Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 22

Übungsaufgaben

Aufgabe 22.1. Zeige, dass eine widersprüchliche Ausdrucksmenge $\Gamma \subseteq L^{\text{Ar}}$ Repräsentierungen erlaubt.

Aufgabe 22.2. Es sei $\Gamma \subseteq L^{\text{ar}}$ eine Ausdrucksmenge, die Repräsentierungen erlaube. Zeige, dass jede größere Ausdrucksmenge $\Gamma' \supseteq \Gamma$ ebenfalls Repräsentierungen erlaubt.

Aufgabe 22.3. Zeige, dass die Gleichheit von natürlichen Zahlen (also die Diagonalrelation in $\mathbb{N}^2$) durch den Ausdruck $x = y$ in der erststufigen Peano-Arithmetik repräsentierbar ist.

Aufgabe 22.4. Es sei $\Gamma \subseteq L^{\text{Ar}}$ das Axiomensystem eines kommutativen Halbringes. Zeige, dass die Gleichheit von natürlichen Zahlen (also die Diagonalrelation in $\mathbb{N}^2$) durch den Ausdruck $x = y$ in Γ nicht repräsentiert wird.

Aufgabe 22.5. Es sei $\Gamma \subseteq L^{\text{Ar}}$ das Axiomensystem eines kommutativen Halbringes. Zeige, dass Γ keine Repräsentierungen erlaubt.

Insbesondere erlauben die erststufigen Peano-Axiome ohne das Induktionsschema keine Repräsentierungen.

Aufgabe 22.6. Sei $k \in \mathbb{N}$ und sei

$$\alpha := \exists y(y + \cdots + y = x),$$

wobei k-mal der Summand y vorkommt. Zeige, dass $\mathbb{N}k \subseteq \mathbb{N}$, also die Menge der Vielfachen von k, in der erststufigen Peano-Arithmetik durch α repräsentiert wird.

Aufgabe 22.7. Zeige, dass die Menge der Quadratzahlen in der erststufigen Peano-Arithmetik repräsentiert werden kann.

Aufgabe 22.8. Es sei $\Gamma \subseteq L^{\text{ar}}$ eine widerspruchsfreie und R-entscheidbare Ausdrucksmenge.

a) Zeige, dass jede in Γ repräsentierbare Relation $R \subseteq \mathbb{N}^r$ R-entscheidbar ist.

b) Zeige, dass jede in Γ repräsentierbare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{N}^r \longrightarrow \mathbb{N}^s$$

R-berechenbar ist.

Aufgabe 22.9.*

Es sei $\Gamma \subseteq L^{\text{Ar}}$ eine arithmetische Ausdrucksmenge ohne freie Variablen und $R \subseteq \mathbb{N}$ eine Relation. Es seien $\alpha, \beta \in L^{\text{Ar}}$ Ausdrücke in einer freien Variablen x. Zeige, dass aus

$$\Gamma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$$

folgt, dass α in Γ die Relation R genau dann repräsentiert, wenn β in Γ die Relation R repräsentiert.

Aufgabe 22.10.*

Es sei $\Gamma \subseteq L^{\text{Ar}}$ eine arithmetische Ausdrucksmenge und $R \subseteq \mathbb{N}$ eine Relation. Es seien $\alpha, \beta \in L^{\text{Ar}}$ Ausdrücke in einer freien Variablen x. Zeige, dass aus

$$\Gamma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$$

nicht folgt, dass α in Γ die Relation R genau dann repräsentiert, wenn β in Γ die Relation R repräsentiert.

Aufgabe 22.11. Es sei $s_1, s_2, s_3, \ldots$ eine Aufzählung einer abzählbar-unendlichen Symbolmengen. Berechne die zu Wörtern über diesem Alphabet zugehörige Zahl im Sinne der Primzahlkodierung und umgekehrt.

(1) $s_1 s_2 s_1 s_3 s_3 s_2$,
(2) $s_{13} s_{12} s_1 s_4 s_4 s_4$,
(3) $s_2 s_2 s_2 s_2 s_2 s_2$,
(4) $2^1 3^3 5^{17} 7^1$,
(5) $2^1 3^1 5^1 7^1 11^1$,
(6) $2^3 3^3 5^3 7^3 11^3$,
(7) 1728.

Aufgabe 22.12. Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und

$$\alpha(x) := x = n,$$

wobei n durch die n-fache Summe der 1 mit sich selbst realisiert werde. Zeige, dass es Sätze $p, q \in L_0^{\mathrm{Ar}}$ mit

$$\vdash \alpha(GN(p)) \leftrightarrow p$$

und mit

$$\vdash \neg\alpha(GN(q)) \leftrightarrow q$$

gibt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 22.13. (4 Punkte)

Zeige, dass die Menge der Primzahlen in der erststufigen Peano-Arithmetik repräsentiert werden kann.

Aufgabe 22.14. (4 Punkte)

Es sei $s_1, s_2, s_3, \ldots$ eine Aufzählung einer abzählbar-unendlichen Symbolmengen. Berechne die zu Wörtern über diesem Alphabet zugehörige Zahl im Sinne der Primzahlkodierung und umgekehrt.

(1) $s_3s_2s_1s_1s_2s_3$,
(2) $s_{20}s_{17}s_1s_4s_{19}$,
(3) $2^13^25^37^411^5$,
(4) $10!$.

Aufgabe 22.15. (4 Punkte)

Zeige, dass in der erststufigen Peano-Arithmetik die Addition von natürlichen Zahlen repräsentierbar ist.

Aufgabe 22.16. (6 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

eine Polynomfunktion mit $f(n) = a_dn^d + a_{d-1}n^{d-1} + \cdots + a_1n + a_0$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{N}$. Zeige, dass f durch den Ausdruck $y = a_dx^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1x + a_0$ in der erststufigen Peano-Arithmetik repräsentiert wird.

Aufgabe 22.17. (6 Punkte)

Es sei Γ eine korrekte entscheidbare arithmetische Ausdrucksmenge, die die Peano-Arithmetik umfasse. Es sei $\alpha(x)$ das Ableitungsprädikat zu Γ und es sei q ein Fixpunkt zum negierten Ableitungsprädikat, also

$$\Gamma \vdash \neg\alpha(GN(q)) \leftrightarrow q\,.$$

Zeige, dass aus den in Bemerkung 23.7 angeführten Eigenschaften man

$$\Gamma \vdash \neg\alpha(GN(p \wedge \neg p)) \rightarrow \neg\alpha(GN(q))$$

erhalten kann, wobei p ein beliebiger Ausdruck ist.