Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Elliptische Kurven

Arbeitsblatt 21

Aufgaben

Aufgabe 21.1. Bestimme die Höhe des Punktes $\left(\frac{27}{100}, \frac{35}{64}, \frac{13}{11} \right) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$.

Aufgabe 21.2. Zeige, dass die Höhe eines jeden Punktes auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ eine positive natürliche Zahl ist.

Aufgabe 21.3. Zeige, dass die Höhe eines Punktes $(x, 1)$ auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ gleich dem Maximum der Beträge des Zählers und des Nenners in einer gekürzten Darstellung von x ist.

Aufgabe 21.4. Bestimme die Punkte auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$, deren Höhe gleich $6, 7, 8, 9, 10$ ist.

Aufgabe 21.5. Zeige, dass für $f \in \mathbb{Q}$, $f \neq 0$, die Gleichung

$$\prod_{x \in M_{\mathbb{Q}}} |f|_x = 1$$

gilt.

Eine entsprechende Gleichung gilt für jeden Zahlkörper, siehe Satz Anhang 4.3, der Beweis erfordert aber stärkere Hilfsmittel der algebraischen Zahlentheorie. Den folgenden Spezialfall kann man mit Lemma 7.14 (Algebraische Zahlentheorie (Osnabrück 2020-2021)) beweisen.

Aufgabe 21.6. Es sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ ein Zahlkörper mit dem zugehörigen Zahlbereich R. Zeige, dass für eine Einheit $f \in R^{\times}$ die Gleichung

$$\prod_{x \in M_K} |f|_x = 1$$

gilt.

Aufgabe 21.7. Es sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ ein Zahlkörper mit dem zugehörigen Zahlbereich R. Zeige, dass die Höhe eines Punktes $(f, 1) \in \mathbb{P}^1_K$ der projektiven Geraden zu einer Einheitswurzel $f \in R^\times$ gleich 1 ist.

Aufgabe 21.8. Es sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ ein Zahlkörper mit dem zugehörigen Zahlbereich R. Zeige, dass die Höhe eines Punktes $(f, 1) \in \mathbb{P}^1_K$ der projektiven Geraden zu einer Einheit $f \in R^\times$ nicht unbedingt gleich 1 sein muss.

Aufgabe 21.9. Bestimme die Höhe für den Punkt $(\frac{2+3\mathrm{i}}{1-5\mathrm{i}}, 1) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}[\mathrm{i}]}$ über dem Körper $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$.

Aufgabe 21.10. Zeige, dass in Lemma 21.8 die Abschätzung $H(xy) \leq H(x)H(y)$ für die absolute Höhe im Allgemeinen echt ist.

Aufgabe 21.11. Zeige, dass es in der Situation von Lemma 21.8 keine (von x und y unabhängige) positive Konstante c derart gibt, dass die Abschätzung $H(xy) \geq cH(x)H(y)$ für die absolute Höhe gilt.

Aufgabe 21.12. Zeige, dass es zu jeder Schranke $S \in \mathbb{R}_+$ nur endliche viele $\mathbb{Q}$-rationale Punkte auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ gibt, deren Höhe unterhalb von S liegt.

Aufgabe 21.13. Zeige, dass es zu jeder Schranke $S \in \mathbb{R}_+$ nur endliche viele $\mathbb{Q}$-rationale Punkte auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^m_{\mathbb{Q}}$ gibt, deren Höhe unterhalb von S liegt.

Aufgabe 21.14. Es sei $P \in \mathbb{P}^m_{\overline{\mathbb{Q}}}$ und sei

$$\varphi \colon \overline{\mathbb{Q}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$$

ein Körperautomorphismus mit dem induzierten Automorphismus auf dem projektiven Raum. Zeige, dass für die absolute Höhe

$$H(\varphi(P)) = H(P)$$

gilt.

Abbildungsverzeichnis