代數學講義錄

長澤龜之助

講述

大日本中學會藏版

(非賣品)

目次

第一編

第二編

第三編

第四編

第五編

第六編

第七編

第八編

代數學講義錄

長澤龜之助 講述

1. 代數學トハ英語ニ之ヲ Algebra(アルゼブラ) ト云ヒ,如何ナル學問ナリヤト問ハヾ,亦算術ト同ジク數ヲ論ズル學問ナリト答フベシ,然ラバ算術ト代數學トハ何ヲ以テ區別スベキヤト問フニ,之レニ答フルニハ二三言ヲ以テ盡スヿ能ハズト雖ドモ先ヅ下ノ如ク答フベシ.

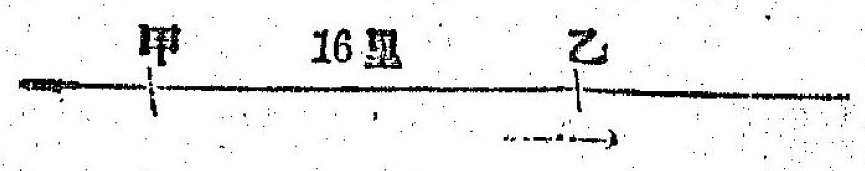
算術ニ於テハ,數ヲ論ズルニ當リ,數字ヲ用ヒテ數ヲ顯ハセドモ,代數學ニ於テハ「アベセ」ノ字母ヲ用ヒテ任意ノ數ヲ顯ハス. 之ヲ詳言スレバ,算術ニ於テハ, 1, 2, 3, 等ノ數字ヲ用ヒテ數ヲ顯ハスガ故ニ,其數價ハ一定セリ,例ヘバ 5 トカ 27 トカハ,五ト二十七ヨリ他ノ數價ヲ顯ハス能ハズ;然レドモ代數學ニ於テハ「アベセ」ノ字母,例ヘバ a, b, c, x, y, z 等ヲ用ヒ,而シテ此 a, b, c, x, y, z 等ハ任意ノ數ヲ顯ハスヿヲ得ルナリ,此任意ノ數トハ「コヽロノマヽノカズ」ト云フ義ニテ,ドンナ數デモ,如何ナル數デモト云フヿニシテ,例ヘバ a ノ如キハ或人ノ所有金ヲ a 圓トセバ,若シ此人ガ百圓ノ金ヲ所有スル時ハ, a ハ 100 ヲ顯ハシ,又此人ガ唯一圓ノ金ヲ所持スレバ, a ハ 1 ヲ顯ハスガ如ク,此 a ハ如何ナル數ノ代リニモ用ユルヿヲ得ベシ代數學ニ於テ用ユル字母ハ,普通ノ羅馬字 $a, b, c, \ldots\ldots A, B, C, \ldots\ldots$ ノミナラズ,又希臘字 α(アルフハ), β(ビータ), γ(ガンマ),……ノ如キヲ用ヒ,然レドモ又往々 $a', a'', a''', \ldots\ldots$ 又ハ $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots$ ヲ用ユルヿアリ;而シテ如何ナル場合ニ如何ナル字母ヲ用ユルカハ追々此講義錄ヲ讀ム時ハ了解スルヿアラン.

但シ a, a', a'', 又ハ a_1, a_2, a_3 ノ如キハ,概シテ相異ナル數價ヲ顯スモノニテ,何モ彼此相關スルヿナシト知ルベシ.

是ノ如ク算術ト代數學トハ,同ジク數ヲ論ズル學問ニシテ,唯數ヲ顯ハスニ,一ハ數字ヲ用ヒ,一ハ字母ヲ用ユルノ異アルニ過ギザレドモ,此相異ア

ルガ爲メ,其結果ノ懸隔極メテ大ナリ,今一例ヲ設ケテ之ヲ示サン.

例　甲乙二騎アリ,甲ハ乙ニ後ルヽコト十六里ニシテ,甲騎ハ毎時五里ヲ馳セ,乙騎ハ毎時三里ヲ馳ルト云フ,然ラバ甲騎ハ幾時ニシテ乙騎ニ追ヒ付クベキヤ. 又其時間中ニ乙ハ幾里馳セシヤ.



解. 甲乙二騎ノ距離ハ 16 里ニシテ,二騎ハ何レモ矢線ノ方向ニ馳スルモノトス. サテ毎時甲ハ 5 里,乙ハ 3 里ヲ馳スルユヘ,甲ハ乙ヨリ一時間ニ 5−3 即チ 2 里多ク行クユヘ,此毎時ノ多キ里數 2 里ヲ幾ツ合セテ 16 里トナルカヲ求ムベシ,乃チ 2 里ヲ積ンデ 16 里トナリタル時ハ,甲騎ハ乙騎ニ追ヒ付キタルナリ,此時間ハ $\frac{16}{5-3}$ 即チ 8 時間ナリ. 而シテ此時間中ニ乙ノ行キタル里數ハ $8\times3=24$ 里ニシテ,委シク云ヘバ $\frac{16\times3}{5-3}$ 即チ 24 里ナルベシ. 依テ此問題ノ既知數ヲ代數的ニ顯ハセバ次ノ如シ.

甲乙二騎アリ,甲ハ乙ニ後ルヽコト d 里ニシテ,甲騎ハ毎時 a 里ヲ馳セ,乙騎ハ毎時 b 里ヲ馳ルト云フ,然ラバ甲騎ハ幾時ニシテ,乙騎ニ追ヒ付クベキヤ. 又其時間中ニ乙ハ幾里馳セシヤ.

解. 甲乙二騎ノ距離ハ d 里ニシテ,毎時ノ速サ甲ハ a 里乙ハ b 里[illegible],a ハ b ヨリ大ナリト見ルナルユヘ甲ハ乙ヨリ毎時 $a-b$ 里丈ケ多ク行クベシ,故ニ甲ハ $\frac{d}{a-b}$ 時間ニテ,乙ニ追ヒ付クベク,又其時間中ニ乙ハ $\frac{d\times b}{a-b}$ 里馳セタルナリ.

故ニ　所要ノ時間ハ $\frac{d}{a-b}$ (1); 所要ノ里數ハ $\frac{d\times b}{a-b}$ (2). 此(1)及ビ(2)ハ a ヲ b ヨリ大キク取レバ,a 及ビ b ニ如何ナル數ヲ命ズルモ,恒ニ前ノ算術上ノ問題ニ符合スベシ,例ヘバ $a=5$, $b=3$, $d=16$ トスレバ,前ノ如ク 8 時間ト 24 里ヲ得. 又 $a=6$, $b=4$, $d=20$ トスレバ,10 時間ト 40 里トヲ得, 又 $a=7$, $b=3$, $d=24$ トスル時ハ,6 時間ト 18 里ヲ得ベシ.　故ニ代數的ノ結果(1)及ビ(2)ハ最初ノ算術上ノ問題ハ申スニ及バズ其他

甲乙二騎アリ,甲ハ乙ニ後ルヽコト二十里ニシテ,甲騎ハ毎時六里ヲ馳セ,乙騎ハ毎時四里ヲ馳ルト云フ,然ラバ甲騎ハ幾時ニシテ,乙騎ニ追ヒ付クベキヤ. 又其時間中ニ乙ハ幾里馳セシヤ.

甲乙二騎アリ,甲ハ乙ニ後ルヽコト二十四里ニシテ,甲騎ハ毎時七里ヲ馳セ,乙騎ハ毎時三里ヲ馳ルト云フ,然ラバ甲騎ハ幾時ニシテ,乙騎ニ追ヒ付クベキヤ. 又其時間中ニ乙ハ幾里馳セシヤ.

此等同種ノ問ハ,如何ニ a, b, d ノ數ヲ變ズルモ,a ヲ b ヨリ大ニ取レバ悉ニ(1)及ビ(2)ノ結果ニ含蓄サルベシ.

又若シ $a=3$, $b=5$, $d=16$ トスル時ハ,$a-b$ ハ $3-5=3-3-2=-2$ トナル,蓋シ 5 ヲ減ズルハ 3 ト 2 トヲ減ズルニ同ジキガ故ナリ而シテ 16 ヲ -2 ニテ除シタル結果ヲ -8* トシ,之レヲ今ヨリ以前ノ時間ヲ表ハス數ト解釋スル時ハ,(1)及ビ(2)ノ二ツノ結果ハ,倘ホ又其場合ヲモ含有スベシ,乃チ其場合ニ於テハ算術上ノ問題ハ少シク言葉ヲ改ムレバ,次ノ如クナルベシ:

甲乙二騎同ジ方向ニ馳スルニ,現在甲ハ乙ニ後ルヽコト十六里ナリ,今其毎時ノ速サヲ甲ハ三里,乙ハ五里トセバ,今ヨリ何時間前ニ甲乙ガ相並ビシヤ。

乃チ此問題ノ答ハ今ヨリ八時間前ニシテ,甲ハ里數ニテ云ヘバ,今ヨリ 3×8 即チ 24 里前ニアリ,乙ハ 5×8 即チ 40 里前ノ處ニアリシ筈ナルニヘ,甲乙相並ビシコ明カナリ.

此ニ由テ之ヲ視レバ,代數學ニ於テハ,算術上ノ同種ノ問題ヲ概括シテ顯ハスノ功能アリ,尚ホ詳カニハ追々ト解(ワカ)ルヨウニナランノミ.*

代數學ノ原語 Algebra(アルゼブラ) ハ,元ト「アラビヤ」國ノ語ヨリ來ル,其事ハ除ク(?)ハ後欧二次方程式ノ處ニテ說クベシ,而シテ代數學ト云ヘル語ハ清國學者偉烈氏ノ代數學ニ始ル.

2. 記號　a, b, c, x, y, z 等ノ如ク,數ヲ顯ハスニ用ユル字母ヲ記號(シムボル)(Symbol)ト名ク,乃チ代數學記號ニテ顯ハセル數ハ皆無名數ナリ. 又ニ名數ハ如何ナルモノニテモ,之レト同ジ種類ノ單位ト比較シテ,其倍數ニテ測ルモノトス;例ヘバ物ノ目方何斤ト云ヘルハ斤ト云ヘル單位ト比較スルガ如シ.

---

*−8 ノ意味ハ後ニ詳カナリ.

*代數學ハ算術上同種ノ問題ヲ概括一般ニスルノ要用アルガ故ニ英國ノニウトンハ之ヲ普通算術(ユニバーサル)(Universal Arithmetic)ト命セリ

3. 演算之記號　演算ノ記號(Symbols of Operation)トハ,代數的ノ演算ヲ顯ハスニ用ユル一定ノ記號ノコナリ之ヲ時トシテハ單ニ記號ト云ヘルモ數ヲ顯ハス記號トハ混同スベカラズ;又更ニ此ノ如ク記號ノ二字ヲ二ケ通ノ意味ニ用ユルモ妨ゲアル恐レナキモノトス. 乃チ此記號トハ,+,−,×,÷,＝等ノモノニシテ,其用ハ算術ト同ジ.

4. 式　式委シク云ヘバ代數式(Algebraical Expression)トハ,代數記號ノ集合ヨリ成ルモノニシテ,尚ホ充分ニ之ヲ述ブレバ,數又ハ數ニ代フル字母ヲ,演算ノ記號+−×÷等ニテ結合シタルモノヽコナリ. 例ヘバ $a+3b-xy$ ノ如シ.

5. 加法　二ツ又ハ三ツヨリ多クノ數ヲ加ヘタルトキハ,其結果ヲ和(Sum)ト稱シ,而シテ加法ニハ(+)ナル記號ヲ用ユ. 此記號ヲ二數ノ間ニ置キタルトキハ,其前ニアル數ニ後ニアル數ヲ加フルノ意ナリ,而シテ此記號ヲ「プラス」(Plus)ト讀ム.

例ヘバ 3+8 ノ如キハ,之ヲ3「プラス」8ト讀ミ,3ニ8ヲ加フルノ意ナリ:又 3+8+15 ノ如キハ,3「プラス」8「プラス」15ト讀ミ,3ニ8ヲ加ヘ,其結果ニ又15ヲ加フルノ義ナリ. コレト均シク $a+b$ ハ a「プラス」b ト讀ミ,a ニテ顯ハセル數ニ b ニテ顯ハセル數ヲ加フルノ意ナリ.

例. 或人金 a 圓ノ資本ヲ以テ,商業ヲ營ミシニ,初年ノ終リニ b 圓ノ利ヲ得次年ノ終リニ x 圓ノ利ヲ得タルトキハ,此人ノ資產金幾圓トナリシヤ.

答. $a+b+x$ 圓ナルコ明カナリ.

6. 減法　一ツノ數ヨリ他ノ數ヲ減シタルトキハ,其結果ヲ差(Difference)ト云ヒ,而シテ減法ニハ(−)ナル記號ヲ用ユ. 此記號ヲ二數ノ間ニ置キタルトキハ,其前ニアル數ヨリ,後ニアル數ヲ減スルノ意ナリ,而シテ此記號ヲ「マイナス」(Minus)ト讀ム.

例ヘバ 8−5 ノ如キハ,之ヲ,8「マイナス」5ト讀ミ,8ヨリ5ヲ減ズルノ意ナリ. コレト均シク $x-y$ ノ如キハ之ヲ x「マイナス」y ト讀ミ,x ニテ顯ハセル數ヨリ y ニテ顯ハセル數ヲ減ズルノ意ナリ. 又 $a-b+c-d$ ノ如キハ,之ヲ a「マイナス」b「プラス」c「マイナス」d ト讀ミ,a ニテ顯ハセル數ヨリ,b ニテ顯ハセル數ヲ減ジ之レニ c ニテ顯ハセル數ヲ加ヘ,其結果ヨリ d ニテ顯ハ

セル數ヲ減ズルノ意ナリ.

凡テ加減ノ符號ニテ結ビ付ケタル式ハ,左ヨリ右ニ向ヒテ順次ニ演算スルモノト知ルベシ.

例　或人 x 圓ノ資本金ヲ以テ商業ヲ營ミシニ,初年ニ y 圓ヲ利シ,次年ニ z 圓ヲ損シ,三年目ニ u 圓ヲ利セリト云フ.問フ此人ノ資產金幾何トナリシヤ. 答. $x+y-z+u$ 圓ナルコ明カナリ.

代數學ニテハ夥多ノ演算ノ記號ヲ用ユレモ,符號(Sign)ト云フトキハ唯(+)及ビ(−)ノ二ツヲ指スモノト知ルベシ.

7. 正量及ビ負量　加法ト減法トノ二ツノ演算ハ互ニ相反セルコ明カナリ　+a ハ加フベキ a,即チ增スベキ a ノ意味ナルトキ,−a ハ減スベキ a,即チ耗ラスベキ a ノ意ナリ;而シテ若シ此二ツノ演算ヲ等數ニ施ストキハ,何レヲ先キニスルモ,更ニ其數ニ增減ナカルベシ.

例ヘバ或一定ノ點ヨリ,發シタル距離ヲ論ズルトキ,+a ハ東ノ方ヘ行キタル a 間ノ距離ヲ顯ハスモノトセバ,−a ハ西ノ方ヘ行キタル a 間ノ距離ヲ顯ハスベシ. 故ニ或人ガ一定ノ點ヨリ東ヘ五間行クトキハ,其距離ハ+5ニシテ,西ヘ五間行クトキハ,其距離ハ−5ナルベシ. 故ニ此人若シ東ヘ五間行キ夫レヨリ西ヘ五間行クトキハ,又原ノ點ニ復歸スベシ. 故ニ此人ハ少シモ行カザルニ同ジ,唯原位置ニアリタルモノト,其結果同ジキナリ(此結果ト云フコニ注意スベシ)　前ニ反シテ一定ノ點ヨリ西ヘ行キタル五里ヲ+5ニテ顯ハストキハ,東ノ方ヘ行キタル五里ガ却テ−5トナルナリ.

故ニ方向ニ關シテハ,東ノ方ヲ(+)ニテ顯ハセバ,西ノ方ハ(−)トナリ,又西ノ方ヲ(+)ニテ顯ハセバ,東ノ方ハ却テ(−)トナル.

此ノ如ク又北ノ方ヲ(+)ニテ顯ハストキハ,南ノ方ハ(−)トナリ,又南ノ方ヲ(+)トスレバ,北ノ方ハ却テ(−)トナル.

又商人ノ利益金ヲ算スルトキハ,+a ハ利益ヲ顯ハシ,−a ハ其損失ヲ顯ハスベシ;即チ此人ノ利益金五圓ハ+5ニテ顯ハシ,又損失金五圓ハ−5ニテ顯ハスベシ. 之レニ反シテ此商人ノ損失金ヲ算スルトキハ,五圓ノ損金ハ+5ニテ顯ハシ,又五圓ノ利益ハ−5ニテ顯ハスベシ.　又此人ノ

損益ヲ算スルトキハ,利益ト損失ノ何レヲ(+)ト定ムルモ可ナリ,併シ其何カ一ツヲ(+)ト定ムレバ,他ノ一ツハ(−)トナルベシ.

此ノ如ク(+)ヲ前置セル量(+a)ノ如キヲ正量(Positive Quantity)トシ,(−)ヲ前置セル量(−a)ノ如キヲ負量(Negative Quantity)トハ云フナリ. 而シテ正量ハ增加ヲ意味シ,負量ハ減少ヲ意味シ,此二ツハ全ク相反セル性質ノモノナルヿヲ示シ,時トシテハ此(+)及ビ(−)ヲ性質ノ符號(Signs of Affection)ト云フ.

此正量負量ト云フヿハ,全ク相反セル性質ノモノナルヿヲ示スユヘ,此他夥多ノ例ニ就テ示スヿヲ得ベシ:

例ヘバ我神武天皇紀元後ノ年數又ハ西暦紀元後ノ年數ヲ正量トセバ紀元前ノ年數ハ負量ナルベシ. 故ニ古代幾何學ノ大家ユークリッドト云フ人ハ西暦紀元−300年頃ノ人ナリト云ハヾ,此人ハ紀元前300年頃ノ人ナリト云フヿナリ.

又貸シタル金高ヲ正量トスルトキハ,借リタル金高ハ負量ナリ.

又午後ノ時間ヲ正量トスルトキハ,午前ノ時間ハ負量ナリ.

又寒暖計ノ水銀上昇シタル度數ヲ正量トスルトキハ,下降シタル度數ハ負量ナリ.

餘ハ推シテ知ルベシ.

以上述ベタルヿヲ總括スレバ

(1) 代數學トハ如何ナル學問ナリヤ. (2) 代數學ト算術トノ區別ハ何レニアリヤ. (3) 代數學ハ何故ニ概潤算術ト云フヤ. (4) 何人カ斯ク名付ケシヤ. (5) 記號トハ如何ナルモノヲ云フヤ. (5) 演算ノ記號トハ如何ナルモノナルヤ. (6) 代數式又ハ式トハ如何 (7) 加法ノ記號ハ如何又加ヘタル結果ヲ何ト云フヤ. (8) 減法ノ記號ハ如何又減シタル結果ヲ何ト云フヤ. (8) 符號トハ如何. (10) 加法及ビ減法ノ符號ニテ結ビ付ケタル式ハ如何ニ演算スベキヤ. (11) 正量及ビ負量トハ如何ナルモノナルヤ. 實例五ツヲ擧ゲテ自ラ答ヘヨ. (12) 正量負量ノ符號トシテ(+)及ビ(−)ヲ用ユルトキハ,名ヶ何[illegible]

以上述ベタルヿハ,能ク之ヲ記憶スルヲ要ス.

特ニ代數學ニ正量及ビ負量ヲ用ユルハ,極メテ緊要ナルヿニシテ,代數學ノ概潤一般ナルヿハ,全クコレカ爲メナリ. 若シ代數學ニ於テ正量ト負量ヲ用ヒズ,單ニ正量ノミヲ用ユルトキハ算術ト殆ント擇フ處ナカラン,學生宜シク注意セヨ.

8. 乘法. 二ツカ又ハ二ツヨリ多クノ數ヲ掛ケ合セテ得タル數ハ,之ヲ此等ノ數ノ積(Product)トハ云フナリ. 但シ掛ケ合ス數カ二ツヨリ多ケレハ,其積ハ亦時トシテハ連乘積(Continued Product)トモ云フナリ.

二ツカ又ハ多クノ數ノ積ヲ顯ハスニハ,此等ノ數ノ間ニ,×ナル記號ヲ置クカ,又ハ一ツノ點ヲ打チテ示スモノトス. 如何ナル場合ニハ,×ヲ書キ,又如何ナル場合ニハ點ヲ打ツヘキカハ,コレヨリ說キ示サントス.

例ヘハ,8×4又ハ8.4ノ如シ(コレハ何レモ「8インツー4」又ハ「8ニ掛ル4」ト讀ムヘシ)委シク云ヘハ,數字ニテ顯ハセル數ノ積ヲ取ルヘキヿヲ示ス場合ニハ,必ス×又ハ.ヲ記スヘシ,但シ此第二ノ形,即チ點ヲ打チテ積ヲ示ス場合ニハ,小數點ト混セサル樣ニ注意スルヿ肝心ナリ,即チ乘法ニ於ケル點ハ,8.4ノ如ク數字ノ下並ミニ打テ氐,小數點ハ數字ノ中程,即チ上下ヨリ均シキ距離ノ處ニ打ツヿ8·4ノ如シ(但シ此小數點ト乘法ノ點ノ打チ方ハ,廣ク本邦ニ行ハルヽ法ニシテ,英國流ト一致ス,又北米合衆國出版ノ書ハ大抵コレト反對ナリ) 此×ト・ヲ數字ノ間ニ挿ムトキハ,如何ナル場合ニ何レヲ挿ムカト云ヘハ,算術上ニハ多ク×ヲ用ヒ,代數學ノ進歩シタル部分ニハ・ヲ用ユ,然レ氐コレ必ス誤リト云フニハアラズ,其區別ハ多ク習慣ニ基クモノニシテ,段々ト進ムトキハ自ラ了解スル處アラン.

又數字ト字母,又ハ字母ト字母ニテ顯ハセル數ノ積ヲ取ル場合ニハ,×モ・モ記セズシテ,唯之ヲ並ヘ記シテ積ヲ顯ハスヲ通例トス.

例ヘハ5×a又ハ5.aノ代リニ5aト記シ;x×y又ハy.xノ代リニxyト記シ;之ヲ讀ムニハ唯續ケテ,「5エー」トカ又ハ「エッキスワイ」ト連呼スルノミ,此ノ如ク代數上ニテハ,數字ト字母又ハ字母ト字母ニテ顯ハセル數ノ積ハ間ニ記號モ點モ挿マズシテ,之ヲ連記スルヲ通例トスレ氐此法ハ數字ト數

字ニテ顯ハセル數ノ積ニ當テハムル能ハサルヿ勿論ナリ,何故ナルヤト云フニ例ヘハ8ト4トノ積ヲ8×4又ハ8.4ト記セスシテ84ト連記セハ通常十進ノ記法ノ八十四ト間違フルニ至レハナリ.

9. 因子. 種々ノ數ノ積ニ於ケル各數ハ之ヲ其積ヨリ云ヘハ因子(Factor)ト云フ, 若シ因子カ數字ナル時ハ,之ヲ數字因子(Numericl Factor)ト云ヒ. 若シ又因子カ字母ナル時ハ,之ヲ字母因子(Literal Factor)トハ云フナリ.

例ヘハ,$25abx$ナル積ニ於テ,25ハ數字因子ナリ,又aモbモxモ字母因子ナリ.

10. 一ツノ積ノ中ニ,字母因子カ幾ツモアル時ハ,先ヅ數字因子ヲ第一番ニ書キテアトハ字母因子ヲ「アベセ」ノ順ニ書クヲ常トス.

例ヘハ 135,a,x,b,c,y ヨリ成ル積ハ $135abcxy$ ト記スルカ如シ.

又a及ビcノ積ハacト記ス然レ𪜈時トシテハ又caト記スルヿナキニシモアラズ,コレハ「アベセ」ノ順ニ書クヨリモ,何カ特別ナル便利アルカ故ナリ而シテ如何ナル場合ニacト書クヨリモcaト書ク方カ便利ナルカハ,今コヽデ說クヨリ,後ニ說ク方カ却テ解リ易キユヘ,後ニ說クヘシ.

11. 係數. 一ツノ積ノ中ノ因子一ツカ又ハ若干ヲ取リテ,之ヲ他ノ因子ノ係數(Co-efficient)ト云フヿアリ. 而シテ係數ハ數字ニテ顯ハセル數ナルヿアリ,又字母ニテ顯ハセル數ナルヿアリ.

係數カ數字ナル時ハ,之ヲ數字係數(Numerical Co-efficient)ト云ヒ又字母ナル時ハ,之ヲ字母係數(Literal Co-efficient)ト云フ.

例ヘハ, $5abc$ナル積ニ於テ,5ハabcノ係數ニシテ且ツコレハ數字係數ナリ,又aハ$5bc$ノ係數ト云フヿヲ得而シテコレ字母係數ナリ,又$5a$ハbcノ係數,abハ$5c$ノ係數ト云フテモ差支ナシ.

係數カ1ナル時ハ,通例之ヲ省キテ記セサルモノトス,例ヘハaハ$1\times a$ニ同ジキカ如シ.

12. 除法. 一ツノ數ヲ他ノ數ニテ除シタル結果ヲ商(Quotient)ト云ヒ,除セラレタル方ノ數ハ被除數又ハ實(Dividend)ト云ヒ,除スル方ノ數ハ除數又ハ法(Divisor)ト云フナリ.

一ツノ數ヲ他ノ數ニテ除スルヿヲ示スニハ,其中間ニ÷ナル記號ヲ置キテ之ヲ示ス,例ヘハ$a\div b$ノ如シ. 之ヲ「aハイb」又ハ「aワルb」ト讀ム,而シテ被除數ハ必ズ÷ノ前ニアリ,除數ハ必ズ÷ノ後ニアルヿヲ注意スベシ,乃チ$a\div b$ニ於テハaハ被除數ニシテ,bハ除數ナリ. 又÷ノ代リニ/ナル記號ヲ用ユルヿアリ,例ヘハa/bノ如シ,コレ全ク$a\div b$ト同ジ意味ナリ.

除法ニ於テハ,÷又ハ/ナル記號ヲ用ユル代リニ,分數ノ形ニ顯ハスヿアリ,乃チ被除數ヲ分子ニ除數ヲ分母ニ置クナリ.

例ヘハ,$a\div b$モa/bモ$\frac{a}{b}$モ同ジヿナリ. 代數上ニ於テハ,此第一ノ形$a\div b$ハ殆ンド之ヲ用ユルヿナク,多クハ$\frac{a}{b}$ナル分數ノ形ヲ用ユ,然レ𪜈$\frac{a}{b}$ト記スル時ハ,行ヲ費スヿ多キユヘ紙幅ヲ省カンガ爲メ,時トシテハa/bヲ用ユルヿモアレ𪜈,先ヅ一般普通ニハ$\frac{a}{b}$ヲ用ユルト知ルベシ. 又時トシテハ代數上ニテ÷ノ代リニ:ヲ用ユルヿアリ例ヘハ,$a\div b$ノ代リニ,$a:b$ト記スルカ如シ.

13. 括弧. 演算ノ記號ニテ結合セル若干ノ數ヲ一ト纏メニシテ恰モ一ツノ數デアルヨウニ扱フ時ニハ,括弧(Bracket)ト稱スルモノヲ用ユ. 但シ括弧ハ種々ノ形ヲナセ𪜈,通例用ユル形ハ( ),{ },[ ]ナリ此括弧ヲ一ト纏メニセントスル數ノ兩端ニ記スルナリ. 又括弧ノ代リニ括線(Vinculum)ト稱スル處ノ横筋ヲ一ト纏メニセントスル數ノ上ニ記スルコトアリ.

例ヘハ,$a-(b+c)$ノ如キハ,bトcトヲ加ヘタルモノヲ,aヨリ減ズルノ意ニシテ,若シ括弧ヲ記セザル時ハ,$a-b+c$トナリ,コレaヨリbヲ減ジ其結果ニcヲ加フルノ意ニシテ,括線ヲ用ユル時ハ,$a-\overline{b+c}$ニシテ,コレ$a-(b+c)$ニ同ジコトナリ.

又$(a+b)c$ハ,aトbトノ和ニcヲ乘スルノ意ナレ𪜈,$a+bc$ハaニbトcトノ積ヲ加フルノ意トナル,コレ$a+b\times c$ト書キテモ同ジコトナリ,即チbトcトノ積ヲaニ加フルノ義ナリ. コレ算術上ニ於テ乘法ハ加減ノ演算ヨリ先キニ施スベシト云フ所以ナリ.

例ヘハ $30+(5\times3-2\times8)$ノ如キハ,先ヅ5ト3トノ積ヲ30ニ加ヘ,其結果ヨリ2ト8トノ積ヲ減セヨトハ,算術上一般普通ノ規約ト言フテモヨロシ

[illegible]コトナリ．其譯ケハ何ニ基クヤト云ヘバ,此式ノ演算ヲ代數上ト一致合同セシメンガ爲メノミ．乃チ 30 ヲ a トシ,5 ヲ b トシ,3 ヲ c トシ,2 ヲ d トシ,8 ヲ e ニ代フル片ハ,前ノ算術上ノ式 $30+5\times3-2\times8$ ハ $a+b\times c-d\times e$ トナリ,之ヲ代數上ニテハ $a+bc-de$ ト記スルヲ得．故ニ此最後ノ形ハドウシテモ a ニ b,c ノ積ヲ加ヘ,コレヨリ d,e ノ積ヲ引クノ意ト見ザルヲ得ズ．故ニ算術上ニテモ,コレト一致セシメンガ爲メニ,5×3,2×8 ヲ先キニ演算シテ,加減ノ演算ヲ後ニスルコトヽ知ルベシ,

又 $(a+b)\div c$ ハ,a ト b トノ和ヲ,c ニテ除スルノ意ナレバ,コノ括弧ヲ省ク片ハ,$a+b\div c$ トナリ,コレ $a+\dfrac{b}{c}$ ニ同ジクシテ,a ニ b ヲ,c ニテ除シタル商ヲ加フルノ意トナル．

又コヽニ注意スベキコトアリ,$a\div b\times c$ ノ如キハ,a ヲ b ニテ除シ,其結果ニ c ヲ乘ズルノ意ニシテ,$a\div bc$ ノ如キハ $a\div(b\times c)$ ニ同ジク,a ヲ b 及ビ c ノ積ニテ除スルノ意トナル．

又 $(x+y)(x-y)$ ノ如キハ,x ト y トノ和ニ,x ト y トノ差ヲ乘ズルノ義ナリ,

又一ツノ式ニ括弧數雙ヲ併用スルコトアリ．

例ヘバ,$a-[b-\{c+d-(e-f)\}-d]$ ノ如シ,コレ c ト d トノ和ヨリ,e カラ f ヲ引キタル餘リヲ減シ,其結果ヲ b ヨリ引キ,夫レヨリ又 d ヲ引キ,其餘リヲ a ヨリ減スルノ意ナリ．

14．相等ノ符號． 相等ノ符號ハ,算術ノ如ク,又 $=$ ヲ用ユ．

例ヘバ,$a+b=x$ ハ「a プラス b イクォリールス x」ト讀ミ,a ト b トノ和ガ x ニ等シキコトヲ示スモノナリ．

15．不等ノ符號． 不等ノ符號ハ $\neq$ ナリ．

例ヘバ,$a\neq b$ ハ a ハ b ニ等シカラズトノ意ナリ,委シク云ヘバ $a\neq b$ ハ a ハ b ヨリ大ナルカ,又ハ a ハ b ヨリ小ナルノ意ナリ．

16．大小ノ符號． 或數ハ他ノ數ヨリ大ナリト云フ片ハ,$>$ ナル符號ヲ用ヒ,又或數ハ他ノ數ヨリ小ナリト云フ片ニハ,$<$ ナル符號ヲ用ユ．

例ヘバ,$a>b$ ト記シタル片ハ,a ハ b ヨリ大ナルコトヲ示シ,又 $a<b$ ト記シタル片ハ,a ハ b ヨリ小ナルコトヲ示ス

17．大ナラズ,又ハ小ナラズト云フ符號． 此符號ハ $\ngtr$ 又ハ $\nless$ ナリ．

例ヘバ,$a\ngtr b$ ハ a ハ b ヨリ大ナラズト云フコトニシテ,又 $a\nless b$ ノ如キハ a ハ b ヨリ小ナラズト云フコトナリ．

故ニ $a\ngtr b$ ト云フ片ハ,$a=b$ ナルカ又ハ $a<b$ ノ何レカナリ．

又 $a\nless b$ ト云フ片ハ,$a=b$ ナルカ又ハ $a>b$ ノ何レカナリ．

18． 今コヽニ a ト b トノ二數ニ就テ,其關係ヲ示スニ,$=$ $\neq$ $>$ $<$ $\ngtr$ $\nless$ ナル符號ヲ用ユベシ．

$a=b$ ハ,a ト b トノ相等シキコトヲ示ス

$a\neq b$ ハ,$\begin{cases}a>b\\ a<b\end{cases}$ ノ二ツノ內一ツニシテ,a ハ b ヨリ大ナルコトヲ得,又 a ハ b ヨリ小ナルコトモ出來ルナリ．

$a>b$ ハ,a ハ b ヨリ大ナルコトヲ示ス．

$a<b$ ハ,a ハ b ヨリ小ナルコトヲ示ス．

$a\ngtr b$ ハ,$\begin{cases}a=b\\ a<b\end{cases}$ ノ二ツノ內一ツニシテ,a ハ b ニ等シキコトヲ得,又 a ハ b ヨリ小ナルコトヲ得ルナリ．

$a\nless b$ ハ,$\begin{cases}a>b\\ a=b\end{cases}$ ノ二ツノ內一ツニシテ,a ハ b ヨリ大ナルコトヲ得,又 a ハ b ニ等シコトヲ得ベ

19．複符號． $\pm$ ナル符號ハ二ツノ意味ヲ有スルガ故ニ之ヲ複符號ト云ヒ之ヲ或數ノ前ニ置キタル片ハ,其數ハ正又ハ負ノ意味ナリ．

例ヘバ,$\pm a$ ノ如キハ $+a$ カ又ハ $-a$ ノ二ツノ內一ツヲ指スモノト知ルベシ．

20． $\therefore$ ハ故ニト云フ符號ナリ

21． $\because$ ハ如何トナレバト云フ符號ナリ．

22．差ノ符號 $\sim$ ヲ二ツノ數ノ間ニ置キタル片ハ大ナル方ノ數ヨリ小ナル方ノ數ヲ減スベキコトヲ示ス．

例ヘバ,$a\sim b$ ハ a ト b トノ差ヲ取ルベキコト,即チ a ガ b ヨリ大ナレバ,

a ヨリ b ヲ引クベシ,又 b ガ a ヨリ大ナレバ b ヨリ a ヲ引クベシ.

以上述ベタルコトヲ總括スル片ハ

(1) 積トハ如何. 又連乘積トハ如何. (2) 乘法ノ點ト小數ノ點トハ,如何ニ區別スベキヤ. (3) 因子トハ如何. (4) 係數トハ如何, (5) 商,被除數,及ビ除數トハ如何. (6) 括弧ノ種々ノ形ハ如何. 又括線トハ如何. (7) $=,\neq,>,<,\not>,\not<$ ナル符號ノ意ヲ詳述セヨ. (8) $\pm, \therefore, \because$ ナル符號ヲ說キ明セ. (9) $\sim$ ナル符號ハ如何.

23. コレヨリ是迄述ベタルコトノ用例ヲ示スベシ.

例 1. $(a+b)(c-d)$ ニ於テ $a=5,\ b=2,\ c=8,\ d=3$ トセバ,其數價如何.

茲ニ
$$(a+b)(c-d)=(5+2)(8-3)$$
$$=7\times5$$
$$=35$$

乃チ其答ハ 35 ナリ.

例 2. $a+b-(m-n)xy$ ニ於テ, $a=10, b=15, m=5, n=3, x=1, y=2$ トセバ,其數價如何.

茲ニ
$$a+b-(m-n)xy=10+15-(5-3)\times1\times2$$
$$=10+15-2\times1\times2$$
$$=10+15-4$$
$$=25-4$$
$$=21$$

故ニ所要ノ結果ハ, 21 ナリ.

例 3. $ab+cd-ef$ ニ於テ, $a=10, b=8, c=6, d=4, e=2, f=1$ トセバ其數價ハ如何.

茲ニ
$$ab+cd-ef=10\times8+6\times4-2\times1$$
$$=80+24-2$$
$$=104-2$$
$$=102$$

故ニ所要ノ數價ハ 102 ナリ.

學生宜シク此ノ如キ式ヲ演習セント欲セバ,問題ヲ記載セル書中ヨリ

取リテ自ラ演習スベシ,次ニ二三ヲ示ス.

$a=7, b=2, c=1, x=10, y=3$ ナル片次ノ各式ノ數價如何.

$2a-5b+c.$ 答 5. $y-(x-2y).$ 答 3 $a+5b-7c-x.$ 答 0.

24. 上ノ例ノ演算ノ仕方ヲ概述スレバ,

(1) 演算ハ一階毎ニ別々ノ行ニ書クベシ(續ケテ連記スベカラズ)

(2) 新ラシキ行ハ前ノ行ノ下ニ置キテ書クベシ.

(3) 相等ノ符號ニハ一ツノ縱行ニアルヨウニ揃ヘテ書クヲ必要トス或書ニ於テハ,此規則ニ從ハズ,連記スルコトモアルベシ.

例ヘバ,上ノ例3ニ於テハ $ab+cd-ef=10\times8+6\times4-2\times1=80+24-2=104-2=102$ ト記スルガ如シ,コレ紙幅ヲ省カンガ爲メノ窮策ニ出ルモノニヘ學生ハ自ラ手帳ニ記スル片ハ必ズ上ノ例ノ書キ方ニ依レ.

25. 乘羃或ハ羃一ツノ數ニ,此數自ラヲ幾タビモ掛ケ合セテ得タル積ハ此數ノ乘羃又ハ單ニ羃(パワーPower)ト云フ.

例ヘバ, $a\times a$ ハ a ノ二乘羃ト云ヒ,又ハ a ノ平方ト云フ.

又 $a\times a\times a$ ハ a ノ三乘羃ト云ヒ,又ハ a ノ立方ト云フ.

$a\times a\times a\times a$ ハ a ノ四乘羃ト云フ. 餘ハ之レニ倣ヘ.

26. 指數. a ノ平方ハ, aa ト記スル代リニ,通例 a^2 ト記ス,即チ此 a ノ右ノ肩ニ小サク書キタル 2 ハ, a ナル因子ヲ幾回取リテ掛ケ合スベキカヲ示スモノナリ. 又 a ノ立方ハ, aaa ト記セズシテ,通例之ヲ a^3 ト記シ; 又 a ノ四乘羃即チ $aaaa$ ハ a^4 ト記ス. 而シテ一般ニ a ト云フ因子ヲ n 個丈ケ取リテ掛ケ合セタル積ハ, a^n ト記ス. 此 a ノ右ノ肩ニ書キタル小サキ字,即チ n ハ, a^n ノ指數(インデツキスIndex 又ハ エキスポネントExponent)トハ云フナリ.

a ノ二乘羃三乘羃等ニ對シテ云フ片ハ, a 自ラハ a ノ一乘羃ト云ヒ, a^1 ナリ然レΕ此指數ハ通例之ヲ書カヌモノナリ,乃チ a ハ a^1 ニ同ジコトナリ.

例ヘバ, a^7 ハ a ノ七乘羃ニシテ, a ト云フ因子ヲ七回取リテ掛ケ合セタル積ナリ. 此場合ニ於テ指數ハ 7 ナリ.

又 $3aaabb$ ノ代リニ $3a^3b^2$ ト記シ, $5xxxxyyyzz$ ノ代リニハ $5x^4y^3z^2$ ト記ス.

注意　初學者ハ往々指數ト又上欵ニ述タル $a_1, a_2, a_3,$ 等ト混ズルコトアリ．但シ $a^2, a^3, a^4,$ 等ノ 2, 3, 4 等ハ,a ヲ何回取ルト云フ回數ヲ示スモノナレ圧,又 $a_2, a_3, a_4,$ 等ノ 2, 3, 4, 等ハ, a_2, a_3, a_4 等ガ相異ナル數價ヲ顯ハスト云フ外;何モ意味ナキナリ．然レ圧初學者ハ又一ツ疑フコトアラン．ソハ外ノコトニアラズ,a_2, a_3, a_4 等ハ相異ナル數價ヲモツト云フ外何モ意味ナキコトナレバ,何故ニカヽル記號ヲ用ユルヤ,何故ニ $a, b, c,$ 等ノ相異ナル字母ヲ用ヒザルヤト疑フコトアルベシ．コレ一應尤モノコトナリ．併シナガラ此疑ハコヽデ充分ニ説示セザルモ後ニハ,段々ト解ルモノナリ;又コヽデ充分ニ説示スルコトハ到底困難ノコトナリ．依テ余ハ後ニ之ヲ詳悉スルノ時機ヲ與フベケレ圧,先ヅ次ノ一例ヲ示スベシ

甲乙丙三人ノ脚夫アリ,甲ハ一日ニ十里宛歩ミ,十五日間歩行セリ，又乙ハ一日ニ十一里宛歩ミ,十六日間歩行セリ．又丙ハ一日ニ十二里宛歩ミ十七日間歩行セリ;然ラバ此三人ノ歩行セシ里數ハ各〻幾何ナルヤ,ト問フニ此答ハ互ニ

甲　10×15,　　乙　11×16,　　丙　12×17 ナリ．

尙ホ此問題ノ既知數ヲ,代數的ニ顯ハセバ,即チ字母ニテ顯ハセバ,次ノ如シ:

里ヲ羅馬字ニテ顯ハセバ Ri ト綴リ,又日ハ Hi ト綴ルユヘ,甲乙丙三脚夫ノ每日歩行スル里數ヲ顯ハスニ Ri ノ頭字 r ヲ用ユル片ハ,便利ナルコトアレ圧,甲乙丙三人ノ每日ノ歩行里數ハ,皆相等シキニアラザルユヘ同一ノ字 r ニテハ顯ハスコト能ハズ,何カ之ヲ區別スルノ必要アリ．故ニ甲ノ每日歩行里數ヲ r_1,乙ノ每日歩行里數ヲ r_2,丙ノ每日歩行里數ヲ r_3 ト記スベシ,乃チ此 r ニ小サキ 1,2,3 ヲ附記シタルハ,r ノ數價ガ皆同ジカラザルシルシトナル．又同ジク甲乙丙三人ノ歩行セシ日數ハ, Hi ノ頭字 h ニ 1, 2, 3 ヲ附記シテ示スベシ．然ル片ハ甲乙丙三人ノ歩行里數ハ互ニ

$$r_1h_1,\qquad r_2h_2,\qquad r_3h_3$$

トナル．乃チ此書キ方ハ,里又ハ日ト云フコトヲ暗ニ表示スルノ便アルガ故ニ,里數ヲ $a, b, c,$ 日數ヲ x, y, z ニテ顯ハシ三人ノ歩行セシ里數ヲ

$$ax,\qquad by,\qquad cz$$

等ト記スルヨリハ,却テ大ヒナル便益アルコトアリ．併シ前ニモ云ヒシ如ク,此コトハ後ニ段々ト了解スルノ時機アラン．

例1．　若シ $a=4, b=5$ ナル片ハ, $3a^3b^2$ ノ數價如何．

$$\begin{aligned}3a^3b^2&=3\times aaabb\\&=3\times4\times4\times4\times5\times5\\&=4800.\end{aligned}$$

故ニ此答ハ 4800 ナリ．

例2．　若シ $a=2, b=3, x=4, y=5$ ナル片ハ, $\frac{5}{6}a^3b^2x^y$ ノ數價如何．

$$\begin{aligned}\tfrac{5}{6}a^3b^2x^y&=\tfrac{5}{6}\times2^3\times3^2\times4^5\\&=\tfrac{5}{6}\times8\times9\times1024\\&=5\times4\times3\times1024\\&=61440.\end{aligned}$$

故ニ此答ハ 61440 ナリ．

例3．　若シ $x=2, y=1$ ナル片ハ, $\frac{x^3+y^3}{x+y}$ ノ數價如何．

$$\begin{aligned}\frac{x^3+y^3}{x+y}&=\frac{2^3+1^3}{2+1}\\&=\frac{8+1}{3}\\&=\frac{9}{3}\\&=3.\end{aligned}$$

故ニ此答ハ 3 ナリ．

27． 根．根數．　或數ノ n 乘冪ガ他ノ數ニ等シキ片ハ,此第一ノ數ヲ指シテ,第二ノ數ノ n 乘根(nth Root)トハ云フナリ．

a ノ n 乘根ヲ顯ハス爲メニハ, $\sqrt[n]{a}$ ナル記號ヲ用ヒ,此 $\sqrt[n]{a}$ ヲ稱シテ根數(Surd)ト云フナリ．

此 n ガ 2 ニ等シキ片,即チ或數ノ平方ガ,a ニ等シキ片ハ,此數ヲ a ノ二乘根或ハ最モ普通ニ平方根ト云ヒ則チ $\sqrt[2]{a}$ ニテ顯ハス然レ圧 n ガ 2 ナル片,即チ平方根ノ場合ニハ,此 2 ハ省略シテ $\sqrt{a}$ ト記スルヲ普通トス．

又コレト均シク,n ガ 3 ナル場合,即チ或數ノ立方ガ,a ニ等シキ片ハ,此

數ヲaノ三乘根或ハ最モ普通ニ立方根ト云ヒ,即チ$\sqrt[3]{a}$ニテ顯ハス.

aノn乘根ヲ精密ニ求ムル能ハザル場合,即チnハ1,2,3,等ノ孰レニテモカマワズ,即チaノ平方根デモ,aノ立方根デモ,aノ四乘根デモ,皆精密ニ求ムル能ハザル場合(或ハ之ヲ開キ切レザル場合トモ云フ)ニ於テハ,aノn乘根ヲ指シテ,無理ノ數〔Irrational(イレシヨナル) Quantity(クウオンチチー)〕ト云ヒ,又ハ無理ノ根數〔Irrational Surd(サード)〕トハ云フナリ.

注意. 無理ノ數ニ對シテ,aノ如ク,$\surd$ナル記號ヲ帶ビザル數ヲ有理ノ數〔Rational(レーシヨナル) Quantity〕ト云フコトアリ.

$\surd$ナル記號ハ根號〔Radical(ラヂカル) Sign(サイン)〕ト云ヒ,根ト云フ英語Radix(ラヂツキス)ノ頭字ナロリ變ジ來レルモノナリ.

根號ノ後ニ多クノ數アル時ハ,根號ノ及ブ効力ハ,直グ其次ニアル一ツノ數ニ止ルユヘ,スベテノ數ニ根號ノ効力ヲ及ボサシメン爲メニハ,根號ノ次ニ續クスベテノ數ヲ,括弧ニテ包ムカ,又ハ其上ニ括線ヲ施スコト必要ナリ.

例ヘバ$\surd a+b$ト云ヘ時,aノ平方根ニbヲ加フルコトナルユヘ,若シaトbトノ和ノ平方根ヲ取ラント欲セバ$\surd(a+b)$トスルカ,又ハ$\sqrt{a+b}$トスベシ,此$\surd(a+b)$ハ$(a+b)$ニ根號ヲ附ケタルモノニシテ,又$\sqrt{a+b}$ハ$\overline{a+b}$ニ根號ヲ附ケタルモノ,而シテ前ニ述ベタル如ク,括弧モ括線モ同ジコトユヘ,$(a+b)$モ$\overline{a+b}$モ同ジコトナリ,故ニ此各ニ根號$\surd$ヲ附ケタル$\surd(a+b)$及ビ$\sqrt{a+b}$ハ亦同ジモノニシテ共ニaトbトノ和ノ平方根ノ意ナリ.

コレト均シク$\surd xy$ハ,xノ平方根ニyヲ乘ズルノ意ナルユヘ,x及ビyノ積ヲ平方ニ開カント欲スルトキ即チx及ビyノ積ノ平方根ヲ取ラント欲セバ,宜シク$\surd(xy)$トカ又ハ$\sqrt{xy}$トスルコト肝心ナリ.*

例1. $a=3$, $b=1$, $c=8$ナル時,$5\surd(6a^3b^4c)$ノ數價如何.

$$5\surd(6a^3b^4c)=5\times\surd(6\times3^3\times1^4\times8)$$
$$=5\times\surd(2\times3\times3^3\times8)$$
$$=5\times\surd(3^4\times16)$$

*$\surd xy$ハxノ平方根ニyヲ乘ズルノ意ニシテ,xyノ積ノ平方根ト混ジ易キユヘ$\surd xy$ハ成ルベク避ケテ$y\surd x$ト記スルヲ可トス.

$$=5\times3^2\times4$$
$$=5\times9\times4$$
$$=180.$$

故ニ此答ハ180ナリ.

例2. $a=9$, $b=3$, $x=5$ナル時,$\sqrt[3]{\left(\frac{ab^4}{8x^3}\right)}$ノ數價ヲ求ム.

$$\sqrt[3]{\left(\frac{ab^4}{8x^3}\right)}=\sqrt[3]{\left(\frac{9\times3^4}{8\times5^3}\right)}$$
$$=\sqrt[3]{\left(\frac{9\times9^2}{8\times5^3}\right)}$$
$$=\frac{9}{2\times5}$$
$$=\frac{9}{10}.$$

故ニ此答ハ$\frac{9}{10}$ナリ.

例3. $a=3$, $b=2$, $c=1$ナル時,$a+b\sqrt{a^2-(b^2+c^2)}$ノ數價ヲ求ム.

$$a+b\sqrt{a^2-(b^2+c^2)}=3+2\sqrt{3^2-(2^2+1^2)}$$
$$=3+2\sqrt{9-(4+1)}$$
$$=3+2\sqrt{4}$$
$$=3+2\times2$$
$$=3+4$$
$$=7$$

故ニ此答ハ7ナリ.

例4. $a=3$, $x=7$, ナル時,$\sqrt[3]{(ax^2)}$ノ數價ヲ求ム.

$$\sqrt[3]{(ax^2)}=\sqrt[3]{(3\times7^2)}$$
$$=\sqrt[3]{(3\times49)}$$
$$=\sqrt[3]{(147)}.$$

而シテ此147ハ立方ニ開ク能ハズ,即チ147ノ立方根ハ,精密ニ之ヲ求ムルコト能ハザルユヘ,コノマヽニ存シテ,之ヲ無理ノ根數トシテ扱フカ,又ハ此147ハ算術上ノ方法ニ由リ,小數ノ幾位マデニテモ,欲スル處マデ開キ出スベシ,但シ其小數幾位ト云フコトハ,求ムル處ノ物ニ由リテ定マル

ナリ,他ノ語ニテ云ヘバ,計算ノ目的ニ由リ精密ノ程度異ナルナリ. 例ヘバ求メ得タル結果ハ,圓ヲ單位トセル金高ナリトセバ,小數四位迄計算シテ四捨五入スレバ,厘位マデ正シキモノヲ得ルユヘ,實用ニハ充分差支ナキナリ. 又求メ得タル結果ハ,尺ヲ單位トセル物ノ長サナルトキハ,小數三位迄計算シテ四捨五入スレバ,分ノ位迄正シキモノヲ得ルユヘ,非常ニ精密ヲ欲スルニアラザレバ,一般普通ノ役ニ立チテ少モ差支ナキモノナリ.

注意. 前文ニ述ベタル $\sqrt[3]{(147)}$ ノ如キヲ無理ノ根數トシテ扱フト云フ意味ハ,チト初學者ニハ解シ難キコトナルベシ. 此 $\sqrt[3]{(147)}$ ノ如キハ代數上ニテハ,コノマヽ根數ノ計算法〔後編ニ詳カニス〕ニテ扱フコトアルナリ. 然レドコレハ $\sqrt[3]{(147)}$ ニ未ダ或演算ヲ施スベキ場合ノコトニシテ,若シ一ツノ問題ヲ解キテ得タル最後ノ結果ガ,此ノ如ク〔乃チ $\sqrt[3]{(147)}$〕ナリタルトキハ,是非トモ算術上ノ方法ニ由リ,其略近根即チ根ニ近キ數ヲ開キ出サヾルベカラズ. 併シナガラ此事ハ代數學ヲ修ムルモノハ,既ニ算術上ニテ能ク其方法ヲ知リタルユヘ,何時ニテモ入リ用ノ時ハ,開キ出スコトヲ得ルユヘ,暫ク代數上ニテハ答ヲ此マヽニシテ済シ置クコトアリ.

然レドモ若シ算術上ノ法ニ由リ,尚ホ計算スルトキハ

$$=\sqrt[3]{(147)}$$
$$=5{\cdot}27763\ldots\ldots$$

28. 項. 一ツノ代數式ハ項 (**Term**) ト稱スル各部ヲ+及ビ−ナル符號ニテ結ビ付ケテ成ルモノトス.

例ヘバ $ab+bc+ca$ ノ如キ式ハ,三ツノ項 ab, bc, ca ヨリ成リ,

又 $a-b+c-d$ ノ如キ式ハ,四ツノ項 a, b, c, d ヨリ成ル.

二ツノ項ハ,唯其數字係數ノミヲ異ニスル時〔乃チ二ツノ項ノ中ニ含ム字母モ,亦同ジ字母ノ指數モ皆同ジトス〕ハ,之ヲ稱シテ同類項 (**Like Terms**) ト云フ.

例ヘバ, $5a^2bc^3$ 及ビ $-15a^2bc^3$ 又ハ $7xy^2$ 及ビ $2xy^2$ ノ如キハ同類項ナリ. 然レドモ $5abc$, $6abc^2$ ノ如キハ,同類項ニアラズ; $3a^2bx$, $4ab^2y$ ノ如キモ,亦同類項ニアラズ;如何トナレバ $5abc$, $5abc^2$ ノ如キハ,數字係數モ字母モ同ジケレドモ, c ノ指數同ジカラザル故ナリ. 又 $3a^2bx$, $4ab^2y$ ノ如キハ,含ム處ノ字母,同ジカラズ,又指數モ同ジカラザレバナリ.

+ナル符號ヲ前置セル項ハ,之ヲ正項 (**Positive Term**) ト云ヒ.
−ナル符號ヲ前置セル項ハ,之ヲ負項 (**Negative Term**) ト云フ.

又項ノ前ニ+モ−モナキ時ハ,+ヲ略セルモノト知ルベシ.

例ヘバ $2ax-3by+5cz$ ナル式ニ於テ,第一項ハ $+2ax$ ニ同ジク,即チ正項ナリ. 又第二項ハ負項ニシテ,第三項ハ正項ナリ.

29. 單式及ビ複式. 單式 (**Simple Expression**) トハ,唯一ツノ項ヨリ成ル式ニシテ,複式 (**Compound Expression**) トハ,二ツ又ハ二ツヨリ多クノ項ヨリ成ル式ナリ.

單式ハ又時トシテ一項式 (**Monomial Expression**) ト云ヒ;二項ヨリ成ル複式ハ,之ヲ二項式 (**Binomial Expression**) ト云フ.
又三項ヨリ成ル複式ハ,之ヲ三項式 (**Trinomial Expression**) ト云ヒ,
又三ツヨリ多クノ項ヨリ成ル複式ハ,之ヲ多項式 (**Multinomial Expression**) ト云フ.

例ヘバ $5ab$ ハ單式ナリ,又一項式ナリ.

$$\left.\begin{array}{l} a+b,\ 2ab-3bc\ \text{ノ如キハ,二項式ナリ.}\\ a+b-c\ \text{ノ如キハ,三項式ナリ.}\\ 3a-2b+c-d+e\ \text{ノ如キハ,五項ヨリ成ル多項式ナリ.} \end{array}\right\}\text{複式}$$

他ノ一例トシテ $(\{a+b-\sqrt{m+n}\}-c)(x+y)$ ナル式ヲ考フルニ,此式ハ全體トシテ見レバ,單式即チ一項式ナリ. 又( )ノ內ノ式ハ二項式ナリ,( )ノ內ノ式ハ{ }及ビ c ヨリ成ル二項式ナリ. { }ノ內ノ式ハ $a+b-\sqrt{m+n}$ ナルユヘ,コレ三項式ナリ. 而シテ $\sqrt{\quad}$ ノ內ノ式ハ $m+n$ ナルユヘ二項式ナリ. コレ等ハ式ノ複雜セル場合ニシテ,見ル處ノ點ニ由リ,色々ニ見解スルヲ得ルナリ.

30. 量ノ次數又ハ次元 n 個ノ字母ノ積ヨリ成ル量ハ,之ヲ n 次 (**n^{th} Degree**) 又ハ n 次元 (**n Dimensions**) ナリト云フ.

次數ヲ計ルニハ數字因子ハ,之ヲ算入セザルモノトス.

例ヘバ abc, $5ab^2$, $3a^2b$ 及ビ $8xyz$, $-x^2y$ ノ如キ量ハ,皆三次ニシテ, $abcd$, $2abc^2$ 及ビ xy^2z ノ如キ量ハ,皆四次ナルガ如シ.

時トシテハ,或量ノ中ノ特別ナル字母ヲ撰ミ,其字母ニ就テノ次數ト云フコトアリ。但シ此ノ如キ場合ニハ,只其撰ミタル字母ノミニ就テ,論ズル時ニ限ルモノナリ。

例ヘバ $3x^2y^3z^4$ ナル量ハ x ニ就テハ,二次ニシテ,y ニ就テハ,三次,又 z ニ就テハ,四次ナルガ如シ.

31. 式ノ次數又ハ次元. 式ノ次數トハ,其式ノ中ニアル諸項ノ中,次數最モ大ナル項ノ次數ナリ. 此次數ヲ計フルニハ,通常其式中ニ於テ,一ツノ字母ヲ撰ミ,其字母ニ就テ算スルナリ.

例ヘバ $a^2b+b^3+ac^2$ ハ,a ニ就テハ二次ナリ,然レドモ若シ凡テノ字母ヲ取リ計フル時ハ,三次ナリ. 又 x^2yz+xy^2z ハ x ニ就テハ,二次ニシテ,x 及ビ y ニ就テハ三次,又凡テノ字母ニ就テハ四次ナリ.

式中ノ或字母ニ就テ一次ナル式ハ,之レヲ一次式ト云ヒ,二次ナル式ハ之ヲ二次式ト云フ,逐テ此ノ通リナリ.

例ヘバ $ax+b$ ハ x ニ就テ一次式ナリ. 又 ax^2+bx+c ハ x ニ就テ二次式ナルガ如シ.

32. 齊次式. 複式ノ各項若シ同次ナル時ハ,之ヲ齊次式(Homogeneous Expression)トハ云フナリ.

例ヘバ a^2-bc+c^2 ハ各項二次ナルユヘ,之レ二次ノ齊次式ナリ.

又 $x^3y+x^2y^2+y^4$ ハ四次ノ齊次式ナリ.

33. 範式. 一致式. 一ツノ代數式ヲ二タ色ニ記載シ得ル時,斯ク二樣ニ記載シタル式ヲ相等セシメテ得タル結果ヲ範式(Formula)又ハ一致式(Identity)ト云フ.

此例ハ充分茲ニテ説キ明スコトハ,困難ナルユヘ,後ニ示ス時機アルベシ.

34. 初學者ハ代數式ニテ示シタル演算ヲナスニハ,充分注意シテ,其演算ノ順ヲ誤マラザル樣ニスルコト肝要ナリ.

例ヘバ $a+b\times c$ 或ハ $a+bc$ ハ先ヅ初メニ b ト c トノ積ヲ求メ,其結果ヲ a ニ加フベキコトヲ示スモノナレドモ,$(a+b)\times c$ 或ハ $(a+b)c$ ハ何レモ,a ニ b ヲ加ヘテ得タル和ニ,c ヲ乘スベキコトヲ示スモノナリ.

同樣ニ $\sqrt{x}y+z$ ハ x ノ平方根ニ y ヲ乘ジ,其積ニ z ヲ加フベキコトヲ示セドモ,$\sqrt{xy+z}$ ハ x ト y トノ積ニ z ヲ加ヘ,而シテ其和ノ平方根ヲ取ルベキコトヲ示ス. 上ノ如ク間違ヒ易キ形ノ式ハ,可成ク避ケテ記セザル樣ニシ,一見シテ演算ノ順ガ明カナル樣ニスベシ. 然レドモ,代數學ノ進ムニ從テハ演算ノ都合ヨキ樣ニ記スルモ可ナリ.

第　二　編

加法 及ビ 減法

35. コレヨリ代數式ヲ加ヘ,減ジ,乘ジ又ハ除スル法ヲ述ベントス. 此ノ如キ演算ハ此後常ニ必要ナルユヘ先ヅ如何ニスレバ此等ノ演算ヲ精密ニナスコトヲ得,且又簡便ニナスコトヲ得ルカヲ説明セン. コレヲナスニハ,先ヅ單式ノ加法及ビ減法ニ就テノ定則ヲ擧ゲ,而シテ此定則ヲ複式ニ論及スルヲヨシトス

36. 單式ノ加法及ビ減法. 數多ノ單式ノ加法ハ,其各々ノ單式ニ加法ノ符號,即チ $+$(5欵ヲ見ヨ)ヲ前置シ,而シテ此各單式ヲ符號ト倶ニ一列ニ順ニ記シテ示スベシ. 若シ此各單式中ノ何レカガ,減ズベキモノナル時ハ,其單式ノ前ニ減法ノ符號即チ $-$(6欵ヲ見ヨ)ヲ附シ,之レヲ加フベキ單式ト倶ニ列記スレバ可ナリ.

例ヘバ a ナル數ニ,b ナル數ヲ加ヘコレヨリ,c ナル數ヲ減ズベキコトヲ示スニハ,$a+b-c$ ト記ス. 又 x ナル數ヨリ,y ナル數ヲ減ジコレニ z ナル數ヲ加フベキコトヲ示スニハ,$x-y+z$ ト記ス. 而シテ此ノ如キ式ハ a, b, c 又ハ x, y, z ガ各々如何ナル數或ハ式ヲ顯ハスカヲ知ルマデハ,代數上ニテ最早ヤ之レヨリ進ンデ演算スルコト能ハザルナリ.

37. 已ニ算術ニテ知ル如ク,種々ノ數ノ和或ハ差ヲ求ムルニハ,其演算ノ順ハ如何ニスルモ差支ナキユヘ,若シ此種々ノ數ヲ代數記號即チ字母ニテ顯ハス時ハ,上ノ定則ハ亦之レヲ代數式ニモ適用スルコトヲ得ルナリ.

例ヘバ a ト b トノ和ハ,$a+b$ トモ亦 $b+a$ トモ記スルコトヲ得.

同樣ニ $x+y+z$ ハ $x+z+y$ トモ又 $z+x+y$ トモ,或ハ $y+z+x$ トモ記スルコト

ヲ得ルナリ.

此定則ハ a, b 又ハ x, y, z ニ或數價ヲ與フルカ,或ハ此等ノ字母ハ金高又ハ同ジ方向ニ測リタル里程等ヲ顯ハスモノト攷フレバ,算術ト同樣ニ說明スルコトヲ得ベシ.

例ヘバ或人ガ現金千五百圓ヲ有シ,又貸金三百圓ヲ有スルトシ,此人ノ現金千五百圓ヲ a ニテ顯ハシ,又其貸金ヲ b ニテ顯ハセバ,此人ノ全所有金ハ $a+b$ トスルモ又 $b+a$ トスルモ少シモ違ヒアルコトナキガ如シ.

其他算術ノ加法及ビ減法ニ於ケル種々ノ定則ハ,皆之レヲ代數學ノ加法及ビ減法ニ適用スルコトヲ得ルナリ.

例ヘバ $a+b-c-d$ ハ $a-c+b-d$ 又ハ $a-d-c+b$ 或ハ $a+b-d-c$ 等,其他何レノ形ニ記スルモ,各々ノ字母ノ前ニアル符號ヲ變ゼザレバ,皆同一ノ結果ヲ示スモノナリ.

然レ𪜈負量ニ就テハ,算術ノ如クシテ說明スルコト能ハザルモノ屢々コレアリ,此等ハ後ニ說明スベシ.

38. 多クノ同類項ハ,之レヲ合セテ單一ナル項ニ直スコトヲ得ルナリ.而シテ此同類項ノ各々ガ同ジ符號ナルトキト,異ナル符號ナルトキトニ從テ,之ヲ合スルニ方法アリ. 次ニ之ヲ示サン.

(第一) 同類項ノ各々ガ,同ジ符號ナルトキ. 此場合ニハ,先ヅ各々ノ同類項ノ數字係數[符號ヲ省キタル]ノミヲ集メテ其和ヲ求メ,而シテ此和ニ各項ニ通スル符號ヲ附シ,次ニ各々ノ同類項ニ等シキ一ツノ項ヲ取リテ,之レニ前ノ符號ヲ有スル數ヲ附スベシ

例ヘバ $2a$ ト $3a$ トハ同類項ニシテ,且ツ同ジ符號ナルユヘ,之ヲ合スルニハ,先ヅ各々ノ數字係數 2 ト 3 トノ和即チ 5 ヲ求メ,之ヲ a ニ附スレバ可ナリ. 故ニ $2a+3a=5a$. 由テ或量ニ $2a$ ヲ加ヘ,次ニ又 $3a$ ヲ加フルハ,其量ニ $5a$ ヲ加フルニ等シ.

同樣ニ $-5a^2b$ ト $-8a^2b$ トハ同類項ニシテ,且ツ同ジ符號ナルユヘ,之ヲ合スルニハ,先ヅ各々ノ符號ヲ省キタル數字係數 5 ト 8 トノ和,即チ 13 ヲ求メ,之ニ符號 $-$ ヲ附シ,斯クシテ得タル數 -13 ヲ,a^2b ニ附スレバ可ナリ.

故ニ $-5a^2b-8a^2b=-13a^2b$. 由テ或量ヨリ $5a^2b$ ヲ減ジ,次ニ又 $8a^2b$ ヲ減ズ

ルハ,其量ヨリ $13a^2b$ ヲ減ズルニ等シ.

(第二) 二ツノ同類項ノ符號ガ異ナルトキ. 此場合ニハ二ツノ同類項ノ數字係數[符號ヲ省キタル]ノ差ヲ求メ,而シテコレニ數字係數ノ大ナル方ノ同類項ノ符號ヲ附シ,餘ハ(第一)ノ如クスベシ.

例ヘバ $6x$ ト $-3x$ トハ同類項ニシテ,其符號異ナルユヘ,先ヅ各々ノ數字係數 6 ト 3 トノ差,即チ 3 ヲ求ム,而シテ數字係數ノ大ナル項ハ正ナルユヘ,此二ツノ同類項ヲ合セタルモノハ即チ $3x$ ナリ.

故ニ $$6x-3x=3x.$$

尙ホ詳シク記スレバ $$6x-3x=3x+3x-3x=3x.$$

同樣ニ $$7a-5a=2a+5a-5a=2a.$$

及ビ $$8ab^2c-14ab^2c=8ab^2c-8ab^2c-6ab^2c=-6ab^2c.$$

(第三) 多クノ同類項ノ符號ガ相異ナルトキ. 此場合ニハ,先ヅ各々ノ同類項ノ中同ジ符號ヲ有スルモノ,即チ正項ハ正項及ビ負項ハ負項ト別々ニ(第一)ノ法ニ由テ合セ,斯ク合セテ得タル符號ノ異ナル二ツノ同類項ヲ(第二)ノ法ニ由テ又一ツノ項ニ合スベシ.

例ヘバ $8a, -3a, 5a, -a, 4a$ 及ビ $-7a$ ヲ合セントスルニハ,先ヅ此中ニテ同ジ符號ヲ有スルモノ,即チ $8a, 5a, 4a$ 及ビ $-3a, -a, -7a$ ヲ別々ニ合スレバ $17a$ 及ビ $-11a$ トナル,次ニ $17a$ 及ビ $-11a$ ヲ合スレバ $6a$ トナル

故ニ
$$\begin{aligned}8a-3a+5a-a+4a-7a&=8a+5a+4a-3a-a-7a\\&=17a-11a\\&=6a.\end{aligned}$$

同樣ニ
$$\begin{aligned}12a^2bc+5a^2bc-3a^2bc+a^2bc-18a^2bc&\\&=12a^2bc+5a^2bc+a^2bc-3a^2bc-18a^2bc\\&=18a^2bc-21a^2bc\\&=-3a^2bc.\end{aligned}$$

39. 加フベキ量ノ內種々ノ同類項アルトキハ,前ニ述ベタル法ニ由テ種々ノ同類項ヲ別々ニ合スルトキハ甚ダ便ナルコトアリ.

例ヘバ或量ニ $3a^2bc, -5ab, 8a^2bc, -2ab$ ヲ加ヘントスルニハ先ヅ此內ノ各々ノ同類項ヲ合スレバ

$$3a^2bc-5ab+8a^2bc-2ab=3a^2bc+8a^2bc-5ab-2ab$$
$$=11a^2bc-7ab$$

ナルニヘ,或量ニ前ノ各項ヲ加フルハ, $11a^2bc-7ab$ ヲ加フルニ等シ.

同様ニ $8xy-7z-2xy+5x+4z-6xy=8xy-2xy-6xy+5x-7z+4z$
$$=8xy-8xy+5x-3z$$
$$=+5x-3z.$$

40. 多項式ノ加法 茲ニ $(a+b)$ 及ヒ $(a-b)$ ナル二項式アリトシ,之ヲ或他ノ量ニ加ヘントス, 先ヅ $(a+b)$ ナル二項式ニ就テ攷フルニ,此各々ノ項ハ共ニ正ナリ,而シテ或量ニ a ヲ加ヘ,次ニ又 b ヲ加フルハ,其量ニ a ト b トノ和,即チ $(a+b)$ ヲ加フルニ同シキニヘ,

$$+(a+b)=+a+b\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

次ニ $(a-b)$ ナル二項式ニ就テ攷フルニ,此各々ノ項ハ符號相異ナリ〔但シ今ハ,a ニテ顯ハサレタル數ハ,b ニテ顯ハサレタル數ヨリ,大ナルモノト想フベシ〕而シテ或量ニ a ヲ加ヘントスルニ當リ,若シ b ダケ多ク加ヘ過ギタリトスレバ,其結果ヨリ b ヲ減セザルベカラズ,由テ

$$+(a-b)=+a-b\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

上ノ如キコトハ加ヘントスル式ガ,啻ニ二項式ナル時ニノミ限ラズ,凡テノ多項式ニ就テモ亦同様ナルベシ.

例ヘバ $+(a+b+c)=+a+b+c,$

同様ニ $+(a-b+c)=+a-b+c,$

及ヒ $+(a-b-c)=+a-b-c.$

此理ニ由テ次ノ如ク述ルヿヲ得,

或量ニ多項式ヲ加フルニハ,此多項式ノ各々ノ項ヲ,其有スル處ノ符號ヲ換ヘズニ附記スベシ.

例１. $(2a+b-5c)$, $(a+8b+c)$ 及ヒ $(3a-6b-2c)$ ノ和ヲ求ム

求ムル處ノ和 $=(2a+b-5c)+(a+8b+c)+(3a-6b-2c)$
$$=2a+b-5c+a+8b+c+3a-6b-2c$$
$$=2a+a+3a+b+8b-6b-5c+c-2c$$

同類項ヲ合セテ $=6a+3b-6c$

例２. $(2x+3yz+y)$, $(x-yz+8z)$, $(3x-5yz-y)$ 及ヒ $(3yz+2z)$ ノ和ヲ求ム.

求ムル處ノ和 $=(2x+3yz+y)+(x-yz+8z)+(3x-5yz-y)+(3yz+2z)$
$$=2x+3yz+y+x-yz+8z+3x-5yz-y+3yz+2z$$
$$=2x+x+3x+3yz-yz-5yz+3yz+y-y+8z+2z$$

同類項ヲ合セテ $=6x+10z.$

41. 加法ノ演算 加法ノ演算ヲナスニハ,加ヘントスル各々ノ式ヲ相重ネテ記シ,且ツ同類項ガ同シ縦行ニ重ナル如ク記シ,而シテ之ヲ算術ノ加法ノ如ク演算スルヲ便ナリトス.

例ヘバ前ノ例１及ヒ２ノ如キハ次ノ如クスベシ.

$$\begin{array}{r}2a+b-5c\\ a+8b+c\\ \underline{3a-6b-2c}\\ \underline{\underline{6a+3b-6c}}\end{array}\qquad\begin{array}{l}2x+3yz+y\\ x-yz\quad+8z\\ 3x-5yz-y\\ \underline{\quad 3yz\quad+2z}\\ \underline{\underline{6x\qquad+10z}}\end{array}$$

或時ハ加ヘントスル式ノ數字係數ガ分數ナルヿアリ,然レモ演算ノ法ハ別ニ變リナシ,只算術上ノ演算ニ,少シク異ナル處アルニ過ギズ. 次ノ如シ.

例１. $\frac{1}{3}a+\frac{2}{5}b-\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{4}a-\frac{2}{3}b-c$ 及ヒ $\frac{3}{5}a-\frac{1}{2}b$ ヲ加ヘヨ.

$$\begin{array}{l}\frac{1}{3}a+\frac{2}{5}b-\frac{1}{2}c\\ \frac{1}{4}a-\frac{2}{3}b-c\\ \underline{\frac{3}{5}a-\frac{1}{2}b}\\ \underline{\underline{\frac{71}{60}a-\frac{23}{30}b-\frac{3}{2}c}}\end{array}$$

例２. $\frac{2}{5}x-\frac{1}{12}y-\frac{1}{3}z$, $\frac{1}{2}x+\frac{5}{6}y$ 及ヒ $\frac{5}{7}y-\frac{3}{4}z$ ヲ加ヘヨ.

$$\begin{array}{l}\frac{2}{5}x-\frac{1}{12}y-\frac{1}{3}z\\ \frac{1}{2}x+\frac{5}{6}y\\ \underline{\qquad\frac{5}{7}y-\frac{3}{4}z}\\ \underline{\underline{\frac{9}{10}x+\frac{41}{28}y-\frac{13}{12}z}}\end{array}$$

以上述ベタルヿヲ總括スレバ

(1) 乘冪或ハ冪トハ如何,又 $a\times a\times a\times a\times a$ ハ a ノ幾乘冪ト云フヤ.

(2) 指數トハ如何. (3) 根數トハ如何,或數ノ平方根立方根等ヲ顯ハス記號ハ如何. (4) 無理ノ數トハ如何,又有理ノ數トハ如何.

(5) √ナル記號ハ何ト云フヤ.

(6) 代數式ノ＋及ビ－ニテ結ビ附ケタル各部ヲ何ト云フヤ.

(7) 同類項トハ如何. (8) 正項トハ如何,又負項トハ如何.

(9) 單式トハ如何又複式トハ如何. (10) 一項式トハ如何,又二項式及ビ三項式トハ如何. (11) 多項式トハ如何.

(12) 量ノ次數又ハ次元トハ如何. (13) 式ノ次數又ハ次元トハ如何.

(14) 齊次式トハ如何. (15) 從式又ハ一致式トハ如何.

42. 多項式ノ減法. 茲ニ $(a+b)$ 又ハ $(a-b)$ ノ如キ,二項式ヲ任意ノ量ヨリ減セントス.

$a+b$ ノ場合ニ於テハ,二項ハ倶ニ正ナリ. サテ算術ニ由レバ,任意ノ量ヨリ,先ツ a ヲ減シ,次ニ b ヲ減ズルハ,二回ニ減セシ a ト b ヲ一度ニ,即チ其和 $a+b$ ヲ減ズルニ同ジ. 即チ

$$-(a+b)=-a-d \cdots\cdots\cdots\cdots (C)$$

$a-b$ ノ場合ニ於テハ,兩項ハ符號相反スルヲ以テ次ノ如ク推究スベシ.

先ツ $a>b$ ト假定シ,與ヘラレタル量ヨリ a ヲ減ズル丌ハ,$(a-b)$ ヲ減セシヨリハ,b 丈ケ引キ過ギタルナリ,如何トナレバ $(a-b)$ 即チ a ヨリ b 丈ケ少キモノヲ減セントヲ求ムルニ,a ヲ引キタレバナリ,故ニ求ムル處ノ結果ヲ得ル爲メニハ,任意ノ量ヨリ a ヲ引キ去リタルモノニ,b ヲ加ヘザルベカラズ. 即チ

$$-(a-b)=-a+b \cdots\cdots\cdots\cdots (D)$$

此レト均シク,二項式ニ限ラズ,如何ナル多項式デモ同ジヿナリ.

例ヘバ,任意ノ量ヨリ $(a+b-c)$ ヲ減セントスルニ,此三項式ハ二項式ト見ルヿヲ得ベシ,即チ $(a+b)-c$ ノ如キ二項式ト見ルナリ,然ル丌ハ任意ノ量ヨリ $(a+b)-c$ ヲ減ズルハ,(D) ニ由テ $(a+b)$ ヲ減シ,而シテ c ヲ加フルニ同ジ,即チ

$$-(a+b-c)=-(a+b)+c$$

然ルニ,$-(a+b)$ ハ (C) ニ由テ $-a-b$ ニ同ジ. 故ニ

$$-(d+b-c)=-a-b+c$$

ナリ.

コレト均シク $$-(a+b+c)=-a-b-c.$$

$$-(a-b-c)=-a+b+c.$$

此ニ由テ多項式ノ減法ハ次ニ述ベタル定則ニ從フベシ.

任意ノ量ヨリ,或多項式ヲ減ズルニハ,其多項式ノ各項ノ符號ヲ取リ換ヘテ(符號ヲ取リ換ルトハ,「プラス」ハ「マイナス」ニ,「マイナス」ハ「プラス」ニ取リ換ルナリ),前ノ量ニ列記スベシ.

例ヘバ $a+b-(c-d+e)=a+b-c+d-e$ ノ如シ

43. 加減ノ結果ヲ擴ムルヿ. 40 款ノ (B) ト 42 款ノ (D) トノ二ツノ結果即チ

$$+(a-b)=+a-b \quad (B)$$

及ヒ

$$-(a-b)=-a+b \quad (D)$$

ハ,一ノ假定ヲ置キ,其假定ニ從ヒテ眞ナルヿヲ證明セリ,其所謂假定トハ他ニアラズ;「a ハ b ヨリ大ナリ」ト云フヿナリ. 乃チ此 (B) ト (D) トノ二ツノ結果ハ $a>b$ ト假定シテ證明セシニ止ルニヘ,若シ a ハ b ヨリ大ナラザル丌ハ,前ノ證明ハ最早此場合ニ當テハマラザルナリ. 故ニ此ヨリ如何ナル要件ニ從ハバ此 (B) ト (D) トハ,a 及ヒ b ノ凡テノ數價,即チ a 及ヒ b ニ如何ナル數價ヲ當テハムルモ眞理ナルベキカヲ示サントス.

若シ (B) ト (D) トハ,a 及ヒ b ニ如何ナル數價ヲ當テハムルモ眞理ナリトスル丌ハ,此 (B) ト (D) ノ各々ニ於テ,$a=0$ トスルヿヲ得ベシ.

今 $a=0$ トスレバ,(B) ト (D) トハ,次ノ如ク變ズ;

$$+(-b)=-b,$$
$$-(-b)=+b.$$

此二ツノ結果ノ第一ハ,負量ヲ加フルハ,同ジ大サノ正量ヲ減ズルニ同ジトセザルベカラザルヿヲ示ス. 又第二ハ,負量ヲ減ズルハ同ジ大サノ正量ヲ加フルニ同ジトセザルベカラザルヿヲ示ス.

例ヘバ $5+(-8)=5-3=2$ 又ハ $5-(-3)=5+3=8$ トスルガ如シ.

此等ノ演算ハ,決シテ算術上ニナキヿナリ,然ルニ若シ負量ヲ加ヘ,又負量ヲ減ズルヿノ意味ヲ,上ニ述ベタル如ク定ムル丌ハ,實驗上ヨリ (B) 及ビ (D) ハ,a 及ビ b ニ如何ナル數價ヲ當テハムルモ眞ナルヿヲ見ルベシ.

故ニ此假定ニ從ヒテ (B) 及ビ (D) ハ,a 及ビ b ニ如何ナル數價ヲ當テハムルモ眞ナリト見做スモノナリ.

是迄ハ代數記號ハ皆正ノ數ノミヲ顯ハスモノト假定セリ,如何トナレバ,或記號ガ若シ負ノ數ヲ顯ハスドハ,吾輩ハ之ヲ他ノ任意ノ數ヨリ減スル能ハザリシヲ以テナリ. 然ルニ吾輩ハ今茲ニ負數ヲ加ヘ又ハ減ズルコノ意味ヲ知リ得タルユヘ,コレヨリ後ハ,吾輩ノ用ユル記號ハ正數幷ニ負數孰レヲモ指示スルモノト攷フベシ.

44. 前款ニ述ベタル負量ノ加法及ヒ減法ノ意味ハ一考シテ算術上ノ結果ヲ自然ニ擴メタルモノニシテ,且ツ**7**款ニ與ヘタル負量ノ說明ト一致スルコヲ知ルベシ. 而ソ此等ノ意味ヲ命セシ方法ハ學生宜シク細心留意スベシ如何トナレバ此レ代數上ニ於テ屢用ユル處ニシテ,代數學ノ多クノ部分ハコレニ基クガ故ナリ.

次ニ聊カ說明ヲ加フベシ.

茲ニ二ツノ式(B)及ヒ(D)アリ; 此(B)ト(D)ハ**40**款及ヒ**42**款ニ於テ,算術上ニテ了解シ得ベキ各々ノ場合ニ於テ,即チ a ニテ顯ハセル數ハ,b ニテ顯ハセル數ヨリ大ナル各々ノ場合ニ於テ,眞ナルコヲ說明シタリトス. 然ルニ若シ此(B)ト(D)ノ a 及ヒ b ニ,a ハ b ヨリ小ナル如キ或數ヲ當テハムルドハ,此(B)ト(D)トノ二式ハ,算術上ニテ了解シ得ベカラザル演算ヲ含ムニ至ラン,即チ負數ノ加法又ハ減法ヲ含ムニ至ルベシ. 此ノ如キ演算ハ固ヨリ意味ナキナリ,而ソ吾輩ハ之ニ吾輩ノ欲スル處ノ意味ヲ命ズルヲ得ベシ即チ此ノ如キ演算ハ吾輩ノ好ム通リニ定義スルコヲ得ルナリ,但シ隨意ニ定義スルヲ得ルトハ云ヘ,一旦定メタル意味ハ,從來之ヲ用テ但ニ矛盾セズ,又從前算術上ノ意味ヲ以テ用ヒタル結果トモ矛盾セザルヲ要トス.

サテ代數學ノ効用ハ,主トシテ,用ユル處ノ記號ニ如何ナル數ヲ代ユルモ,恒ニ眞ナル處ノ關係ヲ探擇スルニアリ. 故ニ負數ノ加法及ヒ減法ノ如キ演算ニ意味ヲ命ズルニハ,隨意ノ方法ニ由ラズ,算術上ノ結果ヲ擴メテ,命シタル意味ハ,曾テ前ニ得タルスベテノ結果ト符合スルヨウニスベシ,而ソ此ノ如クシテ,用ユル處ノ記號ハ如何ナル數價ヲモ持ツコヲ得ルナリ.

45. 減法ノ演算. 一ツノ式ヲ他ノ式ヨリ減セントスルドハ,第一ノ式ヲ第二ノ式ノ下ニ書キ,同類項ヲ相重ナラシムルコ,恰モ算術ニ於テ同位ヲ同縱行ニ置クガ如クスベシ. 而ソ下ノ式ノ各項ノ符號ヲ胸ノ內ニテ換ヘ(紙上ニ陽ニハ變セズシテ,)相加フベシ.

例 1. $2x-3y+z$ ヲ $5x-4y$ ヨリ減セヨ.

此演算ノ式ハ次ノ如シ.

$$\begin{array}{l} 5x-4y \\ \underline{2x-3y+z} \\ \underline{\underline{3x-\ y\ -z}} \end{array}$$

蓋ニ第一ノ縱行ハ $5x$ ヨリ $2x$ ヲ減スルナリ. 故ニ $2x$ ノ符號ヲ胸ノ內ニテ換ユレバ $-2x$ ナルユヘ,$5x$ ト $-2x$ ヲ加ヘ $3x$ トナル. 次ニ第二ノ縱行ハ $-4y$ ヨリ $-3y$ ヲ減スルナリ,故ニ $-3y$ ノ符號ヲ換ユレバ $+3y$ トナルユヘ,$-4y$ ト $+3y$ ヲ加ヘ $-y$ トナル. 次ニ第三ノ縱行ハ被減數ハ何ニモナキユヘ,0 ヨリ z ヲ減スルナリ,故ニ z ノ符號ヲ換ヘ,$-z$ トナリ而ソ 0 ト $-z$ ノ和ハ $-z$ トナル.

故ニ此答ハ $3x-y-z$ ナリ.

例 2. $\frac{2}{3}a-\frac{4}{5}b+c$ ヨリ $\frac{1}{3}a-\frac{1}{5}b-\frac{1}{2}c$ ヲ減セヨ.

此演算ノ式ハ次ノ如シ;

$$\begin{array}{l} \frac{2}{3}a-\frac{4}{5}b+\ c \\ \underline{\frac{1}{3}a-\frac{1}{5}b-\frac{1}{2}c} \\ \underline{\underline{\frac{1}{3}a-\frac{3}{5}b+\frac{3}{2}c}} \end{array}$$

蓋ニ $\frac{2}{3}a$ ト $\frac{1}{3}a$ ノ差ハ $\frac{2}{3}a$ ト $-\frac{1}{3}a$ トノ和ニ同シク,即チ $\frac{1}{3}a$ ナリ. 次ニ $-\frac{4}{5}b$ ト $-\frac{1}{5}b$ トノ差ハ $-\frac{4}{5}b$ ト $+\frac{1}{5}b$ トノ和ニ同シク,即チ $-\frac{3}{5}b$ ナリ. 次ニ $+c$ ト $-\frac{1}{2}c$ トノ差ハ,$+c$ ト $+\frac{1}{2}c$ トノ和ニ同シク,即チ $+\frac{3}{2}c$ ナリ. 故ニ此答ハ $\frac{1}{3}a-\frac{3}{5}b+\frac{3}{2}c$ ナリ.

46. 括弧ヲ取ルコ. 「括弧ヲ取ルコ」トハ括弧ヲ用ヒタル式ヨリ括弧ヲ取リ除ルコナリ.

「プラス」ノ符號ヲ括弧ノ前ニ置キタルドハ,括弧內ノ量ヲ他ノ任意ノ量ニ加フベキノ意ニシテ; 又「マイナス」ノ符號ヲ括弧ノ前ニ置キタルドハ括弧內ノ量ヲ他ノ任意ノ量ヨリ減ズベキノ意ナリ.

此ニ由テ 40, 42. 43 款ヨリ,括弧ヲ取ルヿノ定則ヲ得ルヿ次ノ如シ.

與ヘラレタル式中若干項ヲ括弧ニテ包ミタル時,其括弧ノ前ノ符號ガ「プラス」ナル時ハ,括弧ノ內ノ各項ノ符號ヲ其儘ニシテ括弧ヲ取リ除ルヿヲ得ベシ:又若シ其括弧ノ前ノ符號ガ「マイナス」ナル時ハ括弧ノ內ノ各項ノ符號ヲ悉ク變ズレバ,括弧ヲ取リ除ルヿヲ得ベシ.

例ヘバ　$2a+(3b-5c)-(4c-2b)=2a+3b-5c-4c+2b$

$$=2a+5b-9c.$$

$$3a+(b-2c-d)-(-2a-2b+d)=3a+b-2c-d+2a+2b-d$$

$$=5a+3b-2c-2d.$$

47. 時トシテハ,括弧內ノ量ガ,又括弧ニテ幾重モ包マルヽヿアリ,其場合ニ於テハ括弧ハ一雙ヅツ相異ナル形ヲ用ヒテ混雜ヲ避ルナリ.

例ヘバ $a-[3b+\{3c-(d-b)+a\}-2a]$ ハ, a ヨリ括弧〔〕ノ內ノ式ヲ減ズルノ意ナリ. 括弧〔〕ノ內ノ式ハ, $3b$ ニ括弧{}ノ內ノ式ヲ加ヘ,コレヨリ $2a$ ヲ減ズルノ意ナリ. 又括弧{}ノ內ノ式ハ $3c$ ヨリ括弧()ノ內ノ式ヲ減シ之レニ a ヲ加フルノ意ナリ. 又括弧()ノ內ノ式ハ d ヨリ b ヲ減ズルナリ. 此ノ如キ式ノ括弧ヲ取リ除カントス欲セバ內側ノ括弧ヨリ又ハ外側ノ括弧ヨリ一雙ヅツ取リ除クベシ.

例ヘバ內側ノ括弧ヨリ一雙ヅツ取リ除クレバ

$$a-[3b+\{3c-(d-b)+a\}-2a]$$
$$=a-[3b+\{3c-d+b+a\}-2a]$$
$$=a-[3b+3c-d+b+a-2a]$$
$$=a-3b-3c+d-b-a+2a$$
$$=2a-4b-3c+d.$$

又外側ノ括弧ヨリ一雙ヅツ取リ除クレバ

$$a-[3b+\{3c-(d-b)+a\}-2a]$$
$$=a-3b-\{3c-(d-b)+a\}+2a$$
$$=a-3b-3c+(d-b)-a+2a$$
$$=a-3b-3c+d-b-a+2a$$

$$=2a-4b-3c+d.$$

乃チ前ト同ジ結果ヲ得タリ.

注意 **1.** 此ノ如ク括弧數雙アル時ハ,內側ヨリ一隻ヅツ取リ除ルモ,又外側ヨリ一隻ヅツ取リ除ルモ隨意ナリト雖ヒ,初學者ハ第一ノ方法ノ如ク,內側ヨリ一雙ヅツ取リ除ルヲ便ナリトス,其故如何トナレバ,內側ヨリ一雙ヅツ括弧ヲ取リ除ル時ハ勿論外側ノ括弧ニ影響ナク,少シモ混雜ヲ生ズルノ恐レナケレヒ,第二ノ方法ノ如ク,外側ヨリ取リ除クレバ,初學者ニハ多少ノ混雜ヲ生ズルノ恐レアリテ,從テ間違易キモノナリ,併シ初學者ハ先ヅ外側ヨリ括弧ヲ取リ除ルニ方リテハ內側ノ括弧內ノ式ハ只一項ト見テ內側ノ括弧內ニハ手ヲ附ケザレバ可ナリ.

注意 **2.** 括弧ハ數雙ト云ヘヒ,其種類ハ〔〕,{},()ニ止ル,故ニ一式ニ括弧ヲ三雙丈ケ袒用スル時ハ,此三ツノ形ヲ用ユルナリ.若シ又一式ニ括弧四雙ヲ用ユルノ必要アル時ハ,他ノ一雙ニハ括線ト稱スルモノヲ用ユ

例ヘバ

$$x-[y-\{z-(x-\overline{y-z})\}]$$

ノ如シ. 此式ハ x ヨリ,括弧〔〕ノ內ノ式ヲ減ズルノ意ナリ. 又括弧〔〕ノ內ノ式ハ, y ヨリ括弧{}ノ內ノ式ヲ減ズルノ意ナリ. 又括弧{}ノ內ノ式ハ, z ヨリ括弧()ノ內ノ式ヲ減ズルノ意ナリ, 又括弧()ノ內ノ式ハ, x ヨリ括線一ノ下ノ式ヲ減ズルノ意ナリ. 又括線一ノ下ノ式ハ, y ヨリ z ヲ減ズルナリ.

又一式ノ內ニ括弧三雙ト括線ヲ用ヒテモマダ足ラヌナドヽ云フ場合ハ實際アルヿナシ.

注意 **3.** 括弧ハ前ニ述ベタル如ク內側ヨリ取リ去ルヲ便ナリトシ,又演算ノ途中同類項アル時ハ,之ヲ合一スルヲ便ナリトス.

例ヘバ　$a+b-[a-b+\{a+b-(a-b)\}]$

$$=a+b-[a-b+\{a+b-a+b\}]$$
$$=a+b-[a-b+2b]$$
$$=a+b-a-b$$
$$0.$$

48. 括弧ヲ掛ルヿ. 前二款ニハ,式中ニ括弧ヲ含ムトキ,之ヲ取リ除ル方法如何ヲ述ベタリ然レドモ之レニ反シテ,式中ノ若干項ヲ括弧ニテ包ムヿヲ得ベシ. 之ヲ括弧ヲ掛ルト云フ.

式ノ若干項ハ其各項ノ符號ヲ變ズルヿナクシテ之ヲ括弧ニテ包ミ,其括弧ノ前ニ「プラス」ノ符號ヲ置クヿヲ得ベシ.

コレト均シク,又式ノ若干項ハ,其各項ノ符號ヲ變ジテ,之ヲ括弧ニテ包ミ,其括弧ノ前ニハ「マイナス」ノ符號ヲ置クヲ得ベシ。

例ヘバ $a-2b+c+3d-4e+f$ ノ如キハ,

$$a+(-2b+c)+(3d-4e+f)$$

或ハ $$a-(2b-c-3d)-(4e-f)$$

或ハ $$a+(-2b+c+3d)-(4e-f)$$

或ハ $$a-(2b-c-3d+4e-f)$$

等

ト記スルヿヲ得ベシ。

注意. 一ツノ式ニ含メル括弧ヲ取リ除クトキハ,一定ノ答ヲ得ベシト雖ドモ,一ツノ式ニ括弧ヲ掛ルニハ何レノ項ト何レノ項トヲ括弧ニテ包ムベキヤ,固ヨリ一定セズ,隨意ニ若干項ヲ括弧ニテ包ムヿヲ得ベシ,唯括弧ノ前ニ「プラス」ノ符號ヲ置ケバ,其括弧ノ各項ノ符號ヲモトノ儘ニテ存シ置クベシ,又括弧ノ前ニ「マイナス」ノ符號ヲ置ケバ,其括弧内ノ各項ノ符號ヲ變ジテ(モトノ符號ガ「プラス」ナレバ「マイナス」ニ變ジ,モトノ符號ガ「マイナス」ナレバ「プラス」ニ變ズベシ)記載スレバ可ナリ.

49. 代數和 吾輩ハ前ニ(43款),正量ノ減法ハ同ジ數價ノ負量ノ加法ニ等シク;又負量ノ減法ハ同ジ數價ノ正量ノ加法ニ等シキヿヲ證セリ. 此ニ由テ減法ハ代數上ノ總計法ト見做スヿヲ得,而シテ一ツノ量ヲ他ノ量ヨリ減ジタル結果ヲ,其代數和(Algebraical Sum)ト稱ス.

例ヘバ $6a, -3a, -5a$ ノ代數和ハ

$$6a-3a-5a=6a-8a$$
$$=-2a$$

ナリ.

又他ノ一例トシテ次ノ問題ヲ取ル.

或商人金五千圓ヲ以テ商業ヲ營ミシニ初年ニ金千三百圓ヲ利シ,次年ニ金八百圓ヲ損シ,三年目ニ金三百圓ヲ損セリト云フ,然ラバ此三年目ノ終リニ於テ此人ノ資金幾何ナヤ.

此問題ノ資金ハ5000圓,初年ノ利益ハ1300圓,次年ノ利益ハ −800圓,三年目ノ利益ハ −300圓ナルユヘ此商人ノ資金三年目ニ幾何ナルカヲ求メンニハ

$$5000,\ 1300,\ -800,\ -300$$

ノ代數和ヲ求ムレバ可ナリ,即チ

$$5000+1300-800-300$$
$$=6300-1100$$
$$=5200.$$

即チ三年目ニ此商人ノ資金ハ5200圓ナリ。

此ノ如ク和ト云フ語ノ意味ヲ擴ムルヿハ,極メテ便利ニシテ迂遠ノ階ヲ避ルヿヲ得ルモノトス.

注意. 今後二ツ若クハ多クノ量ノ和トカ,又ハ二ツ若クハ多ノ量ヲ加フルト云フトキハ,何時デモ代數和ノ意味ナルヿヲ忘ルベカラズ.

50. 不等量 算術上ノ意味ヲ擴メテ………ヨリ大ナリトカ,又ハ………ヨリ小ナリト云フ語ヲ解釋スベシ。

算術ニ於テ,aナル數ハbナル數ヨリ,$a-b$丈ケ大ナリト云フトキハ,aハbヨリモ大ナルトキニ限ルモノトス. 即チaガbヨリ大ナルヿ$a-b$ナリト云フトキニ,aガbヨリ大ナル數ナル以上ハ,少シモ解釋ニ困ルヿナケレドモ,若シaガbヨリ小ナルトキニ,aハbヨリ大ナルヿ$a-b$ナリト云フヿハ算術上ニテハ更ニ解釋スル能ハザルベシ. 故ニ普通ハ………ヨリ大ナリト云フ語ノ意味ヲ擴メテ,a及ビbハ如何ナル數ヲ顯ハストモ,aハbヨリ$a-b$丈ケ大ナリト云フ.

例ヘバ6ハ4ヨリ6−4即チ2丈ケ大ナリ;均シク5ハ8ヨリ5−8即チ−3丈ケ大ナリト云フ. 故ニ−3ハ6ヨリ大ナルヿ,−3−6即チ−9ナリ. 又−4ハ−1ヨリ大ナルヿ−4−(−1)即チ−3ナリ. 餘ハ之ニ倣ヘ.

51. 又吾輩ハ $a-b$ ガ正ナル𬼀ハ,a ハ b ヨリ大ナリト云ヒ,若シ $a-b$ ガ負ナル𬼀ハ,a ハ b ヨリ小ナリト云フ.

此ニ由テ吾輩ハ任意ノ二數ガ正ナルモ又負ナルモ,其大サヲ比較スルヿヲ得ルナリ.

例ヘバ 5 ハ 3 ヨリ大ナリ,如何トナレバ $5-3$ ハ 2 ニシテ之レ正ナレバナリ.

又 3 ハ 5 ヨリ小ナリ,如何トナレバ $3-5$ ハ -2 ニシテ之レ負ナレバナリ.

又 -3 ハ -5 ヨリ大ナリ,如何トナレバ $-3-(-5)$ ハ 2 ニシテ之レ正ナレバナリ.

又 -5 ハ -3 ヨリ小ナリ,如何トナレバ $-5-(-3)$ ハ -2 ニシテ之レ負ナレバナリ.

例ヘバ 8, 6, 4, 2, 0, -1, -2, -3, -5, -7 等ハ大サ遞降次ナリ.

是迄述ベタルヿヲ總括スレバ

(1) 加法減法ノ結果ノ意味ヲ擴ムルヿハ如何.

(2) 括弧ヲ取ルヿノ定則ハ如何. (3) 括弧ヲ掛ルヿハ如何.

(4) 代數和トハ如何. (5) 代數和ノ價僉ハ如何.

(6) a 及ビ b ハ其大小如何ナルモ,a ハ b ヨリ $a-b$ 丈ケ大ナリト云フヿヲ說明セヨ. (7) 正若クハ負ノ任意ノ二量ヲ比較スルヿハ如何.

第三編

乘法

52. コレヨリ進ンデ,代數量ノ乘法ヲ說明セントスルニ,先ヅ便宜ノ爲メ,之ヲ三ツノ場合ニ分ツベシ. 乃チ

(1) 二ツ若クハ多クノ單式ノ乘法.

(2) 一ノ複式ト一ノ單式トノ乘法.

(3) 二ツ若クハ多クノ複式ノ乘法.

53. 乘法ニ於テ,其因子ノ順ハ,如何ニ取ルモ,其積ハ變ズルヿナシ.

算術ニ於テ,一ツノ數 a ト他ノ數 b トノ積ハ,b ト a トノ積ニ同ジキヿヲ說明セリ. 均シク

$$
\begin{aligned}
abc&=acb\\
&=bca\\
&=bac\\
&=cab\\
&=cba.
\end{aligned}
$$

故ニ諸〻ノ數ハ,之ヲ如何ナル順序ニ相乘スルモ,其積ハ更ニ變リナキナリ.

今吾輩ハ此理ハスベテノ代數式(タトヒコレ等ノ式ガ正量ヲ顯ハスモ亦負量ヲ顯ハスモ)ニ就テ眞ナリト假定スベシ.

54. 單式ノ積 二ツ若クハ多クノ單ナル量ノ積ハ,之ヲ一列ニ書キ列ネ,各〻ノ量ノ間ニ符號×カ,又ハ點(.)ヲ打チテ顯ハスカ,又ハ因子ガ字母ノ場合ニハ,中間ニ符號若クハ點ヲ挿マズシテ,字母ヲ列ネ記シテ,之ヲ示スベシ(委クハ8款ヲ見ヨ).

例ヘバ
$$
\begin{aligned}
5a\times3b&=5\times a\times3\times b\\
&=5\times3\times a\times b\\
&=15ab
\end{aligned}
$$

又
$$
\begin{aligned}
2ab\times6cd&=2\times6\times a\times b\times c\times d\\
&=12abcd.
\end{aligned}
$$

乘法ノ結果ニ於テ,同ジ量ヲ繰リ返シテ含ム𬼀ハ,指數ノ記法ニ依ルヲ便ナリトス 即チ

26款ノ定義ニ由テ
$$a^3=aaa$$
$$a^5=aaaaa$$

故ニ
$$
\begin{aligned}
a^3\times a^5&=aaaaaaaa\\
&=a^8.
\end{aligned}
$$

又
$$6a^2=6aa$$
$$8a^4=8aaaa$$

故ニ
$$6a^2\times8a^4=6\times8\times aaaaaa$$

$$=48a^6$$

此他皆此ノ如ク積ノ中ニアル同シ字母ノ因子ハ之ヲ一ツニ集ムヘシ但シ其一般ノ規則ハ後〔71款〕ニ詳述スヘシ.

例 1. $6ab^2c$ ト $7a^2b^3c$ トノ積ヲ求ム.

$$\begin{aligned}(6ab^2c)(7a^2b^3c)&=6\times a\times b^2\times c\times 7\times a^2\times b^3\times c\\&=6\times 7\times a\times a^2\times b^2\times b^3\times c\times c\\&=6\times 7\times aaa\times bbbbb\times cc\\&=42a^3b^5c^2\end{aligned}$$

例 2. $15a^2bxy^3$ ト $\frac{1}{6}a^3bx^2y^3$ トノ積ヲ求ム.

$$\begin{aligned}(15a^2bxy^3)(\tfrac{1}{6}a^3bx^2y^3)&=15\times\tfrac{1}{6}\times a^2\times a^3\times b\times b\times x\times x^2\times y^3\times y^3\\&=15\times\tfrac{1}{6}\times aaaaa\times bb\times xxx\times yyyyyy\\&=\tfrac{5}{2}a^5b^2x^3y^6\end{aligned}$$

注意. 學生ハ少シク熟練シタル後ハ,單式ノ乘法ハ上ノ如ク,演算スルニ及バズ,直チニ其結果ヲ記載スヘシ.

例ヘバ上ノ例1ニ於テハ $6ab^2c$ ト $7a^2b^3c$ トヲ見合セ,六七四十二ト數ノ積ヲ胸ノ中ニテ作リ,又 a ト a^2 トノ積 a^3 ヲ胸ノ中ニテ作リ,次ニ b^2 ト b^3 トノ積 b^5 ヲ胸ノ中ニテ作リ,次ニ c ト c トノ積 c^2 ヲ胸ノ中ニテ作リ,演算ノ式ハ,直チニ一足飛ヒニ次ノ如ク如クスヘシ:

$$(6ab^2c)(7a^2b^3c)=42a^3b^5c^2.$$

又例2ニ於テハ

$$(15a^2bxy^3)(\tfrac{1}{6}a^3bx^2y^3)=\tfrac{5}{2}a^5b^2x^3y^6.$$

55. 正量ト負量トノ積　算術ニ於テ與ヘラレタル二數ノ乘法ノ說明ハ,二數ガ正ノ數ナル時ノミ了解シ得ヘシ. 若シ二數ノ一ツガ負ノ數ナル時,即チ $(-a)b$ 又ハ $a(-b)$ ノ如キ式ノ意味ヲ求メントス.

$(-a)b$ ノ如キ式ハ, $-a$ ヲ b 回取ルベキヿヲ示ス.

$$\begin{aligned}\therefore\quad(-a)b&=(-a)+(-a)+(-a)+\cdots\cdots\cdots\cdots〔b\ 回〕\\&=-a-a-a-\cdots\cdots\cdots\cdots〔b\ 回〕\\&=-(a+a+a+\cdots\cdots\cdots\cdots〔b\ 回〕)\\&=-(ab)\end{aligned}$$

$$=-ab.$$

上ノ證明ハ,唯 b ガ整數ナル場合ニノミ適用スルヿヲ得ヘシ然レ圧44款ニ述ベタル理由ニ依リテ,此定則ハ b ガ正ノ分數ナル場合ニモ適用スルヿヲ得ベシ.

$a(-b)$ ナル式ハ $(-b)a$ ト記スルヲ得ベシ,如何トナレバ乘法ニ於テ,其因子ノ順ハ如何ニ之ヲ取ルモ,其積ニ變更ナケレバナリ. 然ルニ上ニ述ベタル定則ニ依リ

$$(-b)a=-ba=-ab,$$

故ニ
$$a(-b)=-ab$$

二ツノ負量ノ積ハ,後ニ說クベシ.

例. $5xy$ ト $-3mn$ トノ積ハ $-15mnxy$ ナリ.

茲ニ字母ハ皆悉ク相異ナルユヘ,コレヨリ尙ホ簡單ニスルヿ能ハズ.

均シク $-5ab$ ト $6abc$ ノ積ハ $-30a^2b^2c$ ナリ.

又 $mn, np, -mp$ ノ連乘積ハ次ノ如シ.

$$\begin{aligned}(mn)(np)(-mp)&=(mn^2p)(-mp)\\&=-m^2n^2p^2.\end{aligned}$$

56. 單式ト多項式トノ積　多項式ト單式トノ積ヲ求メント欲セバ,其多項式ノ各項ニ,單式ヲ乘ジ其各積ノ代數和ヲ取レバ可ナリ:

先ヅ一ツノ數ト二項式トノ積ノ場合ヲ致フベシ.

算術ヨリ二數 a ト b トノ和ノ n 倍ハ na ト nb トノ和ニ等シク又 a ト b トノ差ノ n 倍ハ na ト nb トノ差ニ等シキヿヲ知ル.乃チ

$$n(a+b)=na+nb,$$

及ビ
$$n(a-b)=na-nb.$$

此等ノ結果ハ又55款ト同樣ノ法ニテ,直接ニ證明スルヿヲ得ベシ.

如何トナレバ

$$\begin{aligned}n(a+b)&=(a+b)+(a+b)+\cdots\cdots\cdots\cdots〔n\ 項〕\\&=\left.\begin{array}{l}a+a+\cdots\cdots\cdots\cdots〔n\ 項〕\\+b+b+\cdots\cdots\cdots\cdots〔n\ 項〕\end{array}\right\}\\&=na+nb.\end{aligned}$$

均シク $n(a-b)=(a-b)+(a-b)+\cdots\cdots$〔$n$ 項〕

$$\begin{aligned}&=a+a+\cdots\cdots\text{〔}n\text{ 項〕}\\&-b-b-\cdots\cdots\text{〔}n\text{ 項〕}\end{aligned}\Bigg\}$$

$$=na-nb.$$

且ツ乘法ハ如何ナル順ニ取ルモ差支ナキユヘ,次ノ如シ。

$$(a+b)n=an+bn,$$

及ビ

$$(a-b)n=an-bn.$$

多項式ト雖モ亦同法ヲ適用スルコトヲ得ベシ。

例 1. $5a-6b+7c$ ニ m ヲ乘セヨ.

$$m(5a-6b+7c)=m.5a-m.6b+m.7c$$
$$=5am-6bm+7cm.$$

例 2. $3x+5y+2z$ ニ $-2x$ ヲ乘セヨ.

$$(3x+5y+2z)(-2x)=(3x)(-2x)+(5y)(-2x)+(2z)(-2x)$$
$$=-6x^2-10xy-4xz.$$

例 3. $abx-bcy-acz$ ニ $abcxyz$ ヲ乘セヨ.

$$(abx-bcy-acz)(abcxyz)$$
$$=(abx)(abcxyz)-(bcy)(abcxyz)-(acz)(abcxyz)$$
$$=a^2b^2cx^2yz-ab^2c^2xy^2z-a^2bc^2xyz^2.$$

例 4. $\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b+\frac{1}{4}c$ ニ $\frac{2}{5}abc$ ヲ乘セヨ.

$$(\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{3}b+\tfrac{1}{4}c)(\tfrac{2}{5}abc)=(\tfrac{1}{2}a)(\tfrac{2}{5}abc)-(\tfrac{1}{3}b)(\tfrac{2}{5}abc)+(\tfrac{1}{4}c)(\tfrac{2}{5}abc)$$
$$=\tfrac{1}{5}a^2bc-\tfrac{2}{15}ab^2c+\tfrac{1}{10}abc^2.$$

例 5. $\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}y+\frac{1}{27}z$ ニ $-81a$ ヲ乘セヨ.

$$(\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{9}y+\tfrac{1}{27}z)(-81a)=(\tfrac{1}{3}x)(-81a)+(\tfrac{1}{9}y)(-81a)+(\tfrac{1}{27}z)(-81a)$$
$$=-27ax-9ay-3az.$$

例 6. $12\left(\frac{x+y}{2}-\frac{y-2x}{6}\right)-8\left(\frac{3y-x}{2}-\frac{3x+2y}{4}\right)$ ヲ簡單ニセヨ.

$$12\left(\frac{x+y}{2}-\frac{y-2x}{6}\right)-8\left(\frac{3y-x}{2}-\frac{3x+2y}{4}\right)$$

a

$$=(6x+6y-2y+4x)-(12y-4x-6x-4y)$$
$$=(10x+4y)-(8y-10x)$$
$$=10x+4y-8y+10x$$
$$=20x-4y.$$

例 7. $a=4, b=8$ ナル時

$$a^2(x^2+x-1)-ab(1+x^2-x)+b^2(1+x-x^2)$$

ヲ數ノ係數ニテ顯ハセ,同類項ヲ集メ,此結果ヲ x ノ乘冪ニ從テ列ベヨ.

$$a^2(x^2+x-1)-ab(1+x^2-x)+b^2(1+x-x^2)$$
$$=16(x^2+x-1)-32(1+x^2-x)+64(1+x-x^2)$$
$$=16x^2+16x-16-32-32x^2+32x+64+64x-64x^2$$
$$=-80x^2+112x+16.$$

57. 二ツノ二項式ノ積. 二ツノ二項式ノ積ハ,其一式ノ各項ニ他ノ一式ノ各項ヲ乘シ,其積ニ適當ナル符號ヲ置キ,此等ノ積ノ代數和ヲ取リテ之ヲ得ベシ.

此定則ヲ證スル爲メニハ,二項式ノ一ヲ $a+b$ 又ハ $a-b$ トシ,他ノ一ヲ $x+y$ 又ハ $x-y$ トスベシ.

(1) $(a+b)(x+y)$ ヲ求メヨ。

$a+b$ ヲ n トスレバ $(a+b)(x+y)=n(x+y)$

$$=nx+ny \qquad \text{〔56 款〕}$$
$$=(a+b)x+(a+b)y$$
$$=ax+bx+ay+by \qquad \text{〔56 款〕}$$

(2) $(a+b)(x-y)$ ヲ求メヨ。

$a+b$ ヲ n トスレバ $(a+b)(x-y)=n(x-y)$

$$=nx-ny \qquad \text{〔56 款〕}$$
$$=(a+b)x-(a+b)y$$
$$=(ax+bx)-(ay+by) \qquad \text{〔56 款〕}$$
$$=ax+bx-ay-by \qquad \text{〔42 款〕}$$

(3) $(a-b)(x-y)$ ヲ求メヨ。

$a-b$ ヲ n トスレバ $(a-b)(x-y)=n(x-y)$

$=nx-ny$　〔56 款〕

$=(a-b)x-(a-b)y$

$=(ax-bx)-(ay-by)$　〔56 款〕

$=ax-bx-ay+by$　〔42 款〕

58. 乘法ノ結果ヲ擴ルヿ. 前款ノ結果ハ,正量ト正量又ハ正量ト負量トノ假定ニ於テ證明セリ. コレヨリ進ンデ二ツノ負量ノ積ニ與ヘタル意味ヲ攷究セントス,乃チ此等ノ結果ハ a, b, x, y ナル記號ノスベテノ數價ニ就テ眞ナル如キ,意味ヲ求メントスルナリ. 但シ之ヲ推究スルノ法ハ 43, 44 款ノ法ト相類ス.

若シ 57 款ノ (3) ノ結果ニ於テ $b=0$, $y=0$ トスル𪜈ハ,

$$a\times x=ax$$

コレ眞ナルヿ勿論ナリ.

若シ同ジ結果ニ於テ, $a=0$, $y=0$ トスレバ

$$(-b)x=-bx$$

均シク,若シ $b=0$ 及ビ $x=0$ トスル𪜈ハ

$$a(-y)=-ay.$$

此レヨリ正量ト負量トノ積ヲ作ルベキ定則ヲ知ルベシ,コレ 55 款ニ於テ得タルモノナリ.

若シ同ジ結果ニ於テ, $a=0$, $x=0$ トスレバ

$$(-b)(-y)=+by$$

ヲ得,コレヨリ二ツノ負量ノ積ニ附スベキ意味ヲ與フルナリ.

若シ二ツノ負數ノ積ヲ二數ノ積ニ等シキ正ノ數トスレバ, 57 款ノ結果(1)(2)(3)ハ,記號ニ與フベキ數價ガ正ナルモ亦負ナルモ,均シク眞ナリ,而シテ此等ノ結果ノ任意ノ一ツハ他ノ二ツノ内ノ一ツヨリ誘求スルヿヲ得ベシ.

例ヘバ第一ノ結果即チ

$$(a+b)(x+y)=ax+bx+ay+by$$

ヲ取ル𪜈, $b=-c$ ヲ $y=-z$ ニ代フレバ

$$(a-c)(x-z)=ax+(-c)x+a(-z)+(-c)(-z)$$

$$=ax-cx-az+cz$$

コレ(3)ノ結果ニ等シ.

均シク 57 款ノ三ツノ結果ノ任意ノ一ツハ他ノ二ツノ内ノ一ツヨリ誘求スルヿヲ得ベシ.

59. 符號ノ定則. 前款ノ結果ハ,之ヲ符號定則ト云ヒ,次ノ如ク述ブベシ.

同符號(正ニテモ負ニテモ)ノ二量ノ積ハ,正量ナリ.

異符號(一ツハ正,一ツハ負)ノ二量ノ積ハ,負量ナリ.

尙ホ之ヲ詳カニ述ブレバ正ノ數ト正ノ數トノ積ハ,正ニシテ;負ノ數ト負ノ數トノ積モ亦正ナリ.

又正ノ數ト負ノ數トノ積,或ハ負ノ數ト正ノ數トノ積ハ孰レモ負ナリ.

此定則ヲ簡略ニ述ブレバ,

同符號ハ正ヲ生ジ,異符號ハ負ヲ生ズ.

例ヘバ $+3a$ ト $+2a$ トノ積ハ, $+6a^2$ ナリ.

又 $-3a$ ト $-2a$ トノ積モ, $+6a^2$ ナリ.

又 $+3a$ ト $-2a$ トノ積ハ, $-6a^2$ ナリ.

又 $-3a$ ト $+2a$ トノ積モ, $-6a^2$ ナリ.

60. 前款ニ述ベタル符號定則ヲ適用スレバ次ノ如シ:

$$(-1)(b)=-b \text{ 及ビ } (-1)(-b)=+b.$$

又 40 款ニ由リ　$-(b)=-b$ 及ビ　$-(-b)=+b.$

此ニ由テ一ツノ數ニ -1 ヲ乘スルニハ,此數ヲ減ズルト同ジコトナリ.

此結果ハ時トシテハ之ヲ假定スルヿアリ,乃チ此結果ハ之ヲ證明セズシテ,眞ナリトスルヿアリ. 然レ𪜈 $(-1)(b)$ ト $-(b)$ トノ如キハ其結果ニ至リテ,更ニ差違ナケレ𪜈,其意味ノ相異ナルヿハ,學生宜シク能ク注意ヲ加ヘザルベカラズ.

61. 符號定則ノ例トシテ $(-a)(-a)=+a^2$, 又ハ $(+a)(+a)=a^2$ ナリ.

故ニ任意ノ量ノ平方ハ,正ナリ.

此 a ヲ -1 トシタル特別ノ場合,即チ $(-1)(-1)=+1$ ナル場合ハ,能ク記憶スベシ.

62. 符號定則ヲ何回モ操リ返シテ適用スルトキハ,皆同ジ符號ニアラザル,若干因子ノ積ヲ記スルヿヲ得ベシ

例ヘバ $$(-a)(-b)(-c)=(+ab)(-c)=-abc$$

$$(-a)^3=(-a)(-a)(-a)=a^2(-a)=-a^3.$$

$$(-a)^4=(-a)^3(-a)=(-a^3)(-a)=a^4$$

$$(-a)^5=(-a)^4(-a)=a^4(-a)=-a^5.$$

此ニ由テ考フルニ,負數ノ乘冪ヲ作ルニ,其指數ガ偶數ナレバ正ニシテ奇數ナレバ負ナリ.

63. 乘法ノ演算　乘法ノ演算ハ次ノ例ニ示セル方法ニテ爲スベシ

例 1. $x+7$ ト $x-4$ トノ積ヲ求ム.

$$\begin{array}{ll}
x+7 & \\
\underline{x-4} & \\
x^2+7x & \cdots\cdots\cdots(1) \\
\underline{\quad\;\, -4x-28} & \cdots\cdots\cdots(2) \\
x^2+3x-28 &
\end{array}$$

先ヅ乘數 $x-4$ ヲ,被乘數 $x+7$ ノ下ニ置キ,其下ニ一橫線ヲ引クベシ,

然ル後被乘數ノ各項ニ,乘數ノ第一項(此例ニテハ x)ヲ乘ズベシ,而シテ其結果ハ適當ナル符號ヲ附シテ,橫線ノ下ニ書クヿ(1)ノ如シ.

次ニ被乘數ノ各項ニ乘數ノ第二項(此例ニテハ -4)ヲ乘ジ,其結果ヲ前ノ結果ノ次ニ記スルヿ(2)ノ如シ.　但シ(1)ト(2)トノ二ツノ分積ニ於テ,同類項ヲ相重ルヿヲ注意スベシ

最後ノ結果ハ此等ノ二ツノ積ヲ合スレバ可ナリ.

同類項ヲ同ジ縱行ニ置クハ,加法ヲ簡單ニスルナリ.

注意.　上ノ例ニ於テ…………(1)ト…………(2)ハ,唯說明ヲ簡略ニセン爲メニ置キタルナリ.　乘法ノ際ニ入用ノヿニハアラズ.　尙ホ次例ヨリ能ク了解スベシ.

例 2.　$3x^4-5x^3-7x^2+3x-1$ ニ $3x^2-4x+5$ ヲ乘セヨ.

$$\begin{array}{ll}
3x^4-5x^3-7x^2+3x-1 & \\
\underline{3x^2-4x+5} & \\
9x^6-15x^5-21x^4+\ 9x^3-\ 3x^2 & \cdots\cdots\cdots(1) \\
\quad -12x^5+20x^4+28x^3-12x^2+\ 4x & \cdots\cdots\cdots(2) \\
\underline{\qquad\quad +15x^4-25x^3-35x^2+15x-5} & \cdots\cdots\cdots(3) \\
9x^6-27x^5+14x^4+12x^3-30x^2+19x-5 &
\end{array}$$

此(1)ナル分積ハ被乘數ノ各項ニ,乘數ノ第一項 $3x^2$ ヲ乘ジタルナリ.

又(2)ハ被乘數ノ各項ニ,乘數ノ第二項 $-4x$ ヲ乘ジタルナリ,又(3)ハ被乘數ノ各項ニ,乘數ノ第三項 $+5$ ヲ乘ジタルナリ.

注意.　コヽニ一ツ注意スベキヿアリ,ソハ他ニアラズ,例 1, 2 ニ於テハ x ノ指數ハ大ナルモノヨリ先キニ段々ト小サクナル樣ニ列ベタリ.　此ノ如ク列スルヿハ x ノ乘冪ノ遞降次(デッセンヂング Descending オルダー Order)ト云フナリ.

若シ例 2 ノ被乘數ト乘數ヲ反對ノ順,即チ

$$-1+3x-7x^2-5x^3+3x^4$$

$$+5-4x+3x^2$$

ト記スルトキハ,之ヲ x ノ乘冪ノ遞昇次(アッセンヂング Ascending Order)ト云フ,而シテ此列ベ方ニ從テ乘ズルトキハ,次ノ如シ:

$$\begin{array}{l}
-1+\ 3x-\ 7x^2-\ 5x^3+\ 3x^4 \\
\underline{+5-\ 4x+\ 3x^2} \\
-5+15x-35x^2-25x^3+15x^4 \\
\quad +\ 4x-12x^2+28x^3+20x^4-12x^5 \\
\underline{\qquad\quad -\ 3x^2+\ 9x^3-21x^4-15x^5+9x^6} \\
-5+19x-30x^2+12x^3+14x^4-27x^5+9x^6
\end{array}$$

乃チ此積ハ前ト同ジ,但シ順序相反スルノミ.　故ニ二式ヲ相乘ズルニハ,之ヲ或字母ノ遞降次ニ記スルモ,亦遞昇次ニ記スルモ,ソハ隨意ナレモ唯注意スベキヿハ,被乘數ヲ遞降次ニ記スレバ,乘數モ亦遞降次ニ記スベク;被乘數ヲ遞昇次ニスレバ,乘數モ亦必ズ遞昇次ニスベシ〔決シテ被乘數ト乘數ノ二ツヲ,一ハ遞降次一ハ遞昇次トスベカラズ〕.

例 3.　$13x^4+2x^2-5$ ニ $3x^2-5x+6$ ヲ乘セヨ.

$$\begin{array}{r}
13x^4+2x^2-5\\
3x^2-5x+6\\ \hline
39x^6+6x^4-15x^2\\
-65x^5-10x^3+25x\\
+78x^4+12x^2-30\\ \hline
39x^6-65x^5+84x^4-10x^3-3x^2+25x-30
\end{array}$$

此例ニ於テハ各分積ノ同類項ハ,同シ縱行ニアラズシテ,之ヲ加フルニ多少面倒ナリシ. コレ何故ニ此ノ如クナリシヤ,此例ニ於テモ亦前ノ例2ノ始メノ如ク, 被乘數モ乘數モ,遞降次ニ列ベタレドモ,各分積ヲ加フルトキニ,同類項ハ同シ縱行ニ來ラザルハ,何故ナルヤト云フニ,其理由ハ次ノ如シ

$13x^4+2x^2-5$ ニハ,x ノ乘冪ノ最モ高キモノ(乘冪ノ最モ高キモノトハ,指數ノ數モ大ナルモノト云フニ同ジ)x^4 ナレドモ x^4 以下 x^3, x^2, x 等悉ク備ハラズ,乃チ x^3 ト x トハ欠ゲタリ. 故ニ此式ハ假リニ x^3 ト x トヲ補ヒ,x^4 以下 x ノ各乘冪悉ク備リタルモノト見ンニハ,次ノ如ク考フベシ,

$13x^4+2x^2-5$ ハ $13x^4+0.x^3+2x^2+0.x-5$ ト見ルナリ. 但シ $0.x^3$, $0.x$ ハ何レモ0ナルユヘ,其前ノ符號ハ+ト見テモ,−ト見テモヨシ. コヽニハ+ヲ置キタルハ,此ノ如ク+ニテモ−ニテモヨキ場合ニハ,概シテ+ヲ置クノ習慣ナレバナリ. 此ノ如クシテ二式ヲ相乘ズレバ次ノ如シ。

$$\begin{array}{r}
13x^4+0.x^3+2x^2+0.x-5\\
3x^2-5x+6\\ \hline
39x^6+0.x^5+6x^4+0.x^3-15x^2\\
-65x^5-0.x^4-10x^3-0.x^2+25x\\
+78x^4+0.x^3+12x^2+0.x-30\\ \hline
39x^6-65x^5+84x^4-10x^3-3x^2+25x-30
\end{array}$$

乃チ前ト同シ答ヲ得ルナリ. 然レドモ此書キ方ハ未ダ簡便ナリト云フヲ得ズ,多少面倒ナリ. 故ニ實際ハ補ヒタル項ハ,之ヲ記スルヲ要セズ,唯空位ヲ存スベシ,乃チ或乘冪ノ項ガ欠ゲタルトキハ,其位置ヲ空ニシテ $13x^4$ $+2x^2$ -5 ト記スベシ,此ノ如クシテ乘ズルトキハ次ノ如シ:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
13x^4 & & +2x^2 & & -5 & & \\
3x^2 & -5x & +6 & & & & \\ \hline
39x^6 & & +6x^4 & & -15x^2 & & \\
& -65x^5 & & -10x^3 & & +25x & \\
& & +78x^4 & & +12x^2 & & -30\\ \hline
39x^6 & -65x^5 & +84x^4 & -10x^3 & -3x^2 & +25x & -30
\end{array}$$

B

乃チ前ト同シ答ヲ得,而シテ此ノ如クスレバ,少モ面倒ナルヿナシ

64. 相乘セントスル二ツノ式ガ,係數ニ分數ヲ有ツヿアリ. 此ノ場合ハ如何ニスベキヤト云フニ,矢張リ前ニ述ベタル法ト同法ニテ扱フヿヲ得ベシ,但シ係數ト係數トヲ掛ケ合ス(乘ズル)ニ分數ノ乘法ニ由ルベキヿ是ナリ. 或ハ又之ヲ數ノ分母ヲモツ分數ニ化スベシ,但シ其分母ハ各係數ノ分母ノ最小公倍數ニシテ,此ノ如クスレバ分子ノ係數ハ皆整數トナルベシ. 次ノ例ヨリ了解スベシ:

例ヘバ $\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y$ ニ $\frac{2}{5}x+\frac{2}{3}$ ヲ乘セントスルニ前ノ法ニ從ヘバ次ノ如シ.

$$\begin{array}{r}
\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y\\
\frac{2}{5}x+\frac{2}{3}y\\ \hline
\frac{2}{15}x-\frac{1}{10}xy\\
+\frac{2}{9}xy-\frac{1}{6}y^2\\ \hline
\frac{2}{15}x+\frac{11}{90}xy-\frac{1}{6}y^2
\end{array}$$

此乘法ヲ細カニ述ブレバ,被乘數ノ第一項ニ,乘數ノ第一項ヲ乘ズルニハ $\frac{1}{3}x\times\frac{2}{5}x=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}xx=\frac{2}{15}x^2$ ナリ.

被乘數ノ第二項ニ,乘數ノ第一項ヲ乘ズルニハ $-\frac{1}{4}y\times\frac{2}{5}x$ $=-\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}xy=-\frac{1}{10}xy$ ナリ.

次ニ被乘數ノ第一項ニ,乘數ノ第二項ヲ乘ズルニハ, $\frac{1}{3}x\times\frac{2}{3}y$ $=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}xy=\frac{2}{9}xy$ ナリ.

被乘數ノ第二項ニ,乘數ノ第二項ヲ乘ズルニハ, $-\frac{1}{4}y\times\frac{2}{3}y$ $=-\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}yy=-\frac{1}{6}y^2$ ナリ.

又 $-\frac{1}{10}xy$ ト $\frac{2}{9}xy$ トノ和ハ $-\frac{9}{90}xy$ ト $+\frac{20}{90}xy$ トノ和ニ等シク,即チ $\left(\frac{20}{90}-\frac{9}{90}\right)xy=\frac{11}{90}xy$ ナリ.

$\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}y+\frac{2}{5}x-$

次ニ後ノ法ニ從テ乘ズルニハ次ノ如シ:

$$\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y=\frac{4}{12}x-\frac{3}{12}y=\frac{1}{12}(4x-3y),$$

$$\frac{2}{5}x+\frac{2}{3}y=\frac{6}{15}x+\frac{10}{15}y=\frac{1}{15}(6x+10y).$$

此ニ由テ $\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y\right)\left(\frac{2}{5}x+\frac{2}{3}y\right)=\frac{1}{12}(4x-3y)\frac{1}{15}(6x+10y)$

$$=\frac{1}{180}(4x-3y)(6x+10y)$$

$$=\frac{1}{180}(24x^2+22xy-30y^2)$$

$$=\frac{24}{180}x^2+\frac{22}{180}xy-\frac{30}{180}y^2$$

$$=\frac{2}{15}x^2+\frac{11}{90}xy-\frac{1}{6}y^2$$

詳カニ之ヲ述ブレバ $\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y$ ト $\frac{2}{5}x+\frac{2}{3}$ トノ積ハ,此各々ト等シキ $\frac{1}{12}(4x-3y)$ ト $\frac{1}{15}(6x+10y)$ トノ積ニ等シク,而シテ乘法ニ於テ因子ノ順ハ如何ニ取ルモ差支ナキユヘ,コレ $\frac{1}{12}\times\frac{1}{15}(4x-3y)(6x+10y)$ 即チ $\frac{1}{180}(4x-3y)(6x+10y)$ ニ等シ,而シテ $4x-3y$ ト $6x+10y$ トハ前ノ如ク乘ズル時,即チ

$$\begin{array}{r} 4x+3y \\ 6x+10y \\ \hline 24x^2-18xy \\ 40xy-30y^2 \\ \hline 24x^2+22xy-30y^2 \end{array}$$

ナルユヘ(但シ少シク熟練スル時ハ,此積ハ暗算ニテ記スルヲ得ベシ),前ノ積ハ

$$\frac{1}{180}(24x^2+22xy-30y^2)$$

ニ等シ,而シテコレ $\frac{24}{180}x^2+\frac{22}{180}xy-\frac{30}{180}y^2$

即チ係數ヲ最簡項ニ約シテ $\frac{2}{15}x^2+\frac{11}{90}xy-\frac{1}{6}y^2$

ヲ得ルナリ.

65. 次ニ示ス例ハ,代數學ニ於テ,屢々用ユルモノニシテ,且ツ極メテ緊要ナルユヘ,能ク記憶スベシ.

例1. 二項式 $x+a$ ノ平方ヲ求ムルヿ.

$$\begin{array}{r} x+a \\ x+a \\ \hline x^2+ax \\ +ax+a^2 \\ \hline x^2+2ax+a^2 \end{array}$$

$$\therefore\quad (x+a)^2=x^2+2ax+a^2.$$

之ヲ言語ニテ述ブレバ,任意ノ二量和ノ平方ハ,其二量ノ平方ノ和ニ,其積ノ二倍ヲ加ヘタルニ等シ.

之ヲ數ノ例ニ適用スレバ

$$25^2=(20+5)^2=20^2+2\times20\times5+5^2=625.$$

但シ數ヲ此ノ如ク,位ニ由テ分ケテ,其平方ヲ求ムルヿハ,平方根ヲ求ムルヿノ說明ニ肝要ナリ.

例2. 二項式 $x-a$ ノ平方ヲ求ムルヿ.

$$\begin{array}{r} x-a \\ x-a \\ \hline x^2-ax \\ -ax+a^2 \\ \hline x^2-2ax+a^2 \end{array}$$

$$\therefore\quad (x-a)^2=x^2-2ax+a^2.$$

之ヲ言語ニテ述ブレバ,任意ノ二量ノ差ノ平方ハ,其二量ノ平方ノ和ヨリ,其積ノ二倍ヲ減ジタルニ等シ.

之ヲ數ノ例ニ適用スレバ

$$25^2=(30-5)^2=30^2-2\times30\times5+5^2=625.$$

例3. $x+a$ ト $x-a$ トノ積ヲ求ムルヿ.

$$\begin{array}{r} x+a \\ x-a \\ \hline x^2+ax \\ -ax-a^2 \\ \hline x^2 \qquad -a^2 \end{array}$$

$$\therefore\quad (x+a)(x-a)=x^2-a^2$$

之ヲ言語ニテ述ブレバ,任意ノ二量ノ和ト差トノ積ハ,其二量ノ平方ノ差ニ等シ.

之ヲ數ノ計算ニ適用スル時ハ,

$$\begin{aligned}96\times104&=(100-4)\times(100+4)\\&=10000-16\\&=9984.\end{aligned}$$

又幾何學ニ由レバ,直三角形ノ一邊ノ平方ハ,斜邊ノ平方ト他ノ一邊ノ平方トノ差ニ等シ. 故ニ直三角形ノ斜邊ヲ 575 寸,一邊ヲ 425 寸トスル時ハ,他ノ一邊ハ如何ト云フ問題ニ於テハ,次ノ如クシテ求ムルヲ便トス.

$$\begin{aligned}\text{一邊ノ平方}&=575^2-425^2\\&=(575+425)(575-425)\\&=1000\times150\\&=150000\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \text{一邊}=100\sqrt{15}$$

但シ $\sqrt{15}$ ハ開キ盡サズト雖モ,望ム處ノ小數位マデ其根ヲ求ムルヿヲ得ベシ.

然ルニ此演算ヲ,正直ニ次ノ如クスレバ,甚ダ手數ヲ要スルナリ.

$$\begin{array}{r}575\\ \underline{575}\\ 2875\\ 4025\\ \underline{2875}\\ 330625\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{r}425\\ \underline{425}\\ 2125\\ 850\\ \underline{1700}\\ 180625\end{array}$$

$$\therefore\quad 330625-180625=150000$$

乃チ前ト同シ結果ヲ得レモ,手數ヲ要スルヿ少ナカラズ,加之此ノ如ク繁雑ノ演算ヲ爲スハ間違易キモノトス. 本例ノ如キハ,算術ニ於テ屢々遭遇スルモノナリ.

例 4. $x+a$ ト $x+b$ トノ積ヲ求ムルヿ.

$$\begin{array}{l}x+a\\ \underline{x+b}\\ x^2+ax\\ \underline{+bx+ab}\\ x^2+(a+b)x+ab\end{array}$$

此例ノ如キハ,$x^2+ax+bx+ab$ ト記スルモ,差支ハナケレド,x ノ同乘冪ノ項ヲ合セテ $x^2+(a+b)x+ab$ ト記スルヲ常トス

66. 前款ニ述ベタル四例ハ,其結果極メテ緊要ナルユヘ,再ビコヽニ記スレバ

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2 \tag{1}$$

$$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2 \tag{2}$$

$$(x+a)(x-a)=x^2-a^2 \tag{3}$$

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab \tag{4}$$

此諸式ヲ記憶スル時ハ,之レニ類スル式ハ皆暗算ニテ,其積ヲ求ムルヿヲ得ベシ

例ヘバ $(ax+1)$ ノ平方ヲ求メントスルニハ,ax ヲ x ト見做シ,1 ヲ a ト見做ス時ハ,(1)ニ由リ次ノ如シ:

$$\begin{aligned}(ax+1)^2&=(ax)^2+2(ax).\,1+1^2\\&=a^2x^2+2ax+1\end{aligned}$$

又 $x-1$ ノ平方ヲ求メントスルニハ,(2)ニヨリ

$$\begin{aligned}(x-1)^2&=x^2-2.x.1+1^2\\&=x^2-2x+1.\end{aligned}$$

又 a^2+b^2 ト a^2-b^2 トノ積ヲ求メントスルニハ,a^2 ヲ x ト見做シ,b^2 ヲ a ト見做ス時ハ,(3)ニヨリ

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(a^2-b^2)&=(a^2)^2-(b^2)^2\\&=a^4-b^4.\end{aligned}$$

又 $a+6$ ト $a+7$ トノ積ヲ求メントスルニハ,x ヲ a ト見做シ,a ヲ 6,b ヲ 7 ト見做ス時ハ,(4)ニヨリ

$$\begin{aligned}(a+6)(a+7)&=a^2+(6+7)a+6\times7\\&=a^2+13a+42.\end{aligned}$$

但シ少シク熟練スルトキハ,此四例ノ中間ノ演算ハ,胸ノ中ニテ爲シ,實際省畧スルヿヲ得ベシ,乃チ次ノ如シ:

$$(ax+1)^2=a^2x^2+2ax+1,$$

$$(x+3)^2=x^2+6x+9,\quad 等.$$

$$(x-1)^2=x^2-2x+1,$$

$$(3x-5)^2=9x^2-30x+25,\quad 等.$$

$$(a^2+b^2)(a^2-b^2)=a^4-b^4,$$

$$(3x+1)(3x-1)=9x^2-1,\quad 等.$$

又 $$(a+6)(a+7)=a^2+13a+42,$$

$$(2x+5)(3x+1)=6x^2+17x+5,\quad 等.$$

67. 連乘積. $x+a$ ニ $x+b$ ヲ乘シタル積ハ,前ニ $x^2+(a+b)x+ab$ ナルヿヲ知レリ. 故ニ $x+a, x+b, x+c$ ノ連乘積ヲ求メント欲セバ, $x^2+(a+b)x+ab$ ニ $x+c$ ヲ乘ズレバ可ナリ. 乃チ次ノ如シ:

$$\begin{array}{l}
x^2+(a+b)x+ab \\
\underline{x\ +c\qquad\qquad\quad} \\
x^3+(a+b)x^2+abx \\
\underline{\quad+\qquad cx^2+(ac+bc)x+abc} \\
x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc
\end{array}$$

$$\therefore\quad (x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc.$$

68. 代數式ニ用ユル字母ハ,概シテ云ヘバ正ニテモ負ニテモ,又整數ニテモ,分數ニテモ極メテ一般ナルモノニヘ,之レニ如何ナル數價ヲ代入スルモ,差支ナカルベシ.

例ヘバ[illegible]款ノ結果即チ

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$$

ニ於テ, $a=b=c$ トスルトキハ,次ノ如ク變ズ:

$$(x+a)(x+a)(x+a)=x^3+(a+a+a)x^2+(aa+aa+aa)x+aaa$$

即チ $$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3.$$

即チ $x+a$ ノ立方ノ式ヲ得タルナリ.

此式ノ眞ナルヿハ, $x+a$ ノ立方ヲ求ムレバ明了ナリ,乃チ

$$\begin{array}{l}
x\ +a \\
\underline{x\ +a\quad} \\
x^2+ax \\
\underline{\quad+ax+a^2} \\
x^2+2ax+a^2 \\
\underline{x\ +a\qquad\qquad} \\
x^3+2ax^2+\ a^2x \\
\underline{\quad+\ ax^2+2a^2x+a^3} \\
x^3+3ax^2+3a^2x+a^3
\end{array}$$

乃チ前ノ結果ト同シ物ヲ得タリ.

又66款ノ(2)ハ(1)ヨリ誘クヿヲ得ベシ;乃チ

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$$

ニシテ,此 a ハ如何ナル數價ヲ代フルモ差支ナキニヘ, a ヲ $-a$ ニ代フレバ,

$$\{x+(-a)\}^2=x^2+2(-a)x+(-a)^2$$

即チ $$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$$

即チ(2)ニ同シ

故ニ代數的ノ範式ハ,其字母ニ他ノ字母ヲ代入シテ,他ノ範式ヲ誘求スルヿヲ得ベシ.

69. 多項式ノ平方. 二項式ノ平方ハ既ニ65款ニ之ヲ求メタリ. 今三項式 $a+b+c$ ノ平方ヲ求メントスルニ,66款ノ範式(1)ニ於テ, x ヲ a トシ a ヲ $b+c$ トスルトキハ

$$\{a+(b+c)\}^2=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$$

$$=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$$

即チ $$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

然レドモ唯三項式ノミニ限ラズ,一般ニ

$$a+b+c+\cdots\cdots\cdots$$

ナル形ノ多項式ノ平方ハ,容易ク之ヲ求ムルヿヲ得ベシ.

乃チ積 $(a+b+c+d+\cdots\cdots)(a+b+c+d+\cdots\cdots)$ ヲ求メントスルニ,此積ハ乘數ノ各項ヲ取リテ,被乘數ノ各項ニ乘シテ之ヲ得ベシ.

今被乘數ノ各項ニ,乘數ノ第一項 a ヲ乘ズルニ,被乘數ノ各項ノ中ニ, a ト等シキ項ハ唯一ツアリ,故ニ a ヲ被乘數ノ各項ニ乘ズルニ方リテ, a^2 ナル項唯一ツヲ得. 同樣ニ,乘數ノ第二項ヲ被乘數ノ各項ニ乘ズルニ, b^2 ナ

ル項唯一ツヲ得. コレト均シク,c^2, d^2 等ノ項各々唯一ツヲ得ベシ. 次ニ乘數ノ任意ノ項 b ヲ被乘數ノ任意ノ項 c ニ乘ズレバ,項 bc ヲ得; 又乘數ノ項 c ヲ,被乘數ノ項 b ニ乘ズルモ,bc ナル項ヲ得ベシ. 故ニ此積ニ於テ bc ナル項ハ唯二ツアリ. 同樣ニ a, b, c, d 等ノ字母ノ各異ノ二ツノ積ヨリ成ル項ハ,各々二ツ宛アルベシ. 故ニ

$$(a+b+c+d+\cdots\cdots)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+\cdots\cdots$$
$$+2ab+2ac+\cdots\cdots+2bc+\cdots\cdots$$

之ヲ言語ニテ述ブレバ,任意ノ多項式ノ平方ハ,其各項ノ平方ニ,各異ノ二項ノ積二倍ヲ加ヘタルニ等シ.

1. $(x^2+x+1)^2$ ヲ求ム.

$$(x^2+x+1)^2=(x^2)^2+(x)^2+1^2$$
$$+2(x^2)x+2x^2.1+2x.1$$
$$=x^4+x^2+1+2x^3+2x^2+2x$$
$$=x^4+2x^3+3x^2+2x+1.$$

例 2. $(x^3-x^2+x-1)^2$ ヲ求ム.

$$(x^3-x^2+x-1)^2=(x^3)^2+(-x^2)^2+x^2+(-1)^2$$
$$+2(x^3)(-x^2)+2(x^3)x+2(x^3)(-1)+2(-x^2)x+2(-x^2)(-1)+2x(-1)$$
$$=x^6+x^4+x^2+1$$
$$-2x^5+2x^4-2x^3-2x^3+2x^2-2x$$
$$=x^6-2x^5+3x^4-4x^3+3x^2-2x+1$$

例 3. $(3x^2-4x+1)^2$ ヲ求ム.

$$(3x^2-4x+1)^2=(3x^2)^2+(-4x)^2+1^2$$
$$+2(3x^2)(-4x)+2(3x^2).1+2(-4x).1$$
$$=9x^4+16x^2+1-24x^3+6x^2-8x$$
$$=9x^4-24x^3+22x^2-8x+1$$

注意 1. 多項式 $(a+b+c+\cdots\cdots)$ ノ平方ヲ作ル方法,a, b, c 等ノ各異ノ二項ノ積ヲ作ルニ,遺レナク爲スニハ,各項ト其次ノ各項トノ積ヲ取レバ可ナリ

例ヘバ $(a+b+c+d+e)$ ノ平方ヲ求ムルニ,各項ノ平方ハ,容易ク之ヲ得ベシ,即チアラユル項 a, b, c, d, e ノ各々ノ平方 a^2, b^2, c^2, d^2, e^2 ヲ作ルベシ. 次ニ a, b, c, d, e ヨリ,各異ノ二項ノ積ヲ作ルニハ,先ヅ a ヲ取リ之ヲ其次ノ各項 b, c, d, e ト組合セ,

$$ab,\ ac,\ ad,\ ae$$

ナル四項ヲ得. 次ニ b ヲ取リ,之ヲ其次ノ各項 c, d, e ト組合セ,

$$bc,\ bd,\ be$$

ナル三項ヲ得. 次ニ c ヲ取リ之ヲ其次ノ各項 d, e ト組合セ,

$$cd,\ ce$$

ナル二項ヲ得. 次ニ d ヲ取リ之ヲ其次ノ項 e ト組合セ,

$$de$$

ナル項ヲ得. 此ニ於テ $ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de$ ナル十項ヲ得,a, b, c, d, e ノ五ツハ,之ヲ二ツ宛組合スルニハ,如何ニスルモコレヨリ他ノ項ヲ得ルコナシ. 故ニ是等ノ積ノ二倍ヲ各項ノ平方ノ和ニ加ヘテ次ノ結果ヲ得ルナリ:

$$(a+b+c+d+e)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$$
$$+2ab+2ac+2ad+2ae$$
$$+2bc+2bd+2be$$
$$+2cd+2ce$$
$$+2de.$$

注意 2. 前ノ例 1, 2, 3 ノ如キハ,少シク熟練スル時ハ,中間ノ演算ハ省キテ直ニ其結果ヲ記スルコヲ得ベシ.

70. 是迄既ニ指數ノ定義ニヨリテ,$x^2\times x^3=x^5$ 及ヒ $(x^3)^2=x^3\times x^3=x^6$ ナルコハ,之ヲ證明セリ. コレ $x^m\times x^n=x^{m+n}$ 及ヒ $(x^m)^n=x^{mn}$ ノ特別ノ場合ニ過ギズ,即チ,$x^2\times x^3=x^5$ ハ $m=2$, $n=3$ トスレバ $x^m\times x^n=x^{m+n}$ ニ同ジキナリ; 又 $m=3$, $n=2$ ト見レバ $(x^m)^n=x^{mn}$ ハ $(x^3)^2=x^6$ ニ同ジキナリ. 而シ此字母指數 m ト n ハ,正ニテモ負ニテモ,亦整數ニテモ分數ニテモ差支ナケレド,先ヅ此處ニテハ m ト n トヲ正ノ整數ニ限リ,他ノ場合ハ後ニ證明セントス.

71. 指數定則ノ第一 $x^m\times x^n=x^{m+n}$ ナルコトヲ證スル法,但シ x ハ任意ノ數ニシテ,m ト n トハ正ノ整數ニ限ル.

指數ノ定義〔26款〕ニ由テ

$$x^m=xxx\cdots\cdots m\text{ 因子迄}$$

及ビ

$$x^n=xxx\cdots\cdots n\text{ 因子迄}$$

故ニ

$$x^m\times x^n=(xxx\cdots\cdots m\text{ 因子迄})(xxxx\cdots\cdots n\text{ 因子迄})$$
$$=xxx\cdots\cdots\cdots(m+n)\text{ 因子迄}$$
$$=x^{m+n}.$$

茲ニ $(xxx\cdots\cdots m$ 因子迄$)$ ト記セルハ,x ト云フ數ヲ,m 丈ケ列ベ記スルノ意,即チ x ト云フ數ヲ,m 丈ケ掛ケ合スルノ意ナリ. 同樣ニ $(xxx\cdots\cdots n$ 因子迄$)$ トハ,x ト云フ數ヲ,n 丈ケ列記スルナリ. 又 $xxx\cdots\cdots(m+n)$ 因子迄モ同ジヿナリ.

乃チ同ジ數ノ乘羃ノ積ハ,同ジ數ニ,二因子ノ指數ノ和ヲ以テ指數トシタルニ同ジ.

例ヘバ　　$x^{13}\times x^{25}=x^{13+25}=x^{38}$　　ノ如シ.

又或ハ　　$a^{15}\times a^{3}=a^{15+3}=a^{18}.$

72. 指數定則ノ第一ヲ擴メテ,因子ノ數ガ,三ツ以上ナルモノニ及ボスヿヲ得ベシ

例ヘバ m,n,p ヲ正ノ整數トスル件ハ

$$x^m\times x^n\times x^p=x^{m+n}\times x^p$$
$$=x^{m+n+p}$$

此意ハ $x^m\times x^n\times x^p$ ナル積ハ,先ヅ $x^m\times x^n$ ノ積ヲ作レバ x^{m+n} ナルユヘ,$x^m\times x^n\times x^p$ ハ $x^{m+n}\times x^p$ ニ同シキナリ,而シテ之レニ又指數定則ヲ適用スル件ハ $x^{m+n}\times x^p$ ハ $x^{(m+n)+p}$ 即チ x^{m+n+p} トナルナリ.

同樣ニ m,n,p,q ヲ正ノ整數トスレバ

$$x^m\times x^n\times x^p\times x^q=x^{m+n}\times x^p\times x^q$$
$$=x^{m+n+p}\times x^q$$
$$=x^{m+n+p+q}$$

此理ハ因子ノ數ガ幾ツニテモ同ジヿナリ.

此ニ由テ,若干ノ同ジ數ノ各異ノ乘羃ノ積ハ,同ジ數ニ,各因子ノ指數ノ和ヲ,指數トシテ附シタルモノニ同ジ.

73. 定理. 二ツノ齊次式ノ積ハ,亦齊次式ナリ.

如何トナレバ,第一ノ式ノ各項ヲ m 次元トシ,第二ノ式ノ各項ヲ n 次元トスレバ,此二式ノ積ノ各項ハ,第一ノ式ノ或項ト,第二ノ式ノ或項トノ積ナルユヘ,積ノ各項ハ $m+n$ 次元ナルベケレバナリ.

例ヘバ a^2+ax+x^2 ト a^2-ax+x^2 トノ積ヲ求ムレバ,$a^4+a^2x^2+x^4$ ニシテ,$a+x$ ト a^2+ax+x^2 トノ積ハ $a^3+2a^2x+2ax^2+x^3$ ナリ,乃チ第一ノ塲合ニ於テハ,二次ト二次トノ二ツノ齊次式ノ積ナルユヘ,其積ハ $(2+2)$ 即チ四次ノ齊次式ナリ. 又第二ノ塲合ニ於テハ一次ト二次トノ二ツノ齊次式ノ積ナルユヘ,其積ハ $(1+2)$ 即チ三次ノ齊次式ナリ. 同樣ニ三ツ以上ノ齊次式ノ連乘積モ亦齊次式ナリ. 又齊次式ノ任意ノ乘羃モ亦齊次式ナリ.

例ヘバ　　$(a^2+x^2)(a+x)(a-x)=(a^2+x^2)(a^2-x^2)$
$$=a^4-x^4.$$

及ビ　　$(a^3+x^3)^2=a^6+2a^3x^3+x^6$

乃チ第一ノ塲合ニ於テハ,二次ト一次ト一次トノ三齊次式ノ連乘積ナルユヘ其積ハ $(2+1+1)$ 即チ四次ノ齊次式ナリ. 又第二ノ塲合ニ於テハ三次ノ齊次式ノ二乘ナルユヘ,其乘羃ハ (3×2) 即チ六次ノ齊次式ナリ.

抑モ代數式ハ實ニ多ク齊次式ナルモノユヘ,此定理ヲ用ヒテ,乘法ノ結果ノ正否ヲ驗スルヿヲ得ベシ. 乃チ齊次式ノ積ガ齊次式ナラザレバ,乘法ノ演算ニ誤リアルヿ明了ナリ.

74. 定理 $(ab)^n=a^nb^n$ ナルヿヲ證セントス:但シ勿論 n ハ正ノ整數トス.

定義ヨリ $(ab)^2=ab\times ab=a^2b^2$ ナルヿ明白ナリ. コレ $(ab)^n=a^nb^n$ ニ於テ $n=2$ トシタル特別ノ塲合ナリ.

指數ノ定義〔26款〕ニ由テ

$$(ab)^n=ab\times ab\times ab\times\cdots\cdots\cdots\cdots n\text{ 因子迄}$$
$$=(aaa\cdots\cdots n\text{ 因子迄})\times(bbb\cdots\cdots n\text{ 因子迄})$$
$$=a^n\times b^n$$
$$=a^nb^n.$$

同樣ニ　　$(abc)^n=\{(ab)c\}^n$

$$=a^n bc)^n$$

$$=a^nb^nc^n.$$

$$(abcd)^n=a^nb^nc^nd^n$$ ナリ

例ヘバ $(xyz)^5=x^5y^5z^5$ ナルガ如シ.

75. 指數定則ノ第二 $(x^m)^n=x^{mn}$ ナルコヲ證スル法;但シ x ハ任意ノ量ニシテ,m ト n トハ勿論正ノ整數トス.

指數ノ定義ニ由テ

$$(x^m)^n=x^m\times x^m\times x^m\cdots\cdots n \text{ 因子迄}$$

$$=x^{m+m+m+\cdots\cdots n \text{ 項迄}} \text{(定則第一}$$

$$=x^{mn}$$

例ヘバ $(a^5)^7=a^{5\times 7}=a^{35}$ ナルガ如シ.

76. 定理 $(a^mb^n)^p=a^{mp}b^{np}$ ナルコヲ證セントス;但シ m, n, p ハ勿論正ノ整數トス.

74 款ノ定理ニ由,

$$(a^mb^n)^p=(a^m)^p(b^n)^p$$

指數定則ノ第二ニ由テ, $=a^{mp}b^{np}.$

例ヘバ $(a^3b^5)^2=a^{3\times 2}b^{5\times 2}=a^6b^{10}$ ナルガ如シ.

第四編

除法

77. 是ヨリ代數式ノ除法ヲ說明セントスルニ,先ヅ單式ノ除法ヨリ始ムベシ.

除法ノ結果ハ,除數ト商トヲ掛ケ合セ,若シ餘リアラバ之レヲ加ヘテ被除數ト等シクナルヤ否ヲ見ルコ肝要ナリ.

此理ニ由テ除法ハ時トシテハ,乘法ノ逆ト稱ス.

78. 單式ノ除法. 單式ヲ單式ニテ除スルコハ,次ノ數例ヨリ了解スベシ

例 1. $4x$ ヲ x ニテ除セヨ.

$4x$ ハ 4 ト x トノ積ナルユヘ,$4x$ ヲ x ニテ除スレバ,其商ハ 4 ナリ.之ヲ次ノ如ク記ス:

$$4x\div x=4.$$

例 2. $27a^5$ ヲ $9a^3$ ニテ除セヨ.

$$27a^5\div 9a^3=\frac{27a^5}{9a^3}=\frac{27aaaaa}{9aaa}=3aa=3a^2$$

算術ノ如ク分子ト分母ニ公通セル因子ヲ去ルベシ. 之ヲ次ノ如ク記ス:

$$27a^5\div 9a^3=3a^2.$$

例 3 $35a^3b^2c^3$ ヲ $7ab^2c^2$ ニテ除セヨ.

$$35a^3b^2c^3\div 7ab^2c^2=\frac{35a^3b^2c^3}{7ab^2c^2}$$

$$=\frac{35aaabbccc}{7abbcc}$$

$$=5a^2c.$$

此ニ由テ單式ヲ他ノ單式ニテ除スルニハ,先ヅ被除數ノ數字係數ヲ,除數ノ數字係數ニテ除シ,其商ニ被除數ノ中ノ字母ヲ悉ク連記シ,且ツ其各字母ニハ被除數ノ中ニアリシ時ノ指數ヨリ,除數ノ中ニアル之レト同字母ノ指數ヲ減シタルモノヲ指數トシテ附スベシ,但シ被除數ノ指數ヨリ除數ノ指數ヲ減ズル際ニ,零トナル字母ハ,之ヲ省クベシ.

例 4. $84a^5x^3$ ヲ $12a^4x$ ニテ除セヨ.

$$84a^5x^3\div 12a^4x=7a^{5-4}x^{3-1}$$

$$=7ax^2.$$

注意. 此中間ノ演算 $7a^{5-4}x^{3-1}$ ハ少シク熟錬シタル後ハ省クコヲ得ベシ.

例 5. $77a^2x^3y^4$ ヲ $7ax^2y$ ニテ除セヨ.

$$77a^2x^3y^4\div 7ax^2y=11axy^3.$$

79. 符號ノ定則 除法ノ符號ノ定則ハ乘法ヨリ直ニ之ヲ知リ得ベシ.

乘法ノ符號ノ定則ニ由テ

$$(+a)\times(+b)=+ab \qquad ナルニハ,$$

$$(+ab)\div(+a)=+b.$$

又 $$(-a)\times(-b)=+ab \qquad ナルニハ,$$

$$(+ab)\div(-a)=-b.$$

又 $$(+a)\times(-b)=-ab \qquad ナルニハ,$$

$$(-ab)\div(+a)=-b.$$

又 $$(-a)\times(+b)=-ab \qquad ナルニハ,$$

$$(-ab)\div(-a)=+b.$$

此ニ由テ除法ノ符號ノ定則ハ,亦乘法ト同ジク,次ノ如ク述ブルコトヲ得ベシ.

同符號(正ニテモ負ニテモ)ノ二量ノ商ハ正量ナリ.

異符號(一ツハ正,一ツハ負)ノ二量ノ商ハ負量ナリ.

尙ホ之ヲ詳カニ述ブレバ,正ノ數ヲ正ノ數ニテ除シタル商ハ正ニシテ;負ノ數ヲ負ノ數ニテ除シタル商モ亦正ナリ.

又負ノ數ヲ正ノ數ニテ除シタル商ハ負ニシテ;正ノ數ヲ負ノ數ニテ除シタル商モ亦負ナリ.

此定則ヲ簡畧ニ述ブレバ,

同符號ハ正ヲ生シ,異符號ハ負ヲ生ズ.

例 1. $6ab\div 2a=3b.$

例 2. $-15xy\div 3x=-5y.$

例 3. $-21a^2b^3\div -7a^2b^2=3b.$

例 4. $45a^6b^2x^4\div -9a^3bx^2=-5a^3bx^2.$

例 5. $-\frac{4}{9}a^4b^5c^3\div -\frac{8}{3}a^3b^3c^3=\frac{1}{6}ab^2.$

但シ此例5ノ結果ノ $\frac{1}{6}$ ハ, $-\frac{4}{9}$ ヲ $-\frac{8}{3}$ ニテ除シタル商ナリ,即チ

$$-\frac{4}{9}\div-\frac{8}{3}=\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{6}.$$

80. 多項式ヲ單式ニテ除スル法. 多項式ニ單式ヲ乘セントスルニハ,其單式ヲ多項式ノ各項ニ乘ジテ,其各積ノ代數和ヲ取ルベキコトハ,既ニ

之ヲ述ベタリ[56款]; 故ニ多項式ヲ單式ニテ除スルニハ,其多項式ノ各項ヲ,單式ニテ除シ,其各商ノ代數和ヲ取ルベシ.

例 1. $(9x-12y+3z)\div -3=(9x\div -3)+(-12y\div -3)+(3z\div -3)$

$$=-3x+4y-z.$$

例 2. $(36a^3b^2-24a^2b^5-20a^4b^2)\div 4a^2b$

$$=(36a^3b^2\div 4a^2b)+(-24a^2b^5\div 4a^2b)+(-20a^4b^2\div 4a^2b)$$

$$=9ab-6b^4-5a^2b.$$

例 3. $\left(2x^2-5xy+\frac{3}{2}x^3y^3\right)\div -\frac{1}{2}x$

$$=\left(2x^2\div -\frac{1}{2}x\right)+\left(-5xy\div -\frac{1}{2}x\right)+\left(\frac{3}{2}x^3y^3\div -\frac{1}{2}x\right)$$

$$=-4x+10y-3x^2y^3.$$

注意. 中間ノ演算ハ了解シ易キ爲メ記シタルモノナレバ實際演算ヲナス時ハ之ヲ省クコトヲ得ベシ.

81. 多項式ヲ多項式ニテ除スル法. コレヨリ多項式ヲ多項式ニテ除スル法ヲ說明セントス.

多項式ヲ他ノ多項式ニテ除スルニ方リテ,求メント欲スル式ハ,之レニ除數ヲ乘ズレバ被除數トナル如キモノナリ,而シテ此式ヲ求ムルニハ,一項ツツ求ムルモノニシテ,次ノ如シ:

1. 先ツ除數ト被除數トヲ,之レニ公通セル或字母ノ乘羃ノ遞降次,又ハ遞昇次ニ列スベシ.

2. 被除數ノ第一項ヲ除數ノ第一項ニテ除シ,其結果ヲ商ノ第一項トス.

乘

3. 商ノ此第一項ヲ除數ノ全式ニ乘シ,其積ヲ被除數ノ下ニ置クベシ.

4. 減法ヲ施シ,且ツ之レニ必要丈ケ,被除數ノ項ヲ持チ來スベシ.

5. 此演算ヲ反覆シ更ニ餘リナキニ至ルカ,又ハ餘リニ於ケル,前ノ公通セル字母ノ最高次ノ乘羃ハ,除數ノ同シ最高次ノ乘羃ヨリ低次ナルニ至テ止ムベシ.

乃チ前ノ場合ニハ除盡スルモノニシテ,後ノ場合ニハ,除盡スル能ハザ

ルモノナリ.

例 1. $x^2+11x+30$ ヲ $x+6$ ニテ除セヨ.

先ヅ此兩式ヲ,x ノ乘冪ノ遞降次ニ列ベ,且ツ次ノ如クス

$$x+6)\,x^2+11x+30\,($$

此被除數ノ第一項 x^2 ヲ,除數ノ第一項 x ニテ除スレバ,其商ハ x ナリ. 除數ノ全式ニ x ヲ乘ジ,其積 x^2+6x ヲ,被除數ノ下ニ置ク時ハ

$$\begin{array}{r} x+6)\,x^2+11x+30\,(x \\ \underline{x^2+\ \ 6x\qquad} \\ 5x+30 \end{array}$$

減法ヲ行ヘバ

又上ノ方法ヲ反覆スベシ. 乃チ $5x+30$ ヲ被除數ト見テ, $x+6$ ニテ除スベシ. 乃チ $5x+30$ ノ第一項 $5x$ ヲ $x+6$ ノ第一項 x ニテ除スレバ,商ハ 5 ナリ. 今全キ演算ハ次ノ如シ.

$$\begin{array}{r} x+6)\,x^2+11x+30\,(x+5 \\ \underline{x^2+\ \ 6x\qquad} \\ 5x+30 \\ \underline{5x+30} \end{array}$$

此ニ由テ所要ノ商ハ $x+5$ ナリ.

上ノ除法ノ定則ノ理ハ,被除數ハ便宜ノ爲メ,若干ノ部分ニ分ツヿヲ得而シテ完全商ハ各分商ノ和ニ等シト云フヿニアリ. 尙ホ之ヲ委シク云ヘバ,本例ニ於テハ,被除數ヨリ,除數ノ x 倍ト,又除數ノ $+5$ 倍トヲ減ゼシナリ. 故ニ $x+5$ ヲ除數ニ乘ズレバ,被除數ト等シクナルユヘ,商ハ $x+5$ ナルヿ明カナリ.

例 2. $24x^2-65xy+21y^2$ ヲ $8x-3y$ ニテ除セヨ.

$$\begin{array}{r} 8x-3y)\,24x^2-65xy+21y^2\,(3x-7y \\ \underline{24x^2-\ \ 9xy\qquad\quad} \\ -56xy+21y^2 \\ \underline{-56xy+21y^2} \end{array}$$

茲ニ先ヅ被除數ノ第一項 $24x^2$ ヲ,除數ノ第一項 $8x$ ニテ除スレバ,商ハ $3x$ ニシテ,コレ所要ノ商ノ第一項ナリ. 次ニ $3x$ ヲ除數 $8x-3y$ ニ乘ジ,其積 $24x^2-9xy$ ヲ被除數ノ下ニ置キ,且ツ減ジテ,其餘リノ第一項 $-56xy$ ヲ,除數ノ第一項ニテ除スレバ商ハ $-7y$ ニシテ,コレ所要ノ商ノ第二項ナリ.

次ニ $-7y$ ヲ除數ニ乘ジ,其積 $-56xy+21y^2$ ヲ被除數ノ餘リヨリ減ズレバ,更ニ餘リナキユヘ,所要ノ商ハ $3x-7y$ ナリ.

例 3. $6x^5-x^4+4x^3-5x^2-x-15$ ヲ $2x^2-x+3$ ニテ除セヨ.

$$\begin{array}{r} 2x^2-x+3)\,6x^5-\ x^4+4x^3-5x^2-x-15\,(3x^3+x^2-2x-5 \\ \underline{6x^5-3x^4+9x^3\qquad\qquad\qquad\quad} \\ 2x^4-5x^3-5x^2\qquad\qquad \\ \underline{2x^4-\ x^3+3x^2\qquad\qquad} \\ -4x^3-8x^2-\ x\qquad \\ \underline{-4x^3+2x^2-6x\qquad} \\ -10x^2+5x-15 \\ \underline{-10x^2+5x-15} \end{array}$$

此ニ由テ所要ノ商ハ $3x^3+x^2-2x-5$ ナリ.

茲ニ先ヅ被除數ノ第一項 $6x^5$ ヲ,除數ノ第一項 $2x^2$ ニテ除スレバ商ハ $3x^3$ ニシテ,コレ所要ノ商ノ第一項ナリ. 以下前ノ如シ.

例 4. $2a^3+10-13a-39a^2+15a^4$ ヲ $2-4a-5a^2$ ニテ除セヨ.

本例ニ於テハ,除數ハ a ノ乘冪ノ遞昇次ナレド,被除數ハ,其乘冪ノ順一定セザルユヘ,兩式ヲ倶ニ a ノ乘冪ノ遞昇次又ハ遞降次ニ列セザルベカラズ. 先ヅ a ノ乘冪ノ遞昇次ニ列シテ,除法ヲ施ス時ハ

$$\begin{array}{r} 2-4a-5a^2)\,10-16a-39a^2+2a^3+15a^4\,(5+2a-3a^2 \\ \underline{10-20a-25a^2\qquad\qquad\qquad} \\ 4a-14a^2+2a^3\qquad\quad \\ \underline{4a-\ \ 8a^2-10a^3\qquad\quad} \\ -\ \ 6a^2+12a^3+15a^4 \\ \underline{-\ \ 6a^2+12a^3+15a^4} \end{array}$$

又之ヲ a ノ乘冪ノ遞降次ニ列シテ,除數ヲ施ス時ハ

$$\begin{array}{r} -5a^2-4a+2)\,15a^4+2a^3-39a^2-16a+10\,(-3a^2+2a+5 \\ \underline{15a^4+12a^3-6a^2\qquad\qquad\qquad} \\ -10a^3-33a^2-16a\qquad \\ \underline{-10a^3-\ \ 8a^2+\ \ 4a\qquad} \\ -25a^2-20a+10 \\ \underline{-25a^2-20a+10} \end{array}$$

乃チ尙ホ前ト同ジ商ヲ得. 唯 a ノ乘冪ノ順相反セルノ異アルノミ.

例 5. x^4+4a^4 ヲ $x^2+2ax+2a^2$ ニテ除セヨ.

$$
\begin{array}{l}
x^2+2ax+2a^2\,)\,x^4 \qquad\qquad\qquad +4a^4\,(\,x^2-2xa+2a^2 \\
\qquad x^4+2x^3a+2x^2a^2 \\
\qquad\quad -2x^3a-2x^2a^2 \\
\qquad\quad -2x^3a-4x^2a^2-4xa^3 \\
\qquad\qquad\qquad 2x^2a^2+4xa^3+4a^4 \\
\qquad\qquad\qquad 2x^2a^2+4xa^3+4a^4
\end{array}
$$

例 6. $a^3+b^3+c^3-3abc$ ヲ $a+b+c$ ニテ除セヨ。

$$
\begin{array}{l}
a+b+c\,)\,a^3-3abc+b^3+c^3\,(\,a^2-ab-ac+b^2-bc+c^2 \\
\qquad a^3+a^2b+a^2c \\
\qquad\quad -a^2b-a^2c-3abc \\
\qquad\quad -a^2b-ab^2-abc \\
\qquad\qquad -a^2c+ab^2-2abc \\
\qquad\qquad -a^2c-abc-ac^2 \\
\qquad\qquad\qquad ab^2-abc+ac^2+b^3 \\
\qquad\qquad\qquad ab^2+b^3+b^2c \\
\qquad\qquad\qquad\quad -abc+ac^2-b^2c \\
\qquad\qquad\qquad\quad -abc-b^2c-bc^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad ac^2+bc^2+c^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad ac^2+bc^2+c^3
\end{array}
$$

或ハ又此除法ヲ,a ノ各乘羃ヲ括弧ニ入レテ行フコヲ得,次ノ如シ:

$$
\begin{array}{l}
a+(b+c)\,|\,a^3 \qquad -3abc+(b^3+c^3)\,|\,a^2-a(b+c)+(b^2-bc+c^2) \\
\qquad a^3+a^2(b+c) \\
\qquad\quad -a^2(b+c)-3abc+(b^3+c^3) \\
\qquad\quad -a^2(b+c)-a(b+c)^2 \\
\qquad\qquad\qquad a(b^2-bc+c^2)+(b^3+c^3) \\
\qquad\qquad\qquad a(b^2-bc+c^2)+(b^3+c^3)
\end{array}
$$

茲ニ被除數ノ第一項 a^3 ヲ,除數ノ第一項 a ニテ除スレバ,其商ハ a^2 ニシテ,コレ商ノ第一項ナリ. a^2 ヲ除數ノ全式ニ乘ジ其積 $a^3+a^2(b+c)$ ヲ被除數ヨリ減シ,其餘リノ第一項 $-a^2(b+c)$ ヲ,除數ノ第一項 a ニテ除スレバ,其商ハ $-a(b+c)$ ナリ. コレヲ商ノ第二項トス. 除數ノ全式ニ $-a(b+c)$ ヲ乘ジ,其積 $-a^2(b+c)-a(b+c)^2$ ヲ前ノ餘リ $-a^2(b+c)-3abc+(b^3+c^3)$ ヨリ減ズベシ,但シ其減法ハ次ノ如シ:

$$
\begin{array}{l}
-a^2(b+c)-3abc+(b^3+c^3) \\
-a^2(b+c)-a(b+c)^2
\end{array}
$$

此第一行ノ差ハ零ナルコト明カナリ. 又第二行即チ $-3abc$ ヨリ $-a(b+c)^2$ ヲ減ズルニハ,a ノ係數 $-3bc$ ヨリ a ノ係數 $-(b+c)^2$ ヲ引クナリ. 即チ $-(b^2+2bc+c^2)$ ヲ引クナリ,即チ $-3bc$ ヨリ $-b^2-2bc-c^2$ ヲ引クユヘ,其餘リハ,

b^2-bc+c^2 ナリ. 故ニ除法ノ第二ノ餘リハ $a(b^2-bc+c^2)+(b^3+c^3)$ ナリ. 此第一項 $a(b^2-bc+c^2)$ ヲ,除數ノ第一項 a ニテ除スレバ,其商ハ (b^2-bc+c^2) ニシテ,コレ所要ノ商ノ第三項ナリ. 之ヲ除數ノ全式ニ乘ズレバ,$a(b^2-bc+c^2)+(b+c)(b^2-bc+c^2)$ 即チ $a(b^2-bc+c^2)+(b^3+c^3)$ ナリ. 仍テ之ヲ第二ノ餘リヨリ減ズルニ更ニ,餘リナキユヘ,除法ハコレニテ終レリトス.

本例ノ除法ノ結果ハ,肝要ナルモノユヘ,ヨク注意スベシ.

例 7 $\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{72}xy^2+\frac{1}{12}y^3$ ヲ $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y$ ニテ除セヨ。

$$
\begin{array}{l}
\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\,)\,\frac{1}{4}x^3 \qquad +\frac{1}{72}xy^2+\frac{1}{12}y^3\,\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{4}y^2\right. \\
\qquad \frac{1}{4}x^3+\frac{1}{6}x^2y \\
\qquad\quad -\frac{1}{6}x^2y+\frac{1}{72}xy^2 \\
\qquad\quad -\frac{1}{6}x^2y-\frac{1}{9}xy^2 \\
\qquad\qquad\qquad \frac{1}{8}xy^2+\frac{1}{12}y^3 \\
\qquad\qquad\qquad \frac{1}{8}xy^2+\frac{1}{12}y^3
\end{array}
$$

茲ニ被除數ノ第一項 $\frac{1}{4}x^3$ ヲ,除數ノ第一項 $\frac{1}{2}x$ ニテ除スレバ,商ハ $\frac{1}{2}x^2$ ニシテ,コレ所要ノ商ノ第一項ナリ. $\frac{1}{2}x^2$ ヲ除數ノ全式ニ乘ジ,其積 $\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{6}x^2y$ ヲ,被除數ヨリ減シ,其餘リノ第一項 $-\frac{1}{6}x^2y$ ヲ,除數ノ第一項 $\frac{1}{2}x$ ニテ除スレバ,其商ハ $-\frac{1}{3}xy$ ニシテ,コレ所要ノ商ノ第二項ナリ. 之ヲ除數ノ全式ニ乘ジ,其積ヲ第一ノ餘リヨリ減ジタル第二ノ餘リノ第一項 $\frac{1}{8}xy^2$ ヲ,除數ノ第一項 $\frac{1}{2}x$ ニテ除スレバ,其商ハ $\frac{1}{4}y^2$ ニシテ,コレ所要ノ商ノ第三項ナリ. 是ニ於テ $\frac{1}{4}y^2$ ヲ除數ノ全式ニ乘ジテ,之ヲ餘リヨリ減ズルニ,更ニ餘リナキユヘ,除法ハコヽニ終ルモノトス.

82. <u>除盡セザル場合</u> 此場合ハ次例ニ就テ了解スベシ.

例. $2x^2-3ax+a^2$ ヲ $x+2a$ ニテ除セヨ.

$$
\begin{array}{r}
x+2a\,)\;2x^2-3ax+a^2\;(\,2x-7a \\
\underline{2x^2+4ax} \\
-7ax+a^2 \\
\underline{-7ax-14a^2} \\
15a^2
\end{array}
$$

故ニ商ハ $2x-7a$ ニシテ,餘リハ $15a^2$ ナリ.

此結果ハ亦 $2x^2-3ax+a^2=(2x-7a)(x+2a)+15a^2$ ト記スルヲ得ベシ.

前ニハ除數ト被除數トヲ,x ノ乘羃ノ遞降次ニ列セリ,若シ之ヲ x ノ乘羃ノ遞昇次ニ列スレバ

$$
\begin{array}{r}
2a+x\,\big)\;a^2-3ax+2x^2\;\Big(\frac{1}{2}a-\frac{7}{4}x \\
\underline{a^2+\frac{1}{2}ax} \\
-\frac{7}{2}ax+2x^2 \\
\underline{-\frac{7}{2}ax-\frac{7}{4}x^2} \\
\frac{15}{4}x^2
\end{array}
$$

此結果ハ $a^2-3ax+2x^2=\left(\frac{1}{2}a-\frac{7}{4}x\right)\left(2a+x\right)+\frac{15}{4}x^2$ ト記スルヿヲ得ベシ.

注意. 此二ツノ演算ニ於テ異ナル結果ヲ得タル理由ハ如何ト云フニ次ノ如シ:

第一ノ演算ニ於テハ,餘リハ x ヲ含マザルモノユヘ,x ヲ含ム項迄 $2x^2-3ax+a^2$ ニ符合セシメンニハ, $x+2a$ ニ如何ナル式ヲ乘ズベキカヲ求ムルナリ. 乃チ $(2x-7a)(x+2a)$, 即チ $2x^2-3ax-14a^2$ ハ初メノ二項丈ケハ $2x^2-3ax+a^2$ ニ符合スルナリ.

又第二ノ演算ニ於テハ,餘リハ a ヲ含マザルユヘ,a ヲ含ム項迄 $a^2-3ax+2x^2$ ニ符合セシメンニハ, $2a+x$ ニ如何ナル式ヲ乘ズベキカヲ求ムルニアリ. 乃チ $(2a+x)\left(\frac{1}{2}a-\frac{7}{4}x\right)$, 即チ $a^2-3ax-\frac{7}{4}x^2$ ハ,始メノ二項迄ハ $a^2-3ax+2x^2$ ニ符合スルナリ.

83. <u>指數定則.</u> <u>$x^m\times x^n$ ヲ求ムル法. 但シ x ハ任意ノ量ニシテ, m ト n トハ正ノ整數ニ限ル.</u>

先ヅ第一ニ, $m>n$ トスレバ $\frac{x^m}{x^n}=x^{m-n}$.

如何トナレバ $\quad \dfrac{x^m}{x^n}=\dfrac{xxx\cdots\cdots m\text{因子迄}}{xxx\cdots\cdots n\text{因子迄}}$

サテ $m>n$ ナル時ハ,分母ノ n 因子ハ分子ノ n 因子ト消約シテ,分子ニ x ナル因子ヲ $m-n$ 個丈ケ殘スベシ. 故ニ此商ハ x^{m-n} ナリ.

第二ニ $n>m$ トスレバ $\frac{x^m}{x^n}=\frac{1}{x^{n-m}}$.

如何トナレバ $\quad \dfrac{x^m}{x^n}=\dfrac{xxx\cdots\cdots m\text{因子迄}}{xxx\cdots\cdots n\text{因子迄}}$

サテ $n>m$ ナル時ハ,分子ノ m 因子ハ分母ノ m 因子ト消約シテ,分母ニ x ナル因子ヲ $n-m$ 個丈ケ殘スベシ. 故ニ次ノ如シ:

$$\frac{x^m}{x^n}=\frac{1}{x^{n-m}}.$$

是迄述ベタルヿヲ總括スレバ

(1). 單式ト單式トノ積ヲ求ムル法如何.

(2) 複式ト單式トノ積ヲ求ムル法如何.

(3) 複式ト複式トノ積ヲ求ムル法如何.

(4) 乘法ニ於テ其因子ノ順ハ,如何ニ取ルモ,其積ハ變ズルヿナキノ理由如何.

(5) 乘法ノ符號ノ定則ノ說明如何.

(6) 負數ノ乘羃ヲ作ルニ,其符號ハ如何ニ之ヲ決定スベキヤ.

(7) 二項式 $x+a$ ノ平方ハ如何.

(8) 二項式 $x-a$ ノ平方ハ如何.

(9) $(x+a)(x-a)$ ナル積ヲ記セヨ.

(10) $(x+a)(x-a)$ ナル積ノ範式ニ由テ數ノ計算ヲ簡略ニスル例如何.

(11) 連乘積トハ如何.

(12) 多項式ノ平方ヲ求ムル法如何.

(13) 乘法ノ指數定則ノ第一ハ如何.

(14) 二ツノ齊次式ノ積ハ,亦齊次式ナルヿヲ證スル法如何.

(15) $(ab)^n=a^nb^n$ ヲ證スルヿ如何.

(16) 乘法ノ指數定則ノ第二ハ如何.

(17) $(a^m b^n)^p = a^{mp} b^{np}$ ヲ證スルヿ如何.

(18) 單式ヲ單式ニテ除スル法如何.

(19) 除法ノ符號ノ定則ハ如何.

(20) 複式ヲ單式ニテ除スル法如何.

(21) 複式ヲ複式ニテ除スル法如何.

(22) 除盡セザル場合ニ,除數ト被除數トノ列ヘ方相反スレバ,異ナル結果ヲ得ルハ,何故ナルヤ.

(23) 除法ニ於ケル指數定則ハ如何.

第五編

一次方程式

84. 一致式　二ツノ代數式ガ,其中ニ含有セル字母ノ數價ノ如何ニ拘ハラズ相等シキ時,此二式ヲ相等ノ記號ニテ結ビ付ケタルモノヲ一致式(Identity),或ハ範式(Formula)ト云ヒ(33款),又ハ一致方程式(Identical Equation)トモ云フ.

一致式ニ於テハ,相等ノ記號ノ兩邊ノ式ハ,全ク相等シキモノニシテ唯之ヲ別法ニテ顯ハシタルニ過ギズ.

例ヘバ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 又ハ $x+3x+4=4x+4$ ノ如キハ,一致式ナリ.如何トナレバ,此第一ノ兩邊ノ式ハ a, b ノ數價如何ニ拘ハラズ相等シク,又第二ノ兩邊ノ式ハ x ノ數價如何ニ拘ハラズ相等シケレバナリ.

注意. 一致式ヲ顯ハスニ,記號 $\equiv$ ヲ以テスルヿアリ.

例ヘバ $(a+b)^2\equiv a^2+2ab+b^2$ ノ如シ.

85. 方程式　二ツノ代數式ガ,其中ニ含有スル字母ニ,或數價ヲ代入シタル時ノミ,互ニ相等シキ時此二式ヲ相等ノ記號ニテ結ビ付タルモノヲ方程式(Equation)ト云フ.

相等ノ記號ニテ結ビ付ケタル二式ヲ方程式ノ邊(Side)又ハ節(Member)ト云フ.

例ヘバ $3x+8=x+14$ ハ方程式ナリ,如何トナレバ $3x+8$ ト $x+14$ トノ二式ハ,$x=3$ ナル時ノミ相等シケレバナリ. 此 $3x+8$ ト $x+14$ ハ方程式ノ邊又ハ節ナリ.

又 $x^2-5x+16=10$ ハ方程式ナリ,如何トナレバ $x^2-5x+16$ ト 10 トノ二式ハ $x=2$ ナル時ト $x=3$ ナル時ノミ相等シク x ニ此他ノ數價ヲ代入スルモ $x^2-5x+16$ ハ 10 ニ等シカラザレバナリ.

此 $x^2-5x+16$ ト 10 ハ方程式ノ邊又ハ節ナリ.

方程式ノ兩邊ヲ區別シテ云フ時ハ,左邊又ハ右邊或ハ左節又ハ右節ト云フ.

例ヘバ方程式 $3x+8=x+14$ ニ於テ,$3x+8$ ハ左邊,又ハ右節 $x+14$ ハ右邊又ハ右節ナルガ如シ.

86. 根　方程式中ニ含有スル字母ニ,或數價ヲ代ヘテ,其方程式ノ兩邊ヲ相等シクナス時ハ,此數價ヲ方程式ノ根(Root)ト云フ.

方程式ノ根ハ,之レニ適當スル(to satisfy)ト云フ.

方程式ヲ解ク(to solve)トハ,其根ヲ求ムルヿナリ. 又此演算ノ結果ナル處ノ根ヲ顯ハスニ,解法(solution)ナル語ヲ以テスルヿ屢々コレアリ.

87. 未知量　求メントスル處ノ量ヲ顯ハス字母ヲ未知量(Unknowns)ト云フ.

例ヘバ前ノ諸例ニ於ケル x ノ如キハ未知量ナリ.

88. 記法　數字ニテ示サヾル既知量ヲ顯ハスニハ,「アベセ」ノ始ノ字母 a, b, c, 等ヲ用ヒ;未知量ヲ顯ハスニハ,「アベセ」ノ終ノ字母 x, y, z, 等ヲ用フ.

89. 方程式ノ類別. 未知量ヲ除クノ外,數字ノミヲ含ム處ノ方程式ヲ,數字的ノ方程式(Numerical equation)ト云ヒ;既知量ノ內一二若クハ悉皆ヲ,字母ニテ顯ハセル時ハ,之ヲ代數的ノ方程式(Algebraical equation)ト云フ.

例ヘバ $x^2-5x+16=10$ ノ如キハ數字的ノ方程式ニシテ,又 $x^2+bx+c=0$ 及ビ $x^2+bx+5=0$ ノ如キハ代數的ノ方程式ナリ.

方程式ヲ未知量ノ次元ニ從テ,類別スル丁次ノ如シ:

一次方程式　唯一未知量(xトス)ノミヲ含ム處ノ方程式ガ,xノ一乘冪ノミヲ含有スル𬼂ハ,之ヲ一次方程式(Simple（シムプル） epuation 又ハ equation of the First（フハースト） degree（デグリー）, 又ハ Linear（リチアル） equation)ト云フ.

二次方程式　唯一未知量(xトス)ノミヲ含ム處ノ方程式ガ,xノ二乘冪ト一乘冪ノミヲ含ムカ,又ハ單ニxノ二乘冪ノミヲ含ム𬼂ハ,之ヲ二次方程式(Quadratic（シオドラチック） equation 又ハ equation of the second（セコンド） degree)ト云フ.

同樣ニ一未知量xノ方程式ニ於テ其含有スルxノ乘冪ガ,唯x, x^2, x^3ノ三種ノミナル𬼂ハ,之ヲ三次方程式(Cubic（キユビック） equation)ト云フ(但シx^3サヘ含有スレバ,他ハ之ヲ含マザルモ可ナリ). 又方程式ノ中ニ含有スルxノ乘冪ハ,唯x, x^2, x^3, x^4ノ四種ノミナル𬼂ハ,之ヲ四次方程式(Biquadratic（メイクオードラチック） equation)ト云フ(但シx^4サヘ含有スレバ,他ハ之ヲ含マサルモ可ナリ).

90.　公理　次ノ眞理ハ公理ト假定ス(幾何初步講義錄46「ページ」ヲ參考セヨ).

(1)　等シキ量ヲ,等シキ量ニ加フレバ其和相等シ.

此解釋ハ幾何學初步講義錄47「ページ」ノ第四ニ詳カナリ

(2)　等シキ量ヲ,等シキ量ヨリ減ズレバ,其差相等シ.

(3)　等シキ量ニ,同ジ數又ハ等シキ數ヲ乘ズレバ,其積モ亦相等シ.

(4)　等シキ量ヲ,同ジ數又ハ等シキ數ニテ除スレバ,其商モ亦相等シ.

語ヲ換ヘテ之ヲ云フ𬼂ハ,方程式ノ兩邊ニ同ジ數ヲ加ヘ,又ハ減ズル丁ヲ得;而ソ又方程式ノ兩邊ニ同ジ數ヲ乘ジ,又ハ除スル丁ヲ得ルナリ.

91.　項ヲ置キ換フル丁.　方程式ノ任意ノ項ハ,其符號ヲ變ズレバ,此一邊ヨリ彼一邊ニ移ス丁ヲ得ベシ.

茲ニ　$a+b-c=d$

ナル相等式アリトシ,此兩邊ニcヲ加フレバ〔公理(1)〕

$$a+b-c+c=d+c$$

即チ

$$a+b=d+c$$

cハ相等式ノ左邊ヨリ右邊ニ移リ,其符號ハ$-$ヨリ$+$ニ變ゼリ.

次ニ又モトノ　$a+b-c=d$

ナル相等式ノ兩邊ヨリbヲ減ゼヨ,即チ$-b$ヲ加ヘヨ.　コレ公理(2)ニ由テ固ヨリ此ノ如ク爲ス丁ヲ得ルユヘ

$$a+b-c-b=d-b,$$

即チ

$$a-c=d-b.$$

故ニbハ相等式ノ~~右~~左邊ヨリ右邊ニ移リ,其符號ハ,$+$ヨリ$-$ニ變ゼリ.

此ノ如ク方程式ノ一項ヲ,其符號ヲ變ジテ,此一邊ヨリ彼一邊ニ移ス𬼂ハ,此項ハ置キ換ヘタリト云フ.

若シ方程式ノ各項ヲ悉ク,左邊ニアルモノハ右邊ニ,右邊ニアルモノハ左邊ニ置キ換フル𬼂ハ,各項ノ符號ハ悉ク變ズベシ.　コレ方程式ノ兩邊ニ-1ヲ乘ジタルニ同ジク.而ソ公理(3)ニ由テ固ヨリ此ノ如クスルヲ得ルナリ.　故ニ方程式ノ各項ノ符號ヲ悉ク變ズル丁ヲ得ベシ.

92.　本編ニ於テ,以下說ク處ハ,唯一未知量ノミヲ含ム處ノ一次方程式ノ簡單ナル例ノミニ限ルベシ.

93.　一次方程式ヲ解ク法　一次方程式ヲ解ク法ハ,次ニ示ス諸例ヨリ,容易ニ了解スル丁ヲ得ベシ.　此法ハ通例次ノ順序ニ從フベシ.

(1)　先ヅ方程式ニ分數ヲ含ム𬼂ハ,其分母ヲ去リ,又括弧アレバ,之ヲ解キ,其他スベテ式中ニ表示セル代數的ノ演算ヲ行フベシ.

(2)　次ニ未知量ヲ含ム項ヲ悉ク其方程式ノ一邊(通常左邊)ニ移シ而ソ他ノ諸項ヲ悉ク他ノ邊ニ移スベシ.

(3)　然ル𬼂出來ル丈ケ同類項ヲ集メテ,兩邊ヲ簡單ニシ,而ソ殊ニ未知量ヲ含ム項ヲ集メテ一項トスベシ.

(4)　終ニ方程式ノ兩邊ヲ,未知量ノ係數ニテ除スレバ,所要ノ根ヲ得ベシ.

演算ノ各階級ハ,別々ニ之ヲ記スルヲ要ス,而ソ後式ハ前式ヨリ之ヲ誘

キタル法ヲ明カニスベシ. 且ツ初學者ハ,得タル處ノ根ノ何タルヲ明白ニ陳述スベシ.

例 1. $3x-8=x+12$ ヲ解ケ.

此右邊ノ x ヲ左邊ニ,左邊ノ -8 ヲ右邊ニ置キ換フレバ

$$3x-x=12+8.$$

同類項ヲ集ムレバ $2x=20.$

2 ニテ除スレバ $\therefore \quad x=10.$

故ニ所要ノ根ハ10ナリ.

故ニ x ノ此數價ハ,與ヘラレタル方程式ニ適當スベシ,即チ x ノ此數價ヲ,與ヘラレタル方程式ニ代入スレバ,其兩邊ヲ全ク相等シクナスナリ.

此根ガ,與ヘラレタル方程式ニ適當スルヤ否ヲ撿シテ,此結果ノ眞ナルヿヲ證明スルヿヲ得ベシ.

乃チ若シ與ヘラレタル方程式ニ於テ, $x=10$ トスル件ハ

$$3\times10-8=10+12$$

即チ $$30-8=10+12$$

故ニ此根ノ正シキヿ明白ナリ.

例 2. $\frac{1}{2}x-3=\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x$ ヲ解ケ.

此分母ヲ去ルニハ,諸分母ノ最小公倍數20ヲ,此各項ニ乘ズベシ,

乃チ $$\frac{20}{2}x-3\times20=\frac{20}{4}x+\frac{20}{5}x$$

$$\therefore \quad 10x-60=5x+4x.$$

置キ換フレバ $10x-5x-4x=60,$

同類項ヲ集ムレバ $x=60.$

故ニ所要ノ根ハ60ナリ.

此根ハ正シキヤ否ヲ撿スルヿ次ノ如シ:

$$\frac{1}{2}\times60-3=\frac{1}{4}\times60+\frac{1}{5}\times60$$

即チ $$30-3=15+12$$

故ニ此根ノ正シキヿ明白ナリ.

例 3. $5(x-3)-7(6-x)+3=24-3(8-x)$ ヲ解ケ.

括弧ヲ取リ去レバ

$$5x-15-42+7x+3=24-24+3x$$

置キ換フレバ

$$5x+7x-3x=24-24+15+42-3$$

同類項ヲ集ムレバ $9x=54$

9 ニテ除スレバ $\therefore \quad x=6.$

此結果ノ正否ヲ撿スルヿ次ノ如シ:

$$5(6-3)-7(6-6)+3=24-3(8-6),$$

即チ $$5\times3-7\times0+3=24-3\times2,$$

即チ $$15+3=24-6,$$

故ニ此根ノ正シキヿ明白ナリ.

例 4. $7x-5[x-\{7-6(x-3)\}]=3x+1$ ヲ解ケ.

括弧ヲ取リ去レバ

$$7x-5[x-\{7-6x+18\}]=3x+1,$$
$$7x-5[x-25+6x]=3x+1,$$
$$7x-5x+125-30x=3x+1,$$

置キ換フレバ $7x-5x-30x-3x=1-125,$

同類項ヲ集ムレバ $-31x=-124,$

$$\therefore \quad x=4.$$

此結果ノ正否ヲ撿スルヿ次ノ如シ:

$$7\times4-5[4-\{7-6(4-3)\}]=3\times4+1,$$
$$28-5[4-\{7-6\times1\}]=12+1,$$
$$28-5[4-1]=13$$
$$28-5\times3=13,$$
$$28-15=13$$

ナルニヨリ此結果ノ正シキヿ明カナリ.

例 5. $5x-(4x-7)(3x-5)=6-3(4x-9)(4x-9)(x-1)$ ヲ解ケ.

括弧ヲ去レバ

$$5x-(12x^2-41x+35)=6-3(4x^2-13x+9),$$

$$5x-12x^2+41x-35=6-12x^2+39x-27,$$

$$5x+41x-39x=35+6-27,$$

同類項ヲ集ムレバ $7x=14,$

$$\therefore \quad x=2.$$

此結果ノ正否ヲ檢スルコ次ノ如シ:

$$5\times2-(4\times2-7)(3\times2-5)=6-3(4\times2-9)(2-1),$$

$$10-(8-7)(6-5)=6-3(8-9)(2-1),$$

$$10-1\times1=6-3\times(-1)\times1,$$

$$10-1=6+3,$$

故ニ此結果ノ正シキコ明カナリ。

例 6. $4-\frac{x-9}{8}=\frac{x}{22}-\frac{1}{2}$ ヲ解ケ.

諸分母ノ最小公倍數ナル88ヲ乘ズレバ

$$352-11(x-9)=4x-44,$$

括弧ヲ去レバ $352-11x+99=4x-44,$

置キ換フレバ $-11x-4x=44-99-352,$

同類項ヲ集ムレバ $-15x=-495,$

$$\therefore \quad x=33.$$

學生自ラ此結果ノ正否ヲ檢セヨ.

例 7. $\cdot\dot{6}x+\cdot2\dot{5}-\frac{1}{9}x=1\cdot\dot{8}-\cdot75x-\frac{1}{3}$ ヲ解ケ。

小數及ビ循環小數ヲ分數ニ化スレバ

$$\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}x=1\frac{8}{9}-\frac{3}{4}x-\frac{1}{3},$$

分母ヲ去レバ $24x+9-4x=68-27x-12$

置キ換フレバ $24x-4x+27x=68-12-9,$

同類項ヲ集ムレバ $47x=47$

$$\therefore \quad x=1.$$

學生自ラ此結果ノ正否ヲ檢セヨ.

是迄述ベタルコヲ總括スレバ

(1) 方程式トハ如何

(2) 方程式ノ根トハ如何.

(3) 數字的ノ方程式トハ如何,又代數的ノ方程式トハ如何.

(4) 方程式ノ次數ハ如何ニシテ定ムルヤ.

(5) 方程式ヲ解クニ必要ナル公理ハ如何.

(6) 方程式ノ項ヲ置キ換フルトハ如何.

(7) 方程式ノ兩邊ノ符號ヲ悉ク變ズルコヲ得ルハ如何ナル公理ニ基クヤ.

(8) 一次方程式ヲ解ク法ノ順序ハ如何.

例 8. $ax-2b=5bx-3a$ ヲ解ケ.

置キ換フレバ $ax-5bx=2b-3a$

即チ $(a-5b)x=2b-3a$

$$\therefore \quad x=\frac{2b-3a}{a-5b}.$$

例 9. $(x+a)(x+b)-c(a+c)=(x-c)(x+c)+ab$ ヲ解ケ.

括弧ヲ解ケバ $x^2+ax+bx+ab-ac-c^2=x^2-c^2+ab,$

置キ換フレバ $ax+bx=ac$

即チ $(a+b)x=ac$

$$\therefore \quad x=\frac{ac}{a+b}.$$

例 10. $(a+b)x^2-a(bx+a^2)=bx(x-a)+ax(x-b)$ ヲ解ケ。

括弧ヲ解ケバ $ax^2+bx^2-abx-a^3=bx^2-abx+ax^2-abx$

置キ換フレバ $abx=a^3$

$$\therefore \quad x=\frac{a^2}{b}.$$

第　六　編

一次方程式ノ問題

94. 本編ニ於テハ,一次方程式ノ問題ノ例ヲ示スベシ,但シ問題ハ唯一未知量ノミヲ含ムカ然ラザレバ,二ツ以上ノ未知量ヲ含ムモノト雖ドモ一ツノ未知量ノ項ニテ,容易ク他ノ未知量ヲ顯ハシ得ベキモノトス而シテ其法ハ通例問題中ニ於ケル未知量ヲ記號xニテ顯ハシ次ニ問題ニ於ケル諸種ノ關係ヲ此xト已知量トヲ用ヒテ顯ハストキハ一ノ方程式ヲ得ベシ斯クシテ得タル方程式ヲ解ケバ所要ノ未知量ヲ求メ得ベシ. 尙ホ此等ノ問題ヲ解クコハ,次ニ示ス例ヨリ了解スベシ.

例 1. 二數アリ,其和ハ 100 ニシテ,其差ハ 28 ナルトキハ,此二數ハ各如何.

解. 一ツノ數ヲxトスレバ,二數ハ合セテ 100 ナルユヘ,他ノ一ツノ數ハ $100-x$ ナリ.

然ルニ此二數ノ差ハ 28 ナリト云フユヘ

$$x-(100-x)=28,*$$

即チ　$2x-100=28,$

即チ　$2x=100+28,$

$$\therefore\quad x=64,$$

而メ　$\therefore\quad 100-x=36.$

故ニ此二數ハ 64 ト 36 ナリ.

注意. 此問題ニ於テ,* ト記シタル方程式ヲ得ルニハ,xヲ大ナル數ト假定セシユヘ,xヨリ $100-x$ ヲ引キタルナリ. 然レ𪜈xヲ大ナル數ト假定スルモ,xヲ小ナル數ト假定スルモ,ソハ固ヨリ隨意ナルユヘ,xヲ小ナル數ト假定スルトキハ

$$(100-x)-x=28,$$

即チ　$100-x-x=28,$

置キ換フレバ　$-2x=28-100,$

即チ　$-2x=-72,$

$$\therefore\quad x=36,$$

而メ此ニ由テ　$100-x=64$

ヲ得,乃チ前ノ如シ

別解. 大ナル數ヲxトスレバ,二數ノ差ハ 28 ナルユヘ,小ナル數ハ $x-28$ ナリ.

然ルニ二數ハ合セテ 100 ナルユヘ

$$x+(x-28)=100*$$

置キ換フレバ　$2x=128,$

$$\therefore\quad x=64.$$

而メ此ニ由テ　$x-28=36.$

注意. 此問題ニ於テ,* ト記シタル方程式ヲ得ルニハ,xヲ大ナル數ト假定セリ,然レ𪜈若シxヲ小ナル數トセバ,大ナル數ハ $x+28$ ナルユヘ次ノ如シ:

$$x+(x+28)=100,$$

置キ換フレバ　$2x=100-28$

即チ　$2x=72,$

$$\therefore\quad x=36,$$

而メ此ニ由テ　$x+28=64.$

例 2. 60 ヲ次ノ如ク二分セヨ:乃チ大分ノ三倍ヨリ 100 ヲ減ジタルモノハ, 200 ヨリ小分ノ八倍ヲ減ジタルモノニ等フセヨ.

解. 大分ヲxトスレバ,小分ハ $60-x$ ナリ.

大分ノ三倍ハ $3x$ ニシテ,コレヨリ 100 ヲ減ジタルモノハ

$$3x-100$$

ナリ,而メ小分ノ八倍ハ $8(60-x)$ ニシテ,之ヲ 200 ヨリ減ジタルモノハ

$$200-8(60-x)$$

ナリ. 仍テ

$$3x-100=200-8(60-x),$$

括弧ヲ解キテ　$3x-100=200-480+8x,$

置キ換フレバ $3x-8x=200+100-480,$

即チ $-5x=-180,$

$\therefore\ x=36,$ コレ大分ナリ.

而シテ此ニ由テ $60-x=24,$ コレ小分ナリ.

例 3. 金47圓ヲ,甲乙丙三人ニ分チ,甲ハ乙ヨリ10圓多ク,乙ハ丙ヨリ8圓多ク取ラシメントス,問フ各ノ所得幾何ナルヤ.

解. 丙ノ所得金ヲ x 圓トスレバ,乙ノ所得金ハ $x+8$ 圓,甲ノ所得金ハ $x+8)+10$,即チ $x+18$ 圓ナリ.

此ニ由テ $x+(x+8)+(x+18)=47,$

即チ $x+x+8+x+18=47,$

置キ換フレバ $x+x+x=47-8-18,$

即チ $3x=21,$

$\therefore\ x=7.$

而シテ $x+8=15.$

$x+18=25.$

故ニ甲ノ所得金ハ25圓,乙ノ所得金ハ15圓,丙ノ所得金ハ7圓ナリ.

例 4. 甲乙二人アリ,其年齢甲ハ乙ノ二倍ナリ,而シテ十年以前ノ年齢ハ,甲ハ乙ニ四倍セシト云フ,仍テ各々ノ年齢ヲ問フ.

解. 乙ヲ x 歳トスレバ,甲ハ $2x$ 歳ナリ.

十年以前ノ甲乙ノ年ハ $2x-10, x-10$ ナリ.

此ニ由テ $2x-10=4(x-10),$

即チ $2x-10=4x-40,$

置キ換フレバ $2x-4x=10-40,$

即チ $-2x=-30,$

$x=15.$

而シテ $2x=30.$

故ニ甲ハ30歳,乙ハ15歳ナリ.

例 5. 父子アリ,父ノ年ハ子ノ年ニ六倍スト云フ,而シテ今ヨリ四年ノ後ハ,父ノ年ハ,子ノ年ニ四倍スベシ. 然ラバ各ノ年齢如何.

解. 子ヲ x 歳トスレバ,父ハ $6x$ 歳ナリ. 而シテ四年ノ後,父子ノ年ハ,$6x+4, x+4$ ナリ.

故ニ $6x+4=4(x+4),$

即チ $6x+4=4x+16,$

置キ換フレバ $6x-4x=16-4,$

即チ $2x=12,$

$\therefore\ x=6,$

而シテ $6x=36.$

故ニ父ハ36歳,子ハ6歳ナリ.

例 6. 40歳ノ人,10歳ノ子ヲ持テリ,然ラバ父ノ年ガ子ノ年ノ三倍ニ等シキハ,今ヨリ幾年前,又ハ幾年後ナルヤ.

解. 本題ニ於テハ「幾年前又ハ幾年後」ナルヤヲ問フモノニシテ,何レナルヤ,一見シテ疑ハシキモノナリ. 仍テ先ヅ x 年前トスレバ,題文ニ由テ次ノ如シ:

$$40-x=3(10-x),$$

即チ $40-x=30-3x,$

置キ換フレバ $3x-x=30-40,$

即チ $2x=-10,$

$\therefore\ x=-5.$

コヽニ負ノ答數ヲ得タリ. 按ズルニ,現在ノ時ヨリ x 年前トセシユヘ,現在ノ時ヨリ前ニ溯リテ計ヘタル年數ヲ正トセシナリ. 仍テ負ハ之レニ反シテ計ヘタルモノ,即チ現在ノ時ヨリ後ニ計ヘタル年數ナルベシ. 乃チ今ヨリ五年ノ後父ノ年ハ子ノ年ノ三倍トナルベシ,即チ之レヲ驗スルニ,現在父ハ40歳,子ハ10歳ナルユヘ,五年ノ後ハ,父ハ45歳,子ハ15歳トナルユヘ,此答數ノ眞ナルコト明カナリ.

注意. 本題ノ如キハ,幾年前ナルヤ又幾年後ナルヤハ一見シテ明了ナラザルモ,一考スレバ分明ナリ. 如何トナレバ,例ヘバ茲ニ30歳ノ人,子ヲ持ツトキハ,父ガ30歳ニシテ,子ガ1歳ナレバ,父ノ年ハ子ノ年ニ30倍スレド,翌年ニ於テハ,父ハ31歳,子ハ2歳ナルユヘ,父ノ年ハ子ノ年ニ15.5倍シ又

其翌年ハ,父ハ32歳子ハ3歳ナルユヘ,父ノ年ハ子ノ年ニ$\frac{32}{3}$倍スベシ．此ノ如ク父モ子モ同年ヲ加フルユヘ,子ガ生長スルニ從ヒ段々ト倍數ハ減ズベシ．此理ニ由テ考フルニ,本題ニ於テハ,父ノ年ハ40,子ノ年ハ10ナルユヘ,現在ニアリテ,父ノ年ハ子ノ年ニ四倍セリ．故ニ父ノ年ガ子ノ年ノ三倍ニ等シキハ,今ヨリ幾年前ニアラズシテ,今ヨリ幾年後ナリ．

故ニ今ヨリx年ノ後トスレバ,次ノ如シ:

$$40+x=3(10+x),$$

即チ $$40+x=30+3x,$$

置キ換フレバ $$x-3x=30-40,$$

即チ $$-2x=-10,$$

$$\therefore \quad x=5.$$

例7．父子アリ,現在ニアリテ,父ノ年ハ子ノ年ニ三倍セリト云フ,而シテ十年ノ後,父ノ年ハ子ノ年ニ二倍スト云フ,然ラバ父子各々ノ年齡如何．

解．現在ニ於テ子ノ年ヲxトスレバ,父ノ年ハ$3x$ナリ．十年ノ後ニハ,父ノ年ハ$3x+10$,子ノ年ハ$x+10$ナリ．故ニ次ノ如シ:

$$3x+10=2(x+10),$$

即チ $$3x+10=2x+20,$$

置キ換フレバ $$3x-2x=20-10,$$

即チ $$x=10,$$

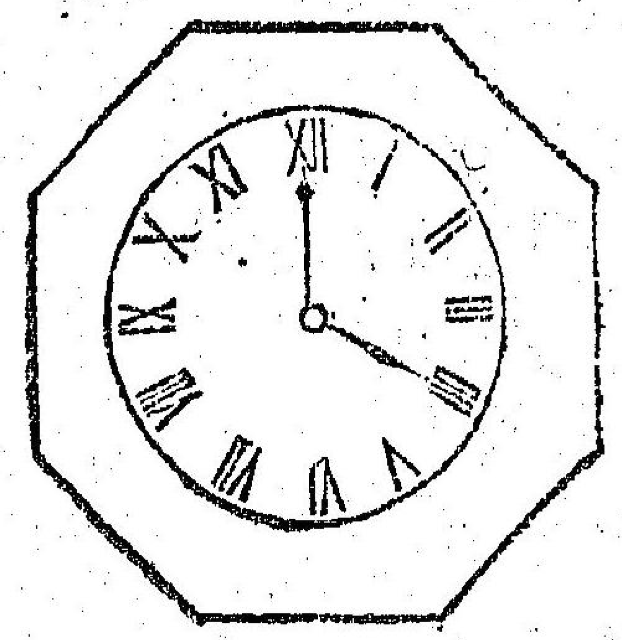
而シテ $$3x=30,$$

故ニ父ハ30歳子ハ10歳ナリ．

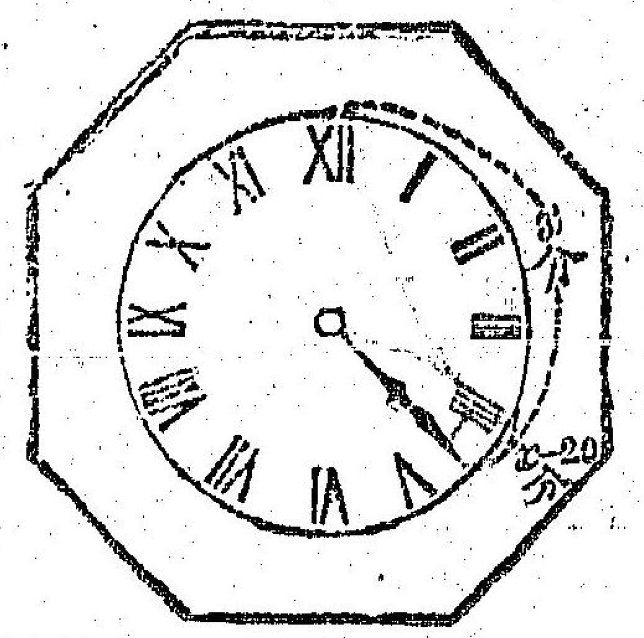
例8．四時ト五時トノ間ニ於テ,時計ノ兩針相重ナル時ヲ問フ．

解．短針ガ四時ヲ指ス時ハ,長針ハ十二時ヲ指スコト(1)圖ノ如シ(2)圖ハ長針ト短針ト相重ナリシモノヲ示ス．而シテ此相重ナル時ハ,四時ト五時トノ間ニアルコト明カナリ．如何トナレバ短針ガ四時ヲ指ス時ハ長針ハ十二時ヲ指シ,而シテ短針ガ四時ヨリ五時ニ進ム間ニ,長針ハ時計面ヲ全一回轉シテ,復十二時ヲ指ス故ニ其間ニ於テ必ズ短針ニ重ナル時アルベケレバナリ．

(1)



(2)



今長針ガ12時ヨリ相重ナル迄ヲx分トスレバ,長針ガx分ヲ進ム間ニ短針ノ經過セシハ$x-20$分ナリ(12時ヨリ4時迄ハ時計面ニテ20分アルユヘ)而シテ長針ノ速度ハ,短針ニ12倍セルユヘ長針ガ時計ノ全面ヲ一回轉スル間ニ短針ハ漸ク一時即チ時計ノ全面ノ十二分ノ一丈ケ回轉スレバナリ)長針ノ經過セシ處ハ,恒ニ短針ノ經過セシ處ニ12倍スベシ,

而シテ本題ニ於テハ長針ガ時計面ニ於テx分ノ間隔ヲ進ムト同シ時間ニ於テ短針ハ$x-20$分ノ間隔ヲ進ムコトヲ要ス而シテ前述ノ如ク同時間内ニ於テ長針ノ進ム間隔xハ短針ノ進ム間隔$x-20$ノ12倍ナルベキヲ以テ次ノ方程式アリ,

$$x=12(x-20),$$

即チ $$x=12x-240,$$

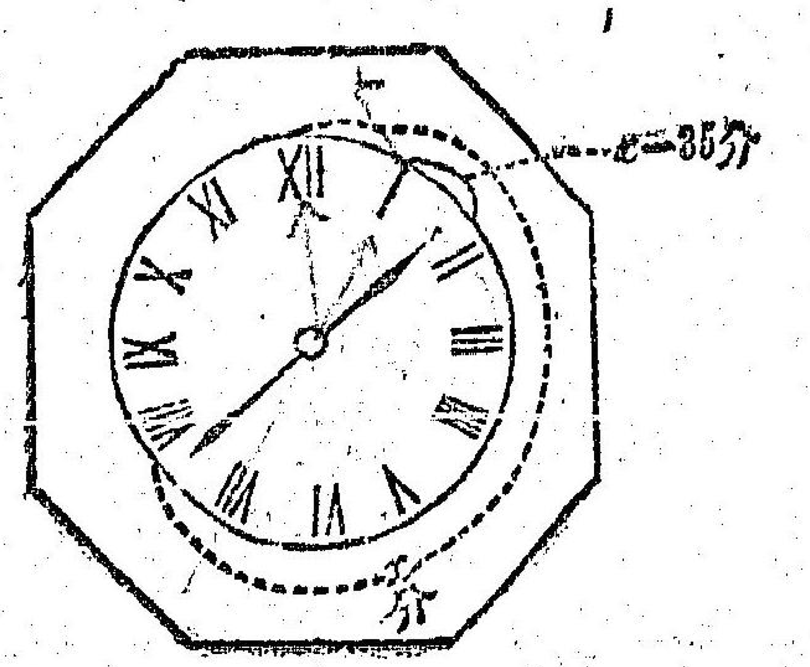
置キ換フレバ $$x-12x=-240,$$

即チ $$-11x=-240,$$

$$\therefore \quad x=\frac{240}{11}=21\frac{9}{11}$$

故ニ兩針相重ルハ4時ヲ過ルコト$21\frac{9}{11}$分即チ21分$49\frac{1}{11}$秒ナリ．

例9．一時ト二時トノ間ニ於テ,時計ノ兩針一直線ヲナス時ヲ問フ



解.　短針ガ一時ヲ指ストキハ,長針ハ12時ヲ指スベク,前ノ圖ノ如ク長針ガ短針ヲ追ヒ越シテ,30分先キニ進ムトキハ,両針一直線ヲナスベシ.今12時ヨリ計ヘテ,両針一直線ヲナス迄ニ,長針ノ進ミタル距離ヲx分トスレバ,其間ニ短針ノ進ミタル距離ハ,$x-35$分ナルベシ.　何トナレバ両針一直線ヲナストキ時計ノ面ニ於テ長針ハ短針ヨリ30分ノ間隔ダケ先キニアリ且ツ又長針ハXIIノ處ヨリ進行シ同時ニ短針ハIノ處ヨリ進行セルモノユヘ茲ニ長針ハ短針ヨリ5分ノ間隔ダケ多ク進マザルベカラズ此ニ由テ長針ハ短針ヨリ時計ノ面ニ於テ30+5即チ35分ノ間隔ダケ先キニ進マザルベカラズ換言セバ短針ノ進ミタル距離ハ長針ヨリ35分ノ間隔ダケ少ナシ故ニ長針ノ進ミタル距離ヲxトセバ短針ノ進ミタル距離ハ$12(x-35)$ナラザルベカラズ.　故ニ次ノ方程式アリ:

$$x=12(x-35),$$

即チ　　$x=12x-420,$

置キ換フレバ　　$x-12x=-420,$

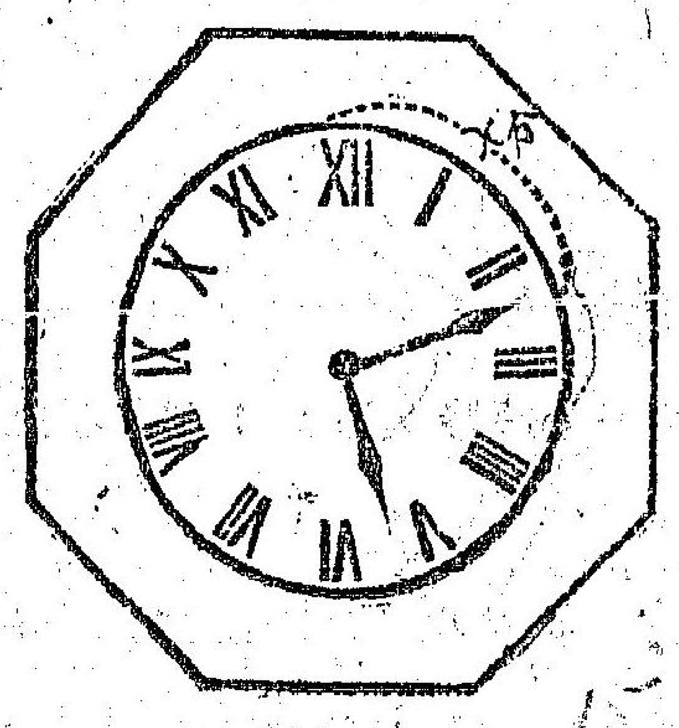
即チ　　$-11x=-420,$

$$\therefore\quad x=\frac{420}{11}=38\frac{2}{11}.$$

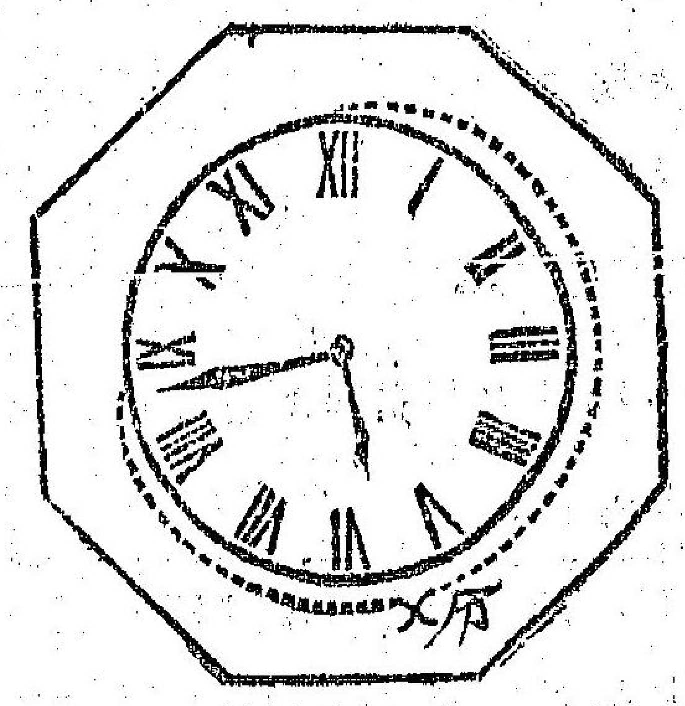
故ニ両針一直線ヲナスハ,1時ヲ過ルヿ$38\frac{2}{11}$分,即チ38分$10\frac{10}{11}$秒ナリ.

例10.　五時ト六時トノ間ニ於テ,時計ノ両針一直角ヲナス時ヲ問フ

(1)



(2)



解.　本題ニハ二ツノ解法アリ,一ハ長針ガ短針ニ後レテ直角ヲナストキニシテ,(1)圖ノ如シ;一ハ長針ガ短針ヨリ進ミテ直角ヲナストキニシテ,(2)圖ノ如シ.

(1)圖ニ於テハ,12時ヨリ長針迄ノ間隔ヲx分トスレバ,5時ヨリ短針迄ノ間隔ハ$x-10$分ナルベシ,何トナレバ両針一直角ヲナストキハ其間ノ間隔ハ15分ナリ故ニ12時ヨリ現在ノ短針迄ノ間隔ハ$x+15$分ナリ而シテ12時ヨリ5時迄ノ間隔ハ25分ナルガ故ニ5時ヨリ短針迄ノ間隔ハ$x+15-25=x-10$分ナレバナリ.　仍テ次ノ如シ:

$$x=12(x-10),$$

即チ　　$x=12x-120,$

置キ換フレバ　　$x-12x=-120,$

即チ　　$-11x=-120,$

$$\therefore\quad x=\frac{120}{11}=10\frac{10}{11}\text{分}.$$

故ニ長針ガ短針ニ後レテ直角ヲナスハ,5時ヲ過ルヿ,$10\frac{10}{11}$分即チ10分$54\frac{6}{11}$秒ナリ.

又(2)圖ニ於テハ,12時ヨリ長針迄ノ間隔ヲx分トスレバ,5時ヨリ短針迄ノ間隔ハ(1)ノ場合ノ如ク$x-15-25$分即チ$x-40$分ナルベシ;仍テ次ノ如シ:

$$x=12(x-40),$$

即チ $\quad x=12x-480,$

置キ換フレバ $\quad x-12x=-480,$

即チ $\quad -11x=-480,$

$$\therefore \quad x=\frac{480}{11}=43\frac{7}{11}$$

故ニ長針ガ短針ヨリ進ミテ直角ヲナスハ,5時ヲ過ルヿ $43\frac{7}{11}$ 分即チ43分 $38\frac{2}{11}$ 秒ナリ.

例11. 矩形ノ室アリ,其縱ハ橫ヨリ三尺長ク,若シ其縱ニ三尺增シ,橫ヨリ二尺減ズルトキハ,面積ニ變更ナシト云フ. 然ルトキハ此室ノ縱橫各々幾尺ナルヤ.

解. 橫ヲ x 尺トスレバ,縱ハ $x+3$ 尺ナリ. 故ニ此矩形ノ面積ハ $x(x+3)$ 平方尺ナリ. 又縱ヲ三尺長クシ,橫ヲ二尺短クスレバ,其面積ハ $(x+3+3)(x-2)$, 即チ $(x+6)(x-2)$ ナリ. 此ニ由テ

$$x(x+3)=(x+6)(x-2);$$

即チ $\quad x^2+3x=x^2+4x-12,$

置キ換フレバ $\quad 3x-4x=-12,$

即チ $\quad -x=-12,$

$$\therefore \quad x=12,$$

而シテ $\quad x+3=15.$

此ニ由テ縱ハ15尺,橫ハ12尺ナリ.

按スルニ此面積ハ $15.12=3.5.6.2=3.6.5.2=18.10$ ナルユヘ,此答ノ眞ナルヿ明ナリ

例12. 大小二數アリ,其差ハ4ニシテ,大數ノ二分ノ一ハ,小數ノ六分ノ一ヨリ大ナルヿ8ナリト云フ. 然ラバ二數各々如何.

解. 小數ヲ x トスレバ,大數ハ $x+4$ ナリ.

大數ノ二分ノ一ハ $\frac{1}{2}(x+4)$ ニシテ,小數ノ六分ノ一ハ $\frac{1}{6}x$ ナリ.

此ニ由テ $\quad \frac{1}{2}(x+4)-\frac{1}{6}x=8;$

6ヲ乘ズレバ $\quad 3(x+4)-x=48,$

而シテ $\quad 3x+12-x=48.$

置キ換フレバ $\quad 3x-x=48-12,$

即チ $\quad 2x=36.$

$$\therefore \quad x=18.$$

而シテ $\quad x+4=22.$

故ニ小數ハ18,大數ハ22ナリ.

例13. 甲乙二工アリ,一ツノ仕事ヲ爲スニ,甲ハ三十日ニテ之ヲ成就シ,乙ハ二十日ニテ之ヲ成就ス. 今甲一人ニテ此仕事ヲ爲シ始メシニ若干日ニテ乙之レニ代リテ爲セシニ,始メヨリ二十五日ニテ成就セリト云フ,然ラバ甲ハ幾日働キシヤ.

解. 甲ノ働キシ日數ヲ x トスレバ,乙ノ働キシ日數ハ $25-x$ ナルベシ.

然ルニ甲ハ此仕事ヲ三十日ニ成就スルユヘ,一日ニハ此仕事ノ $\frac{1}{30}$ ヲ爲スベク,故ニ x 日ニハ此仕事ノ $\frac{x}{30}$ ヲ爲スベシ.

又乙ハ此仕事ヲ二十日ニ成就スルユヘ,一日ニハ此仕事ノ $\frac{1}{20}$ ヲ爲スベク,故ニ $25-x$ 日ニハ,此仕事ノ $\frac{25-x}{20}$ ヲ爲スベシ.

而シテ此仕事ハ甲ガ x 日,乙ガ $25-x$ 日働キテ,之ヲ成就セシユヘ,次ノ方程式アリ:

$$\frac{x}{30}+\frac{25-x}{20}=1,$$

60ヲ乘ズレバ $\quad 2x+75-3x=60,$

置キ換フレバ $\quad 2x-3x=60-75,$

即チ $\quad -x=-15,$

$$\therefore \quad x=15.$$

故ニ甲ノ働キシ日數ハ15ナリ.

例14. 甲乙二工アリ,一ツノ仕事ヲ爲スニ,甲ハ20日ニテ成就シ,乙ハ30日ニテ成就ス. 今甲此仕事ヲ始メ若干日ノ後乙之レニ代リテ,此仕事ヲ成就セリト云フ. 然ルニ乙ハ甲ヨリ10日長ク働キシト云フ. 然ラバ甲ノ働キシ日數如何.

解. 甲ノ働キシ日數ヲ x トスレバ,乙ノ働キシ日數ハ $x+10$ 日ナリ.

然ルニ甲ハ20日ニテ此仕事ヲ成就スルユヘ,一日ニハ此仕事ノ $\frac{1}{20}$ ヲ爲

スベク,x日ニハ此仕事ノ$\frac{x}{20}$ヲナスベシ.

又乙ハ30日ニテ此仕事ヲ成就スルユヘ,一日ニハ此仕事ノ$\frac{1}{30}$ヲ爲スベク,$x+10$日ニハ此仕事ノ$\frac{x+10}{30}$ヲ爲スベシ. 故ニ次ノ方程式アリ:

$$\frac{x}{20}+\frac{x+10}{30}=1,$$

60ヲ乘ズレバ　$3x+2(x+10)=60,$

即チ　$3x+2x+20=60,$

置キ換フレバ　$3x+2x=60-20,$

即チ　$5x=40$

$\therefore$　$x=8$

即チ甲ノ働キシハ8日ナリ.

例15. 父子アリ,父ハa歳,子ハb歳ナリ. 然ラバ幾年ノ後父ノ年ハ子ノ年ノ三倍トナルヤ.

解. 所要ノ年數ヲxトスレバ,今ヨリx年ノ後ニハ,父ハ$a+x$歳,子ハ$b+x$歳トナルベシ.

然ルニ題言ニ由テ,$a+x$ハ$b+x$ノ三倍ナルヲ要ス.

此ニ由テ　$a+x=3(b+x),$

即チ　$a+x=3b+3x,$

置キ換フレバ　$-3x+x=-a+3b$

即チ　$-2x=-a+3b$

$\therefore$　$x=\frac{1}{2}(a-3b),$

此結果ヲ按ズルニ三ツノ場合アルベシ; 乃チaガ$3b$ヨリ大ナル𪜈ト; aガ$3b$ニ等シキ𪜈ト; aガ$3b$ヨリ小ナル𪜈コレナリ.

(1) 若シ$a>3b$ナル𪜈ハ,xハ正ノ數ニシテ,此問題ヲ解釋スルニ,更ニ困難アルヿナシ. 乃チ今ヨリx年ノ後ニ於テ題文ノ通リニナルナリ.

例ヘバ$a=36$, $b=10$ナリトスレバ,$x=\frac{1}{2}(a-3b)=3$ニシテ,今ヨリ三年ノ後ハ,父ハ39歳,子ハ13歳トナルユヘ,父ノ年ハ子ノ年ニ三倍スルナリ.

(2) 若シ$a=3b$ナル𪜈ハ,$x=0$ニシテ,父ハ現在子ノ年ノ三倍ナリ.

例ヘバ$a=30$, $b=10$ナル𪜈ハ,$x=\frac{1}{2}(a-3b)=0$ニシテ,父ノ年ハ現ニ子ノ年

ニ三倍スルヿカ明ナリ.

(3) 若シ$a<3b$ナル𪜈ハ,此結果ナル年數ハ負トナル. コレ現在ヨリ以前ニ題文ノ如クナリシヿヲ示スモノナリ.

例ヘバ$a=28$, $b=10$ナル𪜈ハ,$x=\frac{1}{2}(a-3b)=-1$ニシテ,今ヨリ一年前ニハ,父ハ27歳,子ハ9歳ニシテ,父ノ年ハ子ノ年ノ三倍ナルコト明カナリ.

例16. 甲乙二人ノ飛脚アリ,倶ニ同シ方向ニ,一直線狀ノ道路ヲ歩行スルニ,甲ガHヲ發シタルト同時ニ乙ハKヲ發シ,而ソHKノ距離ハn里トス. 甲ノ毎時ノ速度ハa里,乙ノ毎時ノ速度ハb里トス然ラバ甲ガ乙ニ追ヒ付クハ出發後幾時ナルヤ.

解. 甲ハHヨリ發シ,乙ハKヨリ發シ,出發後t時ヲ經テ,甲ハ乙ニPニ於テ追ヒ付クモノトス.

然ル𪜈ハ甲ノ歩行シタル距離$HP=at,$

乙ノ歩行シタル距離$KP=bt,$

$\therefore$　$at-bt=HK=n$

即チ　$(a-b)t=n,$

$\therefore$　$t=\frac{n}{a-b}.$

(1) 若シ$a>b$ナル𪜈ハ,tハ正數ニシテ,此問題ヲ解釋スルニ更ニ困難アルヿナシ.

例ヘバ$n=60$, $a=12$, $b=8$トスレバ,$t=60/(12-8)=15$ニシテ,出發後15時間ヲ經過スレバ,甲ハ12×15即チ180里ヲ行キ,乙ハ15×8即チ120里ヲ行クユヘ甲ハ乙ニ追ヒ付クヿ明カナリ.

(2) 若シ$a<b$ナル𪜈ハ,tハ負數ナリ. 實ニ甲ハ乙ヨリ遲緩ナルユヘ,今後決シテ乙ニ追ヒ付クヿナシ. 然レモ$HP=at$及ヒ$KP=bt$ハ,tガ負數ナル𪜈ハ何レモ負數トナルユヘ,HPトKPハ倶ニ負數ナルヿヲ見ル,故ニHPトKPトヲ反對ノ方向ニ取リ,今ヨリt時前ニ,甲ハ乙ニ追ヒ付キシヿヲ知ルベシ(但シ此時ハ勿論,甲乙倶ニH,Kヨリ出發スルニ非ズシテ,前々ヨ

リ歩行シツヽアリテ,或時甲ハHニ,乙ハKニアリシモノト見ルベシ).

例ヘバ$n=60, a=8, b=12$トスレバ,$t=60/(8-12)=-15$ニシテ,今ヨリ14時間前ニハ,甲ハHヨリ15×8,即チ120里前ノ處ニアリ,乙ハKヨリ15×12即チ180里前ノ處ニアリテ,甲ハ乙ニ追ヒ付キシヿ明ナリ.

(3) 若シ$a=b$ナルトキハ$t=\frac{n}{0}$. サテ算術ヨリ,分數ノ分母ガ愈々小ナレバ,分子ハ一定不易ナルモ,分數ノ價ハ,愈々大ナルヿヲ知ル,而ノ分母ガ限リナク減少シタルトキハ,分數ノ價ハ限リナク增大スルヿヲ知ル. 故ニ$t=\frac{n}{0}$ハtガ無窮大ナルベキヿヲ示ス即チ此場合ニ於テハ,甲ガ乙ニ追ヒ付ク迄ニハ,無窮大ノ時間ヲ要スルヿヲ知ル,之ヲ云ヒ換フレバ,甲ハ決シテ乙ニ追ヒ付カザルナリ. 實ニ甲乙ハ等シキ速度ニテ進行スルユヘ,恒ニn里ノ間隔ヲ有スベシ.

第七編

因子分解法

95. 本編ニ於テハ,代數式ヲ因子ニ分解スル方法ヲ說明セントス代數式ヲ扱フニハ,概シテ之レヲ因子ニ分解スレバ,大ニ簡便ニ扱フヿヲ得ベシ. 然レドモ因子ニ分解スルヿハ,恒ニ之ヲ爲シ得ルニアラズ,コヽニハ其簡單ナル場合ヲ述ブベシ.

以下說明セントスル處ハ(1)式ノ各項ニ通ズル因子ヲ求ムルヿ,(2)或既知ノ形ノ式ノ因子ヲ求ムルヿ,(3)二次式ノ因子ヲ求ムルヿ,(4)一次式ガ他ノ式ノ因子ナルヤ否ヲ知ルヿニ就テノ一般ノ定理コレナリ.

96. 式ノ各項ニ通ズル因子. 或數字又ハ字母ニテ,與ヘラレタル式ノ各項ヲ除盡シ得レバ,此數字又ハ字母ハ,此式全體ヲ除盡スベシ,故ニ此數字又ハ字母ハ,此式ノ因子ナリ.

例1. $7a^2-3ax$ノ因子ヲ求メヨ.

茲ニaハ各項ノ因子ナリ　　$\therefore$　　$7a^2-3ax=a(7a-3x)$.

故ニaト$7a-3x$ハ,所要ノ因子ナリ.

例2. $15ab^2c^3-12a^3bc^2-21ac^4$ノ因子ヲ求メヨ.

$$15ab^2c^3-12a^3bc^2-21ac^4=3ac^2(5b^2c-4a^2b-7c^2).$$

例3. $a(2x-3)+b(2x-3)$ノ因子ヲ求メヨ.

$$a(2x-3)+b(2x-3)=(a+b)(2x-3).$$

例4. $4ax-12bx-6ay+18by$ノ因子ヲ求メヨ.

$$\begin{aligned}4ax-12bx-6ay+18by&=2\{2ax-6bx-3ay+9by\}\\&=2\{2x(a-3b)-3y(a-3b)\}\\&=2(a-3b)(2x-3y).\end{aligned}$$

97. 既知ノ形ノ式ノ因子. コヽニ或既知ノ形ノ式ノ因子ヲ求ムルヿヲ示サントスルニ,先ヅ之ヲ三ツノ場合ニ分チテ考フベシ,乃チ(1)二平方ノ差ニ變シ得ベキ式,(2)完全ノ平方ナル處ノ三項式,(3)三次及ビ四次ノ或式コレナリ.

98. 二平方ノ差ニ變シ得ベキ式.

嘗テ範式　　$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

ヲ證明セリ.

此ニ由テ二式ノ平方ノ差ハ,恒ニ因子ニ分解スルヿヲ得ベシ.

例1. x^2-64ヲ因子ニ分解セヨ.

$$\begin{aligned}x^2-64&=x^2-8^2\\&=(x-8)(x+8).\end{aligned}$$

故ニ　$x-8$ト$x+8$ハ所要ノ因子ナリ.

例2. $49x^2-64y^2$ヲ因子ニ分解セヨ.

$$\begin{aligned}49x^2-64y^2&=(7x)^2-(8y)^2\\&=(7x-8y)(7x+8y)\end{aligned}$$

故ニ　$7x-8y$ト$7x+8y$ハ所要ノ因子ナリ.

例3. 91ヲ因子ニ分解セヨ.

$$91=100-9=10^2-3^2=(10-3)(10+3)=7\times13.$$

故ニ7ト13ハ91ノ因子ナリ.

例4. x^2-3ノ因子ヲ求メヨ.

$$x^2-3=x^2-(\sqrt{3})^2$$

$=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}).$

即チ$x-\sqrt{3}$ト$x+\sqrt{3}$トハ所要ノ因子ナリ. xノ平方根ヲ含ム因子ハ,普顯ノ要スル處ノモノニアラズト雖𪜈,$\sqrt{3}$ノ如キハ單ニ數ナルヿハ差支ナキモノトス. 同樣ニaハ與ヘラレタル數ナル時ハ,x^2-aノ因子ハ,$x-\sqrt{a}$ト$x+\sqrt{a}$ナリ.

例5. $(329)^2-(171)^2$ヲ求メヨ.

$$\begin{aligned}(329)^2-(171)^2&=(329+171)(329-171)\\&=500\times158\\&=79000.\end{aligned}$$

注意. 65款例3ヲ參考セヨ.

例6. $(a+2b)^2-16x^2$ノ因子ヲ求メヨ.

$$(a+2b)^2-16x^2=(a+2b)^2-(4x)^2=(a+2b-4x)(a+2b+4x).$$

例7. $x^2-(2b-3c)^2$ノ因子ヲ求メヨ.

$$x^2-(2b-3c)^2=(x-2b+3c)(x+2b-3c).$$

例8. $(3x+7y)^2-(2x-3y)^2$ノ因子ヲ求メヨ.

$$\begin{aligned}(3x+7y)^2-(2x-3y)^2&=\{(3x+7y)+(2x-3y)\}\{(3x+7y)-(2x-3y)\}\\&=(3x+7y+2x-3y)(3x+7y-2x+3y)\\&=(5x+4y)(x+10y).\end{aligned}$$

例9. x^4+x^2+1ノ因子ヲ求メヨ.

$$x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2$$

[$x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2$ナルヿヘ]

$$\begin{aligned}&=(x^2+1)^2-x^2\\&=\{(x^2+1)-x\}\{(x^2+1)+x\}\\&=(x^2-x+1)(x^2+x+1).\end{aligned}$$

99. 完全ノ平方ナル式

$$\boldsymbol{a^2+2ab+b^2=(a+b)^2}$$

及ビ

$$\boldsymbol{a^2-2ab+b^2=(a-b)^2}$$

ナルヿハ,既ニ之ヲ知レリ. 故ニ如何ナル式ニテモ,變ジテ此形トナシ得ベキ式(aトbトハ複式ナルモ可ナリ)ハ,恒ニ之ヲ因子ニ分解スルヿヲ得ベシ.

例1. $4x^2-4x+1$ノ因子ヲ求メヨ.

$$\begin{aligned}4x^2-4x+1&=(2x)^2-2(2x).1+1^2\\&=(2x-1)^2.\end{aligned}$$

例2. x^2+6x+9ノ因子ヲ求メヨ.

$$\begin{aligned}x^2+6x+9&=x^2+2.x.3+3^2\\&=(x+3)^2.\end{aligned}$$

例3. $4x^2-12xy+9y^2$ノ因子ヲ求メヨ.

$$\begin{aligned}4x^2-12xy+9y^2&=(2x)^2-2(2x)(3y)+(3y)^2\\&=(2x-3y)^2.\end{aligned}$$

例4. x^4-8x^2+16ノ因子ヲ求メヨ.

$$\begin{aligned}x^4-8x^2+16&=(x^2)^2-2(x^2).4+4^2\\&=(x^2-4)^2\\&=\{(x+2)(x-2)\}^2\\&=(x+2)^2(x-2)^2.\end{aligned}$$

例5. $a^2-3ab+\frac{9}{4}b^2$ノ因子ヲ求メヨ.

$$\begin{aligned}a^2-3ab+\tfrac{9}{4}b^2&=a^2-2a\left(\tfrac{3}{2}b\right)+\left(\tfrac{3}{2}b\right)^2\\&=\left(a-\tfrac{3}{2}b\right)^2.\end{aligned}$$

注意. 少シク熟練スル時ハ,中間ノ演算ヲ省キ直ニ結果ヲ記スルヿヲ得ベシ,乃チ例1乃至例5ハ次ノ如シ:

例1ハ $4x^2-4x+1=(2x-1)^2,$

例2ハ $x^2+6x+9=(x+3)^2,$

例3ハ $4x^2-12xy+9y^2=(2x-3y)^2,$

例4ハ $x^4-8x^2+16=(x^2-4)^2$
$=(x+2)^2(x-2)^2,$

例5ハ $a^2-3ab+\frac{9}{4}b^2=\left(a-\frac{3}{2}b\right)^2.$

例6. $(a+b)^2-4(a+b)(a-b)+4(a-b)^2$ノ因子ヲ求メヨ.

$$\begin{aligned}(a+b)^2-4(a+b)(a-b)+4(a-b)^2&=\{(a+b)-2(a-b)\}^2\\&=(a+b-2a+2b)^2\\&=(-a+3b)^2\end{aligned}$$

$$=(a-3b)^2.$$

注意. $(-a+3b)^2=\{-(a-3b)\}^2=(a-3b)^2$ ナルヿヲ注意スルヲ肝要トス.

100. 三次ノ式. 次ニ示ス三次ノ式ノ因子ハ,既ニ之ヲ知レリ乃チ

(1) $a^3+b^3 \qquad =(a+b)(a^2-ab+b^2).$

(2) $a^3-b^3 \qquad =(a-b)(a^2+ab+b^2).$

(3) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3.$

(4) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3.$

(5) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$

此ニ由テ此等ノ形ニ變シ得ベキ式ハ,恒ニ其因子ヲ求ムルヿヲ得ベシ

例 1. x^3-27 ノ因子ヲ求メヨ.

本例ハ(1)ノ形ヲ用フ.

$$x^3-27=x^3-3^3$$
$$=(x-3)(x^2+3x+3^2)$$
$$=(x-3)(x^2+3x+9).$$

注意. 少シク熟練シタル後ハ,直ニ

$$x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9)$$

ト記スルヿヲ得ベシ.

例 2. $(2x-y)^3+(x-2y)^3$ ノ因子ヲ求メヨ.

此式ハ a^3+b^3 ナル形ヲナス. 此ニ由テ

$$\text{此式}=\{(2x-y)+(x-2y)\}\{(2x-y)^2-(2x-y)(x-2y)+(x-2y)^2\}$$
$$=3(x-y).3(x^2-xy+y^2)$$
$$=9(x-y)(x^2-xy+y^2).$$

例 3. $8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$ ノ因子ヲ求メヨ.

本例ハ(3)ノ形ヲ用フ.

$$8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3=(2a)^3+3(2a)^2b+3(2a)b^2+b^3$$
$$=(2a+b)^3.$$

例 4. $8a^3x^3-1$ ノ因子ヲ求メヨ.

ハ(2)ノ形ヲ用フ.

$$8a^3x^3-1=(2ax)^3-1^3$$
$$=(2ax-1)(4a^2x^2+2ax+1).$$

例 5. $x^3+y^3+1-3xy$ ノ因子ヲ求メヨ.

本例ハ(5)ノ形ヲ用フ.

$$x^3+y^3+1-3xy=x^3+y^3+1^3-3xy.1$$
$$=(x+y+1)(x^2+y^2+1^2-xy-x.1-y.1)$$
$$=(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y).$$

例 6. $1-3y+3y^2-y^3$ ノ因子ヲ求メヨ.

本例ハ(4)ノ形ヲ用フ.

$$1-3y+3y^2-y^3=1^3-3.1^2.y+3.1.y^2-y^3$$
$$=(1-y)^3.$$

101. 四次ノ式. 次ニ示ス四次ノ式ノ因子ハ亦之ヲ知レリ:

(1) $a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

(2) $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4=(a+b)^4$

(3) $a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4=(a-b)^4$

(4) $a^4+a^2b^2+b^4 \qquad =(a^2-ab+b^2)(a^2-ab+b^2).$

此ニ由テ上ノ形ヲナス式ハ,恒ニ因子ニ分解スルヿヲ得ベシ.

例 1. x^4-16y^4 ノ因子ヲ求メヨ.

本例ハ(1)ノ形ヲ用フ.

$$x^4-16y^4=\{x^2-(2y)^2\}\{x^2+(2y)^2\}$$
$$=(x-2y)(x+2y)(x^2+4y^2).$$

例 2. $81a^4+144a^2b^2+256b^4$ ノ因子ヲ求ム.

本例ハ(4)ノ形ヲ用フ.

$$81a^4+144a^2b^2+256b^4=(3a)^4+(3a)^2(4b)^2+(4b)^4$$
$$=\{(3a)^2-(3a)(4b)+(4b)^2\}\{(3a)^2+(3a)(4b)+(4b)^2\}$$
$$=\{9a^2-12ab+16b^2\}\{9a^2+12ab+16b^2\}.$$

例 3. $1-a^4$ ノ因子ヲ求メヨ.

$$1-a^4=(1-a^2)(1+a^2)$$
$$=(1-a)(1+a)(1+a^2).$$

例 4. $1+4a+6a^2+4a^3+a^4$ ノ因子ヲ求メヨ.

本例ハ (2) ノ形ヲ用フ.

$$1+4a+6a^2+4a^3+a^4=1^4+4.1^3.a+6.1^2.a^2+4.1.a^3+a^4$$
$$=(1+a)^4.$$

例 5. $y^4-4y^3+6y^2-4y+1$ ノ因子ヲ求メヨ.

本例ハ (3) ノ形ヲ用フ.

$$y^4-4y^3+6y^2-4y+1=y^4-4y^3.1+6y^2.1^2-4y.1^3+1^4$$
$$=(y-1)^4.$$

102. 或式ヲ因子ニ分解シ得ルトキハ,此式ヲ其因子ノ一ニテ除シタル商ハ,一見シテ明白ナルベシ.

例. $(x-y)^3+(x-z)^3$ ヲ $2x-y-z$ ニテ除セヨ.

$$(x-y)^3+(x-z)^3=\{(x-y)+(x-z)\}\{(x-y)^2-(x-y)(x-z)+(x-z)^2\}$$
$$=\{2x-y-z\}\{(x-y)^2-(x-y)(x-z)+(x-z)^2\}$$

此ニ由テ左邊ヲ $2x-y-z$ ニテ除シタル商ハ

$$(x-y)^2-(x-y)(x-z)+(x-z)^2$$

ニシテ,之ヲ簡化スレバ,次ノ如シ:

$$x^2-xy-xz+y^2+yz+z^2$$

103. 二次式ノ因子. コレヨリ二次式ノ因子ヲ求ムル法ヲ示サントス.

x ノ二次式トハ x^2 ヨリ高次ノ x ノ乘冪ヲ含マザル式ナリ,故ニ x ノ二次式ハ次ノ形ヲナスベシ:

$$px^2+qx+r$$

但シ此 p, q, r ハ正若クハ負ナル任意ノ數ナリ. 此式ノ因子ハ,恒ニ之ヲ求ムルヿヲ得ベシ. 今此因子ヲ求ムルヿニ就テノ一般ノ定則ヲ說明スル前ニ,視察ニ由テ求メ得ベキ場合ヲ陳述スベシ.

104. 乘法ニ由テ $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ ナルヿヲ知ル.

此ニ由テ x^2+qx+r ノ如キ式ヲ因子ニ分解セント欲セバ,二數 a, b ノ和ハ q ニシテ,其積ハ r ナル如キモノヲ尋ヘ出テザルベカラズ,然ルトキハ所要ノ因子ハ $x+a$ 及ビ $x+b$ ナラザルベカラズ,如何トナレバ若シ $a+b=q$

ニシテ $ab=r$ ナルトキハ

$$x^2+qx+r=x^2+(a+b)x+ab$$
$$=(x+a)(x+b)$$

ナレバナリ.

同シ要件ニ關シテ

$$x^2-qx+r=x^2-(a+b)x+ab$$
$$=(x-a)(x-b).$$

此等ノ結果ヲ一ツノ範式ニ記スレバ

$$x^2\pm qx+r=x^2\pm(a+b)x+ab$$
$$=(x\pm a)(x\pm b).$$

但シ兩邊ノ符號 $\pm$ ハ,悉ク $+$ ヲ取ルカ,悉ク $-$ ヲ取ルニ限ルベシ.

例 1. $x^2+8x+12$ ノ因子ヲ求メヨ.

玆ニ二數ノ和ハ 8 ニシテ,其積ハ 12 ナルモノヲ求メントスルニ, 12 ヲ正ノ二因子ニ分解シタルモノハ, 12 ト 1, 6 ト 2, 4 ト 3 ノミニシテ, 此内 6 ト 2 ハ加ヘテ 8 トナリ,而シ加ヘテ 8 トナルモノハ,コレノミナルニヘ,

$$x^2+8x+12=(x+6)(x+2).$$

同樣ニ $$x^2-8x+12=(x-6)(x-2).$$

注意. $x^2+8xy+12y^2$ ト $x^2-8xy+12y^2$ トノ因子ヲ決定スルニモ,亦同樣ナルベシ,乃チ二數ノ和ハ $8y$ ニシテ其積ハ $12y^2$ ナルモノヲ求ムレバ可ナリ而シテ其二數ハ $6y$ ト $2y$ ナルコトヲ知ル故ニ

$$x^2+8xy+12y^2=(x+6y)(x+2y),$$

及ビ $$x^2-8xy+12y^2=(x-6y)(x-2y).$$

例 2. $a^2-13a+12$ ノ因子ヲ求メヨ.

玆ニ二數ノ積ハ $+12$, 和ハ -13 ナルモノヲ求メントスルニ,此二數ハ -12 ト -1 ナルヿヲ知ル. 此ニ由テ

$$a^2-13a+12=(a-12)(a-1).$$

例 3. $x^2+17xy+60y^2$ ノ因子ヲ求メヨ.

玆ニ二數ノ積ハ $+60y^2$ ニシテ,和ハ $+17y$ ナルモノヲ求メントスルニ,此二數ハ $5y$ ト $12y$ ナルヿ明カナリ.

$\therefore \quad x^2+17xy+60y^2=(x+5y)(x+12y).$

例 4. x^2-6x+9 ノ因子ヲ求メヨ.

茲ニ二數ノ積ハ $+9$ ニシテ,其和ハ -6 ナルモノヲ求メントスルニ,此二數ハ -3 及ビ -3 ナルヿヲ知ル.

$\therefore \quad x^2-6x+9=(x-3)(x-3)=(x-3)^2.$

〔此ノ如キ題ハ,既ニ 99 款ニ由テ之ヲ知レリ〕.

105. 前款ニ述タル場合ハ, x ヲ含マザル項(即チ r)ヲ正トセリ,依テ a ト b トノ二數ハ,同ジ符號ナリシ,然ルニ r ガ負ナル片ハ, a ト b トノ二數ハ必ズ異ナル符號ナルベシ:此ノ如キ場合ニ於テハ,與ヘラレタル式ハ $x^2+(a-b)x-ab$, 即チ $(x+a)(x-b)$ ニ同ジキ如キ, a, b 二數ヲ求メザルベカラズ,故ニ x ノ係數ハ求メタル二數ノ算術差ニ等シカルベシ.

例ヘバ, x^2+x-12 ノ因子ヲ求メントスルニ,二數ノ積ハ 12 ニシテ,差ハ 1 ナル如キモノヲ求メザルベカラズ, 12 ノ整數因子ハ, 12 ト 1, 6 ト 2, 4 ト 3 ノミニシテ,差ガ 1 トナルモノハ,此内 4 ト 3 トノミ.

此ニ由テ $\quad x^2+x-12=(x+4)(x-3),$

同樣ニ $\quad x^2-x-12=(x-4)(x+3).$

然リト雖モ,前款ニ與ヘタル定則ハ,代數和ト代數積トニ關スルモノトスレバ,其定則ハスベテノ場合ニ通ズベシ. 唯實際ニ於テ注目スベキ要点ハ, x ヲ含マザル項ガ,正ナル片ハ,求メントスル二數ハ同符號ナルベク而シテ其各ノ符號ハ, x ノ係數ノ符號ニ同ジ: 又 x ニ關セザル項ガ負ナル片ハ,求メントスル二數ハ異符號ナルベク,而シテ大ナル數ノ符號ガ, x ノ係數ノ符號ニ同ジ.

例 1. x^2-x-20 ノ因子ヲ求メヨ.

茲ニ二數ノ積ハ 20 ニシテ,差ハ 1 ナル如キモノヲ求メントス;即チ代數組法ニ由レバ二數ノ積ハ -20 ニシテ,其代數和ハ -1 ナル如キモノヲ求メントス.

積ガ負ナルユヘ,二數ハ必ズ異符號ナルベク,而シテ和ガ負ナルユヘ,絕對價ノ大ナルモノガ,負ナルベシ. 故ニ所要ノ數ハ -5 及ビ $+4$ ナリ.

$\therefore \quad x^2-x-20=(x-5)(x+4).$

例 2. $1+6a-7a^2$ ヲ因子ニ分解セヨ.

茲ニ二數ノ積ハ -7 ニシテ,和ハ $+6$ ナルモノヲ求メントスルニ,此二數ハ -1 ト $+7$ ナルヿヲ知ル.

$\therefore \quad 1+6a-7a^2=(1-a)(1+7a).$

106. 二次式ヲ二平方ノ差ノ形ニ書ク法.

a^2-b^2 ノ因子ハ $a-b$ ト $a+b$ ナルヿヲ知ル. 故ニ若シ二次式ヲ二ツノ複式ノ平方ノ差ノ形ニ記スレバ,之ヲ因子ニ分解スルヿヲ得ベシ.

二次式ヲ二平方ノ差ノ形ニ變ズルニハ, x^2, x ヲ含ム項ニ或數ヲ加ヘテ,完全ノ平方トナサシメザルベカラズ. x^2, x ヲ含ム項ニ此數ヲ加フル片ハ,コレト同時ニ其式ノ殘リノ部分ヨリ亦此數ヲ減ズベシ,然ル片ハ全式ノ數價ニ,更ニ變異アルヿナシ.

次ノ諸例ニ於テハ x^2 ノ係數ヲ一トス,而シテ此ノ如キ場合ニ於テハ,所要ノ數 (x^2, x ヲ含ム項ニ加ヘテ,殘リノ部分ヨリ減ズベキ數ナリ) ハ x ノ係數ノ半分ノ平方ナルベシ. 何トナレバ一般ニ x^2+2ax ナル式ニ x ノ係數 $2a$ ノ半分 a ノ平方ヲ加フレバ $x^2+2ax+a^2$ トナリ之レ完全ノ平方 $(x+a)^2$ トナレバナリ.

例 1.
$$\begin{aligned} x^2+8x+12 &= (x^2+8x+16)+12-16 \\ &= (x+4)^2-2^2 \\ &= [(x+4)-2][(x+4)+2] \\ &= (x+2)(x+6). \end{aligned}$$

例 2.
$$\begin{aligned} x^2+x-20 &= x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-20-\frac{1}{4} \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{81}{4} \\ &= \left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{9}{2}\right\}\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{9}{2}\right\} \\ &= (x-4)(x+5). \end{aligned}$$

例 3.
$$\begin{aligned} x^2+2x-1 &= (x^2+2x+1)-1-1 \\ &= (x+1)^2-2 \\ &= (x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

此二因子ハxニ就テ見レハ有理ノ式ナリ。

例 4.　$x^2+5xy-14y^2=x^2+5xy+\frac{25}{4}y^2-\frac{25}{4}y^2-14y^2$

$$=\left(x+\frac{5}{2}y\right)^2-\frac{81}{4}y^2$$

$$=\left\{\left(x+\frac{5}{2}y\right)-\frac{9}{2}y\right\}\left\{\left(x+\frac{5}{2}y\right)+\frac{9}{2}y\right\}$$

$$=(x-2y)(x+7y).$$

107.　px^2+qx+rノ因子ヲ求メント欲セハ,此式ヲ$p\left(x^2+\frac{q}{p}x+\frac{r}{p}\right)$ナル形ニ記スベシ. 此括弧內ノ式ノ因子ハ前款ノ如クシテ求メ得ルユヘ,與ヘラレタル式ノ因子モ直ニ之ヲ知リ得ベシ.

例ヘハ, $2x^2-5x+2$ノ因子ヲ求メントスルニ,

$$2x^2-5x+2=2\left\{x^2-\frac{5}{2}x+1\right\}$$

$$=2\left\{x^2-\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2+1-\frac{25}{16}\right\}$$

$$=2\left\{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right\}$$

$$=2\left\{\left(x-\frac{5}{4}\right)-\frac{3}{4}\right\}\left\{\left(x-\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{4}\right\}$$

$$=2\left\{x-2\right\}\left\{x-\frac{1}{2}\right\}$$

$$=(x-2)(2x-1).$$

108.　終ニ任意ノ二次式x^2+qx+rノ如キモノヽ因子ヲ求ムルヿヲ說明スベシ.

但シax^2+bx+cノ如キ形ノ式ハ, $a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$ト記スレバ前ノ形ニ化スルヿヲ得ベシ.

x^2+qxニ$\left(\frac{1}{2}q\right)^2$ヲ加フルトキハ$x^2+qx+\frac{1}{4}q^2$トナリ, コレ$\left(x+\frac{1}{2}q\right)$ノ平方ナリ.

此ニ由テ　$x^2+qx+r=\left\{x^2+qx+\left(\frac{1}{2}q\right)^2\right\}-\frac{1}{4}q^2+r$

$$=\left(x+\frac{1}{2}q\right)^2-\left(\frac{1}{4}q^2-r\right)$$

$$=\left\{x+\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2-r}\right\}\left\{x+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2-r}\right\}$$

コレ上ニ與ヘタルスベテノ場合ヲ包括スル一般ノ範式ナリ;而シテ若シ此qトrトニ,特別ノ式ノ數價ヲ代入スレバ,其式ノ因子ヲ得ベシ.

例ヘハ,上ニ與ヘラレタル式x^2+x-20ノ因子ヲ求メントスルニハ$q=1$, $r=-20$ナルユヘ,

$$\left\{x+\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2-r}\right\}\left\{x+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2-r}\right\}$$

$$=\left\{x+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+20}\right\}\left\{x+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+20}\right\}$$

$$=\left\{x+\frac{1}{2}-\frac{9}{2}\right\}\left\{x+\frac{1}{2}+\frac{9}{2}\right\}$$

$$=(x-4)(x+5).$$

又x^2+2x-1ノ因子ヲ求メントスルニハ, $q=2$, $r=-1$ナルユヘ

$$\left\{x+\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2-r}\right\}\left\{x+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2-r}\right\}$$

$$=\left(x+1-\sqrt{1+1}\right)\left(x+1+\sqrt{1+1}\right)$$

$$=(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$$

又$x^2+\frac{65}{8}x+1$ノ因子ヲ求メントスルニハ, $q=\frac{65}{8}$, $r=1$ナルユヘ

$$\left\{x+\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2-r}\right\}\left\{x+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2-r}\right\}$$

$$=\left\{x+\frac{65}{16}-\sqrt{\frac{81\times49}{16^2}}\right\}\left\{x+\frac{55}{16}+\sqrt{\frac{81\times49}{16^2}}\right\}$$

$$=\left\{x+\frac{65}{16}-\frac{63}{16}\right\}\left\{x+\frac{65}{16}+\frac{63}{16}\right\}$$

$$=\left(x+\frac{1}{8}\right)(x+8).$$

109. 前款ノ法ニ於テ, $\frac{1}{4}q^2-r$ ノ平方根ヲ取レリ,此平方根ハ $\frac{1}{4}q^2-r$ ガ正量ナレバ,恒ニ之ヲ求メ得ベシ(假令ヒ此結果ガ根數ニシテ,精密ニ之ヲ開キ盡ス能ハザルニモセヨ). 然レドモ若シ $\frac{1}{4}q^2-r$ ガ負數ナル片ハ,總テ困難ニ遭遇スベシ,如何トナレバ算術ニ於テ,更ニ負數ノ平方根ヲ求ムベキ定則ナケレバナリ. 實ニ負數ノ平方ハ正トナルユヘ,正ニテモ負ニテモ二乘シテ負トナルベキ數アルコトナシ. 故ニ $\frac{1}{4}q^2>r$ ナル片, 即チ $q^2>4r$ ナル片, x^2+qx+r ノ實因子ヲ求メ得ルノミ.

110. 例ヘバ, x^2+2x+2 ノ因子ヲ求メントスルニ,之ヲ $(x^2+2x+1)+2-1$ ナル形,即チ $(x+1)^2+1$ ナル形ニ書キ改ムベシ,而シテコレヨリ進ンデ演算スル能ハザルナリ.

若シ此結果ヲ $(x+1)^2-a$ ト記スレバ(但シ a ハ -1 ニ代ヘタルナリ), 此式ハ $(x+1-\sqrt{a})(x+1+\sqrt{a})$ ト記スルヲ得ベシ. 而シテ此二因子ノ積ハ $(x+1)^2-a$, 即チ a ガ -1 ヲ示ス片ハ $(x+1)^2+1$ ナリ.

$\sqrt{(-1)}$ ノ如キ量ハ,算術ニ於テ未ダ曾テ知ラザルモノニシテ,之ヲ一種ノ新ラシキ意義ヲモツ量トスヘシ,乃チ其平方ハ -1 ナル如キ量トスベシ,然ル片ハ x^2+2x+2 ノ因子ヲ求ムルヿヲ得ヘシ.

$\sqrt{(-1)}$ ノ如キハ之ヲ虚數(イマジナリー)(Imaginary Quantity) ト云ヒ, 而シテ此ノ如キ量ヲ含ム式ヲ虚式(Imaginary Expression) ト云フ. 中學程度ノ代數學ニ於テハ,虚數ノ意義又ハ性質ヲ詳明セズト雖ドモ,虚數ハ高等ノ數學ニ於テハ,屢〻之ヲ用フルヿアリ,且ツ之ヲ用ヒテ奨妙ノ定理ヲ發見スルヿアリ,故ニ學生宜シク虚數ト云ヘル量アルヿハ忘却スベカラズ; 而シテ $\sqrt{(-1)}$ ノ如キ記號ニ,數ノ外ノ意義ヲ與ヘテ極メテ面白キ且ツ奥妙ナル眞理ヲ含ム數學ノ一分科アリ(四元法コレナリ).

111. $x-a$ ノ如キ式ガ,與ヘラレタル式ノ因子ナルヤ否ヲ驗スルニハ, $x-a$ ニテ與ヘラレタル式ヲ除シ,若シ更ニ餘リナキ片ハ, $x-a$ ハ與ヘラレタル式ノ因子ナルヿヲ知ル. 然レドモ次ノ定理ニ由レハ直ニ此結果ヲ得ベシ.

<u>定理</u> <u>x ニ就テ有理ニシテ,且ツ整ナル式ノ x ニ a ヲ代入シタル片,此式ガ零トナル片ハ,此式ハ $x-a$ ニテ除盡スルヿヲ得ベシ.</u>

與ヘラレタル式ヲ X トシ,之ヲ $x-a$ ニテ除シタル片ノ商ヲ Q トシ, 餘リヲ R トス.

此ニ由テ $\qquad X=Q(x-a)+R.$

サテ此方程式ハ一致式ナルユヘ, x ニ如何ナル價ヲ與フルモ眞ナリ,故ニ x ニ a ヲ代入スレバ,之レガ爲メニ R ニハ變更ナカルヘシ,如何トナレバ, R ハ與ヘラレタル式ヲ $x-a$ ニテ除シタル餘リナレバ,勿論 x ヲ含マザルベク(若シ x ヲ含ム片ハ,尚ホ除法ヲ行フベキガ故ナリ), 又假設ニ由テ X ノ x ニ a ヲ代入スレバ,零トナルユヘ,次ノ如シ

$$0=Q(a-a)+R,$$

即チ $\qquad 0=0+R$

故ニ R=0, 即チ更ニ餘リナシ.

故ニ $x-a$ ハ X ノ因子ナリ.

例ヘバ, x^2-7x+6 ハ x ニ 1 ヲ代入スレバ,零トナルユヘ, $x-1$ ハ此式ノ因子ナリ. 此式ヲ $x-1$ ニテ除スレバ,他ノ因子 $x-6$ ヲ得.

又 $x^4-5x^3-7x^2+5x+6$ ハ x ニ -1 ヲ代入スレバ,零トナルベシ, 如何トナレバ此式ハ $1+5-7-5+6$ トナレバナリ. 故ニ此式ハ $x+1$ ニテ除盡スベシ. 此式ヲ $x+1$ ニテ除スレバ,商ハ x^3-6x^2-x+6 ナリ. 又 x^3-6x^2-x+6 ハ x ニ -1 ヲ代入スレバ,零トナルユヘ $x+1$ ハ此式ノ因子ナリ, $x+1$ ニテ除スレバ,商ハ x^2-7x+6 ナリ.

而シテ此式ノ因子ハ $x-6$ 及ビ $x-1$ ナリ. 此ニ由テ

$$x^4-5x^3-7x^2+5x+6=(x+1)(x+1)(x-1)(x-6)$$
$$=(x+1)^2(x-1)(x-6).$$

112. 此定理ノ緊要ナル例トシテ, n ガ正ノ整數ナル片, $x^n\pm a^n$ ヲ $x+a$ 又ハ $x-a$ ニテ除盡シ得ルヤ否ヲ吟味スベシ.

(1) x^n-a^n ヲ $x-a$ ニテ除盡シ得ルヤ否ヲ知ラン爲メニハ,此ノ式中ニ於テ $x=a$ トスベシ. 然ル片ハ此式ハ a^n-a^n トナリ,コレ零ナルヿ明カナリ.

<u>故ニ x^n-a^n ハ, n ガ如何ナル整數ニテモ,恒ニ $x-a$ ニテ除盡シ得ベシ.</u>

(2) 又 x^n-a^n ハ $x+a$ ニテ除盡シ得ルヤ否ヤヲ知ラン爲メニハ此式ノ,

$x=-a$ ヲ代入スベシ. 然ルトキハ此式ハ $(-a)^n-a^n$ トナル. n 若シ偶數ナルトキハ,此式ハ a^n-a^n ニ等シク,コレ零ナリ. n 若シ奇數ナルトキハ此式ハ $-a^n-a^n$ ニ等シク,コレ零ニアラズ.

故ニ x^n-a^n ハ,n ガ偶數ナレバ,$x+a$ ニテ除盡シ得ベク,又 n ガ奇數ナレバ,$x+a$ ニテ除盡シ得ベカラズ.

(3) 次ニ x^n+a^n ガ $x-a$ ニテ除盡シ得ルヤ否ヲ知ラン爲メニハ,$x=a$ ヲ代入スベシ. 乃チ此式ハ a^n+a^n トナリ,コレ零ニアラズ,

故ニ,x^n+a^n ハ決シテ $x-a$ ニテ除盡シ得ベカラズ

(4) 終リニ,x^n+a^n ハ $x+a$ ニテ除盡シ得ルヤ否ヲ知ラン爲メニハ,此式ノ $x=-a$ ヲ代入スベシ. 乃チ $(-a)^n+a^n$ トナル,而シテ n ガ奇數ナレバ此式ハ $-a^n+a^n$ トナリ,コレ零ナリ. n ガ偶數ナルトキハ,此式ハ a^n+a^n トナリ,コレ零ニアラズ.

故ニ x^n+a^n ハ,n ガ奇數ナレバ,$x+a$ ニテ除盡シ得ベク,又 n ガ偶數ナレバ. $x+a$ ニテ除盡スル能ハズ.

是迄述タルコトヲ總括スレバ

(1) 如何ナル代數式ニテモ,但ニ其因子ヲ求メ得ベキヤ。

(2) 式ノ各項ニ通ズル因子ハ,如何ニシテ之ヲ求メ得ベキヤ。

(3) 二平方ノ差ノ形ノ式ノ因子ヲ求ムル法如何.

(4) 完全ノ平方ナル式ノ因子ヲ求ムル法如何.

(5) 三次式ニテ因子ニ分解シ得ルコトヲ學ビタル形ハ如何.

(6) 四次式ニテ因子ニ分解シ得ルコトヲ學ビタル形ハ如何.

(7) 一般ニ二次式ノ因子ヲ求ムル法如何.

(8) 虛數トハ如何.

(9) x ニ就テ有理ニシテ整ナル式ヲ,$x-a$ ニテ除盡シ得ベキ要件ハ如何.

(10) x^n-a^n ハ $x-a$ ニテ除盡シ得ルヤ如何. 且ツ之ヲ證スル法如何.

(11) x^n-a^n ハ $x+a$ ニテ除盡シ得ルヤ如何. 且ツ之ヲ證スル法如何.

(12) x^n+a^n ハ $x-a$ ニテ除盡シ得ルヤ如何. 且ツ之ヲ證スル法如何.

(13) x^n+a^n ハ $x+a$ ニテ除盡シ得ルヤ如何. 且ツ之ヲ證スル法如何.

第 八 編

最 高 公 因 子

113. 二ツ以上ノ代數式ノ最高公因子 (**Highest common Factor**) トハ,此各式ヲ除盡シ得ベキ,最高次元ノ式ナリ.

最高公因子ノ代リニ, H. C. F. ナル略記號ヲ用フ.

〔或著者ハ最高公因子ヲ最高公除數 (**Highest common Divisor**) ト云ヒ; 又或著者ハ之ヲ最大公約數 (**Greatest common Measure**) ト云ヒ, G. C. M. ナル略記號ヲ用フ. 然レドモ此最大公約數ト云ヘル名ハ,算術ニ於テハ適當ナレドモ,代數學ニハ不適當ナリ,此事ハ後ニ詳カニ述アベシ〕

114. 先ツ始ニハ單式ノ H. C. F. ヲ求ムル法ヲ述ベ,次ニ視察ニ由テ因子ヲ求メ得ベキ式ノ H. C. F. ヲ求ムル法ヲ說明シ,而シテ後ニ複式〔其因子ヲ直ニ知リ得ベカラザル處ノ〕ノ H. C. F. ヲ求ムル法ヲ述ベントス.

115. 單式ノ H.C.F. ヲ求ムルコトノ定則. 二ツ以上ノ單式ノ H.C.F. ハ,此各式ニ公通スル各因子ノ積ナリ,但シ各因子ハ,各式中ニテ最低器ノ指數ヲ附スベシ.

此理ハ一見シテ明了ナルモノニシテ,次ニ例ヲ擧テ之ヲ示ス.

若シ各式ニ數字係數ヲ有スルトキハ,此等ノ係數ノ G. C. M. ヲ求メテ, H.C.F. ノ係數トスベシ.

例 1. $3ab^2c^3$, $4a^5bc^3$, $6ab^5c^2$, $4a^4b^2c^7$ ノ H. C. F. ヲ求メヨ.

茲ニ a ハ與ヘラレタル各式ヲ除盡スベシ,然レドモ a^2 以上ニテハ,各式ヲ除盡スル能ハズ,故ニ a ハ此 H. C. F. ノ一因子ナリ.

次ニ b ハ與ヘラレタル各式ヲ除盡スベシ,然レドモ b^2 以上ニテハ各式ヲ除盡スル能ハズ,故ニ b ハ此 H.C.F. ノ一因子ナリ.

次ニ c^2 ハ與ヘラレタル各式ヲ除盡スベシ, 然レドモ c^3 以上ニテハ,各式ヲ除盡スル能ハズ,故ニ c^2 ハ此 H. C. F. ノ一因子ナリ. 而シテ數字係數ノ

G. C. M. ハ 1 ナリ.

故ニ所要ノ H. C. F. ハ abc^2 ナリ

例 2. $15x^4y^3z^3, -20x^3y^2z^4, 5x^2y^5z^3, -25x^4y^6z^2$ ノ H. C. F. ヲ求メヨ.

玆ニ x^2 ハ與ヘラレタル各式ヲ除盡シ得レド, x^3 以上ニテハ, 各式ヲ除盡スル能ハズ, 故ニ x^2 ハ此 H. C. F. ノ一因子ナリ.

次ニ y^2 ハ與ヘラレタル各式ヲ除盡シ得レド, y^3 以上ニテハ, 各式ヲ除盡スル能ハズ, 故ニ y^2 ハ此 H. C. F. ノ一因子ナリ.

次ニ z^2 ハ與ヘラレタル各式ヲ除盡シ得レド, z^3 以上ニテハ, 各式ヲ除盡スル能ハズ, 故ニ z^2 ハ此 H. C. F. ノ一因子ナリ. 而シテ數字係數 15, 20, 25 ノ G. C. M ハ 5 ナリ.

故ニ所要ノ H. C. F. ハ $5x^2y^2z^2$ ナリ.

例 3. $16p^7q^8r^9, 12p^4q^7rs^6, -22p^5q^6r^3t^4$ ノ H. C. F. ヲ求メヨ.

所要ノ H. C. F. ハ $2p^4q^6r$ ナルヿヲ知ル容易ナリ.

116. 因子ニ分解シ得ル處ノ複式ノ H. C. F. ヲ求ムルヿノ定則.

此場合ハ前款ニ同ジ, 如何トナレバ, 因子ヲ括弧內ニ記スルトキハ, 與ヘラレタル式ハ恰モ單式ニ同ジケレバナリ.

例 1. $6(a^2-b^2)$ 及ビ $9(a-b)^2$ ノ H. C. F. ヲ求メヨ.

與ヘラレタル式ハ $6(a-b)(a+b)$ 及ビ $9(a-b)^2$ ナリ.

故ニ所要ノ H. C. F. ハ $3(a-b)$ ナリ, 如何トナレバ二式ニ公通セル因子ハ, 唯 $a-b$ ノミニシテ 6 ト 9 トノ G. C. M. ハ 3 ナレバナリ.

例 2. $(x^2-a^2)^2, (x-a)^3, (x-a)^2(x-b)^2$ ノ H. C F. ヲ求メヨ.

此三式ノ第一ヲ, 因子ニ分解スレバ $(x-a)^2(x+a)^2$ ナリ.

故ニ所要ノ H. C. F. ハ $(x-a)^2$ ナリ. 如何トナレバ, 與ヘラレタル三式ニ公通セル因子ハ $(x-a)^2$ ノミナレバナリ.

例 3. $6a^4b+6a^3b^2-36a^2b^3$ 及ビ $9(a^3b^2+4a^2b^3+3ab^4)$ ノ H. C. F. ヲ求メヨ.

$$6a^4b+6a^3b^2-36a^2b^3=6a^2b(a^2+ab-6b^2)$$
$$=6a^2b(a-2b)(a+3b),$$

及ビ
$$9(a^3b^2+4a^2b^3+3ab^4)=9ab^2(a^2+4ab+3b^2)$$
$$=9ab^2(a+b)(a+3b),$$

此ニ由テ所要ノ H. C. F. ハ $3ab(a+3b)$ ナリ,

例 4. $2x^2-3x-2$ 及ビ $4x^2+8x+3$ ノ H. C. F. ヲ求メヨ.

玆ニ
$$2x^2-3x-2=2x^2-4x+x-2$$
$$=2x(x-2)+(x-2)$$
$$=(x-2)(2x+1),$$

及ビ
$$4x^2+8x+3=4x^2+2x+6x+3$$
$$=2x(2x+1)+3(2x+1)$$
$$=(2x+1)(2x+3).$$

故ニ所要ノ H. C. F. ハ $2x+1$ ナリ.

117. 與ヘラレタル式ノ一ツガ, 一次因子ニ分解セラルヽトキハ, 其等ノ因子ハ他ノ式ノ因子ナルヤ否ヤヲ試ミルヿニ由テ, 所要ノ H. C. F. ヲ簡便ニ求メ得ベキヿアリ.

例 1. $2(a-b)(11a-21b)$ 及ビ $209a^3-399a^2b+407ab^2-777b^3$ ノ H. C. F. ヲ求メヨ.

玆ニ因子 $a-b$ ハ, 第二ノ式ヲ除盡スルヤ否ヲ試ミルニ, 除盡スル能ハザルヿヲ知ル, 此ニ由テ $a-b$ ハ所要ノ H. C. F. ノ一部ナルヿ能ハズ.

次ニ $11a-21b$ ハ, 第二ノ式ヲ除盡スルヤ否ヲ試ミルニ, 除盡シ得ルヿヲ知ル.

故ニ $11a-21b$ ハ所要ノ H. C. F. ナリ.

例 2. $3x^2-3x-6$ 及ビ $3x^5-6x^4+3x^3-3x^2-11x+4$ ノ H. C. F. ヲ求メヨ.

玆ニ
$$3x^2-3x-6=3(x^2-x-2)$$
$$=3(x+1)(x-2),$$

玆ニ 3 ハ第二ノ式ヲ除盡スル能ハズ.

次ニ $x+1$ ハ第二ノ式ヲ除盡スベシ.

又 $x-2$ ハ第二ノ式ヲ除盡スル能ハズ.

故ニ $x+1$ ハ所要ノ H. C. F. ナリ.

118. 二ツノ複式ノ H. C. F. ヲ求ムルヿノ定則. 二複式ノ H. C. F. ヲ求ムルニハ, 先ヅ其二式中ニ含有シタルスベテノ單因子ヲ去ルベシ. 而シテ此去リタル因子ノ H. C. F. ハ所要ノ H. C. F. ノ一因子ナルベシ.

各式ヨリ單因子ヲ去リタル時,其殘リノ式ヲ,或字母例ヘバxノ乘冪ノ遞降次ニ列ベ,其二式中ニ就テ高次ノ式ヲ他ノ式ニテ除スベシ〔但シ二式ガ同次ナル時ハ,其何レノ式ヲ除數トシ,何レノ式ヲ被除數トスルモ可ナリ〕,若シ餘リアル時ハ,此餘リハ除數トセル式ヨリ低次ナルベシ.

是ニ於テ此餘リヲ除數トシ,前ノ除數ヲ被除數トシテ除法ヲ行フベシ

此法ヲ連續シテ更ニ餘リナキニ至ル時ハ,最後ノ除數ハ,二式ノ H.C.F ナルベシ.

若シxヲ含マザル處ノ最後ノ餘リアル時ハ,xヲ含ム因子ハ更ニ此二式ニ公通スルヿナシ,即チ此二式ニハxヲ含ム所ノ H. C. F. ナキナリ.

此ノ如クシテ求メ得タル H. C. F. ニ,前ニ去リタル單因子ノ H. C. F, ヲ乘ズレバ,所要ノ H. C. F. ナルベシ.

119. 此定則ヲ證明スル前ニ, x^3-2x^2+1 ト $2x^3+x^2+4x-7$ トノ H. C. F. ヲ求メテ,此法ヲ例解スベシ.

先ヅ此二式ニハ單因子ノ公通スルモノナキユヘ此演算ノ第一階ハ,二式中ノ一ヲ他ノ一ニテ除スルニアリ.

乃チ

$$\begin{array}{r} x^3-2x^2+1\,)\,2x^3+\ \ x^2+4x-7\,(\,2 \\ 2x^3-4x^2\qquad +2 \\ \hline 5x^2+4x-9 \end{array}$$

サテ x^3-2x^2+1 ヲ $5x^2+4x-9$ ニテ除セントス.

商ニ分數係數ヲ生ズルヿヲ避ケンガ為メ,此二式ノ第一ニ5ヲ乘ズベシ. 此ノ如ク5ヲ乘ズルモ,更ニ我輩ガ要求スル處ノ因子ニ影響ヲ及ボスヿナシ,如何トナレバ我輩ガ要求スル處ノ因子ハ,與ヘラレタル二式ニ公通スル複式ナルユヘ,其一式ニ或數ヲ乘ズルモ之ガ為メニ兩式ニ公通ナル因子ヲ誘出スルヿナケレバナリ. 故ニ要求スル結果ニ變動ナク,此演算ノ任意ノ階級ニ於テ除數又ハ被除數ナル式ヲ,任意ノ數又ハ單因子ニテ乘除スルヿヲ得ベシ.

此理ヲ適用スルガ為メ,演算ヲ簡畧ニスルヿ少ナカラズ.

故ニ次ノ演算ノ階級ハ,下ノ如シ:

$$\begin{array}{r} 5x^2+4x-9\,)\,5x^3-10x^2\qquad +5\,(\,x \\ 5x^3+\ \ 4x^2-9x\qquad \\ \hline -14x^2+9x+5 \end{array}$$

分數ノ商ヲ避ル為メ,此餘リニ又5ヲ乘ズレバ

$$\begin{array}{r} 5x^2+4x-9\,)\,-70x^2+45x+\ 25\,(\,-14 \\ -70x^2-56x+126\qquad \\ \hline 101x-101\qquad \end{array}$$

是ニ於テ $5x^2+4x-9$ ヲ, $101x-101$ 即チ $101(x-1)$ ニテ除セントスルニ,前ト同シク,數字因子 101 ヲ棄ルヿヲ得ベシ,如何トナレバコレ所要ノ H.C.F. ノ因子ナラザレバナリ. 然ル時ハ演算ノ次ノ階級ハ,下ノ如シ

$$\begin{array}{r} x-1\,)\,5x^2+4x-9\,(\,5x+9 \\ 5x^2-5x\qquad\qquad \\ \hline 9x-9 \\ 9x-9 \\ \hline \end{array}$$

茲ニ更ニ餘リナシ,而シテ與ヘラレタル二式ニハ,更ニ數字因子アルヿナシ,故ニ $x-1$〔コレ最後ノ除數ナリ〕ハ所要ノ H. C. F. ナリ.

120. 前款ノ定則ノ證明. 前款ノ定則ハ「A ト B トノ因子ナル處ノ任意ノ量ハ,又 $mA+nB$ ノ因子ナリ,但シ此 m ト n ハ任意ノ量ニテ可ナレモ該因子ヲ分母ニ含ム處ノ分數ヲ除ク」ナル理ニ基クモノトス.

上文ノ理ハ學生ノ中,解シ能ル者モアラントノ懸心ニ由リ,少シク註解ヲ加フベシ.

例ヘバ A ト B トノ二式ハ, a ト云フ公因子ヲ有シ, $A=ax$, $B=ay$ ト定ム,但シ此 a, x, y ハ任意ノ代數式トス. 然ル時ハ $mA+nB$ ハ $max+nay$ トナリ,此 m ト n ハ若シ整式ナル時ハ,コレ $a(mx+ny)$ ナルユヘ, A ト B トノ公因子ナル a ハ,又 $mA+nB$ ノ因子ナリ. 又 m ト n ハ假令ヒ整式ナラズシテ分數ナルモ, m ト n トノ分母ニ a ナル因子ナケレバ,矢張リ $a(mx+ny)$ ナルユヘ, a ハ $mA+nB$ ノ因子ナリ. 然レモ m ト n 又ハ其一ツノ分母ニ a ナル因子アル時,例ヘハ $n=q/pa$ ナル時ハ, $mA+nB=max+nay=max+\frac{q}{pa}ay=max+\frac{q}{p}y$ ナルユヘ,最早 a ハ $mA+nB$ ノ因子ナルヿ能ハザルナリ.

若シ上ノ演算即チ最高公因子ヲ求ムル演算ハ,三階ニテ廢止スルモノトセバ,次ノ如クナルベシ

$$
\begin{array}{l}
A\,)\,B\,(\,Q_1 \\
\quad \underline{AQ_1} \\
\quad\quad C\,)\,A\,(\,Q_2 \\
\quad\quad\quad \underline{CQ_2} \\
\quad\quad\quad\quad D\,)\,C\,(\,Q_3 \\
\quad\quad\quad\quad\quad \underline{DQ_3}
\end{array}
$$

乃チ B ヲ A ニテ除シタル時, Q_1 ハ其商, C ハ其餘リナルベシ. 次ニ A ヲ C ニテ除シタル時, 其商ハ Q_2, 其餘リハ D ナリ. 次ニ C ヲ D ニテ除セザルベカラズ; 茲ニ Q_3 ハ其商, 而シテ此演算ハ三階ニテ底止スルモノト定メシガ故ニ更ニ餘リナカルベシ.

故ニ　$B=AQ_1+C$, 即チ　$B-AQ_1=C$……………………(1)

$A=CQ_2+D$, 即チ　$A-CQ_2=D$……………………(2)

$C=DQ_3$.

(1) ヨリ, B ト A トヲ除盡スル處ノ任意ノ量ハ, 亦 $B-AQ_1$ ヲ除盡スルユヘ從テ C ヲ除盡スルヿヲ知ル. 故ニ所要ノ H. C. F. ハ, 亦 A ト C トヲ除盡スベク從テ $A-CQ_2$ ヲ除盡スベシ, 故ニ (2) ヨリ, 所要ノ H. C. F. ハ, 亦 D ヲ除盡スルヿヲ知ル. 故ニ所要ノ H. C. F. ハ C ト D トノ一因子ナリ, 即チ DQ_3 ト D トノ一因子ナリ, 故ニ所要ノ H. C. F. ハ D 即チ最後ノ除數ナリ.

例 1. $4x^3-3x^2-24x-9$ ト $8x^3-2x^2-53x-39$ トノ H. C. F. ヲ求メヨ.

此演算ハ次ノ如シ:

此二式ハ單因子ヲ有セズ, 故ニ直ニ下ノ如クスベシ:

$$
\begin{array}{rl}
4x^3-3x^2-24x-9\,) & 8x^3-2x^2-53x-39\,(\,2 \\
 & \underline{8x^3-6x^2-48x-18} \\
 & \quad\quad 4x^2-5x-21
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
4x^2-5x-21\,) & 4x^3-3x^2-24x-9\,(\,x \\
 & \underline{4x^3-5x^2-21x} \\
 & \quad\quad 2x^2-3x-9 \\
 & \quad\quad \underline{2} \\
 & \quad\quad 4x^2-6x-18\,(\,1 \\
 & \quad\quad \underline{4x^2-5x-21} \\
 & -1\,\underline{)\;-x+3} \\
 & \quad\quad\quad x-3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
x-3\,) & 4x^2-5x-21\,(\,4x+7 \\
 & \underline{4x^2-12x} \\
 & \quad\quad 7x-21 \\
 & \quad\quad \underline{7x-21}
\end{array}
$$

∴　所要ノ H. C. F. ハ $x-3$ ナリ.

注意. 此演算ノ第一階ニ於テハ, $4x^3-3x^2-24x-9$ ニテ $8x^3-2x^2-53x-39$ ヲ除シ, 餘リ $4x^2-5x-21$ ヲ得タルナリ. 次ニ此演算ノ第二階ニ於テハ, $4x^2-5x-21$ ニテ $4x^3-3x^2-24x-9$ ヲ除セシニ, 商 2 ヲ得, 之ヲ $4x^2-5x-21$ ニ乘ジテ被除數ヨリ減セシニ, 餘リ $2x^2-3x-9$ ヲ得タリ. 此式ハ二次ナルユヘ, 尚ホ同ジ除數ヲ以テ, 除法ヲ連續スルヿヲ得レ圧, 分數係數ノ不便ヲ避ケンガ爲メ 2 ヲ乘ジ $4x^2-6x-18$ ヲ得, 之ヲ $4x^2-5x-21$ ニテ除セシニ, 商 1 ト餘リ $-x+3$ ヲ得タリ. 仍テ初項ニ負ノ係數アルヿヲ避ケンガ爲メ, -1 ニテ除シ $x-3$ ヲ得タルナリ. 是ニ於テ $x-3$ ニテ $4x^2-5x-21$ ヲ除セシニ丁度除盡シ得タルユヘ, $x-3$ ハ所要ノ H. C. F. ナリ.

例 2. $24x^4-2x^3-60x^2-32x$ ト $18x^4-6x^3-39x^2-18x$ トノ H. C. F. ヲ求メヨ.

茲ニ先ヅ與ヘラレタル二式ハ, 單因子ヲ有スルヤ否ヲ檢スベシ.

$$24x^4-2x^3-60x^2-32x=2x\,(12x^3-x^2-30x-16),$$

$$18x^4-6x^3-39x^2-18x=3x\,(6x^3-2x^2-13x-6).$$

而メ $2x$ ト $3x$ トノ公因子ハ x ナリ. 故ニ x ハ所要ノ H. C. F. ノ一因子ナルユヘ, コレヨリ $12x^3-x^2-30x-16$ ト $6x^3-2x^2-13x-6$ トノ H. C. F. ヲ求メテ, 後ニ x ヲ乘ズベシ. 此事ハ能ク氣ヲ付ケテ忘ルベカラズ.

$$
\begin{array}{rl}
6x^3-2x^2-13x-6\,) & 12x^3-x^2-30x-16\,(\,2 \\
 & \underline{12x^3-4x^2-26x-12} \\
 & \quad\quad 3x^2-4x-4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
3x^2-4x-4\,) & 6x^3-2x^2-13x-6\,(\,2x+2 \\
 & \underline{6x^3-8x^2-8x} \\
 & \quad\quad 6x^2-5x-6 \\
 & \quad\quad \underline{6x^2-8x-8} \\
 & \quad\quad\quad 3x+2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
3x+2\,) & 3x^2-4x-4\,(\,x-2 \\
 & \underline{3x^2+2x} \\
 & \quad -6x-4 \\
 & \quad \underline{-6x-4}
\end{array}
$$

故ニ所要ノ H. C. F. ハ $x(3x+2)$ ナリ.

例 3. $3x^3-13x^2+23x-21$ ト $6x^3+x^2-44x+21$ トノ H. C. F. ヲ求メヨ

此演算ハ次ノ如シ:

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3-13x^2+23x-21 & 6x^3+\ \ x^2-44x+21\ (2 \\
 & 6x^3-26x^2+46x-42 \\ \hline
 & 9\,|\,27x^2-90x+63 \\ \hline
 & \quad 3x^2-10x+\ 7
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
3x^2-10x+7 & 3x^3-13x^2+23x-21\ (x-1 \\
 & 3x^3-10x^2+\ 7x \\ \hline
 & -\ 3x^2+16x-21 \\
 & -\ 3x^2+10x-\ 7 \\ \hline
 & 2\,|\,6x-14 \\ \hline
 & \quad 3x-\ 7
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
3x-7 & 3x^2-10x+7\ (x-1 \\
 & 3x^2-\ 7x \\ \hline
 & -\ 3x+7 \\
 & -\ 3x+7 \\ \hline
\end{array}
$$

故ニ所要ノ H. C. F. ハ $3x-7$ ナリ.

121. 三ツ以上ノ複式ノ H. C. F. 先ヅ與ヘラレタル諸式中ノ二式 A ト B トノ H.C.F. ヲ求ムレバ,此式ハ A ト B トニ公通セル各因子ヲ含ムベシ. 故ニ此式ト第三式 C トノ H.C.F. ハ, A,B,C. ニ公通セル各因子ヲ含ムベシ,餘ハ逐テ此ノ如クスベシ.

例ヘバ x^3-7x^2-x+7, x^3+3x^2-x-3, x^3-x^2-5x+5 ノ H.C.F. ヲ求メントス.

先ヅ此三式中第一第二ノ H.C.F. ヲ求ムレバ x^2-1 ナリ(118 款).

而メ x^2-1 ト x^3-x^2-5x+5 トノ H.C.F. ハ $x-1$ ナリ. 此ニ由テ $x-1$ ハ,與ヘラレタル三式ノ H.C.F. ナリ.

122. 最高公因子ヲ,最大公約數ト云フヿノ不適當ナルヿヲ一言スベシ.

今若シ a^2 ガ二式ノ公因子ナル片ハ a モ亦勿論其二式ノ公因子ナリ,而メ a^2 ハ a ヨリハ高次元ナリ,然レモ a ハ任意ノ數ヲ顯ハスヿヲ得ルユヘ, a^2 ハ必ズシモ a ヨリ大ナラズ: 實ニ a ハ正ニシテ一ヨリ小ナル片ハ, a^2 ハ a ヨリ小ナリ. 例ヘバ $a=\frac{1}{3}$ ナル片ハ, $a^2=\frac{1}{9}$ ニシテ,其時ハ $<a$ ナルガ如シ. 又任意ノ二式ト其最高公因子トノ中ニ含ミタル字

母ニ,特別ノ數價ヲ代入スル片其二式ノ最高公因子ノ數價ハ必ズシモ與ヘラレタル二式ノ數價ノ最大公約數ニハアラズ.

例ヘバ $2x^2+15x+13$ ト $6x^2+17x+11$ ノ最高公因子ハ $x+1$ ナリ,然ルニ x ヲ $\frac{1}{2}$ トスレバ此二式ハ $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+15\times\frac{1}{2}+13=\frac{1}{2}+7\frac{1}{2}+13=21$, 及ビ $6\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+17\times\frac{1}{2}+11=1\frac{1}{2}+8\frac{1}{2}+11=21$ トナルユヘ,其最大公約數ハ宜シク21ナルベキ筈ナリ. 然レモ原ノ二式ノ最高公因子 $x+1$ ノ x ニ $\frac{1}{2}$ ヲ代フレバ, $\frac{1}{2}+1=1\frac{1}{2}$ トナルガ如シ.

最低公倍數

123. 二ツ以上ノ式ノ最低公倍數 (Lowest common Multiple) トハ,此各ニテ除盡シ得ベキ最低次元ノ式ナリ. 最低公倍數ノ代リニ L. C. M. ト略記ス.

124. 單式又ハ因子ニ分解シ得ベキ式ノ L. C. M. 二ツ以上ノ單式(又ハ一次ノ因子ニ分解シ得ベキ複式)ノ L. C. M. ハ,各式中ノ各因子ヲ併記シ,之レニ各式中ニテ最高乘羃ノ指數ヲ附シタルモノナリ.

若シ與ヘラレタル式ニ數字係數ヲ有スル片ハ,其最小公倍數ヲ求メテ之ヲ所要ノ L. C. M. ニ前置シテ其數字係數トスベシ.

例 1. x^3,x^2,x^4 ノ L. C. M. ヲ求メヨ.

所要ノ L. C. M. ハ x ノ或乘羃ナルベシ,而メ x^3,x^2,x^4 ノ各ニテ除盡シ得ベキ x ノ最低羃ハ x^4 ナルベシ. 故ニ所要ノ L. C. M. ハ x^4 ナリ.

例 2. $3ab^2c^3$, $2a^2b^2c^2$, $6a^3b^2c$ ノ L. C. M. ヲ求メヨ.

此各式ノ數字係數ノ最小公倍數ハ 6 ナリ. 故ニ 6 ハ所要ノ L. C. M. ノ係數ナリ.

次ニ所要ノ L. C. M. ハ a^3 ナル一因子ヲ含ムベシ,然ラザレバ $6a^3b^2c$ ニテ除盡スル能ハザレバナリ.

次ニ所要ノ L. C. M. ハ b^2 ナル一因子ヲ含ムベシ,然ラザレバ與ヘラレタル各式ニテ除盡スル能ハザレバナリ.

次ニ所要ノ L. C. M. ハ c^3 ナル一因子ヲ含ムベシ,然ラザレバ $3ab^2c^3$ ニ

ヲ除盡スル能ハザレバナリ.

故ニ所要ノ L. C. M. ハ $6a^3b^2c^3$ ナリ.

例 3. $(x-a)(y-b)^2(z-c)^3$, $(x-a)^2(y-b)^2(z-c)$, $(x-a)^3(y-b)^2(z-c)$ ノ L. C. M. ヲ求メヨ.

此 L. C. M. ハ $(x-a)^3(y-b)^2(z-c)^3$ ナルコ明カナリ.

例 4. $3a^2+9ab$, $2a^3-18ab^2$, $a^3+6a^2b+9ab^2$ ノ L. C. M. ヲ求メヨ

茲ニ
$$3a^2+9ab=3a(a+3b),$$
$$2a^3-18ab^2=2a(a^2-9b^2)=2a(a+3b)(a-3b),$$
$$a^3+6a^2b+9ab^2=a(a^2+6ab+9b^2)=a(a+3b)^2,$$

故ニ所要ノ L. C. M. ハ $6a(a+3b)^2(a-3b)$ ナリ.

125. 二複式ノ L. C. M. 二ツノ複式ノ L. C. M. ヲ求メントスルニ方リテ,其因子ヲ観察ニ由テ知ルベカラザル時ハ,先ヅ其二式ノ H. C. F. ヲ求メ,此 H. C. F. ニテ二式ノ一ヲ除シ,其商ヲ他ノ式ニ乘ズベシ.

如何トナレバ, A ト B ヲ二式トシ, H ヲ其 H. C. F. トス. 然ル時ハ A ト B トハ,何レモ H ニテ除盡スルコヲ得ベシ, 今 A ヲ H ニテ除シタル商ヲ a, B ヲ H ニテ除シタル商ヲ b トス. 故ニ $A=Ha$, $B=Hb$. サテ a ト b トハ更ニ公因子ヲ有セザルベシ,其故ハ若シ a ト b トニ公因子アリトセバ, A ト B トヲ倶ニ除盡シ得ベキ H ヨリモ高次ノ式ヲ得ベク然ルニ H ハ二式ノ H. C. F. ナルユヘ決シテ此ノ如キコナケレバナリ.

故ニ Ha ト Hb トノ L. C. M. ハ Hab ナリ

然ルニ
$$Hab=(Ha)(b)=Ab.$$
又
$$Hab=(Hb)(a)=Ba.$$

コレ本款ノ冒頭ニ述ベタル定則ヲ證明スルモノナリ.

注意. A ト B トノ積ヲ,其 H. C. F. ニテ除スルモ,亦所要ノ L. C. M. ヲ得ベシ.

如何トナレバ A ト B トノ L. C. M. $=Hab=\dfrac{(Ha)(Hb)}{H}=\dfrac{AB}{H}$

例 1. $2x^4+x^3-20x^2-7x+24$ ト $2x^4+3x^3-13x^2-7x+15$ トノ L. C. M. ヲ求メヨ.

此二式ノ H. C. F. ハ x^2+2x-3 ナリ.

除法ニ由テ
$$2x^4+x^3-20x^2-7x+24=(x^2+2x-3)(2x^2-3x-8).$$
$$2x^4+3x^3-13x^2-7x+15=(x^2+2x-3)(2x^2-x-5).$$

故ニ此 L. C. M. ハ $(x^2+2x-3)(2x^2-3x-8)(2x^2-x-5)$ ナリ.

例 2. $x^5+4x^3+x^2+3x+3$ ト $x^3+6x^2+3x+18$ トノ L. C. M. ヲ求メヨ.

此二式ノ H. C. F. ハ x^2+3 ナリ.

除法ニ由テ
$$x^5+4x^3+x^2+3x+3=(x^2+3)(x^3+x+1).$$
$$x^3+6x^2+3x+18=(x^2+3)(x+6).$$

故ニ所要ノ L. C. M. ハ $(x^2+3)(x^3+x+1)(x+6)$ ナリ.

126. 三ツ以上ノ複式ノ L. C. M. 三ツ以上ノ複式ノ L. C. M. ハ先ヅ其諸式ニ就テ,第一式ト第二式トノ L. C. M. ヲ求メ,之レト第三ノ式トノ L. C. M. ヲ求メ,逐テ此ノ如クスベシ.

次ニ與ヘラレタル式ヲ因子ニ分解シテ L. C. M. ヲ求ムル例ヲ示ス:

例 1. $x^2-7x+12$, $3x^2-6x-9$, 及ビ $2x^3-6x^2-8x$ ノ L. C. M. ヲ求メヨ.

因子分解法ニ由テ
$$x^2-7x+12=(x-3)(x-4).$$
$$3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)$$
$$=3(x+1)(x-3).$$
$$2x^3-6x^2-8x=2x(x^2-3x-4)$$
$$=2x(x+1)(x-4).$$

此ニ由テ與ヘラレタル三ツノ複式ノ L. C. M. ハ $(x-3)(x-4)$, $3(x+1)(x-3$ $2x(x+1)(x-4)$ ノ L. C. M. ニ等シ.

故ニ所要ノ L. C. M. ハ $3\times 2x(x+1)(x-3)(x-4)$

即チ $6x(x+1)(x-3)(x-4)$ ナリ.

例 2. x^3-x^2-4x+4, x^3-2x^2-x+2 及ビ x^3+2x^2-x-2 ノ L. C. M. ヲ求メヨ.

茲ニ
$$x^3-x^2-4x+4=x^2(x-1)-4(x-1)$$
$$=(x-1)(x^2-4),$$
$$x^3-2x^2-x+2=x^2(x-2)-(x-2)$$
$$=(x-2)(x^2-1),$$
$$x^3+2x^2-x-2=x^2(x+2)-(x+2)$$
$$=(x+2)(x^2-1),$$

此ニ由テ與ヘラレタル三ツノ複式ノ L.C.M. ハ $(x-1)(x^2-4)$, $(x-2)(x^2-1)$, $(x+2)(x^2-1)$ ノ L.C.M. ニ等シ。而ソ $x-1$ 及ヒ $x+2$ ハ互ニ x^2-1 及ヒ x^2-4 ノ因子ナルヿ明カナリ.

故ニ所要ノ L.C.M. ハ $(x^2-1)(x^2-4)$ ナリ.

是迄述タルヿヲ總括スレバ

(1) 最高公因子トハ如何.

(2) 單式ノ H.C.F. ヲ求ムル法如何.

(3) 因子ニ分解シ得ル處ノ複式ノ H.C.F. ヲ求ムル法如何.

(4) 二ツノ複式ノ H.C.F. ヲ求ムル法如何.

(5) 三ツ以上ノ複式ノ H.C.F. ヲ求ムル法如何.

(6) 最高公因子ヲ最大公約數ト云フヿノ不適當ナル理由如何.

(7) 最低公倍數トハ如何.

(8) 單式又ハ因子ニ分解シ得ベキ式ノ L.C.M. ヲ求ムル法如何

(9) 二ツノ複式ノ L.C.M. ヲ求ムル法如何.

(10) 三ツ以上ノ複式ノ L.C.M. ヲ求ムル法如何.

代數學講義第一學級終

代数学講義録

長沢　亀之助／述

〔刊年不明〕