608
161/1

初等微分積分學

東京工業大學教授
理學博士
渡 邊 孫 一 郎
著

增 訂 改 版

東 京 合名會社 裳 華 房 發 行

改 訂 ノ 序

本書ハ著者ガ曩ニ高等專門學校ニ於ケル微分積分學教科用又ハ參考用トシテ編纂シタ初等微分積分學ヲ改訂シタモノデアリマシテ本書ニ於テ修正シタ主要ナル事項ハ次ノ通リデアリマス.

1. 各章末ニ纏メテ揭ゲテ置イタ練習問題ヲ分割シテ隨所ニ挿入シタコト.
2. 不徹底ト思ハレタ說明ヲ詳細ニシタコト.
3. 各章ヲ通ジテ問題ヲ多少變更シタコト.
4. 應用方面ニ關スル若干ノ事項ヲ問題ノ中ニ入レタコト.

以上ハ主トシテ舊著ニ關シテ著者ニ寄セラレタ各位ノ高見ニ基ヅクモノデアリマシテ著者ハ此機會ニ是等ノ諸賢ニ對シテ厚ク感謝ノ意ヲ表スルモノデアリマス.

昭和十年九月

著 者 識 ス

初等微分積分學

目次

608
161/1

初等微分積分學

第一章

函數及ビ導函數

1. 常數, 變數

微分積分學ニ於テ取リ扱フ數ハ實數デアル. 故ニ單ニ數ト云ヘバ實數デアルモノト承知セラレタイ.

式 mx ヲ y ト置クナラバ $x=0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$ ニ對スル y ノ値ハ $0, m, 2m, 3m, \ldots\ldots$ トナル.

此陳述ニ於テハ m ハ一定ノ數ヲ代表スルモノト考ヘ, x, y ハイクツカノ數ヲ代表スルモノト考ヘテ居ル. 此例ノ m ノ如ク一定ノ數ヲ代表スル文字 (又ハ $2, \frac{1}{3}, -5$ ノ如キ一定ノ數) ヲ**常數**ト云ヒ, x, y ノ如クイクツカノ數ヲ代表スル文字ヲ**變數**ト稱スル. 而シテ變數ガ代表スル數ノ各ヲ此**變數ノ取ル値**又ハ此**變數ノ値**ト云フ.

多クノ場合ニ常數ニハ「あるふあべつと」ノ始メノ方ニアル文字 a, b, c 等ヲ用ヒ, 變數ニハ後ノ方ニアル文字 x, y, z 等ヲ用フル.

注意. 上ノ定義ニ從ヘバ變數トハ一ツノ記號ニ過ギナイ. 併シナガラ變數ノ値ト云フベキヲ略シテ屢變數ト稱スル.

2. 函　數

二ツノ變數 x ト y[1] トガアツテ, x ノ値ガ定マルトキソレニ準ジテ y ノ値ガ定マル場合ニハ y ハ x ノ**函數**デアルト云フ.

x ノ値ガ定マルトキソレニ準ジテ y ノ値ガ定マルト云フ以上 x ト y トノ間ニハ何等カノ關係ガナケレバナラヌ. ソノ關係ヲ x ト y トノ間ノ**函數的關係**ト云フ.

例ヘバ x ト y トノ間ニ $y=x^2-1$ ナル關係ガアルトスレバ x ノ値ガ定マルトキ y ノ値ガ定マル, 即チ y ハ x ノ函數デアル. 又 $x>0$ ナラバ $y=x^2$, $x\leqq 0$ ナラバ $y=\sin x$ トスルト, ヤハリ x ノ値ニヨツテ y ノ値ガ定マル, 即チ y ハ x ノ函數デアル.[2]

以上ハ x ノ任意ノ値ニ對シテ函數ノ値ガ定マル場合ノ函數ノ定義デアルガ, x ノ取ル値ニ制限ガアル場合ニ於テモソノ制限内ノ x ノ各ノ値ニ對シテ y ノ値ガ定メラレルトキハソノ制限内ノ x ニ對シテ y ハ x ノ函數デアルト云フ. ソシテソノ制限ノ下ニ取リ得ル x ノ値ノ全體ヲ變數 x ノ**變域**又ハ函數 y ノ**定義域**ト云フ.

例ヘバ $y=\sqrt{1-x^2}$ ニ於テハ $-1\leqq x\leqq 1$ ナル x ニ對シテノミ y ハ實數値ヲ取ルガ故ニ其制限ノ下ニアル x ニ對シテ y ハ x ノ函數トナル. 此場合 -1 ト 1 トノ間ニアル數ノ全體 (-1, 1 ヲ含ム) ガ變數 x ノ變域デアリ, 函數 y ノ定義域デアル.

變數 x ノ函數ヲ表スニ次ノ如キ記號ヲ用フル.

$$f(x),\qquad \phi(x),\qquad \mathrm{F}(x)$$

---

(1) 時トシテハ y ハ常數デアルコトモアル.

(2) 此例ニ於テハ y ハ x ヲ含ム一ツノ式トシテ書キ表スコトハ出來ヌガ, x ヲ含ム一ツノ式トシテ y ヲ書キ表シ得ルト否トニ拘ラズ x ノ値ガ定マレバ y ノ値ガ定マルト云フ意味ニ於テ y ハ x ノ函數デアル.

而シテ y ガ x ノ函數デアルコトヲ示スニ

$$y=f(x),\quad y=\phi(x),\quad y=\mathrm{F}(x)$$

等ノ等式ヲ以テスル. 又 x ガ或數 a ニ等シイトキノ函數 $f(x)$ ノ値ヲ表スニ $f(a)$ ヲ以テスル. 例ヘバ函數 x^2 ヲ $f(x)$ ニテ表スナラバ

$$f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad f(-2)=4,\ \ldots\ldots$$

デアル.

y ガ x ノ函數デアル場合ニハ x ヲ**自變數**, y ヲ**從屬變數**ト稱スルコトガアル.[1]

y ガ x ノ函數デアルト云フノハ上ニ定義セル如ク x ノ一ツノ値ニ對シテ y ノ値ガ定マルト云フダケデアツテ, y ノ値ハ必ズシモ一ツナルヲ要シナイ. 例ヘバ x ト y トノ間ニ $x^2+y^2=1$ ナル關係ガアルトスレバ, 之ヲ y ニツイテ解クトキ

$$y=\pm\sqrt{1-x^2}$$

トナリ, -1 ト 1 トノ間ノ x ノ任意ノ値ニ對シテ y ノ値ハ二ツニ定マルノデアツテ, ヤハリ y ハ x ノ函數デアル.

x ノ一ツノ値ニ對シテ函數 y ノ値ガ唯一ツ存在スル場合ニハ之ヲ**一値函數**ト云ヒ, 然ラザル場合ニハ之ヲ**多値函數**ト云フ. 而シテ多値函數ハソノ取ル値ノ數ニヨツテ**二値函數**, **三値函數**等ニ分ケラレル. 上ニ示セルハ二値函數デアル. 又 $y=\sin^{-1}x$ ノ如キハ**無限多値函數**ト稱スベキモノデアル.

多値函數ハ之ヲイクツカノ一値函數ニ分ツコトガ出來ル. 例ヘバ上ニ例示セル二値函數ハ

$$y=\sqrt{1-x^2},\qquad y=-\sqrt{1-x^2}$$

---

(1) 併シナガラ y ガ x ノ函數ナルモ x ガ又他ノ變數ノ函數ナル如キ場合ニハ, x ヲ自變數ト稱スルハ實ハ妥當デナイ.

ナル二ツノ一値函數ニ分ケテ考ヘルコトガ出來ル. 故ニ以下吾人ハ多値函數ノ出デ來ル場合ニハ之ヲイクツカノ一値函數ニ分ケテ考ヘルコトニシ, 單ニ函數ト云ヘバ一値函數ヲ意味スルモノト定メテ置ク.

y ガ x ノ函數デアルトキハ x ガ亦 y ノ函數トナル.[1] 例ヘバ $y=x^2$ ナル場合ニハ之ヲ x ニツキ解ケバ $x=\pm\sqrt{y}$ トナリ, x ガ y ノ函數トナル. 斯クノ如キ二ツノ函數 x^2, $\pm\sqrt{y}$ ヲ互ニ逆ナル函數ト稱スル. 但シ函數的關係ダケヲ考ヘル場合ニハ異ナル自變數ヲ用フル必要ガナイカラ之ヲ同一自變數ノ函數ニ直シテ x^2 ト $\pm\sqrt{x}$ トヲ互ニ逆ナル函數ト稱シテ居ル. 一般ニ $y=f(x)$ ヨリ $x=\phi(y)$ ヲ得ル場合ニハ函數 $f(x)$ ト函數 $\phi(x)$ トヲ**互ニ逆ナル函數**ト呼ブ. 故ニ $y=f(x)$ ト $y=\phi(x)$ トガ互ニ逆ナル函數デアル場合ニハ之ヲ x, y 間ノ關係式ト見ルナラバ單ニ x ト y トノ交換ニヨツテ一方カラ他方ガ得ラルベキデアル. 上ノ例ヨリ見ル如ク一値函數ノ逆函數ハ必ズシモ一値函數デハナイ.

注意. 上ニ說明セル如ク

$$y=f(x)$$

ナル等式ハ y ガ x ノ函數ナルコトヲ示スニ過ギナイノデアツテ決シテ y ガ x ヲ含ムーツノ式ニ等シイト云フ意味デハナイ. 併シナガラ初等微分積分學ニ於テ取リ扱フ多クノ函數ハ變數ヲ含ムーツノ式トシテ表サレルノデアル故, 大體ニ於テ $f(x)$ ハ x ヲ含ムーツノ式ト考ヘテ差支ナイ.

(1) $y=1$ ノ如キ函數ニ於テハ x ヲ y ノ函數トシテ表スコトハ出來ヌ. 此樣ナ場合ハ勿論除外シテノ事デアル.

3. 函數ノぐらふ

x ノ函數 $f(x)$ ガ與ヘラレタトキ解析幾何學ニ於ケル如ク, 一ツノ直交軸ヲ取ツテ方程式

$$y=f(x)$$

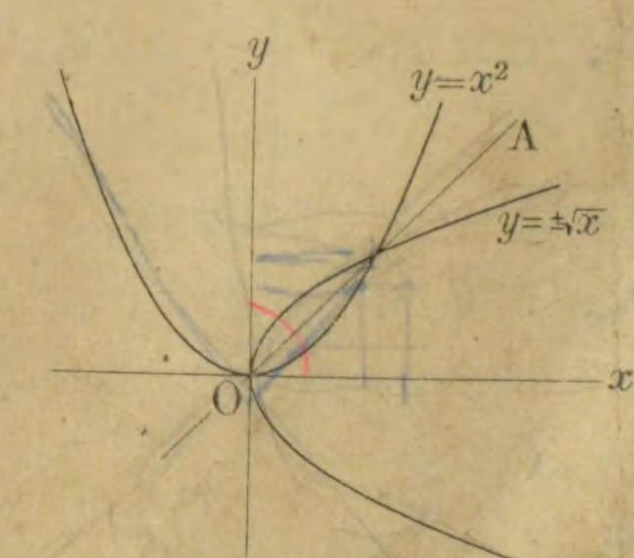
ノ表ス曲線ヲ畫クナラバ, 自變數 x ノ變化ニ伴フ函數 $f(x)$ ノ變化ノ狀態ヲ一目瞭然タラシメルコトガ出來ル. 函數 $f(x)$ ノ研究ニハ此曲線ハ必要缺クベカラザルモノデアル. 此曲線ヲ函數 $f(x)$ ノ**ぐらふ**ト云フ.[1]

例ヘバ函數 x^2 ノぐらふハ方程式 $y=x^2$ ニヨツテ表サレル曲線卽チ拋物線デアリ, 又函數 $\dfrac{1}{x}$ ノぐらふハ方程式 $y=\dfrac{1}{x}$ ニヨツテ表サレル曲線卽チ雙曲線デアル.

二ツノ函數

$$y=f(x); \qquad y=\phi(x)$$

ガ互ニ逆ナル函數デアル場合ニハ之ヲ x, y 間ノ關係式ト見ルナラバ x ト y トノ交換ニヨツテ一方カラ他方ガ得ラレルノデアルカラ點 (x', y') ガ第一ノぐらふ上ニアルナラバ點 (y', x') ハ第二ノぐらふ上ニアル. 而シテ點 (x', y') ト點 (y', x') トハ軸角 xOy ノ二等分線ニ關シテ對稱デアルカラ互ニ逆ナル函數ノぐらふモ軸角 xOy ノ二等分線ニ關シテ對稱デアル.



例ヘバ $y=x^2$, $y=\pm\sqrt{x}$ ノぐらふハ右圖

(1) 時トシテハ $y=f(x)$ ハ曲線ヲ表サナイコトガアルカモ知レヌ. ソノ様ナ場合ハ今考ヘナイコトニスル.

ニ於ケル如ク軸角 xOy ノ二等分線 OA ニ關シテ對稱デアル.

函數 $f(x)$ ガ

$$f(-x)=f(x)$$

ナル關係ヲ滿足スル場合ニハ $f(x)$ ハ**偶函數**デアルト云フ. 例ヘバ x^2, $x^2+\frac{1}{x^4}$, $\cos x$ 等ハ偶函數デアル. 又函數 $f(x)$ ガ

$$f(-x)=-f(x)$$

ヲ滿足スル場合ニハ $f(x)$ ハ**奇函數**デアルト云フ. 例ヘバ x^3, $x^3+\frac{1}{x^5}$, $\sin x$ 等ハ奇函數デアル. 偶函數ノぐらふハ y 軸ニ關シテ對稱デアリ, 奇函數ノぐらふハ原點ニ關シテ對稱デアル. 例ヘバ x^2 ノぐらふハ y 軸ニ關シテ對稱デアリ, $\frac{1}{x}$ ノぐらふハ原點ニ關シテ對稱デアル.

問 題 1.

1. $f(x)=x^3-2x+2$ ナルトキ $f(2)$, $f(-3)$, $f\left(\frac{2}{x}\right)$ ヲ求ム.

2. $f(x)=x^3+x^2-3$ ナルトキ $f(x+h)$, $f(2x^2+1)$ ヲ求ム.

3. 函數 $f(x)$, $\phi(x)$ ノぐらふガ直線 $x=a$ ニ關シテ互ニ對稱ナル條件ヲ求ム. ヨリテ函數 $f(x)$ ガ $f(x)=f(2a-x)$ ヲ滿足スルトキハ $f(x)$ ノぐらふハ直線 $x=a$ ニ關シテ對稱ナルコトヲ證明セヨ.

4. 函數 $f(x)$, $\phi(x)$ ノぐらふガ點 $(a, 0)$ ニ關シテ互ニ對稱ナル條件ヲ求メ, ヨリテ $f(x)$ ガ $f(x)=-f(2a-x)$ ヲ滿足スルトキハ $f(x)$ ノぐらふハ點 $(a, 0)$ ニ關シテ對稱ナルコトヲ證明セヨ.

5. 函數 $f(x)$, $\phi(x)$ ノぐらふガ點 (a, b) ニ關シテ互ニ對稱ナル條件ヲ求ム [二點 (x, y), (ξ, η) ガ點 (a, b) ニ關シテ對稱ナル條件ハ $x+\xi=2a$, $y+\eta=2b$ デアル 之ヲ利用セヨ].

6. 直線 $x+y=0$ ニ關シテ曲線 $y=f(x)$ ニ對稱ナル曲線ノ方程式ヲ求ム.

7. 直線 $x=y+1$ ニ關シテ曲線 $y=f(x)$ ニ對稱ナル曲線ノ方程式ヲ求ム.

8. 直線 $y=mx$ ニ關シテ曲線 $y=f(x)$ ニ對稱ナル曲線ノ方程式ヲ求ム.

4. 函數ノ極限値

$$y=f(x)$$

ヲ x ノ函數トスル. $x=x_1$ ナルトキノ函數ノ値ハ存在シテモ, 又ハ存在シナクトモ何レニテモ宜シイ. 今 x ヲ x_1 ニ漸次近ヅケルトキ函數 y ノ取ル値ト常數 y_1 トノ差ヲ何程ニテモ小ナラシメ得ル場合, 通俗的ニ云ヘバ, x ガ, x_1 以外ノ, x_1 ニ極メテ近イ値ヲ取ルトキ函數 y ノ取ル値ガ大略 y_1 ニ等シイト云フ場合ニハ, **x ガ x_1 ニ收斂スルトキ y ハ y_1 ニ收斂スル**又ハ **x ガ x_1 ニ限リナク近ヅクトキ y ハ y_1 ニ限リナク近ヅク**或ハ **x ガ x_1 ニ收斂スルトキノ y ノ極限**(若シクハ**極限値**) **ハ y_1 デアル**ト稱スル[1]. 而シテ此事實ヲ次ノ如クニ書イテ表ス.

$$x\longrightarrow x_1 \quad ナルトキ \quad y\longrightarrow y_1$$

又ハ 16 9 12

$$\lim_{x\to x_1} y=y_1$$

例ヘバ函數 $y=\frac{x^2-4}{x-2}$ ニ於テハ $x=2$ ナルトキノ函數ノ値ハ存在シナイケレドモ x ガ 2 ニ等シクナイナラバ如何ニ 2 ニ近イ數デアッテモ $y=x+2$ トナル故 x ヲ漸次 2 ニ近ヅケルナラバ y ト 4 トノ差ヲ何程ニテモ小ナラシメルコトガ出來ル. 故ニ x ガ 2 ニ收斂スルトキハ y ハ 4 ニ收斂スル. 式ニテ表セバ

$$x\to 2 \quad ナルトキ \quad y\to 4$$

又ハ

$$\lim_{x\to 2} y=4$$

時トシテハ x ヲ x_1 ヨリ大ニシテ x_1 ニ漸次近ヅケルトキ函數 y ノ取ル値ト常數 y_1 トノ差ヲ何程ニテモ小ナラシメ得ル場合ガアル. 此時ハ **x ガ x_1 ヨリ大デアッテ x_1 ニ限リナク近ヅクト**

(1) 之ヲ又次ノ如クニ云ヒ表スコトモアル.
x ガ x_1 ニ限リナク近ヅク極限ニ於テ y ハ y_1 トナル.

キ y ハ y_1 ニ限ナク近ヅク等ノ語ヲ用ヒテ表シ式ニテ次ノ如クニ書ク.

$$x \longrightarrow x_1 + 0 \quad ナルトキ \quad y \longrightarrow y_1$$

又ハ

$$\lim_{x \to x_1+0} y = y_1$$

例ヘバ $y = \sqrt{x-1}$ ニ於テハ

$$\lim_{x \to 1+0} y = 0$$

同様ニ

$$\lim_{x \to x_1-0} y = y_1$$

ヲ定義スルコトガ出來ル.

函數 $y = f(x)$ ニ於テ x ヲ正トシテ漸次其値ヲ增大セシムルトキ函數 y ノ取ル値ト常數 y_1 トノ差ヲ何程ニテモ小ナラシメ得ル場合ニハ **x ガ正デアツテ限リナク大ナルトキ（又ハ正無限大トナルトキ）函數 y ハ y_1 ニ收斂スル（又ハ函數ノ極限値ハ y_1 トナリ或ハ函數ハ限リナク y_1 ニ近ヅク）**ト稱スル. 而シテ此事ヲ

$$x \longrightarrow +\infty \quad ナルトキ \quad y \longrightarrow y_1$$

又ハ

$$\lim_{x \to +\infty} y = y_1$$

ト書イテ表ス. 若シ x ヲ負トシテ其絶對値ヲ漸次增大セシムルトキ y ト y_1 トノ差ヲ何程ニテモ小ナラシメ得ル場合ニハ

$$\lim_{x \to -\infty} y = y_1$$

例ヘバ函數 $y = 1 - \dfrac{1}{x}$ ニ於テハ x ヲ正トスルモ負トスルモ, 其絶對値ヲ漸次增大セシメルト函數ノ値ヲ何程ニテモ 1 ニ接近セシメルコトガ出來ルカラ

$$\lim_{x \to +\infty} y = 1, \qquad \lim_{x \to -\infty} y = 1$$

コノ二ツヲ纏メテ

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = 1$$

以上ニテハ函數ノ極限値ガ存在スル場合[1]ヲ考ヘタノデアルガ函數ノ値ガ限リナク大トナル場合モ同樣ニ定義スルコトガ出來ル. 例ヘバ

$$\lim_{x \to x_1} y = +\infty$$

デアルトハ x ヲ x_1 ニ漸次近ヅケルトキ y ハ正トナリ而シテ其絶對値ハ何程ニテモ大トナルコトガ出來ルト云フコト, 又

$$\lim_{x \to +\infty} y = -\infty$$

デアルトハ x ヲ正トシテ漸次其値ヲ增大シ行クナラバ y ハ負トナリ而シテ其絶對値ハ何程ニテモ大トナルコトガ出來ルトノ意デアル. 他ノ場合モ類推セラレタイ.

注意 1. 以上ニ説明セル如ク $+\infty$ 又ハ $-\infty$ ナル記號ハ一ツノ定マツタ數ヲ表スモノデハナク, 自變數 x 又ハ函數 y ノ變化スル狀態ヲ表ス記號ニ過ギナイ. 例ヘバ

$$\lim_{x \to x_1} y = +\infty$$

デアルトハ $+\infty$ ナル一ツノ數ガアツテ x ヲ x_1 ニ漸次近ヅケルトキ y ガ其數ニ何程ニテモ近ヅクコトガ出來ルトノ意デハナク, x ヲ漸次 x_1 ニ近ヅケルトキ y ハ正デアツテ其絶對値ハ何程ニテモ大トナルコトガ出來ルトノ意デアルコトニ注意セラレタイ.

注意 2. $y \to y_1$, $y \to +\infty$, $y \to -\infty$ ノ何レカナル場合ニハ y ノ**極限ハ確定デアル**ト云ヒ, 此何レデモナイ場合ニハ y ノ**極限ハ不定デアル**ト稱スルコトガアル. 例ヘバ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$ ハ不定デアル.

注意 3. $\lim\limits_{x \to x_1} y = y_1$ トハ x ヲ x_1 ニ漸次近ヅケルトキ y ノ値ト y_1 トノ差ヲ何程ニテモ小ナラシメ得ルト云フコトデアルト云ツタガ x ヲ x_1 ニ漸次近ヅケルトキ y ノ値ト y_1 トノ差ヲ何程ニテモ小ナラシメ得ルト云フコトハ一體ドウ云フコトカ. ソレヲ説明スル必要ガアルノデアル. コレハ次ノ樣ナ意味デアル.

---

[1] 函數ノ極限値ガ存在スルトハ函數ガ一定ノ數ニ收斂スルト云フ意味デアル.

一ツノ正數 ε ヲ先ヅ以テ與ヘル. コレハ何程小デモ宜シイ. 此 ε ニ對シテ他ノ一ツノ正數 δ ヲ適當ニ選ブナラバ $0<|x-x_1|<\delta$ ナル總テノ x ニ對シテ不等式 $|y-y_1|<\varepsilon$ ガ成立スル.

コレガ x ヲ x_1 ニ漸次近ヅケルトキ y ノ値ト y_1 トノ差ヲ何程ニテモ小ナラシメ得ルト云フコトノ數學的意義デアル. 從ツテ $\lim\limits_{x\to x_1} y=y_1$ ナルコトヲ云フニハ實ハ一一上ノ樣ナ ε ニ對シテ δ ガ定メラレルト云フコトヲ證明セネバナラヌノデアル. 併シナガラ一一此定義ニ照ラシテ極限値ヲ確カメルコトハ仲仲厄介デアル. 故ニ以下本書ニテハ常識ニ訴ヘテ極限値ヲ判斷スルコトニシ嚴密ナル證明ハ省クコトニスル.

注意 4. $x\to x_1$ ナルトキ $y\to y_1$ ナリト云フ陳述ニ於ケル $x\to x_1$ ハ $x=x_1$ ナル場合ヲ除外シテ居ルノデアルガ $y\to y_1$ ハ $y=y_1$ ナル場合ヲ除外シテ居ナイ. 例ヘバ $y=2$ ナル函數ニ於テハ上ノ定義ニ從ツテ $\lim\limits_{x\to 0} y=2$ デアツテ y ハ絶エズ 2 ナル値ヲ取リツツ 2 ニ收斂スルノデアル. 同ジ記號デ表サレテ居ル $x\to x_1$ ト $y\to y_1$ トガ意義ヲ異ニシテ居ルコトニ注意セラレタイ.

5. 極限ニ關スル定理

以下常識的ニ認メ得ル, 極限ニ關スル代表的ノ定理ヲ列擧スル.

I. $\lim\limits_{x\to x_1} f_1(x)=y_1,\quad \lim\limits_{x\to x_1} f_2(x)=y_2$

ナラバ

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to x_1}\{f_1(x)\pm f_2(x)\}=y_1\pm y_2{}^{(1)}\\&\lim_{x\to x_1} f_1(x)f_2(x)=y_1y_2\end{aligned}\right\}^{(2)}$$

II. $\lim\limits_{x\to x_1} f_1(x)=y_1,\quad \lim\limits_{x\to x_1} f_2(x)=y_2$ デアツテ $y_2\neq 0$ ナラバ

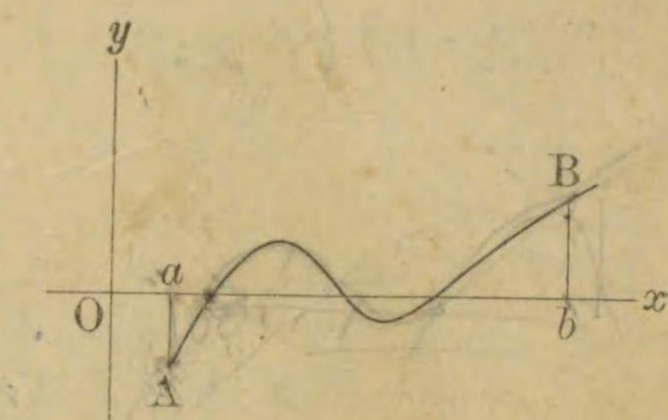
$$\lim_{x\to x_1}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{y_1}{y_2}{}^{(2)}$$

(1) $f_1(x)$ ノ極限値 y_1 及ビ $f_2(x)$ ノ極限値 y_2 ガ共ニ存在スルナラバ $f_1(x)\pm f_2(x)$ ノ極限値モ存在シ且ツ其値ガ $y_1\pm y_2$ ニ等シイト云フコトヲ此等式ハ表シテ居ルノデアル. 他モ類推セラレタイ.

(2) $x\to x_1$ ノ代リニ $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ トスルモ勿論成立スル.

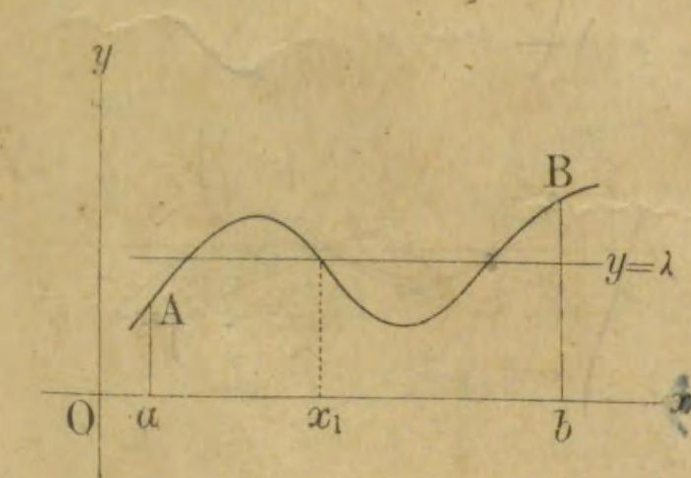
吾人ハ之ヲ假定シテ之ヨリ得ラレル一二ノ結論ヲ下ニ掲グル.

(i) 函數 $y=f(x)$ ガ區域 (a,b) 内ニテ連續デアツテ且ツ $f(a)$ ト $f(b)$ トガ異符號ヲ有スルナラバ區域 (a,b) 内ノ少クモ一ツノ x ノ値ニ對シテ $f(x)$ ハ零トナル. 換言セバ方程式 $f(x)=0$ ハ a ト b トノ間ニ少クモ一ツノ根ヲ有スル.



$f(a)$ ト $f(b)$ トガ異符號ヲ有スルナラバ $x=a$ ニ對スルぐらふ上ノ點 A ト $x=b$ ニ對スルぐらふ上ノ點 B トハ x 軸ニ對シテ反對ノ側ニアル. 而シテぐらふハ $\overset{\frown}{AB}$ 間ニテ連續デアルカラ少クトモ一回 x 軸ヲ截ラネバナラヌ. 其交點ノ横座標ヲ x_1 トスルナラバ $f(x_1)=0$ デアル. コレ卽チ本定理デアル.

(ii) 函數 $y=f(x)$ ガ區域 (a,b) 内ニテ連續デアツテ, λ ガ $f(a)$ ト $f(b)$ トノ間ノ一ツノ數デアルトキハ區域 (a,b) 内ノ少クモ一ツノ x ニ對シテ $f(x)$ ハ λ ニ等シクナル. 換言セバ方程式 $f(x)=\lambda$ ハ a, b 間ニ少クトモ一ツノ根ヲ有スル.



函數 $f(x)$ ノぐらふニ於テ $x=a$ ニ對スルぐらふ上ノ點ヲ A, $x=b$ ニ對スルぐらふ上ノ點ヲ B トシ, λ ヲ $f(a)$ ト $f(b)$ トノ間ノ一ツノ數トスレバ, $y=\lambda$ ナル直線ハ $\overset{\frown}{AB}$ 間ニ

テ少クトモ一回ぐらふト交ラネバナラヌ. 其交點ノ横座標ヲ x_1 トスレバ $f(x_1)=\lambda$ デアル. コレ本定理ノ主張デアル.

定理 (ii) ハ次ノ如クニ述ブルコトモ出來ル.

區域 (a, b) 内ニテ連續ナル函數 $f(x)$ ハ x ガ a カラ b マデ變ズル間ニ $f(a)$ ト $f(b)$ トノ間ニアル任意ノ値ヲ少クトモ一度ハ通過スル.[1]

尙極限ニ關スル定理ヨリシテ連續ニ關スル次ノ定理ヲ得ルコト容易デアル.

I. $f(x)$, $\phi(x)$ ガ $x=x_1$ ニ於テ連續デアルトキハ次ノ函數ガ亦 $x=x_1$ ニ於テ連續デアル.

(1) $f(x)+\phi(x)$ (2) $f(x)-\phi(x)$ (3) $f(x)\phi(x)$

即チ連續函數ノ和, 差, 積ハ亦連續函數デアル.

II. $f(x)$, $\phi(x)$ ガ $x=x_1$ ニ於テ連續デアツテ且ツ $\phi(x_1)$ ガ零デナイナラバ

$$\frac{f(x)}{\phi(x)}$$

ガ亦 $x=x_1$ ニ於テ連續デアル. 即チ分子, 分母ガ連續函數ナル分數式ハ分母ガ零トナラヌ限リ連續函數デアル.

III. 函數 $y=f(x)$ ハ $x=x_1$ ニ於テ連續デアリ, 且ツ $x=x_1$ ナルトキ y_1 ナル値ヲ取ルトシ, 次ニ y ノ函數 $z=\phi(y)$ ハ $y=y_1$ ニ於テ連續デアルトスル. 然ルトキハ z ヲ x ノ函數ト見ナスト

(1) 區域 (a, b) 内ニテ連續ナル函數ハ (a, b) 間ニ他ノ二數 c, d ヲ任意ニ取ルトキ區域 (c, d) 内ニテモ勿論連續トナル. 故ニ區域 (a, b) 内ニテ連續ナル函數 $f(x)$ ハ x ガ a, b 間ニ於テ任意ノ一ツノ値 c ヨリ任意ノ他ノ値 d マデ變ズル間ニ $f(c)$ ト $f(d)$ トノ間ノ任意ノ値ヲ少クトモ一度ハ通過スル.

キ $x=x_1$ ニ於テ連續デアル. 即チ連續函數ノ連續函數ハ亦一ツノ連續函數デアル.[1]

吾人ノ日常遭遇スル函數ハ意味ヲ有スル限リ連續デアルノデアル. 例ヘバ $\sqrt{x}$ ハ正ナル x ニ對シテ連續, $\sin x$, $\cos x$ 等ハ x ノ總テニ對シテ連續, $\tan x$ ハ $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n, 整數) ヲ除イテ連續トナルガ如キデアル.[2]

7. 函數ノ不連續

$x=x_1$ ニ對シテ x ノ函數 $y=f(x)$ ガ連續ノ條件ヲ滿足シナイ場合ニハ $x=x_1$ ニ於テ函數ハ**不連續ニナル**ト云フ. $x=x_1$ ニ於テ函數ガ連續デアルタメニハ次ノ三條件ガ必要デアル.

(i) $f(x)$ ハ $x=x_1$ ニ於テ定値ヲ取ル.

(ii) $\lim\limits_{x\to x_1} f(x)$ ハ存在スル.

(iii) $\lim\limits_{x\to x_1} f(x)$ ト $f(x_1)$ トハ相等シイ.

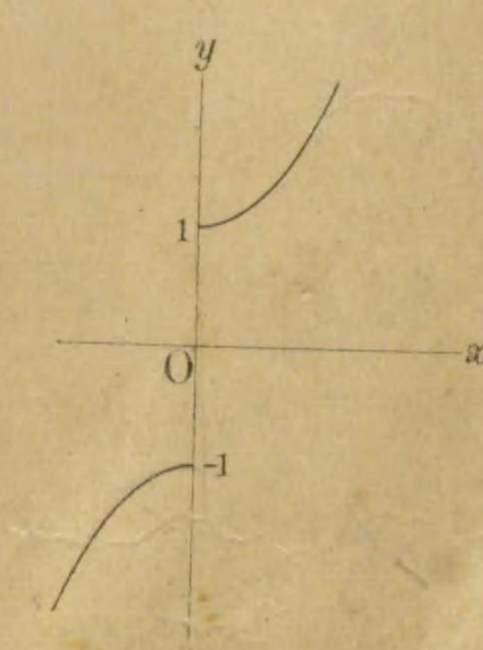
故ニ此三條件ノ何レガ缺ケテモ函數ハ不連續トナル.

例 1. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

此函數ニ於テハ $x=2$ ニ對シテ函數ノ値ハ存在セヌ. 故ニ此函數ハ $x=2$ ニ於テ不連續トナル.

例 2. $x \geqq 0$ ナラバ $f(x)=x^2+1$

$x<0$ ナラバ $f(x)=-(x^2+1)$



此函數ニ於テハ

(1) コレハ第5節 IV ヨリノ結論デアルガ例外ナシニ成立スル定理デアル.

(2) 勿論是等ハ證明ヲ要スルコトデアル.

$$\lim_{x\to+0} f(x)=1,\quad \lim_{x\to-0} f(x)=-1^{(1)}$$

デアッテ x ガ正ニシテ零ニ收斂スルカ，負ニシテ零ニ收斂スルカニヨツテ函數ノ極限値ガ異ナル故 $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ ノ値ハ存在セヌ．故ニ函數ハ $x=0$ ニ於テ不連續トナル．ぐらふハ前頁ノ圖ノ如キ曲線トナリ $x=0$ ニ對シテ不連續ノ曲線トナル．

例 3.

$$x \neq 2 \text{ ナラバ } f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$$

$$x = 2 \text{ ナラバ } f(x)=$$

此函數ニ於テハ $x=2$ ニ對シテ函數ノ値ハ存在~~スルガ~~

$$\lim_{x\to2} f(x)=4,\qquad f(2)=$$

デアルカラ

$$\lim_{x\to2} f(x)\neq f(2)$$

トナリ，函數ハ不連續トナル．

注意 1. 例 1 ニ於ケル函數 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ ニ於テ $x=2$ ハ函數ノ定義域中ニナイタメ $x=2$ ニ於テ函數ハ不連續トナツタノデアルガ函數ノ極限値ナル 4 ヲ以テ $x=2$ ナルトキノ函數ノ値ト定メルナラバ函數ハ $x=2$ ニ於テ連續トナル．以後吾人ハ此ノ様ナ規約ヲスルコトニスル．卽チ函數 $f(x)$ ハ $x=x_1$ ニ於テ定義セラレテ居ナイガ $\lim\limits_{x\to x_1} f(x)$ ハ存在スルト云フ場合ニハ此極限値ヲ以テ $x=x_1$ ナルトキノ函數ノ値ト定メル．此規約ノ結果トシテ函數 $f(x)$ ハ $x=x_1$ ニ於テ連續トナルノデアル．

注意 2. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ノ如キ函數ニ於テハ $x\to0$ ナルトキ函數ハ無限大トナリ，$\lim\limits_{x\to0} f(x)$ ノ値ハ存在セヌ故，$x=0$ ナルトキノ函數ノ値ヲ如何様ニ定ムルトモ函數ハ $x=0$ ニ於テ連續トハナリ得ナイ．$x\to x_1$ ナルトキ函數ガ無限大トナル場合ニハ $x=x_1$ ニ於テ函數ハ必ズ不連續トナルノデアル．

8. 微分係數，導函數

自變數 x ガ x_1 カラ x_1+h マデ變ズル場合ノ函數 $y=f(x)$ ノ增分ヲ k トスルナラバ

$$k=f(x_1+h)-f(x_1)$$

---

(1) $x\to+0$ ハ $x\to0+0$ ト書クベキヲ略シタノデアル．同様ニ $x\to-0$ ハ $x\to0-0$ ノ略デアル．

落丁

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 \text{ (1)}$$

例 3. $y = \dfrac{1}{x^2}$ (2)

$$\Delta y = \frac{1}{(x+\Delta x)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - (x+\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2 x^2} = \frac{-2x\Delta x - \Delta x^2}{(x+\Delta x)^2 x^2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2x + \Delta x}{(x+\Delta x)^2 x^2} \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2}{x^3} \text{ (3)}$$

例 4. $y = \sqrt{x}$ (4)

$$\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ (5)}$$

注意 1. 以上ハ極限値 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ガ存在スル場合デアルガ x ノ或値ニ對シテハ此極限値ガ存在シナイコトモアル．$x = x_1$ ニ對シテ極限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ガ正又ハ負ノ無限大トナル場合，即チ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \qquad \text{又ハ} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$$

ナル場合ニハ $x = x_1$ ニ對スル，又ハ $x = x_1$ ニ於ケル，**函數 y ノ微分係數ハ正**又ハ**負ノ無限大デアル**ト云フ．

例 5.

$$y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\Delta y = \sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}$$

$\therefore$ $x = 0$ ニ對シテハ

$$\Delta y = \sqrt[3]{\Delta x}, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}$$

---

(1) 第 5 節，定理 I ヲ使用シタノデアル．

(2) $x \neq 0$ ナルベキコト勿論デアル，

(3) 第 5 節，定理 II ヲ使用シタノデアル．

(4) $x > 0$ ナルベキコト勿論デアル．以後此種ノ斷リ書キヲ省ク．

(5) $\sqrt{x}$ ノ連續性ヲ使用シテ居ル．以後此種ノ斷リ書キヲ省略スル．

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$$

即チ $x=0$ ニ於ケル函數 $y=\sqrt[3]{x}$ ノ微分係數ハ $+\infty$ デアル.

注意 2. 極限値 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ノ存在ノ如何ニ拘ラズ, 極限 $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ノ確定ナル場合[1]ニハ之ヲ**右方微分係數**, 極限 $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ノ確定ナル場合ニハ之ヲ**左方微分係數**ト稱スル.

例 6. $x \geqq 0$ ナラバ $y=x$, $x<0$ ナラバ $y=-x$ ニヨツテ x ノ函數 y ヲ定メタトスル.

$x=0$ ニ於テハ $\Delta x>0$ ナラバ $\Delta y=\Delta x$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=1, \quad \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$

又 $x=0$ ニ於テハ $\Delta x<0$ ナラバ $\Delta y=-\Delta x$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=-1, \quad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=-1$$

即チ $x=0$ ニ於ケル此函數ノ右方微分係數ハ 1 デアリ, 左方微分係數ハ -1 デアル.

注意 3. x ノ函數 $y=f(x)$ ノ微分係數ガ $x=x_1$ ニ於テ存在スルナラバ函數 y ハ當然 $x=x_1$ ニ於テ連續トナル. 何トナレバ $x=x_1$ ニ於ケル y ノ微分係數ヲ m トスルナラバ $x=x_1$ ニ於テハ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=m$$

故ニ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=m+\varepsilon \quad \text{..(A)}$$

ト置クナラバ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon=0$$

デアル. 然ルニ (A) 式ヨリ

$$\Delta y=(m+\varepsilon)\Delta x$$

故ニ $\Delta x \to 0$ ナルトキ $\Delta y \to 0$ トナリ從ツテ y ハ $x=x_1$ ニ於テ連續トナル.

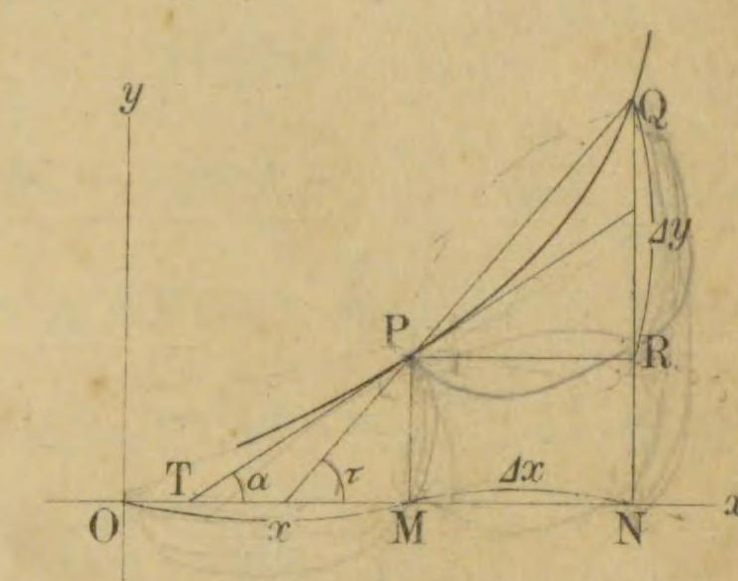
コレノ逆ハ必ズシモ成立シナイ. 即チ函數ハ連續デアツテモ微分係數ノ存在シナイコトガアル. 例ヘバ函數 $y=\sqrt[3]{x}$ ハ $x=0$ ニ於テ連續デハアルガ微分係數ハ $+\infty$ デアル. (本節, 例 5).

(1) [illegible] ナル場合ノコトデアル (第4節, 注意 [illegible]

9. 微分係數ノ幾何學的意義

$$y=f(x)$$

ヲ x ノ連續函數トスル. 今一ツノ直交軸ヲ用ヒテ此函數ノぐらふヲ畫キ, 此曲線上ニ二點 P, Q ヲ取リ此二點ノ横座標ヲソレゾレ x 及ビ $x+\Delta x$ トスルナラバ縦座標ハソレゾレ $f(x)$ 及ビ $f(x+\Delta x)$ トナル. 故ニ P, Q 二點ヨリ x 軸ニ垂線ヲ下シ x 軸トノ交點ヲ M, N トシ, 次ニ P 點ヨリ x 軸ニ平行ニ引イタ直線ト NQ トノ交點ヲ R トスルナラバ



$$\mathrm{PR}=\mathrm{MN}=\Delta x \text{ [1]}$$

$$\mathrm{RQ}=\mathrm{NQ}-\mathrm{MP}=f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y \text{ [2]}$$

ヨツテ PQ 直線ガ x 軸トナス角 (詳シク云ヘバ x 軸ノ正ノ方向ト, x 軸ヨリ上方ニ向ヘル直線ノ方向トノナス角) ヲ τ ニテ表スナラバ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{PR}}=\tan\tau \quad \text{..................................(1)}$$

ソコデ Δx ヲ限リナク小ナラシムレバ Δy モ限リナク小トナリ R 點ガ P 點ニ限リナク近ヅクト同時ニ Q 點ニ曲線上ニ於テ P 點ニ限リナク近ヅク. 而シテ此時 PQ 直線ハ P 點ニ於ケル

(1) PR ハ R ガ P ノ右ニアレバ正, 左ニアレバ負トスルノデアル.
(2) RQ ハ Q ガ R ノ上ニアレバ正, 下ニアレバ負トスル.

曲線ノ切線 PT ニ限リナク近ヅク.[1] 故ニ切線 PT ト x 軸トノ間ノ角ヲ α トスルナラバ $\Delta x \to 0$ ナルトキ $\tau \to \alpha$. 從ツテ (1) 式ヨリ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha \quad \text{.........................}(2)$$

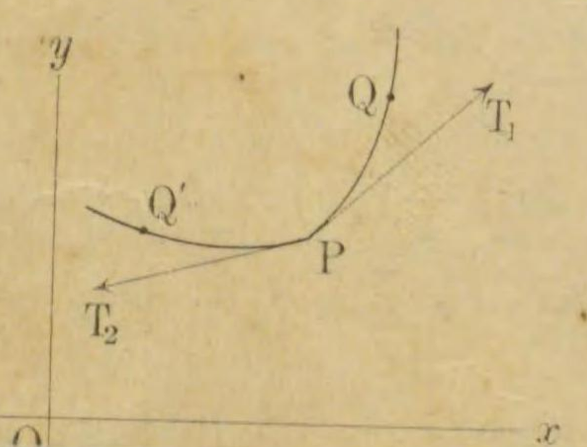
ヲ得ル. $\tan\alpha$ ハ切線 PT ノ方向係數（又ハ角係數）デアル. 故ニ微分係數 $\dfrac{dy}{dx}$ ハ曲線上ノ點 P ニ於ケル切線ノ方向係數, 卽チ P 點ニ於ケル曲線ノ勾配ヲ表スト云フコトニナル.[2]

注意 1. 若シ角 α ガ直角ナラバ (2) ノ代リニ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty$$

ヲ得ル. 卽チ P 點ニ於ケル切線ガ y 軸ニ平行ナルトキハ $\dfrac{dy}{dx}$ ハ無限大トナル.

注意 2. 以上ハ P 點ニ於ケル曲線ノ切線ガ唯一ツ存在スル場合デアルガ P 點ニ於テ右方ニ引ケル切線ト左方ニ引ケル切線ト一致シナイコトモアル. 卽チ曲線上ニ取ツタ點 Q ガ P 點ノ右方ニアルナラバ Q 點ガ P 點ニ限リナク近ヅクトキ直線 PQ ハ一ツノ直線 PT_1 ニ限リナク近ヅキ, 之ニ反シテ Q 點ガ P 點ノ左（圖ノ Q′ 點ノ如ク）ニアルナラバ PQ 直線ハ PT_1 ト異ナル直線 PT_2 ニ限リナク近ヅクト云フ場合デアル. コノ時ハ y ノ右方微分係數ハ PT_1 ノ方向係數ニ等シク, 又左方微分係數ハ PT_2 ノ方向係數ニ等シクナルノデアル.



(1) PQ 直線ガ切線 PT ニ限リナク近ヅクトハ PQ ト PT トノ間ノ角ガ 0 ニ收斂スルコトデアル. コレハ實ハ切線ノ定義デアル.

(2) 本節ノ所論ハ P 點ニ於ケル曲線ノ切線ガ先ヅ以テ存在スルコトヲ假定シ, 此假定ノ下ニ函數ノ微分係數ガ其切線ノ方向係數ニ等シイコトヲ證明シタニ過ギナイノデアルガ逆ニ函數 y ノ微分係數ガ存在スルナラバぐらふ上ノ點 P ニ於ケル切線ハ存在シ且ツ其方向係數ハ $\dfrac{dy}{dx}$ ニ等シイコトガ證明セラレルノデアル. 煩ヲ避ケテ今ハ之ヲ省略スル. 尚次ノ注意 1, 2 ニツイテモ之ガ成立スル.

問題 2.

次ノ極限値ヲ求ム (1—10).

1. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2+4x-5}{2x^2+x-3}$　　2. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{2x^2-x-6}{3x^2-2x-8}$

3. $\displaystyle\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{2x^2+11x+5}{4x^2-4x-3}$　　4. $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2+x+1}{4x^2-5}$

5. $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2+5}{5x^3-8x+1}$　　6. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-8}{x^n+1}$

7. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$　　8. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}$

9. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$　　10. $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^3}(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)$

11. 直角ノ二邊ガ b, c ナル直角三角形 ABC ノ斜邊 BC ヲ $(n+1)$ 等分スル點ヲ $M_1, M_2, \ldots\ldots, M_n$ トスルトキ

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}(AM_1^{\,2}+AM_2^{\,2}+\cdots\cdots+AM_n^{\,2})$$

ヲ求ム.

12. $k>0$ ナラバ方程式 $x-2\sin x=k$ ハ少クトモ一ツノ正根ヲ有スルコトヲ證明セヨ.

13. 方程式 $(x^2-1)\cos x+\sqrt{2}\sin x-1=0$ ハ少クトモ 0 ト 1 トノ間ニ一ツノ根ヲ有スルコトヲ證明セヨ.

次ノ函數ノ導函數ヲ求ム (14—17).

14. x^4　　15. $\sqrt[3]{x}$　　16. $\sqrt{a^2-x^2}$　　17. $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$

18. 函數 $y=x^{\frac{2}{3}}$ ノ $x=0$ ニ於ケル右方微分係數及ビ左方微分係數ヲ求ム. 且ツ原點ノ附近ニ於ケル此函數ノぐらふノ形ヲ畫ケ.

19. 函數 $y=\sqrt{x^2+x^4}$ ノ $x=0$ ニ於ケル右方微分係數及ビ左方微分係數ヲ求ム. 且ツ原點ノ附近ニ於ケル此函數ノぐらふノ形ヲ畫ケ.

第二章

微　分　法

10. 微分法ノ公式若干　(其一)

以下與ヘラレタル函數ノ導函數ヲ求ムル公式ヲ誘導スル．函數 $y=f(x)$ ノ導函數ヲ求ムルコトヲ函數 y ヲ x ニ就イテ**微分スル**ト稱スル．

(i)　常數ノ導函數

$$y=c,\qquad c,\ \text{常數}$$

此場合ニハ y ハ x ヲ含マヌ故 x ガ變ズルモ y ハ變ゼヌ．

卽チ
$$\Delta y=0$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=0\qquad \text{從ツテ}\quad y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$$

卽チ常數ノ微分係數ハ零デアル．

(ii)　$y=cf(x)$ ノ導函數，但シ c ハ常數

此函數ニ於テハ

$$\Delta y=cf(x+\Delta x)-cf(x)=c\{f(x+\Delta x)-f(x)\}=c\Delta f(x)$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=c\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

從ツテ
$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}c\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=cf'(x)$$

(iii)　x^m ノ導函數，但シ m ハ正ノ整數

$$y=x^m$$

ト置クナラバ

$$\Delta y=(x+\Delta x)^m-x^m$$
$$=\{(x+\Delta x)-x\}\{(x+\Delta x)^{m-1}+x(x+\Delta x)^{m-2}+\cdots\cdots+x^{m-1}\}$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=(x+\Delta x)^{m-1}+x(x+\Delta x)^{m-2}+\cdots\cdots+x^{m-1}$$

$$\therefore\quad y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=mx^{m-1}$$

例ヘバ x^4 ノ導函數ハ $4x^3$，x ノ導函數ハ $1.x^0$，卽チ 1 デアル．

(iv)　和，差ノ導函數

$u,\ v,\ w$ ヲ x ノ函數トシ

$$y=u+v-w\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ト置クナラバ y モ x ノ函數トナル．今 x ノ增分 Δx ニ對スル $u,\ v,\ w,\ y$ ノ增分ヲソレゾレ $\Delta u,\ \Delta v,\ \Delta w,\ \Delta y$ ニテ表スナラバ x ガ Δx ダケ增シタ後ニハ $u,\ v,\ w,\ y$ ハソレゾレ $u+\Delta u,\ v+\Delta v,\ w+\Delta w,\ y+\Delta y$ トナル故

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)-(w+\Delta w)\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) ト (2) トヨリ

$$\Delta y=\Delta u+\Delta v-\Delta w$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}-\frac{\Delta w}{\Delta x}$$

從ツテ $\Delta x\to 0$ ナルトキノ極限ヲ取ツテ

$$y'=u'+v'-w'\text{[1]}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

尙三ツ以上ノ函數ノ和及ビ差ニツイテモ同樣ノ公式ヲ得ル．

(1) 公式 (3) ハ $u',\ v',\ w'$ ガ存在スレバ y' ハ當然存在シ且ツ $u'+v'-w'$ ニ等シイコトヲ主張スルモノデアル．

例　　$$y = x^5 + \frac{1}{x^2} - 3\sqrt{x}$$

x^5 ノ導函數ハ $5x^4$, $\frac{1}{x^2}$ ノ導函數ハ $-\frac{2}{x^3}$ (第8節, 例3), $\sqrt{x}$ ノ導函數ハ $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (第8節, 例4). 故ニ上ノ公式ニヨツテ

$$y' = 5x^4 - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

(v) 積ノ導函數

u, v ヲ x ノ函數トシ

$$y = uv$$

ト置ケバ u, v, y ノ増分ノ間ニ次ノ關係ガアル.

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

$$\therefore \quad \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv$$

$$= u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v \quad \text{.........} (1)$$

今 u', v' ガ存在スルモノトスレバ u, v ハ x ノ連續函數トナル (第8節, 注意 3) 故

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0 \quad \text{従ツテ} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v = u'.0 = 0$$

ヨツテ (1) ヨリ

$$y' = uv' + u'v$$

ヲ得ル.

例　　$$y = (x^5 - 3\sqrt{x} + 1)\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$u = x^5 - 3\sqrt{x} + 1, \qquad v = x^3 + \frac{1}{x^2}$$

ト置ケバ

$$u' = 5x^4 - \frac{3}{2\sqrt{x}}, \qquad v' = 3x^2 - \frac{2}{x^3}$$

$$\therefore \quad y' = (x^5 - 3\sqrt{x} + 1)\left(3x^2 - \frac{2}{x^3}\right) + \left(5x^4 - \frac{3}{2\sqrt{x}}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)$$

(vi) 商ノ導函數

u, v ヲ x ノ函數トシ

$$y = \frac{u}{v} \quad \text{..............................} (1)$$

ト置クナラバ

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{(v + \Delta v)v}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{(v + \Delta v)v}$$

ヨツテ

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{..................} (2)$$

特ニ $u = c$ (c, 常數) ナルトキハ

$$y = \frac{c}{v} \quad \text{..............................} (3)$$

デアツテ

$$y' = -c\frac{v'}{v^2} \quad \text{..............................} (4)$$

トナル.

例 1.　　$$y = \frac{x - 3}{x^2 + 1}$$

$= (x-3)(x^2+1) -$　　$y = \frac{u}{v}$

$$y' = \frac{(x - 3)'(x^2 + 1) - (x - 3)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{1.(x^2 + 1) - (x - 3).2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 6x + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

例 2.　　$$y = \frac{1}{x^3 + 3x^2 - x + 1}$$

$$y' = -\frac{(x^3 + 3x^2 - x + 1)'}{(x^3 + 3x^2 - x + 1)^2}$$

$$= -\frac{3x^2 + 6x - 1}{(x^3 + 3x^2 - x + 1)^2}$$

11. 微分法ノ公式若干（其二）

(i) 合成函數ノ導函數

y ガ u ノ函數デアッテ, u ガ x ノ函數デアル場合ニハ y ハ勿論 x ノ函數トナル. コノ様ナ場合ニハ y ヲ x ノ**合成函數**ト稱スル. 卽チ合成函數トハ函數ノ函數ト云フ意味デアル. 併テ

$$y = F(u), \qquad u = f(x)$$

トシ x ノ增分 Δx ニ對スル u ノ增分ヲ Δu, 又 u ノ增分 Δu ニ對スル y ノ增分ヲ Δy トスルナラバ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(x), \qquad \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = F'(u) \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

デアッテ且ツ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0 \text{ [1]} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

デアルカラ (1) ノ後ノ式ト (2) トヨリ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = F'(u) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ヲ得ル. 從ッテ恒等式

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\,\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

ヨリ

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= F'(u) f'(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

或ハ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

[1] コレハ $\dfrac{du}{dx}$ ノ存在ヨリノ結論デアル.

ヲ得ル. (5) ハ屢用ヒラレル重要ナル公式デアル.

例 1. $\qquad y = (x^3 + \sqrt{x} + 1)^5$

$u = x^3 + \sqrt{x} + 1$ ト置クナラバ $y = u^5$

卽チ y ハ u ノ函數, u ハ x ノ函數トナル. 而シテ

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad \frac{dy}{du} = 5u^4$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 5u^4\left(3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 5(x^3 + \sqrt{x} + 1)^4\left(3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

例 2. $\qquad y = \sqrt{a + bx + cx^2}$

$u = a + bx + cx^2$ ト置クナラバ $y = \sqrt{u}$

而シテ

$$\frac{du}{dx} = b + 2cx, \qquad \frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(b + 2cx) = \frac{b + 2cx}{2\sqrt{a + bx + cx^2}}$$

例 3. $\qquad y = \sqrt{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 1}}$

$u = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 1}$ ト置クナラバ $y = \sqrt{u}$

而シテ $\sqrt{x^2 - 1}$, $\sqrt{x^2 + 1}$ ノ微分係數ハ例 2 ニヨッテ求メラレル.

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2 - 1}\right) + \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^4 - 1}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times \frac{x(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^4 - 1}}$$

$$= \frac{x}{2\sqrt{x^4 - 1}}\underbrace{\sqrt{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 1}}}_{y}$$

(ii) 逆函數ノ導函數

x ガ y ノ函數トシテ與ヘラレタトキ, 卽チ

$$x = f(y) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナルトキ, 此式カラ y ヲ x ノ函數ト看做シテ x ニ關スル y ノ微分係數ヲ求メルト云フ問題ガ屢起ル.

上式ノ左邊ヲ x ニツキ微分スレバ 1 トナル. 又上式ノ右邊ハ y ノ函數デ, y ガ實ハ x ノ函數デアルカラ上式ノ右邊ハ x ノ合成函數トナル. 之ヲ x ニツキ微分スレバ合成函數微分ノ公式[本節 (i) 公式 (5)] ニヨツテ

$$f'(y)\frac{dy}{dx}$$ [1]

トナル. 故ニ上式ノ兩邊ヲ x ニツキ微分シテ

$$1=f'(y)\frac{dy}{dx}$$

卽チ
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} \quad \text{.........................}(2)$$

ヲ得ル.

例 1. $x=y^5-5y$ ナルトキ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求ム.

$$\frac{dx}{dy}=5(y^4-1)$$

ナル故
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{5(y^4-1)}$$

例 2. $y=x^{\frac{1}{q}}$, (q, 正整數) ノ微分係數

x ニツキ解ケバ
$$x=y^q$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy}=qy^{q-1}=qx^{\frac{1}{q}(q-1)}=qx^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{qx^{1-\frac{1}{q}}}=\frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}$$

[1] コレハ $f'(y)$, $\dfrac{dy}{dx}$ ノ存在ヲ假定シテ居ル結論デアル. 從ツテ (2) 式ハ $\dfrac{dx}{dy}$, $\dfrac{dy}{dx}$ ノ存在ノ假定ノ下ニ成立スルト云フコトニナル. 併シナガラ $\dfrac{dx}{dy}$ ガ存在シテ零デナイナラバ $\dfrac{dy}{dx}$ モ存在シ從ツテ (2) 式ハ成立スルコトガ證明セラレルノデアル.

(iii) x^m ノ導函數, 但シ m ハ正又ハ負ノ有理數

m ガ正ノ整數ナル場合ニ函數

$$y=x^m \quad \text{.................................}(1)$$

ノ導函數ハ

$$y'=mx^{m-1} \quad \text{..........................}(2)$$

ナルコトハ第 10 節 (iii) ニ於テ證明シタ. m ガ正ノ整數 q ノ逆數 $\dfrac{1}{q}$ ニ等シイ場合ニ於テモ同ジ公式ノ成立スルコトハ本節 (ii) ノ例 2 ニヨツテ明カデアル. ヨツテ以下 m ガ正ノ分數又ハ負ノ整數, 分數ナル場合ヲ攻究スル.

m ガ正ノ分數 $\dfrac{p}{q}$ (但シ p, q ハ正ノ整數) ニ等シイ場合.

此時ハ
$$y=x^{\frac{p}{q}}=\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

故ニ
$$u=x^{\frac{1}{q}}$$

ト置ケバ
$$y=u^p$$

トナリ y ハ x ノ合成函數トナル. 而シテ

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}$$

$$\frac{dy}{du}=pu^{p-1}=px^{\frac{1}{q}(p-1)}$$

故ニ合成函數微分ノ公式 [本節(i), 公式(5)] ヲ用ヒテ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=px^{\frac{1}{q}(p-1)}\frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}$$

$$=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}=mx^{m-1}$$

ヲ得ル. ヤハリ上ノ公式 (2) ガ此場合ニモ成立スルコトニナル.

m ガ負ノ整數又ハ分數ナル場合.

此時ハ $m=-n$ ト置クナラバ $n>0$ デアッテ

$$y=x^{-n}=\frac{1}{x^n}$$

故ニ第10節 (vi) ノ公式 (4) ヲ用ヒテ

$$y'=-\frac{(x^n)'}{x^{2n}}=-\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}}$$
$$=-nx^{-n-1}=mx^{m-1}$$

ヨッテ此時モ亦同ジ公式ガ得ラレル. 故ニ總テノ場合ヲ通ジテ y' ハ同一公式デ求メラレル.

例 1. $y=\sqrt[3]{x^2}$

書キ換フレバ $y=x^{\frac{2}{3}}$

$$\therefore\quad y'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

例 2. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$$y'=-\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1}=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$$

問 題 3.

次ノ函數ヲ微分セヨ (1—14).

1. $x^2-\dfrac{1}{x^2}+\sqrt{x}$ **2.** $(\sqrt{x})^3-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

3. $\dfrac{1+x}{1+x^2}$ **4.** $(2-5x^3)^n$

5. $(1+x)^m(2-x)^n$ **6.** $\dfrac{(1+x)^m}{(2-x)^n}$

7. $\sqrt[3]{1-x^2+3x^4}$ **8.** $(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$

9. $x^2\sqrt{a^2-x^3}$ **10.** $\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

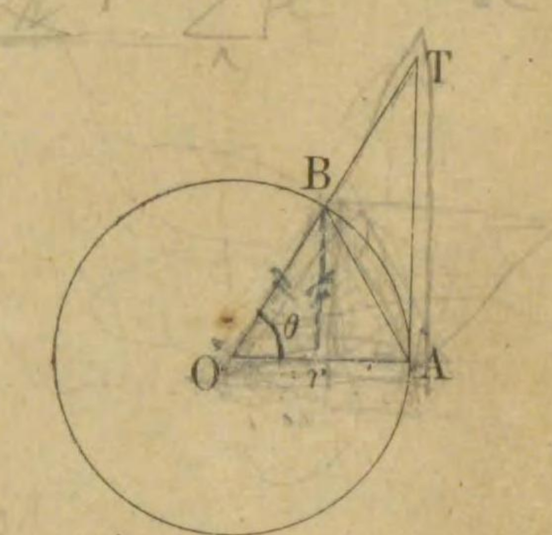
11. $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ **12.** $\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$

13. $\dfrac{x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ **14.** $\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$

12. 三角函數ノ導函數

(i) $\theta\to 0$ ナルトキノ $\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ ノ極限値

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ トシ $\angle AOB=\theta$[1] ナル様ナ二直線 OA, OB ヲ引キ, 角ノ頂點 O ヲ中心トシテ半徑 r ナル圓ヲ畫キ OA, OB トノ交點ヲソレゾレ A, B トスル. A, B ヲ結ビ付ケ, 又 OB ヲ延長シテ A ニ於ケル圓ノ切線トノ交點ヲ T トスレバ



三角形 OAB < 扇形 OAB < 三角形 OAT

然ルニ

$$\text{三角形 OAB}=\frac{1}{2}\,\mathrm{OA.OB}\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}r^2\sin\theta$$

$$\text{扇形 OAB}=\frac{1}{2}\,\mathrm{OA.OB}.\theta=\frac{1}{2}r^2\theta$$

$$\text{三角形 OAT}=\frac{1}{2}\,\mathrm{OA.AT}=\frac{1}{2}r^2\tan\theta$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}r^2\sin\theta<\frac{1}{2}r^2\theta<\frac{1}{2}r^2\tan\theta$$

此不等式ノ各邊ヲ $\dfrac{1}{2}r^2\sin\theta$ ニテ除スレバ

$$1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}$$

從ッテ $$1>\frac{\sin\theta}{\theta}>\cos\theta \quad\cdots\cdots(1)$$

ヲ得ル. コレハ $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ トシテ出シタ關係式デアルケレドモ

(1) θ ハ角ノ弧度ヲ表スコト勿論デアル.

$0 > \theta > -\dfrac{\pi}{2}$ トスルモヤハリ成立スル．何トナレバ $0>\theta>-\dfrac{\pi}{2}$ ナル場合ニハ $\theta = -\theta'$ ト置ケバ

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{\sin(-\theta')}{-\theta'} = \frac{\sin\theta'}{\theta'}$$

$$\cos\theta = \cos(-\theta') = \cos\theta'$$

トナリ而シテ θ' ニ對シテハ (1) 式ガ成立スルカラデアル．

偖テ (1) ノ不等式ニ於テ $\theta \to 0$ ナルトキノ右邊ノ極限値ハ 1 デアル[(1)]．ヨツテ (1) 式ヨリ

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ヲ得ル．コレハ三角函數ノ導函數ヲ求ムルニ際シテ用ヒラレル公式デアル．

(ii)　$y = \sin x$ ノ導函數

此函數ニ對シテハ

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

トナルカラ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

然ルニ本節 (i) 公式 (2) ニヨリ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} = 1$$

(1) $\cos\theta$ ノ連續性ヲ用ヒテ居ル．

故ニ上式ヨリ

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$$

ヲ得ル．

(iii)　$y = \cos x$ ノ導函數

此函數ノ導函數ハ (ii) ト同方法ニテ求メルコトモ出來ルガ次ノ如クニシテ (ii) ノ結果ヨリ誘導スルコトモ出來ル．

$$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

故ニ $u = \dfrac{\pi}{2} - x$ ト置ケバ $y = \sin u$ 卽チ y ハ x ノ合成函數トナル．而シテ

$$\frac{du}{dx} = -1,\quad \frac{dy}{du} = \cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -\sin x$$

(iv)　$y = \tan x$ ノ導函數

コレノ導函數モ直接ニ求メルコトガ出來ルケレドモ (ii), (iii) ノ結果ヲ用ヒテ次ノ如クニ誘導スルコトモ出來ル．

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

故ニ第 10 節 (vi) ノ公式 (2) ヲ用ヒテ

$$y' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \sec^2 x$$

（v） $y = \cot x$ ノ導函數

（iv） ト同樣ニシテ

$$y = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{(\sin x)^2}$$

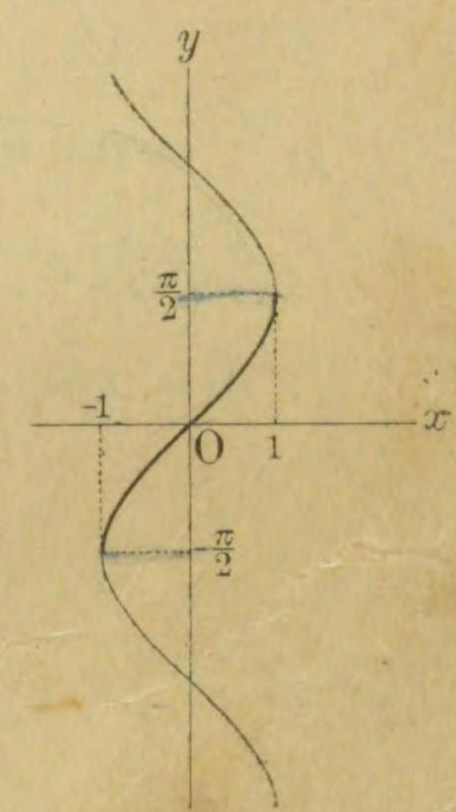
$$= \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= -\operatorname{cosec}^2 x$$ [1]

13. 逆三角函數ノ導函數

（i） $y = \sin^{-1} x$ ノ導函數

此函數ノぐらふハ次圖ノ如クニナル．ぐらふヨリ見テ明カナル如ク y ハ區域 $(-1, 1)$ 內ニ於ケル x ノ無限多值函數デアル．即チ -1 ト 1 トノ間ニアル x ノ一ツノ值ニ對シテ y ノ值ハ無限ニ多ク存在スル．此函數ヲ一值函數ナラシメルタメニ通例次ノ規約ヲ設ケル．



$$-\frac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x \leqq \frac{\pi}{2}$$

圖ノ太線ハ此樣ナ制限ノ下ニアル函數 $y = \sin^{-1} x$ ノぐらふデアル．

偖テ此函數ニ對シテハ

(1) $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ ノ導函數モ容易ニ求メラレル (40 頁問題 4 ノ 3 問, 4 問). 併シナガラ其公式ハ用ヒラレルコト極メテ稀デアル故本書ニハ省略シタ.

$$x = \sin y$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = \cos y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

複號ハ $\cos y$ ノ符號ニヨツテ定マル．$\cos y > 0$ ナラバ正，$\cos y < 0$ ナラバ負號ヲ取ルベキデアル．然ルニ上ノ規約ニヨレバ

$$-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$$

デアルカラ $\cos y \geqq 0$

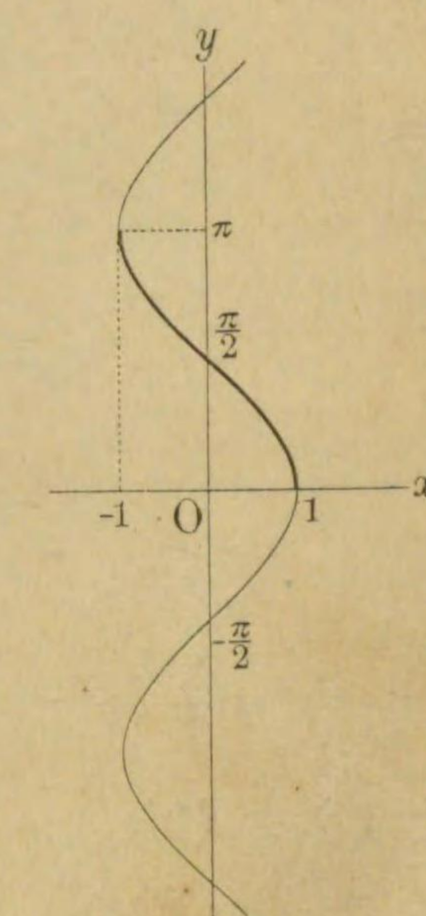
故ニ複號ハ正號ヲ取ラネバナラヌ．即チ

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1 - x^2}$$

從ツテ
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$ [1]

（ii） $y = \cos^{-1} x$ ノ導函數

此函數ノぐらふハ右圖ノ如クニナル．此函數モ x ノ無限多值函數デアツテコレヲ一值函數ナラシメルタメニ通例次ノ規約ヲ設ケル．　$0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi$



此制限ノ下ニアル函數 y ノぐらふハ圖ノ太線デアル．此函數 y ニ對シテハ

$$x = \cos y \quad \therefore \quad \frac{dx}{dy} = -\sin y$$

然ルニ $\sin y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ デアツテ且

(1) 此公式ハ $-1 < x < 1$ ナル x ニ對シテ成立スルノデアル．$x = \pm 1$ ニ對シテハ左方叉ハ右方微分係數ガ $+\infty$ トナル．次ノ $\cos^{-1} x$ ノ導函數ノ公式ニツイテモ同樣ノ注意ヲ要スル．

ツ上ノ規約ニヨツテ $0 \leqq y \leqq \pi$ デアルカラ

$$\sin y \geqq 0 \qquad \therefore \quad \sin y = \sqrt{1-x^2}$$

從ツテ　$\dfrac{dx}{dy} = -\sqrt{1-x^2}$

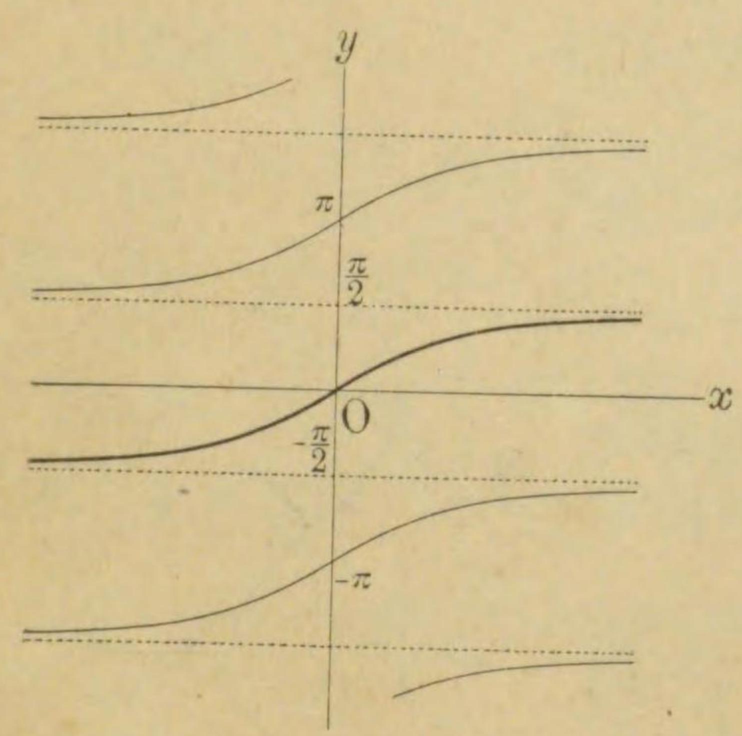
ヨツテ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(iii)　$y = \tan^{-1}x$ ノ導函數

此函數ノぐらふハ次圖ノ如クニナル．此函數ヲ一値函數ナラシメルタメニ[1]通例次ノ制限ヲ設ケル．

$$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1}x < \frac{\pi}{2}$$



此制限ノ下ニアル函數 y ノぐらふハ圖ノ太線デアル．

此函數 y ニ對シテハ

$$x = \tan y$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = \sec^2 y = 1 + x^2$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

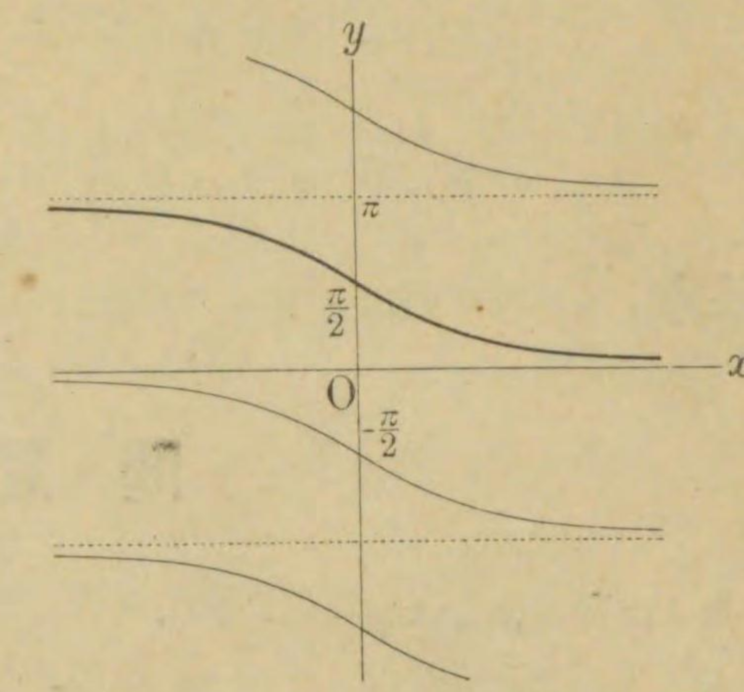
(iv)　$y = \cot^{-1}x$ ノ導函數

此函數ノぐらふハ次頁ノ圖ノ如クニナル．此函數ヲ一値函數ナラシメルタメニ[1]通例次ノ制限ヲ設ケル．

$$0 < \cot^{-1}x < \pi$$

(1) 實ハ一値連續函數ナラシメルタメデアル．

此制限ノ下ニアル函數ノぐらふハ圖ノ太線デアル．



此函數ニ對シテハ

$$x = \cot y$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = -\operatorname{cosec}^2 y$$

$$= -(1+x^2)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$$

例 1.　$y = \sin^{-1}\dfrac{1}{x}$ [1]

y ヲ x ノ合成函數ト見テ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \times \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

x^{-1}

$-1x^{-2}$

然ルニ　$x > 0$ ナラバ $\sqrt{x^2} = x$

$x < 0$ ナラバ $\sqrt{x^2} = -x$

デアルカラ

$$x > 0 \text{ ナラバ } \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$x < 0 \text{ ナラバ } \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{x^2-1}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

例 2.　$y = \cos^{-1}\dfrac{1}{x}$ [2]

前例ト同樣ニシテ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \times \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

(1) 此函數ヲ通例 $\operatorname{cosec}^{-1}x$ ニテ表ス．$x > 0$ ナラバ $x \geqq 1$ デアリ，$x < 0$ ナラバ $x \leqq -1$ ナルベキコト勿論デアル．

(2) 此函數ヲ通例 $\sec^{-1}x$ ニテ表ス．

$$\therefore \quad x > 0 \quad ナラバ \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$x < 0 \quad ナラバ \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

注意. 本節ノ制限ノ下ニアル逆三角函數ノ値ヲ其**主値**ト稱ス.

問題 4.

次ノ函數ヲ微分セヨ (1--20).

1. $(1-x^2)\tan x$ **2.** $\cot x \sin^{-1} x$

3. $\sec x$ **4.** $\operatorname{cosec} x$

5. $\dfrac{\cos^{-1} x}{1+x}$ **6.** $\dfrac{\cos x}{1-x^2}$

7. $\tan^3 x$ **8.** $\cot^{-1}\sqrt{x}$

9. $\tan^2(n\sqrt[3]{x})$ **10.** $\sin^3\left(\dfrac{k}{\sqrt{x}}\right)$

11. $\sin^{-1}(\sqrt{\sin x})$ **12.** $\tan^{-1}(n\tan x)$

13. $\tan^{-1}\left\{x+\sqrt{1-x^2}\right\}$ **14.** $\cot^{-1}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

15. $\cos^{-1}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$ **16.** $\cos^{-1}\dfrac{1+2\cos x}{2+\cos x}$

17. $\dfrac{(\sin nx)^m}{(\cos mx)^n}$ **18.** $(x+a)\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{x}{a}}-\sqrt{ax}$

19. $\dfrac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ **20.** $\dfrac{\sin x}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}$

21. 函數 $f(x) = x^m \sin\dfrac{1}{x}$ ノ導函數ハ $m > 2$ ナルトキ $x = 0$ ニ於テ連續ニシテ $m \leqq 2$ ナルトキ不連續ナルコトヲ證明セヨ.

14. 指數函數及ビ對數函數

a ヲ正ノ常數トスルトキ

$$y = a^x$$

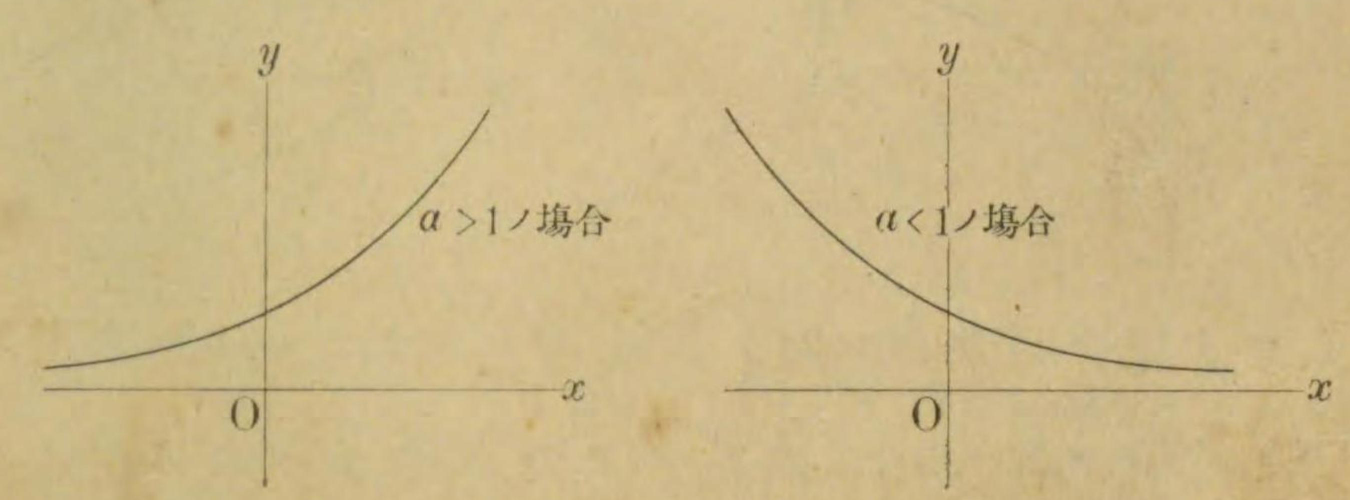
ナル函數ヲ**指數函數**ト云ヒ, a ヲ其**底**ト云フ. 但シ $a = 1$ ナルトキハ y ハ x ノ如何ニ關セズ常數トナル故此場合ハ省ク.[1]

指數函數 $y = a^x$ ハ底 a ガ 1 ヨリ大ナル場合ニハ x ノ増スニ從ツテ次第ニ増加シ, a ガ 1 ヨリ小ナル場合ニハ x ノ増スニ從ツテ次第ニ減少スル. 且ツ此函數ハ總テノ x ニ對シテ連續デアリ而シテ

$$a > 1 \quad ナラバ \quad \lim_{x\to+\infty} y = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} y = 0$$

$$a < 1 \quad ナラバ \quad \lim_{x\to+\infty} y = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} y = +\infty$$

ナルコトガ證明セラレル. 斯クテ次ノ如キぐらふヲ得ル.



a ノ如何ニ拘ラズ $y = a^x$ ノぐらふハ y 軸上ノ定點 $(0, 1)$ ヲ通過スル.

---

(1) x ガ正, 負ノ有理數ナルトキハ a^x ノ意味ハ分ルガ x ガ無理數ナルトキハ a^x ノ意味ハ分ラヌト云フ讀者ガアルカモ知レヌ. 例ヘバ $a^{\frac{1}{2}}$ ハ $\sqrt{a}$ デアツテ能ク分ルガ $a^{\sqrt{2}}$ ハ如何ナル數カ分ラヌト云フノデアル. 實際吾人モ今マデノ所ニテ $\sqrt{a}$ ノ如キハ分リキツタモノト考ヘテ來タ. 函數 $\sqrt{x}$ ガ $x = a$ ニ於テ連續ナリナド云フハ $\sqrt{a}$ ノ意味ヲ前提トシテ居ルノデアル. 併シナガラ a ガ正ノ實數デアルト云フタダケデハ $\sqrt{a}$ ノ意味モ實ハムヅカシイノデアル. 一體無理數トハ如何ナルモノカ, ソレカラシテ調ベテ行カネバナラヌ. ソシテ無理數ノ眞ノ意義ガ分レバ $\sqrt{a}$ ニ意味ヲツケルコトガ出來ルノデアルガ, ソレト同ジ樣ニ亦 $a^{\sqrt{2}}$ ニモ意味ヲツケルコトガ出來ルノデアル. デアルカラ $a^{\sqrt{2}}$ ガ分ラヌト云フノハ實ハ $\sqrt{a}$ モ分ラヌノデアル.

嚴密ニ云フトソウ云フコトニナルノデアルガ, 只何トナク $\sqrt{a}$ ハ分ツタ數ノ樣ニ思

以上述ベタ指數函數ノ逆函數ハ**對數函數**デアル．卽チ

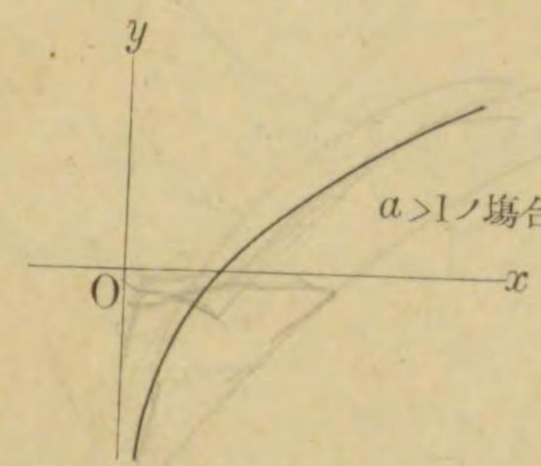
$$x = a^y \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

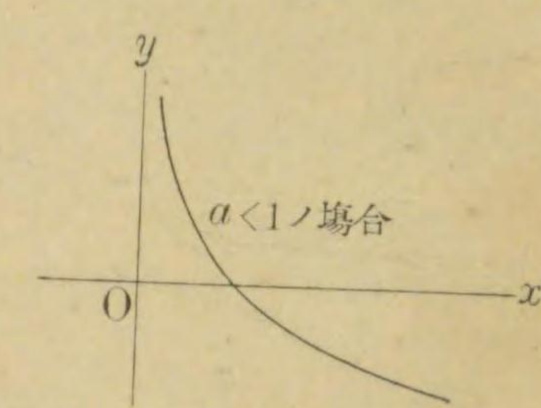
ナルトキ y ヲ x ノ函數ト看做シテ得ル函數ガ對數函數

$$y = \log_a x$$

デアル．玆ニ a ハ對數函數ノ**底**デアル．

指數函數ノぐらふヨリ對數函數ノぐらふヲ得ルコトハ容易デアル．ソノ形ハ次圖ノ如クニナル．





ぐらふヨリ見テ明カナル如ク函數 $y = \log_a x$ ハ x ノ正ノ値ニ對シテノミ其値ヲ有スル．而シテ $a > 1$ ナラバ x ノ增スニ從ツテ函數ハ增加シ，且ツ

$$\lim_{x \to +0} \log_a x = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$$

又 $a < 1$ ナラバ x ノ增スニ從ツテ函數ハ減少シ，且ツ

$$\lim_{x \to +0} \log_a x = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$$

ナルコトぐらふヨリ容易ニ分ルデアラウ．

ハレルノハ $\sqrt{a}$ ヲ近似的ニ表ス有理數ヲ知ルカラデアル．例ヘバ $\sqrt{2}$ ノ近似値ナル 1.4142 ヲ以テ $\sqrt{2}$ ノ大體ノ値ト考ヘル所ニ $\sqrt{2}$ ガ分ツタ樣ナ氣持ガスルノデアル．同ジ樣ナ意味ニ於テハ $a^{\sqrt{2}}$ ヲ分ラセル事モ容易デアル．先ヅ $\sqrt{2}$ ノ近似値ナル 1.4142 ヲ以テ $\sqrt{2}$ ニ置キ換フルナラバ $a^{1.4142}$ ヲ得ル．コレハ $\sqrt{2}$ ト同ジク分ツタ樣ナ氣持ノスル數デアル．ソコデ $a^{\sqrt{2}}$ ハ近似的ニ $a^{1.4142}$ ニ等シイ數ト考ヘルノデアル．コレデ大體 $a^{\sqrt{2}}$ ノ意味ハツクデアラウ．コレラノ無理數ノ眞ノ意味ニツイテ[illegible]ヲ見ラレタイ．

15. 指數函數及ビ對數函數ノ導函數

(i) $x \to \pm\infty$ ナルトキノ $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ ノ極限値

m ヲ正ノ整數トシ，

$$a_m = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

ト置クナラバ二項定理ニヨリ

$$a_m = 1 + \frac{m}{1!}\left(\frac{1}{m}\right) + \frac{m(m-1)}{2!}\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\left(\frac{1}{m}\right)^3$$

$$+ \cdots\cdots + \frac{m(m-1)\cdots\cdots 2.1}{m!}\left(\frac{1}{m}\right)^m$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{1}{m!}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\cdots\cdots\left(1 - \frac{m-1}{m}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\therefore \quad a_m < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\cdots + \frac{1}{m!}$$

然ルニ

$$3! = 3.2 > 2^2, \quad 4! = 4.3.2 > 2^3, \quad \cdots\cdots, \quad m! > 2^{m-1}$$

デアルカラ

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\cdots + \frac{1}{m!} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^{m-1}} < 2$$

$$\therefore \quad a_m < 3$$

次ニ a_m ト a_{m+1} トヲ比較スル．(1) 式ノ m ノ代リニ $m+1$ ト置ケバ

$$a_{m+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{m+1}\right)$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{m+1}\right)\left(1 - \frac{2}{m+1}\right) + \cdots\cdots$$
$$+ \frac{1}{(m+1)!}\left(1 - \frac{1}{m+1}\right)\left(1 - \frac{2}{m+1}\right)\cdots\cdots\left(1 - \frac{m}{m+1}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) 式ノ三番目以後ノ各項ハ同ジ番目ニアル (2) 式ノ各項ヨリ小デアル. 而カモ (2) 式ハ最後ノ正項ヲ一ツ多ク有スル. 故ニ明カニ

$$a_m < a_{m+1}$$

ヨツテ次ノ結論ヲ得ル.

a_m ハ m ノ増スニ従ツテ漸次大トナルガ決シテ 3 ヲ超コルコトガナイ.

コノ様ナ場合ニハ a_m ハ m ガ限リナク大トナルトキ一定ノ値ニ限リナク近ヅクノデアル.[1] 此極限値ヲ e ナル文字デ表ス. e ヲ實際ニ計算セル結果ハ 2.71828...... トナルノデアル.

以上ニヨリ m ガ正ノ整數デアルナラバ

$$\lim_{m\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$$

デアルコトヲ知ル. 次ニ x ヲ 1 ヨリ大ナル正數トシ之ヲ挾ム二ツノ整數ヲ m 及ビ $m+1$ トスル. 但シ x ソレ自身ガ整數デアルカモ知レヌ故ソノ場合ヲモ含マセテ

$$m \leqq x < m+1$$

(1) 嚴密ナル證明ハムヅカシイガ常識的ニ大體承認シ得ルデアラウ.

トスル. コノ様ナ m ニ對シテハ

$$1 + \frac{1}{m+1} < 1 + \frac{1}{x} \leqq 1 + \frac{1}{m}$$

$$\therefore \quad \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

従ツテ上ノ a_m ヲ用フルナラバ

$$\frac{a_{m+1}}{1 + \frac{1}{m+1}} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < a_m\left(1 + \frac{1}{m}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

然ルニ $x \to +\infty$ ナルトキ $m \to +\infty$ デアリ, 而シテ $m \to +\infty$ ナルトキ

$$\frac{a_{m+1}}{1 + \frac{1}{m+1}} \longrightarrow e, \qquad a_m\left(1 + \frac{1}{m}\right) \longrightarrow e$$

デアルカラ不等式 (3) ノ左邊ト右邊トハ同一極限値 e ヲ持ツコトニナル. ヨツテ

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

次ニ $x \to -\infty$ ナルトキノ $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ノ極限値ヲ考ヘル.

此場合ノ極限値ヲ求ムルタメニ $x = -z$ ト置クナラバ $x \to -\infty$ ノトキ $z \to +\infty$ トナリ而シテ

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-z} = \left(\frac{z}{z-1}\right)^z = \left(1 + \frac{1}{z-1}\right)^z$$
$$= \left(1 + \frac{1}{z-1}\right)^{z-1}\left(1 + \frac{1}{z-1}\right)$$

トナル故

60
16

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z-1}\right)^{z-1}\left(1+\frac{1}{z-1}\right)$$

$$=e.1=e$$

以上ヲ綜合シテ次ノ公式ヲ得ル.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

此公式ヨリ新タナル他ノ公式ガ誘導セラレル. 先ヅ $x=\frac{1}{z}$ 卽チ $z=\frac{1}{x}$ ト置クナラバ

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=(1+z)^{\frac{1}{z}}$$

$$\therefore\quad \lim_{z\to0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

從ツテ $\quad \lim_{z\to0}\log_e\left\{(1+z)^{\frac{1}{z}}\right\}=\log_e \overset{(1)}{e}=1$

左邊ハ $\lim_{z\to0}\frac{1}{z}\log_e(1+z)$ ニ等シイ.

$$\therefore\quad \lim_{z\to0}\frac{\log_e(1+z)}{z}=1$$

今又 $\log_e(1+z)=h$ 卽チ $z=e^h-1$ ト置クナラバ

$$\frac{\log_e(1+z)}{z}=\frac{h}{e^h-1}$$

トナリ $h\to0$ ノトキ $z\to0$ トナル故[2]上ノ式ヨリ

$$\lim_{h\to0}\frac{h}{e^h-1}=1$$

從ツテ

(1) $\log_e x$ ハ $x=e$ ニ於テ連續ナルコトガ此所ニ用ヒラレテ居ル.
(2) e^x ハ $x=0$ ニ於テ連續ナルコトガ此所ニ用ヒラレテ居ル.

$$\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=1\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

ヲ得ル. コノ公式ガ吾人ニ入用ナノデアル.

コレダケノ準備ヲ置イテ以下ニ指數函數及ビ對數函數ノ導函數ヲ求メルコトニスル. 但シ一般ノ指數函數及ビ對數函數ハ底ガ e ナル指數函數及ビ對數函數ニヨツテ表スコトガ出來ル故吾人ハ此特別ナル底ヲ有スル指數函數及ビ對數函數ニツイテ導函數ノ公式ヲ出スコトニスル. 此樣ナ特別ナル底ヲ有スル指數函數及ビ對數函數ヲ通例單ニ指數函數及ビ對數函數ト呼ンデ居ル.

(ii) 指數函數ノ導函數

$$y=e^x$$

此函數ニ對シテハ

$$\Delta y=e^{x+\Delta x}-e^x=e^x(e^{\Delta x}-1)$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=e^x\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

然ルニ上ノ公式 (5) ニヨツテ

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=e^x$$

コレガ底 e ナル指數函數ノ微分係數デアル. 卽チ指數函數 e^x ハ微分シテモ變ラヌ函數デアル.

例 $\quad y=a^x\quad(a>0,\ a\neq1)$

e ヲ底トシテ兩邊ノ對數ヲ取レバ

$$\log_e y=x\log_e a\qquad\therefore\quad y=e^{x\log_e a}$$

$\log_e a = x$

ヨツテ合成函數微分ノ公式ヲ用ヒテ

$$\frac{dy}{dx} = e^{x\log_e a}\times\frac{d}{dx}(x\log_e a) = e^{x\log_e a}\times\log_e a = a^x\log_e a$$

即チ一般ノ指數函數 a^x ヲ x ニツキ微分スレバ $\log_e a$ ナル因數ガ一ツツイテ來ル.

(iii) 對數函數ノ導函數

$$y=\log_e x \qquad (x>0)$$

x ニツキ解ケバ $\qquad x = e^y$

故ニ (ii) ノ結果ヲ用ヒテ

$$\frac{dx}{dy} = e^y = x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

此特別ナル底 e ヲ有スル對數ヲ**自然對數**又ハ **Napier ノ對數**ト稱スル. 自今屢出デ來ルモノデアル故底ヲ省略シテ單ニ log ト書クコトニスル. 即チ $\log x$ トアルハ所謂普通ノ對數函數 $\log_e x$ ノ略デアル. 斯クシテ次ノ公式ヲ得ル.

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}.$$

注意. $x<0$ ナルトキ $y=\log(-x)$ ト置クナラバ合成函數ノ微分公式ヲ用ヒテ

$$y' = \frac{1}{-x}\times(-x)' = \frac{1}{-x}\times(-1) = \frac{1}{x}$$

即チ $x>0$ ナルトキノ $\log x$ ノ微分係數ト同ジ式ニテ與ヘラレル. ヨツテ x ノ正負ニ拘ラズ

$$\frac{d}{dx}\log|x| = \frac{1}{x}$$

例 1. $\qquad y=\log_a x$

x ニツキ解ケバ $\qquad x=a^y$

e ヲ底トシテ兩邊ノ對數ヲ取レバ

$$\log x = y\log a$$

$$\therefore \quad y = \frac{\log x}{\log a}$$

從ッテ

$$y' = \frac{1}{x\log a}$$

$\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e$

コレ一般ナル對數函數ノ微分係數デアル.

$a^x = a^x\log_e a$

例 2. $\qquad y=\log\dfrac{a+b\tan kx}{a-b\tan kx}$

此式ヲ書キ換フレバ

$$y = \log(a+b\tan kx) - \log(a-b\tan kx)$$

$$y' = \left[\log(a+b\tan kx)\right]' - \left[\log(a-b\tan kx)\right]'$$

$a^x = a^x\log a$

然ルニ合成函數ノ微分公式ニヨリ

$$\left[\log(a+b\tan kx)\right]' = \frac{1}{a+b\tan kx}\times(a+b\tan kx)'$$

$$= \frac{1}{a+b\tan kx}\times b\sec^2 kx\times(kx)'$$

$$= \frac{kb\sec^2 kx}{a+b\tan kx}$$

同樣ニシテ

$$\left[\log(a-b\tan kx)\right]' = \frac{-kb\sec^2kx}{a-b\tan kx}$$

$$\therefore \quad y' = \frac{kb\sec^2kx}{a+b\tan kx}+\frac{kb\sec^2kx}{a-b\tan kx}$$

$$= \frac{2kab\sec^2kx}{a^2-b^2\tan^2kx} = \frac{2kab}{a^2\cos^2kx-b^2\sin^2kx}$$

例 3. $\qquad y=x^x$

兩邊ノ對數ヲ取レバ

$$\log y = x\log x$$

此式ノ左邊ハ x ノ函數ナル y ノ函數, 即チ x ノ合成函數デアル. ヨリテ之ヲ x ニツキ微分スレバ

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

トナル. 又右邊ヲ x ニツキ微分スレバ

$$x\cdot\frac{1}{x}+1\cdot\log x$$

$$\therefore \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \log x$$

従ツテ
$$\frac{dy}{dx} = y(1 + \log x) = x^x(1 + \log x)$$

コノ様ニ一度對數ヲ取ツテ然ル後ニ微分スルコトヲ**對數微分法**ト稱スル．若干ノ函數ノ積，商ノ形ヲシテ居ル函數ヲ微分スルニハソノママ直接ニ微分スルヨリハ一度對數ヲ取ツテ然ル後ニ微分スル方ガ概シテ簡單ニナルノデアル．[1]

例 4.
$$y = e^{x^2}\sqrt[3]{x}\tan kx \quad \text{.........................(1)}$$

兩邊ノ對數ヲ取レバ
$$\log y = x^2 + \frac{1}{3}\log x + \log\tan kx \quad \text{.........................(2)}$$

此兩邊ヲ x ニツキ微分スレバ
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{3x} + \frac{1}{\tan kx}k\sec^2 kx \quad \text{.........................(3)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = e^{x^2}\sqrt[3]{x}\tan kx\left\{2x + \frac{1}{3x} + \frac{k\sec^2 kx}{\tan kx}\right\}^{(2)}$$

16. 媒介變數ニヨル函數ノ導函數

x ト y トガ何レモ t ノ函數ナルトキ，卽チ

---

(1) 第 11 節 (i) ノ公式 (5) ハ $\dfrac{dy}{du}$, $\dfrac{du}{dx}$ ノ兩方ガ存在スルト云フ假定ノ下ニ成立スルノデアル．然ラバ此ノ例ニ於ケル函數 y ノ微分係數ノ存在ヲ確カメズシテ $\dfrac{d}{dx}(\log y) = \dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}$ トスルハ實ハ正當デナイ．併シナガラ $\log y = \phi(x)$ ナルトキハ $y = e^{\phi(x)}$ トナル故合成函數微分ノ公式ニヨリ $\dfrac{dy}{dx} = e^{\phi(x)}\phi'(x) = y\phi'(x)$ ヲ得ルノデアツテ丁度 $\dfrac{dy}{dx}$ ノ存在ヲ假定シテ $\log y = \phi(x)$ ノ兩邊ヲ x ニツキ微分スルコトニヨツテ得ル式ト同一ノモノガ出デ來ルノデアル．デアルカラ對數微分法ニヨツテ得タル結果ハ常ニ正シイモノト思ツテ差支ナイ．

(2) (1) 式ニ於ケル x, $\tan kx, y$ ノ如キハ必ズシモ正デアルトハ限ラヌ．従ツテ (1) 式ヨリ (2) 式ヲ無斷デ誘導スルハ正當デナイ．併シナガラ (1) 式ヨリ

$$\log|y| = x^2 + \frac{1}{3}\log|x| + \log|\tan kx| \quad \text{..................(A)}.$$

ハ出デ來ル．ソシテ此式ノ兩邊ヲ x ニツキ微分スレバ (3) 式ヲ得ル．卽チ結果ハ同ジニナルノデアル．故ニ以後吾人ハ記法ノ簡便ノタメ (A) 式ノ代リニ (2) 式ヲ用フルコトニスル．

$$x = \phi(t) \quad \text{.........................(1)}$$
$$y = \psi(t) \quad \text{.........................(2)}$$

ナルトキ y ハマタ x ノ函數トナル．コノ様ナ式ニテ與ヘラレル函數 y ノ x ニ關スル微分係數ヲ求ムルニハ如何ニスベキカ．

先ヅ (1) ヨリ t ハ x ノ函數トナル故，合成函數ノ微分公式ニヨツテ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$$

然ルニ第 11 節 (ii) ニヨツテ

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

コレ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求ムル公式デアル．

例 $\quad x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$

此場合ニハ
$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t) = 2a\sin^2\frac{t}{2}$$
$$\frac{dy}{dt} = a\sin t = 2a\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$$
$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \cot\frac{t}{2}$$

問 題 5.

次ノ函數ヲ微分セヨ (1—13).

1. $\log(1 + e^{x^2})$ **2.** $\log\{\log(a + bx^n)\}$

3. $\cos\{k\log(\sqrt{x}+1)\}$ 4. $\tan(e^{kx^2})$

5. $e^{k\tan^{-1}(x^2)}$ 6. $\log(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2})$

7. $\log\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}}$ 8. $e^{mx^3}\cos kx$

9. $e^{\sqrt{x}}(\log kx)^5$ 10. $\boxed{x^{\frac{1}{x}}}$

11. $x^{\sin^{-1}x}$ 12. e^{x^x}

13. $a^{f(x)}(\tan x)^x$

次ノ關係ヨリ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求ム (14—17).

14. $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ 15. $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$

16. $x = e^{\frac{x-y}{y}}$ [y ニツキ解ケ] 17. $e^y = x\sin(a+y)$ [先ヅ $\dfrac{dx}{dy}$ ヲ求メヨ]

18. 函數 $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ ノ $x=0$ ニ於ケル右方微分係數ハ 0 ニ等シク, 左方微分係數ハ 1 ニ等シキコトヲ證明セヨ.

$y = \log x + \log\sin(a+y)$

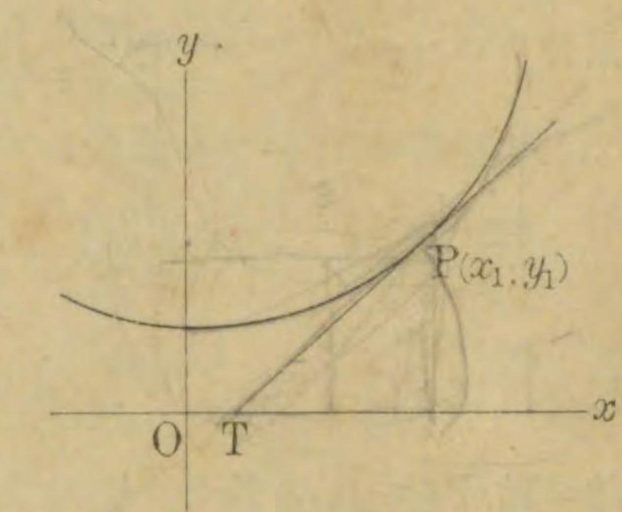
$a^x = e^{x\log_e a}$

第三章

導函數ノ應用

17. 曲線ノ切線及ビ法線ノ方程式

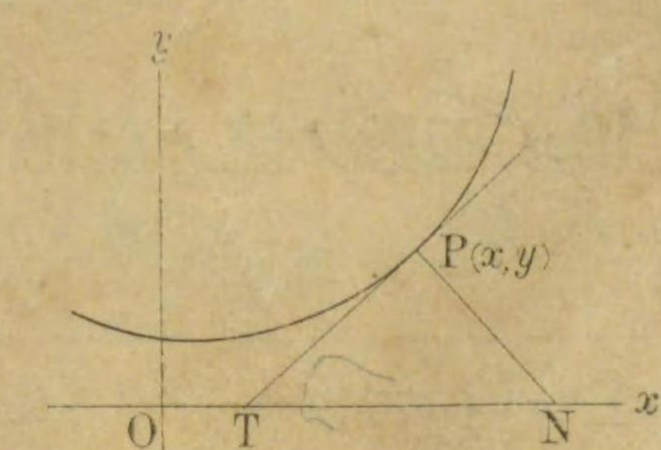
直交軸ニ關シテ與ヘラレタ曲線ノ方程式ヲ $y=f(x)$ トスル. 此曲線上ノ一點 $P(x_1, y_1)$ ニ於ケル切線 PT ノ方向係數ハ $f'(x_1)$ ニ等シイコトハ第 9 節ニ於テ說明シテアル. ヨッテ切線 PT ハ點 $P(x_1, y_1)$ ヲ通リ方向係數 $f'(x_1)$ ナル直線デアルカラ其方程式ハ次ノ如クニナル.



$$y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)$$

此方程式中ノ x_1, y_1 ハ曲線上ノ一定點 P ノ座標デアッテ x, y ハ切線上ノ任意ノ點ノ座標デアル. 卽チ x_1, y_1 ハ定座標デアッテ x, y ハ變座標デアル. 故ニ P 點ノ座標ヲ x, y ニテ表シ切線上ノ點ノ座標, 卽チ變座標ヲ X, Y ニテ表スナラバ切線ノ方程式ハ

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$$



ト書クコトガ出來ル. 以後吾人ハ此形ノ方程式ヲ用フルコトニスル.

點 P ヲ通リ切線 PT ニ垂直ニ引

$\dfrac{dy}{dx}=m$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(X-x)}{Y-y}=-\dfrac{1}{m}$ $m'=-\dfrac{1}{m}$

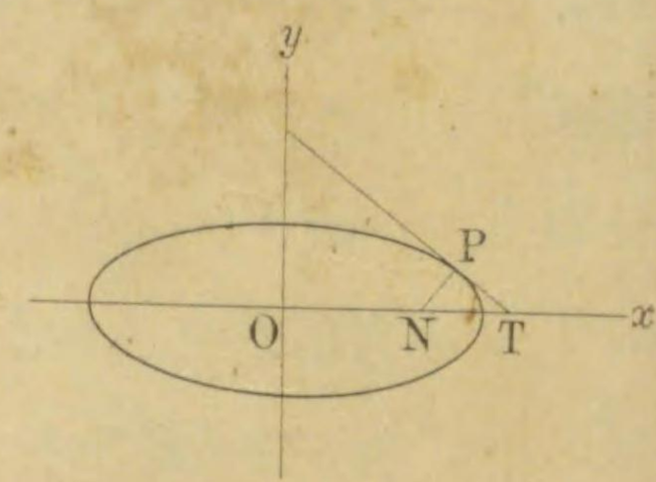
ケル直線 PN ヲ P 點ニ於ケル曲線ノ**法線**ト云フ. 法線 PN ノ方程式ハ

$$\mathrm{Y}-y=-\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}(\mathrm{X}-x)$$

例. 有心二次曲線

$$\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}y^2=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

上ノ點 $\mathrm{P}(x,y)$ ニ於ケル切線及ビ法線ノ方程式.



y ヲ x ノ函數ト考ヘ (1) 式ノ左邊ヲ x ニツキ微分スレバ $2\left(\mathrm{A}x+\mathrm{B}y\dfrac{dy}{dx}\right)$ トナル. 故ニ (1) ノ兩邊ヲ x ニツキ微分シテ

$$2\left(\mathrm{A}x+\mathrm{B}y\frac{dy}{dx}\right)=0$$

ヲ得ル.[1] 之ヨリ $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\mathrm{A}x}{\mathrm{B}y}$

故ニ點 $\mathrm{P}(x,y)$ ニ於ケル切線 PT ノ方程式ハ

$$\mathrm{Y}-y=-\frac{\mathrm{A}x}{\mathrm{B}y}(\mathrm{X}-x)$$

或ハ

$$\mathrm{A}x\mathrm{X}+\mathrm{B}y\mathrm{Y}=\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}y^2$$

而シテ P 點ハ曲線 (1) 上ノ點ナル故 P 點ノ座標 x, y ハ (1) 式ヲ滿足スル. ヨツテ切線 PT ノ方程式ハ

$$\mathrm{A}x\mathrm{X}+\mathrm{B}y\mathrm{Y}=1$$

又法線 PN ノ方程式ハ

$$\mathrm{Y}-y=\frac{\mathrm{B}y}{\mathrm{A}x}(\mathrm{X}-x)$$

或ハ

$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{A}x}-\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{B}y}=\frac{1}{\mathrm{A}}-\frac{1}{\mathrm{B}}$$

18. 函數ノ値ノ變化

$y=f(x)$ ヲ或區域内ニ於ケル x ノ連續函數トスル. 其區域内

[1] コレハ暗暗裡ニ $\dfrac{dy}{dx}$ ノ存在ヲ假定シテ居ル結論デアルガ (1) 式ヲ y ニツキ解クナラバ $\dfrac{dy}{dx}$ ノ存在ハ容易ニ分ルコトデアル故ニ之ヲ斷ルコトハ省略スル.

ノ一ツノ x ニ對シテ比 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ヲ作レバコレハ $\Delta x\to 0$ ナルトキ $f'(x)$ ニ收斂スルガ故ニ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon$$

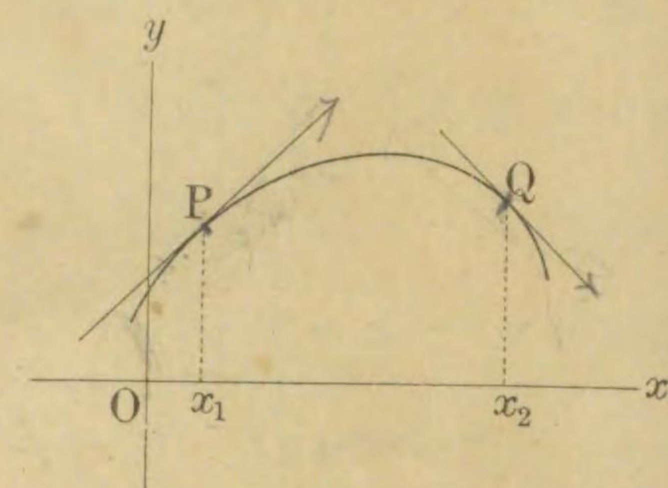
ト置クナラバ $|\Delta x|$ ノ非常ニ小ナル値ニ對シテハ $|\varepsilon|$ モ亦非常ニ小ナル値ヲ取ル. 故ニ $f'(x)$ ガ x ノ或値ニ對シテ正又ハ負トナル場合ニハ $|\Delta x|$ ヲ適當ニ小ニ取ルトキ $f'(x)+\varepsilon$ ト $f'(x)$ トハ同符號ヲ有スベク從ツテ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ト $f'(x)$ トモ同符號ヲ有スルコトニナル. 即チ $f'(x)>0$ ナル x ニ對シテハ $|\Delta x|$ ヲ適當ニ小ニ取レバ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0$, 之ニ反シテ $f'(x)<0$ ナル x ニ對シテハ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}<0$ トナル.

所デ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0$ デアルト云フコトハ Δx ト Δy トガ同符號ヲ有スルト云フコトデアツテ x ガ增セバ y モ增シ, x ガ減ズレバ y モ減ズルト云フコトデアル. 之ニ反シテ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}<0$ デアルト云フコトハ x ガ增セバ y ハ減ジ, x ガ減ズレバ y ハ增スト云フコトデアル. 故ニ次ノ結論ヲ得ル.

$f'(x)>0$ ナル x ノ値ニ對シテハ自變數 x ガ極メテ僅カ增ストキ函數 $y=f(x)$ モ增シ, x ガ極メテ僅カ減ズルトキ函數 $f(x)$ モ減ズル, 換言セバ x ノ增減ト函數ノ增減トハ相伴フ. 之ニ反シテ $f'(x)<0$ ナル x ノ値ニ對シテハ自變數 x ガ極メテ僅カ增ストキ函數 $y=f(x)$ ハ減ジ, x ガ極メテ僅カ減ズルトキ函數 $f(x)$ ハ增ス, 即チ x ノ增減ト函數ノ增減トハ相反スル. 前ノ如キ場合

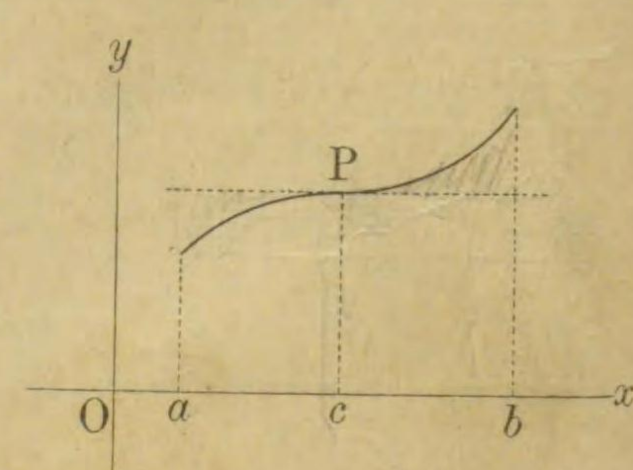
ニハソノ x ニ對シテ函數ハ**增加ノ狀態**ニアルト云ヒ，後ノ如キ場合ニハ**減少ノ狀態**ニアルト云フ.

上ノ事ハぐらふヲ見レバ容易ニ分ルコトデアル．圖ニ於テ點PニテハЧ切線ノ方向係數 $f'(x_1)$ ハ正デアツテ x ガ x_1 ヨリ少シ增セバ函數 y モ增シ，x ガ x_1 ヨリ少シ減ズレバ y モ亦減ズル．之ニ反シテ Q 點ニテハ切線ノ方向係數 $f'(x_2)$ ハ負デアツテ x ガ x_2 ヨリ少シ增セバ函數 y ハ減ジ x ガ x_2 ヨリ少シ減ズレバ函數 y ハ增加スル.



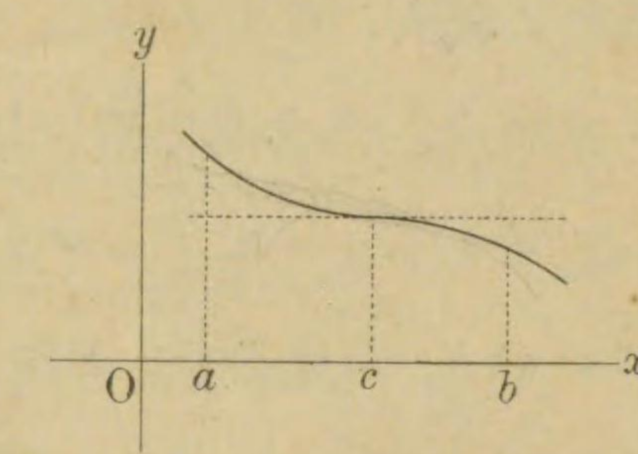
若シ區域 (a,b) 內ノ總テノ x ニ對シテ $f'(x)>0$ デアルナラバ此區域內ニ於テ函數 $f(x)$ ハ增加ノ狀態ヲ維持スル．換言セバ此區域內ニ於テ $f(x)$ ハ x ト共ニ增ス．斯クノ如キ函數ヲ此區域內ニ於ケル**增加函數**ト稱スル．區域 (a,b) 內ニ於テ何回カ $f'(x)$ ガ 0 トナルコトガアツテモ負トナルコトガナケレバ同ジ結論ガ得ラレル.

例ヘバ x ガ a,b 間ノ或値 c ニ對シテ $f'(x)=0$ トナルトスルモ其他ノ x ニ對シテ常ニ $f'(x)>0$ デアルナラバ x ガ a ヨリ c マデ變ズル間ハ $f(x)$ ハ x ト共ニ增シ，又 x ガ c ヨリ b マデ變ズル間モ $f(x)$ ハ x ト共ニ增ス故，結局 x ガ a ヨリ b マデ變ズル間ニ $f(x)$ ハ x ト共ニ增スコトニナル．上圖ハ $x=c$



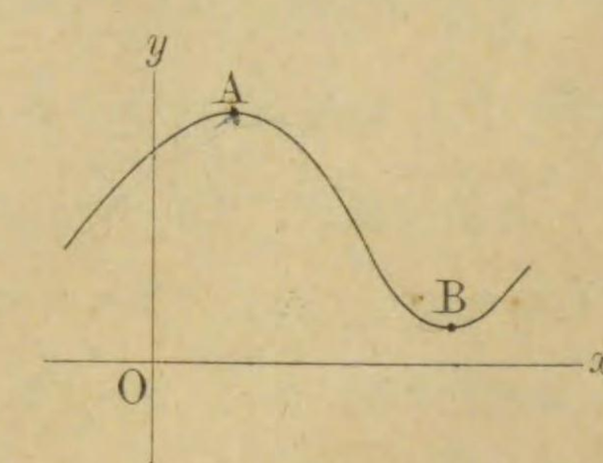
ニ於テ $f'(x)=0$，其他ノ x ニ對シテ $f'(x)>0$ ナル函數ノぐらふデアツテ $x=c$ ニ對スル曲線上ノ點 P ニ於テハ曲線ノ切線ハ x 軸ニ平行トナルモ其他ノ點ニテハ切線ハ x 軸ト $90°$ ヨリ小ナル正角ヲ作リ，而シテ函數ハ區域 (a,b) 內ニテ x ト共ニ增スコトヲ示シテ居ル.

同樣ニ區域 (a,b) 內ノ總テノ x ニ對シテ $f'(x)<0$ デアルカ又ハ何回カ零トナルコトハアツテモ正トナルコトガナイナラバ此區域內ニ於テ函數 $f(x)$ ハ減少ノ狀態ヲ維持シ從ツテ $f(x)$ ハ此區域內ニテ x ノ增スニ從ツテ減少スル．斯クノ如キ函數ヲ此區域內ニ於ケル**減少函數**ト云フ.[1]



自變數 x ガ漸次增シ行クトキ導函數 $f'(x)$ ガ正ヨリ負ニ移ル所又ハ負ヨリ正ニ移ル所ニテハ函數 $f(x)$ ノ變化ノ狀態ハ如何.

x ガ漸次增シ行クトキ導函數 $f'(x)$ ガ正ヨリ負ニ移ル所ハ函數 $f(x)$ ガ增加ノ狀態ヨリ減少ノ狀態ニ移ル所デアツテぐらふニ就イテ云ヘバ，其附近ニテハ最モ高イ所デアル（右圖ノ A 點ガソレデアル）．又 $f'(x)$ ガ負ヨリ正ニ移ル所ハ函數 $f(x)$ ガ減少ノ狀態ヨリ增加ノ狀態ニ

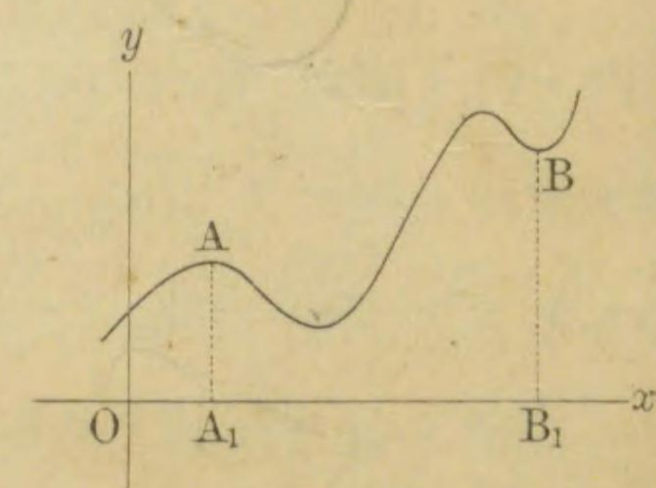


[1] 增加函數ト減少函數トヲ一緒ニシテ**單調函數**ト稱スルコトガアル．併シナガラ單調函數トハ通例モ少シ廣イ意味ニ用ヒラレテ居ルノデアツテコレハ狹イ意味ノ單調函數デアル.

移ル所デアツテぐらふ＝就イテ云ヘバ其附近＝テハ最モ低イ所デアル（圖ノ B 點ガソレデアル）.

函數ガ增加ノ狀態ヨリ減少ノ狀態＝移ル所＝テハ函數ハ**極大＝ナル**ト稱シ，之＝反シテ減少ノ狀態ヨリ增加ノ狀態＝移ル所＝テハ函數ハ**極小＝ナル**ト云フ．而シテ其時ノ函數ノ値ヲソレゾレ**極大値**（又ハ**極大**）及ビ**極小値**（又ハ**極小**）ト云フ．

函數ノ極大，極小ハ澤山＝存在スルコトモアレバ又一ツモナイコトガアル．又或極大値ハ却ツテ或極小値ヨリ小ナルコトガアル．例ヘバ圖ノ AA_1 ハ極大値，BB_1 ハ極小値デアルガ AA_1 ヨリモ BB_1 ノ方ガ大キイ．



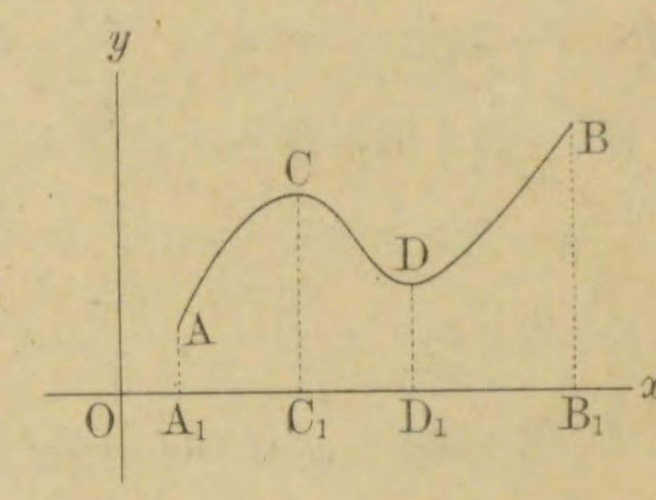
上ノ推理ヨリ次ノ結論ヲ得ル．

自變數 x ガ漸次增シ行クトキ導函數 $f'(x)$ ガ正ヨリ負＝移ル所＝テハ函數 $f(x)$ ハ極大トナリ，導函數 $f'(x)$ ガ負ヨリ正＝移ル所＝テハ函數 $f(x)$ ハ極小トナル．

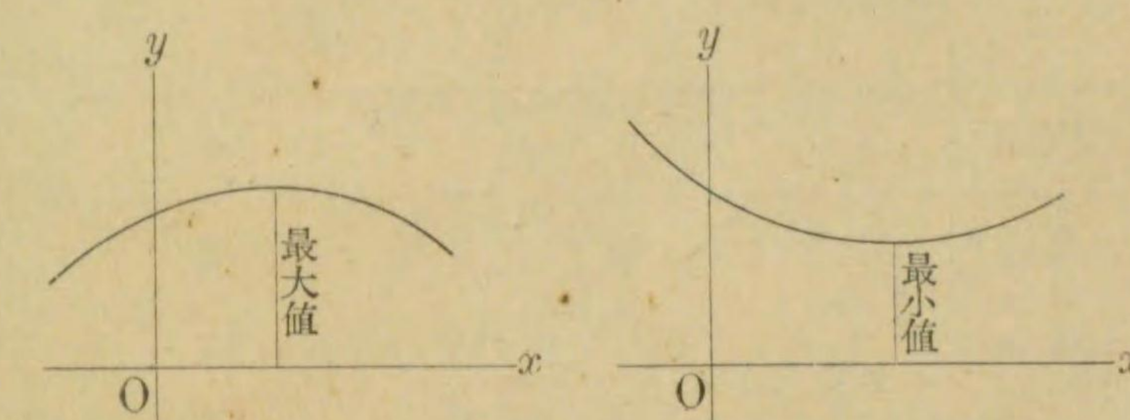
注意 1．函數 $f(x)$ ガ $x=x_1$ ＝於テ極大又ハ極小トナルトキハ $x=x_1$ ＝テ $f(x)$ ハ勿論連續デアラネバナラヌ．コレハ本節ノ冒頭＝特＝斷ツテ置イタ條件デアル．併シナガラ $f'(x)$ ハ必ズシモ連續ナルヲ要シナイ．x ガ x_1 ヲ通リ越ス際＝ $f'(x)$ ガ符號ヲ變ジサヘスレバ宜シイノデアル．次ノ例 3 ヲ見ヨ．

注意 2．$f'(x)$ ガ連續ナル場合＝於テハ x ガ x_1 ヲ通リ越ス際＝若シ符號ヲ變ズルナラバ $f'(x)$ ハ零デアラネバナラヌ．故＝ $x=x_1$ ＝テ $f(x)$ ガ極大若シクハ極小トナリ而シテ $f'(x)$ ガ連續デアルナラバ $f'(x_1)=0$．ぐらふ＝就イテ云ヘバ曲線ノ切線ハ x 軸＝平行トナル．併シナガラ $f'(x)$ ハ $x=x_1$ ＝テ零＝ナルトモ x ガ x_1 ヲ通リ越ス際＝符號ヲ變ズルトハ限ラヌ故 $f'(x_1)=0$ トナルダケデハ函數 $f(x)$ ハ $x=x_1$ ＝テ必ズシモ極大若シクハ極小トナラヌ．

注意 3．極大値ト最大値，又極小値ト最小値トハ必ズシモ一致スルモノデハナイ．ぐらふガ次圖ノ如キ場合＝ハ最大値ハ BB_1，最小値ハ AA_1，極大値ハ CC_1，極小値ハ DD_1 デアル．



併シナガラ函數ガ連續デアツテ極小値ナク只一ツノ極大値ヲ有スルト云フ場合＝ハ極大値ト最大値トハ一致シ，又極大値ガナク只一ツノ極小値ヲ有スルト云フ場合＝ハ極小値ト最小値トハ一致スルノデアル．コレラノ事ハ次圖ヲ見レバ明瞭トナルデアラウ．

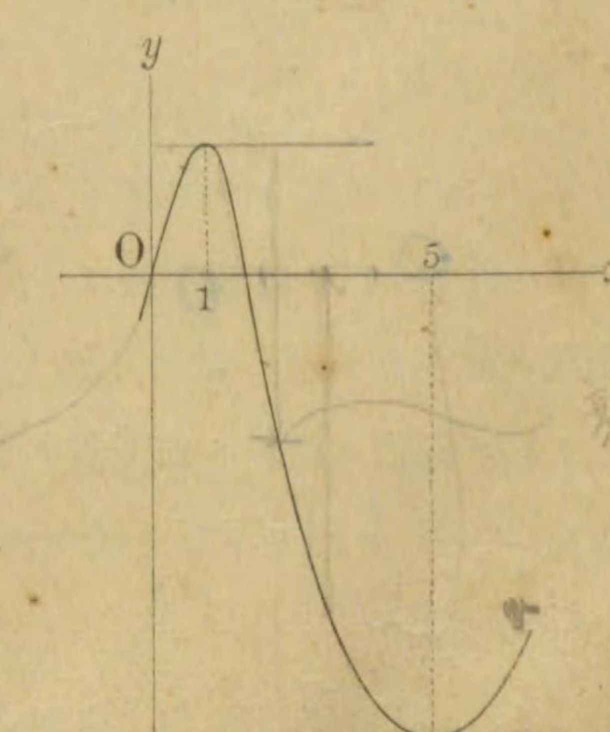


例 1．$f(x)=\frac{1}{3}(x^3-9x^2+15x)$ ノ變化ノ狀態ヲ攻究セヨ．

$$f'(x)=x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$$

x ノ種種ノ値＝對スル $f'(x)$ ノ符號ノ變化ト $f(x)$ ノ增減ノ狀態トヲ表示スレバ次ノ如クニナル．

x	$1-h$	1	……	5	$5+h$	$h>0$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	
$f(x)$	增		減		增	
$f(x)$		極大		極小		



即チ函數ハ $x=1$ ＝テ極大トナリ，$x=5$ ＝テ極小トナル．此函數ノぐらふハ右圖ノ如クニナル．

例 2. $(0, 2\pi)$ 間ニ於ケル次ノ函數ノ變化ノ狀態ヲ攷究セヨ.

$$f(x)=\cos x(1+\sin x)$$

此函數ニ對シテハ

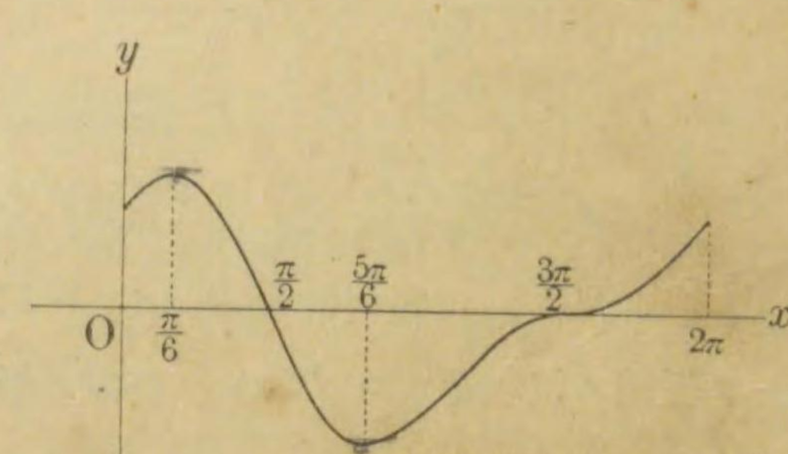
$$f'(x)=-\sin x(1+\sin x)+\cos^2 x$$

$$=1-\sin x-2\sin^2 x=(1-2\sin x)(1+\sin x)$$

偖テ $1-2\sin x$ ハ $\sin x=\frac{1}{2}$ 卽チ $x=\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ ニ對シテ零トナリ x ガ此値ノ何レヲ通リ越ス際ニモ符號ヲ變ズル. 一方 $1+\sin x$ ハ $\sin x=-1$ 卽チ $x=\frac{3\pi}{2}$ ニ對シテ零トナルガ x ガ $\frac{3\pi}{2}$ ヲ通リ越ス際ニ符號ヲ變ヘヌ. 故ニ $f'(x)$ ガ符號ヲ變ズルハ x ガ $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ ヲ通リ越ストキノミデアル. $(0, 2\pi)$ 間ニ於ケル x ノ種種ノ値ニ對スル $f'(x)$ ノ符號ノ變化ト $f(x)$ ノ増減ノ狀態トヲ表示スレバ次ノ如クニナル.

x	0	……	$\frac{\pi}{6}$	……	$\frac{5\pi}{6}$	……	$\frac{3\pi}{2}$	……	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		増		減		増		増	

故ニ $f(x)$ ハ $x=\frac{\pi}{6}$ ニテ極大トナリ $x=\frac{5\pi}{6}$ ニテ極小トナル. 此函數ノぐらふハ大略右圖ノ如クニナル.

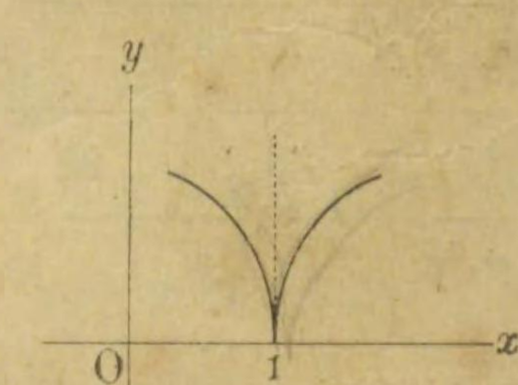


例 3. 函數 $f(x)=(x-1)^{\frac{2}{3}}$ ノ極大, 極小ヲ求ム.

$$f'(x)=\frac{2}{3(x-1)^{\frac{1}{3}}}$$

故ニ $f'(x)$ ヲ零ナラシメル x ノ値ハナイ. 併シナガラ x ガ 1 ヲ通リ越ス際ニ $f'(x)$ ハ負ヨリ正ニ符號ヲ變ズル. 故ニ $x=1$ ニ於テ函數ハ極小トナル. 此他ニ極大, 極小ハナイ.

$x=1$ ノ近傍ニ於ケル此函數ノぐらふハ右圖ノ如クニナリ $x=1$ ニ對スル點ニ於ケル曲線ノ切線ハ y 軸ニ平行トナル.



例 4. 直角 AOB 內ノ定點 P_1 ヲ通ツテ角ノ二

$\frac{3}{2}\pi$

邊ト A, B ニテ交ル直線ヲ引キ AB ノ長サヲ最小ナラシムルコト.

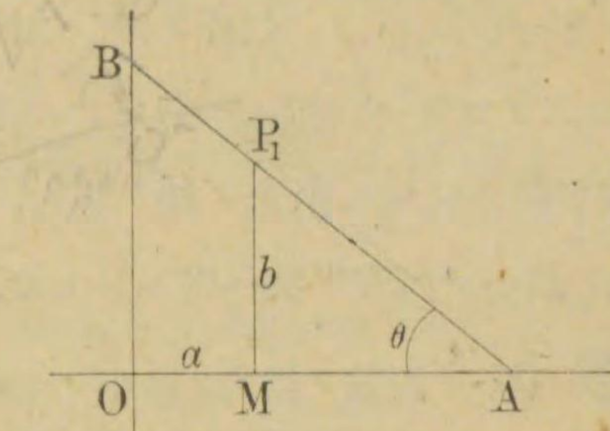
點 P_1 ヨリ OA ニ垂線 P_1M ヲ下シ

$$OM=a,\quad MP_1=b$$

トスル. 角 OAP_1 ヲ θ ニテ表スナラバ

$$AP_1\sin\theta=MP_1,\quad P_1B\cos\theta=OM$$

ナル故



$$AP_1=\frac{b}{\sin\theta},\quad P_1B=\frac{a}{\cos\theta}$$

$$\therefore\quad AB=AP_1+P_1B=\frac{b}{\sin\theta}+\frac{a}{\cos\theta}$$

卽チ AB ハ θ ノ函數トナル. 吾人ノ問題ハ θ ガ 0 ヨリ $\frac{\pi}{2}$ マデ變ズル間ニ於テ此式ノ最小ヲ求ムルニアル. 先ヅ此式ノ極小ヲ求メンガタメ此式ヲ $f(\theta)$ ト置クナラバ

$$f'(\theta)=-\frac{b\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{a\sin^3\theta-b\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

故ニ $f'(\theta)$ ハ 0 ト $\frac{\pi}{2}$ トノ間ノ θ ニ對シテ只一回零トナル. 其 θ ノ値ハ

$$\tan\theta=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

ニヨツテ定メラレル. 此 θ ノ値ヲ θ_1 ニテ表スナラバ θ ガ θ_1 ヲ通リ越ストキニ $f'(\theta)$ ハ負ヨリ正ニ符號ヲ變ズル. ヨツテ $f(\theta)$ ハ $\theta=\theta_1$ ニ於テ極小トナル.

然ルニ函數 $f(\theta)$ ハ $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 內ニテ明カニ連續デアル. 卽チ $f(\theta)$ ハ $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 內ニテ連續デアツテ極大ヲ有セズ只一回極小ヲ有スルコトニナル. ヨツテ此極小値ハ函數ノ最小値デアル [注意 3]. 偖テ

$$\tan\theta_1=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

ヨリ

$$\frac{1}{\sin\theta_1}=\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}},\quad \frac{1}{\cos\theta_1}=\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}.$$

ヲ得ル故

$$f(\theta_1)=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

トナリ, コレガ卽チ AB ノ最小値デアル.

注意 4. 上ノ式ニ於ケル AB ハ $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 內ニテ θ ノ連續函數デアツテ $\theta=0, \frac{\pi}{2}$ ニ對シテハ $+\infty$ デアリ而シテ此區域內ニテ 0 トナルコトハナイ. 故ニ

0 ト $\frac{\pi}{2}$ トノ間ニ於テ最小値ヲ取ルコトガナケレバナラヌ.[1] コノ最小値ハ極小値ノ一ツデアラネバナラヌ. コレニテ極小値ハ少クモ一ツ存在スルコトガ分ル. 一方 $f'(\theta)$ ノ式ヨリ $f(\theta)$ ハ θ_1 以外ノ θ ニ對シテハ極大, 若シクハ極小トナリ得ナイコトヲ知ル. 此二ツヨリ $\theta=\theta_1$ ニ對シテ AB ハ極小トナリ, 而シテソレハ最小ヲ與ヘルコトノ結論ガ得ラレル. 斯クノ如ク最大, 最小ヲ求メル場合ニ問題ノ性質ヲ考慮シテ直チニ最大, 最小ノ判定ヲ與ヘ得ルコトガ屢アル.

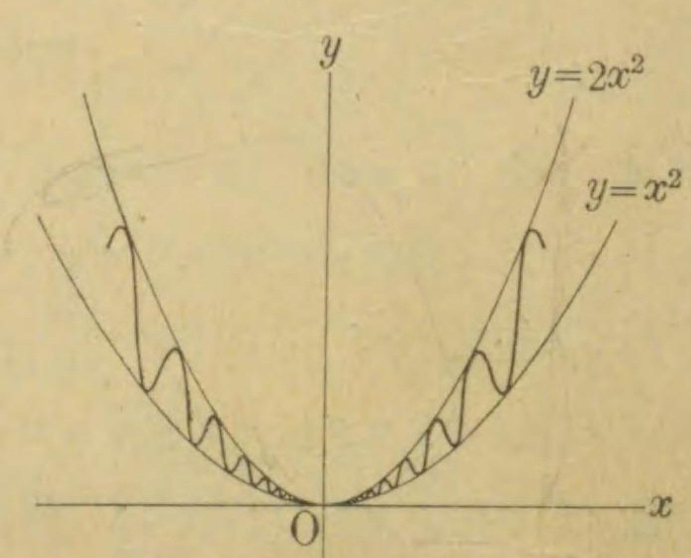
注意 5. 函數ノ極大. 極小ノ定義ハ通例次ノ樣ニ與ヘラレテ居ル.

函數 $y=f(x)$ ガ $x=a$ ニ於テ極大(極小)ニナルトハ x ガ a ニ極メテ近イ所ダケヲ考フルナラバ $x=a$ ノトキ函數ハ最大(最小)トナルト云フコトデアル.[2]

吾人ガ前ニ與ヘタ定義ニ從ツテ函數ガ極大(極小)トナル所デハ此定義ニヨツテモ亦極大(極小)トナルコトガ容易ニ分ル. 併シナガラ此逆ハ必ズシモ成立シナイ. 例ヘバ

$$f(x)=x^2\left(1+\sin^2\frac{1}{x}\right)$$

ナル函數ニ於テハ $x=0$ ナラバ $f(x)=0$, $x\neq 0$ ナラバ $f(x)>0$ デアルカラ新定義ニ從ツテ $f(x)$ ハ $x=0$ ニ於テ極小トナルケレドモぐらふヨリ見テ明カナル如ク曲線ハ原點ノ附近ニ於テ無限回振動シ, 從ツテ $f(x)$ ハ x ガ 0 ヲ通リ越ス手前ニ於テ必ズシモ減少ノ狀態ニハナク又通リ越シタ後ニ於テ必ズシモ增加ノ狀態ニハナイ.



斯クノ如ク一點ノ附近ニ於テ無限回振動スル函數ニ對シテハ此二ツノ定義ハ一致シナイケレドモソウデナイ函數ニ對シテハ此二ツノ定義ハ一致スルノデアル. 吾人ノ取リ扱フ多クノ函數ハ此種ニ屬スルモノデアル故, 以後此二ツヲ區別セヌコトニスル.

問題 6.

1. 拋物線 $y^2=4px$ 上ノ點 (x,y) ニ於ケル切線及ビ法線ノ方程式ヲ求ム.

(1) コレハ實ハ證明ヲ要スルコトナノデアル. ソシテ其證明ハムヅカシイ. 吾人ハ常識的ニ之ヲ承認スルコトニスル.

(2) 多變數ノ函數ノ極大, 極小ノ定義ハ此方式ニヨルコトヲ後ニ見ルデアラウ.

2. 曲線 $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2$ 上ノ點 (x,y) ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求ム.

3. n ニ種種ノ値ヲ與ヘテ生ズル曲線 $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2$ ハ點 (a,b) ニ於テ互ニ切スルコトヲ證明セヨ.

4. 曲線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ ノ切線ガ x, y 兩軸ノ間ニ夾マルル長サハ一定ナルコトヲ證明セヨ.

5. 曲線 $y=f(x)$ 上ノ點 (x,y) ニ於ケル切線ガ原點ヲ通ル條件ハ $y=x\frac{dy}{dx}$ ナルコトヲ證明セヨ.

6. 曲線 $y=f(x)$ 上ノ點 $P(x,y)$ ヨリ x 軸ニ下セル垂線ノ足ヲ M トシ, P ニ於ケル切線及ビ法線ガ x 軸ト交ル點ヲソレゾレ T, N トスレバ

$$TM=y\Big/\frac{dy}{dx},\qquad MN=y\frac{dy}{dx}$$

$$PT=\left|\frac{y}{\frac{dy}{dx}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right|,\qquad PN=\left|y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right|$$

ナルコトヲ證明セヨ.

TM ヲ**切線影**, MN ヲ**法線影**, PT ヲ**切線ノ長サ**, PN ヲ**法線ノ長サ**ト稱スル. 通例切線影 TM ハ M ガ T ノ右ニアレバ正, 左ニアレバ負, 法線影 MN ハ N ガ M ノ右ニアレバ正, 左ニアレバ負ト規約シテ居ル. 此規約ノ結果トシテ上ノ式ハ符號マデ入レテ成立スルノデアル. 又切線ノ長サ, 法線ノ長サハ常ニ正ナルモノト定メル.

7. 函數 $4x^3-18x^2+27x+1$ ハ x ノ增加函數ナルコトヲ證明セヨ.

8. 函數 $(x-1)e^x+1$ ハ負ナル x ニ對シテ減少函數ニシテ正ナル x ニ對シテ增加函數ナルコトヲ證明セヨ. 此結果ヲ利用シテ $x\neq 0$ ナラバ $(x-1)e^x+1>0$ ナルコトヲ證明セヨ.

9. $f(0)=\varphi(0)$ ニシテ正ナル x ニ對シテ $f'(x)>\varphi'(x)$ ナルトキハ正ナル x ニ對シテ $f(x)>\varphi(x)$ ナルコトヲ證明セヨ.

10. $x>0$ ナラバ $\log(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$ ナルコトヲ證明セヨ.

11. 方程式 $x-\cos x=0$ ハ正ナル唯一ツノ實根ヲ有スルコトヲ證明セヨ [函數 $x-\cos x$ ノ變化ノ狀態ヲ攻究セヨ].

12. 方程式 $\frac{1}{\sin x}+\frac{3\sqrt{3}}{\cos x}=\lambda$ ノ 0 ト 2π トノ間ニアル實根ノ數ヲ求ム [左ノ函數ノ變化ノ狀態ヲ攻究セヨ].

次ノ函數ヲ極大又ハ極小ナラシムル x ノ値ヲ求メヨ (13—19).

13. $2x^3-3x^2-36x+2$

14. $(x-1)^4(x+3)^3$ **15.** $\dfrac{x^2-3x+1}{x+5}$

16. xe^{-x} **17.** $x^{\frac{1}{x}}$

18. $\dfrac{x}{1+x\tan x}$ **19.** $\sqrt{x^2+x^3}$

20. 定圓ニ內接スル矩形ハ正方形トナルトキ最大ナルコトヲ證明セヨ.

21. 定圓內ノ定點 A ヲ通リテ圓ニ P, Q ニテ交ル直線ヲ引キ PA^2+QA^2 ヲ最小ナラシメヨ.

22. 直角 AOB 內ノ定點 P_1 ヲ通リテ角ノ二邊ト A, B ニテ交ル直線ヲ引キ

(i) $OA+OB$ (ii) $OA\cdot OB$

ヲ最小ナラシメヨ.

23. 扇形ノ周ヲ與ヘテ面積ヲ最大ナラシメヨ.

24. 橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ノ切線ガ x, y 軸ト交ル二點ヲ T_1, T_2 トスルトキ T_1T_2 ノ最小ハ $a+b$ ナルコトヲ證明セヨ.

25. 橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ト y 軸ニ平行ナル直線トノ交點ヲ P, P′ トス. A ヲ橢圓ノ長軸ノ左端トスルトキ三角形 APP′ ノ面積ノ最大ヲ求ム.

26. 半徑 r ナル球ニ內接スル直圓錐ハ高サガ $\dfrac{4r}{3}$ ナルトキ最大體積ヲ有スルコトヲ證明セヨ.

27. 半徑 r ナル球ニ內接スル直圓壔ハ高サガ $\dfrac{2r}{\sqrt{3}}$ ナルトキ最大體積ヲ有スルコトヲ證明セヨ.

28. 直線狀ノ海岸ヨリ a 粁沖ニアル舟中ノ人ガ海岸上ノ最近點 A ヨリ海岸ニ沿ウテ b 粁ノ地 B ニ最小時間ニテ到達セントス. 其人ノ漕速ハ每時 u 粁, 步速ハ每時 v 粁ナリトセバ如何ナル地點ニ上陸スベキカ.

19. 自變數ノ小變化ニ對スル函數ノ變化

x ノ函數 $y=f(x)$ ノ微分係數トハ x ノ增分 Δx ニ對スル y ノ增分 Δy ト Δx トノ比ノ $\Delta x\to 0$ ナルトキノ極限値デアル. 故

ニ $|\Delta x|$ ヲ非常ニ小ニ取レバ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ハ大略 $f'(x)$ ニ等シイモノト看做シテ差支ナイ. 卽チ

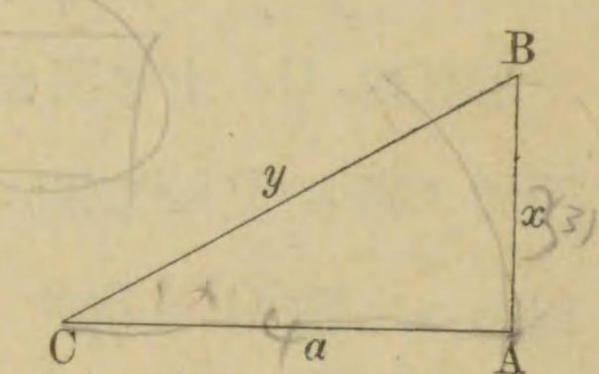
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\doteqdot f'(x)^{(1)}$$

從ツテ

$$\Delta y\doteqdot f'(x)\,\Delta x$$

ヲ得ル. コレ自變數 x ノ小變化 Δx ニ對スル函數 y ノ變化ノ近似値デアル.(2)

例 直角ノ二邊 AB, AC ガソレゾレ 3 m, 4 m ナル直角三角形 ABC ニ於テ AB ガ 3 cm 縮小スルトキ斜邊 BC ハ大略何程ノ縮小ヲナスカ.



此問題ニテハ AC ハ變ラヌ. AB ガ 3 cm 縮小スルトキノ BC ノ變化ヲ求メルノデアルカラ

$AC=a,\quad AB=x,\quad BC=y$

ト置キ y ヲ x ノ函數トシテ表シテ見ル.

$$y=\sqrt{a^2+x^2}$$

コレヨリ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

故ニ x ガ Δx ダケ增ス場合ノ y ノ增分 Δy ハ次ノ式ニテ與ヘラレル.

$$\Delta y\doteqdot\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\cdot\Delta x$$

本問題ニ於テハ, m ヲ單位ニ取ツテ,

$$a=4,\quad x=3,\quad \Delta x=-0.03$$

デアルカラ

$$\Delta y\doteqdot\frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}}\times(-0.03)=-\frac{0.09}{5}=-0.018$$

卽チ BC ハ大約 1.8 cm 縮小スルコトガ分ル.

---

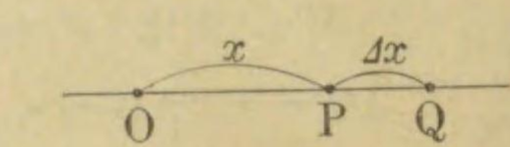
(1) $\doteqdot$ ハ近似的ニ等シイコトヲ示ス記號デアル.

(2) Δx ヲ x ノ誤差トシソレニ對スル y ノ誤差ヲ Δy トスルナラバ Δy ハヤハリ上ノ式ニテ近似的ニ表サレルコト勿論デアル.

20. 函數ノ變化率

x ノ小ナル增分 Δx ニ對スル函數 $y=f(x)$ ノ增分ヲ Δy トスルナラバ第19節ニ云ヘル如ク $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ハ大略 $f'(x)$ ニ等シイモノト看做シテ差支ナイ. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ハ x ガ變ズルトキ y ガ x ノ增シニ比シテ何倍增スカヲ示ス量デアルカラ吾人ハ $f'(x)$ ノ大小ニヨッテ x ガ極メテ僅カ增ス[1]トキソレニ比シテ函數 y ノ增シ方ガ急激デアルカ, 緩漫デアルカヲ判定スルコトガ出來ル. 此意味ニ於テ $f'(x)$ ヲ **x ニ對スル函數 y ノ變化率**ト云フ.

定直線 Ox 上ヲ運動スル點ガアッテ或定ッタ時刻ヨリ t ナル時間ノ後ニ P ノ位置ニアルトスル. 此直線上ニ定點 O ヲ取リ $OP=x$ ト置クナラバ t ノ各値ニ對シテ動點ノ位置ガ定マルノデアルカラ x ハ t ノ函數トナル. 卽チ $x=f(t)$ デアル. 今時間ガ Δt ダケ增シタ後ニ動點ノ位置ガ Q 點ニアルモノトスレバ PQ ハ t ノ增分 Δt ニ對スル x ノ增分デアッテ Δx ニテ表スベキ量デアル. 故ニ $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ハ P 點ヨリ Q 點マデ來ル間ニ於ケル動點ノ平均ノ速サデアル. 若シ速サガ一樣ナラバ此比ハ P 點ニ於ケル動點ノ速サヲ表ス. 速サガ一樣デナイ場合ニ於テハコレハ P 點ニ於ケル動點ノ速サニ丁度等シクハナイケレドモ Δt ガ非常ニ小サイトキハ此比ハ略ボ P 點ニ於ケル速サニ等シイ. 卽チ P 點ニ於ケル動點ノ速サヲ v ニテ表スナラバ



(1) 代數的ニ增ス意味デアル. 以下總テ同樣.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=v\text{[1]} \qquad \text{或ハ} \qquad \frac{dx}{dt}=v$$

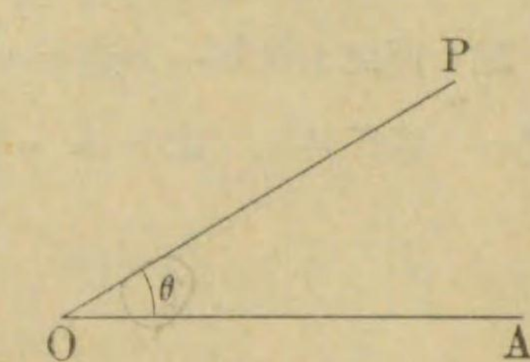
言葉ニテ表セバ, 移動距離ノ時間ニ對スル變化率ガ速サデアル.

次ニ P 點ヨリ Q 點マデ動點ガ移動スル間ニ速サガ Δv ダケ增シタモノトスレバ $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ハ P 點ト Q 點トノ間ニ於ケル動點ノ平均加速度ヲ表ス. $\Delta t\to 0$ ナルトキノ此比ノ極限値ガ P 點ニ於ケル動點ノ加速度ニナル. 故ニ加速度ヲ α ニテ表スナラバ

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\alpha \qquad \text{或ハ} \qquad \frac{dv}{dt}=\alpha$$

卽チ速度ノ時間ニ對スル變化率ガ加速度デアル.

又點 O ノマハリニ廻轉スル直線ガアッテ或定マッタ時刻ヨリ t ナル時間ノ後ニ OP ノ位置ニアルトスル. 今 O ヲ通ル定直線 OA ヲ取リ $\angle AOP=\theta$ トスルナラバ t ノ各値ニ對シテ OP ノ位置ガ定マルノデアルカラ θ ハ t ノ函數トナル. 此 θ ヲ t ニツキ微分セルモノハ所謂廻轉直線 OP ノ角速度デアリ, ソレヲ更ニ t ニツキ微分セルモノハ角加速度デアル. 故ニ次ノ如ク云フコトガ出來ル.



廻轉角ノ時間ニ對スル變化率ハ角速度デアリ, 角速度ノ時間ニ對スル變化率ハ角加速度デアル.

(1) 速サガ一樣デナイ場合ニ於テハ吾人ハ未ダ速サナルモノヲ知ラナイノデアッテ此式ハ實ハ其場合ノ速サヲ定義スルノデアル. 以下ノ説明ニツイテモ同樣デアル.

例 1. 定直線上ノ動點ノ位置ガ次ノ式ニテ定メラレルトキ速サ及ビ加速度如何. 但シ g, v_0, x_0 ハ常數デアル.

$$x=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+x_0$$

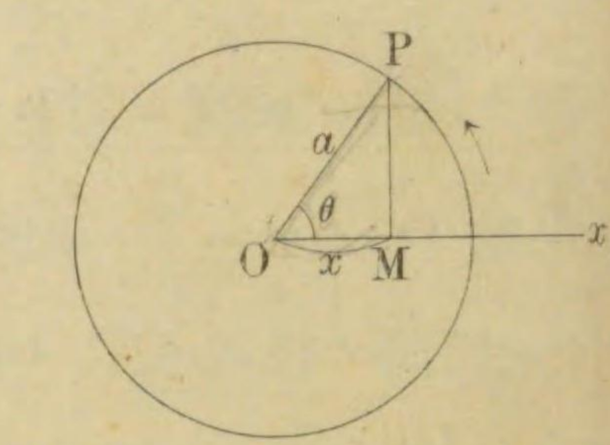
速サヲ v, 加速度ヲ α ニテ表スナラバ

$$v=\frac{dx}{dt}=gt+v_0$$

$$\alpha=\frac{dv}{dt}=g$$

即チ此運動ニ於テハ加速度ハ一定デアル.

例 2. 圓周上ヲ一樣ノ速サニテ走ル動點 P ガアル. 圓ノ中心 O ヲ通ル定直線 Ox ニ P ヨリ下セル垂線ノ足ヲ M トスルトキ M 點ノ速サ及ビ加速度ハ如何.



圓ノ半徑ヲ a, $OM=x$, $\angle MOP=\theta$ トスルナラバ

$$x=a\cos\theta$$

$$\therefore\quad \frac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta$$

P 點ハ圓周上ヲ同一ノ速サニテ走ル故 OP ノ角速度ハ一定デアル. 之ヲ ω ニテ表スナラバ

$$\frac{d\theta}{dt}=\omega$$

$$\therefore\quad \frac{dx}{dt}=\frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-a\omega\sin\theta$$

之ガ M 點ノ速サデアル. 之ヲ v ニテ表スナラバ

$$v=-a\omega\sin\theta.$$

之ヲ更ニ t ツキ微分スルナラバ

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-a\omega\cos\theta\frac{d\theta}{dt}=-a\omega^2\cos\theta$$

コレガ M 點ノ加速度デアル. 之ヲ α ニテ表スナラバ

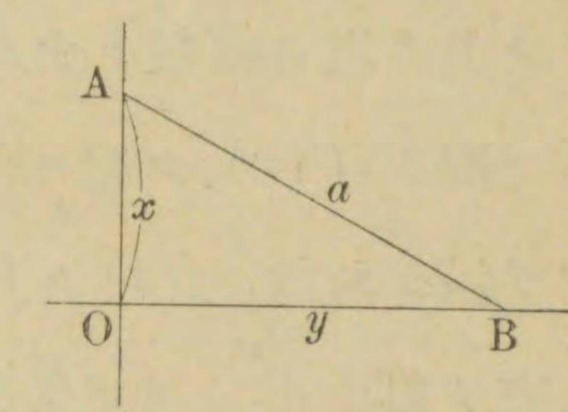
$$\alpha=-a\omega^2\cos\theta=-\omega^2x$$

即チ加速度ハ O 點ヨリノ距離ニ比例シ, 且ツ常ニ O 點ニ向ツテ居ル.

例 3. 地面ニ垂直ナル壁ニカケタル梯子 AB ノ上端 A ガ毎秒 5 cm ノ速サニテ壁ニ沿ウテ降ルトキ下端ハ何程ノ速サニテ地上ヲ滑リ行クカ.

梯子ノ上端 A ヨリ地上ニ下セル垂線ノ足ヲ O トスル.

$$AB=a,\quad OA=x,\quad OB=y$$ [1]



トスルナラバ

$$y=\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

A 點ハ毎秒 5 cm ノ速サニテ下ルノデアルカラ, cm, 秒ヲ單位ニ取ツテ

$$\frac{dx}{dt}=-5$$

トナル. 故ニ

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\times(-5)=\frac{5x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (\text{cm}/\text{秒})$$

コレガ一般ニ B 點ノ速サヲ與ヘル式デアル. 例ヘバ AB = 5 m トシ, 梯子ノ上端 A ガ地上 4 m ノ地點ニ來ルトキノ B ノ速サハ $a=5(\text{m})$, $x=4(\text{m})$ トシテ

$$\frac{5\times4}{\sqrt{5^2-4^2}}=\frac{20}{3}\quad(\text{cm}/\text{秒})$$

21. Rolle ノ定理, 平均値ノ定理

函數 $y=f(x)$ ノ導函數 $f'(x)$ ガ區域 (a,b), $(a<b)$[2] 内ニテ連續デ且ツ零ニナルコトガナイト假定スル. 然ルトキハ a ト b トノ間デ $f'(x)$ ハ絶エズ正カ又ハ絶エズ負デナケレバナラヌ. 何トナレバ a ト b トノ間ノ一數 x_1 ニ對シテ $f'(x)$ ガ正トナリ, 他ノ數 x_2 ニ對シテ負トナルナラバ $f'(x)$ ノ連續性カラシテ $f'(x)$ ハ x_1 ト x_2 トノ間ノ一數, 即チ a ト b トノ間ノ一數ニ對シテ零ト

(1) $\frac{dy}{dx}$ ノ値ハ a, x, y ノ單位ヲ cm ニ取ルモ m ニ取ルモ又ハ他ノモノニ取ルモ變リハナイ. 故ニ特ニ斷ラナカツタノデアル. 併シナガラ $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ ノ數値ハ單位ノ取リ方ニヨツテ變ルガ故ニ單位ヲ指定スル必要ガアル.

(2) 此所ノ議論ハ $a<b$ ト假定シタガ $a>b$ トスルモ同ジ結論ノ成立スルコト明カデアル.

ナラネバナラヌカラデアル [第6節 (i)].

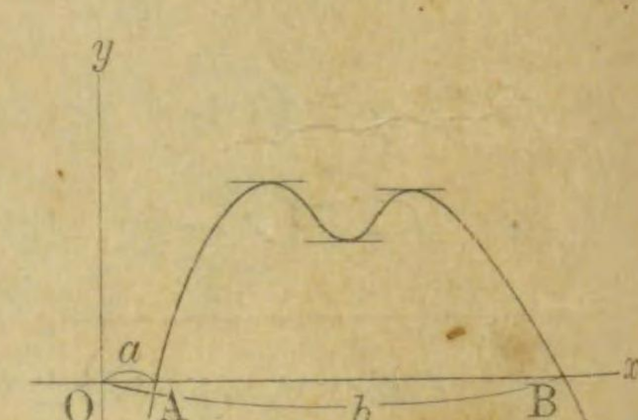
倂テ a ト b トノ間デ $f'(x)$ ガ絶エズ正デアルトスルト $f(x)$ ハ x ト共ニ増ス函數トナル故 $f(a)<f(b)$ デアル. 若シ又 a ト b トノ間デ $f'(x)$ ガ絶エズ負デアルトスルト $f(x)$ ハ x ノ増スニ從ツテ減ズル故, $f(a)>f(b)$. 何レニシテモ $f(a)=f(b)$ ナルコトハ有リ得ナイ. ヨツテ次ノ結論ヲ得ル.

函數 $y=f(x)$ ノ導函數 $f'(x)$ ガ a ト b トノ間ニテ連續デ, 且ツ零ニナルコトガナイナラバ $f(a)\neq f(b)$

從ツテ又此對偶トシテ次ノ事ガ云ハレル.

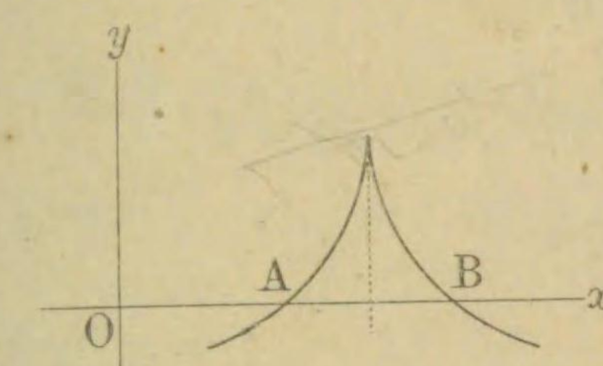
函數 $f(x)$ ノ導函數 $f'(x)$ ガ a ト b トノ間ニテ連續デ, 且ツ $f(a)=f(b)=0$ ナルトキハ $f'(x)$ ハ a ト b トノ間デ少クモ一度ハ零トナラネバナラヌ. 換言スレバ方程式 $f'(x)=0$ ハ a ト b トノ間ニ少クモ一ツノ根ヲ有スル. 此定理ヲ **Rolle ノ定理**ト云フ.

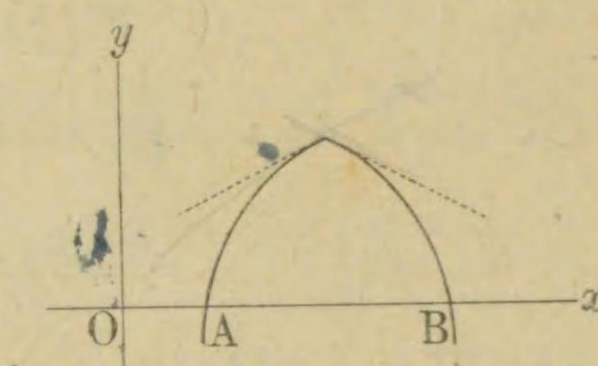
$f'(\xi)=0$ ナラバ $x=\xi$ ニ對スル $f(x)$ ノぐらふ上ノ點ニ於テハ切線ハ x 軸ニ平行トナル故 Rolle ノ定理ヲ幾何學的ニ述ブレバ次ノ如クニナル.



$f(x)$ ノぐらふト x 軸トノ二交點ヲ A, B トスルトキ A, B 間ニ於ケルぐらふノ切線ガ連續的ニ方向ヲ變ジ, 而シテ y 軸ニ平行トナルコトガナイナラバソレラノ切線中 x 軸ニ平行ナルモノガ少クモ一ツハ存在スル.

區域 (a,b) 内ニテ $f'(x)$ ガ連續デナイ場合ニハ上ノ定理ハ必ズシモ成リ立タヌ.[1] 次ノ二圖ヲ見テ了解スルコトガ出來ルデアラウ.





Rolle ノ定理ヨリ次ノ定理ガ得ラレル.

定理. 函數 $f(x)$ ノ導函數 $f'(x)$ ガ a ト b トノ間ニテ連續デアルナラバ

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(\xi) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

但シ ξ ハ a ト b トノ間ノ一數デアル.[2]

此證明ハ次ノ如ク容易ニ出來ル.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ト置クナラバ

$$f(b)-f(a)-k(b-a)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

トナル. 今

$$F(x)=f(b)-f(x)-k(b-x)$$

ナル函數 $F(x)$ ヲ考フレバ

$$F(a)=f(b)-f(a)-k(b-a)=0 \quad [(3) ニヨリ]$$

$$F(b)=f(b)-f(b)-k(b-b)=0$$

而シテ $F'(x)=-f'(x)+k$

(1) 併シナガラ連續デナクトモ區域 (a,b) 内ニテ $f'(x)$ ガ確定デサヘアレバ同ジ定理ノ成立スルコトハ證明セラレルノデアル. 今ハソノ場合ニハ觸レナイ.

(2) a ハ b ヨリ小ナルモ大ナルモ何レデモ宜シイ.

デアツテ區域 (a, b) 内ニテ $f'(x)$ ガ連續デアル故，ソノ區域内ニテ $\mathrm{F}'(x)$ モ連續トナル．ヨツテ $\mathrm{F}(x)$ ＝ Rolle ノ定理ヲ適用シテ

$$\mathrm{F}'(\xi) = 0.$$

但シ ξ ハ a ト b トノ間ノ一數デアル．之ヨリ

$$f'(\xi) = k$$

此値ヲ (3) 中ニ入ルレバ

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(\xi)$$

コレ卽チ以上ノ定理デアル．コノ定理ヲ**平均値定理**ト云フ．

(1) 式ハ又次ノ如クニモ書キカヘラレル．

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

$f(x)$ ノぐらふニ於テ $x=a,\ x=b$ ニ對スル曲線上ノ點ヲ A, B トシ A ヲ通ツテ x 軸ニ平行ナル直線ト，B ヲ通ツテ y 軸ニ平行ナル直線トノ交點ヲ R トスルナラバ

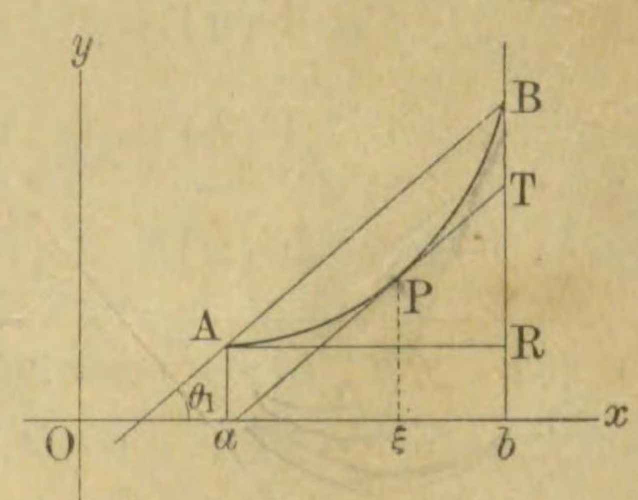
$$f(b)-f(a) = \mathrm{RB}, \qquad b-a = \mathrm{AR}$$

$$\therefore \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{AR}} = \tan\theta_1$$

玆ニ θ_1 ハ AB 直線ガ x 軸トナス角デアル．從ツテ

$$\left[f(b)-f(a)\right]/(b-a)$$

ハ AB 直線ノ方向係數ヲ表ス．又 $f'(\xi)$ ハ $x=\xi$ ニ對スル曲線上ノ點 P ニ於ケル切線ノ方向係數デアル．此二ツガ相等シイトハ



P ニ於ケル切線 PT ガ AB ニ平行ナルコトデアル．ヨツテ平均値定理ノ幾何學的意義ハ次ノ如クニナル．

$f(x)$ ノぐらふ上ノ二點ヲ A, B トスルトキ A, B 間ニ於ケルぐらふノ切線ガ連續的ニ方向ヲ變ジ，而シテ y 軸ニ平行トナルコトガナイナラバソレラノ切線中弦 AB ニ平行ナルモノガ少クモ一ツハ存在スル．

上ノ式ニ於ケル ξ ハ a ト b トノ間ノ一數デアルカラ

$$\frac{\xi-a}{b-a} = \theta$$

ト置クナラバ θ ハ 0 ト 1 トノ間ノ數トナル．此 θ ヲ用フルナラバ

$$\xi = a + \theta(b-a)$$

ト書クコトガ出來ル．ヨツテ (1) 式ヲ次ノ如クニ表スコトモ出來ル．

$$\boldsymbol{f(b) = f(a) + (b-a)f'\left\{a+\theta(b-a)\right\}}, \quad 0<\theta<1$$

或ハ $b = a+h$ ト置クナラバ

$$\boldsymbol{f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)}, \quad 0<\theta<1$$ [1]

此式ハ $f'(x)$ ガ區域 $(a, a+h)$ 内ニテ連續ナラバ常ニ成立スル式デアル．

例 1.　$f(x) = (x-1)(x-2)$

此函數ハ $x=1, 2$ ニ對シテ零トナル．而シテコレハ x ノ整式ナルガ故ニ導函數 $f'(x)$ モ x ノ整式トナリ，總テノ x ニ對シテ連續デアル．故ニ Rolle ノ定理ニヨリ $f'(x)$ ハ 1 ト 2 トノ間ニテ少クモ一度ハ零トナルベキデアル．實際 $f'(x)$ ヲ計算スルナラバ

(1) h ハ正ナルモ負ナルモ何レニテモ宜シイ．

$$f'(x) = 2x - 3$$

トナリ $x = \dfrac{3}{2}$ ナルトキ零トナル.

一般＝ $f(x)$ ガ x ノ整式ナラバ $f'(x)$ モ亦 x ノ整式トナリ, 而シテ x ノ整式ハ總テノ x ＝對シテ連續デアルカラ次ノ定理ガ得ラレル.

$f(x)$ ガ x ノ整式デアルナラバ, 方程式 $f(x) = 0$ ノ二ツノ實根ノ間＝ハ方程式 $f'(x) = 0$ ノ根ガ少クモ一ツハ存在スル.

例 2. 區域 (a, b) 内＝テ常＝ $f'(x) = 0$ ナルトキハ, 此區域内＝テ $f(x)$ ハ常數トナルコトヲ證明セヨ.[1]

$a + h$ ヲ區域 (a, b) 内ノ數トセバ平均値定理＝ヨツテ

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h), \qquad 0 < \theta < 1$$

然ル＝ $a + h$ ガ a ト b トノ間ノ數ナラバ $a + \theta h$ モ亦 a ト b トノ間ノ數ナル故, 假定＝ヨリ

$$f'(a + \theta h) = 0 \qquad \therefore\ f(a + h) = f(a)$$

h ハ $a + h$ ガ a ト b トノ間＝アル様ナ任意ノ數デ宜シイ. 此等式ハ $f(x)$ ガ a ト b トノ間ノ x ＝對シテ一定デアルコトヲ示スモノデアル.

問題 7.

1. 直角ノ二邊 AB, AC ガソレゾレ 3 m, 4 m ナル直角三角形 ABC ＝於テ AB ガ 2 cm 縮小スルトキ直角ノ頂點 A ヨリ斜邊＝下セル垂線ノ長サノ縮小大略何程.

2. 三角形 ABC ＝於テ二邊 a, b 及ビ夾角 C ヲ計リテ面積ヲ計算スル際＝角 C ＝ ΔC ナル誤差アリトセバ此誤差ガ面積＝及ボス影響大略何程.

3. 三角形 ABC ＝於テ二邊 a, b 及ビ夾角 C ヲ測リテ第三邊 c ヲ計算スル際＝角 C ＝ ΔC ナル誤差アリトセバ此誤差ガ對邊 c ＝及ボス影響大略何程.

4. 質點ノ直線運動＝於テ

$$v^2 = ax + b$$

ナルトキハ加速度ハ一定ナルコトヲ證明セヨ. 但シ a, b ハ常數トス.

5.
$$v^2 = a + \frac{b}{x}$$

ナルトキハ加速度ハ x^2 ＝反比例スルコトヲ證明セヨ.

---

(1) 此定理ハ積分學＝於テ重要デアル.

6.
$$x^2 = at^2 + 2bt + c$$

ナルトキハ加速度ハ x^3 ＝反比例スルコトヲ證明セヨ.

7. 圓ノ面積ガ一様ナル速サ＝テ增加シ行クトキハ圓周ノ增ス割合ハ半徑＝反比例スルコトヲ證明セヨ.

8. y 軸上ヲ一定ノ速サ＝テ走ル動點 P アリ. x 軸上ノ定點ヲ A トスルトキ AP ノ角速度ハ AP^2 ＝反比例スルコトヲ證明セヨ.

9. OX, OY ハ互＝垂直ナル直線＝シテ P ハ OX 上ヲ毎秒 2 cm ノ速サ＝テ走ル動點, Q ハ OY 上ヲ毎秒 -3 cm ノ速サ＝テ走ル動點トス. OP ＝ 5m, OQ ＝ 3 m ナル瞬間＝於ケル長サ PQ ノ變ズル割合如何.

10. 半徑 1 m ナル圓周上ヲ毎秒 1 cm ノ速サ＝テ走ル動點 P アリ. 圓ノ中心ヲ O, 圓周上ノ定點ヲ A トスルトキ $\angle \mathrm{AOP} = 60°$ ナル瞬間＝於ケル三角形 AOP ノ面積ノ增ス割合如何.

11. 半徑 1 m ナル圓周上ヲ毎秒 1 cm ノ速サ＝テ走ル動點 P アリ. 圓ノ中心ヲ O, 圓周上ノ定點ヲ A トシ, OA ノ A ヲ超エテノ延長上, 又ハ OA 上, P 點ヨリ $\sqrt{3}$ m ノ距離＝點 Q ヲ取ル. $\angle \mathrm{AOP} = 60°$ ナル瞬間＝於ケル Q 點ノ速サヲ求ム.

12. 質點ノ直線運動＝於テ力 (F) ハ質量 (m) ト速サ (v) トノ積 (卽運動量) ノ時間＝對ズル變化率＝等シキコトヲ式＝テ書ケ.

13. 前問ヲ利用シテ次式ヲ證明セヨ.

$$\mathrm{F} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

且ツ之ヲ言葉＝テ云ヒ表セ.

14. 質點ノ直線運動＝於テ力 F ＝ヨツテナサルル仕事ヲ W ＝テ表セバ

$$\frac{d\mathrm{W}}{dx} = \mathrm{F}$$

ナルコトヲ證明シ, ヨツテ W ト運動ノエネルギートノ差ハ一定ナルコトヲ示セ.

15. 一定量ノ氣體ノ容積ヲ v, 壓力ヲ p トスルトキ

$$-\lim_{\Delta v \to 0} \Delta p \Big/ \frac{\Delta v}{v}$$

ヲ氣體ノ彈性率ト云フ. $pv^\gamma = c$ (γ, c ハ常數) ナル場合＝彈性率ヲ求ム.

16. $f(x)$ ハ實係數ヲ有スル n 次ノ整式トス. 方程式 $f(x) = 0$ ガ n 個ノ相異ナル實根ヲ有スルトキハ方程式 $f'(x) = 0$ ハ $n-1$ 個ノ相異ナル實根ヲ有スルコトヲ證明セヨ.

17. $f(x)=x^2$ ナルトキ $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$ ナル等式中ノ θ ヲ求ム.

18. $f(x)=x^3$ ナルトキ $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$ ナル等式中ノ θ ヲ求メ然ル後 $\lim\limits_{h\to 0}\theta$ ヲ算出セヨ.

19. $f(x), \phi(x)$ ノ導函數 $f'(x), \phi'(x)$ ハ $a \leqq x \leqq b$ ナル x ニ對シテ連續ニシテ且ツ $\phi'(x)$ ガ $a<x<b$ ナル x ニ對シテ零トナラザルトキハ[1]

$$\frac{f(b)-f(a)}{\phi(b)-\phi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)} \qquad (a<\xi<b)$$

ナルコトヲ證明セヨ. $\left[\left\{f(b)-f(a)\right\}\Big/\left\{\phi(b)-\phi(a)\right\}=k\right.$ ト置クナラバ

$$f(b)-f(a)-k\left\{\phi(b)-\phi(a)\right\}=0$$

デアル. 函數 $\mathrm{F}(x)=f(b)-f(x)-k\left\{\phi(b)-\phi(x)\right\}$ ニ Rolle ノ定理ヲ適用シテ k ヲ定メヨ$\Big]$.

---

[1] $\phi'(x)$ ハ $x=a$ 又ハ $x=b$ ニ於テハ零トナツテモ宜シイノデアル.

第四章

高次導函數

22. 高次微分係數, 高次導函數

x ノ函數 $y=f(x)$ ガ與ヘラレタトキコレカラ導函數 $y'=f'(x)$ ヲ作ルナラバソレガ亦 x ノ函數トナル. 故ニ函數 $f'(x)$ ヲ基トシテソノ導函數ヲ作ルコトガ出來ル. 之ヲ原函數 $y=f(x)$ ノ**第二次微分係數**又ハ**第二次導函數**ト稱シ, 次ノ記號ニテ表ス.

$$y'',\quad f''(x),\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad \mathrm{D}^2y,\ \mathrm{D}^2f(x)$$

卽チ第二次導函數トハ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

ニヨツテ定メラレル函數デアル.

更ニ第二次導函數ヨリ出發シテ其導函數ヲ作ルコトガ出來ル. 之ヲ原函數 $y=f(x)$ ノ第三次微分係數又ハ第三次導函數ト稱シ $y''', f'''(x),\ \dfrac{d^3y}{dx^3}$ 等ノ記號ニテ表ス.

以下同様ニシテ一般ニ**第 n 次微分係數**又ハ**第 n 次導函數**ヲ定義スルコトガ出來ル. 第 n 次導函數ヲ表スニ

$$y^{(n)},\quad f^{(n)}(x),\quad \frac{d^ny}{dx^n},\quad \mathrm{D}^ny,\quad \mathrm{D}^nf(x)$$

等ノ記號ヲ用ヒ $x=x_1$ ナルトキノ第 n 次導函數ノ値ヲ表スニ

$$y^{(n)}_{x=x_1},\quad f^{(n)}(x_1),\quad \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_{x=x_1}$$

等ヲ以テスル. コレラノ導函數ヲ總稱シテ**高次ノ導函數**ト云フ.

第二次, 第三次等ノ導函數ニ對シテ $y'=f'(x)$ ヲ第一次導函數ト稱スルコトガアル.

例 1.　$y=x^m$

此函數ニ於テハ

$$y'=mx^{m-1},\quad y''=m(m-1)x^{m-2},\quad \ldots\ldots$$

$$y^{(n)}=m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)x^{m-n}$$

例ヘバ　$m=-1$　トセバ

$$y=\frac{1}{x}$$

$$y^{(n)}=(-1)(-2)\ldots\ldots(-n)x^{-1-n}=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$$

例 2.　$y=\sin x$

$$y'=\cos x,\quad y''=-\sin x,\quad y'''=-\cos x,\quad y''''=\sin x,\quad \ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore\quad y=y^{(4)}=y^{(8)}=\cdots\cdot=\sin x$$

$$y'=y^{(5)}=y^{(9)}=\cdots\cdot=\cos x$$

$$y''=y^{(6)}=y^{(10)}=\cdots\cdot=-\sin x$$

$$y'''=y^{(7)}=y^{(11)}=\cdots\cdot=-\cos x$$

之ヲ一纏メニシテ一ツノ公式トシテ書クニハ次ノ如クスレバ宜シイ.

$$y=\sin x$$

ヨリ

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

23. 和, 積ノ高次導函數

I.　$u,\ v$ ヲ x ノ函數, a,b ヲ常數トシ

$$y=au+bv$$

ト置クナラバ　$y'=au'+bv'$

トナル. 玆ニだつしゅハ x ニ關スル微分係數ヲ表ス. コレヨリ

$$y''=au''+bv'',\quad y'''=au'''+bv''',\ \ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n)}=au^{(n)}+bv^{(n)}$$

ヲ得ル. 三ツ以上ノ函數ノ和ニ就イテモ同樣ノ公式ヲ得ル.

例　$y=\dfrac{1}{1-x^2}$

右邊ヲ書キ換フレバ

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)$$

偖テ　$u=\dfrac{1}{1+x}$　ト置ケバ　$u=(1+x)^{-1}$

第 22 節, 例 1 ニ於ケル如クニシテ

$$u^{(n)}=(-1)(-2)\ldots\ldots(-n)(1+x)^{-(n+1)}=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

同樣ニ　$v=\dfrac{1}{1-x}$　ト置クナラバ

$$v^{(n)}=1.2\ldots\ldots n(1-x)^{-(n+1)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

$$\therefore\quad y^{(n)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}+\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right\}=\frac{n!}{2}\left\{\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}+\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right\}$$

II.　$u,\ v$ ヲ x ノ函數トシ

$$\boldsymbol{y=uv}$$

ト置クナラバ　$y'=uv'+u'v.$

兩邊ヲ x ニツキ順次微分スレバ

$$y''=(uv''+u'v')+(u'v'+u''v)$$

$$=uv''+2u'v'+u''v$$

$$y'''=(uv'''+u'v'')+2(u'v''+u''v')+(u''v'+u'''v)$$

$$=uv'''+3u'v''+3u''v'+u'''v$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

斯クシテ一般ニ

$$\boldsymbol{y^{(n)} = uv^{(n)} + {}_n\mathrm{C}_1u'v^{(n-1)} + {}_n\mathrm{C}_2u''v^{(n-2)} + \cdots\cdots}$$
$$\boldsymbol{+ {}_n\mathrm{C}_ru^{(r)}v^{(n-r)} + \cdots\cdots + u^{(n)}v}$$

ナルコトヲ豫想シ得ル．茲ニ ${}_n\mathrm{C}_r$ ハ n 個ノ物ヨリ r 個取リテ作レル組合ノ全數即チ

$$\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r\,!}$$

ヲ表ス．此結果ノ正シイコトハ歸納法ニヨツテ證明セラレル．ソレハ二項定理ノ歸納法ニヨル證明法ト全然同一デアル．コレヲ **Leibnitz ノ定理**ト云フ．

例 1.　　$y = x^2e^{kx}$

$$u = x^2, \qquad v = e^{kx}$$

ト置クナラバ

$$u' = 2x, \quad u'' = 2, \quad u''' = u'''' = \cdots\cdot = 0$$
$$v' = ke^{kx}, \quad v'' = k^2e^{kx}, \quad \cdots\cdots, \quad v^{(n)} = k^ne^{kx}$$

故ニ上ノ公式ヲ用ヒテ

$$y^{(n)} = x^2.k^ne^{kx} + {}_n\mathrm{C}_1 2x.k^{n-1}e^{kx} + {}_n\mathrm{C}_2 2.k^{n-2}e^{kx}$$
$$= k^{n-2}e^{kx}\left\{k^2x^2 + 2nkx + n(n-1)\right\}$$

例 2.　$y = \sin^{-1}x$　ナルトキ次式ヲ證明セヨ．

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - n^2y^{(n)} = 0 \text{ [1]} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

先ヅ $y = \sin^{-1}x$ ヨリ

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{或ハ} \qquad \sqrt{1-x^2}\,y' = 1$$

ヲ得ル．此ノ兩邊ヲ x ニツキ微分スレバ

$$\sqrt{1-x^2}\,y'' - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}y' = 0$$

分母ヲ拂ツテ　　$(1-x^2)y'' = xy'$

[1] $n = 0$ ノトキモ此式ハ成立スルノデアル．

此左邊ヲ Leibnitz ノ定理ヲ用ヒテ n 回微分スレバ

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - 2nxy^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)}$$

又右邊ヲ n 回微分スレバ　　$-2nx-x.$　$-x(2n+1)\,y^{(n+1)}$

$$xy^{(n+1)} + ny^{(n)}$$

此兩者ヲ等シト置イテ右邊ヲ左邊ニ移セバ (1) ヲ得ル．

(1) 式ニ於テ $x = 0$ ト置クナラバ

$$\left(\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}\right)_{x=0} = n^2\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_{x=0}$$

或ハ y ノ代リニ $f(x)$ ヲ用フルナラバ

$$f^{(n+2)}(0) = n^2f^{(n)}(0)$$

而シテ　$f(0) = 0,\ f'(0) = 1$ デアルカラコレヨリ

$$f^{(2r)}(0) = 0, \qquad f^{(2r+1)}(0) = 1^2.3^2.5^2\cdots\cdots(2r-1)^2$$

ヲ得ル．

問　題　8.

1. $y = \tan x + \sec x$ ノ第二次導函數ヲ求ム．
2. $y = (x^2 + a^2)\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$ ノ第三次導函數ヲ求ム．
3. $y = x^2\log x$ ノ第三次導函數ヲ求ム．
4. $y = \dfrac{x^3}{1-x}$ ノ第四次導函數ヲ求ム．
5. $y = \cos x$ ノ第 n 次導函數ヲ求ム．
6. $y = x^{n-1}\log x$ ノ第 n 次導函數ヲ求ム．
7. $y = e^x\sin x$ ナルトキ

$$y^{(n)} = (\sqrt{2})^ne^x\sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$$

ナルコトヲ證明セヨ［歸納法ヲ用ヒヨ］．

8. $y = \tan^{-1}x$ ナルトキ

$$y^{(n)} = (n-1)!\cos^ny\sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$$

ヲ證明セヨ［歸納法ヲ用ヒヨ］．

9. $y = \dfrac{x}{x^2-1}$ ナルトキ $y^{(n)}$ ヲ求ム．
10. $y = \sin^3x$ ナルトキ $y^{(n)}$ ヲ求ム．
11. $y = x^2\sin x$ ナルトキ $y^{(n)}$ ヲ求ム．

12. $y=(x+\sqrt{x^2-1})^m$ ナルトキ次ノ關係ヲ證明セヨ.

$$(x^2-1)y''+xy'-m^2y=0$$

13. $y=\sin(\sin x)$ ナルトキハ

$$y''+y'\tan x+y\cos^2 x=0$$

14. $f(x)=(\sin^{-1}x)^2$ ナルトキハ

$$(1-x^2)f''(x)-xf'(x)=2$$

15. 前問ノ結果ヨリ

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+1)xf^{(n+1)}(x)-n^2f^{(n)}(x)=0$$

ヲ誘導シ且ツ $f^{(n)}(0)$ ヲ求ム.

16. $f(x)=\sin(m\sin^{-1}x)$ ナルトキ $f^{(n)}(0)$ ヲ求ム.

17. $\phi(x)$ ガ x ノ $n+1$ 次以下ノ整式ニシテ $f(x)=\dfrac{\phi(x)}{x^2-2\mathrm{B}x+\mathrm{C}}$ ナルトキハ

$$\frac{x^2-2\mathrm{B}x+\mathrm{C}}{(n+1)(n+2)}f^{(n+2)}(x)+2\frac{(x-\mathrm{B})}{n+1}f^{(n+1)}(x)+f^{(n)}(x)=0$$

ナルコトヲ證明セヨ.

24. 微分

x ヲ自變數, $y=f(x)$ ヲ其函數トスル. 自變數 x ノ增分 Δx ヲ**其微分**ト稱シ之ヲ dx ニテ表ス. 卽チ

$$dx=\Delta x \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 y ノ導函數 $f'(x)$ ト自變數 x ノ增分 Δx トノ積ヲ**函數 y ノ微分**ト稱シ, 之ヲ dy ニテ表ス. 卽チ

$$dy=f'(x)\Delta x \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$y=x$ ナル特別ノ函數ニ對シテ (2) ノ定義ヲ適用スルトキハ

$$dy=\Delta x$$

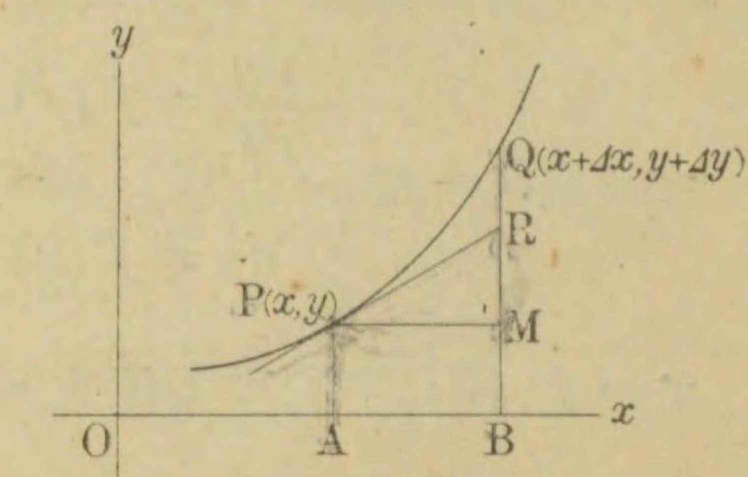
故ニ函數 x ノ微分ハ自變數 x ノ微分ニ等シイ. ヨツテ x ガ自變數デアル場合ニハ dx ハ自變數 x ノ微分ト考ヘテモ, 函數 x ノ微分ト考ヘテモ何レデモ宜シイノデアル.

$\mathrm{P}(x,y)$ ヲ曲線 $y=f(x)$ 上ノ一點, $\mathrm{Q}(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ ヲ同曲線上ノ他ノ點トシ P, Q ヨリ x 軸ニ垂線 PA, QB ヲ下シ P ヲ通ツテ x 軸ニ平行ニ引イタ直線ト QB トノ交點ヲ M, 點 P ニ於ケル曲線ノ切線ト QB トノ交點ヲ R トスルナラバ

$$\mathrm{PM}=\mathrm{AB}=\Delta x=dx$$

$$\mathrm{MR}\overset{(1)}{=}\mathrm{PM}\,f'(x)$$

$$=f'(x)\Delta x=dy$$



故ニ PM ハ x ノ微分ヲ表シ, MR ハ函數 y ノ微分ヲ表ス.

又 $\mathrm{MQ}\overset{(2)}{=}\Delta y$

デアツテコレハ一般ニ MR ト等シクナイ. 卽チ自變數ノ增分 (Δx) ト微分 (dx) トハ等シイガ函數 y ノ增分 (Δy) ト其微分 (dy) トハ等シクナイノガ常デアル.

偖テ x ガ自變數, $y=f(x)$ ガ其函數デアルトキハ微分ノ定義ヨリ

$$dy=f'(x)dx \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ヲ得ル. 併シナガラ x ト y トノ間ニハ $y=f(x)$ ナル關係ガ存在スルケレドモ x ガ自變數デナイ場合ニ dx, dy ノ間ニコレト同ジ關係ガ成立スルカドウカ. コレハ調ベタ上デナケレバ分ラヌ. 何トナレバ x ヲ自變數ト看做スカ否カニヨツテ dx ノ意義ガ異ナルカラデアル.

(1) R ガ M ノ上ニアレバ MR ハ正, 之ニ反スレバ負トスル.

(2) Q ガ M ノ上ニアレバ MQ ハ正, 之ニ反スレバ負トスル.

x ト y トノ間ニ $y=f(x)$ ナル關係ガ存在シ而シテ x ガ自變數デナク，他ノ自變數 t ノ函數デアルトキハ x ト y トハ共ニ自變數 t ノ函數トナル故定義ニヨツテ

$$dx=\frac{dx}{dt}\Delta t,\qquad dy=\frac{dy}{dt}\Delta t$$

然ルニ合成函數ノ微分公式ニヨツテ

$$\frac{dy}{dt}=f'(x)\frac{dx}{dt}$$

$$\therefore\qquad dy=f'(x)\frac{dx}{dt}\Delta t=f'(x)dx$$

ヤハリ (3) ト同ジ關係式ニ到着スル．ヨツテ次ノ結論ヲ得ル．

x ト y トノ間ニ $y=f(x)$ ナル關係ガ在存スル場合ニハ x ヲ自變數ト看做スモ，又 x ヲ他ノ自變數ノ函數ト看做スモ（特別ノ場合トシテ y ヲ自變數ト看做スモ）$dx,\ dy$ ノ間ニハ常ニ (3) ノ關係ガ成立スル．

之ニヨツテ函數 y ノ微分 dy ヲ x ノ微分 dx ニテ割リタル商ハ微分係數 $f'(x)$ ニ等シイコトニナル．即チ y ノ x ニ關スル微分係數 $\dfrac{dy}{dx}$ ハ $dy\div dx$ ナル意義ヲ有スルコトニナルノデアル．

次ニ**高次ノ微分**ヲ定義スル．

x ヲ自變數，$y=f(x)$ ヲ其函數トスルトキ $f''(x)(\Delta x)^2$ 即チ $f''(x)(dx)^2$ ヲ函數 y ノ**第二次微分**ト稱シ d^2y ニテ表ス．即チ

$$d^2y=f''(x)(\Delta x)^2$$

$$=f''(x)(dx)^2\text{(1)}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(1) $(dx)^2$ ヲ dx^2 ト書イテ表シテ居ル．一般ニ $(dx)^n$ ヲ dx^n ニテ表ス習慣ニナツテ居ル．

一般ニ函數 $y=f(x)$ ノ**第 n 次微分**ヲ d^ny ニテ表シ次ノ式ニテ定義スル．

$$d^ny=f^{(n)}(x)(\Delta x)^n$$

$$=f^{(n)}(x)(dx)^n\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

又自變數ノ第二次以上ノ微分ハ總テ零デアルモノト定メル．即チ

$$d^2x=0,\qquad d^3x=0,\qquad\cdots\cdots$$

$y=x$ ナル特別ノ函數ニ對シテ (4), (5) ノ定義ヲ適用スルト

$$d^2y=0,\qquad d^3y=0,\qquad\cdots\cdots$$

故ニ x ガ自變數デアルトキ函數 x ノ第二次，第三次微分等ハ皆零デアル．ヨツテ x ガ自變數デアル場合ニハ d^nx ハ自變數 x ノ第 n 次微分ト考フルモ又ハ函數 x ノ第 n 次微分ト考フルモ何レモ零デアル．

x ガ自變數ナラバ (4) 式及ビ (5) 式ハ成立スルケレドモ x ガ自變數デナイ場合ニハモハヤ此關係ハ成立シナイノデアル．$y=f(x)$ ハ x ノ函數デアルガ x ハ自變數 t ノ函數デアルモノトスルナラバ第二次微分ノ定義ニヨツテ

$$d^2x=\frac{d^2x}{dt^2}(\Delta t)^2,\qquad d^2y=\frac{d^2y}{dt^2}(\Delta t)^2$$

所デ

$$\frac{dy}{dt}=f'(x)\frac{dx}{dt}$$

デアルカラ更ニ此兩邊ヲ t ニツキ微分シテ

$$\frac{d^2y}{dt^2}=f''(x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+f'(x)\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\therefore\qquad d^2y=f''(x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2(\Delta t)^2+f'(x)\frac{d^2x}{dt^2}(\Delta t)^2$$

$$= f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x \text{[1]} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

トナルカラデアル．x ガ自變數デナイ場合ニハ d^2y ハ $f''(x)(dx)^2$ ノ外ニ $f'(x)d^2x$ ヲ加ヘネバナラヌ．x ガ自變數ナラバ d^2x ハ零トナツテ (6) ト (4) トハ同一ノ式トナルノデアル．

斯クノ如ク第二次以上ノ微分ハ自變數ヲ何ニ取ルカニヨツテソレヲ表ス式ガ異ナツテ來ル．

x ガ自變數デアルナラバ x ノ函數 $y=f(x)$ ノ第 n 次微分 d^ny ハ (5) ニヨツテ定メラレル故コレヨリ

$$d^ny \div (dx)^n = f^{(n)}(x)$$

ヲ得ル．函數 $y=f(x)$ ノ第 n 次微分係數ヲ表スニ $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ ナル記號ヲ用フルノハ此性質ニ起因スルノデアル．即チ $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ ハ y ノ第 n 次微分ヲ自變數 x ノ微分ノ n 乘ニテ除シタル商ト云フ意味ヲ持ツ記號デアル．

問題 9.

1. u, v ガ共ニ x ノ函數ナルトキ次式ヲ證明セヨ．

　(i) $d(uv) = u\,dv + v\,du$　　(ii) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

2. $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$ ナルトキ dx, dy ヲ求メソレヲ利用シテ次式ヲ證明セヨ．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

---

(1) $dy = f'(x)dx$ ノ右邊ノ dx ヲ x ノ函數ト看做シ次ノ問題 1, (i) ノ公式ヲ器械的ニ適用スルトキハ

$$d(dy) = f''(x)dx^2 + f'(x)d(dx)$$

ヲ得．此式ニテ $d(dy)=d^2y$, $d(dx)=d^2x$ ト置ケバ此公式ヲ得ル．d^3y, d^4y 等モ同様ニシテ器械的ニ算出スルヲ得．

[以下ノ問題 3, 4, 5, 9, 10 ニ於テハ r ハ θ ノ函數デアルモノト假定スル].

3. $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ナラバ $x\,dy - y\,dx = r^2d\theta$ ナルコトヲ證明セヨ．
[dx, dy ヲ求ムルニ前々問 (i) ノ式ヲ用ヒヨ].

4. $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ナラバ

$$\frac{x\dfrac{dy}{dx} - y}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{r^2}{\sqrt{r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}}$$

ナルコトヲ證明セヨ　[微分ノ關係ニ直シ前問ヲ利用セヨ].

5. $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ナルトキ

$$\frac{x+y\dfrac{dy}{dx}}{x\dfrac{dy}{dx}-y} = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}$$

ナルコトヲ證明セヨ．

6. 第 2 問ノ公式ノ兩邊ヲ x ニ關シテ微分シ，次ノ公式ヲ證明セヨ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\phi'(t) - \psi'(t)\phi''(t)}{[\phi'(t)]^3}$$

7. $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$ ナラバ

$$d^2x = \phi''(t)dt^2 + \phi'(t)d^2t, \quad d^2y = \psi''(t)dt^2 + \psi'(t)d^2t$$

ニシテ x ヲ自變數トセバ $d^2x=0$ ナリ．此場合ニハ

$$d^2y = \frac{\psi''(t)\phi'(t) - \psi'(t)\phi''(t)}{[\phi'(t)]^3}dx^2$$

ナルコトヲ誘導シヨツテ以テ前問ノ公式ヲ證明セヨ．

8. $y=f(x)$ ナラバ $d^3y = f'''(x)dx^3 + 3f''(x)dx\,d^2x + f'(x)d^3x$ ナルコトヲ證明セヨ．

9. $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ナルトキ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{r^2 + 2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\cos\theta\dfrac{dr}{d\theta} - r\sin\theta\right)^3}$$

ナルコトヲ證明セヨ．

10. $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ ナルトキ次式ヲ證明セヨ [前問參照].

$$\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left\{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}$$

11. $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ ニシテ $r = f_1(t),\ \theta = f_2(t)$ ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cos\theta + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\theta = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$-\frac{d^2x}{dt^2}\sin\theta + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$

12. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$ ニシテ $t = \log x$ ナルトキハ $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$ ナルコトヲ證明セヨ.

13. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$ ニシテ $x^2 = 4t$ ナルトキハ $t\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0$ ナルコトヲ證明セヨ.

14. $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + a^2y = 0$ ニシテ $t = \sin^{-1}x$ ナルトキハ $\frac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0$ ナルコトヲ證明セヨ.

15. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2x}{1+x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{(1+x^2)^2} = 0$ ニシテ $x = \tan\theta$ ナルトキハ $\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0$ ナルコトヲ證明セヨ.

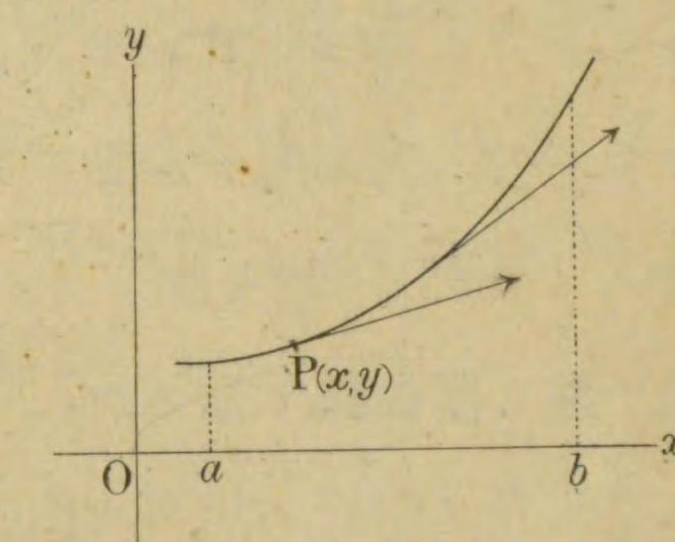
第五章

高次導函數ノ應用

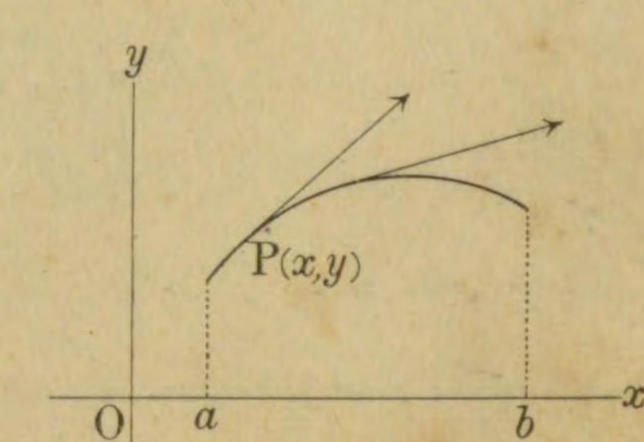
25. 曲線ノ凹凸

直交軸ニ關シテ與ヘラレタ曲線ノ方程式ヲ $y=f(x)$ トスル. 此曲線上ノ點 $P(x,y)$ ニ於ケル切線ノ方向係數ヲ m デ表スナラバ $m=f'(x)$ デアツテ m ハ x ノ函數デアル.

今或區域 (a,b) 内ノ x ニ對シテ $f''(x)>0$ デアルトスルナラバ[1] $f'(x)$ 卽チ m ハ其區域內ニテ x ノ增加函數トナリ x ガ增ストキ曲線ノ切線ノ方向ハ時計ノ針ト反對ノ向キニ廻轉スル. 此場合ニハ曲線ハ區域 (a,b) 内ニ於テ, 又ハ區域 (a,b) ニ屬スル曲線上ノ點ニ於テ**上方ニ凹**或ハ**下方ニ凸**デアルト云フ. 上圖 P 點ニ於ケル如キデアル.



之ニ反シテ區域 (a,b) 内ノ x ニ對シテ $f''(x)<0$ デアルナラバ[1] m ハソノ區域內ニテ x ノ減少函數トナリ x ガ增ストキ切線ノ方向ハ時計ノ針ト同ジ向キニ廻轉スル. 此場



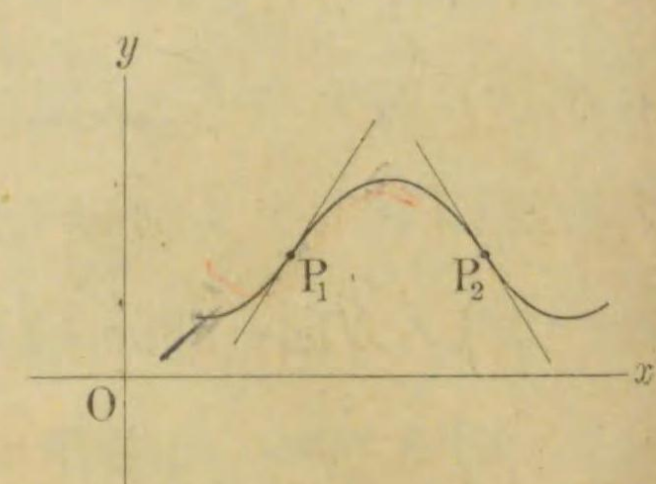
[1] 有限個ノ點ニ於テハ $f''(x)=0$ トナルコトガアツテモ宜シイノデアル.

合ニハ曲線ハ區域 (a, b) 内ニ於テ, 或ハ區域 (a, b) ニ屬スル曲線上ノ點ニ於テ**下方ニ凹**又ハ**上方ニ凸**デアルト云フ. 前頁下圖 P 點ニ於ケルガ如キデアル.

曲線ガ P 點ニテ上方ニ凹又ハ下方ニ凹デアルナラバ P 點ノ附近ニ於ケル曲線上ノ點ハ P 點ニ於ケル切線ノ一方ノ側ニノミ存在スル.[1]

偖テ然ラバ $f''(x)$ ガ符號ヲ變ズル點ニ於テハ曲線ハドウナルカ.

x ガ漸次增シ行クトキ $f''(x)$ ガ正ヨリ負ニ, 若シクハ負ヨリ正ニ符號ヲ變ズル點ハ曲線ガ上方ニ凹ヨリ下方ニ凹ニ, 若シクハ下方ニ凹ヨリ上方ニ凹ニ轉ズル點デアツテ右圖ノ P_1, P_2 ノ如キ點デアル. コノ様ナ點ヲ**變曲點**ト稱スル.



變曲點ノ附近ニ於ケル曲線上ノ點ハ變曲點ニ於ケル切線ノ兩側ニ存在スル.

例 曲線 $y = \sin x$ ノ凹凸ヲ判定セヨ.

$$y' = \cos x, \qquad y'' = -\sin x = -y$$

$\therefore$ $y > 0$ ナル x ニ對シテハ $y'' < 0$, 從ツテ曲線ハ下方ニ凹

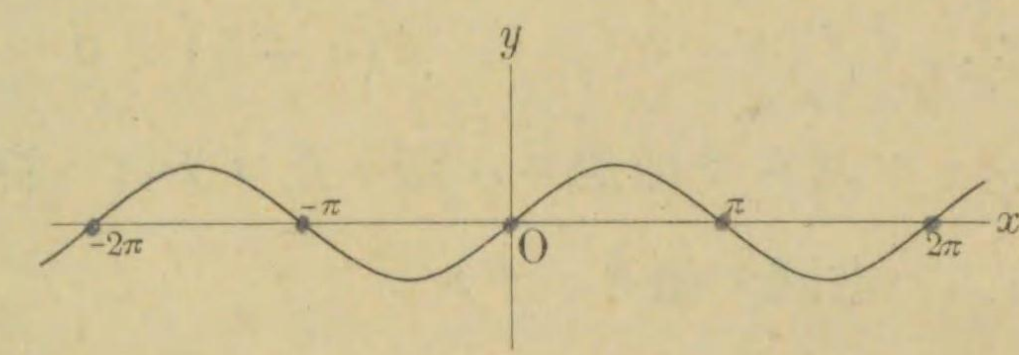
$y < 0$ 〃 $y'' > 0$, 〃 上方ニ凹

$y = 0$ ナル x ニ對シテハ y'' ハ符號ヲ變ズル. 卽チ其 x ニ對シテ變曲點ヲ生ズル.

故ニ次ノ結論ヲ得ル.

(1) コレ實ハ證明ヲ要スルコトデアル.

x 軸ヨリ上部ニアル曲線上ノ點ニ於テハ曲線ハ下方ニ凹デ, x 軸ヨリ下部ニアル點ニ於テハ上方ニ凹デアル. 而シテ曲線ガ x 軸ヲ截ル點ハ變曲點デアル.



26. 極大, 極小ノ充分條件

x ガ增シ行クトキ導函數 $f'(x)$ ガ正ヨリ負ニ符號ヲ變ズル所デハ函數 $f(x)$ ハ極大トナリ, $f'(x)$ ガ負ヨリ正ニ符號ヲ變ズル所デハ $f(x)$ ハ極小トナルコト第18節ニ述ベタ通リデアル. 吾人ハ高次導函數ヲ用ヒテ函數ノ極大, 極小ヲ判定スル方法ヲ下ニ述ベル.

若シ $x = a$ ニテ函數 $f(x)$ ガ極大若シクハ極小デアツテ且ツ $f'(x)$ ガ連續デアルナラバ $f'(a) = 0$ ナルベキコト旣ニ知ル所デアル. 併シナガラ $f'(a) = 0$ ナレバトテ $x = a$ ハ必ズシモ $f(x)$ ノ極大若シクハ極小ヲ與ヘルモノデハナイ. $f'(a) = 0$ ナル場合ニ如何ナル條件ノ下ニ $f(x)$ ハ $x = a$ ニテ極大若シクハ極小トナルカ.

先ヅ $f'(a) = 0$, $f''(a) \neq 0$ トスル.

此場合ニハ若シ $f''(a) < 0$ ナラバ $f(x)$ ハ $x = a$ ニテ極大トナリ, $f''(a) > 0$ ナラバ極小トナル.

$f''(a) < 0$ デアルナラバ $f'(x)$ ハ $x = a$ ニテ減少ノ狀態ニアル. 故ニ h ヲ小ナル正數トスルナラバ

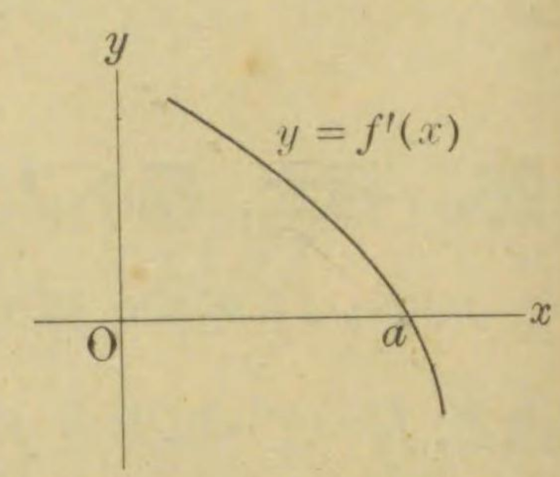
$$f'(a - h) > f'(a) > f'(a + h)$$

然ルニ假定ニヨリ

$$f'(a)=0$$

$$\therefore \quad f'(a-h)>0, \quad f'(a+h)<0$$

卽チ $f'(x)$ ハ x ガ a ヲ通過スル際ニ正ヨリ負ニ符號ヲ變ズル [$f'(x)$ ノぐらふハ右圖ノ如クニナル].



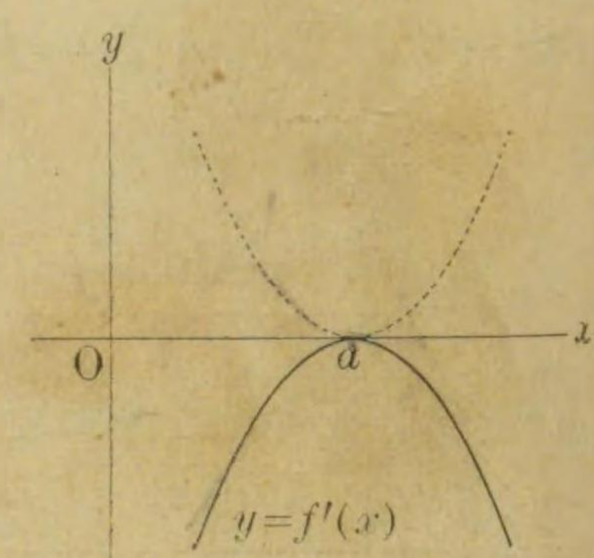
故ニモトノ函數 $f(x)$ ハ $x=a$ ニテ極大トナル.

同様ニシテ $f''(a)>0$ ナラバ $f(x)$ ハ $x=a$ ニテ極小トナルコトガ證明セラレル.

次ニ $f'(a)=f''(a)=0, \ f'''(a)\neq 0$ トスル.

此場合ニハ $f(x)$ ハ $x=a$ ニテ極大ニモ極小ニモナラヌ.

何トナレバ $f''(a)=0, \ f'''(a)\neq 0$ ナル故上ニ證明セル所ニヨリ $f'(x)$ ハ $x=a$ ニテ必ズ極大又ハ極小トナル. 卽チ $f'(a)$ ハ $f'(x)$ ノ極大値又ハ極小値デアル. 然ルニ $f'(a)=0$. 故ニ $x=a$ ノ附近ニテ $f'(x)$ ハ常ニ負カ又ハ常ニ正デアル [$f'(x)$ ノぐらふハ右圖ノ如クニナル]. 卽チ x ガ a ヲ通過スル際ニ $f'(x)$ ハ符號ヲ變ゼヌ. ヨリテ $f(x)$ ハ $x=a$ ニテ極大ニモ極小ニモナラヌ. 更ニ一般ニ



$$f'(a)=f''(a)=\cdots\cdots=f^{(r-1)}(a)=0, \quad f^{(r)}(a)\neq 0$$

トスルトキハ次ノ結果ガ得ラレル.

r ガ若シ偶數ナラバ $f^{(r)}(a)<0$ ナルトキ $f(x)$ ハ $x=a$ ニテ極大, $f^{(r)}(a)>0$ ナルトキ $f(x)$ ハ $x=a$ ニテ極小, r ガ若シ奇數ナラバ $f(x)$ ハ $x=a$ ニテ極大ニモ極小ニモナラヌ.[1]

例 $\quad f(x)=x^3-9x^2+15x+3$

此函數ニ對シテハ $\quad f'(x)=3(x^2-6x+5)=3(x-1)(x-5)$

$$f''(x)=6(x-3)$$

$f'(x)=0$ ト置クナラバ $x=1, 5$

$$f''(1)=-12<0, \qquad f''(5)=12>0$$

故ニ $f(x)$ ハ $x=1$ ニテ極大, $x=5$ ニテ極小.

注意 本節ニ與ヘタ極大, 極小ノ判定法ハ理論上極メテ面白味ノアルモノデアルガ第二次, 第三次等ノ微分係數ヲ計算スルコトガ容易デナイ場合ニハ却ツテ不便デアル. ノミナラズ $f'(x), f''(x), \ldots\ldots$ ヲ不連續ナラシムル x ニ對シテ此法ハ全然使用スルコトガ出來ヌ. 此様ナ譯デ實用上ノ見地カラスレバ以上ノ判定法ハ第 18 節ニ與ヘタ第一次微分係數ノ符號ノ變化ニヨル判定法ニ劣ルモノデアル.

問 題 10.

次ノ曲線ノ極大, 極小, 變曲點ヲ求メ且ツ曲線ノ概形ヲ畫ケ (1—5).

1. $y=x^2(9-x)$ **2.** $y=1-4x^3+x^4$ **3.** $y=\dfrac{b^2}{a^2+x^2}$

4. $y=e^{-x^2}$ **5.** $y=e^{-x}\sin x$

6. 曲線 $y=f(x)$ 上ノ變曲點ノ横座標ハ [$f''(x)$ ガ連續ナラバ] $f''(x)=0$ ヲ滿足スベキコトヲ利用シテ曲線 $y^2=f(x)$ 上ノ變曲點ノ横座標ハ $\{f'(x)\}^2=2f(x)f''(x)$ ヲ滿足スベキコトヲ證明セヨ.

7. 曲線 $x=a(t-\sin t), \ y=a(1-\cos t)$ ハ到ル所上方ニ凸ナルコトヲ證明セヨ.

8. $f'(a)=0, f''(a)>0$ ナルトキハ函數 $f(x)$ ハ $x=a$ ニテ極小トナルコトヲ幾何學的ニ説明セヨ.

---

(1) コレハ歸納法ニヨツテ證明スルコトガ出來ル.

9. 方程式 $f(x)+xf'(x)=0$ ノ根 x_0 ニ對シテ

$$\left[2\{f'(x_0)\}^2-f(x_0)f''(x_0)\right]f'(x_0)<0$$

ナルトキ函數 $xf(x)$ ハ $x=x_0$ ニテ極大トナルコトヲ證明セヨ.

10. $f(x)$ ヲ與ヘラレタル x ノ函數トシ k ヲ

$$f(b)-\left\{f(a)+(b-a)f'(a)\right\}=k(b-a)^2$$

ニヨツテ定メ

$$\mathrm{F}(x)=f(b)-\left\{f(x)+(b-x)f'(x)\right\}-k(b-x)^2$$

ト置ケバ $\mathrm{F}(a)=0,\ \mathrm{F}(b)=0$ トナル. コノ函數ニ Rolle ノ定理ヲ適用シテ次式ヲ證明セヨ.[1]

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(\xi)$$
$$(a<\xi<b)$$

11. 前問ノ式ハ次ノ如クニ書キ換ヘラル.

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a+\theta h)\qquad(0<\theta<1)$$

コレヲ利用シテ $f''(x)>0$ ナルトキ

$$f(a-h)+f(a+h)>2f(a)$$

ナルコトヲ證明シ次ニ之ヲ幾何學的ニ說明セヨ.

12. $f''(x)>0$ ニシテ $h+k+l=0$ ナルトキハ

$$f(a+h)+f(a+k)+f(a+l)>3f(a)$$

ヲ證明セヨ.

27. 函數ノ極限値計算

二ツノ函數 $f(x),\ \phi(x)$ ガアツテ $x\to a$ ノトキ兩函數ハ何レモ零ニ收斂スルトスル. 然ルトキハ $f(x)/\phi(x)$ ナル分數式ノ分子, 分母ニ極限値零ヲ置キ換フルナラバ $\dfrac{0}{0}$ ナル無意義ノ記號ヲ得ル. 斯クノ如キ形ヲ**不定形**ト云フ. 不定形ニハ $\dfrac{0}{0}$ ノ外 $\dfrac{\infty}{\infty},\ 0\times\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$ 等他ニ澤山アル.[2]

(1) (a,b) 間ニテ $f''(x)$ ハ連續ナルコトヲ假定スル.

(2) 單ニ ∞ ニテ表スモノハ正負ノ無限大何レニテモ可ナルモノトス.

不定形ナル語ニツイテ注意スベキコトハ此語ハ單ニ $\dfrac{0}{0},\ \dfrac{\infty}{\infty}$ ノ如キ數學的ニ無意味ナ記號ニツケタ名デアツテソレラノ値ガ不定デアルト云フ意味デハナイ. 0 ヲ 0 ニテ除シタルモノハ其値ガ不定デハナクコレハドコマデモ全然意味ノナイモノデアル.

函數ガ x ノ或値ニ對シテ是等ノ不定形ヲ取ル場合ニソノ函數ノ極限値ヲ求ムルコトガ本節ノ目的デアル.

I. $\dfrac{0}{0}$ ナル不定形ヲ取ル函數ノ極限値

二ツノ函數 $f(x),\ \phi(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ零ニナルトスル. 卽チ

$$f(a)=0,\qquad \phi(a)=0.$$

今微分係數 $f'(a),\ \phi'(a)$ ガ存在スルモノト假定スルナラバ[1]

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

$$\lim_{h\to0}\frac{\phi(a+h)-\phi(a)}{h}=\phi'(a)$$

而シテ

$$\frac{f(a+h)}{\phi(a+h)}=\frac{f(a+h)-f(a)}{\phi(a+h)-\phi(a)}=\frac{\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}}{\dfrac{\phi(a+h)-\phi(a)}{h}}$$

ト書キカヘラレル故若シ $\phi'(a)\neq0$ ナラバ

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)}{\phi(a+h)}=\frac{f'(a)}{\phi'(a)}$$

卽チ

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\frac{f'(a)}{\phi'(a)}}$$

(1) 從ツテ $f(x),\ \phi(x)$ ハ $x=a$ ニテ連續トナル. 故ニ $f(a)=0$ ナリト云フ假定ハ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ ナリト云フコトト同ジニナル. $\phi(x)$ ニツキテモ同樣.

コレハ $f'(a)$ 及ビ $\phi'(a)$ ガ存在シ且ツ $\phi'(a)$ ガ零デナイト云フ假定ノ下ニ正シイノデアル.

$\phi'(a)$ ガ零トナル場合ニハコノ公式ノ代リニ如何ナル公式ガ成立スルデアラウカ. 結果ハ次ノ如クニナルノデアル.

$f(a)=0,\ \phi(a)=0$ デアツテ $f'(x),\ \phi'(x)$ ガ $x=a$ ノ附近ニ於テ連續デアル場合ニハ $\phi'(a)$ ガ零デアルト否トニ拘ラズ.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}\text{[1]}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此定理ハ第三章問題 7 ノ 19 問ヲ用ヒテ證明セラレル. 但シ本書ニハ之ヲ省略スル.

尙上ノ公式ハ $x\to a$ ノ代リニ $x\to a+0$ 或ハ $x\to a-0$ トスルモ, 又 $x\to+\infty,\ x\to-\infty$ 等トスルモヤハリ成立スルノデアル.[2]

斯クシテ $f(x)/\phi(x)$ ガ $0/0$ ナル不定形ヲ取ル場合ニハ常ニ

$$\lim\frac{f(x)}{\phi(x)}=\lim\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$$

ニヨツテ左邊ノ極限値ヲ計算スルコトガ出來ル. 若シ $f'(x)/\phi'(x)$ ガ亦 $0/0$ ナル不定形ヲ取ルナラバ更ニ進ンデ

$$\lim\frac{f'(x)}{\phi'(x)}=\lim\frac{f''(x)}{\phi''(x)}$$

(1) 此定理ノ眞ノ意味ハ次ノ如キモノデアル. 右邊ガ存在スレバ左邊モ存在シ且ツ左右兩邊ノ値ハ相等シク, 又右邊ガ $+\infty$ 若シクハ $-\infty$ トナラバ左邊モ $+\infty$ 若シクハ $-\infty$ トナル. コレダケノ意味ヲ持ツノデアツテ右邊ガ不定ナルトキ左邊モ不定デアルトノ意味ハ持タナイノデアル.

(2) $x\to a+0,\ x\to a-0$ ノ場合ハ上ノ公式ヲ證明スル際ニ當然ノ結論トシテ得ラレルノデアル. 又 $x\to+\infty,\ x\to-\infty$ ノ場合ハ $x\to+0,\ x\to-0$ ノ場合ノ上ノ公式カラ容易ニ誘導セラレル.

ナル公式ヲ使用スレバ宜シイ. 以下同様デアル.

例 1.　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$ ヲ求ム.

$$f(x)=e^x+e^{-x}-2,\qquad \phi(x)=x^2$$

ト置クナラバ $f(x)/\phi(x)$ ハ $x=0$ ニテ $\dfrac{0}{0}$ ナル不定形ヲ取ル. 偖テ

$$f'(x)=e^x-e^{-x},\qquad f''(x)=e^x+e^{-x}$$

$$\phi'(x)=2x,\qquad \phi''(x)=2$$

デアツテ $f'(x)/\phi'(x)$ モ $x=0$ ニテ $\dfrac{0}{0}$ ナル不定形ヲ取ルガ $f''(x)/\phi''(x)$ ハ最早ヤ不定形ヲ取ラヌ. 故ニ

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{\phi''(x)}=1$$

例 2.　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ ヲ求ム.

前例ト同様ニシテ

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\quad(\text{不定形ヲ取ル故})$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}\quad(\text{同ジク不定形ヲ取ル故})$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$$

II. $\dfrac{\infty}{\infty}$ ナル不定形ヲ取ル函數ノ極限値

$\dfrac{\infty}{\infty}$ ナル不定形ヲ取ル函數ノ極限値ヲ求ムル公式ハ $\dfrac{0}{0}$ ナル不定形ヲ取ル函數ノ極限値ヲ求ムルソレト全然同一ニナルノデアル. 卽チ $x\to a,\ a+0,\ a-0,\ +\infty,\ -\infty$ ナドノ場合ニ $f(x)\to\infty$, $\phi(x)\to\infty$ トセバ

$$\lim\frac{f(x)}{\phi(x)}=\lim\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$$

ナルコトガ證明セラレル.[1]

(1) 此證明モ省略スル.

例 1. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\log x}{\frac{1}{x}}$ ヲ求ム.

$$f(x)=\log x, \qquad \phi(x)=\frac{1}{x}$$

ト置クナラバ $x=+0$ ニテ $\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$ ハ $\dfrac{\infty}{\infty}$ ナル不定形ヲ取ル. 所デ

$$f'(x)=\frac{1}{x}, \qquad \phi'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

デアルカラ

$$\frac{f'(x)}{\phi'(x)}=-x$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0$$

例 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x}$ ヲ求ム.

e^{2x}/x ハ $x=+\infty$ ニテ $\dfrac{\infty}{\infty}$ ナル不定形ヲ取ル. 故ニ上ノ公式ヲ用ヒテ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{1}=+\infty$$

III. 其他ノ不定形ヲ取ル函數ノ極限値

不定形ニハ以上ノ外ニ $0\times\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 等ノ形ガアル. 併シナガラコレラハ以上ノ二種ノ不定形ノ何レカニ誘カレルノデアル. 下ニ二三ノ例ヲ示ス.

例 1. $\lim\limits_{x\to+0} x\log x$ ヲ求ム.

$x=+0$ トセバ $x\log x$ ハ $0\times\infty$ ナル不定形ヲ取ル. サレド之ヲ $\log x\Big/\dfrac{1}{x}$ ト書キカフレバ $\dfrac{\infty}{\infty}$ ナル不定形ニ變ズル. カクテ

$$\lim_{x\to+0} x\log x=0$$

ヲ得ル [II. 例 1].

注意. 同様ニ $n>0$ ナラバ

$$\lim_{x\to+0} x^n\log x=0$$

ヲ證明スルコトガ出來ル.

例 2. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$ ヲ求ム.

$x=0$ トセバ $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}$ ハ $\infty-\infty$ ナル不定形ヲ取ル. サレド

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}=\frac{\sin x-x}{x\sin x}$$

ト書キカフレバ $x=0$ ニテ $\dfrac{0}{0}$ ナル不定形ヲ取ルコトトナル. 斯クシテ

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{\cos x+(\cos x-x\sin x)}=0$$

ヲ得ル.

例 3. $\lim\limits_{x\to+0} x^x$ ヲ求ム.

$x=+0$ トセバ x^x ハ 0^0 ナル不定形ヲ取ル. 依テ $f(x)=x^x$ ト置ケバ

$$\log f(x)=x\log x \qquad \therefore \quad f(x)=e^{x\log x}$$

而シテ上ノ例 1 ニヨツテ $\lim\limits_{x\to+0} x\log x=0$ デアルカラ

$$\lim_{x\to+0} f(x)=e^0=1$$

他ノ不定形 1^∞, ∞^0 ニツイテモ同様デアル.

28. 無限小及ビ無限大

吾人ハ今マデニ變數ガ零ニ收斂スルト云フ言葉ヲ屢用ヒテ居ル.

變數ガ零ニ收斂スルト云フ代リニ變數ハ**無限小トナル**ト云ヒ, 零ニ收斂スル變數ナル語ノ代リニ**無限小**ナル語ヲ用フル.[1]

例ヘバ $x\to0$ ナルトキ $\sin x\to0$ ナリト云フ代リニ x ガ無限小ナルトキ $\sin x$ モ無限小トナル, 又ハ x ガ無限小デアルトキ $\sin x$ モ無限小デアルト云ツテ表ス.

依テ x ノ函數 u, v ガアツテ $x\to a$ ナルトキ又ハ $x\to\pm\infty$

(1) 此定義ニ從ヘバ無限小トナルト云フコトト, 無限小デアルト云フコトトハ全ク同意義デアル.

ナルトキ u, v 共ニ零ニ收斂スルトスル, 卽チ共ニ無限小デアルトスル. 此時

$$\lim \frac{u}{v}$$

ハ零トナルカ無限大トナルカ, 0 ナラザル常數トナルカ又ハソノ何レデモナイカ, 種種ノ場合ヲ生ズル. 若シ此極限ガ 0 ナラバ u ハ v ニ比シテ**高位ノ無限小**, 此極限ガ無限大ナラバ u ハ v ニ比シテ**低位ノ無限小**, 此極限ガ 0 ナラザル常數ナラバ u ト v トハ**同位ノ無限小**デアルト云フ.

例ヘバ　　$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sin x} = 0, \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x^2} = \pm\infty$

ナル故 x ヲ無限小トセバ x^2 ハ $\sin x$ ニ比シテ高位ノ無限小,[1] $\sin x$ ハ x^2 ニ比シテ低位ノ無限小デアル. 又

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

デアル故 x ヲ無限小トセバ $1-\cos x$ ハ x^2 ト同位ノ無限小デアル.

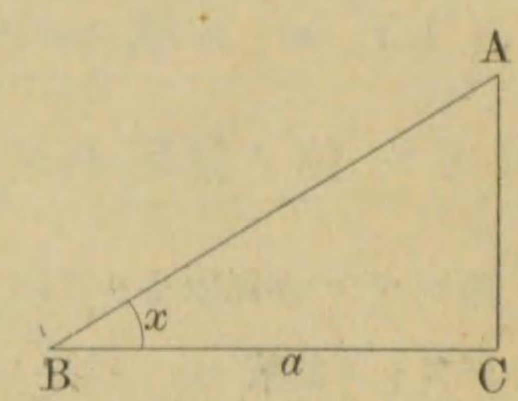
第 4 節注意 4 ニ於テ y ガ x ノ函數デアル場合ニ $x \to 0$ ト $y \to 0$ トハ同意義デナイコトヲ述ベタ. 卽チ $x \to 0$ ハ $x = 0$ ヲ除外シテ居ルガ $y \to 0$ ハ必ズシモ $y = 0$ ヲ除外シナイ. 故ニ y ガ x ノ函數デアル場合ニ x ガ無限小トナルト云フ言葉ハ x ガ零トナラズシテ零ニ收斂スルコトヲ意味スルガ y ガ無限小トナルト云フ言葉ハ必ズシモ y ガ零ナル値ヲ取ルコトナシニ零ニ收斂スルコトヲ意味シナイ. 例ヘバ $y = x\sin\dfrac{1}{x}$ ニ於テハ x ガ無限小トナルトキ y モ無限小トナリ而カモ y ハ零ナル値ヲ無限ニ取リツツ零ニ收斂スル. 併シナガラ斯クノ如キ函數ハ實際ニ現レルコト極メテ稀デアル. 故ニ以下此種ノ函數ヲ除外スルコトニシ函數ガ無限小トナルト云フ場合ニハ零ナル値ヲ取ルコトナシニ零ニ收斂スルモノト定メテ置ク. 此規約ノ結果 u ガ v ニ比シテ高位ノ無限小ナラバ v ハ u ニ比シテ低位ノ無限小トナル.

(1) コレハ大體次ノ樣ニ解釋シテ宜シイ. $|x|$ ガ極メテ小ナラバ x^2 モ $|\sin x|$ モ何レモ極メテ小サイガ x^2 ハ $|\sin x|$ ニ比シテ尙極メテ小サイ.

二ツノ無限小 u, v ガアツテ u ガ v^n ト同位ノ無限小デアル場合ニハ u ハ v ニ比シ**第 n 位ノ無限小**デアルト云フ.

例ヘバ x ガ無限小ナルトキ $1-\cos x$ ハ x^2 ト同位ノ無限小トナル故 x ニ比シテ第二位ノ無限小, 又 $\sqrt[3]{\sin x}$ ハ $x^{\frac{1}{3}}$ ト同位ノ無限小デアルカラ x ニ比シテ第 $\dfrac{1}{3}$ 位ノ無限小デアル.[1]

例 1. C ヲ直角トスル直角三角形 ABC ニ於テ BC ヲ一定シ置キ ∠ABC ヲ無限小ナラシムルトキ BA − BC ノ無限小ノ位數如何.



$$\mathrm{BC} = a, \qquad \angle\mathrm{ABC} = x$$

ト置ケバ　$\mathrm{BA}\cos x = \mathrm{BC} = a$

$$\therefore \quad \mathrm{BA} - \mathrm{BC} = \frac{a}{\cos x} - a = \frac{a}{\cos x}(1-\cos x)$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{BA}-\mathrm{BC}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{a}{\cos x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{a}{2}$$

ヨリテ BA − BC ハ角 ABC ニ比シテ第二位ノ無限小トナル.

(1) 位數ヲ持タヌ無限小モ存在スルノデアル. 例ヘバ函數 $u = x\log x$ ニ於テハ

$n < 1$ ナラバ $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{u}{x^n} = \lim\limits_{x\to +0} x^{1-n}\log x = 0$ [前節 III 例 1 注意]

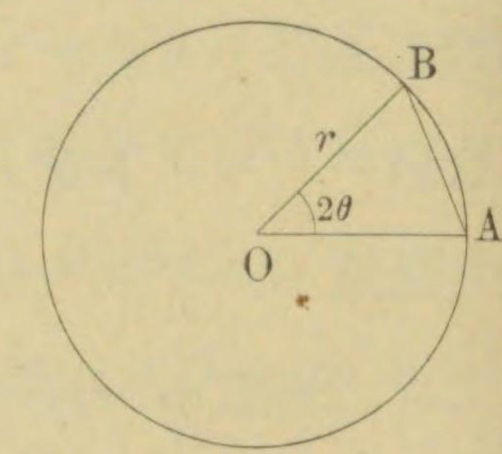
$n \geqq 1$ ナラバ $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{u}{x^n} = -\infty$

デアツテ x ガ無限小トナルトキハ u ハ位數ヲ持タヌ無限小トナル. 次ニ述ブル無限大ニツイテモ同樣デアル.

例 2. 定圓ノ弦 AB ガ無限小トナルトキ $\widehat{AB}-\overline{AB}$ ノ無限小ノ位數如何.

圓ノ中心ヲ O トシ $\angle AOB=2\theta$, 半徑ヲ r ニテ表セバ

$$\widehat{AB}=2r\theta,\qquad \overline{AB}=2r\sin\theta$$



故ニ弧 AB モ弦 AB モ何レモ角 θ ト同位ノ無限小トナル.

偖テ $\widehat{AB}-\overline{AB}=2r(\theta-\sin\theta)$ デアツテ第 27 節 I ノ例 2 ニヨリ

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}=\frac{1}{6}$$

即チ $\theta-\sin\theta$ ハ θ ガ無限小トナルトキ θ ニ比シ第三位ノ無限小デアルカラ $\widehat{AB}-\overline{BA}$ モ亦 θ ニ比シテ第三位ノ無限小トナル. ヨツテ $\widehat{AB}-\overline{AB}$ ハ弦 BA ニ比シテモヤハリ第三位ノ無限小トナル.

無限小ニ關スル次ノ性質ハ容易ニ分ルデアラウ.

(1) u ガ第 m 位, v ガ第 n 位ノ無限小ナラバ uv ハ第 $m+n$ 位ノ無限小デアル.

例ヘバ x ガ無限小ナラバ x ニ比シテ $\sin x$ ハ第一位, $1-\cos x$ ハ第二位ノ無限小デアツテ其積 $\sin x(1-\cos x)$ ハ第三位ノ無限小デアル.

(2) u ガ第 m 位, v ガ第 n 位ノ無限小デアツテ $m>n$ ナラバ $\dfrac{u}{v}$ ハ第 $m-n$ 位ノ無限小デナル.

(3) u, v 共ニ第 m 位ノ無限小デアツテ且ツ同符號[(1)]デアルナラバ $u+v$ ガ亦第 m 位ノ無限小デアル. 併シナガラ $u-v$ ハ必ズシモ第 m 位デハナイ.

例ヘバ x ガ無限小ナラバ x ニ比シ x, $\sin x$ ハ何レモ第一位ノ無限小デアツテ且ツ同符號デアル. 其和 $x+\sin x$ ハ第一位ノ無限小デアルガ差 $x-\sin x$ ハ第三位ノ無限小デアル.

(1) 勿論零ノ附近ニ於テ同符號ノ意味デアル.

尙 u, v ガ無限小デアツテ w ガ u ニ比シテ高位ノ無限小デアルナラバ

$$\lim\frac{w}{u}=0$$

デアルカラ

$$\lim\frac{u+w}{v}=\lim\frac{u}{v}\left(1+\frac{w}{u}\right)$$

$$=\lim\frac{u}{v}\ ^{(1)}$$

ヨツテ次ノ定理ヲ得ル.

(4) 無限小ノ比ノ極限値計算ニ於テハ高位ノ無限小ヲ加減スルモ結果ニ影響ヲ及ボサヌ.

例ヘバ x ガ無限小ノトキ高位ノ無限小ヲ捨テテ

$$\sin^2\frac{x}{2}=\left(\frac{x}{2}\right)^2,\qquad 1-\cos 2x=\frac{1}{2}(2x)^2$$

トナルカラ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{\dfrac{1}{2}(2x)^2}=\frac{1}{8}$$

注意. x ヲ自變數, $y=f(x)$ ヲ其函數トスルナラバ y ノ增分 Δy ト y ノ微分 dy トハ必ズシモ相等シクハナイ (第 24 節) ケレドモ自變數 x ノ增分 Δx ガ無限小トナル場合ニハ $\Delta y-dy$ ハ Δx ニ比シテ高位ノ無限小トナルノデアル. 何トナレバ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon$$

ト置クナラバ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon=0$$

(1) コノ式ノ眞ノ意味ハ次ノ如キモノデアル. 右邊ガ定値 k ヲ取レバ左邊モ k トナリ, 右邊ガ $+\infty$ $(-\infty)$ ナラバ左邊モ $+\infty$ $(-\infty)$, 右邊ガ不定ナラバ左邊モ不定.

デアツテ

$$\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \frac{\Delta y - f'(x)\Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \varepsilon$$

トナルカラデアル. ヨツテ無限小ナル增分ヲ取リ扱フ場合ニハ高位ノ無限小ヲ捨テテ增分ト微分トヲ相等シト看做スコトガ出來ル.[(1)]

次ニ無限大トナル變數ニツイテ考察スル. 變數ガ無限大トナルト云フ言葉ニツイテハ吾人ハ旣ニ說明シテアル. 無限大トナル變數ト云フ語ノ代リニ單ニ**無限大**ト云フ語ヲ用フル.

x ノ函數 u, v ガアツテ $x \to a$ ナルトキ又ハ $x \to \pm\infty$ ナルトキ u, v 共ニ無限大トナルトスル. 此時

$$\lim \frac{u}{v}$$

ヲ考ヘ, 若シ此極限ガ零ナラバ u ハ v ニ比シ**低位**, 此極限ガ無限大ナラバ u ハ v ニ比シ**高位**, 此極限ガ零ナラザル常數ナラバ u ト v トハ**同位ノ無限大**デアルト云フ.

例ヘバ $x \to \infty$ ナルトキ x^2, x^3 ハ共ニ無限大トナリ而シテ

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2} = \infty$$

ナル故 x^2 ハ x^3 ニ比シテ低位, x^3 ハ x^2 ニ比シテ高位ノ無限大トナル. 又

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \Big/ \frac{1}{x^3} = 0$$

ナル故 x ガ無限小ナルトキ $\frac{1}{x^2}$ ハ $\frac{1}{x^3}$ ニ比シテ低位ノ無限大トナル.

無限小ノ場合ト同ジク無限大ノ位數ヲ定義スルコトガ出來ル.

(1) 吾人ノ定義ニ從ヘバ微分ハ必ズシモ無限小ナルヲ要シナイケレドモ實用上重要ナルハ無限小微分デアル. 應用數學ニ於テ通例單ニ微分ト稱スルハ此特殊ナル微分デアル.

二ツノ無限大 u, v ガアツテ u ガ v^n ト同位ナル場合ニハ u ハ v ニ比シ**第 n 位ノ無限大**デアルト云フ.

例ヘバ x ガ無限小ナルトキ $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{\sin^2 x}$ ハ $\frac{1}{x}$ ニ比シ第二位ノ無限大デアル.

無限小ニ關シテ前ニ述ベタ四ツノ性質中初メノ三ツハ無限大ニ關シテモ成立スル. 但シ第四ノ性質ハ次ノ如クニ述ベ代ヘラレネバナラヌ.

(4′) 無限大ノ比ノ極限値計算ニ於テハ低位ノ無限大ヲ加減スルモ結果ニ影響ヲ及ボサヌ.

29. 函數ノ近似公式

$f(x)$ ヲ x ノ函數トシ $f''(x)$ ヲ $x=a$ ノ附近ニ於テ連續デアルトスルナラバ

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(a+x) - \{f(a) + xf'(a)\}}{x^2} = \frac{1}{2} f''(a) \quad \text{.........(1)}$$

デアル. 先ヅ之ヲ證明ショウ

$$\mathrm{F}(x) = f(a+x) - \{f(a) + xf'(a)\}$$

ト置クナラバ

$$\mathrm{F}'(x) = f'(a+x) - f'(a), \qquad \mathrm{F}''(x) = f''(a+x)$$

$$\therefore \quad \mathrm{F}(0) = \mathrm{F}'(0) = 0, \qquad \mathrm{F}''(0) = f''(a)$$

又

$$\phi(x) = x^2$$

ト置クナラバ

$$\phi'(x) = 2x, \qquad \phi''(x) = 2$$

$$\therefore \quad \phi(0) = \phi'(0) = 0, \qquad \phi''(0) = 2$$

ヨツテ $x=0$ ニテ $\dfrac{F(x)}{\phi(x)}$, $\dfrac{F'(x)}{\phi'(x)}$ ハ $\dfrac{0}{0}$ ナル不定形ヲ取ルガ $\dfrac{F''(x)}{\phi''(x)}$ ハ定極限値 $\dfrac{f''(a)}{2}$ ヲ有スル. 故ニ第 27 節 I ニヨツテ

$$\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{\phi(x)}=\frac{f''(a)}{2}$$

コレ卽チ (1) 式デアル.

コレト全ク同様ニシテ次ノ公式ヲ證明スルコトガ出來ル.

$f^{(n)}(x)$ ガ $x=a$ ノ附近ニ於テ連續デアルナラバ

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^n}\left[f(a+x)-\left\{f(a)+\frac{x}{1!}f'(a)+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)\right\}\right]$$
$$=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

故ニ

$$\frac{1}{x^n}\left[f(a+x)-\left\{f(a)+\frac{x}{1!}f'(a)+\cdots\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)\right\}\right]$$
$$=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)+\varepsilon(x)$$

ト置クナラバ $\lim\limits_{x\to0}\varepsilon(x)=0$ デアツテ

$$f(a+x)=f(a)+\frac{x}{1!}f'(a)+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a)+x^n\varepsilon(x)$$

トナル. 從ツテ $|x|$ ノ極メテ小ナル値ニ對シテハ

$$f(a+x)\fallingdotseq f(a)+\frac{x}{1!}f'(a)+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a)\cdots\cdots(3)$$

ナル近似公式ヲ得ル. x ガ無限小ナラバ此式ノ兩邊ノ差ハ x^n ヨリ高位ノ無限小トナル. 斯カル意味ニ於テ此近似公式ハ成立スルノデアル. 特ニ $a=0$ トセバ (3) ハ

$$f(x)\fallingdotseq f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)\cdots(4)$$

トナル. n ハ任意ノ正整數ニテ宜シイ. 斯クテ $|x|$ ノ極メテ小ナル値ニ對シテ次ノ近似式ヲ得ル.

$$f(x)\fallingdotseq f(0)+xf'(0)$$
$$\fallingdotseq f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

是等ヲ總括シテ又次ノ如クニ書クコトモアル.

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\cdots(5)$$

卽チ此式ニ於ケル $+\cdots\cdots$ ハ x ヲ無限小トスルトキ x^2 ヨリ高位ノ無限小タルベキモノヲ加フル意味ニ解釋スレバ宜シイノデアル.

例 1. $f(x)=e^x$

此函數ニ對シテハ

$$f'(x)=e^x,\quad f''(x)=e^x,\quad\cdots\cdots$$
$$\therefore\quad f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots\cdots=1$$

故ニ $|x|$ ノ極メテ小ナル値ニ對シテハ

$$f(x)\fallingdotseq1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

或ハ
$$f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots$$

例 2. $f(x)=(1+x)^m$

此函數ニ於テハ

$$f'(x)=m(1+x)^{m-1},\quad f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2},\quad\cdots\cdots,$$
$$f^{(n)}(x)=m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$
$$\therefore\quad f(0)=1,\quad f'(0)=m,\quad f''(0)=m(m-1),\quad\cdots\cdots,$$
$$f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1)$$

故ニ $|x|$ ノ極メテ小ナル値ニ對シテハ

$$f(x) \doteqdot 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots\cdots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n$$

或ハ
$$f(x) = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots\cdots$$

例ヘバ
$$\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - \cdots\cdots$$
$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots\cdots$$

例 3. $f(x) = \log(1+x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, \quad f''(x) = -(1+x)^{-2}, \quad \ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$$
$$\therefore \quad f(0) = 0, \ f'(0) = 1, \ f''(0) = -1, \ \ldots\ldots, \ f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

故ニ $|x|$ ノ極メテ小ナル値ニ對シテハ

$$f(x) \doteqdot x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

例 4. $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \cos x, \ f''(x) = -\sin x, \ f'''(x) = -\cos x, \ f''''(x) = \sin x,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\begin{aligned}\therefore \quad f(0) &= f^{(4)}(0) = \cdots\cdots = 0\\ f'(0) &= f^{(5)}(0) = \cdots\cdots = 1\\ f''(0) &= f^{(6)}(0) = \cdots\cdots = 0\\ f'''(0) &= f^{(7)}(0) = \cdots\cdots = -1\end{aligned}$$

故ニ極メテ小ナル $|x|$ ニ對シテハ

$$f(x) \doteqdot x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots + (-1)^r\frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

同様ニ極メテ小ナル $|x|$ ニ對シテハ

$$\cos x \doteqdot 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\cdots + (-1)^r\frac{x^{2r}}{(2r)!}$$

ヲ得ル.

注意 1. 無限級數ノ和ヲ表スニ「$+\cdots\cdots$」ヲ用フルコトガアル. ソレハ附錄ニ於テ説明スルコトニスル. 今ノ所「$+\cdots\cdots$」ハ無限級數ノ和ヲ表スノデハナク, 上ニ説明セル如ク x ヲ無限小トスルトキソノ式中ニ出テ居ル x ノ最高羃ノ位數ヨリ高位ノ無限小タルベキモノヲ加フルトノ意デアル.

注意 2. 本節ノ公式ハ函數ノ極限値計算ニ關スル公式 (第 27 節) ヨリ誘導シタモノデアルガ逆ニ本節ノ公式ヲ用ヒテ往往函數ノ極限値計算ヲ容易ナラシムルコトガ出來ル. 下ニ一二ノ例ヲ示ス.

例 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \sin x}{x^3}$ ヲ求ム.

極メテ小ナル $|x|$ ニ對シテハ上ノ例 4 ニヨリ

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots$$
$$\therefore \quad x - \sin x = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots\cdots, \qquad \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \cdots\cdots$$
$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

例 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$ ヲ求ム.

$$z = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

ト置ケバ極メテ小ナル $|x|$ ニ對シテハ上ノ例 3 ヲ用ヒテ

$$\log z = \frac{1}{x}\log(1+x) = \frac{1}{x}\left\{x - \frac{x^2}{2} + \cdots\cdots\right\} = 1 - \frac{x}{2} + \cdots\cdots$$
$$\therefore \quad z = e^{1 - \frac{x}{2} + \cdots\cdots} = e.e^{-\frac{x}{2} + \cdots\cdots}$$

第 29 節, 例 1 ヲ用ヒテ

$$= e\left\{1 + \left(-\frac{x}{2} + \cdots\cdots\right) + \frac{\left(-\frac{x}{2} + \cdots\cdots\right)^2}{2!} + \cdots\cdots\right\}$$
$$= e\left(1 - \frac{x}{2} + \cdots\cdots\right)$$
$$\therefore \quad \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = -\frac{e}{2} + \cdots\cdots, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = -\frac{e}{2}$$

問題 11.

次ノ極限値ヲ求ム (1—14).

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ 　　2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \sin^{-1}x}{\sin^3 x}$ 　　4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + \log(1-x) - 1}{x - \tan^{-1}x}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\log x}$　　**6.** $\displaystyle\lim_{n\to -1}\frac{x^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$

7. $\displaystyle\lim_{x\to y}\frac{(x-y)\left\{\phi'(x)+\phi'(y)\right\}-2\phi(x)+2\phi(y)}{(x-y)^3}$　　**8.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log\tan 2x}{\log\tan x}$

9. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^m}\quad(m>0)$　　**10.** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{m}{x}$

11. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\pi x-1}{2x^2}+\frac{\pi}{(e^{2\pi x}-1)x}\right\}$　　**12.** $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\log x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

13. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$　　**14.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}$

15. C ヲ直角トスル直角三角形 ABC ニ於テ C ヨリ斜邊ニ下セル垂線ノ足ヲ H トス. 邊 BC ハ一定ニシテ $\angle$B ガ第一位ノ無限小ナルトキ AH ハ第二位ノ無限小, AC − CH ハ第三位ノ無限小ナルコトヲ證明セヨ.

16. 圓周上ノ一點 A ニ於ケル切線ニ圓周上ノ他ノ點 P ヨリ下セル垂線ノ足ヲ H トス. AH ガ第一位ノ無限小ナラバ PH ハ第二位ノ無限小ナルコトヲ證明セヨ.

17. 定半徑ノ圓ニ内接スル正 n 邊形ノ周ヲ Σ_n トス. 圓周ノ長サト Σ_n トノ差ハ n ガ無限大トナルトキ $\dfrac{1}{n}$ ニ比シ第二位ノ無限小トナルコトヲ證明セヨ.

$|x|$ ガ小ナルトキ次ノ近似公式ヲ證明セヨ (18—23).

18. $\tan^{-1}x\doteqdot x-\dfrac{x^3}{3}$　　**19.** $\sin^{-1}x\doteqdot x+\dfrac{x^3}{6}$

20. $\tan x\doteqdot x+\dfrac{x^3}{3}$　　**21.** $\log(1+\sin x)\doteqdot x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$

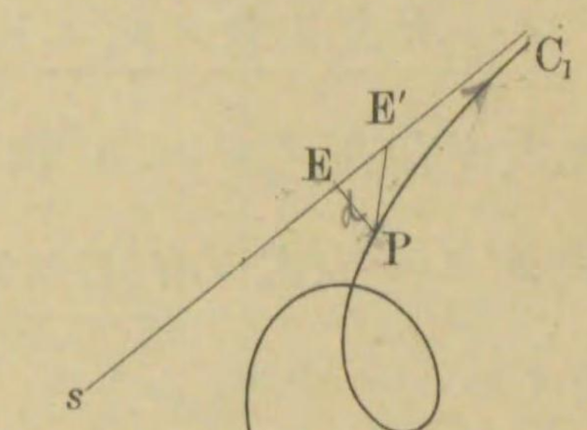
22. $\dfrac{x}{e^x-1}=1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{12}$　　**23.** $(1+x)^{\frac{1}{x}}\doteqdot e\left(1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{11x^2}{24}\right)$

24. $f''(a)\neq 0$ ニシテ $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$ ナルトキ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\theta$ ヲ求ム.

30. 曲線ノ漸近線

一ツノ曲線 C ガイクツカノ無限分枝ヲ有スルトシ, ソノ中ノ一ツ C_1 上ニ取ツタ點 P ヨリ定直線 s ニ至ル距離 PE ヲ d ニテ表ス. 點 P ガ C_1 ニ沿ウテ限リナク遠ザカリ行クトキ d ガ限リ

ナク小トナル場合ニハ直線 s ハ曲線 C (又ハ分枝 C_1) ノ**漸近線**デアルト云フ.[1] d ハ P 點ヨリ s 直線ニ至ル距離ヲ表スモノトシタガ, 點 P ヲ通ツテ s ニ平行ナラザル定方向ノ直線ヲ引キ s トノ交點ヲ E′ トシ PE′ ノ長サヲ表スモノトシテモ勿論差支ナイ. 何トナレバ PE′ : PE ハ一定デ且ツ零デナイ故 lim PE = 0 ト lim PE′ = 0 トハ同ジ事ニナルカラデアル.



曲線ニ無限分枝ガナケレバ漸近線ハ無論ナイ. 併シ無限分枝ガアルカラトテ必ズシモ漸近線ハアルモノデハナイ.

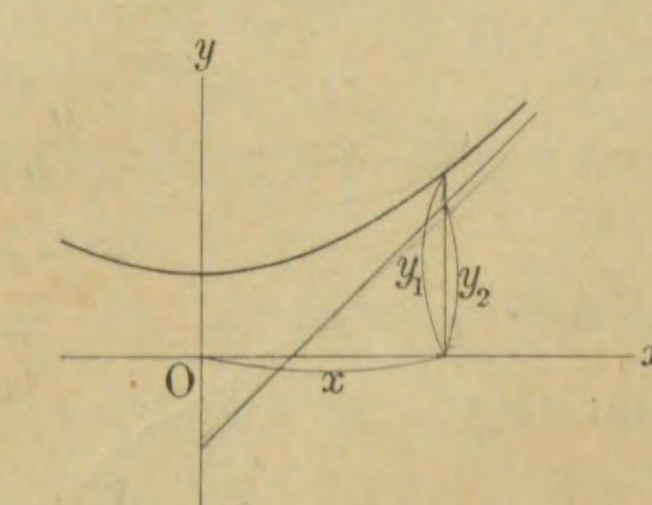
偖テ直交軸ニ關シテ與ヘラレタル曲線ノ方程式ヲ

$$y=f(x)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トスル. 若シ此曲線ガ y 軸ニ平行デナイ漸近線

$$y=mx+b^{(2)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ヲ有スルナラバ正又ハ負ノ極メテ大ナル x ニ對シテ (1) ノ y (圖ノ y_1) ト (2) ノ y (圖ノ y_2) トハ近似的ニ相等シカルベキデアル. 式ニテ書ケバ



$$f(x)\doteqdot mx+b^{(3)}\cdots\cdots\cdots(3)$$

逆ニ正又ハ負ノ極メテ大ナル x ニ對シテ (3) ガ成立スルナラバ (2) ハ (1) ノ漸近線ナルコト明カデ

[1] C_1 ヲ此漸近線ニ對スル曲線ノ無限分枝ト稱スル.

[2] x 軸ニ平行ナル場合ヲモ含ム. ソレハ $m=0$ ノ場合デアル.

[3] 之ハ $x\to\infty$ ノトキ左邊ト右邊トノ差ガ無限小トナルコトヲ意味スルノデアル.

アル．故ニ y 軸ニ平行ナラザル漸近線ハ $f(x)$ ト近似的ニ等シイ x ノ一次式ヲ求メルコトニヨツテ得ラレル．斯クノ如キ x ノ一次式ガ存在スレバ y 軸ニ平行デナイ漸近線モ存在シ，斯クノ如キ x ノ一次式ガ存在セザレバ y 軸ニ平行デナイ漸近線モ存在シナイコトニナル．

次ニ (1) ノ曲線ガ y 軸ニ平行ナル漸近線 $x=k$ ヲ有スルナラバ $x \to k \pm 0$ ナルトキ函數 $f(x)$ ハ無限大トナラネバナラヌ.[1] 逆ニ又

$$\lim_{x \to k+0} y = \pm\infty \qquad 又ハ \qquad \lim_{x \to k-0} y = \pm\infty$$

ナル場合ニハ $x=k$ ハ明カニ曲線ノ漸近線デアル．即チ函數 y ヲ無限大ナラシメル x ノ値 k ニ對シテ直線 $x=k$ ハ曲線ノ漸近線トナルノデアル．

例 1. $$y = e^{\frac{1}{x}} \quad \text{......(1)}$$

極メテ大ナル x ニ對シテハ

$$y = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \cdots\cdots \quad \text{......(2)}$$

$$\therefore \quad y \doteqdot 1$$

ヨリテ y 軸ニ平行ナラザル漸近線ハ

$$y = 1 \quad \text{......(3)}$$

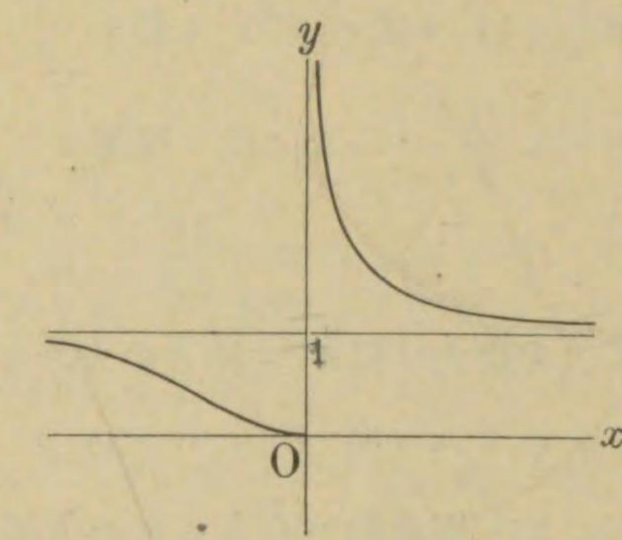
ナル直線一ツデアル．

(3) ノ式ハ (2) ニ於テ $\frac{1}{x}$ ノ一次以上ヲ省略シタモノデアルガ (2) 式ノ中ニ於ケル $\frac{1}{x}$ ノ一次ノ項ヲ保留シ $\frac{1}{x^2}$ 以上ノ項ヲ省略スルナラバ

$$y = 1 + \frac{1}{x} \quad \text{......(4)}$$

[1] $f(x)$ ガ x ノ一値函數ナルコトヲ假定セル結論デアル．然ラザル場合ニ於テハ此結論ハ正シクナイコトガアル．

ナル方程式ヲ得ル．(4) ノ表ス曲線ハ極メテ大ナル $|x|$ ニ對シテハ (3) ノ直線ヨリモ尙原曲線ニ接近セル曲線デアル．故ニ原曲線ガ極メテ大ナル $|x|$ ニ對シテ漸近線 (3) ノ何レノ側ニ存在スルカハ (4) ノ曲線ガ (3) ノ直線ノ何レノ側ニアルカヲ調ベルコトニヨツテ判斷セラレル．$x>0$ ナラバ (4) ノ y ハ 1 ヨリモ大，$x<0$ ナラバ (4) ノ y ハ 1 ヨリモ小デアルカラ (4) ノ曲線ハ右方ニ於テハ (3) ノ直線ノ上部ニ，左方ニ於テハ下部ニ存在スル．斯クテ極メテ大ナル $|x|$ ニ對シテハ原曲線ハ右方ニ於テ漸近線 (3) ノ上部ニ，左方ニ於テ其下部ニ存在スルコトヲ知ルノデアル．



次ニ y ヲ無限大ナラシメル x ノ値ハ $x=0$ ノミデアル．即チ

$$\lim_{x \to +0} y = +\infty, \qquad \lim_{x \to -0} y = 0$$

故ニ y 軸ニ平行ナル漸近線ハ直線 $x=0$ 即チ y 軸ノミデアル．而シテ此漸近線ニ對スル曲線ノ無限分枝ハ y 軸ノ右方，x 軸ノ上部ニアル．上圖ハ此方程式ノ表ス曲線デアル．

例 2. $$y^2 = \frac{x(x^2-1)}{x+4}$$

y ニツキ解ケバ

$$y = \pm\sqrt{\frac{x(x^2-1)}{x+4}} \quad \text{......(1)}$$

極メテ大ナル $|x|$ ニ對シテハ

$$y = \pm x\sqrt{\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{4}{x}}} = \pm x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \pm x\left(1-\frac{1}{2x^2}+\cdots\cdots\right)\left(1-\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}-\cdots\cdots\right)$$

$$= \pm x\left(1-\frac{2}{x}+\frac{11}{2x^2}-\cdots\cdots\right) = \pm\left(x-2+\frac{11}{2x}-\cdots\cdots\right) \quad \text{......(2)}$$

故ニ $\frac{1}{x}$ ノ一次以上ヲ省略シテ

$$y \doteqdot \pm(x-2)$$

ヨツテ y 軸ニ平行ナラザル漸近線ハ

$$y = x-2 \quad \text{......(3)} \qquad y = -x+2 \quad \text{......(4)}$$

ニテ表サレル二ツノ直線デアル.

(3), (4) ノ式ハ (2) ニ於テ $\frac{1}{x}$ ノ一次以上ヲ省略シタルモノデアルガ (2) 式ノ中ニ於ケル $\frac{1}{x}$ ノ一次ノ項ヲ保留シ $\frac{1}{x^2}$ 以上ノ項ヲ省略スルナラバ

$$\bar{y} = x - 2 + \frac{11}{2x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5) \qquad y = -x + 2 - \frac{11}{2x} \quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

ナル二方程式ヲ得ル. 極メテ大ナル $|x|$ ニ對シテハ (5), (6) ハ原曲線ノ近似形デアル. $x > 0$ ナラバ (5) ノ y ハ (3) ノ y ヨリモ大, $x < 0$ ナラバ小デアル故 (3) ノ直線ニ對シテハ原曲線ハ右方ニテハ上部, 左方ニテハ下部ニアル. 同様ニシテ (4) ノ直線ニ對シテハ原曲線ハ右方ニテ下部, 左方ニテ上部ニアルコトガ云ハレル.

次ニ函數 y ヲ二ツノ一値函數 $\sqrt{\frac{x(x^2-1)}{x+4}}$, $-\sqrt{\frac{x(x^2-1)}{x+4}}$ ニ分ケテ考フルナラバ是等ノ二函數ハソノ定義域内ノ x ニ對シテ連續デアル. 而シテ $x \to -4-0$ ナルトキハ y ハ $\pm\infty$ トナル. 故ニ y 軸ニ平行ナル漸近線ハ $x = -4$ ノミデアル.

尙曲線ノ無限分枝ハ此漸近線ニ對シテ左方ニノミ存在スル (第 31 節, 例 3 ノ圖參照).

以上ニテハ曲線ノ方程式ガ y ニツキ解カレ得ル場合ヲ考ヘタノデアル. 曲線ノ方程式ガ x ニツキ解カレ得ル場合ニ於テモ上ノ方法ヲ適用シ得ベキハ勿論デアル. 併シナガラ曲線ノ方程式ヲ x ニツキテモ y ニツキテモ解キ得ザル場合ニ曲線ノ漸近線ヲ如何ニシテ求ムベキカ. 此場合ノ一般的方法ヲ述ベルコトハ長クモアリ且ツハ必要デモナイ故之ヲ省略シテ只一例ニヨツテ特殊ノ方法ヲ說明スルコトニスル.

例 3. $\qquad x^3 - y^3 - 3xy = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

今原點ヲ通ル直線

$$y = mx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ヲ引キテ曲線トノ交點ヲ求メテ見ル.

(2) ヲ (1) ニ代入シテ

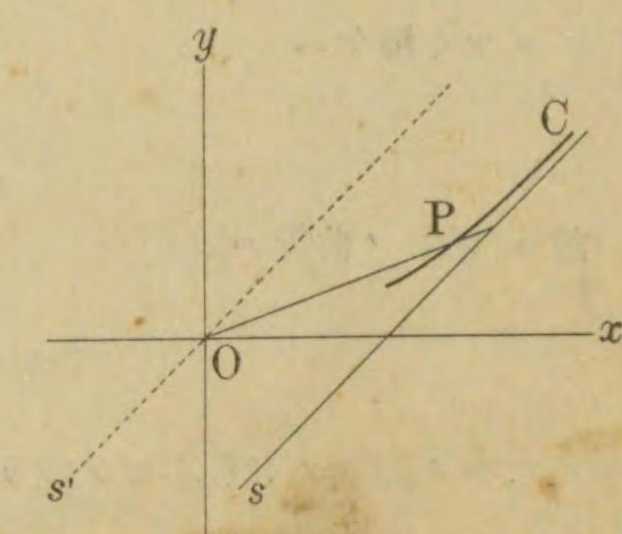
$$x^3(1-m^3) = 3mx^2, \qquad \therefore \ x = 0 \quad 又ハ \quad x = \frac{3m}{1-m^3}$$

之ヲ (2) ニ代入シテ次ノ根ヲ得ル.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{3m}{1-m^3} \\ y = \dfrac{3m^2}{1-m^3} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$x = 0$, $y = 0$ ハ原點ノ座標デアル. 卽チ (1) ト (2) トハ原點ニテ交ル. コレハ初メヨリ分ツテ居ルコトデアル. 他ノ交點ノ座標ガ (3) ニヨツテ求メラレル.

(1) ノ曲線上ノ點ノ座標ハ m ニ適當ノ値ヲ與ヘルコトニヨツテ (3) ノ式ニテ表サレルコト勿論デアル. 逆ニ (3) ニ於ケル m ニ種種ノ値ヲ與フルトキソレニ對シテ定マル x, y ヲ座標トスル點ハ (1) ノ曲線上ニ存在スル. 何トナレバ (3) ヨリ m ヲ消去スレバ (1) ヲ得ルカラデアル. 故ニ (1) ノ代リニ (3) ヲ以テ與ヘラレタル曲線ノ方程式ト看做シテ宜シイ. 卽チ (3) ハ媒介變數表示ニヨル曲線ノ方程式デアツテ m ハ幾何學的ニハ曲線上ノ點 (x, y) ト原點トヲ結合スル直線ノ方向係數デアル.



偖テ此曲線上ノ點ノ座標 x, y ハ $m \neq 1$ ナラバ m ノ連續函數デアツテ $m \to 1$ ナルトキ $x \to \infty$, $y \to \infty$ トナル故 $m \to 1$ ナルトキ曲線ノ無限分枝ガ出來ル. 從ツテ此無限分枝ニ沿ウテ點 P ガ原點ヨリ限リナク遠ザカルトキハ OP ノ方向係數 m ハ限リナク 1 ニ近ヅク. 此極限値 1 ハ, 若シ曲線ニ漸近線ガアルナラバソノ方向係數ニ等シカルベキデアル. 故ニ此曲線ニハ, 若シ漸近線アリトセバ, $y = x$ ナル直線ニ平行ナルモノノミデアル.

今 (3) ヨリ $y - x$ ヲ作ルナラバ

$$y - x = \frac{3m(m-1)}{1-m^3} = -\frac{3m}{1+m+m^2}$$

故ニ無限分枝上ノ點 $P(x, y)$ ガ原點ヨリ限リナク遠ザカルトキ卽チ $m \to 1$ ナルトキ $y - x$ ハ -1 ニ收斂シ極メテ大ナル $|x|$ ニ對シテハ曲線ノ方程式ハ近似的ニ

$$y - x \fallingdotseq -1.$$

トナル. 故ニ曲線ノ漸近線ハ確カニ存在シ其方程式ハ $y - x + 1 = 0$ デアル. 此漸近線ニ對シテ曲線ノ無限分枝ガ何レノ側ニアルカヲ見ンニハ更ニ曲線ノ方程式 (3) ヨリ $y - x + 1$ ヲ作リテ見レバ宜シイ. 卽チ

$$y - x + 1 = -\frac{3m}{1 + m + m^2} + 1 = \frac{(1 - m)^2}{1 + m + m^2}$$

デアツテ $m \neq 1$ ナラバ $y - x + 1 > 0$ デアル．ヨリテ曲線ハ漸近線ニ對シテ原點ト同側ニアル（第 31 節，例 4 ノ圖參照）．

31. 曲線ノ概形ヲ畫クコト

直交軸ニ關シテ與ヘラレタル方程式ノ表ス曲線ヲ畫ク方法ヲ下ニ例示スル．

例 1.　　$y^2 = x^2 \dfrac{1 + x}{2 - x}$ ……………………………………(1)

y ニツキ解ケバ

$$y = \pm x \sqrt{\frac{1 + x}{2 - x}}$$

故ニ (1) ノ曲線ハ

$$y_1 = x \sqrt{\frac{1 + x}{2 - x}}, \qquad y_2 = -x \sqrt{\frac{1 + x}{2 - x}}$$

ナル二ツノ函數ノぐらふカラ成リ立ツ．y_1 ノぐらふト y_2 ノぐらふトハ x 軸ニ關シテ對稱デアルカラドチラカ一ツガ畫カレレバ他ヲ畫クコトガ出來ル．

y ハ $-1 \leqq x < 2$ ナル範圍內ノミニテ實デアル．故ニ曲線ハ二直線

$$x = -1, \qquad x = 2$$

ノ間ニノミ存在スル（圖ノ斜線ヲ引キタル部分ニハ曲線ハ存在シナイ）．

$y = 0$ トスレバ $x = 0$ 又ハ $x = -1$，又 $x = 0$ トスレバ $y = 0$．故ニ原點及ビ $x = -1$ ナル點ニ於テ x 軸ヲ截リ，原點以外ニテハ y 軸ヲ截ラナイ．

曲線ハ y 軸ニ平行ナル二直線ノ間ニアル故 y 軸ニ平行ナラザル漸近線ハ存在セヌ．又 y 軸ニ平行ナル漸近線ハ y ヲ無限大ナラシムル x ノ値ヲ求ムルコトニヨツテ得ラレル．即チ $x = 2$ ナル直線一ツアルノミデアル．此漸近線ニ對シテ曲線ハ左側ニアルコト明カデアル．y_1' ヲ求ムルニハ (1) 式ノ兩邊ヲ x ニ對シテ微分スルノガ最モ簡單デアル．即チ

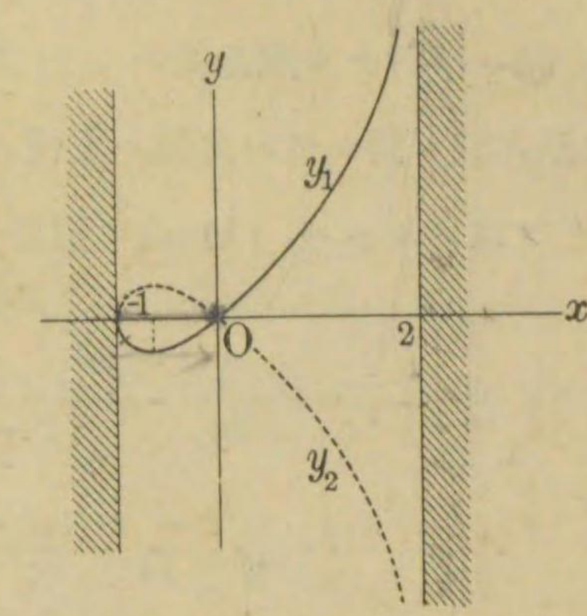
$$2yy' = \frac{(x^2 + x^3)'(2 - x) - (x^2 + x^3)(2 - x)'}{(2 - x)^2}$$

$$= \frac{(2x + 3x^2)(2 - x) + (x^2 + x^3)}{(2 - x)^2}$$

$$= \frac{x(4 + 5x - 2x^2)}{(2 - x)^2}$$

$$\therefore \quad y_1' = \frac{1}{2y_1} \frac{x(4 + 5x - 2x^2)}{(2 - x)^2}$$

$$= \frac{4 + 5x - 2x^2}{2\sqrt{(1 + x)(2 - x)^3}}$$



此式ノ分子ハ -1 ト 2 トノ間ノ x ニ對シテ唯一度（約 $x = -0.64$ ノ所ニテ）零トナルノミデアル．而シテ y_1' ノ符號ノ變化ハ次表ノ通リデアル．

x	$-1+0$	……	-0.64	……	0	……	$2-0$
y_1'	$-\infty$	$-$	0	$+$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+$	$+\infty$

故ニ $x = -1$ ニ於テハ曲線ノ切線ハ y 軸ニ平行トナリ，$x \fallingdotseq -0.64$ ニ於テ y_1 ハ極小値ヲ取リ $x = 0$ ニ於テ切線ノ方向係數ハ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ トナリ $x = 2 - 0$ ニ於テ切線ハ y 軸ニ平行ニ傾ク．

以上ニヨリ y_1 ノぐらふハ圖ノ如クニナル．x 軸ニ關シテ之ト對稱ナル y_2 ノぐらふヲ畫ケバ全曲線ヲ完成スルコトガ出來ル．

原點ニ於テハ此曲線ノ二ツノ分枝ガ交叉シテ居ル（互ニ切セズニ）．斯カル曲線上ノ點ヲ**結節點**ト稱スル．

例 2.　　$y^2 = \dfrac{x^3}{2 - x}$ ……………………………………(1)

此曲線モ x 軸ニ關シテ對稱ナル二ツノ曲線

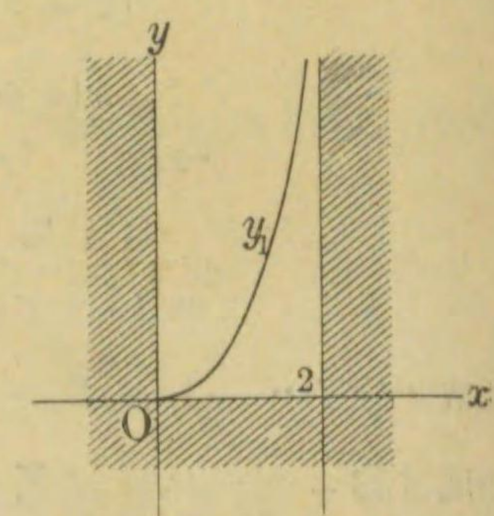
$$y_1 = \sqrt{\frac{x^3}{2 - x}}, \qquad y_2 = -\sqrt{\frac{x^3}{2 - x}}$$

カラ成リ立ツコトガ分ル．

y_1 ニツキ考フルニコレハ $0 \leqq x < 2$ ナル範圍內ニテ實デアリ而カモソノ x ニ對シテ正（又ハ 0）デアル．故ニ y_1 ノぐらふハ y 軸ニ平行ナル二直線 $x = 0$，$x = 2$ ノ間ニ於テ x 軸ヨリ上部ニノミ存在スル．

$x = 0$ トスレバ $y_1 = 0$，又 $y_1 = 0$ トスレバ $x = 0$．故ニ原點以外ニテハ曲線ハ兩軸ト交ラナイ．

此曲線モ y 軸ニ平行ナル二直線間ニアル故 y 軸ニ平行ナラザル漸近線ヲ有シナイ．又 y 軸ニ平行ナル漸近線ハ $x=2$ ノミデアル，而シテ此漸近線ニ對シテハ曲線ハ左側ニアル．



y_1' ヲ求メルニハ，(1) 式ノ兩邊ヲ x ニツキ微分シテ

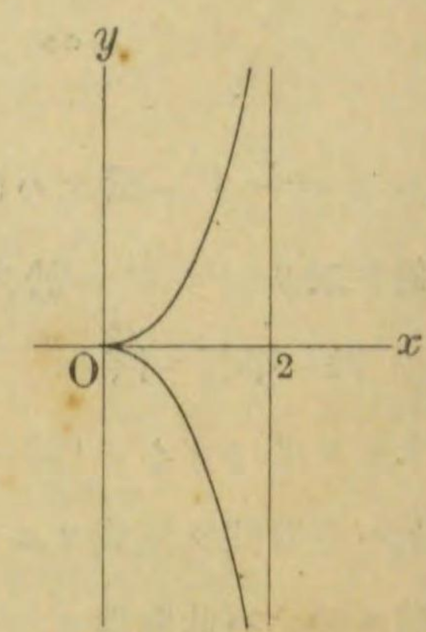
$$y_1' = \frac{1}{2y_1}\,\frac{3x^2(2-x)+x^3}{(2-x)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2-x}{x^3}}\,\frac{(3-x)x^2}{(2-x)^2}$$

$$= (3-x)\sqrt{\frac{x}{(2-x)^3}}$$

故ニ次ノ表ヲ得ル．

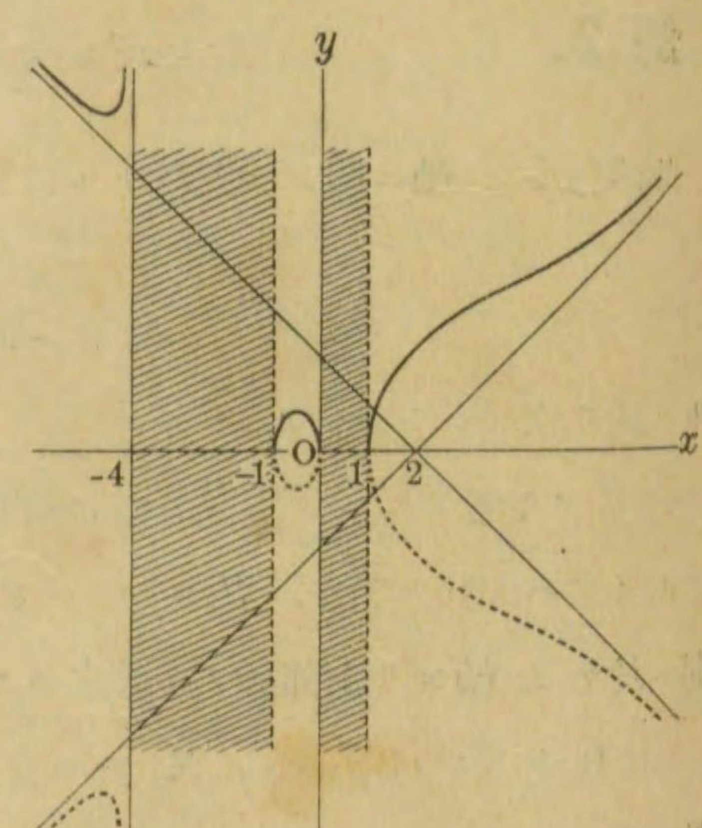
x	0	......	$2-0$
y_1'	0	+	$+\infty$



斯クテ前圖ノ如キ曲線ヲ得ル．而シテ x 軸ニ關シテ之ト對稱ナル曲線ヲ畫キ以テ全曲線ヲ完成スルコトガ出來ル．右圖ガ即チソレデアル．

原點ニ於テハ此曲線ノ二ツノ分枝ガ互ニ相切シテ尖リタル形ヲ作ツテ居ル．斯クノ如キ點ヲ尖點ト稱スル．

例 3. $y^2 = \dfrac{x(x^2-1)}{x+4}$



此曲線モ x 軸ニ關シテ對稱デアル．故ニ吾人ハ x 軸ヨリ上部ニアル部分，即チ $y \geqq 0$ ナル部分ダケヲ考フルコトニスル．

y ノ實ナル範圍ハ次ノ通リデアル．

$$x<-4,\quad -1\leqq x\leqq 0,\quad 1\leqq x$$

故ニ圖ノ斜線ヲ引キタル部分ニハ曲線ノ分枝ガナイ．

$y=0$ トセバ $x=-1,\ 0,\ 1.$

$x=0$ トセバ $y=0.$

故ニ曲線ハ $x=-1,\ 0,\ 1$ ナル三點ニテ x 軸ヲ截リ，原點以外ニテハ y 軸ヲ截ラヌ．

漸近線ハ

$$y=x-2,\quad y=-x+2,\quad x=-4$$

ノ三本アツテ x 軸ノ上部ニアル曲線ノ無限分枝ハ漸近線 $y=x-2,\ y=-x+2$ ニ對シテヤハリ上部ニ，漸近線 $x=-4$ ニ對シテハ左方ニアル（第 30 節，例 2）．

y' ヲ求ムレバ

$$y' = \frac{1}{2y}\,\frac{(x^3-x)'(x+4)-(x^3-x)(x+4)'}{(x+4)^2}$$

$$= \frac{1}{2y}\,\frac{(3x^2-1)(x+4)-(x^3-x)}{(x+4)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+4}{x(x^2-1)}}\,\frac{2x^3+12x^2-4}{(x+4)^2}$$

$$= \frac{x^3+6x^2-2}{\sqrt{x(x^2-1)(x+4)^3}}$$

故ニ y' ハ $x=0,\ \pm1,\ -4$ ニ對シテ ∞ トナル．即チ x 軸ヲ截ル三點 $x=0,\ \pm1$ ニテハ切線ハ y 軸ニ平行トナル．

又 y' ノ分子 x^3+6x^2-2 ヲ $\phi(x)$ ニテ表スナラバ方程式

$$\phi(x)=0$$

ハ $(-\infty,\ -4)$，$(-1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ 間ニ一ツヅツノ根ヲ有スル．[1] コノ根ヲソレゾレ α, β, γ ニテ表スナラバ x ガ α ヲ通過スルトキニ $\phi(x)$ 從ツテ y' ハ負ヨリ正ニ符號ヲ變ズル故 $x=\alpha$ ハ y ノ極小，又 x ガ β ヲ通過スルトキニハ $\phi(x)$ 從ツテ y' ハ正ヨリ負ニ符號ヲ變ズルガ故ニ $x=\beta$ ハ y ノ極大トナル．γ ノ附近ノ x ニ對シテハ y ハ虚トナル故 $x=\gamma$ ハ y ノ極大デモ極小デモ何レデモナイ．

斯クテ $y \geqq 0$ ナル部分ノ曲線ヲ畫クコトヲ得ベク，x 軸ニ關シテ之ト對稱ナル曲線ヲ附ケ加ヘテ全曲線ヲ完成スルコトガ出來ル．

[1] コレハ次ノ表ヨリ明カデアル．

x	$-\infty$	-4	-1	0	1
$\phi(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$

例 4.　$x^3 - y^3 - 3xy = 0$

此方程式ハ x 又ハ y ニツキ解クコトハ困難デアルガ第30節, 例3 ニ於ケル如ク媒介變數 m ヲ用フルナラバ

$$x = \frac{3m}{1-m^3}, \qquad y = \frac{3m^2}{1-m^3}$$

トシテ表スコトガ出來ル. 玆ニ m ハ曲線上ノ點ト原點トヲ結合スル直線ノ方向係數デアル. コノ x, y ノ式ヨリ

$$\frac{dx}{dm} = 3\frac{1+2m^3}{(1-m^3)^2}$$

$$\frac{dy}{dm} = 3m\frac{2+m^3}{(1-m^3)^2}$$

ヲ得ル. 故ニ x ハ m ガ $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ヲ通過スルトキニ極小, 又 y ハ m ガ $-\sqrt[3]{2}$ ヲ通過スルトキニ極大, m ガ 0 ヲ通過スルトキニ極小トナルヲ知ル. 尙 m ノ變化ニ對スル x, y ノ變化ヲ表示スレバ次ノ如クニナル.

m	$-\infty$	………	$-\sqrt[3]{2}$	………	$-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	………	0
x	0	減	$-\sqrt[3]{2}$	減	$-\sqrt[3]{4}$ (極小)	增	0
y	0	增	$\sqrt[3]{4}$ (極大)	減	$\sqrt[3]{2}$	減	0 (極小)

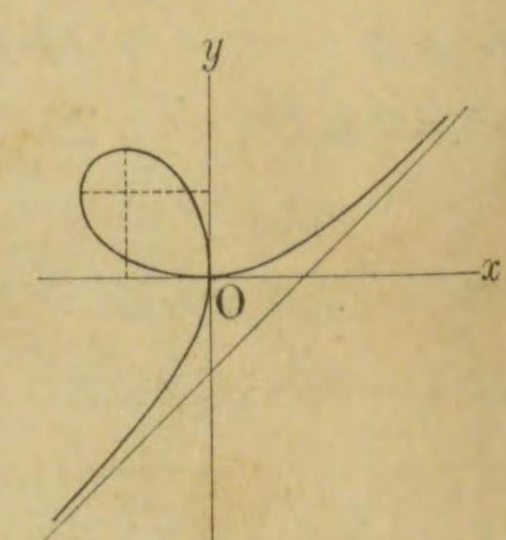
m	0	………	$1-0$	$1+0$	………	$+\infty$
x	0	增	$+\infty$	$-\infty$	增	0
y	0 (極小)	增	$+\infty$	$-\infty$	增	0

更ニ此曲線ノ漸近線ハ

$$y = x - 1$$

デアツテ曲線ノ無限分枝ハ此漸近線ノ上部ニアルコトヲ知ツテ居ル (第 30 節, 例 3).

以上ニヨリ曲線ノ概形ハ右圖ノ如クニナル.



以上ノ諸例ニ於テハ大體次ノ事項ニ著目シテ曲線ノ概形ヲ判斷シテ居ルコトガ分ルデアラウ.

1.　簡單ニ分ル場合ニハ曲線ノ對稱性ヲ調ベル.

2.　曲線ノ存在スル範圍ヲ定メル.

3.　座標軸ヲ截ル點ヲ求メル.

4.　漸近線ヲ求メ且其漸近線ニ對シテ曲線ノ存在スル側ヲ調ベル.

5.　曲線ノ橫座標若シクハ縱座標ノ極大, 極小ヲ求メル.

曲線ヲ畫ク上ニ於テハコレ等ハ特ニ留意スベキ諸點デアル. 尙曲線ヲ精密ニ畫カンニハ曲線ノ凹凸ヲモ調ベルガヨイ.

併シ極メテ粗雜ナル概形ダケヲ知レバ充分デアルト云フ樣ナ場合ニハコノ中ノイクツカヲ省略スルコトガアル. 例ヘバ曲線ガ閉ヂテ居ルカ居ナイカガ主タル問題デアル樣ナ場合ニハ (4) ノ漸近線ハ必要デアルガ (5) ノ極大, 極小ナドハ求メズトモ宜シイト云ツタ樣ナ事デアル. 極メテ粗雜ナル概形ダケヲ知レバ充分デアル場合ガ可ナリ多イノデアルカラ徒ラニ精密ナル圖ヲ畫クコトニノミ汲々トセズ寧ロ成ルベク早クソノ概形ヲツカムコトニ努メラレル樣練習セラレタイ.

問題 12.

漸近線ノ存在スル場合ニハソレヲ求メテ次ノ曲線ノ概形ヲ畫ケ (1—11).

1.　$x^3 = y(a^2 + x^2)$ [1]　　2.　$xy^2 = 4a(2a - x)$

3.　$x^2y^2 = x^2 - y^2$

4.　$x^2y^2 = a^2(x^2 + y^2)$ ［原點ハ曲線上ノ點ナレドモ原點ノ附近ニハ曲線ノ分枝ガナイ. 斯クノ如キ曲線上ノ點ヲ**弧立點**ト稱スル］.

5.　$y^3 - x^3 = a^2x$　　6.　$x^3 + y^3 = a^3$　　7.　$(y - x)^2 = (x - 1)^3$

8.　$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$　　9.　$y^2 = x^2\frac{x+1}{x-2}$　　10.　$x^5 + y^5 - x^2y = 0$

[1] 以下常數ハ正デアルモノト假定スル.

11. $x = t - t^3,\quad y = 1 - t^4$

12. 半徑 a ナル圓ガ定直線上ヲ滑ルコトナシ＝轉ビ行クトキ圓周上ノ定點ノ畫ク道ノ方程式ヲ求メ且ツソノ概形ヲ畫ケ.[1]

13. 半徑 a ナル圓ガ定直線上ヲ滑ルコトナシ＝轉ビ行クトキ圓＝對シテ固定セル點(圓ノ中心ヨリノ距離 d ナル)ノ畫ク道[2]ノ方程式ヲ求メ且ツ $d = \frac{2}{3}a$ 及ビ $d = \frac{4}{3}a$ ナル場合ノ曲線ノ概形ヲ畫ケ.

14. 半徑 b ナル圓ガ固定圓（半徑 a）＝外切シツツ滑ルコトナシ＝轉ビ行クトキ動圓周上ノ定點ノ畫ク道[3]ノ方程式ヲ求メ且ツ $a = 3b$ ナル場合＝於ケル此曲線ノ概形ヲ畫ケ.

15. 前問＝於テ外切ノ代リ＝内切スル場合ヲ攻究セヨ.[4]

---

(1) 此曲線ヲ**さいくろいど**ト稱スル.

(2) 此曲線ヲ**とろこいど**ト稱スル.

(3) 此曲線ヲ**えぴさいくろいど**ト稱スル.

(4) 此曲線ヲ**はいぽさいくろいど**ト稱スル.

第 六 章

基 函 數

32. 基函數, 不定積分

$\sin x$ ノ導函數ハ $\cos x$ デアル. コノ場合＝ $\sin x$ ヲ $\cos x$ ノ基函數ト云フ. 一般＝函數 $\mathrm{F}(x)$ ノ導函數ガ $f(x)$ デアルトキハ $\mathrm{F}(x)$ ヲ $f(x)$ ノ**基函數**ト稱スル. 卽チ基函數ト導函數トハ互＝逆ノ關係＝ナツテ居ル. $\mathrm{F}(x)$ ＝對シテ $f(x)$ ガ導函數ナラバ $f(x)$ ＝對シテ $\mathrm{F}(x)$ ハ基函數デアル.

基函數ハ**不定積分**又ハ略シテ單＝**積分**ト稱スル. 後＝出デ來ル定積分ト區別スルタメ＝不定ノ字ヲ冠ラセルノデアツテ誤解ノ恐レナイ場合＝ハ之ヲ省略スルノガ常デアル.

$\sin x$ ヲ x ＝ツキ微分スレバ $\cos x$ トナルガ $\sin x$ 以外＝モ x ＝ツキ微分シテ $\cos x$ トナル函數ハ澤山＝アル. 例ヘバ $\sin x + 3$ モ $\sin x - \log 2$ モ x ＝ツキ微分スレバ $\cos x$ トナル. 故＝是等ノ函數ハ皆 $\cos x$ ノ基函數デアル. 卽チ $\cos x$ ノ基函數ハ一ツデナク澤山＝存在スル.

$\cos x$ ノ基函數ハ $\sin x$ 以外＝澤山存在スルケレドモソレラハ皆

$$\sin x + \mathrm{C} \quad (\mathrm{C},\ 常數)$$

ナル形ノ函數＝過ギナイコトガ容易＝證明セラレル. 先ヅ $\cos x$ ノ基函數ノ任意ノ一ツヲ $\phi(x)$ ＝テ表スナラバ

$$\phi(x) = \cos x$$

デアルカラ

$$\psi(x)=\phi(x)-\sin x$$

ト置クトキ

$$\psi'(x)=\phi'(x)-\cos x=0$$

トナル．然ルニ微分シテ 0 トナル函數ハ常數デアラネバナラヌコトハ第 21 節，例 2（74 頁）ニ於テ證明シテアル．

故ニ　$\psi(x)=\mathrm{C}$　(C, 常數)

ヨリテ　$\phi(x)=\sin x+\mathrm{C}.$

コレト同樣ニシテ次ノ事ヲ證明スルコトガ出來ル．

F(x) ヲ f(x) ノ基函數ノ一ツトスルナラバ f(x) ノ基函數ハ悉ク

$$\mathrm{F}(x)+\mathrm{C}$$

ナル形ニ書クコトガ出來ル．茲ニ C ハ常數ヲ表ス．

コレニヨリ基函數ノ一般形ハ任意ノ値ヲ取リ得ル常數ヲ一ツ含ムコトヲ知ル．此常數ヲ**任意常數**ト稱スル．

函數 $f(x)$ ノ基函數ヲ表スニ

$$\int f(x)dx \text{[1]} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ナル記號ヲ用フル．例ヘバ

$$\int \cos x\,dx=\sin x+\mathrm{C}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

又 x^3 ノ導函數ハ $3x^2$ デアルカラ

$$\int 3x^2dx=x^3+\mathrm{C}$$

斯クノ如クーツノ基函數ニヨツテ總テノ他ノ基函數ヲ表スコトガ出來ルノデアル故，以後基函數中ノ常數 C ニハ任意ノ値ヲ與ヘタルモノヲ以テ基函數ヲ代表セシムルコトトスル．例ヘバ (2) 式ノ

(1) 此記號ノ起リハ第八章ニ於テ分ルデアラウ．

代リニ次ノ如クニ書キ表スノデアル．

$$\int \cos x\,dx=\sin x,\quad \int \cos x\,dx=\sin x+3,\ \ldots\ldots$$

33. 基本公式

函數 $f(x)$ ノ基函數ヲ求メルコトヲ $f(x)$ ヲ x ニツキ**積分スル**ト云フ．本章ノ目的ハ簡單ナル函數ヲ積分スルコトニアル．コレニハ若干ノ基本トナル公式ガ入用デアル．故ニ先ヅソレラノ公式ヨリ始メルコトニスル．

1°.　$\mathrm{F}'(x)=kf(x)$　(k, 常數)[1]

$F'(x)=kf(x)$

デアルナラバ

$$\left[\frac{\mathrm{F}(x)}{k}\right]'=\frac{\mathrm{F}'(x)}{k}=f(x)$$

$\left[\frac{F(x)}{k}\right]'=\frac{F(x)}{k}=f(x)$

デアルカラ

$$\int f(x)dx=\frac{\mathrm{F}(x)}{k}$$

$\int f(x)dx=\frac{F(x)}{K}$

2°.　$(x^{m+1})'=(m+1)x^m$

$\left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\right]'=x^m$

$\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}$

デアルカラ 1° ニヨリ

$$\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}\qquad \text{但シ}\quad m\neq -1$$

例ヘバ　$\int x^2dx=\frac{x^3}{3},\quad \int\sqrt{x}\,dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

3°. 公式 2° ノ m ハ正ニテモ負ニテモ，有理數デサヘアレバ宜シイノデアルガ m ガ負ノ時ハ m ノ代リニ $-m$ ト置イテ得ル次ノ公式ヲ用フルノガ便利デアル．

(1) 勿論 k ハ零デナイモノトスル．

$$\int \frac{1}{x^m}\,dx = -\frac{1}{(m-1)x^{m-1}} \qquad \text{但シ}\quad m \neq 1$$

例ヘバ $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$, $\int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{2}{\sqrt{x}}$

4°. $(\log x)' = \frac{1}{x}$

デアルカラ $$\int \frac{1}{x}\,dx = \log x$$

此積分ハ 2° ニ於テ $m = -1$ ニ相當スルモノデアル.

5°. $(e^{kx})' = ke^{kx}$

デアルカラ $$\int e^{kx}\,dx = \frac{e^{kx}}{k}$$

6°. $(\cos kx)' = -k\sin kx$

デアルカラ $$\int \sin kx\,dx = -\frac{\cos kx}{k}$$

7°. $(\sin kx)' = k\cos kx$

デアルカラ $$\int \cos kx\,dx = \frac{\sin kx}{k}$$

8°. $(\tan kx)' = k\sec^2 kx$

デアルカラ $$\int \sec^2 kx\,dx = \frac{\tan kx}{k}$$

9°. $(\cot kx)' = -k\,\mathrm{cosec}^2 kx$

デアルカラ $$\int \mathrm{cosec}^2 kx\,dx = -\frac{\cot kx}{k}$$

10°. $\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $(a>0)$

デアルカラ $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} \quad (a>0)$$

11°. A ヲ正又ハ負ノ常數トスルナラバ

$$\left[\log(x+\sqrt{x^2+A})\right]' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+A}} \times \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+A}}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}$$

デアルカラ $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx = \log(x+\sqrt{x^2+A})$$ [1]

12°. $\left(\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \times \frac{1}{a} = \frac{a}{a^2+x^2}$

デアルカラ $$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

13°. $\left[\log\frac{x-a}{x+a}\right]' = \left[\log(x-a)-\log(x+a)\right]'$
$$= \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} = \frac{2a}{x^2-a^2}$$

デアルカラ $$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}$$

14°. $\left[\log\frac{a+x}{a-x}\right]' = \left[\log(a+x)-\log(a-x)\right]'$
$$= \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} = \frac{2a}{a^2-x^2}$$

デアルカラ $$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x}$$

注意 1. 被積分函數ガ分數ノ形ヲナシ, 分子1ナル場合ニハ分子ヲ省略シテ書クコトガアル. 例ヘバ $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$ ヲ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ト書イテ表スガ如キデアル.

[1] A ガ零デアッテモ $x>0$ ナラバヤハリ此公式ハ成立スルノデアル.

注意 2. x ガ負ナルトキ

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log x$$

ト書クハ實ハ穩當デナイ．此時ハ

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log(-x)$$

ト書クベキデ，x ノ正負ガ分ラヌ場合ニハ

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$$

ト書クノガ本當デアル．

同樣ニ A ガ負デアツテ x ノ正負ガ分ラヌ場合ニハ 11° ノ公式ノ代リニ

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+\mathrm{A}}}\,dx = \log\left|x+\sqrt{x^2+\mathrm{A}}\right|$$

ト書カネバナラヌシ，又 13°, 14° ノ公式ノ如キモ

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \quad \text{……………………(A)}$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| \quad \text{……………………(B)}$$

ト書クベキガ本當デアル．是等ノ公式ノ正シイコトハ x ニツキ $\log f(x)$ ヲ微分スルモ又 $\log\left\{-f(x)\right\}$ ヲ微分スルモ形式的ニハ同一ノ式ヲ得ルコトカラ明瞭デアラウ．[(1)]

之ヲ一纏メニシテ云ヘバ積分シテ得タル式中ニ log ノ入ツテ來ル場合ニハ log ノ中ノ函數ヲ常ニ正ニシテ置クベキデアルト云フコトニナル．此事ハ心ニ留メテ置カネバナラヌ事デアルガイチイチ log ノ中ノ函數ニ絶對値ノ記號ヲ附ケテ置クモ煩ハシイ．故ニ本書ニ於テハ之ヲ省略スルコトニスル．

34. 和ノ積分

u, v ヲ x ノ函數，a, b ヲ常數トシテ

$$\boldsymbol{y = au + bv}$$

ト置クナラバ y モ亦 x ノ函數トナル．コノ函數 y ニ對シテハ

(1) (A) ト (B) トハ實ハ同一ノ式デアル．故ニ 13° ト 14° トヲ一ツノ公式ニ纏メルコトモ出來ルノデアル．(A) 又ハ (B) ガ卽チソレデアル．

$$\int y\,dx = a\int u\,dx + b\int v\,dx \quad \text{……………(1)}$$

トナル．

コレヲ證明スルニハ，左邊ハ x ニツキ微分シテ y トナル函數ヲ表スノデアルカラ右邊ヲ x ニツキ微分シテ y ニナルコトヲ云ヘバ宜シイ．右邊ヲ x ニツキ微分スレバ

$$\left[a\int u\,dx + b\int v\,dx\right]' = a\left[\int u\,dx\right]' + b\left[\int v\,dx\right]'$$
$$= au + bv$$

卽チ y トナツテ上式ガ證明セラレルノデアル．

(1) ニ於テ $b=0$ ナル場合ヲ考フルナラバ

$$y = au$$

デアツテ

$$\int y\,dx = a\int u\,dx$$

トナル．卽チ

$$\int au\,dx = a\int u\,dx \quad \text{………………………(2)}$$

ヲ得ル．

(1) 式ハ二ツノ函數ノ和ノ積分ノ公式デアルガ三ツ以上ノ函數ノ和ニツイテモ同樣ノ公式ヲ得ルコト勿論デアル．

例 1. $\quad y = x^3 + 3\sqrt{x} - \dfrac{2}{x}$

公式 (1) ヲ用ヒテ

$$\int y\,dx = \int x^3\,dx + 3\int\sqrt{x}\,dx - 2\int\frac{1}{x}\,dx$$

トナル．然ルニ

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}, \quad \int\sqrt{x}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}, \quad \int\frac{1}{x}\,dx = \log x$$

$$\therefore \quad \int y\,dx = \frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x^3} - 2\log x$$

例 2. $y = \cos^2 kx$

y ヲ書キ換フレバ

$$y = \frac{1}{2}(1 + \cos 2kx)$$

$$\therefore \quad \int y\,dx = \frac{1}{2}\int(1 + \cos 2kx)\,dx = \frac{1}{2}\left\{\int 1\,dx + \int \cos 2kx\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{x + \frac{\sin 2kx}{2k}\right\}$$

例 3. $y = \cot^2 x$

y ヲ書キ換フレバ

$$y = \operatorname{cosec}^2 x - 1$$

$$\therefore \quad \int y\,dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx - \int 1\,dx = -\cot x - x$$

問題 13.

次ノ積分ノ値ヲ求ム (1—8).

1. $\displaystyle\int \frac{(x-3)^2}{x^2}\,dx$
2. $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{x}}\,dx$
3. $\displaystyle\int (e^{-5x} + \sin 3x)\,dx$
4. $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$
5. $\displaystyle\int \left(\frac{2}{\sqrt{3-x^2}} + \frac{5}{4-x^2}\right)dx$
6. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-5}} - \frac{1}{3+x^2}\right)dx$
7. $\displaystyle\int (\cos x - \sin x)^2\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{1-2\sin^4 x}{\sin^2 x}\,dx$

9. 質點ノ直線運動ニ於テ加速度 α ガ次ノ式ニテ表サルルトキ速サ (v) 及ビ移動距離 (s) ヲ求ム.

$$\alpha = k\cos(\omega t + \varepsilon), \qquad k,\ \omega,\ \varepsilon,\ 常數$$

35. 置換積分法

$$y = f(x)$$

ヲ與ヘラレタル x ノ函數トシ

$$F(x) = \int f(x)\,dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ト置クナラバ

$$\frac{dF}{dx} = f(x)$$

今 x ノ代リニ變數 t ノ函數 $\phi(t)$ ヲ置キ換ヘル. 即チ

$$x = \phi(t)$$

ナル置換ヲ行フ. 然ルトキハ $f(x)$ ハ t ノ函數トナリ, 從ツテ $F(x)$ モ亦 t ノ函數トナル. 之ヨリ $\dfrac{dF}{dt}$ ヲ求ムルナラバ

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx}\,\frac{dx}{dt} = f(x)\phi'(t) = f\{\phi(t)\}\phi'(t)$$

之ヲ t ニ關シテ積分スレバ

$$F\{\phi(t)\} = \int f\{\phi(t)\}\phi'(t)\,dt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

此式ノ右邊ハ (1) 中ニアル x ヲ $\phi(t)$ ニテ, 又 dx ヲ $\phi(t)$ ノ微分 $\phi'(t)dt$ ニテ置キ換ヘテ生ズル積分デアル. 之ヲ求メテ然ル後 $x = \phi(t)$ ヨリ得ル t ノ値ヲ代入スレバ (1) ノ積分ヲ得ル.(1)

例 1. $$I = \int \frac{1}{(ax+b)^2}\,dx, \qquad a \neq 0$$

$$ax + b = t \qquad 即チ \qquad x = \frac{1}{a}(t-b)$$

ト置クナラバ $\phi(t)$ ニ相當スルモノハ $\dfrac{1}{a}(t-b)$ デアル. 之ヨリ

$$\phi'(t) = \frac{1}{a} \qquad 從ツテ \qquad dx = \frac{1}{a}\,dt$$

ヲ得ル. 故ニ

$$I = \int \frac{1}{t^2}\,\frac{1}{a}\,dt = -\frac{1}{at} = -\frac{1}{a(ax+b)}$$

(1) $\phi(t)$ ハ t ノ如何ナル函數ニテモ宜シイケレドモ $\phi'(t)$ ガ存在スル様ナモノデナケレバ (2) ハ意味ヲナサヌコトニナル. 又 $x = \phi(t)$ ヨリ t ヲ x ノ函數トシテ表シ得ル様ナモノデナケレバ (2) ノ公式ハ事實上 (1) ノ積分ヲ求ムルニ役立タヌ.

注意. 一般ニ $\int f(x)dx = \mathrm{F}(x)$ ナラバ $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\mathrm{F}(ax+b)$ ナルコトガ上ト同ジ置換ニヨツテ證明セラレル.

例ヘバ
$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\log(ax+b),$$
$$\int \sec^2(ax+b)dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)$$

例 2. $$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}, \qquad (a>0)$$

書キ換フレバ
$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{a}{2}\right)^2}}$$

故ニ例 1 ニ於ケルト同ジク $x - \frac{a}{2} = t$ 即チ $x = t + \frac{a}{2}$ ト置キテ
$$\mathrm{I} = \int \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - t^2}} = \sin^{-1}\frac{t}{\frac{a}{2}} = \sin^{-1}\frac{2x-a}{a}$$

例 3. $$\mathrm{I} = \int \frac{lx+m}{\sqrt{x^2+2px+q}}\,dx, \qquad (q \neq p^2)$$

書キ換フレバ
$$\mathrm{I} = \int \frac{lx+m}{\sqrt{(x+p)^2+q-p^2}}\,dx$$

故ニ $x+p=t$ 即チ $x = t-p$ ト置ケバ
$$dx = dt$$

デアツテ
$$\mathrm{I} = \int \frac{l(t-p)+m}{\sqrt{t^2+q-p^2}}\,dt$$
$$= l\int \frac{t}{\sqrt{t^2+q-p^2}}\,dt + (m-lp)\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+q-p^2}}$$

第二ノ積分ハ第 33 節, 11° ノ公式ニヨツテ求メラレル. 又第一ノ積分ハ
$$t^2+q-p^2 = z$$

ト置ケバ $\qquad 2t\,dt = dz \quad$ 即チ $\quad t\,dt = \frac{dz}{2}$

トナル故 $$\int \frac{t}{\sqrt{t^2+q-p^2}}\,dt = \frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{z} = \sqrt{t^2+q-p^2}$$

斯クシテ
$$\mathrm{I} = l\sqrt{t^2+q-p^2} + (m-lp)\log\left(t+\sqrt{t^2+q-p^2}\right)$$
$$= l\sqrt{x^2+2px+q} + (m-lp)\log\left(x+p+\sqrt{x^2+2px+q}\right)$$

ヲ得ル.

例 4. $$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} \qquad (a>0)$$

$x = a\tan\theta$ (但シ θ ヲ x ノ一値函數ナラシムルタメニ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ トスル)

ト置ケバ
$$dx = a\sec^2\theta\,d\theta$$
$$\therefore \quad \mathrm{I} = \int \frac{a\sec^2\theta\,d\theta}{(a^2+a^2\tan^2\theta)^2} = \int\frac{a\sec^2\theta}{a^4\sec^4\theta}\,d\theta = \frac{1}{a^3}\int\cos^2\theta\,d\theta$$

此積分ハ前節, 例 2 ニ於テ求メテアル. 其結果ヲ用フレバ
$$\mathrm{I} = \frac{1}{2a^3}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right)$$
$$\therefore \quad \mathrm{I} = \frac{1}{2a^3}(\theta + \sin\theta\cos\theta)$$

而シテ $\tan\theta = \frac{x}{a}\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ デアルカラ
$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$$
$$\therefore \quad \mathrm{I} = \frac{1}{2a^3}\left(\tan^{-1}\frac{x}{a} + \frac{ax}{a^2+x^2}\right)$$

例 5. $$\mathrm{I} = \int \tan x\,dx$$

書キ換フレバ
$$\mathrm{I} = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$\cos x = t$ ト置ケバ兩邊ノ微分ヲ取ツテ
$$-\sin x\,dx = dt$$

故ニ dx ノ代リニ $-\frac{dt}{\sin x}$ 或ハ $\sin x\,dx$ ノ代リニ $-dt$ ト置キテ
$$\mathrm{I} = -\int\frac{dt}{t} = -\log t = -\log\cos x.$$

例 6. $$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{\sin x}$$

書キ換フレバ

$$\mathrm{I} = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx$$

被積分函數ノ分子, 分母ヲ $\cos^2\frac{x}{2}$ ニテ除シテ

$$\mathrm{I} = \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}\,dx$$

$\tan\frac{x}{2} = t$ ト置キ兩邊ノ微分ヲ取レバ

$$\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx = dt$$

$$\therefore \quad \mathrm{I} = \int \frac{dt}{t} = \log t = \log\tan\frac{x}{2}$$

此積分ハ又次ノ如クニシテ求メルコトモ出來ル.

被積分函數ノ分子ト分母トニ $\sin x$ ヲ乘ジテ

$$\mathrm{I} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx$$

$\cos x = t$ ト置ケバ $-\sin x\,dx = dt$

$$\therefore \quad \mathrm{I} = -\int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\log\frac{1+t}{1-t} \qquad \text{[第 33 節, 公式 14]}$$

$$= -\frac{1}{2}\log\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

注意 1. 吾人ハ計算ノ熟達スルニ從ツテ置換ヲ頭ノ中デ行ヒ特ニ新タナル變數ヲ紙上ニ用ヒナイコトモアル. 例ヘバ例 5 ノ解法ヲ

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\log\cos x$$

ト書キ, 又例 6 ノ第一解法ヲ

$$\int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}\,dx = \int \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}} = \log\tan\frac{x}{2}$$

ト書クガ如キデアル.

注意 2. 置換ヲ頭ノ中デ行ツテ

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \log f(x)$$

及ビ
$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = \int \frac{df(x)}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)}$$

ヲ得ル. 此二公式モ記憶シテ居レバ時ニ便利ナコトガアル.

問 題 14.

次ノ積分ノ値ヲ求ム (1—21).

1. $\int x\sqrt{x+a}\,dx$
2. $\int \frac{x^2}{x-a}\,dx$
3. $\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}\,dx$
4. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$
5. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^8+a^8}}\,dx$
6. $\int \frac{\sin x}{a+b\cos x}\,dx$
7. $\int \frac{\log x}{x}\,dx$
8. $\int \frac{1}{x\log x}\,dx$
9. $\int \sin x\cos^3 x\,dx$
10. $\int \tan^3 x\,dx$
11. $\int \frac{x+1}{1+x+x^2}\,dx$
12. $\int \frac{x-1}{1+x-x^2}\,dx$
13. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x(1+x)}}\,dx$
14. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}$
17. $\int \sec^4 x\,dx$
18. $\int (\sec x-\tan x)\,dx$
19. $\int \frac{1}{e^x+4e^{-x}+3}\,dx$
20. $\int \frac{dx}{3+\cos x}$
21. $\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$ $\left[x = \frac{1}{z}\text{ 又ハ } x = a\tan\theta \text{ ト置ケ}\right]$

36. 部分積分法

$f(x)$, $\phi(x)$ ヲ x ノ二ツノ函數トセバ

$$\left[f(x)\phi(x)\right]' = f'(x)\phi(x) + f(x)\phi'(x)$$

故ニ積分シテ

$$f(x)\phi(x)=\int f'(x)\phi(x)dx+\int f(x)\phi'(x)dx$$

移項シテ

$$\int f(x)\phi'(x)\,dx=f(x)\phi(x)-\int \phi(x)f'(x)\,dx \quad\cdots\cdots(1)$$

ヲ得ル. 或ハ

$$u=f(x),\qquad v=\phi(x)$$

ト置クナラバ

$$du=f'(x)dx,\qquad dv=\phi'(x)dx$$

トナル故 (1) 式ヲ次ノ如クニ書クコトモ出來ル.

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du \quad\cdots\cdots(1')$$

(1) 式ニ於テ $\phi(x)=x$ トセバデ $\phi'(x)=1$ アルカラ

$$\int f(x)dx=xf(x)-\int xf'(x)dx \quad\cdots\cdots(2)$$

或ハ $u=f(x)$ ト置イテ

$$\int u\,dx=xu-\int x\,du \quad\cdots\cdots(2')$$

ヲ得ル. 是等ノ公式ヲ用ヒテ積分スル方法ヲ**部分積分法**ト稱スル.

例 1. $\mathrm{I}=\int \log x\,dx$

$u=\log x$ ト置クナラバ $du=\frac{1}{x}dx$

故ニ公式 (2') ヲ適用シテ

$$\mathrm{I}=x\log x-\int x\frac{1}{x}dx$$

$$=x\log x-\int 1\,dx=x\log x-x$$

例 2. $\mathrm{I}=\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$

$u=\sqrt{x^2+a^2}$ ト置クナラバ $du=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$

故ニ公式 (2') ヲ適用シテ

$$\mathrm{I}=x\sqrt{x^2+a^2}-\int x\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\mathrm{I}_1 \quad\cdots\cdots(\mathrm{A})$$

茲ニ

$$\mathrm{I}_1=\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

(A) 式ハ二ツノ積分 I ト I_1 トノ間ノ一ツノ關係デアル. 故ニ I ト I_1 トノ間ノ關係ガモ一ツ別ニ求メラレルナラバソレト (A) 式トカラ I ト I_1 トヲ計算スルコトガ出來ル. 幸ニ I ト I_1 トニハ (A) 式以外ニ簡單ナ關係ガ一ツ見出サレルノデアル. I ヲ書キ換ヘルト

$$\mathrm{I}=\int\frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx+a^2\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

$$=\mathrm{I}_1+a^2\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) \quad\cdots\cdots(\mathrm{B})$$

コレガ即チ I ト I_1 トノ間ノ一ツノ關係デアル. (A) ト (B) トヨリ I_1 ヲ消去シテ I ヲ求ムレバ

$$\mathrm{I}=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right]$$

例 3. $\mathrm{I}=\int e^{-x}\sin x\,dx$

今

$$dv=\sin x\,dx$$

ト置イテ v ヲ定メルナラバ v ノ一ツノ値ハ $-\cos x$ トナル. 故ニ

$$u=e^{-x},\qquad v=-\cos x$$

ト置クナラバ I ハ $\int u\,dv$ ナル形ノ積分ニナル.

$$u=e^{-x}\quad ヨリ\quad du=-e^{-x}dx$$

ヲ得ルカラ公式 (1') ヲ用ヒテ

$$\mathrm{I}=e^{-x}(-\cos x)-\int(-\cos x)(-e^{-x}dx)$$

$$=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\cos x\,dx$$

故ニ

$$\mathrm{I}_1=\int e^{-x}\cos x\,dx$$

ト置クナラバ

$$\mathrm{I}=-e^{-x}\cos x-\mathrm{I}_1 \quad\cdots\cdots(\mathrm{A})$$

部分積分法ノ公式ヲ適用スル際ニ u, v ヲ頭ノ中ニ入レテ置イテ次ノ如クニ書イテモ宜シイ.

$$\mathrm{I} = \int e^{-x}\sin x\,dx = \int e^{-x}d(-\cos x)$$
$$= e^{-x}(-\cos x) - \int(-\cos x)d(e^{-x})$$
$$= -e^{-x}\cos x - \int \cos x\cdot e^{-x}dx$$

コレ卽チ (A) 式デアル.

前例ニ於ケルト同ジク (A) 式ハ二ツノ積分 I ト I_1 トノ間ノ一ツノ關係デアル. 故ニ I ト I_1 トノ間ノモ一ツノ他ノ關係ガ得ラレルナラバソレト (A) 式トカラ I_1 ヲ消去シテ I ヲ求メルコトガ出來ル. ソノモ一ツノ關係ハ次ノ如クニシテ得ラレル.

$$u = \sin x,\quad dv = e^{-x}dx \quad 卽チ \quad v = -e^{-x}$$

ト置クナラバ I ハヤハリ $\int u\,dv$ ナル形ノ積分ニナル. 故ニ此樣ニ u, v ヲ取ツテ公式 (1′) ヲ適用シテ見ル.

$$\mathrm{I} = \sin x(-e^{-x}) - \int(-e^{-x})d(\sin x)$$
$$= -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x\,dx$$
$$= -e^{-x}\sin x + \mathrm{I}_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{B})$$

コレガ卽チモ一ツノ關係デアル. 此 (B) 式ハ I_1 カラ出發シテ次ノ如クニスルモ得ラレル.

$$\mathrm{I}_1 = \int e^{-x}\cos x\,dx = \int e^{-x}d(\sin x)$$
$$= e^{-x}\sin x - \int \sin x\,d(e^{-x}) = e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\sin x\,dx$$
$$= e^{-x}\sin x + \mathrm{I}.$$

斯クテ (B) 式ヲ得タナラバ (A) ト (B) トヨリ I_1 ヲ消去シテ

$$\mathrm{I} = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x).$$

例 4. $\int e^{kx}x^n dx$ (n, 正整數, $k \neq 0$)

コノ積分ハ $\frac{1}{k}\int x^n d(e^{kx})$ ト書キ得ルガ故ニ部分積分法ニヨリ

$$\int e^{kx}x^n dx = \frac{1}{k}\left[x^n e^{kx} - \int e^{kx}d(x^n)\right] = \frac{1}{k}\left[e^{kx}x^n - n\int e^{kx}x^{n-1}dx\right]$$

右邊ニアル積分ハ左邊ノ積分ニ於テ n ノ代リニ $n-1$ ト置イタモノデアル. 故ニ左邊ノ積分ヲ I_n 卽チ

$$\mathrm{I}_n = \int e^{kx}x^n dx$$

ニテ表スナラバ

$$\mathbf{I}_n = \frac{1}{k}\left[e^{kx}x^n - n\,\mathbf{I}_{n-1}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{A})$$

ナル公式ガ得ラレル. 此公式ニヨリ I_{n-1} ガ分レバ I_n ガ求メラレルコトニナル.

然ルニ

$$\mathrm{I}_0 = \int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx}$$

デアルカラ (A) ノ公式ニヨリ結局 $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \ldots\ldots$ ガ順次ニ計算セラレルコトニナル.

卽チ

$$\mathrm{I}_1 = \frac{1}{k}\left[e^{kx}x - \mathrm{I}_0\right] = \frac{e^{kx}}{k}\left(x - \frac{1}{k}\right)$$
$$\mathrm{I}_2 = \frac{1}{k}\left[e^{kx}x^2 - 2\mathrm{I}_1\right] = \frac{e^{kx}}{k}\left(x^2 - \frac{2x}{k} + \frac{2}{k^2}\right)$$

……………………………………

公式 (A) ヲ積分 $\int e^{kx}x^n dx$ ニ對スル**漸化式**ト云フ.

例 5. $\mathrm{I}_n = \int \cos^n x\,dx$ (n, 正整數)

$$\mathrm{I}_n = \int \cos^{n-1}x(\cos x\,dx) = \int \cos^{n-1}x\,d(\sin x)$$

デアルカラ部分積分法ニヨリ

$$\mathrm{I}_n = \cos^{n-1}x\sin x - \int \sin x\,d(\cos^{n-1}x)$$
$$= \sin x\cos^{n-1}x - \int \sin x\left\{(n-1)\cos^{n-2}x(-\sin x)dx\right\}$$
$$= \sin x\cos^{n-1}x + (n-1)\int \cos^{n-2}x\sin^2 x\,dx$$
$$= \sin x\cos^{n-1}x + (n-1)\int \cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)dx$$
$$= \sin x\cos^{n-1}x + (n-1)\left(\mathrm{I}_{n-2} - \mathrm{I}_n\right)$$

コレヨリ I_n ヲ I_{n-2} ニテ表セバ

$$\mathbf{I}_n = \frac{1}{n}\left[\sin x\cos^{n-1}x + (n-1)\,\mathbf{I}_{n-2}\right]$$

コレガ I_n ノ漸化式デアル．此公式ニヨリ I_n ヲ求ムル問題ハ I_0 及ビ I_1 ヲ求ムル問題ニ歸著スル．

$$I_0 = \int dx = x, \qquad I_1 = \int \cos x\,dx = \sin x$$

デアルカラ I_n ガ順次計算セラレルコトニナル．

注意． 例 5 ニ於ケル積分ハ n ガ奇數ナルトキハ

$$\sin x = t$$

ナル置換ニヨツテ容易ニ求メルコトガ出來ル．即チ $n = 2r+1$ トセバ

$$\int \cos^n x\,dx = \int \cos^{2r} x\,d(\sin x)$$

ナル故上ノ置換ニヨリ

$$= \int (1-t^2)^r\,dt$$

トナリ $(1-t^2)^r$ ヲ二項定理ニヨリ展開シ項項積分スレバ宜シイ．例ヘバ

$$\int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x\,d(\sin x) = \int (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$$

$$= \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)\,d(\sin x) = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5}$$

問 題 15.

次ノ積分ノ値ヲ求ム (1—9).

1. $\int x^m \log x\,dx$　　2. $\int \tan^{-1} x\,dx$

3. $\int \sin^{-1} x\,dx$　　4. $\int x\tan^{-1} x\,dx$

5. $\int x\cos x\,dx,\quad \int x\sin x\,dx$　　6. $\int x\sec^2 x\,dx$

7. $\int e^{kx} x^3\,dx$　　8. $\int e^{kx} x^4\,dx$

9. $\int e^{ax}\cos bx\,dx,\quad \int e^{ax}\sin bx\,dx$

10. $\int \sin^n x\,dx$ ノ漸化式ヲ求メ之ヲ用ヒテ $\int \sin^4 x\,dx$ ヲ計算セヨ．

11. $\int x^n \sin x\,dx,\quad \int x^n \cos x\,dx$ ノ漸化式ヲ出シソレヲ用ヒテ $\int x^3 \sin x\,dx,$ $\int x^3 \cos x\,dx$ ヲ計算セヨ．

12. $\int (\log x)^n\,dx = x(\log x)^n - n\int (\log x)^{n-1} dx$ ヲ證明シ之ヲ用ヒテ $\int (\log x)^4\,dx$ ヲ計算セヨ．

13. $\int \tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\,dx$ ヲ證明シ之ヲ用ヒテ $\int \tan^5 x\,dx$ 及ビ $\int \tan^6 x\,dx$ ヲ計算セヨ．

14. $\int (\sin^{-1}x)^n dx = x(\sin^{-1}x)^n + n\sqrt{1-x^2}(\sin^{-1}x)^{n-1} - n(n-1)\int (\sin^{-1}x)^{n-2} dx$ ヲ證明シ之ヲ用ヒテ $\int (\sin^{-1}x)^2 dx$ 及ビ $\int (\sin^{-1}x)^3 dx$ ヲ計算セヨ．

15. $\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}dx = \frac{\sin^{m-1} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \frac{m-1}{n-1}\int \frac{\sin^{m-2} x}{\cos^{n-2} x}dx$ ヲ證明シ之ヲ用ヒテ $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx$ ヲ計算セヨ．

16. $\int \sin^m x\cos^n x\,dx = \frac{1}{m+n}\left\{\sin^{m+1} x\cos^{n-1} x + (n-1)\int \sin^m x\cos^{n-2} x\,dx\right\}$ ヲ證明セヨ．

17. $f'(x) = x^3 e^{-x^2}$ ニシテ $f(0) = 2$ ナルトキ $f(x)$ ヲ求ム．

18. $f'(x) = x^4 \tan^{-1} x$ ニシテ $f(1) = 0$ ナルトキ $f(x)$ ヲ求ム．

第　七　章

有理函數及ビ無理函數ノ積分, 微分方程式

37. 有理函數ノ積分

x ノ整式ノ一般ナル形ハ

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_n x^n$$

デアル. 茲ニ a_0, a_1, a_2, ……, a_n ハ常數デアル. コノ整式ヲ x **ノ有理整函數**ト稱スル. x ノ整式或ハ有理整函數ト云ヘバ通例 x ノ一次以上ノ式ヲ指スノデアルガ時ニハ常數ヲモ整式ノ中ニ入レルコトガアル. ソノ方ガ便利ノ點ガ多イノデアル. 以下吾人モ此規約ニ從フコトニスル.

$f(x)$, $\phi(x)$ ヲ x ノ整式トスルトキ $\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$ ナル形ノ函數卽チ x ノ分數式ヲ x ノ**有理函數**ト稱スル. $\phi(x)=1$ ナル場合ニハ此式ハ x ノ整式トナル. 故ニ有理函數ハ特別ノ場合トシテ整式ヲ其中ニ含ムノデアル.

x ノ有理函數ヲ積分スル一般ノ方法ヲ述ブルノガ本節ノ目的デアル.[1]

(1) 以下ノ議論ニ於テハ $f(x)$, $\phi(x)$ ノ係數ハ總テ實數デアリ且ツ $f(x)$, $\phi(x)$ ハ共通ノ因數ヲ有セザルモノト假定スル.

分數式 $\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$ ニ於テ分子ノ次數ガ分母ノ次數ヨリ大カ又ハ等シイ場合ニハ分子ヲ分母ニテ割リ商ヲ $Q(x)$, 剩餘ヲ $R(x)$ トスレバ

$$\frac{f(x)}{\phi(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{\phi(x)}$$

整式 $Q(x)$ ノ積分ハ容易ニ計算セラレル. $\dfrac{R(x)}{\phi(x)}$ ハ分子ノ次數ガ分母ノ次數ヨリ小ナル分數式卽チ眞分數式デアル. ヨツテ有理函數ノ積分ハ眞分數式ノ積分ニ誘導セラレルコトガ分ル. 故ニ以下吾人ハ最初ニ與ヘラレタル分數式ガ眞分數式デアルモノト假定スル.

偖テ x ノ整式 $\phi(x)$ ガ互ニ素ナル因數 $\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \ldots\ldots$ ニ分解セラレルトキハ眞分數式 $\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$ ハ $\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \ldots\ldots$ ヲ分母トスル眞分數式ノ和トシテ表シ得ルコトガ代數學デ證明セラレル.[1] 卽チ

$$\frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{f_1(x)}{\phi_1(x)} + \frac{f_2(x)}{\phi_2(x)} + \frac{f_3(x)}{\phi_3(x)} + \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

今 $\phi(x)$ ヲ因數ニ分解シテ $\phi_1(x), \phi_2(x)$ 等ガ二ツノ素ナル因數ニ最早ヤ分解出來ナイ所マデ行ツタモノトスレバ $\phi_1(x), \phi_2(x)$ 等ハ $(x-a)^k$ 又ハ $\left\{(x-\alpha)^2+\beta^2\right\}^m$ ナル形ノ式デナケレバナラヌ.[2] 從ツテ $\dfrac{f_r(x)}{\phi_r(x)}$ ハ $\dfrac{f_r(x)}{(x-a)^k}$ 又ハ $\dfrac{f_r(x)}{\left\{(x-\alpha)^2+\beta^2\right\}^m}$ ナル形ノ分數

(1) 證明ハ省略スル.

(2) $\phi(x)$ ハ $(x-a)^k$ ナル形ノ因數若干個ト $\left\{(x-\alpha)^2+\beta^2\right\}^m$ ナル形ノ因數若干個トノ積トシテ表サレルコトモ代數學ノ定理デアル. 茲ニ a, α, β 等ハ實數デアル.

式トナリ，眞分數式 $\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$ ノ積分ハ斯クノ如キ特別ナル形ノ眞分數式ノ積分ニ誘導セラレルノデアル.

(1) 式ニ於ケル $\dfrac{f_1(x)}{\phi_1(x)}, \dfrac{f_2(x)}{\phi_2(x)}, \dots\dots$ ヲ分數式 $\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$ ノ**部分分數**ト稱シ $\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$ ヲ斯クノ如キ部分分數ノ和トシテ表スコトヲ**部分分數ニ分解スル**ト云フ.

$(x-\alpha)^k$ 又ハ $\left\{(x-\alpha)^2+\beta^2\right\}^m$ ヲ分母トスル眞分數式ノ積分ノ計算法ハ次節ニ讓ルコトトシ部分分數分解法ニヨル有理函數積分ノ簡單ナル例一二ヲ下ニ示ス.

例 1.　$$I=\int\frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$$

被積分函數ノ分子ト分母トハ x ニツキ同ジ次數デアル. 故ニ先ヅ分子ヲ分母ニテ割ル. 商ハ 1 ナルコト明カデアルカラ

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}=1+\frac{f(x)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$f(x)$ ハ x ノ二次以下ノ整式デアル. ヨツテコレヲ部分分數ニ分解スレバ

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}=1+\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$$

トナル. 玆ニ A, B, C ハ x ニツキ零次ノ式卽チ常數デアル. 上式ノ分母ヲ拂ツテ

$$x^3=(x-1)(x-2)(x-3)+A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)$$

此恒等式ニ於テ $x=1$ ト置ケバ

$$1=2A \qquad \therefore \quad A=\frac{1}{2}$$

$x=2$ ト置ケバ

$$8=-B \qquad \therefore \quad B=-8$$

$x=3$ ト置ケバ

$$27=2C \qquad \therefore \quad C=\frac{27}{2}$$

是等ノ値ヲ上式ニ代入シテ

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{8}{x-2}+\frac{27}{2}\cdot\frac{1}{x-3}$$

ヨツテ之ヲ積分シテ

$$I=x+\frac{1}{2}\log(x-1)-8\log(x-2)+\frac{27}{2}\log(x-3)$$

ヲ得ル.

例 2.　$$I=\int\frac{1}{x^3+1}dx$$

$\dfrac{1}{x^3+1}$ ヲ部分分數ニ分ツト

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Lx+M}{x^2-x+1}$$

トナル. 玆ニ A, L, M ハ常數デアル. 此恒等式ノ分母ヲ拂ヘバ

$$1=A(x^2-x+1)+(Lx+M)(x+1)$$

此恒等式ニ於テ $x=-1$ トオケバ

$$1=3A \qquad \therefore \quad A=\frac{1}{3}$$

此 A ノ値ヲ上式ニ代入シ，右邊ノ初項ヲ左邊ニ移セバ

$$1-\frac{1}{3}(x^2-x+1)=(Lx+M)(x+1)$$

左邊ハ $\dfrac{1}{3}(2-x)(1+x)$ ニ等シイ. 故ニ此式ノ兩邊ヲ $(x+1)$ ニテ除シテ

$$\frac{1}{3}(2-x)=Lx+M.$$

從ツテ　$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{2-x}{3(x^2-x+1)}$$

ヨツテ　$$I=\int\frac{1}{3(x+1)}dx+\int\frac{2-x}{3(x^2-x+1)}dx=\frac{1}{3}\log(x+1)+\frac{1}{3}I_1$$

玆ニ　$$I_1=\int\frac{2-x}{x^2-x+1}dx=\int\frac{2-x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$

$x-\dfrac{1}{2}=t$ ト置キテ

$$=\int\frac{\frac{3}{2}-t}{t^2+\frac{3}{4}}dt=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}-\int\frac{t\,dt}{t^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2t}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\log\left(t^2+\frac{3}{4}\right)$$

x ニ戻シテ

$$=\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\log(x^2-x+1)$$

故ニ
$$\mathrm{I}=\frac{1}{3}\log(x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)$$

38. 有理函數ノ積分, 續キ

前節ニヨリ有理函數ノ積分ハ

$$\frac{f(x)}{(x-a)^k}\quad 又ハ \quad \frac{f(x)}{\left\{(x-\alpha)^2+\beta^2\right\}^m}$$

ナル形ノ眞分數式ノ積分ニ誘導セラレルコトヲ見タ.

$\dfrac{f(x)}{(x-a)^k}$ ノ積分ハ容易デアル. $f(x)$ ヲ $x-a$ ノ羃ニ展開シタモノヲ

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots\cdots$$

トスレバ

$$\frac{f(x)}{(x-a)^k}=\frac{a_0}{(x-a)^k}+\frac{a_1}{(x-a)^{k-1}}+\cdots\cdots$$

此右邊ハ項項積分スルコトガ出來ル.

次ニ $\dfrac{f(x)}{\left\{(x-\alpha)^2+\beta^2\right\}^m}$ ノ積分ヲ求ムルニハ $x-\alpha=t$ ト置ク.

$$\int\frac{f(x)}{\left\{(x-\alpha)^2+\beta^2\right\}^m}dx=\int\frac{f(t+\alpha)}{(t^2+\beta^2)^m}dt$$

$f(t+\alpha)$ ヲ $t^2+\beta^2$ ニテ割リ商ヲ $\mathrm{Q}(t)$, 剩餘ヲ $\mathrm{L}t+\mathrm{M}$ トスレバ

$$\frac{f(t+\alpha)}{(t^2+\beta^2)^m}=\frac{\mathrm{Q}(t)}{(t^2+\beta^2)^{m-1}}+\frac{\mathrm{L}t+\mathrm{M}}{(t^2+\beta^2)^m}$$

$\dfrac{\mathrm{Q}(t)}{(t^2+\beta^2)^{m-1}}$ ニ同樣ノ事ヲ行ヒ順次此方法ヲ繰リ返セバ

$$\frac{f(t+\alpha)}{(t^2+\beta^2)^m}=\frac{\mathrm{L}t+\mathrm{M}}{(t^2+\beta^2)^m}+\frac{\mathrm{L}'t+\mathrm{M}'}{(t^2+\beta^2)^{m-1}}+\cdots\cdots$$

故ニ $\dfrac{f(x)}{\left\{(x-\alpha)^2+\beta^2\right\}^m}$ ノ積分ハ $\dfrac{\mathrm{L}t+\mathrm{M}}{(t^2+\beta^2)^m}$ ナル形ノ分數式ノ積分ニ導カレル. 然ルニ

$$\int\frac{\mathrm{L}t+\mathrm{M}}{(t^2+\beta^2)^m}dt=\mathrm{L}\int\frac{t\,dt}{(t^2+\beta^2)^m}+\mathrm{M}\int\frac{1}{(t^2+\beta^2)^m}dt$$

デアッテ右邊ノ第一ノ積分ハ直ニ求メラレ, 又第二ノ積分ハ $t=\beta\tan\theta$ ト置クトキ

$$\int\frac{1}{(t^2+\beta^2)^m}dt=\int\frac{\beta\sec^2\theta\,d\theta}{(\beta^2\tan^2\theta+\beta^2)^m}=\frac{1}{\beta^{2m-1}}\int\cos^{2m-2}\theta\,d\theta$$

トナル故第 36 節, 例 5 ノ漸化式ヲ用ヒテ計算セラレル.

斯クテ有理函數ノ積分ハ理論上常ニ部分分數分解ニヨツテ求メラレルコトヲ知ルノデアル.

注意. 吾人ハ前節及ビ本節ニ於テ有理函數積分ノ一般ナル方法ヲ述ベタ. 此方法ニ從ヘバ如何ナル有理函數モ積分シ得ルガ計算ハ往往面倒ニナルコトヲ免レナイ. 但シ或特殊ナ有理函數ニ於テハ適當ナル方法ヲ講ズルコトニヨリ容易ニ積分シ得ルコトモアル. 以下ニ之ヲ例示スル.

例. $\qquad \mathrm{I}=\displaystyle\int\frac{dx}{x(1+x^2)^2}$

$x=\dfrac{1}{t}$ ト置ケバ

$$\log x=-\log t$$

此兩邊ノ微分ヲ取ツテ

$$\frac{dx}{x}=-\frac{dt}{t}\ {}^{(1)}$$

$$\therefore\quad \mathrm{I}=-\int\frac{dt}{\frac{1}{t}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2}=-\int\frac{t^3dt}{(1+t^2)^2}=-\int\frac{t^2.t\,dt}{(1+t^2)^2}$$

ヨツテ又 $1+t^2=z$ ト置ケバ $2t\,dt=dz$ 卽チ $t\,dt=\dfrac{dz}{2}$ トナリ

(1) $x=t^m$ ト置クナラバ對數微分ニヨツテ $\dfrac{dx}{x}=m\dfrac{dt}{t}$ トナル. コレモ時時用ヒラレル置換デアル.

$$\mathrm{I} = -\int \frac{(z-1)\frac{1}{2}dz}{z^2} = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right)dz = -\frac{1}{2}\left(\log z + \frac{1}{z}\right)$$

ヲ得ル. z ヲ元ノ x =戻シテ

$$\mathrm{I} = -\frac{1}{2}\left\{\log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}\right\} = \frac{1}{2}\left(\log\frac{x^2}{1+x^2} - \frac{x^2}{1+x^2}\right)$$

又ハ原式=於テ $x = \tan\theta$ ト置ケバ

$$dx = \sec^2\theta\, d\theta$$

ナル故

$$\mathrm{I} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\tan\theta \sec^4\theta} = \int \frac{\cos^3\theta}{\sin\theta} d\theta$$

$$= \int \frac{1 - \sin^2\theta}{\sin\theta} d(\sin\theta) = \log\sin\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta$$

$$= \log\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1+x^2}$$

問題 16.

次ノ積分ノ値ヲ求ム (1—14).

1. $\int \frac{x^2-1}{x^2-4}dx$
2. $\int \frac{x-1}{(x-3)(x+2)}dx$
3. $\int \frac{dx}{x(1-x^2)}$
4. $\int \frac{dx}{x^4-1}$
5. $\int \frac{x}{x^4-1}dx$
6. $\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}dx$
7. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$
8. $\int \frac{x^2}{x^4+x^2-2}dx$
9. $\int \frac{dx}{1-x^3}$
10. $\int \frac{dx}{x^2(x+1)}$
11. $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)^2}dx$
12. $\int \frac{dx}{x^2(1-x)^2}$
13. $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+5)^2}dx$
14. $\int \frac{1}{(1+x^2)^3}dx$

39. 無理函數ノ積分

常數ト變數 x ト=加減乘除ノ算法ヲ施シテ得ル結果ハ常= x

ノ有理函數ヲ生ズル. 加減乘除ノ外=開方ヲモ入レルトキハ最早ヤ其結果ハ必ズシモ x ノ有理函數デハナイ. 例ヘバ

$$x + \sqrt{x}, \quad \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad \sqrt[n]{a + bx + cx^2}$$

ノ如キ, 有理函數以外ノ函數ヲ生ズル. 是等ノ函數ヲ**無理函數**ト稱スルノデアル.

無理函數ノ積分ハ吾人ノ今マデ=知ツテ居ル函數 (有理函數, 無理函數, 三角函數, 逆三角函數, 指數函數, 對數函數) ヲ以テ必ズシモ表スコトヲ得ナイノデアル. 以下極メテ簡單ナル無理函數=ツイテ其積分法ヲ述ベル.

先ヅ $f(x, y)$ ヲ以テ x, y 及ビ常數=加減乘除ノ算法ヲ施シテ得ル式即チ x, y ノ分數式ヲ表スモノトスル.[1]

(i) $\mathrm{I} = \int f(x, \sqrt[n]{a + bx})\,dx$ ノ積分法.

$$\sqrt[n]{a + bx} = t \quad 即チ \quad x = \frac{1}{b}(t^n - a)$$

ト置クナラバ
$$dx = \frac{n}{b}t^{n-1}dt$$

$$\therefore \quad \mathrm{I} = \int f\left\{\frac{1}{b}(t^n - a),\ t\right\}\frac{n}{b}t^{n-1}dt$$

トナル. コレハ有理函數ノ積分デアル. 故=前節ノ方法=ヨッテ之ヲ求ムルコトガ出來ル.

例
$$\mathrm{I} = \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}dx$$

此積分ハ上形ノ積分デアル. 故=

[1] $f(x, y)$ ハ二ツノ變數 x, y ノ函數ヲ表ス記號デアル. 二ツノ變數ノ函數=ツイテハ後章=説明スル. 玆デハ $f(x, y)$ ハ x, y ノ分數式ヲ表スモノト思ヘバ宜シイ.

$\sqrt{1-x}=t$ 卽チ $x=1-t^2$

ト置クナラバ $dx=-2t\,dt$

$$\therefore\quad \mathrm{I}=\int\frac{-2t\,dt}{(1+1-t^2)t}=-2\int\frac{dt}{2-t^2}$$

$$=-\frac{2}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-x}}$$

(ii) $\mathrm{I}=\int f(x,\ \sqrt{a+bx+cx^2})\,dx$ ノ積分法.

先ヅ $c>0$ ナル場合ヲ考ヘル. コノトキハ

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=t-\sqrt{c}\,x \text{[1]} \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

ト置ケバ兩邊ヲ自乘シテ

$$a+bx+cx^2=t^2-2\sqrt{c}\,tx+cx^2$$

$$\therefore\quad a+bx=t^2-2\sqrt{c}\,tx$$

之ヨリ x ヲ求ムレバ

$$x=\frac{t^2-a}{b+2\sqrt{c}\,t}\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

卽チ x ハ t ノ有理函數トナル. 之ヲ $\phi(t)$ ト名ヅクルナラバ $\phi'(t)$ モ亦 t ノ有理函數デアル. 尙 (2) 式ノ x ノ値ヲ (1) 式ノ右邊ニ入ルレバ

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=t-\sqrt{c}\,\frac{t^2-a}{b+2\sqrt{c}\,t}$$

トナツテヤハリ t ノ有理函數トナル.

$$\therefore\quad \mathrm{I}=\int f\left(\frac{t^2-a}{b+2\sqrt{c}\,t},\ t-\sqrt{c}\,\frac{t^2-a}{b+2\sqrt{c}\,t}\right)\phi'(t)\,dt$$

トナツテコレ亦有理函數ノ積分ニ導カレル.

(1) $\sqrt{a+bx+cx^2}=t+\sqrt{c}\,x$ ト置クモ同ジ事ニナル.

次ニ $c<0$ ナル場合ヲ考ヘル. コノトキハ方程式

$$a+bx+cx^2=0$$

ハ二ツノ實根ヲ持ツコトニナル. 若シ此方程式ノ二根ガ虛[1]デアルナラバ二次式 $a+bx+cx^2$ ハ x ノ總テノ實數値ニ對シテ一定ノ符號ヲ持ツベク其符號ハ x^2 ノ係數 c ノ符號ト同ジデアラネバナラヌ. 假定ニヨリ $c<0$ デアルカラ上ノ二次式ハ x ノ總テノ實數値ニ對シテ負トナリ $\sqrt{a+bx+cx^2}$ ハ x ノ如何ナル範圍ニ於テモ實函數トナラヌ. 斯クノ如キ場合ハ吾人ハ考ヘナイノデアル.

故ニ $c<0$ ナル場合ニハ上ノ二次方程式ハ二ツノ實根 (相異ナル) ヲ有スルモノト看做シテ宜シイ. ソノ二ツノ根ヲ $\alpha, \beta\,(\alpha<\beta)$ トスル. 然ルトキハ $\alpha\leqq x\leqq\beta$ ナル x ニ對シテ $\sqrt{a+bx+cx^2}$ ハ實デアツテ

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=\sqrt{c(x-\alpha)(x-\beta)}$$

$$=\sqrt{-c}\,\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}\quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

ト書キ換ヘルコトガ出來ル.

今
$$\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}=t \text{[2]} \quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

ト置クナラバ
$$\frac{x-\alpha}{\beta-x}=t^2$$

之ヨリ x ヲ求ムレバ

(1) 二根ガ相等シキ場合ハ有理函數ノ積分トナル故玆ニハ考ヘナイ.

(2) $\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}=t$ ト置クモ宜シイ.

$$x = \frac{\alpha + \beta t^2}{1 + t^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

x ハ t ノ有理函數トナル．之ヲ $\phi(t)$ トスルナラバ $\phi'(t)$ モ亦 t ノ有理函數デアル．尙 (3) ト (4) トヨリ

$$\sqrt{a + bx + cx^2} = \sqrt{-c}\, t(\beta - x)$$

右邊ノ x ＝ (5) 式ヲ代入シテ

$$= \sqrt{-c}\, t\left\{\beta - \frac{\alpha + \beta t^2}{1 + t^2}\right\}$$

ヨツテコレモ t ノ有理函數トナル．

$$\therefore \quad \mathrm{I} = \int f\left\{\frac{\alpha + \beta t^2}{1 + t^2},\ \sqrt{-c}\, t\left(\beta - \frac{\alpha + \beta t^2}{1 + t^2}\right)\right\}\phi'(t)\,dt$$

トナリ同ジク有理函數ノ積分ニ導カレルノデアル．

例 1.　$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \mathrm{A}}}$

平方根ノ中ノ x^2 ノ係數ハ正ナル故

$$\sqrt{x^2 + \mathrm{A}} = t - x \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ト置ク．然ルトキハ

$$x^2 + \mathrm{A} = t^2 - 2tx + x^2 \qquad \therefore \quad \mathrm{A} = t^2 - 2tx$$

之ヨリ　$x = \frac{t^2 - \mathrm{A}}{2t} = \frac{1}{2}\left(t - \frac{\mathrm{A}}{t}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

之ヲ (1) 式ニ代入シテ

$$\sqrt{x^2 + \mathrm{A}} = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\mathrm{A}}{t}\right)$$

又 (2) 式ヨリ　$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mathrm{A}}{t^2}\right)$

$$\therefore \quad \mathrm{I} = \int \frac{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mathrm{A}}{t^2}\right)dt}{\frac{1}{2}\left(t + \frac{\mathrm{A}}{t}\right)} = \int \frac{dt}{t} = \log t$$

然ルニ (1) 式ヨリ　$t = x + \sqrt{x^2 + \mathrm{A}}$

$$\therefore \qquad \mathrm{I} = \log(x + \sqrt{x^2 + \mathrm{A}})$$

コレハ第 33 節，11° ノ公式デアル．

例 2.　$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}}$

平方根ノ中ノ x^2 ノ係數ハ負ナル故

$$\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} = t \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ト置ク．然ルトキハ

$$\frac{1 + x}{1 - x} = t^2$$

x ニツキ解ケバ

$$x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = 1 - \frac{2}{t^2 + 1} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{(1 + x)(1 - x)}$$

(1) 式ヲ用ヒテ　$= (1 - x)t$

(2) 式ノ値ヲ代入シテ　$= \frac{2t}{t^2 + 1}$

又 (2) 式ヨリ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4t}{(t^2 + 1)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{4t}{(t^2 + 1)^2}\,dt \Big/ \frac{2t}{t^2 + 1} = \frac{2}{t^2 + 1}\,dt$$

$$\therefore \quad \mathrm{I} = \int \frac{1}{1 - \frac{2}{t^2 + 1}} \cdot \frac{2}{t^2 + 1}\,dt = 2\int \frac{dt}{t^2 - 1}$$

$$= \log \frac{t - 1}{t + 1} = \log \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}$$

以上ニ於テハ積分 $\int f(x,\ \sqrt{a + bx + cx^2})\,dx$ ノ一般解法ヲ述ベタノデアル．此方法ニ從ヘバ上ノ積分ハ必ラズ求メラレルケレドモ多クノ場合ニ面倒ナル計算ヲ伴フノデアツテ實用上ノ方法トシテハ餘リ好マシクナイノデアル．例ヘバ他ノ方法ニヨツテ簡單ニ求メラレル積分 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ ノ如キモ此方法ヲ用フルト非常ニ面倒ナ計算ニ出會フノデ

アル．故ニ出來ルコトナラバ他ノ方法ニヨツテ積分スル樣工夫スルガ宜シイ．下ニ之ヲ例示スル．

例 3.　　$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}}$

コレハ上ノ例 (2) ノ積分デアル．今

$$x = \frac{1}{t}$$

ト置クナラバ對數微分ニヨツテ　$\frac{dx}{x} = -\frac{dt}{t}$

又　$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{t^2}} = \frac{\sqrt{a^2t^2 - 1}}{t}$ (1)

$$\therefore \quad \mathrm{I} = -\int \frac{dt}{t}\frac{t}{\sqrt{a^2t^2 - 1}}$$

$$= -\int \frac{1}{\sqrt{a^2t^4 - 1}}dt = -\frac{1}{a}\log\left(at + \sqrt{a^2t^2 - 1}\right)$$

$$= -\frac{1}{a}\log\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right)$$

注意． 吾人ノ今マデニ知ツタ函數卽チ有理函數，無理函數，三角函數，逆三角函數，指數函數，對數函數ヲ總稱シテ**初等函數**(2)ト云フ．

吾人ハ本節ニ於テ二種ノ特別ナル無理函數ノ積分ガ初等函數ニヨツテ表サレルコトヲ見タ．併シナガラ無理函數ノ積分ハ初等函數ノ範圍内ニ於テハ求メラレナイノガ普通デアツテ求メラレルノガ寧ロ例外ト云ツテモ宜シイ位ナノデアル．例ヘバ被積分函數ガ x ノ一般ナル三次以上ノ式ノ平方根ヲ含ム場合ニハ最早ヤ初等函數ノ範圍内ニ於テ積分スルコトガ出來ナイ．換言スレバ斯クノ如キ函數ノ積分ハ有限個ノ初等函數ノ函數記號 ($\sqrt[3]{\ }$, sin, log 等) ヲ以テシテハ表スコトヲ得ナイノデアル．

---

(1) コレハ $x > 0$ 卽チ $t > 0$ ナルコトヲ假定セル結論デアル．$x < 0$ 卽チ $t < 0$ ナル場合ニハ此式ノ符號ヲ變ゼネバナラヌ．併シナガラ同ジ結果ニ到達スルコトヲ見ルコトガ容易デアラウ．

(2) 特ニ三角函數，逆三角函數，指數函數，對數函數ヲ**初等超越函數**ト云フ．

問題 17.

次ノ積分ノ値ヲ求ム (1—12, 14—16, 18—19, 21—22).

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1}}dx$　　2. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

3. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x-1}}$　　4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ [被積分函數ハ $\sqrt[6]{x}$ ノ有理函數デアル．故ニ $\sqrt[6]{x} = t$ ト置ケ]

5. $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}dx$

6. $\int x^3\sqrt{a + bx^2}\,dx$　　7. $\int \frac{dx}{(2+3x)\sqrt{4-x^2}}$ [$\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = t$ ト置ケ]

8. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$　　9. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ [$x = \frac{1}{t}$ 又ハ $x = \sin\theta$ ト置ケ]

10. $\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx$　　11. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}$ [$x = \frac{1}{t}$ 又ハ $x = a\tan\theta$ ト置ケ]

12. $\int \frac{x^4}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$

13. $f(x)$ ヲ x ノ整式又ハ分數式トスルトキ積分 $\int f(e^{kx})dx$ ハ $e^{kx} = t$ ト置クコトニヨリ有理函數ノ積分ニ誘導セラレルコトヲ示セ．

14. $\int \frac{1}{(e^x + e^{-x})^2}dx$　　15. $\int \frac{1}{(e^x + e^{-x})^4}dx$　　16. $\int \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1 + e^x}dx$

17. $f(x)$ ヲ x ノ整式又ハ分數式トスルトキ積分 $\int f(\tan x)dx$ ハ $\tan x = t$ ト置クコトニヨリ有理函數ノ積分ニ誘導セラレルコトヲ示セ．

18. $\int \frac{1}{2 - \tan^2 x}dx$　　19. $\int \frac{1}{a + b\tan x}dx$

20. $f(x, y)$ ヲ x, y ノ有理式トスルトキ積分 $\int f(\sin x,\ \cos x)dx$ ハ $\tan\frac{x}{2} = t$ ト置クコトニヨリ有理函數ノ積分ニ誘導セラレルコトヲ示セ．

21. $\int \frac{dx}{a^2 + \cos x}$ $(a^2 \neq 1)$　　22. $\int \frac{dx}{\cos x(5 + 3\cos x)}$

40. 微分方程式

自變數, 函數及ビ其導函數ノ間ノ關係ヲ表セル等式ヲ**微分方程式**ト稱スル. 例ヘバ

$$\frac{dy}{dx}+x^2=1 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2}+y=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ノ如キハ微分方程式デアル.

(1) ノ如ク第一次導函數ヲ含ミ, 第二次以上ノ導函數ヲ含マナイ微分方程式ヲ**第一階微分方程式**, (2) ノ如ク第二次導函數ヲ含ミ, 第三次以上ノ導函數ヲ含マナイ微分方程式ヲ**第二階微分方程式**ト稱スル. 以下 x ガ自變數, y ガ其函數デアル微分方程式ヲ考フル.

今 A $=0$ ナル微分方程式ト B $=0$ ナル x, y 間ノ關係式トガアツテ B $=0$ ヨリ得ル $y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots$ ニ對シテ A $=0$ ナル關係ガ成立スル場合ニハ方程式 B $=0$ (又ハ之ヨリ得ル函數 y) ハ**微分方程式 A $=0$ ノ解**デアルト云フ.

例ヘバ $y=x-\dfrac{x^3}{3}$ ハ微分方程式 (1) ノ一ツノ解デアリ $y=\sin x$ ハ微分方程式 (2) ノ一ツノ解デアル.

微分方程式ノ總テノ解ヲ求メルコトヲ**微分方程式ヲ解ク**ト云フ.

第一階微分方程式ハ一ツノ任意常數ヲ含ム解ヲ有シ, 第二階微分方程式ハ二ツノ任意常數ヲ含ム解ヲ有スルコトガ證明セラレル. 此樣ナ解ヲ**一般解**ト稱シ, 一般解ノ中ニアル任意常數ニ特別ノ値ヲ與ヘテ生ズル解ヲ**特別解**ト云フ.

例ヘバ $y=x-\dfrac{x^3}{3}+c$ ハ (1) ノ一般解デアリ, $y=x-\dfrac{x^3}{3}$, $y=x-\dfrac{x^3}{3}+\sqrt{2}$ ノ如キハ特別解デアル. 又 $y=c_1\sin x+c_2\cos x$ ハ (2) ノ一般解デアリ $y=\sin x$,

$y=\cos x$ ノ如キハ特別解デアル. 玆ニ c, c_1, c_2 ハ任意常數デアル.

微分方程式ニハ一般解以外ノ解ノ存在スルコトモアル.[(1)] 併シナガラ本書デ取リ扱フ微分方程式ニハ斯クノ如キ解ハ殆ンド出テ來ナイ. 故ニ一般解ハ總テノ解ヲ網羅スルモノト思ツテ宜シイ.

以下應用上重要ナル微分方程式ノ二三種ニツイテ其解法ヲ示ス.

I. 變數ヲ分離シ得ル第一階微分方程式

$f(x)$ ヲ x ノ函數, $\phi(y)$ ヲ y ノ函數トシテ微分方程式ガ

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\phi(y)$$

ナル形ニ書カレル場合ニハ y ヲ含ム式ヲ左邊ニ, x ヲ含ム式ヲ右邊ニ集ムレバ

$$\frac{dy}{\phi(y)}=f(x)\,dx$$

トナル故兩邊ヲ積分シテ

$$\int\frac{dy}{\phi(y)}=\int f(x)\,dx+c \qquad (c, \text{任意常數})$$

ヲ得ル. コレ一般解デアル. コノ樣ニ變數ヲ分離シテ解ク法ヲ**變數分離法**ト稱スル.

注意. 上ノ積分ガ初等函數デ表サレルト否トニ拘ラズココマデ來タナラバ微分方程式ハ解カレタモノト看做スノデアル. 尙此外ニ $\phi(y)=0$ モ微分方程式ノ解デアルガコレハ多クノ場合特別解[(2)]トナルノデアル.

例 1.　$(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}+xy=ax$

(1) 此樣ナ解ヲ**特異解**ト稱スル.

(2) 稀ニハ特異解トナルコトモアル.

書キ換フレバ　$(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}=x(a-y)$

故ニ變數ヲ分離シテ

$$\frac{dy}{a-y}=\frac{x\,dx}{1-x^2}$$

兩邊ヲ積分シテ

$$-\log(a-y)=-\frac{1}{2}\log(1-x^2)+\text{const}$$

或ハ　$(a-y)^2=c(1-x^2)$　　(c, 任意常數)

例 2.　地球上ニ於ケル物體ヲ初速 v_0 ニテ直上ニ投ゲ上グルトキ此物體ガ最高點ニ達スルマデノ時間ヲ求ム．但シ空氣ノ抵抗ハ物體ノ速サノ自乘ニ比例シ地球ノ引力ハ物體運動ノ間一定デアルモノト假定スル．

物體ノ質量ヲ m, 地上ニ於ケル重力ノ加速度ヲ g トスレバ速サ v ニテ上昇スル物體ニ對シテ其運動ヲ阻止スル力ハ $mg+\mathrm{R}v^2$ デアル．玆ニ R ハ物體ガ單位速度ニテ運動スルトキノ空氣ノ抵抗ヲ表ス常數デアル．故ニ物體ノ加速度ノ大サハ $g+\dfrac{\mathrm{R}}{m}v^2$ デアツテ加速度ハ下ニ向フ故此値ハ $-\dfrac{dv}{dt}$ ニ等シカルベキデアル．ヨツテ

$$\frac{dv}{dt}=-\left(g+\frac{\mathrm{R}}{m}v^2\right)\quad\cdots\cdots(1)$$

ナル微分方程式ヲ得ル．此微分方程式ヲ解ケバ v ト t トノ關係ガ得ラレル．今

$$\frac{\mathrm{R}}{mg}=\frac{1}{k^2}$$

ト置ケバ (1) ハ　$\dfrac{dv}{dt}=-g\left(1+\dfrac{v^2}{k^2}\right)$

トナリ，之ヲ變數分離法デ解クト

$$k\tan^{-1}\frac{v}{k}=-gt+\text{const}$$

或ハ　$t=-\dfrac{k}{g}\tan^{-1}\dfrac{v}{k}+\mathrm{C}$

ヲ得ル．但シ常數 C ハ此場合ニ任意常數デハナクシテ物體ノ初速 v_0 卽チ $t=0$ ノトキ $v=v_0$ ナル條件ニヨツテ定メラレルノデアル．卽チ

$$0=-\frac{k}{g}\tan^{-1}\frac{v_0}{k}+\mathrm{C}$$

ヨツテ　$t=\dfrac{k}{g}\left(\tan^{-1}\dfrac{v_0}{k}-\tan^{-1}\dfrac{v}{k}\right)$

コレガ任意時刻 (t) ニ於ケル v ト t トノ關係デアル．

偖テ物體ガ最高點ニ達スル瞬間ニ於テハ $v=0$ デ此時ノ t ノ値ヲ t_1 トスレバ

$$t_1=\frac{k}{g}\tan^{-1}\frac{v_0}{k}$$

此 t_1 ハ初速 v_0 ニテ直上ニ投ゲ上ゲラレタ物體ガ最高點ニ達スルマデノ時間卽チ所要ノ時間デアル．

II. 第一階線狀微分方程式

$\mathrm{P}(x)$, $\mathrm{Q}(x)$ ヲ x ノ函數トスルトキ

$$\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}(x)y=\mathrm{Q}(x)\quad\cdots\cdots(1)$$

ナル形ノ微分方程式ヲ**第一階線狀微分方程式**ト稱スル．

先ヅ $\mathrm{Q}(x)=0$ ナル場合ヲ考ヘル．

$$\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}(x)y=0\quad\cdots\cdots(2)$$

此方程式ハ變數分離法ニヨツテ解カレル．卽チ

$$\frac{dy}{y}=-\mathrm{P}(x)dx$$

$$\therefore\quad \log y=-\int\mathrm{P}\,dx+\text{const}$$

$$y=ce^{-\int\mathrm{P}dx}\qquad(c,\ \text{任意常數})$$

コレガ (2) ノ一般解デアル．ヨツテ

$$y_1=e^{-\int\mathrm{P}dx}$$

ト置ケバ此 y_1 ハ (2) ノ一ツノ特別解デアル．此 y_1 ヲ用ヒテ (1) 中ノ y ヲ次ノ如クニ置ク

$$y=y_1v\quad\cdots\cdots(3)$$

然ルトキハ　$y'=y_1v'+y_1'v$

トナル故此 y, y' ノ値ヲ (1) ニ代入シテ

$$y_1v'+\left\{y_1'+\mathrm{P}(x)y_1\right\}v=\mathrm{Q}(x)$$

而シテ y_1 ハ (2) ノ一ツノ解デアルカラ v ノ係數ハ零デアル．

ヨツテ v ノ滿足スル微分方程式ハ

$$y_1 v' = \mathrm{Q}(x)$$

コレヨリ v ヲ求ムレバ

$$v = \int \frac{\mathrm{Q}(x)}{y_1} dx + \text{const.}$$

之ヲ (3) ニ代入シテ

$$y = y_1 \left\{ \int \frac{\mathrm{Q}(x)}{y_1} dx + \text{const} \right\}$$

或ハ
$$\boldsymbol{y = e^{-\int \mathrm{P}dx} \left\{ \int \mathrm{Q}(x) e^{\int \mathrm{P}dx} dx + c \right\}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

ヲ得ル. コレ微分方程式 (1) ノ一般解デアル.

例.
$$\frac{dy}{dx} - n\frac{y}{x} = e^x x^n$$

此方程式ニ於テハ

$$\mathrm{P}(x) = -\frac{n}{x}, \qquad \mathrm{Q}(x) = e^x x^n$$

$$\therefore \quad \int \mathrm{P}(x) dx = -n \log x, \qquad e^{\int \mathrm{P}dx} = \frac{1}{x^n}$$

ヨツテ微分方程式ノ解ハ

$$y = x^n \left\{ \int e^x x^n \frac{1}{x^n} dx + c \right\} = x^n (e^x + c)$$

III. 常係數ヲ有スル第二階線狀微分方程式

$\mathrm{P}(x)$, $\mathrm{Q}(x)$, $\mathrm{R}(x)$ ヲ x ノ函數トスルトキ微分方程式

$$y'' + \mathrm{P}(x)y' + \mathrm{Q}(x)y = \mathrm{R}(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ヲ**第二階線狀微分方程式**ト稱スル.

此方程式ノ一ツノ特別解ヲ η トシ (1) 中ニ $y = \eta + \mathrm{Y}$ ト置クナラバ

$$(\eta + \mathrm{Y})'' + \mathrm{P}(x)(\eta + \mathrm{Y})' + \mathrm{Q}(x)(\eta + \mathrm{Y}) = \mathrm{R}(x) \cdots\cdots (2)$$

而シテ η ハ (1) ノ解ナル故

$$\eta'' + \mathrm{P}(x)\eta' + \mathrm{Q}(x)\eta \equiv \mathrm{R}(x)$$

ヨツテ (2) ハ

$$\mathrm{Y}'' + \mathrm{P}(x)\mathrm{Y}' + \mathrm{Q}(x)\mathrm{Y} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

トナル. コレハ (1) 中ノ $\mathrm{R}(x)$ ヲ零ト置イタ微分方程式デアル. 此方程式ヲ解イテ一般解ヲ求メ, ソレニ η ヲ加フレバ (1) ノ一般解ヲ得ル. ヨツテ (1) ヲ解ク問題ハ一ツノ特別解ヲ求ムルコトト (1) ノ右邊ヲ零ト置イテ得ル微分方程式卽チ (3) ヲ解クコトトニ誘導セラレル. 方程式 (3) ヲ方程式 (1) ノ**補助方程式**ト云フ.

偖テ y_1 ガ方程式 (3) ノ一ツノ解デアルナラバ之ニ任意常數 c ヲ乘ジタル式 cy_1 モ亦 (3) ノ解トナル. 更ニ y_1, y_2 ガ方程式 (3) ノ解デアルナラバ c_1, c_2 ヲ任意常數トスルトキ $c_1y_1 + c_2y_2$ モ亦 (3) ノ解トナルコトヲ容易ニ認ムルコトガ出來ル. 但シ y_1 ト y_2 トノ比ガ常數デアル場合卽チ $y_2 = ky_1$ (k, 常數) ノ如キ場合ニハ

$$c_1y_1 + c_2y_2 = (c_1 + kc_2)y_1 = c'y_1$$

トナツテ一ツノ任意常數ヲ含ム解トナル. 然ラザル場合卽チ y_1 ト y_2 トノ比ガ常數デナイ場合ニハ $c_1y_1 + c_2y_2$ ハ一ツノ任意常數ヲ含ム式トシテハ表サレナイノデアツテ方程式 (3) ノ一般解トナルノデアル.[1]

以後吾人ハ $\mathrm{P}(x)$, $\mathrm{Q}(x)$ ガ常數ナル場合卽チ

(1) 證明省略. y_1 ト y_2 トノ比ガ一定デナイ場合ニハ y_1 ト y_2 トハ**線狀ニ獨立**デアルト稱スル.

$$y''+ay'+by=\mathrm{R}(x)$$

ナル微分方程式ヲ考ヘル. コノ様ナ微分方程式ヲ**常係數ヲ有スル線狀微分方程式**ト云フ. 此場合ニハ補助方程式ハ

$$y''+ay'+by=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

トナリ次ノ如クニシテ解カレルノデアル.

今 α ヲ二次方程式 $\rho^2+a\rho+b=0$ ノ一ツノ根トシテ $y=e^{\alpha x}$ ト置ケバ $y'=\alpha e^{\alpha x}$, $y''=\alpha^2 e^{\alpha x}$

ナル故 $y''+ay'+by=(\alpha^2+a\alpha+b)e^{\alpha x}=0$

ヨツテ $y=e^{\alpha x}$ ハ (4) ノ一ツノ特別解デアル.

故ニ二次方程式 $\rho^2+a\rho+b=0$ ノ二根ヲ α, β トスルトキ $\alpha\neq\beta$ ナル場合ニハ $y_1=e^{\alpha x}$, $y_2=e^{\beta x}$ ハ何レモ (4) ノ解トナリ[1] (4) ノ一般解ハ

$$y=c_1e^{\alpha x}+c_2e^{\beta x}$$

ニヨツテ與ヘラレル.

二次方程式 $\rho^2+a\rho+b=0$ ノ二根 α, β ガ相等シイ場合ニモ $y_1=e^{\alpha x}$ ハ (4) ノ特別解トナル. 此時ハ $y_2=xe^{\alpha x}$ ガ他ノ一ツノ特別解ナルコトヲ證明シ得ル.

$$y_2=xe^{\alpha x} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

ニ對シテハ $y_2'=(\alpha x+1)e^{\alpha x}$

$$y_2''=(\alpha^2x+2\alpha)e^{\alpha x}$$

ナル故 $y_2''+ay_2'+by_2\equiv\left[(\alpha^2+a\alpha+b)x+2\alpha+a\right]e^{\alpha x}$

(1) y_1 ト y_2 トノ比ガ一定デナイコト卽チ線狀ニ獨立ナルコトヲ斷ルベキデアルガ明白ナル事故一一斷ラヌ. 以下ニ於テモ同樣.

而シテ α ハ二次方程式 $\rho^2+a\rho+b=0$ ノ等根デアルカラ

$$\alpha^2+a\alpha+b=0, \qquad 2\alpha+a=0$$

$$\therefore \quad y_2''+ay_2'+by_2\equiv 0$$

卽チ (5) ガ (4) ノ一ツノ特別解トナル. ヨツテ此場合ノ一般解ハ

$$y=(c_1+c_2x)e^{\alpha x}$$

次ニ方程式 $\rho^2+a\rho+b=0$ ガ二ツノ虛根 $\lambda\pm i\mu$ ヲ有スル場合ヲ考ヘル. 玆ニ λ, μ ハ實數, i ハ虛數單位デアル.

先ヅ (4) 中ニ $y=e^{\lambda x}v$ ト置イテ v ノ微分方程式ヲ作ル. 此 y ニ對シテハ

$$y'=e^{\lambda x}(v'+\lambda v), \qquad y''=e^{\lambda x}(v''+2\lambda v'+\lambda^2 v)$$

デアルカラ是等ノ y, y', y'' ヲ (4) ニ代入シテ

$$v''+(2\lambda+a)v'+(\lambda^2+a\lambda+b)v=0 \quad\cdots\cdots(6)$$

然ルニ $\lambda\pm i\mu=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}=\dfrac{-a\pm i\sqrt{4b-a^2}}{2}$

卽チ $\lambda=-\dfrac{a}{2}$, $\mu=\dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$

デアルカラ $2\lambda+a=0$,

$$\lambda^2+a\lambda+b=\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}+b=\frac{4b-a^2}{4}=\mu^2$$

故ニ (6) ハ

$$v''+\mu^2 v=0$$

トナリ此方程式ハ明カニ

$$v_1=\cos\mu x, \qquad v_2=\sin\mu x$$

ナル二ツノ特別解ヲ有スル. ヨツテ (4) ハ

$$y_1 = e^{\lambda x}\cos\mu x, \qquad y_2 = e^{\lambda x}\sin\mu x$$

ナル二個ノ特別解ヲ有シ其一般解ハ

$$y = e^{\lambda x}(c_1\cos\mu x + c_2\sin\mu x), \quad c_1, c_2, \text{任意常數}$$

ニヨツテ與ヘラレル.

例 1.　$y''-k^2y=0, \quad (k\neq 0)$ ....(A)

二次方程式 $\rho^2-k^2=0$ ノ根ハ $\pm k$ デアル. 故ニ (A) ノ一般解ハ

$$y=c_1e^{kx}+c_2e^{-kx}$$

例 2.　$y''-4y'+4y=0$ ....(B)

二次方程式 $\rho^2-4\rho+4=0$ ノ根ハ 2, 2. 故ニ (B) ノ一般解ハ

$$y=(c_1+c_2x)e^{2x}$$

例 3.　$y''+ay'+a^2y=\cos nx$ ....(C)

先ヅ補助方程式 $y''+ay'+a^2y=0$ ヲ解ク.

二次方程式 $\rho^2+a\rho+a^2=0$ ノ根ハ $-\frac{a}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}a$ デアルカラ補助方程式ノ一般解ハ

$$Y=e^{-\frac{a}{2}x}\left\{c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}ax+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}ax\right\}$$

次ニモトノ方程式ノ一ツノ特別解ヲ求ムルタメニ

$y=A\cos nx+B\sin nx$ ....(D)

ト置ク. 然ルトキハ

$$y'=n(-A\sin nx+B\cos nx)$$
$$y''=n^2(-A\cos nx-B\sin nx)$$

ナル故 (C) 式ニ代入シテ

$$\left\{A(a^2-n^2)+Bna\right\}\cos nx+\left\{B(a^2-n^2)-Ana\right\}\sin nx=\cos nx$$

$$\therefore\quad A(a^2-n^2)+Bna=1,\quad B(a^2-n^2)-Ana=0$$

ニヨツテ A, B ヲ定ムルナラバ (D) ハ (C) ノ解トナル. 斯クシテ (C) ノ一ツノ特別解

$$\eta=\frac{(a^2-n^2)\cos nx+na\sin nx}{(a^2-n^2)^2+n^2a^2}$$

ヲ得ル. ヨツテ與ヘラレタル微分方程式ノ一般解ハ

$$y=e^{-\frac{a}{2}x}\left\{c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}ax+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}ax\right\}+\frac{(a^2-n^2)\cos nx+na\sin nx}{(a^2-n^2)^2+n^2a^2}$$

例 4.　$y''+a^2y=\cos ax$ ....(E)

補助方程式 $y''+a^2y=0$ ノ一般解ハ $Y=c_1\cos ax+c_2\sin ax$ デアル.

次ニ與ヘラレタル微分方程式ノ一ツノ特別解ヲ求ムルタメニ

$y=x(A\cos ax+B\sin ax)$[(1)] ....(F)

ト置ク. 然ルトキハ

$$y''=a^2x(-A\cos ax-B\sin ax)+2a(-A\sin ax+B\cos ax)$$

デアルカラ與ヘラレタル微分方程式ニ代入シテ

$$2a(-A\sin ax+B\cos ax)=\cos ax$$

ヲ得ル. ヨツテ $A=0,\ B=\frac{1}{2a}$ ト取レバ (F) 式ハ (E) ノ一ツノ解トナル. 斯クシテ (E) ノ一ツノ特別解

$$\eta=\frac{x\sin ax}{2a}$$

ヲ得ル. 從ツテ (E) ノ一般解ハ

$$y=(c_1\cos ax+c_2\sin ax)+\frac{x\sin ax}{2a}$$

問題 18.

次ノ微分方程式ヲ解ケ (1—21).

1. $\dfrac{y}{1+x}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{1+y}$　　2. $\dfrac{dy}{dx}=ay^2x$

3. $ax\dfrac{dy}{dx}+2y=xy\dfrac{dy}{dx}$　　4. $\sin x\cos^2 y\,dx+\cos^2 x\,dy=0$

5. $(x+y)^2\dfrac{dy}{dx}=a^2$　[$x+y=z$ ト置キ y ヲ z ニ變ヘヨ].

6. $\left(\dfrac{y}{x}+1\right)\dfrac{dy}{dx}+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2=0$　[$\dfrac{y}{x}=z$ ト置ケ].

7. $\dfrac{dy}{dx}+y=x$　　8. $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^3$

9. $x\dfrac{dy}{dx}+(1+x)y=e^x$　　10. $x^2\dfrac{dy}{dx}+(1-2x)y=x^2$

(1) 前例ノ如ク $y=A\cos ax+B\sin ax$ ト置イテハ無數ニナルノデアル. 何トナレバ此式ハ補助方程式ノ解トナツテ居ルカラデアル.

11. $\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = \sin 2x$ **12.** $y\dfrac{dy}{dx} + xy^2 = e^{-x^2}\sin x$ $\left[y^2 = \mathrm{Y}\right.$ ト置ケ$\left.\right]$.

13. $\dfrac{dy}{dx} + xy = y^2 f(x)$ $\left[\dfrac{1}{y} = \mathrm{Y}\right.$ ト置ケ$\left.\right]$ **14.** $y'' - 5y' + 6y = 0$

15. $y'' - 2y' + 5y = 0$ **16.** $y'' - y' - 2y = \sin x$

17. $y'' + n^2 y = k\cos nx + l\sin nx \quad (n \neq 0)$ **18.** $y'' - y' + 6y = e^{x}$

19. $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$ $\left[y = \mathrm{A}xe^{2x}\right.$ ト置キテ一ツノ特別解ヲ求メヨ$\left.\right]$.

20. $y'' - 2y' + y = x^2 e^{3x}$ $\left[y = (\mathrm{A} + \mathrm{B}x + \mathrm{C}x^2)e^{3x}\right.$ ト置キテ一ツノ特別解ヲ求メヨ$\left.\right]$.

21. $y'' - 2y' + y = xe^{x}$ $\left[y = \mathrm{A}x^3 e^{x}\right.$ ト置キテ一ツノ特別解ヲ求メヨ$\left.\right]$.

22. 二次方程式 $\rho^2 + a\rho + b = 0$ ガ等根 α ヲ有スル場合ニハ $y = e^{\alpha x}z$ ト置クコトニヨリ微分方程式 $y'' + ay' + by = \mathrm{R}(x)$ ハ

$$e^{\alpha x}z'' = \mathrm{R}(x) \qquad \text{即チ} \qquad z'' = e^{-\alpha x}\mathrm{R}(x)$$

ト變形スルコトヲ證明セヨ.

23. 前問ノ結果ヲ用ヒテ方程式 (20) 及ビ (21) ヲ解ケ.

次ノ曲線ノ方程式ヲ求ム (24—27).

24. 曲線上ノ點 P ニ於ケル切線及ビ法線ガ x 軸ト交ル點ヲソレゾレ T, N トシ P ヨリ x 軸ニ下セル垂線ノ足ヲ H トスルトキ (i) TH ガ一定 (k) ナル曲線, (ii) HN ガ一定 (k) ナル曲線.

25. 曲線上ノ點 P ニ於ケル切線ガ兩軸ト交ル點ヲ A, B トスルトキ點 P ガ線分 AB ノ中點トナル如キ曲線.

26. 曲線上ノ點 P ヨリ x 軸ニ下セル垂線ノ足ヲ H トシ H ヨリ P ニ於ケル切線ニ下セル垂線ノ足ヲ H_1 トス. HH_1 ガ一定ナル如キ曲線.

27. 曲線上ノ點 P ニ於ケル切線ガ x 軸トナス角ヲ α, 原點 O ヲ通ル動徑 OP ガ x 軸トナス角ヲ θ トスルトキ $\alpha = 2\theta$ ナル如キ曲線.

28. 地球上ニ於ケル物體ガ靜止ノ位置ヨリ落下スルトキ時間 t ノ後ニ於ケル速度 v ヲ求メヨ. 但シ空氣ノ抵抗ハ物體ノ速度ノ自乘ニ比例シ, 地球ノ引力ハ物體運動ノ間一定ナルモノト假定ス.

29. 前問ト同樣ナル假定ノ下ニ地球上ニ於ケル物體ヲ初速 v_0 ニテ直上ニ投ゲ上グルトキ此物體ノ達シ得ル最高距離ヲ求ム.

30. 質點ノ直線運動ニ於テ加速度 (α) ノ大サハ直線上ノ定點 (0) ヨリ質點ニ至ル

距離 s ニ比例シ且ツ加速度ノ方向ハ常ニ點 0 ニ向フトキ任意時刻 (t) ニ於ケル s 及ビ速サ v ヲ求ム. 但シ $t = 0$ ノトキ $v = v_0$, $s = 0$ トス $\left[s\right.$ ト t トノ間ノ微分方程式ハ $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -k^2 s$ トナル$\left.\right]$.

31. 質點ノ直線運動ニ於テ

$$\alpha + 2k_1 v + k_2 s = 0 \quad (k_1,\ k_2 \text{ ハ正ノ常數})$$

ナルトキ s ヲ t ノ函數トシテ表セ.

第八章

定　積　分

41. 定積分

$f(x)$ ヲ區域 (a, b) 内ニ於テ連續ナル x ノ函數トスル. a, b ノ大小ハ何レデモ宜シイノデアルガ説明ノ便宜上暫ラク $a<b$ トスル.[1]

a ト b トノ間ニ大サノ順ニ $n-1$ 個ノ數 $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n-1}$ ヲ取リ區域 (a, b) ヲ n 個ノ小區域

$$(a, x_1),\ (x_1, x_2),\ \ldots\ldots,\ (x_{n-1}, b)$$

ニ分チ, コレラノ各區域ノ長サヲソレゾレ $h_1, h_2, \ldots\ldots, h_n$ ニテ表ス. 即チ

$$h_1 = x_1 - a,\quad h_2 = x_2 - x_1,\quad \ldots\ldots,\ h_n = b - x_{n-1}$$

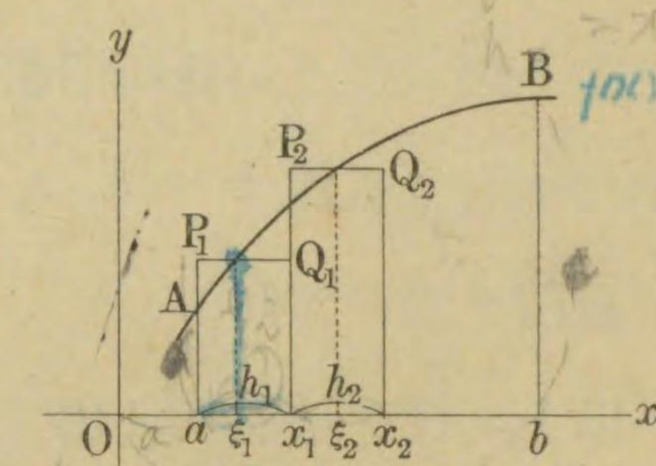
今 i 番目ノ區域中ニ任意ノ値 ξ_i ヲ取リ次ノ和ヲ作ル.

$$\mathrm{S}_n = f(\xi_1)h_1 + f(\xi_2)h_2 + \cdots\cdots + f(\xi_n)h_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)h_i$$

(1) $a>b$ ナル場合ニ於ケル區域 (a, b) トハ何ヲ意味スルカ. コレハ區域 (b, a) ニ外ナラヌノデアル. 只ダ區域 (a, b) ノ長サナルモノハ a, b ノ大小ノ如何ニ拘ラズ $b-a$ デ定メラレルノデアツテ $a<b$ ナラバ正, $a>b$ ナラバ負デアル. 區域 (a, b) ト云ヒ (b, a) ト云ヒ何レモ a, b 間ノ數 (a, b ヲモ含ム) ノ全體デアルガ其長サガ符號相反スルモノト思ヘバ宜シイ.

若シ $f(x)$ ノぐらふガ圖ノ様ナモノデアルナラバ $f(\xi_1)h_1$ ハ矩形 $ax_1\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_1$ ノ面積, $f(\xi_2)h_2$ ハ矩形 $x_1x_2\mathrm{Q}_2\mathrm{P}_2$ ノ面積, …… ヲ表ス故 S_n ハ是等ノ矩形ノ面積ノ總和ヲ表ス.



區域 (a, b) ヲ n 個ノ小區域ニ分ツ仕方ハ色色アル. 例ヘバ區域 (a, b) ヲ n 個ニ等分スルモヨシ, 偶數番目ノ區域ノ長サヲ奇數番目ノ區域ノ長サノ 2 倍ニスルモヨシ, 其他分ケ方ハ無數ニアル. 又 $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_n$ ノ選ビ方モ種種雑多アル. $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_n$ ヲ各區域ノ中央ニ取ルモヨシ, 各區域ノ左端ニ取ルモヨシ, 一ツ置キニ左端ト右端トニ取ルモヨシ, 其他イチイチ數ヘ盡スコトハ出來ヌ. 此ノ様ニ區域 (a, b) ヲ小區域ニ分ツ仕方及ビ $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_n$ ノ取リ方ハ無數ニアルケレドモ $h_1, h_2, \ldots\ldots, h_n$ 中ノ最大ナルモノヲ限リナク小ナラシムレバ S_n ハ小區域ノ分ケ方及ビ ξ_i ノ選ビ方ニ全ク無關係ナ一ツノ常數 S ニ限リナク近ヅクコトガ證明セラレルノデアル.[1] 此極限値 S ヲ a ヨリ b マデ取リタル函數 $f(x)$ ノ**定積分**又ハ誤解ナキ場合ニハ略シテ單ニ**積分**ト稱シ之ヲ

$$\int_a^b f(x)\,dx^{(2)}$$

(1) 此證明ハムヅカシイ. 又此極限値 S ハ函數ノ極限値トハ少シ意味ガ違フノデアル.

(2) 此記録ノ起リハ Sum ノ頭文字 S ヨリ來テ居ル.

ナル記號ニテ表スノデアル. a ヲ定積分ノ**下限**, b ヲ其**上限**, 兩者ヲ一緒ニシテ**定積分ノ限界**ト云フ.

前ノ圖ニ於テハ此極限値卽チ定積分ハぐらふト x 軸ト, y 軸ニ平行ナル二直線 $x=a$, $x=b$ トニヨリ圍マレル平面圖形 abBA ノ面積ヲ表シテ居ル.(1)

以上ニ於テハ說明ノ便宜上 $a<b$ ト假定シタガ $a>b$ トスルモ同樣デアル. $a>b$ ナル場合ニハ區域 (a,b) ノ長サ及ビ小區域ノ長サ $h_1, h_2, \ldots\ldots, h_n$ ガ何レモ負トナルダケノ相違ガアルノミデアル.

尙 $a=b$ ナル場合ニ於テハ $\int_a^b f(x)dx$ ハ零デアルモノト規約スル.

斯クテ上限, 下限ノ大小, 相等ノ如何ニ拘ラズ定積分ハ意義ヲ有スルモノトナル.

注意 1. 區域 (a,b) ヲ n 個ノ小區域 $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots\ldots (x_{n-1}, b)$ ニ分チ各區域ノ長サヲ $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots\ldots, \Delta x_n$ ニテ表シ各區域內ニ取ツタ一ツヅツノ値ヲ ξ_1, $\xi_2, \ldots\ldots, \xi_n$ ニテ表スナラバ本節ノ S_n ハ

$$\begin{aligned} S_n &= f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots\cdots + f(\xi_n)\Delta x_n \\ &= \sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\Delta x_r \end{aligned}$$

デ表サレル. 之ヲ簡單ニ

$$\sum f(x)\Delta x$$

デ表スコトモアル. 記號 $\int_a^b f(x)dx$ ハ此式ノ極限ヲ表スモノデアル.

(1) 曲線ニテ圍マレタル平面圖形ノ面積トハ如何ナルモノカ. コレヲ定義スルニハ實ハ上ノ樣ナ極限値ノ存在ガ必要デアルノデアツテ面積ノ存在ヲ假定シテ定積分ノ存在ヲ幾何學的ニ承認セントスルハ本末ヲ轉倒スルモノデアルガ此說明ハ分リ易イ故暫ラクコレニ從フコトニスル.

注意 2. 區域 $(a;b)$ ヲイクツカノ小區域ニ分チ各區域ニツイテ函數ノ値ト區域ノ長サトノ積ヲ作リ之ヲ總和シタモノ卽チ

$$\sum f(x)\Delta x$$

ヲ S_n デ表スナラバ上ニ云ヘル如ク

$$\lim_{\Delta x \to 0}{}^{(1)} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

デアル. 今 L ガ x ト Δx トノ函數デアツテ $\Delta x \to 0$ ノトキ $L \to f(x)$ デアルトスル. 然ルトキハ

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0}{}^{(1)} \sum L\Delta x &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum f(x)\Delta x \\ &= \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

ナルコトガ證明セラレル. コレハ定積分ノ應用上極メテ重要ナル定理デアルガ今ハソノ證明ヲ省略スル.(2)

例. $\phi(x), \psi(x)$ ガ (a,b) 內ニテ連續ニシテ

$$x_r \leqq \xi_r \leqq x_r + \Delta x_r, \qquad x_r \leqq \xi_r' \leqq x_r + \Delta x_r$$

ナルトキ

$$\lim_{\Delta x \to 0}{}^{(3)} \sum \sqrt{\phi^2(\xi_r) + \psi^2(\xi_r')}\,\Delta x_r = \int_a^b \sqrt{\phi^2(x) + \psi^2(x)}\,dx$$

ヲ證明セヨ.

$\Delta x_r \to 0$ ノトキ $\xi_r \to x_r$, $\xi_r' \to x_r$. 從ツテ

$$\sqrt{\phi^2(\xi_r) + \psi^2(\xi_r')} \to \sqrt{\phi^2(x_r) + \psi^2(x_r)}$$

$$\therefore \quad \lim_{\Delta x \to 0} \sum \sqrt{\phi^2(\xi_r) + \psi^2(\xi_r')}\,\Delta x_r = \int_a^b \sqrt{\phi^2(x) + \psi^2(x)}\,dx$$

42. 定積分ノ性質

以下被積分函數ハ積分ノ上限ト下限トノ間ニ於テ（上限及ビ下限ヲ含ム）連續デアルモノト假定スル.

(1), (3) 總テノ Δx_r ガ零ニ收斂スル極限ノ意デアル.

(2) コレハ嚴密ニハモ少シ條件ガ入用ナノデアル.

(i)
$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \quad {}^{(1)}$$

前節ニ於ケル如ク區域 (a, b) ヲ n 個ノ小區域ニ分チ各小區域ノ長サヲ $h_1, h_2, \ldots\ldots, h_n$ ニテ表シ又 i 番目ノ小區域中ニ取ッターツノ値ヲ ξ_i ニテ表スナラバ

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)h_i \quad {}^{(2)}$$

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(-h_i)$$

コレヨリ上ノ式ヲ得ル.

(ii) c ヲ a ト b トノ間ノ一數トスレバ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

區域 (a, b) ヲ小區域ニ分ツトキ c ヲ一ツノ小區域ノ端トスル様ニ分ツナラバ $c = x_r$ ト置イテ

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)h_i = \sum_{i=1}^{r} f(\xi_i)h_i + \sum_{i=r+1}^{n} f(\xi_i)h_i$$

デアツテ

$$\lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{r} f(\xi_i)h_i = \int_a^c f(x)dx$$

$$\lim_{h\to 0} \sum_{i=r+1}^{n} f(\xi_i)h_i = \int_c^b f(x)dx$$

(1) $a = b$ ナル場合ニ於テハ兩邊トモ零トナリ此式ハ明カニ成立スル. (ii) 以下ノ性質モ積分ノ上限ト下限トガ相等シイ場合ニハ明カニ成立スル故斯クノ如キ場合ハ改メテ考ヘナイコトニスル.

(2) $h \to 0$ ハ $h_1, h_2, \ldots\ldots h_n$ ノ總テヲ限リナク小ナラシメルト云フ意味ニ使用サレテ居ルノデアル.

デアル故

$$\lim_{h\to 0} S_n = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

卽チ上ノ式ヲ得ル.

注意. b ガ a ト c トノ間ニアル場合(1)又ハ a ガ b ト c トノ間ニアル場合(2)ニモ上ノ式ハ成立スル. 若シ b ガ a ト c トノ間ニアルナラバ上ニヨリ

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

a ガ b ト c トノ間ニアル場合モ同様デアル.

(iii)
$$\int_a^b \{f_1(x) + f_2(x)\}\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx$$

何トナレバ

$$\int_a^b \{f_1(x) + f_2(x)\}dx = \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} \{f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i)\}h_i$$

$$= \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)h_i + \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)h_i$$

$$= \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

同様ニ k ヲ常數トスルナラバ

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

ヲ證明スルコトガ出來ル.

(iv) 區域 (a, b) 內ニテ $f(x) \leqq \phi(x)$ ナラバ

(1) 但シ $f(x)$ ハ a ト c トノ間ニテ連續デアルモノト假定シテノ結論デアル.

(2) 但シ $f(x)$ ハ b ト c トノ間ニテ連續デアルモノト假定シテノ結論デアル.

$$a<b \text{ ナルトキ } \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b \phi(x)\,dx \quad \ldots\ldots(\mathrm{A})$$

$$a>b \text{ ナルトキ } \int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b \phi(x)\,dx \quad \ldots\ldots(\mathrm{B})$$

$$a<b \text{ ナルトキハ } \boxed{\sum_{i=1}^n f(\xi_i)h_i} \leqq \boxed{\sum_{i=1}^n \phi(\xi_i)h_i}$$

コレヨリ第一ノ不等式ガ出デ來ル. 第二ノ不等式モ同様ニシテ證明セラレル.

注意. (A), (B) 式ニ於ケル等號ノ成立スルハ區域 (a,b) 内ニテ恆ニ $f(x)=\phi(x)$ ナル關係成立スル場合ニ限ルコトハ幾何學的ニ容易ニ分ルデアラウ.

(v) $f(x)$ ヲ區域 (a,b) 内ニテ連續ナル函數トシ其區域内ニ於ケル函數ノ最大値ヲ G, 最小値ヲ L トスル.[1] 然ルトキハ (a,b) 内ニテ

$$\mathrm{L} \leqq f(x) \leqq \mathrm{G}$$

デアツテ從ツテ (iv) ニヨリ $a<b$ デアルナラバ

$$\int_a^b \mathrm{L}\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b \mathrm{G}\,dx$$

左邊ハ $\mathrm{L}(b-a)$ ニ等シク, 右邊ハ $\mathrm{G}(b-a)$ ニ等シイ.

$$\therefore \quad \mathrm{L}(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq \mathrm{G}(b-a)$$

$\mathrm{L}=\mathrm{G}$ ナル場合卽チ $f(x)$ ガ (a,b) 内ニテ一定ナル場合ニハ等號ノ成立スルコト勿論デアル. $\mathrm{L}<\mathrm{G}$ ナル場合卽チ $f(x)$ ガ (a,b) 内ニテ一定ナラザル場合ニハ (iv) ノ注意ニヨリ不等號ガ

(1) 區域 (a,b) 内ニテ連續ナル函數ハコノ區域内ニテ最大値及ビ最小値ヲ取ルノデアル.

成立スル, 卽チ

$$\mathrm{L}(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < \mathrm{G}(b-a)$$

ヨツテ此場合ニハ

$$\int_a^b f(x)\,dx = k(b-a)$$

茲ニ k ハ L ト G トノ間ノ一數デアル.

今若シ $f(x)$ ガ $x=\alpha$ ニテ最小値 L ヲ取リ, $x=\beta$ ニテ最大値 G ヲ取ルトスレバ $f(x)$ ハ α ト β トノ間ニテ k ナル値ヲ少クモ一度ハ取ルノデアルカラ $k=f(\xi)$ ト置クコトガ出來ル. ξ ハ α ト β トノ間ノ數, 從ツテ a ト b トノ間ノ一數デアル.

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi), \qquad a<\xi<b$$

ナル關係ヲ得ル. 或ハ

$$\xi = a+\theta(b-a) \qquad (0<\theta<1)$$

ト置イテ

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f\{a+\theta(b-a)\}$$

ト書クコトモ出來ル.

若シ (a,b) 内ニテ $f(x)$ ガ一定ナラバ $f\{a+\theta(b-a)\}$ ハ θ ノ如何ニ拘ラズ其常數ニ等シク從ツテ上ノ式ハ勿論成立スル. 又 $a>b$ トスルモ上ト同ジ結論ガ得ラレルコトハ一目シテ分ルデアラウ. 斯クテ次ノ關係ヲ得ル.

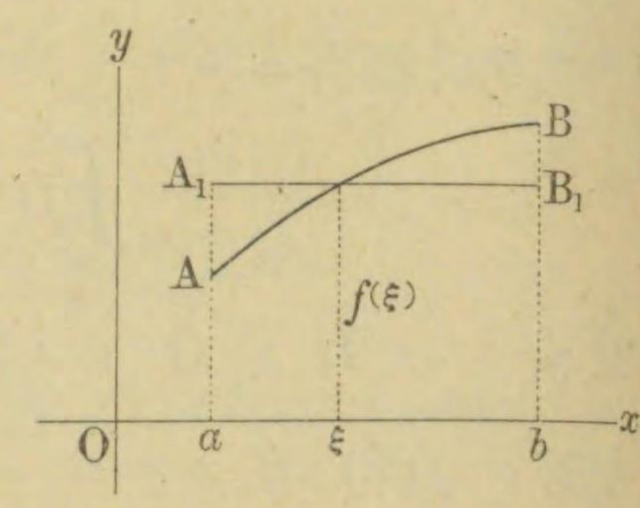
$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi)}$$

茲ニ

$$\xi = a+\theta(b-a) \qquad (0<\theta<1)$$

之ヲ積分學ニ於ケル**平均値定理**[(1)]ト云フ.

區域 (a,b) 内ニ於ケル連續函數 $f(x)$ ノぐらふガ $\widehat{AB}$ デアルナラバ $\int_a^b f(x)dx$ ハ面積 $abBA$ ヲ表シ $(b-a)f(\xi)$ ハ $b-a$ ヲ底邊トシ $f(\xi)$ ヲ高サトスル矩形 abB_1A_1 ノ面積ヲ表シテ居ル. ξ ヲ a, b ノ間ニ適當ニ選ブトキ上ノ二ツノ面積ガ等シクナルト云フノガ平均値定理ノ幾何學的意義デアル.



(vi) 定積分 $\int_a^b f(x)dx$ ハ x ニハ無關係デアツテ x ノ代リニ他ノ文字例ヘバ t ニテ置キ換フルモ全ク同一ノ積分ヲ得ルコトハ定積分ノ定義ヨリ直チニ分ルデアラウ. 即チ

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$$

今 x ヲ a ト b トノ間ノ任意ノ數トスルナラバ定積分 $\int_a^x f(t)dt$ ノ値ハ x ガ定マレバソレニ準ジテ定マルノデアルカラ此定積分ハ x ノ函數トナル. 之ヲ $F(x)$ ニテ表スコトニスル. 即チ

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

然ルトキハ區域 (a,b) 内ノ $x+\Delta x$ ニ對シテ

$$F(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$$

(1) 積分學ニハ平均値定理ト云フノガ二ツアル. コレハ其中ノ一ツ(第一平均値定理)ノ特別ナル場合デアル.

(ii) ニヨリ

$$=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

$$=F(x)+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

f(a)
x(a)

然ルニ平均値定理ニヨツテ

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=\Delta x f(x+\theta\Delta x)\qquad 0<\theta<1$$

$$\therefore\quad F(x+\Delta x)=F(x)+\Delta x f(x+\theta\Delta x)$$

ヲ得ル. 此式ヨリ次ノ結論ガ得ラレル.

先ヅ

$$\lim_{\Delta x\to 0}F(x+\Delta x)=F(x)$$

デアルカラ $F(x)$ ハ x ノ連續函數トナル.

次ニ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(x)$$

トナルカラ $F(x)$ ヲ x ニツキ微分シタモノハ $f(x)$ トナル. 斯クテ次ノ定理ヲ得ル.

定理 $f(x)$ ガ區域 (a,b) 内ニテ連續ナルトキハ定積分

$$\int_a^x f(t)dt$$

ハ區域 (a,b) 内ノ x ニ對シテ連續デアツテ之ヲ上限 x ニツキ微分スレバ $f(x)$ トナル.

尚上ノ定積分 $\int_a^x f(t)dt$ ヲ $\int_a^x f(x)dx$ ト書イテ表スコトモアル. 此式ニ於ケル $f(x)dx$ 中ノ x ハ積分ノ途中ニ用ヒラレル變數デアツテ $\int_a^x$ 中ノ x (即チ定積分ノ上限)トハ異ナルノデアル.

此記號ヲ用フルトキハ上ノ定理ハ次ノ如クニ書イテ表スコトガ

出來ル.

$$\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x f(x)\,dx\right\}=f(x)$$

注意. $f(x)$ ガ區域 (a,b) 内ニテ連續デアルトキハ a ト b トノ間ノ x ニ對シテ定積分

$$\int_x^b f(x)dx$$

ハ連續トナリ之ヲ x ニツキ微分ヘレバ $-f(x)$ トナル. コレハ

$$\int_x^b f(x)dx=-\int_b^x f(x)dx$$

ナルコトカラ容易ニ分ルデアラウ.

(vii) 函數 $f(x)$ ガ區域 (a,b) 内ニテ連續ナラバ微分シテ $f(x)$ トナル函數, 即チ $f(x)$ ノ不定積分ハ一般ニ

$$\int_a^x f(x)dx+C$$

ト書クコトガ出來ル. 茲ニ C ハ任意常數デアル. コレハ (vi) ヨリノ當然ノ結論デアル.

故ニ $f(x)$ ノ不定積分ノ一ツヲ $F_1(x)$ ニテ表スナラバ $F_1(x)$ ハ上ノ形ノ一ツノ函數ニ外ナラヌ. 即チ

$$F_1(x)=\int_a^x f(x)dx+C$$

此式ニ於テ $x=a$ ト置クナラバ

$$F_1(a)=C \quad\text{..............................}(1)$$

又 $x=b$ ト置クナラバ

$$F_1(b)=\int_a^b f(x)dx+C \quad\text{..................}(2)$$

(1) ト (2) トヨリ C ヲ消去シテ

$$\int_a^b f(x)\,dx=F_1(b)-F_1(a) \quad\text{..................}(3)$$

ヲ得ル. 此式ノ右邊ヲ表スニ

$$\Big[F_1(x)\Big]_a^b \quad 又ハ \quad \Big[F_1(x)\Big]_a^b$$

等ノ記號ヲ用フル. 即チ $\Big[F_1(x)\Big]_a^b$ ハ函數 $F_1(x)$ ニ於テ $x=b$ ト置イタモノカラ $x=a$ ト置イタモノヲ減ズルコトヲ表スノデアル. 此記號ヲ用フルトキハ

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F_1(x)\Big]_a^b$$

トナル. 然ルニ又 $F_1(x)$ ハ $f(x)$ ノ不定積分ノ一ツデアツテ之ヲ表スニハ既ニ $\int f(x)dx$ ナル記號ヲ用ヒテ居ル. ヨツテ上ノ式ヲ次ノ如クニ書クコトモ出來ル.

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[\int f(x)\,dx\Big]_a^b \quad\text{..............}(3')$$

定積分ト不定積分トノ間ニハ此樣ナ關係ガ存在スルノデアル. $f(x)$ ノ不定積分ヲ表スニ $\int f(x)dx$ ナル記號ヲ用フルハ此關係ニ基ヅクノデアル.

此關係ニヨツテ不定積分ガ求メラレル場合ニハ之ヲ用ヒテ逆ニ定積分ノ値ヲ計算スルコトガ出來ル. 實際ニ定積分ヲ計算スルニハ此方法ニヨルノデアル. 以下ニ二三ノ例ヲ示ス.

例 1.

$$B=\int_0^1 x^2dx$$

先ヅ $\int x^2dx$ ヲ求メルト

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

デアルカラ上ノ公式ニヨツテ

$$B = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

例 2.
$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$$

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)$$

デアルカラ

$$B = \left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(0 + \frac{\sin 0}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

例 3.
$$B = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}$$

デアルカラ

$$B = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} - \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

問題 19.

次ノ定積分ノ値ヲ求ム (1—13).

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$ **2.** $\int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2}$ **3.** $\int_1^3 \frac{x\, dx}{1 + x^2}$

4. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} dx$ **5.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x}}$ **6.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\, dx$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$ **8.** $\int_0^1 \frac{1 - x^2}{1 + x^2} dx$ **9.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 x\, dx$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$ **11.** $\int_0^1 \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} dx$

12. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + e\cos x}$ $(0 < e < 1)$ **13.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4 + 5\sin x}$

次ノ不等式ヲ證明セヨ (14—15).

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x\, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$

15. $f(x)$ ガ $r - 1 \leqq x \leqq r$ 內ニテ減少函數ナラバ

$$f(r) < \int_{r-1}^{r} f(x)dx < f(r-1).$$

16. $x > 0$ ニ對シテ $f(x)$ ガ x ノ減少函數ナルトキ次ノ不等式ヲ證明セヨ.

$$f(2) + f(3) + \cdots\cdots + f(n) < \int_1^n f(x)dx < f(1) + f(2) + \cdots\cdots + f(n-1)$$

[前問ヲ用ヒヨ].

17. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} < \log n < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n-1}$

ヲ證明セヨ [前問參照].

次ノ函數ヲ x ニツキ微分セヨ (18—19).

18. $\int_{2x}^{x^2} f(t)dt.$ **19.** $\int_a^x (x - t)f'(t)dt$

20. 質點ノ直線運動ニ於テ質點ニ働ク力ハ直線上ノ定點 O ヨリノ距離 x ノ二乘ニ逆比例シ且ツソノ方向ハ常ニ O ニ向フトキソノ直線上ノ一點 $(x = x_1)$ ヨリ他ノ點 $(x = x_2)$ ニ至ル間ニ力ニ逆ツテナサルル仕事ヲ計算セヨ.

43. 置換積分法

$x = \phi(t)$ ト置クトキ t ガ t_1 ヨリ t_2 マデ變ズル間ニ x ハ a ヨリ b マデ單調ニ增加又ハ減少シ,[1] 且ツ t ノ區域 (t_1, t_2) 內ニテ $\phi'(t)$ ガ連續デアルモノト假定スル. 然ルトキハ

[1] コレハ $\phi'(t)$ ガ一定ノ符號ヲ有スルト云フ條件デ置キカヘラレル.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f\{\phi(t)\}\phi'(t)\,dt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ナルコトガ證明セラレル.

先ヅ a, b 間ノ x ニ對シテ $f(x)$ ハ連續デ t_1, t_2 間ノ t ニ對シテ $\phi(t)$ ハ連續且ツ a, b 間ノ値ヲ取ル故 t_1, t_2 間ノ t ニ對シテ $f\{\phi(t)\}$ ハ連續デアル. 從ツテ $\phi'(t)$ ノ連續カラ $f\{\phi(t)\}\phi'(t)$ モ亦同ジ區域內ニテ連續トナル. 而シテ

$$\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

ト置クナラバ

$$\mathrm{F}'(x) = f(x) \qquad \text{卽チ} \qquad \mathrm{F}'\{\phi(t)\} = f\{\phi(t)\}$$

デアルカラ

$$\frac{d}{dt}\mathrm{F}\{\phi(t)\} = \mathrm{F}'\{\phi(t)\}\phi'(t)$$
$$= f\{\phi(t)\}\phi'(t)$$

トナリコレモ亦連續トナル. ヨツテ之ヲ t_1 カラ t_2 マデ積分シテ

$$\int_{t_1}^{t_2} f\{\phi(t)\}\phi'(t)\,dt = \mathrm{F}\{\phi(t_2)\} - \mathrm{F}\{\phi(t_1)\}$$

ヲ得ル. 然ルニ

$$a = \phi(t_1), \qquad b = \phi(t_2)$$

$$\therefore \quad \text{上式ノ右邊} = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

コレ卽チ (1) 式デアル.

定積分ヲ置換ニヨツテ求メル場合ニハ此公式ニヨリ積分ノ上限, 下限ヲモ同時ニ變更スルガ便宜デアル. 下ニ一二ノ例ヲ示ス

例 1.

$$\mathrm{B} = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\,dx$$

$$\sqrt{1-x} = t \qquad \text{卽チ} \qquad x = 1 - t^2 \text{ [1]}$$

ト置クナラバ

$$dx = -2t\,dt$$

$$\therefore \quad \int x^2\sqrt{1-x}\,dx = \int (1-t^2)^2 t(-2t\,dt) = -2\int t^2(1-t^2)^2 dt$$

而シテ上ノ置換ニヨツテ t ガ 1 ヨリ 0 マデ變化スル間ニ x ハ 0 ヨリ 1 マデ變ズル. 表ニテ書ケバ次ノ通リデアル.

t	$1 \ldots\ldots\ldots\ldots 0$
x	$0 \ldots\ldots\ldots\ldots 1$

$$\therefore \quad \mathrm{B} = -2\int_1^0 t^2(1-t^2)^2 dt = -2\int_1^0 t^2(1-2t^2+t^4)\,dt$$

$$= -2\left[\frac{t^3}{3} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^7}{7}\right]_1^0 = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right) = \frac{16}{105}$$

例 2.

$$\mathrm{B} = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx, \qquad a > 0$$

$$x = a\sin\theta$$

ト置クナラバ

$$dx = a\cos\theta\,d\theta$$

デアツテ θ ガ 0 ヨリ $\dfrac{\pi}{2}$ マデ變ズル間ニ x ハ 0 ヨリ a マデ變ズル. 卽チ次表ノ通リデアル.

θ	$0 \ldots\ldots\ldots \dfrac{\pi}{2}$
x	$0 \ldots\ldots\ldots a$

此樣ナ θ ニ對シテハ $\cos\theta \geqq 0$ デアルカラ

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = a\cos\theta$$

$$\therefore \quad \mathrm{B} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta\, a\cos\theta\,d\theta$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi a^2}{4} \qquad \left[\text{前節, 例 2}\right]$$

[1] 定理ノ假定ノ成立スルコトハ一目瞭然デアル. 故ニ以下イチイチコレヲ斷ラヌ.

注意. $x = a\sin\theta$ ト置クトキ θ ガ π カラ $\frac{\pi}{2}$ マデ變ズルトシテモ x ハ 0 ヨリ a マデ變化スル. 此樣ニ θ ヲ選ブナラバ上ノ定積分ノ下限ハ零デナクテ π トナル. 併シナガラ其場合ニハ θ ハ第二象限内ノ角トナル故

$$\sqrt{a^2 - x^2} = -a\cos\theta$$

トセネバナラヌ. 卽チ

$$\mathrm{B} = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (-a\cos\theta)a\cos\theta\, d\theta = -\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta\, d\theta = \frac{\pi a^2}{4}$$

44. 部分積分法

$f(x)$, $\phi(x)$ ヲ x ノ函數トスルナラバ第 36 節ニヨリ

$$\int f(x)\phi'(x)dx = f(x)\phi(x) - \int \phi(x)f'(x)dx$$

デアル.

今 $f'(x)$, $\phi'(x)$ ヲ區域 (a, b) 內ニテ連續ナル函數トスルナラバ

$$f(x)\phi'(x), \qquad \phi(x)f'(x)$$

ハ何レモ其區域內ニテ積分スルコトガ出來, 而シテ

$$\int_a^b f(x)\phi'(x)\,dx = \left[\int f(x)\phi'(x)dx\right]_a^b$$

$$= \left[f(x)\phi(x) - \int \phi(x)f'(x)dx\right]_a^b$$

$$= \Big[f(x)\phi(x)\Big]_a^b - \int_a^b \phi(x)f'(x)\,dx \quad \ldots(1)$$

ナル關係ヲ得ル. コレガ定積分ニ於ケル部分積分法ノ公式デアル.

$\phi(x) = x$ ナル特別ノ場合ニ於テハ上ノ公式ハ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[xf(x)\Big]_a^b - \int_a^b xf'(x)\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

トナル.

例 1. $\mathrm{B}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ (n, 正整數)

$$\int \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1} x\,d(\sin x)$$

$$= \cos^{n-1} x\sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\sin^2 x\,dx$$

デアルカラ $n \geqq 2$ ナラバ

$$\mathrm{B}_n = \Big[\cos^{n-1} x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x(1-\cos^2 x)dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x(1-\cos^2 x)dx = (n-1)(\mathrm{B}_{n-2} - \mathrm{B}_n)$$

コレヨリ B_n ヲ求ムレバ

$$\mathbf{B}_n = \frac{n-1}{n}\mathbf{B}_{n-2} \text{ [1]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{A})$$

コレ B_n ニ對スル漸化式デアル. 而シテ

$$\mathrm{B}_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}, \qquad \mathrm{B}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

デアルカラ (A) ノ公式ヲ繰リ返シ適用スルコトニヨツテ B_n ヲ計算スルコトガ出來ル. 卽チ $n = 2r$ ナラバ

$$\mathrm{B}_n = \frac{2r-1}{2r}\cdot\frac{2r-3}{2r-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\mathrm{B}_0 = \frac{1.3.5\ldots\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2r}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$n = 2r+1$ ナラバ

$$\mathrm{B}_n = \frac{2r}{2r+1}\cdot\frac{2r-2}{2r-1}\cdots\frac{2}{3}\cdot\mathrm{B}_1 = \frac{2.4.6\ldots\ldots 2r}{3.5.7\ldots\ldots(2r+1)}.$$

同樣ニシテ定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$$

[1] コノ公式ハ第 36 節, 例 5 ノ結果ヲ用ヒテ直接ニ出スコトモ出來ル. 又コノ漸化式ハ n ガ整數デナクトモ 2 ヨリ大ナル正數ナラバ成立スルコト明カデアル.

ヲ計算スルコトモ出來ル．結果ハ上ノ B_n ト同ジニナル．即チ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$$

トナルノデアル．

例 2. $$B_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\,dx \qquad \left(m,\ n\ \text{正整數}\right)$$

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \int \sin^m x \cos^{n-1} x\,d(\sin x)$$

$$= \frac{\sin^{m+1} x}{m+1}\cos^{n-1} x - \int \frac{\sin^{m+1} x}{m+1}\,d(\cos^{n-1} x)$$

$$= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\,dx$$

デアルカラ $n \geqq 2$ ナラバ

$$B_{m,n} = \left[\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\,dx$$

$$= \frac{n-1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x)\,dx$$

$$= \frac{n-1}{m+1}(B_{m,n-2} - B_{m,n})$$

コレヨリ $B_{m,n}$ ヲ求ムルナラバ

$$\mathbf{B}_{m,n} = \frac{\boldsymbol{n-1}}{\boldsymbol{m+n}}\mathbf{B}_{m,n-2}{}^{(1)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{B})$$

コレガ $B_{m,n}$ ニ對スル漸化式デアル．

同様ニシテ $m \geqq 2$ ナラバ

$$\mathbf{B}_{m,n} = \frac{\boldsymbol{m-1}}{\boldsymbol{m+n}}\mathbf{B}_{m-2,n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{B}')$$

ナル漸化式ヲ出スコトモ出來ル．

公式 (B) 及ビ (B′) ヲ何回カ繰リ返シテ用フルコトニヨリ $B_{m,n}$ ヲ計算スルコトガ出來ル．例ヘバ

(1) 例 1 ノ漸化式ハコノ特別ノ場合デアル．例 1 及ビ例 2 ノ漸化式ハ覺エテ居レバ便利ナコトモアル．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^2 x\,dx = \frac{1}{7}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx \qquad [\text{公式 (B)}]$$

前例ノ結果ヲ用ヒテ

$$= \frac{1}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{105}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^3 x\,dx = \frac{2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos x\,dx$$

$$= \frac{2}{8}\left[\frac{\sin^6 x}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{24}$$

問 題 20.

次ノ積分ノ値ヲ求ム (1—10)

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\,dx$　　**2.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x \sin^2 x\,dx$

3. $\int_1^2 x^n \log x\,dx$　　**4.** $\int_0^1 x^2 \tan^{-1} x\,dx$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\,dx$　　**6.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\,dx$

7. $\int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2}\,dx \quad (a > 0)$　$\left[x = 2a\sin^2\theta \text{ トオケ}\right]$

8. $\int_0^{2a} x^2\sqrt{2ax - x^2}\,dx$　　**9.** $\int_\alpha^\beta \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}\,dx$

10. $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \quad \left(m, n \text{ 正整數}\right)$

11. $$\int_{-1}^1 (1+x)^m(1-x)^n dx = 2^{m+n+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1}\theta \cos^{2n+1}\theta\,d\theta$$

ヲ證明セヨ $\left[x = 2t - 1 \text{ ト置キ然ル後 } t = \sin^2\theta \text{ ト置ケ}\right]$．

次ノ等式ヲ證明シ且ツ之ヲ幾何學的ニ説明セヨ (12—17).

12. $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ $\left[\text{左邊ノ積分ニ於テ } x = a - t \text{ ト置ケ}\right]$.