio remanfit aqua a conglaciatione libera, quae idcirco non producebat aerem, nec agebat in vitrum; aeftimari ergo vis agens debet, ex plano circuli maximi, quem habere debet globus ex crufta glaciali formatus, quod eft aequale 41 line-

(*) Mufchenbroeck in notis ad experimenta Academiae del' Cimento p. P.

is quadratis. Columna Mercurii aereae aequipollens 41 linearum quadratarum baſi incumbens, 28 pollices alta, ponderat grana 40242, ſeu libras 4 et grana 3378. Hinc ſi aqua in cruſtam conglaciata vel integra eſſet aer, condenſatum fuiſſe oporteret in $\frac{1}{2521}$ circiter ſpatii, quod in atmoſphaera occupat, vt globum hunc disrumpere potuiſſet. Vnde ſi denſitates aeris elateri proportionales eſſent, aquam ſe ipſam $2\frac{1}{2}$ plo ſpecifice reddi grauiorem neceſſe foret, cum in glaciem conuerteretur; quod cum abſonum ſit, non obſcure igitur apparet cum Bernouliana deductione noſtram magnopere conſentire.

§. 7. Suſpectam eſſe materiam vitri ingenue fatemur, nempe eam rumpi poſſe etiam ob repentinam refrigerationem ſine conglaciatione aquae in cauitate globi. Verum tamen hoc experimentum duobus aliis globis vitreis aqua repletis et frigori expoſitis repetitum fuit, eodem ſemper ſucceſſu, cum plerique eiusmodi vitrei globi alii, caui, et ab aqua vacui, cum illis ſimul frigori expoſiti ſine ruptionis damno perſtiterint. Vnius diameter erat 18 linearum, cauitatis $5\frac{2}{3}$, cruſtae glacialis craſſities lineae 1 —, alterius diameter 17 lineas cauitatis $5\frac{1}{2}$ lineae, cruſta glacialis $\frac{3}{4}$ lineae craſſa.

§. 8. Commodum clariſſimus collega noſter Richmannus inſtituit, eodem gelu durante, ad aerem vi frigoris in bombis comprimendum experimenta, quae vi congelaſcentis aquae ruptae erant. Vna earum a nobis menſurata fuit, quae habuit in diametro 94 lineas Pariſinas, cauitatis diameter media erat 60 linearum, cruſta vero glacialis 4 linearum, adeoque diameter aquae, quae ad momentum ruptionis

tionis nondum conglaciata fuit, 52 lin. Quod phaenomenon quoniam cum eis, quae ipſi experti ſumus, omni ratione conuenit, optime ad propoſitum noſtrum adhiberi poteſt.

§. 9. Ponamus firmitatem ferri fuſi, ex quo bombae parari ſolent, inter ferri et vitri firmitatem eſſe mediam, ob mixtas in illo vitreſcentes particulas cum ferreis. Quoniam ex Muſchenbroeckianis experimentis colligitur firmitatem vitri ad firmitatem ferri eſſe vt 24 ad 450, erit media 237, adeoque vires ad bombam rumpendam requiri aequales $904105\frac{3}{4}$ librae. Pollex cubicus Mercurii ponderat grana. 5048; columna igitur Mercurialis aereae aequipolens, inſiſtens plano ſectionis circuli maximi cruſtae glacialis in globum reductae ponderabit grana 1375159 ſeu libras prope 150. Hinc ad rumpendam bombam, ſi vel integra cruſta glacialis fuiſſet nil niſi compreſſus aer, requireretur 6000 ies denſior atmoſpherico, atque adeo cruſta glacialis pluſquam ſexies ſemet ipſa grauior eſſe deberet.

§. 10. Aqua ſub campana antliae exteriore aere decedente multo maiorem capiam aeris emittit, quam quae ex congelaſcente aqua gelu elicitur et in bullas vaſa rupturas colligitur. Vnde apparet aerem in aqua contentum non omnem reſumere vim ſuam elaſticam per congelationem, adeoque nec integrum in cohibentia vaſa agere. Id autem ſi obtineret, multo maiores effectus ab eadem vel iidem a minori copia glaciei exſererentur. Ex hac itaque circumſtantia illi, quam Cel. Bernoullius annotavit (*) gemina, etiam apparet aeris elaſticitatibus denſitates

 tates

(*) Hydrod. p. 242.

tates illius in magnis compreſſionibus proportionales non eſſe. Accedit quod etiam Cl. Muſchenbroeckius (*) obſeruauit, cum aerem pluſquam in quadruplo minus ſpatium redigeret, ipſum non amplius auſcultare regulae traditae, ſed plus reſiſtere viribus comprimentibus. Id autem quomodo ex noſtra theoria ſequatur, videamus.

§. 11. Sint maſſae aeris duae pondere aequales A et B, ſpatiola vero vibrationis inter corpuſcula maſſae A ad ſpatiola vibrationis inter corpuſcula maſſae B vt a ad $a-b$; erit volumen maſſae B ad volumen maſſae $A = a^3 : (a-b)^3$. Quoniam autem globuli aerei eo frequentius reciprocant vibrationes ſuas, quo minora habent ſpatiola vibrationis, erit frequentia ictuum inter globulos, vt ſpatiola reciproce. Hinc frequentia ictuum inter omnes globulos, maſſae aereae A ſecundum omnes tres dimenſiones ad ſimilem frequentiam ictuum inter omnes globulos aereos maſſae B erit $= (a-b)^3 : a^3$. Cum vero ictus reciproci globulorum aeris quo frequentiores ſunt, eo fortius a ſe inuicem illos repelli et vim elaſticam aeris eo magis inualeſcere oportet. Erit ergo vis elaſtica maſſae aeris A ad eam maſſae aeris $B = \overline{a-b}^3 : a^3$, adeoque elaſticitates aeris erunt vt volumina reciproce, ſeu quod idem eſt, denſitatibus proportionales.

§. 12. Veriſſimum hoc foret, ſi reciprocantes globuli Fig. 5. aerei B et C poſt quemlibet impactum reſiliendo ſemper in proximum aliquem globulum A directe incurrerent, nec per interſtitia tranſſilientes illos ſaepius praetergrederentur ad alios globulos remotiores ſibi obuios tardius impetum facturi

(*) Elem. Phyſ. Cap. 36. §. 794.

ꝯturi et ſupradictae rationi derogaturi. Sed quoniam hoc ſupponi non poſſe ſatis apparet, alia igitur ratio intercedat neceſſe eſt. In quo autem ea conſiſtat et vnde proveniat, id, vibrationum varietates attentius conſiderando, inueniri poſſe certum habemus.

§. 13. Corpuſcula aeris B et C poſt colliſionem ſaepius etiam per ſpatiola AA tranſſilire, corpuſculis A intactis, et corpuſculorum aeris diametros eo maiorem rationem ad ſpatiola vabrationis habere, quo magis aer comprimitur, nemo dubitabit. Porro vibrationibus numero infinitis ſimul conſideratis, dari oportet rationem aliquam vibrationum, quae in proximos globulos A impetum faciunt ad vibrationes, quibus per interſtitia AA globuli motu in remotiores D incurrunt. Illam autem ad hanc eſſe vt numerum globulorum aereorum, qui in ſuperficiae ſphaerae, ſemicirculo AFAB deſcriptae inter globulos A collocari poſſunt, ad numerum globulorum A, qui ſinguli a ſe inuicem diſtant tantum quantum a centro B. Creſcente denſitate aeris globuli A propius ad ſe inuicem accedent, interſtitia inter illos decreſcent, minor numerus vibrationum globulis A intactis fiet, atque adeo ratio vibrationum, quibus per interſtitia AA globuli tranſſilientes in remotiores D incurrunt, minor erit ad vibrationes, quibus proximi globuli A feriuntur. Hinc maiori frequentiae ictuum a minori diſtantia globulorum aeris profecta (§. 11.) id quoque accedet, vt propter contracta interſticia AA inter proximos aeris globulos frequentiores quoque impactus fient in ipſos, et hoc ipſo reſi-

reſiſtentia aeris elaſtici augebitur vltra aſſignatam rationem (§. 11.) In ea compreſſione aeris, in qua vibrationum ſpatiola minora ſunt diametris globulorum, omnes conflictus globulorum erunt cum proximis A; cum per interſtitia A A ſine impactu penetrare non potuerint. Vnde perſpicitur, quantum ratio elaſticitatum aeris diſcrepare debeat a ratione denſitatum in ſumma illius compreſſione.

PHY-

PHYSICA.

HISTORIA ANATOMICA
OVIS PRO HERMAPHRODITO HABITI.

AVCTORE
Abr. Kaau Boerhaave.

Vt in reliquis partibus, tam externis, quam internis, corpora humana inter ſe differunt, non modo ratione regionis, natiuitatis, aetatis, vitae et laborum generis, exercitationisue, ſed et earumdem diſpoſitione et lineamentis, ita in vtroque ſexu genitalia interne, externe pudenda, ſedulo obſeruata, raro ita inter ſe conueniunt, vt nulla oculo attentiſſimo notetur ſitus vel figurae alia facies, quam in caeteris. Dicta firmant partes: quae vteri fundo appenſae, per duplicatos peritonaei proceſſus, easdem ambientes, inter ſe nectuntur, ouaria ſcilicet, tubae Fallopianae, ligamenta dicta rotunda, in foeminis. Has nunquam fere obſeruaui, eadem plane ratione diſpoſitas in pelui; contigit tamen multa diuerſae aetatis diſſecta mulierum examinare corpora ad hoc attento. Idem in viris obtinet, ſiue reſpiciamus ad organa, quae prolificum ſemen perficiunt et conſeruant, ſiue ad illa, quae hoc, tempore orgaſmi venerei, expellunt.

Vti autem in internis, ita in externis, vix vnquam obſeruatur eadem perfecte figura pudendorum, in vtroque ſexu, licet partes conſtituentes ſint in genere ſimiles. Quoties vero a naturali ſtatu ita decedunt, vt, vel defectu, vel augmento, oriatur quaedam deformatio, ſtatim de Hermaphroditis cogitatur atque decantatur. Tales an dentur veri, qui ſcilicet in vtramque venerem parati cum foeminis concumbunt, atque viciſſim viros admittunt, vix credere poſſum; ipſa fabuloſa antiquitas talem deſcribit,

nec foemnia dici,

Ouid. Metam IV. Fab. XI. *Nec puer vt poſſit, neutrumque et vtrumque videtur.*

Imo vero an illi quidem exſtant, in quibus vnus ſexus praeualet, addito genitalium alterius quodam ſupplemento, vehementer dubito, quoniam hi attentius examinati, ex teſtimonio Auctorum, vltimum hoc deformatum nec peruium, nec ad opus aliquod venereum, aut ad vrinae excretionem, aptum gerunt. Si puero, rite formatis caeterum genitalibus, intra ſcrotum et anum, cutis perinaei complicata ſulcum, ſed inperuium, ita format, vt inde labia leuiter protuberent, vel ſi ipſum ſcrotum ad ſeptum medium, quod externe ſutura notatur, fiſſum rimam facit, non video, cur illi Herma phroditi vile nomen imponatur, inprimis, ſi ad procreationem caeterum aptus ſit. Dicam, quid ſentio; omne, quod in vtroque ſexu mixtum ex forma duplici perhibetur, alterius modo credo informem figuram, ſiue aucta, ſiue imminuta, partium ſubſtantia.

Memorabilis eſt Hiſtoria, quam narrat Regnerus

(1) De Mulier: organ. gener. inſerv. pag. 299. de Graaf (1) de Infante, cui baptiſmo nomen Cornelii imponebatur, ob partium genitalium externam figuram, quae deprauata ſexum virilem mentiebatur (2), quae mor-

(2) Ibid. Tab XXIII. tua diſſecta inuenta eſt puella (3). Sola clitoris, mole

(3) Ibid. Tab. XXIV. aucta, atque labiorum pudendi tumor errorem impoſuerat.

Ta-

Talem examinaui pauperam, ſtolidam, foeminam, viginti et vltra annos Hermaphroditum a natiuitate declamatam. Haec mammoſa in parte ſuperiore rimae pudendi pendulam gerebat, figura ſimilem peni verili virgam, glande rubeſcente, ſed inperforato coronatam, praeputio inſtructam breuiore, quam vt totum glandem tegeret, haec ſesquiunciam circiter longa, minimum digitum craſſa, manibus tractata erigebatur antrorſum, et, vt penis, duplo maior et craſſior, rigeſcebat. Rite autem examinata erat ipſa clitoris, ſub qua, labiis diductis, conſpiciebantur muliebria perfectiſſima, et orificium vrethrae, ſuo loco prominens, patulum. Figura pudendorum externa multum conueniebat cum illa, quam exhibet de Graaf in mox memorata puella, niſi, quod pudendi labia non ita tumeſcebant ad inferiora, in quibus etiam nullum veſtigium tangebatur teſtium. Talem caſum narrat Bartholinus de muliere Haſnia, Hermaphrodito credita, ob elongatam et craſſam clitoridem, quae tamen vera foemina, in itinere, militibus vſum corporis ſui concedebat (1). Et Isbrandus de Diemerbroeck audacter affirmat, eſſe hanc partem increscentem, quae virgam virilem effingit in foeminis, vnde Hermaphroditi creduntur (2), affert ſimul duo memorabilia exempla, quae ipſe vidit et examinauit, ad hoc affirmandum (4). Plures ego Auctores non adducam, etſi plurimos hac de materia compilare poſſem; et nugas omitto refutare de foeminis in viros mutatis, ſatis hoc ſuperque fecit modo laudatus Diemerbroekius (5).

(1) Anat. reform. cap. XXXIV.

(3) Oper. anatom. cap. XXVI.

(4) Ibid.

(5) Ibid.

Vti in foeminis, aucta mole, clitoris, ita in viris, praeter memoratas rationes, fulcum fcilicet in perinaeo, vel fcroti fiffuram, quandoque defectu partium oritur deformatio in genitalibus, vnde illi Hermaphroditi creduntur. Rarus habetur, et forfitan in hiftoria naturali nufquam notatus, cafus quatuor hominum Sibiricorum ex duobus parentibus natorum, eadem exacte genitalium deformatione praeditorum, vti recte memorat Cl. Gmelinus, qui primus hos in patria vidit, examinauit, et accuratiffimam partium genitalium deformatarum defcriptionem ad Academiam mifit. Ex qua operae pretium vifum fuit, ex Sibiria hos homines Petropolin accerfere, vbi et illos coram Academia examinauit et defcripfit Cel. Wildius. Vtriufque accuratiffima genitatalium deformatarum defcriptio inter fe collata conuenit fatis pulchre, fententia tamen diuerfa eft de definiendo fexu. Pro foeminino ftat Cl. Gmelin, contrarium opponit Cel. Wildius; vterque fua attulit argumenta, aliorum Scriptorum etiam auctoritate firmata. Differtationes autem hae prolixiores a magnis his Viris non in eum finem defcriptae funt, vt publicarentur, multo minus hifce commentariis infererentur. Sufficiet ergo Beati Weitbrechti prima, et vltima inquifitio poft triennium repetita, vtpote quae continent, accuratiffimam fimul et breuem defcriptionem. Prima quidem in definiendo fexu ambigua, altera, in prouectiore aetate de fexu certior, concludit ad mafculinum. Interim non poffum, quin hoc addam. Miror fcilicet, lite orta de fexu, quod ad hanc componendam, vel faltem ad fententiam alteram firmandam, nemo mo cogitauerit de dimetiendo corpore, quoniam conſtat, ambitum pectoris ad peluis eſſe in foeminis circiter, vt duo ad tria, in viris contra, thoracem latiorem tres habere partes ad duas peluis, vnde viri corporis truncus conuergit inſeriora verſus, foeminae contra latior diuergit (1): quare, ex amplitudine coxarum, in foeminis artus inferiores (femora ſcilicet et crura) iterum ad ſe inuicem conuergunt, in maribus diuergunt: quod optime expreſſit Veſalius iſtis figuris, quarum altera Herculem, altera Venerem depingit (2). Multum hoc feciſſet tentamen ad enucleandum genus, quoniam reliquae corporis partes rite formatae et ad modulum erant compoſitae.

(1) Accuratam dimenſionem collegit Cl. Hallerus DCCIX. inſt. Boerhauii Tom V. par. II.

(2) In Epitome lib. de corp. hum. Fabr. ad pag. 608.

Beatus Weitbrechtus autem hos iuuenes primo examinauit anni 1743 menſe Octobri, atque illos his verbis deſcripſit.

1. *Abraham Kuſnezov*, 2. *Terentius Kuſnezov*, 3. *Michael Luganof*, *Iohanis Luganof*.

Memoratu dignum eſt omnino, vti Cl. Dn. D. Gmelinus, cum haec ſubiecta inuenerat, recte iudicauit, quatuor pueros, (tali enim habitu incedunt) binos quosque fratres, intra paucos annos in eodem loco natos, eandem fere genitalium externorum deformationem a natura paſſos eſſe. Omnem rem Cl. Gmelinus ita accurate deſcripſit, vt pauca mihi addenda videantur, quae fortaſſe non niſi temporis diuturnitate diuerſitatem quandam induxerunt; duo enim iam anni ſunt, ex quo Cl. Gmelinus obſeruationes ſuas, dum in Sibiria viueret, inſtituit; et experientia docet, iſtiusmodi deformitates mirum quantum mutationibus obnoxias eſſe. Dicam igitur primo

mo

mo, quid mihi in his ſubiectis apparuerit, tum vero, quid mihi exinde ſequi videatur, adiungam.

In omnibus quatuor pueris propendet in pubis regione media membrum aliquod ſolitarium, fere cylindricum, non plane rectum, ſed aliqua ex parte recuruum, ſubdurum, quod vel peni maſculo vel clitoridi foemininae quodammodo, neutri perfecte, aſſimliari poteſt. Quantum tactu diiudicare licet, vnico tantum corpore conſtat, quod cauernoſum dicere licet: nam membrum, teſtantibus pueris, ſub diluculum plerumque rigidum euadit, quod et accidit, dum illud diutius manu palpes. In apice corpore ſpongioſo rubicundo, vt glans eſſe ſolet, munitur. Vrethra autem, dum ex curuatura oſſium pubis extrorſum aſſurgere debebat, non tota cum corpore cauernoſo adunatur, ſed in media via, quaſi truncata ſiſtitur; hinc orificium huius meatus eo loco, quo foeminis eſſe ſolet, conſpicirur. Limbus orificii ob vrethrae ſpongioſas reliquias per cutem teneram transparentes liuidiuſculo colore gaudet. Meatum autem vrinarium reuera tanquam detruncatum haberi debere, docet ſulcus aliquis ſuperficiarius, longitudinalis, eo loco, quo vrethra ſub corporibus cauernoſis ſitus eſſe ſolet, inſculptus, ab ipſo illo orificio ad glandis apicem vsque prolongatus. Hic ſulcus ſpeciem dimidiatae cauitatis vrethrae plane prae ſe fert, vtpote lacunis conſuetis, imo et minutis corpuſculis glanduloſis, ſcatens. Glans ipſa inferne in medio hiulca eſt pro ſulci continuatione, et corona ad latera ſulci paulum protuberat, vt ſulcus quaſi in ſemi-canalem conuertatur, quod imprimis in Iohanne optime patet. Membrum peniforme in dorſo tegitur

gitur cute admodum laxa, plerumque transuerſim rugoſa, poſt glandis coronam, vt in aliis ſolet, annexa; quo propius glandem accedit, eo amplior, hinc ob ſpatioſam largitatem ſuam glandi amplum praeputium paebens. Cutis autem non totum membrum ambit, ſed in auerſa ſede ad compenſandum fraenulum, quod propter hiulcum glandis ſtatum, de quo diximus, in medio locari non poterat, ex vtroque latere poſt memoratam coronae protuberantiam affigitur, et porro ſulco ipſi, ſecundum longitudinem marginis eius, ſtricte adnaſcitur; quae quidem ſtricta atque arcta cutis connexio efficit, vt membrum, quando riget, incuruetur, quia haec ſtrictura non ita facile extenſioni cedere poteſt, ac ſuperior cutis laxior et mobilis. Iuxta membri originem vtrinque cutis protuberat turgidiuscula, laxa in rugas profundas, eleganter criſpatas, quemadmodum ſcrotum corrugatum eſſe ſolet, oblique lunatim incuruatas et perinaeum verſus deſcendentes, complicata. Haec cutis ſtructura non inepte quidem pro ruderibus ſcroti dimidiati et vtrinque ſurſum retracti haberi poteſt; ſed et labia ſinus muliebris ſimulat. Certe in Michaële ſuperficiario obtuitu perfectam et elegantem concham muliebrem refert. Quid autem in harum rugarum cauitate interna lateat, teſtes an ouaria? difficile eſt dictu; ſolus tactus ad quaeſtionem ſoluendam non ſufficit. In Abrahamo nulla teſticulorum veſtigia deprehenduntur; in Terentio autem vtrinque corpus aliquod oblongum veſiculare ſubeſſe, et in inguine vsque ad annulos proceſſibus peritonei transmittendis inſeruientes pertingere, tactu dignoſcitur, quod an pro teſticuli ſimulacro an pro hernia ventoſa, an pro membrana δάρτος incraſſata et inflata haberi debeat, ante ſectionem diiudicari nequit. Imo, etiamſi certo conſtaret de teſtibus, nulla tamen vaſa deferentia tetigi. Denique in nullo horum puerorum vaginae veſtigium vllum apparet; in Michaële et Iohanne ſub vrethrae orificio cutis perinaei vtrinque in labiorum formam turget. Quid ſub cute lateat? ignoratur.

Huc vsque Cl. Weitbrechtius prima ſua inquiſitione: cum autem in initio huius diſſertationis recte annotat, temporis tractu multa poſſe mutari in eiusmodi ſubiectis, ad elucidationem triennio circiter poſtea, menſe nempe Auguſto Anni 1746, disquiſitionem ſuam repetiuit, atque figuris ad viuos delineatis ornauit alteram concinne et breuiter his verbis deſcriptam diſſertationem.

In tribus illis Hermaphroditis, Abrahamo et Terentio Kusnezof fratribus, itemque Iohanne Luganof (Michaël enim Iohannis frater clam euaſiſſe dicitur) repetita inquiſitione ſequentia inueni.

I. In Abrahamo decimum quintum annum agente pubis regio turget. Lateri dextro membri penduli adiacet burſula, in qua teſticulus et epidydimis, et vas deferens diſtincte tangi queunt. In latere ſiniſtro autem burſula eſt vacua et pectinatim rugoſa. Membrum tegitur cute laxiſſima amplum praeputium formante. Orificium vrethrae diſtat a radice glandis pollicem circiter. Sulcus inter hos duos terminos comprehenſus ſcatet lacunulis longitudinalibus a foramine vrethrae glandem verſus radiatim aſſurgentibus, in quibus et minuta corpuſcula, glandularum ſpeciem prae ſe ferentia. Glans hiulca et quaſi fiſſa. Ad huius

ſiſſufiſſurae margines cutis fraenulum vtrinque laxum format, lateribus ſulci autem vtrinque ſtricte adhaerens impedit membrum, ne rectum extendi queat.

II. In Terentio tredecim annorum, ambae burſulae eleganter rugoſae. Quando inſpirat, corpora veſicularia vacua, vel aëre, vt videtur, plena in inguina retrahuntur,. in exſpiratione autem in burſulas exprimuntur. Huic penis multum riget. In ſulco ſunt quidem lacunae, ſed non ita radiatim diſpoſitae; aliqua earum ſatis profunda, longitudinalis, immediate poſt glandem ſita, foueolam coecam gerit vix aciculae caput capientem. Reliqua vt in Abrahamo.

III. In Iohanne Luganof duodecim annorum, cutis ad latus membri rugoſa, et ad burſulas formandas apta. Membrum et praeputium congruit cum figura Gmeliniana. In burſulis nihil tangi poteſt, quando puer iacet; quando autem ſedet, corpora ſolida, globoſa, quae prius in inguine delibuerant, in burſulas deſcendunt, ſulcus brevior eſt ac in reliquis, et in eo aliquae lacunulae perpendiculariter ſibi ſuccedentes. Glans profundius fiſſa.

IV. In omnibus totus horum genitalium apparatus cum reliquo corporis habitu in maiorem molem increuit. Omnibus membrum tractatum riget. Omnibus corpora cauernoſa membri ſecundum ſynchondroſin oſſium pubis aſſurgentia tanguntur. Omnes hactenus bene valuerunt. Nulla vocis mutatio hactenus, nulla barba, nulla pubes, nullum ſemen.

Hac noua disquiſitione ego in mea priſtina ſententia confirmor: In his tribus ſubiectis eſſe ſolam defor-

 mationem

mationem externarum partium genitalium masculinarum; videlicet, membrum pendulum, incuruum esse penem, sulcum esse vrethram fissam, bursulas esse scrotum diuisum et translocatum. An partes genitales internae etiam deformatae sint? definiri certo nequit. In Terentio et Iohanne suspicandum est, testiculos aliquid passos esse. Abrahami autem testiculum, saltem dextrum, ad elaborandum semen aptum fore, maxime probabile videtur.

Haec altera indagine enucleauit, atque sententiam hisce exposuit Ille: mihi vero hos homines in patriam remissos, nec videre, nec examinare, contigit; rogatus interim sententiam, de sexu, dum magnorum Virorum inter se confero obseruationes adeo consentientes, atque inspicio figuras cura Cel. Weitbrechti depictas, quas ad rei veritatem elaboratas affirmat Doctissimus Kleinfeldius, tum illi, iam mihi, in Academia Adiunctus, atque anxius haereo, tantam inter tantos Viros componere litem, licet pleraque pro virili sexu pugnarent argumenta, ecce! bono quidem fortunato adfertur ouis ad Academiam habitus pro Hermaphrodito ob partium genitalium deformationem, quam dum examino, laetus video, esse obseruatis in hominibus Sibiricis simillimam: sic putabam, nactum esse occasionem memet ipsum instruendi de rei veritate, atque ex hac magis tuto concludendi ad illa. Alacris ergo examen aggressus, comperta in illo refero, data simul partium deformatarum vera figura, vt haec cum Sibiricorum comparata, multum tollat de scrupulo.

Ouis erat adultus iustae magnitudinis, cornubus ad posteriora circumflexis ornatus, emaciatus, vt puto, ab

vlce-

vlcere ventriculi, in aperto, inuento: nec ad figuram totius corporis aliquid praeternaturale gerebat.

Infra coniunctionem vero ossium pubis, vbi illa in media pube synchondrosi iunguntur, prominebat corpusculum teres, medium circiter digitum crassum, anum versus et sinistrorsum incuruum, penem referens, praeputio mobili, laxo, amplo, leuiter in rugas complicato, naturaliter ornatum, quod in parte anteriore, superiore, constans cute crassa pilis hirta, eleuabatur in apicem acutum (1): inde vero deorsum et ad posteriora versus excrine tenuius porrigebatur, et breuius deficiebat, quam vt totum penem, eiusque glandem, tegeret (2).

(1) Tab. XI. fig. 2. C

(2) ibid. D

Extra hoc autem praeputium extendebatur penis ipse, ad finem suum valde incuruatus (3), glande ibidem rubescente ornatus (4), qui, oue supino iacente, fere totus a corpore penis tegebatur, sub illo delitescens, et ab eiusdem curuitate parum sursum disponebatur, abdomen versus.

(3) ibid. E

(4) ibid. F

Eleuato praeputii apice crassiore (5) vna cum pene, apparebat praeputium, extenuatum, laxum, amplum sensim oblique posteriora versus, et pene iam sursum reclinato, inferiora versus, descendere (6), atque vtrimque in arcum quasi exscissum, iterum ad glandem adscendendo formare fraenulum (7).

(5) Tab. XI. Fig. 3. C

(6) ibid. D

(7) ibid. E

Arcus autem hic praeputii plus lunatim exscindebatur in latere dextro, quam in sinistro, vnde ille ibidem laxior erat (8): inde penis sinistrorsum trahebatur (9) a vinculo fraenuli arctiore ad hoc latus: fraenulum au-

(8) ibid. D E

(9) Fig. 2. E F

autem, ex vtroque arcu vtrimque formatum, infereba-tur coronae glandi, fed in medio, vbi fub illo vrethra
(1) Tab. XI. Fig. 3. H transfire folet, deliquium patiebatur (1): id inde fiebat, quia eo loco femicanalis vrethrae definebat, glandem non perforans. Vrethra nempe, qua parte illa fub coniunctione offium pubis emergit, atque infra corpora cauernofa penis decurrit, iuxta longitudinem quafi transuerfim defciffa, parte diffecta ablata, formabat femicanalem a perinaeo ad glandem exporrecta, atque ibi-
(2) Fig. 3. HI dem definebat (2). In parte autem inferiore vrethra ad perinaeum exhibebat canalem integrum, inde eo loco a lateribus parietum femicanalis et ab ambitu perinaei integri, formabatur foramen ouale, ea perfecte ratione, ac illud tum oritur in calamo fcriptorio, quando, ad illum litteris exarandis adaptandum, partem dimi-
(3) ibid. I diam canalis auferemus (3). Per hoc foramen tubus immiffus tranfibat fub perinaeum, atque per illum aëre infiato, eleuabatur fupra offa pubis leniter abdomen: vnde ftatim concludebam, effe foramen hoc vrethrae aperturam, non vuluae, quia vterus non tam facile flatu extenditur ac vefica, neque, vt haec, abdomen eleuat tunc, ob molem minorem.

(4) Fig. 2. et 3. G. Anus (4) fuo loco ad exortum caudae et fub eo aperiebatur naturaliter; diftantia autem hunc inter et exortum penis, perinaei erat vnius et quartae partis
(5) fig 2. GE Fig. 3 GB pollicis Rhenolandici longa (4), fed nullum in illa prominentis fcroti veftigium, aut teftium protuberantia percipiebatur, at vero leuis eminentia, quafi in futuram acta, hoc
(6) Fig. 3. L medium diuidebat (6).

Supra

Supra decurſum oſſium pubis, ad latera inguinum, conſpiciebatur ab vtraque parte papilla, et iuxta hanc a latere externo, cutis quaſi leuiter perforata, quod foramen rotundulum, caecum tamen, mox finiebatur, capitulum acus maximae circiter admittens; ibidem vero, et inguina verſus, vtrimque tactus percipiebat corpus ouale, rotundum, durum, mobile verſus annulos muſculorum abdominalium, et ſub cute fluxile, quod ſtatim propter figuram teſtium, epididymidum, vaſorum dictorum praeparantium et deferentium funiculi, digitis diſtiguendam, teſtem vtrumque cum ſuis vaſis ſuſpicabar. Qua in re vt certior eſſem, cutim incidi, et inueni, in vtroque inguine, bene formatum teſtem cum ſuo funiculo vaſorum praeparantium et deferentium extra abdomen haerere, et erat in abdominalium muſculorum parte infima annulus dictus perfecte, vt ſolet eſſe, naturalis a fiſſura tendinis obliqui externi atque carne muſculi interni, vnde oriebatur, ſparſis fibris carneis, cremaſter validiſſimus, funiculum ſpermaticorum vaſorum ambiens. Vt per hunc annulum vaſa exibant, ita deferentia redibant, atque tam laxe hoc loco teſtes haerebant ſub cute ſtrictore, vt ſi naturali loco ſcrotum adfuiſſet, facile in illud dilapſi fuiſſent, iam enim, cute inciſa, ſuis inuoluti membranis ſponte, ſine vi adhibita, vſque ad perinaeum, et ſub mentula extendebantur.

Aperto igitur abdomine, exemi omnes partes pelvi contentas vna cum adhaerentibus genitalibus externis, ano et cauda, tumque accuratiſſime examinaui, nec vllum inveni in internis praeternaturale phaenomenon notandum. Vas

de

deferens vtrumque, poſt veſicam, ad ſe inuicem conuergens, pone collum eiusdem et initium vrethrae, formabat, vt fieri ſolet in illis animalibus, quae coitum non cito repetunt, extenſum ſaccum, qui in collum anguſtabatur, et in ſuperiore parte vrethrae aperiebatur, vti haec omnia flatus et liquor per vtrumque vas deferens immiſſus, indicabat.

Aëre deinde inflato in alterum cauernoſum penis corpus, altero ita detento, vt inde non exiret, penis erigebatur duplo maior et incuruus. Idem ſi adigeretur intra corpus ſpongioſum vrethrae, quod hanc ad initium integrum circumambibat, et hoc eleuabatur, ſimulque glans penis erigebatur. Tum vero apparebat ibi, vbi vrethra perinaeum inter et glandem exſcindebatur, ablato quaſi ſegmento, quod inferne iuxta ſemicanalem ſemi-corpus ſpongioſum hunc ambiret, atque in fungoſitatem glandis abiret. Aderant et in cauitate vrethrae in ſemicanalem exſectae paruulae cryptae, quae digito ſuppoſito preſſae apparebant, ſed tantillae, vt pictor has exprimere commode non potuerit.

Patet, ni fallor, ex hac deſcriptione, partes genitales viriles eſſe naturales internas, nec hic aliquid culpandum in externis, niſi, quod *primo* ſcrotum ſuo loco in burſam non fuit extenſum ad recipiendos teſtes, vnde illi in inguinibus, ſub ſtrictiore cute, latuerunt extra abdomen. *Secundo*, quod vrethra, ad ortum ſuum integra, ad decurſum naturalis, extra perinaeum non eſt continuata in canalem, ſed ſtatim ac inde emergebat, ſemidiſſecta fuit, et ſic ſemicanalis ad penis glandis coronam expor-

re-

recta, vnde, et quaſi ſemicanali hoc altero ablato, itidem ibi deficiebat corpus ſpongioſum vrethrae. *Tertio* quod praeputium et naturali breuius, et in formando fraenulo aliquo modo luſit.

Ouis ergo hic, pro Hermaphrodito habitus, fuit verus mas, in quo partes genitales externae peccant defectu, et nihil omnino in his apparuit, quod alterius ſexus ſignum indicabat aut additamentum, quare et illi nomen maſculinum, minus caeterum uſitatum, apud Varronem et Gellium tamen inueniendum, paſſim impoſui. Tandem ſi deſcriptio partium genitalium externarum atque harum figura in oue comparatur cum deſcriptione et figuris, quas laudati Viri celeberrimi dederunt de hominibus Sibiricis, puto apparere, has ita inter ſe conuenire, vt facile ex inquiſitione Anatomica partium internarum, quam in oue inſtituere ego potui, non illi in viuis hominibus, lis de ſexu finita ſit: quodque, vt hic ouis, ita homines Sibirici habendi ſint pro maribus, non pro foeminis, quod que mixtus neutiquam ſit ſexus, et immerito illis nomen Hermaphroditorum imponatur.

Conſtat ergo, in vtroque ſexu quidem inuenire homines, quibus partes genitales externae ita ſunt deformatae, vt alterum mentiantur, deſideratur interim, cui fidem adhibemus, hiſtoria, et quidem Anatomica, Hermaphroditi veri, qui easdem ex vtroque mixtas, vel ſeparatim diſpoſitas in corpore geſſit externe diſtinguendas, vel interne. Ruyſchius fidelis Naturae ille indagator annuit, multos quidem ſibi exhibitos, nullos vero fuiſſe deprehenſos, Hermaphroditos, atque definit, membrum quod in Pſeudo Hermophroditis ſolet haberi pro pene virili, eſſe ſemper inuentum clitoridem praeter naturam elongatum et incraſſatam: vnde quidem concludere videtur, in ſolo ſexu foeminino fallaciam apparere Androgyni: declarauit inde foeminam hominem, qui iam vigeſimum quartum annum agens primo intuitu vir apparebat, idque vnice, quia membrum prominens erat in perforatum. Hoc tamen argumentum ſolum, niſi alia ſimul adſint phoenomena, nihil declarat, cum proſtant innumera exempla hominum, quibus vrethra neque ad apicem glandis penis pertingit, nec ibidem perforatur, qui, alio loco apertura orta, vrinam et ſemen emittunt, imo vero foeminas impraegnant, liberos procreant, de quibus in fine dicam; vnde nimis praecox iudicium magni Viri exiſtimo, et marem fuiſſe pueris Sibiricis ſimillimum et noſtro arieti inde ſuſpicor, quod ad aſpectum formoſarum Foeminarum non Virorum ſibi erigi hoc membrum faſſus eſt, et ipſe bene meritus Ruyſchius affirmat, duos teſtes, ſeu turbercula, in vtroque inguine vnum, repertos fuiſſe, quale et phaenomenon in pueris Sibiricis et in oue noſtro apparuit. Concludo tandem, in ſexu maſculino, ſi non frequentiorem, quam in foeminis, ſaltem multiplicem adeo ac in illis obſeruari errorem in genitalibus, vt alterum ſexum imponat: vti hanc ſententiam exponunt iam enarrata, ita affirmat eandem caſus Petropoli viſus, contrarius illi, de quo memorat Regnerus de Graaf (1): hic ſcilicet puero datum eſt, ob genitalia informia, baptismo nomen foemininum.

1 De mul. org. p. 299.

Anna

Anna Maria coniux Tubicinis, cui nomen Carolus Lang eſt, nono puerperio enixa eſt infantem tempore natiuitatis pro puella habitum, quare illi nomen Charlottae datum eſt. Tractu autem temporis, orta parentibus ſuſpicione circa ſexum, Mater filiolam ſuam putatitiam, iam ſeptem annos natam, Scientiarum Academiae praebet ſpectandam, vt ſcrupulus tollatur. Data tum fuit rei inquiſitio, beato iam Weitbrechto, qui et tum inuentorum amplam reddidit relationem, et merito concluſit creditam puellam fuiſſe puerum, atque defectum genitalium ſolum impoſuiſſe errorem: relata atque argumenta, in compendium contracta, hac occaſione addam.

In elatiore ſede ſynchondroſios oſſium pubis, inter capita prima muſculorum tricipitum (1), ortum membrum 1 Tab. XI.
peni virili ſimile, nunc flaccidum, nunc rigidum, in- F. 1. A.
curuum terminatur in glandem penis, non clitoridis, ſimilem (2). corpus autem membri tegitur cute, glan- (2) ibid. C.
dem nudam relinquente, poſt coronam illi loco conſue-
to alligata (3); glans ipſa ſulcum leuiter profundum ſed (3) ibid. B.
coecum gerit, dum eo vsque vrethra non pertingit.

Infra hoc membrum vtrimque prominet tumor cutaneus oblongus, turgidus, rugoſus, tactu cauus percipiendus (4), vnde apparet, quaſi ſcrotum iuxta longitu- (4) ibid. D.D.
dinem ſuturae diſſectum ab vtroque parte ad latus internum reflexum et iterum adunatum foret, vt ita ſeparatum et ſingularem ſaccum vtrimque conſtituat, qui proprio motu flacceſſit, et corrugatur. Vterque autem ſaccus continet corpuſculum quoddam, duriuſculum, ſubrotundum, lubricum, pro teſticulo habendum, quod con-

trectarur, corpore erecto, resupino vero eodem, inguina versus attrahitur. Rugae vtriusque sacculi interiores sunt transuersae et sibi parallelae; exteriores irregulares; adductis cruribus sacculi tumentes, sese mutuo exosculantur, sola relicta rima, tumque speciem labiorum foeminini pudendi prae se ferunt. Diductis autem cruribus, adeoque et sacculis, paulo infra horum partem mediam apparet orificium aliquod, quod est vrethrae apertura sub cute in
(1) ibid. E. perinaeo descendentis (1), cuius pars exterior cutanea ablata, vnde in adscensu ad glandem, finditur in semica-
(2) ibid. F. nalem (2). Latera autem huius fissurae cutanea, turgidula prominent rubicunda, et ligamentum habent vtrimque cutaneum horizontaliter dispositum, quibus cum cu-
(3) ibid. G G. te sacculorum colliguntur (3). Ligamenta haec latera fissurae diuidunt; pars superior glandem versus latior, inferior vrethrae aperturam versus, arctior, latissima circa ligamenta est. Latus autem dextrum in genere, latere sinistro, latius est: maxima vero laterum latitudo vix lineam geometricam aequat. Ipsa autem fissura exiguam habet profunditatem, in qua conspiciuntur vascula quaedam sanguinea, iuxta longitudinem decurrentia, aliaque
(4) Ibid. F. exigua splendentia granula, quae glandulae videntur (4). Fissura decem circiter lineas pollicis Londinensis progreditur, neque pertingit ad glandem, sed media via sistitur, succedente in eius locum cute, quae integra aliquantum prominet, suturae scroti corrugati instar: haec infra sulcum coecum, vt fraenulum glandi adnascitur, atque ipsa, ob stricturam incurua, aliquantulum membrum incuruans, impedit, ne illud satis eleuetur atque extendatur,

datur, nec in longitudinem ſufficientem excreſcere poſſit; gerit autem leues quasdam impreſſiones diſcretas, quae, tanquam veſtigia fiſſurae oriundae, apparent (1). Vbi autem inferne apertura canalis terminatur et perineum incipit, ſuperficiarias quasdam foueolas itidem hoc gerit (2). Tandem dum mouetur vel rigeſcit membrum, ſecundum longitudinem fiſſurae ſub cute obſeruatur aliqua eleuatio, quae a motu corporum cauernoſorum ſubiacentium prouenit.

(1) Ibid. H

(2) Ibid. I

Primo intuitu quidem apparet deformis partium fabrica ſexum exhibere foemininum; contrarium autem patet.

1. Propter ſedem et poſitionem pudendorum elatiorem, quam in foeminis, in quibus haec ſub curuatura oſſium pubis eſt, hic ſupra eandem.

2. Propter tumores laterales per fiſſuram diſtinctos, qui veri ſacculi caui, cutanei, iam flaccidi, iam rugoſi corpora globoſa, lubrica, veros teſtes habenda, continent, et ſcrotum diuiſum non labia pudendi foeminini declarant, quae ſcilicet a ſubiecta pinguedine dura, ſolida tumescant.

3. Propter membrum pendulum penem, non clitoridem, referens; vt arguit 1. ſitus elatior 2. directio corporum cauernoſorum, quae in pene recta deſcendunt iuxta longitudinem ſynchondroſios, indicante hoc motu illorum iuxta fiſſuram in attractione et erectione. Clitoridi vero, propter meatum vrinarium, nullus deſcendendi locus relinquitur, ſed diuaricatis cruribus, ſequitur directionem proceſſuum inferiorum oſſis pubis, lateraliter. 3. Tota glans, vt in viro, ab apice coronam verſus

fus craſſeſcens, totam penis extremitatem ad fraenulum vsque ambiens rotunditate vngulaeformi: dum apex clitoridis lateraliter compreſſus, in duas portiones fiſſus, abit in Nymphas. 4. Magnitudo totius membri conuenit huic aetati pro pene, dum clitoris in illa eſt adeo exigua. Nec ſi quis afferat, eſſe clitoridem in maiorem molem excretam, pudendum reliqua requiſita in foemina poſſidet, contra in viro, etſi mutilatas, gerit partes.

Hinc merito concludo cum beato Anteceſſore meo, fuiſſe hunc puerum, in quo contra naturam ſcrotum in duos ſacculos diuiſum vtrimque teſticulum continet, et vrethra laeſa et fiſſa non penitus deducta eſt ad glandis extremitatem, vt eandem perforet, ſed media via truncata iuxta longitudinem.

Cum ergo in oue diſſecto certum apparet, in pueris vero ſuſpicandum eſt, partes generationi inſeruientes internas eſſe integras, vt ſemen conficere atque emittere valeant prolificum, quaeritur an illi, vel illis ſimiles adulti ad matrimonium apti ſunt admittendi? An doli mali accuſandi ſi, ſimulata partium integritate, vxorem duxerunt, et an tum huic exceptio competit iuris ſui ſibi non tributi? Conceſſo, partes internas, vt in oue, eſſe perfectas, externas vero, vt in his hominibus, mutilatas, ſed ad coeundum habiles, puto, non modo illis nuptias contrahere permiſſum, ſed et ab omni querela eſſe arcendam vxorem; quia conſtant exempla hominum, qui, glande penis imperforata, apertura alio loco infra illam in vrethra orta, cum mulieribus concubuerunt, atque eaſdem impregnauerunt. Narrat Melchior Fribe (1), vi-

(1) Miſcell. Med. Phyſic. Germ. An. 3. Ob. 98.

uirum, cui glans penis deformis et imperforata erat, aperta vero infra fraenulum vrethra, bis vxorem duxisse et sex procreasse liberos non sine voluptate in coitu. Et Vander Herre (1) testatur, se plurimos nouisse, qui pene ad fraenum, imo vero pollicem vnum et dimidium ab extremitate perforato, liberos ex vxoribus procreauerunt. Nec ratio physica latet. Feruente Venere, semen non lente vel iugis fluxu exstillat, sed ad distantiam impetu violento eiicitur, musculis huic operi destinatis vi conuulsiva contractis; vnde etsi non immediate ante os vteri emittitur, hac ex causa eo vsque facillime peruenit. Et hac ratione puto, claustris virginitatis illaesis, semine ante vuluam a viro emisso, nec pene intromisso, puellas factas fuisse grauidas, cuius rei prostant apud Auctores quamplurima exempla; et hac ratione mulieres imperforatas concepisse, certum est. Accusatur tunc vtplurimum vis vuluae attractrix, et hiantis vteri auidus ad resorbendum semen appetitus: credo tamen, licet concedam, incitatae libidine foeminae partes inflammatione calescentes et tensione magis patulas, ad recipiendum semen plus esse, ac secus, dispositas, id obtinere ab impetu, quo semen a Viro emissum ad apertum os vteri defertur, et ipsum intrat; imprimis cum tota copia seminis, vna vice emissi, non requiritur ad conceptum, sed vnica vel minima guttula sufficit, quod iam Aristoteles notauit (2), et hodie ex historia seminis et conceptus firmatur. Cum ergo Virgo, hymene integro, per eiusdem foramen potest recipere vtero semen absque intromissione penis intra vuluam, vti hoc testatur Fabritius ab

(1) De generatione

(2) Histor. animal L. X.

(1) Chirurg. oper. part. 1.
(2) Anthropol. L. 2. c 31.
(3) De mul. org. p. 51
(4) ad obſeru. 39.
(5) cent. 3. obſ. 60.
(6) Anat. L. 1. c. 23.
(7) Obſer. 22

ab Aquapendente (1) Riolanus quatuor obſeruatis hiſtoriis (2) Grafius (3) Stalpartus vander Wiel (4). Vtque mulier imperforata grauida fit, ſiue magnitudo penis virilis deficiat, ſiue membrana vuluae interpoſita durior obſtat, quale exemplum legimus apud Hildanum (5) Diemerbroeckum (6) Ruyſchium (7), ita credo; omnes memoratos pueros, iuuenes adultos factos, atque alios illis ſimiles, non modo poſſe cum foeminis concumbere, ſed et illas grauidas reddere, quoniam multae adſunt circumſtantiae, propter verecundiam reticendae, et quas vnisquisquique facile conſiderando percipit, quae facilius ſemen ad os vteri deducunt (inter quas ipſa directio ſemicanalis vrethrae eſt) quam factum hoc eſt in memoratis caſibus, locis citatis perlegendis.

Explicatio Figurarum Tab. XI.

Figura prima

A Membrum peniforme.
B Cutis tegens et praeputium formans
C Glans ſulcata.
DD Scrotum diuiſum in duos ſaccos a ſe inuicem diductos.
E Apertura vrethrae.
F Eiusdem ſemicanalis, in quo vaſa et glandulae.
GG Ligamenta.
H Cutis integra cum foueolis.
I Perinaeum cum foueolis.

Figura ſecunda

AA Ambitus regionis pubis.
B Exortus penis, ſeu radix.
C Praeputium in apicem eleuatum, pilis hirtum.
D Idem extenuatum in rugas, excrine.
E Penis extra praeputium incurruus.
F Glans ſub pene deliteſcens.
G Anus.
HH Initium caudae.

Figura tertia

AA Ambitus regionis pubis.
B Radix penis.
C Praeputii apex eleuatus, et ſurſum reclinatus.
DD Eiusdem ſuperficies interna rugoſa tenuis a ſiniſtro arcum faciens breuiorem.
E Praeputium in arcum exſciſſum readſcendens ad glandem, et a latere dextro fraenulum formans.
F Glans penis eleuata.
G Anus
H Vrethra in ſemicanalem quaſi exſciſſa, deficiente parte dimidia, inferiore.
I Foramen ouale in perinaeo, vbi integra vrethra deficere incipit.
L Cutis perinaei in eminentiam diſtinguentem, ſuturae inſtar, eleuata.

DE

DE VTERO MVLIEBRI OBSERVATIONES ANATOMICAE.

AVCTORE
Iosia Weitbrecht.

Fortunatum accidit, vt hoc anno quatuor cadauera feminina, mulieris septem menses praegnantis, duarum vetularum et virginis, theatro nostro anatomico inferentur. Quam opportunitatem vt in vsus conuenientes vertere non destiti, sic nunc ex pluribus obseruationibus factis eas potissimum, quae ad vterum imprimis praegnantem pertinent, seligere, et cum Academia communicare, mihi est propositum. In quibus exponendis etsi non omnia noua Vobis videbuntur, aliqua tamen erunt, quae ad huius partis historiam amplificandam et perficiendam facere poterunt.

I. Principio de vteri praegnantis habitu externo aliqua monebo. Dum resupinum iacebat cadauer, abdomen ab vmbilici regione ad pubem vsque omnino protuberabat. Non erat autem tumor rotundus, durus, aequabiliter tensus, vti in hydropicis esse solet, sed mollis, inaequalis, in supremo abdomine latissimus, altissimus immediate infra vmbilicum, ad cuius latus dextrum durities aliqua sentiebatur, tum vero paullatim, pubem versus in pyri formam coangustatus. Hi quidem characteres iustam spem ex mariti testimonio conceptam, vterum grauidum subesse confirmabant. Remotis enim integumentis nudus apparebat vterus a peritoneo immediate tactus et tectus, occupans omnem cauitatem abdominis ab vmbilico ad os pubis, et peluim ipſam, cuius latera exacte claudebat.

II. Circumſtantiae longe aliae comitabantur inſignem tumorem, quem altera vetularum in inferiore abdomine ita geſtabat, vt primo quidem obtuitu ſtatum feminae praegnantis mentiretur, re autem propius examinata, corpus longe diuerſum eſſe deprehenderetur. Erat enim ille tumor rotundus, eleuatus, cuius quaſi centrum vmbilicus. Praeterea ſupra tumorem in regione epigaſtrica cutis erat collapſa, quaſi ibi ventriculus et inteſtina vacua iacerent. Similiter ad lumbos macilenta flacciditas. Infra tumorem denique in hypogaſtrio et ſupra pubem denuo profunda fouea; ita, vt extremitas ſterni, et vmbilicus et os pubis prominerent et tumor medius ſolitarius tamquam foſſa quadam circumdatus eſſet. Hunc tumorem vt nec anaſarcoden macilenta cutis, nec aſciticum vicina collapſa flacciditas teſtabatur: ſic nec de grauiditate quicquam certo affirmare licebat. Vterus enim praegnans nec ita praeciſe in globi formam turgeſcere, neque hiatum ſupra pubem relinquere debebat. Sed dubium omne ſuſtulit inciſio abdominis, quae ovarium dextrum in tumorem globoſum, ex membrana pellucida, tenui, lympham claram, transparentem continente conſtantem excreuiſſe, commonſtrauit. Quam obſeruationem priori propterea vtile duxi adiungere, quia cautelas quasdam ſuggerit, quae in mulierculis vere an falſo grauidis ex ſolo habitu externo diiudicandis, obſcurae ſaepe rei lumen adſpergere queunt. Sed ad vterum redeo.

III.

III. Tunica vteri exterior eſt vera peritonei continuatio (1). Quod poſtquam veſicae planitiem obduxit, et iam ad vterum acceſſit, ſuperata ceruice et vtero ampliari incipiente, haec tunica paullo craſſior euadit, et cinguli albicantis, vteri fibras corroborantis ſpeciem prae ſe fert, cuius figura quodammodo falcata eſt (2).

(1) Tab. XIII. fig. 1. a2

(2) Ibid. d.

IV. Antequam aperiretur vterus, putaſſes, illum vix tenue linteum vel papyrum craſſitudine ſuperare, adeo tactu mollis erat, et adeo facile contentum foetum tangere, et membra diſtinguere licebat. Sed facta inciſione res aliter ſe habere intelligebatur. Re vera enim craſſities laterum ſectionis tres ſaltem lineas geometricas aequabat. Subſtantia autem vteri erat, vt cum Arantio loquar, fungoſa, ſpongioſa, inſignibus hiatibus et ſinibus venoſis perterebrata, ſed vacuis, ita vt ſectio plane incruenta eſſet (3). Haec craſſitudo in toto vteri ambitu propemodum aequalis erat, aucta tamen parumper circa fundum. Vbi autem vterus a maxima amplitudine anguſtari coepit et cingulum illud (III.) acceſſit, ibi paullo tenuior factus erat vsque ad ceruicis principium (4). Contra vero parietes vterorum reliquorum non praegnantium vltra eam menſuram, ad quatuor et quinque lineas craſſi fuere; imo diſciſſus vterus vetulae, quae ouario laborauerat, etſi praeter ceruicem plus iuſto elongatam nihil a natura aberraſſet, duplam tamen latitudinem parietum vteri praegnantis exhibuerat. In his autem conſiſtentia parietum triplex eſt. Ea enim pars, quae proxima tunicae peritonei eſt, eſt compacta et quodammodo muſculoſa. In medio

(3) Ibid. e.

(4) Ibid. e.

dio vterus eſt magis ſpongioſus et plurimis cauernulis ac ſinulis venoſis diuerſae amplitudinis interſtinctus. Proxime autem cauitatem internam ſubſtantia iterum compactior euadit. Haec phaenomena magis fauere videntur ſententiae illorum, qui vterum grauidum attenuari docent. Quamquam, ſi meam mentem interponere licebit diſputationi iſti, quae de diuerſa vteri craſſitudine inter artis obſtetricandi magiſtros viget in determinatione menſurae, multum difficultatis et praeterea amphibolice quid ſubeſſe mihi videatur. Qui enim quantitatem iſtam diuerſam iuſte inter ſe comparare volunt, neceſſario obſeruationes ſuas in vno et eodem ſubiecto inſtituere debent. At vero cum hoc fieri nequeat, nulla prior via ad veritatem eſt, quam vt plura exempla colligantur, et, qui modus frequentior ſit, diſpiciatur, in quo exacte determinando a nimis vaga illa per digitos transuerſos dimetiendi methodo abſtinendum, aliamque magis accuratam menſuram in vſum vocandam eſſe putauerim; quo facto vereor, ne, qui a Mauricello diſſentiunt, cauſſa ſua cadant, imprimis vero illi, qui per dilatatum vterum non ſolum maiorem latitudinem parietum vteri in transuerſum ſecti intelligunt, ſed etiam per maiorem craſſitiem, vocabulo hoc amphibolice ſumto, adauctam denſitatem eſſe volunt, qualis Grafii ſententia videtur eſſe. Quamuis enim non negandum ſit, et venoſos ductus ampliari, et fibrarum ſtrata interiecta diſtingui ac in apricum produci vtero praegnante; cum vteri virginei denſa, compacta et ceu in rude corium compacta ſubſtantia appareat: iſta euolutio tamen et ampliatio eo ipſo non ſolum maiorem

rari-

raritatem et ſpongioſitatem inducit, ſed etiam, quidquid incrementi totus vterus in longitudinem et latitudinem cepit, id omne craſſitiei virgineae decedat neceſſe eſt.

V. Vaſorum ſanguineorum vteri praegnantis diſcrimen inſigne deprehendi. Venae quidem, vt iam ſupra dixi, et olim ab aliis notatum eſt, amplos ſinus et cauernas intra parietes efformabant, ſed vacuae tamen erant et collapſae; ad latera autem tam eae, quae ex ſpermaticis, quam quae ex hypogaſtricis accedunt, vehementer ſanguine turgebant (1); ipſae ſpermaticae a primo ortu ſuo ex emulgente et caua calami ſcriptorii mediocris amplitudinem aequabant. Ligamenta rotunda, fuſca, et fere nigricantia turgida, vt calamum maiorem admitterent, nudae venae ſed ſerpentino ductu inflexae habitum prae ſe ferebant (2). Arteriae contra tam ſpermaticarum exilium, quam hypogaſtricarum propagines tam inſignibus cauitatibus neutiquam luxuriabantur; ſed quod oppido elegans viſu erat, propriis ſuis tunicis gaudentes interna latera ſinuum venoſorum exiguis vltimis canaliculis et ramificationibus perreptabant, ita, vt hae arteriolae intra ſinuum cauitates in ipſo ſanguine venoſo lauarentur, propemodum vti neruus ſextus in durae matris ſinibus balneo quaſi ſanguineo immergi ſolet.

(1) Ibid. ii.

(2) ibid. h.

VI. Iniectione per arterias hypogaſtricas facta ceracea materia etiam in ipſam vteri cauitatem penetrauit ſub ſpecie globulorum exiguorum per arteriolarum extremitates eiectorum, et quidem non ſolum iis in locis, vbi per ſeparationem humoris cuiusdam lymphatici coagulati vteri parietem et chorion interiacentis tunica vteri interna laeſionibus quibusdam

V v 3 obnoxia

noxia fuerat; ſed et ibi, vbi huius humoris portiones adhuc firmiter cohaerebant, per ipſum hunc humorem ſimilium globulorum forma tranſudauit. Imprimis vero ea in regione, vbi placenta adhaeſerat, plurimis in locis ſingulares congeries vaſculorum arterioſorum in elegantia glomeramina conuolutorum apparebant, quae denique ex vno aut altero oſculo materiam ceraceam in cauitatem vteri eructabant. Hae vero extremitates an immediate cum placentae venis cohaereant, an vero ſolum illum ſuccum lymphaticum, de quo mox plura, ſecernant, occaſione data diligentius ſcrutari, omnino erit operae praetium.

(1) Ibid. b. VII. An vteri interna cauitas (1) ſingulari tunica inveſtiatur, vt difficile indagatu eſt, ſic obſeruationes meae illorum ſententiae magis fauent, qui illam negant. Saltem in nullo, praeter vltimum, membranam diſtinctam laeuore quodam conſpicuam deprehendi. In vtero praegnante inter membranam chorion et vteri parietes interſperſa erat, vt monui (VI), lympha quaedam coagulata in formam ſingularis membranae extenſa, albicans ad flavedinem tantillum vergens, glutinoſa quidem, ſed non admodum tenax. Difficulter ſeparabatur a chorio, quippe quae membrana vaſculis ſuis ſanguineis in hanc ipſam lympham membraniformem immergebatur; ſed arcte etiam cohaerebat cum ipſo vtero, vt laeſiones aliquas euitare nequirem, et hac de cauſſa nihil de natura ſuperficiei internae affirmare aut negare audeam. In vtero vetulae, cuius ouarium hydropicum, paries anterior et poſterior muco quodam, ſeu ſanie cruenta nigricante diſcernebantur;

tur, quo caute ablato, superficies interna non videbatur inuestita esse singulari tunica laeui neque etiam villosa; sed erat potius laciniis filamentosis, tenuibus, irregularibus, quales per detractionem alicuius membranae generari solent, oblita. Quamuis nulla distincta oscula cernebantur: tamen vtero paullum compresso mox plurimi canaliculi subtiles repentes detegebantur sanguine turgidi, quem in cauitatem vteri effundebant. Virgineus vterus exhibuit superficiem non membranaceam, sed subtilissime villosam. Vterus autem vetulae alterius asciticae, qui toto habitu suo indurationem quandam prae se ferebat, non solum superficiem leuigata membrana inductam sed eam quoque expansionibus suis varios loculos efformantem commonstrauit.

VIII. Detracta penitus, qualis mihi videbatur, interiore tunica vteri praegnantis apparuere plurima strata fibrarum muscularium. Hae fibrae sunt planae, compressae, ad dimidiam lineam latiusculae rugosae, vti fibrae carnis coctae, sibi inuicem parallelae accubantes. Musculares voco, quia partim ob colorem rubicundum carneum, partim ob structuram nulli alii rei aequiparandos noui. Directio earum varia est, nec adeo exacte determinanda. Musculum illum orbicularem Ruyschianum in fundo vteri non inueni, sed eius loco in vtroque latere circa oscula tubarum fallopianarum detexi insigne stratum circulare, tanquam orbem muscularem, ita vt osculum tubae orbis centrum sit, et latitudo orbis ad pollicum duorum latitudinem quaquauorsum excurrat. Haec igitur strata considerari possunt ceu duo musculi orbiculares laterales, o-

rificio

rificio tubarum circumpositi. In anteriore pariete parum a se inuicem distant (quippe omnino distantia orificorum anterius mensurata minor est, quam posterius); in quo interuallo aliud stratum longitudinale a fundo ad ceruicem decurrit, cuius fibrae quo propius huc appulerunt, eo magis disiiciuntur et cum aliis transuersis confunduntur. In interuallo posteriore erat illa regio, vbi placenta adhaeserat, et vbi glomeramina ista arteriolarum exsurgebant; quae regio igitur aliquam vtriusque orbis portionem obtegit. Denique infra istos orbes stratum aliquod transuersale totam cauitatem vteri tamquam zona lata ambiebat, directione ad axin vteri vel ad fibras longitudinales perpendiculari. Quo propius autem haec zona ad ceruicem accesserat, eo magis eius fibrae disiiciebantur, et cum aliis irregularibus commiscebantur.

IX. Cauitas vteri pragnantis et virginei multum inter si differunt. Hic non dici potest concauus, siue non debet in eo fingi cauitas aliqua spatiosa, laqueata, turgidula; sed paries eius anterior et posterior sibi ceu planum plano accumbunt, et solo muco interstinguuntur, ne concrescant. Ille vero in ampullam expanditur. Praegnans igitur vterus recte vesicae inflatae, virgineus lagenae compressae aequiparatur.

X. Ceruix, siue collum vteri non exigua huius organi portio est. Sed in statu pragnante non in eadem temporis proportione mutationibus et extensioni obnoxiam esse ac fundum, obseruationes nostrae luculenter docuerunt. In virgine et vetulis dimidiam propemodum longitudinem totius vteri, quae vt notum est, vix

duos

duos pollices aequat, compleuerat. In praegnante perparum ab hac forma et quantitate recesserat, nisi quod ante dissectionem considerata habitum paullo turgidiorem prae se ferret et duritie fundum superaret. Contra vteri caui longitudo erat vltra octo pollices, latitudo maxima septem propemodum pollices; qua extensione tanta caverna efformabatur, quae foetum septimestrem cum membranis liquore et placenta facile complecteretur. Haec tota specus ex tam spatiosa amplitudine coarctabatur inferius in foraminulum adeo exiguum, vt vix pisum admitteret, ceu osculum vrethrae internum ex contractis vesicae vrinariae tunicis generatur. Hoc foraminulum vocare placet osculum ceruicis internum, vt distinguatur ab altero vulgo cognito, os vteri dicto, transuersa rima in vaginam hiante, quod osculum ceruicis externum appellabimus.

XI. Totum osculum internum occlusum erat muco quodam albicante, pellucido summo glutinoso et tenaci, qui intra ipsam vteri cauitatem paullum exturgescebat. Idem mucus extuberabat ex osculo externo. Erat autem eius tanta copia, vt ob insignem glutinositatem ad multos pollices absque ruptura extraherem. Eundem mucum in virgine et vetulis circa osculi externi rimam, etsi non tam copiosum deprehendi.

XII. Postquam ceruicem, continuata vteri sectione longitudinali, aperui: tota distantia ab vno osculo ad alterum pollicem circiter aequauerat (1); crassitudo parietum, solidiorum quam vteri parietes, quatuor lineas excedebat (2), quam substantiam intimam, tenacem compactam

(1) Tab. XII. fig. 11. e

(2) Ibid. i.

perre

perreptabant vaſcula ſanguinea arterioſa, quae, vt arbitror materiam apportant ad ſecernendum mucum iſtum glutinoſum, quo cauitas ceruicis, tota quanta eſt, infarcta fuerat, et omnes receſſus ac latebrae rugoſae ſcatebant.

XIII. Per hunc mucum transparebant elegantiſſime rugae illae pennatae Huberi, ſiue, vt alii vocant, valuulae, cum columnis intermediis, quarum aliquae vaſculis ſanguineis ſuperbiebant (1). Erant autem hac rugae et columnae nihil aliud, niſi ipſiſſimae membranulae tenues, aliquae dimidiam lineam, aliquae integram lineam latae quae altero ſuo margine parieti ceruicis innascuntur, altero autem libere fluctuant, quemadmodum laminae ſeu folia membranea in omaſis ruminantium fluctuant; quae, quia a muco viſcido, perparum fluido ſuſtinebantur, iucundum ſpectaculum exhibebant. Quod cum raro accidat, eas delineari curaui, hac cum cautela, vt, donec delineatio facta eſſet, obiectum liquore balſamico, quo Theſauri Ruyſchiani conſeruantur, immerſum teneretur. Columnae intermediae eminent tam in pariete antico, quam poſtico. Ad has columnas tendunt rugae laterales, et quidem ita, vt ab interno oſculo externum verſus deſcendendo conuergant; quamuis in latere ſiniſtro poſteriore paullulum ab hoc ordine recedant, et irregulariter diſcurrant. Similiter vbi ad oſculum vteri externum peruenere, paullo craſſiores et breuiores fiunt, et hinc magis rugarum formam induunt; terminantur etiam aliquae in ipſo limbo oſculi in extremitates pendulas, rotundiuſculas. Inter has membranas rugoſas obliquas maiores, deliteſcunt aliae minores, anguſtiores, hinc pro-

(1) Ibid. b. c. d.

profundius et transuerſim ſitae. Omnes vero rugae vel lamellulae ita poſitae ſunt reſpectu fundi parietum, vt ad angulum acutum inclinent, et deorſum nutent; hinc quando directione ab oſculo interno externum verſus tendente comprimuntur, ſquamarum inſtar ſibi accumbunt, et ſuperficies cauitatis plana fit. Si digitum ordine contrario ducas, ſuperficies aſpera oritur et multis ſcrobibus interſtincta. Nam inter omnes has membranulas, tam maiores, quam minores, deteguntur profundae lacunulae, foraminula, ſinuli, in ipſam ſubſtantiam ceruicis penetrantes, quibus liquor ille viſcidus tenaciter inhaereſcebat, et ex quibus copioſe exprimi poterat. Non autem exiſtimandum eſt, has rugas in omnibus ſubiectis tam diſtincte euolutas eſſe. In virgine veſtigia lamellarum multo tenuiora erant. In vetularum altera apparebant columnae craſſiores quidem, ſed non adeo profundae, et ſenſim euaneſcentes, eodem fere modo ac a Graafio pinguntur. In altera autem, quae ouario laborauerat, et propter quem tumorem vterus in pelui extenſionem aliquam paſſus erat, manifeſtabantur membranulae fluctuantes intermediae perpaucae; columnae autem plures, compactiores, ſolidiores, maiores. Nam in pariete poſtico erant columnae quatuor, fere omnes parallelae, carnoſae ceu auricularum cordis lacertuli, breuiſſimis membranulis transuerſalibus itidem craſſiuſculis cohaerentes, quae membranulae diductis columnis apparent, ſed clauſa ceruice et columnis compreſſis abſconduntur. In pariete antico autem erat columna vnica, ad quam lacertuli transuerſales ex parietis poſterioris columnis pertigere, hoc ordine, vt vtrinque a dextris ad ſiniſtras oblique deorſum vergerent.

XIV.

XIV. Quae hactenus de vteri ceruice (X. XI. XII.) annotauimus, ad multas veritates viam nobis pandunt. Primo quidem abunde confirmatur assertum Graafii (1) qui stabiliuit „collum non insequi dilatationem vt„eri grauidi, sed pristinum fere statum retinere„ id quod de mediis gestationis mensibus intellectum vult. Cum natura rei igitur plane non congruit idea illorum, qui vteri praegnantis ceruicem sibi fingunt ceu vnicum osculum, aunulo quasi membraneo occlusum, qui paullatim mollior fiat et amplior, donec ita hiet, vt foetum transmittere possit, qualem e. g. Deuenter (2) pingit. Hoc enim non nisi de vltimis diebus grauiditatis, quando partus appropinquat et imminet, intelligi debet; tum enim orificium paullatim distenditur et annuli simplicis formam nanciscitur, per quem vix vnum alterumue digitum traiicere liceret. Totalis autem dilatatio tum demum, vti obstestricando experimur, locum habet, quando iam parturiens aliquos dolorum prodromos persentiscere incipit, aquae rumputur, et caput foetus ad ceruicis orificium adigitur. Qua lege autem ceruix post partum contrahatur, nondum memini ab Autoribus determinatum esse. Per experientiam constat, partes animalium vehementer pressas et contusas intumescere solere; credibile est, idem accidere lateribus ceruicis et columnulis ibi ex foetus transitu multum et diu saepe distentis et pressis. Dicam quid ipse expertus fuerim. Cum nuper protractum a rudi obstetrice vterum et vaginam reponerem tertia post partum hora: non solum orificium ceruicis ita hiabat, vt duos digitos facile

(1) Cap. VIII. pag. 95.

(2) In nou. lum. obst. F. 4

le intrudere potuerim, ſed etiam vt rugas craſſas (1), queis margo obſeſſus erat, tactu diſtincte dignoſcerem. (1) T. XII Fig. III.

XV. Exinde porro apparet, quam difficile ſit primis menſibus ex ſolo tactu diiudicare, num femina praegnans ſit nec ne? quia tangens omnino nil, niſi veram ceruicem oblongam duriusculam cum oſculo labiis mollibus in vaginam prominente perſentiſcit, vnde facile in eam opinionem deduci poteſt ac ſi femina non praegnans eſſet. Certe ex ſolo augmento ceruicis aliquid veri concludere exercitatiſſimam manum et acutum iudicium requirit, quod ab obſtetricibus popularibus non facile expectaveris.

XVI. Neque minus ratio patet, (aliis cauſſis tamen neutiquam poſthabitis) quare mulieres, quae primis vel mediis menſibus abortum patiuntur, doloribus multo vehementioribus et acutioribus diſcrutiari ſoleant, quam ſi iuſtum parturiendi terminum attigerint. In his enim cervix vteri laxior paullatim diſtenditur, et vltimis tandem diebus in ſimplicem annulum efformatur; hinc diſtractionem facilius perferunt, quia pededentim fit. In illis contra cauitas ceruicis eſt anguſta, ſubſtantia craſſior et ſolidior, fibrarum vis ſtrictior; quae res vt in partu tam immaturo et anticipato multo fortius extenſioni reſiſtunt, ne foetus tam facilem et planam viam inueniat: ita non poſſunt non maximum et acerbiſſimum dolorem mulierculis commouere.

XVII. Ex compreſſa ceruicis figura, et ex muco iſto lento, tenaci, totam cauitatem et omnia eius foraminula ab vno oſculo ad aliud obſidente certe meo quidem

dem iudicio, colligitur: vterum praegnantem perfecte clausum esse; omnem igitur introitum vel aëri vel alii cuipiam humori denegari, nullam igitur superfoetationem fieri posse in systemato vermiculari, neque etiam in non pragnantibus semen in vteri cauitatem ascendere posse, quia idem mucus in omnibus aliis ceruicum osculis, saltem externis, adest.

XVIII. Denique liceat ex obseruationibus meis ea commemorare, quae ad illustrandam historiam ouulorum Nabothianorum facere, et fortassis haud obscuram facem in diiudicanda controuersia afferre poterunt; Memini quidem me olim tales vesiculas vidisse, et conuentui quoque spectandas exhibuisse. Memini etiam, me alio tempore frustra quaesiuisse; memini, quae pridie aderant, postridie euanuisse. Sed de subiectis hoc anno oblatis asseuerare queo, me easdem et non vidisse et vidisse in eadem ceruice, vesiculas adesse et non adesse posse. Explicabo paradoxon. Primo quidem obtuitu illae in nulla ceruice apparuere. Sed cum ex. gr. vterus praegnans delineandi caussa quietus iaceret, in extremo limbo osculi ceruicis externi oriebantur paulatim aliqua corpuscula globosa, magis tamen rubicunda ac mucus qui cauitatem ceruicis obsederat. Accurato examine instituto vidi, non esse vesiculas singulari tunica inclusas, sed esse illum ipsum mucum ex ceruice sponte expressum, in globulorum formam conuolutum, qui in foraminulis supra memoratis tamquam a pedunculis haerebant, et ex illis extrahi et abrumpi non vero ceu vesicula determinatae magnitudinis auferri poterant. Contrectando et premendo plures licebat producere. Maceratione

ratione autem abolebantur, et hinc inde tumores quidam exigui, ſed profundius ſiti, dilute rubicundi, veſiculis Nabothianis perfecte ſimiles, emergebant. Similiter in ceruice vteri alterius vetulae recenti ne veſtigium quidem veſiculae aderat; poſtmodum vero macerando et contrectando copioſe in conſpectum prodibant, etiam ad lenticulae magnitudinem, turgentes humore rubicundo, qui ex aliquibus, non ex omnibus, exprimi poterat; imo eadem veſicula primo humorem fundens mox plane occludebatur. En igitur, quo me coniectura ducit. Arbitror iſtas veſiculas Nabothianas non eſſe particulas organicas aut conſtitutiuas corporis animalis, non igitur eſſe ouula, neque etiam eſſe hydatides morboſas, ſed eſſe corpuſcula plane fortuita, maceratione et contrectatione nata. Videlicet, non ſolum media ceruix (XIII.), ſed et imprimis labia oſculi externi circa rimam copioſis exiguis foraminulis ſcatent, quae nil ſunt, niſi orificia excretoria canaliculorum mucum ceruicis fundentium. Quando igitur vel contrectando et premendo humor vrgetur et adigitur, vel macerando aqua aut ſpiritus per orificia intrat; canaliculi, quorum reptatus valde obliquus eſt, intumeſcunt, qua parietum diſtractione etiam ipſa oſcula transponuntur: nec ductibus directe reſpondeant ſed intercludantur, quemadmodum vrinae via per vretres intercluditur, inde fit, vt veſiculae ſemper exprimi nequeant, ſed tamquam vndequaque clauſae appareant. Non autem mirandum eſt, cur humor veſicularum rubeat, quum tamen mucus ceruicis ſecundum naturam albicans ſit. Hoc enim inde efficitur, quod vel con-

contrectatione nimia non purus mucus, ſed et ſanguis ſimul exprimatur, vel maceratione idem etiam ſanguis extrahatur, vnde iſta colorum miſtio reſultat; quemadmodum generaliter experientia docet, omnes humores lymphaticos et ſeroſos corporis animalis, etiamſi ſecundum naturam puriſſimi et pellucidiſſimi ſint, quo diutius extra vaſa ſtaguant, eo profundius a ſanguine extracto tingi.

Explicatio Figurarum TAB. XII..

Figura prima.

Vterus ex muliere ſeptimum menſem praegnante ſecundum longitudinem apertus, vt cauitas interior, laterum craſſitudo, et ſinus venoſi cum directione fibrarum, pateant.

a. Vteri tunica exterior.
b. Cauitas vaſculis ſanguineis irrigata.
c. Craſſitudo laterum naturalis cum venarum ſinibus et fibrarum directione.
d. Zona transuerſalis.
e. Pars ceruicis vteri.
f. Tubae fallopianae.
g. Ouarium.
h. Ligamenta rotunda.
i. Vaſa vterina ex hypogaſtricis.

Figura ſecunda.

Ceruix vteri praegnantis aperta cum portione vaginae.

a. Craſſitudo ſubſtantiae ceruicis ſecundum longitudinem lateris ſiniſtri diſciſſae.
b. Columna parietis poſterioris.
c. Columna parietis anterioris.
d. Rugae transuerſae fluctuantes.
e. Labia oſculi externi itidem a ſiniſtris diſciſſa.
f. Portio vaginae.

Figura tertia.

Rugas craſſas ceruicis vteri poſt partum exhibet.

DESCRI-

ABRAHAMI KAAV BOERHAAVE
OBSERVATIONES ANATOMICAE.

Obſeruationes Anatomicas daturus praemoneo, inter diſſectiones cadauerum, ſi quid mihi praeter ſolitum occurrit, fideliter hoc in aduerſaria deferre, vt deinde expromam in vſum. Inde forſitan eueniet, vt vel ſimilem, vel et eandem annotationem iam viderit Lector alias. Firmior inde erit veritatis ſimplicitas. Ego enim inter tot, quae vndequaque apportantur, cadauera, vel in vſum Anatomes, vel ad cauſam mortis inueſtigandam, plus ſemper intentus ſum ipſarum partium inquiſitioni, quam aliorum auctorum in Muſeo compilationi: vnde eundem caſum, iam alias notatum, in hiſce iterum perlegere, nemo facile vituperabit. Hoc de hiſce, et quae in poſterum dabo, moneo.

Obſeruatio prima.

Flante borea magnoque frigore, Auriga Wyburg tendens Petropolin, cadens a traha inuenitur in niue mortuus. Apertum cadauer praebuit viſcera abdominis et thoracis ſatis ſana, cerebrum autem valde inflammatum, inprimis in haemiſphaerio dextro. Sed quod maxime mirum! in eodem latere durae matris, itidem valide inflammatae, pars concaua tota ſuccingebatur membrana tenui, ſed forti, cuticulae adultae inſtar craſſa, quantum ad oculum apparebat, homogenea, coloris ſubrubelli, ſanguinei quidem, ſed diluti, parte inferiore, qua piam matrem reſpicit, leuiſſime floculenta, qui flocculi, dum

 ſpiri-

ſpiritui frumenti, et prius aquae, immittebatur, leuiter decidebant ad fundum vitri. Caeterum membrana integra, et (vt dixi) tenuis, ſed fortis, ſatis facile ſeparabatur a durae matris concauitate, illi tamen hinc inde fortius annexa per tenuiſſimas fibrillas: ſuperficies autem, quae continua erat durae matri, glabra, magis albeſcebat, plus neruea. Extendebatur haec membrana a ſinu longitudinali, vbi per fibras complicationem leuem efficientes, accreſcebat ſupra totum haemisphaerium dextrum ad fundum caluariae vsque. Atque ſeſe a latere eodem cum proceſſu falciformi intra haemisphaeria cerebri inſinuabat; a latere autem ſiniſtro tota deſiderabatur, eratque ibidem dura mater, vt ſolet ſuperficie ſua interna, naturalis tam ſupra cerebrum, quam intra eiusdem diuiſionem.

Scio, iam Columbum, Vieuſſenſium, Ridleyum, Pacchionem, aliosque, qui de dura matre ſcripſerunt, illam duplici membrana conſtantem exhibere, inter quas vaſa decurrunt, et has ſuperficies intertextis fibris muſculoſis conſtitui, vnde de vſu mira imaginantur. Poſt diuturnam macerationem in aqua frigida experior, fibras has eſſe contextum cellulosum, ſiue veſicularem, vaſa maiora et minora inter ſe iungentem, tumque ſuperficiem, oſſi contiguam, eſſe tenuiorem contextum membranaceum, quam quae piam matrem reſpicit. Idem in dura matre Elephantis, quibusdam in locis digitum fere craſſa inuenio. Hinc nulla eſt ſuſpicio, membranam deſcriptam, homogeneam, eſſe habendam pro altera harum duplicatura, quia longe alius eſt faciei, et in ſiniſtro latere deficit, quod vt certius appareat, eodem latere, quo hanc ab interna ſuper-

ſuperficie, ibidem duplicaturam durae matris a ſe inuicem ſeparaui. Reſtat ergo dubium, undenam ſcilicet illa membrana? an eſt pars peculiaris in hoc homine connata? an vero a ſumma inflammatione ſuperficies interna ſic integra ſeceſſit, vt membranam mentiatur, vti a cute cuticula? an aucto motu, vaſa nimium dilatata craſſiores humores transmiſerunt ſeroſos, qui collecti adhaeſerunt internae durae matris ſuperficiei, et borea et frigore ſuperueniente, quaſi in vnum concreti hanc formaverunt? vti videmus, quosdam humores in lagenis, non rite occluſis inprimis, contrahere in ſuperiore parte mucaginem, quae abit in pelliculam. Sed hic datur aëri acceſſus: in rite clauſis phaenomenon idem obſeruatur, patet in omphacio: ſed particulae ibidem conſtituentes ſunt ſolidae, tales ſunt et vltimae fluidorum. An docet hoc in dextro ſolum latere praeſentia, abſentia in ſiniſtro? an ſuperficies cerebrum ſpectans holoſerici inſtar villoſa flocculis rubris tenuibus, facile deciduis, idem affirmat?

Obſeruatio ſecunda.

In Noſocomio Maritimo Petropolitano Miles claſſiarius, qui ibidem propter morbum epilepticum, per annos hospes fuerat, in ipſo inſultu adeo violento, vt motus ſpaſmodici totius corporis vix per quatuor robuſtos miniſtros retinerentur, ne ſe de lecto deiiceret, me praeſente, vnico momento, quaſi fulmine tactus, inter horrendas intorſiones, exſpirat.

Duas poſt mortem horas aperio cadauer, in morte faciei lineamentis etiam inordinati motus effecta declarans, nusquam tamen liuidum, ſpuma adhuc os obſidente. Inuenio viſcera thoracis et abdominis ſaniſſima, excepto, quod pulmo ſiniſter, hinc inde leuiter cohaerebat, concretus cum membrana thoracem ſuccingente. Diſſecta autem, more ſolito, ſupra aures in orbem cranii parte ſuperiore, dum ſcutum oſſeum conor auferre, inueni illud cum dura matre cohaerere ita, vt vix ſine dilaceratione huius, adhibito eleuatorio, ſumma vi ſeparauerim. In ablato autem apparebant diſrupta multa et diſperſa tubercula, duriuscula, granis hordei ſimillima, colore flaua, reſpondentia illis, quae in dura matre vaga locabantur, aggregata magis circa ſinum longitudinalem. Preſſa haec tubercula, in vtrisque eructabant flaueſcentem, craſſum, humorem, fere materiem ſolidam prae ſe ferentem, qui inter digitos preſſus tenax extenſilis his non adhaerebat; vaſa per duram matrem decurrentia, conſpicua, ſanguine replebantur. Incidi in orbem, ad marginem oſſis diſſecti, duram matrem, quibusdam in locis triplo et quadruplo, quam caeterum ſolet, craſſiorem et magis reſiſtentem; dum vero hanc a pia elevare tento, deprehendi eum eadem iterum cohaerere adeo firmiter, vt cultello opus habuerim ad diſſecandam intermediam ſubſtantiam filamentoſam, quaſi telam celluloſam videres, ſed induratam adeo, vt ſcalpelli aciei cartilaginis inſtar reſiſteret, eo magis, quo propius ad ſinum longitudinalem accedebat, vbi firmiſſime inter ſe meninges per vinculum hoc iungebantur. Erat autem intermedium hoc tegmen veſiculare infarctum materie flaveſcente, quibusdam in locis plane exſiccata et dura, in aliis ſmegmatis inſtar craſſa, quae tenax, albuminis oui

inſtar

inſtar ductilis erat. In baſi cranii autem a pia matre libera erat dura, oſſi tam firmiter adhaerens, vt vix tenaculis inde auelli poſſet. Ibidem autem arachnoidea intermedia tunica, ac vsquam conſpicua erat, idque propter humorem, ac in ſuperiore parte tenacem, flaueſcentem, magis dilutum tamen, quo quaſi hydropica erat.

Cortex cerebri vniuerſus multum indurabatur, multis in locis ſcirrhoſus, in aliis quaſi cartilagineus erat, id iterum eo magis, quo proprior erat vertici. Subſtantia autem medullaris apparebat naturalis et ſana. Humor in ventriculis paucus erat ſubrubello-flaueſcens, ac ſerum ſanguinis recens, dilutus. Sapor huius, vti et illius, qui in baſi cranii inueniebatur, erat nauſeoſus, leviter ſalſus, vt eſt ſeri ſanguinis, fatuus. Glandula pinealis dura et quaſi ſcirrhoſa erat. Cerebellum liberum, ſanum, ſed valde ſiccum erat, ſana erat oblongata medulla, et ſpinalis; leuiter autem hydropica erat ibidem arachnoidea humore ſmegmatico flauescente. Sinus omnes durae matris pleni erant ſanguine atro venoſo, ſano, vt ſolet inueniri poſt mortem, ipſi autem duri et incraſſati. Homo hic quadragenarius circiter, inter paroxyſmos ſanus ſed ſemifatuus et triſtis, caeterum robuſtus, fuerat. Triſtes autem, ſtolidos, et meticuloſos, fere ſemper animaduertimus epilepticos, iam aetate prouectos, quod neque miramur, ſi reſpicimus ad validos neruorum motus, quibus corpus concutitur, et ob malum comitiale mentis triſtitiam, atque inſultus recidiuii metum. Si vero reſpicimus ad functionem corticis cerebri, non procul quaerenda eſt morbi recidiuii, certis, ſed inordinatis paroxysmis, ratio; ſanguis quippe per vaſa ſemiobſtructa et ſemiconcreta motus, eiusdem impetus in concreta, vnde noua quotidie naſcuntur obſtacula, non continuo iugis fluxu, ſed interrupto, ſecernit ſpiritus dictos nervoſos, in medullari ſubſtantia protinus elaborandos, vnde nerui iam defectum, iam vero nimiam ſubtiliſſimi liquidi abundantiam, paſſi ſunt. Qualem vero faciat in repleta caeterum vaſa minima comprehenſibilis guttula liquidi impetum et motum, dudum alias docuere experimenta hydraulica. *

An interim non mirum eſt, cum actio neruorum violentiſſima toties in vita inuerterit, et ſuſpenſum tenuerit ſanguinis per cor et vaſa motum, et reſpirationem quaſi oppreſſerit, quod neque in cordis ventriculis, ſinubus, aut auriculis, neque in arteria pulmonali, aut caeteris vaſis, inuentum ſit vllum omnino, quod polypi indicium aut originem indicabat? vt quidem e contrario ſanguis in venis, ſinubus, auriculis, ventriculis cordis, in vaſis pulmonalibus, iam quidem coagulatus, nullo vero modo concretus, apparuerit.

Tandem ſubſtantia inter duram et piam matrem flaueſcens, incraſſata, diſſecanda, celluloſa apparens, an non videtur arachnoidea tunica, humore ſeroſo hydropica, cum vtraque meninge concreta, concretione has iungens? an non inde indurata, quod reſorpto tenuiore, ſuperſtes humidum in ſolidum coiuerit, ſenſim exſiccatum, vti multa exſtant, tam extra corpus, quam intra, exempla? an hoc non affirmat eadem tunica, laxior in

baſi

* Vid. diſſert. noſtr. de Impetu Hipp. dicto ad §. 274.

basi cranii simili humore, sed magis diluto grauida, ob spatium amplius, non tam cito exsiccanda et induranda. Denique, an humor serosus non depositus fuit, per vltima vasa exhalantia, dilatatis eorum orificiis ab aucto impulsu eadem quantitate sanguinis, impetu ex resistentia in obstructis et concretis vasculis interim aucto? Tubercula autem hordei simillima, in ablato cranio conspicua videntur obstructa a tenaci toties memorato humore vascula, aeque ac in dura matre.

Obseruatio tertia.

Cerebrum ipsum obnoxium esse inflammationibus, satis superque docent eiusdem morbi acuti. Exitum autem inflammationis in suppurationem et gangraenam ibidem, nuperrime didici in homine, mortuo in via publica inuento, in quo thoracis viscera et abdominis ita sana fuerunt, vt nullum signum subitaneae mortis exhiberent. Ventriculus autem inter reliqua ingesta spiritu vini repletus, eiusdem odorem spirabat. Aperto capite, eleuataque incisa dura matre, lobus cerebri anterior vterque extremo suo, quo supra orbitam exporrectus ad frontem, cristae galli dicto processui medio ex osse cribroso assurgenti, a latere adiacet, ita computruerat, in mucum flauum foetidum verso cortice, vt vascula piae matris libera in illo fluctuarent, neque substantia se ipsam sustineret; ichor autem foetens supra duram matrem, os tegentem, effusus erat, cui vnica et altera guttula puris, non male cocti, innatabat. Sub lobis autem cerebri posterioribus eleuatis, conspiciebatur supra tensam duram matrem, quae cerebrum a cerebello distin-

guit,

guit, vtrimque copia humoris tenuis, ichorosi, subrubello-flauescentis, foetidi, vnicae mensuram, vel paulo plus, referentis. Pia mater autem erat integerrima, sed parum in dextro lobo a cortice eleuata; corticalis autem substantia ipsa, sub hac eleuatione piae matris, leviter protuberabat in mucronem obtusum, et male affecta flauescebat.

In dissecto porro cerebro nihil inueni praeternaturale aut morbosum. Cerebellum itidem erat perfecte sanum. An homo hic obnoxius fuerit morbo neruoso, epilepsiae, vertiginibus? incertum est, quoniam, in pauperis ignoti vitae ante-actae aut morbi genus nulla superfuit inuestigatio.

An causa mortis subitaneae fuit rupta in anteriore cerebri lobo vomica? an ebrietas motum sanguinis augendo accelerauit rupturam? An ichor in parte posteriore capitis supra duram matrem inuentus subrubello-flavescens, integra pia matre, ibidem emissus est per oscula vasorum exhalantium dilatata? an resorptione per venulas minimas tenuissimi stagnando computruit crassior factus, humor reliquus? An demum ex vomica anteriore materies morbosa per vasa resorpta minima, per sensim maiora recepta, dein iterum per decrescentia minora et minima delata ad posteriora, ibidem est deposita.

De abscessibus intra cranium, tam intra membranas, quam ventriculos cerebri, ac in eiusdem substantia ipsa, ortis, prostant exempla apud plurimos auctores: Lazarus Riuerius (*) de tribus, in diuersis notatis abscessibu.

(*) Obseruat. 38.

ſibus memorat, inter duram matrem et cranium ortis. Intra duram et piam matrem vidit Stalpartus vander Wiel (1) et in cerebri ventriculis. In ipſa cerebri ſubſtantia apparuere Tulpio (2) Bartholino (3) Botio (4). Neque ignorauit Hippocrates, pronunciat enim *ὁκόσοισιν ἂν σφακελισθῇ ὁ ἐγκέφαλος, ἐν τρισὶν ἡμέρεσιν ἀπόλλυνται, ἢν δὲ ταύτας διαφύγωσιν, ὑγιέες γίνονται*. (5).

Obſeruatio quarta.

Pericardio deſtituta quaedam animalia memorantur apud Auctores. Columbus autem ſeſe diſſecuiſſe Romae in Academia Diſcipulum affirmat, cui deerat pericardium, hic ſaepe in vita laborauerat ſyncope, et eidem ſimili morbo moriebatur (6). Ex hac hiſtoria, et quia viderat ſine eodem valentem canem, pericardium inutile audacter pronunciauit Medicus ordinis pariſini Lamy (7). Et Cel. Du Vernoi oblatum ſibi hunc defectum ſcribit in diſſectione Elephantis (8). Si addidiſſent bene meriti Viri, qua ratione ergo vaſa ad pulmones tetenderint arterioſa ex corde, et quomodo venae inde reduces ad cordis ſinum pulmonalem ſeſe habuerint, vt cor liberum foret ſuſpenſum inter pulmones, forſan illis herbam porrigerem, iam ex argumentis et autopſia habeo, quod oppono. Vſus, quos praeſtant pericardium et mediaſtina, quoties perpendimus, vix illis poſſe carere animal, concludimus. Praeterquam enim quod cor a contactu pulmonum et celluloſae vtriuſque mediaſtini defendit

(1) Cent. I. Ob. XI. (2) Obſ L. IV. C. I. (3) Cent. II. Hiſt. 34
(4) De affect. omiſſ. cap. 3. (5) Aph. 50. Sect. VII. Coac. praen. c. II. aph. XI.
(6) De Re Anat. Lib. XV. (7) Diſcours Anatomiq. p. III. a Paris 1685.
(8) Comm. petrop. Tom. II. p. 289.

pericardium, ne cum illis concrescat, quodque proprium humidum intra se coercens, aditum illi, qui in pectore saepe continetur, humori intercludit, vt sunt sanguis, pus, ichor, et serum hydropicum, atque ita cor cum suis vasis in rore humido fouet, mulcet, et mollit, atque balneo calido, humido, concretionem cum corde impedit: cor a sterno et dorsi vertebris duris ita remouet, vt, dum mouetur, haec non attingat. Sed inprimis vasa cordis ambiens, nectendo firmat ita suspensa, vt haec, neque cor ipsum, intra pericardium vndequaque liberum, inuerti, intorqueri, situ mutari omnino possint, et tamen actiones liberrimas exercere: idque in omni motu corporis, concussu, saltu, inuersione, capiti insistentia. Tam mire ideo fabricatum est pericardium, vt vasa corde egressa mutuent ab ipsa eius extima et tenuissima membrana propagines. Sunt hae arteriae binae, pulmonalis scilicet et aorta, venae cauae ambae, et pulmonales; ab altera parte pulmonum membrana extima suos largitur supra eadem vasa processus, vbi illa sunt extra pericardium, exceptis venis cauis et aorta. Ad concursum autem supra vasa, quae extima est pulmonum membrana, quae intima cordis propago, in ambitum expansae ambae iunguntur inter se per telam cellulosam intermediam, atque a vasis secedentes formant duplicatione saccum, cauum, conoideum non exquisite, quia sectus horizontaliter circulum non facit perfectum, cor et eius vasa intus continens, ab aliis separans (1). Saccus hic ex

(1) De origine Pericardii vid. differtat. nostr. de perspirat Hippocrat. ad §. 142 et seqq.

ex lata et orbiculari baſi ad diaphragma ſurgit in apicem obtuſum, firmiſſime tenſus, haud ita laxus percipiendus, ac in aperto thorace conſpicitur in cadauere: docet id tenſio diaphragmatis, pectoris plenitudo, mediaſtini in eleuando ſterno diſſecti prior integritas. Sunt enim ambo mediaſtina, dorſale ſcilicet et pectorale, vtriusque ſacci membranae thoracem ſuccingentis ad dorſum et ſternum applicati exſurgentia conniuens, per tegmen celluloſum iuncta, in pericardii membranam exteriorem iterum extenſa, quae in viuo homine ſano, et in integro cadauere cauum non habent, et vix dimetiendam diſtantiam. Tenditur ergo pericardium ab oppoſito latere, per mediastina; inferne per aſſurgentem baſin orbicularem, quae in conuexam curuatur et ſe diaphragmati accommodans declinat retrorſum. Surſum vero iugulum verſus adſcendens terminatur cono obtuſo ad diviſionem primam tracheae, et ante hanc, et ibidem extenſum tenetur per aortam, quam emittit a ſiniſtro, et cauam deſcendentem venam, quam recipit a latere dextro, paulo poſteriora verſus per exeuntem arteriam pulmonalem, et redeuntes duas magnas venas, quae ſinum ſiniſtrum, ſeu potius in homine poſteriorem, expanſae conſtituunt. Vena caua autem ex abdomine aſſurgens perforat diaphragma in parte tendinoſa dextra, in diſtantia circiter media vertebras inter et ſternum, atque ingreditur pericardium, ſecum ſumens partem membranae, quae conuexam tendinis ſepti medii ſuperficiem ſuccingit, vaginae inſtar ambientem, ſuper ſe tenſam, atque deinde in ſinum venoſum anteriorem dilata-

 tur

tur. Eſt iterum haec membrana venas cauas ambiens cordis externae continuatio. Per haec vaſa cor cum pericardio nectitur, per propriam extenſam et tenſam membranam, et ſimul internam ſuperficiem pericardii conſtituit: hinc cordis baſis immota facit, quod inuerti torqueri, aut loco moueri nequeat, etſi reliquo ſuo corpore ſit liberrimum. Praeterea omnia vaſa, quae cor ita nectunt, ſunt intra pericardium tenſa, libera, ſuſpenſa quaſi in ſacello vacuo, ſecus ac in aliis corporis partibus, vbi inter membranas decurrentia ligantur. Tenſum ergo cauum hoc tertium, arcens omnia peregrina, facit inſuper, vt pulmones nunquam cor attingere, aut premere poſſint, illis reſiſtens. Tolle ergo imaginatione hoc propugnaculum, quid quaeſo fiet de corde? Certe expoſitum erit omni vi, qua pulmones nudum hoc premunt; non ſemper eadem, ſed viciſſitudine reſpirationis varia, neque tendentur ſuſpenſa vaſa, quae iam baſin firmant: trahent ergo pulmones et partes, ad quas tendunt, ab iiſdem retracta; denique orietur totius machinae confuſio. Hinc potius ſtatuo, cum Excellentiſſimo Ioanni Maria Lanciſio (1), cum ſine corde nullum naſcatur animal, haud adeo vnquam eſſe Naturam nouercam, vt illud ſuo inuolucro priuet, cum et idem in erinaceo inuenerit, negante ibidem eius praeſentiam Blaſio (2) et Pyero (3).

Ratio autem erroris vtplurimum putatur, pericardii cum corde concretio, cuius multa proſtant exempla, et quidem tunc homines iſti ante mortem vtplurimum paſſi fuerunt enormes cordis palpitationes et anxietates.

Nec

(1) In oper. poſth. de corde et aneuriſmat. (2) Anat. animal pag. 65. (3) Parerg. Anat. pag. 174.

Nec mirum! cum iam destitutum hoc resistente propugnaculo cor, vim omnem pulmonis respirantis experitur, nec adeo facile ipsum mouetur, balneo vaporis demulcitum et emollitum. Multae apud Practicos et Obseruatores prostant historiae, collectionem habet Pyerus (1), et dicit Lancisius, malum hoc in tabidis et asthmate vexatis esse frequentius, obstructis ostiolis, quae intra pericardium humorem stillant (2). Propria autem manu delineatam figuram dedit Cantius (3). Ipse in fine anni praeteriti dissecui cadauer virile, in quo inueni cor per totam suam superficiem cum interno pericardio cohaerere per oblonga, tenuia, splendentia, albicantia filamenta, quae membranosa quasi, adeo tenera erant, vt ad eleuationem incisi pericardii facile dilacerarentur, erant aliis alia longiora, longissima digitum extensum adaequabant, ad ventriculos, sinus, auriculas conspicua, crassitie varia; humor vix in pericardio conspicuus, et, qui paucus aderat, multum incrassatus. Paucos postea dies in viri robusti, sed emaciati cadauere, inuenio cor, sinus, auriculas, cum pericardio interno ita concreta, vt a dissecto iuxta longitudinem eodem auriculae et sinus, vti et pars superior cordis ventriculi dextri facile digiti apice separarentur; inferne vero, vbi diaprhagmatis parti neurodi incumbebat, et ad apicem, vbi latus pectoris sinistrum ferit, adhaerebat cordis substantia firmiter adeo, vt cultelli ope ab incrassato pericardio dissecare illam debuerim. Erat autem substantia intermedia connectens vera cellulosa, quod pulcherrime apparebat extendendo

 peri-

(1) Parerg. III p. 198. (2) De subitan. mortib. obseru. III. p. 225. (3) Impt. Anat. Tab. IV. 10. 60.

pericardium, ſed tenax, qualem ſemper obſeruamus, ſi pulmones cum membrana coſtas ſuccingente concretos ab ea ſeparamus, de qua et methodo concreſcendi poſtea ago (1). Erat autem poſt ſeparationem cor, inprimis ad mucronem, et pericardium internum, a diſrupto hoc vinculo, ſcabrum et hirtum.

Vtriusque inciſi cadaueris ignota fuit vitae et morbi ratio, vtpote quae ſaeuiente in fine anni praeteriti frigore intenſiſſimo adeo, vt thermometrum Fahrenheitianum 30 et 32 gradum infra o iudicaret, mortua fuere in via publica inuenta.

Dum iam nactus eram occaſionem examinaui, quid ad externam faciem exhiberet pericardii ſuperficies, vt abſentiam ſuam declararet, cordis extimam membranam mentita, ſed hercule craſſus adeo apparebat in hiſce error, ad figuram cordis nudati fingendam, vt ne quidem lanionem, multo minus Anatomicum deciperet, inprimis cum margo pulmonum in vtroque cadauere liber erat. Nam licet vltimi memorati viri cadauer valde eſſet emaciatum, et vix celluloſa inter mediaſtini duplicaturam quid pingue haberet, et ipſa pericardii membrana tam arcte cum corde concreta foret, nihil tamen externe apparebat, de baſi cordis eiusque appendiculis et vaſis maioribus. Praeterea ſegmenta pleurae, quae mediaſtino diſſecto et ſterno eleuato, pericardio adhaerent, et magnum Lanciſium peſſime feſellerunt ſpecie neruorum in explicatione Tabularum Euſtachii (2), liquidiſſime indicabant, quod oculis occurrebat, eſſe cor continens pericardium: hinc credo, qui pericardii abſentiam ex autopſia, non alios exſcribendo aſſeclae,

(1) Obſeru. 5. (2) Tab. IX, 22-28 22-29$\frac{1}{2}$.

ſeclae, ponunt, meliore cum ratione errare, quoties nempe diſſecuerunt cadauera, quorum pulmonum concaua ſuperficies plane concreta erat cum pericardio, et tum vt plurimum cum concaua thoracis, ſua conuexitate. Praeter etenim caſum, quem obſeruatione quinta deſcribo, occurrit nuperrime in diſſecto cadaueris pectore, ſterno valde gracili eleuato, vterque pulmo arctiſſime cum pericardio et pleura concretus, vt nullo modo collapſus, plenitudinem thoracis, et aëris fictitii abſentiam pulcherrime declararet. Apparebat hic, quantilla ſit diſtantia intermedia decernentis mediaſtiui, adeo quidem vt pulmo pulmonem fere attingeret limbo ſuo, quo alterum a iugulo ad infimam partem ſterni reſpicit. Cum autem in tali ſeparatione adhibetur cultellus, et facile laeditur membrana pericardii pulmoni accreta, inprimis in eleuando ſterno itidem concreto, ſi forte tota haec deſcinditur, et cum pulmonibus, quibus firmiſſime adhaeret, eleuatur, reuera apparet cor quaſi inter politiſſimam ſuperficiem pulmonum nudum et liberum. Prudentis tamen tunc eſt in rem vlterius inquirere, et, quomodo vaſa ſeſe ad pulmones et reliquum corpus habeant, examinare et deſcribere, antequam concludat.

Et hic caſus videtur, qui fefellit celeberrimum Du Vernoi in elephante, vbi error eo craſſior, quo bellua maior; nam licet in aliis bene meritus Vir putet, eſſe incredibile, lapſum poſſe committi in re tam euidenti et facili, ad quam oculis tantum opus eſt apertis, vt eſt exiſtentia pericardii et mediaſtini, (1) credo tamen et

(1) Coment. Petrop. Tom. II. pag. 289.

et confido, illum misere cecidisse, saltem a stabili via deflexit, cum modo absentiam ponit, nec vllam addit descriptionem, qua ratione se partes habuerint. Anatomicus non oculis tantum, sed et manubus opus habet, quas si admouisset, haud dubito, quin inuenisset, quod ipse ego in dissectione Elephantis, cui iam per quinque menses incubui, deprehenderim. Scilicet in tanto animali, quod fateor non tam facile, ac hominis cadauer, tractatur, inueni pulmones vndequaque pleurae adhaerere per tenacissimam telam cellulosam, et pericardii toti ambitui et superficiei externae, per eandem contiguos; cum autem vastum hoc animal, quantum congelatum, sinistro lateri incumbens per quadraginta et plures homines, ad id mandatos, nullo modo vel digitum latum loco moveri posset, detracta cute, costae ad articulationem cum vertebris, et sterno dissectae ablatae sunt in latere dextro, sicque totus pulmo, vna cum corde, trachea, et vasis maioribus, inferne cum diaphragmate dissecto, simul thorace exemtus est. Haec omnia dum accuratius repetito examine lustro, inueni omnia inter se concreta, scilicet, ablatis costis, separaui et saeparare ab aliis curaui pleuram vna cum adhaerentibus pulmonibus, quos dum a pericardio abstuli, vidi hoc animalium more, quae prona terram spectant, per processum oblongum, acutum iungi cum diaphragmate, ita vt cor perpendiculariter suspendatur in hoc, vt in caeteris quadrupedibus, inter pulmones intra pericardium, atque per hoc transeuntia vasa maiora illud suspensum et tensum teneant.

In

In aperto autem pericardio, vt erat craſſities notabilis, ita admiranda ſtructura eadem apparuit, quam antea in opuſculo de Perſpiratione Hippocratica deſcripſi.* Et quidem cum cor vna cum pericardio, dum reliqua viſcera de die examino, in aqua pura toties renouata, per quatuor et vltra menſes ſeruaſſem, ab iſta maceratione facillima fuit inquiſitio. Separaui igitur membranam cordis extimam a ſubiecta pinguetudine ad baſin, deinde ab arteria pulmonali ſupra celluloſam vsque, quo loco reflexa in ambitu pericardii membranam internam conſtituit. Separaui itidem membranam a pulmonibus datam, ab altero arteriae latere ad illum vsque ambitum, vbi reflexa membranam cordis externam conſtituit, ſeparaui deinde has membranas, pericardium conſtituentes, in illo ipſo a ſe inuicem. Apparuit tunc, et iucundiſſimo ſpectaculo Auditoribus exhibui, membrana cordis, arteriae intra pericardium, pericardii interna, vna continua, ſed tenera adeo et tenuis, vt tota pelluceret, poſtquam arte et patientia ab omni adhaerente flocculenta materie interne liberaſſem; imo vero tenuiorem nunquam vidi in homine, aut cuiuscunque generis animali, quod ad hunc ſcopum incidi; multa autem diuerſi generis quadrupedum, piscium amphibiorum, ea diſſecui intentione, vt vera fabrica appareret, tam cum Magno Auunculo Hermanno Boerhaaue, cum praelectionem ſuam de corde meditaretur, quam poſtea, ad hoc incitatus, ſolus. Apparuit eadem encheireſi membrana pulmonum, arteriae extra pericardium, pericardii externa, vna continua, tenera, pellucens, craſ-

* ad § 142. et ſeqq.

ſior tamen, quam interna. Apparuit tandem maxima pericardii craſſities ab intermedia filamentoſa tenace ſubſtantia, quae rite examinata, leui extenſione, inflatione, ſeparatione, conſpiciebatur vera et vnica celluloſa, per quam vaſa et nerui, ad nudum oculum conſpicua, decurrebant. Quae ſupra arteriam apparuerunt, eadem ſupra venas pulmonales vera ſunt, vt repetere experimenta non opus ſit verbis. Haec eſt vera in Elephante, vt in aliis animantibus pericardii ortus hiſtoria, per hoc vaſa tranſeunt, et tenſa ipſa pericardium extendunt. Concretio autem his viſceribus familiaris, in omnibus forſitan Elepantibus obtinet, qui in ſtabulis ſeruantur et aluntur, quoniam motum moli corporis appropriatum neutiquam exercere poſſunt: cum autem eadem in homine ſaepe obtineat, puto cauſam erroris, abſentiae ſcilicet pericardii declaratae, ſatis eſſe euidentem. Quod vero ad Pariſini Medici ſententiam attinet, eſſe ſcilicet hoc inuolucrum inutile, nimia volatilitate reor pronunciatam, cum forſitan, vt in toto rerum vniuerſo, vix in corpore humano, aliquid aut ſuperfluum aut inutile demonſtraturus ſit Phyſicus.

Obſeruatio quinta.

Omnia viſcera abdominis et thoracis vidi in cadauere Viri in Noſocomio maritimo Petropolitano lenta febre enecti, ita inter ſe concreta, ſuo loco tamen diſpoſita, vt nullum plane liberum foret. Omentum infra vmbilicum extenſum, ſuperne cum peritoneo, inferne cum inteſtinis, ſeſe vt ſolet inter gyros illorum ad certam altitudinem inſinuans, et ad latera; gyri Inteſtinorum inter ſe, flexurae Meſenterii inter ſe, firmiter erant

con-

concreta. Hepar conuexa ſua tota ſupeficie, etiam illa parte, qua ceterum liberum, diaphragma per reflexam ſuam membranam concauum tangit. Lien itidem parte ſua ſuprema cum diaphragmate, poſteriore cum peritoneo, anteriore ſua concaua cum ſundo ventriculi firmiſſime cohaerebant. Veſica vrinaria in hoc corpore magna, ſupra os pubis extenſa ad mediam inter pubem et vmbilicum altitudinem, ad latera ſua, ſed inprimis ad fundum, erat iuncta cum ſuperincumbentibus inteſtinis. Colon inteſtinis et lumbis vndequaque erat accretum. In pectore Pulmones cum membrana thoracem ſuccingente, vbi illa ſupra coſtas et conuexum diaphragma extenditur, et cum pericardio, cohaerebant firmiſſime. Pulmonem, dextrum vomica obſidebat, hinc in ſaccum pure plenum fere totum conuerſum. Cor interim in pericardio liberum vna cum ſuis vaſis copiae humoris ſubrubello flaueſcentis innatabat. Cranio aperto meninges, disiunctae et cerebri ventriculi naturaliter cauitate diſtincti, cetera ſana erant.

Omnes autem iſtae concretiones erant (vti tunc temporis Auditoribus exhibui) per membranas extenſas, quae, ex duplicatura concretae, tenacula efficiebant ſplendentia, ratione partium et diſtantiae concretorum maiora, minoraue, qualia fere cernimus colon inteſtinum ad peritoneum coniungere, eiidem inſerta, in illud abeuntia, et naturaliter ſuſpenſum retinentia, vbi flexuris ſuis ad et deſcendit. Inter has duplicaturas, dum deſcindebantur, ſemper apparebat contextus reticularis ſeu celluloſus, qualem et ſemper inuenimus inter concretum cum membrana thoracis interna pulmonem, dum ab illa hunc ſeparamus. Cum iam antea de concretione partium locutus ſum, et notaui tunc intermediam fuiſſe talem celluloſam, quae in ſtatu naturali abeſt, non poſſum, quin de eius ortu ſententiam expono. Inter partes non concretas caua dari impleta ſana ſpiritu in opuſculo de Perſpiratione ex Hippocrate elucidaui antea et experimentis firmaui, et morboſa ichore repleri illa, eodem notante. Quoties autem praeceſſit inflammatio valida, toties fere ſemper poſtea concreſcunt inter ſe, vt vulnera docent, pleuritis et peripneumonia, hepatitis, aliique morbi acuti: adeo quidem vt ex centenis forſitan vix vnus inueniendus, cui pulmo non cohaeret thoraci interno, poſt ſaeuam eiusdem aut pleurae inflammationem, ſiue a cauſa interna ſiue a vulnere. Impedita transpiratione, a ſiccitate hoc fieri putant Auctores, et ipſe credidi. Dum vero toties in ſeparatione concretorum filamenta iſta occurunt, ſuperficie caeterum polita, animum ſubiit indagatio de horum ortu, quem talem puto. Dum inflammatio in quodam loco adeſt, oritur ibidem reſiſtentia prementi a tergo ſanguini ratione obſtructionis, hinc illius vis et impetus augetur, inde oritur febris, vnde non obſtructa vaſa maiorem itidem vim coguntur ſuſtinere, et dato tempore citius transmittere ſanguinem: augetur ergo circulatio, augetur tranſpiratio per vaſa non obſtructa; auctis vero impetu et circulatione, humores magis premuntur intra dilatata inde vaſa, hinc vel noua obſtructio, vel alieni et quidem ſerie craſſioris transmiſſio, vt quae ſpiritum prius, lympham, quae lympham antea, ſerum recipiant et transmittant: imo vero manente eadem vi,

quae

quae ſpiritum prius, iam ſerum, et ſanguinem; vt euidens eſt in oculo inflammato. Pulmo ergo, vel membrana interna thoracis, vel ambo ſimul, quoties inflammantur, atque mox expoſita ibidem obtinent, inter vtramque ſuperficiem, non concretam, deponitur humor, quam ſpiritus ſiue halitus, in ſanis replens, craſſior, qui ſtagnando, et reſorptu tenuioris per venulas diametro haud dilatatas, patulas, magis plaſticus redditur, atque motu continuo pectoris in filamenta ductus, concauum cum conuexo coniungit. Ars naturam imitando id efficit glutine; patet ſi duo ligna, eodem iuncta, a ſe inuicem diſtrahuntur: tum etenim hoc in fila ductile rumpitur. Autopſia vero in recens natis, maxime ante maturitatem vtero excluſis, rem elucidat. In illis etenim, quo loco ſub cute in adulto celluloſa ſubſtantia ſolidior, extenſilis inuenienda, ibidem apparet inter loculos pingui, feros ſmegma mucoſum ductile in filamenta eo tenuius, quo propius ab origine diſtat animal. Hoc in vitulis vaccae vtero exſciſſis, hoc in agnis ex ouibus exemtis, hoc in catulis canum ante partum examinatis, toties vidi, hoc expertus ſum in abortubus humanis. Vnde vix dubito, quin ipſa ſubſtantia celluloſa, ſiue veſicularis, quae ſub vario nomine in corpore occurrit, perperam membrana dicta, ortum ſuum debet iſti ſmegmati naturaliter ſecreto, eo firmior, quia inter partes reliquas ſeparatas, vbi celluloſa tela ingreditur, adeſt in abortu mucus. Haec ſi arridet hypotheſis tum vti in thorace, ita in reliquis apparet partium concretio, qualem in cerebro, pericardio,

 mox

* Obſeru. 2da obſeru. 4ta.

mox exhibui, et iam in omnibus fere viſceribus enarro, cuius cauſa tum facile apparet, ſi reſpiciamus ad lentam viſciditatem, quam humores induxerunt lenta et diuturna febre intermittente, quae inſuper ortum duxerat ex morbo acuto, peruerſa diaeta, atque abuſu potus ſpirituoſi.

DESCRIP-

DESCRIPTIONES RARIORVM PLANTARVM.

AVCTORE
Stephano Kraſcheninnikow.

DE PERSICARIA *foliis ouatis, glabris.*

Quinque Perſicariae ſpecies rariores in Sibiria obſeruatae ſunt: Perſicaria ſcil. montana foliis longioribus et anguſtioribus. Perſicaria floribus octandris trigynis, foliorum lanceolatorum vaginis hirſutis: Perſicaria caule in latum diffuſiſſimo, foliis lanceolatis: Perſicaria ſpicis longis numeroſiſſimis, vaginis integris, floribus pentandris trigynis, et Perſicaria foliis ouatis, vtrinque incanis: quarum primam *B.* Ammanus in *deſcr. Stirp. rarior. Ruth.* propoſuit, omnes autem Cel. Gmelin in T. III. *Fl. Sib.* breui edendo recenſuit. Sexta erit haec noſtra, quae quanquam non in Sibiria, ſed in Sinarum regno prouenit, Sibiricis tamen iure accenſeri poteſt; cum regiones prouentu eius celebres, borealem dicti imperii partem, conſequenter Sibiriae finitimam, conſtituant. Tab. XIII.

Caulis huius plantae a ſeſquipede ad duos pedes altus eſt; teres, cauus, glaber, in planta iuniore pallide viridis, ſub tempus floreſcentiae, praecipue infra, rubro colore tinctus, crebris geniculis diſtinctus, ad exortum procumbens, cetera erectus, ab imo ad ſummum ramoſus, ramis inferioribus rectis, longitudinem ipſius caulis aequantibus.

Folia

Folia in caule numeroſa, ad ſingula ſcilicet genicula ſingula, alterna, ouata, petiolata, a ſeſquiuncia ad duos pollices longa, ſuperiora aliquantum breuiora, vnam ſcil. vnciam lata, ſaepe etiam paulo latiora aut anguſtiora, ſupra laete viridia, infra albidiora, neruoſa, vtrinque glaberrima, ad oras breuibus albentibus duris pilis horrida. Petioli eiusdem cum caule coloris, craſſiuſculi, glabri, infra conuexi, ſupra plani, ad oras, aeque ac foliorum margo, pilis aſperi, diuerſae longitudinis; inferiorum enim foliorum petioli vnciales aut et longiores ſunt, reliquorum ad ſpicam vſque floriferam ſenſim breuiores, ita vt petioli ſummorum foliorum tertiam vnciae partem longitudine vix ſuperent.

Internodia pro more vaginis tecta ſunt; inferiora ad quartam, ſuperiora ad dimidiam fere longitudinis partem. Vaginae membranaceae tranſparentes, albae aut rubro colore infectae, creberrimis longitudinalibus neruis diſtinctae, qui ad 2 et 3 lineas vltra membranas excurrentes, ſummum earum marginem tenuiſſime laciniatum efficiunt.

Rami e foliorum alis prodeunt; inferiores maturius, ſuperiores multo ſerius: qui et ipſi in alios minores, eadem prorſus, qua caulis, ratione diuiduntur et ſubdiuiduntur.

Folia ramorum et ramulorum, praeter quod minora ſunt, eorumque vaginae nihil a caulinis abludunt.

Tam caulis, quam rami et ramuli infra ſingula genicula crebris exiguis glandulis, viridibus aut rubentibus, abſque vllo ordine ſparſis, obſiti ſunt.

Spe

Spicae floriferae, caules et ramos terminantes, breves, e fpiculis partialibus, duas et tres lineas longis, tribus aut quatuor, raro pluribus corollis feffilibus onuftis, componuntur.

Foliola fingulis fpiculis fubiecta, alterno fitu et forma caulinis fimilia, feffilia tamen et magis mucronata funt: inferiora femiunciam, fumma vix lineam longa. Vaginae etiam foliolorum a caulinis non differunt, nifi quod tota fere internodia inueftiunt.

Corollae albae, quinquepartitae, duabus laciniis exterioribus breuioribus, latioribus, concauis, in medio dorfo viridibus; tribus interioribus longioribus, anguftioribus et in extremo faepe laceris.

Filamenta fex, corolla fere dimidio breuiora, vna cum antheris alba.

Germen triquetrum. Styli duo longitudine ftaminum et ftigmata capitata candida.

Folia ficca e viridi coerulefcunt.

Duo huius Perficariae exempla e feminibus a Rever. Gaubil fuperiori Patr. Gall. qui Pekini funt, et Academiae Scientiarum Petropolitanae honorario Membro, tranfmiffis, produximus, quae floruerumt fub initium Novembris, eodem, quo fata funt, anno, fructum autem non muturarunt.

Sinae ex relatione laudati Reu. Gaubil. hac Perficaria, ad coeruleum pigmentum, vulgo indigo dictum, conficiendum vtuntur.

Icon fiftit ramum ex inferioribus naturali magnitudine, cum fpica florifera corollis non dum bene explicatis.

DE SALVIA

Tab. XIV. *foliis cordatis, obtuse crenatis, spicis Florum nutantibus.*

De natali elegantissimae huius plantae loco certo mihi non constat: audiui tamen, si verum est, e seminibus a Cl. Gerbero, Florae Tanäensis Auctore, collectis, in horto nostro Botanico propagatam esse, hinc et in adiacentibus Tanai regionibus crescere eam probabile est.

Altitudine est plerumque bipedali. Caulis tetragonus molli et breui lanugine incanus, intus medulla alba farctus, ab imo ad summum ramosus.

Folia radicalia cordato-acuminata, quinque fere vncias longa et quatuor circa basin lata, supra intense viridia, splendentia, glabra, saltim nullis pilis, nudo oculo conspicuis, obducta, rugosa, infra neruosa, aeque ac caulis, molli hirsutia vestita, margine nonnihil vndulata, obtusissime crenata, petiolata et ad insertionem petiolorum vtrinque quasi erosa. Petioli foliorum longitudine, infra conuexi, albidi, supra sulco excauati, rubentes. Folia caulina opposita, quorum inferiora petiolata, reliqua sessilia. Folia petiolata radicalibus similia, latiora tamen et obtusiora, saepe in extremo profunde laciniata, breuioribus petiolis haerentia: sessilia inferiora vix vncialia, cetera quo superiora, eo breuiora sunt, ita vt summa vix 4 lin. superent; omnia tamen cordatam quodammodo figuram affectant.

Rami nudi, e singulis foliorum alis singuli; inferiores, ex alis scilicet petiolatorum foliorum prodeuntes, altitudine a summo caule non multum deficiunt et erecti caulique approximati sunt: reliqui ad summum vsque gra-

gradatim breuiores euadunt et magis in latum diffunduntur.

Summo cauli et ramis ſpicae floriferae nutantes, conſtanter ternae inſident, quarum mediae binis oppoſitis plerumque longiores ſunt. Verticilli ſpicas componentes ſex floribus ſubſeſſilibus, in orbem diſpoſitis, conſtant, quorum ſingulis binae oppoſitae ligulae, calicibus dimidio breuiores, ſubiectae ſunt.

Calix monophyllus tubulatus, breuis, compreſſus, profunde ſtriatus viridis, ſaepe etiam ſtriis rubro colore tinctis conſpicuus, bilabiatus, labio ſuperiori integro, inferiori bidentato.

Corolla pro more ringens, bilabiata. Labium ſuperius longius, erectum, emarginatum, medio dorſo carinatum, violaceum, extra punctis candidis pictum: Inferius trifidum violaceum absque puctulis, lacinia media propendente maiori, ſubrotunda, integra, margine aliquantum ſurſum erecto, hinc concaua; lateralibus minoribus, oblongis, horizonti parallele extantibus.

Filamenta duo intra labium ſuperius deliteſcentia, alba, cum antheris oblongis incumbentibus fuſcis, luteo polline tectis.

Germen quadrifidum. Stylus ſtaminibus multo longior, imo extra labium ſuperius per emarginaturam eius non parum prominens, infra albus, ſupra purpuraſcens, cum ſtigmate bifido acuto, violaceo.

Semina pro more quatuor, nigra.

Floret ſub finem Iunii. Semina maturat Auguſto.

Icon ſiſtit plantam cum vno tantum petiolatorum foliorum pari, hinc naturali paulo humiliorem. Spicae floriferae ſummae tantum pictae ſunt, reliquae, vt labori pictoris parceretur, absque floribus deſignatae, florum tamen figura ex deſcriptione potius, quam ex icone addiſcenda eſt. A. folium radicale naturali magnitudine.

DE LVNARIA
foliis ellipticis incondite dentatis.

Tab. XV. fig. 1. Hanc b. Stellerus in America ſeptentrionali maturum iam fructum ferentem legit, et ſub nomine Leucoii ſaxatilis foliis ad radicem Turritidis in orbem ſparſis, aſperis, ſiliquis planis, latis, vtrinque acuminatis, ſeminibus planis, marginatis, nigris, ſequenti modo deſcripſit.

Planta creſcit e ſaxis verſus orientem ad dodrantalem altitudinem. Folia e corona radicis prodeuntia in orbem ſparguntur, glauco-viridia ſunt, punctulis aſpera Turriditis inſtar, ſesquiuncias longa, quinque lineas lata. E medio foliorum caulis dodrantalis ſurgit, in ſummitate valde ramoſus. Singulis ramulis appenſa eſt ſiliqua 6. 7. 8 lineas longa, 3 aut 4 lata, vtrinque acuminata, ſub maturitatem in medio inflexa ſeu contorta, et ſecundum longitudinem falcis inſtar deorſum curuata, biualuis, lutescens ſordide, ſepto intermedio membranaceo, candido, tenuiſſimo, diaphano diſcriminata, cui vtrinque ſemina nigra, orbiculata, plana et marginata adhaereſcunt, quae optime matura collecta ſunt. E mea mente ob ſiliculas curtas, latas, contortas et inflexas, ſingulare meretur genus, aut ſequenti ratione a reliquis Leucoiis diſtinguenda. Leucoium Turritidis folio, ſiliquis curtis, latis, contortis et falcatis, ſemine nigro. Forte Lunariae accenſenda. Haec Stellerus: Nunc plantae in noſtro ſolo

natae

natae deſcriptionem ſubiungemus, partim vt ea, quae inuentori obſeruare non licuit, ſuppleamus: partim vt collatis inter ſe deſcriptionibus appareat, quantum diuerſa ſoli natura vnam eandemque plantam mutare valet.

Magnis ceſpitibus naſcitur, et tota breui albenti hirſutia aſpera eſt.

Radice nititur lignoſa, ſupra pennae columbinae craſſitie, inferiora verſus attenuata, ab vncia ad sesquipollicem longa, oblique in terram deſcendente, plurimis breuibus, capillaribus fibris per totam longitudinem ſtipata, extra fuſca epidermide obducta, intus vireſcente, nullo notabili odore aut ſapore praedita.

Caules ſesquiunciales, biunciales aut et paulo longiores, erecti aut declinati, teretes, e glauco virentes, tribus aut quatuor foliis veſtiti et vnico aut duobus ramulis floriferis, e foliorum alis prodeuntibus, aucti.

Folia elliptica acuta: radicalia plurima in orbem diſpoſita 8 aut 9 lineas longa, 2 et 3 lata; caulina inferiora paulo breuiora, ſummum vix 3 linearum eſt: omnia acutis et longis dentibus, quaedam tamen pluribus alia paucioribus, plerumque circa medium, inſtructa ſunt.

Flores in ſummo caule et ramis quodammodo vmbellati, tenuiſſimis pediculis ab vna linea ad $1\frac{1}{2}$ longis inſiſtunt, quidam et ſeſſiles ſunt.

Calix tetraphyllus, eluteo viridis, foliolis ouatis, erecto patentibus, deciduis; quorum duo oppoſita concaua et baſi gibba ſunt.

Corolla tetrapetala alba. Petala ſubrotunda, leuiſſime emarginata, magna, plana, patentia, in vngues luteſcentes longitudine calicis deſinunt.

Fi-

Filamenta ſex ſubulata, luteſcentia, quorum duo minora intra concaua calicis foliola deliteſcunt et vtrinque ad baſin nectarifera viridi glandula cinguntur; quatuor maiora erecta, ſingula ſingularum quarundam ſquamarum (forte nectariorum) ſummo dorſo inſiſtunt, quae concavae ſunt et germen circumſtant atque inuoluunt. Antherae cordatae, ſulcatae, erectae, flauae.

Germen oblongum, teres, intra ſquamas, longiora ſtamina ſuſtinentes, abſconditum. Stylus longitudine germinis, perſiſtens. Stigma capitatum.

Silicula elliptica plana, vtrinque acuminata, vix 3 lin. longa, et 1½ lata, ſaepe incurua, non raro etiam recta, ſepto valuis parallelo membranaceo, transparente, albo diuiſa.

Semina exactiſſime ita ſe habent, vt in Lunaria Cel. Linnaeus gen. pl. deſcribit: ſunt enim, vt eiusdem verbis vti liceat, reniformia, compreſſa, marginata, in medio ſiliculae poſita, receptaculis filiformibus, ſed brevibus, ſuturis lateralibus inſertis, pendentia, vtrinque tria.

Floruit ſub finem Aprilis. Semina maturauit Iunio. Lunariae coniunxi, quia pleraque eſſentialia cum hoc genere communia habet; ita tamen vt etiam eorum ſententiae faueam, qui forte eam a Lunaria ſeparandam et nouo aliquo nomine appellandam eſſe cenſuerint: cum ſquamae, quae germen circumſtant et maiora ſtamina ſuſtinent, ad eſſentiam generis conſtituendam non minoris momenti aeſtimari poſſe videantur, quam dentes in minoribus Alyſſi ſtaminibus, qui eſſentiam eius generis, Cel. Linnaeo docente, coſtituunt.

Icon

Icon ſiſtit plantam naturali magnitudine. a) Stamina et piſtillum nudo oculo conſpicua, b) eadem lente ſpectata c). Stamen maius ſquamae inſiſtens.

DE THALICTRO.

Caule ramoſo, ramis plerumque heteromallis. Tab. XV. fig. 2.

Haec quoque planta e ſeminibus a b. Steliero a°. 1743 ad Camtſchatcam lectis et tranſmiſſis ſub nomine Thalictri minimi ſeminibus e ſingularibus pediculis quaternis, ſtriatis, enata eſt, de qua tamen ipſe Stellerus nihil praeter nomen memoriae prodidit.

Cum Thalictro ſeminibus triangularibus pendulis, ſtipulis nullis Cel. Gmelini, tam quo ad habitum, quam quo ad foliorum figuram, noſtro multum conuenit; ſemina tamen noſtrae plantae erecta, eorumque figura vt et ramorum diſpoſitio ſuadent, vt ſeparemus.

Pedali eſt plerumque altitudine. Caulis pro plantae ſtatura craſſus, penna ſcilicet anſerina non multum tenuior, teres, glaber, ſtriatus, viridis, folioſus, infra procumbens, cetera erectus aut aſcendens.

Folia caulina alterna, petiolata, duplicato pinnata. Foliola ſubrotunda, plerumque trifida, non raro etiam bifida aut integra, inferiora obtuſa, ſuperiora paulo productiora et acutiora, exigua, $2\frac{1}{2}$ ſcil. lin. vix excendentia, viridia aut in glaucum non nihil vergentia.

Rami e ſingulis foliorum alis ſinguli, longi, aeque ac caulis ramoſi, ramis ſuperioribus nudis, inferioribus vno folio circa mediam longitudinem veſtitis.

Extre-

Extrema caulis et ramorum in pedunculos vnifloros eadem prorſus ratione, qua caulis in ramos, diuaricantur. Foliola pedunculis ſubiecta plerumque integra, ouata, raro inciſa aut trilobata ſunt.

Flores ochroleuci, ſub initium floreſcentiae, cum pedunculi breues ſunt, racemoſi, iisdem poſthac indies excreſcentibus, in paniculas diffunduntur et verſus vnum latus inclinantur. Hos ſubſequuntur ſex, ſeptem et octo ſiliculae oblongae, ſtriatae, hinc gibbae, inde planae, in apicem acutum reflexum deſinentes. Quod Stellerus quatuor tantum ſemina ſuae adſcribit, id non magni aeſtimandum eſt: nam praeter quod numerus eorum variat, facile etiam fieri potuit, vt Stellero matura ſemina legente non nulla iam deciderent.

Icon ſiſtit ramum ex inferioribus naturali magnitudine. *a*. eſt folium radicale.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

DE MOTV NODORVM LVNAE EIVSQVE INCLINATIONIS AD ECLIPTICAM VARIATIONE.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Quanquam luna inter omnia corpora coeleſtia nobis eſt proxima, eiusque adeo diſtantia a terra ope parallaxeos ſatis notabilis quouis tempore ſine ſenſibili errore aſſignari poteſt, quo ſubſidio aſtronomia ratione ſolis ac planetarum, imprimis vero ratione ſtellarum fixarum etiamnunc caret: tamen motus lunae tantopere eſt implicatus, totque perturbationibus obnoxius, vt nullo adhuc modo certis legibus circumſcribi, atque ope tabularum exacte definiri potuerit. Cum enim quilibet planeta primarius in eodem plano motum ſuum abſoluat, atque per perimetrum ellipſis ſecundum leges a Keplero obſeruatas circa ſolem circumferatur, ex loco medio ope vnicae aequationis ab excentricitate orbitae pendentis, eius locus verus ad quoduis tempus definiri poteſt. Luna vero ab iſta motus vniformitate maxime recedit: primum enim motum ſuum non in eadem planitie perficit, et, ſi quouis tempore planum per centrum terrae ductum concipiatur, in quo via a luna deſcripta ſit ſita, non ſolum interſectio huius plani cum ecliptica, quae linea nodorum appellari ſolet, continuo mutatur, atque modo antrorſum modo retrorſum procedit, ſed etiam ipſa Tab. XVI.

iſtius plani inclinatio ad eclipticam eſt variabilis, alioquo tempore maior alio minor obſeruatur. Tum vero luna in iſta mutabili ſemita neque motu vniformi progreditur, neque eandem a centro terrae ſeruat diſtantiam, quae quidem inaequalitas quoque in planetas primarios cadit; verum cum in planetarum orbitis ea puncta, in quibus ſoli ſunt vel proximi, vel ab eo maxime remoti, conſtanter in easdem coeli regiones dirigantur: ita ratione longe diuerſa ea puncta orbitae lunaris, quae a terra vel maxime vel minime ſunt diſſita, non quieſcunt, neque etiam minimae eius a terra diſtantiae, quibus locis luna in perigaeo verſari dicitur, omnes ſunt inter ſe aequales, neque maximae, quibus locis luna in apogaeo verſari dicitur, hincque tam diſtantia perigaei ſeu apogaei a terra, quam eius locus in coelo eſt variabilis; cuiusmodi inconſtantia in nullo planeta primario deprehenditur. Praeterea quoque motus lunae ab apogaeo vel perigaeo mobili nulli tali conſtanti legi adſtringitur, vti fit in planetis, ſed pro eadem ab apogaeo elongatione locus verus a loco medio modo magis modo minus diſcrepat. Quare cum aſtronomi ad ſimilitudinem planetarum primariorum lunae motum per ellipſin repraeſentare velint, in cuius alterutro foco centrum terrae verſetur, non ſolum poſitionem huius ellipſis ſeu lineam apſidum continuo mutare, ſed etiam eius magnitudinem et excentricitatem variabilem ſtatuere ſunt coacti. Neque vero etiam hoc modo inaequalitatem motus ad vnicam correctionem, quae a ſola excentricitate et quantitate fictae iſtius ellipſis penderet, revocare licuit, ſed plures inſuper tabulas aequationum

num condere oportuit: quae quamuis calculum lunae molestissimum efficiant, tamen neutiquam cum veritate perfecte consentiunt.

§. 2. Quo magis autem motus lunae perturbatus obseruatur, eo magis theoriam motuum coelestium, quam Vir summus Neutonus primus in lucem produxit, confirmat et corrobarat. Postquam enim Neutonus leges a Keplero ex obseruationibus erutas calculo subiecisset, atque secundum veras motus regulas examinasset: omnes planetas perinde moueri demonstrauit, ac moveri deberent, si ad solem vrgerentur viribus, quae quadratis distantiarum a sole reciproce essent proportionales. Hinc enim ostendit, planetas in ellipsibus moueri, quarum alterum focum sol occupet, hocque motu areas temporibus proportionales circa solem emetiri debere: praeterea vero quadrata temporum periodicorum cubis axium transversorum cuiusque ellipsis proportionalia fore. Quae conclusiones cum phaenomenis accuratissime satisfaciant, non dubitauit Neutonus tanquam principium certissimum stabilire, omnes planetas perpetuo ad solem vrgeri viribus, quae quadratis distantiarum reciproce sint proportionales, et cum deinceps inuenisset, motum cometarum ad eandem legem esse comparatum, eo magis veritas principii assumti ipsi confirmabatur. Quoniam porro omne coeli spatium omni materia vacuum statuit, ne a resistentia medii motus planetarum retardarentur, huius vis, qua planetae ad solem sollicitentur, nullam causam physicam admittere valuit. Hancque ob causam ipse quidem tacite, at sectatores eius aperte profiteri sunt ausi, solem ista vi

 imme-

immediate a Creatore eſſe donatum, eaque omnia coeli corpora ad ſe allicere atque attrahere. Cum autem nullum corpus ab alio attrahi poſſe agnoſcerent, niſi hoc ſimul ab illo pari vi attrahatur, ſimilem vim attrahendi ſingulis planetis et cometis attribuerunt, quia vero non conſtabat, ipſum ſolem ab iſtis planetarum viribus ſenſibiliter impelli, inertiam atque adeo materiam, qua ſol conſtat, multo maximam ſtatuerunt, vt effectus a viribus illis ortus produceretur quam minimus. Hanc opinionem comprobabat quoque ſtupenda ſolis magnitudo, qua omnes planetas longiſſime ſuperat. Praeterea vero ipſa grauitas, qua omnia corpora ad terram vrgeri ſentimus, atque niſus, quo luna manifeſto terram verſus impellitur, talem vim attractiuam in terra euincebat: ſimilique modo motus ſatellitum Iouis et Saturni, hos planetas vi attractiua praeditos eſſe docebant. Denique ex phaenomenis aeſtus marini clariſſime apparebat, vti terra lunam ad ſe attraheret, ita viciſſim terram cunctasque eius partes a luna attrahi. Cum igitur hoc modo euiciſſent omnia corpora mundi ſe mutuo attrahere, eandem vim ad omnia prorſus corpora extendere ſunt conati, atque adeo attractionem proprietatibus materiae adnumerauerunt; quae vltima concluſio, vti nimis eſt temeraria, ita quoque praecedentis ratiocinii vim non infringit, neque ſummum vſum, quem Philoſophia Neutoni Aſtronomiae affert, ſuſpectum reddere debet. Cum enim reliqua omnia obſeruationibus et indubitatis argumentis ſint confirmata, hoc ſolo excepto, quod attractio ſit proprietas materiae eſſentialis, dubitare profecto non licet, quin omnia corpora mundi reuera ad

ſe

ſe mutuo impellantur, etiamſi cauſa huius vis ignoretur. Pro vſu autem aſtronomico ſufficit noſſe eiusmodi vires in mundo reipſa exiſtere, quarum effectus cum ſolus ſpectetur, perinde eſt, quaecunque earum ſit cauſa ſiue cognita ſiue incognita, neque in ipſam aſtronomiam multum inde incrementi redundaret, licet huius phaenomeni cauſa abſcondita innoteſceret.

§. 3. Stabilito ergo hoc principio, quo omnia corpora coeleſtia ſe mutuo attrahere ſtatuuntur, determinatio omnium motuum qui in coelo fiunt, ad reſolutionem problematum mechanicorum reducitur: mechanica enim eſt quaeſtio, qua ex cognitis viribus, quibus duo pluraue corpora in ſe inuicem agunt, variatio vnius cuiusque motus inde oriunda definiri debet. Ac pro motu planetarum primariorum quidem determinando, etſi ii non ſolum ad ſolem vrgentur, ſed etiam quilibet a reliquis trahitur, tamen vires a planetis ortae tam ſunt exiguae ratione vis, quae ad ſolem tendit, vt in hoc negotio ſine errore ſenſibili praetermitti queant. Hancob cauſam inueſtigatio motus cuiuſque planetae primarii ad ſolutionem huius problematis perducitur, vt duorum corporum, quae ſe mutuo attrahunt in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, motus ac ſitus ad quoduis tempus aſſignetur. Quod problema vti non eſt difficile ſolutu, ita quoque planetarum primariorum motus facile ope calculi definiuntur, ac tabulae in vſum aſtronomicum conſtruuntur. Pro luna autem calculus, ad quem haec theoria deducit, tantopere fit moleſtus, totque difficultatibus implicatus, vt vix quicquam certi ad eius motum determiminandum ex eo elici poſſit. Cum enim luna non ſolum ad terram attrahatur, ſed etiam ad ſolem, harumque virium neutra tam ſit parua, vt reſpectu ad alteram habito pro nulla haberi queat, problema hinc occurrit longe difficillimum, quo motus trium corporum ſe mutuo attrahentium inueſtigandi proponuntur: hicque trium virium ratio haberi debet, vnius, qua ipſa terra ad ſolem vrgetur, ſecundae, qua luna ad terram, et tertiae, qua luna ad ſolem ſollicitatur. Hoc igitur problema, ſi commode ſolui poſſet, determinatio motus lunae in promtu eſſet, verum hoc caſu defectu analyſeos, certaeque methodi huiusmodi intricatos calculos euoluendi, fit vt theoria vix plus circa motum lunae pateſaciat, quam ex obſeruationibus colligere licuit. Quicquid autem adhuc aſtronomi ex his theoriae tenebris deducere, et quaſi per tranſennam dignoſcere potuerunt, tam accurate cum experientia conſpirat, vt nullum prorſus dubium ſuperſit, quin vniuerſus lunae motus, cunctis concluſionibus, quae vnquam ex calculo formari queant, exactiſſime ſit reſponſurus. Neutonus, qui ipſe primus hoc negotium eſt adgreſſus, incredibile ſtudium in hac quaeſtione enodanda collocaſſe videtur, hocque ipſo non parum adiumenti in Aſtronomiam attuliſſe merito indicatur: tabulae enim aſtronomicae, quae ad eius mentem ſunt conditae multo propius verum lunae locum quouis tempore exhibent, quam reliquae. Interim tamen tantum abeſt, vt Neutonus opus quod ſuſcepit, confecerit, vt potius ſummas difficultates, quibus iſte calculus etiamnunc laborat, luculenter ob oculos ponat, atque cum cetera ſit obſcuriſſima atque maxima

xima caligine inuoluta, tum imprimis ea, quae de motu lineae nodorum et de variatione inclinationis ad eclipticam differuit, non vbique rigorem geometricum prae se ferre videntur. Qui autem post Neutonum huic eidem negotio se applicuerunt, non solum non vlterius sunt progressi, sed ne id quidem fere praestiterunt, in quo Neutonum satis feliciter praeuntem habuerunt.

§. 4. Saepenumero quoque ipse istum laborem tentaui, semper autem calculi taediosissimi difficultates me vel deterruerunt vel impediuerunt, quo minus saltem Neutonum assequerer. Neque vero tum adhuc ad discrepantiam orbitae lunaris ab ecliptica respexeram, ne statim ab initio obstacula nimis augerem, hincque mihi quidem recte colligere visus sum, si ipsius plani, in quo luna fertur, mutabilitatis rationem in calculum introducere voluissem, laborem penitus insuperabilem proditurum fuisse. Methodus autem, qua tum temporis eram vsus, impedimenta non mediocriter multiplicabat, resolutis enim viribus lunam vrgentibus, quemadmodum vulgo fieri solet, in tangentiales et normales, ex illis celeritatis lunae vel incrementum vel decrementum, ex his vero curuaturam orbitae inuestigaui; sicque ad aequationes sum deductus differentiales, quae non solum integratu erant difficillimae, sed etiamsi integrari facile potuissent, tamen adhuc longissime a perfecta et commoda motus determinatione fuissent remotae. In astronomia enim neque ipsa lunae celeritas, neque curuatura viae, in qua incedit, per se desideratur, sed calculum ita accommodari oportet, vt ad quoduis tempus, punctum coeli, in quo luna verſari videtur, eiuſque vera a terra diſtantia aſſignari poſſit; quae res ex illis, quas methodus immediate ſuppeditat, non niſi moleſtiſſimo computo deriuari poſſunt. His impedimentis probe perpenſis in eam cogitationem incidi, vtrum determinatio huiusmodi motuum non alia methodo tractari poſſet, quae non per memoratas celeritatis et curauturae ambages ad optatum finem perduceret? et, cum iam nonnullis problematibus mechanicis alias difficillimis ſingularem modum ea reſoluendi detexiſſem, quo ſimilia impedimenta maximam partem remouerentur, eandem methodum non ſine ingenti calculi contractione ad praeſens inſtitutum adhiberi poſſe perſpexi. Imprimis autem hoc modo lineae nodorum motum et inclinationis ad eclipticam variationem, quae res aliis methodis vix calculo comprehendi poſſunt, mihi ſatis commode definire licuit, neque dubito, quin eandem viam perſequendo reliqua motus lunae phaenomena multo felicius explicari queant.

§. 5. Quo autem vis et vſus huius methodi clarius perſpiciatur, expediet primo eius periculum in reſolutione problematis facilioris, quo duorum tantum corporum ſe mutuo attrahentium motus requiritur, feciſſe: cum enim hoc caſu reliquae methodi ſine difficultate in vſum vocari poſſint, eo facilius patebit, quantum ſubſidii a noua methodo in problemate multo abſtruſiori expectare queamus. Praeterea vero, quia motus lunae ſine motu ſolis cognoſci non poteſt, ob hoc ipſum neceſſe erit, vt ſolis motum eadem methodo ante definiam, quam complicatiſſimos lunae motus aggrediar: hocque modo non ſolum iſtius methodi

ſpeci-

ſpecimen, ex quo eius indoles intelligi poterit, exhibebitur, ſed etiam determinatio motus ſolis viam praeparabit ad motum lunae definiendum. Quanquam autem reuera terra circa ſolem circumfertur; tamen quoniam in aſtronomia non tam motus veri, quam apparentes ſpectantur, quaeſtionem ita proponamus, vt motus relatiuus determinari debeat, quo ſol ex terra, quae tanquam quieſcens ſpectatur, moueri cernitur. Hoc ergo caſu ſecundum praecepta mechanicae neceſſe eſt, vt primo motum, quo terra reuera progreditur, in oppoſita directione in ſolem transferamus: ſeu vt toti ſpatio, in quo ſol et terra continetur, motum aequalem et contrarium ei quo terra mouetur, imprimi concipiamus: quo pacto terra ad quietem redigetur. Deinde vero ne a viribus continuo ſollicitantibus terra ex hoc ſtatu deturbetur, ſimili modo requiritur, vt totum illud ſpatium quouis momento a viribus contrariis et aequalibus ſollicitari imaginemur; ſiue vt perpetuo in ipſum ſolem easdem vires, quibus terram impelli nouimus, ſed in directionibus contrariis mente transferamus. Haec eadem praecepta erunt obſeruanda, ſi deinceps noſtras inueſtigationes ad lunam quoque extendemus; ſemper ſcilicet, quia ſpectatorem in terra concipimus, eiusque reſpectu motus omnes diiudicamus, motum terrae tam in ſolem, quam lunam contrario modo inducere oportet; tum vero ſingulae vires, quibus terra ſollicitatur, pariter in contrariis directionibus tam ſoli quam lunae affingi debebunt. Hacque ratione tam in ſole, quam in luna eos ipſos motus obtinebimus, non quibus reuera mouentur, ſed quibus ſpectatori in centro terrae poſito et tanquam immobili conſiderato, moueri apparituri eſſent.

 §. 6.

Fig. 1.

§ 6. Sit igitur centrum terrae in G positum, eoque tanquam immobili spectato sol moueatur in linea curva AFf, ita vt planum tabulae planum eclipticae repraesentet. Sumatur in hoc plano linea fixa GA, ad quam quouis tempore locus solis, qui sit in F, per angulum AGF referatur; quem in finem linea GA vel ad apogaeum vel ad perigaeum solis commodissime ducetur. Elapso igitur tempore $= T$ peruenerit sol ex A in F, ponaturque angulus $AGF = r$, qui erit anomalia vera, dum anomalia media est angulus, qui se habet ad $360°$, vti est tempus T ad totum tempus periodicum, seu ad annum sidereum, qui est 365^d, 6^h, $8'$, $30''$. Ponatur porro distantia solis a terra $FG = v$, ductoque ex F ad rectam GA perpendiculo FP, si sinus totus vnitate designetur, erit $FP = v \sin. r$, et $GP = v \cos. r$. Vocetur autem breuitatis gratia $FP = v \sin. r = y$ et $GP = v \cos. r = x$. Quod si iam tempusculo infinite paruo dT sol elementum Ff conficiat, atque ex f ad AG pariter perpendicularis fp ducatur, et Fr atque fs rectae AG parallelae constituantur, habebitur $Pp = -dx = -dv \cos. r + vdr \sin. r$ et $fr = dy = dv \sin. r + vdr \cos. r$; hincque erit $Ff^2 = dx^2 + dy^2 = dv^2 + v^2 dr^2$: atque si recta Gf ducta concipiatur, erit trianguli minimi FGf area $= \frac{1}{2} vvdr$.

§ 7 Nunc vires sunt perpendendae, quibus motus solis in quouis puncto F perturbatur, ac primo quidem occurrit vis attractiua terrae, quae cum in superficie abeat in grauitatem naturalem, cuius effectus sunt notissimi, merito instar mensurae reliquarum virium attractiuarum assumitur. Posito ergo radio terrae $= g$, quia vis attracti-

va

va terrae in diſtantia a centro $= g$, aequalis eſt grauitati, quam vnitate deſignemus, in quacunque alia diſtantia puta $= v$, erit vis attractiua terrae $= \frac{gg}{vv}$; propterea quod haec vis quadratis diſtantiarum a centro reciproce eſt proportionalis; ſicque in propoſito caſu ſol in F ad terram in G ſecundum directionem FG ſollicitabitur vi acceleratrice $= \frac{gg}{vv}$. Vis autem ſolis ſe habet ad vim terrae, ſi diſtantiae ſint aequales, vt maſſa ſolis ad maſſam terrae: vnde ſi ponamus maſſam terrae $= G$, et maſſam ſolis $= F$, erit in diſtantia $= v$ vis attractiva ſolis $= \frac{Fgg}{Gvv}$, hacque ipſa vi terra in G ſolem verſus in F pelletur. Quoniam igitur ob terram in quiete conſideratam, vis qua terra ſollicitatur in ſolem ſub directione contraria transferri debet, ſol hinc in directione FG vrgebitur vi acceleratrice $= \frac{Fgg}{Gvv}$; et cum ante in eadem directione ſollicitari ſit repertus vi $= \frac{gg}{vv}$, nunc omnino in directione FG ſollicitabitur vi $= \frac{(F+G)gg}{Gvv}$. Ceterum hic notandum eſt, in hac diſquiſitione, quoties virium mentio occurrit, id ſemper de viribus acceleratricibus intelligendum eſſe; atque vim grauitatis acceleratricem perpetuo vnitate indicari, quod ideo monendum eſt, ne iſtae vires pro motricibus habeantur, quae ante per maſſam corporis mouendi diuidi debent, quam vis acceleratrix prodeat. Hic igitur quoniam ſtatim vires acceleratrices obtinemus, non opus eſt maſſas corporum mouendorum noſſe, cum omnia corpora, quantumuis ſi erint magna vel parua, ab eadem vi acceleratrice aequaliter accelerentur.

 §. 8.

§. 8. Quantus autem cuiusque vis acceleratricis sit effectus in alterando corporum motu ex primis mechanicae principiis facile intelligitur. Si enim corpus moueatur celeritate tanta, quantam acquirit corpus cadendo ex altitudine $= V$, atque interea, dum spatii elementum $= dX$ percurrit, sollicitetur in eadem directione, secundum quam mouetur vi acceleratrice $= P$ seu quae se habeat ad vim grauitatis vt P ad 1, tum vtique erit $dV = P\,dX$. Verum si praeterea temporis ratio sit habenda, atque tempusculum, quo spatiolum dX percurritur ponatur $= dT$, erit $\frac{dX}{dT}$ celeritati corporis proportionale, quae per radicem quadratam ex altitudine V exprimi potest. Cum autem vnitas, ad quam tempus referatur, sit arbitraria, ea ita assumi potest, vt fiat $\frac{dX}{dT} = \sqrt{V}$, sicque elementum temporis dT exprimatur per fractionem $\frac{dX}{\sqrt{V}}$ et ipsum tempus T per integrale $\int\frac{dX}{\sqrt{V}}$. Ostendi autem in meo tractatu de motu, si in expressione $\int\frac{dX}{\sqrt{V}}$ longitudines exhibeantur in partibus millesimis pedis rhenani, tum istam expressionem in numeris expositam, atque per 125 diuisam, praebituram esse tempus in minutis secundis. Quodsi ergo iste modus tempus exprimendi recipiatur, erit $dT = \frac{dX}{\sqrt{V}}$, ac propterea $\sqrt{V} = \frac{dX}{dT}$, vnde fit $V = \frac{dX^2}{dT^2}$, et si elementum temporis dT constans assumatur, erit $dV = \frac{2dX\,ddX}{dT^2}$: quo valore in aequatione $dV = P\,dX$ substituto, habebitur $\frac{2dX\,ddX}{dT^2} = P\,dX$, ideoque $2\,ddX = P\,dT^2$: seu differentiale secundum spatii emensi bis sumtum aequabitur producto ex vi acceleratrice P in quadratum elementi temporis interea elapsi. Hoc ita

se

ſe habet, ſi corpus ſecundum eandem directionem in qua mouetur, ſollicitetur, ſin autem ſollicitatio ſecundum directionem contrariam agat, tum erit $2\,d\,dX = -P\,dT^2$: vtroque autem caſu directio corporis a vi ſollicitante non variatur. Verum ſi vis oblique ageret in corpus, tum non ſolum celeritas, ſed etiam directio motus afficeretur. Hoc autem caſu in praeſente inſtituto non indigemus, quoniam tam motum corporis, quam ipſas vires ſollicitantes perpetuo ſecundum conſtantes directiones ſum reſoluturus, ita vt quiuis motus a nullis aliis viribus vnquam afficiatur, niſi quae eandem habeant directionem.

§. 9. Cum igitur ſol in directione Ff moueatur celeritate $= \frac{Ff}{dT}$, reſoluatur iſte motus in binos ſecundum directiones Fr et Fs, eritque illius celeritas $= \frac{Fr}{dT} = \frac{-dx}{dT}$ huius vero $= \frac{Fs}{dT} = \frac{dy}{dT}$. Nempe tempuſculo $d\,T$ ſol per motum priorem abſoluet ſpatiolum $Fr = -dx$, per poſteriorem vero ſpatiolum $Fs = dy$. Nunc ſimili modo vis ſollicitans $\frac{(F+G)gg}{Gv^2}$ ſecundum directiones Fr et FP reſoluatur, eritque vis ſecundum $Fr = \frac{(F+G)ggx}{Gv^3}$ et vis ſecundum $FP = \frac{-(F+G)ggy}{Gv^2}$ ex quibus per lemma praeced. §. praemiſſum ſequentes prodeunt aequationes.

$-2\,ddx - \frac{(F+G)ggx\,dT^2}{Gv^3}$ et $2\,ddy = -\frac{(F+G)ggy\,dT^2}{Gv^3}$

quarum ſi illa per y, haec vero per x multiplicetur, ambaeque aequationes addantur, habebitur $y\,ddx - x\,ddy = 0$, cuius integrale eſt $y\,dx - x\,dy = C\,dT$. At vero ob $y = v$ ſin. r et $x = v$ coſ. r erit $y\,dx - x\,dy = -v^2\,dr$ ob ſin. r^2 + coſ $r^2 = 1$, ideoque nacti ſumus hanc primam aequationem:

$$vv\,dr = C\,dT.$$

Dein-

Deinde binarum inuentarum aequationum multiplicetur prior per dx, posterior per dy, alteraque ab altera subtracta remanebit:

$$\frac{2dxddx + 2dyddy}{dT^2} = \frac{-(F+G)gg}{Gv^3}(xdx + ydy)$$

Cum autem sit $vv = xx + yy$ erit $xdx + ydy = vdv$ ideoque

$$\frac{2dxddx + 2dyddy}{dT^2} = \frac{-(F+G)ggdv}{Gv^2}$$

cuius integrale est: $\frac{dx^2 + dy^2}{dT^2} = \frac{(F+G)gg}{Gv} + a$. Supra autem notauimus esse $dx^2 + dy^2 = dv^2 + v^2 dr^2$, vnde fiet haec altera aequatio:

$$dv^2 + v^2 dr^2 = a dT^2 + \frac{(F+G)ggdT^2}{Gv}$$

quae cum priori $vvdr = CdT$ coniuncta ad datum quodvis tempus T determinabit ambas incognitas v et r, quae solae in astronomia desiderantur. Quia autem $\frac{1}{2} vvdr$ exprimit elementum areae AGF, fiet ipsa area $AGF = \frac{1}{2}\int vvdr = \frac{1}{2} CT$; vnde patet areas, quas sol circa terram emetiri videtur, temporibus esse proportionales, quam proprietatem Keplerus primus pro sole circa terram, ac pro omnibus planetis primariis circa solem obseruauit.

§. 10. Inuentis ergo his duabus aequationibus.

$vvdr = CdT$ et $dv^2 + v^2 dr^2 = \left(a + \frac{(F+G)gg}{Gv}\right) dT^2$ prior dat $dr = \frac{CdT}{vv}$, qui valor in altera substitutus praebebit:

$$dv^2 + \frac{C^2 dT^2}{v^2} = a dT^2 + \frac{(F+G)gg}{Gv} dT^2$$

Ponatur breuitatis gratia $\frac{(F+G)gg}{G} = cc$ eritque

$$v^2 dv^2 + C^2 dT^2 = av^2 dT^2 + ccv dT^2 \text{ siue}$$

$$dT = \frac{vdv}{\surd(-C^2 + ccv + av^2)}$$

hincque $dr = \frac{Cdv}{v\surd(-C^2 + ccv + av^2)}$ Ad

Ad conftantes definiendas, perpendantur cafus, quibus fit $dv = 0$, id quod in apogaeo ac perigaeo euenire oportet. Erit autem his cafibus $av^2 + ccv - C^2 = 0$, cuius aequationis, cum altera radix fit affirmatiua, altera negatiua diftantia autem v reuera nunquam negatiua fieri poffit: per fpicuum eft, fi radix affirmatiua perigaeum denotet, folem nunquam ad apogaeum peruenturum effe, vnde conftat, orbitam hoc cafu hyperbolam fore. Hoc autem accidit, fi a fuerit quantitas affirmatiua; quare vt ellipfin obtineamus, neceffe eft, vt a fit quantitas negatiua: namque reliqui coefficientes cc et C^2, quia funt quadrata, negatiui fieri nequeunt. Sit igitur $a = -a$, et aequatio $avv = ccv - CC$ hos dabit valores $v = \frac{cc \pm \sqrt{(c^4 - 4aCC)}}{2a}$; quorum minor dabit diftantiam perigaei folis a terra, quae erit $= \frac{cc - \sqrt{(c^4 - 4aCC)}}{2a}$ maior vero dabit $\frac{cc + \sqrt{(c^4 - 4aCC)}}{2a}$ diftantiam apogaei: fumma ergo $\frac{cc}{a}$ erit axis transuerfus, et differentia $\frac{\sqrt{(c^4 - 4aCC)}}{a}$ erit diftantia focorum, ita vt excentricitas futura fit $= \frac{\sqrt{(c^4 - 4aCC)}}{cc}$; et axis coniugatus $= \frac{2C}{\sqrt{a}}$, ideoque parameter feu latus rectum $= \frac{4CC}{cc}$. Ponamus axem transuerfum $= 2a$, et latus rectum $= 2b$; fiet littera ante adhibita $a = \frac{cc}{2a}$ et $4CC = 2bcc$, atque $C = c\sqrt{\frac{b}{2}}$. Aequationes ergo differentiales primum inuentae erunt:

$$vvdr = cdT\sqrt{\tfrac{b}{2}} \text{ et } dv^2 + v^2dr^2 = \frac{-ccdT^2}{2a} + \frac{ccdT^2}{v}.$$

Aequationes vero ex his erutae erunt.

$$dT = \frac{vdv\sqrt{a}}{c\sqrt{(-bv + 2av - vv)}} \text{ et } dr = \frac{dv\sqrt{ab}}{v\sqrt{(-bv + 2av - vv)}}$$

exiftente $cc = \frac{(A+C)cg}{G}$; excentricitas vero erit $= \sqrt{\frac{a-b}{a}}$

§. 11. Aequatio autem $dr = \frac{dv\sqrt{ab}}{v\sqrt{(-ab+2av-vv)}}$, si integretur, dabit $r = \mathrm{A\,cos.}\frac{(b-v)\sqrt{a}}{v\sqrt{(a-b)}}$, vnde fit cos. $r = \frac{(b-v)\sqrt{a}}{v\sqrt{(a-b)}}$, eritque r angulus, quem sol circa terram iam a perigaeo descripsit, si enim ponatur angulus $r = 0$, fiet cos. $r = 1 = \frac{(b-v)\sqrt{a}}{v\sqrt{(a-b)}}$; et $v = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{(a-b)}} = a - \sqrt{(aa-ab)}$, quae est distantia perigaei a terra. Quare si punctum A orbitae solaris denotet perigaeum, ex angulo AGF $= r$ seu anomalia vera inuenietur hinc distantia solis a terra $v = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\mathrm{cos.}r\sqrt{(a-b)}}$ atque si excentricitas $\sqrt{\frac{a-b}{a}}$ statuatur $= n$; fiet $v = \frac{b}{1+n\,\mathrm{cos.}r}$. Maneat $\sqrt{\frac{a-b}{a}} = n$, erit $a = \frac{b}{1-nn}$, atque altera aequatio transibit in hanc

$$dT = \frac{vdv\sqrt{2b}}{c\sqrt{(-bb+2bv-vv+nnvv)}}$$

vnde fit:

$$T = \frac{-\sqrt{2b}}{c(1-nn)}\sqrt{(-bb+2bv-(1-nn)vv)} + \frac{b\sqrt{2b}}{(1-nn)c}$$
$$\int\frac{dv}{\sqrt{(-bb+2bv-(1-nn)v^2)}} \text{ at } \int\frac{dv}{\sqrt{(-bb+2bv-(1-nn)vv)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-nn)}}\mathrm{A\,sin.}\frac{v(1-nn)-b}{nb}$$

seu $\int\frac{dv}{\sqrt{(-bb+2bv-(1-nn)vv)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-nn)}}\mathrm{A\,cos.}\frac{\sqrt{(1-nn)}}{nb}\sqrt{(-bb+2bv-(1-nn)v^2)}$. Sit A sin. $\frac{v(1-nn)-b}{nb} = \omega$ erit $v = \frac{nbv+b}{1-nn}$ et $\sqrt{(-bb+2bv-(1-nn)v^2)} = \frac{nb\,\mathrm{cos.}\omega}{\sqrt{(1-nn)}}$, vnde fit $T = \frac{b\omega\sqrt{2b}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}c} - \frac{nb\sqrt{2b}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}c}\mathrm{cos.}\,\omega$ siue $T = \frac{b\sqrt{2b}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}c}(\omega - n\,\mathrm{cos.}\,\omega)$, constans autem addi debet, vt posito $r = 0$ seu $v = \frac{b}{1+n}$ tempus euanescat, facto autem $v = \frac{b}{1+n}$ fit $\omega = \mathrm{A\,sin.} -1 = -\frac{\pi}{2}$, vnde oritur

$T = \frac{b\sqrt{2b}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}c}(\frac{\pi}{2} + \omega - n\,\mathrm{cos.}\,\omega)$ fit $\frac{\pi}{2} + \omega = \Phi$, erit

ω

$\omega = -\frac{\pi}{2} + \Phi$ et cos. $\omega =$ sin. Φ, ita vt sit:

$$T = \frac{b\sqrt{2b}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}c}(\Phi - n \text{ sin. } \Phi) = \frac{a\sqrt{2a}}{c}(\Phi - n \text{ sin. } \Phi)$$

Cum vero sit sin. $\omega = -$ cos. Φ, fiet $v = \frac{b - nb \cos. \Phi}{1-nn}$ $= a(1 - n \text{ cos. } \Phi)$ atque cos $r = \frac{\cos. \Phi - n}{1 - n \cos. \Phi}$: vnde ratio tabularum solarium facile colligitur.

§. 12. Expeditis hoc modo, quae ad motum solis spectant, et vnde vis methodi, qua vtor, clare perspicitur, ad lunam progrediar. Repraesentetur vt ante planum eclipticae ipso tabulae plano, in eoque sit G centrum terrae, quod tanquam fixum maneret, spectatur, et GA recta pro lubitu assumta fixa. Tempore quocunque T, ab initio quodam stato, elapso versetur sol in F, luna vero extra eclipticam in E, vnde ad planum eclipticae demittatur perpendiculum EM, atque ex M in GA porro normalis MP, iunganturque rectae GE et GM. Quibus factis angulus MGE dabit latitudinem lunae, anguli vero AGF et AGM sunt longitudines solis et lunae a puncto eclipticae fixo A computatae. Vocentur nunc distantia solis a terra GF $= f$ distantiae lunae a terra GE $= v$, et anguli AGF $= r$, AGM $= q$; et EGM $= p$, eritque EM $= v$ sin. p; GM $= v$ cos p; hincque porro PM $= v$ cos. p sin. q et GP $= v$ cos. p cos. q. Vocentur autem quoque lineae rectae, quae tanquam coordinatae spectantur, GP $= v$ cos. p cos. $q = x$; PM $= v$ cos. p sin. $q = y$ et ME $= v$ sin. $p = z$ vt sit $xx + yy + zz = vv$. Promoueatur porro luna tempusculo infinite paruo $= dT$ per orbitae suae elementum Ee, demissoque ex e in planum eclipticae perpendiculo em, et ex m in GA Fig. 2.

 normali

normali mp, compleantur rectangula $Mtem$; $Psmp$; ductaque Mr parallela ipſi GA, motus lunae reſoluetur ſponte in tres laterales, quorum duo erunt in plano eclipticae alter ſecundum Mr celeritate $= \frac{Mr}{dT} = \frac{-dx}{dT}$, alter ſecundum Ms celeritate $= \frac{Ms}{dT} = \frac{dy}{dT}$ tertii autem motus, quo luna a plano eclipticae recedit, directio erit Et, et celeritas $= \frac{Et}{dT} = \frac{dz}{dT}$.

§. 13. Conſideremus nunc quoque vires, quibus luna ſollicitatur. Ac primo quidem a terra vrgebitur ſol in directione FG vi $= \frac{gg}{ff}$; et luna in directione EG vi $= \frac{gg}{vv}$; vti ex ante expoſitis patet. Deinde poſita maſſa terrae $=$ G, ſi ſolis maſſa ſtatuatur $=$F, a ſole vrgebitur terra in directione GF $= \frac{Fgg}{Gff}$; et ducta recta EF poſitaque EF $= u$, luna ad ſolem ſollicitabitur in directione EF vi $= \frac{Fgg}{Guu}$. Denique ſi maſſa lunae ponatur $=$ E, a luna trahetur terra ſecundum directionem GE vi $= \frac{Egg}{Gvv}$, ſol vero a luna trahetur in directione EF vi $= \frac{Egg}{Guu}$; ſicque habentur vires, quibus ſol, terra et luna in ſe mutuo agunt, ex quibus hic eas, quae ſolem afficiunt, negligimus, propterea quod motum ſolis tanquam cognitum neque a luna perturbari aſſumimus. Vires autem, quibus terra incitatur, quoniam terram, tanquam in G quieſceret, ſpectamus, in directionibus contrariis in lunam ſunt transferendae, quemadmodum ſupra oſtendimus ſicque fiet, vt luna reuera a quatuor viribus impelli ſit conſideranda. Primo ſcilicet luna vrgebitur in directione EG vi $= \frac{gg}{vv}$, ſecundo in directione

EF

EF vi $= \frac{Fgg}{Guu}$, quae ſunt vires proprie in lunam agentes, tertio luna ſollicitabitur in directione EG vi $= \frac{Egg}{Gvv}$, et quarto ſi per E ducatur recta HEI ipſi FG parallela, luna ſollicitabitur in directione EI vi $= \frac{Fgg}{Gff}$. Hoc modo vires quae in lunam agunt ad tres directiones reducuntur; prima erit in directione EG $= \frac{(E+G)gg}{Gvv}$. Secunda in directione EF $= \frac{Fgg}{Guu}$; et tertia in directione EI $= \frac{Fgg}{Gff}$. Media vero in directione EF denuo reſolui poteſt ſecundum directiones EG et EH, eritque illa ſecundum EG $= \frac{Fggv}{Gu^3}$, et haec ſecundum EH $= \frac{Fggf}{Gu^3}$; vnde vires lunam afficientes ad duas directiones perducuntur. Primo ſcilicet luna trahetur in directione EG vi $= \frac{(E+G)gg}{Gv^2} + \frac{Fggv}{Gu^3}$; praeterea vero in directione EH vi $= \frac{Fggf}{Gu^3} - \frac{Fgg}{Gff} = \frac{Fgg}{G}\left(\frac{f}{u^3} - \frac{1}{ff}\right)$.

§. 14. Cum ſit angulus AGM $= q$, et angulus AGF $= r$, ponamus breuitatis gratia angulum FGM $= q - r = s$, qui diſtantiam lunae a ſole ſecundum longitudinem exhibebit, et quoniam angulus EGM $= p$, erit ex trigonometricis coſinus anguli EGF $= \text{coſ.}\,p \,.\, \text{coſ.}\,s$; hincque in triangulo FGE prodibit ex lateribus FG, EG cum angulo intercepto FGE tertium latus FE $= u = \surd(ff - 2fv\,\text{coſ.}\,p\,\text{coſ.}\,s + vv)$. Quare cum linea f reſpectu v ſit vehementer magna, erit proxime $\frac{1}{u^3} = (ff - 2fv\,\text{coſ.}\,p\,\text{coſ.}\,s + vv)^{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{f^3} + \frac{3\,v\,\text{coſ.}\,p\,\text{coſ.}\,s}{f^4} + \frac{3vv(5\,\text{coſ.}\,p^2\,.\,\text{coſ.}\,s^2 - 1)}{2f^5}$, cuius expreſſionis vltimus terminus iam eſt tantopere exiguus, vt in computo lunae ſine errore praetermitti poſſit, ſi enim ponamus parallaxin ſolis horizontalem $= 12''$, fiet diſtantia terrae a ſole media $= 17189g$ et cum diſtantia lunae a terra media ſit circiter $= 60g$; fiet $v : f = 1 : 286$, quae ratio eſt tam parua, vt eius poteſtates ſuperiores tuto reiici queant. Hancobrem erit vis qua luna in directione EG vrgetur $= \frac{(E+G)gg}{Gv^2} + \frac{Fggv}{Gf^3}$, et vis qua luna in directione EH vrgetur $= \frac{3Fggv \cos. p \cos. s}{Gf^3}$. Ne autem, antequam neceſſitas poſtulet, quicquam negligamus, tantiſper priores expreſſiones, in quibus littera u ineſt, retineamus.

§. 15. Reſoluamus nunc porro has vires ſecundum directiones, in quas motum lunae iam diſſoluimus, et vis in directione $EG = \frac{(E+G)gg}{Gv^2} + \frac{Fggv}{Gu^3}$ tres ſequentes vires ſuppeditabit; quarum

prima in directione $Mr = \frac{(F+G)ggx}{Gv^3} + \frac{Fggx}{Gu^3}$

ſecunda in directione $MP = \frac{(E+G)ggy}{Gv^3} + \frac{Fggy}{Gu^3}$

tertia in directione $EM = \frac{(E+G)ggz}{Gv^3} + \frac{Fggz}{Gu^3}$

Altera vis in directione $EH = \frac{Fggf}{Gu^3} - \frac{Fgg}{Gff}$, quia plano eclipticae eſt parallela, tertium motum in directione EM non afficit: transferatur ergo in planum eclipticae, et habebit directionem ML parallelam ipſi GF, ex qua reſultabit vis

in directione $Mr = \frac{-Fggf \cos. r}{Gu^3} + \frac{Fgg \cos. r}{Gff}$

in directione $Ms = \frac{Fggf \sin. r}{Gu^3} - \frac{Fgg \sin. r}{Gff}$.

His ergo viribus coniunctis terni lunae motus ita mutabuntur, vt ſecundum praecepta ſupra tradita oriantur tre iſtae aequationes:

2 ddx

$$\frac{2ddx}{dT^2} = -\frac{(E+G)ggx}{Gv^3} - \frac{Fggx}{Gu^3} + \frac{Fggf\cos.r}{Gu^3} - \frac{Fgg\cos.r}{Gff}$$
$$\frac{2ddy}{dT^2} = -\frac{(E+G)ggy}{Gv^3} - \frac{Fggy}{Gu^3} + \frac{Fggf\sin.r}{Gu^3} - \frac{Fgg\sin.r}{Gff}$$
$$\frac{2ddz}{dT^2} = -\frac{(E+G)ggz}{Gv^3} - \frac{Fggz}{Gu^3}.$$

Ex quibus eliminando terminos $\frac{(E+G)gg}{Gv^3}$ nascuntur tres sequentes aequationes.

$$\frac{2(zddx - xddz)}{dT^2} = \frac{Fggfz\cos.r}{Gu^3} - \frac{Fggz\cos.r}{Gff}$$
$$\frac{2(zddy - yddz)}{dT^2} = \frac{Fggfz\sin.r}{Gu^3} - \frac{Fggz\sin.r}{Gff}$$
$$\frac{2(yddx - xddy)}{dT^2} = \frac{Fggf(y\cos.r - x\sin.r)}{Gu^3} - \frac{Fgg(y\cos.r - x\sin.r)}{Gff}$$

Cum autem sit $x = v\cos.p\cos.q$ et $y = v\cos.p\sin.q$ erit $y\cos.r - x\sin.r = v\cos.p(\sin.q\cos.r - \cos.q\sin.r) = v\cos.p\sin.s$ ob $q - r = s$. Atque ob $z = v\sin.p$, erit $z\cos.r = v\sin.p\cos.r$ et $z\sin.r = v\sin.p\sin.r$. Ex quo inuentae aequationes transmutabuntur in has:

$$\frac{2d.(zdx - xdz)}{dT^2} = \frac{Fggv\sin.p\cos.r}{G}\left(\frac{f}{u^3} - \frac{1}{ff}\right)$$
$$\frac{2d.(zdy - ydz)}{dT^2} = \frac{Fggv\sin.p\sin.r}{G}\left(\frac{f}{u^3} - \frac{1}{ff}\right)$$
$$\frac{2d.(ydx - xdy)}{dT^2} = \frac{Fggv\cos.p\sin.s}{G}\left(\frac{f}{u^3} - \frac{1}{ff}\right)$$

§. 16. Cum autem sit $x = v\cos.p\cos.q$; $y = v\cos.p\sin.q$ et $z = v\sin.p$ erit vt sequitur:

$$dx = dv\cos.p\cos.q - vdp\sin.p\cos.q - vdq\cos.p\sin.q$$
$$dy = dv\cos.p\sin.q - vdp\sin.p\sin.q + vdq\cos.p\cos.q$$
$$dz = dv\sin.p + vdp\cos.p$$

Hinc itaque efficietur

$$zdx - xdz = -vvdp\cos.q - vvdq\sin.p\cos.p\sin.q$$
$$zdy - ydz = -vvdp\sin.q + vvdq\sin.p\cos.p\cos.q$$
$$ydx - xdy = -vvdq\cos.p^2$$

Quae expressiones si in aequationibus ante inuentis substi-

tuantur

tuantur, prodibunt tres aequationes inter quatuor variabiles T. v. p et q. quarum ope ternae ex quarta definiri poterunt. Praeterea autem ex his elementorum dx, dy et dz valoribus notari oportet, fore summam quadratorum eorundem $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dv^2 + v^2 dp^2 + v^2 dq^2 \text{cof.} p^2$; quae formula nouae aequationi ex primo inuentis tribus aequationibus eruendae inseruit. Si enim prima per dx secunda per dy et tertia per dz multiplicetur ob $xdx + ydy + zdz = vdv$ habebimus hanc aequationem

$$\frac{2dxddx + 2dyddy + 2dzddz}{dT^2} = \frac{d.(dv^2 + v^2 dp^2 + v^2 dq^2 \text{cof.} p^2)}{dT^2} =$$
$$- \frac{(E+G)ggdv}{Gv^2} - \frac{Fggvdv}{Gu^3} + \frac{Fgg}{G}\left(\frac{f}{u^3} - \frac{1}{ff}\right)(dx \text{ cof.} r + dy \text{ fin.} r).$$

Est vero $dx \text{cof.} r + dy \text{fin.} r = dv \text{cof.} p \text{ cof.} s - vdp \text{ fin.} p \text{ cof.} s - vdq \text{cof.} p \text{ fin.} s$ quae cum superioribus coniuncta inuestigationem orbitae lunaris faciliorem reddet.

17 Quoniam vero hic non tam motus lunae ipsos, quam lineae nodorum motionem et inclinationis ad eclipticam variationem indagare constitui, hae duae res imprimis mihi erunt considerandae. Dum igitur luna orbitae suae elementum Ee percurrit, sit recta G☊ linea nodorum, seu intersectio plani eclipticae et plani per punctum G et elementum Ee producti: voceturque angulus AG☊ $= \Phi$. Porro ex M ad G☊ ducatur normalis MQ iunctaque EQ erit angulus EQM inclinationi orbitae lunaris ad eclipticam aequalis. Sit igitur iste angulus EGM $= \theta$; atque ob angulum ☊GM $= q - \Phi$, erit MQ $= v \text{cof.} p \text{ fin} (q - \Phi)$ et GQ $= v \text{ cof.} p \text{ cof.} (q - \Phi)$: vnde fit $\frac{ME}{MQ} = \frac{v \text{ fin.} p}{v \text{ cof.} p \text{ fin.} (q - \Phi)} = \text{tang.}\ \theta$, seu $\text{tang.}\ \theta = \frac{\text{tang.} p}{\text{fin.} (q - \Phi)}$. Quoniam vero positio lineae nodo-

nodorum et inclinatio ad ambo puncta E et e aeque pertinent, manifestum est, differentiatis p et q angulos Φ et θ inuariatos manere debere: hinc obtinetur ex aequatione $\text{tang.}\,\theta = \frac{\text{tang.}\,p}{\text{sin.}\,(q-\Phi)}$ differentiando.

$$0 = \frac{dp}{\text{cos.}\,p^2 \cdot \text{sin.}\,(q-\Phi)} - \frac{dq\,\text{tang.}\,p\,\text{cos.}\,(q-\Phi)}{\text{sin.}\,(q-\Phi)^2}$$

vnde oritur $dp = \frac{dq\,\text{sin.}\,p\,\text{cos.}\,p\,\text{cos.}\,(q-\Phi)}{\text{sin.}\,(q-\Phi)}$ quo valore supra substituto fit

$$zdx - xdz = -\frac{vvdq\,\text{sin.}\,p\,\text{cos.}\,p\,\text{cos.}\,\Phi}{\text{sin.}\,(q-\Phi)}$$
$$zdy - ydz = -\frac{vvdq\,\text{sin.}\,p\,\text{cos.}\,p\,\text{sin.}\,\Phi}{\text{sin.}\,(q-\Phi)}$$
$$ydx - xdy = -vvdq\,\text{cos.}\,p$$

§. 18. Substituantur iam hi valores in aequationibus supra inuentis eritque:

$$d\,.\,\frac{vvdq\,\text{sin.}\,p\,\text{cos.}\,p\,\text{cos.}\,\Phi}{\text{sin.}\,(q-\Phi)} = \frac{FggvdT^2\,\text{sin.}\,p\,\text{cos.}\,r}{2G}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$
$$d\,.\,\frac{vvdq\,\text{sin.}\,p\,\text{cos.}\,p\,\text{sin.}\,\Phi}{\text{sin.}\,(q-\Phi)} = \frac{FggvdT^2\,\text{sin.}\,p\,\text{sin.}\,r}{2G}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$
$$d\,.\,vvdq\,\text{cos.}\,p^2 = \frac{FggvdT^2\,\text{cos.}\,p\,\text{sin.}\,s}{2G}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$

Vel differentialibus expeditis, et per v vbique diuisione instituta

$$\frac{2dvdq\,\text{sin.}\,p\,\text{cos.}\,p\,\text{cos.}\,\Phi}{\text{sin.}\,(q-\Phi)} + vd\,.\,\frac{dq\,\text{sin.}\,p\,\text{cos.}\,p\,\text{cos.}\,\Phi}{\text{sin.}\,(q-\Phi)} = \frac{FggT^2\,\text{sin.}\,p\,\text{cos.}\,r}{2G}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$
$$\frac{2dvdq\,\text{sin.}\,p\,\text{cos.}\,p\,\text{sin.}\,\Phi}{\text{sin.}\,(q-\Phi)} + vd\,.\,\frac{dq\,\text{sin.}\,p\,\text{cos.}\,p\,\text{sin.}\,\Phi}{\text{sin.}\,(q-\Phi)} = \frac{FggdT^2\,\text{sin.}\,p\,\text{sin.}\,r}{2G}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$
$$2dvdq\,\text{cos.}\,p^2 + vd\,.\,dq\,\text{cos.}\,p^2 = \frac{FggdT^2\,\text{cos.}\,p\,\text{sin.}\,s}{2G}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$

quae transformantur in has:

$$\frac{2dv}{v} + d\,.\,l\,\frac{dq\,\text{sin.}\,p\,\text{cos.}\,p\,\text{cos.}\,\Phi}{\text{sin.}\,(q-\Phi)} = \frac{FggdT^2\,\text{cos.}\,r\,\text{sin.}\,(q-\Phi)}{2Gvdq\,\text{cos.}\,p\,\text{cos.}\,\Phi}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$
$$\frac{2dv}{v} + d\,.\,l\,\frac{dq\,\text{sin.}\,p\,\text{cos.}\,p\,\text{sin.}\,\Phi}{\text{sin.}\,(q-\Phi)} = \frac{FggdT^2\,\text{sin.}\,r\,\text{sin.}\,(q-\Phi)}{2Gvdq\,\text{cos.}\,p\,\text{sin.}\,\Phi}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$
$$\frac{2dv}{v} + dldq\,\text{cos.}\,p^2 = \frac{FggdT^2\,\text{sin.}\,s}{2Gvdq\,\text{cos.}\,p}\left(\frac{1}{ff} - \frac{f}{u^3}\right)$$

Harum ſi binae a ſe inuicem ſubtrahantur, remanebunt:

$d.l\,\text{tang}\,\Phi = \frac{FggdT^2\,\sin.(r-\Phi)\sin.(q-\Phi)}{2Gvdq\,\cos.p\,\sin.\Phi\,\cos.\Phi}\left(\frac{1}{ff}-\frac{f}{u^3}\right)$

$d.l\frac{\text{tang}.p\,\sin.\Phi}{\sin.(q-\Phi)} = \frac{FggdT^2(\sin.r\,\sin.(q-\Phi)-\sin.s\,\sin.\Phi)}{2Gvdq\,\cos.p\,\sin.\Phi}\left(\frac{1}{ff}-\frac{f}{u^3}\right)$

Cum autem ſit ſin. A . ſin. B $= \frac{1}{2}$ coſ. (A − B) − $\frac{1}{2}$ coſ. (A + B) erit, ſin. r ſin. $(q-\Phi) = \frac{1}{2}$ coſ. $(s-\Phi)$ − $\frac{1}{2}$ coſ. $(q+r-\Phi)$ et ſin. s − ſin. $\Phi = \frac{1}{2}$ coſ. $(s-\Phi)$ − $\frac{1}{2}$ coſ. $(q-r+\Phi)$ ob $s = q-r$: ideoque ſin. r ſin. $(q-\Phi)$ − ſin. s ſin. $\Phi = \frac{1}{2}$ coſ. $(q-r+\Phi)$ − $\frac{1}{2}$ coſ. $(q+r-\Phi) =$ ſin. q ſin. $(r-\Phi)$; quia viciſſim eſt $\frac{1}{2}$ coſ A − $\frac{1}{2}$ coſ. B = ſin. $\frac{A+B}{2}$. ſin. $\frac{B-A}{2}$ Quocirca poſterior aequatio transmutabitur in hanc:

$d.l\frac{\text{tang}.p\,\sin.\Phi}{\sin.(q-\Phi)} = \frac{FggdT^2\,\sin.q\,\sin.(r-\Phi)}{2Gvdq\,\cos.p\,\sin.\Phi}\left(\frac{1}{ff}-\frac{f}{u^3}\right)$

§. 19. Cum igitur ſit $d.l\,\text{tang}.\Phi = \frac{d\Phi}{\sin.\Phi\,\cos.\Phi}$ prior ambarum aequationum inuentarum abibit in hanc,

$d\Phi = \frac{FggdT^2\,\sin.(r-\Phi)\sin.(q-\Phi)}{2Gvdq\,\cos.\Phi}\left(\frac{1}{ff}-\frac{f}{u^3}\right)$

Hucusque ergo aequatione perducta conſideremus quod iam ſupra inuenimus, eſſe proxime $\frac{1}{u^3} = \frac{1}{f^3} + \frac{3v\cos.p\cos.s}{f^4}$. ideoque $\frac{1}{ff} = -\frac{f}{u^3} = -\frac{3v\cos.p\,\cos.s}{f^3}$, quo valore introducto habebimus: $d\Phi = -\frac{3FggdT^2\cos.s\,\sin.(r-\Phi)\sin.(q-\Phi)}{2Gf^3dq}$

quia ergo celeritas lineae nodorum exprimitur per $\frac{d\Phi}{dT}$. erit $\frac{d\Phi}{dT} = -\frac{3FggdT\cos.s\,\sin.(r-\Phi)\sin.(q-\Phi)}{2Gf^2dq}$

vbi notandum eſt, eſſe $\frac{dq}{dT}$ celeritatem lunae ſecundum longitudinem. Hinc igitur erit celeritas lineae nodorum retrograda directe, vt coſinus diſtantiae lunae a ſole, ſinus diſtantiae ſolis a nodo, et ſinus diſtantiae lunae a nodo coniunctim, reciproce vero, vt cubus diſtantiae

ſolis

ſolis a terra, et celeritas lunae ſecundum longitudinem, ita vt motus lineae nodorum ab his quinque rebus memoratis pendeat. Haec expreſſio mirifice congruit cum determinatione Neutoni, quam tradit prop. XXX. lib. III. Princip. et quia hinc quouis momento celeritas lineae nodorum aſſignari poteſt, ſimul patebit motus horarius nodorum; propterea quod tempus vnius horae ſine errore pro elemento temporis $d\mathrm{T}$ ſumi poteſt. Si enim ponamus, ſolem motu medio in diſtantia a terra mediocri reuolui, quae diſtantia mediocris ſit $= a$, ponamusque $\frac{(\mathrm{F}+\mathrm{G})gg}{\mathrm{G}} = cc$, et tempuſculo $= d\mathrm{T}$ ſolem angulum conficere $= d\omega$ erit per §. 11: $d\mathrm{T} = \frac{a\,d\omega\sqrt{2a}}{c}$ et $d\mathrm{T}^2 = \frac{2a^3 d\omega^2}{cc} = \frac{2\mathrm{G}a^3 d\omega^2}{(\mathrm{F}+\mathrm{G})gg}$, qui valor in ſuperiori aequatione ſubſtitutus dabit $d\Phi = -\frac{3\mathrm{F}a^3 d\omega^2}{(\mathrm{F}+\mathrm{G})f^3 dq}$ coſ. s. ſin. $(r-\Phi)$ ſin. $(q-\Phi)$ ex qua expreſſione, ſi $d\omega$ ſumatur pro motu horario medio ſolis nempe $2', 27'', 50''', 37''''$ et dq pro motu horario lunae vero ſecundum longitudinem, tum $d\Phi$ dabit motum horarium verum nodorum lunae.

§. 20. Secundum Neutonum eſt ratio F ad G = 227512 : 1 vnde pro fractione $\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F}+\mathrm{G}}$ tuto vnitas ſcribi poterit: eritque ergo $d\Phi = -\frac{3a^3 d\omega^2}{f^3 dq}$ coſ. s ſin. $(r-\Phi)$ ſin. $(q-\Phi)$, Quo hinc facilius motum nodorum eruamus, ponamus primum tam ſolem quam lunam circa terram motu vniformi moueri, eritque $f = a$; et dq denotabit motum medium horarium lunae ſecundum longitudinem, eritque $dq = 32', 56'', 27''', 13^{\mathrm{IV}}$, vnde ob $d\omega = 2', 27'', 50''', 37''''$, fiet $d\omega = 532237^{\mathrm{IV}}$ et $dq = 7115233^{\mathrm{IV}}$ ideoque $\frac{3\,d\omega^2}{dq} = 119437^{\mathrm{IV}} = 33'', 10''', 37^{\mathrm{IV}}$

 ita

ita vt ſit motus horarius nodorum. $d\Phi = -\cos. s \sin. (r-\Phi) \sin. (q-\Phi)$, 33″, 10‴, 37^{IV}. Nodi ergo celerrime mouentur, ſi ſinguli iſti ſinus ſinui toti fiant aequales, quod primum euenit, ſi luminaria fuerint in coniunctione, et linea nodorum cum recta ad ſolem ducta GF angulum rectum conſtituat; tum vero idem contingit, ſi luminaria fuerint in oppoſitione, et linea nodorum ad GF pariter normalis: vtroque caſu linea nodorum regreditur ſingulis horis 33″, 10‴, 37^{IV}; hicque eſt motus celerrimus retrogradus lineae nodorum. Tum vero motus nodorum prorſus euaneſcit tribus caſibus, primo ſi luminaria quadrato aſpectu ſe mutuo aſpiciant, ſecundo ſi ſol, et tertio, ſi luna in ipſa linea nodorum verſetur. Fieri vero etiam poteſt, vt nodi in conſequentia progrediantur, quod euenit, ſi $\cos. s \sin. (r-\Phi) \sin. (q-\Phi)$ negatiuum induit valorem; qui, quantus euadere poſſit, dum fit maximus, per methodum maximorum et minimorum inuenietur. Apparebit autem hoc euenire, primo ſi ambo luminaria ſextilem aſpectum teneant, et linea nodorum angulum FGE biſariam ſecet, ſecundo ſi luminaria in trigono fuerint conſtituta, et linea nodorum complementum anguli FGE ad duos rectos biſecet: vtroque caſu celeritas nodorum in conſequentia fiet maxima, et quia ſinguli ſinus ſemiſſi radii fuerint aequales, motus horarius maximus in conſequentia erit octaua pars motus celerrimi in antecedentia, atque id circo = 4″, 8‴, 50⁗.

§. 21. Cum igitur nodi multo celerius et ſaepius in antecedentia regrediantur, quam motu contrario in con-

consequentia, hinc efficietur motus nodorum retrogradus; ad quem accurate definiendum necesse est, vt aequationis supra inuentae integrale inuestigemus, hoc enim reperto facile erit ad quoduis tempus positionem lineae nodorum assignare. Hunc in finem tam motum verum solis quam lunae in calculum introduci oportet. Sit ergo distantia media solis a terra $= a$, excentricitas $= n$, et tempore proposito anomalia excentrica solis $= \varrho$; quoniam angulus ω supra ad motum solis medium designandum est assumtus, erit primo $d\varrho\,(1 - n\,\text{cos}.\,\varrho) = d\omega$ ideoque $d\varrho = d\omega\,(1 + n\,\text{cos}.\,\varrho)$ neglectis terminis, in quibus fractio n plures obtinet dimensiones, porro cum sit anomalia vera proxime $= \varrho + n\,\text{fin}.\,\varrho$ erit $dr = d\varrho\,(1 + n\,\text{cos}.\,\varrho)$ ideoque $dr = d\omega\,(1 + 2n\,\text{cos}.\,\varrho)$ atque $f = a\,(1 - n\,\text{cos}.\,\varrho)$. Deinde quamuis motus lunae non sit adeo certus, ponamus eam in ellipsi vniformiter mobili circa terram ferri, discrepantia enim huius hypothesis a veritate in praesenit negotio non nisi minimum et prorsus insensibilem errorem parere potest. Sit ergo distantia lunae a terra media $= \alpha$; excentricitas $= m$, anomalia excentrica $= \xi$, et distantia vera a terra $= v$; sit porro motus medius lunae ad motum medium terrae seu solis vt λ ad 1, erit vti ex obseruationibus constat $\lambda = 13,3685$. Hinc orietur $d\xi\,(1 - m\,\text{cos}.\,\xi) = \lambda\,d\omega$ ideoque $d\xi = \lambda\,d\omega\,(1 + m\,\text{cos}.\,\xi)$, et anomalia vera $= \xi + m\,\text{fin}.\,\xi$; vnde si motus absidum medium statuatur ad motum medium solis vt x ad 1, vbi ex motu apogaei medio fit $x = 0,112996$, cuius motus si ratio habeatur, fiet $dq = \lambda\,d\omega + 2\,(\lambda - x)\,m\,d\omega\,\text{cof}.\,\xi$. His

 ergo

ergo valoribus in ſuperiori aequatione ſubſtitutis fit

$$d\,\Phi \frac{-3\,d\omega}{(1-n\,cof.\,\rho)^3\,(\lambda+2(\lambda-\varkappa)m\,cof.\,\xi)}\,\text{cof.}\,(q-r)\,\text{ſin.}\,(r-\Phi)\,\text{ſin.}\,(q-\Phi)$$

vbi notandum eſt anomalias excentricas ϱ et ξ non ab apogaeo vt vulgo fieri ſolet, ſed a perigaeo eſſe acceptas.

§. 22. Sublatis autem fractionibus et neglectis terminis, in quibus excentricitates m et n vtpote valde paruae, plures habent dimenſiones, habebitur:

$$d\,\Phi = \frac{3\,d\omega}{\lambda}\,(1+3\,n\,\text{cof.}\,\varrho)\left(1-\frac{2(\lambda-\varkappa)m}{\lambda}\,\text{cof.}\,\xi\right)\text{cof.}\,(q-r)\,\text{ſin.}\,(r-\Phi)\,\text{ſin.}\,(q-\Phi)$$

cuius integrale vt indagemus, conſideremus quantitatem $(1+3\,n\,\text{cof.}\,\varrho)\left(1-\frac{2(\lambda-\varkappa)m}{\lambda}\,\text{cof.}\,\xi\right)$ tanquam conſtantem, quoniam nunquam ſenſibiliter ab vnitate diſcrepat, ſitque breuitatis gratia:

$$(1+3\,n\,\text{cof.}\,\varrho)\left(1-\frac{2(\lambda-\varkappa)m}{\lambda}\,\text{cof.}\,\varrho\right)=i \text{ erit}$$

$$d\,\Phi = \frac{-3\,i\,d\omega}{\lambda}\,\text{cof.}\,(q-r)\,\text{ſin.}\,(r-\Phi)\,\text{ſin.}\,(q-\Phi)$$

Quoniam vero, vt ſupra vidimus, eſt ſin. A ſin. B $= \frac{1}{2}$ cof. (B − A − $\frac{1}{2}$ cof. (A + B) erit ſin. $(r-\Phi)$ ſin. $(q-\Phi)$ $= \frac{1}{2}$ cof. $(q-r) - \frac{1}{2}$ cof. $(q+r-2\Phi)$, quo valore ſubſtituto erit

$$d\,\Phi = \frac{-3\,i\,d\omega}{2\lambda}\left(\text{cof.}\,(q-r)\,\text{cof.}\,(q-r)-\text{cof.}\,(q-r)\,\text{cof.}\,(q+r-2\Phi)\right)$$

Porro cum ſit cof. A cof B $= \frac{1}{2}$ cof. (B − A) $+ \frac{1}{2}$ cof. (B + A) fiet:

$$\text{cof.}\,(q-r)\,\text{cof.}\,(q-r) = \tfrac{1}{2} + \text{cof.}\,2\,(q-r)$$

$$\text{cof.}\,(q-r)\,\text{cof.}\,(q+r-2\,\Phi) = \tfrac{1}{2}\,\text{cof.}\,2\,(r-\Phi) + \tfrac{1}{2}\,\text{cof.}\,2\,(q-\Phi)$$

ideoque habebimus:

$$d\Phi = \frac{-3\,i\,d\omega}{4\lambda}\left(1+\text{cof.}\,2\,(q-r)-\text{cof.}\,2\,(r-\Phi)-\text{cof.}\,2\,(q-\Phi)\right).$$

Quoniam nouimus, variabilitatem ipſius Φ longe minorem eſſe, quam ipſorum q et r, fingamus initio angulum ſum Φ eſſe conſtantem in his coſinibus, et cum proxime ſit $dq = \lambda d\omega$ et $dr = d\omega$ prodibit hoc integrale:

$$\Phi = C - \frac{3i}{4\lambda}\left(\omega + \frac{\sin. 2(q-r)}{2(\lambda-1)} - \frac{\sin. 2(r-\Phi)}{2} - \frac{\sin. 2(q-\Phi)}{2\lambda}\right)$$

quod autem adhuc multiplici correctione indiget, primo quod angulum Φ conſtantem aſſumſimus, deinde quod ſumſimus $dq = \lambda d\omega$ et $dr = d\omega$ cum reuera ſit $dq = \lambda d\omega + 2(\lambda - \varkappa) m d\omega \cos. \xi$ et $dr = d\omega + 2 n d\omega \cos. \varrho$ tertio vero quod aſſumſimus quantitatem i conſtantem quae reuera eſt variabilis.

§. 23. Sit valor iſte pro Φ inuentus veritati iam ſatis propinquus $= P$ ita vt ſit

$$P = C - \frac{3i}{4\lambda}\left(\omega + \frac{\sin. 2(q-r)}{2(\lambda-1)} - \frac{\sin. 2(r-\Phi)}{2} - \frac{\sin. 2(q-\Phi)}{2\lambda}\right).$$

Quo iam correctio a variabilitate ipſius Φ oriunda inueniatur, differentietur P poſito ſolo Φ variabili, ſitque differentiale $= Q d\Phi$, erit vti ex natura integralium patet $\Phi = P - \int Q\, d\Phi$. At facta hac differentiatione fiet:

$$Q d\Phi = \frac{3 i d\Phi}{4\lambda}\left(\cos. 2(r-\Phi) - \frac{\cos. 2(q-\Phi)}{\lambda}\right)$$

Subſtituatur hic loco $d\Phi$ valor ante inuentus; eritque

$$Q d\Phi = \frac{-9ii}{16\lambda^2} d\omega \left(\begin{array}{r} \cos. 2(r-\Phi) + \cos. 2(r-\Phi)\cos. 2(q-r) - \cos. 2(r-\Phi)\cos. 2(r-\Phi) \\ - \cos. 2(r-\Phi)\cos. 2(q-\Phi) \end{array}\right)$$
$$+ \frac{9ii}{16\lambda^3} d\omega \left(\begin{array}{r} \cos. 2(q-\Phi) + \cos. 2(q-\Phi)\cos. 2(q-r) - \cos. 2(q-\Phi)\cos. 2(r-\Phi) \\ - \cos. 2(q-\Phi)\cos. 2(q-\Phi) \end{array}\right)$$

At per reductionem ſupra adhibitam, qua erat $\cos. A \cos. B = \frac{1}{2}\cos. (B - A) + \frac{1}{2}\cos. (B + A)$ fiet:

$$Q d\Phi = \frac{+9ii}{16\lambda^2} d\omega \left(\begin{array}{r} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos. 4(r-\Phi) - \cos. 2(r-\Phi) - \frac{1}{2}\cos. 2(q-2r+\Phi) - \frac{1}{2}\cos. 2(q-\Phi) \\ + \frac{1}{2}\cos. 2(q-r) + \frac{1}{2}\cos. 2(q+r-2\Phi) \end{array}\right)$$
$$\frac{-9ii}{16\lambda^3} d\omega \left(\begin{array}{r} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos. 4(q-\Phi) - \cos. 2(q-\Phi) - \frac{1}{2}\cos. 2(r-\Phi) - \frac{1}{2}\cos. 2(2q-r-\Phi) \\ + \frac{1}{2}\cos. 2(q-r) + \frac{1}{2}\cos. 2(q+r-2\Phi) \end{array}\right)$$

Si

Si nunc iterum vt ante in his angulis, quorum cosinus occurrunt, Φ tanquam constans spectetur ac sumatur $dq = \lambda d\omega$ et $dr = d\omega$ fiet integrando:

$$+ \int Q d\Phi = \frac{9ii}{16\lambda^2}\left(\tfrac{1}{2}\omega + \frac{\sin.4(r-\Phi)}{8} - \frac{\sin.2(r-\Phi)}{2} - \frac{\sin.2(q-2r+\Phi)}{4(\lambda-2)} \right.$$
$$\left. - \frac{\sin.2(q-\Phi)}{4\lambda} + \frac{\sin.2(q-r)}{4(\lambda-1)} + \frac{\sin.2(q+r-2\Phi)}{4(\lambda+1)}\right)$$
$$\frac{-9ii}{16\lambda^3}\left(\tfrac{1}{2}\omega + \frac{\sin.4(q-\Phi)}{8\lambda} - \frac{\sin.2(q-\Phi)}{2\lambda} - \frac{\sin.2(r-\Phi)}{4} \right.$$
$$\left. - \frac{\sin.2(2q-r-\Phi)}{4(2\lambda-1)} + \frac{\sin.2(q-r)}{4(\lambda-1)} + \frac{\sin.2(q+r-2\Phi)}{4(\lambda+1)}\right)$$

quae quantitas ad superiorem valorem ipsius P addi debet, vt prodeat valor ipsius Φ per variabilitatem ipsius Φ correctus. Perspicuum autem hic est plerosque terminos ob λ numerum $= 13,3685$ fieri vehementer parvos. Maximus enim inter sinus nempe $\frac{9ii}{32\lambda^2}\sin 2(r-\Phi)$ quando iste sinus fit radio aequalis, praebet tantum circiter $5'$. Quia vero ω data quantitate maius fieri potest, isti termini negligi nequeunt. Hinc itaque neglectis terminis nimis paruis fiet:

$$\Phi = C - \frac{3i\omega}{4\lambda}\left(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{8\lambda^2}\right.$$
$$- \frac{3i\sin.2(q-r)}{8\lambda(\lambda-1)}\left(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{8\lambda^2}\right)$$
$$+ \frac{3i\sin.2(r-\Phi)}{8\lambda}\left(1 - \frac{3}{4\lambda} - \frac{3}{8\lambda^2}\right) + \frac{9}{128\lambda^2}\sin.4(r-\Phi)$$
$$+ \frac{3i\sin.2(q-\Phi)}{8\lambda^2}\left(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{4\lambda^2}\right)$$

posito scilicet in terminis exiguis $i = 1$.

§. 24. Quia autem differentialia ipsorum q et r hactenus non sunt assumta completa, inquiramus, quanta correctio exinde oriatur. Hancobrem differentiemus primo quantitatem P posito solo q variabili, et loco dq scribamus $2(\lambda-\varkappa)\mathrm{m}\,d\omega\,\mathrm{cos}.\,\xi$ seu ob $\varkappa$ respectu λ satis parvum

vum ponamus $dq = 2\lambda m d\omega \cos.\xi$, eritque

$$dP = \frac{-3i}{4\lambda} d\omega \left(\frac{2\lambda m \cos.\xi}{\lambda - 1} \cos.2(q-r) + 2m \cos.\xi \cos.2(q-\Phi) \right)$$

cuius integrale ſubtrahi debet a iam inuento. Productis autem his coſinuum ad ſimplices coſinus reductis fiet

$$dP = \frac{-3imd\omega}{4\lambda} \left(\frac{\lambda}{\lambda-1} \cos.(2q-2r-\xi) + \frac{\lambda}{\lambda-1} \cos(2q-2r+\xi) + \cos(2q-\xi-2\Phi) + \cos(2q+\xi-2\Phi) \right)$$

Cum iam proxime ſit $dq = \lambda d\omega$ et $d\xi = \lambda d\omega$ fiet integrale =

$$\frac{-3im}{4\lambda} \left(\frac{\sin.(2q-2r-\xi)}{\lambda-1} + \frac{\sin.(2q-2r+\xi)}{3(\lambda-1)} + \frac{\sin.(2q-\xi-2\Phi)}{\lambda} + \frac{\sin.(2q+\xi-2\Phi)}{3\lambda} \right)$$

quae expreſſiones, cum ſit $m = 0,1414$, dum fiunt maximae vix duo minuta producunt. Poſito ergo $i = 1$, ad expreſſionem ſupra inuentam inſuper addi debet.

$$\frac{3m}{4\lambda} \left(\frac{4\sin.2(q-r)\cos.\xi - 2\cos.2(q-r)\sin.\xi}{3(\lambda-1)} + \frac{4\sin.2(q-\Phi)\cos.\xi - 2\cos.2(q-\Phi)\sin.\xi}{3\lambda} \right)$$

Simili modo differentietur P poſito tantum r variabili, at pro dr ponatur $2nd\omega \cos.\varrho$; prodibitque

$$dP = \frac{-3i}{4\lambda} \left(\frac{-2nd\omega \cos.\rho}{\lambda-1} \cos.2(q-r) + 2nd\omega \cos.\varrho \cos.2(r-\Phi) \right) \text{ ſeu}$$

$$dP = \frac{-3ind\omega}{4\lambda} \left(\frac{-\cos.(2q-2r-\rho) - \cos.(2q-2r+\rho)}{\lambda-1} + \cos(2r-\varrho-2\Phi) + \cos(2r+\varrho-2\Phi) \right)$$

cuius integrale ob $dr = d\omega$ et $d\varrho = d\omega$ erit.

$$-\frac{3in}{4\lambda} \left(\frac{\sin.(2q-2r-\varrho)}{3(\lambda-1)} + \frac{\sin.(2q-2r+\varrho)}{\lambda-1} + \sin.(2r-\varrho-2\Phi) + \frac{\sin.(2r+\varrho-2\Phi)}{3} \right)$$

Ergo ex hoc capite ad valorem ipſius Φ ante inuentum inſuper addi debebit

$$\frac{3n}{4\lambda} \left(\frac{4\sin.2(q-r)\cos.\varrho + 2\cos.2(q-r)\sin.\varrho}{3(\lambda-1)} + \frac{4\sin.2(r-\Phi)\cos.\varrho - 2\cos.2(r-\Phi)\sin.\varrho}{3} \right)$$

§. 25. Reſtat denique vt correctionem ex variabilitate ipſius i oriundam inueſtigemus. Quoniam ergo eſt $i = 1 + 3n\cos.\varrho - \frac{2(\lambda-\varkappa)}{\lambda} m \cos.\xi$ erit $di = -3nd\omega \sin.\varrho + 2(\lambda-\varkappa) m d\omega \sin.\xi$. Differentiato ergo ipſo P poſito tantum i variabili, proueniet

$$dP = + \frac{3d\omega}{4\lambda}\Big(+3n\omega\sin.\varrho - \frac{3n\sin.\varrho\sin.2(q-r)}{2(\lambda-1)} + \frac{3n\sin.\varrho\sin.2(r-\Phi)}{2} + \frac{3n\sin.\varrho\sin.2(q-\Phi)}{2\lambda}$$
$$- \frac{3(\lambda-\varkappa)md\omega}{4\lambda}\Big(2\omega\sin.\xi\ \frac{\sin.\xi\sin.2(q-r)}{\lambda-1} + \sin\xi\sin 2(r-\Phi) + \frac{\sin.\xi\sin.2(q-\Phi)}{\lambda}$$

cuius integrale quoque a valore ipſius Φ ſupra inuento ſubtrahi debet. Eſt autem ob $d\varrho = d\omega$: $\int\omega d\omega\sin.\varrho = -\omega\cos.\varrho + \sin.\varrho$ et $\int\omega d\omega\sin\xi - \frac{\omega}{\lambda}\cos.\xi + \frac{\sin\xi}{\lambda\lambda}$. Cum igitur ſit

$$dP = \frac{9nd\omega}{4\lambda}\Big(\omega\sin\varrho + \frac{\cos.(2q-2r-\varrho)-\cos.(2q-2r+\varrho)}{4(\lambda-1)} + \frac{\cos.(2r-\varrho-2\Phi)-\cos.(2r+\varrho-2\Phi)}{4} + \frac{\cos.(2q-\varrho-2\Phi)-\cos.(2q+\varrho-2\Phi)}{4\lambda}\Big)$$
$$-\frac{3(\lambda-\varkappa)md\omega}{2\lambda}\Big(\omega\sin\xi + \frac{\cos(2q-2r-\xi)-\cos(2q-2r+\xi)}{4(\lambda-1)} + \frac{\cos(2r-\xi-2\Phi)-\cos(2r+\xi-2\Phi)}{4} + \frac{\cos(2q-\xi-2\Phi)-\cos(2q+\xi-2\Phi)}{4\lambda}\Big)$$

Huius integrale erit :

$$\frac{9n}{4\lambda}\Big(-\omega\cos\varrho + \sin\varrho + \frac{\sin(2q-2r-\varrho)}{4(\lambda-1)(2\lambda-3)} - \frac{\sin(2q-2r+\varrho)}{4(\lambda-1)(2\lambda-1)} + \frac{\sin(2r-\varrho-2\Phi)}{4} - \frac{\sin(2r+\varrho-2\Phi)}{12} + \frac{\sin(2q-\varrho-2\Phi)}{4\lambda(2\lambda-1)} - \frac{\sin(2q+\varrho-2\Phi)}{4\lambda(2\lambda+1)}\Big)$$
$$-\frac{3(\lambda-\varkappa)m}{2\lambda}\Big(\frac{-\omega\cos\xi}{\varkappa} + \frac{\sin\xi}{\lambda\lambda} + \frac{\sin(2q-2r-\xi)}{4(\lambda-1)(\lambda-2)} - \frac{\sin(2q-2r+\xi)}{4(\lambda-1)(3\lambda-2)} + \frac{\sin(2r-\xi-2\Phi)}{4(2-\lambda)} - \frac{\sin(2r+\xi-2\Phi)}{4(2+\lambda)} + \frac{\sin(2q-\xi-2\Phi)}{4\lambda\lambda} - \frac{\sin(2q+\xi-2\Phi)}{12\lambda\lambda}\Big)$$

His autem debite diſpoſitis et terminis nimis paruis reiectis reperietur

$$\Phi = C - \frac{3\omega}{4\lambda}\Big(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{7}{8\lambda\lambda}\Big) - \frac{9n\sin.\varrho}{4\lambda} + \frac{3m\sin.\xi}{2\lambda^3}$$
$$- \frac{3\sin.2(q-r)}{8\lambda(\lambda-1)}\Big(-\frac{3}{8\lambda} - \frac{7}{8\lambda^2}\Big)$$
$$+ \frac{3\sin.2(r-\Phi)}{8\lambda}\Big(1 - \frac{7}{4\lambda} - \frac{3}{8\lambda\lambda}\Big) + \frac{9}{128\lambda^2}\sin.4(r-\Phi)$$
$$+ \frac{3\sin.2(q-\Phi)}{8\lambda\lambda}\Big(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{4\lambda\lambda}\Big).$$

§. 26. Huius expreſſionis pars prior $C - \frac{3\omega}{4\lambda}\big(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{9}{8\lambda\lambda}\big)$ pendet a ſolo tempore a data epocha iam elapſo ; ideoque oqne dat motum nodorum medium; reliqui termini, qui pendent ab anomaliis ſolis et lunae, itemque horum corporum ſitu tum inter ſe tum reſpectu lineae nodorum, exhibebunt correctiones loci nodorum medii ſeu eius aequationes, quas perpendemus, poſtquam, motum medium definiuerimus. Primum autem poſito $\omega = 360°$, prodibit motus nodorum medius tempore vnius anni ſiderei: cum autem ſit $\lambda = 13,3685$ erit $1 - \frac{3}{4\lambda} - \frac{3}{8\lambda\lambda} = 0,9698506$ fiet motus nodorum annuus $= 19,5878$ graduum in antecedentia, quod eſt $= 19°, 35', 16''$. Tabulae autem aſtronomicae pro hoc tempore plus non exhibent quam $19°, 20', 32''$, ideoque motus ex theoria definitus ſuperat obſeruatum $14', 44''$, ſeu eius parte $\frac{1}{78}$ fere. Differentia haec nimis quidem exigua eſt, quam vt theoriam in ſuſpicionem adducere poſſit; interim tamen eo magis operae pretium eſt hanc diſcrepantiam perpendere, quod Neutonus ſuo, quo vtitur ratiocinio, eum ipſum motum nodorum medium adipiscitur, quem obſeruationes exhibent. Conſiderat autem primum orbitam lunae tanquam circularem, hincque ſere eundem motum medium nimis magnum deducit, quem hic inuenimus, vti patet ex eius prop. XXX. lib. III. propoſitione vero ſequente vbi ellipſin in locum circuli ſubſtituit, motum priorem diminuit in ratione axis transuerſi ad coniugatum nempe 70 ad 69, ſicque ad conſenſum cum experientia proxime accedit. Praeterquam autem quod lunam in ellipſi, in cuius centro, non foco alterutro, poſita ſit terra, moueri aſſumit, in quo ipſo ab experientia recedit, integratio noſtra clare euincit motum medium ab ellipticitate orbitae lunaris non affici; ſi quidem terra in foco ellipsis collocetur. Neque vero etiam termini in integratione omissi hunc motum medium diminuerent, quin potius si quantitas superior $\int Q d\Phi$ accuratius inuestigetur, accederent termini motum nodorum medium adhuc aliquantillum, sed insensibiliter, adaugentes. Quare in nulla alia re causa dissensus calculi nostri ab obseruationibus situs esse potest, nisi in valore ipsius dq, quem contra indolem motus lunae ex ellipsi deduximus. Hinc iste defectus perfecte suppleri ante non poterit, quam ipse motus lunae in sua orbita ad calculum fuerit reuocatus. Sufficiat ergo hic annotasse, motum nodorum medium hic inuentum parte sua $\frac{1}{79}$ diminui oportere, quo cum veritate conspirans reddatur. Coefficiens ergo $1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{8\lambda\lambda}$, qui erat $= 0,9698506$, sua parte $\frac{1}{79}$ minui debebit, eritque propterea $= 0,957693$; cuius logarithmus est $= 9,9812263$.

§. 27. Inuento ergo loco medio lineae nodorum ad quoduis tempus propositum ex aequatione $\Phi = C - \frac{3\omega}{4\lambda}(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{8\lambda\lambda})$, ad quod negotium tabula mediorum motuum lineae nodorum est accommodata; iste locus pluribus aequationibus corrigi debet, quo verus obtineatur. Prima scilicet aequatio oritur ex termino $\frac{-n\, g\, \sin.\, \varrho}{4\lambda}$, pendetque ab anomalia excentrica solis, quae est medium arithmeticum proxime inter anomaliam mediam et veram. Quia autem discrimen inter anomaliam mediam et veram solis est vehementer exiguum, pro ϱ sine errore adhiberi poterit anomalia media solis a perigaeo computata. Quodsi autem more consueto anomalia media ab apogaeo sumatur, eius sinus negatiue sumi debet. Hinc si ϱ denotet

tet anomaliam mediam ſolis ad locum nodi medium, addi debet angulus ex iſta expreſſione $\frac{9 n \sin. \varrho}{4 \lambda}$ oriundus; ſicque haec aequatio ab apogaeo ſolis vsque ad perigaeum fit addenda, a perigaeo autem ad apogaeum ſubtrahenda. Haec aequatio ergo fit maxima, ſi anomalia media ſolis fit 90°, vel 270°, tumque ob $n = 0, 01690$ et $\lambda = 13, 3685$, valebit 586″ ſeu 9′, 46″ pro aliis autem anomaliis decreſcit in ratione earum ſinuum. In tabulis Leadbetteri haec aequatio ſinui anomaliae mediae ſolis proportionalis quoque occurrit, maxima vero aequatio ibi eſt tantum 9′, 30″, a noſtra deficiens 16″.

§. 28. Secunda aequatio $\frac{3 m \sin. \xi}{2 \lambda^3}$ proportionalis eſt ſinui anomaliae excentricae ſeu mediae lunae, quae ſi ab apogaeo computetur, ſubtrahi debet a loco nodi dum luna ab apogaeo ad perigaeum progreditur, dum autem a perigaeo ad apogaeum reuertitur, addi debet. Maxima aequatio hinc oriunda eſt tantum 18″, et hancobrem in calculo aſtronomico ſine ſenſibili errore praetermittitur, neque etiam eius mentio in vllis tabulis aſtronomicis occurrit.

§. 29. Tertia aequatio oritur ex termino $\frac{-3 \sin. 2 (q-r)}{8 \lambda (\lambda - 1)}$ $(1 - \frac{3}{8 \lambda} - \frac{3}{8 \lambda \lambda})$ ac propterea proportionalis eſt ſinui duplae diſtantiae lunae a ſole, ſubtrahatur ſcilicet locus ſolis a loco lunae, et differentia duplicata dabit eum angulum, cuius ſinui haec aequatio eſt proportionalis. Haec ergo aequatio erit maxima in octantibus, atque tum valebit 475 ſeu 7′, 55″, ex qua pro reliquis aſpectibus aequationes facile definiuntur. Ceterum a nouilunio vsque ad primam quadraturam haec aequatio debet ſubtrahi, indeque ad oppoſitionem addi, porro transeundo ab oppoſitione ad

 quadra-

quadraturam iterum debet ſubtrahi, et ab vltima quadratura ad coniunctionem addi. Vel breuius hoc modo: dum luna a ſyzygiis ad quadraturas procedit, haec aequatio debet ſubtrahi, dum autem luna a quadraturis ad ſyzygias tranſit, debet addi. Occurrit quidem in tabulis Leadbetteri aequatio ſub hoc nomine, quae ſinui duplae diſtantiae ſolis a luna eſt proportionalis, cuius maxima correctio eſt 1°, 45′, 0″. Verum haec aequatio confundi videtur cum ſequente, quae a diſtantia ſolis a nodo pendet; vt mox videbimus. Praetermittitur ergo vulgo haec aequatio, etſi ea locum nodi ad 8′ fere mutare poſſit. Verum quoniam haec aequatio in ſyzygiis, vbi locum nodi quam accuratiſſime noſſe oportet, euaneſcit, in reliquis autem occaſionibus locum lunae non ſenſibiliter afficit, error ex eius praetermiſſione oriundus non ſentitur.

§. 30. Quartam aequationem nodi lunae ſuppeditat iſte terminus, $\frac{+3\,\text{ſin.}\,2(r-\Phi)}{8\lambda}\left(1-\frac{3}{4\lambda}-\frac{3}{8\lambda\lambda}\right)$, cum quo ob ſimilitudinem nominis iſte $\frac{9}{128\lambda^2}\,\text{ſin.}\,4(r-\Phi)$ coniungi poteſt: quia ambo a diſtantia ſolis a nodo pendent, prior quidem ab eius duplo, alter ab eius quadruplo. Huius aequationis pars prior, poſtquam ſol a nodo eſt progreſſus vsque ad nonageſimum gradum, debet addi, a nonageſimo vero gradu vsque ad ſequentem nodum, aequatio debet ſubtrahi, maxima autem fit aequatio dum ſol a linea nodorum angulo 45° diſtat; tumque eſt 5449″ ſeu 1°, 30′, 49″, cum qua aequatione ſine dubio confunditur ea, quam Leadbetter refert ad diſtantiam lunae a ſole. Altera pars huius aequationis, quae cum priori in

eadem

eadem tabula comprehendi poteſt, addi debet a tranſitu ſolis vel a nodo vel a quadrato nodi vsque ad 45°, reliquis caſibus ſubtrahi: maxima autem eſt dum ſol vel a linea nodorum vel a recta illam normaliter ſecante diſtat angulo 22°, 30′, hocque caſu eſt 1′, 21″.

§. 31. Quinta aequatio petenda eſt ex termino $\frac{+ \text{ſin.}\, 2(q-\Phi)}{8\lambda\lambda}\left(1 - \frac{3}{8\lambda} - \frac{3}{4\lambda\lambda}\right)$ ideoque pendet a diſtantia lunae a nodo et quia ſinui huius duplae diſtantiae eſt proportionalis, dum luna a nodo recedit vsque ad maximam inclinationem, ad locum medium addi debet, a quadrato autem nodi vsque ad ipſam lineam nodorum debet ſubtrahi. Maxima autem fit haec aequatio, dum luna a linea nodorum angulo ſemirecto diſtat, quo caſu eſt: 6′, 58″. Cum igitur hae tres vltimae aequationes, ſi ſingulae fiant maximae, coniunctim conſtituant 1°, 45′, 42″, veriſimile eſt eas in tabulis Leadbetteri, in vnicam ſub titulo duplae diſtantiae ſolis a luna eſſe collectas, qui error tolerari poſſet, ſi modo iſti tabulae titulus duplae diſtantiae ſolis a nodo praefigeretur; quoniam aequatio hinc oriunda eſt maxima. Ceterum plures aliae aequationes inſuper huc adduci poſſent, quae autem, quoniam tantum in minutis ſecundis, merito praetermittuntur: cum ipſa formula differentialis et integratio iam ſit ita comparata, vt ad veritatem tantum proxime accedat, ibique iam minuta ſecunda ſint neglecta. Hanc obrationem hic quoque correctio ex anomalia media lunae reſultans tuto omittitur, reliquae autem quatuor aequationes neceſſario retinentur; quoniam locum nodorum ad plura minuta prima mutare valent. Ex his quatuor correctionibus

bus duae tantum vt iam notauimus, in tabulis aſtronomicis recentiſſimis reperiuntur inſertae, hincque ex hoc capite tabulae aſtronomicae non mediocri emendatione indigent.

§. 32. Determinato loco nodi ſupereſt, vt variationem inclinationis orbitae lunae ad eclipticam, quam vocauimus $= \theta$, inueſtigemus. Ad hoc in ſubſidium vocanda eſt poſterior aequatio, quae §. 18 erat inuenta:

$$d.\,l\,\frac{\text{tang.}\,p.\,\text{fin.}\,\Phi}{\text{fin.}\,(q-\Phi)} = \frac{Fgg\,dT^2\,\text{fin.}\,q.\,\text{fin.}\,(r-\Phi)}{2\,Cv\,dq\,\text{cof.}\,p\,\text{fin.}\,\Phi}\left(\frac{1}{ff}-\frac{f}{u^3}\right)$$

ſeu cum proxime ſit $\frac{1}{ff}-\frac{f}{u^3} = \frac{-3v\,\text{cof.}\,p\,\text{cof.}\,s}{f^3}$, erit

$$d.\,l\,\frac{\text{tang.}\,p.\,\text{fin.}\,\Phi}{\text{fin.}\,(q-\Phi)} = \frac{-3\,Fgg\,dT^2\,\text{fin.}\,q\,\text{cof.}\,s\,\text{fin.}\,(r-\Phi)}{2\,Cf^3\,dq\,\text{fin.}\,\Phi}$$

At ante oſtendimus eſſe $\frac{\text{tang.}\,p}{\text{fin.}\,(q-\Phi)} = \text{tang}\,\theta$, vnde fiet

$$d.\,l\,\text{tang.}\,\theta.\,\text{fin.}\,\Phi = d.\,l\,\text{tang.}\,\theta + \frac{d\Phi\,\text{cof.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\Phi} = \frac{-3\,Fgg\,dT^2\,\text{fin.}\,q\,\text{cof}\,s\,\text{fin.}\,(r-\Phi)}{2\,Cf^3\,dq\,\text{fin.}\,\Phi}$$

Quod ſi autem ponamus ſolem ſecundum motum medium circa terram in diſtantia $= a$, tempore dT angulum $d\omega$ abſoluere, fiet $dT^2 = \frac{2Ca^3d\omega^2}{Fgg}$; ideoque

$$d.\,l\,\text{tang.}\,\theta = \frac{-d\Phi\,\text{cof.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\Phi} - \frac{3a^3d\omega^2\,\text{fin.}\,q\,\text{cof.}\,s\,\text{fin.}\,(r-\Phi)}{f^3\,dq\,\text{fin.}\,\Phi}$$

At in §. 20 erat:

$$d\Phi = \frac{-3a^3d\omega^2\,\text{cof.}\,s\,\text{fin.}\,(r-\Phi)\,\text{fin.}\,(q-\Phi)}{f^3\,dq}$$ hincque obtinebitur

$$d.\,l\,\text{tang.}\,\theta = \frac{3a^3d\omega^2\,\text{cof.}\,s\,\text{fin.}\,(r-\Phi)}{f^3dq\,\text{fin.}\,\Phi}\,(\text{cof.}\,\Phi\,\text{fin.}\,(q-\Phi)-\text{fin.}\,q)$$

at eſt $\text{fin.}\,q = \text{fin.}\,(q-\Phi)\,\text{cof.}\,\Phi + \text{cof.}\,(q-\Phi\,\text{fin.}\,\Phi$, quo ſubſtituto fit

$$d.\,l\,\text{tang.}\,\theta = \frac{-3a^3d\omega^2\,\text{cof.}\,s\,\text{fin.}\,(r-\Phi)\,\text{cof.}\,(q-\Phi)}{f^3\,dq}$$

Quia vero eſt $\text{fin.}\,A\,\text{cof.}\,B = \frac{1}{2}\,\text{fin.}\,(A+B) - \frac{1}{2}\,\text{fin.}\,(B-A)$ erit $\text{fin.}\,(r-\Phi)\,\text{cof.}\,(q-\Phi) = \frac{1}{2}\,\text{fin.}\,(q+r-2\Phi) - \frac{1}{2}\,\text{fin.}\,(q-r)$ quod per $\text{cof.}\,s = \text{cof.}\,(q-r)$ multiplicatum dat

dat: $\frac{1}{4}$ sin. $2(q-\Phi) + \frac{1}{4}$ sin. $2(r-\Phi) - \frac{1}{4}$ sin. $2(q-r)$: hincque erit
$d.\,l\,\text{tang.}\,\theta = \frac{-3a^3\,d\omega^2}{4J^3\,dq}\,(\text{sin.}\,2(q-\Phi) + \text{sin.}\,2(r-\Phi) - \text{sin.}\,2(q-r))$
Cuius formulae integrale si fuerit $= R$ erit l tang. $\theta = C + R$ et tang. $\theta = Ce^R$, et quia R erit quantitas valde parua, erit proxime tang. $\theta = C(1+R)$

§. 33. Si ponamus vt supra $\lambda : 1$ pro ratione medii motus lunae ad medium motum solis, atque statuamus $dr = d\omega$ et $dq = \lambda d\omega$ neglectis aberrationibus exiguis ab his valoribus, erit

$$d.\,l\,\text{tang.}\,\theta = \frac{-3d\omega}{4\lambda}\,(\text{sin.}\,2(q-\Phi) + \text{sin.}\,2(r-\Phi) - \text{sin.}\,2(q-r))$$

cuius integrale, si Φ tanquam constans consideretur erit.

$$l\,\text{tang.}\,\theta = lC + \frac{3}{8\lambda}\left(\frac{\text{cos.}\,2(q-\Phi)}{\lambda} + \text{cos.}\,2(r-\Phi) - \frac{\text{cos.}\,2(q-r)}{\lambda-1}\right)$$

Variabilitas autem ipsius Φ hic parum mutat, quia angulus θ ipse est satis paruus, interim tamen si eius rationem habere velimus, differentiemus expressionem inuentam posito Φ tantum variabili, eritque

$\frac{3d\Phi}{4\lambda}\left(\frac{\text{sin.}\,2(q-\Phi)}{\lambda} + \text{sin.}\,2(r-\Phi)\right)$. Cum autem sit

$$d\Phi = \frac{3d\omega}{4\lambda}\,(1 + \text{cos.}\,2(q-r) + \text{cos.}\,2(q-\Phi) + \text{cos.}\,2(r-\Phi))$$

abibit illud differentiale in hanc formam:

$$\frac{9d\omega}{16\lambda\lambda}\left\{\begin{aligned}&\frac{\text{sin.}\,2(q-\Phi)}{\lambda} + \text{sin.}\,2(r-\Phi) + \frac{\text{sin.}\,2(2q-r-\Phi)}{2\lambda} + \frac{\text{sin.}\,2\,r-\Phi)}{2\lambda} + \frac{\text{sin.}\,2(q-\Phi)}{2}\\ &-\frac{\text{sin.}\,2(q-2r+\Phi)}{2} + \frac{\text{sin.}\,4(q-\Phi)}{2\lambda} + \frac{\text{sin.}\,2(q+r-2\Phi)}{2} - \frac{\text{sin.}\,2(q-r)}{2}\\ &+\frac{\text{sin.}\,2(q+r-2\Phi)}{2\lambda} + \frac{\text{sin.}\,2(q-r)}{2\lambda} + \frac{\text{sin.}\,4(r-\Phi)}{2}\end{aligned}\right\}$$

Cuins integrale, quod a superiore valore ipsius l tang. θ subtrahi debet est

$$\frac{-9}{16\lambda\lambda}\left(\frac{\text{cos.}\,2(q-\Phi)}{4\lambda} + \frac{\text{cos.}\,2(q-\Phi)}{2\lambda\lambda} + \frac{\text{cos.}\,2(r-\Phi)}{2} + \frac{\text{cos.}\,2(r-\Phi)}{4\lambda} - \frac{\text{cos.}\,2(q-1)}{4(\lambda-1)} + \frac{\text{cos.}\,2(q-r)}{4\lambda(\lambda-1)}\right)$$

neglectis reliquis terminis vtpote vehementer exiguis.

Hinc ergo erit

$$l\,\text{tang.}\ \theta = l\,C + \tfrac{3}{8\lambda}\,\text{cos.}\,2(r\Phi)\left(1 + \tfrac{7}{4\lambda} + \tfrac{3}{8\lambda\lambda}\right)$$
$$+ \tfrac{3}{8\lambda\lambda}\,\text{cos.}\,2(q-\Phi)\left(1 + \tfrac{7}{8\lambda} + \tfrac{2}{4\lambda\lambda}\right)$$
$$- \tfrac{3}{8\lambda(\lambda-1)}\,\text{cos.}\,2(q-r)\left(1 + \tfrac{3}{8\lambda} - \tfrac{7}{8\lambda\lambda}\right)$$

Posito ergo breuitatis gratia $l\,\text{tang.}\ \theta = lC + R$ erit ob R valde paruum tang. $\theta = C(1+R)$. Si $R = 0$ fiat inclinatio $\theta = k$, reliquis casibus sit $\theta = k + u$, erit $C =$ tang. k et tang. $\theta =$ tang. $k + \frac{u}{cos.\,k^2} =$ tang. $k + R$ tang. k; vnde fit $u = R$ sin. k cos. $k = \frac{1}{2} R$ sin. $2k$. Cognito ergo valore medio inclinationis k ad quoduis tempus correctio, quae ad eam vel addi vel ab ea subtrahi debet inuenietur: quae aequatio addenda si ponatur $= u$, erit

$$u = \tfrac{3}{16\lambda}\left(1+\tfrac{3}{4\lambda}+\tfrac{3}{8\lambda\lambda}\right)\sin 2k \cos 2(r-\Phi) = 0{,}014831 \sin 2k \cos 2(r-\Phi)$$
$$+ \tfrac{3}{16\lambda\lambda}\left(1+\tfrac{3}{8\lambda}+\tfrac{3}{4\lambda\lambda}\right)\sin 2k \cos 2(q-\Phi) + 0{,}001082 \sin 2k \cos 2(q-\Phi)$$
$$- \tfrac{3}{16\lambda(\lambda-1)}\left(1+\tfrac{3}{8\lambda}-\tfrac{3}{8\lambda\lambda}\right)\sin 2k \cos 2(q-r) - 0{,}001164 \sin 2k \cos 2(q-r)$$

§. 34. Si et sol et luna versentur in linea nodorum, omnes hi anguli euanescunt, fitque $u = 0{,}014749$ sin. $2k$, hocque casu inclinatio orbitae ad eclipticam erit maxima. Sin autem et sol et luna a linea nodorum distent angulo recto, ita vt sit $q - \Phi = 90°$ et $r - \Phi = 90°$, et $q - r = 0$, inclinatio omnium erit minima, fit autem $u = -0{,}017077$ sin. $2k$ Differentia ergo inter inclinationem maximam et minimam erit $0{,}031826$ sin, $2k$. In plerisque autem tabulis astronomicis statuitur minima lunae inclinatio $= 4°, 59', 35''$; vnde fit $k - 0{,}017077$ sin. $2k = 4°, 59', 35''$, hincque $k = 5°, 10', 7''$, et l sin. $2k = 9{,}2539340$. Maxima ergo

ergo inclinatio, dum ambo luminaria in linea nodorum verſantur erit $= 5^\circ, 19', 13''$. Ceterum ad inclinationem quouis tempore definiendam triplici aequatione erit opus, quae vel addi debent vel ſubtrahi ab inclinatione media $5^\circ, 10', 7''$. Harum aequationum prima, quae reliquas binas magnitudine multum excedit, pendet a diſtantia ſolis a nodo, huiuſque duplae diſtantiae coſinui eſt proportionalis, quae aequatio dum ſit maxima erit $9', 9''$. Secunda aequatio proportionalis eſt coſinui duplae diſtantiae lunae a nodo, et dum ſit maxima praebet $40''$. Tertia aequatio coſinui duplae diſtantiae ſolis a luna eſt proportionalis, et dum ſit maxima, erit $43''$, vnde patet has duas poſteriores aequationes ſine ſenſibili errore in praxi omitti poſſe, ita vt prima ſola a diſtantia ſolis a nodo pendens ſufficere poſſit. Cum autem tabulae maximam inclinationem orbitae lunaris tantum $5^\circ, 17', 20''$ conſtituant, valor ipſius k diminui debet, ſtatuamus ergo $k = 5^\circ, 8', 45''$, vt ſit l ſin. $2k = 9,2520250$, eritque inclinatio maxima $= 5^\circ, 17', 48''$, et minima $= 4^\circ, 58', 16''$. Quamuis autem haec differentia inter inclinationem maximam ac minimam ſit maior quam tabulae exhibent, duobus ſere minutis primis, tamen ideo non in ſuſpicionem cadit, cum quoniam in tabulis binae reliquae aequationes negliguntur, tum quia per obſeruationes vehementer eſt difficile hos limites exactiſſime conſtituere.

 QVAN-

QVANTVM MOTVS TERRAE A LVNA PERTVRBETVR ACCVRATIVS INQVIRITVR.

AVCTORE
Leonhardo Eulero.

§. 1.

Cum luna perpetuo ad terram vrgeatur, quaecunque huius ſollicitationis ſit cauſa, neceſſe eſt vt terra ſimili quadam vi verſus lunam nitatur. Si enim ſol, a cuius vi motus lunae maxime perturbatur, e medio tolleretur, atque terra cum luna tantum in vniuerſo relinqueretur, dubium eſt nullum, quin terrae et lunae commune centrum grauitatis vel quiesceret, vel vniformiter in directum progreſſurum eſſet. Hinc dum luna circa terram reuolueretur, vtrumque corpus ſimili quodam motu circa centrum grauitatis gyraretur; atque, ſi vires teneant rationem reciprocam duplicatam diſtantiarum, tam terra quam luna in ſectione conica alterum focum in communi grauitatis centro habente, moueretur. Sin autem tam terra quamluna motu omni priuaretur, recta ad ſe inuicem accederent, et in communi centro grauitatis conuenirent. Vnde ſequitur vires accelerantes, quibus terra et luna ſollicitantur, ipſis horum corporum maſſis reciproce fore proportionales, ita vt vis, qua luna ad terram acceleratur, ſe habitura ſit ad vim, qua terra viciſſim ad lunam concitatur vti maſſa ſeu quantitas materiae in terra contentae

tentae ad maſſam lunae. Quodſi ergo maſſa terrae ſit $= T$, et maſſa lunae $= L$, atque vis acceleratrix, qua luna ad terram incitatur, ponatur $= V$, erit vis acceleratrix, qua terra ad lunam vrgebitur $= \frac{LV}{T}$. Cum igitur vis V ſit cognita, ex ea quoque vis, qua terra ad lunam ſollicitatur, cognoſcetur, ſi modo ratio inter maſſas terrae et lunae fuerit nota.

§. 2. Vis autem acceleratrix V, qua luna ad terram pellitur, facile ad grauitatem naturalem in ſuperficie terrae comparatur. Indicetur enim vis grauitatis naturalis vnitate, ſitque radius terrae $= r$, et diſtantia lunae a terra $= z$, quoniam vires decreſcunt in ratione duplicata diſtantiarum, erit vis, qua luna terram verſus acceleratur, $= \frac{rr}{zz} = V$; hincque ergo vis, qua terra lunam verſus impellitur, erit $= \frac{Lrr}{Tzz}$, ſeu ſe habebit ad grauitatem naturalem vti $\frac{Lrr}{Tzz}$ ad 1. Cum igitur terra continuo tanta vi ad lunam vrgeatur viribus, quibus ad ſolem trahitur, non perfecte obediet, neque idcirco in ellipſi reuoluetur, cuius alter focus ſit in centro ſolis conſtitutus. In ſuperiori quidem diſſertatione, vbi nouas tabulas pro motu ſolis condere ſum conatus, aſſumſi commune centrum grauitatis terrae et lunae in ellipſi circa ſolem in eius foco exiſtentem reuolui, atque ex loco lunae aberrationem centri terrae ab iſta ellipſi ad quodvis tempus aſſignaui. Verum quanquam haec hypotheſis ad veritatem proxime accedit, atque adeo perfecte conueniret, ſi vires diſtantiis directe eſſent proportionales, tamen operae pretium videtur, in hunc ipſum errorem, quo iſta hypotheſis a veritate recedit, diligentius inquire-

 re-

re. Hunc in finem nulla communis centri grauitatis ratione habita, deuiationem terrae de orbita elliptica ex ipsis sollicitationibus lunae inuestigabo, quod negotium ad maxime complicatos calculos deducit, cum illa hyppothesis rem facillime expediuisset.

§. 3. Quo autem vim, qua terra a luna sollicitatur, cognoscamus, necesse est, vt ratio, quam massa lunae ad massam terrae tenet, inuestigetur. Si quidem assumamus corpus lunae ex simili materia esse conflatum, atque terram, ratio illa erit triplicata rationis diametrorum. Quare cum sit diameter terrae ad diametrum lunae vti 365 ad 100, foret massa terrae ad massam lunae vti 4863 ad 100 seu vt 48 ad 1 proxime. Neutonus quidem ex phaenomenis aestus maris terram tricies nouies tantum grauiorem luna constituit, verum Celeb. Daniel Bernoulli in sua eximia de aestu maris dissertatione ostendit vim lunae multo esse minorem, quam Neutonus statuisset, ita vt ratio 48 ad 1 propius ad veritatem accedat, quam ratio 39 ad 1. In hac autem comparatione ad vim solis simul spectatur, quae a distantia solis a terra pendet. Ostendi autem in dissertatione de diminutione motus planetarum, si parallaxis soli horizontalis assumatur 13″, vim solis in distantia 320, 708 r ipsi grauitati fore aequalem; quare si haec distantia 320, 708 r ponatur $= f$, et massa solis $= S$ erit $\frac{S}{ff} = \frac{T}{rr}$; ideoque $S = 102854 T = \frac{ffT}{rr}$. Quod si autem distantia solis a terra ponatur $= c$, et distantia lunae a terra $= b$, ad mare commouendum est vis solis ad vim lunae vt $\frac{S}{c^3}$ ad $\frac{L}{b^3}$ hoc est vt $\frac{Tff}{c^3 rr}$ ad $\frac{L}{b^3}$. Quare si vis lunae fuerit

ad

ad vim ſolis vt n ad 1, erit $\frac{L}{b^3}$ ad $\frac{Tff}{c^3rr}$ vt n ad 1, hincque $L:T = nffb^3 : c^3rr$ vnde ſi ſit $n = 4$ Neutonus deduxit $L : T = 1 : 39$ manet enim ratio ff ad c^3 quaecunque parallaxis aſſumatur, perpetuo eadem, ſin autem eſſet, vt Cel. Bernoulli ſtatuit $n = 3$, vel tantum $2\frac{1}{2}$ foret $L : T = 1 : 52$ ſeu $1 : 62$; inter quas rationes illa, quam ex mole lunae deduximus, medium quoddam a veritate fortaſſe non multum remotum tenet.

§. 4. Cognita ergo vi lunae motum terrae perturbante ſiue potius ea, quaſi eſſet cognita, aſſumta, ipſum motum terrae inueſtigemus. Quieſcat ergo ſol in S, cuius maſſa ſit $= S$, circa quem reuoluatur terra in orbita ATB, cuius media a ſole diſtantia ſit $= c$: maſſa autem terrae ſit $= T$; ſtatuatur in A terrae aphelium et in B perihelium, quatenus quidem eius motus a luna non perturbaretur. Elapſo iam tempore $= t$, poſtquam terra ex aphelio A eſt egreſſa, peruenerit in locum T, voceturque diſtantia $ST = z$, et angulus $AST = \Phi$. Luna autem nunc verſetur in L, ita vt a coniunctione ſolis diſtet angulo $STL = \theta$, quem angulum cum tempore t vniformiter creſcere aſſumamus, quoniam variationes a motus lunae inaequalitate oriundae ſenſibiles eſſe nequeunt, ob eandemque rationem diſtantiam lunae a terra LT tanquam conſtantem conſiderabimus ſitque $LT = e$; et ipſa lunae maſſa $= L$. Poſito iam radio terrae $= r$, et vi grauitatis $= 1$, terra primum ad ſolem vrgebitur vi $= \frac{Srr}{Tzz}$; tum vero ad lunam vi $= \frac{Lrr}{Tee}$ Ex T ad AB ducatur normalis TP, et TV ipſi AB parallela, viresque ſollicitantes ſecundum has directiones Tab. XVI. Fig. 3.

re-

resoluantur. A vi ergo solis terra in directione TP sollicitabitur vi acceleratrice $= \frac{Srr\,\text{sin}.\,\Phi}{Tzz}$, et in directione TV vi $= \frac{Srr\,\text{cos}.\,\Phi}{Tzz}$. Deinde ob angulum $LTV = \theta + \Phi$, a vi lunae terra in directione TP vrgebitur vi $= \frac{Lrr\,\text{sin}.\,(\theta+\Phi)}{Tee}$, et in directione TV vi $= \frac{Lrr\,\text{cos}.\,(\theta+\Phi)}{Tee}$. Omnino ergo terra incitabitur secundum directionem TP vi $= \frac{Srr\,\text{sin}.\,\Phi}{Tzz} + \frac{Lrr\,\text{sin}.\,(\theta+\Phi)}{Tee}$, et secundum directionem TV vi $= \frac{Srr\,\text{cos}.\,\Phi}{Tzz} + \frac{Lrr\,\text{cos}.\,(\theta+\Phi)}{Tee}$.

§. 5. Ponatur $SP = x$ et $PT = y$, vt sit $x = z\,\text{cos}.\,\Phi$, et $y = z\,\text{sin}.\,\Phi$, atque motus terrae resoluatur secundum directiones Tp et Tt, quae sint coordinatis SP et PT parallelae, eritque ob elementum temporis $= dt$, celeritas terrae secundum directionem $Tp = \frac{dx}{dt}$ seu TV $= -\frac{dx}{dt}$, quia abscissa SP progrediente luna diminuitur: et celeritas terrae secundum directionem $Tt = \frac{dy}{dt}$. Hinc ille motus requirit vim acceleratricem in directione $Tp = \frac{2ddx}{dt^2}$ seu in directione $TV = -\frac{2ddx}{dt^2}$: iste autem motus requirit vim acceleratricem in directione $Tt = \frac{2ddy}{dt^2}$ seu in directione $TP = -\frac{2ddy}{dt^2}$, sumto elemento temporis dt constante. His igitur viribus aequales statuantur illae vires, quibus terra secundum has directiones reuera sollicitari inuenta est, sicque prodibunt duae sequentes aequationes

$$-\frac{2ddx}{dt^2} = \frac{Srr\,\text{cos}.\,\Phi}{Tzz} + \frac{Lrr\,\text{cos}.\,(\theta+\Phi)}{Tee}$$

$$-\frac{2ddy}{dt^2} = \frac{Srr\,\text{sin}.\,\Phi}{Tzz} + \frac{Lrr\,\text{sin}.\,(\theta+\Phi)}{Tee}$$

At

At cum sit $x = z\cos.\Phi$ et $y = z\sin.\Phi$ erit:

$$dx = dz\cos.\Phi - zd\Phi\sin.\Phi,\ dy = dz\sin.\Phi + zd\Phi\cos.\Phi$$
$$ddx = ddz\cos.\Phi - 2dzd\Phi\sin.\Phi - zdd\Phi\sin.\Phi - zd\Phi^2\cos.\Phi$$
$$ddy = ddz\sin.\Phi + 2dzd\Phi\cos.\Phi + zdd\Phi\cos.\Phi - zd\Phi^2\sin.\Phi$$

qui valores in aequationibus illis substituti dabunt:

$$ddz\cos.\Phi - 2dzd\Phi\sin.\Phi - zdd\Phi\sin.\Phi - zd\Phi^2\cos.\Phi = -\frac{rrdt^2}{2T}\left(\frac{S\cos.\Phi}{zz} + \frac{L\cos.(\theta+\Phi)}{ee}\right)$$

$$ddz\sin.\Phi + 2dzd\Phi\cos.\Phi + zdd\Phi\cos\Phi - zd\Phi^2\sin\Phi = -\frac{rrdt^2}{2T}\left(\frac{S\sin\Phi}{zz} + \frac{L\sin.(\theta+\Phi)}{ee}\right)$$

Ex his ergo duabus aequationibus definiri debet relatio inter tres quantitates variabiles z, Φ et t quoniam θ a t pendens assumimus.

§. 6. Harum aequationum inuentarum prior multiplicetur per $\sin.\Phi$, posterior vero per $\cos.\Phi$, haecque ab illa subtrahatur quo facto prodibit:

$$-2dzd\Phi - zdd\Phi = \frac{Lrrdt^2\sin.\theta}{2Tee}.$$

est enim $\sin.(\theta+\Phi)\cos.\Phi - \cos.(\theta+\Phi)\sin.\Phi = \sin.\theta$. Deinde quia est $\cos.(\theta+\Phi)\cos\Phi + \sin.(\theta+\Phi)\sin.\Phi = \cos\theta$, si aequatio prior per $\cos.\Phi$ posterior vero per $\sin.\Phi$ multiplicetur ambaeque inuicem addantur, reperitur.

$$ddz - zd\Phi^2 = -\frac{rrdt^2}{2T}\left(\frac{S}{zz} + \frac{L\cos.\theta}{ee}\right)$$

Ponatur nunc breuitatis gratia $\frac{Srr}{Tcc} = m$; denotante c distantiam mediam terrae a sole seu potius semilatus rectum, quod ob excentricitatem valde paruam a distantia media non multum discrepabit, erit ob $S = \frac{Tff}{rr}$, $m = \frac{ff}{cc} = 0,000408587$. Deinde sit $\frac{Lrr}{Tee} = n$, et, si $\frac{L}{T} = \frac{1}{48}$ atque $e = 60r$ reperietur $n = 0,00000579$, ita vt sit,

$n = \frac{m}{70}$ circiter. Secundum mentem Neutoni foret $n = \frac{m}{57}$ et secundum Bernoullium $n = \frac{m}{88}$. Erit ergo n prae m quantitas satis parua, vt quantitates multo minores quam n facile reiici queant. Introductis autem his duabus litteris m et n aequationes ante inuentae transibunt in sequentes.

$$2dzd\Phi + zdd\Phi = -\tfrac{1}{2}ndt^2 \text{ fin. } \theta \text{ et}$$

$$ddz - zd\Phi^2 = -\tfrac{1}{2}dt\left(\frac{mcc}{zz} + n\,\text{cof. } \theta\right)$$

in quibus aequationibus differentialibus secundi gradus differentiale dt assumtum est constans; quod in integratione probe est obseruandum.

§. 7. Si luna prorsus abesset, aequatio prior fieret:

$$2dzd\Phi + zdd\Phi = 0.$$

quae per z multiplicata et integrata praebet:

$$zzd\Phi = A\,dt$$

denotante A quantitatem quampiam constantem. Altera autem aequatio hoc casu quo $n = 0$ abit in hanc

$$ddz - zd\Phi^2 = -\frac{mccdt^2}{2zz}.$$

At ex priori est $d\Phi^2 = \frac{A^2dt^2}{z^4}$, quo valore substituto fit

$$ddz = \frac{A^2dt^2}{z^3} - \frac{mccdt^2}{2zz}$$

quae multiplicata per dz et integrata dabit ob dt constans:

$$\tfrac{1}{2}dz^2 = \frac{mccdt^2}{2z} - \frac{A^2dt^2}{2zz} - \frac{Bdt^2}{2}$$

seu $dt = \frac{zdz}{\surd(mccz - AA - Bzz)}$

et $d\Phi = \frac{Adz}{z\surd(mccz - AA - Bzz)}$

Ponatur $z = \frac{cc}{u}$ erit $d\Phi = \frac{-Adu}{\surd(mc^4u - AAuu - Bc^2)}$

Si iam constantes A et B ita determinentur, vt sit $AA = \frac{mc^3}{2}$ seu $A = c\surd\tfrac{1}{2}mc$ et $B = \frac{m(cc-kk)}{2c}$ inuenietur $u = c - k\,\text{cof.}\,\Phi$. Posito ergo $\Phi = 0$, erit $u = c - k$ et di-

stantia

ſtantia aphelii a ſole $AS = \frac{cc}{c-k}$. Verum poſito $\Phi = 180°$, fiet diſtantia perihelii a ſole $BS = \frac{cc}{c+k}$, vnde axis transuerſus $AB = \frac{2c^3}{cc-kk}$, et diſtantia focorum $= \frac{2cck}{cc-kk}$ porroque axis coniugatus $= \frac{2cc}{\sqrt{(cc-kk)}}$ et parameter $= 2c$ vti aſſumſimus.

§. 8. Accedente autem vi lunae, cum ex priori aequatione ſit:

$$2dzd\Phi + zdd\Phi = -\tfrac{1}{2}ndt^2 \text{ ſin. } \theta.$$

erit ob n numerum valde paruum proxime ſaltem

$$zzd\Phi = Adt = cdt\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}.$$

et quia orbita terrae fere eſt circularis, ſi pro z ponatur c, erit $d\Phi = \frac{dt\sqrt{m}}{\sqrt{2c}}$, cuius aberratio a veritate tam eſt parua, vt in termino per ſe minimo $\frac{1}{2}ndt^2 \text{ ſin. } \theta$ discrimen ſenſibile non producat. Simili modo in hoc termino ratio $d\theta$ ad $d\Phi$ cenſeri poteſt conſtans, ſcilicet ratione motus medii lunae a ſole ad motum medium ſolis quae ratio cum ſit 12, 368314 : 1, ponatur compendii cauſa $i = 12,368314$ eritque $d\theta = id\Phi$ proxime. Multiplicetur nunc aequatio per z erit

$$2zdzd\Phi + zzdd\Phi = -\tfrac{1}{2}nzdt^2 \text{ ſin. } \theta.$$

Hic autem in termino per ſe minimo $\frac{1}{2}nzdt^2 \text{ ſin. } \theta$ ponatur $z = c$, et loco dt ſcribatur $\frac{d\Phi\sqrt{2c}}{\sqrt{m}} = \frac{d\theta\sqrt{2c}}{i\sqrt{m}}$ eritque

$$2zdzd\Phi + zzdd\Phi = -\frac{ncdt\,d\theta \text{ ſin. } \theta}{2i\sqrt{m}}\sqrt{2c}$$

cuius integrale ob dt conſtans eſt:

$$zzd\Phi = cdt\sqrt{\tfrac{1}{2}mc} + \frac{ncdt \text{ coſ. } \theta}{2i}\sqrt{\frac{2c}{m}}$$

ſeu $$zzd\Phi = cdt\sqrt{\tfrac{1}{2}mc} + \frac{ncdt \text{ coſ. } \theta}{im}\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}$$

Eſt autem area $AST = \frac{1}{2}\int zz\,d\Phi$, vnde ob $dt = \frac{d\theta\sqrt{2c}}{i\sqrt{m}}$ erit:

$$\text{Area } AST = \tfrac{1}{2}ct\sqrt{\tfrac{1}{2}mc} + \frac{ncc\sin\theta}{2iim}$$

ſeu $\frac{1}{2}ct\sqrt{\frac{1}{2}mc} = \text{Ar: } AST - \frac{nc\,c\,\sin.\theta}{2iim}$.

§. 9. Vi lunae ergo primum efficitur, vt tempora non amplius ſint areis proportionalia. Scilicet tempus quo terra ab aphelio A ad T peruenit non proportionale eſt areae AST, ſed huic areae minutae ſpatiolo quopiam, quod ſit vt ſinus anguli STL. Hinc quamuis orbita terrae nullam haberet excentricitatem, tamen eius motus non foret vniformis, ſed modo citius modo tardius incederet. Ponamus tempus vnius anni eſſe $= \odot = 365,242305$ dierum, tum niſi luna motum perturbaret, tempore t angulum deſcripſiſſet $AST = \frac{t}{\odot}\,360°$. Ob lunam autem hic angulus AST aliquanto erit maior, qui exceſſus vt pateat, pro area AST ponatur valor $\frac{1}{2}cc\Phi$ et cum, ſi luna abeſſet, foret $\frac{1}{2}cc\Phi = \frac{1}{2}ct\sqrt{\frac{1}{2}mc}$, ſeu $\Phi = t\sqrt{\frac{m}{2c}} = \frac{t}{\odot}.\,360°$, nunc luna ſimul vrgente erit $\frac{1}{2}cc\Phi = \frac{1}{2}ct\sqrt{\frac{1}{2}mc} + \frac{ncc\sin.\theta}{2iim}$, ideoque

$$\text{ang. } AST = \Phi = \frac{t}{\odot}.\,360° + \frac{n\sin.\theta}{iim}.$$

Ad angulum ergo $\frac{t}{\odot}.\,360°$, quem motus medius praebet inſuper addi debet angulus $\frac{n\sin.\theta}{iim}$; hic ſcilicet angulus ab coniunctione vſque ad oppoſitionem ad locum terrae medium addi, dum autem luna ab oppoſitione ad coniunctionem reuertitur, ſubtrahi debebit. Haec ergo correctio maxima erit in quadraturis, vbi erit $= \frac{n}{iim}$; quae quanta ſit videamus. Cum ſit $i = 12,368314$, et $\frac{m}{n} = 70$: fiet $\frac{n}{iim} = 0,000093385$, quae eſt menſura anguli

anguli: 19″, 15‴. Sin autem Neutoni valore $\frac{m}{n} = 57$ essemus vsi, hic angulus prodiisset $= 23''$, $40'''$, cum tamen consideratio centri grauitatis tantum $15''$ pro hac aequatione praebuisset. At si cum Bernoullio sumamus $\frac{m}{n} = 88$ fiet iste angulus $= 15''$, $19'''$, ita vt, si haec hypothesis esset veritati consentanea, tabulae nostrae solares manerent saluae, sin autem Neutoni sententia esset vera, correctiones nostrarum tabularum forent nimis paruae plus quam semisse, etiamsi eae Neutoni hypothesi sint superstructae. Vnde patet considerationem centri grauitatis effectum lunae nimis paruum exhibere.

§. 10. Cum igitur inuenerimus hanc aequationem

$$zzd\Phi = c\,dt\left(1 + \frac{n\,\text{cos}.\,\theta}{i\,m}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}$$

atque posito $z = \frac{cc}{u}$ pro altera aequatione

$$ddz - zd\Phi^2 = -\tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{mcc}{zz} + n\,\text{cos}.\,\theta\right)$$

proxime satisfaciat $u = c - k$ cos. Φ, ponamus reuera esse $u = c - k$ cos. $\Phi + P$. Primum ergo pro z substituatur $\frac{cc}{u}$, ac prior aequatio transibit in hanc:

$$c^3 d\Phi = uudt\left(1 + \frac{n\,\text{cos}.\,\theta}{i\,m}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}$$

posterior vero in hanc:

$$\frac{-ccddu}{uu} + \frac{2ccdu^2}{u^3} - \frac{ccd\Phi^2}{u} + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{muu}{cc} + n\,\text{cof}.\,\theta\right) = 0$$

seu multiplicando per u^4 erit

$$-ccuuddu + 2ccudu^2 - ccu^3 d\Phi^2 + \tfrac{1}{2}u^4 dt^2\left(\frac{muu}{cc} + n\,\text{cof}.\,\theta\right) = 0$$

At ex illa aequatione est:

$$c^6 d\Phi^2 = \tfrac{1}{2}mcu^4 dt^2\left(1 + \frac{n\,\text{cof}.\,\theta}{im}\right)^2 \text{ ideoque}$$

$$\tfrac{1}{2}u^4 dt^2 = \frac{c^5 d\Phi^2}{m} : \left(1 + \frac{n\,\text{cof}.\,\theta}{im}\right)^2 = \frac{c^5 d\Phi^2}{m} - \frac{2nc^5\,d\Phi^2\,\text{cof}.\,\theta}{imm}$$

reiectis sequentibus terminis vtpote nimis paruis; vnde fit $-ccuuddu + 2ccudu^2 - ccu^3 d\Phi^2 + c^3 uud\Phi^2 + \frac{nc^3 d\Phi^2 \cos.\theta}{m}(cc - \frac{2uu}{i}) = 0$. Cum autem ſit $u = c - k\cos\Phi + P$ erit $du = kd\Phi \sin.\Phi + dP$ et $ddu = kdd\Phi \sin.\Phi + kd\Phi^2 \cos.\Phi + ddP$. His autem valoribus loco du et ddu ſubſtitutis et per cc diviſis, erit, poſtquam in terminis per ſe minimis vbique loco u ſcriptum fuerit c ob k valde paruum:

$$ddP + Pd\Phi^2 = \frac{ncd\Phi^2 \cos.\theta}{m}(1 - \frac{2}{i})$$

in qua aequatione ob poſitum $z = c$, et n valde paruum elementum $d\Phi$ tanquam conſtans ſpectari poteſt. Indeque ergo reperitur $P = \frac{-nc(i-2)\cos.\theta}{mi(ii-1)}$

§. 11. Cum igitur inuento valore ipſius P ſit:

$$u = c - k\cos.\Phi - \frac{nc(i-2)\cos.\theta}{mi(ii-1)} \text{ erit}$$

$$z = \frac{cc}{c - k\cos.\Phi} + \frac{nc(i-2)\cos\theta}{mi(ii-1)}.$$

Ex tabulis ergo pro ellipſi computatis quaeratur more conſueto diſtantia terrae a ſole, tum vero ad eam addatur particula $\frac{nc(i-2)\cos.\theta}{mi(ii-1)}$, ſicque vera prodibit diſtantia ſolis a terra. A coniunctione ergo vſque ad primam quadraturam diſtantia ex tabulis inuenta augeri debet, tum vero a prima quadratura vſque ad alteram minui, atque a quadratura altera ad coniunctionem vſque denuo augeri. Conueniunt haec apprime cum titulis in tabulis ſolaribus inuentis, vbi etiam correctiones diſtantiae coſinui diſtantiae lunae a ſole repertae ſunt proportionales; tantum ergo ſupereſt, vt videamus, quantum vera quantitas harum correctionum ab illis differat. Hunc in finem indagemus aequationem maximam, quae erit $= \frac{nc(i-2)}{mi(1+ii)}$. Poſito ergo $c = 100000$ ob $i = 12,368314$, erit

$i-2$

$i-2=10,368314$, et $ii-1=151,9752$, atque adeo $\frac{c(i-2)}{i(ii-1)}=551,6005$ in hypotheſi $\frac{m}{n}=70$ haec correctio eſt $=7,8800$ et in hypotheſi Neut. $\frac{m}{n}=57$ ea eſt $=9,6772$ et in hypotheſi Bernoulliana $\frac{m}{n}=88$ ea fit $=6,2682$. Atque ſecundum hanc vltimam hypotheſin correctio maxima pro logarithmo diſtantiae ſolis a terra, qui ad ſex figuras decimales exhiberi ſolet, futura eſſet 27, cum in tabulis noſtris ſit 31. ex Neutoniana vero hypotheſi haec correctio prodiret $=42$; ita vt tabulae noſtrae non multum a veritate abludant, ſi quidem aſſumamus veritatem intra hypotheſes Neutoni, et Bernoulli, quod quidem eſt veriſimillimum conſiſtere.

§. 12. Facilius valor litterae P, qua correctio diſtantiae terrae a ſole continetur, inueniri poteſt, ſi excentricitas orbitae negligatur. Cum enim excentricitas ſit valde parua, ea in valore ipſius P nullam mutationem inferet. Quamobrem cum excentricitas pendeat a littera k ſumamus $k=0$, eritque ſi luna non adeſſet $z=c$, accedente autem luna ſit $z=c+P$, eritque P quantitas minima nullam ſenſibilem mutationem patiens, etiamſi excentricitas coniungatur. Poſito autem $z=c+P$ ob $zz=cc+2cP$ reiecto termino PP ob paruitatem, prima aequatio abibit in hanc formam:

$$c\,d\Phi+2P\,d\Phi=dt\left(1+\frac{n\cos.\theta}{im}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}$$

poſterior vero in hanc:

$$ddP-c\,d\Phi^2-P\,d\Phi^2=-\tfrac{1}{2}dt^2\left(m-\frac{2mP}{c}+n\cos.\theta\right)$$

Verum ſi luna abeſſet, foret $c\,d\Phi=dt\sqrt{\tfrac{1}{2}mc}$, et $\tfrac{1}{2}m\,dt^2=c\,d\Phi^2$, qui valor in terminis per ſe minimis adhiberi

poteſt

poteſt, pro maioribus vero erit

$$\tfrac{1}{2} mc\,dt^2 \left(1 + \frac{2n\,\mathrm{cos}.\theta}{im}\right) = cc\,d\Phi^2 + 4c\,\mathrm{P}\,d\Phi^2$$

ſeu $\tfrac{1}{2} m\,dt^2 = d\Phi^2 \left(c + 4\mathrm{P} - \frac{2nc\,\mathrm{cos}.\theta}{im}\right)$, quo valore in altera aequatione ſubſtituto habebitur.

$$dd\mathrm{P} - \mathrm{P}\,d\Phi^2 = -4\mathrm{P}\,d\Phi^2 + \frac{2ncd\Phi^2\,\mathrm{cos}.\theta}{im} + 2\mathrm{P}\,d\Phi^2 - \frac{ncd\Phi^2\,\mathrm{cos}.\theta}{m}$$

ſeu $dd\mathrm{P} + \mathrm{P}\,d\Phi^2 = \frac{2ncd\Phi^2\,\mathrm{cos}.\theta}{im} - \frac{ncd\Phi^2\,\mathrm{cos}.\theta}{m}$

ad cuius integrale inueniendum, quia $d\theta = i\,d\Phi$, et $d\Phi$ conſtans aſſumi poteſt, ponatur $\mathrm{P} = \alpha c\ \mathrm{coſ}.\ \theta$, erit $d\mathrm{P} = -\alpha icd\Phi\ \mathrm{ſin}.\ \theta$ et $dd\mathrm{P} = -\alpha iicd\Phi^2\ \mathrm{coſ}\ \theta$, quibus valoribus ſubſtitutis aequatio per $cd\Phi^2\ \mathrm{coſ}.\ \theta$ diuiſa erit:

$$-\alpha ii + \alpha = \frac{2n}{im} - \frac{n}{m} = \frac{-n(i-2)}{im}$$

ideoque $\alpha = \frac{n(i-2)}{mi(ii-1)}$ et $\mathrm{P} = \frac{nc(i-2)\,\mathrm{cos}.\theta}{mi(ii-1)}$

vti ante inuenimus.

§. 13. Cum igitur excentricitas in valorem ipſius P non ingrediatur, atque ſublata luna inuentum ſit $z = \frac{cc}{c-k\,\mathrm{coſ}.\Phi}$ erit, ſi vis lunae motum terrae afficiat:

$$z = \frac{cc}{c-k\,\mathrm{coſ}.\Phi} + \frac{nc(i-2)}{mi(ii-1)}\ \mathrm{coſ}\ \theta$$

qui valor in aequatione prius inuenta ſubſtitutus praebebit

$$\frac{c^3 d\Phi}{(c-k\,\mathrm{coſ}.\Phi)^2} + \frac{2nccd\Phi(i-2)\,\mathrm{coſ}.\theta}{mi(ii-1)(c-k\,\mathrm{coſ}.\Phi)} = dt\left(1 + \frac{n\,\mathrm{coſ}.\theta}{mi}\right) \sqrt{\tfrac{1}{2} mc}$$

Quae aequatio reiectis terminis minimis tranſibit in hanc

$$dt\sqrt{\tfrac{1}{2} mc} = \frac{c^3 d\Phi}{(c-k\,\mathrm{coſ}.\Phi)^2} - \frac{ncd\Phi\,\mathrm{coſ}.\theta}{mi} + \frac{2ncd\Phi(i-2)\,\mathrm{coſ}.\theta}{mi(ii-1)}$$

Ex qua ad datum tempus t verus angulus AST definietur. Ponamus ſi luna euaneſceret, tempori t reſpondere anomaliam veram v, eritque $dt\sqrt{\tfrac{1}{2} mc} = \frac{c^3 dv}{(c-k\,\mathrm{coſ}\ v)^2}$ nunc autem accedente luna ſit angulus AST $= \Phi = v + \omega$, erit $\frac{c^3 d\Phi}{(c-k\,\mathrm{coſ}.\Phi)^2} = \frac{c^3 dv}{(c-k\,\mathrm{coſ}.v)^2} + c\,d\omega$ proxime, quia tam k quam

quam ω ſunt quantitates minimae, his ergo valoribus ſubſtitutis fiet:

$$0 = d\omega - \frac{nd\Phi cof\theta}{mi}\left(1 - \frac{2(i-2)}{ii-1}\right)$$

et integrando ob $d\Phi = \frac{d\theta}{i}$ habebitur:

$$\omega = \frac{n fin.\theta}{mii}\left(1 - \frac{2(i-2)}{ii-1}\right) = \frac{n fin.\theta}{m}.\ 0,00564505.$$

Tantus ergo angulus ad anomaliam veram ex tabulis ellipticis inuentam v addi debet, qui aliquanto minor eſt eo, quem ſupra §. 9. nulla ipſius orbitae variationis habita ratione elicuimus. Correctio ergo haec fit maxima dum luna in quadraturis verſatur eritque tum, vbi ſin. $\theta = 1$, aequalis angulo, cuius menſura eſt $= \frac{n}{m}$. 0,00564505. Quare pro variis hypotheſibus fractionis $\frac{m}{n}$ haec correctio maxima ſequenti modo ſe habebit

ſi $\frac{m}{n} = 57$ erit $\omega = 20'', 25'''$

ſi $\frac{m}{n} = 70$ erit $\omega = 16'', 38'''$

ſi $\frac{m}{n} = 88$ erit $\omega = 13'', 14'''$

§. 14. Propter lunam ergo locus ſolis ex tabulis ellipticis inuentus duplici modo corrigi debet, quorum alter ſpectat longitudinem ſolis in ecliptica, alter diſtantiam ſolis a terra. Primo ſcilicet correctio longitudinis ſolis ita ſe habet, vt dum luna a coniunctione ſolis ad oppoſitionem progreditur addi contra vero a plenilunio vſque ad nouilunium a loco ſolis ſubtrahi debeat: haecque correctio eſt ſinui diſtantiae lunae a ſyzygiis proportionalis, vnde innoteſcit ſi modo correctio maxima, quae quadraturis reſpondet, fuerit cognita. Vidimus autem hanc correctionem pro variis hypotheſibus ſequenti modo ſe habere:

Hypothesis			Maxima correctio loci solis in ecliptica
Neutoniana $\frac{m}{n}$	=	57	20″, 25‴
ex Volumine $\frac{m}{n}$	=	70	16″, 38‴
Bernoulliana $\frac{m}{n}$	=	88	13″, 14‴

Deinde distantia solis a terra inuenta ex tabulis ita debet corrigi, vt ea ab vltimo quadrante vsque ad priorem, quo tempore minor lunae pars quam semissis est illuminata, augeri, a prima autem quadratura ad alteram, quo tempore maior lunae portio quam semissis illuminata spectatur, minui debeat. Est vero haec correctio cosinui anguli, quo luna a syzygiis distat, proportionalis: maxima ergo est in ipsis syzygiis, vbi logarithmus distantiae solis a terra, qui ad 6 notas post characteristicam sequentes exhiberi solet, sequentibus numeris vel augeri vel diminui debet.

Hypothesis			Maxima Correctio Log. distantiae solis a terra
Neutoniana $\frac{m}{n}$	=	57	42
ex Volumine $\frac{m}{n}$	=	70	34
Bernoulliana $\frac{m}{n}$	=	88	27.

§ 15. In tabulis autem meis solaribus, vbi has correctiones ex consideratione communis centri grauitatis terrae et lunae elicui, quanquam hypothesi Neutoniana sum vsus, tamen eas notabiliter minores obtinui, quam hic prodierunt. Namque maxima correctio loci solis in ecliptica ibi erat 15″, cum hic ex eadem hypothesi 20″, 25‴ sit inuenta; atque maxima correctio loga-

rith-

rithmi distantiae solis a terra ibi erat 31, hic vero 42 quarum vtraque hic fere triente maior est quam ibi. Ex quo intelligitur commune centrum grauitatis terrae et lunae non secundum regulas Keplerianas in ellipsi incedere, vti tum assumseram. Quanquam autem iam ibi innueram, hoc principium examen geometricum non sustinere, tamen eius aberratio non tanta videbatur, quanta nunc est reperta. Hancobrem tabulae illae solares, si hypothesis Neutoniana veritati esset consentanea, vtique emendatione indigerent: at cum Neutonus lunae vim nimis magnam facere videatur, emendatio ista tabulas magis a veritate abduceret. Si enim has tabulas ad mentem Celeb. Bernoullii, qui vim lunae in ratione 8 ad 5 fere minuit, sequi vellem, correctiones ibi adhibitas aliquantillum imminuere deberem. Quare si veritas intra hos duos quasi limites contineatur, atque valor $\frac{m}{n}$ aliquantillum maior sit quam 70, puta 75 tum eae ipsae correctiones proditurae essent, quae in tabulis sunt vsurpatae. Talis autem hypothesis propius ad mentem Cel. Bernoullii accederet, atque corpus lunae paulisper tantum rarius esset terra; quae ambae rationes tantum ponderis habere videntur, vt tabulae ante traditae adhuc nulla emendatione indigeant; hancque ob causam eas immutatas relinquo.

OBSERVATIO ECLIPSEOS SOLARIS

d. 25 Iulii 1748 Tubingae facta.

a Georgio Wolffg. Krafft.

Imago ſolis, cum maculis in eo haerentibus, circa horam 9 a. m. erecta.

Tab. XVII. Fig. 1. Inſtrumenta huic obſeruationi adhibita fuerunt 1. Tubus terreſtris 4 pedum, optimae notae, obiecta erecta ſiſtens, cuius vitrum oculare fumo erat obductum. 2. Horologium portatile Londinenſe, ſingula minuta prima oſtendens; ad quod corrigendum inſeruiit. 3. Quadrans ligneus, radii 1 pedis, in quo ſinguli gradus diuiſi ſunt in ſuos quadrantes; quo et altitudo meridiana, et reliquae ad corrigendum horologium neceſſariae, a me fuerunt captae. 4. Thermometrum Fahrenheitiano modo diuiſum, et ab inſigni artifice Amſtelodamenſi Prinz elaboratum. His itaque obſeruaui

Tempore correcto medio ante mer.		
9^h	$58'$	Initium Eclipſeos in A
10	10	Contingit Lunae diſcus maculam *a*.
	52	— — — — *b*.
11	2	— — — — *c*.
	9	— — — — *d*.
	25	— — — — *e*.
	54	Deſerit Lunae diſcus maculam *c*.
poſt merid.		
22	4	— — — — *b*.

Nubes

Nubes Solem abſcondunt.

37 Deſerit Lunae diſcus maculam *d*.

57 — — — — *e*.

1 10 Finis Eclipſeo in B.

Thermometrum, ſoli libero durante tota Eclipſi expoſitum, monſtrauit paullo ante initium Eclipſeos 98 gradus; circa medium Eclipſeos autem 82 gradus; ita vt ex frigore, durante Eclipſi oborto, per gradus 16 depreſſum fuerit. Poſt finem Eclipſeos autem breui tempore iterum aſcendit ad gradus 100. Vitrum cauſticum amplitudinis 3 poll. circa medium Eclipſeos viſum fuit, multo minus virium habere in comburendo aſſere laeuigato, abietino, et, ex naturali colore, albo.

Solis altitudo meridiana deprehenſa fuit 61° 0′. Barometri altitudo hoc tempore erat 28 $\frac{51}{100}$ pollicum Londinenſ. duo decimalium.

DE ABERRATIONE FIXARVM.

AVCTORE

Chr. Nic. de Winsheim.

Quae ſequuntur de aberratione fixarum computanda praecepta, e commentariis Pariſinis aliorumque doctiſſimorum virorum ſcriptis, in vſum obſeruatorii Petropolitani in ordinem redacta, vel ideo hic exhibere viſum fuit, quoniam fallimur, aut nonnullis ob ſimplicitatem ſolam ſe commendabunt.

Manuductio

ad calculum aberrationis ſtellarum fixarum quoad Declinationem.

Ante omnia exacte determinanda ſunt elementa calculi, ſc. Longitudo, Latitudo, Aſcenſio recta et Declinatio, e catalogo quodam fixarum melioris notae e. g. Maraldi, Flamſteedii (ad initium anni, pro quo calculus inſtituitur) deſumenda.

α) Determinandus eſt angulus ad ſtellam E per vnam e ſequentibus analogiis.

Vt ſinus compl. latitud.	*Vt ſinus compl. decl. ſ. diſtantiae a polo boreo l. auſtrali.*
Ad diſtantiam aſc. rectae a coluro ſolſtitii; (*)	*Ad long. ſ. diſt. a col. ſolſtitiorum;* (**)
Ita obliquitas eclipticae	*Ad*

(*) (**) Longitudine ſolis et Aſc. recta exiſtente in prima quadratura vtimur compl. ad 90°
ſecunda quadratura ſubtractis 90° reſiduum appellatur diſtantia a coluro ſolſtiali.

Ad angulum E *ad ſtellam ſ. ad angulum poſitionis.* (***)	*Ita obliquitas eclipticae Ad ang.* E, *ſ. poſitionis.* (****)

β) Hoc angulo E inuento fiat analogia ſequens:

Vt ſinus latitudinis ſtellae
Ad radium;
Ita tangens anguli E
Ad tangentem anguli, qui dicitur A.

Hic *angulus* eſt *minor recto ſ. acutus*

Angulo E acuto { Si ſtella eſt in ſignis aſcend. ♑ ♒ ♓ ♈ ♉ ♊ cum latit. ſeptentrionali
Aut. ſi ſtella eſt in ſignis deſcend. ♋ ♌ ♍ ♎ ♏ ♐ cum lat. auſtrali

Et tunc ſtella eſt in maxima elongatione a polo, cognomine latitudinis, poſt tria ſigna, quando ☉ fuit in M. (*****)

Angu-

---

tertia quadratura ſubtractis 180°. ſumitur compl. ad 90 grad.
quarta quadratura ſubtractis 9. ſignis ſ. 270 • reſiduum appellatur diſtantia a coluro ſolſt. hyberni.

(***) (****) Hic angulus eſt *Obtuſus*, ſi cadit intra circulum quem polus eclipticae circa polum boreum deſcribit.
Rectus, ſi cadit in ipſa peripheria praedicti circuli.
Acutus, ſi cadit extra peripheriam huius circuli a polo eclipticae circa polum mundi deſcriptum.

(*****) Vide infra γ.

Angulo E obtuſo { Si ſtella eſt in ſecundo quadrante eclipticae cum lat. boreali.
Aut in quarto quadrante eclipticae cum lat. meridionali ;

Et tunc ſtella eſt proxima polo eiusdem nominis ac latitudo poſt 3. ſigna, vbi ☉ fuit in M.

Idem hic *angulus* A erit *maior recto ſ. obtuſus.*

Angulo E acuto { Si ſtella eſt in ſign. deſcend. ♋ ♌ ♍ ♎ ♏ ♐. latit. habens ſeptentrionalem.
Aut ſi ſtella eſt in ſign. aſcendent. ♑ ♒ ♓ ♈ ♉ ♊ cum lat. auſtrali ;

Et tunc quidem pro elapſis tribus ſignis a puncto M. ſc. ☌ ☉ ✱ eadem ſtella eſt maxime vicina ſ. proxima polo eiusdem denominationis cum latitudine.

Angulo E obtuſo { Stella exiſtente in I^{ma} quadratura eclipticae ♈ ♉ ♊ cum lat. boreali.
Stella exiſtente in 3^{tia} quadr. ♎ ♏ ♐ cum lat. meridionali,

Et tunc quidem ſtella erit maxime remota a polo eiusdem nominis cum latitudine, poſt elapſa tria ſigna a tempore, vbi ſol fuit in M.

γ) Hic

γ) Hic Angulus A (ſiue tangens antea inuenta) ſubtrahendus eſt a longitudine ſtellae adiectis 360 gr. ad longitudinem (ſi alias ſubtractio fieri nequit) vt habeatur locus ſolis M quo *apparens declinatio erit nulla*, cui ſi addantur 6. ſigna, dabitur alter locus N in quo aberratio iterum erit nulla.

Tribus ſignis ante et poſt hunc locum M. aberratio eſt maxima, ſecundum praecedentem determinationem. §. β. e. g.

Pro Lyra 1739.

♑	9	4	57	locus ☉ vbi aberr. eſt nulla	27. Dec.
♋	3	4	57		27. Iun.
					28. Sept. verſ. boream.
♎	6	4	57	loc. ☉ vbi aberratio eſt maxima	
♈	0	4	57		
					25. Mart verſ. auſtrum

Sc. quia angulus A. erat acutus pariter ac ang. E, et ſtella verſabatur in ſigno aſcendente ♑ poſt tria ſigna vbi aberratio erat nulla, vti hic in ♈, ſtella maxime remota eſt a polo boreo, qui eiusdem nominis eſt cum latititudine ſtellae.

δ) Tandem fiat analogia:

Vt ſinus anguli A;
Ad ſinum anguli E:
Ita ſinus 20″,
Ad maximam aberrationem declinationis apparentis a vera.

Hac aberratione maxima pro 90°. inuenta, eius capiatur dimidium pro 30°.

Et deinde fiat

Vt ſinus totus,

Ad ſinum 60° ;

Ita maxima aberratio

Ad aberrationem pro 60°.

Sicque aberratio pro ſingulis menſibus determinata erit : quae poſtea aequaliter diſtribui poteſt.

Aut ſi mauis adhibe ſequentem analogiam pro determinanda quantitate declinationis quouis tempore dato.

Quaere longitudinem ſolis pro illo tempore pro quo cupis declinationis aberrationem determinare : Subtrahe illam a longitudine ſtellae inuentae, quando aberratio declinationis eſt nulla, haec differentia appelletur D.

Infer *Vt radius*,

Ad ſinum arcus D:

Ita maxima aberratio in declinatione,

Ad aberrationem tempore dato.

ε) Regula pro aberratione fixae rite applicanda.

Si latitudo ſtellae borealis:
- Maxima aberratio ſtellae, verſus polum boreum appellatur E. ſ. *Elongatio*, et eſt ſubtrahenda.
- Maxima aberratio ſtellae verſus polum auſtralem appellatur A. ſiue *Approximatio* et erit addenda.

Si latitudo auſtralis:
- Maxima aberratio verſus auſtrum dicitur E ſiue *Elongatio*, et eſt ſubtrahenda.
- Maxima aberr. verſus boream appellatur A. ſiue *Approximatio*, et erit addenda.

Manu-

Manuductio

ad calculum aberrationis ſtellarum fixarum, quoad Latitudinem.

I.

Longitudo et latitudo ſtellae e catalogo fixarum pro initio anni determinandae ſunt.

2. Deinde pro inuenienda aberratione fixae in latitudine adhibeatur ſequens analogia:

Vt radius, ſiue ſinus totus;
Ad ſinum latitudinis ſtellae:
Ita ſinus 20″;
Ad ſinum aberrationis maximae.

niſi magis volupe fuerit ſequentem mediante hac analogia ad dena minuta prima latitudinum ſtellarum a D. de Fontaine de Crutes (*) conſtructam adhibere tabulam, quam in commodum lectoris hic inſerendam curauimus.

(*) Mr Fontaine de Crutes Traité complet ſur l' aberration des fixes avec une hiſtoire générale de l' aſtronomie: à Paris 1744. 8°.

Gr.	Min.	Min.sec	P.C.	°	′	″	P. C	°	′	″	P. C.
0	00	00	00	6	00	02	09	12	00	04	16
	10	00	06		10	02	15		10	04	22
	20	00	12		20	02	21		20	04	27
	30	00	17		30	02	26		30	04	33
	40	00	23		40	02	32		40	04	39
	50	00	29		50	02	38		50	04	44
1	00	00	35	7	00	02	44	13	00	04	50
	10	00	41		10	02	50		10	04	56
	20	00	47		20	02	55		20	04	61
	30	00	53		30	02	61		30	04	67
	40	00	58		40	02	67		40	94	73
	50	00	64		50	02	72		50	04	78
2	00	00	70	8	00	02	78	14	00	04	84
	10	00	76		10	02	84		10	04	90
	20	00	82		20	02	90		20	04	95
	30	00	88		30	02	95		30	05	01
	40	00	93		40	03	01		40	05	07
	50	00	99		50	03	07		50	05	12
3	00	01	05	9	00	03	13	15	00	05	18
	10	01	11		10	03	19		10	05	23
	20	01	16		20	03	24		20	05	29
	30	01	22		30	03	30		30	05	34
	40	01	28		40	03	36		40	05	40
	50	01	33		50	03	41		50	05	45
4	00	01	39	10	00	03	47	16	00	05	51
	10	01	45		10	03	53		10	05	57
	20	01	51		20	03	59		20	05	62
	30	01	56		30	03	64		30	05	68
	40	01	62		40	03	70		40	05	74
	50	01	68		50	03	76		50	05	79
5	00	01	74	11	00	03	82	17	00	05	85
	10	01	80		10	03	88		10	05	90
	20	01	86		20	03	93		20	05	96
	30	01	91		30	03	99		30	06	01
	40	01	97		40	04	05		40	06	07
	50	02	03		50	04	10		50	06	12

Gr.

° ′	″ P. C	° ′	″ P. C.	° ′	″ P. C.
18 00	- 06 18	24 00	- 08 13	30 00	- 10 00
10	- 06 23	10	- 08 18	10	- 10 05
20	- 06 29	20	- 08 24	20	- 10 10
30	- 06 34	30	- 08 29	30	- 10 15
40	- 06 40	40	- 08 34	40	- 10 20
50	- 06 45	50	- 08 40	50	- 10 25
19 00	- 06 51	25 00	- 08 45	31 00	- 10 30
10	- 06 56	10	- 08 50	10	- 10 35
20	- 06 62	20	- 08 56	20	- 10 40
30	- 06 67	30	- 08 61	30	- 10 45
40	- 06 73	40	- 08 66	40	- 10 50
50	- 06 78	50	- 08 72	50	- 10 55
20 00	- 06 84	26 00	- 08 77	32 00	- 10 60
10	- 06 89	10	- 08 82	10	- 10 65
20	- 06 95	20	- 08 87	20	- 10 70
30	- 07 00	30	- 08 92	30	- 10 74
40	- 07 06	40	- 08 98	40	- 10 79
50	- 07 11	50	- 09 04	50	- 10 84
21 00	- 07 17	27 00	- 09 09	33 00	- 10 89
10	- 07 22	10	- 09 14	10	- 10 94
20	- 07 27	20	- 09 19	20	- 10 99
30	- 07 33	30	- 09 24	30	- 11 03
40	- 07 38	40	- 09 29	40	- 11 08
50	- 07 44	50	- 09 34	50	- 11 13
22 00	- 07 49	28 00	- 09 39	34 00	- 11 18
10	- 07 54	10	- 09 44	10	- 11 23
20	- 07 60	20	- 09 50	20	- 11 28
30	- 07 65	30	- 09 55	30	- 11 32
40	- 07 70	40	- 09 60	40	- 11 37
50	- 07 76	50	- 09 65	50	- 11 42
23 00	- 07 81	29 00	- 09 70	35 00	- 11 47
10	- 07 86	10	- 09 76	10	- 11 52
20	- 07 92	20	- 09 81	20	- 11 56
30	- 07 97	30	- 09 85	30	- 11 61
40	- 08 02	40	- 09 90	40	- 11 66
50	- 08 08	50	- 09 95	50	- 11 70

°	′		″	P.C.	°	′		″	P.C.	°	′		″	P.C.
36	00	-	11	76	42	00	-	13	38	48	00	-	14	86
	10	-	11	80		10	-	13	42		10	-	14	90
	20	-	11	85		20	-	13	47		20	-	14	94
	30	-	11	89		30	-	13	51		30	-	14	97
	40	-	11	94		40	-	13	55		40	-	15	01
	50	-	11	99		50	-	13	60		50	-	15	05
37	00	-	12	04	43	00	-	13	64	49	00	-	15	10
	10	-	12	08		10	-	13	68		10	-	15	13
	20	-	12	13		20	-	13	72		20	-	15	17
	30	-	12	17		30	-	13	76		30	-	15	20
	40	-	12	22		40	-	13	80		40	-	15	24
	50	-	12	26		50	-	13	85		50	-	15	28
38	00	-	12	31	44	00	-	13	90	50	00	-	15	32
	10	-	12	35		10	-	13	93		10	-	15	36
	20	-	12	40		20	-	13	97		20	-	15	39
	30	-	12	44		30	-	14	01		30	-	15	43
	40	-	12	49		40	-	14	06		40	-	15	46
	50	-	12	53		50	-	14	10		50	-	15	50
39	00	-	12	59	45	00	-	14	14	51	00	-	15	54
	10	-	12	63		10	-	14	18		10	-	15	58
	20	-	12	67		20	-	14	22		20	-	15	62
	30	-	12	72		30	-	14	26		30	-	15	66
	40	-	12	77		40	-	14	31		40	-	15	70
	50	-	12	81		50	-	14	35		50	-	15	74
40	00	-	12	86	46	00	-	14	39	52	00	-	15	77
	10	-	12	90		10	-	14	44		10	-	15	81
	20	-	12	95		20	-	14	48		20	-	15	84
	30	-	12	99		30	-	14	52		30	-	15	87
	40	-	13	03		40	-	14	57		40	-	15	91
	50	-	13	08		50	-	14	62		50	-	15	94
41	00	-	13	12	47	00	-	14	66	53	00	-	15	97
	10	-	13	16		10	-	14	70		10	-	16	00
	20	-	13	21		20	-	14	73		20	-	16	04
	30	-	13	25		30	-	14	76		30	-	16	07
	40	-	13	29		40	-	14	80		40	-	16	11
	50	-	13	34		50	-	14	83		50	-	16	14

Gr.

°	′	″	P. C.	°	′	″	P. C.	°	′	″	P. C.
54	00	16	18	60	00	17	32	66	00	18	27
	10	16	21		10	17	35		10	18	29
	20	16	25		20	17	38		20	18	32
	30	16	28		30	17	40		30	18	34
	40	16	31		40	17	43		40	18	36
	50	16	35		50	17	46		50	18	39
55	00	16	38	61	00	17	49	67	00	18	41
	10	16	41		10	17	52		10	18	43
	20	16	45		20	17	55		20	18	45
	30	16	48		30	17	57		30	18	47
	40	16	51		40	17	60		40	18	50
	50	16	55		50	17	63		50	18	52
56	00	16	58	62	00	17	66	68	00	18	54
	10	16	61		10	17	69		10	18	56
	20	16	65		20	17	71		20	18	58
	30	16	68		30	17	74		30	18	60
	40	16	71		40	17	77		40	18	63
	50	16	75		50	17	79		50	18	65
57	00	16	77	63	00	17	82	69	00	18	67
	10	16	80		10	17	85		10	18	69
	20	16	83		20	17	87		20	18	71
	30	16	86		30	17	90		30	18	73
	40	16	89		40	17	93		40	18	76
	50	16	92		50	17	95		50	18	78
58	00	16	96	64	00	17	98	70	00	18	80
	10	16	99		10	18	00		10	18	82
	20	17	02		20	18	03		20	18	84
	30	17	05		30	18	05		30	18	85
	40	17	08		40	18	07		40	18	87
	50	17	11		50	18	10		50	18	89
59	00	17	14	65	00	18	13	71	00	18	91
	10	17	17		10	18	15		10	18	93
	20	17	20		20	18	17		20	18	95
	30	17	23		30	18	19		30	18	96
	40	17	26		40	18	22		40	18	98
	50	17	29		50	18	24		50	19	00

Gr.

°	′	″	P.C.	°	′	″	P.C.	°	′	″	P.C.
72	00	19	02	78	00	19	56	84	00	19	89
	10	19	04		10	19	57		10	19	90
	20	19	06		20	19	59		20	19	90
	30	19	07		30	19	60		30	19	91
	40	19	09		40	19	61		40	19	92
	50	19	11		50	19	63		50	19	92
73	00	19	13	79	00	19	64	85	00	19	93
	10	19	14		10	19	65		10	19	93
	20	19	16		20	19	66		20	19	94
	30	19	17		30	19	67		30	19	94
	40	19	19		40	19	68		40	19	94
	50	19	20		50	19	69		50	19	95
74	00	19	22	80	00	19	70	86	00	19	95
	10	19	24		10	19	71		10	19	95
	20	19	25		20	19	72		20	19	96
	30	19	27		30	19	73		30	19	96
	40	19	29		40	19	73		40	19	96
	50	19	30		50	19	74		50	19	97
75	00	19	32	81	00	19	75	87	00	19	97
	10	19	33		10	19	76		10	19	97
	20	19	35		20	19	77		20	19	97
	30	19	36		30	19	77		30	19	97
	40	19	38		40	19	78		40	19	98
	50	19	39		50	19	79		50	19	98
76	00	19	41	82	00	19	80	88	00	19	98
	10	19	42		10	19	81		10	19	98
	20	19	44		20	19	82		20	19	98
	30	19	45		30	19	82		30	19	98
	40	19	46		40	19	83		40	19	99
	50	19	48		50	19	84		50	19	99
77	00	19	49	83	00	19	85	89	00	19	99
	10	19	50		10	19	86		10	19	99
	20	19	51		20	19	86		20	19	99
	30	19	52		30	19	87		30	19	99
	40	19	54		40	19	88		40	20	00
	50	19	55		50	19	88		50	20	00
								90	00	20	00

Por-

Porro comparetur locus ſolis cum loco ſtellae, et notetur, ſole et ſtella exiſtente, in coniunctione, aberrationem eſſe nullam.

In quadraturis autem ſ. tribus ſignis elapſis a coniunctione ſ. oppoſitione aberrationem eſſe maximam, et quidem:

Tribus ſignis poſt oppoſitionem, aberrationem eſſe eiusdem denominationis cum latitudine, et per conſequens *Subtrahendam*.

Si latitudo borealis, aberratio erit borealis.

Si latitudo auſtralis, aberratio erit auſtralis.

Poſt coniunctionem autem in quadratura, ſiue poſt tria ſigna a coniunctione, aberratio quoad latitudinem iterum erit maxima, ſed aſſumet denominationem contrariam latitudini et erit *Additiua*.

Si latitudo borealis, aberratio erit meridionalis.

Si latitudo meridionalis, aberratio erit borealis.

3. Vt autem aberratio, quoad latitudinem pro quouis die determinetur praeſuppoſitis quae §. §. antecedentibus determinata ſunt,

Conſtruatur abacus pro ſingulis diebus totius anni e cognita aberratione maxima.

Sc. in ſyzigiis aberratio eſt nulla.

90° poſt ſyz. ſiue 3. ſignis elapſis aberratio eſt maxima, et quidem determinatae quantitatis per §. praecedentem.

30° ſiue vno ſigno elapſo aberrationis capiatur dimidium: et pro

60°. siue pro duobus signis ante vel post syzigias adhibeatur sequens analogia :

Vt radius :

Ad sinum 60° ;

Ita aberratio maxima pro latitudine determinata :

Ad aberrationem respondentem.

Hae aberrationes itaque pro singulis signis determinatae erunt, quibus conueniens dies mensis ex ephemeridibus facile adaptari poterit, nempe :

Mediante interpolatione simplici hae aberrationes per spatium 30. siue 31. dierum aequaliter distribui, aut per 3. partes mensis e. g. pro 1. 11. 21. et 31. die mensis determinari possunt.

Qui autem summam desiderat praecisionem siue exactitudinem ille adhibeat sequentem illationem :

Vt sinus totus :

Ad sinum distantiae solis tempore dato a circulo latitudinis verae ;

Ita sinus aberrationis maximae in latitudinem :

Ad sinum aberrationis quaesitae.

Ma-

Manuductio

ad calculum aberrationis ſtellarum fixarum quoad Longitudinem.

Maxima aberratio ſtellae in longitudinem obſeruatur in ſyzigiis, et eſt nulla in quadraturis. Cognita igitur longitudine ſtellae, huic addantur 3 ſigna pro obtinenda prima quadratura, vbi aberratio eſt nulla, quibus ſi adiiciantur 6 ſigna obtinebitur locus oppoſitus, ſiue vltima quadratura in qua aberratio iterum erit nulla.

A prima quadratura ad oppoſitionem longitudo excedit veram verſus *Orientem*, et eſt maxima, in oppoſitione ſemperque diminuitur vſque ad vltimam quadraturam, vbi aequalis.

Ab vltima quadratura ad coniunctionem longitudo excedit veram verſus *Occidentem*, et eſt maxima, in coniunctione a qua iterum imminuitur et aequabit nihilo in prima quadratura vbi ſc. longitudo apparens eſt aequalis longitudini verae.

2. Pro determinanda quantitate aberrationis in longitudinem

inferatur

Vt coſinus latitudinis,
Ad ſinum totum;
Ita ſinus 20″,
Ad ſinum aberrationis maximae in longitudinem.

3. Regula pro applicanda aberratione maxima erit ſequens

α A prima quadratura ad oppositionem, et ab ☍ ad secundam siue vltimam quadraturam, aberratione vergente ad Orientem, pars proportionalis huius aberrationis, respondens distantiae solis a quadratura, erit *subtrahenda*.

β Ab vltima siue secunda quadratura, vbi aberratio iterum erit nulla, ad coniunctionem, et a ☌ ad primam, maxima aberratione vergente ad occidentem, erit *addenda*.

Manuductio

ad calculum aberrationis stellarum fixarum quoad Ascensionem rectam.

Cognitis elementis longitudinis, latitudinis, declinationis et ascensionis rectae pro initio anni cuiusdam, et determinato angulo ad stellam, siue E, qui et positionis dicitur, et per regulas supra traditas, *l.* rectus *l.* acutus aut obtusus esse potest;

α Instituatur analogia sequens

Vt sinus latitudinis stellae,
Ad radium:
Ita cotangens (s. compl. tang.) anguli E,
Ad tangentem anguli B.

Hic angulus B est *acutus*

Angulo E acuto { Stella existente in signis descendentibus cum latitudine boreali.
Stella existente in signis ascendentibus cum latitudine meridionali.

Sole

Sole exiſtente in X infra determinando, addantur 3 ſigna pro inueniendo loco, vbi aberratio aſcenſionis rectae eſt minima, et quidem ad occidentem.

Angulo E obtuſo { Si ſtella erit in 1^{mo} quadrante eclipticae cum latitudine boreali.
Aut in 3^{tio} quadrante cum latitudine meridionali.

Sole exiſtente in X, mox determinando, additis tribus ſignis, aſcenſio recta erit maxima, et quidem ad orientem.

Angulus B eſt obtuſus.

Angulo E acuto { Stella exiſtente in ſignis aſc. cum latitudine boreali.
Stella exiſtente in ſignis deſc. cum latitudine meridionali.

Sole exiſtente in X iamiam determinando, adiectis 3 ſignis ad hunc locum, aſcenſio recta erit minima et ad occidentem.

Angulo E obtuſo { Stella exiſtente in 2 quadratura cum latitudine ſeptentrionali.
Stella exiſtente in vltimo quadrante cum latitudine meridionali.

Sole exiſtente in X, addantur tria ſigna pro determinando loco vbi aſcenſio recta erit maxima et quidem ad orientem.

β. Angulus hic inuentus B ſubtrahatur a longitudine ſolis (abditis 360° ſi opus) vt inueniatur angulus X, qui monſtrat locum vbi aſcenſio recta apparens aequalis eſt verae, ſeu variatio aſcenſionis rectae aut aberratio eſt nulla, idem valet de loco ſolis X cum adiectis 6 ſignis ſiue angulo V.

Tria ſigna ante et poſt hunc locum aſcenſio recta eſt maxima et vel ad orientem vel occidentem, prouti ſupra inuenta.

γ. Quo autem quantitas ipſa eo exactius determinetur, ſequentem in modum producendum.

addatur { α Longarithmus ſinus totius
β — — ſinus 20″
γ — — Coſinus ang. E. ſ. ad ſtellam per declinationem iam inuentus.

de hac ſumma

ſubtrahatur { α Logarith. ſinus arcus B.
β — — coſinus declinationis ſtellae.

Reſiduum erit numerus ſecundorum maximae aberrationis, quoad aſcenſionem rectam.

δ Cognita maxima aberratione, facilis erit diſtributio pro ſingulis menſibus, aut in dies decem, vel ſi mauis in dies ſingulos vniuscuiusuis menſis pari ratione ac ſupra monſtratum eſt.

Vel ſi mauis ſequenti vtendum erit analogia.

Vt ſinus totus,

Ad ſinum arcus (ſc. differentia longitudinis X*)*

§ 2 *determinato:*

Ita

Ita aberratio maxima aſcenſionis rectae
Ad aberrationem tempore quaeſito.

E Regula pro applicanda aberratione maxima aſcenſionis rectae iam ſupra indicata, hic maioris euidentiae cauſſa iterum repetimus.

Si aberratio aſcenſionis rectae eſt ad orientem; tunc eſt ſubtrahenda.

Si aberratio aſcenſionis rectae eſt ad occidentem eſt addenda.

Eſt autem ad orientem, ſi 3 ſigna addantur loco X.

Ad occidentem ſi tria ſigna addantur ad locum oppoſitum V.

* * *

Dum haec ſub prelo ſudabat diſſertatio, incidit in manus noſtras epiſtola Celeberrimi Anglorum Aſtronomi *Iacobi Bradleii* ad Illuſtriſſimum Comitem de *Macclesfield*, inſignem aſtronomiae promotorem data, qua motum quendam apparentem in fixis, a motu nodorum lunae pendentem, expoſuit, quaeque in actis Anglicanis volumine XLV. No 485. pro menſe Ianuario 1747-8 legitur. Placuit igitur ob materiae connexionem, quam ibi pro nouo hoc aberrationis fixarum genere p. 21. ſuppeditauit regulam, hic, quoniam ſpatio excludimur, breuibus inſerere.

Subtrahatur diſtantia nodi ascendentis lunae, a principio arietis computata, ab aſcenſione recta ſtellae, et notetur reſiduum:

Deinde fiat analogia:

Vt radius,

Ad ſinum reſidui antea inuenti;

Ita 9. minuta ſecunda,

Ad numerum minutorum ſecundorum, quibus ſtella propior erit aut remotior polo vero, quam medio;

Vbi notandum, ſi reſiduum minus eſt quam 180° ſtellam propiorem fore polo vero, quam medio;

Contrarium autem obtinere, ſi idem reſiduum excedat 180°.gradus.

OB-

OBSERVATIONES
ALIQVOT COELESTES
Lipsiae habitae aestate an. 1746.

a Godofredo Heinsio.

Postquam locum nactus sum, ex quo liber coeli prospectus patet, animum applicui, ad obseruationes instituendas astronomicas, ex quibus situs Lipsiae geographicus congnosci posset. Hunc in finem sequentibus vsus sum instrumentis.

Quadrantem adaptandum curaui orichalceum, ab artifice *Edm. Culpeper*, Anglo, bene elaboratum, cuius diuisio ad bina minuta extenditur; in qua tamen non solum singula minuta, verum etiam minutorum quadrantes aestimare licet. Radius eius a centro ad extremam diuisionis peripheriam est $1\frac{1}{2}$. ped. Anglic. Dioptris telescopicis iste instructus est, quarum focus communis continet reticulum ex quatuor filis tenuissimis argenteis, decussatim sub angulis semirectis compositum, existente lentium distantia 19. pollic. anglican. Instrumentum hoc ope cochlearum infinitarum optime tractari et in omnem plagam commode dirigi potest, ita vt absque obseruatoris incommodo et altitudines syderummetiri et examen instrumenti successu felici instituere liceat. Facto hoc examine plus simplici vice, consentientibus obseruationibus, expertus sum, lineam fiduciae dioptrarum aberrare a radio nonagesimum gradum connectente, angulo $19\frac{1}{4}$ minut. quae ab obseruatis secundum diuisionem limbi Quadrantis alti-

altitudinibus ſubtrahi debent, vt altitudines ſyderum ſuper horizonte innoteſcant.

Horologio deinde vtor oſcillatorio bonae notae, cuius motum vniformem facto per reuolutiones ſyderum examine probe intellexi. Iuxta hoc horologium ad motum ſolis medium proxime compoſitum, meridiem cuiuslibet diei, quantum pro coeli clementia et obſeruationum conditione fieri licuit ac debuit, definiui per obſeruationes altitudinum limbi ſuperioris ſolis reſpondentium; adhibita meridiei debita correctione. Inde et ſtatus horologii reſpectu temporis ſolaris innotuit, et hoc modo ſemper tempus verum in obſeruationibus eclipſium ſatellitum Iouis ſequentibus determinaui.

Denique inſtructus ſum teleſcopio catadioptrico Gregoriano praeſtantiae ſingularis, ab artifice *Short* Anglo, elaborato. Diſtantia focalis ſpeculi maioris eſt 16½ pollic. anglic. Tria adſunt ſpecula minora concaua et duo ocularia ex binis lentibus compoſita, quibus ſucceſſiue ad teleſcopium applicatis efficitur, vt obiecta ſecundum diametrum 52, 84, 97, 126, 157, 240, vicibus augeantur. In obſeruationibus eclipſium Satellitum Iouis ſequentibus eum elegi apparatum, quo per teleſcopium obiecti diameter 52. vicibus maior apparet, quam nudo oculo. In hoc ſtatu maximam obtinui lucis Satellitum copiam, quam conditionem reſpicere debui, cum in his obſeruationibus Iupiter plerumque in vicinia horizontis verſaretur, et altitudo Iouis meridiana vix 18 gradus ſuperaret. Figuram Iouis oualem faſcias atque ſatellites diſtinctiſſime ſub hoc apparatu, coelo ſereno, conſpicere licuit.

 Emer-

Emersiones Satell tis I^mi^ Iouis
Lipsiae obseruatae tempore vero styl. nou.

Iunii. d. 27. $8^h. 50'. 3''$. Satelles emergere incipiebat, obseruatio quidem in crepusculo sat forti, prope horizontem, et coelo in regione Iouis paulisper vaporoso existente habita, satis tamen certa est, siquidem Satelles subito emergebat, et Satelles tertius limbo Iouis occidentali tunc fere adhaerens distincte conspiciebatur, quem deinceps ad eclipsin properantem, iudicaui tangere limbum Iouis occidentalem (situ recto, pro apparentia telescopii Gregoriani) hor. 8. 58'. temp. veri.

Iulii d. 4. $10^h. 42'. 58''$. Satelles emergere coepit, et post $1\frac{1}{3}$ minut. omne lumen recuperauit. Obseruatio exacta est, coelo in regione Iouis valde sereno.

d. 20. $9^h. 0'. 18''$. Satellitis prima emersio, qui post $1\frac{1}{3}$ minut. pleno lumine instructus apparuit. Obseruatio exacta est, coelo maxime sereno.

d. 27. $10^h. 56'. 41''$. Satelles emergere coepit; lente autem emersit, et non nisi post tria minuta lumen omne recuperauit. Iupiter prope horizontem et coelum in regione Iouis paulisper vaporosum erat; obseruationem tamen satis certam habeo, reliquis Satellitibus distincte conspicuis.

Obserua-

Obſeruationes
altitudinem poli reſpicientes

Circa ſolſtitium aeſtiuum, ob coelum plerumque nubilum, non niſi duas altitudines meridianas limbi ſuperioris ſolis debita certitudine acquirere potui, alteram nempe d. 24. Iunii $= 62^\circ. 50'$, alteram d. 25. Iunii $= 62^\circ. 38\frac{1}{3}'$. Exinde poli eleuationem ſequentem in modum deduxi.

	d. 24. Iun.	d. 25. Iun.
alt. limbi ſup. ⊙ obſeru.	$62^\circ. 40'. 0''$.	$62^\circ. 38'. 20''$.
aberratio quadrantis ſubtr.	19. 15.	19. 15
	62. 20. 45.	62. 19. 5
paralax. ⊙ et refract. ſec. Caſſin.	25.	25
alt. vera limb ſup. ⊙.	62. 20. 20.	62. 18. 40
ſemidiam. ⊙ iuxta Caſſin.	15. 50.	15. 50
alt. centri ⊙ vera	62. 4. 30.	62. 2. 50
differ. declin. ⊙ a declinat. ſolſtitiali ex calculo, add.	1. 36.	2. 56
alt.merid.centri ⊙ ſolſtitialis	62. 6. 6.	62. 5. 46
obliquitas eclipticae	23. 28. 20.	23. 28. 20
eleuatio aequatoris	38. 37. 46.	38. 37. 26
eleuatio poli	51. 22. 14.	51. 22. 34

Inde eleuatio poli media erit..

$51^\circ. 22'. 24''$.

Menſibus Iunio et Iulio aliquot fixarum altitudines meridianas repetitis vicibus obſeruaui et exinde, ſumendo

 mediam

mediam ex obſeruatis eiusdem ſtellae altitudinibus, poli eleuationem determinaui prout ſequens tabula monſtrat; in quo negotio refractionem ex Tab. *Caſſini*, declinationem ſtellae vero ad tempus praeſens reductam ex catalogo tum *Halleii* tum *Caſſini* adhibui.

Nomen ſtellae	Alt. merid. ſtellae ex obſ. facta ob aberrat. quadrantis correctione	Eleuatio poli ſumta ſtellae declinatione ex catalogo Halleii	Eleuatio poli ſumta ſtellae declinatione ex catalogo Caſſini
δ ♏	16°. 48°. 53″	51°. 21′. 43′	51°. 21′. 28″
Cor. ♏	12. 51. 45	51. 22. 8	51. 21. 49
η Serpentarii	23. 16. 30	51. 22. 47	51. 22. 37
α Herculis	53. 21. 8	51. 21. 0	51. 20. 43
α Ophiuchi	51. 23. 30	51. 22. 56	51. 22. 55
β Ophiuchi	43. 20. 45	51. 21. 43	51. 21. 40
Quad. Aquilae	46. 51. 15	51. 22. 29	51. 22. 41
Eleuatio poli media		51. 22. 7	51. 21. 59
			51. 22. 7
		ex alt. ſolſtit.	51. 22 24

vnde *Eleuatio poli Lipſiae* ſtatui poteſt 51. 22. 10

Tycho de Brahe (in Progymn. P. I. p 630. edit. Vranib. et Prag.) olim iam rimatus eſt eleuationem poli Lipſiae ex obſeruationibus maximae et minimae altitudinis ſolis meridianae ab Homelio Mathematico Lipſienſi, habitis. Maxima ponitur 62°, 11′. minima 15°. 15′. ex quibus *Tycho* ſuis adhibitis correctionibus eleuationum eſſe infert 51°. 19′. *Ricciolus* (in Georg. reform. p. 301) iſtarum

iſtarum obſeruationum annum nuncupat 1560, et factis ſuis correctionibus altitudinem poli producit 51°. 19′. 14″. Si Caſſinianae parallaxes et refractiones ad altitudines iſtas applicentur, prodit obliquitas eclipticae 23°. 29′. 30″. et eleuatio poli 51°. 18′. 56″. vel rotunde 51°. 19′. Et huius magnitudinis altitudinem poli Lipſiae vſurparunt plerique hactenus Aſtronomi. Non deſunt quidem Autores, qui in tabulis ſuis aſtronomicis eam aliter pronunciant, veluti *Reinholdus* 51°. 25′; *Longomontanus* 51°. 22′, Keplerus 51°. 44′ ex quibus vero fundamentis, me latet. Superior determinatio ex meis obſeruationibus, diuerſis fulta concluſionibus, medium inter has occupat locum.

Obſeruationes aliquot meteorologicae.

Per intergrum fere menſem Iulium aeſtum experti ſumus ingentem, qui etiam in aliis regionibus Bohemia, Sileſia, Morauia, Polonia, Auſtria, Hungaria, triſtia ſui veſtigia reliquit, vt nouellae publicae teſtantur. Aeſtum hunc ſecundum thermometrum mercuriale magnum diiudicaui, cui ſcalam factis experimentis in aqua bulliente et gelaſcente, ad mentem Cel. *de l'Isle* diuiſam applicui; ita vt in aqua ebulliente mercurius ad o. grad. in gelaſcente ad 150. grad. haereret: Mercurius in iſto probe purgatus aere et ipſe ad ebullitionem ope carbonum candentium redactus eſt, antequam thermometrum aquae bullienti deinde immiſſum in ſuperiori loco hermetice clauſum fuit. Calidiſſimi fuerunt dies 6. et 15. Iulii, qui etiam calidiſſimi obſeruati ſunt Vratislauiae. Hic nempe loci thermometrum in loco vmbroſo, ſed aeri libero expoſito, horis pomeridianis monſtrabat

Iulii d. 6.	$0^h. 50'$	-	-	-	gradum 105
	0. 55	-	-	-	$104\frac{2}{5}$

postea defcendebat iterum ☿ius et haerebat adhuc
$2^h. 24'$. ad gradum 105.

*S*tatim poft hoc tempus thermometrum foli libere expofui, coelo valde fereno. Mercurius illico afcendebat et oftendebat

					gradum
2^h.	$37'$.	-	-	-	83.
-	48	-	-	-	$82\frac{1}{4}$
-	50	-	-	-	$81\frac{1}{2}$
3	1.	-	-	-	$80\frac{3}{4}$
-	13	-	-	-	82
-	23	-	-	-	$78\frac{1}{4}$
-	25	-	-	-	77
-	28	-	-	-	$76\frac{5}{8}$
-	30	-	-	-	$76\frac{1}{5}$

Mercurius tunc haefit, et nonnula minuta poft fol locum reliquit, in quo thermometrum fuit pofitum. Iftud denuo in locum vmbrofum translatum hor. 5. indicauit adhuc $107\frac{3}{4}$ grad.

Iulii d. 15. maximus aeftus incidit poft meridiem in hor. 3. min. 52. thermometro monftrante $104\frac{1}{4}$ grad. in loco vmbrofo aeri libero expofito.

Praeterea fequentes dies noto reliquis plerumque calidiores, quoad fummum aeftum in fingulis diebus

therm.

					therm. in loco vmbroſo
Iulii d.	7.	3^h.	$24'$.	-	108.
	13.	3.	56	-	110
	14.	3.	20	-	$106\frac{1}{2}$
	17.	4.	30	-	$108\frac{1}{2}$

Hoc modo ſummus calor d. 15. Iulii non niſi $1\frac{1}{4}$ grad. inferior eſt eo, quem an. 1738. d. 14. Iul. ſtyl. nou. Petroburgi experti ſumus 103. graduum; vno fere gradu autem differt tantum a calore maximo $103\frac{1}{3}$ grad. obſeruato, tum in inſula *Bourbon* ſub latitudine auſtrali 22°. ad orientem reſpectu Madagaſcar ſita d. 24. Ianuar. 1734, tum Sylanchae ſub aequatore ad littus Peruuienſe in America d. 16. Maii. 1736; et denique $2\frac{1}{2}$ grad. fere maior eſt calore $106\frac{2}{3}$ grad. qui mari ſub aequatore notatus eſt; prout id Commentarii Acad. Pariſ. an. 1734. 1736. et 1733. facta thermometrum reductione teſtantur.

Effectum ſolis in thermometrum ipſi libere expoſitum nunquam maiorem deprehendi gradu $76\frac{1}{3}$ d. 6. Iulii obſeruato, qui propius accedit ad gradum $54\frac{1}{4}$ cerae liquefactae, quam gradus inter hunc et gradum aeſtus ſummi d. 15. Iulii medius. Sic enim Petroburgi thermometrum ſoli expoſitum indicaſſe tantum notaui maximum calorem an 1742 ſtyl. nou.

Iulii d.	3.	5^h.	$21'$.	per gradum	97.
	7.	4.	30	- - -	96.
Aug.	3.	4.	35	- - -	$87\frac{2}{3}$.

CONTI-

CONTINVATIO OBSERVATIONVM ASTRONOMICARVM LIPSIAE HABITARVM An. 1746 STIL. NOV. TEMP. VERO.

AVCTORE
G. Heinſio.

Auguſt d. 12. 9'. 16'. 35''. Satelles 1^mus^ ♃vis incipiebat emergere. Obſeruatio ſat certa eſt, reliquis ſatellitibus diſtincte, et non nunquam etiam faſciis Iouis conſpicuius, licet Iupiter in vicinia horizontis et coelum in regione Iouis pauliſper vaporoſum eſſet. Lente autem emerſit ſatelles.

OBSERVATIO
Eclipſis lunae partialis die 30 Auguſt.

Coelum quidem nubibus tectum ſpem exiguam relinquebat eclipſin hanc rite obſeruandi; attamen cum veſperi luna aliquoties per nubium hiatus ſe conſpiciendam praeberet, tubo Gregoriano ſub eo apparatu, quo obiecta 52 vicibus ſecundum diametrum amplificantur, ſequentia annotare licuit. Tempus verum definitum eſt per altitudines ſolis reſpondentes diebus ſubſequentibus captas.

Tempus verum Aſtronomicum.

11^h^. 16'. 0''. Luna in fiſſura nubis primum conſtituta penumbram denſam in regione Harpali oſtendebat. Luna autem ſtatim poſt nubibus recta fuit.

11^h^.

11. 19'. 30''. Adſpectus Lunae per nubium hiatum me certiorem fecit de eclipſis initio iam facto. Licuit autem ex quantitate obſcurationis aeſtimare, initium eclipſis $1\frac{1}{2}$ vel 2 min. ante notatum tempus contigiſſe; quamobrem initium circiter ponendum eſt 11^h. 18'. Idem animaduerſum eſt per tubum aſtronomicum 6 ped. Totum coelum deinceps nubes occupabant.

Paulo poſt mediam noctem fiſſuras agebant nubes, et coelum ſerenari videbatur, ſparſis tamen hinc inde nubibus. Licet autem coeli regio, apparenter ſerena, reuera vaporoſa eſſet; maculas tamen Lunares et vmbram Terreſtrem, quae valde nigra apparuit, probe diſtinguere potui; quae circumſtantiae ſequentes admiſerunt obſeruationes ſat accuratas.

12^h. 9'. 55''. Mare Criſium tangitur ab vmbra in regione boreali, ſitu recto, pro apparentia teleſcopii.

16. 0. Vmbra per medium maris Criſii transire aeſtimatur.

20. 55. Dionyſius incipit in vmbram incurrere

21. 55. Dionyſius totus immergitur.

12^h. 23'. 10''. Mare Criſium totum intra vmbram abſconditur

Nubes iterum copioſe exurgebant, quae cum hiatus agerent, ſequentes concefferunt obſervationes, vmbra nunc valde diluta apparente.

53. 40. Ariſtarchus totus emergit ex vmbra.

13. 5. 40. Pytheas totus emergit.

Poſtea coelum eſt factum maxime vaporoſum, halone lunam cingente, nec vlla ſtella conſpicua, ita vt maculas clariores et vmbram, praeſertim valde dilutam vix diſtinguere liceret; quae conditio reliquas obſeruationes irritas, imo de fine eclipſis valde incertum me reddidit.

58. 0. Limbum Lunae ante eclipſatum nunc vmbra liberum cernere credidi. Ad hoc ergo tempus finem eclipſis circiter referre licet.

14. 1. 0 Certiſſime finis eclipſis iam celebratus eſt, prout id quoque obſeruationes per tubos 6. et 3. ped. confirmarunt.

CONTI-

CONTINVATIO
OBSERVATIONVM LIPSIENSIVM
an. 1747 ſtyl. nou. habitarum.

Iisdem inſtrumentis, quae ante deſcripſi, et ſub eodem teleſcopii Gregoriani apparatu, quo ſcilicet iſtud obiecta ſecundum diametrum 52. vicibus auget, ſequentes obſeruaui emerſiones ſatellitis primi Iouis.

Temp. vero

Auguſt. 8. $10^h. 21'. 35''$. Em. prima. Obſeruatio bona coelo ſereno. Tempus non niſi per altitudines fixae d. 8. Aug. et altitudines antemeridianas ſolis d. 9 Aug. corrigere potui. Licet autem deductiones ex his altitudibus factae ſat bene inter ſe conſentiant, ita vt concluſio media ab extremis vix 10 ſecundis differat; ob temporis correctionem tamen per ſolas altitudines inſtitutam, obſervatio ad aliquot ſecunda temporis dubia pronunciari debet.

Auguſt. 24. $8^h. 43'. 32''$. Em. prima.
45. 0. Em. totalis.

Iupiter cum reliquis ſatellitibus tempore emerſionis primae paulo vaporoſus viſus eſt. Statim autem cum omnes diſtinctiones apparerent, ſatellitem primum aliquantulum iam emerſum conſpexi, nempe $8^h. 43'. 42''$. quam ob cauſam ex aeſtimio emerſionem primam ſupra 10. ſec. citius notaui. Correctio temporis fundatur obſeruatione meridiei, quam d. 20. Aug. ſolummodo inſtituere potui; quamobrem, cum nonnullas horologii correctiones aliunde cognitas adhibere debuerim, obſeruatio etiam ex hoc capite aliquantiſper dubia cenſeri debet.

OBSERVATIONES
altitudinem poli reſpicientes.

Circa Solſtitium brumale non niſi duas limbi ſuperioris Solis altitudines meridianas quadrante obtinui; alteram d. 20. Decembr. $= 15°. 49\frac{1}{4}'$ certam; alteram d. 21. Decembr. $= 15°. 48'$. pauliſper dubiam. Quadrantis ſtatum eundem, vt in praecedentibus, recognoui. Inde deductiones ſequentes.

	d. 20. Dec.			d. 21. Dec.		
alt. limb. ſuper. ☉ obſ.	15°.	49′.	15″.	15°.	48′.	0″
Error. quadrantis ſubtr.		19.	15.		19.	15
	15.	30.	0.	15.	28.	45
Refractio ex Tab. Caſſinii.		3.	30.		3.	30
	15.	26.	30.	15.	25.	15
Semid. ☉ ex Tab. Caſſinii		16.	20.		16	20
alt. centri. ☉ vera	15.	10.	10.	15.	8.	55
differ. declin. ☉ a ſolſtitiali			39.			ſubtr. 7
alt. centri ☉ ſolſtitialis	15.	9.	31.	15.	8.	48
obliquitas eclipticae	23.	28.	20.	23.	28.	20
Eleuatio aequatoris	38.	37.	51.	38.	37.	8
- - - - poli	51.	22.	9.	51.	22.	52
media	51.	22.	31.			vel

vel comparando inter ſe altitudines ſolſtitiales centri Solis, aeſtiuam nempe an. 1746. et brumalem an. 1747 habebitur

altit. centri ☉lis ſolſtitialis media ex obſeruatis

aeſtate an. 1746 - -	$62°.$	$5'.$	$56''$	
hieme an. 1747 - -	15.	9.	10	
Inde diſtantia tropicorum	46.	56.	46	
obliquitas eclipticae	23.	28.	23	ſubtr.
ab alt. ſolſt. aeſtiua	62.	5	6	
exhibet eleu. aequatoris	38.	37.	33	
- - - - poli	51.	22.	27	

Hinc *Eleuatio poli* Lipſiae, ſi obſeruationes reliquae an. 1746. conſulantur, ad $51°.\ 22\frac{1}{4}'$, figi poteſt.

De Stellis variabilibus in Conſtellatione Cygni.

Cum d. 9. Iulii variabilem in pectore Cygni, quam *Bayerus* in Vranometria per P. notat, oculo nudo inſtar ſtellae 5^{tae} vel 6^{tae} magn. conſpicerem, Aſtronomis ob apparitionum irregularitates celebrem; animum ſtatim ad obſeruationem huius reliquarumque variabilium in conſtellatione Cygni applicui. Hoc autem die neque variabilem in collo, a *Bayero* litera X ſignatam, neque variabilem ſub capite Cygni, oculo nudo animaduertere potui, Teleſcopium deinceps adhibui terreſtrae trium pedum, quod autem tantam ſtellularum copiam circa P offerebat, vt diiudicare non potuerim, quae ex iſtis fuerit variabilis; praeſertim cum campus repraeſentationis teleſcopii nimis exiguus comparationem ſitus eius reſpectu fixarum vicinarum ex chartis cognitarum non admitteret. Vt huic rei medelam afferrem, ob lubricas nudo oculo obſeruationes, comparaui tubos hollandicos (ocularis nempe concaui) tum 3 tum 6. pollices longos, qui eximium non ſolum repraeſentationis campum per plures coeli gradus concedebant, verum etiam clariores tantum ſtellulas conſpicuas reddebant, quo fiebat, vt ſitus ſtellarum ad fixas. cognitas promtius diiudicari, et variabilis a reliquis fixis certe diſcerni potuerit. Horum teleſcopiorum adminiculo circa finem Iulii et initium Auguſti poſitionem mutuam et magnitudinem apparentem aliquot ſtellarum Cygni, quae ad ſcopum faciebant, ad ſenſum aeſtimaui et in charta adiecta delineaui, ita quidem, vt ſitum praecipuarum ſtellarum, auctis proportionaliter diſtantiis, deſumſerim ex effigie Cygni in Tab. VI. vol. IV. Part- I. pag. 238. Tranſact. philoſ. abridgd. exhibita, (quam coelo prae ceteris magis conformem deqrehendi) reliquarum vero ſtellarum ſitum ad iſtam normam diiudicauerim; in quo ne gotio, me parum a vero, quantum ſenſuum iudicio fieri poteſt, aberraſſe, confido. Literae β, γ, Φ, η, χ, P, *b* ſunt notae *Bayeri*; reliquas autem literas ex arbitrio adieci. P eſt variabilis in pectore, X in collo Cygni. Ope huius ſchematis, quod ad cauam coeli ſuperficiem referri debet, viciſſitudines variabilium optime examinare licuit; cuius rei caput huc redit.

Variabilis in pectore P per totum obſeruationum tempus a d. 9 Iulii vsque ad d. 29. Dec. quo deſinunt obſeruationes, tum oculo nudo, tum per tubos hollandicos, eiusdem ſemper magnitudinis apparuit, ipſi *b* aequalis, vel exactius paulo minor, vix tamen ſenſibiliter quam

b,

b, quae eſt. ſtella 5^{tae} magnitudinis.

Variabilis ſub capite Cygni per iſtud temporis interuallum nunquam in coſpectum venit.

Variabilis in collo X, cuius apparitionem Calendarium Berolinenſe ad finem Auguſti, ſed, vt euentus docuit, praemature praedixerat, ſequentes ſubiit viciſſitudines, quas ſemper teleſcopio hollandico 6. pollicum contemplatus ſum, quotiescunque coeli ſerenitas id permiſit.

Octobr. 8. Coelo ante per plures dies nubilo, nunc autem ſereno, primum in conſpectum venit variabilis X ſatis clara, nempe ipſi Q 7^{mae} magn. aequalis.

9 et 10. Eadem deprehendi ac d. 8.

21. X apparuit vt M, vel paulo maior quam M quae eſt 6^{tae} magn. lumen Lunae forte.

Nouembr. 6. Poſt plures dies nebuloſos coelo nunc valde ſareno, varialis X maior quam M, minor autem quam η, aequalis ipſi Φ, quae eſt 5^{ae}_{t} magn. viſa eſt.

23. A die 6. Nou. hucusque coelum continuo fuit nebuloſum et pluuioſum. Hodie coelo per exiguum tempus ſerenitatem mentiente, X ipſi M iterum aequalis, vel vix ſenſibiliter minor quam M apparuit.

29. Coelo ſereno X ſenſibiliter minor quam M, paululum tamen maior quam Q. Hinc X cadit inter ſtellas 6^{tae} et 7^{mae} magn.

Decembr. 2. Eadem phaenomena vt d. 29. Nou.

6. Variabilis X., quantum ob caelum vaporoſum fieri potuit, ipſi Q aequalis iudicabatur, ideoque 7^{mae} magn.

9.

9. X, praeſente Luna, vix conſpicua fuit; certe tamen ipſa Q vel R non maior cernebatur.
29. Poſt tempeſtatem valde pluuioſam variabilis X amplius videri non potuit.

Ex his obſeruationibus elucet, phaſin maximam variabilis X inſtar ſtellae 5tae magn. circiter incidiſſe in d. 6. Nouembr. cuius phaſis tempus vt certiori modo innoteſcat, conſulendae ſunt phaſes ſimiles ante et poſt maximam. Huius generis ſunt obſeruationes d. 8. Octobr. et d. 6. Decembr. variabilem ipſi Q aequalem indicantes; vnde tempus phaſis maximae concluditur d 7. Nou. mane. Eadem concluſio prodit, ſi diebus 21. Octobr. et 23. Nouebr. variabilis ipſi M aequalis ſtatuatur. Comparatis autem inter ſe obſeruationibus d. 8. Octobr. et 9. Decembr. quae variabilem ipſi Q fere aequalem quoque faciunt, habebitur tempus phaſis maximae d. 8. Nou. Ex his ſatis certe tempus phaſis maximae alligare licet ad d 7. Nouembr. quo ſtabilito tempus reuolutionis huius ſtellae ſeu reditus ad phaſin maximam ex plurium annorum interuallo certe definiri poterit. Scilicet *Godofredus Kirchius*, primus huius ſtellae an. 1686. obſeruator, periodum hanc determinauit $404\frac{1}{2}$ dierum in Miſcell. Berolineſ. Vol. I. p. 211. vſus obſeruationibus ſuis ab an. 1686 vsque ad an. 1713. *Maraldus* in Commentar. Acad. Pariſ. ad an. 1713. p. 64. ed. Bat. ſuas obſeruationes cum Kirchianis comparans eandem pronunciauit 405. dierum, et Epocham phaſis maximae conſtituit d. 1. Sepmebr. ſt. n. 1695. et d. 20. April. ſt. n. 1712. Si Epocha poſterior conferatur cum noſtra phaſi

phasi maxima d. 7. Nov. 1747. ex interuallo 12984 dierum, consulta periodo 405. dierum, colliguntur 32 reuolutiones interea peractae, et inde demum innotescit periodus $405\frac{1}{4}$ dierum. Sin autem epocha d. 1. Septembr. 1695 cum phasi maxima d. 7. Nou. 1747, quod interuallum excedit dimidium seculum, comparetur, interiectis 19059 diebus, prodeunt 47. reuolutiones, quantitate vnius existente $405\frac{24}{47}$ vel rotunde $405\frac{1}{2}$ dierum.

Obseruationes aliquot meteorologicae.

Barometrum satis amplum, luminis scilicet 3. lin. Paris. extraordinariam ☿ii altitudinem indicauit

an. 1747. Nou. 24. in meridie - - - - 28. dig. $1\frac{2}{3}$ lin mensurae Paris. secundum partes 12mas digiti

25. hor. 3. post merid. - - 28 - - - $1\frac{5}{6}$ - -

vtroque die coelum fuit valde nebulosum.

an. 1748 Ianuar. 12. hor. $9\frac{1}{4}$ mane - - 28 - - $2\frac{2}{3}$ - -

Thermometrum ☿iale idem, quo in praecedentibus vsus sum, ostendit

Frigus maximum

an. 1747. Ianuar. 13. hor. $8\frac{1}{2}$ mane - - - $168\frac{9}{10}$

an. 1748. Ianuar. 12. hor. $9\frac{1}{4}$ mane - - - $171\frac{4}{5}$

Calorem maximum

an. 1747. August. 12. et Sept. 8 - - - 111.

Initio Septembris per plures dies calor ingens fuit obseruatus.

OBSERVATIO ECLIPSIS SOLARIS
die 25 Iulii an 1748 ſt. Nou. Lipſiae habita

a

G. Heinſio

I.

Tab. XVII. Dies, qui praecedebant eclipſin, maxima ex parte ſereni, de ſucceſſu obſeruationis felici ſpem iniiciebant, et commodam offerebant occaſionem ex obſeruationibus altitudinum Solis reſpondentium copioſis, quadrante conſueto factis, ſtatum duorum horologiorum oſcillatoriorum reſpectu temporis veri examinandi, et factis debitis correctionibus cognoſcendi, ita vt de tempore vero obſeruationum, quas proferam, maxime certus ſim. Aſt ipſe dies, quo eclipſis contigit, ab initio ſpem fruſtrari videbatur. Ante initium nempe eclipſis copioſae nubes ſe oſtendebant, interruptae tamen et nonquam ſpatium coeli ſerenum admittentes, qui coeli adſpectus, accedente circa hor. $10\frac{1}{4}$ tempeſtate, quam fulgura et tonitrua comitabantur, continuauit fere vſque ad meridiem, quo nubes diſpergi incipiebant, et coelum ſerenum fieri. Inde factum eſt, vt negotium obſeruationum ante meridiem ſaepe turbaretur. Nec initium eclipſis exacte obſeruaui; finem vero per tubum Gregorianum ſub apparatu, quo iſte obiecta 52 vicibus ſecundum diametrum auget, optime annotare licuit hor. 1 19′ 38″ temp. vero.

2. Pracipuae obſeruationes inſtitutae ſunt per tubum aſtronomicum tres pedes pariſinos longum, obiecta ſecundum diamerum 14 vicibus amplificantem, eaque clare reprae-

repraeſentantem (ſi quidem iſte omnes Iouis Satellites nitide exhibet), qui prae ceteris aptus ad hoc negotium iudicabatur, cum per feneſtras conclauis ad Solem altum commode dirigi poſſet, praeterea vero campum repraeſentationis $1\frac{1}{2}$ gradus fere ſiſteret. Impoſitus erat iſte tubus machinae parallacticae atque reticulo inſtructus, quod quatuor fila argentea tenuiſſima ad angulos ſemirectos ſe mutuo ſecantia gerit. Inſtrumento ſic ſtatuto, vt limbus Solis vel ſuperiorvel inferior, pro conditione phaſis, filum aliquod, diurnum exhibens, raderet, numerante ſocio ſecunda horologii, notaui appulſus limbi Solis vel praecedentis vel ſequentis, pro conditione obſcurationis, nec non cornuum phaſis atque limbi Lunae in diſco Solis conſpicui, ad filum horarium diurno normaliter inſiſtens; quantum id coeli facies permiſit.

3. Mora diſci Solaris per filum horarium, ex obſeruationibus copioſis, diebus 23 24 25 Iulii habitis, et bene inter ſe conſentientibus, deprehenſa eſt $= 2' \; 14\frac{3}{4}''$ temporis Solaris; vnde diameter Solis $= 33'\; 42''$, in partibus diurni. Pro conuerſione iſtarum in partes circuli maximi, ſi ſumatur Solis declinatio $= 19°\; 35'$, ex analogia ſin. tot. : coſ. $19°\; 35' = 33'\; 42''$. quaeſitum, inuenitur diameter Solis in partibus circuli maximi $= 31'\; 45''$.

4. In phaſibus decreſcentibus ſeu ante obſcurationem maximam, ex appulſibus limbi Solis ſequentis S, limbi Lunae L, cornu praecedentis A, ſequentis B, ad filum horarium reticuli Ss, acquiſiui in recta sa, ad Ss normali et filum reticuli diurnum exhibente, ſpatia sb, ab, Fig. 2.

 lb,

lb, per partes temporis veri Solaris expreſſa, ductis nempe B*b*, A*a*, L*l*, ad S*s* parallelis. Sumto deinceps momento appulſus B pro momento obſeruationis, ad quod nempe locus centri Lunae C in figura deſignari debuit, quaeſiui correctiones, a ſpatiis *ab*, *lb*, ante definitis ſemper ſubtrahendas, ob progreſſum Lunae indiſco Solis temporibus per ſpatia *ab*, *lb*, factum, iuxta eam methodum, quam fuſe expoſui in deſcriptione eclipſis Solaris d. 4 Auguſt ſt. n. 1739 Petropoli obſeruatae; hunc in finem, vt Luna progreſſu ſuo quaſi priuata eum acquireret in diſco Solis ſitum, quem habuit momento appulſus B. Hoc modo innotuerunt ſpatia *ab*, *lb*, correcta; et per conſtructionem ſchematis ex cognita Solis ſemidiametro et reliquis datis, poſitio centri Lunae in C reſpectu limbi Solis ſequentis et diurni nempe *sc* et *c*C (ducta C*c* ad S*s* parallela); nec non ſemidiameter Lunae. Simili modo in phaſibus creſcentibus ſeu poſt obſcurationem maximam ex appulſibus
Fig. 3. limbi Solis praecedentis P, limbi Lunae L, cornu praecedentis B, ſequentis A, ad filum horarium reticuli P*p*, obtinui ſpatia *pb*, *ab*, *lb*, et deinceps ad momentum appulſus B pro momento obſeruationis ſumtum, ſpatia *ab*, *lb*, correcta; poſitionem centri Lunae per *pc* et C*c*, et ſemidiametrum Lunae. Sequens tabula ſiſtit obſeruationes praecipuas quoad data et deductiones inde factas. Figurae autem omnes ſitu erecto delineatae intelligi debent.

Da-

Data ex obſeruatione in phaſibus decreſcentibus deductiones

Locus obſeru. in fig. 3	Momentum obſ. temp. vero	sb	ab correct.	correctio ipſius ab	lb correct.	correctio ipſius lb	C s	C c	ſemidiam. Lunae
	h ′ ″	′ ″	′ ″	″	′ ″	″	′ ″	′ ″	′ ″
4	10 36 39	1 $26\frac{1}{4}$	$0.45\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0. $1\frac{1}{2}$	0	$2.29\frac{1}{2}$	$0.17\frac{3}{4}$	1. $4\frac{1}{2}$
5	11 2 51	1 5′	1. $3\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0. $8\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	2. 0	0.32^{3}	1. 4
7	11 14 38	0 52	$1.14\frac{3}{4}$	0	0.11′	$\frac{1}{4}$	$1.45\frac{1}{4}$	0.38	1. $4\frac{1}{2}$
8	11 26 7	0 $38\frac{1}{2}$	$1.28\frac{1}{4}$	—	$0.14\frac{1}{2}$	—	1.28	$0.47\frac{1}{4}$	1. $4\frac{1}{8}$
	in phaſibus creſcentibus								
		pb					pc		
11	0. 0. 7	1.26	0. $5\frac{1}{2}$	0	. $1\frac{7}{8}$	$1\frac{7}{8}$	$1.27\frac{3}{4}$	1. $8\frac{1}{2}$	1. 4
12	0. 2.38	$1.23\frac{3}{4}$	$0.12\frac{7}{10}$	$\frac{4}{5}$	$0.55\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	$1.32\frac{3}{4}$	1. 0	1. $3\frac{3}{4}$
13	0. 6.33	1. $9\frac{1}{2}$	$0.21\frac{3}{4}$	1	0.47	1.	$1.36\frac{1}{2}$	$1.12\frac{1}{1}$	1. $3\frac{3}{4}$
14	0.19.52	1.17	0.35	—	0.28	—	$1.53\frac{1}{2}$	$1.21\frac{1}{4}$	1. $4\frac{1}{8}$

Semidiameter Lunae media 1 $4\frac{1}{11}$.

Partes temporis Solaris veri communem menſuram totius tabulae ſiſtunt, quae facile in partes circuli diurni, quem Sol tunc temporis deſcripſit, tranſmutantur, ſi ſingulis 4. ſecundis temporis aſſignetur minutum circuli diurni. Additis correctionibus reſpondentibus ad *ab*, *lb* correcta, hiſque comparatis cum momento appulſus B, ipſae obſeruationes, ſi placet, reſtitui poſſunt. Omiſſae autem ſunt correctiones in tabula iis caſibus, quibus appulſus ad fila obliqua reticuli ſunt obſeruati, ſpatia vero *ab*, *lb*, correcta inde deducta; ne ordo tabulae turbetur.

5. Semidiameter Lunae tot obſeruationibus confirmata $= 1'.\ 4\frac{1}{11}''$ conficit in partibus circuli diurni $16'.\ 1\frac{1}{3}''$, in partibus autem circuli maximi (vt §. 3) $15'.\ 5\frac{3}{4}''$; vnde diameter Lunae rotunde $= 30'.\ 11''$. Si haec referatur

tur ad altitudinem Solis meridianam, quae circiter eſt 58°. 13′; habebitur diameter Lunae horizontalis = 29′. 45″. et parallaxis Lunae horizontalis reſpondens = 54′. 32″, poſita ratione inter horizontales Lunae diametrum et parallaxin = 6 : 11.

6. Ex obſeruationibus praecedentibus §. 4. per *Cc* et *sc* vel *pc* dantur poſitiones centri Lunae reſpectu diſci Solaris et diurni ad data tempora, ideoque ſemita centri Lunae, prout figura 4. ſitu erecto exponit. Ad hanc certiori modo definiendam conducunt etiam deductiones ſequentes, quas ex appulſibus limbi Solis vel praecedentis P vel ſequentis S, limbi Lunae L et cornu A vel B, ſumta Lunae ſemidiametro = 1′. 4″, per conſtructionem ſchematis inueni in eadem menſura, quam §. 4. notaui.

Locus obſeru. in fig. 4	Momentum obſeru. temp. vero	*as*	*al* correct.	*cs*	*Cc*	
	h ′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	
6.	11. 7 6.	2. 6½	1. 17½	1. 53¾	0. 36½	
		ap		*pc*		
9	11.49. 9	0.53	0. 41¼	1. 15½	1. 1¼	
17	0.37. 2.	2. 2¾	0. 53¼	2. 13⅔	1. 31½	
18	0.45.31	2. 6½	0. 47¾	2. 22	1. 36	Fig. 2.
		pb	*lb*			
20	0. 56.37	1.34	0. 4	2. 37	1. 45	

Fig. 4 Loca in ſemita centri Lunae per numeros diſtincta exponunt loca centri Lunae pro iis obſeruationibus, quae iisdem reſpectiue numeris inſigniuntur. In initio eclipſis locus centri Lunae fuit in I, in fine in F.

7.

7. In deſignatam centri Lunae ſemitam ex centro diſci Solaris *e* demiſſa perpendicularis *e*O manifeſtat diſtantiam centri Lunae a centro Solis boream verſus minimam $= 0'.\ 8\tfrac{1}{3}''$ in menſura ſchematis §. 4, $= 2'.\ 5''$. partium diurni vel $1'.\ 58''$. partium circuli maximi. Inde datur quantitas eclipſis = ſummae ſemidiametrorum Solis et Lunae demta diſtantia centrorum minima $= 15'.\ 52\tfrac{1}{2}'' + 15'.\ 5\tfrac{1}{2}'' - 1'.\ 58'' = 29'.\ 0''$ partium circuli maximi vel = 10. digitis cum $57\tfrac{2}{3}$ minutis.

8. Conſtructa centri Lunae ſemita, ſumtaque Lunae ſemediametro $= 1'.\ 4''$, reliquae etiam phaſes aſſignari potuerunt, quarum obſeruatio moram tantummodo inter appulſum limbi Solis praecedentis vel ſequentis et alterutrius cornu patefecit. Deſignato enim vi huius morae cornu loco in peripheria Solis, atque ex eo ope ſemidiametri Lunae facta interſectione ſemitae centri Lunae, innotuit locus Lunae ad momentum appulſus cornu ad filum horarium.

9. Hoc pacto phaſium ſingularum magnitudine iuxta indicatas §. 4. 6. 8. methodos repraeſentatorum dimenſio ſecundum digitos et minuta ecliptica ope ſcalae in hunc finem conſtructae potuit inſtitui. Sequens tabula exhibet momenta phaſium et quantitates obſcurationum; in qua etiam diſtantiae centri Lunae in ſingulis phaſibus a loco eius vel in initio eclipſis I, vel in obſcuratione maxima O ſiſtuntur expreſſae per partes temporis veri, quo centrum Lunae ſpatium inter locum initii et locum centri in data phaſi, vel inter hunc et locum obſcurationis

ma-

maximae, deſcripſit. Scilicet ex comparatione ſitus mutui locorum centri Lunae ad momenta phaſium innotuit motus centri Lunae interuallo 40. minutorum temporis in ſemita $= 0'.\ 57\tfrac{1}{3}''$ conſuetae ſchematis menſurae. Ex hoc autem ſpatio, facta eius diuiſione ſecundum partes temporis, diſtantias memoratas cognoſcere et inde tempus tum initii eclipſis tum obſcurationis maximae definire licuit. Initium nempe medium ex comparatione obſeruationum contigit $10^h.\ 11'.\ 41''$; obſcuratio autem maxima $11^h.\ 46'.\ 32''$. tempore vero.

Locus obſeru. in fig. 4	Momentum phaſi temp. vero	Quantitas obſcur.	Diſt. obſeru in tempore ab initio	Tempus initii verum
1	$10^h.18'.30''$	$0^{dig.}$ 56′	7′. 15″	10^h 11′. 21″
2	22. 30	1. 17	10. 15	12. 15
3	25. 23	1. 47	14. 0	11. 23
4	36. 39	3. 10	24. 55	11. 44
			Initium med.	10. 11. 41
			diſt. obſer. ab obſcur. max.	Temp. obſcur. max. verum
5	11. 2. 51	6. 2	44. 20	11. 47. 11
6	7. 6	6. 51	38. 45	45. 51
7	$11^h.14'.38''$	7. 30	32. 55	11. 47. 33
8	26. 7	9. 8	19. 20	45. 27
	obſcur. max.	10. $57\tfrac{2}{3}$		
9	49. 9	10. 46	2. 55	46. 14
10	57. 5	10. 14	10. 15	46. 50
11	0. 0. 7	9. 53	13. 25	46. 42
12	2. 38	9. 26	16. 35	46. 3

13	6. 33	9. 3	19. 50	46. 43
14	19. 52	7. 26	33. 15	46. 37
15	26. 5	6. 40	39. 30	46. 35
16	31. 44	5. 52	46. 0	45. 44
17	37. 2	5. 26	49. 40	47. 22
			Medium pro obscur. max.	11. 46. 32.
18	45. 31	4. 33		
19	53. 5	3. 26		
20	56. 37	3. 0		
	1. 19. 38	Finis		

10. Ope parallaxis Lunae horizontalis §. 5. inuentae $= 54'. 32''$, ſumtis ex calculo ad tempus nouilunii declinatione Solis $= 19^{\circ}. 34\frac{3}{4}'$, et angulo eclipticae cum meridiano verſus orientem $= 103^{\circ}. 12\frac{1}{2}'$; poſitaque elevatione aequatoris Lipſiae $= 38^{\circ}. 37\frac{3}{4}'$, conſtruxi ſchema conſuetum projectionem Terrae orthographicam tempore nouilunii exhibens, in quo parallelus ellipticus pro latitudine Lipſienſi deſcriptus ad ſingula phaſium obſeruata rum momenta, facta eius diuiſione ſecundum tempus, concedebat locum centri Solis, quod parallelum iſtum percurrere fingitur, cuius centri poſitio reſpectu circuli declinationis ex ſchemate ſimul innoteſcebat. Iam cum ad ſingula phaſium momenta, vi conſtructionis iſtarum, daretur poſitio centri Lunae reſpectu circuli declinationis et centri Solis, facillime loca centri Lunae pro iis momentis in ſchemate aſſignari potuerunt. Inde vero ſe manifeſtabant, orbita Lunae viſa rectilinea inclinata verſus

eclipticam angulo = 5°. 43′, conuergens cum iſta ad partes orientales; latitudo Lunae vera borealis in coniunctione = 28′. 38″. et horarius Lunae a Sole = 27.′ 40″. partium circuli maximi. Ope horarii collatis centri Lunae locis ad phaſium momenta cum loco coniunctionis ſeu interſectione orbitae viſae cum circulo latitudinis innotuerunt interualla inter momenta iſta reſpectiue et momentum coniunctionis ſeu nouilunium. Hoc pacto deductum eſt.

ex obſeru.	Tempus verum nouilunii d. 25. Iuli.	ex obſeru.	Tempus verum nouilunii
4	0^h. 4′. 19″.	11.	0^h. 4′. 2″
6	4. 46	12.	3. 23
7	5 28	13.	4. 3
obſcur. max.	4. 52	14.	3. 0
9	3. 29	15.	4. 15
10	4. 35	20.	4. 7
		fine	3. 28

Medium pro nouilunio 0^h. 4.′ 8″

11. In ſummam collectis iis, quae hactenus deducta ſunt habentur ex obſeruatione eclipſis noſtrae ſequentia elementa.

Coniunctio vera ☉ et ☽ reſpectu eclipticae ſub meridiano Lipſienſi temp. vero an. 1748. Iulii 25. ſt. nou. 0^h. 4′. 8″.

Latitudo Lunae vera borealis in ☌ 0°. 28. 38

Inclinatio orbitae ☽ viſae ad circulum latitudinis verſus ortum. 84°. 17′.

Parallaxis ☽ horizontalis 0. 54. 32

Diameter

Diameter ☽ horizontalis $0^{h}.\ 29'.\ 45''$
Diameter Solis 0. 31. 45

12. Copiosae erant maculae in Sole, quarum occultationes a Luna annotare decreueram. Hunc in finem ope machinae parallacticae diebus 24 et 25. Iulii horis pomeridianis positiones macularum precipuarum respectu disci et diurni Solis per appulsus limborum Solis praecedentis *p* sequentis *s*, et centri alicuius maculae, ad filum horarium P*p* nec non centri maculae ad fila obliqua obseruaui; vnde sequentes obtinui determinationes, ductis scilicet *k* K, *a* A, Fig. 4. *b* B, *m* M, ad *p* P parallelis

pro macula		d. 24. Iulii hor. 3. 40′.	d. 25. Iul. hor. 5. 30′.
k	PK =	$0'.\ 17\frac{1}{2}''$	$0'.\ 9\frac{1}{4}''$.
	K*k* =	$0.\ 53\frac{1}{3}$ dub.	$0.\ 48\frac{1}{2}$ dub.
a	PA =	0. 58	$0.\ 43\frac{1}{2}$
	A*a* =	$1.\ 34\frac{3}{4}$	1. 28. dub.
b	PB =	$1.\ 3\frac{1}{2}$	$0.\ 46\frac{2}{4}$
	B*b* =	$1.\ 24\frac{1}{4}$	$1.\ 18\frac{1}{3}$
m	PM =	$1.\ 55\frac{3}{4}$	$1.\ 46\frac{1}{4}$
	M*m* =	$0.\ 45\frac{1}{2}$ dub.	0. 44.

Mensura determinationum eadem est, quam pro schemate §. 4. notaui, inuoluens nempe partes temporis, quarum $2'.\ 14\frac{3}{4}''$ conficiunt moram disci Solaris per filum horarium. In fig. 4 representaui situm macularum erectum secundum determinationes d. 25. Iulii hor. $5\frac{1}{2}$, reliquarumque macularum in disco Solis tunc conspicuarum loca ad istum ex aestimio definita signaui.

13. Appulſus limbi Lunaris ad ſequentes maculas durante eclipſi obſeruaui per tubum machinae parallacticae, alium enim adhibere diſſuadebat attentio ad obſervationes principales hactenus enumeratas.

d. 25. Iulii

temp. vero ante meridiem

$10^h. 20'. 34''$. Medium maculae *k* tegitur a limbo ☽ orien-
11. 5. 22 - - - - - - *b* - - - - - - (tali
11. 11. 22 - - - - - - *d* - - ſed dubius ſum
de nomine maculae

poſt meridiem

0. 21. 5 vel $10''$. Macula *b* tota emergit ad limbum ☽ occident,
0. 24. 16 - - *c* tota - - - -
0. 24. 51. Medium maculae *y* prodit - - - -
0. 46. 1 Macula tota *m* in conſpectum venit

14. Tempore obſeruationis maximae circa eam regionem marginis Lunaris, qui extra Solis diſcum extabat, et cornua in peripheria Solis definiebat, nec ullum lumen, nec annulum lucidum, cuiusmodi ex atmoſphaera Lunae vel inflexione radiorum Solarium ad iſtum Lunae marginem oriundum alias ſuſpicari licebat, per tubum machinae parallacticae animaduertere potui; cornua potius optime terminata apparuerunt. Nec in fine eclipſis Luna penitus e diſco Solis egreſſa ad marginem limbo Solis adhuc maxime vicinum, eiusmodi lumen oſtendebat per tubum Gregorianum, licet totus fere Sol extra campum repreſentationis tubi poneretur, vt eiusmodi lumen, ſi quoddaretur, ſenſibile effici poſſet. Tempore obſcurationis ma-

maximae pallido quidem lumine fruebamur; eo tamen obiecta probe adhuc diſtinguere licuit, melius, ac nonnunquam Sole occidente fieri ſolet. Venerem quoque eodem tempore conſpexerunt multi oculis nudis, preſertim quos iuuabat aedificiorum vmbra; ipſe Venerem attentus ad alias obſeruationes non vidi.

15. Amicus curam in ſe ſuſceperat obſeruationum meteorologicarum tempore eclipſis. Hunc in finem thermometrum mercuriale Soli libere exponebatur; aliud vero in loco vmbroſo, quem aër externus ferire poterat, vna cum barometro, aſſeruabatur, vtrumque thermometrum ea diuiſione inſtructum erat, qua gradus aquae bullientis per 0, gelaſcentis per 150, deſcendendo a priori termino, notatur. Thermometrum in loco vmbroſo vix ſenſibilem ſubiit mutationem, circa initium et fere per totam eclipſin $115\frac{1}{2}$, circa finem autem 114 monſtrauit. Barometrum quoque toto eclipſis tempore conſtantem retinuit altitudinem. Thermometrum Soli expoſitum ad quina minuta temporis veri obſeruatum eſt, et variationem quidem oſtendit notabilem, aſt certae legi non ſatis adſtrictam, quam nubes continuo interuenientes, praeſertim ab initio eclipſis vsque ad obſcurationem maximam, turbabant. Generaliter tamen circa obſcurationem maximam gradum caloris minorem patefecit, ac in initio et fine eclipſis, differentia maxima exiſtente $17\frac{1}{2}$ grad. Sic thermometrum iſtud indicabat

Temp. vero	gradus therm.	Temp. vero	gradus therm.
$10^h. \ 0'$	109	$11^h. \ 45'$	114
10	105	50	114
20	99	55	114
25	98	0. 0	$115\frac{1}{2}$
30	100	10	110
11. 30	112	35	108
		1. 15	105

Hor. 5. 34'. poſt meridiem thermometrum idem in loco priſtino, aſt iamdudum vmbroſo facto, oſtendebat 110. coelo valde ſereno.

OBSERVATIO ECLIPSIS SOLIS

ANNI MDCCXLVIII. DIE $\frac{14}{25}$ MENSIS IVLII IN SPECVLA ASTRONOMICA IMPERATORIA REPARATA QVAE PETROBVRGI EST PRAESENTE ILLVSTRISSIMO COMITE DE RASVMOVSKI ACADEMIAE SCIENTIARVM PRAESIDE INSTITVTA

A

Ioſeph. Ad. Braunio, et ſocio Popouio.

Quamuis ſpecula aſtronomica imperatoria incendio illo fatali, quod in aedibus academicis circa finem anni MDCCXLVII. factum eſt, maximum ceperit detrimentum, quum inſtrumenta aſtronomica omnia eo ſint conſumta, ipſaque ſpecula paene interierit: tamen cura omni laude maiore Illuſtriſſimi atque Excellentiſſimi Praeſidis noſtri non ita multo poſt ea non ſolum reparata, ſed etiam inſtrumentis neceſſariis ita fuit denuo inſtructa, vt obſeruationes aſtronomicae neceſſariae interim haberi queant, donec noua recentiſſimis, iisque exquiſitiſſimis adornata inſtrumentis erit perfecta. Quod igitur ad hanc eclipſeos ſolis obſeruationem attinet, in ea neceſſariam adhibuimus praeparationem. Linea meridiana de nouo ducta, et ex altitudinibus ſolis reſpondentibus ita correcta, vt pro vera reputari queat, horologia ſecundum verum motum ſolis ſunt directa. Licet diebus aliquot eclipſin hanc antecedentibus coelum ita fuerit pluuium, vt pertenuis ſpes oſtenderetur eam obſeruandi: tamen ipſo, quo contigit, die ſerenitas non defuit. Momenta et phaenomena huius eclipſeos potiora vti ſecundum tempus verum euenere, nobis ſunt hac ratione adnotata:

H. M.

H.	M.	S.	Tempore vero.
11	49	11	initium
	55	7	dig. 1
	55	19	Immerſio maculae A
0	2	50	dig. 2.
	13	12	dig. 3
	24	52	Maculae B immerſio
1	12	3	Maxima obſcuratio = 9 dig. et 7 minutor.
	45	24	Emerſio maculae B
	47	48	Emerſit macula C
	52	46	Emerſit macula D.
2	31	33	Finis

Tab. XVII. fi. 5. Diſcus ſolis tempore eclipſis per tubum aſtronomicum adparuit in hunc modum maculis conſperſus, vti figura monſtrat.

Obſeruatio facta eſt partim directe tubo aſtronomico 8. pedum Lond. partim machina tubo aſtronomico 6. pedum Lond. inſtructa, per quem imago ſolis transmiſſa eſt in tabulam in ſuos digitos more conſueto diuiſam. Succeſſiuae digitorum obſcurationes, vti macularum immerſiones et emerſiones omnes propter quaedam impedimenta adcurate obſeruari non potuerunt. In maxima ſolis obſcuratione per tubum 14 pedum Lond. limbus lunae viſus eſt circumdari filo quodam lucido albicante eiusmodi nitoris, vti adparet luna plena. Hoc filum lucidum cingebat arcus coloratus ad $\frac{1}{2}$ digitum diametri ſolis in diſcum ſolis porrectus. Colores eodem modo, quo pars iridis ſuperior conſpicitur, adparebant, diſtinctius tamen prope limbum lunae.

ECLIP

ECLIPSIS LVNAE

Anni MDCCXLVIII die 29 Menſis Iulii ſt. v.

EX OBSERVATORIO IMPERATORIO REPARATO OBSERVATA

a

Ioſeph. Ad. Braunio.

Quod fere in omnibus eclipſium lunarium obſeruationibus contingere ſolet, vt difficillimum ſit terminos vmbrae terreſtris et penumbrae diſtinguere, id quoque in praeſenti nos eſſe expertos confitendum eſt. Vmbra enim terreſtris ita diluta et male terminata adparuit, vt cum penumbra confuſa vix ac ne vix quidem diſtingui potuerit. Obſeruationem tubo aſtr. 12 pedum Lond. micrometro Kirchiano inſtructo inſtituimus, cuius potiora momenta ſunt, quae ſequuntur, ſecundum tempus verum adnotata, quantum per difficultates commemoratas facere licuit.

H.	M.	S.	
0	10	34	Initium aeſtimaui.
	19	17	Vmbra tangit mare humorum.
	23	9	- - Gaſſendum.
	24	50	Capuanus plane immerſus vmbrae eſt
	27	9	Vmbra ad Tychonem.
	28	55	- - Grimaldum.
	31	41	- - Bullialdum.
1	0	18	Maxima obſcuratio = 5 dig. 23. min.
	4	50	Grimaldus emergere coepit.

	49	11	Vieta emergit.
	49	41	Mare humorum plane umbra egressum est.
	52	33	Schikardus plane emersit.
2	3	11	Fracastorius emersit.
	5	18	Tycho plane vmbra liberatus.
	26	43	Finis versus Snellium adparuit.
	29	13	Finis penumbrae.

Quantitas eclipseos determinata est micrometro Kirchiano ad tubum adplicato. Differebant quidem paululum tempora initii atque finis huius eclipsis secundum meam et Popouii obseruationem tubo quadranti adplicato duos pedes longo in turri superiore institutam, quae differentia autem partim diuersitati tuborum, partim confusis vmbrae et penumbrae terminis erit tribuenda.

Tempore eclipsis solaris ratio quoque habita est variationis caloris, aliarumque athmosphaerae mutationum, quae ea durante contigere. Obseruationes has meteorologicas faciendas suscepit Vir Clarif. Lomonosouius. Institutae sunt duobus thermometris mercurialibus concordantibus et barometro in hypaethro aedium academicarum. Thermometrorum alterum e diametro soli expositum, alterum in vmbra columnae ligneae erat collocatum. Bulbi erant aequales figurae sphaericae diametri semidigitatis. Diuisio vtriusque thermometri erat ea, qua gradus aquae bullientis per 0, gelascentis per 150 descendendo insignitur. Barometri diuisio erat secundum pedem Parisinum. Obseruatio integra, vti nobiscum a Viro Cl. est communicata ita se habet.

Tem-

Tempus	Thermometrum in sole	Thermometrum in vmbra	Barometrum	Status aeris.
H. M.				
8.30	—	128	—	Coelum nubibus albis vndulatis tegebatur.
10.25	95	115	—	nubes rarissimae, tenuissimae
10.32	90	114½	—	
10.35	83	114	—	
10.58	80	113½	—	
11.17	77	113	—	Sudum.
11.23	76	113	27.00	
11.30	76	113	26.94	
11.41	76	112⅔	26.92	
11.46	74	113	26.88	Sol incipit deficere.
11.50	76	113½	26.86	
11.55	75	113½	26.88	nubecula tenuissima
12. —	77	114	—	
— 3	79	114	—	
— 6	84	114½	26.95	
— 10	84	115	26.95	
— 15	84	116	26.95	
— 20	86	116	27 00	
— 25	85	116½	27.05	
— 30	95	117	27.05	Sudum.
— 35	96	117	27.08	
— 40	101	117	27.14	
— 45	104	117	27.17	
— 50	107	119	27.19	
— 55	109	120½	27.20	
1 —	111	$121\frac{2}{2}$	27.23	
— 5	112	122	27.25	
— 10	112	122	27.24	

Tempus	Thermometrum in sole	Thermometrum in vmbra	Barometrum	Status aeris.
H. M.				
— 15	112	$122\frac{1}{2}$	27.24	Nubes tenuissimae vndulatae in sole
— 20	$111\frac{1}{2}$	123	27.24	Sudum.
— 25	106	$122\frac{1}{2}$	27.24	
— 30	104	123	27.25	
— 35	105	123	27.25	
— 40	105	$122\frac{1}{2}$	27.25	
— 45	103	122	27.25	
— 50	101	$121\frac{1}{2}$	27.25	
— 55	99	$121\frac{1}{2}$	27.25	
2 —	101	122	27.25	
— 5	98	$121\frac{1}{2}$	27.25	
— 10	97	121	27.25	
— 15	101	122	27.26	
— 20	$100\frac{1}{2}$	122	27.26	
— 25	101	123	27.26	
h. \				Sudum.
4. 30	—	—	27.19	
4. 41	85—	120	27. 5	
4. 55	85—	115	27.00	
5. —	88—	115	27.00	

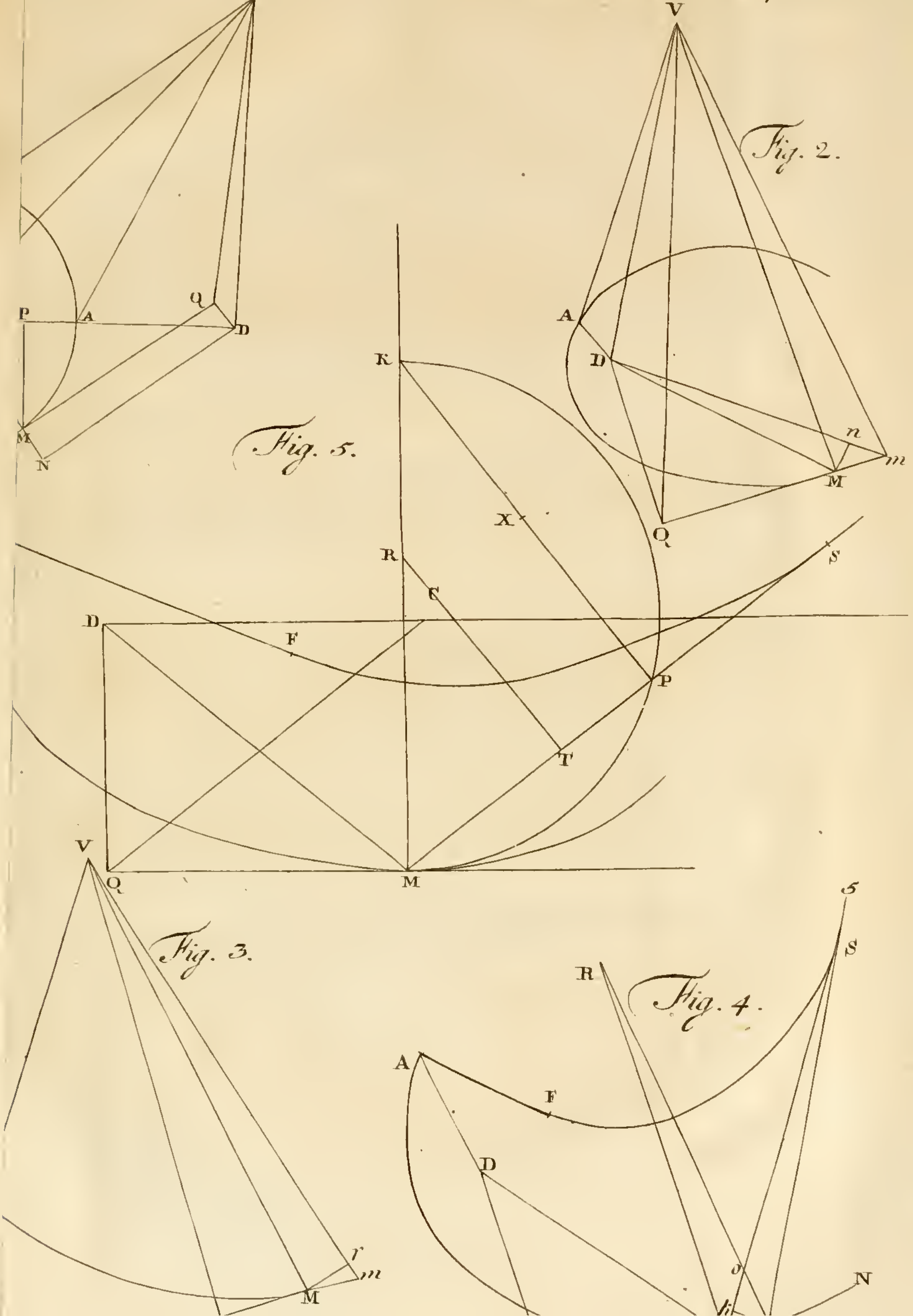


Fig. 2.
V
A
D
n
m
M
Q
Fig. 5.
V
P
A
Q
D
M
N
K
X
R
C
S
D
F
P
T
V
Q
M
Fig. 3.
r
m
M
Fig. 4.
5
S
R
A
F
D
o
N

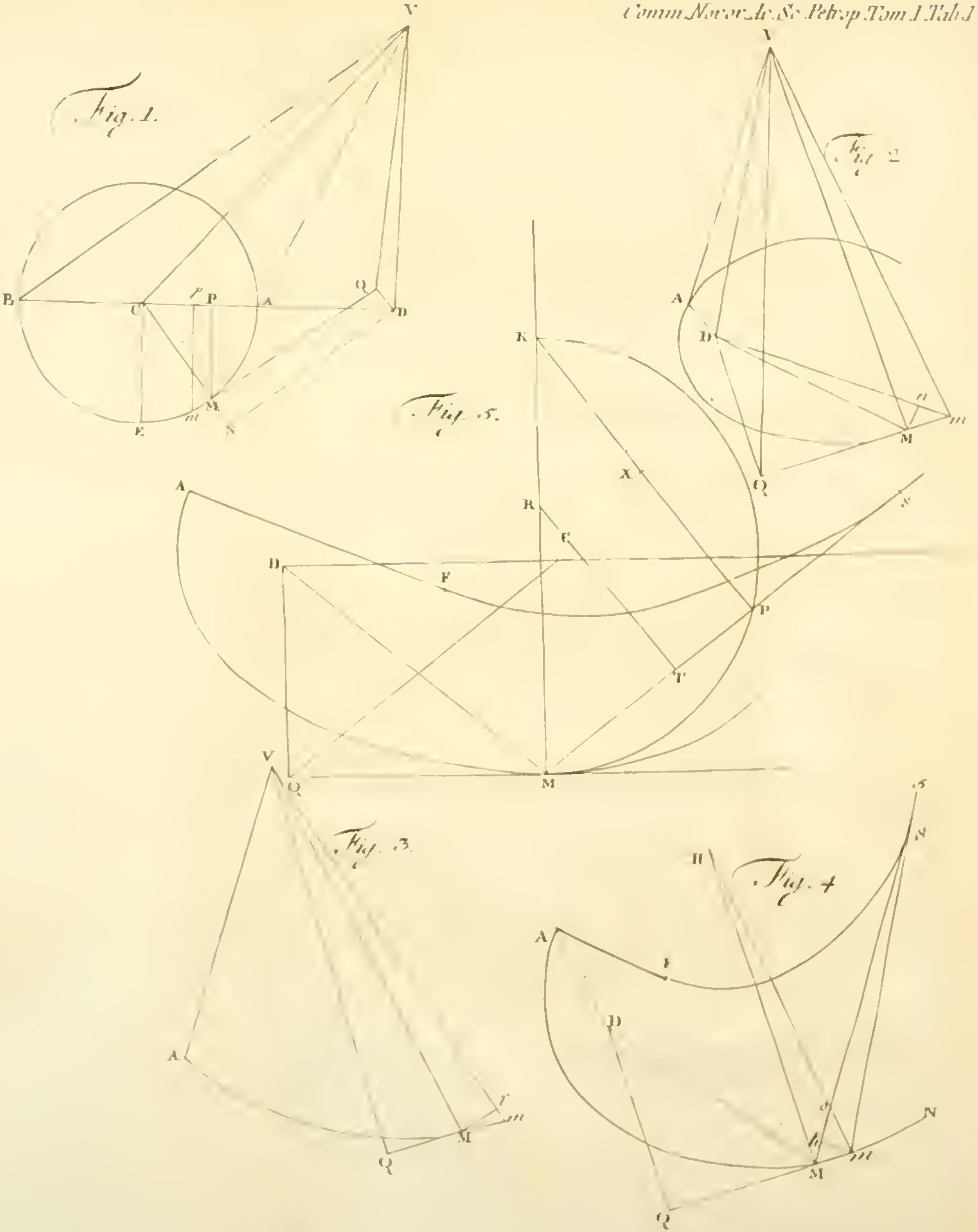


Fig. 1.
V
B
C
p P
A
Q
D
m M
E
N
Fig. 2
V
A
D
n
m
M
O
Fig. 5.
K
X
A
R
E
D
F
P
T
V
Q
M
Fig. 3.
A
r
m
M
Q
Fig. 4.
H
A
F
D
o
h
m
N
M
Q

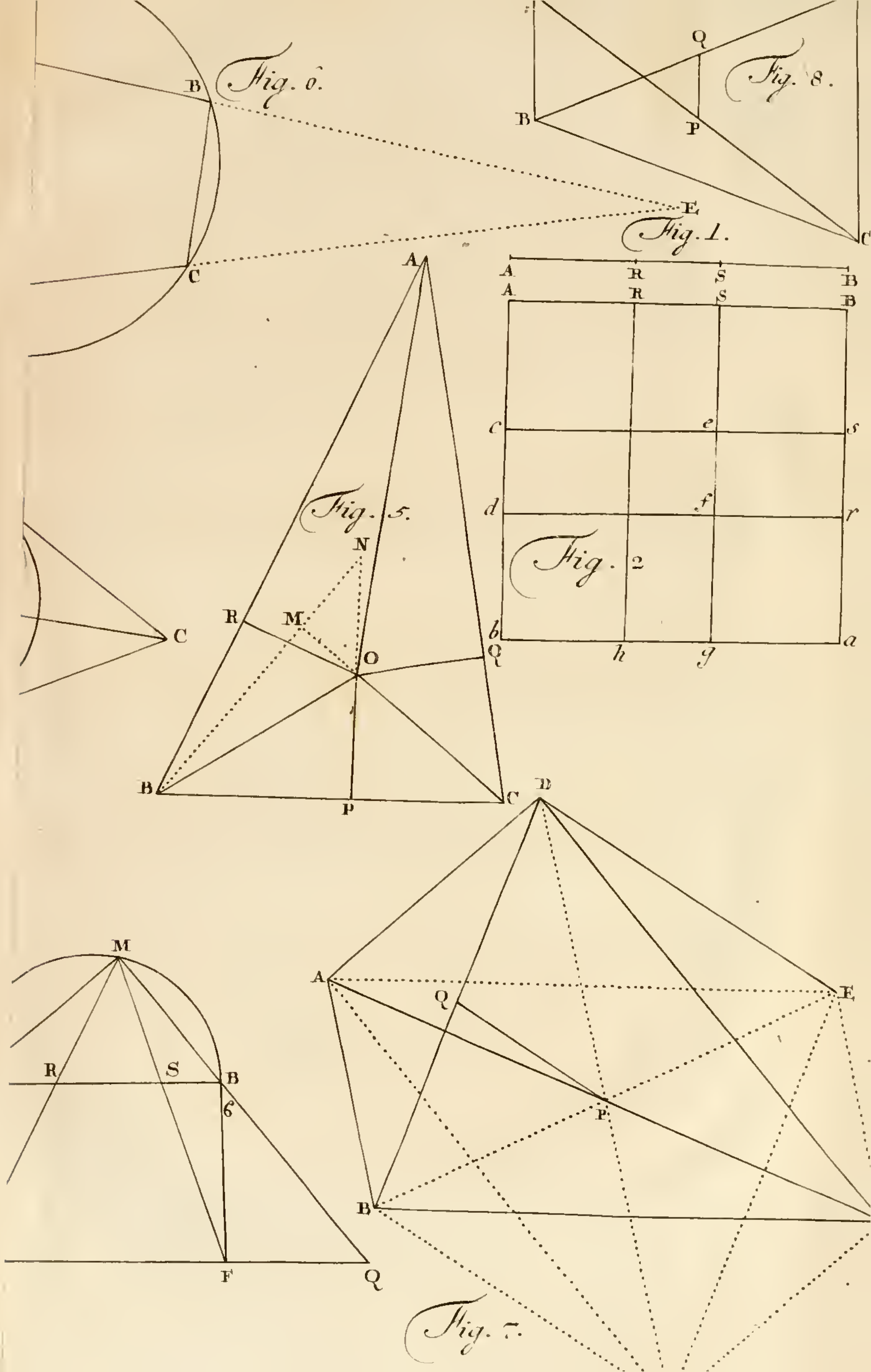


Fig. 6.
B
C
E
Fig. 1.
A R S B
Fig. 8.
Q
B
P
C
Fig. 2
A R S B
c e s
d f r
b h g a
Fig. 5.
A
N
R M O Q
B P C
C
M
R S B
6
F Q
D
A Q E
P
B
Fig. 7.

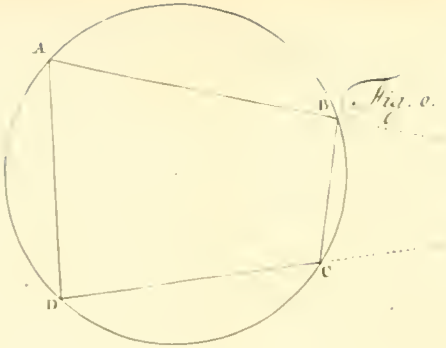


Fig. 6.

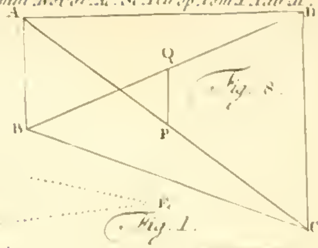


Fig. 8.

Fig. 1.

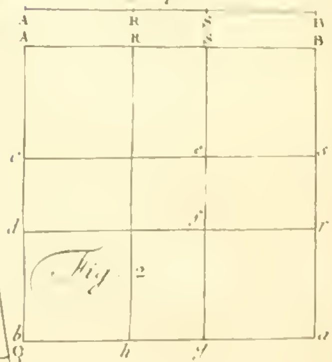


Fig. 2

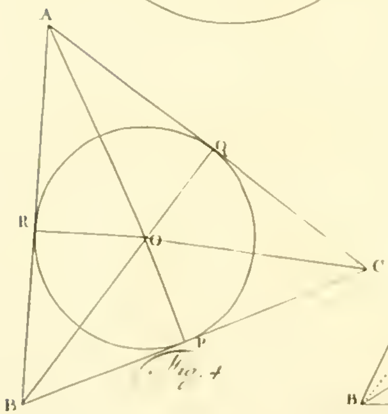


Fig. 4

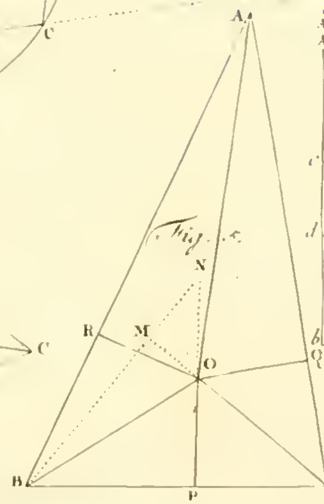


Fig. 5.

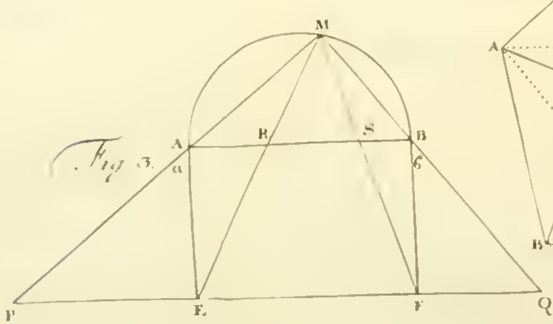


Fig. 3.

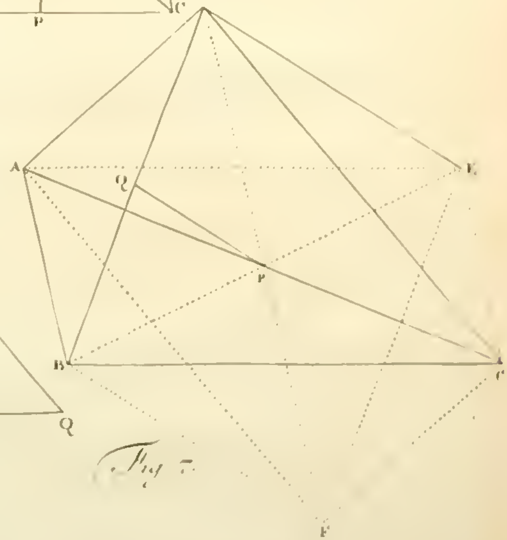
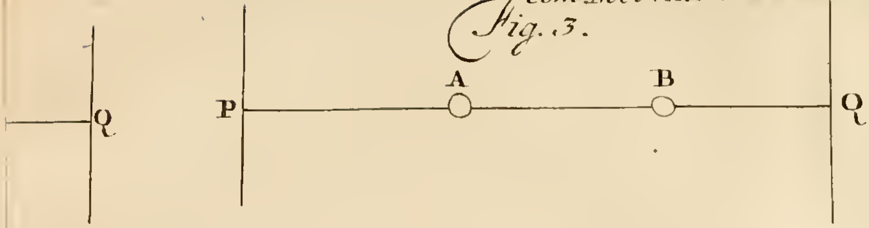


Fig. 7.

Fig. 3.



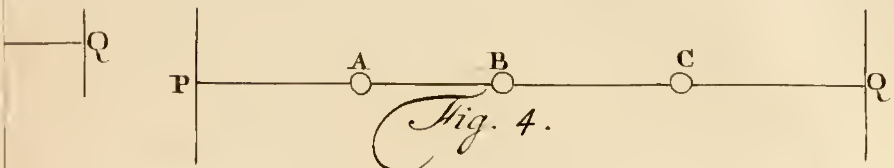


Fig. 4.

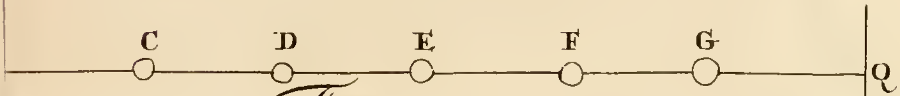


Fig. 5.

Tab. IV.

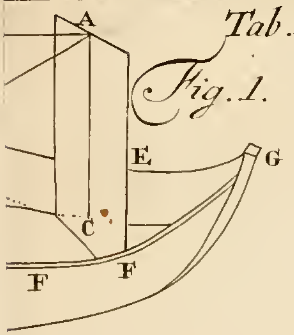


Fig. 1.

Fig. 2.

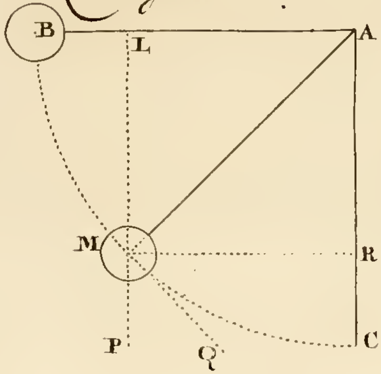


Fig.

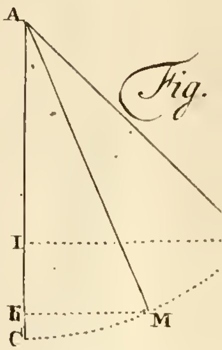
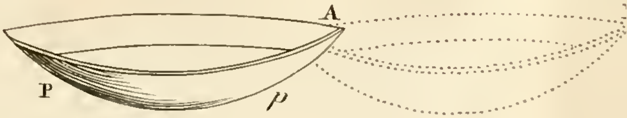


Fig. 5.



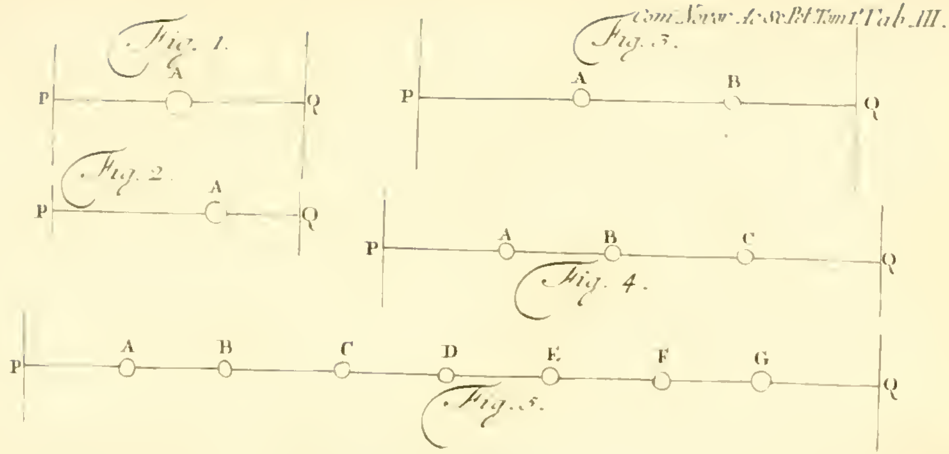


Fig. 1.
P
A
Q
Fig. 2.
P
A
Q
Fig. 3.
P
A
B
Q
P
A
B
C
Q
Fig. 4.
P
A
B
C
D
E
F
G
Q
Fig. 5.

Tab. II.

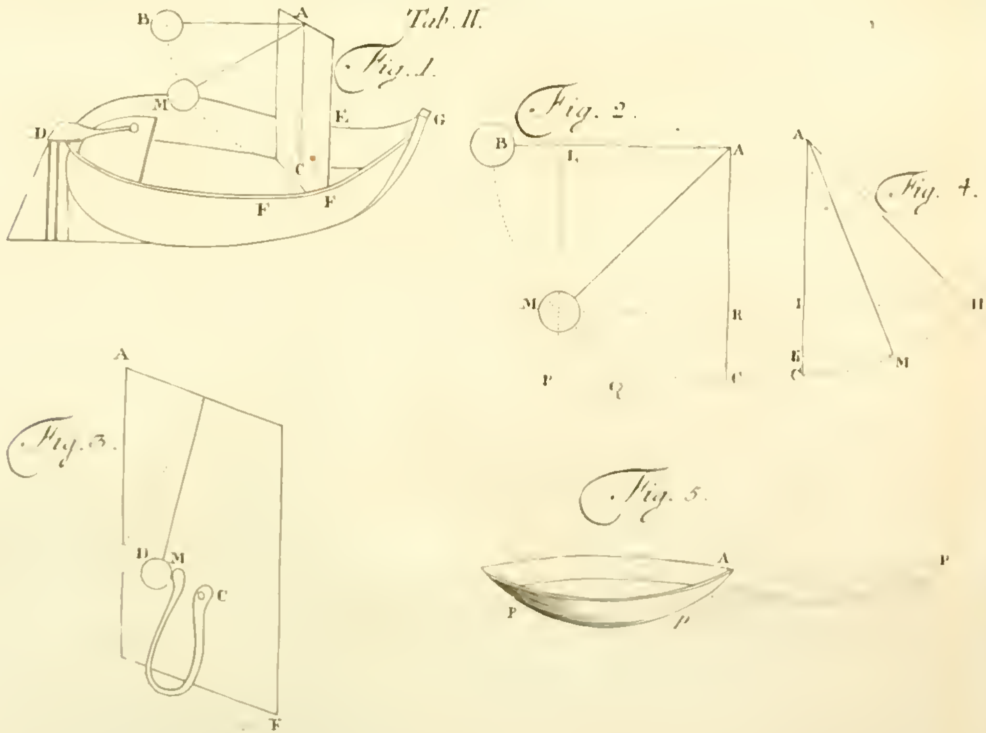


Fig. 1.
B
A
M
E
G
D
C
F
F
Fig. 2.
B
L
A
M
R
P
Q
C
Fig. 4.
A
I
E
C
M
H
Fig. 3.
A
D
M
C
F
Fig. 5.
A
P
p
P

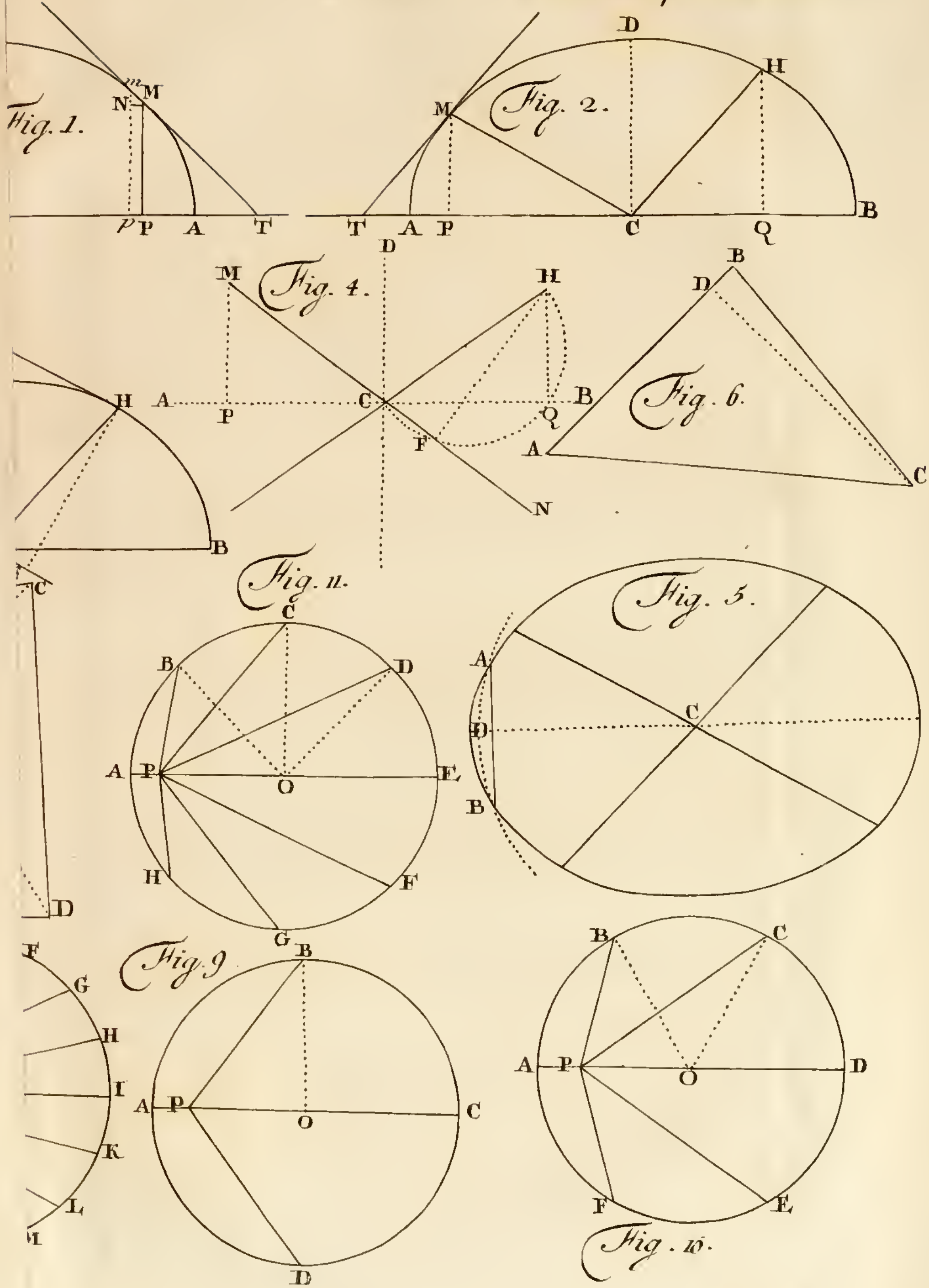


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 4.
Fig. 6.
Fig. 11.
Fig. 5.
Fig. 9
Fig. 10.

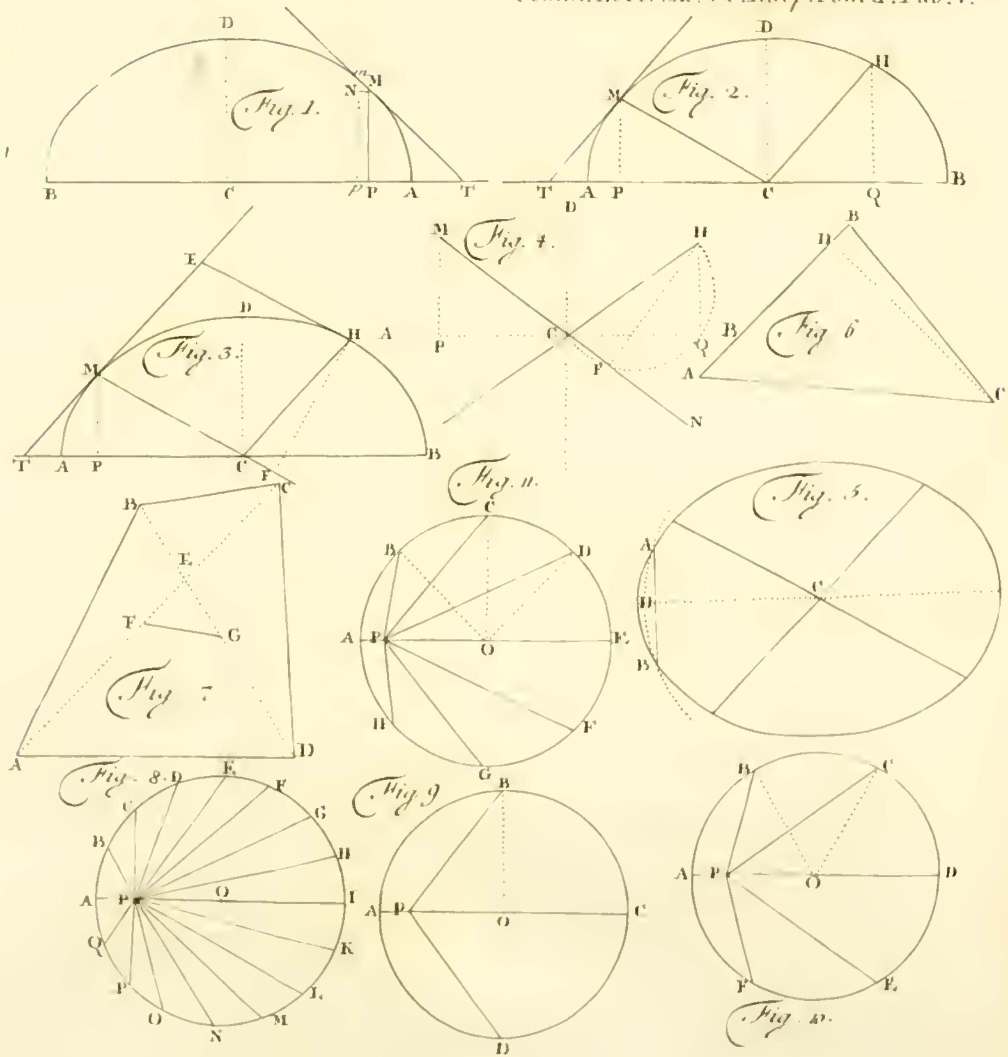
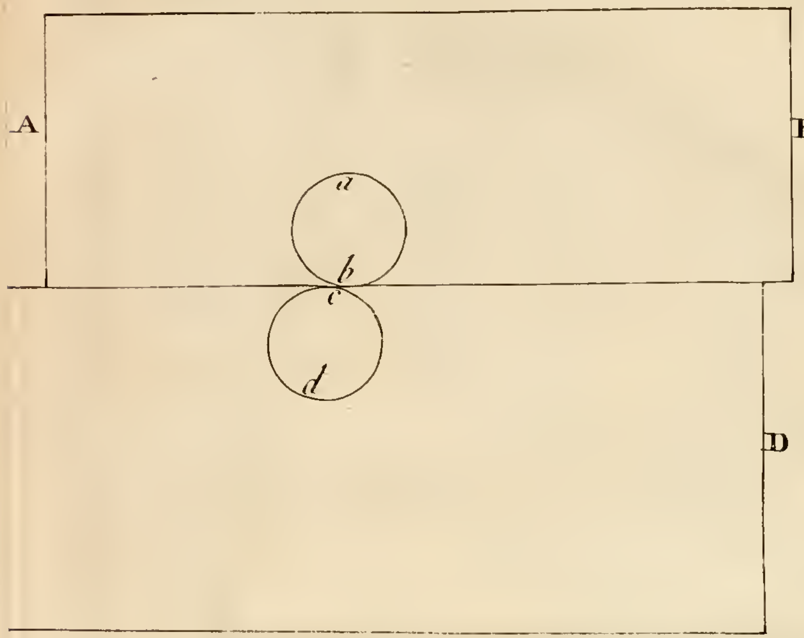
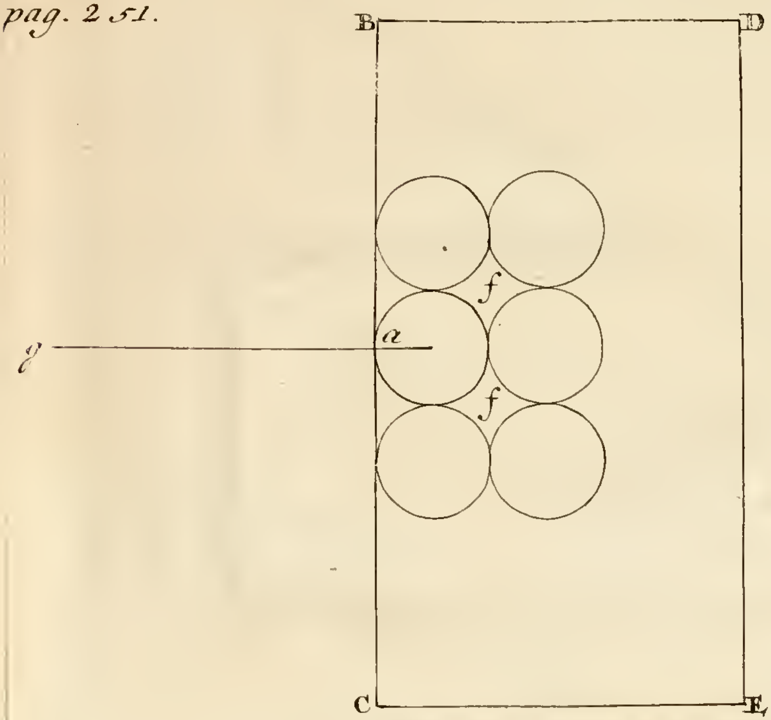


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8.
Fig. 9
Fig. 10.
Fig. 11.

pag. 214.



pag. 251.



ad pag. 268

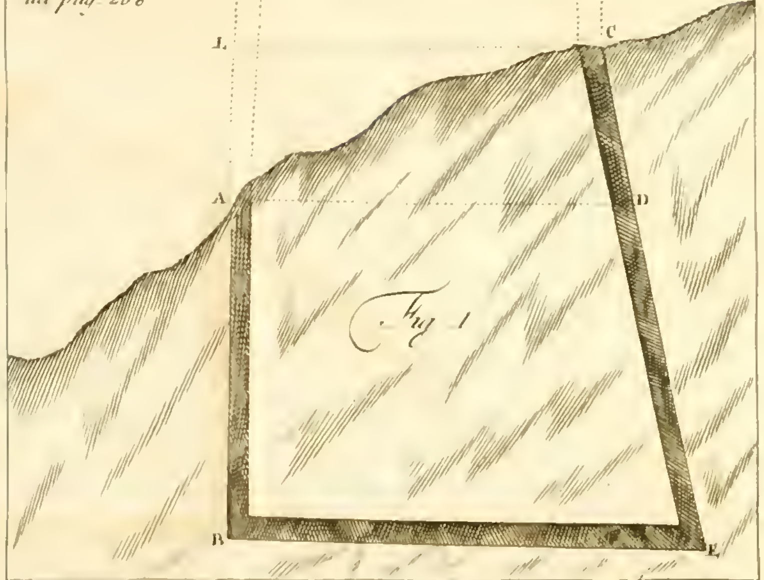
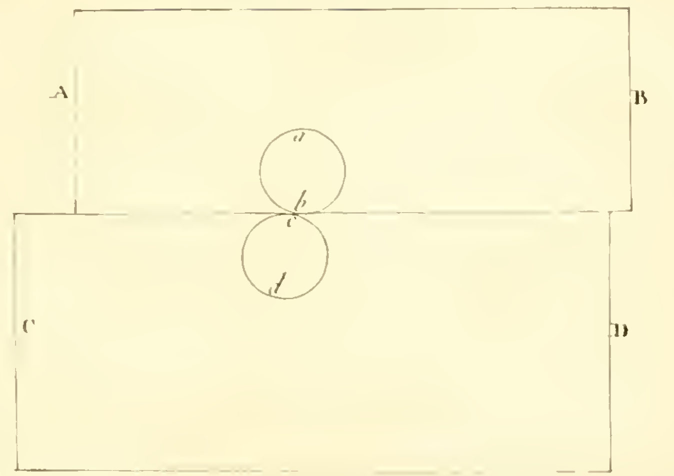


Fig. 1

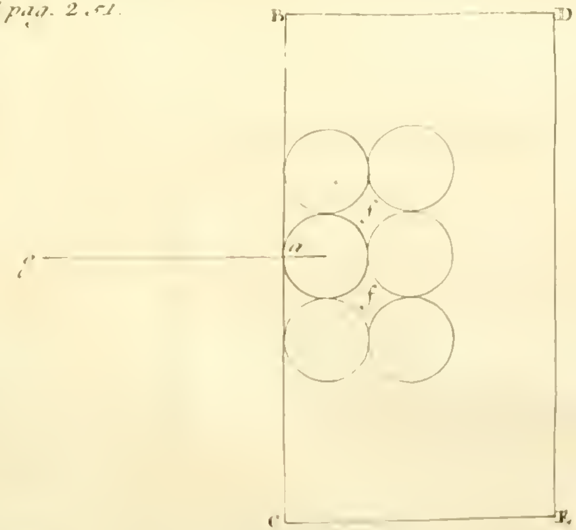
ad pag. 269.

Fig. 2

ad pag. 214



ad pag. 251.



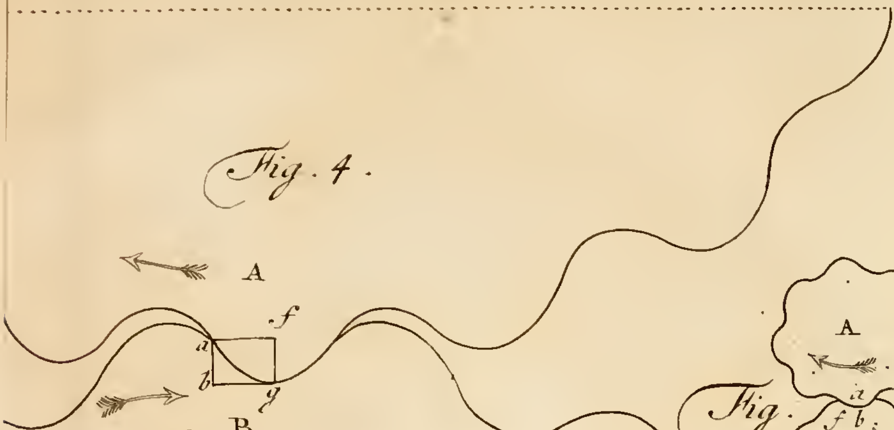


Fig. 4.

Fig. 2.

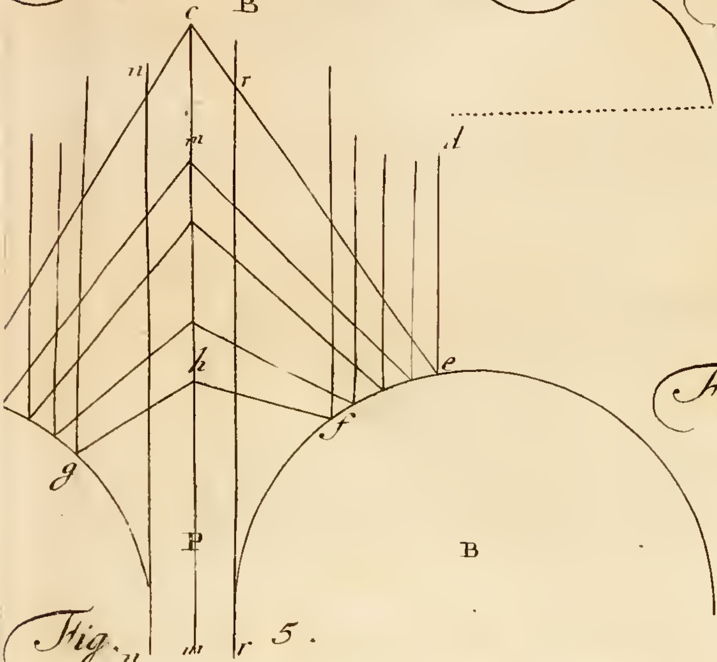


Fig. 5.

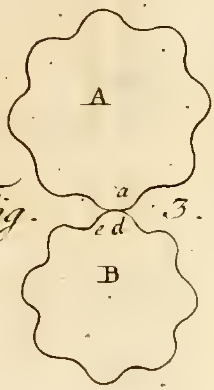


Fig. 3.

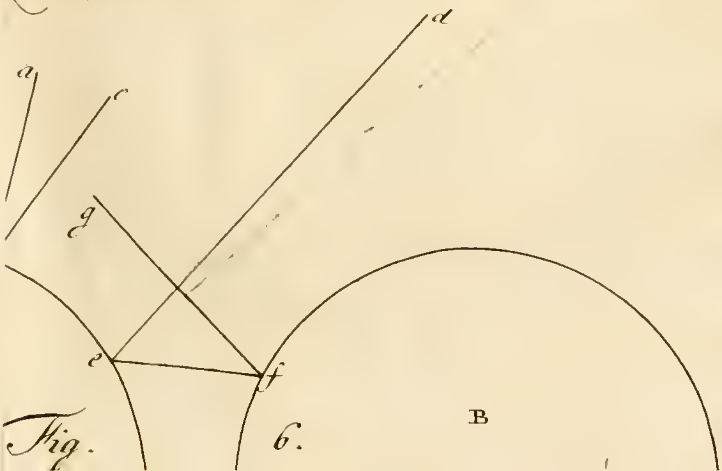


Fig. 6.

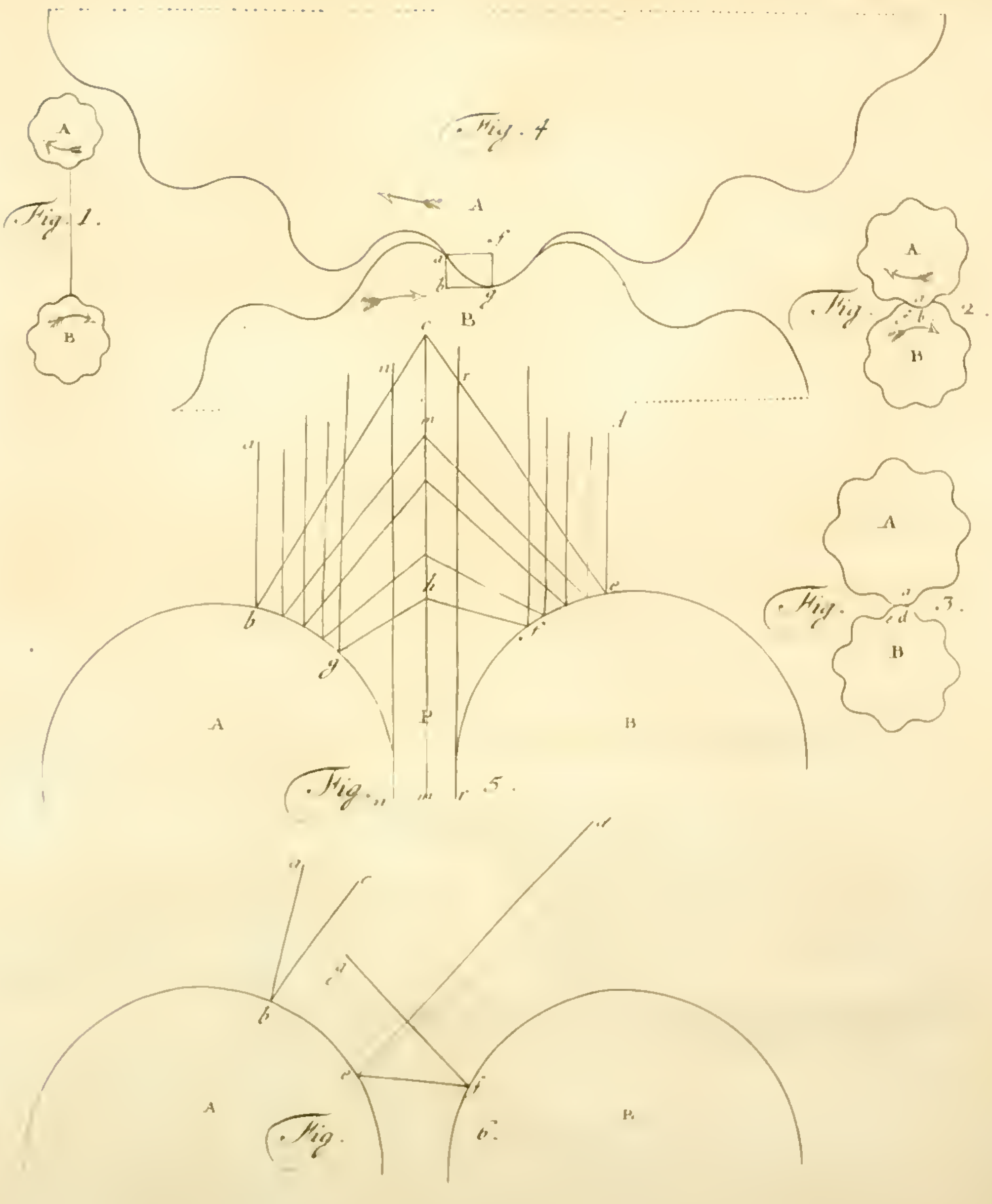


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6.
A
B
P

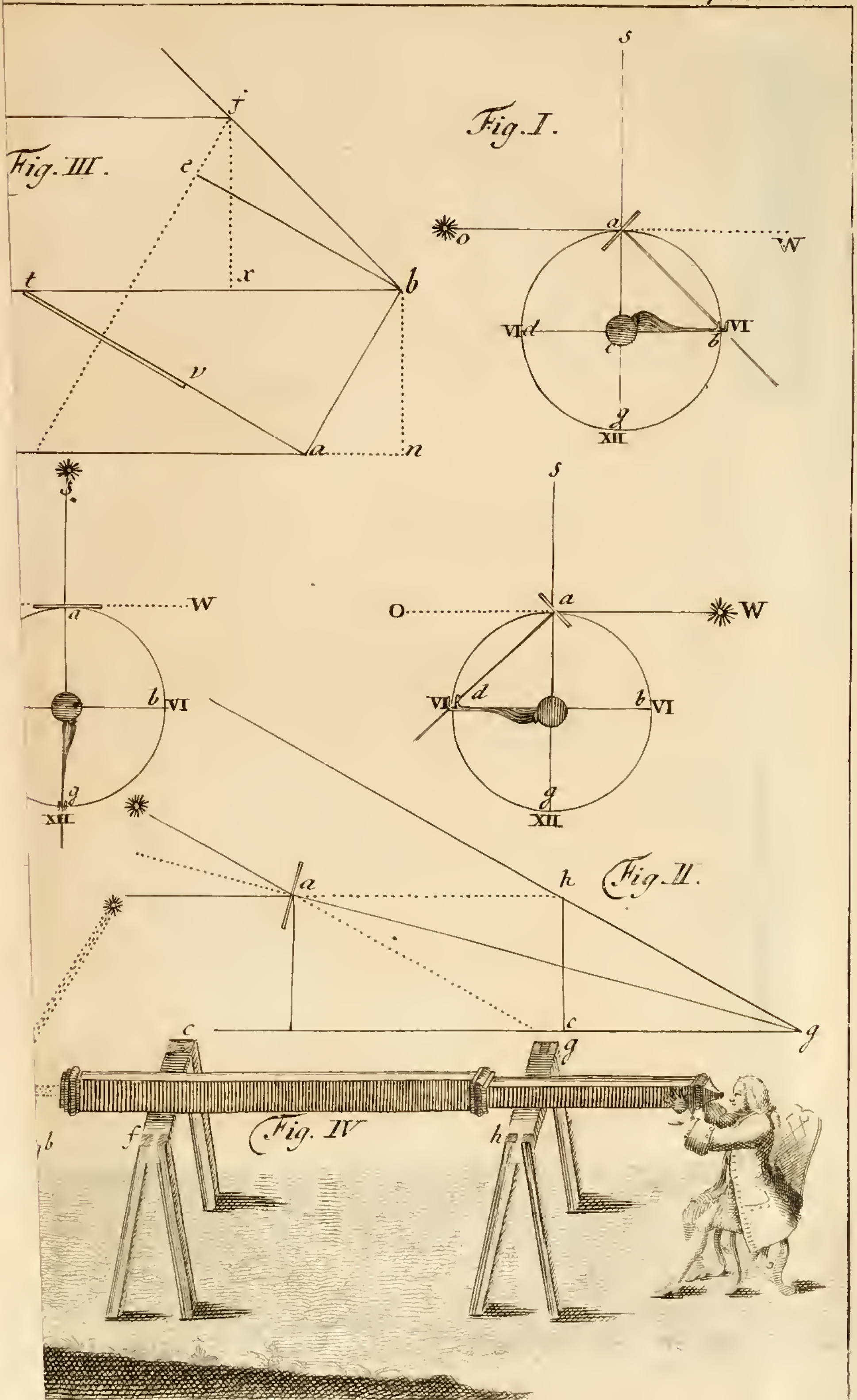


Fig. I.
s
o
a
W
VI d
c
b VI
g
XII
Fig. III.
f
e
x
t
b
v
a
n
s
W
a
b VI
g
XII
s
O
a
W
VI d
b VI
g
XII
a
h
Fig. II.
c
c
g
g
b
f
Fig. IV
h

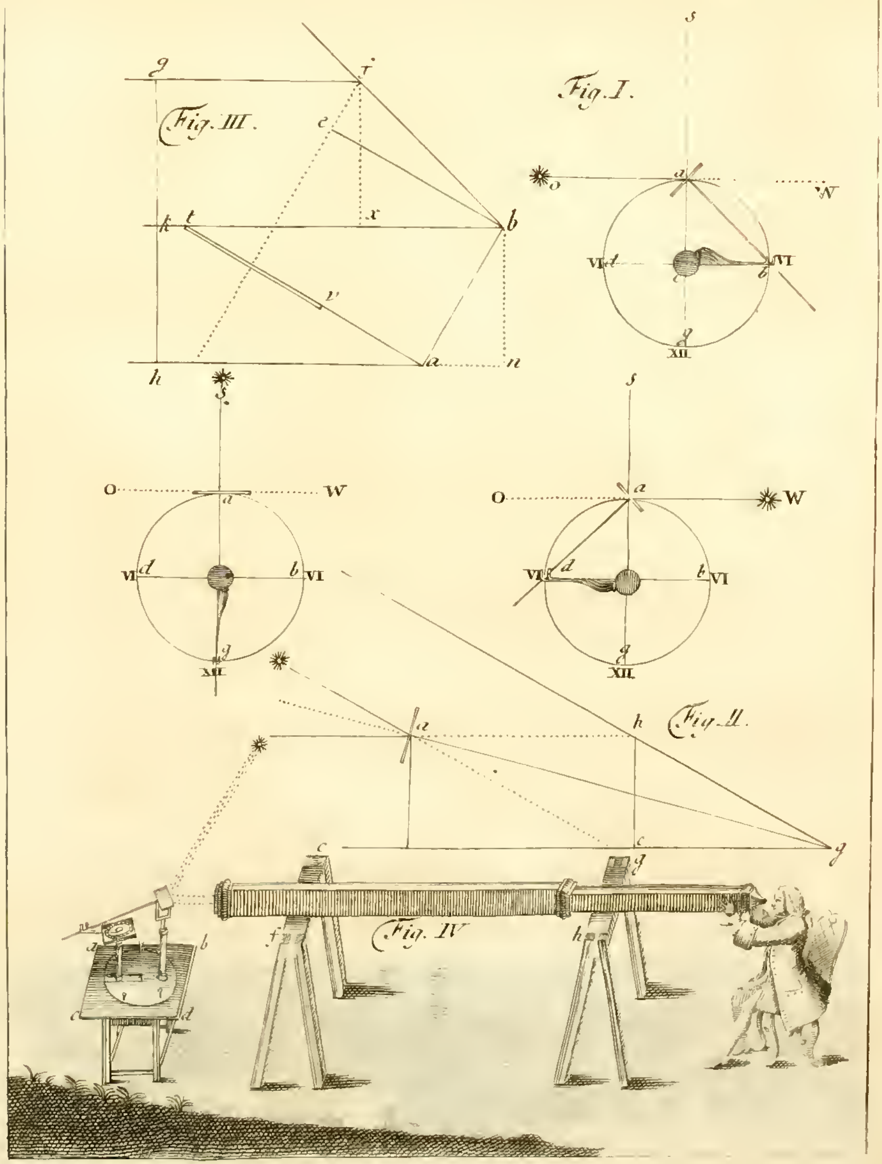


Fig. III.
Fig. I.
Fig. II.
Fig. IV.

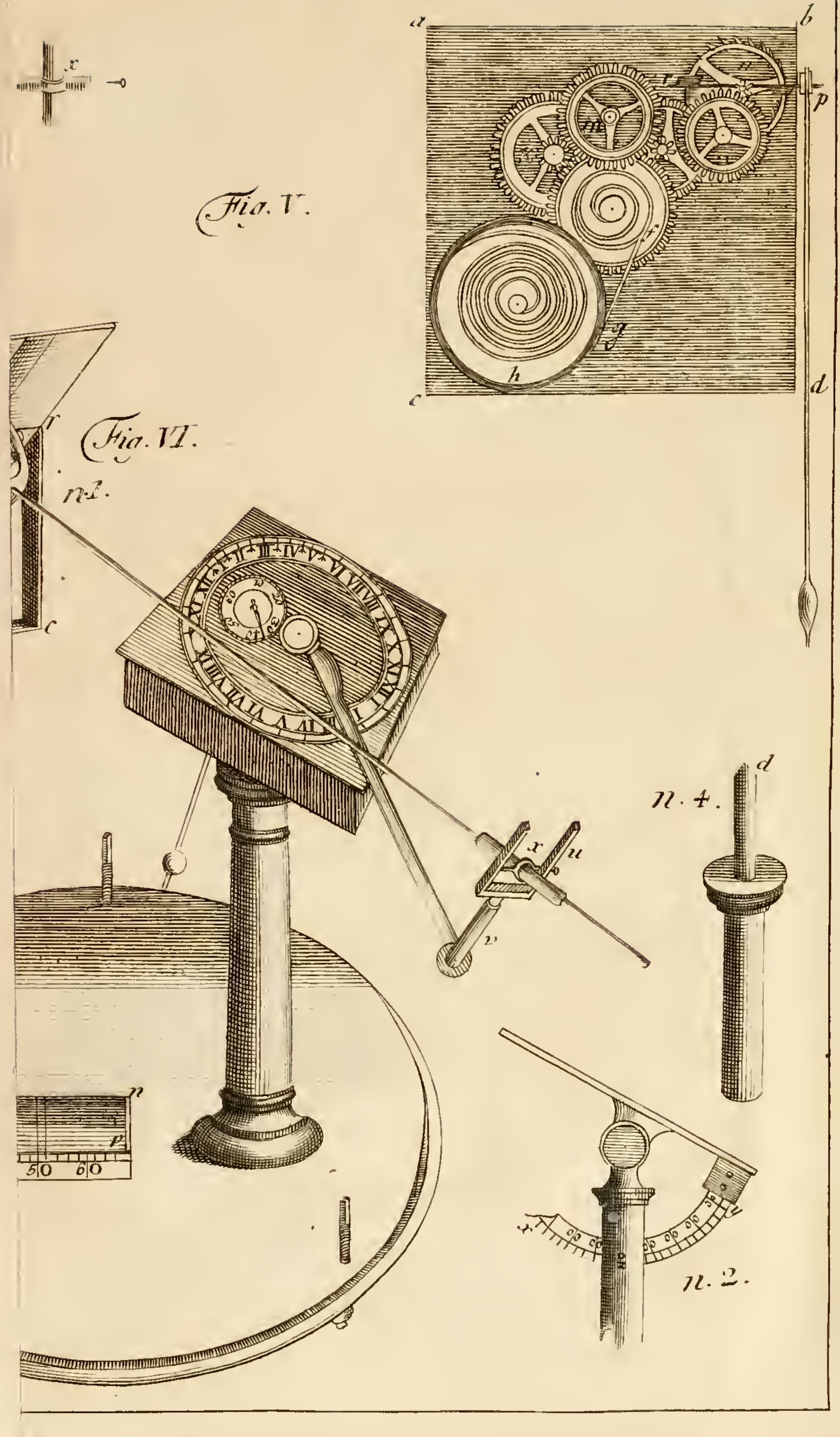
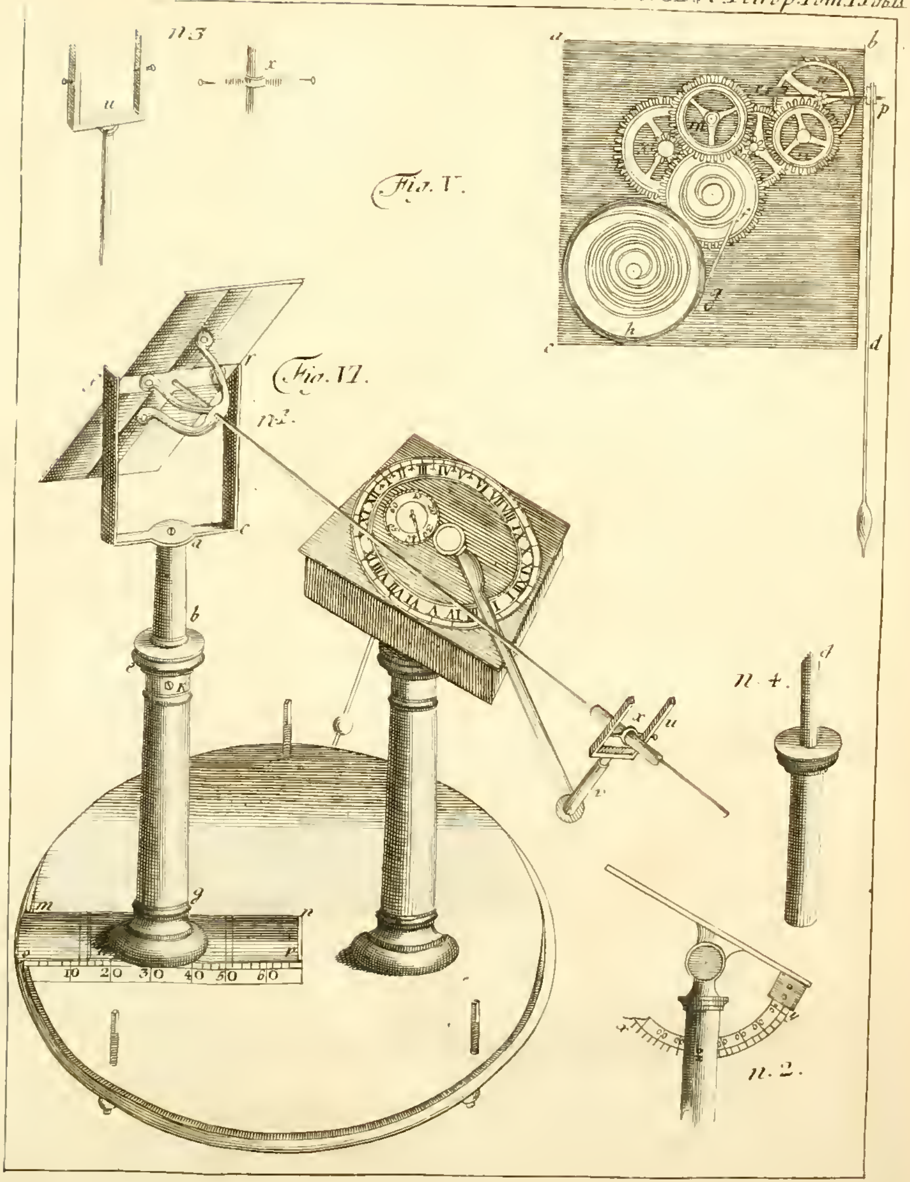
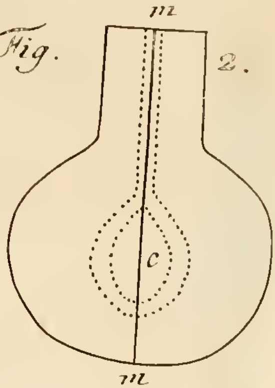


Fig. V.
Fig. VI.
n. 1.
n. 2.
n. 4.
a
b
c
d
h
m
p
x
u
v
50
60


n. 3
Fig. V.
Fig. VI.
n. 1.
n. 4.
n. 2.
10 20 30 40 50 60

1.

Fig. 2.



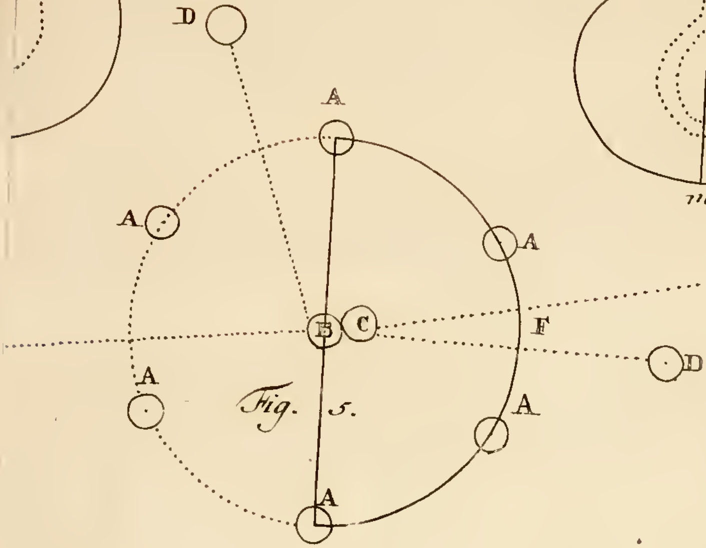


Fig. 5.

3.

Fig. 4.

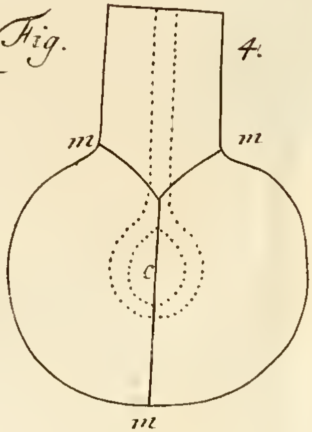


Fig. 1.

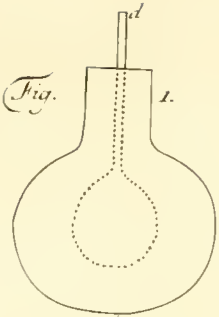
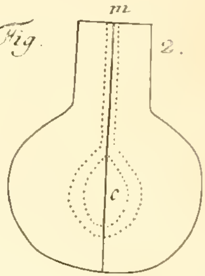


Fig. 2.



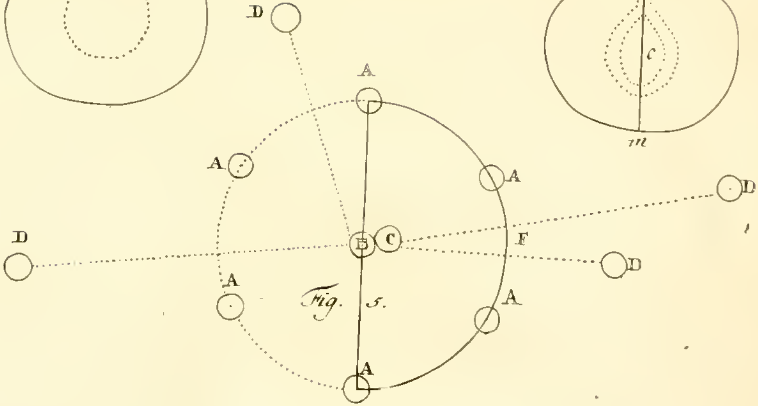


Fig. 5.

Fig. 3.

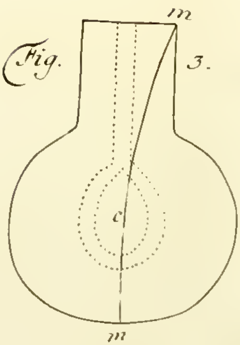
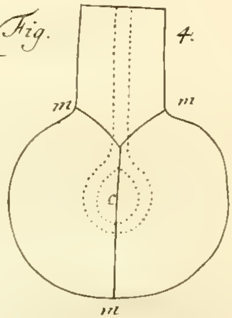
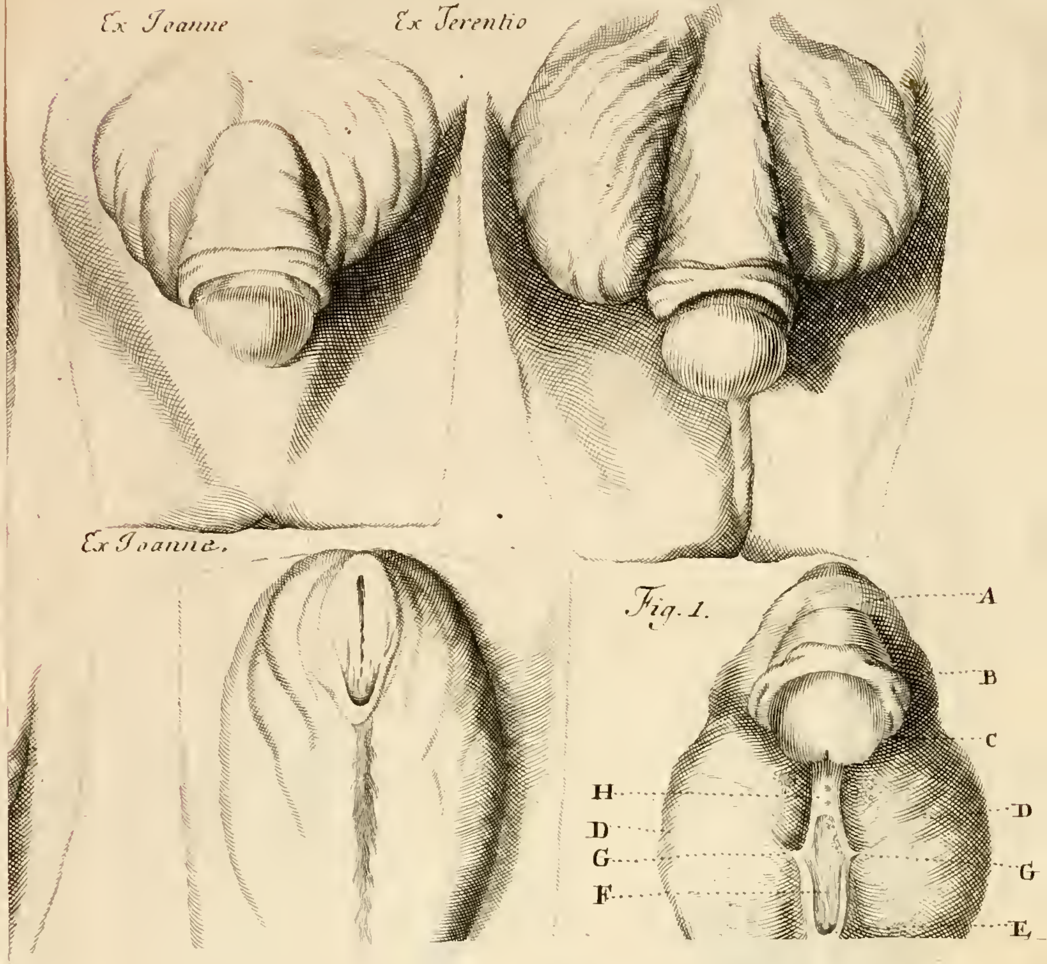
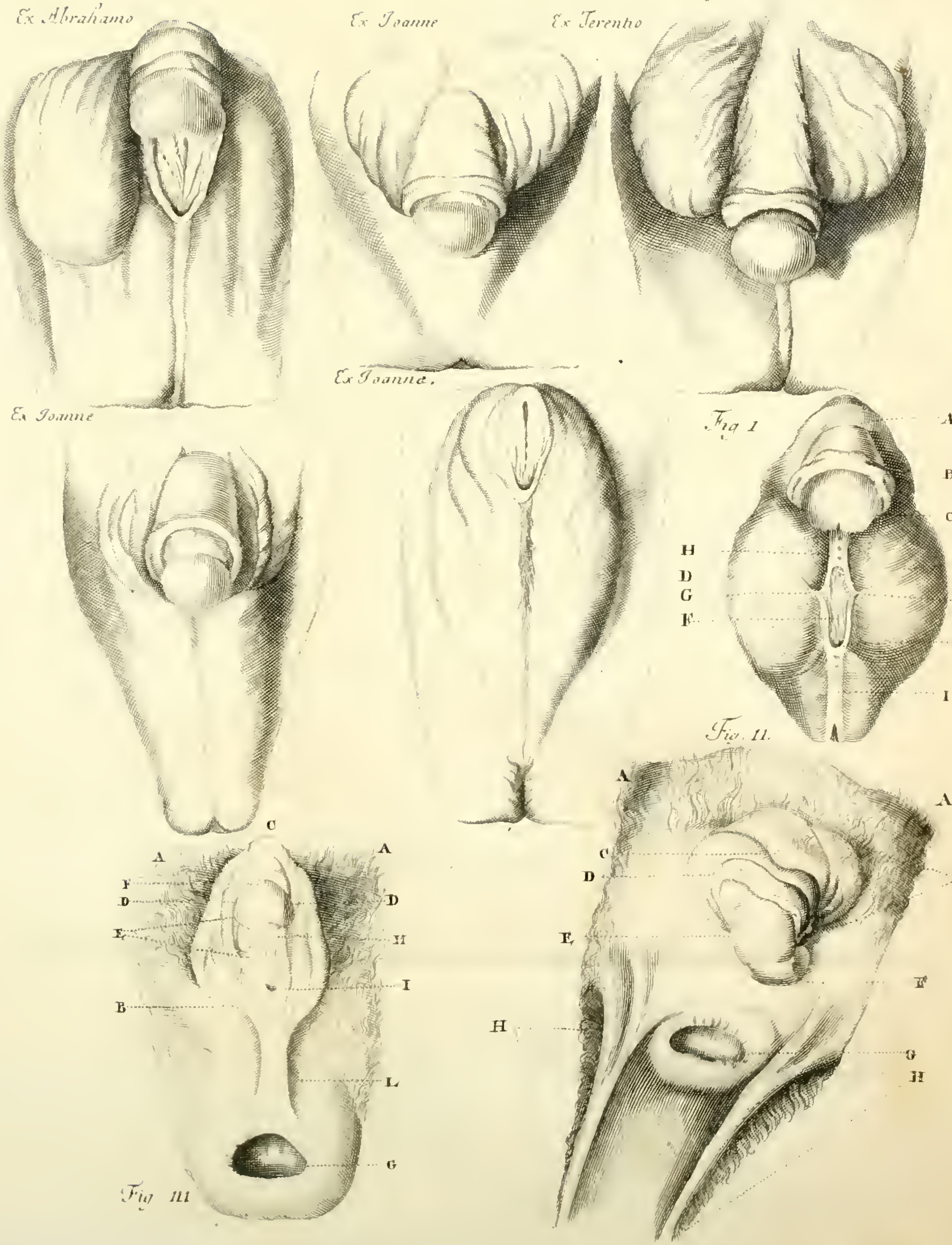


Fig. 4.




Ex Joanne
Ex Terentio
Ex Joanne.
Fig. 1.
A
B
C
H
D
D
G
G
F
E


Ex Abrahamo
Ex Joanne
Ex Terentio
Ex Joanne.
Ex Joanne
Fig I
A
B
C
H
D
G
F
D
G
E
I
Fig. II.
A
A
C
D
B
E
F
H
G
H
C
A
A
F
D
D
E
H
I
B
L
G
Fig III

:St. Petrop. Tom. I. Tab. XII.

Fig. I

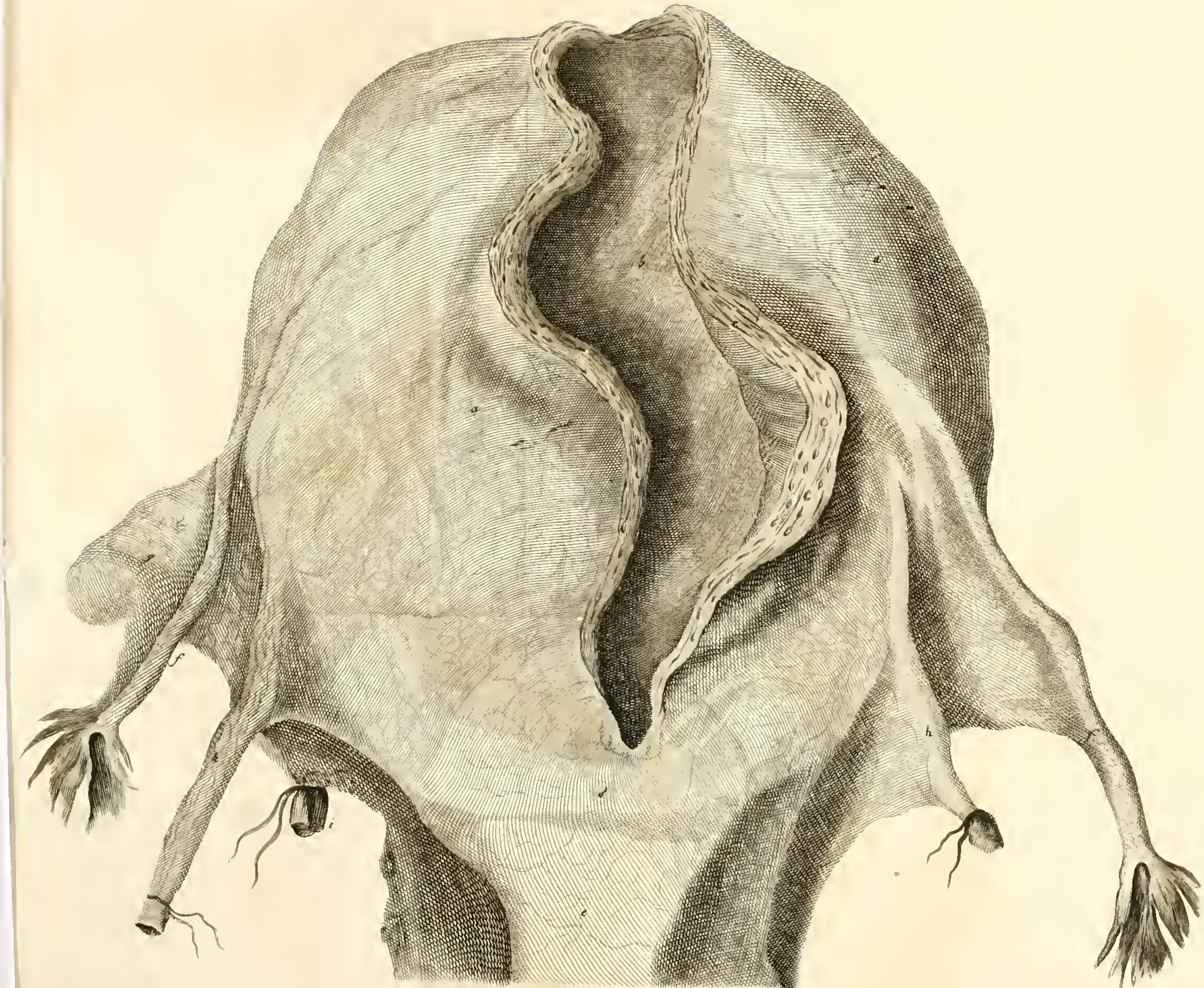


Fig. II

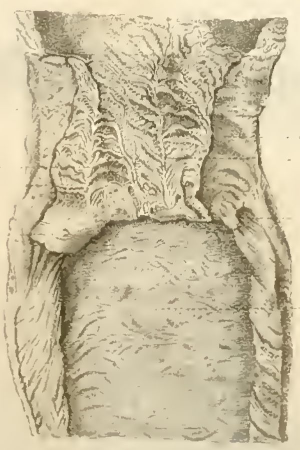
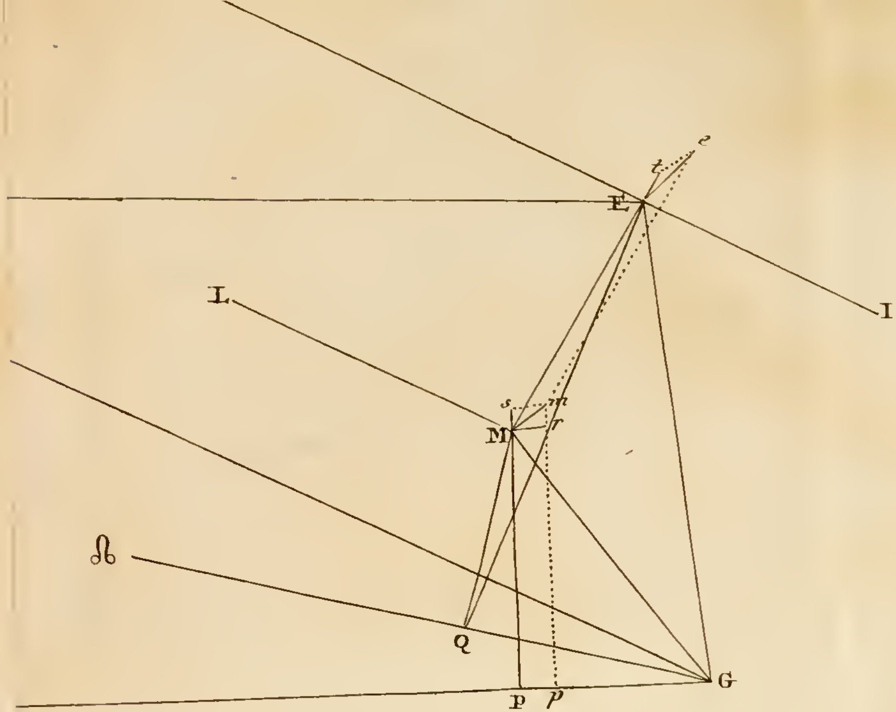



Fig. III

Fig 2.


Fig 1
Fig 2



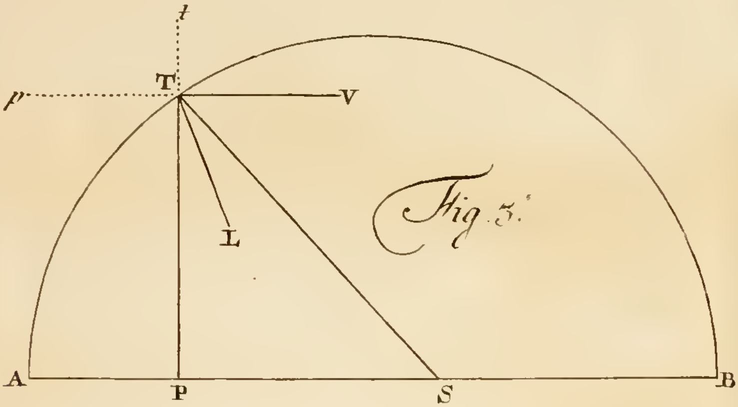


Fig. 3.

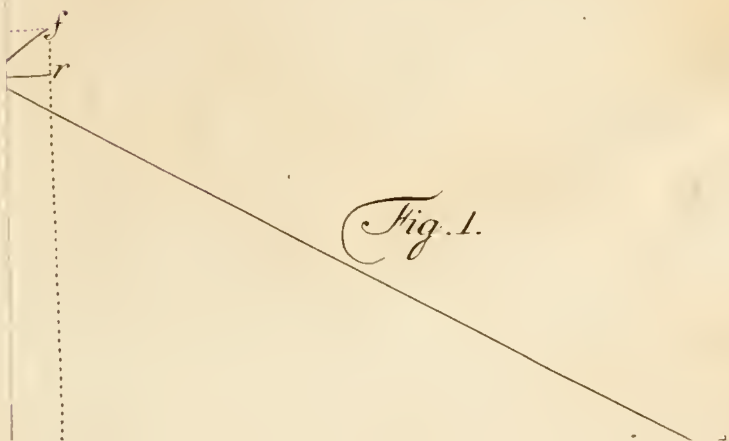


Fig. 1.

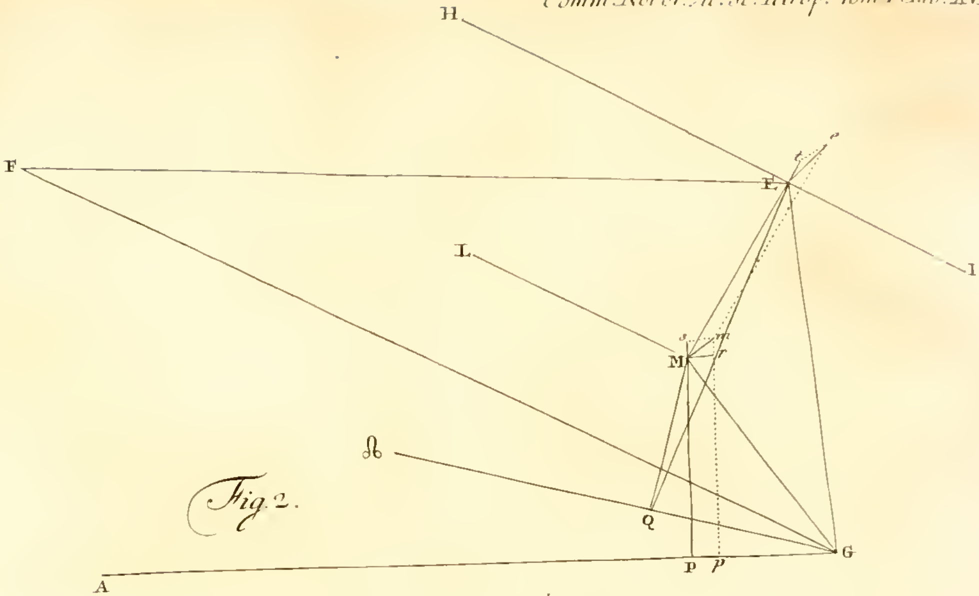


Fig. 2.

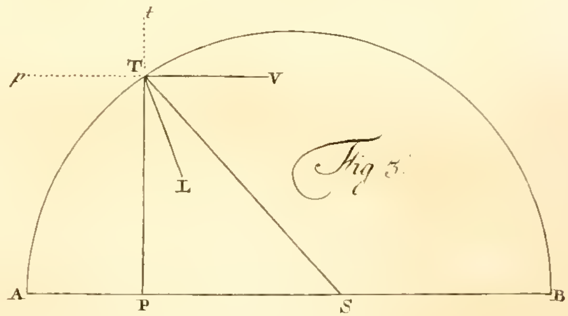


Fig. 3.

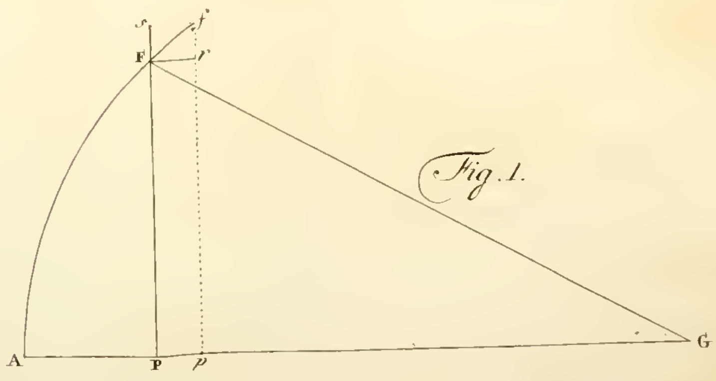
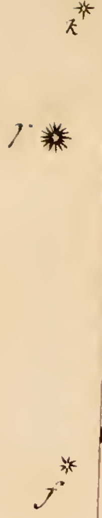


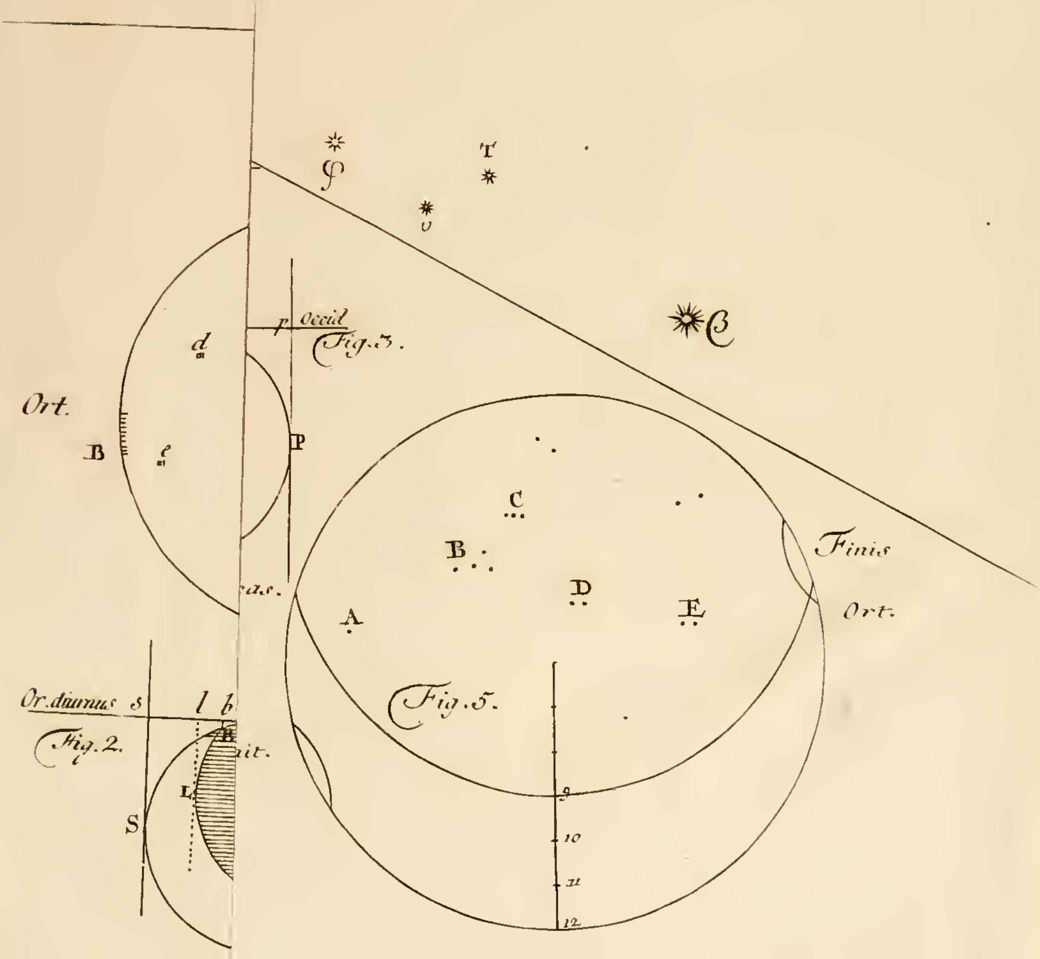
Fig. 1.

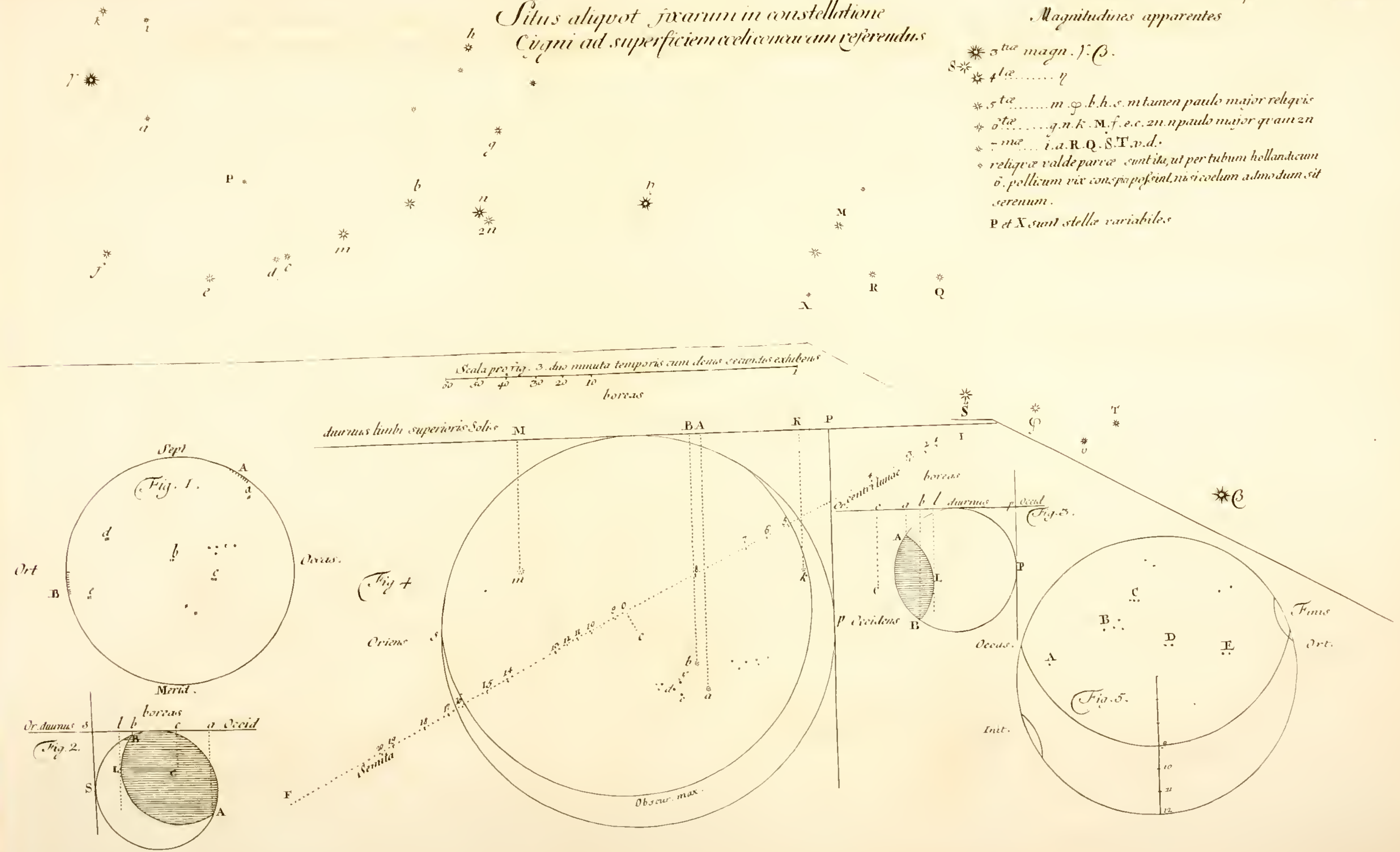


Magnitudines apparentes

3^tiæ magn. γ. β.
4^tæ .... η
5^tæ .... m. φ. b. h. s. m tamen paulo major reliqvis
6^tæ .... g. n. k. M. f. e. c. 2n. n paulo major qvam 2n.
7^mæ .... i. a. R. Q. S. T. v. d.
reliqvæ valde parvæ sunt ita, ut per tubum hollandicum 6. pollicum vix conspici possint, nisi coelum admodum sit serenum.

P et X sunt stellæ variabiles




Situs aliquot fixarum in constellatione
Cygni ad superficiem coeli concavam referendus
Magnitudines apparentes
3tiæ magn. γ. β.
4tæ ...... η
5tæ .... m. φ. b. h. s. m tamen paulo major reliquis
6tæ .... g. n. k. M. f. e. c. 2n. n paulo major quam 2n
7mæ .... i. a. R. Q. S. T. v. d.
reliquæ valde parvæ sunt ita, ut per tubum hollandicum
6. pollicum vix conspici possint, nisi coelum admodum sit
serenum.
P et X sunt stellæ variabiles
Scala pro Fig. 3. duo minuta temporis cum denis secundis exhibens
boreas
diurnus limbi superioris Solis
Sept.
Fig. 1.
Ort.
Occas.
Merid.
Or. diurnus
Occid.
Fig. 2.
Fig. 4
Oriens
Semita
Obscur. max.
Occidens
Fig. 3.
Fig. 5.
Finis
Init.