

Digitized by the Internet Archive
in 2019 with funding from
Wellcome Library

<https://archive.org/details/b30537794>



ASTRONOMIE
NAUTIQUE:

O U

E' L E' M E N S

D'ASTRONOMIE,

Tant pour un Observatoire fixe, que pour
un Observatoire mobile.

Par M. DE MAUPERTUIS.

Præceps, aërii specula de montis, in undas
Deferar.

Virgil. Eclog. VIII.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCXLIII.

THE JOURNAL OF THE
ROYAL SOCIETY OF MEDICINE
AND THE LONDON MEDICAL SOCIETY
PUBLISHED BY THE SOCIETY OF MEDICAL PUBLISHERS
11, BEDFORD SQUARE, LONDON, W.1
1911



THE JOURNAL OF THE
ROYAL SOCIETY OF MEDICINE
AND THE LONDON MEDICAL SOCIETY
PUBLISHED BY THE SOCIETY OF MEDICAL PUBLISHERS
11, BEDFORD SQUARE, LONDON, W.1
1911



P R E F A C E.

Tout l'Art du Navigateur consiste à pouvoir connoître à chaque instant le point de la surface de la Mer où il est ; & l'on peut réduire sous deux genres tous les moyens qu'il a pour cela : on peut appeller *Moyens Géographiques*, ceux qui consistent dans la direction & la longueur de la route : les autres, que j'appellerai *Moyens Astronomiques*, comprennent tous ceux qu'on peut tirer de l'observation des Astres.

Malgré cette division, on ne doit pas regarder ces différens moyens comme absolument indépendans les uns des autres. Ceux que l'Astronomie fournit, dépendent à la vérité

fort peu des moyens géographiques : mais ces derniers ne ſçauroient atteindre à leur perfection ſans le ſecours de l'Aſtronomie. La direction de la route indiquée par la Bouſſole, n'eſt pas toujours la véritable direction : cette Aiguille admirable qui montre le Nord au Navigateur, ne le lui montre pas conſtamment ni exactement : l'obſervation des Aſtres le fait appercevoir de ſes variations, & le met à portée d'y remédier. Dès qu'il a perdu de vûe les Terres, qu'il ne voit plus que le Ciel & la Mer, les Aſtres ſont les ſeuls flambeaux qui puiſſent le conduire avec ſûreté.

Si l'on fait l'énumération de tous les moyens qu'on a, ou qu'il ſemble qu'on ait, pour trouver le point du Globe où l'on eſt, & qu'on conſidère

le Problème spéculativement ; on croira qu'il y a plus de choses données qu'il n'est nécessaire pour le résoudre, & qu'il est un de ces Problèmes que les Géomètres appellent *plus que déterminés* : mais si l'on considère que la plûpart de ces moyens ne sont donnés qu'assés imparfaitement, & que chacun a besoin d'être corrigé ou confirmé par les autres, on verra que tous réunis ensemble, suffisent à peine.

On ne sçauroit donc trop s'appliquer à perfectionner chacun des moyens. Ce seroit un grand avantage si les uns n'étoient jamais nécessaires que lorsque les circonstances empêcheroient de se servir des autres : ou si au lieu des corrections que ces différens moyens se procurent, ils ne

servoient jamais qu'à se confirmer.

Dans mes *E'lémens de Géographie*, & dans les Mémoires de l'Académie*, j'ai exposé les Moyens Géographiques ; ceux qui dépendent de la grandeur des Degrés de la Terre, de la direction de la route, & de la longueur des Arcs que le Vaisseau trace sur la surface de la Mer.

Les Moyens Astronomiques se réduisent à deux principaux : l'un est *la Latitude* ; l'autre, *la Longitude*.

J'ai expliqué dans le *Discours sur la Parallaxe de la Lune*, l'usage qu'on peut faire de cet Astre pour connoître la Longitude sur Mer ; & comme cette méthode m'a paru celle qui jusqu'ici est le plus à notre portée, je me suis attaché à la perfectionner.

* *Mémoires de l'Acad. année 1742.*

Je viens maintenant à la Latitude; à ce point principal de l'Art du Pilote, qui lui fait connoître à quelle distance il est de l'E'quateur.

Lorsque j'ai commencé cette partie de la Navigation, je n'ai pas prévu toute l'étendue qu'elle devoit avoir. En effet, si je ne destinois ce que j'ai à dire sur la Latitude que pour l'usage ordinaire des gens de Mer, l'ouvrage ne seroit pas long. La hauteur méridienne du Soleil, ou de quelque'Etoile, dont la déclinaison soit connue, leur suffit pour déterminer cette Latitude: & ils sont si bornés à cette méthode, que si quelque nuage les empêche de voir le Soleil ou l'Etoile au moment de leur passage par le Méridien, ils ne connoissent guère d'autre moyen astronomique pour y suppléer.

Mais quand j'ai voulu parcourir toutes les ressources que le Navigateur peut tirer de l'observation des Astres, j'ai trouvé tant de choses utiles ou curieuses, que j'ai vû que l'ouvrage méritoit beaucoup plus d'étendue que je n'avois pensé : j'ai vû que quoique l'Astronomie ordinaire des gens de Mer fût fort bornée, une science beaucoup plus vaste leur seroit utile : que quoique leurs observations fussent assés simples, on pouvoit leur en enseigner de plus simples encore : enfin j'ai trouvé des méthodes qui ne supposent ni adresse, ni même presque d'Instrumens.

La recherche de tous les moyens par lesquels on peut trouver la Latitude, m'a jetté dans une Théorie assés étendue, & m'a conduit à un ouvrage

qu'on peut appeller *Des E'lémens d'Astronomie, tant pour un Observatoire fixe, que pour un Observatoire mobile.*

En effet, on peut considérer le Navigateur comme un Astronome: qui ne diffère de l'Astronome ordinaire; qu'en ce que celui-ci fait ses observations dans un lieu fixe, & que celui-là fait les siennes dans un Observatoire entraîné par les vents, & continuellement agité. Et si la précision qu'on exige de celui qui se trouve dans toutes les circonstances favorables, rend son art difficile; on peut dire que le défaut de ces circonstances rend l'art de l'autre plus difficile encore, & l'oblige d'avoir recours à des méthodes plus subtiles.

Il est vrai qu'on n'exige pas de l'*Astronome Navigateur* le même degré de précision qu'on exige de l'*Astronome sédentaire*. Celui-ci appliqué à perfectionner l'Astronomie, ne doit négliger aucun des moyens qui peuvent donner ou augmenter la précision, quelque pénibles qu'ils puissent être : celui-là, content de bien diriger sa route, doit souvent faire céder une précision scrupuleuse à la facilité & à la commodité de ses opérations. Une quantité de quelques secondes est importante pour l'Astronome : le Pilote peut impunément négliger quelques minutes : c'est au Géomètre à calculer les cas où cette précision est nécessaire, & ceux où l'on peut user de cette licence. Enfin quelquefois le Navigateur seroit heu-

reux de connoître sa Latitude d'une manière encore moins exacte.

J'ai eu tous ces cas en vûe dans les 40 Problèmes qui composent l'ouvrage suivant.

Dans les uns, je suppose l'Astronome dans l'Observatoire le plus stable, le plus commode, & le mieux muni d'Instrumens: & je lui propose des moyens pour perfectionner l'Astronomie.

D'autres Problèmes sont destinés pour un Astronome dont l'Observatoire seroit bien pourvû d'Instrumens, mais continuellement agité; & je lui propose les moyens que cette agitation rend nécessaires, & laisse possibles.

Enfin on trouvera des Problèmes dans lesquels je ne suppose plus un

Astronome; mais un Navigateur sans science, sans industrie, dénué d'Instrumens, tel qu'il peut se trouver après un Naufrage: & je lui offre les dernières ressources qu'un état aussi malheureux lui permet.

Ces différentes sortes de Problèmes sembloient exiger qu'on les distinguât, & qu'on en formât différentes parties de l'ouvrage: mais si les usages différens auxquels ils sont destinés, exigeoient un tel ordre, la nature de la chose ne l'a point permis, & j'ai cru devoir suivre la connexion que ces Problèmes avoient les uns avec les autres, plutôt que de les assujettir aux circonstances où se peut trouver celui qui s'en fert.

On ne doit donc pas s'attendre à trouver ici un ouvrage qui soit à la

portée de tous les Pilotes. J'ai voulu présenter l'Art dans toute son étendue : proposer ce que les Astronomes pourroient entreprendre dans des Observatoires stables & commodes : ce que pourroient exécuter d'habiles Pilotes sur leurs Vaisseaux : enfin ce qui resteroit à faire pour les Navigateurs les plus bornés, & dans les occasions les plus fâcheuses.

Cet ouvrage est, comme on voit, fort différent de tous les Traités d'Astronomie qui ont paru jusqu'ici ; plus différent encore de tous les Traités de Navigation. Dans les uns on ne s'est attaché qu'aux méthodes qui supposent des Observatoires fixes ; & il s'en faut bien qu'on les ait toutes épuisées : dans les autres on s'est contenté de donner quelques Problèmes

astronomiques des plus simples. Et l'on a réduit ainsi l'Astronomie ordinaire à ne pouvoir guère être utile au Navigateur ; ou l'Astronomie du Navigateur à n'être qu'une petite partie de l'autre Astronomie.

On trouvera au contraire dans notre *Astronomie Nautique* une science supérieure à l'Astronomie ordinaire. En effet, l'Astronomie qui s'exerce dans un Observatoire continuellement agité, & dont le lieu sur le Globe de la Terre, change continuellement, est beaucoup plus difficile, & a besoin d'une plus grande industrie que celle qui jouit du repos.

Je ne puis mieux faire sentir la différence de ces deux Astronomies, que par la considération de quelques-

uns des Problèmes qu'on trouvera dans l'ouvrage suivant.

De toutes les observations qu'on peut faire sur Mer, la plus facile & la plus exacte, c'est celle du lever & du coucher du Soleil. On n'a besoin d'aucun Instrument. Tout le monde sçait que lorsque cet Astre est dans l'horison, l'épaisseur de l'Atmosphère interceptant une grande partie de ses rayons, nous permet de voir son Disque sans avoir besoin d'armer l'œil d'aucun Verre coloré, & sans crainte d'en être éblouis. La ligne qui termine l'horison sensible, est si éloignée de l'Observateur par rapport aux petites différences que l'agitation des Flots cause à la hauteur où il se trouve, qu'il peut prendre les momens où il observe l'émerfion &

l'immersion du Soleil dans l'horison, pour les mêmes qu'ils seroient si le Vaisseau restoit immobile.

Mais cette observation si simple & si sûre, si l'on en veut faire l'usage qui se présente d'abord à l'esprit pour trouver la Latitude, suppose qu'on sçache l'heure à laquelle elle se fait : & l'on ne peut avoir l'heure sur la Mer, que par des observations qui n'ont ni la même simplicité, ni la même exactitude.

J'ai donc cherché une méthode pour trouver la Latitude par les observations du lever & du coucher du Soleil, qui fût indépendante de l'heure vraie ; & dans laquelle on n'auroit à considérer que l'intervalle de tems écoulé entre ces observations ; intervalle qu'on peut connoître
par

par une simple Montre, qui n'a pas besoin d'être réglée sur le Soleil, pourvû seulement que son mouvement soit assés uniforme pendant 24 heures.

J'ai pensé que réduisant le Problème à des observations qu'on peut faire dans un Vaisseau avec autant de précision que dans un Observatoire inébranlable, j'aurois une méthode qui donneroit la Latitude sur Mer aussi exactement qu'elle la pourroit donner sur Terre.

Mais je ne puis dissimuler qu'en réduisant le Problème à une si grande simplicité pour l'Observateur, il devient difficile pour le Géomètre qui le veut résoudre. Il semble qu'il y ait dans la science que nous traitons, une fatale compensation entre la simplicité

des opérations, & la difficulté des calculs.

Pour faire connoître cette difficulté, il faut donner une idée du Problème dans toute son étendue.

On sçait que pour tous les peuples de la Terre, chaque jour de l'année a sa durée particulière : d'autant plus longue pour chacun pendant son été, & d'autant plus courte pendant son hiver, qu'il habite une région plus éloignée de l'E'quateur. Il y a donc pour chaque lieu un jour qui est le plus long de tous les jours de l'année, & un jour qui est le plus court. Et le plus long jour est d'autant plus long, & le plus court est d'autant plus court, que le lieu est plus près du Pole : dès qu'on atteint le Cercle polaire, le plus long jour ne finit plus; le Soleil au

Solstice d'été ne se couche plus pour les habitans des Zones glacées ; il ne se lève plus pour eux lorsqu'il est au Solstice d'hiver.

On peut donc par la durée du plus long jour, connoître la distance où l'on est du Pole, qui est le complément de la Latitude.

C'est ainsi que les anciens Géographes avoient déterminé les Latitudes de plusieurs Villes des trois parties du Monde connues de leur tems. Et Ptolémée, qui nous a laissé ces Latitudes, préféroit cette méthode à toutes les autres.

Plusieurs causes cependant rendoient ces déterminations peu exactes. Les Anciens ne connoissoient ni la Réfraction, ni la Parallaxe du Soleil, ni assés exactement l'Obliquité de

l'E'cliptique ; & ils n'avoient point de mesure du tems assés précise.

Ce font-là les causes des erreurs qu'on trouve dans les Latitudes déterminées par les Anciens. Les connoissances qu'on a aujourd'hui, nous mettent à portée de les corriger : mais le Problème, tel qu'ils se le font proposé, demeure sujet à une grande limitation. C'est que dépendant de l'observation de la durée du plus long ou du plus court jour, il n'y a que deux jours dans l'année où l'on puisse le résoudre.

Voici pourquoi jusqu'ici l'on s'est astreint à cette condition.

La durée du jour dépend de deux causes : 1.^o du lieu que l'Observateur occupe sur le Globe de la Terre : 2.^o du lieu du Soleil dans l'E'cliptique.

Dans chaque lieu de la Terre, plus le Soleil s'approche du Tropicque voisin, plus le tems de son séjour sur l'horison est long; plus il s'éloigne du Tropicque, plus ce tems est court.

Mais le changement continuel de déclinaison du Soleil qui, pendant le cours de l'année, rend dans chaque lieu les jours inégaux, altère la durée même de chaque jour, rend inégaux son soir & son matin : rend chaque jour plus long ou plus court qu'il ne seroit si le Soleil à son coucher avoit conservé la même déclinaison qu'il avoit à son lever.

Dans deux points seuls de l'Ecliptique, la déclinaison du Soleil demeure assés constamment la même pour ne causer à la durée du jour aucune altération sensible : ces points

font ceux où le Soleil, après s'être éloigné de l'Équateur, cesse de s'en éloigner, & s'en rapproche. Et ces points, qui sont les points solsticiaux, répondent au plus long & au plus court jour de l'année.

Voilà pourquoi jusqu'ici l'on s'est fixé à ces jours, pour trouver la Latitude par leur durée. Mais on voit par-là combien cette restriction rend le Problème peu utile pour le Navigateur, qui chaque jour a besoin de connoître sa Latitude.

D'autres causes encore semblent lui refuser l'usage de ce Problème. Nous avons vû que l'agitation des Flots ne changeoit point l'instant du lever & du coucher du Soleil : mais il n'en est pas ainsi du transport du Vaisseau d'un lieu à l'autre. Selon la

plage vers laquelle il navigue, il va trouver un jour plus long ou plus court que celui que le lieu du matin lui promettoit : & quoique les momens de l'émerfion & de l'immerfion du Soleil dans l'horifon foient les mêmes qu'ils feroient fi l'Obfervateur n'éprouvoit aucune agitation, ils ne font pas féparés par le même intervalle qu'ils le feroient fi l'Obfervateur étoit demeuré au même lieu. Pour m'expliquer plus brièvement, l'agitation n'apporte aucun trouble à l'obfervation du lever ni du coucher du Soleil, mais le mouvement progressif du Vaiffeau, éloigne ou rapproche ces deux inftans, & change pour le Navigateur la durée qui les fépare.

J'ai voulu vaincre toutes ces difficultés; & rendre praticable fur la Mer,

& tous les jours de l'année, une méthode qui a sur toutes les autres de si grands avantages, par le genre d'observations qu'elle demande.

Mais le Problème simple & facile lorsqu'on le résout comme les Anciens l'ont résolu, dans un Observatoire fixe, sans avoir égard à la Réfraction, ni à la Parallaxe, & qu'on l'astreint au jour du Solstice, devient difficile lorsqu'on veut le résoudre pour tous les jours de l'année, & dans toutes les circonstances où le Navigateur se trouve.

Car 1.^o la Réfraction faisant paroître le Soleil avant qu'il se lève, & le faisant paroître encore après qu'il est couché, rend le jour plus long qu'il n'est réellement.

2.^o En tout autre tems qu'aux Solstices, le changement continuel de

déclinaison du Soleil altère la durée du jour, & l'allonge ou la raccourcit selon que le Soleil s'approche ou s'éloigne du Tropicque.

3.^o L'Observatoire se mouvant lui-même, fait voir au Navigateur un jour plus long ou plus court selon le lieu où il dirige sa route.

Je ne parle point de l'effet de la Parallaxe du Soleil, parce qu'il est trop peu considérable pour qu'on y doive faire attention dans les Problèmes Nautiques. Si cependant on y vouloit avoir égard, on sçait que l'effet de cette Parallaxe étant de faire voir le Soleil plus bas qu'il n'est par rapport au centre de la Terre, pendant que la Réfraction le fait voir plus haut; il n'y a qu'à retrancher la Parallaxe de la Réfraction, & prendre

le reste pour la quantité dont le Soleil paroît plus élevé qu'il n'est.

Pour résoudre le Problème dans toutes ses circonstances; il faut donc apprécier ce que chacune contribue à rendre le jour plus long ou plus court : & chercher quelle seroit sa durée pour un Observateur : qui depuis le lever du Soleil jusqu'à son coucher seroit demeuré à la même place : qui seroit sur une Terre qui n'auroit point d'Atmosphère, ou dont l'Atmosphère ne causeroit aux rayons de lumière aucune réfraction : enfin qui observeroit un Soleil qui depuis son lever jusqu'à son coucher conserveroit toujours la même déclinaison.

Le calcul est compliqué : mais la peine ne sera que pour le Géomètre. Il pourra donner au Pilote des Tables

par le moyen desquelles il aura sa Latitude, en observant seulement la durée apparente du jour ; & à peu près la route qu'il aura tenue du matin au soir.

Il n'y a plus à ce Problème qu'une restriction ; mais une restriction qui est attachée à la nature de la chose, & qui ne peut guère nuire dans l'usage qu'on en veut faire. Deux seuls jours de l'année la méthode des Anciens étoit praticable : il n'y a que deux jours dans l'année où l'on ne puisse pas pratiquer la nôtre ; qui sont les jours de l'E'quinoxe. Lorsque le Soleil est à ces points, les jours étant égaux dans tous les lieux de la Terre, il est évident qu'on ne sçauroit déterminer la Latitude d'aucun lieu par leur durée. Hors de ces tems, notre méthode est universelle,

Quelques Astronomes ont proposé un autre Problème qui semble d'abord être d'une grande utilité pour les Navigateurs : c'est de déterminer la Latitude par l'observation de deux Étoiles qui se lèvent ou qui se couchent au même instant.

Il est évident que pour deux Étoiles dont les lieux sont donnés dans les Cieux, n'y ayant qu'une seule position de l'axe de la Terre qui les fasse se trouver ensemble dans l'horison, cette circonstance détermine la position de l'axe sur l'horison, ce qui est la hauteur du Pole.

Mais cette méthode si spécieuse au premier aspect, ne sçauroit être d'aucun usage ; c'est parce qu'on ne sçauroit voir les Étoiles dans l'horison. Leur lumière est tellement éteinte

ou obscurcie par l'Atmosphère, qu'il faut des circonstances fort rares de sérénité dans l'air pour qu'on puisse suivre jusque vers l'horison quelques Étoiles des plus brillantes du Ciel.

Si l'on veut donc déterminer la Latitude par des émerfions & des immerfions dans l'horison ; il faut abandonner les Étoiles fixes, & se tourner vers des Astres qui conservent affés de lumière dans l'horison pour y être apperçus. Mais alors comme il y a peu de ces Astres, il seroit bien rare de se trouver dans une position de la Sphère qui en fist voir deux se lever ou se coucher en même tems : & cette méthode praticable dans cette seule circonstance, ne pourroit être utile que pour quelques lieux & pour quelques jours.

J'ai cherché une méthode pour trouver la Latitude par les émerfions & les immerfions de deux Aftres dans l'horifon, mais qui ne fût point afteinte à la condition qu'ils fe trouvaſſent dans l'horifon au même instant. On eſt alors maître du choix des Aftres : & aucun après le Soleil ne m'a paru fi propre pour la réfolution de ce Problème que la Planète de *Vénus*. Elle répand affés de lumière pour qu'on la voie facilement dans l'horifon : & la régularité de fon cours fait connoître fort exactement fon lieu dans le Ciel. Compagne fidelle du Soleil, elle le précède, ou le fuit toujours d'affés près ; & c'eſt par le tems écoulé entre le lever ou le coucher de ces deux Aftres, que j'enſeigne à trouver la Latitude.

Les deux méthodes précédentes peuvent être fort utiles. Je parlerai maintenant d'une autre, qui ne donne qu'une exactitude fort bornée, mais qui mérite d'être connue par sa singularité, & par la simplicité de l'observation qu'elle exige. Elle feroit *trouver la Latitude par le seul tems que le Soleil ou la Lune emploient à s'élever de tout leur Disque au dessus de l'horizon, ou à se plonger au dessous.*

Ce tems en général dépendant de la grandeur du diamètre de l'Astre, de sa déclinaison, & de la hauteur du Pole dans le lieu de l'observation; pour un jour de l'année donné, ne dépend donc plus que de la hauteur du Pole. Plus l'axe de la Terre est élevé, plus l'E'quateur & ses Cercles parallèles sont coupés obliquement

par l'horifon, plus le tems de l'émerfion & de l'immerfion du Difque eft long : & fa durée détermine la hauteur du Pole.

Quelque facile que foit cette méthode: que le Navigateur ne foit pas tenté de s'y arrêter lorsqu'il en pourra pratiquer d'autres plus exactes. Je ne la lui offre que pour des cas malheureux où il n'auroit point d'autre reffource.

Après l'obfervation du lever & du coucher des Aftres, il n'y en a pas de plus fimple, ni de plus facile, que celle du moment où ils fe trouvent dans un même vertical. Dans un Obfervatoire ftable, une Lunette fixée à angles droits fur un axe horifontal, & mobile autour de cet axe, donne ces obfervations avec une grande
précifion.

P R E F A C E. xxxiiij

précision ; sur la Mer un fil chargé d'un plomb suffit : & si l'on se vouloit contenter d'une moindre exactitude , on pourroit à la vûe simple juger assés juste si la ligne qui joint deux E'toiles est verticale , sur-tout si l'on choisissoit deux E'toiles assés éloignées l'une de l'autre.

Je donne pour trouver la Latitude par des observations de cette espèce, une méthode qui peut être fort utile sur Terre & sur Mer.

J'ai déjà dit que l'ouvrage suivant n'étoit pas destiné uniquement pour les gens de Mer : on y trouvera plusieurs Problèmes pour la perfection de l'Astronomie.

Tout le monde sçait, du moins tous les Astronomes sçavent, que lorsqu'on veut déterminer la hauteur du

Pole, on suppose connue la déclinaison de l'Astre qu'on emploie à cette recherche ; & que lorsqu'on veut déterminer la déclinaison d'un Astre, on suppose connue la hauteur du Pole. La plupart des méthodes pour trouver l'une ou l'autre de ces deux choses, sont dans le cas de ce cercle vicieux. On trouvera dans l'ouvrage suivant un Problème par lequel on l'évite ; on aura la hauteur du Pole indépendamment de la déclinaison des Astres ; la déclinaison des Astres indépendamment de la hauteur du Pole : & le tout se fera sans la mesure actuelle d'aucun angle.

M. Mayer, auteur de cette belle méthode*, lui attribuoit encore une prérogative qu'il seroit à souhaiter

* *Comment. Acad. Petrop. Tom. v.*

qu'elle eût ; ce seroit d'être à l'abri de la Réfraction.

Depuis qu'on connoît cette propriété qu'a l'Atmosphère de rompre les rayons de la Lumière, & de nous faire voir les Astres dans des lieux où ils ne sont point, tous les Astronomes se sont appliqués à déterminer la hauteur du Pole par des méthodes qui évitassent l'effet de cette illusion ; quoiqu'il paroisse que jusqu'ici ce n'ait pas été avec grand succès. Les unes de ces méthodes supposent qu'on connoisse la déclinaison des Étoiles qu'on emploie à cette recherche ; & c'est cette déclinaison qu'il est difficile de trouver exemte des erreurs de la Réfraction. D'autres supposent l'observation d'une Étoile au Zénith, ce qui les limite extrêmement,

On trouvera dans l'ouvrage suivant* une méthode délivrée de toutes ces suppositions, & entièrement à l'abri des effets de la Réfraction. Et l'on aura par elle également la hauteur du Pole, & la déclinaison des Etoiles.

Enfin nous nous sommes attachés à des Questions de pure spéculation, comme au fameux Problème du plus court crépuscule. On s'étonnera qu'après qu'il a été si long-tems l'objet des recherches des plus habiles Mathématiciens, la solution en fût demeurée jusqu'ici imparfaite. La généralité de ma méthode m'a fait découvrir & résoudre une difficulté que les autres Astronomes n'avoient pas aperçue : mais qui vraisemblablement

* *Problème XXV.*

P R E F A C E. xxxvii

avoit été remarquée par deux des plus grands Géomètres du siècle *, qui avouent qu'ils avoient été occupés de ce Problème pendant cinq ans, sans en pouvoir venir à bout.

Je dois maintenant parler de la méthode que j'ai suivie dans tout cet ouvrage.

Pour résoudre les Problèmes astronomiques, on a d'ordinaire recours à une science secondaire : on les réduit à des Triangles tracés sur la surface de la Sphère, que cette science apprend à résoudre. Je parle de la Trigonométrie Sphérique : elle offre d'abord de grandes facilités. On trouve ses règles à la tête de plusieurs Livres ; & souvent on résout des Questions importantes de l'Astrono-

* *Johan. Bern. oper. Tom. i. pag. 64.*

mie par une application aveugle de ces règles. Par elles on est dispensé de pénétrer dans la nature de la question ; & par elles l'Astronome se croiroit dispensé d'être Géomètre, s'il pouvoit méconnoître la science à laquelle elles doivent leur origine.

J'admire l'art des premiers Géomètres qui nous ont donné la Trigonométrie Sphérique : mais je crois que les Esprits géométriques préféreroient, pour les Problèmes d'Astronomie, des solutions immédiates à celles qu'on emprunte d'une autre science ; & auxquelles on ne parvient qu'en pratiquant des règles dont l'origine n'est guère présente à l'esprit, & dont l'application est souvent ambiguë.

J'ai voulu délivrer l'Astronomie du besoin de cette science secondaire ;

& la faire dépendre immédiatement de l'analyse dont toutes les Sciences Mathématiques dépendent.

Je dois avouer qu'on trouvera dans la méthode que j'ai suivie, l'inconvénient qui se rencontre dans toutes les méthodes générales : c'est de donner pour quelques cas particuliers des solutions moins simples & moins commodes que celles auxquelles on parviendroit par des routes indirectes. Mais je ne crois pas qu'on insiste sur ce reproche, lorsqu'on fera attention à l'avantage d'avoir tous les Problèmes qui composent l'ouvrage suivant, résolus par une même méthode & par un même calcul.

Après le grand nombre de choses que j'ai annoncées, je crains de dire que tout est contenu dans quelques

lignes d'Algèbre. Ai-je le tort d'avoir présenté l'ouvrage d'une manière trop avantageuse ? ou l'Algèbre a-t-elle le mérite d'avoir en effet réduit dans un si petit volume une science très-vaste ? c'est à ceux qui examineront l'ouvrage à en juger.

•*()*()*()*()*()*()*()*()*()*()*()*()*()*()*()*()*()*()*()

T A B L E

D E S P R O B L E M E S

Contenus dans cet ouvrage.

*P*RÉPARATION pour tout le Livre, ou
dénomination des principaux élémens de la
Sphère. Page 3

PROBLEME I. *Trouver la relation entre la
hauteur du Pole, la déclinaison d'un Astre,
sa hauteur, & son Angle horaire!* 4

PROBLEME II. *Trouver la relation entre la
hauteur du Pole, la déclinaison d'un Astre,
sa hauteur, & son Angle azymuthal!* 6

PROBLEME III. *Trouver la relation entre
la hauteur du Pole, la déclinaison d'un
Astre, son Angle horaire, & son Angle
azymuthal!* 8

PROBLEME IV. *Trouver la relation entre la
hauteur du Pole, la hauteur d'un Astre, son
Angle horaire, & son Angle azymuthal!* 10

PROBLEME V. *Trouver la relation entre la
déclinaison d'un Astre, son Angle horaire,
sa hauteur, & son Angle azymuthal!* 12

PROBLEME VI. *Le tems qu'un Astre emploie*

T A B L E.

- à traverser un Angle donné, étant donné ;
trouver la déclinaison de l'Astre ?* 18
- PROBL. VII.** *La hauteur du Pole, & la
déclinaison d'un Astre, étant données ;
trouver son Arc semi-diurne ?* 19
- PROBL. VIII.** *La hauteur du Pole, &
la déclinaison du Soleil, étant données ;
trouver son Amplitude ortive ou occase ?* 20
- PROBLEME IX.** *La hauteur du Pole, &
la déclinaison du Soleil, étant données ;
trouver la réfraction horisontale ?* 21
- Instrument azymuthal.* 22
- Des points où les Astres tombent ou s'élèvent
perpendiculairement à l'horison.* 26
- PROB. X.** *La hauteur du Pole, & la déclinaison
d'un Astre, étant données ; trouver
la hauteur à laquelle on le voit s'élever ou s'abaisser
perpendiculairement à l'horison ?* 27
- PROB. XI.** *La déclinaison d'un Astre étant donnée,
sa hauteur apparente dans le point où
il décrit la partie verticale de son Cercle, &
son Angle horaire pour l'instant de cette hauteur ;
trouver la réfraction qu'il éprouve ?* 29
- Correction du Midi déterminé par des hauteurs
correspondantes.* 31
- PROB. XII.** *La hauteur du Pole étant donnée ;
la déclinaison du Soleil, le tems écoulé entre*

T A B L E.

deux hauteurs égales du Soleil, & le changement du Soleil en déclinaison pendant le tems écoulé entre ces deux hauteurs : trouver de combien l'instant du Midi differe du milieu de ce tems ? 34

PROBL. XIII. *La hauteur du Pole étant donnée ; la déclinaison du Soleil, le tems écoulé entre deux hauteurs égales, & la différence entre l'instant du Midi & le milieu de ce tems : trouver le changement du Soleil en déclinaison pendant le tems écoulé entre les observations !* 36

PROB. XIV. *La déclinaison du Soleil étant donnée ; le tems écoulé entre deux hauteurs égales, le changement du Soleil en déclinaison pendant le tems écoulé entre ces hauteurs, & la différence entre l'instant du Midi & le milieu de ce tems : trouver la hauteur du Pole ?* 37

PROB. XV. *La hauteur du Pole étant donnée ; & l'abaissement du Cercle crépusculaire : trouver le jour du plus court crépuscule !* 38

PROB. XVI. *La hauteur du Pole, & la déclinaison du Soleil étant données ; trouver le tems que le Soleil emploie à s'élever au dessus de l'horison, ou à s'abaisser de tout son Disque ?* 43

PROB. XVII. *La hauteur du Pole, &*

T A B L E.

*la déclinaison du Soleil étant données ;
trouver le diamètre du Soleil par le tems
qu'il emploie à s'élever sur l'horison, ou à
s'abaisser de tout son Disque ?* 45

PROB. XVIII. *Trouver la hauteur du Pole,
par le tems que le Soleil emploie à s'élever
sur l'horison, ou à s'abaisser de tout son
Disque ?* 46

PROBL. XIX. *La hauteur du Pole étant
donnée ; la déclinaison d'un Astre, & sa
hauteur : trouver le tems qu'il emploie à
s'élever ou à s'abaisser d'une petite quan-
tité donnée !* 48

PROBLEME XX. *La hauteur du Pole étant
donnée ; la déclinaison d'un Astre, & sa
hauteur : trouver la petite hauteur dont il
s'est élevé ou abaissé, par le tems qu'il y
a employé !* 49

PROBL. XXI. *Trouver la hauteur du Pole,
par le tems qu'un Astre, dont la déclinaison
& la hauteur sont connues, emploie à s'éle-
ver ou à s'abaisser d'une petite quantité
donnée !* 50

PROB. XXII. *Deux hauteurs d'un Astre,
dont la déclinaison est connue, étant données,
avec le tems écoulé entre les observations :
trouver la hauteur du Pole, & l'heure des
observations ?* 52

T A B L E.

PROB. XXIII. *La hauteur d'un Astre, dont la déclinaison est connue, étant donnée; & le tems écoulé entre l'observation, & le moment de son coucher: trouver la hauteur du Pole?* 55

PROB. XXIV. *Deux hauteurs d'un Astre qui est dans l'E'quateur, ou fort près de l'E'quateur, étant données, avec le tems écoulé entre; trouver la hauteur du Pole exactement, ou à peu-près?* 57

PROB. XXV. *Deux passages d'une E'toile à deux verticaux, étant donnés par les Angles azymuthaux, & par les Angles horaires; trouver la hauteur du Pole, & la déclinaison de l'E'toile?* 58

PROB. XXVI. *La hauteur du Pole étant connue; & deux Astres, dont les déclinaisons, & les ascensions droites sont données, étant vûs dans un même vertical: trouver l'heure de l'observation?* 60

PROB. XXVII. *Trouver l'heure de la nuit, indépendamment de la hauteur du Pole, par l'observation de deux Astres dans un même vertical?* 62

PROB. XXVIII. *Connoissant l'heure à laquelle on voit dans un même vertical deux Astres, dont les déclinaisons, & les ascensions droites sont données; trouver la hauteur du Pole?* 63

T A B L E.

- PROB. XXIX.** *Connoissant l'heure à laquelle on voit dans un même Almicantarath deux Astres, dont les déclinaisons, & les ascensions droites sont données; trouver la hauteur du Pole!* 64
- PROB. XXX.** *Connoissant les déclinaisons, & les ascensions droites de trois E'toiles; & l'intervalle de tems entre les momens où l'une des trois se trouve dans un même vertical que chacune des deux autres; trouver l'heure, & la hauteur du Pole!* 65
- PROB. XXXI.** *Trois hauteurs d'un Astre étant données, avec les deux intervalles de tems écoulé entre: trouver la déclinaison de l'Astre, & la hauteur du Pole!* 69
- PROB. XXXII.** *L'obliquité de l'E'cliptique, & la durée du plus long ou du plus court jour dans quelque lieu, étant données: trouver la hauteur du Pole, en négligeant la réfraction, & la parallaxe!* 74
- PROB. XXXIII.** *L'obliquité de l'E'cliptique, & la hauteur du Pole, étant données: trouver la durée du plus long ou du plus court jour, s'il n'y avoit point de réfraction, ni de parallaxe!* 75
- PROB. XXXIV.** *L'obliquité de l'E'cliptique, la durée du jour solsticial, & la réfraction horisontale & la parallaxe, étant données:*

T A B L E.

*trouver l'altération causée à la durée du jour
par la réfraction & la parallaxe ?* 77

PROB. XXXV. *L'obliquité de l'E'cliptique,
& la durée du jour solsticial, étant données :
trouver l'erreur que la réfraction & la pa-
rallaxe causent sur la hauteur du Pole!* 79

PROB. XXXVI. *L'obliquité de l'E'cliptique,
la durée du jour solsticial, & la hauteur du
Pole, étant données : trouver la différence
de la réfraction horisontale & de la pa-
rallaxe !* 81

PROB. XXXVII. *La durée du jour étant
donnée ; la déclinaison du Soleil, & son
changement en déclinaison : trouver l'alté-
ration causée à la durée du jour par ce
changement !* 82

PROB. XXXVIII. *Trouver sur Mer la hauteur
du Pole par la durée du jour !* 83

PROB. XXXIX. *Connoissant la déclinaison
& l'ascension droite de deux Astres, & le
tems écoulé entre leur lever ou leur coucher :
trouver la hauteur du Pole !* 90

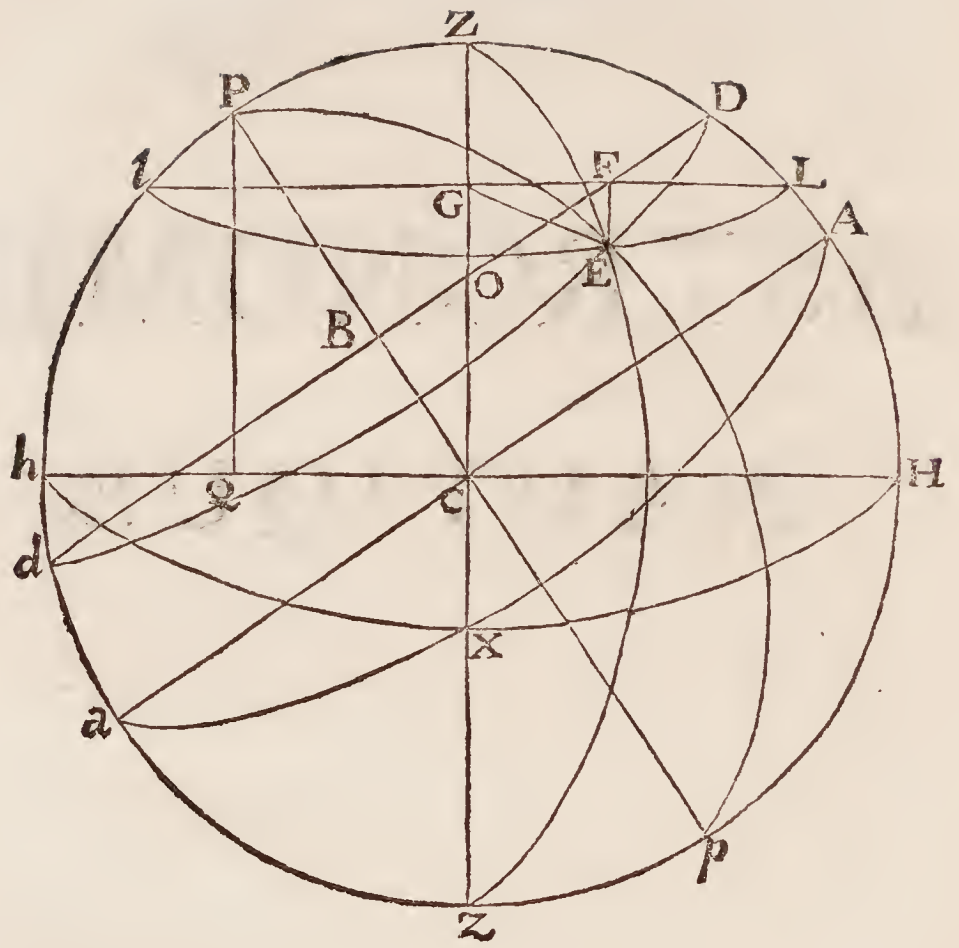
*Méthode pour trouver la déclinaison des E'toiles,
& la hauteur du Pole, indépendamment
l'une de l'autre, & sans se servir d'aucun
angle mesuré par des arcs de Cercle.* 94

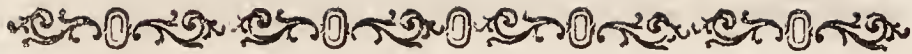
T A B L E.

PROBLEME XL. *Les passages de deux Etoiles par le Méridien, par deux Verticaux, & par deux Almicantaraths inconnus, mais constans, étant donnés : trouver la déclinaison de ces Etoiles, & la hauteur du Pole!*

95

ASTRONOMIE
NAUTIQUE.





*PRÉPARATION pour tout le Livre,
ou Dénomination des principaux
élémens de la Sphère.*

SOient Pp l'Axe de la Sphère céleste;
 $PZAHpza hP$ le Méridien, & HXh
l'Horison du lieu ; AXa l'E'quateur,
 DEd le Cercle que décrit l'Astre, PEp
le Méridien qui passe au point E où
l'Astre se trouve, ZEz son Vertical,
& LEl son Almicantarath.

SOIT le Rayon. $CP = r$	On aura
Le Sinus de la déclinaif. de l'Astre $CB = x$	$EF = \frac{y x}{r}$
Son Co-sinus $DB = y$	$BF = \frac{y u}{r}$
Le Sinus de la hauteur du Pole $PQ = s$	$EF = \frac{m k}{r}$
Son Co-sinus $CQ = c$	$GF = \frac{n k}{r}$
Le Sinus de la hauteur de l'Astre $CG = h$	$GF = \frac{n k}{r}$
Son Co-sinus $GE = k$	$CO = \frac{r x}{s}$
Le Sinus de l'Angle horaire $= t$	$BO = \frac{c x}{s}$
Son Co-sinus $= u$	
Le Sinus de l'Angle azymuthal $= m$	
Son Co-sinus $= n$	

A ij

PROBLEME I.

*T*ROUVER la relation entre la hauteur du Pole, la déclinaison d'un Astre, sa hauteur, & son Angle horaire ?

$GO = GC - CO = \frac{hs - rx}{s}$; &
les Triangles semblables QCP , GOF ,
donnant

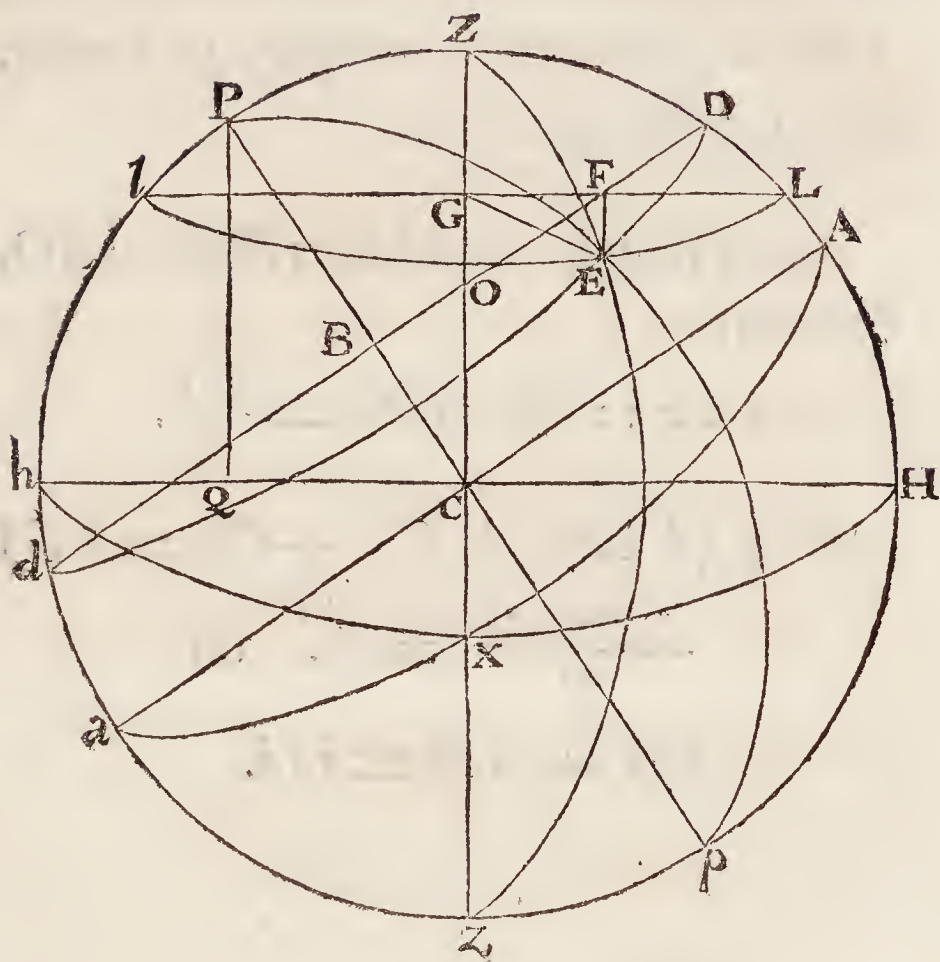
$$c : r :: \frac{hs - rx}{s} : OF = \frac{r hs - rrx}{s} .$$

On a (à cause de $BO + OF = BF$)

$$\frac{ccx + r hs - rrx}{cs} = \frac{yu}{r} : \text{ ou}$$

$$rrh - rsx = cyu .$$

Ici, & dans les Problèmes suivans les signes sont différens, lorsque l'Almicantarath coupe CZ au dessous du point B.



PROBLEME II.

*T*ROUVER la relation entre la hauteur du Pole, la déclinaison d'un Astre, sa hauteur, & son Angle azymuthal ?

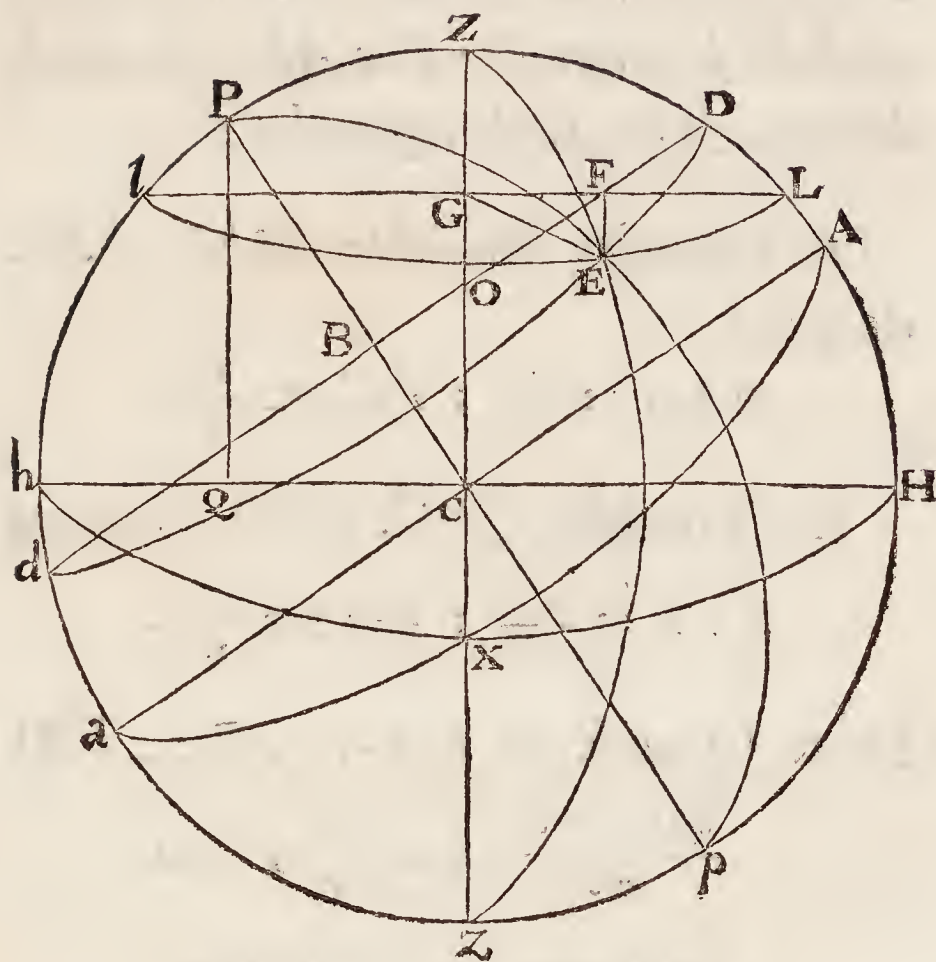
Les Triangles semblables *PQC*, *FGO*, donnent

$$s : c :: \frac{nk}{r} : GO = \frac{nck}{rs}.$$

Donc (à cause de $CO + OG = CG$)

$$\frac{rrx + nck}{rs} = h, \text{ ou}$$

$$rrx + nck = rsh.$$



PROBLEME III.

*T*ROUVER la relation entre la hauteur du Pole, la déclinaison d'un Astre, son Angle horaire, & son Angle azymuthal ?

Les Triangles semblables *MNC*, *EFG*, donnent

$$m : n :: \frac{yt}{r} : FG = \frac{nyt}{mr}.$$

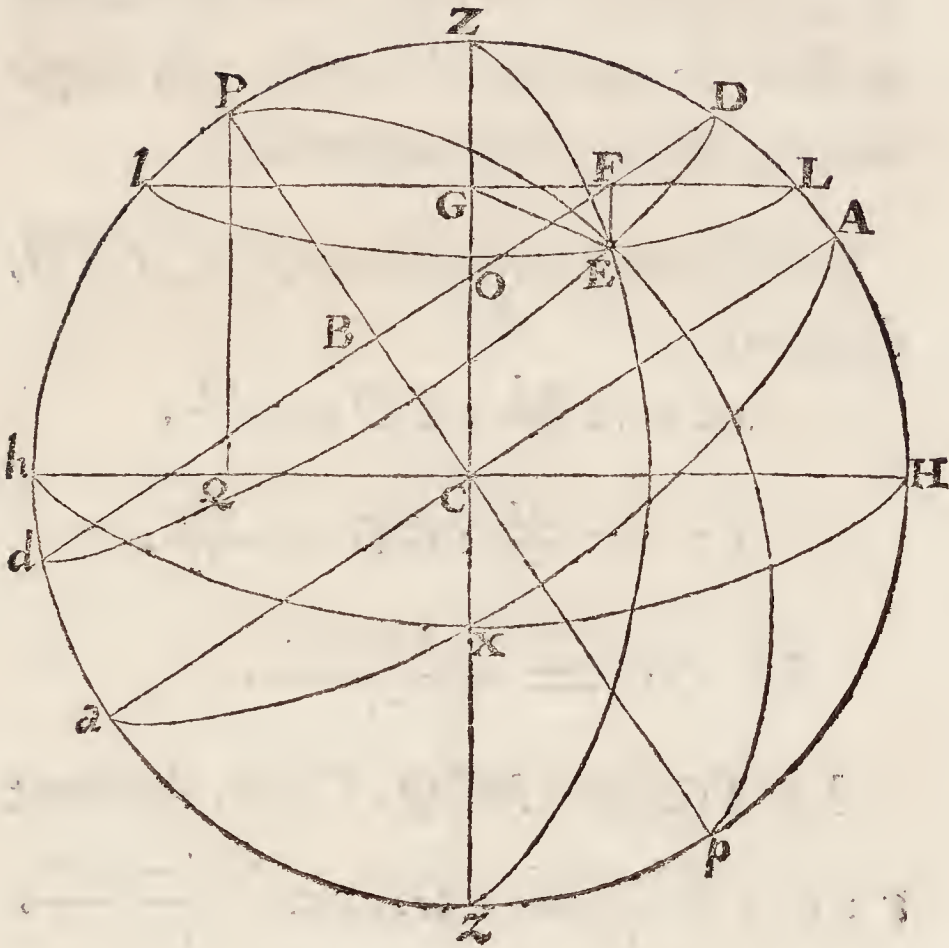
Les Triangles *QPC*, *GFO*, donnent

$$s : r :: \frac{nyt}{mr} : FO = \frac{nyt}{ms}.$$

Donc (à cause de $FO + OB = FB$)

$$\frac{nyt + mcx}{ms} = \frac{yu}{r}, \quad \text{ou}$$

$$rnyt + rmcx = msyu.$$



PROBLÈME IV.

*T*ROUVER la relation entre la hauteur du Pole, la hauteur d'un Astre, son Angle horaire, & son Angle azymuthal ?

Les Triangles semblables *QPC*, *GFO*, donnent

$$s : r :: \frac{nk}{r} : FO = \frac{nk}{s},$$

$$s : c :: \frac{nk}{r} : GO = \frac{nk c}{rs},$$

$$\& CO = \frac{rsh - nk c}{rs}.$$

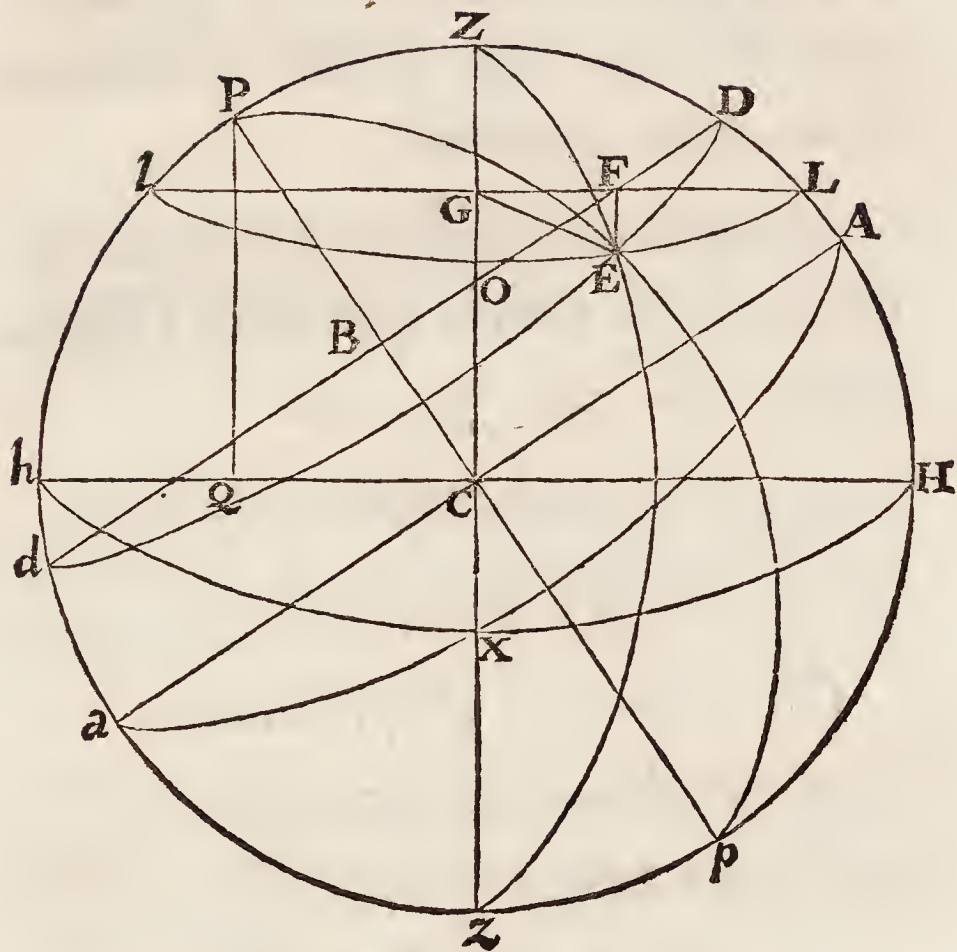
Les Triangles *PCQ*, *COB*, donnent

$$r : c :: \frac{rsh - nk c}{rs} : OB = \frac{rsch - nkcc}{rrs}.$$

Or $FO + OB : EF$, ou

$$\frac{nkrr + rsch - nkcc}{rrs} : \frac{mk}{r} :: u : t. \text{ Donc}$$

$$rcht + ns kt = rmku.$$



PROBLEME V.

*T*ROUVER la relation entre la déclinaison d'un Astre, son Angle horaire, sa hauteur, & son Angle azymuthal?

La commune section de l'Almicantarath, & du Cercle que décrit l'Astre, donne $\frac{mk}{r} = \frac{yt}{r}$; ou

$$mk = yt.$$

SCHOLIE.

On a donc ces cinq Formules :

$$r r h - r s x = c y u.$$

$$r r x + n c k = r s h.$$

$$r n y t + r m c x = m s y u.$$

$$r c h t + n k s t = r m k u.$$

$$m k = y t.$$

Qui contiennent les vingt Problèmes suivans.

PAR LA 1.^{re} FORMULE:

$$r r h - r s x = c y u.$$

Sans connoître l'Angle azymuthal.

1.

Connoissant la déclinaison de l'Astre, sa hauteur, & son Angle horaire, on a la hauteur du Pole.

2.

Connoissant la hauteur du Pole, la hauteur de l'Astre, & son Angle horaire, on a sa déclinaison.

3.

Connoissant la hauteur du Pole, la déclinaison de l'Astre, & sa hauteur, on a son Angle horaire.

4.

Connoissant la hauteur du Pole, la déclinaison de l'Astre, & son Angle horaire, on a sa hauteur.

PAR LA 2.^{de} FORMULE :

$$r r x + n c k = r s h.$$

Sans connoître l'Angle horaire.

1.

Connoissant la déclinaison de l'Astre, sa hauteur, & son Angle azymuthal, on a la hauteur du Pole.

2.

Connoissant la hauteur du Pole, la hauteur de l'Astre, & son Angle azymuthal, on a sa déclinaison.

3.

Connoissant la hauteur du Pole, la déclinaison de l'Astre, & sa hauteur, on a son Angle azymuthal.

4.

Connoissant la hauteur du Pole, la déclinaison de l'Astre, & son Angle azymuthal, on a sa hauteur.

PAR LA 3.^{me} FORMULE:

$$rnyt + rmcx = msyu.$$

Sans connoître la hauteur de l'Astre.

1.

Connoissant la déclinaison de l'Astre, son Angle horaire, & son Angle azymuthal, on a la hauteur du Pole.

2.

Connoissant la hauteur du Pole, l'Angle horaire, & l'Angle azymuthal de l'Astre, on a sa déclinaison.

3.

Connoissant la hauteur du Pole, la déclinaison de l'Astre, & son Angle azymuthal, on a son Angle horaire.

4.

Connoissant la hauteur du Pole, la déclinaison de l'Astre, & son Angle horaire, on a son Angle azymuthal.

PAR LA 4.^{me} FORMULE:

$$rcht + nkst = rmku.$$

Sans connoître la déclinaison de l'Astre.

1.

Connoissant la hauteur de l'Astre, son Angle azymuthal, & son Angle horaire, on a la hauteur du Pole.

2.

Connoissant la hauteur du Pole, la hauteur de l'Astre, & son Angle azymuthal, on a son Angle horaire.

3.

Connoissant la hauteur du Pole, la hauteur de l'Astre, & son Angle horaire, on a son Angle azymuthal.

4.

Connoissant la hauteur du Pole, l'Angle azymuthal de l'Astre, & son Angle horaire, on a sa hauteur.

PAR

PAR LA 5.^{me} FORMULE;

$$mk = yt.$$

Sans connoître la hauteur du Pole.

1.

Connoissant la hauteur de l'Astre, son Angle azymuthal, & son Angle horaire, on a sa déclinaison.

2.

Connoissant la déclinaison de l'Astre, sa hauteur, & son Angle azymuthal, on a son Angle horaire.

3.

Connoissant la déclinaison de l'Astre, sa hauteur, & son Angle horaire, on a son Angle azymuthal.

4.

Connoissant la déclinaison de l'Astre, son Angle azymuthal, & son Angle horaire, on a sa hauteur.

B

PROBLEME VI.

LE tems qu'un Astre emploie à traverser un angle donné, étant donné; trouver la déclinaison de l'Astre!

Soit la corde de l'angle donné $= 2p$ pour le rayon $= r$; & supposons qu'on observe l'Astre à deux hauteurs égales avant & après son passage au Méridien: on aura $r : m :: k : p$ & $mk = rp$; ou (à cause de la 5.^{me} formule $mk = yt$) $yt = rp$.

Or, à quelque hauteur qu'on observe l'Astre traverser l'angle donné, le tems qu'il y emploie, sera le même; à la différence près qu'y apportera la réfraction, dont nous faisons jusqu'ici abstraction. On aura donc toujours l'Equation

$$y = \frac{rp}{t}.$$

Coroll. Si plusieurs Etoiles traversent un même angle, les co-finus de leurs déclinaisons sont en raison inverse des sinus des angles des tems qu'elles y emploient.

PROBLEME VII.

LA hauteur du Pole, & la déclinaison d'un Astre, étant données; trouver son Arc semi-diurne?

Dans la 1.^{re} formule

$$rrh - rsx = cyu,$$

ou (Note de la page 4.)

$$rsx - rrh = cyu.$$

Faisant $h = 0$, puisque l'arc qu'on cherche, est terminé par l'horison; l'on a pour le co-sinus de l'angle horaire

$$u = \frac{rsx}{cy}.$$

Ou (faisant la tangente de la hauteur du Pole $= S = \frac{rs}{c}$, & la tangente de la déclinaison de l'Astre $= X = \frac{rx}{y}$)

on a
$$u = \frac{SX}{r}.$$

Or l'arc de l'E'quateur, terminé par l'horison & par le Méridien, est l'arc semi-diurne de l'Astre qu'on a par cette Equation.

PROBLEME VIII.

*L*A hauteur du Pole, & la déclinaison du Soleil, étant données ; trouver son Amplitude ortive ou occase ?

Prenant la 2.^{de} formule

$$r r x + n c k = r h s,$$

ou plutôt (Note de la page 4.)

$$r r x - n c k = r h s.$$

Et faisant $h = 0$, parce que l'Astre est dans l'horison, l'on a pour le co-sinus de l'angle azymuthal, qui est l'amplitude, ou la portion de l'horison terminée par le Méridien & le point où l'Astre se lève ou se couche,

$$n = \frac{r x}{c}.$$

Ce Problème sert à trouver la déclinaison de la Bouffole.

PROBLEME IX.

LA hauteur du Pole, & la déclinaison du Soleil, étant données ; trouver la réfraction horisontale ?

Par la 1.^{re} formule, & la note de la page 4,

$$rsx - rrh = cyu ;$$

on a donc pour l'heure à laquelle le Soleil se lève,

$$u = \frac{rsx}{cy}, \quad \text{ou} \quad u = \frac{SX}{r}.$$

Dans ce moment le Soleil est dans l'horison ; observant donc alors sa hauteur apparente, on a la quantité dont la réfraction moins la parallaxe élève l'Astre : & ajoutant à cette quantité la parallaxe, on a la réfraction.

Instrument Azymuthal.

SI l'observation des Angles verticaux qui donnent les hauteurs des Astres, est d'un usage qui paroît indispensable dans l'Astronomie, l'observation des Angles horizontaux qui donnent la projection des Astres sur le plan de l'horison, n'est pas moins utile.

Tous les Observatoires sont pourvûs de Quart-de-cercles ou d'autres Secteurs avec lesquels on observe les hauteurs ; mais des Instrumens azymuthaux qui donnent les lignes de la projection des Cercles verticaux sur le plan de l'horison, sont d'une construction si difficile, que leur usage est peu fréquent. Je ne sçais si l'on a jamais construit aucun Instrument de cette espèce, qui donnât une précision suffisante, ou sur laquelle on pût compter.

On en auroit un, & le plus parfait de

tous, si prenant le lieu de l'Observateur pour le centre, & l'horison sensible pour la circonférence d'un Cercle, on regardoit les différens objets qui le terminent, comme les divisions de cette circonférence: & qu'on connût bien les Angles que forment entre ces objets les rayons qui partent du lieu de l'Observateur. Car mettant dans ce lieu une Lunette fixée à angles droits sur un axe horifontal, & mobile autour de cet axe dans des plans verticaux, les points de l'horison qui se rencontreroient au centre de la Lunette, détermineroient les projections des verticaux, & les angles entre ces points seroient les mesures des Azymuths.

Pour former ce grand Instrument, dont le limbe est l'horison sensible; & pour en marquer les divisions par des mesures plus sûres que celles des Quart-de-cercles, qui apporteroient à cet Instrument toutes les erreurs de leur conf-

truction : il suffit d'avoir la hauteur du Pole du lieu où on le veut construire, la déclinaison de quelques Étoiles qui puissent être vûes dans tous les verticaux, & d'observer les angles horaires de ces Étoiles. Car la 3.^{me} formule

$$\frac{n}{m} = \frac{syu - rcz}{ryt}$$

donnera tous les angles azymuthaux : & plongeant la Lunette dans l'horison, on y rencontrera quelque'objet qui servira comme le point qu'on grave sur le limbe des Quart-de-cercles pour en marquer la division.

Si l'on choisit, pour faire la division de l'horison, un Astre qui soit dans l'Équateur, le calcul devient beaucoup plus simple ; car on a

$$\frac{n}{m} = \frac{su}{rt}.$$

Cet Instrument une fois construit, l'Astronome qui en sera muni, pourra se passer des observations des hauteurs des

Astres, & réduire tout aux observations de la Lunette & de la Pendule. Car par les angles azymuthaux & les tems, nos calculs déterminent les hauteurs & suppléent à toutes les autres observations.

Il est vrai que quelquefois les calculs en seront moins simples : mais c'est, ce me semble, une méthode avantageuse que celle qui rejettant sur le calcul les plus grandes difficultés de l'Astronomie, en rendra la pratique plus facile, & moins dépendante de l'exercice & de l'adresse des observateurs.

*Des points où les Astres tombent ou
s'élèvent perpendiculairement
à l'horison.*

Tous les Astres qui passent entre le Zénith & le Pole ont deux momens, l'un avant, l'autre après leur passage par le Méridien, où leur cours est perpendiculaire à l'horison, où les arcs qu'ils décrivent sont communs au cercle parallèle à l'Équateur, & au Cercle azymuthal. Voici la manière de trouver ces points.

PROBLEME X.

*L*A hauteur du Pole, & la déclinaison d'un Astre, étant données ; trouver la hauteur à laquelle on le voit s'élever ou s'abaisser perpendiculairement à l'horison ?

L'Angle azymuthal qui répond à chaque point du cercle que décrit l'Astre, croît jusqu'à ce qu'il soit parvenu à cette partie qui est commune au Cercle parallèle & au Cercle azymuthal ; & cet angle décroît aussi-tôt après. L'Angle azymuthal qui convient à cette partie du cours de l'Astre, est donc alors le plus grand qu'il puisse être.

Prenant donc la 2.^{de} formule

$$rrx + nck = rsh ; \text{ ou plutôt}$$

$$rrx - rsh = nck, \text{ pour ce cas}$$

où l'Étoile passe entre le Pole & le Zénith, on a

$$n = \frac{rrx - rsh}{ck} ;$$

Et (faisant $= 0$ la différence de cette quantité, en supposant c & x constans) on a pour la hauteur à laquelle on voit l'Astre s'élever & s'abaisser perpendiculairement

$$h = \frac{rs}{x}.$$

Et pour l'Angle azymuthal qui est le plus grand,

$$n = \frac{r\sqrt{(xx - ss)}}{c}.$$

SCHOLIE.

On voit par cette valeur de n , qui devient imaginaire lorsque $s > x$, qu'il n'y a que les Astres qui passent entre le Zénith & le Pole, qui s'élèvent & retombent perpendiculairement à l'horison dans quelque partie de leur cours.

On tire de-là une méthode pour déterminer la réfraction.

PROBLEME XI.

LA déclinaison d'un Astre étant donnée, sa hauteur apparente dans le point où il décrit la partie verticale de son Cercle, & son Angle horaire pour l'instant de cette hauteur; trouver la réfraction qu'il éprouve?

La réfraction élevant l'Astre verticalement, pendant qu'il décrit la partie verticale de son Cercle, elle ne change que sa hauteur. L'instant qui termine cet angle, est le même que s'il n'y avoit point de réfraction.

Prenant donc la 1.^{re} formule

$$r r h - r s x = c y u,$$

& y substituant pour s & c leurs valeurs tirées de la condition que l'arc que décrit l'Astre soit vertical, c'est-à-dire, tirées de $h = \frac{rs}{x}$, on a

$$h = \frac{r r u}{\sqrt{(r r y y + x x u u)}}.$$

Qui, x & u étant donnés, est une quantité tout-à-fait donnée. Comparant cette h à la hauteur observée au même instant, la différence de ces hauteurs donnera la réfraction.

Correction du Midi déterminé par des hauteurs correspondantes.

ON peut par nos calculs trouver facilement la solution d'un Problème de grand usage dans l'Astronomie, mais dont les solutions que quelques Auteurs nous ont données, sont remplies de longueurs & d'embarras : c'est de trouver la correction qu'il faut faire au Midi déterminé par des hauteurs du Soleil correspondantes.

Pour régler leur Pendule les Astronomes observent quelques hauteurs du Soleil avant midi, & les instans de ces hauteurs : après midi ils observent les mêmes hauteurs, & les instans où le Soleil s'y trouve. Si la déclinaison du Soleil demeueroit toujourns la même, en partageant en deux également les intervalles du tems écoulé entre chacune des

hauteurs correspondantes, le milieu seroit l'instant où le Soleil auroit passé au Méridien, seroit l'instant du Midi. On trouve ainsi l'instant de la culmination des Etoiles fixes, car le changement de déclinaison qu'elles éprouvent dans l'intervalle des observations, est trop peu de chose pour qu'on y doive faire attention.

Il n'en est pas ainsi du Soleil ; sa déclinaison change assés considérablement dans l'intervalle des observations, pour que l'instant auquel il passe au Méridien, ne soit pas également éloigné des instans des hauteurs correspondantes.

Dans ces climats, lorsque le Soleil revient dans les Signes ascendants, c'est-à-dire, s'approche de notre Zénith, il arrive après midi à la même hauteur où il a été vû le matin, plus tard qu'il n'auroit fait si sa déclinaison n'avoit pas changé ; & s'il retourne dans les Signes descendans, il y arrive plutôt. Le milieu
du

du tems écoulé entre les observations ne répond donc pas exactement à midi. Il faut, lorsque le Soleil s'approche de notre Zénith, en retrancher quelque chose; & lorsque le Soleil s'en éloigne, il faut y ajoûter quelque chose, pour que cette moitié réponde à l'instant du Midi.

Ce qu'il faut ici retrancher ou ajoûter, est le petit intervalle entre l'instant où le Soleil se trouve à la hauteur observée, & celui où il seroit à la même hauteur si sa déclinaison n'avoit pas changé.

PROBLEME XII.

LA hauteur du Pole étant donnée ; la déclinaison du Soleil, le tems écoulé entre deux hauteurs égales du Soleil, & le changement du Soleil en déclinaison pendant le tems écoulé entre ces deux hauteurs : trouver de combien l'instant du Midi diffère du milieu de ce tems ?

Soit la 1.^{re} formule

$$r r h - r s x = c y u,$$

dont je cherche la petite variation, pendant que la hauteur du Pole & la hauteur du Soleil demeurent les mêmes, & j'ai

$$- r s dx = c y du - c u dy, \text{ ou}$$

$$r y s dy - c x u dy = c x y du.$$

Pour réduire les différences des sinus dy , du , aux petits arcs du Méridien dD , & de l'Équateur dE , l'on a

$$dy = \frac{x dD}{r} \text{ \& } du = \frac{t dE}{r} ;$$

qui substitués dans l'Équation précédente, donnent pour le petit arc de l'Équateur qui répond au tems que l'on cherche,

$$dE = \left(\frac{rs}{ct} - \frac{xu}{yt} \right) dD.$$

Ou, prenant pour la tangente de la hauteur du Pole $\frac{S}{r} = \frac{s}{c}$; pour la tangente de la déclinaison $\frac{X}{r} = \frac{x}{y}$; & pour la tangente de l'Angle horaire, $\frac{T}{r} = \frac{t}{u}$, la formule devient plus simple, & est

$$dE = \left(\frac{S}{t} - \frac{X}{T} \right) dD.$$

La formule de cette correction donne le Problème suivant, qui est l'inverse de celui-ci.

PROBLEME XIII.

*L*A hauteur du Pole étant donnée ; la déclinaison du Soleil, le tems écoulé entre deux hauteurs égales, & la différence entre l'instant du Midi & le milieu de ce tems : trouver le changement du Soleil en déclinaison pendant le tems écoulé entre les observations ?

L'Équation précédente donne

$$dD = \left(\frac{c y t}{r s y - c x u} \right) dE, \text{ ou}$$

$$dD = \left(\frac{t T}{s T - t X} \right) dE.$$

S C H O L I E.

Comme pour une même déclinaison du Soleil, & un même intervalle entre les observations, la correction du Midi varie suivant la hauteur du Pole, on peut par cette correction déterminer la hauteur du Pole du lieu où se font les observations.

PROBLEME XIV.

*L*A déclinaison du Soleil étant donnée ; le tems écoulé entre deux hauteurs égales, le changement du Soleil en déclinaison pendant le tems écoulé entre ces hauteurs, & la différence entre l'instant du Midi & le milieu de ce tems : trouver la hauteur du Pole ?

L'E'quation précédente donne

$$\frac{rs}{c} = \frac{xu}{y} + t \frac{dE}{dD}, \text{ ou}$$

$$S = \frac{uX}{r} + t \frac{dE}{dD}.$$

SCHOLIE.

Je ne propose pas ceci comme un moyen pour trouver la hauteur du Pole avec une grande précision : c'est une méthode de Théorie plutôt que de pratique.

PROBLEME XV.

LA hauteur du Pole étant donnée ; & l'abaissement du Cercle crépusculaire : trouver le jour du plus court crépuscule ?

Le Cercle crépusculaire est un Almicantarath que les Astronomes placent 18 degrés au dessous de l'horison.

La durée du crépuscule est le tems qui s'écoule depuis que le Soleil a quitté le Cercle crépusculaire jusqu'à ce qu'il ait atteint l'horison.

Et il est évident que ce tems est égal à celui qui s'écoule depuis que le Soleil a quitté l'horison, jusqu'à ce qu'il soit parvenu à la hauteur de 18 degrés.

On a donc pour la durée du crépuscule, l'arc de l'E'quateur terminé par deux co-sinus, dont l'un u est le co-sinus de l'angle horaire pour le moment où le Soleil est à l'horison, & l'autre u' est le co-sinus de l'angle horaire pour le

moment où le Soleil est élevé de 18 degrés.

On a donc pour l'arc de l'Équateur qui répond à la durée du crépuscule

$$\int \frac{r du}{\sqrt{(rr - uu)}} = \int \frac{r d u'}{\sqrt{(rr - u'u')}}.$$

Qui (puisque le crépuscule doit être un *Minimum*) donne

$$\frac{du}{\sqrt{(rr - uu)}} = \frac{d u'}{\sqrt{(rr - u'u')}} = 0.$$

Prenant donc dans la 1.^{re} formule $cyu = rsx - rrh$, les valeurs de u & de u' , & les substituant dans cette Équation, l'on a

$$\frac{d\left(\frac{rsx}{cy}\right)}{\sqrt{\left[rr - \frac{rrssxx}{ccyy}\right]}} = \frac{d\left(\frac{rsx - rrh}{cy}\right)}{\sqrt{\left[rr - \left(\frac{rsx - rrh}{cy}\right)^2\right]}} = 0.$$

Et différenciant ces quantités, en faisant s & h constantes; l'on trouve

$$\frac{rdx}{yy} \left(\frac{s}{\sqrt{(cc - xx)}} + \frac{hx - rs}{\sqrt{(rrcc - rrx + 2rhxs - rrhh)}} \right) = 0. \text{ D'où l'on tire}$$

$$x = \left(\frac{r \pm k}{h} \right) s.$$

SCHOLIE.

On trouve ici deux déclinaisons du Soleil : celle dont le sinus est $x = \left(\frac{r-k}{h}\right) s$ donne, pour trouver le jour du plus court crépuscule, l'Analogie que de célèbres Géomètres ont donnée ; sçavoir, comme le rayon, est à la tangente de la moitié de l'abaiffement du Cercle crépusculaire ; ainsi le sinus de la hauteur du Pole, est au sinus de la déclinaison du Soleil pour le jour du plus court crépuscule.

Mais la déclinaison dont le sinus est $x = \left(\frac{r+k}{h}\right) s$, que donne-t-elle ?

Il y a ici une difficulté que la limitation des autres Solutions de ce Problème avoit tenu cachée, & que découvre la généralité de la nôtre.

Lorsque le Pole est plus élevé que le Cercle crépusculaire n'est abaissé, l'arc de l'Équateur écoulé pendant le crépus-

cule, est la différence de deux arcs, dont les co-sinus sont d'un même côté par rapport au centre de la Sphere : l'une des déclinaisons du Soleil qu'on trouve, donne le *Minimum* de la différence des deux arcs, ou le *Minimum* des crépuscules ; l'autre déclinaison est imaginaire.

Mais lorsque le Pole est moins élevé que le Cercle crépusculaire n'est abaissé, l'arc de l'Équateur écoulé pendant le crépuscule, est la somme de deux arcs, dont les co-sinus se trouvent de différens côtés par rapport au centre de la Sphere : & des deux déclinaisons du Soleil, l'une donne le *Minimum* de la somme de ces deux arcs, qui est le *Minimum* des crépuscules ; ce que l'autre donne, est le *Minimum* de la différence des deux arcs. C'est ce dernier cas qui étoit embarrassant, mais il étoit important de le connoître. Sans cela ceux qui cherchoient le plus court crépuscule,

étoient exposés à prendre pour lui le crépuscule où les deux arcs qui forment l'arc de l'Équateur écoulé pendant sa durée, ont la plus grande différence : crépuscule qui n'est cependant ni le plus court ni le plus long.

PROBLEME XVI.

*L*A hauteur du Pole , & la déclinaison du Soleil étant données ; trouver le tems que le Soleil emploie à s'élever au dessus de l'horizon , ou à s'abaisser de tout son Disque ?

Dans la 1.^{re} formule

$$rsx - rrh = cyu,$$

je fais varier h & u , pendant que toutes les autres quantités demeurent constantes (car il seroit inutile de considérer ici le changement en déclinaison du Soleil pendant un si court espace de tems) & j'ai (à cause que h croissant, u diminue)

$$rrdh = cydu.$$

Rapportant maintenant ces différentielles de sinus aux petits arcs de l'Équateur $dE = \frac{t du}{r}$ & du vertical $dH = dh =$ au diametre du Soleil,

$$rrdH = \left(\frac{cyr}{r}\right) dE,$$

ou (à cause qu'à l'horison $t = \frac{rr\sqrt{yy-ss}}{cy}$)

$$dE = \left(\frac{r}{\sqrt{yy-ss}} \right) dH.$$

Il faut observer que dans les lieux voisins du Pole où le Soleil emploie un tems trop long à se lever & se coucher, ce calcul seroit défectueux; parce qu'il suppose que dH & dE sont des quantités fort petites.

PROBLEME XVII.

LA hauteur du Pole, & la déclinaison du Soleil étant données; trouver le diamètre du Soleil par le tems qu'il emploie à s'élever sur l'horison, ou à s'abaisser de tout son Disque?

L'Équation précédente donne

$$dH = \left(\frac{\sqrt{yy - ss}}{r} \right) dE.$$

PROBLEME XVIII.

TROUVER la hauteur du Pole, par le tems que le Soleil emploie à s'élever sur l'horison, ou à s'abaisser de tout son Disque ?

L'Équation précédente donne

$$s = \sqrt{yy - \frac{rrdH^2}{dE^2}}.$$

SCHOLIE.

Il est évident que la réfraction horizontale, quelque grande qu'elle soit, n'apporte ici aucune erreur, pourvû seulement qu'elle demeure la même pendant l'observation, ce qu'on peut prendre pour vrai, vû le peu de tems que dure cette observation ; car la réfraction ne fait ici que transporter l'horison un peu plus haut qu'il n'est, ou le change dans un Almicantarath fort peu élevé ; & la durée du lever ou du coucher du Soleil est le tems qu'il emploie à s'élever de tout

son disque au dessus de cet Almicantath, ou à s'abaisser au dessous, qui ne differe pas sensiblement du tems qu'il emploie à s'élever de la même quantité au dessus du véritable horison, ou à s'abaisser.

On pourroit en quelque sorte par ce Problème connoître sur Mer la Latitude, si l'on s'y trouvoit dénué de tous Instrumens, par l'observation la plus simple de toutes. Quoique je ne donne pas ceci comme une méthode à employer, lorsqu'on peut en pratiquer de plus exactes, il arrive dans la Navigation des accidens si étranges, qu'on pourroit être heureux d'y avoir recours; & il est toujourns utile au Navigateur de connoître toutes les ressources de son art, chacune avec le degré de sûreté qu'elle comporte, afin qu'il puisse s'en servir selon l'occasion & le besoin.

PROBLEME XIX.

LA hauteur du Pole étant donnée ; la déclinaison d'un Astre, & sa hauteur : trouver le tems qu'il emploie à s'élever ou à s'abaisser d'une petite quantité donnée ?

Dans la première formule

$$rrh - rsx = cyu;$$

faisant varier h & u , pendant que tout le reste demeure constant, on a

$$rrdh = cydu.$$

Ou substituant les petits arcs de l'Equateur $dE = \frac{rdu}{t}$, & du vertical

$$dH = \frac{rdh}{k}, \text{ on a}$$

$$rrkdH = cytdE.$$

Substituant maintenant la valeur de

$$t = \frac{r\sqrt{(2rhsx + rrkk - rrss - rrxs)}}{cy}, \text{ on a}$$

$$dE = \left(\frac{rk}{\sqrt{(2rhsx + rrkk - rrss - rrxs)}} \right) dH.$$

PROBLEME

PROBLEME XX.

LA hauteur du Pole étant donnée; la déclinaison d'un Astre, & sa hauteur: trouver la petite hauteur dont il s'est élevé ou abaissé, par le tems qu'il y a employé?

L'Équation précédente donne

$$dH = \frac{V(2r h s x + r r k k - r r s s - r r x x)}{r k} dE.$$

PROBLEME XXI.

*T*ROUVER la hauteur du Pole, par le tems qu'un Astre, dont la déclinaison, & la hauteur sont connues, emploie à s'élever ou à s'abaisser d'une petite quantité donnée?

L'Équation précédente donne

$$s = \frac{hx}{r} \pm \frac{k}{r} \sqrt{yy - \frac{rrdH^2}{dE^2}}.$$

SCHOLIE.

Je n'ai proposé ces moyens de déterminer la Latitude par les petits changemens d'élévation des Astres, & les tems écoulés pendant ces changemens, que comme des ressources dans des cas extraordinaires, ou comme des suites de l'Analyse que j'ai suivie dans cet ouvrage.

Le défaut des moyens que je viens de proposer pour déterminer la Latitude, vient de ce qu'on la fait dépendre de trop petites quantités; sur lesquelles une

petite erreur commise, en cause une considérable sur la Latitude.

Le défaut de la méthode ordinaire pour déterminer la Latitude, est que cette méthode dépendant de l'observation des Astres lorsqu'ils passent au Méridien, un nuage qui survient dans ce moment, frustre le Navigateur de sa Latitude.

La méthode suivante est exempte de ces défauts. Elle dépend de deux hauteurs quelconques d'un Astre, & du tems écoulé entre les observations de ces hauteurs.

PROBLEME XXII.

DEUX hauteurs d'un Astre, dont la déclinaison est connue, étant données, avec le tems écoulé entre les observations : trouver la hauteur du Pole, & l'heure des observations!

Soient les sinus des deux hauteurs h & h' ; les co-sinus des angles horaires qui leur répondent, u , & u' : le sinus de l'angle du tems écoulé entre les observations $\equiv p$, son co-sinus $\equiv q$, son sinus verse $\equiv o$.

$$\text{L'on a } u' \equiv \frac{qu - p\sqrt{rr - uu}}{r}.$$

Et mettant dans cette E'quation les valeurs de u & de u' , prises dans la 1.^{re} formule

$$u \equiv \frac{rrh - rsx}{cy}, \quad \& \quad u' \equiv \frac{rrh' - rsx}{cy}; \quad \text{on a}$$

$$\left. \begin{array}{l} ooxx \\ rrupp \end{array} \right\} SS \left\{ \begin{array}{l} - 2rrohx \\ - 2rroh'x \end{array} \right\} S \equiv \left\{ \begin{array}{l} + rrpppy \\ + 2r^3qh'h' \\ - r^4hh \\ - r^4h'h' \end{array} \right.$$

Et prenant $A = o o x x + r r p p$,
 $B = r r o h x + r o h' x$, & $C = r r p p y y$
 $+ 2 r^3 q h h' - r^4 h h - r^4 h' h'$; on a
 pour le sinus de la hauteur du Pole

$$s = \frac{B}{A} \pm \frac{1}{A} \sqrt{(BB + AC)}.$$

Ayant la hauteur du Pole, il est évi-
 dent qu'on aura les angles horaires par
 les Equations $u = \frac{r r h - r s x}{c y}$ ou
 $u' = \frac{r r h' - r s x}{c y}$, & l'heure des obser-
 vations par l'ascension droite de l'Astre.

S C H O L I E.

Si l'Astre qu'on observe, changeoit
 de déclinaison dans l'intervalle des ob-
 servations, assés pour qu'on y dût faire
 attention, il faudroit faire à la seconde
 hauteur observée une correction : c'est-
 à-dire, il faudroit pour h' , mettre la
 hauteur à laquelle on auroit observé
 l'Astre, si la déclinaison étoit demeurée
 la même.

Pour trouver cette correction, il faut remonter à l'Équation $u' = \frac{rrh' - rsx}{cy}$, & y chercher la variation de h' , pendant que x & y varient d'une quantité donnée, & que r, c, s , & u' , demeurent constantes. On a donc $d\left(\frac{rh' - sx}{y}\right) = \frac{rydh' - sydx - rh'dy + sxdy}{yy} = 0$, ou $dh' = \frac{rs - h'x}{yy} dx$; & dx étant donné par le changement de déclinaison de l'Astre, on a la correction qu'il faut faire à la seconde hauteur observée, afin que l' x & l' y soient les mêmes dans l'Équation, qu'ils étoient au moment de la première observation.

Il est évident que ce Problème contient cet autre.

PROBLEME XXIII.

LA hauteur d'un Astre, dont la déclinaison est connue, étant donnée; & le tems écoulé entre l'observation, & le moment de son coucher: trouver la hauteur du Pole?

Car alors il n'y a qu'à faire dans l'Équation précédente $h' = 0$, & l'on a

$$\left. \begin{array}{l} ooxx \\ rrp p \end{array} \right\} ss - 2 r r o h x s = \left\{ \begin{array}{l} r r p p y y \\ - r^4 h h. \end{array} \right.$$

Mais la réfraction horizontale faisant paroître l'Astre sur l'horison plus long-tems qu'il n'y est réellement, ce dernier Problème ne donneroit la hauteur du Pole que peu exactement; à moins qu'on ne retranchât du tems écoulé, ce que la réfraction apporte de retardement au coucher de l'Astre. On trouvera ci-dessous (Problème XXXIV.) le moyen de faire cette correction.

SCHOLIE.

Notre Analyse nous conduit à trouver la hauteur du Pole par un calcul beaucoup plus simple, si l'on veut ajouter une condition qui ne rend pas l'opération plus difficile. C'est de choisir quelque Étoile qui soit dans l'Équateur : & si elle en est seulement assés voisine, on aura la hauteur du Pole assés exactement pour les usages maritimes.

PROBLEME XXIV.

DEUX hauteurs d'un Astre qui est dans l'E'quateur, ou fort près de l'E'quateur, étant données, avec le tems écoulé entre; trouver la hauteur du Pole exactement, ou à peu-près?

Faisant $x = 0$ dans l'E'quation du Problème XXII, on a

$$ppss = r^2 pp + 2rqhh' - r^2 hh - r^2 h'h';$$

ou

$$s = \frac{1}{p} \sqrt{(rrpp + 2rqhh' - rrhh - rrh'h')}.$$

PROBLEME XXV.

DEUX passages d'une Étoile à deux verticaux, étant donnés par les Angles azymuthaux, & par les Angles horaires; trouver la hauteur du Pole, & la déclinaison de l'Étoile?

Dans la 3.^{me} formule

$$rnyt + rmcx = msyu.$$

Mettant pour la tangente de la déclinaison de l'Étoile $X = \frac{rx}{y}$; pour la co-tangente du premier angle azymuthal $N = \frac{rn}{m}$: on a

$$cX = su - Nt.$$

Prenant de même N' pour la co-tangente du second angle azymuthal; & t' & u' pour les sinus & co-sinus du second angle horaire, on a les deux Équations

$$cX = su - Nt$$

$$cX = su' - N't'.$$

D'où l'on tire

$$su - su' = Nt - N't' : \text{ou}$$

$$s = \frac{Nt - N't'}{u - u'}$$

Et la hauteur du Pole étant ainsi trouvée, on a la déclinaison de l'Etoile par l'Equation

$$X = \frac{su - Nt}{e} = \frac{Nt u' - N't' u}{\sqrt{[(ru - ru')^2 - (Nt - N't')^2]}}$$

PROBLEME XXVI.

LA hauteur du Pole étant connue ; & deux Astres , dont les déclinaisons , & les ascensions droites sont données , étant vûs dans un même vertical : trouver l'heure de l'observation ?

La 3.^{me} formule

$$rny t + rmcx = msyu.$$

Mettant pour $\frac{rx}{y}$, X tangente de la déclinaison de l'Astre, devient

$$cX = su - \frac{rnt}{m}.$$

Et prenant X' pour la tangente de la déclinaison de l'autre Astre ; & t' & u' pour les sinus & co-sinus de son angle horaire : on a pour l'instant où les deux Astres passent au même vertical,

$$\frac{su - cX}{t} = \frac{rn}{m} = \frac{su' - cX'}{t'}, \text{ ou}$$

$$s u' t - s u t' = c X' t - c X t'.$$

Ou (prenant a pour le sinus de l'arc qui répond à la différence d'ascension droite des deux Astres, b pour son cosinus; ce qui donne $u't - ut' = ra$, & $t' = \frac{bt - a\sqrt{(rr - tt)}}{r}$)

$$rras = rcX't - bcXt + acX\sqrt{(rr - tt)}.$$

Ou (prenant A pour $rras$; B pour $rcX' - bcX$; & C pour acX)

$$t = \frac{AB}{BB + CC} \pm \frac{C}{BB + CC} \sqrt{(rrBB \pm rrCC - AA)}.$$

Ayant ainsi l'Angle horaire, ou le tems écoulé depuis le passage d'un des Astres par le Méridien, la différence de l'ascension droite de cet Astre & du Soleil donne l'heure. Mais voici une manière beaucoup plus facile de la trouver.

PROBLEME XXVII.

*T*ROUVER l'heure de la nuit, indépendamment de la hauteur du Pole, par l'observation de deux Astres dans un même vertical ?

Si l'on a deux Astres dont l'ascension droite soit connue, & soit la même, ou à peu-près la même : lorsqu'ils seront dans un même vertical, ils seront au Méridien du lieu de l'observation ; & l'on aura l'heure par la différence entre leur ascension droite & celle du Soleil.

Cette opération se peut faire facilement sur Mer, & n'a besoin d'aucun instrument. Car on ne peut pas appeller un instrument, un fil chargé d'un plomb, qui est tout ce qu'il faut pour la faire.

PROBLEME XXVIII.

CONNOISSANT l'heure à laquelle on voit dans un même vertical deux Astres, dont les déclinaisons, & les ascensions droites sont données ; trouver la hauteur du Pole ?

La 3.^{me} formule donne ici, comme dans le Problème XXV,

$$\frac{su - cX}{t} = \frac{rn}{m} = \frac{su' - cX'}{t'}$$

Et l'heure étant connue, & les ascensions droites des deux Astres, les sinus de leurs angles horaires au moment de l'observation sont donnés : & l'on a pour la tangente de la hauteur du Pole,

$$\frac{rs}{a} = \frac{rX't - rXt'}{u't - ut'}$$

PROBLEME XXIX.

CONNOISSANT l'heure à laquelle on voit dans un même Almicantarath deux Astres, dont les déclinaisons, & les ascensions droites sont données ; trouver la hauteur du Pole ?

La 1.^{re} formule donne

$$\begin{aligned} r r h &= r s x + c y u \\ \& \quad r r h &= r s x' + c y' u'. \end{aligned}$$

On a donc

$$r s x - r s x' = c y' u' - c y u.$$

Et l'heure étant connue, & les ascensions droites des deux Astres ; les sinus de leurs angles horaires au moment de l'observation, sont donnés : & l'on a

$$\frac{r s}{c} = \frac{y' u' - y u}{x - x'}.$$

PROBLEME

PROBLEME XXX.

CONNOISSANT les déclinaisons & les ascensions droites de trois Etoiles ; & l'intervalle de tems entre les momens où l'une des trois se trouve dans un même vertical que chacune des deux autres : trouver l'heure, & la hauteur du Pole ?

Soient les tangentes des déclinaisons des trois Etoiles X, X', X'' . Les sinus & co-sinus des angles horaires de la 1.^{re} & de la 2.^{de}, lorsqu'elles sont dans un même vertical, $t, t'; u, u'$. Les sinus & co-sinus des angles horaires de la 1.^{re} & de la 3.^{me}, lorsqu'elles sont dans un même vertical, $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'; v, v'$.

On aura par la 3.^{me} formule

$$\frac{rn}{m} = \frac{su - cX}{t} = \frac{su' - cX''}{t'}$$

$$\frac{r'n'}{m'} = \frac{sv - cX}{\mathfrak{S}} = \frac{sv' - cX''}{\mathfrak{S}'}; \quad \text{ou}$$

$$\frac{s}{c} = \frac{X't - Xt'}{u't - ut'} = \frac{X''\mathfrak{S} - X\mathfrak{S}'}{v'\mathfrak{S} - v\mathfrak{S}'}$$

E

Ou (le sinus de la différence d'ascension droite de la 1.^{re} & de la 2.^{de} Étoile étant $\equiv a$, son co-sinus $\equiv b$; & le sinus de la différence d'ascension droite de la 1.^{re} & de la 3.^{me} étant $\equiv \alpha$, & son co-sinus $\equiv \mathcal{C}$)

$$\frac{X't - Xt'}{a} \equiv \frac{X''\mathcal{S} - X\mathcal{S}'}{a}; \text{ ou}$$

$$aX't - aX't' \equiv aX\mathcal{S}' - aX''\mathcal{S}.$$

Ou (à cause de $t' \equiv \frac{bt - au}{r}$ & $\mathcal{S}' \equiv \frac{\mathcal{C}\mathcal{S} - \alpha v}{r}$)

$$abXt - a\alpha Xu - raX't \equiv a\mathcal{C}X\mathcal{S} - a\alpha Xv - raX''\mathcal{S}.$$

Mais t & \mathcal{S} étant les sinus des angles horaires de la 1.^{re} Étoile aux momens des deux observations; & l'intervalle entre ces momens étant donné; & le sinus de l'arc qui lui répond étant $\equiv p$, & son co-sinus $\equiv q$: l'on a $\mathcal{S} \equiv \frac{qt - pu}{r}$ & $v \equiv \frac{pt + qu}{r}$. Et mettant ces valeurs

de \mathcal{S} & de v , dans l'Équation précédente : on trouve pour la co-tangente de l'angle horaire de la 1.^{re} Étoile au moment de la 1.^{re} observation,

$$\frac{ru}{s} = r \left(\frac{rabX + aapX - a\mathcal{C}qX - rr\alpha X' + raqX''}{ra\alpha X - a\mathcal{C}pX - a\alpha qX + rapX''} \right).$$

Ayant ainsi l'angle horaire de la 1.^{re} Étoile au moment de la première observation, on a l'heure de cette observation : on a aussi l'angle horaire de la 2.^{de} Étoile au même instant par l'Équation $t' = \frac{bt - au}{r}$: & la hauteur du Pole, en substituant les valeurs de t & de t' dans l'Équation

$$\frac{s}{c} = \frac{X't - Xt'}{ar}.$$

Coroll. Si l'on prend la 1.^{re} Étoile dans l'Équateur, $X = 0$: & tout le calcul devient beaucoup plus simple : car la co-tangente de l'angle horaire de cette Étoile au moment de la première

observation , se réduit à

$$\frac{ru}{t} = r \left(\frac{q}{p} - \frac{raX'}{apX''} \right).$$

Et l'on trouve beaucoup plus simplement la hauteur du Pôle.

SCHOLIE.

Ce Problème peut être d'une grande utilité sur Terre & sur Mer , parce qu'il n'y a point d'observation plus facile ni plus sûre que celle du passage des Astres par un vertical , & qu'on évite ici entièrement l'effet de la réfraction qui apporte tant de troubles aux autres observations.

PROBLEME XXXI.

TROIS hauteurs d'un Astre étant données avec les deux intervalles de tems écoulé entre : trouver la déclinaison de l'Astre ; & la hauteur du Pole ?

I. Soient les trois hauteurs $\equiv h, h', h''$.

Les co-finus des angles horaires $\equiv u, u', u''$.

Les finus des intervalles des tems écoulés $\equiv p, p'$; & leurs co-finus $\equiv q, q'$.

Par la 1.^{re} formule, on a

$$rsx \equiv r r h - cy u$$

$$rsx \equiv r r h' - cy u'$$

$$rsx \equiv r r h'' - cy u''.$$

D'où l'on tire

$$cy \equiv \frac{r r (h - h')}{u - u'} \equiv \frac{r r (h - h'')}{u - u''} ;$$

Ou (faisant $h - h' \equiv D, h - h'' \equiv D'$)

$$D' u - D' u' \equiv D u - D u''.$$

Mais on a $u' = \frac{qu - pt}{r}$, & $u'' = \frac{q'u - p't}{r}$; qui étant substitués dans l'Équation précédente, donnent

$$D'ru - D'qu + D'pt = Dru - Dq'u + Dp't.$$

Ou (mettant pour $r = q$, & $r = q'$, les sinus versés des tems écoulés o, o')

$$D'ou + D'pt = D'o'u + Dp't.$$

D'où l'on tire pour la tangente de l'Angle horaire de l'Astre au moment de la première observation,

$$\frac{rt}{u} = r \left(\frac{Do' - D'o}{D'p - Dp'} \right).$$

Connoissant ce 1.^{er} angle horaire; on a le 2.^d & le 3.^{me} en remontant aux

$$\text{Équations } u' = \frac{qu - pt}{r} \text{ \& } u'' = \frac{q'u - p't}{r}.$$

Et l'on a leurs trois co-sinus, u, u', u'' , dont deux suffisent pour le reste de la solution du Problème.

Car la 1.^{re} formule donnant

$$rrh - rsx = cyu$$

$$rrh' - rsx = cyu'.$$

On a

$$cy = \frac{rr(h-h')}{(u-u')} ; \&$$

$$sx = \frac{r(h'u - hu')}{(u-u')}.$$

Ou (faisant $u - u' = \Delta$, & $h'u - hu' = rA$)

$$cy = \frac{rrD}{\Delta}, \&$$

$$sx = \frac{rrA}{\Delta}; \text{ ou}$$

$$(rr - xx)cc = \frac{r^4 DD}{\Delta \Delta}, \&$$

$$rrxx - ccxx = \frac{r^4 AA}{\Delta \Delta}.$$

Et chassant cc de ces Equations, on a

$$\Delta \Delta x^4 + \left\{ \begin{array}{l} -rr\Delta\Delta \\ -rrAA \\ +rrDD \end{array} \right\} xx + r^4 AA = 0.$$

Ou (faisant $\Delta\Delta + AA - DD = BB$)

$$xx = \frac{rrBB}{2\Delta\Delta} \pm \frac{rr}{2\Delta\Delta} \sqrt{(B^4 - 4AA\Delta\Delta)}.$$

On a ainsi la déclinaison de l'Astre.

2. Ayant la déclinaison de l'Astre ; il est facile d'avoir la hauteur du Pole. Car il est évident que dans les deux Équations $cy = \frac{rrD}{\Delta}$, & $sx = \frac{rrA}{\Delta}$, les sinus & les co-sinus de la déclinaison de l'Astre, & de la hauteur du Pole, se trouvant combinés de la même manière ; on trouvera pour le sinus de la hauteur du Pole, la même expression qu'on vient de trouver pour le sinus de la déclinaison de l'Astre

$$ss = \frac{rrBB}{2\Delta\Delta} \mp \frac{rr}{2\Delta\Delta} \sqrt{(B^4 - 4AA\Delta\Delta)}.$$

Équivoque attaché à la nature de ce Problème. Si l'on veut donc s'en servir, il faudra choisir quelque Astre dont la déclinaison diffère assés de la hauteur du Pole, pour que l'une ne puisse pas être prise pour l'autre.

SCHOLIE.

C'est ce fameux Problème auquel les Géomètres & les Astronomes de l'Académie de Russie se sont tant appliqués, & dont ils ont donné plusieurs belles solutions.

Je crois cependant ce Problème plus curieux qu'utile ; car sur la Terre on a trop d'autres moyens de trouver la déclinaison des Étoiles & la hauteur du Pole, pour avoir recours à celui-ci. Sur la Mer, dès qu'on connoît l'Étoile qu'on observe, on a par les catalogues d'Étoiles la déclinaison avec plus de précision qu'il n'est nécessaire, pour la Latitude Nautique. Et si l'on vouloit se servir d'une Étoile qu'on ne connût pas, ou observer entre des nuages une Étoile qu'on croiroit être la même que celle qu'on auroit observée aux premières hauteurs, on seroit exposé à des méprises bien dangereuses.

PROBLEME XXXII.

L'OBLIQUITÉ de l'E'cliptique, & la durée du plus long ou du plus court jour dans quelque lieu, étant données : trouver la hauteur du Pole, en négligeant la réfraction, & la parallaxe ?

La 1.^{re} formule, lorsque le jour commence ou finit, que $h = 0$, donne

$$\frac{s}{c} = \frac{yu}{rx}.$$

Ou (prenant S pour la tangente de la hauteur du Pole, & Y pour la co-tangente de la plus grande déclinaison du Soleil) on a

$$S = \frac{uY}{r}.$$

PROBLEME XXXIII.

L'OBLIQUITÉ de l'Ecliptique, & la hauteur du Pole, étant données : trouver la durée du plus long ou du plus court jour, s'il n'y avoit point de réfraction, ni de parallaxe?

L'on a par la 1.^{re} formule

$$u = \frac{rsx}{cy}.$$

Ou (prenant comme dans le Problème précédent S pour la tangente de la hauteur du Pole, & X pour la tangente de la plus grande déclinaison du Soleil)

$$u = \frac{SX}{r}.$$

S C H O L I E.

C'est ainsi, ou du moins dans ces circonstances, que les Anciens déterminoient la hauteur du Pole. Et Ptolémée qui nous a laissé les hauteurs du Pole pour un grand nombre de Villes, préféreroit cette méthode à toutes les autres.

Ils ignoroient les effets de la Réfraction & de la Parallaxe, & choisissoient le jour du Solstice, parce que dans ce jour le Soleil ne changeant pas sensiblement en déclinaison, le Problème est plus facile à résoudre.

Cependant l'ignorance où ils étoient sur la Réfraction & la Parallaxe, leur peu d'exactitude sur l'obliquité de l'Ecliptique & sur la mesure du tems, rendoient toutes leurs Latitudes défectueuses.

Dans les Problèmes suivans, non seulement je corrige les erreurs que causent la Réfraction & la Parallaxe, mais encore je délivre le Problème de la restriction au jour du Solstice.

Enfin je le délivre même de la condition de Stabilité pour l'Observateur; & j'apprends à le résoudre sur la Mer, quel que soit le jour de l'année, & quelle que soit la route du Navigateur.

PROBLEME XXXIV.

L'OBLIQUITÉ de l'E'cliptique, la durée du jour solsticial, & la réfraction horisontale & la parallaxe, étant données : trouver l'altération causée à la durée du jour par la réfraction & la parallaxe ?

Dans la 1.^{re} formule

$$rsh - r r h = cyu,$$

Prenant la petite variation, en faisant s & x constans ; & observant que h croissant, u diminue ; l'on a

$$r r d h = c y d u.$$

Ou (substituant le petit arc de l'E'quateur $dE = \frac{r du}{t}$)

$$r r d H = \frac{c y t}{r} d E,$$

ou (à cause de $c = \frac{r r x}{\sqrt{(r r x x + y y u u)}}$)

$$d E = \frac{r \sqrt{(r r x x + y y u u)}}{x y t} d H.$$

SCHOLIE.

Ayant ainsi le petit arc de l'Équateur qui répond à la quantité dont la réfraction, moins la parallaxe, allonge le jour solsticial : réduisant cet arc en tems, & le retranchant de la durée observée ; l'on a la durée telle qu'elle seroit sans la réfraction & la parallaxe ; & corrigeant ainsi la durée du jour solsticial, on a la hauteur du Pole par le Problème XXXII.

PROBLEME XXXV.

L'OBLIQUITÉ de l'E'cliptique, & la durée du jour solsticial, étant données: trouver l'erreur que la réfraction & la parallaxe causent sur la hauteur du Pole!

Ce Problème se réduit à chercher la différence en Latitude de deux Observateurs, pour lesquels la durée du jour solsticial seroit la même, mais dont l'un verroit le Soleil comme on le voit, ses rayons brisés par l'Atmosphère, & l'autre le verroit sans réfraction.

Je prends donc la petite variation de la 1.^{re} formule

$$rsx - rrh = cyu,$$

en supposant r , x , & u , constans; & j'ai

$$rrdh - rxds + yudc = 0.$$

Ou (substituant les petits arcs du Méridien $dL = \frac{rds}{c} = -\frac{rdc}{s}$ pour ds & dc , & dH pour dh)

$$r^3 dH - rcxdL - syudL = 0.$$

Ou (à cause qu'à l'horifon l'on a $rxs = cyu$, & que $c = \frac{rrx}{\sqrt{(rrxx + yyuu)}}$)

$$r^3 dH - \frac{rccx dL - r s s x dL}{c} = 0, \text{ ou}$$

$$dL = \frac{c}{x} dH, \text{ ou}$$

$$dL = \frac{rr}{\sqrt{(rrxx + yyuu)}} dH.$$

S C H O L I E.

Ce qu'on suppose ici, que $rxs = cyu$, n'approche de la vérité qu'autant que les sinus de la déclinaison du Soleil, de la hauteur du Pole, & de son complément, sont beaucoup plus grands que la réfraction horizontale. Si donc on veut chasser c & s de l'Équation précédente, ou des Équations suivantes, lorsque s , c , ou x , sont petits, il faut recourir à l'Équation entière de la 1.^{re} formule

$$rsx - r r h = cyu,$$

& y prendre les valeurs de c , ou de s , qu'on veut substituer.

PROBLEME

PROBLEME XXXVI.

L'OBLIQUITÉ de l'E'cliptique, la durée du jour solsticial, & la hauteur du Pole, étant données : trouver la différence de la réfraction horifontale & de la parallaxe ?

Par le Problème XXXIII. on a la durée du jour solsticial tel qu'il seroit sans réfraction & sans parallaxe.

Par l'observation, l'on a la durée de ce même jour, telle qu'elle est, augmentée par la différence de la réfraction & de la parallaxe.

La différence de ces deux durées donne dE .

Et l'on a par le Problème XXXIV. pour la réfraction horifontale, moins la parallaxe,

$$dH = \frac{xyt}{r\sqrt{(rrxx + yyuu)}} dE.$$

F

PROBLEME XXXVII.

*L*A durée du jour étant donnée ; la déclinaison du Soleil, & son changement en déclinaison : trouver l'altération causée à la durée du jour par ce changement ?

Prenant la petite variation dans la 1.^{re} formule, $rsx - r r h = cyu$: lorsque $h = 0$, & que s est constant ; on a

$$rs dx = cud y + cy du.$$

Ou (substituant le petit arc du Méridien $dD = \frac{rdx}{y} = -\frac{rdy}{x}$, & le petit arc de l'Équateur $dE = \frac{rdu}{t}$, & pour s , sa valeur prise dans l'Équation $rsx = cyu$)

$$dE = \frac{rru}{xyt} dD.$$

PROBLEME XXXVIII.

*T*ROUVER sur Mer la hauteur du Pole par la durée du jour ?

Je cherche d'abord toutes les altérations que causent à la durée du jour, la réfraction & la parallaxe ; le changement du Soleil en déclinaison ; & le changement de lieu du Vaisseau.

Prenant la 1.^{re} formule

$$rsx - r rh = cyu ;$$

j'y fais tout varier ; & j'ai

$$rx ds + rs dx - r rdh = yudc + cudy + cydu.$$

Ou (mettant pour la différence du sinus de déclinaison le petit arc $dD = \frac{rdx}{y} = - \frac{rdy}{x}$; pour la différence du sinus de la hauteur du Pole, le petit arc du Méridien $dL = \frac{rds}{c} = - \frac{rdc}{s}$;

F ij

pour la différence du sinus de l'angle horaire, le petit arc de l'Équateur $dE = \frac{r du}{t}$; laissant dH pour le petit arc du vertical, dont la réfraction moins la parallaxe élève le Soleil à l'horison; & nommant dF le petit arc de l'Équateur qui répond au chemin du vaisseau en longitude) on aura pour le petit arc de l'Équateur qui répond au tems de toutes les altérations,

$$dE = \frac{r^3}{c y t} dH \pm \frac{r r u}{x y t} dD \pm \frac{r^3 x}{c c y t} dL \pm dF.$$

Ou (mettant pour $\frac{r x}{y}$ la tangente X de la déclinaison du Soleil, & pour $\frac{r u}{t}$ la co-tangente V de l'angle horaire)

$$dE = \frac{r^3}{c y t} dH \pm \frac{r V}{x y} dD \pm \frac{r r X}{c c t} dL \pm dF.$$

Faisant à la durée du jour observée, toutes ces corrections; on a la durée,

telle qu'elle seroit, s'il n'y avoit ni réfraction, ni parallaxe ; ni changement du Soleil en déclinaison ; ni changement de lieu du Vaisseau.

Et l'on a par la 1.^{re} formule $rsx = cyu$, pour la tangente de la hauteur du Pole, $\frac{rs}{c} = \frac{Yu}{r}$.

S C H O L I E.

Dans cette expression les signes des altérations causées par le changement de déclinaison du Soleil, le changement de lieu du Vaisseau en latitude, & son changement en longitude, sont ambigus : parce que chacune de ces trois altérations peut allonger ou accourcir la durée du jour. Il n'y a que l'altération causée par la différence de la réfraction & de la parallaxe, qui l'allonge toujours.

J'ai laissé, dans cette expression des altérations, le co-sinus de la hauteur du

Pole, qui est ce qu'on cherche. On pourroit le faire disparoître, en prenant sa valeur dans la 1.^{re} formule ; mais comme le calcul deviendroit fort compliqué, & qu'il n'est pas ici question d'une exactitude trop scrupuleuse, il vaut mieux prendre d'abord la hauteur du Pole grossièrement déterminée, telle que la 1.^{re} formule la donne, en la concluant par la durée du jour, sans y faire aucune correction ; & s'en servir pour chasser c de l'expression des altérations.

Quant aux quantités dH , dD , dL , dF ; il est évident que dH est la quantité de la réfraction diminuée de la Parallaxe : que dD est la quantité dont la déclinaison du Soleil a changé depuis son lever, qui est donnée dans les Tables : que dL est la quantité dont le Vaisseau s'est élevé ou abaissé en latitude pendant la durée du jour, qui est donnée par la

route du Vaisseau : qu'enfin dF , différence en longitude, est aussi donnée par la route, en supposant qu'on connoisse la latitude à peu-près.

Cette méthode, malgré tout ce que j'ai fait pour la rendre universelle, a encore quelques restrictions à quoi la nature de la chose la borne.

On voit, par exemple, qu'au tems où le Soleil est dans l'E'quateur, la durée du jour étant la même par toute la Terre, on ne sçauroit connoître par elle la hauteur du Pole.

On voit encore que si les altérations causées à la durée du jour par quelques-unes des causes que nous avons expliquées, étoient trop grandes, la méthode seroit défectueuse, parce qu'elle suppose que ces altérations sont fort petites par rapport aux quantités qui entrent dans le calcul.

Il y a une remarque à faire, qui peut

faciliter cette méthode de trouver la hauteur du Pole , sans lui faire perdre beaucoup de sa précision. C'est que négligeant les petites différences des grandeurs apparentes du diamètre du Soleil , on peut assés exactement statuer son diamètre égal à la quantité dont la réfraction élève les Astres à l'horison.

En sorte qu'au lever du Soleil , lorsqu'on observe son bord inférieur toucher l'horison , son bord supérieur ne fait réellement que l'atteindre ; & si l'on ajoûte à l'heure de l'émerision apparente du bord inférieur, la moitié du tems que le Soleil emploie à s'élever de tout son Disque , on aura le moment de l'émerision du centre. De même au coucher du Soleil , l'instant où le bord supérieur du Soleil paroît dans l'horison , peut être pris pour l'instant où le bord inférieur s'y trouve réellement. Si donc on soustrait de l'heure de l'immerision apparente du

bord supérieur, la moitié du tems que le Soleil emploie à cacher entièrement son Disque, on aura le moment de l'immersion du centre.

Cette pratique peut dispenser de la correction que nous avons donnée pour la réfraction. Et c'est une chose affés heureuse pour le Navigateur, que la grandeur du Disque du Soleil soit une mesure de la réfraction, & qu'elle puisse lui servir à en éviter les effets.

PROBLEME XXXIX.

CONNOISSANT la déclinaison & l'ascension droite de deux Astres, & le tems écoulé entre leur lever ou leur coucher : trouver la hauteur du Pole ?

Puisqu'on observe les deux Astres dans l'horison, l'on a par la 1.^{re} formule

$$rsx = cyu, \text{ \& } rsx' = cy'u'.$$

Ou (mettant pour $\frac{rx}{y}$ & $\frac{rx'}{y'}$ les tangentes X & X' des déclinaisons des deux Astres) on a

$$sX = cu, \text{ \& } sX' = cu';$$

D'où l'on tire

$$\frac{s}{c} = \frac{u}{X} = \frac{u'}{X'}, \text{ ou } \frac{u'}{u} = \frac{X'}{X}.$$

Or puisque l'ascension droite des deux Astres est donnée ; & la différence des tems de leur immersion dans l'horison, ou de leur émerfion : on a la différence de leurs angles horaires qui conviennent

à ces momens : & soit le sinus de l'angle, qui est cette différence $= p$, & son cosinus $= q$. Et l'on aura (à cause de

$$u' = \frac{qu - p\sqrt{rr - uu}}{r}$$

$$\frac{u'}{u} = \frac{qu - p\sqrt{rr - uu}}{ru} = \frac{X'}{X}$$

D'où l'on tire

$$uu = \frac{rrppXX}{rrXX + rrX'X' - 2rqXX'}, \quad \&$$

$$\frac{rs}{c} = \frac{ru}{X} = \frac{rp}{\sqrt{rrXX + rrX'X' - 2rqXX'}}$$

Jusqu'ici nous n'avons point eu d'égard à la réfraction, ni à la parallaxe. Pour en corriger l'effet, il faut chercher combien elles accélèrent l'apparition, ou retardent la disparition de chaque Astre.

Pour cela, je prends la petite variation de la 1.^{re} formule, en supposant s & x constans : & j'ai

$$rrdh = cydu, \quad \& \quad rrdh' = cy'du'$$

Ou (substituant les petits arcs de l'Équa-

$$\text{teur } dE = \frac{rdu}{t}, \quad dE' = \frac{rdu'}{t'})$$

$$dE = \frac{r^3 dH}{c y t}, \quad dE' = \frac{r^3 dH'}{c y' t'}$$

Ou (à cause de $c = \frac{r r x}{\sqrt{(r r x x + y y u u)}}$)

$$dE = \frac{r \sqrt{(r r x x + y y u u)}}{x y t} dH, \quad \&$$

$$dE' = \frac{r \sqrt{(r r x x + y y u u)}}{x y' t'} dH'$$

Ces deux quantités, réduites en tems, font les corrections qu'il faut faire au tems écoulé entre les apparitions & les disparitions des deux Astres, pour avoir l'intervalle écoulé entre leurs véritables émerfions ou immerfions dans l'horifon : & c'est de cet intervalle ainfi corrigé, réduit en arc de l'E'quateur, que p & q doivent être les finus & co-finus.

SCHOLIE.

Il est évident que ce Problème en contient un autre, que quelques Astronomes ont proposé comme pouvant être fort utile fur Mer. Celui-là confifte à *Trouver la hauteur du Pole par l'observation.*

de deux Etoiles, dont les déclinaisons & les ascensions droites soient connues, & qui se trouvent au même instant dans l'horison. Mais ce Problème ne sçauroit être d'aucune utilité ni sur Mer, ni sur Terre, parce que cette condition, que les deux Etoiles se lèvent ou se couchent en même tems, restreint pour chaque latitude le Problème à un fort petit nombre d'Etoiles, & qu'on ne peut d'ordinaire voir dans l'horison les Etoiles, même les plus brillantes.

J'ai étendu ce Problème, en l'affranchissant de la condition du lever & du coucher simultané ; & comme alors on peut choisir tels Astres qu'on voudra, on aura une méthode fort facile pour trouver la hauteur du Pole sur Mer par les observations du Soleil, de la Lune, de Vénus, ou de Jupiter dans l'horison.

Méthode pour trouver la déclinaison des Étoiles, & la hauteur du Pole, indépendamment l'une de l'autre, & sans se servir d'aucun angle mesuré par des arcs de Cercle.

CETTE méthode, l'une des plus belles & des plus utiles de l'Astronomie, puisque les déclinaisons des Étoiles servent de base à cette science, est dûe à M. Mayer, à qui l'Astronomie doit plusieurs autres excellentes choses. On peut dire cependant qu'il l'a plutôt indiquée que donnée. Elle est compliquée ; mais elle est si belle & si utile, que je me suis appliqué à la déduire de mes Formules, d'où elle découle fort naturellement. La voici.

PROBLEME XL.

LES passages de deux E'toiles par le Méridien, par deux Verticaux, & par deux Almicantaraths inconnus, mais constans, étant donnés : trouver la déclinaison de ces E'toiles, & la hauteur du Pole ?

Soient les sinus & les co-sinus des déclinaisons des deux E'toiles $x, y,$ & x', y' . Les co-sinus des angles horaires, lorsqu'elles passent au 1.^{er} Almicantarath v & v' ; & les co-sinus lorsqu'elles passent au 2.^d, v'' & v''' .

La 1.^{re} formule donne pour le passage au 1.^{er} Almicantarath

$$\begin{aligned} r r h - r s x &= c y v \\ r r h - r s x' &= c y' v', \quad \text{ou} \\ \frac{s}{c} &= \frac{y'v' - yv}{rx - rx'}. \end{aligned}$$

Pour le passage au 2.^d Almicantarath

$$\frac{s}{c} = \frac{y'v''' - yv''}{rx - rx'}.$$

On a donc

$$\frac{y'}{y} = \frac{v - v''}{v' - v'''}.$$

Nommant $t, t',$ & u, u' , les sinus & co-sinus des angles horaires des Étoiles, lorsqu'elles passent au 1.^{er} vertical : & $t'', t''',$ & u'', u''' , les sinus & co-sinus, lorsqu'elles passent au 2.^d;

La 3.^{me} formule donne pour le passage au 1.^{er} vertical

$$\frac{n}{m} = \frac{syu - rcx}{ryt}$$

$$\frac{n}{m} = \frac{sy'u' - rcx'}{ry't'}.$$

Ou $sy'yt'u - rcxy't' = sy'yt'u' - rcx'yt'$,

$$\text{ou } \frac{s}{c} = \frac{xy't' - r'xy't}{yy't'u - yy't'u'}.$$

Pour le passage au 2.^d vertical

$$\frac{s}{c} = \frac{rxy't'' - r'xy't''}{yy't''u'' - yy't''u''}.$$

On a donc

$$\frac{xy't' - r'xy't}{t'u - t'u'} = \frac{xy't'' - r'xy't''}{t''u'' - t''u''}.$$

Ou (nommant a le sinus de la différence
des

des arcs horaires terminés par les sinus t & t' : & a' le sinus de la différence des arcs terminés par les sinus t'' & t''' ; ce qui donne $ar = t'u - tu'$, & $a'r = t'''u'' - t''u'''$; on a

$$a'xy't' - a'x'yt = axy't''' - ax'y't'',$$

$$\& \frac{x'y}{xy'} = \frac{at''' - a't'}{at'' - a't},$$

$$\text{ou } \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} \times \frac{at''' - a't'}{at'' - a't}.$$

Ou (mettant pour $\frac{y'}{y}$ sa valeur $\frac{v-v''}{v'-v'''}$ prise dans l'Equation des passages aux Almicantaraths)

$$\frac{x'}{x} = \frac{v-v''}{v'-v'''} \times \frac{at''' - a't'}{at'' - a't}.$$

L'Equation des passages aux Almicantaraths donne

$$y'y' = \left(\frac{v-v''}{v'-v'''}\right)^2 yy = \frac{(v-v'')^2}{(v'-v''')^2} (rr - xx).$$

Celle des passages aux verticaux, donne

$$x'x' = \left(\frac{v-v''}{v'-v'''}\right)^2 \times \left(\frac{at''' - a't'}{at'' - a't}\right)^2 xx.$$

On a donc

$$\frac{(v - v'')^2 r r}{(v' - v''')^2} = \frac{(v - v'')^2 x x}{(v' - v''')^2} +$$

$$\frac{(v - v'')^2 \times (at''' - d't)^2 x x}{(v' - v''')^2 (at'' - d't)^2} = r r, \text{ ou}$$

$$x = \frac{r(at'' - d't) \sqrt{[(v' - v''')^2 - (v - v'')^2]}}{(v - v'') \times \sqrt{[(at''' - d't)^2 - (at'' - d't)^2]}}$$

Ayant ainsi la déclinaison d'une des Étoiles, on trouve facilement la déclinaison de l'autre ; & l'on a la hauteur du Pole par l'Équation

$$\frac{s}{c} = \frac{y' v' - y v}{r x - r x'}$$

F I N.



