Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 36

Übungsaufgaben

Aufgabe 36.1. Rekapituliere Gesetzmäßigkeiten für Winkel (Nebenwinkel, Scheitelwinkel, Stufenwinkel, Wechselwinkel). Beweise diese elementargeometrisch und vektoriell.

Aufgabe 36.2. Rekapituliere die Begriffe *spitzes Dreieck*, *stumpfes Dreieck*, *gleichseitiges Dreieck* und *gleichschenkliges Dreieck*.

Aufgabe 36.3. Zeige elementargeometrisch, dass die Winkelsumme in einem Dreieck gleich 180 Grad ist.

Aufgabe 36.4. Zeige, dass es in einem nichtausgearteten Dreieck maximal einen rechten Winkel gibt.

Aufgabe 36.5. In den affinen Ebenen E_1 und E_2 seien nichtausgeartete Dreiecke $\Delta_1 = (A_1, B_1, C_1)$ und $\Delta_2 = (A_2, B_2, C_2)$ gegeben. Zeige, dass es eine bijektive affine Abbildung

$$\varphi \colon E_1 \longrightarrow E_2$$

gibt, die die Dreiecke ineinander überführt.

Aufgabe 36.6. Zeige, dass sich bei einer Verschiebung einer euklidischen Ebene die Seitenlängen und die Winkel eines Dreiecks nicht ändern.

Aufgabe 36.7. Es seien D_1 und D_2 Dreiecke mit der Eigenschaft, dass zwei Seitenlängen und der von ihnen eingeschlossene Winkel übereinstimmen. Zeige, dass die beiden Dreiecke kongruent sind.

Aufgabe 36.8. Es seien D_1 und D_2 Dreiecke mit der Eigenschaft, dass eine Seitenlänge und die an der Seite anliegenden Winkel übereinstimmen. Zeige, dass die beiden Dreiecke kongruent sind.

Aufgabe 36.9. Zeige, dass ein gleichschenkliges Dreieck zu einem Dreieck genau dann kongruent ist, wenn es dazu eigentlich kongruent ist. Zeige ferner, dass ein nichtgleichschenkliges Dreieck zu einem Dreieck kongruent sein kann, aber nicht eigentlich kongruent.

Aufgabe 36.10. Es seien $P_1 = (a_1, b_1)$, $P_2 = (a_2, b_2)$ und $P_3 = (a_3, b_3)$ drei Punkte im $\mathbb{R}^2$. Stelle den Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks mit $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ dar.

Aufgabe 36.11. Es seien drei Punkte $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ gegeben. Zeige, dass der Flächeninhalt des durch diese drei Punkte bestimmten Dreiecks eine rationale Zahl ist.

Aufgabe 36.12. Zeige, dass zwei Dreiecke in einer euklidischen Ebene genau dann zueinander ähnlich sind, wenn ihre Winkel übereinstimmen.

Aufgabe 36.13. Welche elementargeometrischen Beweise für den Satz des Pythagoras kennen Sie?

Aufgabe 36.14. Es sei A, B, C ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel im Punkt C. Zeige, dass der Höhenfußpunkt zur Höhe durch C auf der Strecke $\overline{A, B}$ liegt.

Aufgabe 36.15. Bestimme für das Dreieck im $\mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $(0, 0), (3, 0), (0, 5)$ die Seitenlängen, Parameterdarstellungen für die Höhengeraden, die Länge der Höhen und die Höhenfußpunkte.

Aufgabe 36.16.*

a) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a, b, c \in]0, 1[$ mit

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

b) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a, b, c \in]0, 1[$ mit

$$a^2 + b^2 \neq c^2 .$$

c) Man gebe ein Beispiel für irrationale Zahlen $a, b \in]0, 1[$ und eine rationale Zahl $c \in]0, 1[$ mit

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

Ein *pythagoreisches Tripel* ist eine ganzzahlige Lösung $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ der diophantischen Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Es heißt *primitiv*, wenn x, y, z keinen gemeinsamen Teiler besitzen.

Aufgabe 36.17. Seien x und y ungerade. Zeige, dass $x^2 + y^2$ keine Quadratzahl ist.

Aufgabe 36.18. Sei (x, y, z) ein pythagoreisches Tripel. Zeige, dass x oder y ein Vielfaches von 3 ist.

Aufgabe 36.19. Skizziere ein Dreieck D derart, dass eine Höhe das Dreieck D in zwei verschiedene rechtwinklige Dreiecke D_1 und D_2 unterteilt so, dass die Seitenlängen von D_1 und D_2 jeweils pythagoreische Tripel bilden. Man gebe die Seitenlängen an.

Aufgabe 36.20.*

Beweise den Höhensatz mit Hilfe des Kathetensatzes.

Aufgabe 36.21.*

Beweise die Umkehrung des Satzes von Thales: Es sei A, B, C ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel an C. Es sei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{A, B}$. Dann ist

$$d(C, M) = d(A, M) = d(B, M),$$

d.h. C liegt auf dem Kreis mit Mittelpunkt M durch A (und B).

Aufgabe 36.22.*

Beweise den Kosinussatz.

Aufgabe 36.23. Beweise die Umkehrung des Satzes des Pythagoras: Wenn in einem Dreieck die Beziehung

$$c^2 = a^2 + b^2$$

zwischen den Seitenlängen a, b, c gilt, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Aufgabe 36.24. Es sei M ein metrischer Raum, der aus drei Punkten bestehe. Zeige, dass man M als metrischen Unterraum einer euklidischen Ebene realisieren kann.

AUFGABE 36.25. Es sei A, B, C ein Dreieck in der euklidischen Ebene und es sei R der Rand des Dreiecks, also die Vereinigung der drei Seiten.

(1) Definere eine Metrik auf R derart, dass der Abstand von zwei Punkten, die auf der gleichen Seite liegen, einfach der induzierte Abstand ist und
$$d(x, y)$$
der minimale Abstand längs eines Weges auf R ist.
(2) Handelt es sich um die induzierte Metrik?
(3) Kann es sein, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten über alle drei Seiten läuft?

In den folgenden Begriffen und Aufgaben wird das Konzept einer konvexen Hülle erläutert.

Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn mit je zwei Punkten $P, Q \in T$ auch jeder Punkt der Verbindungsstrecke, also jeder Punkt der Form
$$rP + (1-r)Q \text{ mit } r \in [0,1]\,,$$
ebenfalls zu T gehört.

Zu einer Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt die kleinste konvexe Teilmenge T, die U umfasst, die *konvexe Hülle* von U.

Die Existenz der konvexen Hülle beruht auf folgender Beobachtung.

AUFGABE 36.26. Zeige, dass der Durchschnitt von konvexen Mengen wieder konvex ist.

AUFGABE 36.27. Es seien $P_1, \ldots, P_m$ Punkte im $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass die konvexe Hülle dieser Punkte gleich der durch nichtnegative baryzentrische Kombinationen gegebenen Menge
$$\left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i P_i | \sum_{i=1}^{m} a_i = 1,\ a_i \geq 0 \text{ für alle } i \right\}$$
ist.

AUFGABE 36.28. Sind alle Vierecke konvex?

AUFGABE 36.29. Zerlege geometrisch die angegebene Strecke in fünf gleichlange Teile.

Aufgabe 36.30. Begründe, dass in der Situation von Satz 36.16 ähnliche Dreiecke vorliegen.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 36.31. (5 Punkte)

Man gebe für die beiden Dreiecke

$$(2,1),(2,-1),(5,-1) \text{ und } (-1,1),(1,1),(1,4)$$

explizit eine Folge von Verschiebungen, Drehungen und Achsenspiegelungen an, die das eine Dreieck in das andere überführt.

Aufgabe 36.32. (4 Punkte)

Bestimme für das Dreieck im $\mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $(2,-3),(4,1),(5,6)$, die Seitenlängen, Parameterdarstellungen für die Höhengeraden, die Länge der Höhen und die Höhenfußpunkte.

Aufgabe 36.33. (8 (2+1+1+4) Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sei das Dreieck mit den Eckpunkten $(4,2,-5),(4,3,7),(-5,0,-6)$ gegeben.

a) Bestimme eine Gleichung und eine Parameterdarstellung für die affine Ebene, in der das Dreieck liegt.

b) Bestimme die Seitenlängen des Dreiecks.

c) Bestimme die Winkel des Dreiecks.

d) Bestimme eine Parameterdarstellung für die Höhengerade durch den Punkt $(4,2,-5)$, die Länge dieser Höhe und den zugehörigen Höhenfußpunkt.

Aufgabe 36.34. (4 Punkte)

Es sei A,B,C ein Dreieck in einer euklidischen Ebene. Zeige, dass der Abstand des Eckpunktes C zur Seite $\overline{AB}$ im Punkt A oder im Punkt B oder im Höhenfußpunkt zur Höhe durch C angenommen wird.