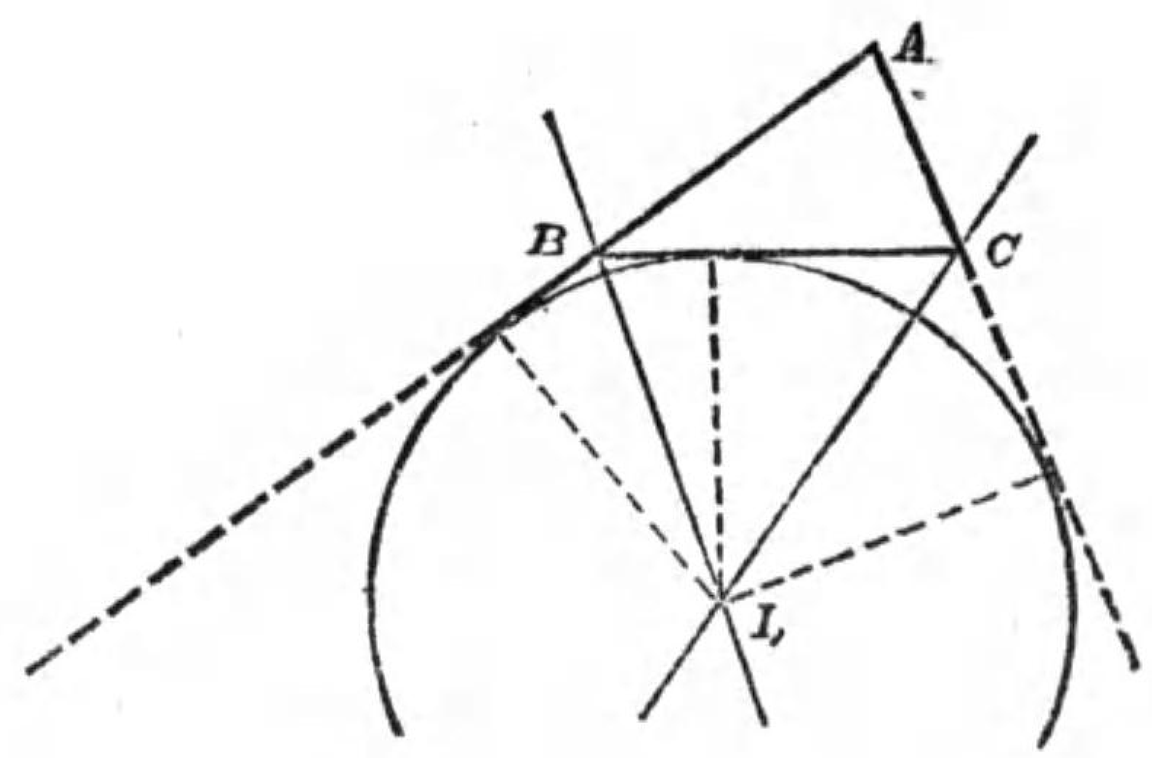
153. 作圖題15 三角形の傍接圓を書くこと.



三角形ノ外ニ於テ,其ノ三邊(ヲ延長シタルモノ)ヨリ等距離ナル點ヲ求ムレバヨシ.

作圖 ∠ABC ノ外角,及ビ∠ACB ノ外角ヲ二等分シテ BI_1, CI_1 ヲ引ク.

然ルトキハ,I_1 ハ AB ノ延長,AC ノ延長,及ビ BC ヨリ等距離ナリ.

I_1 ヨリ BC ヘ垂線ヲ下シ,I_1 ヲ中心トシ,此垂線ヲ半徑トスル圓ヲ書ク.

此圓ハ AB 及ビ AC ノ延長,及ビ BC ニ切ス;即チ一ツノ傍接圓ナリ.

——〔問題〕——

1 二等邊△ノ三ツノ傍接圓中ノ二ツハ相等シ.

*2 三角形の角の二等分線は悉く一點に於て相會す.

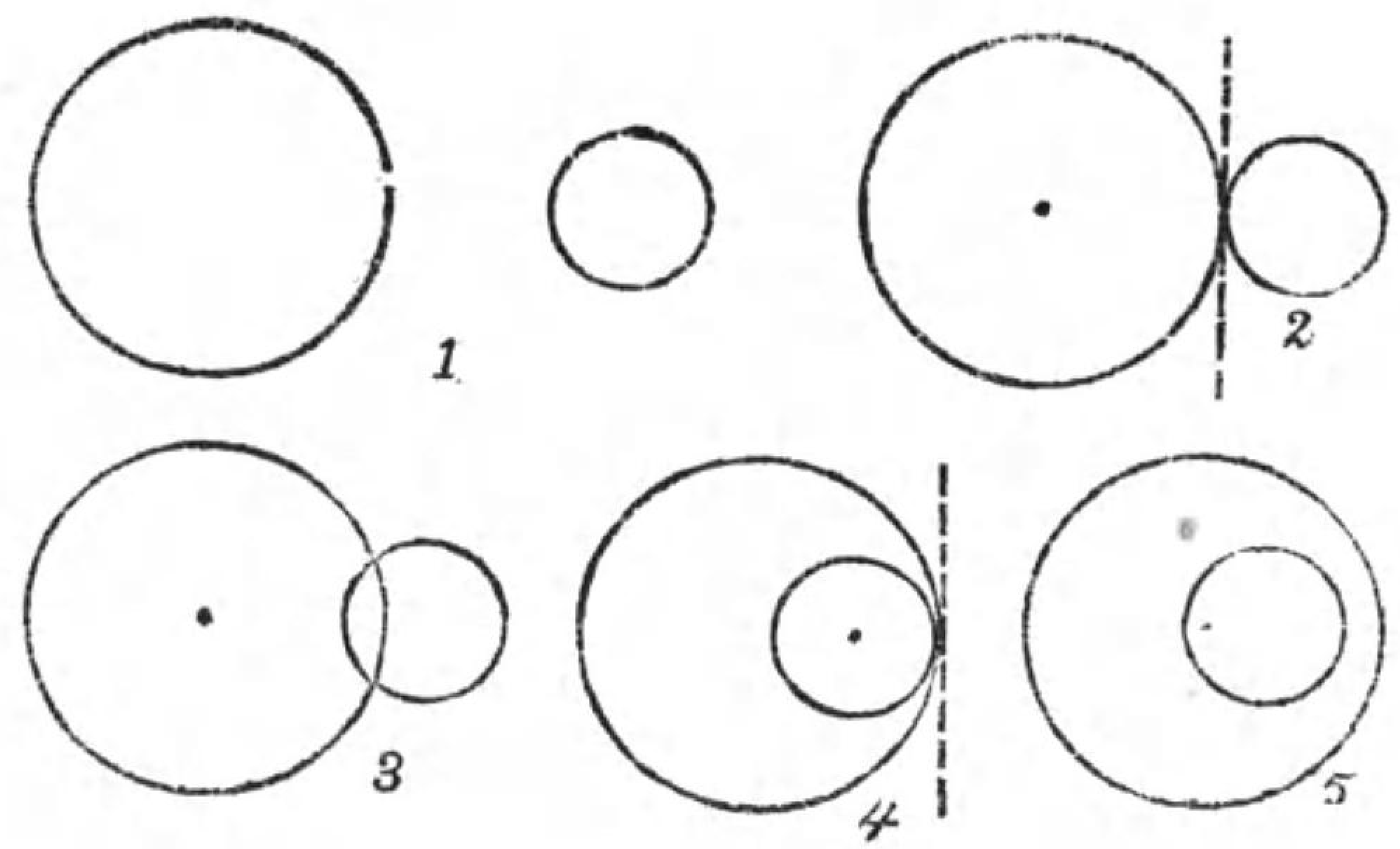
3 ∠A ノ二等分線ト,B,C ノ外角ノ二等分線トハ,一點ニ於テ相會ス,

4 頂點 A ト,內接圓ノ中心 I ト,BC ニ切スル傍接圓ノ中心 I_1 トハ一直線上ニ在リ.

5 二ツノ平行直線ト之ニ交ル他ノ一直線トニ切スル總テノ圓ヲ書クコト.

二圓の相切

154. 二つの圓の位置の關係. 二ツノ圓ハ下圖ニ示スガ如ク種々ナル位置ノ關係ヲ有ス.

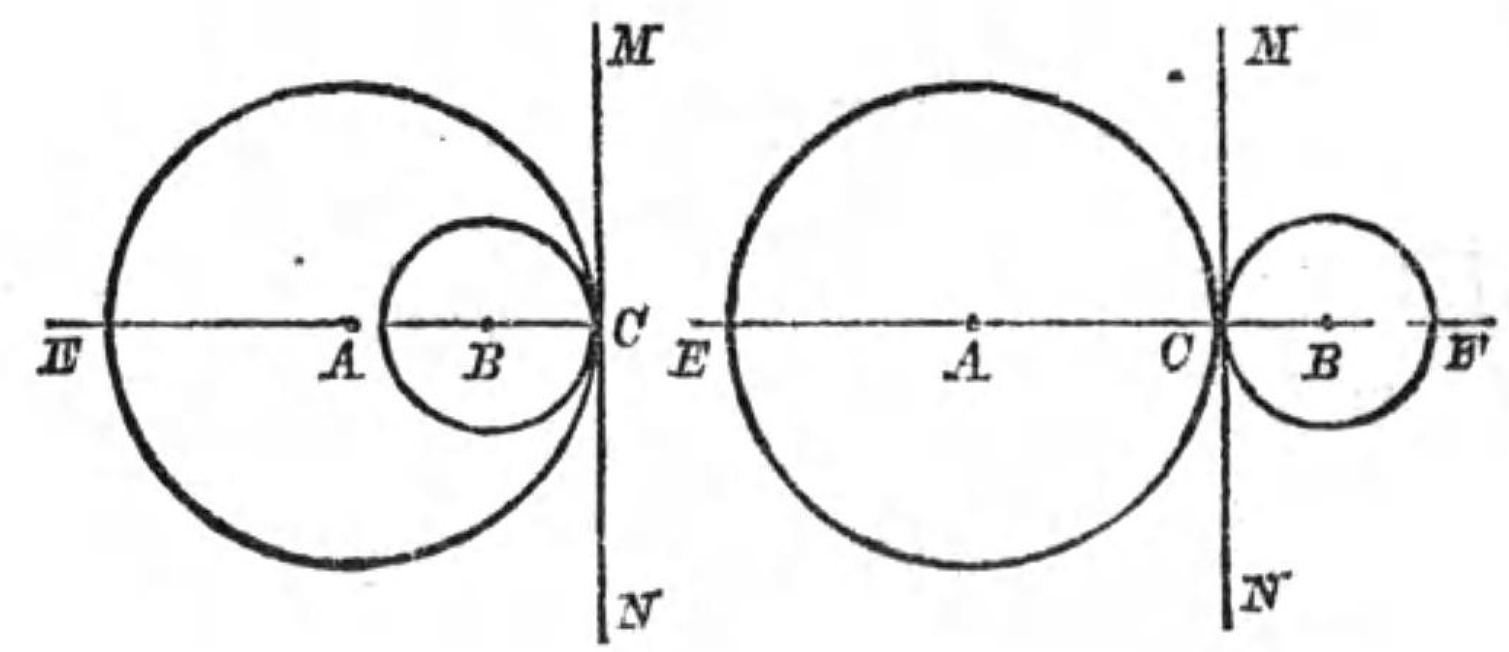


155 兩圓の相切.(內切,外切).

上圖ノ2,及ビ4ニ於ケルガ如ク,

兩圓が同一の點(**切點**)に於て同一の直線に切するときは,此兩圓は此點に於て**相切す**と云ふ;而して兩圓が其共通の切線の同じ側に在れば,互に**內切す**と云ひ,其切線の反對の側に在れば,互に**外切す**と云ふ.

156. 定理57 兩圓相切するときは,其切點は中心を通る直線上に在り.



〔第一. 內切の場合〕.

前提 Cニ於テ內切スル二圓ノ中心ヲA,B,其ノ共通切線ヲMNトス.

求證 ABノ延長ハCヲ通ル.

作圖 CヨリMNニ垂直ニCEヲ引ク.

證明 CEハ切點ニ於テ切線ニ垂直ナリ,

故ニ,CEハ中心Aヲ通ル. 〔定理56系〕

同理ニテ,CEハ中心Bヲ通ル.

故ニABCハ一直線ナリ.

〔第二, 外切の場合〕.

學生ハ自ラ此ノ證明ヲ試ミルベシ.

157. 系　兩圓外切(內切)するときは,其の中心間の距離は半徑の和(差)に等し.

〔問　題〕

1　相等シキ兩圓ノ位置ノ關係ニ就キテ種々ノ場合ヲ畫ケ.

2　前問ニテ圖示シタルモノヲ言語ヲ以テ敍述セヨ.

3　半徑ガ r, R ナル兩圓ノ位置ハ,次ノ場合ニ於テ夫々如何ナル關係ヲ有スルカ:

(a)　中心間ノ距離 $(r+\mathrm{R})$ ヨリ大ナルトキ,

(b)　　　〃　　　〃　ニ等シキトキ,

(c)　　　〃　　　〃　ヨリ小ナルトキ.

*4　與へられたる圓に外切し且つ與へられたる半徑を有する圓の中心の軌跡を求むること.

5　與ヘラレタル圓周上ノ一點ニ於テ之ニ切シ,且ツ與ヘラレタル半徑ヲ有スル圓ヲ畫クコト.

*6　定圓周上の一點に於て之に切する圓の中心の軌跡を求むること.

*7　與へられたる直線上の一點に於て之に切する圓の中心の軌跡を求むること.

*8　與へられたる一點を過ぎ,且つ一定の半徑を有する,圓の中心の軌跡を求むこと.

9　二定點ヲ過グル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ムルコト,

10　一ツノ定點ヲ過ギ,一ツノ定直線ニ切シ,且ツ定半徑ヲ有スル圓ヲ畫クコト.

11　與ヘラレタル直線ノ上ノ與ヘラレタル一點ニ於テ其直線ト相切シ,且ツ其直線外ノ與ヘラレタル一點ヲ過グル圓ヲ畫クコト.

12　定圓周上ノ一定點ニ於テ其圓ト相切シ,且ツ其圓外ノ一定點ヲ過グル圓ヲ畫クコト.

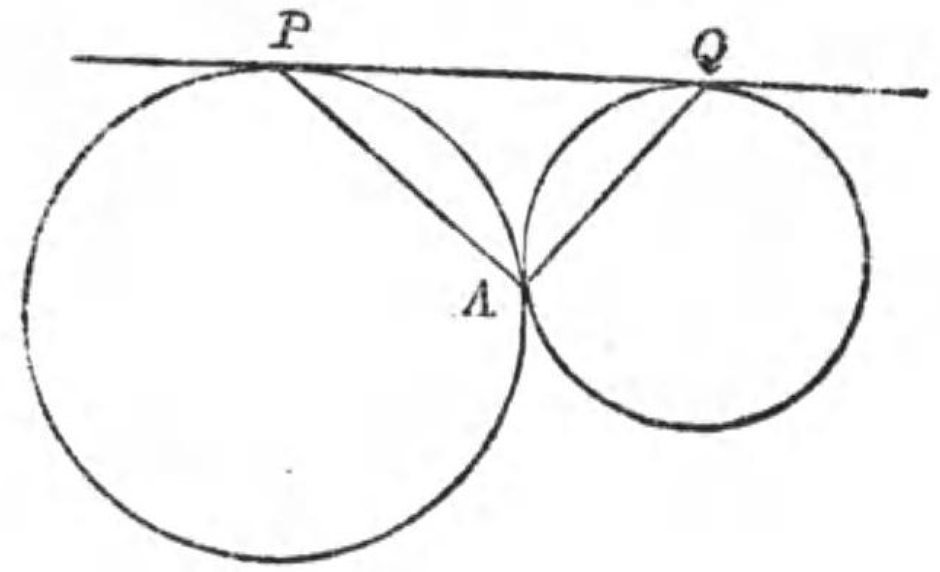
13　定直線上ノ一定點ニ於テ其直線ト相切シ,且ツ其直線ト平行ナラザル他ノ直線トモ相切スル圓ヲ畫クコト.

14　定圓ニ切シ,定點ヲ過ギ,且ツ定半徑ヲ有スル圓ヲ畫クコト.

[15] 定圓ト定直線トニ切シ,且ツ定半徑ヲ有スル圓ヲ畫クコト.

[16] 相切スル兩圓ノ切點ヲ過ギテ引ケル直線ガ其兩圓ト交ル點ニ於ケル兩圓ノ切線ハ互ニ平行ナリ.

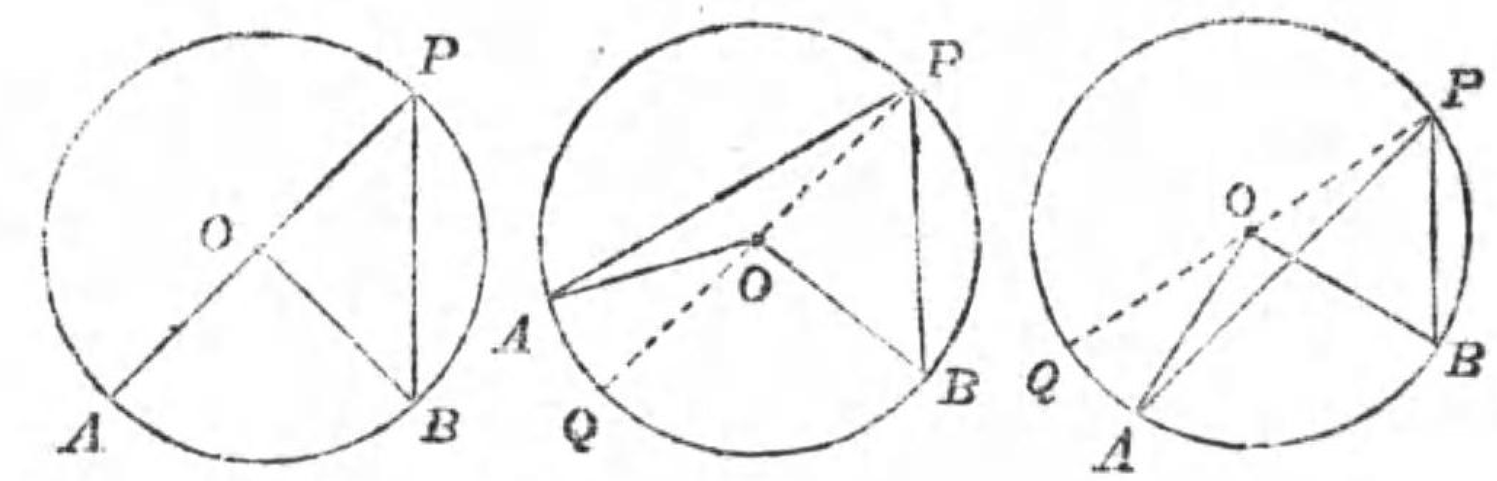
[17] Aニ於テ外切スル兩圓ニ一ツノ直線ガ切スル點ヲP, Qトスレバ,∠PAQハ直角ナリ.



[*18] 兩圓が相交るときは,其中心を結び付くる直線は兩圓に共通なる弦を直角に二等分す.

第十三章　圓周上の角

157. [定理58] 一つの弧に對する圓周上の一點に於ける角は,同じ弧に對する中心に於ける角の半分に等し.

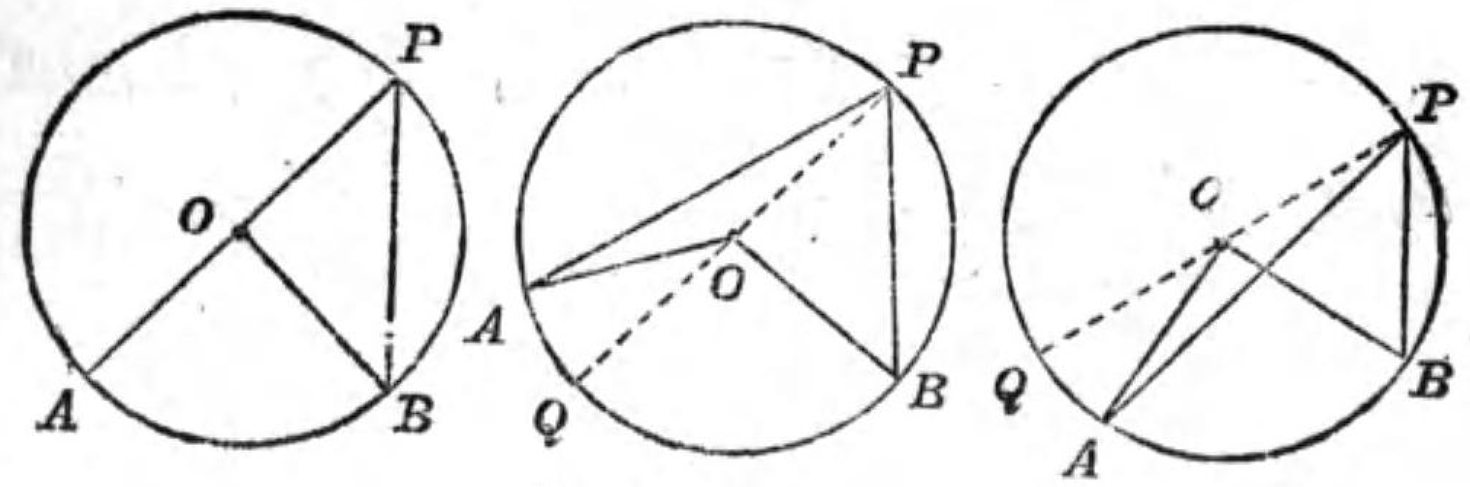


[前提] 中心Oニ於テ弧ABニ對スル角ヲ∠AOB,

弧ABニ屬セザル圓周上ノ任意ノ一點ヲP,

Pニテ弧ABニ對スル角ヲ∠APBトス.

[求證] $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB.$



證明 I. O ガ PA 上ニ在ルトキ,

$\angle AOB$ ハ二等邊 $\triangle POB$ ノ外角ナリ.

$$\therefore \angle AOB = \angle OPB + \angle OBP$$
$$= 2\angle OPB,$$
$$\therefore \angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB.$$

II. O ガ $\angle APB$ ノ $\left\{\begin{matrix}内\\外\end{matrix}\right.$ ニ在ルトキ,

直徑 POQ ヲ引ク.

$$\angle APB = \angle QPB \pm \angle QPA,$$

又 $\angle AOB = \angle QOB \pm \angle QOA.$

然ルニ $\angle QPB = \frac{1}{2}\angle QOB,$ (既證 I)

$\angle QPA = \frac{1}{2}\angle QOA.$ 〃

$$\therefore \angle QPB \pm \angle QPA = \frac{1}{2}(\angle QOB \pm \angle QOA),$$

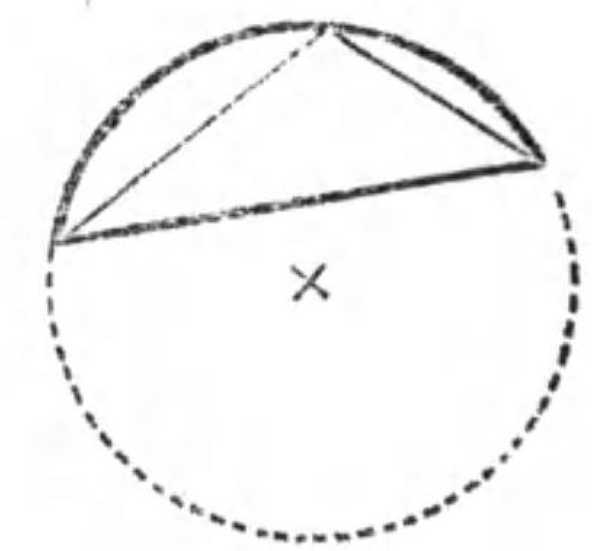
即チ $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$

注意 本定理ハ次ノ如ク略述セラル.

一つの弧に對する圓周角は圓心角の半分なり.

〔問題〕

P, Q ヲ弧 AB ニ屬セザル圓周上ノ二點トスレバ, $\angle APB = \angle AQB$.



159. 弓形内の角又は弓形の含む角トハ,其弓形ノ弧ノ上ノ一點ヨリ其弧ノ兩端ヘ引ケル直線ノ成ス角ナリ.

160. **定理59** 同弓形(又は相等しき弓形)内の角は總て相等し.

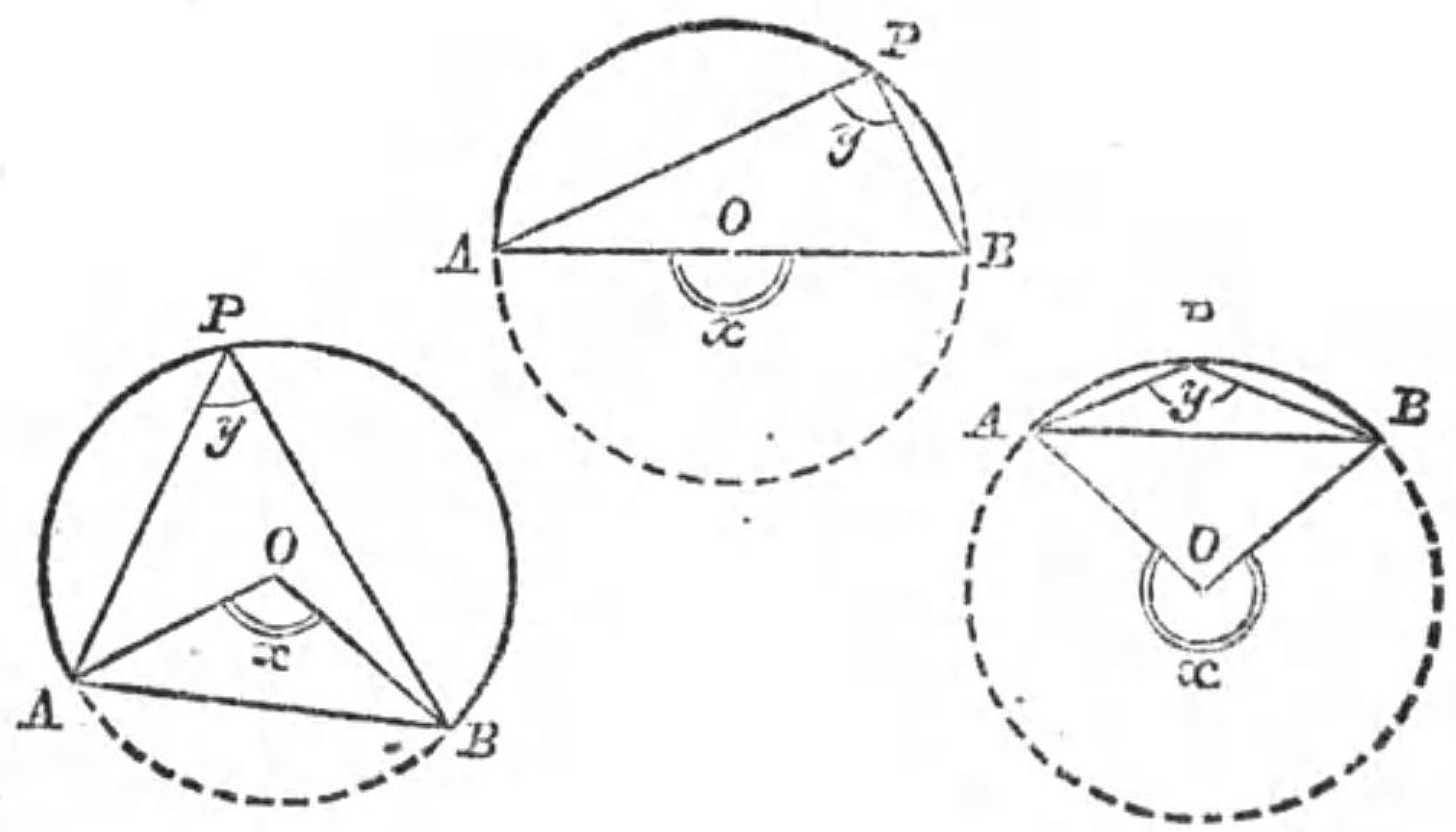
證明 前定理ヨリ出ヅ.

注意 同弓形内ノ角ハ皆相等シク,即チ其ノ大サ一定セルヲ以テ,以後,其ノ任意ノ一角ノ大サヲ單ニ**其弓形内ノ角**ト稱スルコトアルベシ.

161. **優弓形,劣弓形.**

弓形ノ半圓ヨリ大ナルモノヲ優弓形ト稱シ,半圓ヨリ小ナルモノヲ劣弓形ト稱ス.

162. 定理60 優弓形内の角は鋭角なり.
半圓内の角は直角なり.
劣弓形内の角は鈍角なり.

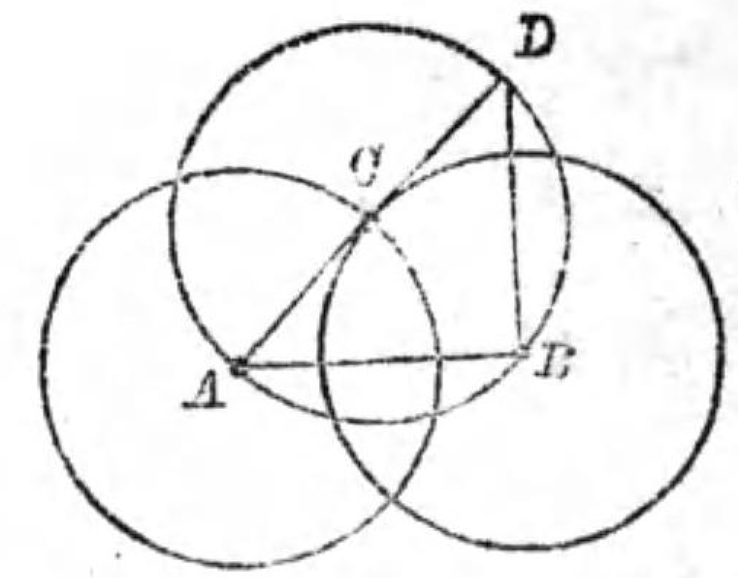


證明 定理58ヨリ出ヅ.

〔問題〕

1 直線ABノ兩端ヲ中心トシテ,相等シキ

圓ヲ書キ,次ニ其ノ交點Cヲ中心トシテ前ト同ジ半徑ノ圓ヲ書キ,ACノ延長ガ此圓ト交ル點ヲDトスレバ, $BD \perp AB$.



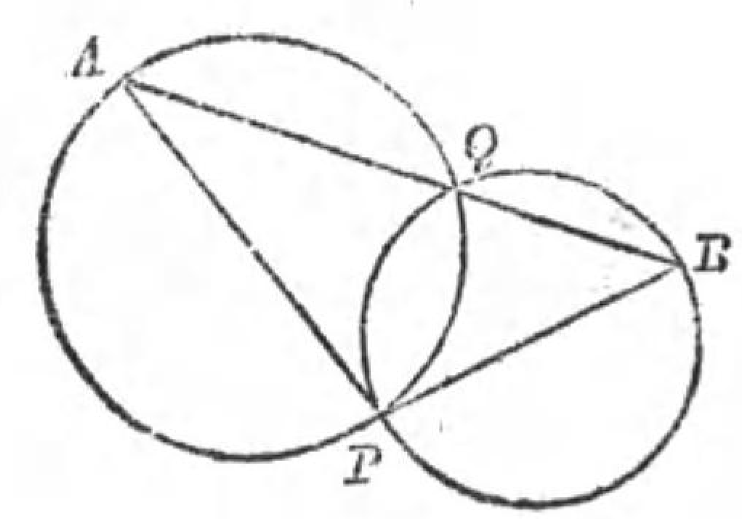
2 一ツノ直線ヲ延長セズシテ,其ノ一端ニ垂線ヲ立ツルコト.

3 二等邊△ノ一邊ヲ直徑トシテ書ケル圓ハ其ノ底ノ中點ヲ通ル.

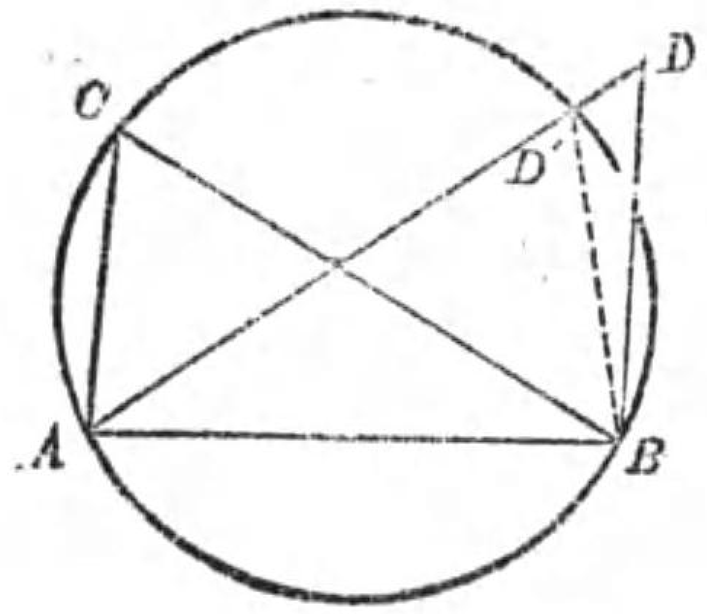
4 三角形ノ二邊ヲ直徑トシテ書ケル圓ハ第三邊又ハ其ノ延長ノ上ニ於テ相交ル.

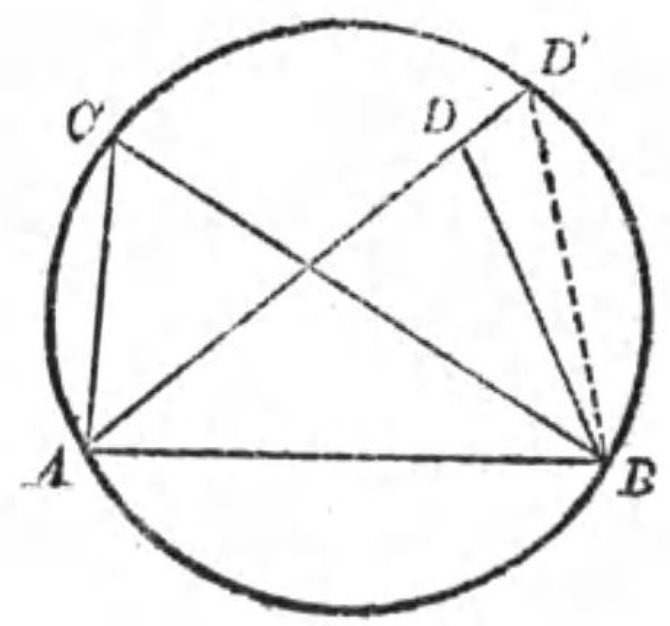
5 菱形ノ四邊ヲ直徑トスル圓ハ同一ノ點ニ於テ相會ス.

6 二圓ノ一交點Pヨリ直徑PA,PBヲ引ケバ,A,B及ビ他交點Qハ一直線上ニ在リ.



163. 定理61 二點を結ぶ直線の同側に在る他の二點に於て其直線に對する角が相等しきときは,此四點は一圓周上に在り. (定理59の逆)





前提 A, B ヲ結ブ直線ノ同側ニ C, D アリ,

且ツ ∠ACB＝∠ADB.

求證 四點 A, B, C, D ハ一圓周上ニ在リ.

作圖 A, B, C ヲ過グル圓ヲ畫ク.

此圓ガ D ヲ通ルコトヲ證明スレバヨシ.

證明 圓 ABC ガ D ヲ通ラズトセバ,

AD又ハ其ノ延長ト一點D'ニ於テ相交ルベシ.

BD' ヲ結ビ付ク.

∠AD'B＝∠ACB (同弓形内ノ角)

然ルニ ∠ADB＝∠ACB. 〔前提〕

∴ ∠AD'B＝∠ADB

サレド是レ不可能ナリ(∠AD'B, ∠ADB何レカ一方ハ △BDD' ノ外角ニテ,他ノ方ハ其ノ内對角ナレバナリ).

故ニ圓 ABC ハ D ヲ通ラザル可ラズ.

即チ四點 A, B, C, D ハ一圓周上ニ在リ.

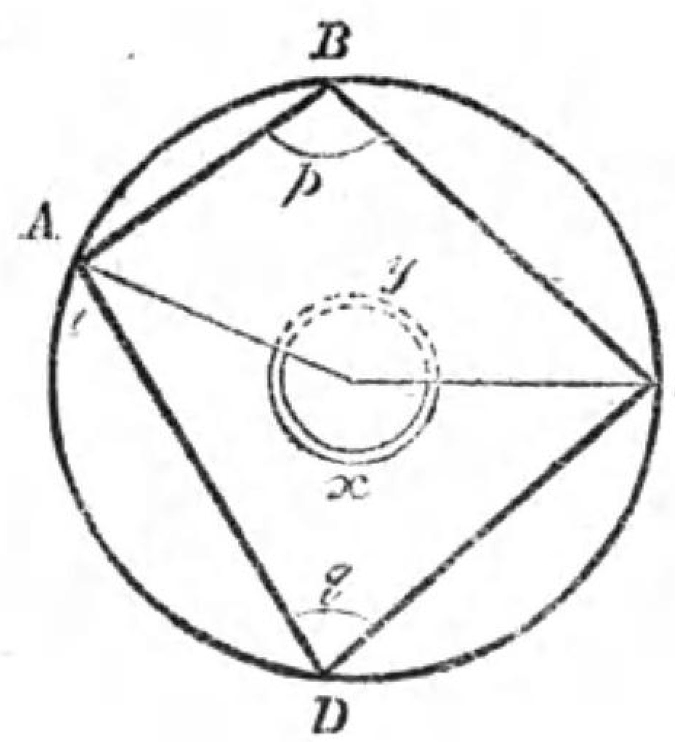
〔問題〕

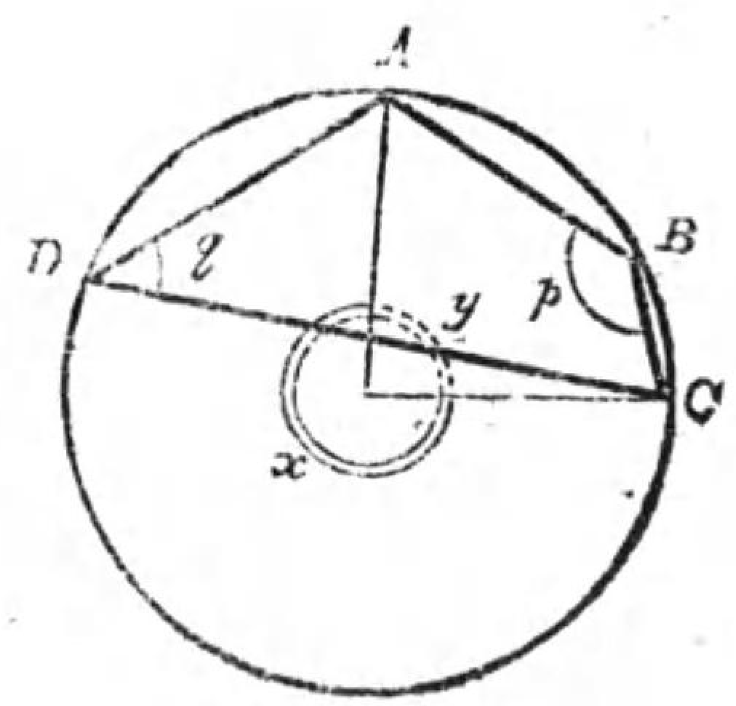
[1] △ABCノ二ツノ頂點B, Cヨリ對邊ヘ垂線BE, CF ヲ引クトキハ,四點B,C,E,F, ハ同一圓周上ニ在リ.

[2] 定直線 BC ヲ底トシ其同ジ側ニ在ル直角三角形ノ頂點ノ軌跡ハ一ツノ半圓周ナリ

[3] 與ヘラレタル底ヲ有シ且ツ頂角ノ大サガ一定ナル三角形ノ頂點ノ軌跡ハ如何ナル線ナルカ.

164. $\boxed{\text{定理}^{62}}$ 一つの圓の內接四邊形の對角は互に補角なり.





前提 ABCD ハ圓ニ內接スル四邊形ナリ.

求證 $\angle p+\angle q=2$ 直角

作圖 A,C ヲ中心ニ結ビ付ク.

證明 $\angle p=\frac{1}{2}\angle x,$ 〔定理58〕

$\angle q=\frac{1}{2}\angle y,$

$\therefore \angle p+\angle q=\frac{1}{2}(\angle x+\angle y).$

然ルニ $\angle x+\angle y=4$ 直角.

$\therefore \angle p+\angle q=2$ 直角.

同理ニテ, $\angle BAD+\angle BCD=2$ 直角.

〔問題〕

1 一ツノ圓ノ內接四邊形 ABCD ノ邊 AB ヲ P マデ延長スレバ,外角 CBP ハ內對角 ADC ニ等シ.

2 平行四邊形ガ圓ニ內接シ得ルトキハ矩形ナリ.

3 圓ニ內接スルコトヲ得ル梯形ノ平行ナラザル二邊ハ相等シ.

4 中心ガ O ナル圓ニ內接セル四邊形 ABCD ニ於テ,

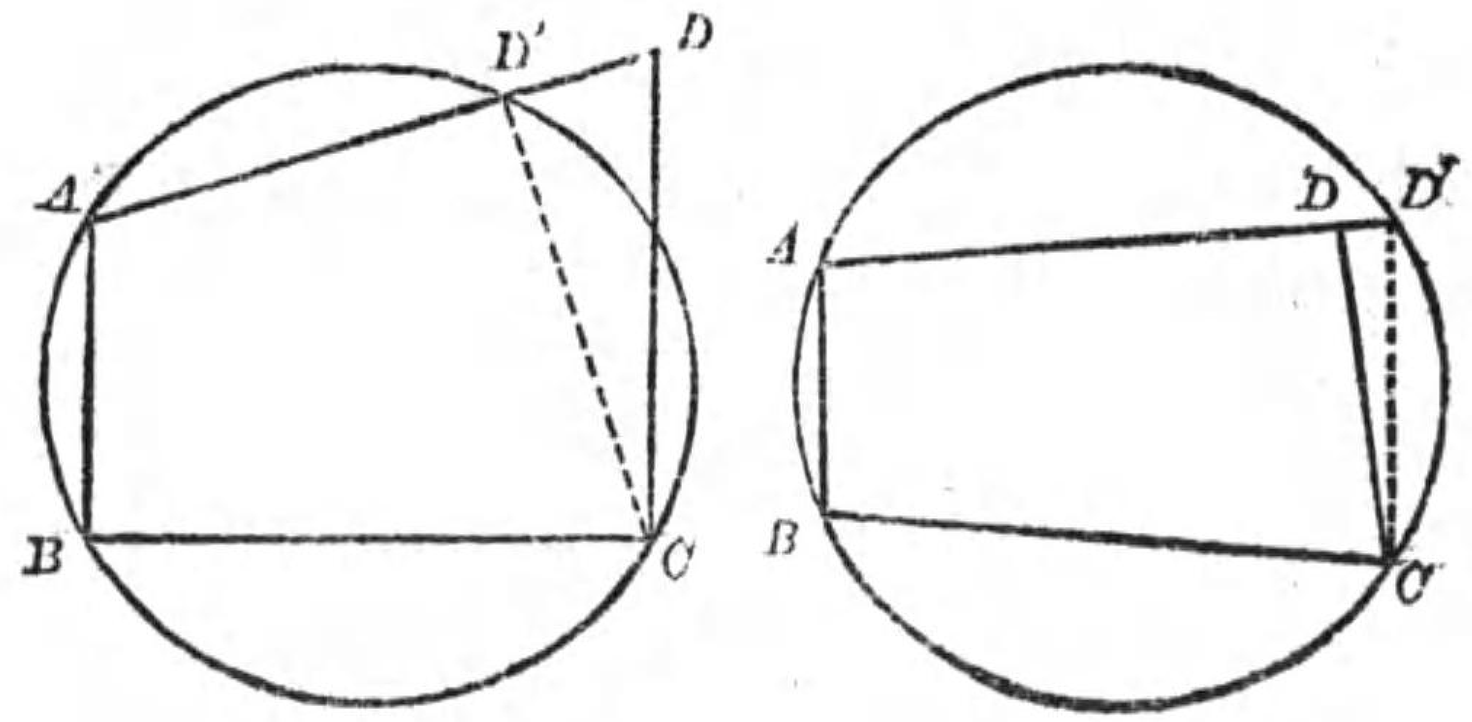
$$\angle A=\frac{2}{3}\text{直角}$$

ナレバ, $\angle OBD+\angle ODB=\angle CBD+\angle CDB.$

5 圓ニ內接セル四邊形 ABCD ノ二邊 BA, CD ノ延長ガ O ニ於テ交レバ,兩△OAD, OCB ハ等角ナリ.

6 A, C ニ於ケル角ガ互ニ補角ナル一ツノ四邊形 ABCD ヲ書キ,又圓 ABC ヲ書ケバ此圓ハ點 D ヲ過グルカ,如何.

165 定理63 四邊形の對角の一對が互に補角なるときは,其の四頂點は一圓周の上に在り.(前定理の逆)



前提　四邊形 ABCD ニ於テ,

∠ABC＋∠ADC＝2直角,

求證　A,B,C,D ハ一圓周上ニ在リ.

作圖　A,B,C ヲ通ル圓ヲ書ク

此圓ガ D ヲ通ルコトヲ證スレバヨシ.

證明　圓 A,B,C ガ D ヲ通ラズバ,

AD 又ハ其ノ延長ト一點 D′ ニ於テ交ルベシ.

CD′ ヲ結ビ付ク.

然ルトキハ,∠AD′C＋∠ABC＝2直角.　〔定理62〕

然ルニ ∠ADC＋∠ABC＝2直角.　〔前提〕

∴　∠AD′C＋∠ABC＝∠ADC＋∠ABC

∴　∠AD′C＝∠ADC.

サレド是レ不可能ナリ(此二角ノ一方ハ△DD′C ノ外角ニシテ,他ノ一方ハ其ノ内對角ナレバナリ).

故ニ圓 ABC ハ D ヲ通ラザルベカラズ;

即チ,A,B,C,D ハ一圓周上ニ在リ.

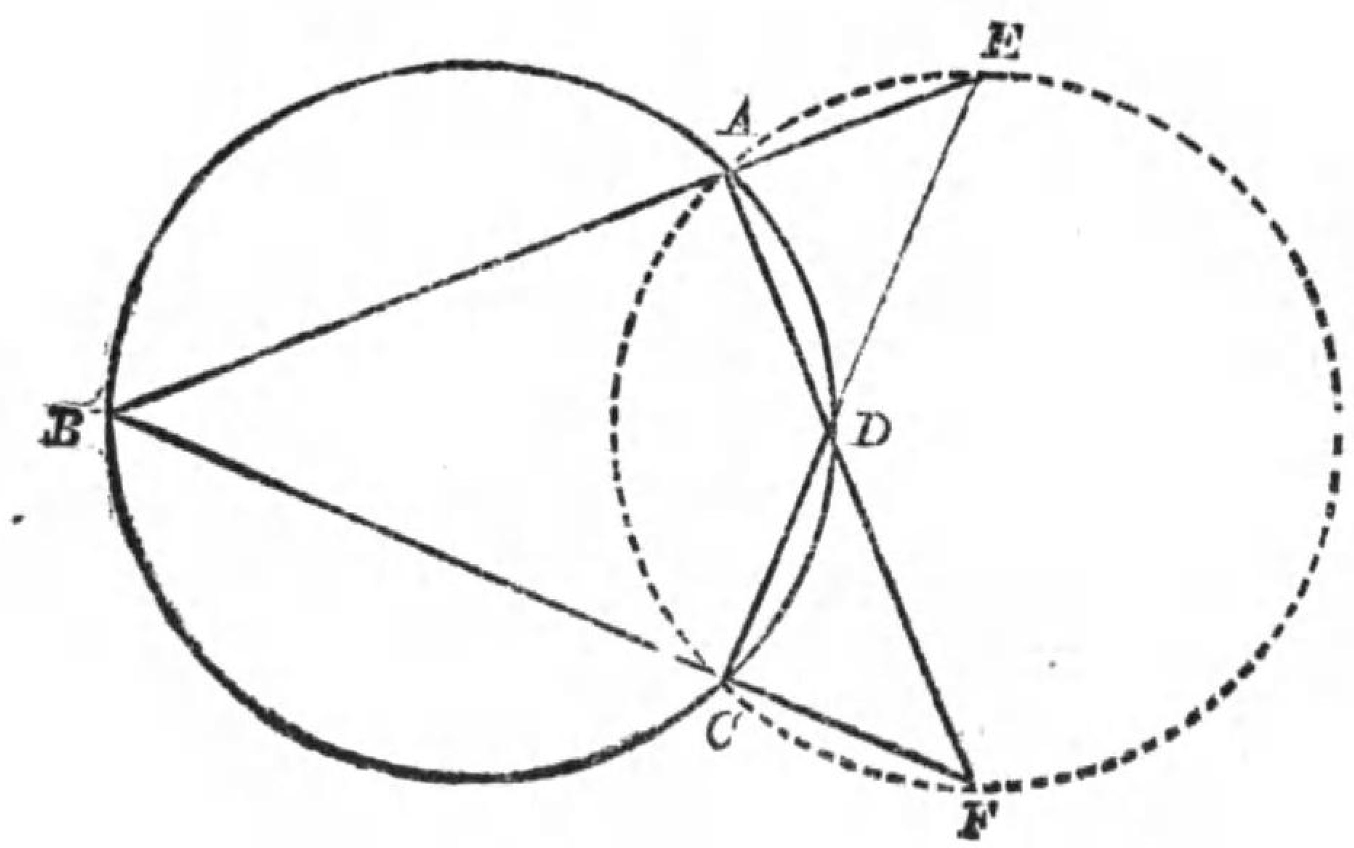
〔問　題〕

1　△ABC ノ高サ BE,CF ガ相交ル點ヲ D トスレバ,A,E,D,F ハ一圓周上ニ在リ.

2　▱ABCD ノ頂點 A,B ヲ過グル圓ガ AD ト BC 又ハ其ノ延長トニ夫々 E ト F トニ於テ交レバ, E,F,C,D ハ一圓周上ニ在リ.

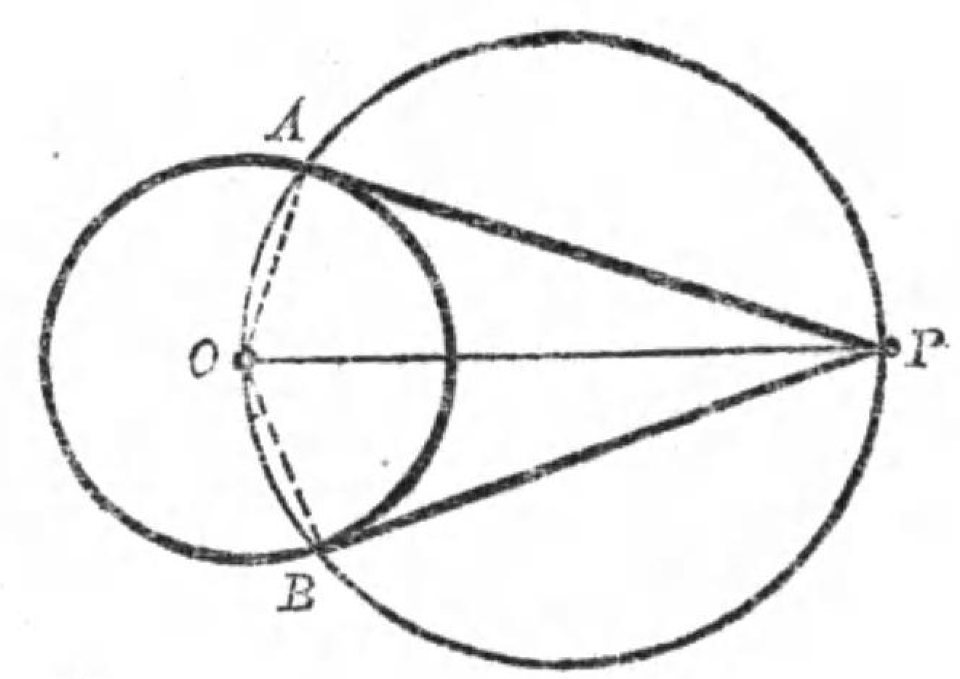
3　底 BC ノ上ニ二ツノ△ ABC, DBC ヲ書クトキハ,如何ナル場合ニ A,B,C,D ハ同圓上ニ在ルカ.

[4] 一圓ノ内接四邊形 ABCD ノ對邊 BA,CD ノ延長ガ相交ル點ヲ E,他ノ對邊 BC,AD ノ延長ガ交ル點ヲ F トスルトキ,A, E, F, C ガ一圓周上ニ在ラバ, EF ハ此圓ノ直徑ニシテ,又 BD ハ圓 ABCD ノ直徑ナリ.



第十四章　切線の作圖

166. [作圖題16] 與へられたる圓外の一點Pより之に切線を引くこと.



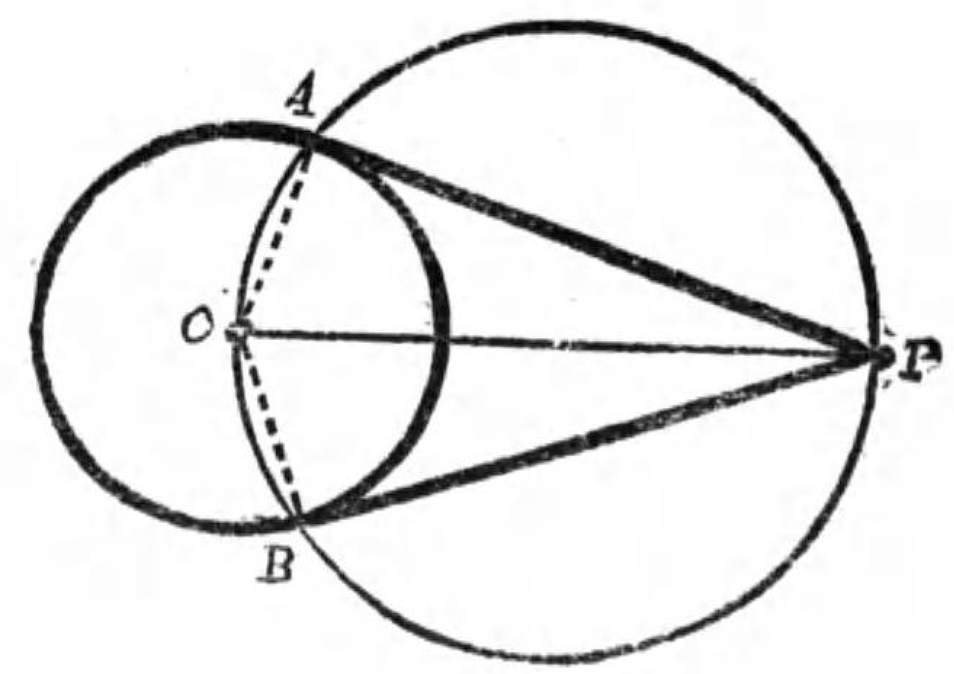
[作圖] P ト中心 O トヲ結ビ付ク.

OP ヲ直徑トシテ圓ヲ書キ,

其圓ト原ノ圓トノ交點ヲ A,B トス.

PA, PB ヲ結ビ付ク.

是レ即チ切線ナリ.



證明 OA, OB ヲ結ビ付ク.

OP ハ圓 OAP ノ直徑ナレバ,

$\angle OAP$ = 直角. 〔定理〕

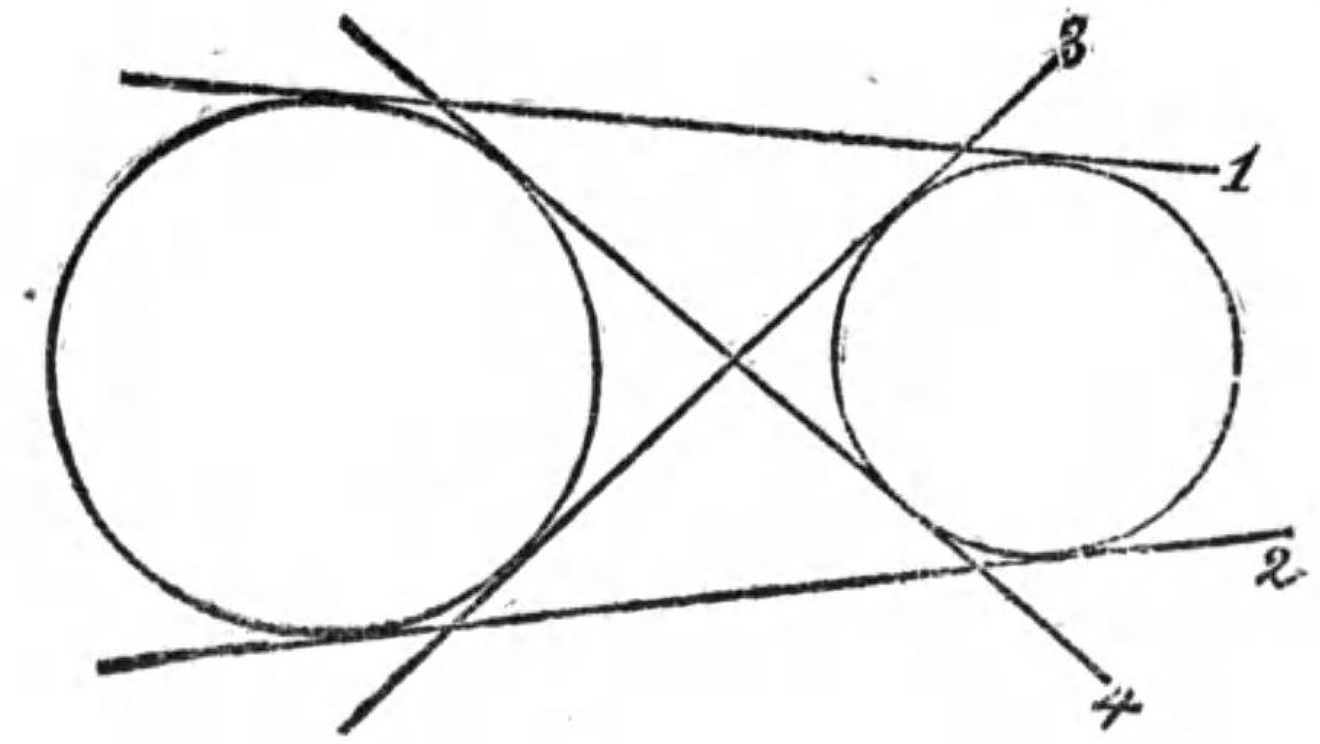
$\therefore AP \perp OA$(半徑).

故ニ AP ハ A ニ於ケル切線ナリ.

同理ニテ, BP ハ B ニ於ケル切線ナリ.

二つの圓に共通なる切線.

167. **公切線.** 一圓ガ全ク他ノ一圓ノ外ニ離レテ在ルトキハ,其兩圓ニ共通ノ切線即チ**公切線**ハ,圖ニ示スガ如ク,四ツアリ.



此四ツノ中,兩圓ノ間ニ在ルモノヲ**內公切線**ト稱シ,然ラザルモノヲ**外公切線**ト稱ス.

〔問題〕

兩圓ノ公切線ハ,次ノ場合ニ各々幾ツアルカ:

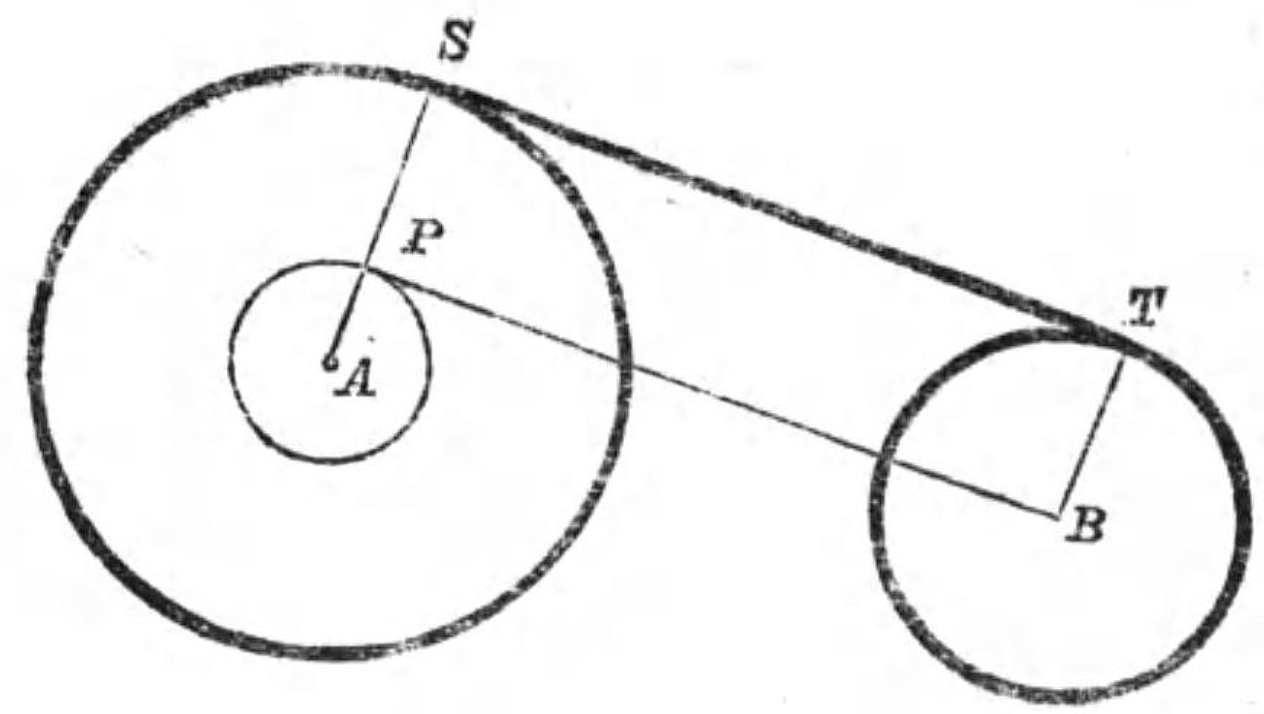
(1) 兩圓ノ外切スルトキ,

(2) 兩圓ノ內切スルトキ,

(3) 兩圓相交ルトキ,

(4) 一圓周ガ他圓周ノ內ニ離レテ在ルトキ,

168. 作圖題17 相等しからざる兩圓に外公切線を引くこと.



分析 大圓ノ中心ヲ A,小圓ノヲ B トシ,又大圓ノ半徑ヲ a,小圓ノヲ b トス.

ST ヲ公切線,S,T,ヲ其ノ切點トシ.

AS, BT ヲ引ク.

然ルトキハ,$\angle AST = \angle BTS =$ (直角)

$\therefore\ AS \parallel BT.$

B ヨリ ST ニ平行ナル BP ヲ引キ,

AS ト P ニ於テ交ラシム.

BPST ハ ▱ ナリ.

$\therefore\ PS = BT = b.$

而シテ, $AP = AS - PS = a - b.$

又 $\angle APB =$ 直角,

故ニ,A ヲ中心トシ,$(a-b)$ ヲ半徑トスル圓ヘ B ヨリ引ケル一切線ハ BP ナリ.

以上ノ分析ニ依リテ次ノ作圖法ヲ得.

作圖 大圓ノ中心 A ヲ中心トシ,兩圓ノ半徑差ヲ半徑トシテ圓ヲ畫ク.

B ヨリ此圓ヘ切線 BP ヲ引ク,

AP ヲ結ビ付ケ,之ヲ延長シテ,大圓ト S ニ於テ交ラシム.

AS ニ平行ナル半徑 BT ヲ引キ.

直線 ST ヲ引ク;

是レ兩圓ノ公切線ナリ

證明 PS, BT ハ相等シク且ツ平行ナリ.

故ニ,STBP ハ ▱ ナリ.

又,$\angle SPB$ ハ直角ナリ.

故ニ,STBP ハ □ ナリ.

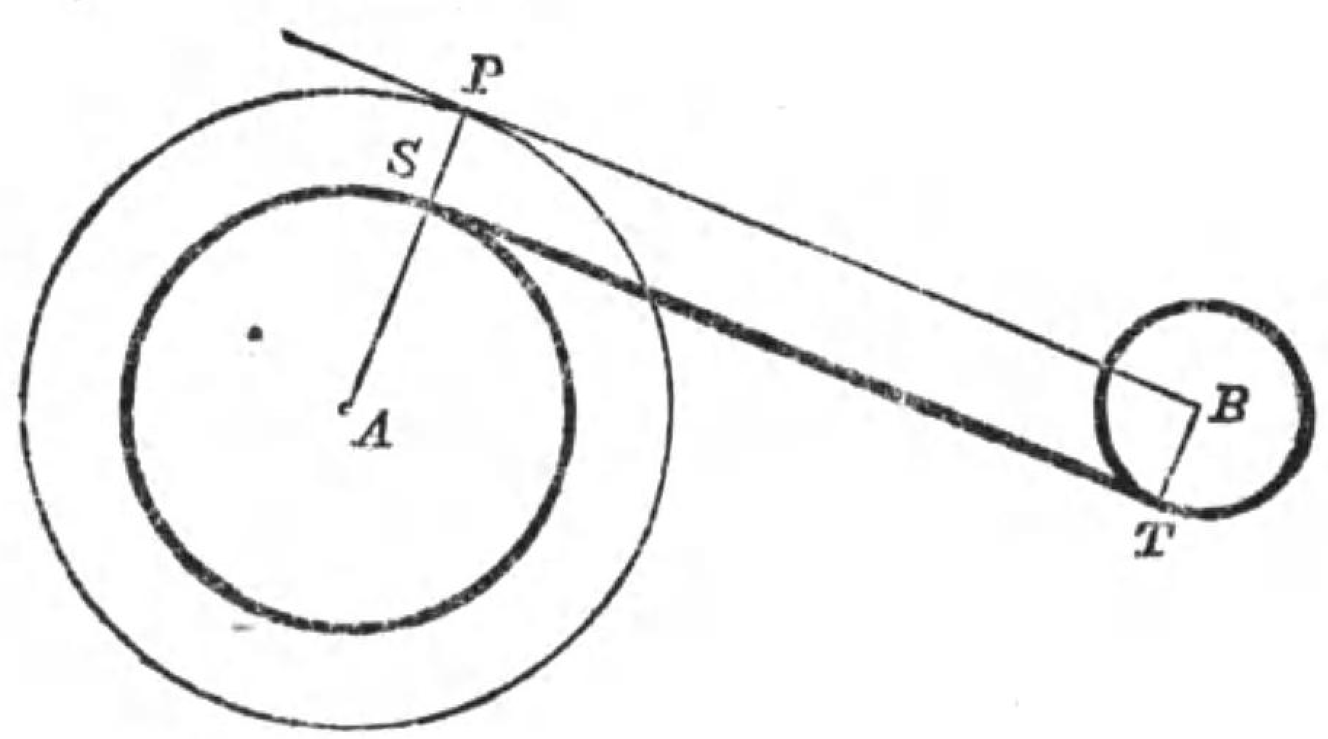
故ニ S, T ニ於ケル角ハ直角ナリ.

故ニ ST ハ兩圓ノ切線ナリ.

〔問題〕

兩圓相等シキトキ,其ノ外公切線ヲ引クコト.

169. 作圖題18 兩圓の內公切線を引くこと.



分析 兩圓ノ中心ヲ A, B,

其ノ內公切線ノ切點ヲ S, T トス.

AS, BT ヲ結ビ付ク.

∠AST=∠BTS=直角,

∴ AS ∥ BT

TS ニ平行ニ BP ヲ引キ,

AS ノ延長ト P ニ於テ交ラシム.

然ルトキハ,BTSP ハ矩形ナリ.

∴ PS=BT.

∴ AP=AS+BT.

又 ∠APB=直角.

故ニ兩圓ノ半徑ノ和ヲ半徑トシ,一方ノ中心 A ヲ中心トセル圓ヘ,中心 B ヨリ引ケル一切線ハ BP ナリ.

此分析ニ由リテ,次ノ作圖法ヲ悟リ得ベシ.

作圖 兩圓ノ一方ノ中心 A ヲ中心トシ,兩圓ノ半徑ノ和ヲ半徑トシテ圓ヲ書ク.

他ノ方ノ中心 B ヨリ之ニ切線 BP ヲ引ク.

AP ヲ結ビ,其ノ圓(A)ト交ル點ヲ S トス.

B ヨリ PA ニ平行ニ且ツ PA ノ向キニ半徑 BT ヲ引キ,ST ヲ結ビ付ク.

是レ所要ノ公切線ナリ.

證明 先ヅ,BTSP ノ矩形ナルコトヲ證明シ.

次ニ,ST ハ圓(A)ト S ニ於テ,圓(B)トニ T ニ於テ切スルコトヲ證明スレバヨシ.

〔問題〕

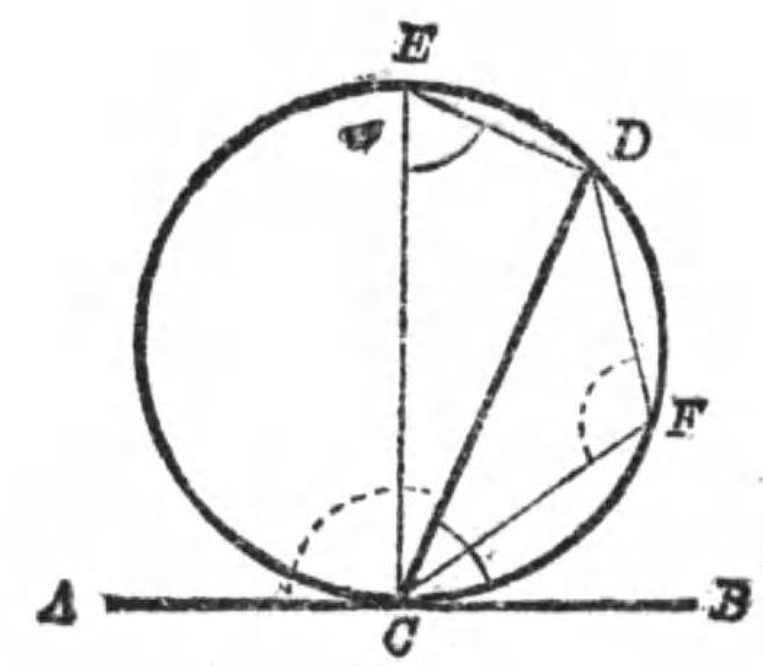
[1] 相等シキ兩圓ノ内公切線ヲ引クニ,更ニ簡便ナル方法ナキカ.

[2] 相交ル二圓ノ共通切線ヲ引クコト.

[3] 二ツノ圓ニ共通ナル切線ハ幾ツアルカ.種々ノ場合ニツキテ吟味セヨ.

第十五章　切線が切點より引ける弦となす角.

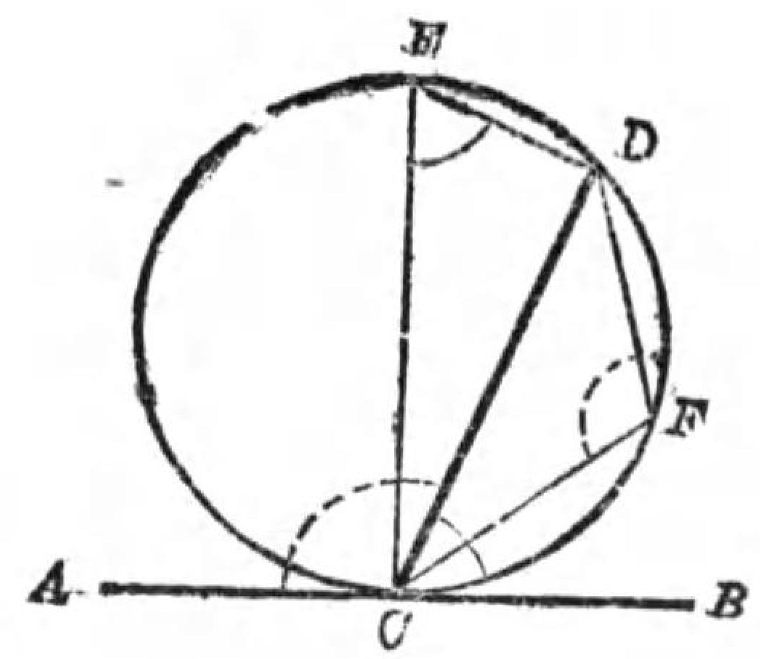
170. [定理64]　切線と其の切點より引ける弦との夾む角は,其角の外に在る弓形内の角に等し.



[前提]　圓周上ノ一點Cニ於テ切スル切線ヲABトシ,切點Cヨリ引ケル弦ヲCDトス.

求證 (第一) ∠BCD＝∠CED(弓形CED内ノ角).

(第二) ∠ACD＝∠CFD(弓形CFD内ノ角).



(第一)

作圖 CヨリAB＝垂直ナルCEヲ引キ,

圓トE＝於テ交ラシム.

DEヲ結ビ付ク.

證明 CEハ切點ヲ過ギ,切線＝垂直ナリ.

故＝CEハ直徑ナリ. 〔定理[56],系〕

故＝∠CDE＝直角. 〔定理[60]〕

故＝∠CEDハ∠DCEノ餘角ナリ.

然ル＝∠BCDモ∠DCEノ餘角ナリ.

∴ ∠BCD＝∠CED.

(第二)

作圖 弧CFDノ上＝任意ノ一點Fヲ取リ,

CF, DFヲ結ビ付ク.

證明 ∠ACDハ∠BCDノ補角ナリ.

又CEDFハ圓＝内接スル四邊形ナルヲ以テ,

∠CFDハ∠CEDノ補角ナリ. 〔定理[62]〕

然ル＝∠BCD＝∠CED. 〔既證〕

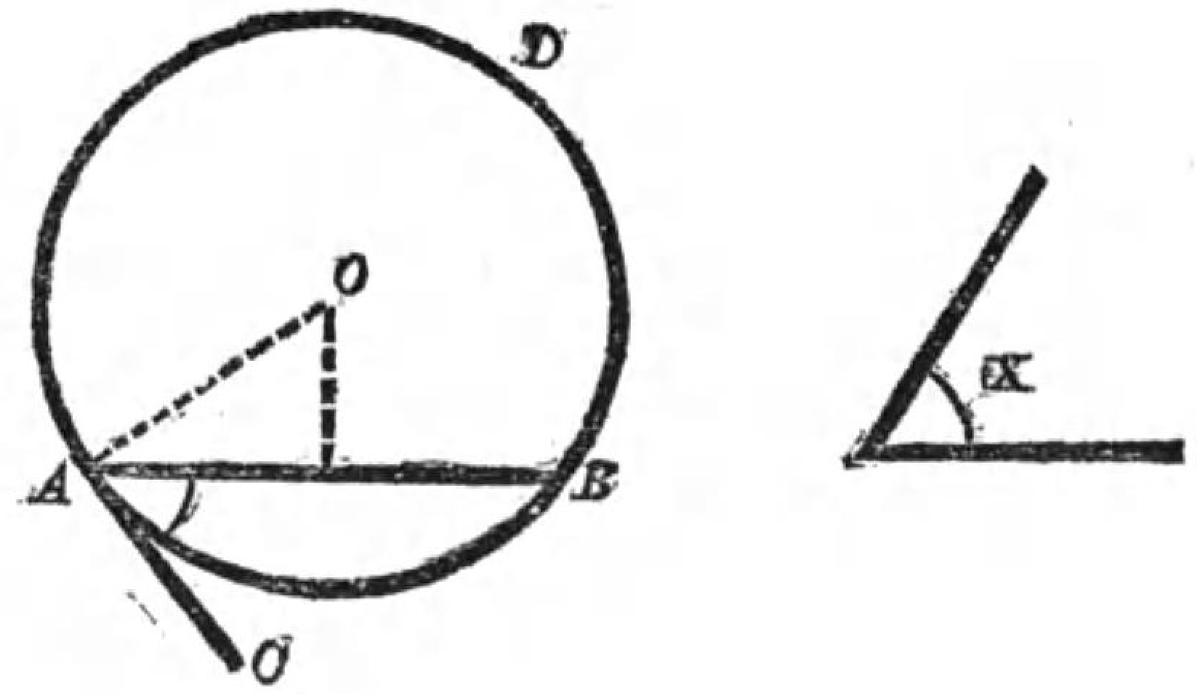
∴ ∠ACD＝∠CFD.

〔問題〕

[1] 與ヘラレタル圓周上ノ與ヘラレタル一點＝於ケル切線ヲ作ルコト. 但シ圓ノ半徑ヲ用ヒザルコトヲ要ス.

[2] 二圓ノ交點P,Qト一方ノ圓周上ノ一點Aトヲ連ヌル直線AP, AQ(又ハ其ノ延長)ガ他ノ方ト交ル點ヲB,CトスレバBCハA＝於ケル切線＝平行ナリ.

171. **作圖題19** 與へられたる直線ABを弦とし,與へられたる角Xを含む弓形を作ること.



作圖 Aニ於テ∠Xニ等シク∠BACヲ作リ, Bヲ過ギ,Aニ於テACニ切スル圓ヲ書ク.

∠CAB外ノ弓形ADBハ所要ノ弓形ナリ.

證明 弓形ADBハ,前定理ニ依リテ,BAC即チXニ等シキ角ヲ含ムニ依ル.

〔問題〕

1 底ト頂角トヲ與ヘラレテ二等邊△ヲ作ルコト.

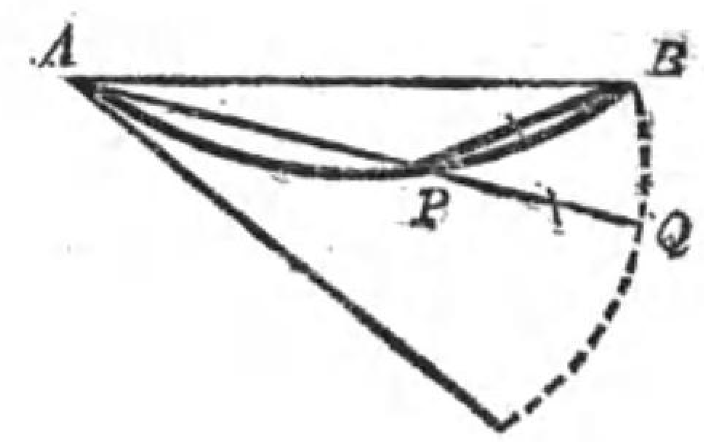
2 頂角ト,頂點ヨリ引ケル中線ト,底トヲ與ヘラレテ,三角形ヲ作ルコト.

*3 與へられたる直線の一方に在る點に於て此直線に對する角が一定せるときは,其點の軌跡は,此直線を弦とする一つの圓の弧なり.

4 圓内ノ一定點ヲ過グル弦ノ中點ノ軌跡ハ,マタ,一ツノ圓ナリ.

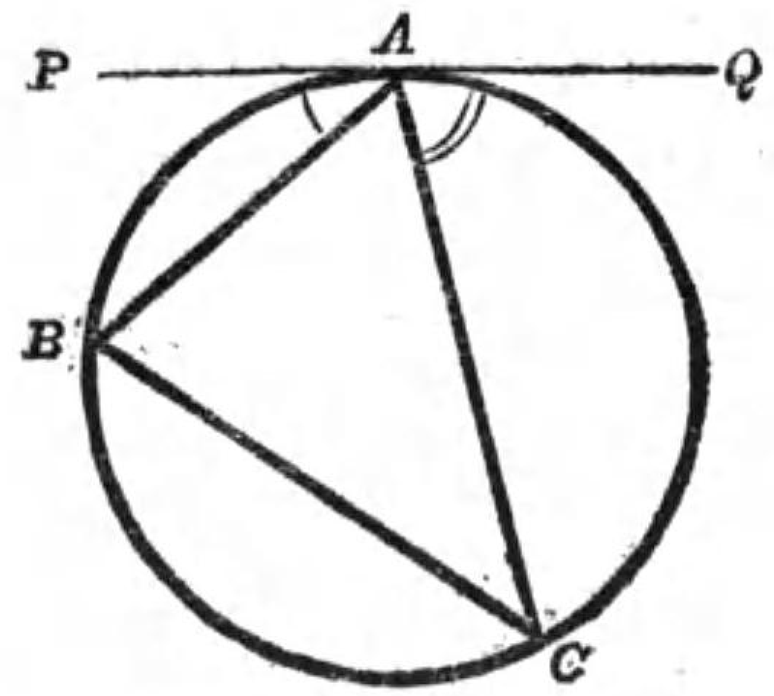
5 同底上ニ立チテ相等シキ頂角ヲ有スル諸△中,最大ナル面積ヲ有スルモノハ二等邊△ナリ.

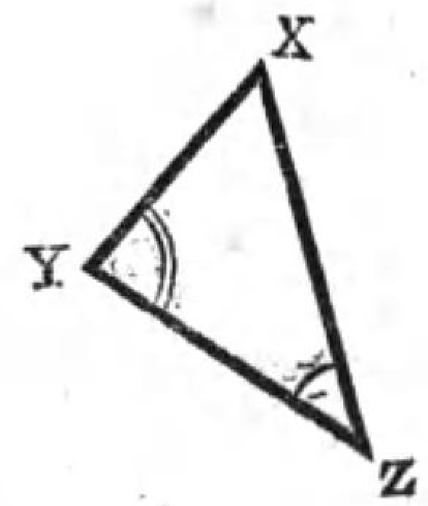
6 弧ABノ一端Aヨリ弧上ノ一點Pヘ引ケル直線APヲ,Pヨリ先ヘ延長シ,其ノ上ニPBニ等シクPQヲ取ルトキハ,Qノ軌跡ハ一ツノ圓ノ弧ナリ.



7 底ト高サト頂角トノ知レタル三角形ヲ作ルコト.

172. 作圖題20 與へられたる圓に內接し,且つ與へられたる三角形XYZと等角なる三角形を作ること.





分析 問題ハ既ニ解キ得テ,所要ノ△ABCヲ得タルモノト假定ス.

PAQヲAニ於ケル切線トス.

然ルトキハ, ∠PAB=∠ACB=∠Z,

又　∠QAC=∠ABC=∠Y.

是ニ由リテ作圖法ヲ悟リ得ベシ.

作圖 圓周上ノ一點Aニ於テ切線PAQヲ引ク.

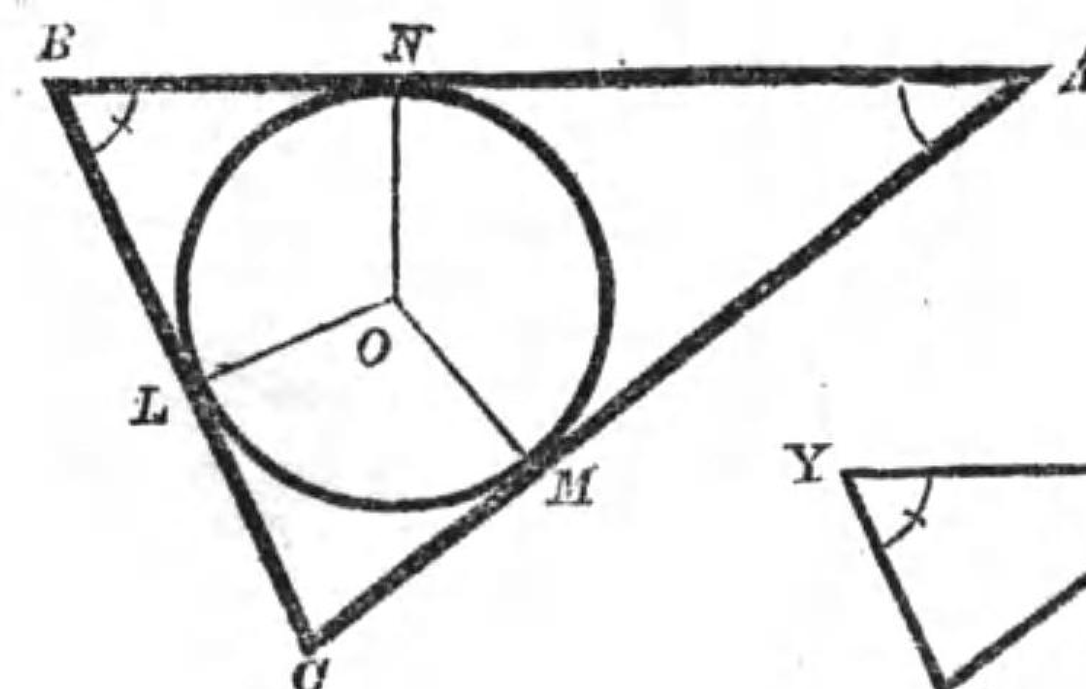
∠Zニ等シク∠PABヲ作リ,弦ABヲ引ク,

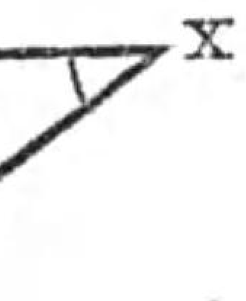
又,∠Yニ等シク∠QACヲ作リ,弦ACヲ引ク.

然ルトキハ,△ABCハ所要ノ內接△ナリ.

證明 如何.

173. 作圖題21 與へられたる圓に外接し,且つ與へられたる三角形XYZと等角なる三角形を作ること.





分析 作圖ハ既ニ成リテ,△ABCヲ得タルモノト假定ス.

切點L,M,Nヨリ半徑ヲ引ク.

然ルトキハ,∠NOMハ∠A即チ∠Xノ補角ナリ;

∠NOLハ∠B即チ∠Yノ補角ナリ.

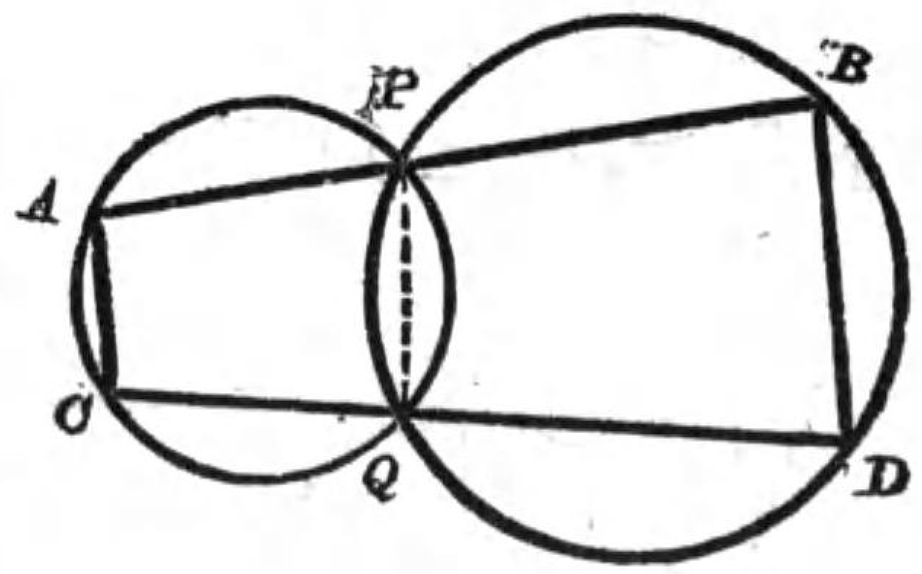
是ニ由リテ作圖法ヲ悟リ得ベシ.

練習雜題

[1] 兩圓ノ交點P, Qヲ過ギテ弦APB及ビCQDヲ引ケバ,

AC ∥ BD.

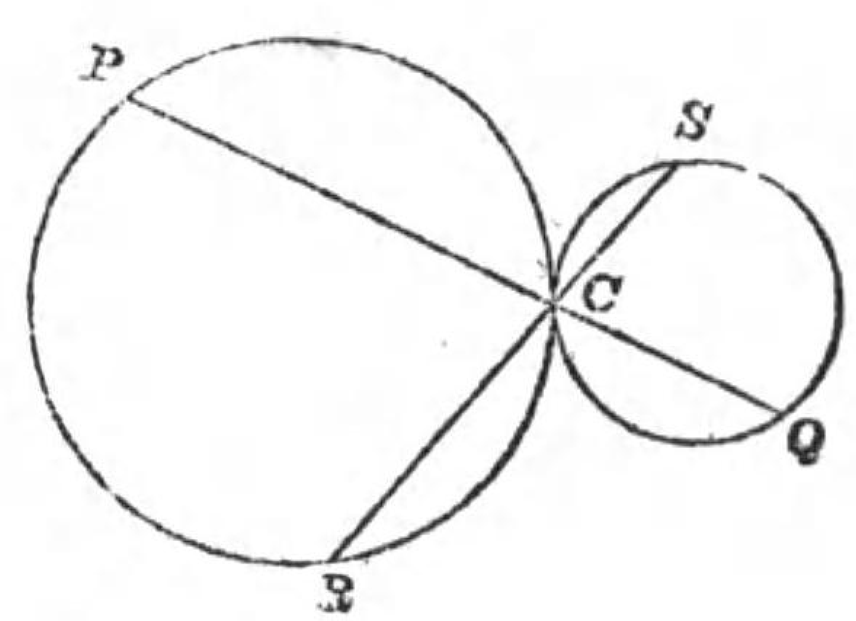
但シA,Cハ一圓周上ニ在リトス.



[2] 兩圓ノ交點ヲ過ギテ引ケル平行ナル二弦ハ相等シ.

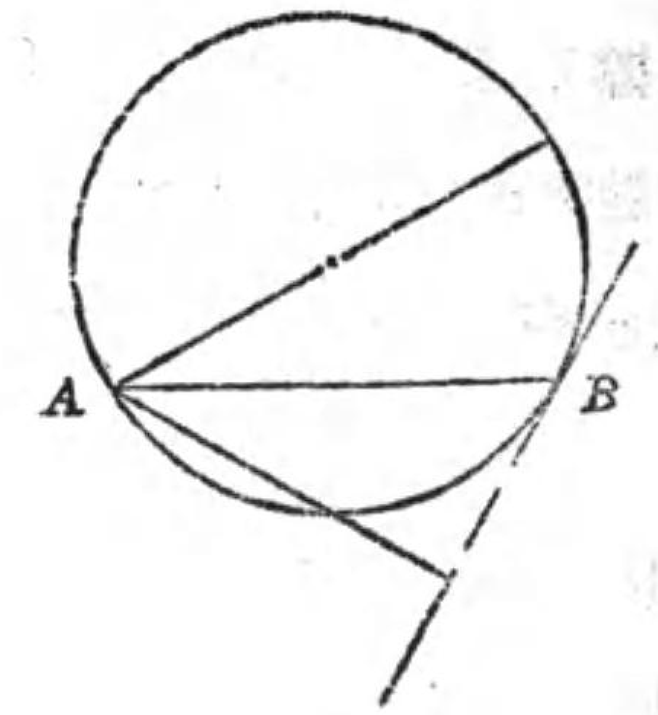
[3] 圓ニ內接スル四邊形ノ對邊ノ一對ガ相等シケレバ,他ノ一對ハ平行ナリ.

[4] 相切スル兩圓ノ切點Cヲ通リ兩圓周ニ於テ終ル直線PCQ及ビRCSヲ引ケバ, PR ∥ QS.

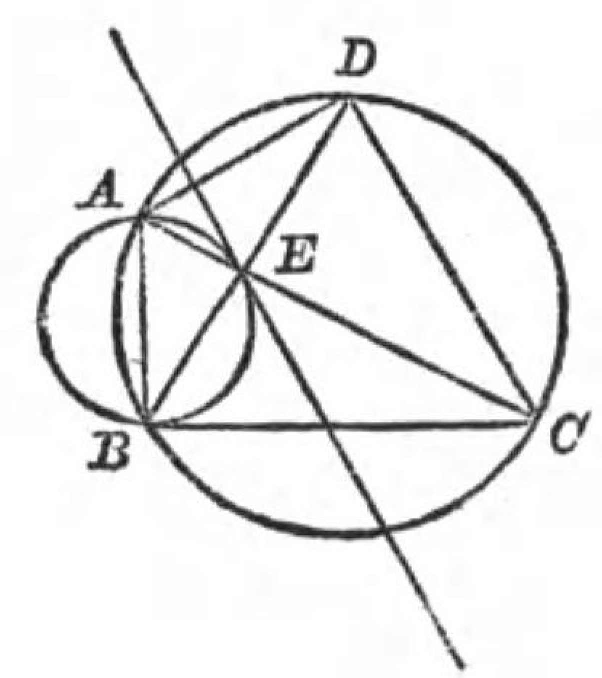


[5] 正方形ノ對角線上ノ一點ヲ通リ且ツ邊ニ平行ナル直線ガ邊ト交ル點ヲP, Q, R,Sトスレバ,此四點ハ一圓周上ニ在リ.

[6] 弦ABハ,Aニ於ケル直徑ト,Bニ於ケル切線ニ垂直ニAヨリ引ケル直線トノナス角ヲ二等分ス.



[7] 圓ニ內接スル四邊形ABCDノ對角線ノ交點EトA, Bトヲ過グル圓ヲ畫ケバ,Eニ於ケル此圓ノ切線ハCDニ平行ナリ.



第十六章　正多角形

——〔問　題〕——

[*1] 一ツの圓周上の一點に於て相等しき弧に對する角は相等し.

[*2] 一ツの圓周上の一點に於て相等しき弦に對する角は,相等しきか又は互に補角なり.

[3] 次ノ四邊形ノ名稱ヲ問フ.

(甲) 等邊ナレドモ等角ナラザルモノ,

(乙) 等角ナレドモ等邊ナラザルモノ,

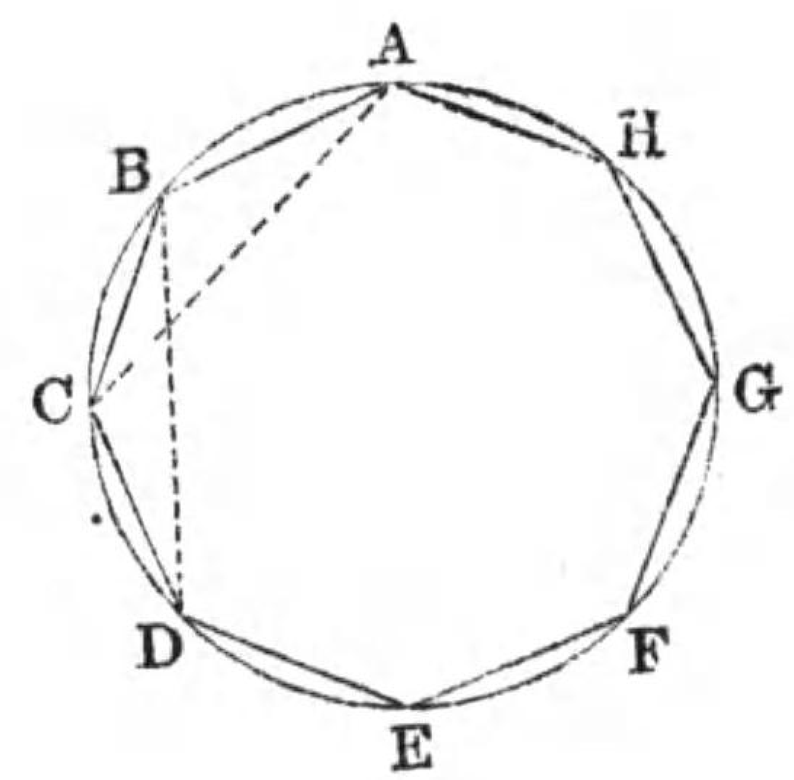
(丙) 等邊ニシテ且ツ等角ナルモノ.

[4] 正五角形ノ諸頂點ヨリ等距離ナル點ハ一ツアリ.

[5] 正五角形 ABCDE ニ於テ AC, AD ハ角 A ヲ三等分ス. 又, CD ∥ BE.

[6] 正五角形ノ一ツノ頂點ニ於クル外接圓ノ切線ハ其ノ對邊ニ平行ナリ.

174. [定理65] 圓周を n 箇の相等しき弧に分つときは,其の分點は內接正 n 角形の頂點なり.



[前提] 圓周ヲ A, B, C, D,…… ニ於テ n 等分ス.

相隣レル分點ヲ結ビ付クル弦 AB, BC, CD,……ヲ引キ,

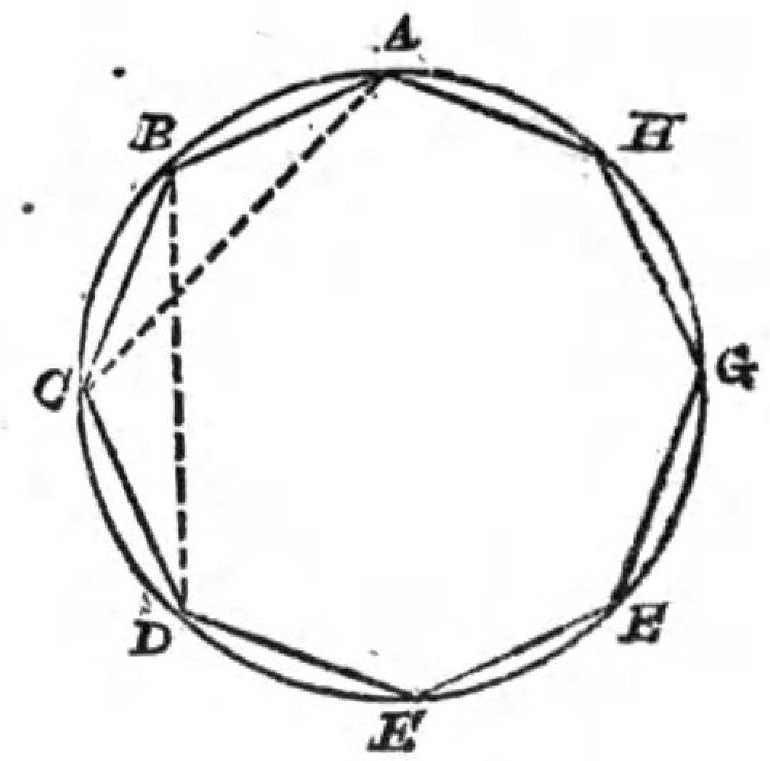
內接 n 角形 ABCD…… ヲ作ル.

[求證] ABCD…… ハ正多角形ナリ.

[證明] $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$,…… ハ相等シ,

故ニ. AB, BC, CD,……モ相等シ.

〔頁 179,問題1〕



故ニ ABCD……ハ等邊多角形ナリ.

次ニ $\overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{CD}$,

兩方ニ $\overset{\frown}{BC}$ ヲ加フレバ,

$\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{BCD}$

$\therefore\ \angle ABC = \angle BCD$

(相等シキ弓形內ノ角).　〔定理

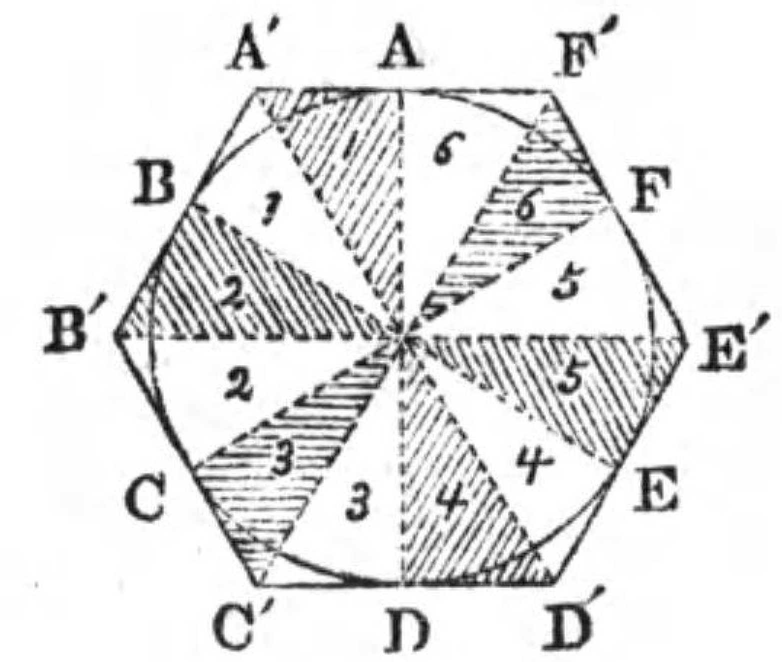
同理ニテ, ABCD……ノ諸角皆相等シ.

即チ ABCD……ハ等角多角形ナリ.

斯ク等邊ニシテ且ツ等角ナリ.

故ニ ABCD……ハ正多角形ナリ.

175. [定理66] **圓周を n 箇の相等しき弧に分ち,其の各分點に於て切線を引くときは,其切線は外接正多角形の邊なり.**

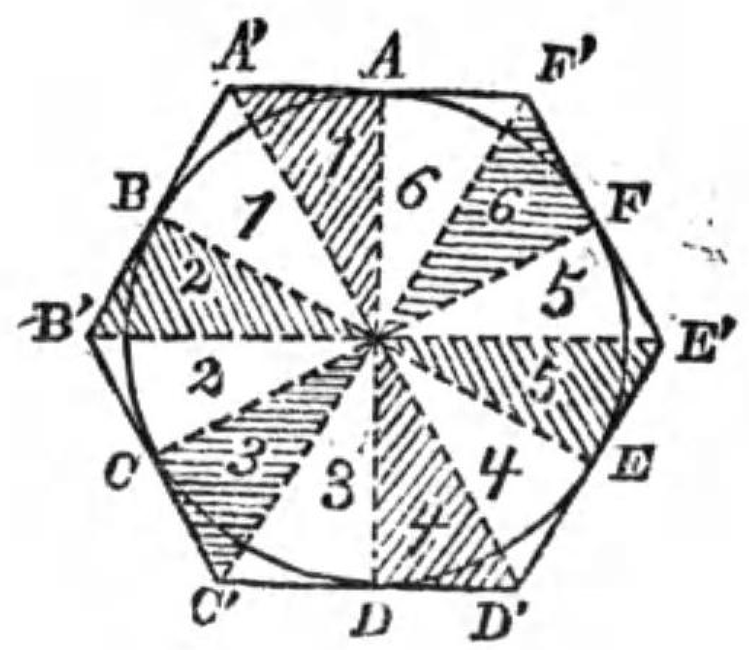


[前提] 圓周ヲ A, B, C, D,…… ニ於テ n 等分シ,分點 A, B, C, D,…… ニ於ケル切線ノ作ル外接 n 角形ヲ A′B′C′D′…… トス.

[求證] A′B′C′D′…… ハ正多角形ナリ.

[作圖] A, B, C,…… 及ビ A′, B′, C′,…… ヲ夫々中心 O ニ結ビ付ク.

[證明] 次ノ如キ順序ニ證明セラル.



第一. 同數字ヲ記セル隣接△ハ相等シ.

第二. 異 〃 〃 〃

第三. 故ニ數字ヲ記セル△ハ皆相等シ.

第四. 故ニ A'B'C'D'…… ハ等邊 n 角形ナリ.

第五. 且ツ A'B'C'D'…… ハ等角 n 角形ナリ.

故ニ A'B'C'D'…… ハ正 n 角形ナリ.

〔問題〕

[1] 一ツノ圓ニ外接スル正方形ノ面積ハ,同ジ圓ニ內接スル正方形ノ面積ノ二倍ナリ.

[2] 一ツノ圓ノ外接正三角形ノ一邊ハ同圓ノ內接正三角形ノ一邊ノ二倍ナリ.

[3] 正 n 角形ノ一頂點ト他ノ諸頂點トヲ結ビ付クル直線ハ初メノ頂點ニ於ケル n 角形ノ角ヲ $(n-2)$ 等分ス.

[4] 圓ニ外接スル等角多角形ハ即チ正多角形ナリ.

[5] 圓ニ內接スル等角多角形ニシテ正多角形ニアラザルモノノ一例ヲ示セ.

[6] 正 n 角形ノ外角ハ其ノ一邊ガ內接圓ノ中心ニ於テ張ル角ニ等シ.

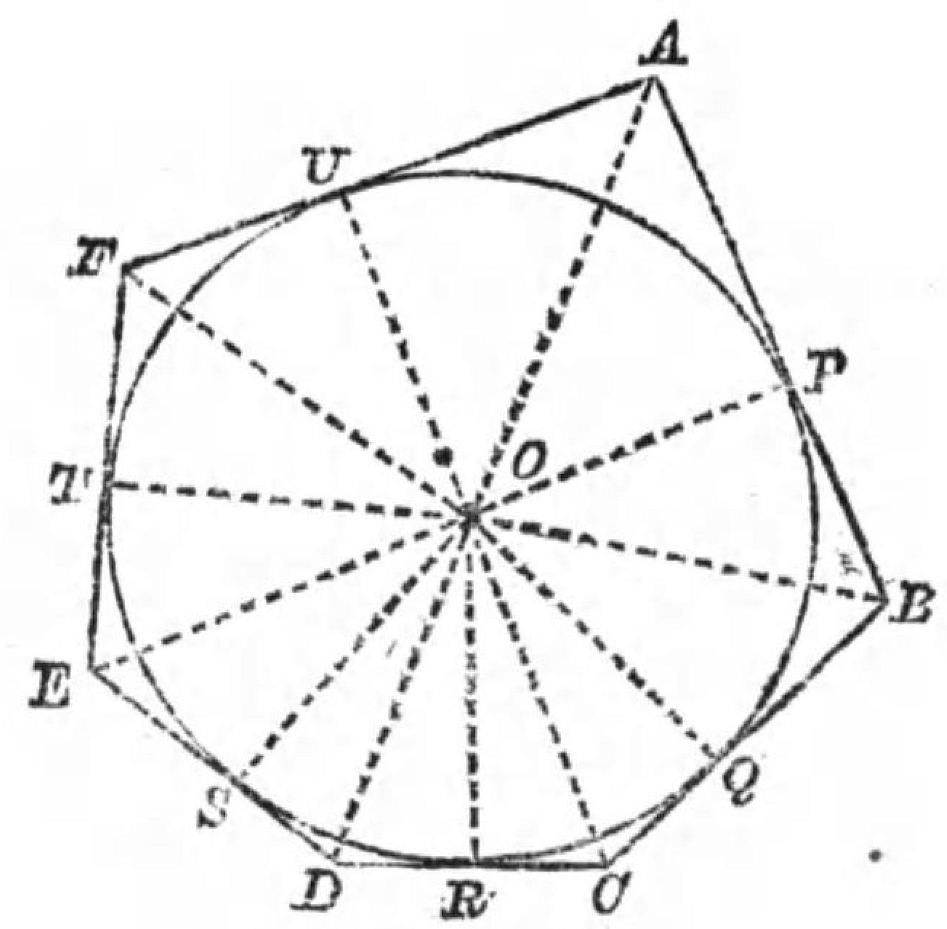
[7] 圓ニ外接スル等邊多角形ハ等角多角形ナルカ.

[8] 圓ニ外接スル正六角形ノ面積ヲ問フ.

[9] 〃 〃 周ヲ問フ.

[10] 圓ニ內接スル正六角形ノ面積ハ內接正三角形ノ面積ノ二倍ナリ.

176. 定理67 圓の外接多角形の面積は,其の周と圓の半徑との積の半分なり.



前提 ABCD……… ハ圓ニ外接スル多角形ナリ.
圓ノ中心ヲO,其ノ半徑ヲrトス.

求證 ABCD……$=\frac{1}{2}r.$(周).

作圖 OヲA, B, C, D, …… ニ結ビ,
又OヲP, Q, R, S, …… ニ結ブ.

證明 $\triangle OAB=\frac{1}{2}OP.AB.$ 〔定理35〕

即チ $\triangle OAB=\frac{1}{2}r.AB.$

同理ニテ, $\triangle OBC=\frac{1}{2}r.BC,$

$\triangle OCD=\frac{1}{2}r.CD,$

………………………

$\therefore$ ABCD……$=\frac{1}{2}r.(AB+BC+CD+\cdots)$

$=\frac{1}{2}r.$(周).

〔問題〕

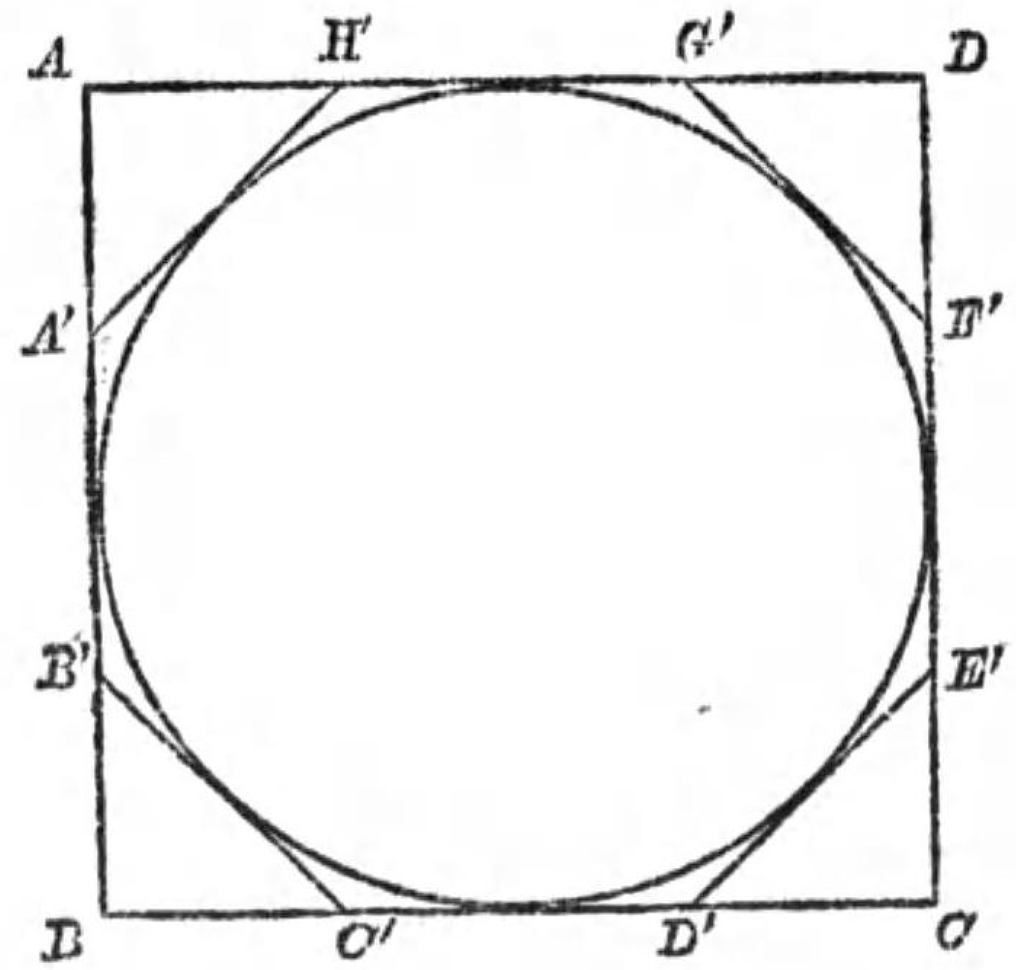
1 圓ニ外接スル正方形ノ面積ハ內接正方形ノ幾倍ニ當ルカ.

2 外接正六角形ノ面積ガR平方寸ナルトキハ,圓ノ半徑ハ何寸ナルカ.

3 外接正方形ノ面積ガP平方寸ナルトキハ,圓ノ半徑ハ何寸ナルカ.

177. 圓の面積.

圓の面積は圓周と半徑との積の半分なり.



圓ニ外接スル正方形 ABCD ヲ書ク.

次ニ ABCD ノ各角內ニ於テ切線ヲ引キテ,外接正八角形 A′B′C′D′…… ヲ書ク.

次第ニ此ノ如クニシテ,外接正十六角形,外接正三十二角形,…ヲ書ク.

此等ノ諸多角形ノ面積ハ次第ニ減少シ,益々圓ノ面積ニ近ヅク.

故ニ圓ノ面積ハ,外接正多角形ノ邊數無限ニ多キモノヽ面積ト見テ計算セラル. 乃チ,

(圓)=(邊數限リナク多キ外接正多角形)

$=\frac{1}{2}.r.$(此多角形ノ周) 〔前定理〕

玆ニ r ハ圓ノ半徑ヲ表ハス.

然ルニ外接正多角形ノ周ノ長サモ,邊數ノ多クナルニ從ヒテ次第ニ圓周ノ長サニ近ヅク.

$\therefore$ (圓)$=\frac{1}{2}.r.$(圓周)

$=\pi r^2$

$\because$ (圓周)$=2\pi r$

〔問題〕

$\boxed{1}$ 半徑 r ナル圓ニ於テ,弧ノ長サ a ナル扇形ノ面積ハ何程ナルカ.

$\boxed{2}$ 半徑 r ナル圓ニ於テ,弧ノ長サ a ナル弓形ノ面積ハ何程ナルカ. 但シ其弧ニ對スル弦ノ長サヲ k トスベシ.

練習雜題

[1] 直角ヲ三等分スルコト.

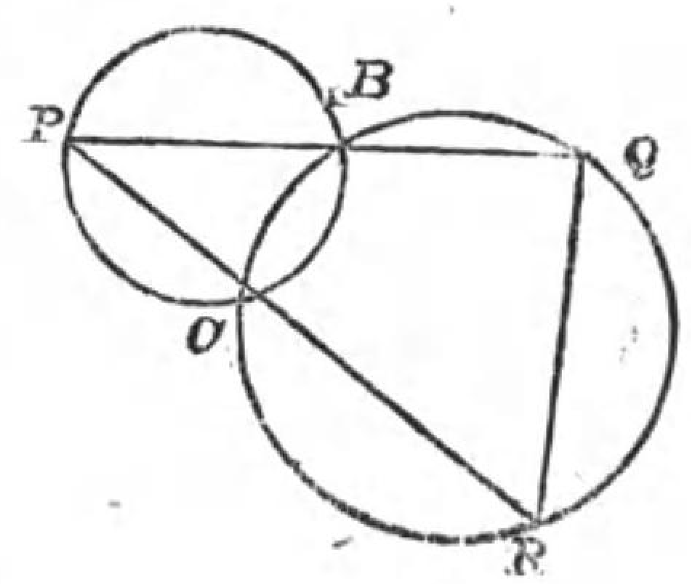
[2] 弧 AB 上ノ一點ヲ P トスレバ, ∠APB ノ二等分線ハ,其P ノ位置ニ拘ラズ,必ズ一定點ヲ通ル.

[3] 圓周上ニ與ヘラレタル二點ヨリ平行ニシテ且ツ相等シキ弦ヲ引クコト.

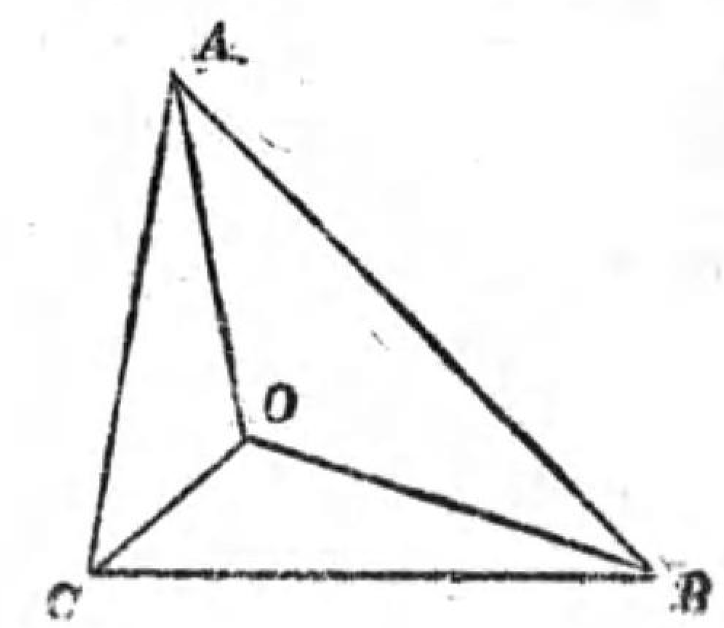
[4] 二等邊△ノ底ト內接圓ノ半徑トヲ與ヘラレテ,其三角形ヲ作ルコト.

[5] 圓周上ニ與ヘラレタル一點ヨリ,與ヘラレタル弦ニテ二等分セラルヽ弦ヲ引クコト.

[6] 二圓ノ交點ヲ B, C トシ,其ノ一方ノ圓周上ノ一點ヲ P トシ, PB, PC (又ハ其ノ延長)ガ他ノ方ノ圓ト交ル點ヲ夫々 Q,R トスレバ, P ノ位置ニ拘ラズ,弦 QR ノ長サハ一定セリ.

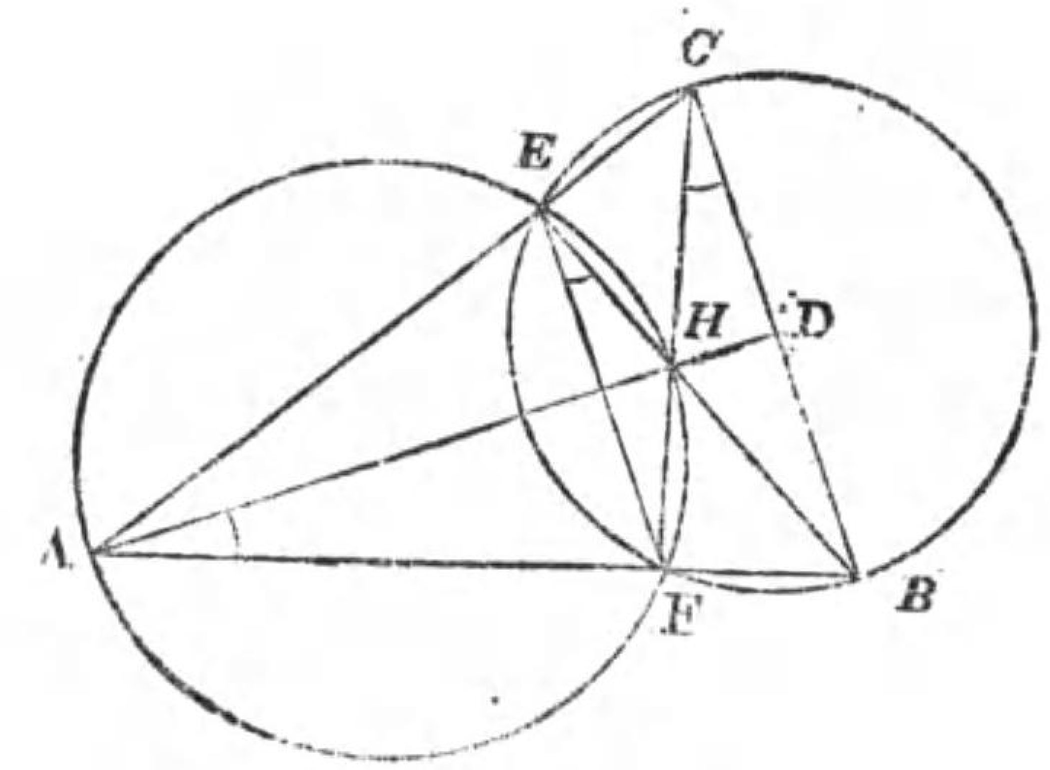


[7] 一ツノ三角形內ニ於テ,其ノ三邊ニ對スル角ノ相等シキ點ヲ求ムルコト.



(其角ノ 120° ナルコトニ注意セヨ.)

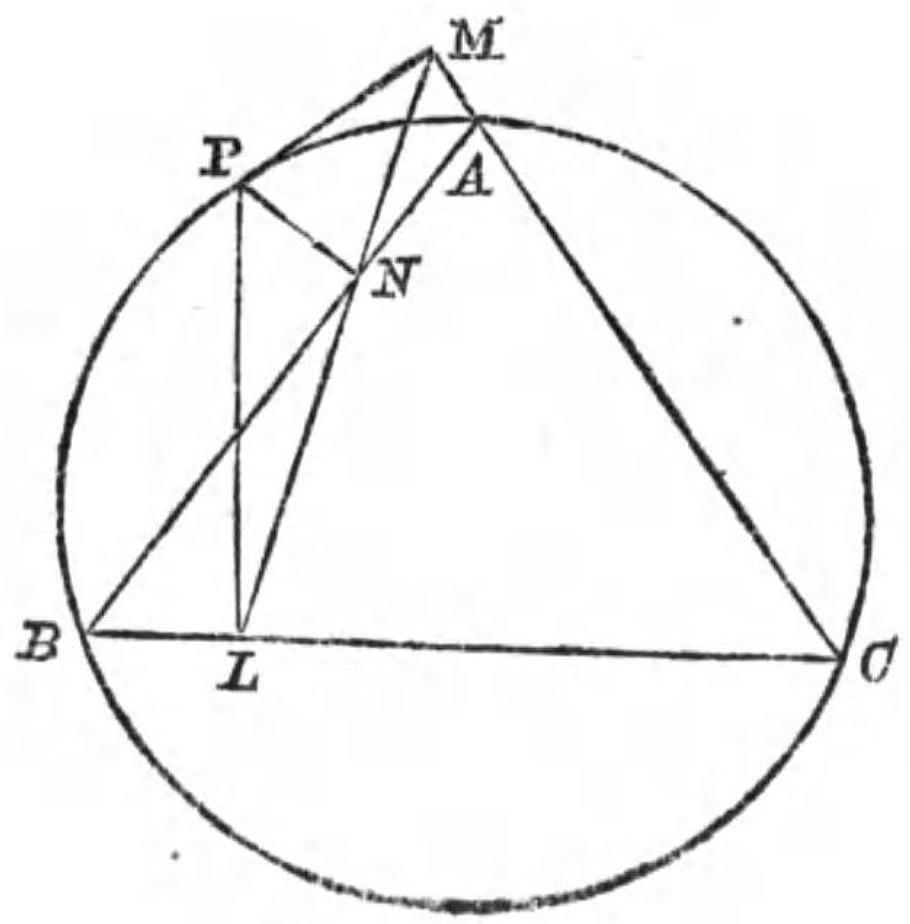
[8] △ABC ノ二ツノ高サ BE, CF ノ交點ヲ H トシ, AH ノ延長ト BC トノ交點ヲ D トスレバ, A,F,D,C ハ一圓周上ニ在リ.



(圖ノ如ク兩圓ヲ畫キ,記號ヲ附シタル角ノ相等シキコトニ注意セヨ.)

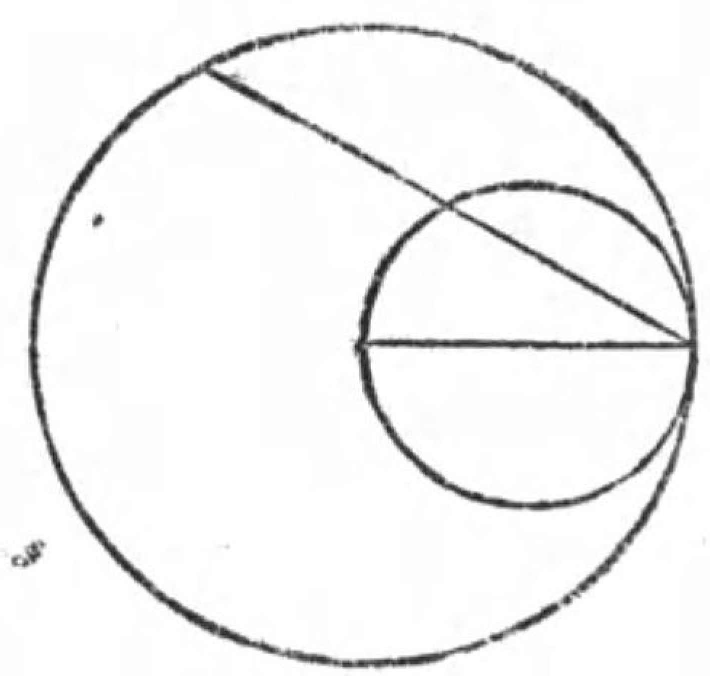
[9] 三角形ノ三ツノ高サハ一點ニ於テ相會ス.

10 △ABC ノ外接圓周上ノ一點 P ヨリ,其ノ邊 BC, CA, AB ヘ下セル垂線ヲ夫々 PL, PM, PN トスレバ, L, M, N ハ一直線上ニ在リ.

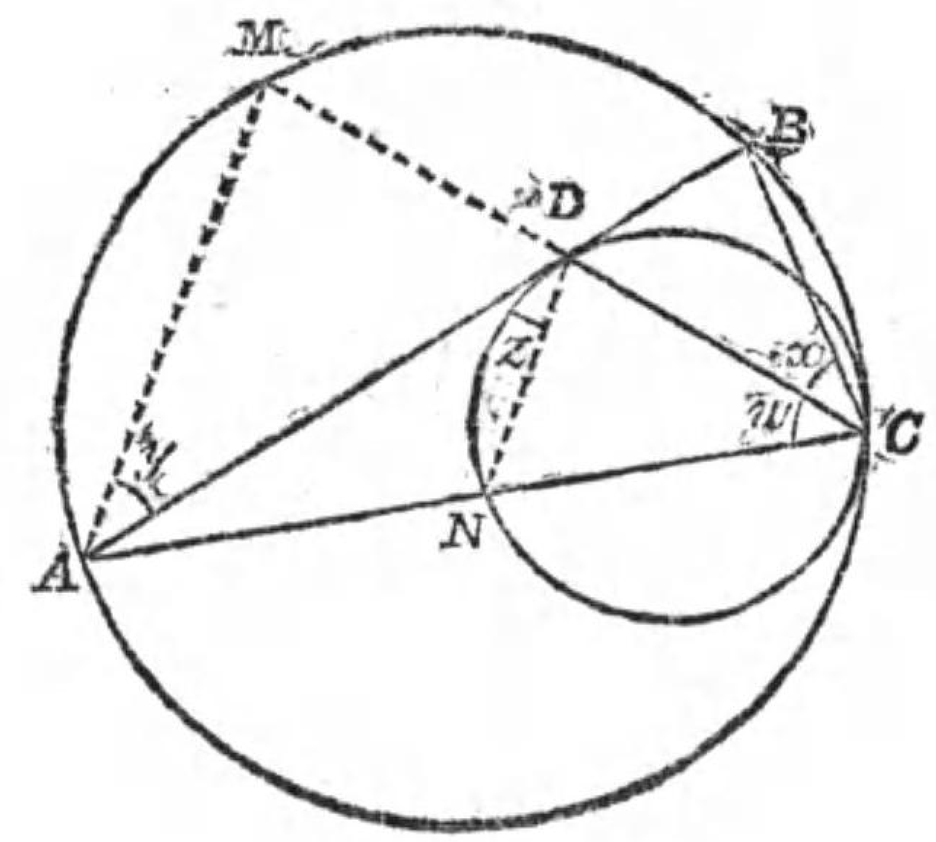


(∠PNL モ ∠PAC モ ∠PBC ノ補角ナルコト,及ビ ∠PNM=∠PAM ナルコトニ注意スベシ).

11 内切スル兩圓ノ一方ノ半徑ガ他ノ方ノ直徑ニ等シキトキハ,其ノ切點ヨリ引ケル大圓ノ弦ハ總テ小圓周ニ於テ二等分セラル.



12 C ニ於テ内切スル二圓ノ小ナル方ト D ニ於テ切スル大ナル方ノ弦ヲ AB トスレバ,CD ハ∠ACB ヲ二等分ス.



(AM ∥ ND ナルコト,及ビ $\angle x=\angle y$, $\angle y=\angle z$, $\angle z=\angle w$ ナルコトニ注意スベシ).

第十七章　比及び比例**

**比及ビ比例ニ關スル說明ハ,之ヲ代數學ニ讓リ,其ノ結果ノミヲ次ニ揭グ.

I.　$a:b=c:d$　ナルトキハ,

$ad=bc.$

II.　$ad=bc$　ナルトキハ,

$a:b=c:d.$

III.　$a:b=c:d$　ナルトキハ,

$a:c=b:d,$

IV.　$a:b=c:d$　ナルトキハ,

$d:c=b:a.$

V.　$a:b=c:d$　ナルトキハ,

$a\pm b : b = c\pm d : d.$

178. 內分,外分.

一ツノ直線AB上ニ一點Pヲ取レバ,ABハ(分點)Pニ於テ比(PA:PB)ニ**內分**セラルト云フ.

ABノ延長上ニ一點Pヲ取ルトキハ,ABハ(分點)Pニ於テ比(PA:PB)ニ**外分**セラルト云フ.

〔問　題〕

$\boxed{1}$　直線ABヲ比(1:1)ニ內分スルコト.

$\boxed{2}$　直線ABヲ比(2:1)ニ內分スルコト.

$\boxed{3}$　直線ABヲ比(2:1)ニ外分スルコト.

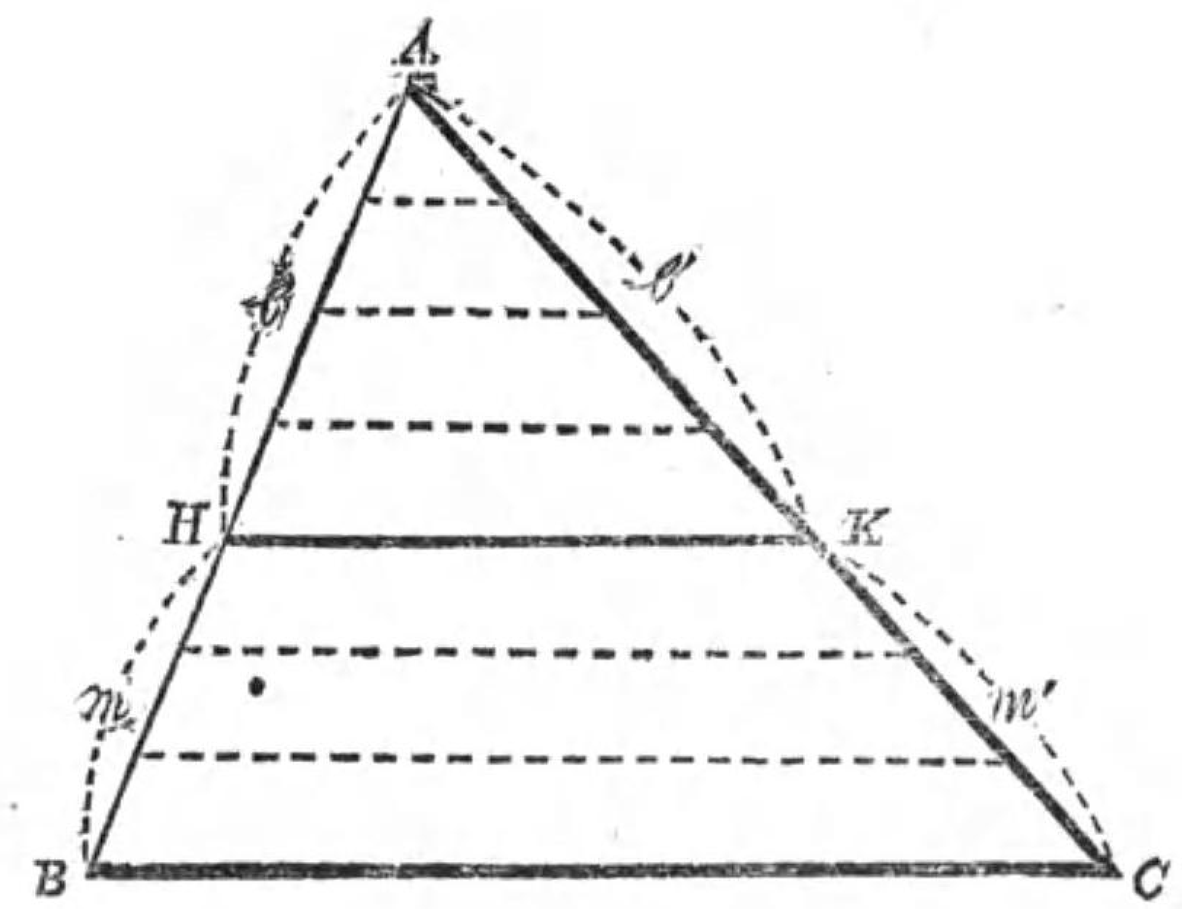
$\boxed{4}$　三角形ノ一邊ノ中點ヲ通リ底ニ平行ナル直線ハ第三邊ヲ比(1:1)ニ內分ス,

VI.
$$\left.\begin{aligned} &a:x\\ &=b:y\\ &=c:z\\ &\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\text{ナルトキハ,}$$

$$(a+b+c+\cdots):(x+y+z+\cdots)$$
$$=a:x$$
$$=b:y=\cdots.$$

179. 定理68 三角形ABC の底 BC に平行なる直線 HK が, AB, AC に交る點を夫々 H,K とすれば.

AH : AB=AK : AC.



證明 例へバ, AH : AB=4 : 7 トス.

サテ, AB ヲ 7 片ニ等分スレバ, AH ハ其ノ 4 片ヲ含ムベシ.

各分點ヲ通リ BC ニ平行ナル直線ヲ引ク.

其直線ハ AB ヲ 7 片ニ等分ス.

∴ AC ヲモ 7 片ニ等分ス. 〔定理31〕

而シテ AC ハ其7片, AK ハ其 4 片ヲ含ム.

∴ AK : AC=4 : 7,

∴ AH : AB=AK : AC.

180. 系

[1] 三角形の一邊に平行なる一つの直線は, 他の二邊を相等しき比に分つ.

證明 AH : AB=AK : AC, 〔本定理〕

即チ $l:l+m = l':l'+m'$,

$\therefore\ l+m:l = l'+m':l'$,

$\therefore\ m:l = m':l'$,

或ハ $l:m = l':m'$.

[2] 若干の平行線は二つの直線を相等しき比に分つ.

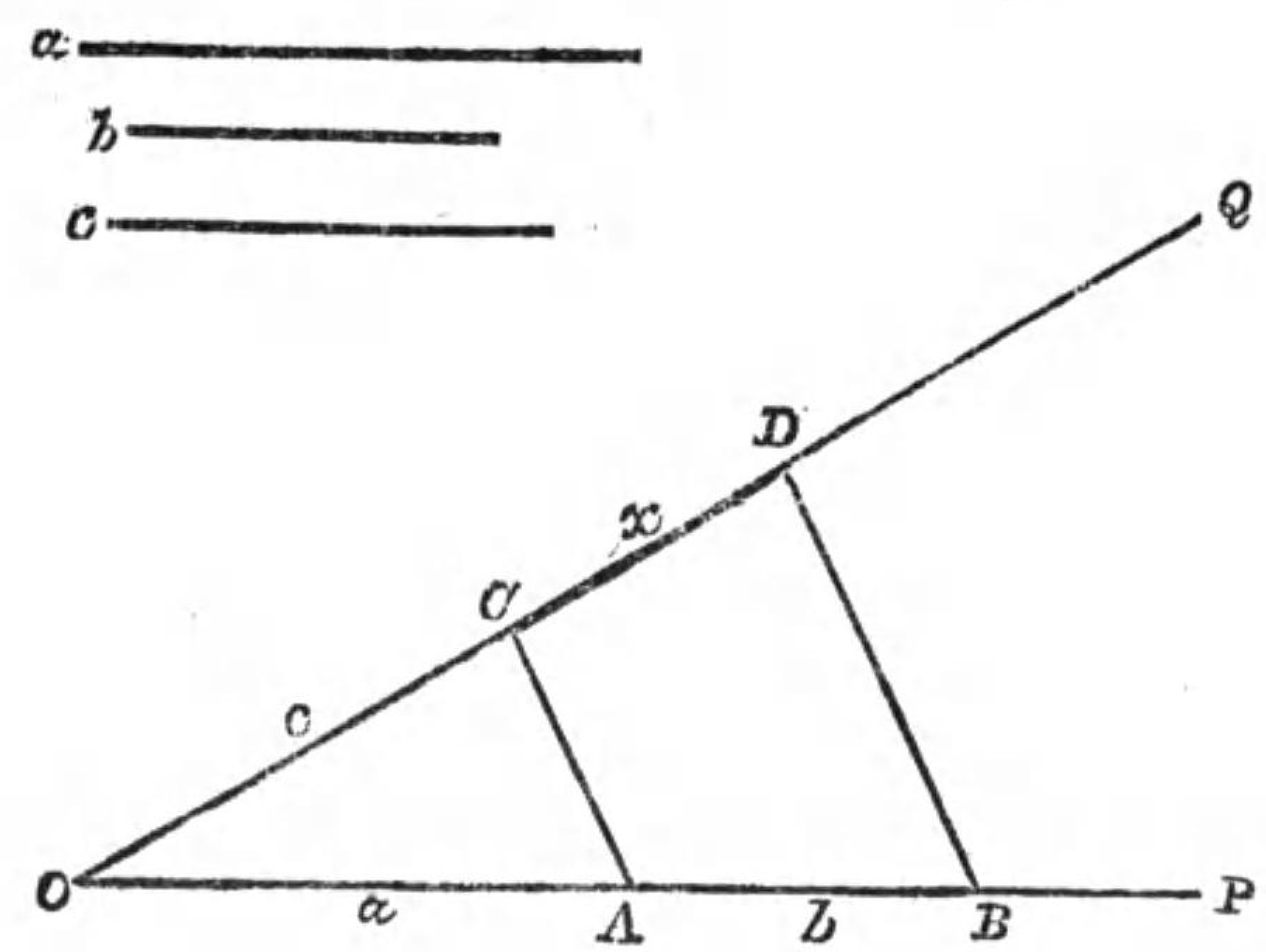
注意 定理68ノ證明ハ HK ガ, 兩邊ヲ頂點ノ先ヘ延長セルモノト交ルトキニモ, 又底ノ方ヘ延長セルモノト交ルトキニモ, 一様ニ當篏マル.

〔問題〕

[1] 一ツノ直線ヲ比 3:5 ニ分ツコト.

[2] 一ツノ直線ヲ與ヘラレタル二直線 p, q ノ比ニ分ツコト.

181. 作圖題22 與へられたる三直線の第四比例項**を求むること



a, b, c ヲ與ヘラレタル三直線トス.

作圖　OP 上ニ於テ,a ニ等シク OA ヲ,
b ニ等シク AB ヲ,
又 OQ 上ニ c ニ等シク OC ヲ作ル.
AC ヲ結ビ付ク.

** $a:b=c:x$ ナルトキ,x ヲ稱シテ a, b, c ノ第四比例項トイフ.

AC ニ平行ニ BD ヲ引キ,
OQ ト D ニ於テ交ラシム.

然ルトキハ,CD(x) ハ a, b, c ノ第四比例項ナリ.

證明　AC ∥ BD,　〔作圖〕
故ニ　$a:b=c:x$.　〔前定理〕

〔問　題〕

[*1] 與へられたる二直線の第三比例項*を求むること.

[2] 長サノ比 3:4:5 ニ等シキ三直線ノ第四比例項ヲ作ルコト

[3] 直線 AB ガ二點 P, Q ニ於テ三分セラルヽトキ,他ノ與ヘラレタル直線 CD ヲ AB ト同樣ニ分ツコト。

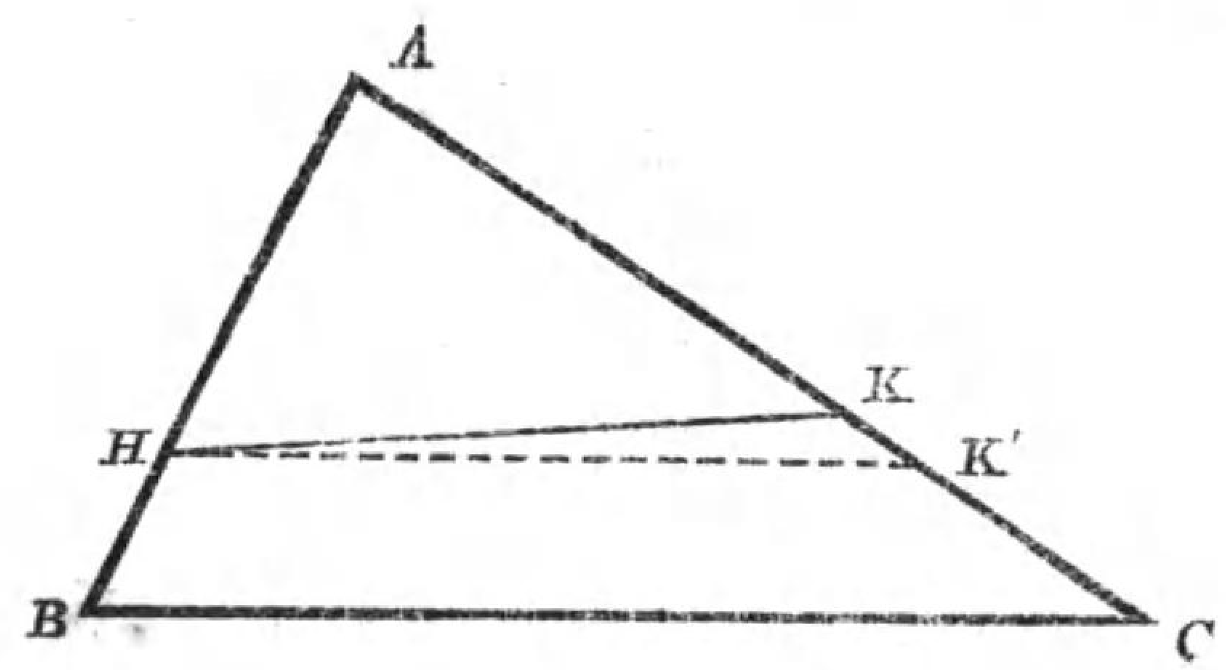
* $a:b=b:x$ ナルトキハ,x ヲ稱シテ a, b ノ第三比例項トイフ.

182. 定理69　三角形 ABC の邊 AB, AC が H, K に於て分たれ,

$$AH : AB = AK : AC$$

なるときは, KH は BC に平行なり.

(定理68の逆).



作圖　BC ニ平行ニ HK′ ヲ引ク.

求證　HK ト HK′ トハ相合ス.

證明　$HK' \parallel BC$,　〔作圖〕

故ニ $AH : AB = AK' : AC$.　〔定理68〕

然ルニ $AH : AB = AK : AC$,　〔前提〕

$\therefore$ $AK' : \mathbf{AC} = AK : \mathbf{AC}$,

$\therefore$ $AK' = AK$.

故ニ K′ ト K トハ相合ス.

從テ HK′ ト HK トハ相合ス.

故ニ $HK \parallel BC$.

183. 系

[1] $AB : AH = AC : AK$ なるときは,

$HK \parallel BC$.

[2] 三角形の二邊を相等しき比に分つ直線は其の底に平行なり.

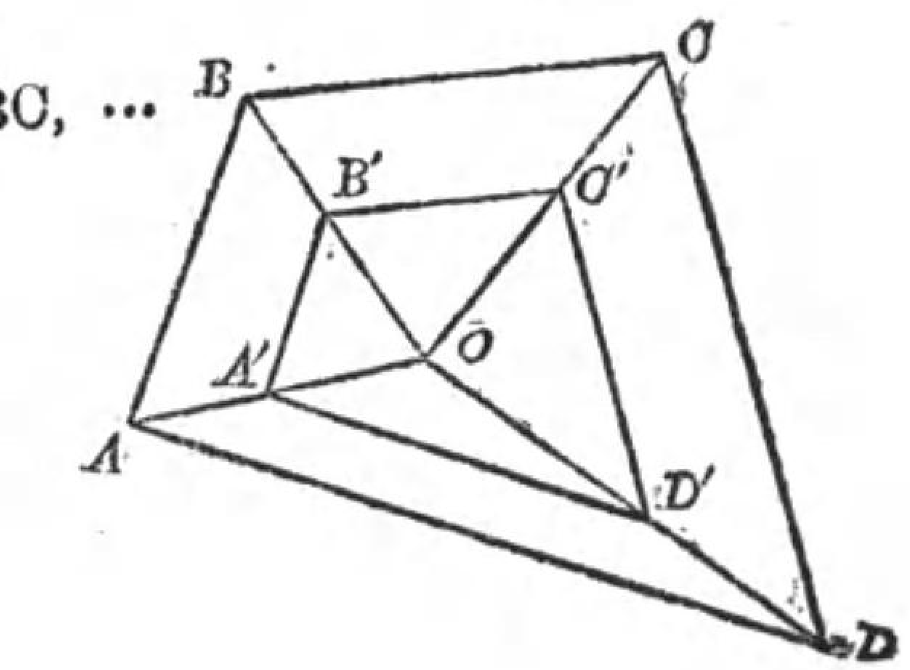
〔問題〕

[1] 四邊形 ABCD 內ノ任意ノ一點ヲ O トシ, OA, OB, OC, OD ヲ夫々點 A′, B′, C′, D′ ニ於テ

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD}$$

ナル様ニ分テバ,

$A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$, …

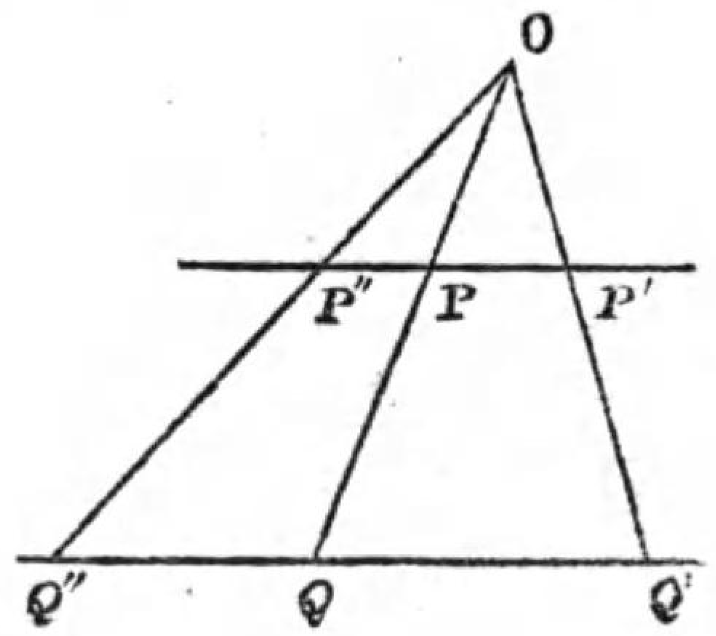


[2] 且ツ

$\angle D'A'B' = \angle DAB$.

$\angle A'B'C' = \angle ABC$

[3] 定點 O ヨリ, 平行ナル二直線ヲ P, Q ニ於テ切ル所ノ直線ヲ引クトキハ, 其ノ位置ニ拘ラズ, OP : OQ ハ常ニ一定セリ

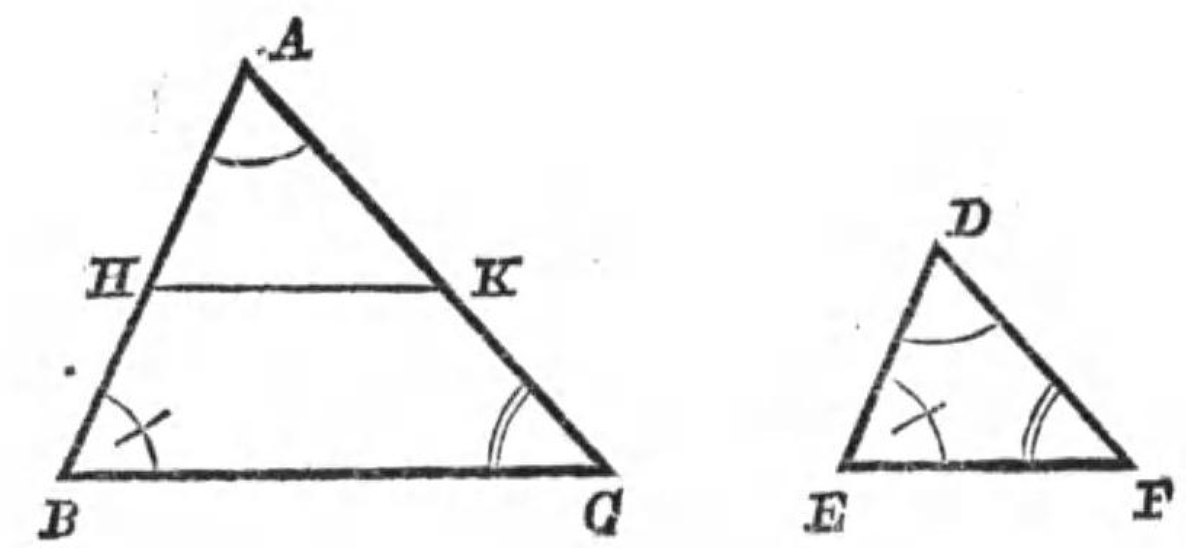


[4] 定點 O ヨリ定直線上ヲ動ク點 P ヘ引ケル直線 OP ヲ一定比ニ內分又ハ外分スル點 Q ノ軌跡ヲ求ム.

[5] 梯形ノ平行邊ニ平行ニ引ケル直線ハ他ノ二邊ヲ相等シキ比ニ分ツ.

第十八章　相似形

184. [定理70] 二つの三角形の角が夫々相等しければ其の邊は相比例す.

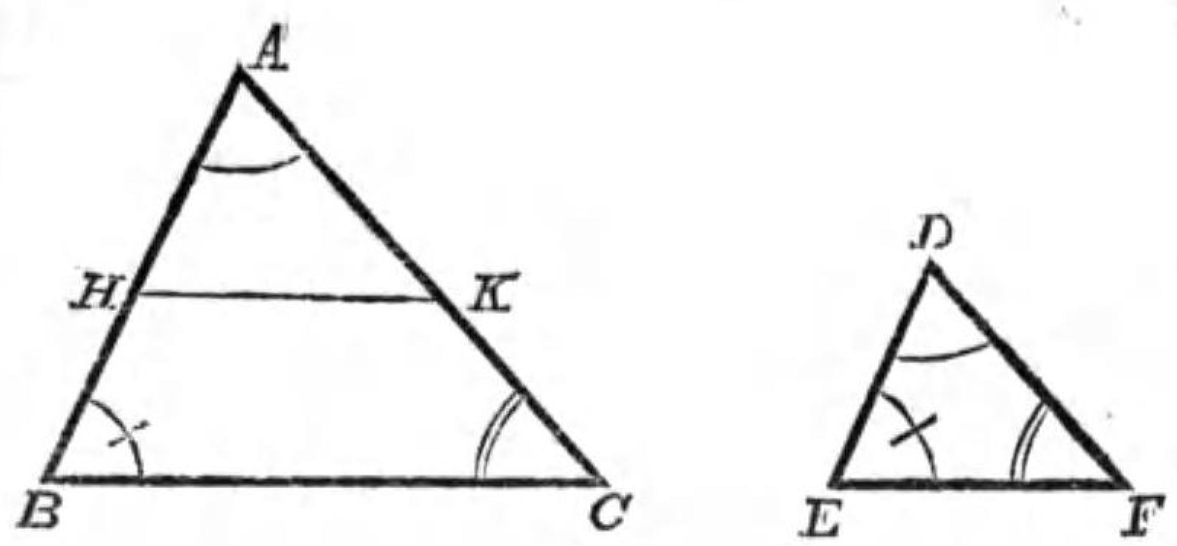


[前提]　兩 △ABC, DEF ニ於テ,

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$.

[求證]　$BC : EF = CA : FD = AB : DE$.

[作圖]　AB 上ニ DE ニ等シク AH ヲ取リ,
又 AC 上ニ DF ニ等シク AK ヲ取リ,
HK ヲ結ビ付ク.



證明　$\triangle AHK \equiv \triangle DEF,$　〔定理[44]〕

$\therefore$　$\angle AHK = \angle E$

$\therefore$　$= \angle B,$　〔前提〕

$\therefore$　$HK \parallel BC,$　〔定理[9]〕

$\therefore$　$AH : AB = AK : AC$　〔定理[68]〕

$\therefore$　$DE : AB = DF : AC.$

同理ニテ $ED : BA = EF : BC.$

$\therefore$　$EF : BC = DE : AB = FD : CA,$

$\therefore$　$BC : EF = CA : FD = AB : DE.$

〔問　題〕

$\boxed{1}$　$\angle XOY$ ノ邊ノ何レカ一方ノ上ナル一點 P ヨリ他ノ邊ヘ垂線 PD ヲ引クトキ,比 $PD : OP$ ハ,P ノ位置ニ拘ラズ,一定セリ

$\boxed{2}$　圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ兩對角線ノ交點ヲ X トスレバ,

$$XA : XB = XD : XC.$$

$\boxed{3}$　圓ノ內接四邊形 ABCD ノ對邊 AB, CD ノ延長ノ交點ヲ P トスレバ,

$$PB : PC = PD : PA.$$

$\boxed{4}$　圓ノ內接三角形 ABC ノ頂點 A ヨリ對邊ヘ引ケル垂線 AD ト直徑 AE トヲ引ケバ,

$$AB : AD = AE : AC.$$

185.　多角形の相似.

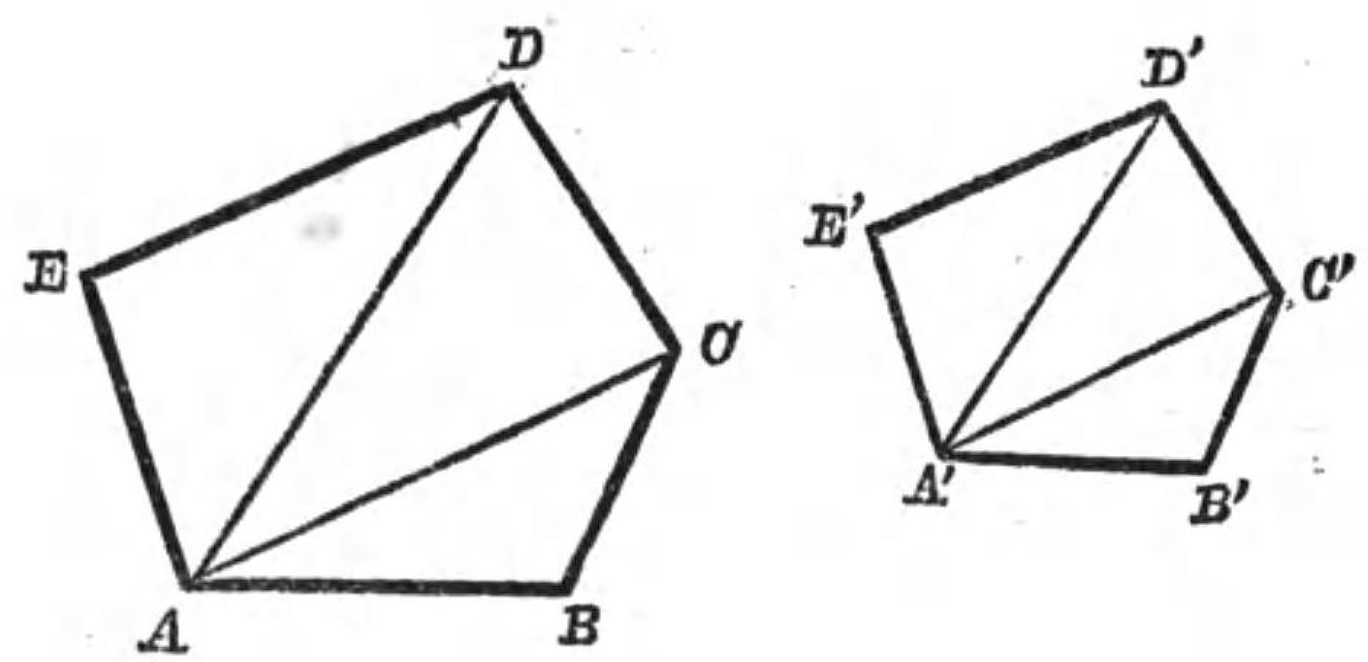
兩多角形ガ**互ニ等角**ニシテ(卽チ其ノ角ガ夫々相等シク)且ツ其ノ對應スル邊ガ比例スルトキハ,此多角形ハ**相似ナリ**ト云フ.
Similar.

多角形 ABCD… ト, A′B′C′D′… トノ相似ナルコトハ記號ニテ $ABCD\ldots \backsim A'B'C'D'\ldots$ ト書キ表ハス

〔問　題〕

互ニ等角ナル三角形ハ相似ナリ

186. 作圖題23　定直線を一邊として,與へられたる多角形と相似なる多角形を作ること.



ABCDE ヲ與ヘラレタル多角形,

A'B' ヲ與ヘラレタル直線トシテ,

ABCDE ト相似ニシテ且ツ A'B' ヲ AB ニ對應スル邊トスル所ノ多角形ヲ作ラントス.

作圖　對角線 AC, AD ヲ引ク.

先ヅ A'B' 上ニ △ABC ト等角ナル △A'B'C' ヲ作ル.

次ニ A'C' 上ニ △ACD ト等角ナル △A'C'D' ヲ作ル.

次ニ A'D' 上ニ △ADE ト等角ナル △A'D'E' ヲ作ル.

然ルトキハ, A'B'C'D'E' ハ ABCDE ト相似ナリ.

證明　(1) 此兩多角形ハ等角ナリ.〔何故ニカ〕

(2) 此兩多角形ノ對應邊ハ比例ス,

即チ $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}$.

如何トナラバ,

△ABC, A'B'C' ハ等角ナリ.

故ニ $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$.　〔定理70〕

△ACD, A'C'D' モ等角ナリ.

故ニ $\frac{AC}{A'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{AD}{A'D'}$.　〃

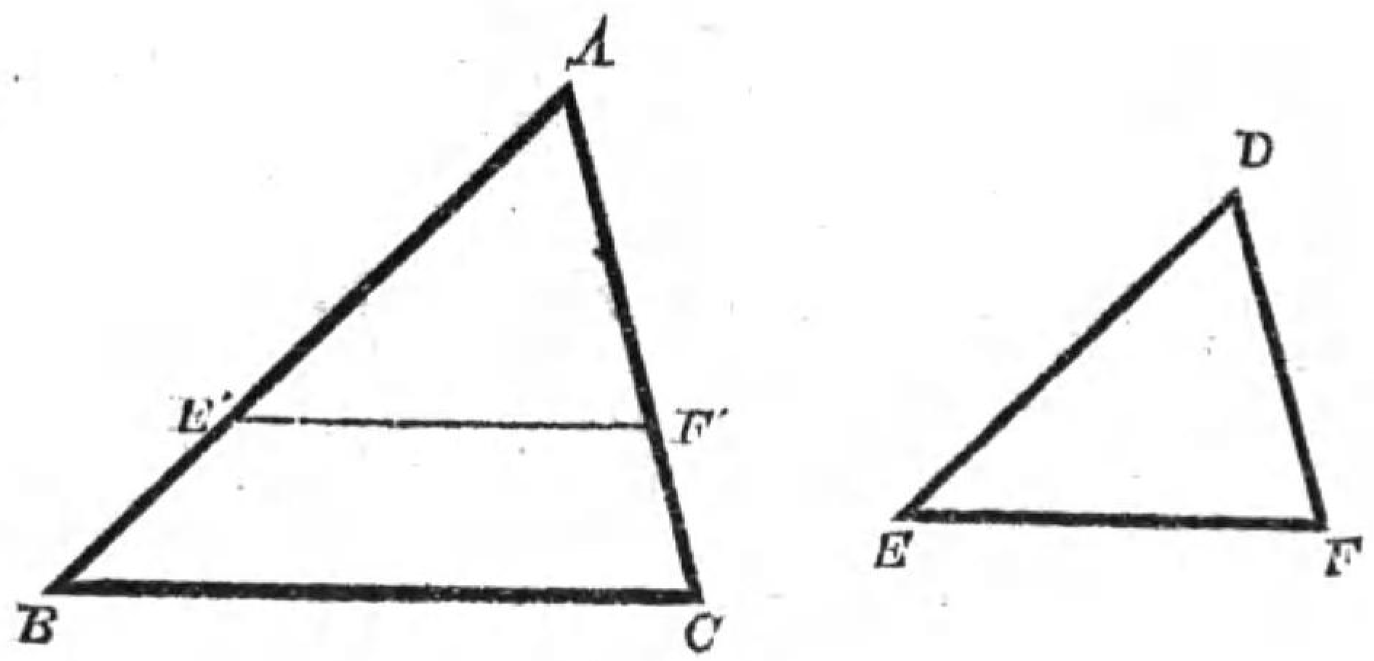
△ADE, A'D'E' モ等角ナリ.

故ニ $\frac{AD}{A'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}$.　〃

是ニ由リテ,

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}.$$

187. $\boxed{\text{定理71}}$ 三邊が相比例する三角形は相似なり. (定理70の逆)



$\boxed{\text{前提}}$ $\triangle ABC$, DEF ニ於テ,

$$\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}=\frac{AB}{DE}.$$

$\boxed{\text{求證}}$ $\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle F$.

$\boxed{\text{作圖}}$ AB 上ニ DE ニ等シク AE′ ヲ取リ,

BC ニ平行ニ E′F′ ヲ引ク.

$\boxed{\text{證明}}$ $\triangle ABC$ ト $\triangle AE'F'$ トハ等角ナリ.

故ニ, $\dfrac{AB}{AE'}=\dfrac{BC}{E'F'}=\dfrac{CA}{F'A}$. 〔定理70〕

然ルニ, $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{CA}{FD}$. 〔前提〕

且ツ AE′=DE. 〔作圖〕

故ニ $\dfrac{BC}{E'F'}=\dfrac{BC}{EF}$, $\therefore E'F'=EF$;

$\dfrac{CA}{F'A}=\dfrac{CA}{FD}$, $\therefore F'A=FD$.

乃チ $\triangle DEF$ ト $\triangle AE'F'$ トハ邊夫々相等シ.

故ニ $\triangle DEF$ ト $\triangle AE'F'$ トハ等角ナリ.

故ニ $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トモ等角ナリ.

從テ此二ツノ三角形ハ相似ナリ.

〔問題〕

與ヘラレタル直線 AB ヲ最大邊トシテ,三邊ノ比ガ 2 : 3 : 4 ニ等シキ三角形ヲ作ルコト.

188. $\boxed{\text{定理72}}$ 二つの三角形の二邊が互に比例し,且つ其二邊の夾む角が相等しきものは相似なり.

證明 生徒ハ自ラ之ヲ爲スベシ.

〔問題〕

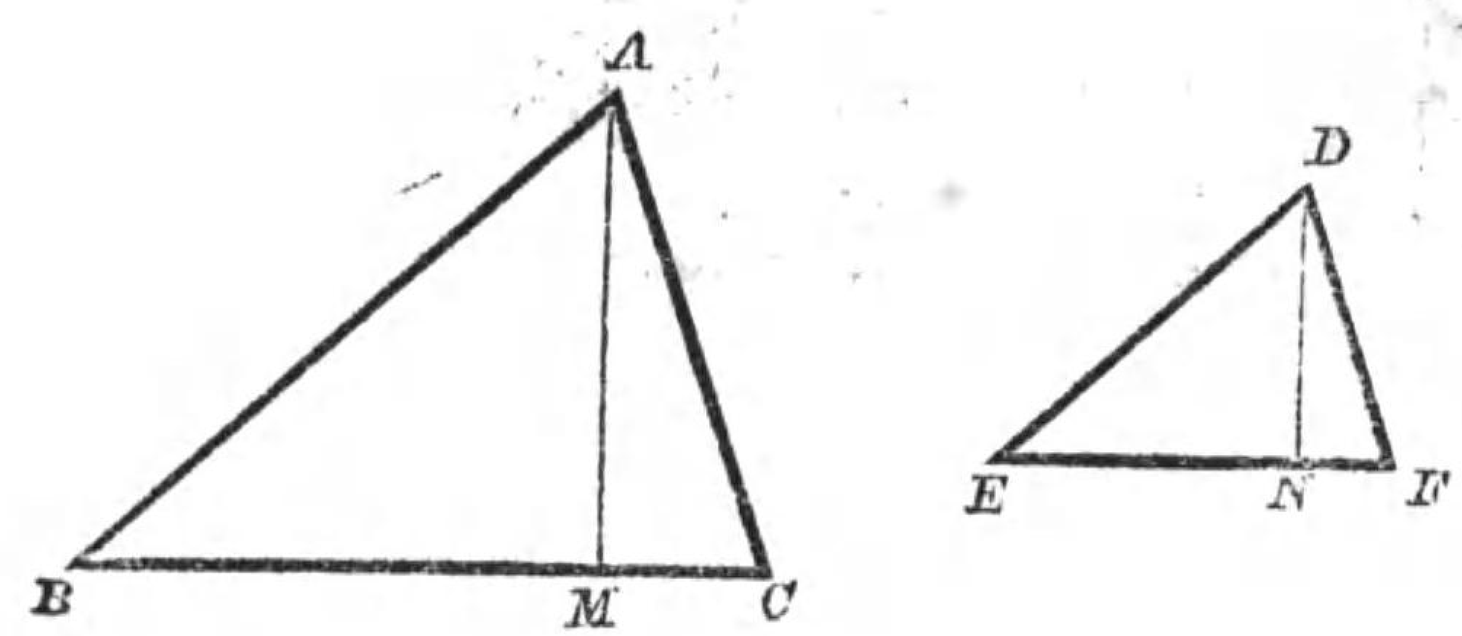
[1] △PQR ノ邊 PQ 上ノ一點 S ヨリ QR ニ平行ニ ST ヲ引クトキ, ST : QR=PS : PQ ナレバ, T ハ PR ノ上ニ在リ.

[2] △ABC ニ於テ A ヨリ底ヘ垂線 AD ヲ引クニ, AB : BD = AC : AD ナレバ, ∠BAC ハ直角ナリ.

[3] 相似三角形 ABC,DEF ノ底 BC, EF ヲ相等シキ比ニ分ツ點ヲ夫々 X,Y トスレバ,

AX : DY = BC : EF.

189. 定理73 相似三角形の面積の比は對應邊上の正方形の比に等し.



前提 二ツノ相似三角形ヲ ABC,DEF トス.

求證 $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\dfrac{BC^2}{EF^2}$.

作圖 兩△ノ高サ AM, DN ヲ引ク.

證明 $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}BC.AM,$ 〔定理55〕

$\triangle DEF=\dfrac{1}{2}EF.DN$

$\therefore\ \dfrac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\dfrac{BC.AM}{EF.DN}$

$=\dfrac{BC}{EF}\cdot\dfrac{AM}{DN}$

〔故ニ $\dfrac{AM}{DN}=\dfrac{BC}{EF}$ ヲ證スレバヨシ〕

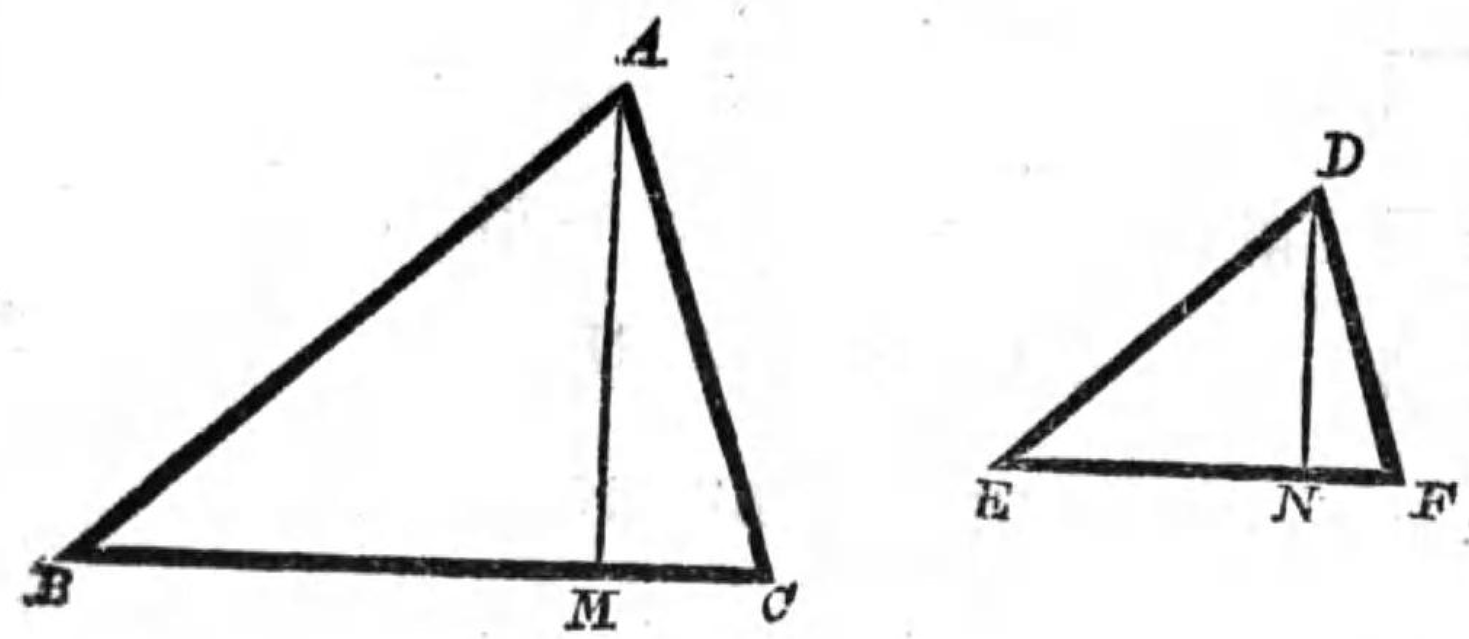
直角 △ABM, DEN ニ於テ, ∠B=∠E,

故ニ此兩△ハ等角ナリ.

$\therefore\ \dfrac{AM}{DN}=\dfrac{AB}{DE}$. 〔定理70〕

然ルニ $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}$.

$\therefore\ \dfrac{AM}{DN}=\dfrac{BC}{EF}$.



然ルニ $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\dfrac{BC}{EF}\cdot\dfrac{AM}{DN}$ (既證)

$$\therefore \quad =\frac{BC}{EF}\cdot\frac{BC}{EF}$$

$$=\frac{BC^2}{EF^2}$$

〔問題〕

[1] 正方形ノ一邊ト對角線トノ上ニ畫ケル正三角形ノ比ヲ問フ.

[2] 三角形ノ底ニ平行ナル直線ヲ引キテ之ヲ二等分スルコト.

[3] 直角△ノ各邊上ニ相似△ヲ畫ケバ,斜邊上ニ在ルモノハ他ノ二ツノ和ニ等シ.

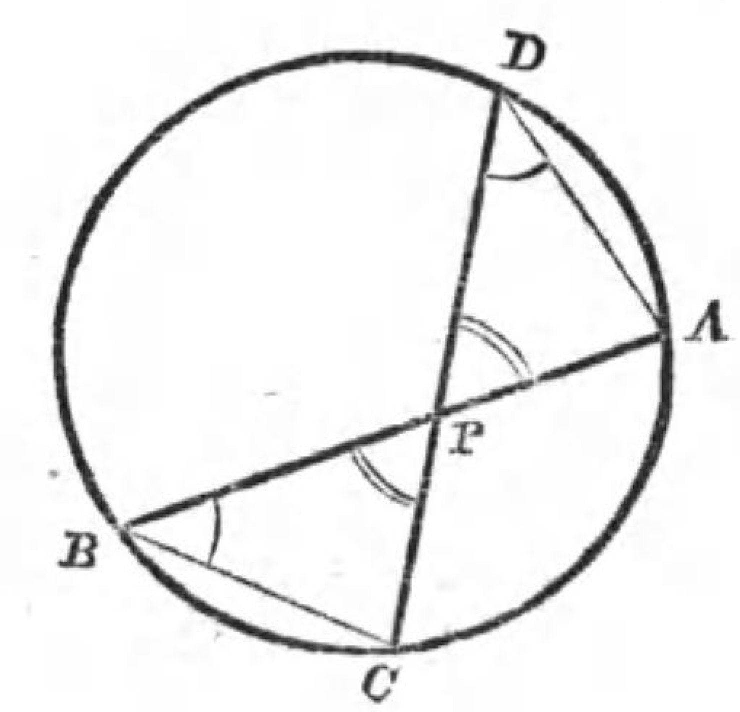
[4] △ABC, DEF ニ於テ,∠B=∠E ナレバ,

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\frac{AB\cdot BC}{DE\cdot EF}.$$

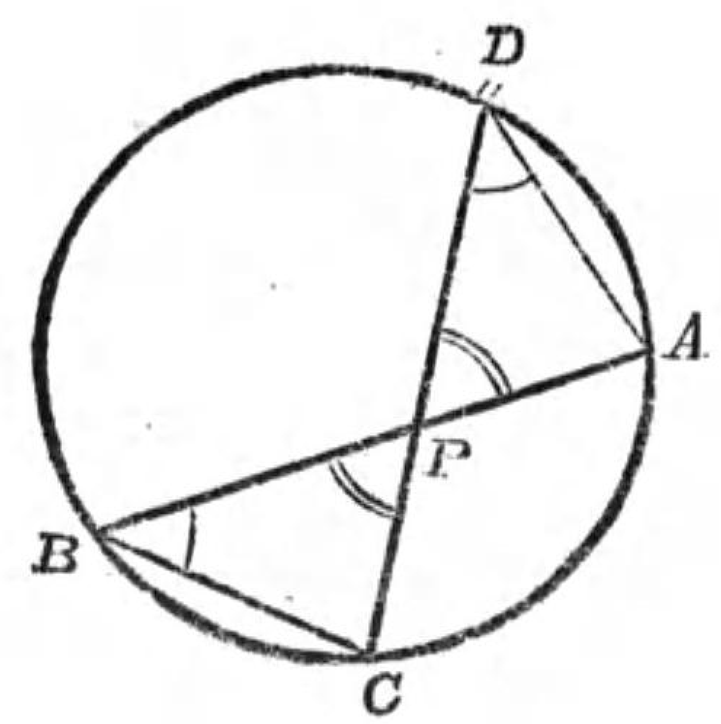
(BC ニ垂直ニ AX ヲ,マタ EF ニ垂直ニ DY ヲ引キテ見ルベシ.

190. [定理74] 一つの圓に於ける二つの弦AB, CD が一點 P に於て互に内分するときは,

$$PA.PB=PC.PD.$$



[作圖] BC, AD ヲ結ビ付ク.



證明 △PAD, PCB ニ於テ,

∠APD＝∠CPB(對頂角),

∠D＝∠B 〔定理59〕

故ニ此兩△ハ等角ナリ.

∴ PA : PC ＝ PD : PB, 〔定理70〕

∴ PA. PB ＝ PC. PD.

191. **定理75** 一つの圓の二つの弦AB, CDが一點Pに於て互に外分するときは,

PA. PB ＝ PC.PD.

證明 前定理ノ證明ト全ク同文ナリ.

注意 定理74及ビ定理75ハ一定理ノ二ツノ場合タルニ過ギズ.

——〔問題〕——

[1] 圓ノ內接三角形ABCノ頂點Aヨリ高サADト直徑AMトヲ引ケバ,

AD.AM＝AB.AC.

[2] 圓ノ內接四邊形ABCDノ對角線ノ交點ヲXトスレバ,

AX. BC＝AD. BX.

[*3] 圓外の一點Pより引ける切線の切點をTとし,同點Pより引ける直線が圓を切る點をA,Bとすれば,

PT^2＝PA PB.

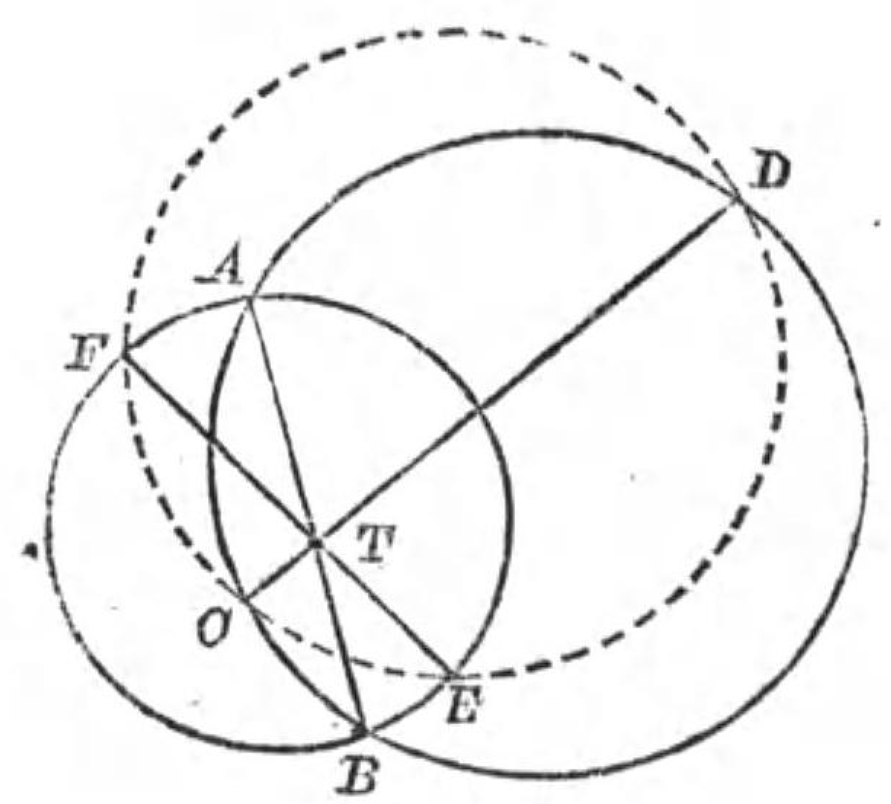
[4] Aニ於テ直角ヲ有スル直角△ABCニ於テ,AヨリBCヘ垂線ADヲ引ケバ,

AD^2＝BD. DC

[5] 相交ル兩圓ニ共通ナル弦ノ延長上ノ一點ヨリ兩圓ヘ引ケル切線ハ相等シ.

[6] 相交ル兩圓ニ共通ナル弦ハ二圓ニ共通ナル切線(ノ切點間ノ部分)ヲ二等分ス.

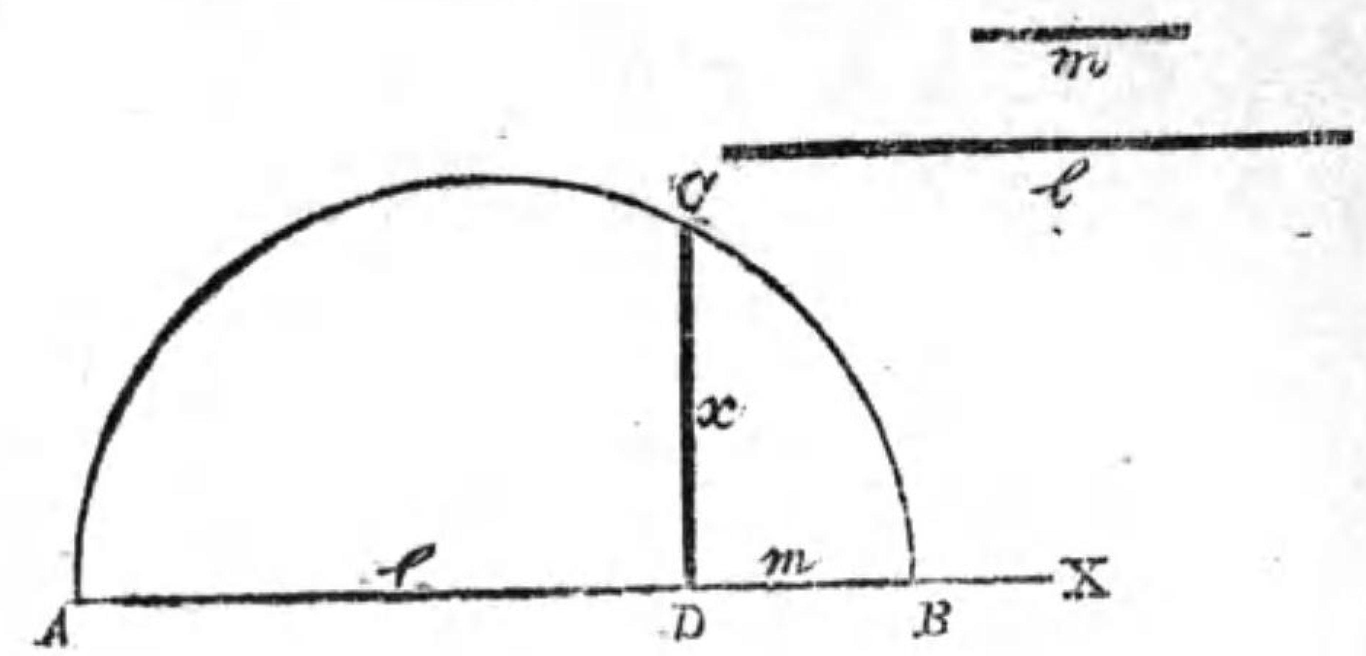
[7] (*a*) 相交ル兩圓ニ共通ナル弦上ノ一點Tヨリ直線ヲ引キテ其一圓ヲ C,D ニ於テ切リ, 又別ニ一直線ヲ引キテ他圓ヲ E,F ニ於テ切ルトキハ,四點 C, D, E, F ハ一圓周上ニ在リ.



(*b*) T ガ共通弦ノ延長上ニ在ルトキハ如何.

[*8] 圓の内接四邊形の對邊の包む矩形の和は兩對角線の包む矩形に等し.

192 [作圖題24] **與へられたる二つの直線の比例中項を求むること.**



l, m ヲ與ヘラレタル直線トス.

[作圖] 一直線 AX ヲ引キ,其ノ線上ニ於テ l ニ等シク AD ヲ切リ, m ニ等シク DB ヲ切リ,

AB ヲ直徑トシテ半圓ヲ畫ク.

D ヨリ AB ニ垂線ヲ引キ,

半圓ト C ニ於テ交ラシム.

然ルトキハ, CD ハ所要ノ比例中項ナリ.

[證明] CA, CB ヲ結ビ付ク,

△ ADC, CDB ハ相似ナリ,

∴ AD : CD = CD : BD,

$\therefore\ l : x = x : m,$

即チ x (=CD) ハ l, m ノ比例中項ナリ.

193. **作圖題25** **與へられたる矩形と等積なる正方形を作ること.**

矩形ノ二邊ノ比例中項ヲ求ムレバ,所要ノ正方形ノ一邊ヲ得ベシ.

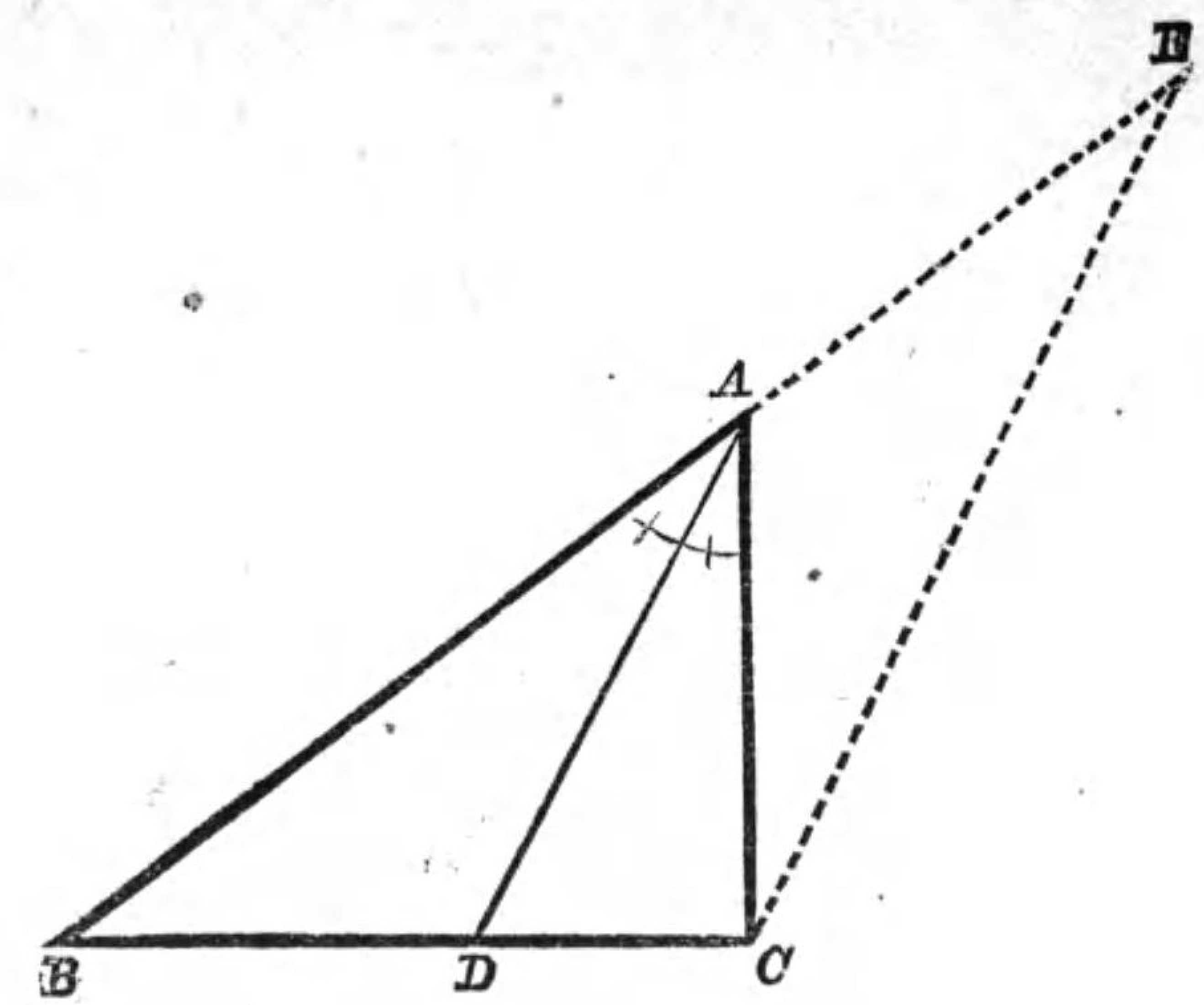
〔問題〕

1 與ヘラレタル三角形ト等積ナル正方形ヲ作ルコト.

2 與ヘラレタル四邊形ト等積ナル正方形ヲ作ルコト.

*3 與へられたる多角形と等積なる正方形を作ること.

194. **定理76** **三角形の一角の二等分線に依りて分たれたる其の對邊の二片は其の隣邊に比例す.**



前提 △ABC ニ於テ∠A ノ二等分線ガ BC ニ交ル點ヲ D トス.

求證 $DB:DC=AB:AC.$

作圖 C ヨリ DA ニ平行ニ引ケル直線ガ BA ノ延長ト交ル點ヲ E トス.

證明 $DA \parallel CE,$

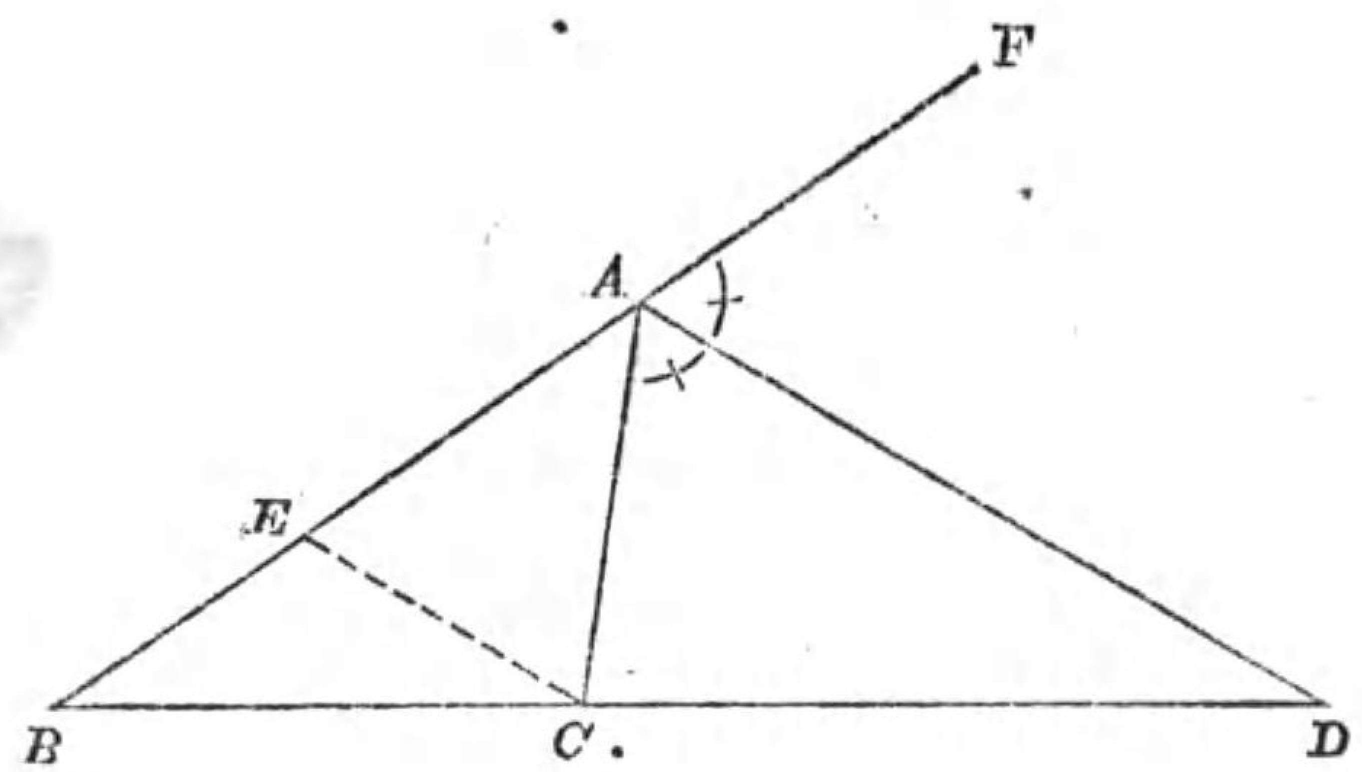
$\therefore DB:DC=AB:AE.$ 〔定理66〕

然ルニ $\angle ACE=\angle AEC.$ 〔何故ニカ〕

$\therefore AE=AC.$

$\therefore DB:DC=AB:AC.$

195. 定理77 三角形の一つの角の外角の二等分線に依りて外分せられたる其の對邊の二片は其の隣邊に比例す.



前提 ∠A ノ外角 (∠CAF) ノ二等分線ガ BC ノ延長ト交ル點ヲ D トス.

求證 DB : DC = AB : AC.

作圖 C ヨリ DA ニ平行ニ引ケル直線ガ AB ト交ル點ヲ E トス.

證明 DA ∥ CE,

∴ DB : DC = AB : AE. 〔定理68〕

然ルニ ∠ACE = ∠AEC. 〔何故ニカ〕

∴ AE = AC.

∴ DB : DC = AB : AC.

注意 定理76及ビ定理77ハ極メテ密接ナル類似ヲ有シ,其ノ證明ノ同文ナルニ着目スベシ.

〔問題〕

1 三角形(ABC)ノ底(BC)ヲ分ナテ隣邊ニ比例スル二片トナス所ノ内分點(D)ト頂點(A)トヲ結ビ付クル直線(AD)ハ其頂角(A)ヲ二等分ス.(定理76ノ逆).

(∠A ノ二等分線 AD′ ヲ引キ,其ガ AD ト一致スルコトヲ證明スレバヨシ.)

2 三角形(ABC)ノ底(BC)ヲ分ナテ隣邊ニ比例スル二片トナス所ノ外分點(D)ト頂點(A)トヲ結ビ付クル直線(AD)ハ頂角(A)ノ外角ヲ二等分ス.(定理77ノ逆).

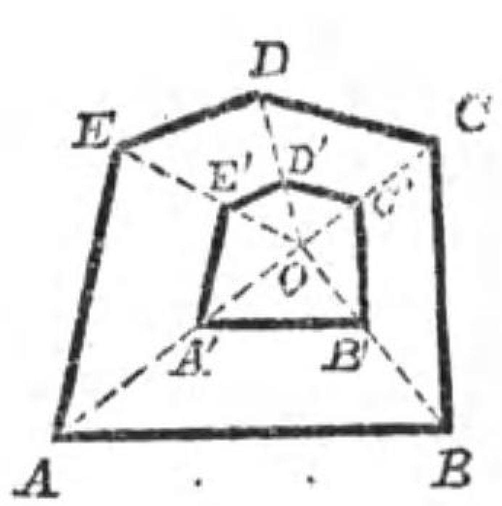
3 三角形ノ一角及ビ其ノ外角ノ二等分線ハ,其ノ對邊ヲ夫々同ジ比ニ内分及ビ外分ス.

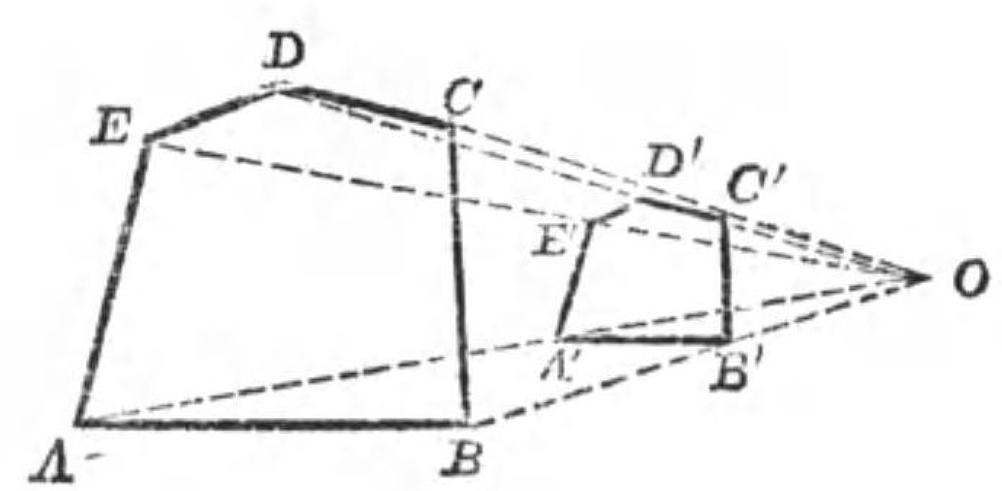
*4 點Pの二定點A,Bよりの距離の比が一定せるときは,Pの軌跡は圓なり.

[5] 三角形 ABC 內ノ一點ヲ O トシ,角 BOC, COA, AOB ノ二等分線ガ夫々 BC, CA, AB ト相交ル點ヲ P, Q, R トスレバ,

$$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=1.$$

196. [定理78] 一點と多角形の頂點とを結び付くる直線を總て同じ比に內分又は外分する點は其多角形と相似なる多角形の頂點なり.





[前提] 多角形 ABCDE ノ頂點ト一點 O トヲ結ビ付クル直線ヲ總テ同ジ比ニ分ツ點ヲ夫々 A′, B′, C′, D′, E′ トス.

[求證] $\angle A'=\angle A,\ \angle B'=\angle B,\ \angle C'=\angle C,\ \cdots\cdots,$

且ツ $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{C'D'}{CD}=\cdots\cdots.$

[證明] OA, OB,…… ハ夫々 A′, B′,…… ニ於テ同ジ比ニ分タル.

$\therefore \dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OB'}{OB}=\cdots\cdots$(=$k$ トス).

△OA′B′, OAB ニ於テ,

$\angle AOB$ ハ共通,

且ツ $OA' : OA = OB' : OB$.

$\therefore \triangle OA'B' \backsim \triangle OAB,$　　〔定理 [illegible]

$\therefore \angle OA'B' = \angle OAB.$

同理ニテ $\angle OA'E' = \angle OAE.$

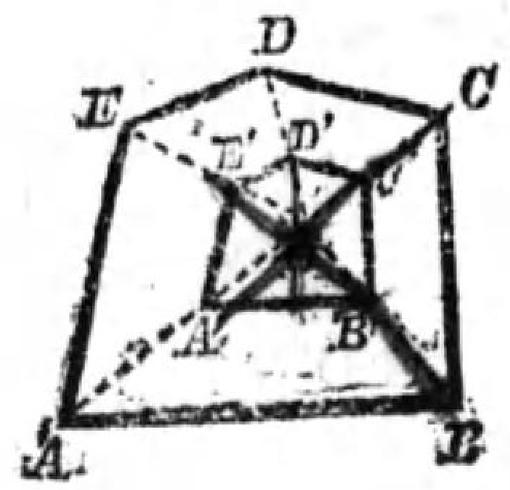
故ニ $\angle OA'B' + \angle OA'E' = \angle OAB + \angle OAE,$

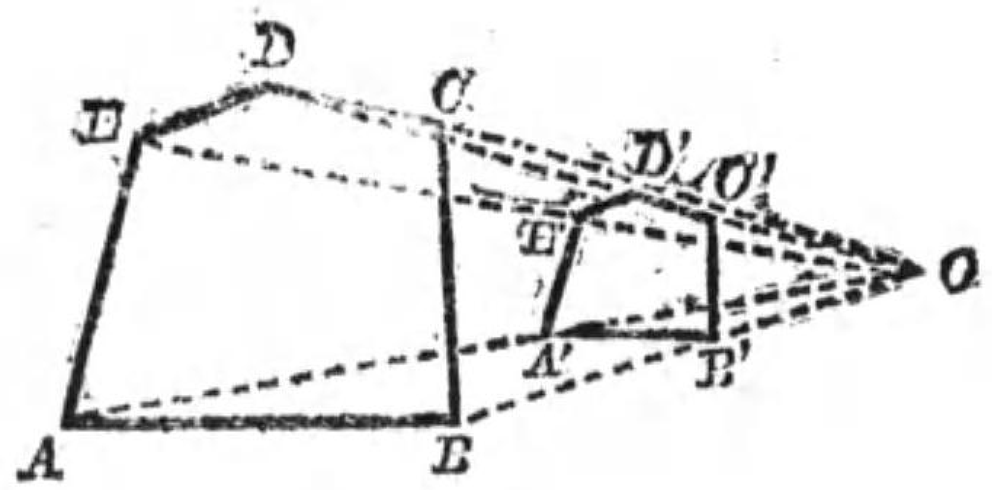
即チ $\angle A' = \angle A.$

同理ニテ $\angle B' = \angle B,$

$\angle C' = \angle C,$

………………





次ニ, $\triangle OA'B' \backsim \triangle OAB$,　(既證)

$\therefore \frac{A'B'}{AB}=\frac{OA'}{OA}=k$,

同理ニテ $\frac{B'C'}{BC}=k$,

$\frac{C'D'}{CD}=k$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\therefore \frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\cdots\cdots\cdots$.

故ニ, $ABCDE \backsim A'B'C'D'E'$

197. **作圖題** 與へられたる直線上に與へられたる多角形と相似なる多角形を作ること(第二法).

(第186條參照)

與ヘラレタル一直線A'B'ヲ與ヘラレタル多角形 ABCDE ノ邊 AB ニ平行ニ置ク.

(前定理ノ圖ヲ見ヨ.)

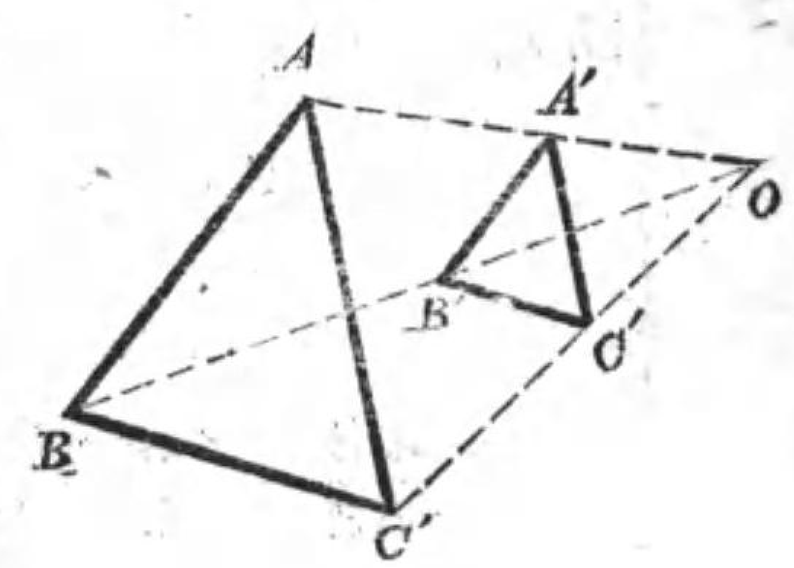
AA', BB'(又ハ其ノ延長)ノ交點 O ト C,D,E トヲ結ビ付ク.

次ニ OC, OD, OE ヲ總テ比 OA':A'A ニ分ツ點ヲ夫々 C', D', E' トス. (平行線ヲ引クコトニテ求メラル.)

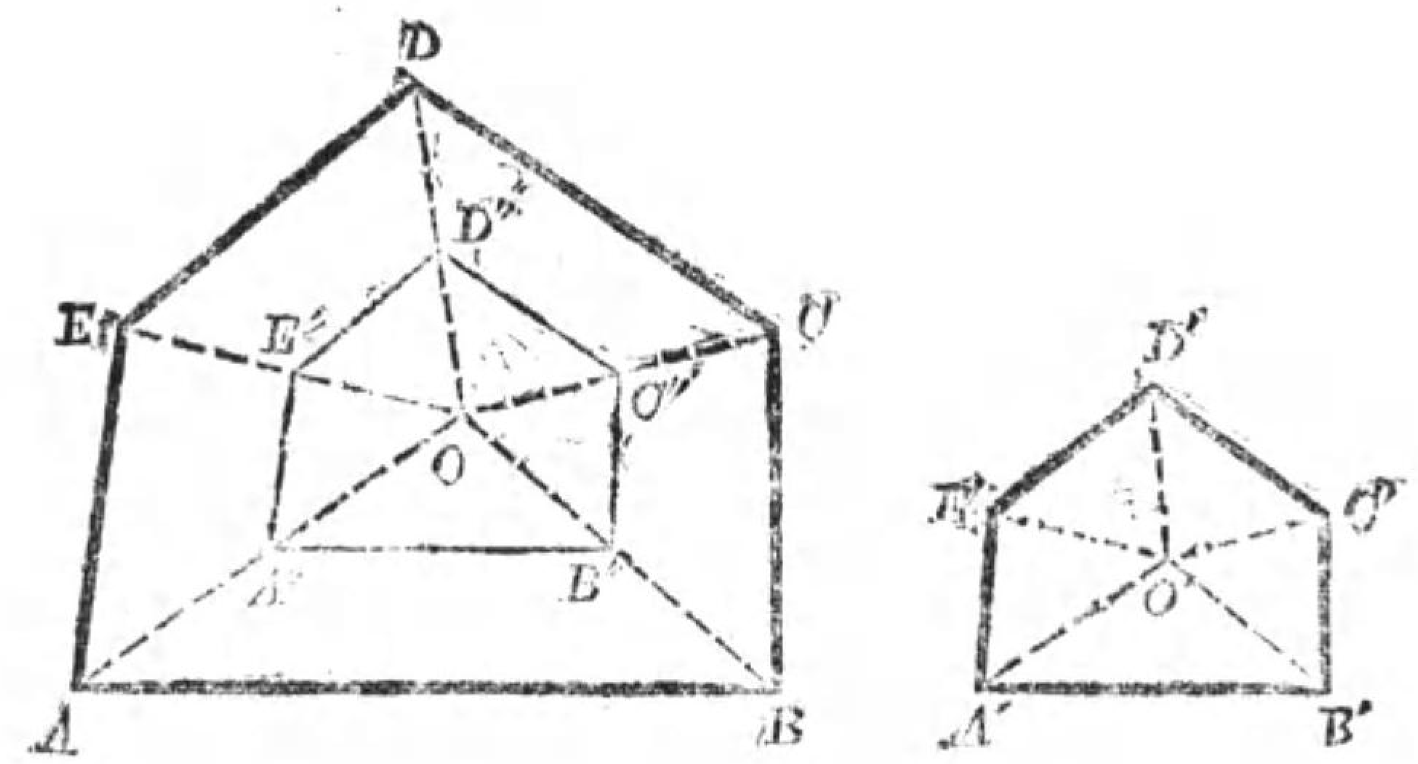
然ルトキハ, $A'B'C'D'E' \backsim ABCDE$

〔問題〕

與ヘラレタル △ABC ト相似ニシテ且ツ與ヘラレタル底 B'C' ヲ有スル △A'B'C' ヲ書クコト(但シ上ノ方法ニ依ル).



198 定理79 多角形が其の諸頂點と一點とを結び付くる直線にて共通の頂點を有する三角形に分たるれば,之と相似なる多角形も夫々其三角形と相似にして且つ共通の頂點を有する三角形に分つことを得.



前提 ABCDE ト A'B'C'D'E' トハ等角ニシテ,

且ツ $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{D'E'}{DE}=\frac{E'A'}{EA}$

$(=k$ トス$)$

又 ABCDE ハ,其ノ諸頂點ト一點 O トヲ結ビ付クル直線ニテ △OAB, OBC,...... ニ分タル.

求證 一點 O' アリテ, A'B'C'D'E' ハ,其ノ頂點ト O' トヲ結ブ直線ニテ △OAB, OBC, ... ト夫々相似ナル △O'A'B', O'B'C',...... ニ分割セラル.

作圖 OA, OB,...... ヲバ夫々 A'', B'',...... ニ於テ

$$\frac{OA''}{OA}=\frac{OB''}{OB}=\dots=k$$

トナル樣ニ分チ,

A''B'', B''C'',...... ヲ結ビ付ク.

證明 〔先ヅ A''B''C''D''E'' ≡ A'B'C'D'E' ヲ證ス〕

$$\frac{OA''}{OA}=\frac{OB''}{OB}=\cdots\cdots$$ 〔作圖〕

故ニ △OA''B'', OB''C'',...... ハ夫々

△OAB, OBC,......... ト相似ナリ.

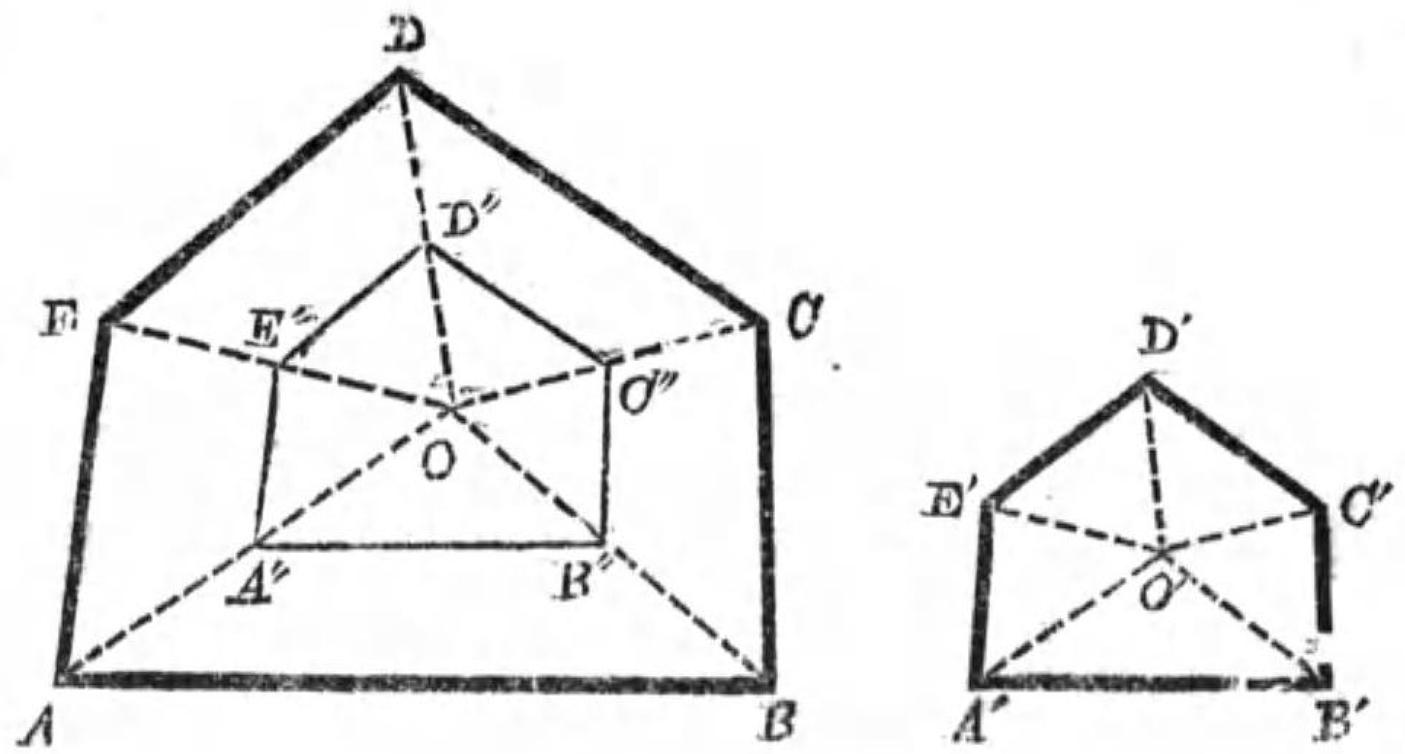
〔定理72〕

故ニ, A''B''C''D''E'' ハ ABCDE ト等角ナリ.

然ルニ, A'B'C'D'E' ハ ABCDE ト等角ナリ.

〔前提〕

故ニ A''B''C''D''E'' ハ A'B'C'D'E' ト等角ナリ.



次ニ $\dfrac{OA''}{OA}=\dfrac{OB''}{OB}=\cdots\cdots=k,$ 〔作圖〕

$\therefore$ $\dfrac{A''B''}{AB}=\dfrac{OA''}{OA}=k.$ 〔定理72〕

然ルニ $\dfrac{A'B'}{AB}=k.$ 〔前提〕

$\therefore$ $\dfrac{A''B''}{AB}=\dfrac{A'B'}{AB}.$

$\therefore$ $A''B''=A'B'.$

同理ニテ $B''C''=B'C',$

$C''D''=C'D',$

$\cdots\cdots$ $\cdots\cdots$

斯ク $A''B''C''D''E''$ ト $A'B'C'D'E'$ トハ互ニ等角ニシテ,其ノ對應邊ハ相等シ.

$\therefore$ $A''B''C''D''E''\equiv A'B'C'D'E'.$

$A''B''C''D''E''$ ヲ $A'B'C'D'E'$ ノ上ニ重ネテ,兩形ヲ全ク相合セシムルコトヲ得.

其時 O ノ落ツル點ヲ O′ トシ.

$O'A', O'B', \cdots\cdots$ ヲ結ビ付ク.

然ルトキハ, $\triangle O'A'B'\equiv\triangle OA''B''.$

然ルニ $\triangle OA''B''\backsim\triangle OAB.$

$\therefore$ $\triangle O'A'B'\backsim\triangle OAB.$

同理ニテ $\triangle O'B'C'\backsim\triangle OBC,$

$\triangle O'C'D'\backsim\triangle OCD,$

$\cdots\cdots\cdots$ $\cdots\cdots\cdots$

注意 點 O′ ヲ求ムル方法トシテハ,先ヅ $\angle OAB=\angle O'A'B'$ ナル樣ニ A′ ヨリ A′O′ ヲ引キ,次ニ $\angle OBA=\angle O'B'A'$ ナル樣ニ B′ ヨリ B′O′ ヲ引キ,其ノ交點ヲ求ムルヲ適切トス.

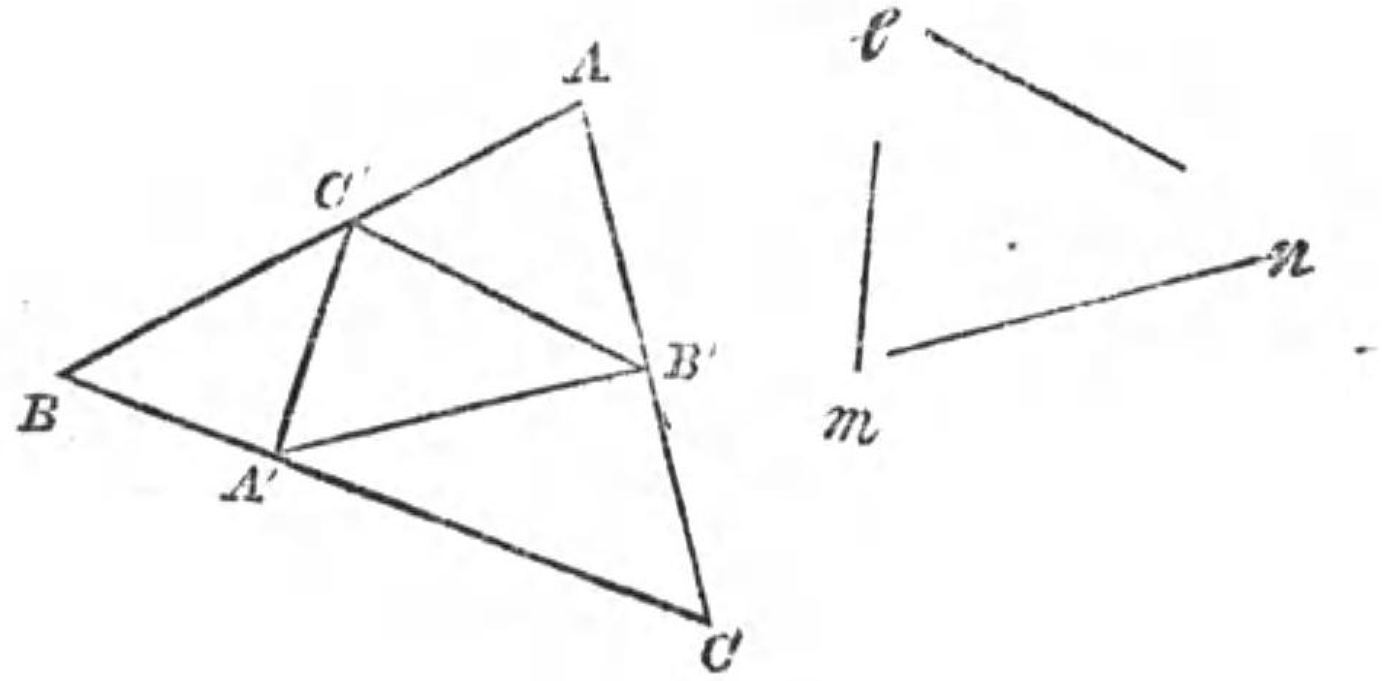
注意 O, O′ ハ相似多角形 ABC……, A′B′C′…… ニ於テ互ニ**對應スル點**ト稱ス.

〔問題〕

[1] 角ト周トノ與ヘラレタル三角形ヲ作ルコト.

[2] 角ト二邊ノ差トノ與ヘラレタル三角形ヲ作ルコト.

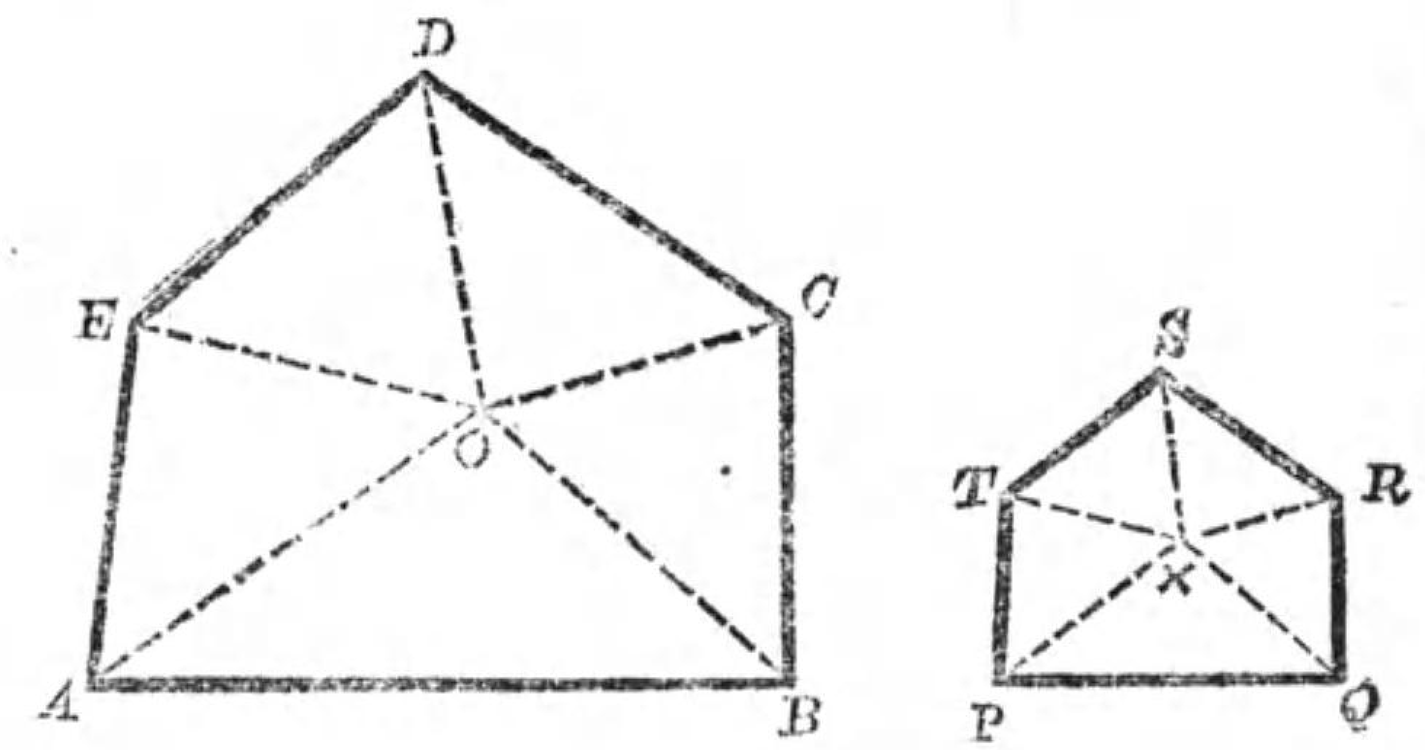
[3] 與ヘラレタル三角形(ABC)ニ內接シ,且ツ位置ノ與ヘラレタル三直線(l, m, n)ニ平行ナル邊ヲ有スル三角形ヲ作ルコト.



[4] 與ヘラレタル三角形ニ內接セル正方形ヲ作ルコト.

[5] 與ヘラレタル二直線ニ切シ,且ツ與ヘラレタル一點ヲ過グル圓ヲ畫クコト.

199. [定理80] **相似多角形の面積の比は對應邊の平方の比に等し.**



[前提] ABCDE ∽ PQRST,

$\frac{AB}{PQ} = k$ トス.

[求證] $\frac{\text{ABCDE ノ面積}}{\text{PQRST ノ面積}} = \frac{AB^2}{PQ^2}$.

[作圖] ABCDE 內ニ一點 O ヲ取リ,

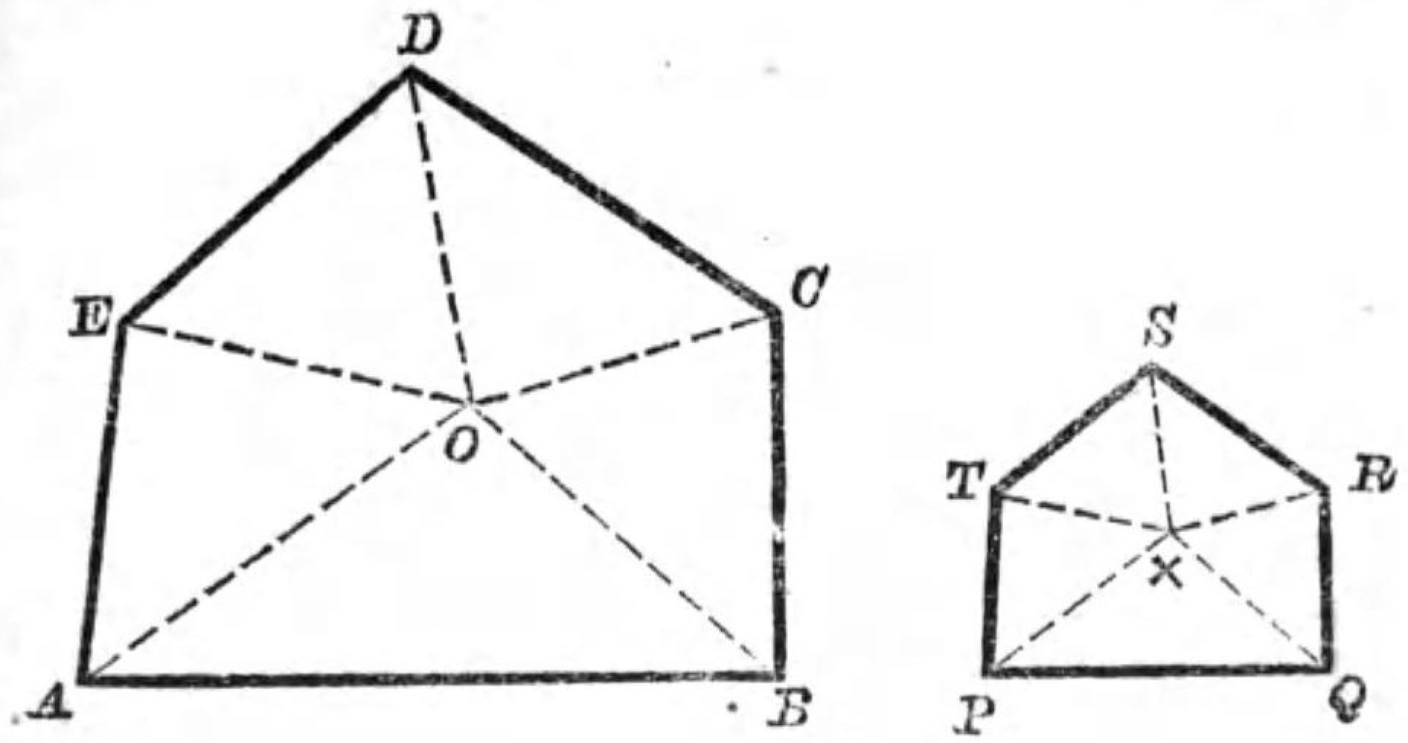
PQRST 內ニ於テ O ニ對應スル點ヲ X トス.

OA, OB,……, XP, XQ,…… ヲ結ブ.

[證明] O,X ハ互ニ對應スル點ナリ.

∴ $\triangle OAB \backsim \triangle XPQ$. 〔定理79〕

∴ $\frac{\triangle OAB}{\triangle XPQ} = \frac{AB^2}{PQ^2} = k^2$. 〔定理75〕



同理ニテ $\dfrac{\triangle OBC}{\triangle XQR}=\dfrac{BC^2}{QR^2}=k^2,$

$\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\ \cdots$

$\therefore\ \triangle OAB=k^2.\ \triangle XPQ,$

$\triangle OBC=k^2.\ \triangle XQR,$

$\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\therefore\ \triangle OAB+\triangle OBC+\ldots=k^2\{\triangle XPQ+\triangle XQR+\ldots\}$

$\therefore\ ABCDE=k^2.\ PQRST.$

$\therefore\ \dfrac{ABCDE}{PQRST}=k^2=\dfrac{AB^2}{PQ^2}.$

〔問　題〕

直角三角形ノ三邊上ニ相似多角形ヲ畫ケバ，斜邊上ナルモノハ他ノ二ツノ和ニ等シ.

200. 作圖題26 與へられたる兩多角形の一方Aと等積にして且つ他の方Bと相似なる多角形を作ること.

作圖 A,B ヲ各々正方形ニ化ス.

〔頁268,問題3〕

得ル所ノ正方形ノ邊ヲ夫々 a,b トシ，

B ノ一邊ヲ l トス.

b,a,l ノ第四比例項 x ヲ作ル.

〔作圖題22〕

x ノ上ニ B ト相似ナル多角形 C ヲ作ル.

(但シ C ノ邊 x ハ B ノ邊 l ニ對應セシム).

〔作圖題2〕

C ハ即チ所要ノ多角形ナリ.

證明 $\dfrac{x^2}{l^2}=\dfrac{a^2}{b^2}$ 〔作圖〕

$\therefore\ \dfrac{\text{C ノ面積}}{\text{B ノ面積}}=\dfrac{\text{A ノ面積}}{\text{B ノ面積}}.$

故ニ C ハ A ト等積ナリ.

然ルニ C ∽ B 〔作圖〕

C ハ所要ノ圖形ナリ.

〔問 題〕

[1] 與ヘラレタル正方形ト等積ナル正三角形ヲ作ルコト.

[2] 與ヘラレタル三角形ト等積ナル正三角形ヲ作ルコト.

[3] 定正方形ト等積ニシテ,且ツ二邊ガ定比ヲ有スル所ノ矩形ヲ作ルコト.

練習雜題

[1] 平行邊ノ一方ガ他ノ方ノ二倍ナル梯形ノ兩對角線ハ互ニ比 1:2 ニ分タル.

[2] 梯形ノ平行邊ニ平行ニ引ケル直線ハ他ノ二邊又ハ其ノ延長ヲ相等シキ比ニ分ツ.

[3] 定角ノ兩邊ヨリノ距離ノ比ガ一定セル點ノ軌跡ヲ求ムルコト.

[4] 三角形ノ兩中線ハ互ニ三等分ス.

[*5] 三角形の中線は總て一點に於て相會す.

[6] 兩相似三角形ノ對應角ノ二等分線ノ比ハ其對邊ノ比ニ等シ.

[7] 與ヘラレタル一直線ヲ二分シ,得ル所ノ兩片ノ比例中項ヲシテ與ヘラレタル第二ノ直線ニ等シカラシムルコト.

此問題ニハ常ニ解アリヤ.

[8] 兩圓ノ公切線ハ其ノ中心ヲ結ビ付クル直線ヲ其ノ半徑ノ比ニ內分又ハ外分ス.

[9] 三角形ノ底ト,頂角ト,二邊ノ比トヲ題シテ,其ノ三角形ヲ作ルコト.

[10] 圓外ノ一點Pヨリ中心Oニ至ル直線ガ,Pヨリ引ケル兩切線ノ切點ヲ結ブ弦ト交ル點ヲNトスレバ,

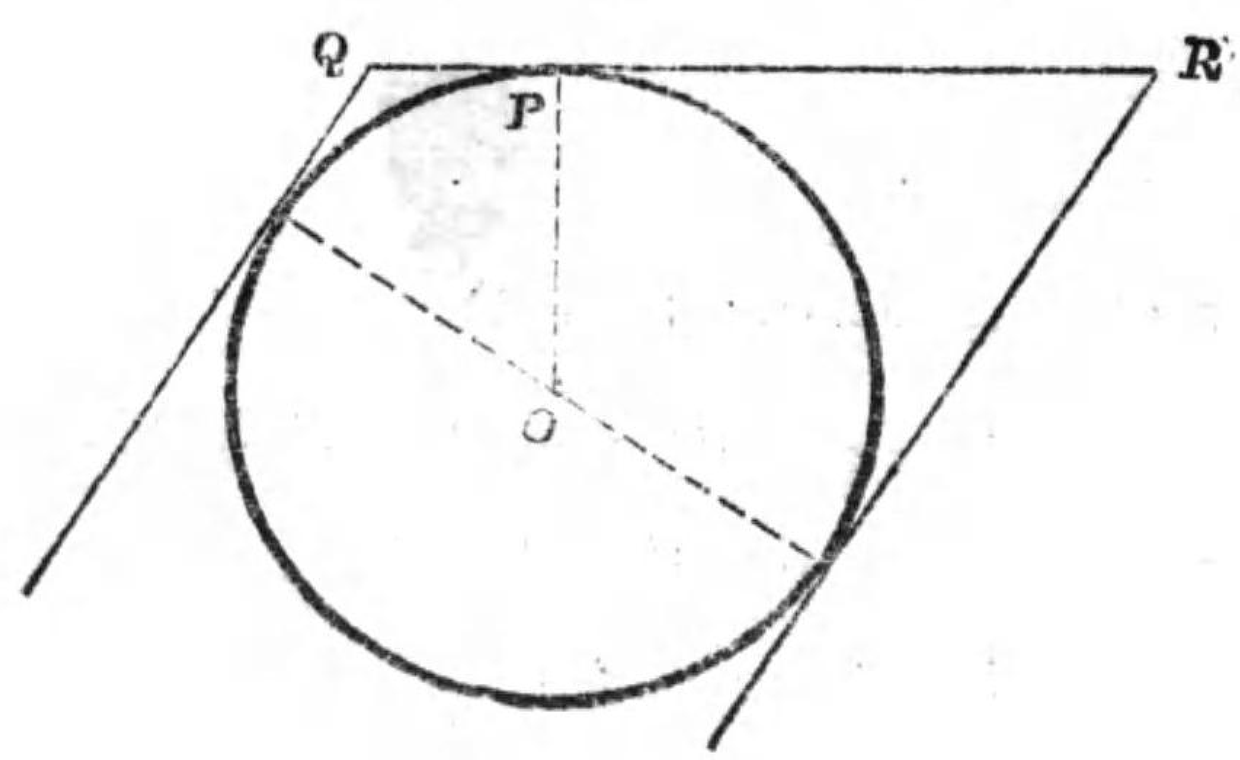
$$ON.OP=(\text{半徑})^2.$$

[11] $\triangle ABC$ ノ角 A ノ二等分線ヲ AD トシ,其ノ底トノ交點 D ヨリ二邊 AB, AC ニ平行ニ DE, DF ヲ引キ,其ノ二邊ト夫々 E, F ニ於テ交ラシムレバ, $BF:CE=AB^2:AC^2$.

[12] 外切スル兩圓ノ公切線ノ切點ヲ A, B トスレバ, AB ハ兩圓ノ直徑ノ比例中項ニ等シ.

13 一圓周上ノ一點Pニ於ケル切線ガ平行ナル他ノ兩切線トQ,Rニ於テ交ルトキハ,

$$PQ.PR=(\text{半徑})^2.$$



——(終リ)——

索引

發音ニ依リ五十音順ニ排列シタルモノ.
括弧內ノ數ハ頁數ヲ示ス.

發行所　東京市日本橋區通油町（電話浪花六七三番）　水野書店

印刷所　東京市京橋區弓町二十四番地　三協印刷株式會社

印刷者　東京市京橋區弓町二十四番地　高塚慶次

發行者　東京市日本橋區通油町十八番地　水野慶次郎

編纂者　三上義夫

編纂者　飯島正之助

明治四十一年二月廿一日再版發行
明治四十一年二月十八日訂正印刷
明治四十一年一月十七日發行
明治四十一年一月十四日印刷

定價金七拾五錢
平面幾何

終