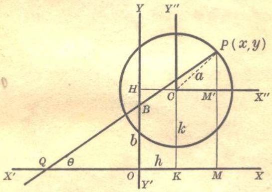
解析几何学

直線与圓

Briggs and Bryan 著
刘 鉄 楼 譯



商务印書館

解 析 几 何 学

直 線 与 圓

Briggs and Bryan 著
刘 鉄 楼 譯

商務印書館

解析几何学

直 線 与 圓

刘鉄楼譯

商 務 印 書 館 出 版
上海河南中路二一一號
(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)
新 華 書 店 總 經 售
上 海 市 印 刷 四 厂 印 刷
13017·99

1948年10月第1版　　開本 787×1092 1/32
1956年3月第3版　　印張 7 11/16
1957年1月上海第2次印刷　　印數 5,501—21,500
定價(10)¥ 1.00

再版序

於本版中，除更改書名之一部〔即將"坐標幾何學"易爲"解析幾何學"——按"解析幾何學"(analytic geom.) 亦名"坐標幾何學"(coordinate geom.)，亦名"代數幾何學"(algebraic geom.，我國昔時亦有譯爲"代形合參"者)。其名雖三，學義則一。但恐今之讀者或多昧於後二別稱，故決改爲今名，此乃當前所流行通用者。〕以及訂正少數手民之誤而外，所有內容，悉同初版。以譯者邇來經常爲瑣務所羈，致增訂一事，祇可俟諸異日矣。

關於本書內容，如蒙海內先進及讀者惠賜任何批評，指示，或正誤，均深歡迎與心感。

劉鐵樓再識於上海市立陸行中學

1951 年 4 月 17 日

譯者附言

原著就解析幾何學之立場，對"直線與圓"作詳盡之探討．釋義肯確，析理簡明；論質與量，可供中等技術學校或師範學院學生及一般自修者參考之用．原著者白里格（William Briggs，法學博士，民法博士，文學碩士，理學士英國皇家天文學會會員）及白里安（G. H. Bryan，理科博士，皇家學會會員前劍橋聖彼得學院給費研究生，斯密斯氏奬金之獲奬人．）二氏俱係英國科學界中之權威學者．原書問世以後，卽大有不脛而走之概．是稿乃本其第十六版（修正第三版）而譯成者．［全書計分十八章，附列習題七百餘則，附圖 60 個．］譯文力求信達：務使原著本意，宣表無遺，讀者閱之一目了然．譯筆工拙，非所計也．

書中所有術語專詞，悉皆依據中國科學名詞審查會訂定曹惠羣先生編輯之"算學名詞彙編"爲準，期歸一律；非於萬不得已，無書可據時，決不願率爾杜撰也．［例如，原著第八章 § 51 與第十章 § 67 中，載有"origin side"與"non-origin side"二詞，非特"算學名詞彙編"中未曾將其列入，卽於其

他數學詞典中（如商務，中華諸書局所出版者），亦未見之．於是，譯者乃不揣冒昧，案據原文之本意，擅自將該二詞各譯爲"原點同側"與"原點異側"．是否有當，尙希高明有以教之.]

爲使讀者明瞭內中概要起見，謹將原書特點摘述一二如次：

(i) 原著中關於命辭定理之證明，除用應有的解析（analytical）法而外，有時更兼舉交代（alternative）法以覆證之.

(ii) 原著前數章中，對"流動坐標系"之意義，常數與變數之區別，以及 (x, y)；(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，$\cdots$；(x', y')，(x'', y'')，$\cdots$ 之用法，均曾再三加以闡釋，隨時隨處促使讀者注意．此點，在表面上觀之，固屬小節，但就事實而言，誠乃一般初學者所最易誤解與疑混者；倘不及時予以必要之糾政，則入後必致錯誤百出，愈益莫明其所以然焉．此乃原著者細心獨到之處，殆亦彼之教書經驗有以致之.

(iii) 關於"某點對於某直線之位置"，原著者對之頗具卓然獨特之見解．彼曾於其原著第八章 §15 中，對若干其他教本中所引用之"正側"與"負側"（Positive side & Negative side）二詞猛施抨擊．彼主另以"原點同側"與"原點異側"二詞以代之．言之有理，取之有據，縱令對方聞之，亦必爲之啞然心服也.

(iv) 第十一章中所論述之"二次方程式所表之直線",於其他解析幾何學教本中,殊少見之.

(v) "軌跡"問題,在初等(歐氏)幾何學中頗佔重要位置;於解析幾何學中亦然. 原著對此,故曾特加注意,分設第三,第十八兩章以專論之.

(vi) 書中函題甚富,其中尤以試題及總試題(合計 319 則,佔全書習題三分之一強),誠乃不易多見之珍材,蓋以該等題材,乃係搜集昔時倫敦大學之文理科試卷而編成者;不特具有特殊的文化歷史價值,抑且類多精選之尤. 讀者於此,固未可等閑視之.

雖原著中之優點甚多,但恐譯者不敏,殊難盡彰其美耳. 倘蒙海內先進,不吝賜教,曷勝幸甚!

劉鐵樓識於雲南玉溪省立玉溪中學

原　序

根據已往指導千百學子準備受應倫敦大學文理科試驗以及批改彼等盈千累萬之"直線與圓"試卷所獲之經驗，吾人對於一般初學者所感之困難，業已洞悉無遺．大多現行教本咸皆假定，凡欲開始研習坐標幾何學，事前對代數學與三角術二科，必已具備確切之認識與基底；惟在事實上，克能達到此種水準者，僅祇少數學子而已；是誠憾事也．本書之著，乃具有相當信念者：吾人以為，若將課程妥予分配，並分之成若干簡易階段，則斷不致使一般無志於獲取算學榮譽之大學生對坐標幾何學一科視為畏途．

吾人已曾鑑及一般學子之處境，並曾切實兼顧自習者之需要：每次在對一組新概念詳供充分材料後，必隨舉若干例解．該等例解，除其所具之正常功用外，更可視為促使學子複習前組概念以後所概括之全部論據之啓示物．蓋但憑領悟書中所述之理論，在事實上，尚嫌不足；勢必將一切現實銘記心中，並需注意其與前知事實所生之聯繫方可．

吾人膽敢確信，本書讀者對於吾人自始至終從事於每一件重要校讀工作所費之艱苦心力，以及排版付刊時使行與行間多

留空隙所致之清晰程度，必能深加體會.

大小不同之字體，乃用以表示材料之具有相當重要性者；又凡專爲有志對該科力求深造者所設之各節，概經用星號標出之

[給與學子之暗示，概行置諸方括號中；此等暗示，於解答問題時，固毋必重行贅述也.]

所有公式，概經用大型字體顯彰之，並附列參考數目(學子每次於進讀新材料以前，必當將已述公式逐一牢記)：惟於本書前數章中，對習見公式，並不每次附註數字；蓋以其所佔篇幅有限，讀者殊不難自行發見其所在也.

初學者應予牢記，此科乃係幾何學之一種，理宜隨處儘量作圖求解．職是之故，吾人切盼讀者慣於使用劃成糎粍之方格圖紙，以免臨時自己劃格之麻煩；蓋此亦惜省時間之一道也.

白里格
白里安 序於英國劍橋柏林敦大廈

代數學·三角術及幾何學中之重要公式與結果

(供作參考用)

二次方程式之性質

令 α, β 為二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根.

1. 則，由解，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

可得

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad 及 \quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

2. 若 $b^2-4ac=0$, 卽 $b^2=4ac$,

則 α 與 β 二根相等，蓋二者各等於 $-\frac{b}{2a}$

3. 若 b^2-4ac 為正，二根實而不等.

若 b^2-4ac 為負，α 與 β 俱為虛根，又任何 x 之實值決不能滿足該方程式.

4. 不論 x 為任何值，下列二次式必可成立：

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

5. 二根之和，$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}.$

6. 二根之積，$\alpha\beta=\frac{c}{a}.$

7. 若 $b^2=4ac$, 則式 ax^2+bx+c 為 x 簡式之完全平方，其平方根為

$$\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right).$$

(此處係數 $\sqrt{a}$ 不必為有理者，但該平方根當可以無根號之 x 形式表之.)

註：吾人常用斜線置於分數之分子與分母之間，以節省地位；例如 a/b, 卽 $\frac{a}{b}$.

三角術及幾何學

1. 用＋與－兩種符號以表方向.

2. 大小不拘諸角之量度.

3. 三角比之定義.

(至此等定義之解釋學者應予參考其教本.)

4. 今將在第一象限中諸特別角之比錄此以便記憶:

	0°	30°	45°	60°	90°
正弦	$\sqrt{\frac{0}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{4}{4}}$
餘弦	$\sqrt{\frac{4}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{0}{4}}$

5. $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 又 $\tan\theta=\sin\theta/\cos\theta$

6. $\tan(90^\circ+A)=-\cot A=-\dfrac{1}{\tan A}$.

7. 若 $\tan\theta=\tan\alpha$, 則在弧度法中 $\theta=n\pi+\alpha$ 或以度表之 $\theta^\circ=n.180^\circ+\alpha^\circ$, 該處 n 為任何整數.

"$A\pm B$ 公式", 尤以次三者為最著:

8. $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$.

9. $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$ 及 $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

於 $\triangle ABC$ 中其三邊為 a, b, c.

10. $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ (或歐氏幾何學 II. 12, 13).

11. 若 C 為直角, 則 $c^2=a^2+b^2$ (歐幾 I. 47).

12. 三角形之面積 $\triangle=\dfrac{1}{2}$ 底邊×高,

或 $\triangle=\dfrac{1}{2}ab\sin C$.

13. 相似三角形之性質歐幾 VI. 4 等.

14. 反函數之應用: 若 $\tan\theta=x$,

則 $\theta=\tan^{-1}x$, 或 $\tan(\tan^{-1}x)=x$.

目　錄

第一章　坐標系

1. 平面坐標幾何學 (Plane Coördinate Geometry) 乃代數學原理對於一平面內之點, 線及圖形之幾何學方面的應用.

因其方法端賴應用諸數及代數字母以表線長, 是故吾人必當慎予注意在一切場合內長度之若干確定單位, 必需預爲選妥, 俾可藉以表出一切其他長度.

例如, 若取吋爲長度單位, 則數 5 卽表 5 吋; 若吾人取呎爲吾人之單位, 則同數乃表 5 呎.

爲欲決定平面內一點之位置起見, 祇需經過二次量度. 下列二例乃示其用法者.

示例.——(i) 若吾人欲將掛圖釘錘入牆上某特定點, 吾人必當預爲量度該選定點遠隔該牆左隅之距離以及其隔離地面之高度. 例如假設前者爲 7 呎又後者爲 6 呎. 當量度時吾人必當予以指導使先沿地面自牆底左隅量度 7 呎然後鉛直向上繼量 6 呎, 旋卽錘該釘於該處卽可. 若吾人恆用此法而以呎爲單位, 則結果必可得出該距離之量度 (7, 6).

(ii) 在圖 1 中, 令 P 表矩形場地內一樹之位置, OX, OY 表圍場之籬. 假設吾人量知該樹隔 OY 籬之距離 NP 爲 40 碼, 又知該樹隔 OX 籬之距離 MP 爲 30 碼. 既以碼爲單位, 則此等數目 (40, 30) 自足使吾人在任何後時發見該樹所佔之

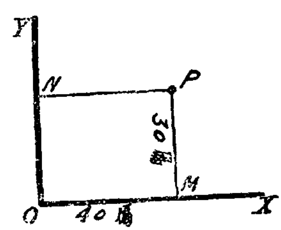


圖 1

位置；蓋吾人僅需沿 OX 線自 O 至 M 步行 40 碼，然後更自 M 沿平行於 OY（即垂直於 OX）之方向繼續行進 30 碼而終來至 P. 若吾人先沿 OY 自 O 至 N 行進 30 碼，後更沿與 OX 相平行之方向繼行 40 碼，則如是吾人亦可同樣求得 P 點.

2. 由此等實例吾人可知——

若 OX, OY 爲平面內互成直角之任二固定直線，則在同一平面內任一點 P 之位置必可全予決定，但需確知沿 OX 及平行於 OY 所量得之距離 OM 及 MP 而已.

此等長度稱爲該點之笛卡兒*直角坐標系（Cartesian rectangular coördinates），或簡稱爲該點之坐標系（coördinates）. OM 爲 P 點之橫標(abscissa)，又 MP 爲 P 點之縱標(ordinate).

直線 OX 及 OY 稱爲坐標軸(axes of coördinates)，或簡稱爲軸(axes)，又其交點 O 稱爲原點(origin).

就上述第二例中所釋示者而言，橫標爲 x 縱標爲 y 之點慣稱爲"(x, y) 點". † OX 稱爲 x 軸，OY 稱爲 y 軸.

該處若一點之坐標尙爲未知者，則彼等幾恆用字母 x 與 y 表之；又若有若干不同點，則吾人慣加用撇點或附數以區別之；如 (x', y'), (x'', y''), (x_1, y_1), (x_2, y_2) 等是. 注意橫標恆必先寫.

3. 代數符號之應用.——爲推廣坐標系對於非位於慣用象限 XOY 中諸點之使用計，吾人常予採用代數符號 $+$ 及 $-$ 以表量度坐標時所沿之方向，反號相當於反向. 坐標幾何學中所據之慣例一如三角術中者然；吾人慣視自左而右或由下而上

---

* 笛卡兒(Descartes)乃此種坐標系之發明者，故以名之.

† 學者對此必當愼予注意，蓋以此種略號吾人常使用之.

所量之長爲正，自右而左或由上而下者爲負. 玆就吾人前述之二例而言，吾人假設 P 點之坐標乃係自 O 點起自左至右繼而上達於 P 點所量得者，又此恆爲標準情形. 是故吾人之慣例猶謂在 OY 右面諸點(如圖 2 中之 P 或 S 點)之橫標概視爲正，而視位於 OY 左面(如 Q 或 R 點)者爲負；又當諸點位於 OX 上部時(如 P 或 Q)則視其縱標爲正，若在 OX 以下(如 R 或 S)則視之爲負.

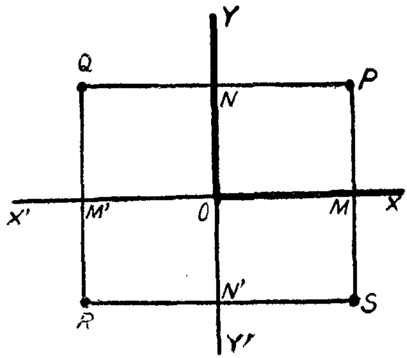


圖 2a

是故吾人可得下列一般的.

坐標系之定義.——若取[交成直角之]* 二定線爲軸，則任一點之坐標乃爲由通過該點引作與坐標軸相平行之二平行線所構成之[直角]平行四邊形[即矩形]二隣邊之長，代數符號 + 及 − 乃用以表示自原點至該點量度此等長度時所沿之方向.

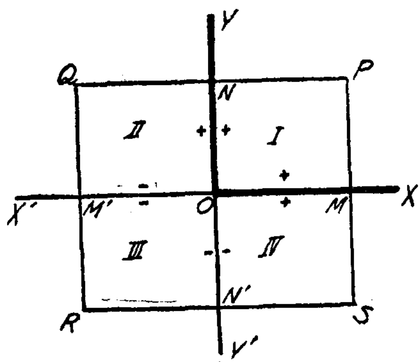


圖 2b

4. 由上述慣例所選得之下列結果甚便吾人記憶.

* 方括號中之字在函具"斜角"軸 (oblique axes) 情形之一般定義內概須略去；至該類情形，吾人於第一編中似尚無論述之必要.

顯然，當 $x=0$ 時該點位於 y 軸上，又當 $y=0$ 時該點位於 x 軸上.

例 題

1. 於圖 2 中，OM，OM' 各具 4 個長度單位，ON，ON' 各 3 單位. 矩形 $PQRS$ 乃由通過 M，M'，N，N' 四點分別引作二軸之平行線所構成者. 試求 P，Q，R，S 之坐標.

P 點之坐標爲 $(4,3)$. 因 Q 在 OY 之左，而在 OX 之上；故就代數學之立場觀之，$OM'=-4$，$M'Q=3$，又 Q 爲 $(-4,3)$ 點. 仿此，$M'R=-3$，又 R 爲 $(-4,-3)$ 點. 同樣，S 爲 $(4,-3)$ 點.

2. 求 M，M'，N，N' 四點之坐標.

顯然此等諸點各爲 $(4,0)$，$(-4,0)$，$(0,3)$，$(0,-3)$ [§ 4].

3. 表出四點 $(\pm 4, \pm 6)$ 及點 $(6,4)$.

用通常印有小方格的坐標紙，取其中縱橫兩粗線之交點爲 O 點，此橫線爲 x 軸，此縱線爲 y 軸. 若用一粗線方格記一單位平方，則求點 $(4,6)$ 之位置只須從 O 點向右數 4 個粗線格，再折而垂直向上數 6 個粗線格卽得.

至點 $(6,4)$，可沿 x 軸自 O 向右取 6 單位，更垂直向上取 4 單位卽得.

$(-4,6)$，$(-4,-6)$，及 $(4,-6)$ 諸點究應記於何處，自不難準此一望而知.

4. 在坐標軸上量取 OA，OB，OC，OD 各等於單位長，又將此等線段作爲底邊，而於其上各作等邊三角形，其頂 P，Q，R，S 位如圖 3. 試求 P，Q，R，S 四點之坐標.

作 PM，QN，RM'，SN' 各 $\perp$ 各該三角形之底邊. 因 $POM=60°$，則

$$OM=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2} \quad 又 \quad MP=\frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad OA=\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

故 P 乃坐標爲 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 之點

又，$ON=\frac{1}{2}$，$QN=\frac{\sqrt{3}}{2}$，但因 Q 點在第二象限內其坐標應爲 $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$. 同樣，第三象限內 R 爲點 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$，又第四象限內 S 爲點 $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$.

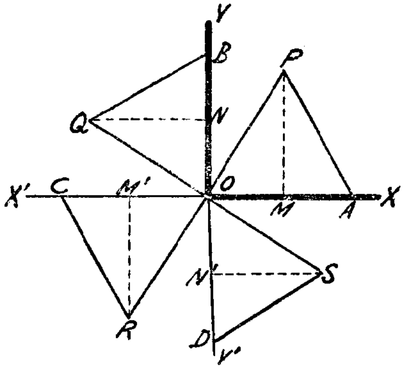


圖 3

5. 以所與二點之坐標表二點間之距離.

令所與點爲 $P(x_1, y_1)$ 及 $Q(x_2, y_2)$.

作圖.——作縱標 PM 與 $QN \perp OX$, 又過 Q 點作 $QR \parallel OX$ 遇 PM (遇必要時可延長之) 於 R.

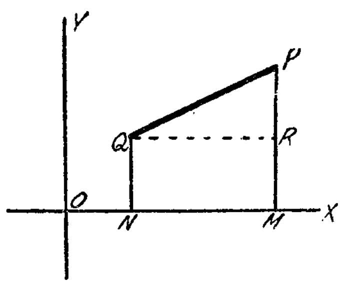


圖 4

則 $$OM = x_1,\quad MP = y_1,\quad ON = x_2,\quad NQ = y_2.$$

並 $$RP = MP - MR = MP - NQ = y_1 - y_2,$$

又 $$QR = NM = OM - ON = x_1 - x_2.$$

但因 QRP 爲直角，故 QP 上之正方形等於 QR 與 RP 上正方形之和［商高定理］，

即 $$QP^2=QR^2+RP^2;$$

故 $$QP^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots[1]$$

又 $$QP=\surd\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\},$$

此式卽用以決定二點間距離.

系.——若 $x_2=0$, $y_2=0$, Q 乃原點，是故

$$OP^2=x_1{}^2+y_1{}^2,$$

該式顯可單獨存在，蓋以彼時

$$OP^2=OM^2+MP^2=x_1{}^2+y_1{}^2.$$

6. 推論.——於上述圖形及證明中，吾人曾假設 P, Q 二點俱位於第一象限內，但就代數學之立場觀之，公式［1］恆爲眞確.（譯者按：卽不論該二點位於何一象限內，公式［1］恆可確立.）

若吾人謹記諸直線之代數符號端賴字母之次序* 爲定，則就任一情形而言，同上證明必可確立. 雖然當 P 點位於第一象限內而 Q 點在第三象限內時吾人固當予以分別研討；其餘諸情形吾人亦可仿此論之.

就此種情形而言，x_2, y_2 皆爲負. 假設 $x_2=-a$, 及 $y_2=-b$. 據 § 5 中所示之方向作成右圖：

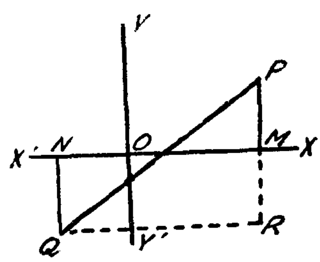


圖 5

* 卽如直線 $RQ=-QR$.

則　　$NO=a$　又　$QN=b$,

且　　$RP=RM+MP=QN+MP=b+y_1=y_1-y_2$　(因　$b=-y_2$),

又　　$QR=NM=NO+OM=a+x_1=x_1-x_2$　(因　$a=-x_2$);

故，如前，

$$QP=\sqrt{(QR^2+RP^2)}=\sqrt{\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\}}.$$

就代數學觀點而言，在每一情形中，$RP=y_1-y_2$　又　$QR=x_1-x_2$，此乃顯而易見者．該項證明之普遍性端賴此一事實．

例　題

1．自 O 達 A 村，吾必先搭乘列車至 O 正東 6 哩之車站，然後再向正北步行 2 哩．自 O 達 B 吾必搭列車向正東駛進 21 哩，再向正南步行 6 哩．問 A 與 B 相距若干遠？

令 OX 表鐵路線；M, N 表各通 A, B 之二車站．作 $BR \parallel XO$ 過 AM 之延長線於 R 點．

若吾人應用坐標幾何學，取哩為吾人之單位，則 A 之坐標為 $(6,2)$ B 之坐標為 $(21,-6)$.

故由公式可得

$$AB^2=(6-21)^2+(2-[-6])^2=15^2+8^2=289,$$

$$\therefore\quad AB=17,$$

該項結果吾人可從右圖驗算之．

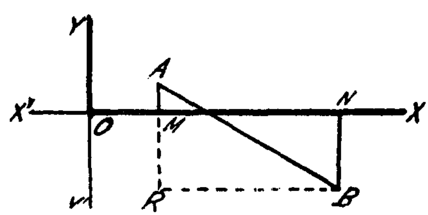


圖　6

2．試求點 (x, y) 位於圓心在原點半徑為 a 之圓上所必具之條件．

該條件顯為點 (x, y) 與原點 $(0, 0)$ 間之距離必須等於半徑 a；故，由公式，

$$(x-0)^2+(y-0)^2=a^2;\quad 或\quad x^2+y^2=a^2,$$

該結果顯可從研討圖中 x, y 及 a 之意義而得.

3. 試求點(x, y)位於圓心在點(d, e)半徑爲 a 之圓上所必具備之條件.

該條件顯爲(x, y)與(d, e) 二點間之距離必等於 a; 故, 由公式,

$$(x-d)^2+(y-e)^2=a^2.$$

7. 流動坐標 (current coördinates).——當一點並不固限於一個特定位置惟位於某一特定直線或曲線上時, 其坐標稱爲流動(current)坐標.

於上述後二例中(x, y)乃該圓上一點之流動坐標.

8. 已與二點之坐標, 試求截分連接該二點之直線成所與比之點.

令二所與點爲 $P(x_1, y_1)$ 與 $Q(x_2, y_2)$, 又令截分該線爲二部所成之已知比爲 $k : l$.

吾人當在 PQ 上求 R 點之坐標時使

$$PR : RQ = k : l.$$

令(x, y)爲此點, R*, 之坐標.

作圖.——作縱標 PK, QL, RM, 又過 R 點作 $SRT \parallel x$ 軸, 截 PK 與 QL, 必要時均得延長之, 各於 S 與 T 二點. 則

$$SR = KM = x-x_1, \qquad RT = ML = x_2-x,$$

$$PS = MR-KP = y-y_1, \qquad TQ = LQ-MR = y_2-y.$$

因 PS, TQ 互相平行, 故

$$SR : RT = PR : RQ. \qquad [\text{幾 } 13]$$

故, 由假設,

*注意(x, y)乃未知點之坐標, 而(x_1, y_1)及(x_2, y_2)則係已知點之坐標.

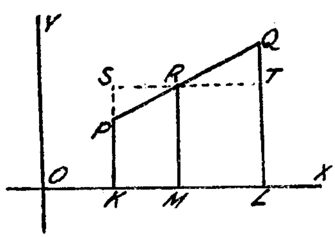


圖 7

$$(x-x_1):(x_2-x)=k:l; \qquad \text{(i)}$$

故
$$l(x-x_1)=k(x_2-x),$$

或
$$(k+l)x=kx_2+lx_1,$$

因此
$$x=\frac{kx_2+lx_1}{k+l}. \qquad [2]$$

同樣，
$$PS:TQ=PR:RQ;$$

故
$$(y-y_1):(y_2-y)=k:l, \qquad \text{(ii)}$$

由之可得
$$y=\frac{ky_2+ly_1}{k+l}. \qquad [2]$$

公式[2]可用以決定所求點之坐標.

系.——若 R 爲 PQ 之中點，則($\because$ $k=l$),

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2),\ y=\frac{1}{2}(y_1+y_2),$$

上得結果乃吾人所常用者.

[在簡單情形中應儘量據圖核驗，如此對初學者鞏固旣得知識大有幫助.]

9. 求外分 PQ 成所與比之點；卽求在 PQ 延長線上之 R 點使

$$PR:QR=k:l.$$

作 $STR \parallel OX$ 而截 P, Q 二點之縱軸之延長線於 S, T 二點, 如前, 吾人可得

$$SR : TR = PR : QR;$$

因此,就此種情形而言,

$$(x-x_1) : (x-x_2) = k : l,$$

故得
$$x = \frac{kx_2 - lx_1}{k-l},$$

同樣
$$y = \frac{ky_2 - ly_1}{k-l}.$$

註.——此等結果之所異於公式[2]者僅祇以 $-l$ 代 l 而已. 實際上, 就現況言, 因

$$PR : QR = k : l, \quad 又 \quad QR = -RQ, \qquad [三角術 1]$$

故
$$PR : RQ = k : -l,$$

又一切情形幾與本節首段全同所差異者僅爲以 $-l$ 替代 l 而已.

證明中唯一之差異在於以 $TR = x - x_2$ 代替 §8 中的 $RT = x_2 - x$.

例題

試證過三角形之頂而平分各對邊之中線必通過截分每一中線成 2:1 之比之公點.

令 $A\ (x_1, y_1)$, $B\ (x_2, y_2)$, $C\ (x_3, y_3)$ 爲三頂. 令 $D(x', y')$ 爲 BC 之中點, $G(x, y)$ 爲 AD 上如是之一點使

$$AG : GD = 2 : 1.$$

則由上述 §8, 吾人乃得, D 點爲

$$x' = \frac{1}{2}(x_2 + x_3), \quad y' = \frac{1}{2}(y_2 + y_3);$$

又 G 點爲
$$x = \frac{2x' + x_1}{2+1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

$$y = \frac{2y' + y_1}{2+1} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

同樣，吾人可得 CA 之中點 E 之坐標爲

$$\frac{1}{2}(x_3+x_1) \text{ 與 } \frac{1}{2}(y_3+y_1),$$

又截分 BE 使 $BG':G'E=2:1$ 之 G' 點之坐標爲

$$\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3) \text{ 與 } \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3),$$

該點之坐標與 G 點者毫無二致．取 F 與 G'' 各爲 AB 之中點與截分 CF 成 $2:1$ 之比之點，吾人求得 G'' 之坐標與 G 者相同，是故可知該三平分線必皆通過同一公點．

G 點，由於其在力學上之性質，常稱爲 $\triangle ABC$ 之"重心"．

[雖 x 與 y 值之對稱已足證明該點在三種情形內完全相同，但逐步演出可借此練習計算．]

習　題——§§ 1—4.

1. 用吋爲長度之單位，描出下列諸點之位置：——

i. $(0,0)$;　ii. $(0,1)$;　iii. $(0,-1)$;　iv. $(1,0)$;

v. $(-1,0)$;　vi. $(1,1)$;　vii. $\left(1,\frac{1}{2}\right)$;　viii. $\left(\frac{1}{2},1\right)$;

ix. $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$;　x. $\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{4}\right)$;　xi. $\left(-1,\frac{5}{4}\right)$;　xii. $\left(-1,-1\right)$.

[吾深願介紹學者於繪圖時多多置用方格紙．]

2. 於第一象限內任取一點 P，若 P 點之坐標爲 (a,b) 試用圖作出下列諸點之位置：

$(a,-b)$,　$(a,0)$,　$(-a,-b)$,　$(0,b)$,　$(-a,b)$,　$(-a,0)$.

3. 又表點 (b,a) 之位置，並因而表出坐標系爲 $(\pm b,\pm a)$ 之四點，小心分辨各點之符號．

4. 若以 OA, OB, OC, OD 爲底邊，於其上作成四個等邊三角形（如 §4 中例 4 然）各具頂點 P, Q, R, S 分別位於諸坐標軸之對邊上，一如圖 3 所表者，試求 P, Q, R, S 四點之坐標．

5. 設 P 爲點(a, b)，Q 爲點$(-a, -b)$，又 R 爲點 (b, a)，O 係原點求證 (i). O 乃 PQ 之中點；(ii) $OP=OR$ 又 $\angle XOP=\angle ROY$.

習 題——§§ 5, 6.

6. 某船位於燈塔以北 8 哩以東 6 哩，另一船位於同一燈塔以北 8 哩以西 6 哩. 求該二船間之距離以及前者遠隔該燈塔之距離.

[用幾何學方法圖解此題與次題，並用坐標系驗之，如 § 6 例 1 然.]

7. 如欲達 A，吾必須沿直線運河之邊上行 3 哩又橫過一橋向吾右方步行 4 哩. 如欲達 B，吾須下行該運河 9 哩而後向吾右方步行 5 哩. 試求 A 與 B 間，A 與出發點間，以及 B 與橋間之距離.

8. 求點$(10, -18)$遠隔$(3, 6)$與$(-5, 2)$二點之距離. 證明該二距離相等.

9. 試證 $(71, 71)$，$(27, 9)$，$(0, 0)$，$(-13, -1)$，與 $(-64, 16)$ 諸點悉皆位於圓心爲$(-13, 84)$與半徑爲 85 之圓上.

10. 求下列各對點間之距離使其表爲最簡不盡根式，並計算之至二位小數：——

i. $(7, 6)$ 及 $(3, -2)$； ii. $(0, -1)$ 及 $(-2, 1)$； iii. $(4, 3)$ 及 $(-2, 1)$；
iv. $(3, -4)$ 及 $(-1, 0)$； v. $(1, 1)$ 及 $(-1, -2)$； vi. $(1, 0)$ 及 $(-3, 6)$.

習 題——§§ 8, 9.

11. 毋假助於公式，單憑作圖逕求聯結 $(1, 3)$ 與 $(-3, -1)$二點所成直線之中點之坐標.

12. P, Q 各爲點$(1, -2)$ 及 $(3, 4)$. 求 PQ 中點之坐標，以及在 PQ 延長線上恰使 $AP=PQ=QB$ 之二點 A, B 之坐標.

13. 設 A, B, C 乃(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)三點；F 爲 AB 之中點；又 G 爲在 FC 上使 $CG : GF=2:1$ 之點. 求 G 點之坐標.

14. 若 D 爲第四點(x_4, y_4)，求截分 DG 使 $DH : HG=3:1$ 之 H 點之坐標.

15. 試證聯結 AB, CD 之中點所成之直線之中點爲同一點 H.

16. 聯結 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 所成之直線被分成 n 等份: 試求遠隔點 (x_1, y_1) 之第 r 截點之坐標.

試　卷　一

1. 試釋笛卡兒坐標系.

2. 試求坐標爲 $(2, 1)$, $(-2, 1)$, $(-2, -1)$, 及 $(2, -1)$ 諸點.「譯者按: 此題意欲學者圖示各點之位置而已.」

3. 圖示 $(2, 3)$, $(-3, 2)$, $(-3, -2)$ 及 $(2, -3)$ 諸點之位置.

4. 求二所與點間之距離以其坐標表示.

5. 已與二點 $P(-2, 1)$ 與 $Q(-6, -2)$; 求 PQ 距離.

6. 求截分聯結二所與點之直線成所與比之點之坐標.

7. P 之坐標爲 $(1, 2)$, 又 Q 點爲 $(2, 3)$; 求使 $PR : RQ = 4 : 5$ 之 R 點之坐標.

8. 已與 P, Q 二點之坐標; 求外分 PQ 成所與比之點之坐標.

9. 三等分聯結 $(2, 3)$, $(4, -5)$ 二點所成之直線; 求距前一點最近之三等分點之坐標.

10. 求點 $(1, 2)$ 遠隔聯結 $(6, 8)$ 與 $(2, 4)$ 兩點所成直線之中點之距離.

第二章　三角形及四邊形之面積

10. 梯形*之面積爲其二平行邊之和之半乘以二者間之垂距.

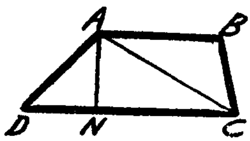


圖 8

蓋以若 AN 爲梯形 $ABCD$ 二平行邊間之垂距, 則

該梯形之面積 $=\triangle ADC+\triangle CBA$

$$=\frac{1}{2}DC\cdot AN+\frac{1}{2}AB\cdot AN=\frac{1}{2}(DC+AB)AN.$$ [幾何學與三角術 12]

三角形面積恆可用以所與直線爲同位於一邊上之公共界線之三個梯形面積表之.

---

*譯者按: 此間在原著中本爲 "trapezium" 一字, 但經譯者發見該字之定義與命辭之函義不相吻合後乃毅然改之. 譯者之根據爲 "因 'trapezium' 之漢義爲不規則四邊形, 卽各邊不相平行之四邊形之謂而命辭之內容恰與此義相矛盾." 據此吾人可以顯見原著者之眞意實係指 "梯形" 而言 ("梯形" 可釋爲具有一對平行邊之四邊形). 至所以誤用 "trapezium" (不規則四邊形) 以代 "trapezoid" (梯形) 者, 譯者以爲或係彼一時之疏忽.

令 ABC 爲三角形，又 OX 爲所與直線．沿任何方向自 A, B, 與 C 作三平行線分截 OX 於 K, L, 與 M 三點．則構成三個梯形 $BLKA$, $BLMC$, 與 $CMKA$, 或可簡稱爲梯形 BK, BM 與 CK; 又由圖 9 顯然可見．

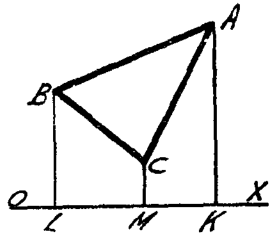


圖 9

$$\triangle ABC = \text{梯形 } BK - BM - CK,$$

又若吾人得知 AK, BL, 與 CM 之長及此等直線間之垂距，則上述諸梯形自易量知．

11. 以各頂之坐標表三角形之面積．

令 A, B, C 三項之坐標各爲 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).

作縱標 AK, BL, CM.

則
$$\triangle ABC = \text{梯形 } BK - BM - CK.$$

$$\text{梯形 } BK = \frac{1}{2}(KA + LB) \cdot LK,$$

$$\text{梯形 } BM = \frac{1}{2}(LB + MC) \cdot LM,$$

$$\text{梯形 } CK = \frac{1}{2}(MC + KA) \cdot MK;$$

故代入上式後吾人乃得

$$\triangle = \frac{1}{2}\{(KA + LB) \cdot LK - (LB + MC) \cdot LM - (MC + KA) \cdot MK\}.$$

今
$$KA = y_1,\ LB = y_2,\ MC = y_3,$$

$$LK = x_1 - x_2,\ LM = x_3 - x_2,\ MK = x_1 - x_3;$$

$$\therefore \quad \triangle = \frac{1}{2}\{(y_1 + y_2)(x_1 - x_2) - (y_2 + y_3)(x_3 - x_2) - (y_3 + y_1)(x_1 - x_3)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(y_1+y_2)(x_1-x_2)+(y_2+y_3)(x_2-x_3)+(y_3+y_1)(x_3-x_1)\},$$

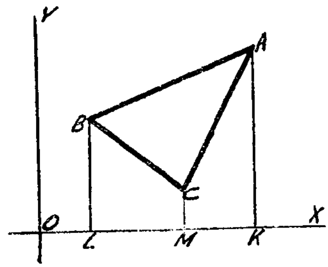


圖 10

該式經乘出後乃得

$$\triangle=\frac{1}{2}\{x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-y_1x_2-y_2x_3-y_3x_1\}.\ \cdots\cdots\cdots\cdots[3]$$

[注意此結果中 x 與 y 之對稱.]

12. 記寫三角形面積法.* —— 依次記寫三項之橫標，惟需將首選橫標重覆一次；更記寫對應縱標於其下，作對角線，又將 $\frac{1}{2}$ 一因子冠記於前，如是則呈次形：

$$\frac{1}{2}\left|\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ & \times\ \times\ \times & & \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1\end{array}\right|.$$

令自左下降至右諸對角線聯繫而成之三積爲正，

卽 $$x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1;$$

令由另三對角線聯繫而成之餘三乘積爲負，

卽 $$-(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_1);$$

以因子 $\frac{1}{2}$ 乘全式：結果卽得該三角形之面積（此種結果顯必與 [3]全同).

系.——若頂 C 位在原點，則 $x_3=0$, $y_3=0$; 故所求三角形之面積爲 $\frac{1}{2}\{x_1y_2-y_1x_2\}$.

註.——若吾人依順時計向繞記三角形三項，則該式(卽所得之面積) 爲負，又吾人必當變號以求該面積之量度.

* 此法僅祇便於記憶而已，而並非方程式[3]之證明.

13. 推論.——(i) 求 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 三點位於一直線上之條件.

此題爲若由該三點所構成之三角形之面積爲零之情形. 故所求之條件爲:

$$x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - y_1 x_2 - y_2 x_3 - y_3 x_1 = 0.$$

(ii) 三角形面積之其他表法.——由 [3] 吾人又可推得下列二式:

$$\triangle = \frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\},$$

$$\triangle = \frac{1}{2}\{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)\}.$$

第二公式可用幾何學方法證明之如次:——

作 $ARS \parallel OX$.

則 $\triangle ABC = \triangle ASC - \triangle ARB -$ 梯形 $BRSC$.

$$= \frac{1}{2}SC\cdot AS - \frac{1}{2}RB\cdot AR - \frac{1}{2}(SC+RB)\cdot RS$$

$$= \frac{1}{2}SC\cdot(AS-RS) - \frac{1}{2}RB\cdot(AR+RS)$$

$$= \frac{1}{2}AR\cdot SC - \frac{1}{2}AS\cdot RB$$

$$= \frac{1}{2}\{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\}.$$

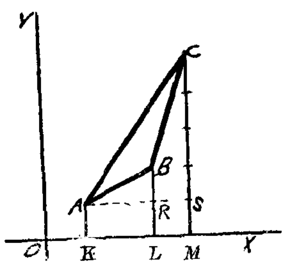


圖 11

例 題

令 $A(1, 1)$, $B(3, 2)$, $C(4, 5)$ 爲所與三角形之三頂 (圖 11). 用首述 (譯者按: 卽 § 11 中所述) 原理求 $\triangle ABC$ 之面積.

作縱標如圖所示.

則 $\triangle ABC =$ 梯形 $AKMC - KB - LC$.

但因　梯形 $AKMC=\frac{1}{2}KM\ (KA+MC)=\frac{1}{2}(4-1)(1+5)=9,$

　　梯形 $AKLB=\frac{1}{2}KL\ \ (KA+LB)=\frac{1}{2}(3-1)(1+2)=3,$

　　梯形 $BLMC=\frac{1}{2}LM\ \ (LB+MC)=\frac{1}{2}(4-3)(2+5)=3\frac{1}{2};$

故
$$\triangle ABC=9-3-3\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}.$$

如能牢記 §12 中所述之法則吾人亦能求得該三角形之面積.

$$\frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccccccc}1 & & 3 & & 4 & & 1\\ & \times & & \times & & \times & \\ 1 & & 2 & & 5 & & 1\end{array}\right|,$$

上式能使吾人寫下該面積

$$\triangle=\frac{1}{2}\left\{1\cdot2+3\cdot5+4\cdot1-1\cdot3-2\cdot4-5\cdot1\right\}=\frac{1}{2}\left\{2+15+4-3-8-5\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{21-16\right\}=2\frac{1}{2},\text{ 如前.}$$

14. 求四邊形之面積.

令四邊形各頂依次*為 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$, $D(x_4,\ y_4)$. 則

$$\text{面積 } ABCD=\triangle ABC+\triangle CDA,$$

該面積, 由 [3], 或單獨研討†之, 如 §11 中然,

$$=\frac{1}{2}(x_1 y_2+x_2 y_3+x_3 y_1-y_1 x_2-y_2 x_3-y_3 x_1)$$

$$+\frac{1}{2}(x_3 y_4+x_4 y_1+x_1 y_3-y_3 x_4-y_4 x_1-y_1 x_3)$$

$$=\frac{1}{2}(x_1 y_2+x_2 y_3+x_3 y_4+x_4 y_1-y_1 x_2-y_2 x_3-y_3 x_4-y_4 x_1). \quad\cdots\cdots[4]$$

---

* 應用此等公式時, 吾人必需注意 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$, $(x_4,\ y_4)$, 諸坐標, 依據出現於該四邊形上之先後次序(譯者按:即謂所註英文字母之次序如 A,B,C,D 或 P,Q,R,S 等) 之四頂. 並需作圖以證之.

† 如欲作一完全課本之研究, 則當將中間步驟全行插入

表四邊形面積之 [4] 式亦可應用 §12 之法則書出之，記下坐標系如下：——

$$\frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & x_1 \\ & \times & & \times & & \times & & \times & \\ y_1 & & y_2 & & y_3 & & y_4 & & y_1 \end{array}\right|,$$

並將聯以對角線之諸積全部展開同時並記以相當符號.

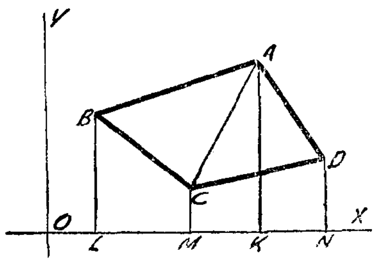


圖 12

該四邊形面積之表式亦可寫成下形：

$$A=\frac{1}{2}\{(x_1-x_3)\ (y_2-y_4)-(y_1-y_3)\ (x_2-x_4)\}.$$

習　題——§§ 10—12.

1. 某鎭呈三角形 ABC 狀. A 角在鎭立教堂正東 1 哩，B 在該教堂正北 1 哩，而欲達 C，則須先向正西步行 1 哩，然後折下小道，向正南行 2 哩. 問該鎭佔地若干平方哩？

試求由下列諸點所構成之三角形之面積：——

2. $(1, 3)$, $(4, 1)$, $(6, 5)$.
3. $(3, 0)$, $(-2, 1)$, $(-1, -2)$.
4. $(0, 0)$, (a, b), $(-b, a)$.
5. $(0, b)$, $(a, 0)$, (x, y).
6. (p, m), $(0, l)$, $(p+q, n)$.
7. $(0, 0)$, (x_1, y_1), (x_2, y_2)

習 題——§13.

求證下列諸點位於一直線上:——

8. (2, 3), (4, 5), (6, 7).

9. (1, 8), (3, 0), (4, −4).

10. 若點 (x,y) 暨 (3,2) 與 (1,3) 二點位於同一直線上，求證 $x+2y-7=0$

習 題——§14.

求具有如次各項之四邊形之面積——

11. (0, 0), (2, 1), (1, 2), (3, 3).

12. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

13. 具有 n 邊之多邊形之頂依次爲 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3),………… (x_n, y_n). 試證該多邊形之面積爲

$$\frac{1}{2}(x_1 y_2+x_2 y_3+x_3 y_4+\cdots\cdots\cdots+x_{n-1} y_n+x_n y_1)$$

$$-\frac{1}{2}(y_1 x_2+y_2 x_3+y_3 x_4+\cdots\cdots\cdots+y_{n-1} x_n+y_n x_1).$$

試 卷 二

1. 論述求三角形之面積用其頂點坐標表達的法則.

2. 求角點之坐標爲 (2, 1), (3, −2), (4, −1) 之三角形之面積.

3. 求三頂之坐標爲 (3, 2), (5, 6), (1, 4) 之三角形之面積.

4. 求三頂爲點 (7, 6), (4, 3) 與原點之三角形之面積.

5. 求頂爲 (1, 4), (4, 1), (8, 8) 三點之三角形之面積，並證明其爲一等腰三角形.

6. 求三所與點位於一直線上之條件.

7. 試證 (2, 3), (4, 1), (7, −2) 三點位於一直線上.

8. 當已與各頂之坐標時求四邊形之面積.

9. 求角點爲 $\left(-1,\frac{7}{2}\right)$, $\left(3,\ \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$, $\left(-3,\ \frac{1}{2}\right)$ 之四邊形之面積.

10. 試證 (1, 4), (−1, 10), (2, 1), (4, −5) 四點同位於一直線上.

第三章　論軌跡

15. 軌跡(Locus)乃依據某種定則而運動之點之途徑.

示例——(*a*)一點限定其遠隔某直線恆久保持一定距離而運動時所成之軌跡乃爲與該直線相平行之另二直線.

(*b*) 一點其遠隔兩直角軸之距離恆相等時運動所成之軌跡爲與二軸各交成45°角之二直線.

(*c*) 一點恆以其遠隔另一點之一定距離而運動時所成之軌跡爲圓.

吾人固已熟知如何用坐標系將點之幾何位置釋爲代數量度，但此在導論直線與曲線之坐標幾何中僅乃初步而已.

例如，容吾人任取一點使其橫標(卽在吾人之圖中其遠隔 OY 之距離)恆等於其縱標（卽在吾人之圖中其遠隔 OX 之距離）而運動. 吾人可以方程式 $x=y$, $x-y=0$, 或 $y-x=0$ 表 x 與 y* 間之關係；又因聯結凡橫標皆等於縱標之一串點所成之直線與每一軸交成 45° 角，故吾人敢斷言方程式 $y-x=0$ 之幾何表示乃爲此一直線，又反之，此直線乃以方程式 $y-x=0$ 表之.

除此引言而外吾人猶需了解下列定義:

線(直或曲)之方程式乃凡爲該線上各點之坐標所滿足之代數關係式.

反之，方程式之軌跡爲其上各點之坐標悉皆滿足該方程式之一線或諸線.

當一線具有某種幾何性質爲其上諸點所共備者時，該線僅可以一方程式表之.

---

* 此際 x 與 y 乃用作流動坐標，如 §7 中所述.

例如就圓而言，圓上諸點皆距一定點(圓心)等遠，又據此足使吾人以一方程式表任何圓．直線亦恆可如是表之，又尚有其他表以種種方程式之曲線，是誠不勝枚舉．但若任畫一屈折線段(呈鋸齒形)，則欲求一方程式爲其上諸點之坐標所滿足者，殊屬不可能事，蓋以該等諸點並無公共性質．

16．就另一方面言之，若吾人有一關於 x 與 y 之簡單方程式，則恆可求得其上各點之坐標悉皆滿足該方程式之某種直線或曲線．因類此方程式之本身殊不足以決定 x 與 y 二者之值；但若吾人予 x 以任何特定值，則該方程式僅函有一未知量，即 y，該量如將 x 之選定值代入該方程式中則 y 之值自極易求得．如是吾人乃得坐標滿足所與方程式之點．如爲 x 選定種種不同之值，並重複連續行之，則吾人自可任便求得一大串如是之點；又當吾人將此等點繪於紙上時，吾人必可察知凡此等點咸皆位於一條或數條直線或曲線上．

故吾人如欲追求一所與方程式之軌跡當可遵依下列定則：—— 予任一坐標以一串較低之值，如 $-1,0,1,2$ 等是，又將此等數字逐一代入所與方程式中藉以求出另一坐標之對應值．如是則吾人可得凡坐標悉皆滿足該所與方程式之點系．若表此等點於圖中，則依次聯結後吾人乃得一相當正確之軌跡*．

在幾何學上，若吾人有二線，非相平行於一平面內者，則吾人可知其必相交於一點．在代數學上，吾人已曾習知，凡函有 x 與 y 之兩個簡單方程式可予求解 x 與 y，此等值可使用坐標表點．據上所論，則莫善於以該二簡單方程式中 x 與 y 之公共值表該二線之交點，又該二線即係該二方程式之軌跡．欲求已與方程式之二線之交點，當以求解該聯立方程式†爲較便易．

因一般言之以自所與方程式求軌跡反爲容易，故吾人今先舉示數例有關 §§ 15 與 16 者如次：——

---

* 描繪軌跡，當以使用上劃有小方格之方格紙爲最便．

† 試就一二種簡單情形作圖以驗之．

例題

1. 試述簡單方程式 $y-x=2$ 之幾何意義.

令 $x=0$, 則該方程式乃成 $y=2$. 令 $x=1$, 則 $y=3$; 餘皆類此. 準此法而行, 予 x 以下列諸值:

$$-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

乃得 y 之對應值為

$$-2,\ -1,\quad 0,\quad 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6;$$

是故該方程式乃為下列諸點之坐標所滿足:——

$$(-4,-2),(-3,-1),(-2,0),(-1,1),(0,2),(1,3),(2,4),(3,5),(4,6).$$

將此等點在圖中描出, 可見其皆位於同一直線上是故吾人可以斷言, 此直線必為該方程式之幾何表示.

若心中以為尚有可疑之處, 則吾人儘可繼續予 x 以介於上值中間諸值藉以求出更較密接之點系. 即如, 令 x 依次等於 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 吾人求得 $\left(\frac{1}{4},\ 2\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{4},\ 2\frac{3}{4}\right)$ 諸點, 凡此諸點悉皆函於該方程式之軌跡以內, 且皆位於 $(0,2)$, $(1,3)$ 之間. 據此可見凡此諸點全皆位於同一直線上.

2. 描繪方程式 $x+y=4$ 之軌跡.

予 x 以依次相隣整數值, 例如, 包括自 -1 至 5 者, 吾人求知下列諸點悉皆位於該軌跡上:——

$$(-1,5),(0,4),(1,3),(2,2),(3,1),(4,0),(5,-1).$$

此等點悉皆位於一直線上, 又故吾人可以推斷此線即該方程式之軌跡, 截二軸於 $(4,0)$ 與 $(0,4)$ 二點.

3. 描繪 $2y-3x=0$ 之軌跡.

予 x 以與前題相同之一串值, 吾人求得下列諸點:

$$\left(-1,\ -1\frac{1}{2}\right),\ (0,0),\left(1,\ 1\frac{1}{2}\right),\ (2,3),\left(3,\ 4\frac{1}{2}\right),\ (4,6)\ 等,$$

繪出此等點，並聯結之，吾人乃得一通過原點之直線，即係所求之軌跡.

4. 描繪 $x=4$ 之軌跡.

此間僅能予 x 以一特定值 4，但吾人能任便予 y 以任何值，又因此而得決定若干點如 $(4,-1)$，$(4,0)$，$(4,1)$，$(4,2)$，………，凡此諸點悉皆位於與 y 軸相平行之直線上，又其遠隔該軸之右方爲 4 個單位. 此直線即所求之軌跡.

5. 試釋下列聯立方程式之幾何意義：

$$y-x=2,\quad y+x=4.$$

用常法解之，吾人得 $x=1$，$y=3$. 故該二方程式合表 $(1,3)$ 點.

6. 描繪 $x^2+y^2=25$ 之軌跡.

因 y^2 不能爲負，故 x^2 不能大於 25，又故其平方根，x，必位於 $+5$ 與 -5 之間.

因此該軌跡必全函於 $x=5$ 與 $x=-5$ 極限以內，又此外必無他點位於其上.

且每一 x 值可予兩個 y 值；如是，若 $x=3$，則吾人得 $y^2=16$；故 或 $y=4$ 或 $y=-4$，又 $(3,4)$ 與 $(3,-4)$ 兩點皆位於該軌跡上.

予 x 以一串值如 $-5,-4,-3,0,3,4,5$，吾人乃得 $(-5,0)$，$(-4,\pm3)$，$(-3,\pm4)$，$(0,\pm5)$，$(3,\pm4)$，$(4,\pm3)$，$(5,0)$ 諸點. 凡此足以顯示該軌跡之形乃係一圓.

此種結果從幾何學之立場觀之必更顯然. 蓋以（§5，系）方程式 $x^2+y^2=25$ 乃謂 (x,y) 點遠隔原點之距離之平方爲 25. 故該軌跡上之各點遠隔原點之距離同爲 5 個單位，又故該軌跡乃爲圓心爲原點半徑爲 5 之圓.

7. 求方程式 $(x-1)^2+y^2=0$ 之軌跡.

因 $(x-1)^2$ 與 y^2 俱不能爲負，故二者必爲 0；又該方程式僅爲若 $x-1=0$，$y=0$，即 $(1,0)$ 點所滿足.

8. 試釋下列聯立方程式之幾何意義：

$$4x-3y=0 \text{ 及 } x^2+y^2=25.$$

由前一方程式吾人可得 $x=\frac{3}{4}y$. 將此 x 值代入後者中，吾人得 $\frac{9}{16}y^2+y^2=25$, 故 $\frac{25}{16}y^2=25$, 即 $y^2=16$ 或 $y=\pm4$.

取 $y=+4$ 一值，吾人乃知對應 x 值為 $+3$, 又相當於 $y=-4$ 之 x 值為 -3. 故該二方程式乃表 $(3,4)$, 與 $(-3,-4)$ 二點.

9. 描繪方程式 $y^2=x$ 之軌跡.

依次予 y 以如下諸值:

$$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots\cdots \text{等};$$

則從所與方程式吾人求得 x 之對應值為

$$9,\quad 4,\quad 1,\ 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16, \cdots\cdots \text{等},$$

又凡此所得諸點足以決定表 $y^2=x$ 之曲線，且全皆位於 y 軸之右方.

[此種曲線稱為"拋物線" parabola.]

雖然於此等例題中吾人曾藉求出軌跡上之點系以描出該軌跡，惟猶需注意此點系並不表該軌跡，但表通過諸點之線而已. x 之任何中間值可以決定若干 y 值，又此語僅於方程式表綿續線而不表一有限點系時方能適用.

欲求一線之方程式，必須從其所與之幾何性質推得有關線上各點之兩坐標 (x, y) 之某種代數關係方可.

於後繼數章中吾人將敍述如何求得任何直線或圓方程式之方法. 雖然，今時吾人最好先從研究下列諸例題入手以作將來闡釋該主題之先導.

例題

10. 求平行於 x 軸並在其上方 4 單位距離之直線方程式.

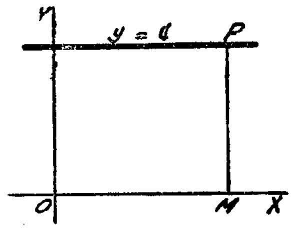


圖 13

該直線上任一點遠隔 OX 之垂距等於 4. 故若 (x, y) 爲如是一點之坐標系，則吾人得 $y=4$，又此卽所求之方程式矣。

11. 求平分 XOY 角之直線方程式。

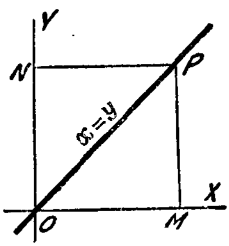


圖 14

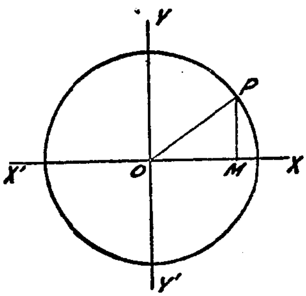


圖 15

令 $P(x, y)$ 爲該直線上之任一點，又作 PM, $PN \perp$ 二軸.

應用歐幾 I. 26 於 $\triangle$ POM, PON，吾人乃知 $PN=PM$，又故 $x=y$，此卽所求之方程式.

12. 求圓心爲原點及半徑具有 3 個單位長之圓之方程式.

若吾人用一副圓規作圓，足尖必須固定於 O 點，又必配置筆尖 P 使其以遠距 O 點之定距離爲 3 個單位長而轉動. 是故不論 P 點在圓上之位置爲何，P 點遠隔原點之距離勢必爲 3. 令 (x, y) 爲 P 之坐標. 則，應用歐幾 I. 47 [三角術 11]，吾人乃得

$$9=OP^2=OM^2+MP^2=x^2+y^2.$$

故所求該圓之方程式爲 $x^2+y^2=9$.

13. 求一點如是運動，使其遠去原點之距離等於其遠去 x 軸之距離之兩倍，時所生成之軌跡.

令 (x, y) 爲該軌跡上之一點. 其遠隔原點之距離之平方爲

$$x^2+y^2,$$

又其遠隔 x 軸之距離爲 y. 是故吾人當得

$$x^2+y^2=2y^2,$$

即
$$x^2=y^2;$$

從之可得
$$x=y, \text{ 或 } x=-y.$$

用常法描繪，或據本例第 11 題吾人乃知方程式 $x=y$ 表平分 XOY 角之直線，同樣方程式 $x=-y$ 乃表外角 YOX' 及 XOY' 之平分線.

故所求軌跡乃由平分二軸間之夾角之二直線所構成，該二直線乃以簡單方程式 $x^2=y^2$ 表之.*

14. 求一點 P 如是而運動，使其遠隔二所與定點之兩個距離之平方差恆定，時所成之軌跡.

令 A,B 爲所與二定點，又令彼此間相隔之距離爲 $2a$. 令 AB 之中點 O 爲原點，及 OA 爲 x 軸. 因 $OA=OB=a$，故 A 點之坐標系爲 $(a, 0)$，又 B 點者爲 $(-a, 0)$. 令 P 爲該軌跡上之任一點.

由[1]，
$$AP^2=(x-a)^2+y^2,$$

* 即此可見一簡單代數方程式有時却可表兩條(或更多)分離直線.

$$BP^2=\{x-(-a)\}^2+y^2=(x+a)^2+y^2.$$

若該恆定平方差爲 k^2，則條件 $BP^2-AP^2=k^2$

乃成 $$(x+a)^2+y^2-(x-a)^2-y^2=k^2;$$

由是 $$4ax=k^2,\text{ 或 } x=k^2/4a.$$

故該軌跡上各點之橫標乃等於 $k^2/4a$，且係恆定．從此吾人不難察知該軌跡乃爲平行於 y 軸且位於其右 $k^2/4a$ 遠處之直線．

習　題——§ 15.

描繪下列各方程式之軌跡：——

1. $x+y=0.$　2. $x=-6.$　3. $y=-1.$　4. $2x-y=0.$

5. $2x-y=4.$　6. $x^2+y^2=16.$　7. $y^2=4x^2.$　8. $y^2=4.$

9. $x^2=y.$　10. $xy=0.$　11. $3x+2y=6.$　12. $x^2=xy.$

習　題——§ 16.

13. 求一點，其去 x 軸之距離恆三倍於其去 y 軸之距離，運動時所成之軌跡．

14. 求一點，其遠原點與遠 (2,0) 點之距離之平方恆相等，運動時所成之軌跡．

15. 求等距 (1,1) 與 (−1,−1) 二點之點之軌跡．

16. 已與某點遠隔二軸之距離之平方和等於 2，試求該點之軌跡．

17. 求某點其遠隔點 (0,1) 之距離之平方等於 1 時所生成之軌跡．

18. 求一點其去點 (4,0) 之距離之平方 4 倍於其去點 (1,0) 之距離之平方而運動時所生成之軌跡．

試　卷　三

1. 試釋線之方程式及方程式之軌跡之意義．

2. 描繪方程式 $3x+y=4$ 之軌跡．

3. 描繪方程式 $4x^2=9y^2$ 之軌跡．

4. 描繪方程式 $x^2+y^2=36$ 之軌跡．

5. 求一點其去 y 軸之距離恆久一定且等於 6 而運動時所成之軌跡.

6. 求一點其去 x 軸之距離恆五倍於其去 y 軸之離離時之軌跡.

7. 求某動點其每一縱標恆較對應橫標大過所與距離時之軌跡之方程式.

8. 求等距 (4,3) 與 (3,4) 二點之點之軌跡.

9. 求如是而運動之 P 點, 其去 $(4,0)$, $(-4,0)$ 二點之距離之平方差爲 24 時所成之軌跡.

10. 求遠隔原點與點 (4,3) 間距離之平方相等之動點的軌跡.

第四章　極坐標系

17. 極坐標系——除已曾論述之笛卡兒坐標系外，今時尚有另一方法：應用該法可使平面中某點之位置能藉兩種量度逕行決定之，就此種情形而言，其一爲長之量度，另一爲角之量度.

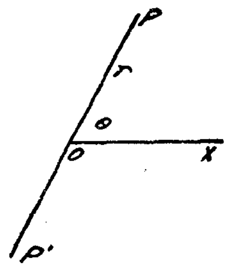


圖 16

令 O 爲定點，

OX 爲通過 O 點之固定直線.

若已與——

(i)　距離 OP,

(ii)　OP 與 OX 所成之角；

則任何他點 P 之位置當可立知.

上二所與件稱爲 P 點之極坐標系 (polar coordinates)：前者曰幅距 (radius vector，舊稱動徑)；後者曰動角 (vectorial angle). 當其值爲未知時通常各以字母 r, θ 表之; P 乃稱爲點 (r, θ).

O 點稱爲極點 (pole), OX 直線稱爲極軸 (initial line).

動角可如[三角術 2] 中所述者量之. 動角卽旋轉線自 OX 轉動至 OP 時所移經之角, 若該線以鐘針之反對方向 (譯者按, 簡言之, 卽逆時計向, counter-clock-wise direction) 而旋轉則所成之動角爲正.

動角可以度或弧度示之, 惟決不可二者同時兼用. 例如 $2\pi+30°$ 者, 則大謬不可用.

若 P 點位於圍界 θ 角之直線上, 則該輻距 r 爲正. 負輻距之意義乃謂圍界 θ 角之直線過 O 點向後延長, 又該點乃位於 O 點之他邊而書成 P', 於圖 16 中, 該處 θ 爲 XOP 角.

18. 同一點可用極坐標系以種種不同之方式表之.

若使旋轉線轉動所移經之角增減若干週轉, 卽增減四直角之若干倍, 則最後之位置並無變化. 如是, 若 P 爲 (r, θ) 點, 則圍界 θ 角之直線 OP 亦卽公式 $\theta\pm 2n\pi$ 所概括之一切角 (以弧度示之) 任何一角之圍界線 (該處 n 爲任何整數), 又故同一點 P 當可以 $(r, \theta-2\pi)$, (r, θ), $(r, \theta+2\pi)$, $(r, \theta+4\pi)$ 等極坐標之任一形式表之, 或通以 $(r, \theta\pm 2n\pi)$ 表之.

此外, 若自 OP 起沿任一向轉動該旋轉線使之通過二直角, 則其當來至 OP', 此線與 OP 同位一直線上轉反向而已. 是故欲在 OP 上自 O 點量出 r 單位長猶如沿過 O 點向後延長之 OP' 直線之方向上量出 r 單位長. 卽此可見同一點 P 亦可用極坐標系 $(-r, \theta+\pi)$, 或 $(-r, \theta-\pi)$ 表之; 又綜合此前後二結語, 一

般言之，吾人今知 P 點之極坐標可書呈公式 $[-r, \theta\pm(2n+1)\pi]$ 所函之任一形式.

就所與點而言吾人恆取 r 爲正與 θ 爲正且小於 2π 此常爲最便捷之良法.

例 題

1. 設 O 點乃係洋中之一島，又向正東作 OX. 若有甲，乙，丙三船，甲在該島東北 4 哩，乙在其西北 3 哩，丙在其正南 7 哩；試求該三船之極坐標.

以哩爲長度單位，又度爲角之單位，顯而易見該所求之極坐標爲 $(4, 45°)$, $(3, 135°)$, $(7, 270°)$.

2. 圖表極坐標爲 $(4, 60°)$ 與 $(-4, 240°)$ 之點.

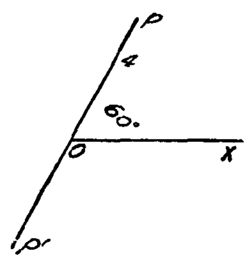


圖 17

(i) 作 OP 與 OX 成 $60°$角，又於其上量出具有 4 單位長之 OP；P 乃所求之點.

(ii) 作 OP' 與 OX 作 $240°$角，因輻距爲負，故吾人決不可沿 OP' 向但應沿其反向量 4 個單位長. 故吾人應使 $P'O$ 過 O 點向後延長，並於其上截取 $OP=4$. 此乃決定所求點 P. 該點與第一次所求得者同，此乃據 §18 而求得者.

3. 設 O 點爲城又 X 爲在該城正東 5 哩之山；尙有二城：其一在 O 點東北 7 哩，另一在其東南 3 哩；若以連線 OX 爲極軸，試求 X 與該後述二城之極坐標.

以哩爲長度單位及度爲角之單位，顯而易見 X 之極坐標爲 $(5, 0°)$，又該二城者各爲 $(7, 45°)$ 與 $(3, 315°)$.

19. 變換極坐標系爲笛卡兒直角坐標系.

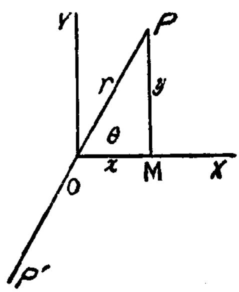


圖 18

作 $OY \perp OX$ (圖 18).

令 (r, θ) 爲 P 點之極坐標，(x, y) 爲其直角坐標，以 OX 與 OY 爲軸.

因 $\angle XOP = \theta$，故[三角術 3]

$$\sin\theta = \frac{MP}{OP} = \frac{y}{r} \quad \text{又} \quad \cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{x}{r},$$

卽 $y = r\sin\theta,\quad x = r\cos\theta.$ ············[5]

若已知 r 與 θ，則方程式[5]可定 x 與 y 之值.

再者，
$$\tan\theta = \frac{MP}{OM} = \frac{y}{x};$$

又[幾何學與三角術 11]，$r^2 = OP^2 = OM^2 + MP^2 = x^2 + y^2$，

故*
$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x},\ r = \pm\sqrt{(x^2 + y^2)}. \text{·····················}[5a]$$

若已知 x 與 y，則極坐標 (r, θ) 當可藉方程式[5a]決定之. 因 θ 可由其正切求出，故其通值輒具 $n\pi + a$ 之形. [三角術 7]. 由[5a]求得之 r 之符號乃係歧號，但若吾人取 θ 之任一特解，則方程式[5]可示吾人 r 應取何種符號.

20. 求二點間之距離以其極坐標表示之.

---

* 參閱[三角術 14].

令二點爲 $P\ (r_1,\ \theta_1)$ 與 $Q\ (r_2,\ \theta_2)$.

作 $QM \perp OP$; 則

$$OP=r_1,\ OQ=r_2,\ \angle POQ=\theta_2-\theta_1;$$

故 $$OM=OQ\ \cos\ POQ=r_2\ \cos\ (\theta_2-\theta_1).$$

據歐幾 II. 13, PQ 上之正方形較 OP, OQ 上之正方形小兩倍矩形 $OP \cdot OM$,

即 $$PQ^2=OP^2+OQ^2-2OP\cdot OM;$$

故 $$PQ^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\ \cos\ (\theta_2-\theta_1). \quad\cdots\cdots\cdots\cdots[6]$$

此種結果可立自 [三角術 10] 推得之.

交代證法:——

$$MQ=OQ\ \sin\ POQ=r_2\ \sin\ (\theta_2-\theta_1),$$

又 $$MP=OP-OM=r_1-r_2\ \cos\ (\theta_2-\theta_1);$$

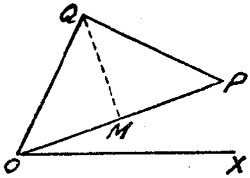


圖 19

故由歐幾 I. 47 [三角術 11],

$$PQ^2=MP^2+MQ^2=\{r_1-r_2\ \cos\ (\theta_2-\theta_1)\}^2+r_2^2\ \sin\ ^2(\theta_2-\theta_1)$$

$$=r_1^2+r_2^2-2r_1\ r_2\ \cos\ (\theta_2-\theta_1). \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots[6]$$

21. 求三角形 POQ 之面積.

面積 $\triangle POQ=\dfrac{1}{2}OP\cdot MQ=\dfrac{1}{2}r_1r_2\ \sin\ (\theta_2-\theta_1)$. [三角術12]

22. 求三角形面積以其三頂之極坐標系表之.

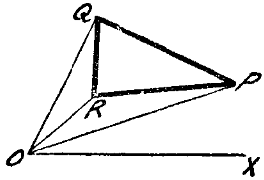


圖 20

令三頂爲 $P\ (r_1, \theta_1)$, $Q\ (r_2, \theta_2)$, 與 $R\ (r_3, \theta_3)$;

則, 若諸點位置如圖中所示,

$$\triangle PQR = \triangle POQ - \triangle ROQ - \triangle POR$$

$$= \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin\,(\theta_2 - \theta_1) - \frac{1}{2} r_2 r_3 \sin\,(\theta_2 - \theta_3) - \frac{1}{2} r_3 r_1 \sin(\theta_3 - \theta_1),$$

如書成更較對稱之形式, 上式乃呈次形:

$$\triangle = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin\,(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{2} r_2 r_3 \sin\,(\theta_3 - \theta_2)$$
$$+ \frac{1}{2} r_3 r_1 \sin\,(\theta_1 - \theta_3) \cdots\cdots\cdots\cdots [7]$$

如 §14 中所述, 吾人固不難證知四頂點爲 $(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2), (r_3, \theta_3), (r_4, \theta_4)$ 之四邊形之面積爲

$$\frac{1}{2}\{r_1 r_2 \sin\,(\theta_2 - \theta_1) + r_2 r_3 \sin\,(\theta_3 - \theta_2)$$
$$+ r_3 r_4 \sin\,(\theta_4 - \theta_3) + r_4 r_1 \sin\,(\theta_1 - \theta_4)\}. \cdots\cdots [7a]$$

此等結果 [6], [7], [7a] 概可從相當笛卡兒公式 [1], [3], [4] 用直接變換法推得之, 如下述例題 (ii) (iii) 是.

23. 聯繫 r 與 θ 之獨個方程式, 如 x 與 y 間之獨個方程式然, 乃表一條或多條之直線或曲線. 類此方程式之軌跡, 慣可藉求出表某種已知直線或圓之方程式之某種幾何義意而描繪之; 在另一方面吾人必當予 θ 以簡便之值(如 0°, 30°, 45°, 60°, 90° 等是) 並從所與方程式而決定與其對應之 r 值, 俾可求出軌跡上之諸點.

例　題

（關於 §19 者）

(i) 已與 $x=-\sqrt{3}$，$y=-1$；求 r 與 θ.

此間 $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$；故 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{6}$.

又 $r^2=3+1$；故 $r=\pm 2$.

符號爲正且小於 2π 之 θ 值爲 $\frac{\pi}{6}$ 與 $\pi+\frac{\pi}{6}$.

若吾人取 $\theta=\frac{\pi}{6}$，方程式 $r\cos\theta=x=-\sqrt{3}$ 顯示吾人必當予 r 以負值 -2. 若取 $\theta=\frac{7}{6}\pi$，則同一方程式顯示必當取 $r=+2$. 是故該極坐標爲 $\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$ 或 $\left(2, \frac{7}{6}\pi\right)$；且以取後者爲最便.

例　題

（關於 §20 者）

(ii) 從公式 [1], [5] 推出公式 [6].

由 [1]，
$$
\begin{aligned}
PQ^2&=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\\
&=(r_1\cos\theta_1-r_2\cos\theta_2)^2+(r_1\sin\theta_1-r_2\sin\theta_2)^2, \qquad \text{由[5]}\\
&=r_1^2\cos^2\theta_1+r_2^2\cos^2\theta_2-2r_1r_2\cos\theta_1\cos\theta_2\\
&\quad+r_1^2\sin^2\theta_1+r_2^2\sin^2\theta_2-2r_1r_2\sin\theta_1\sin\theta_2\\
&=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)\\
&=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1). \qquad \text{[三角術 8]}
\end{aligned}
$$

例　題

（關於 §22 者）

(iii) 從公式 [4], [5] 推出公式 [7a].

由 [4], 四邊形面積以其角點(即項)之笛卡兒坐標表示爲

$$\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1-y_1x_2-y_2x_3-y_3x_4-y_4x_1)$$

$$=\frac{1}{2}(r_1r_2\cos\theta_1\sin\theta_2+r_2r_3\cos\theta_2\sin\theta_3+r_3r_4\cos\theta_3\sin\theta_4+r_4r_1\cos\theta_4\sin\theta_1$$

$$-r_1r_2\sin\theta_1\cos\theta_2-r_2r_3\sin\theta_2\cos\theta_3-r_3r_4\sin\theta_3\cos\theta_4$$

$$-r_4r_1\sin\theta_4\cos\theta_1)$$

$$=\frac{1}{2}\{r_1r_2(\cos\theta_1\sin\theta_2-\sin\theta_1\cos\theta_2)+r_2r_3(\cos\theta_2\sin\theta_3-\sin\theta_2\cos\theta_3)$$

$$+r_3r_4(\cos\theta_3\sin\theta_4-\sin\theta_3\cos\theta_4)+r_4r_1(\cos\theta_4\sin\theta_1-\sin\theta_4\cos\theta_1)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{r_1r_2\cdot\sin(\theta_2-\theta_1)+r_2r_3\sin(\theta_3-\theta_2)+r_3r_4\sin(\theta_4-\theta_3)$$

$$+r_4r_1\sin(\theta_1-\theta_4)\}.$$

[三角術 8]

例題

(§23 上者)

(iv) 方程式 (1) $r=a$ (常數) 及 (2) $\theta=a$ (常數)之軌跡爲何?

前者顯表圓心爲極點半徑爲 a 之圓. 後者爲通過極點而與軸線傾交成 a 角之直線.

習題——§§17—19.

圖表並求極坐標各如下述之諸點之直角坐標:

1. $\left(\sqrt{2},\ \frac{5\pi}{4}\right)$; 2. $\left(-\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\right)$; 3. $\left(2,\ \frac{2\pi}{4}\right)$; 4. $\left(\sqrt{3},\ -\frac{\pi}{6}\right)$.

求笛卡兒坐標各如下述之諸點之極坐標,在每一情形中取 r 爲正及 θ 介於 0 與 2π 之間:——

5. $(0,\ 1)$; 6. $(1,\ \sqrt{3})$; 7. $(-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$; 8. $(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$;

9. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3},\ -\frac{3}{2}\right)$; 10. $(-5,0)$.

11. 第一章例題 4 中等邊三角形三頂之極坐標爲何?

習　題——§§20—22.

求下列兩對點間之距離及其與原點所成三角形之面積:——

12. $\left(1,\ \frac{1}{6}\pi\right)$; 與 $\left(2\sqrt{3},\ \frac{1}{3}\pi\right)$;

13. $\left(2\sqrt{2},\ \frac{1}{12}\pi\right)$ 與 $\left(2,\ \frac{1}{3}\pi\right)$.

求由下列諸點所構成之三角形之面積:——

14. $\left(1,\ \frac{1}{8}\pi\right)$; $\left(1,\ \frac{5}{8}\pi\right)$; $\left(\sqrt{2},\ \frac{3}{8}\pi\right)$;

15. $\left(3,\ \frac{1}{6}\pi\right)$; $\left(2,\ \frac{1}{2}\pi\right)$; $\left(1,\ \frac{5}{6}\pi\right)$.

16. 已與面積 POQ, 以極坐標系表之, $=\frac{1}{2}r_1\,r_2\sin\,(\theta_2-\theta_1)$, 用變換法從之推得笛卡兒公式

$$\text{面積}\quad POQ=\frac{1}{2}\,(x_1\,y_2-y_1\,x_2).$$

17. 從笛卡兒公式[3]推出任一三角形面積, 以極坐標表之, 之公式 [7].

18. 從極公式 [6] 推求二點間之距離以笛卡兒公式 [1] 表之.

習　題——§23.

描繪下列諸軌跡:——

19. $\theta=0$.　20. $\theta=1$.　21. $\theta=\frac{1}{2}\pi$.　22. $r=0$.　23. $r=4$.　24.† $r=4\sin^2\theta$.

試 卷 四

1. 釋極坐標系.

2. 圖示極坐標系爲 $\left(3,\ \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(2,\frac{3\pi}{4}\right)$, 與 $\left(4,\ \frac{4\pi}{3}\right)$ 諸點之位置.

3. 將表以直角坐標之二方程式 $x^2+y^2=2ax$ 及 $x^2-y^2=c^2$ 變換爲極坐標方程式.

---

† 予 θ 以 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, ……至 360° 爲止諸值, 又求 r 之值.

4. 將表以極坐標之二方程式 $r^2 \sin 2\theta = 4c^2$ 及 $r^2 = c^2 \cos 2\theta$ 變換爲直角坐標方程式.

5. 求二點間之距離以其極坐標表之.

6. 求極坐標爲 $\left(5, \frac{5\pi}{12}\right)$ 與 $\left(3, \frac{\pi}{12}\right)$ 二點間之距離.

7. 試證三頂爲點 $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$, 與極點之三角形乃一等邊三角形.

8. 求三角形之面積以其三頂之極坐標表之.

9. 求三頂之極坐標爲 $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$, 及 $\left(2, \frac{5\pi}{6}\right)$ 之三角形面積.

10. 描繪軌跡: (i) $\theta = \frac{\pi}{4}$, (ii) $r = 3$, (iii) $\sin 2\theta = 0$.

第五章　直線.*一次方程式

24. 求任一直線之方程式.——

(i) 平行於 y 軸者,

(ii) 平行於 x 軸者.

(i) 令 AQ 爲 $\parallel OY$ 之直線; 並在其右 $a(=OA)$ 單位距離.

令 Q 爲 AQ 上之任一點 (x, y)†

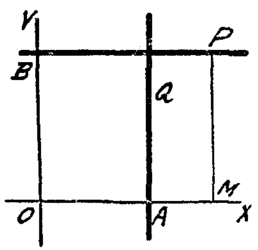


圖　21

則 Q 點之橫標爲 $OA=a$.

$$\therefore \qquad x=a, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots[8,\mathrm{i}]$$

又此乃平行於 y 軸之直線 AQ 之方程式.

(ii) 令 BP 爲 $\parallel OX$ 之直線,並在其上 $b(=OB)$ 單位距離; 又令 P 爲 BP 上任一點 (x, y) 作 $PM \parallel YO$.

則 P 點之縱標, $MP=OB=b$.

---

* 除非特予指明某一線段具有若干單位長度, 凡吾人所論述之線概具無限之長, 又故在事實上, 凡吾人所常論者如位置與方向誠當如直線研究之.

† 此間 x 與 y 仍爲流動坐標; 該方程式必對線上各點全可適合.

$$\therefore \qquad y=b, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots [8,\ ii]$$

又此乃平行於 x 軸之直線 BP 之方程式.

若 AQ 在 OY 之左，則 a 當爲負；又若 BP 在 OX 之下，則 b 爲負.

25. 求通過原點之任何直線方程式.

令 OP 爲該直線，又令 θ 爲其與 x 軸之正向所成之角 XOP.

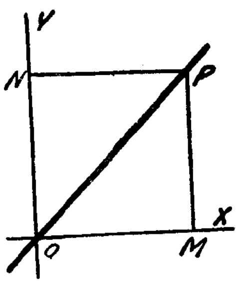


圖 22

在 OP 上取任一點 $P(x, y)$ 又作縱坐標 PM.

則 $\tan\theta=\dfrac{MP}{OM}=\dfrac{y}{x}$； [三角術 3]

故 $y=x\tan\theta$.

若吾人命 $\tan\theta=m$,

則 $$y=mx, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots [9]$$

此乃所求之通過原點之直線方程式.

26. 求任何直線方程式——"正切"式

若該線平行於任一軸，或通過原點，其方程式已曾求得於 §§24 與 25 中.

否則，令其爲 DB 直線，分截 OY 於 B 及 OX' 於 D 點，又令 $\angle XDB=\theta$, $OB=b$. (此

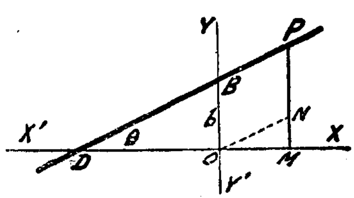


圖 23

間 θ 爲該線與 OX 之正向所作之角，又 b 爲其截 y 軸之 B 點在 O 點以上之距離.)

若 PM 爲 $P(x, y)$ 點之縱標，

$$MP = DM \tan\theta = (OM + DO)\tan\theta;$$

即 $$y = x\tan\theta + DO\tan\theta.$$

又因 $$DO\tan\theta = OB = b;$$

故 $$y = x\tan\theta + b,$$

或，命 $\tan\theta = m$，$$y = mx + b, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots [10]$$

此卽所求之直線方程式.

[見 m 一字母應予立卽想及 $\tan\theta$；因其乃吾人所恆用之字母.]

27. 此種直線方程式之形式有時稱爲"正切"式；命方程式以專名實屬相當重要

若 B 在 O 下，則 b 爲負；又若 $\angle XDB$ 爲鈍角，則 m 爲負. 上述研究實可概括一切情形，但倘有一種特別證法，頗有一述之價値：

交代證法——方程式 [10] 更常可如是證之：——

作 $ON \parallel BD$，遇 MP 於 N 點.

則 $$MP = MN + NP = OM\tan MON + OB;$$

故，因 $MON = MDP = \theta$，吾人乃得

$$y = x\tan\theta + b = mx + b,$$ 如前.

例　題

據前述原理求與 x 軸作 60° 角又截 y 軸於原點以下 2 單位距離處之直線方程式.

此處若 P 爲該線上之任一點 (x, y),

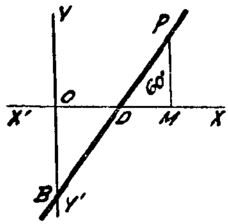


圖 24

吾人乃得 $MP = DM \tan 60°$

$= (OM - OD)\sqrt{3}$.

又∵ $OD\sqrt{3} = BO = 2$;

∴ $MP = OM\sqrt{3} - 2$,

或 $y = \sqrt{3}x - 2$,

此卽所求之方程式，或可書成

$$\sqrt{3}x - y = 2.$$

28. 從 §26 所得之推論.——I. 方程式爲 $y = mx + b$ 與 $y = mx + b'$ 之兩直線彼此必相平行.

蓋因該二直線兩者俱與 x 軸交成同角. 卽 $\tan^{-1}m$ [三角術 14]之故. 是以吾人可獲一定則，卽凡具有同一 m，卽於表呈 $y = mx + b$ 形之方程式中 x 之係數，之直線恆相平行 (又參閱 §57).

II. 因 [8] [9] [10] 諸方程式中僅函 x 與 y 之一次冪，故吾人乃可斷言直線方程式恆爲一次者.

吾人現時正欲證明其逆定理，卽——

29. 任何一次方程式恆表直線.

如將各項均移至一邊，則吾人恆可化類此方程式成次之通式:

$$Ax + By + C = 0, \cdots\cdots\cdots\cdots [11]$$

該處 A, B, C 乃若干常數係數. 故吾人可稱之爲普通一次方程式,* 以其可概括每一個如是之方程式.

---

* 若學子前此對一般方程式之意義未曾熟悉，則其對此務必謹加注意.

若 $B=0$, 則 $Ax+C=0$; 故 $x=-\frac{C}{A}$, 又該方程乃表 $\parallel y$ 軸並在其右 $-\frac{C}{A}$ 遠處（或在其左 $\frac{C}{A}$ 遠處）之直線 [8, i].

若 $B\neq 0$, 則吾人求解該方程式中之 y, 得

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

若吾人命 $$m=-\frac{A}{B},\ 又\ b=-\frac{C}{B};$$

則該方程式恰同 $$y=mx+b.$$

故該方程式乃表與 OX 之正向傾成正切爲 $-\frac{A}{B}$ 之角且截 OY 於原點以上 $-\frac{C}{B}\left(或以下\ \frac{C}{B}\right)$ 遠處之直線.

若 $A=0$, 該直線平行於 OX（如 §24, ii 中然）; 若 $C=0$, 則其必通過原點（如 §25 中然）.

定義——方程式爲 $Ax+By+C=0$ 之直線可簡稱爲 "直線 $Ax+By+C=0$."

30. 下列關於 §29 之證明對吾人亦殊有裨益.

令 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 爲方程式 $Ax+By+C=0$ 之軌跡上之任何三點; 吾人即將證明凡此三點悉皆位於一直線上. 因該三點俱滿足上方程式, 故

$$Ax_1+By_1+C=0, \quad\text{(i)}$$

$$Ax_2+By_2+C=0, \quad\text{(ii)}$$

$$Ax_3+By_3+C=0. \quad\text{(iii)}$$

從 (ii) 與 (iii) 各減去 (i). 如是吾人乃消去 C 而得

$$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)=0,$$

$$A(x_3-x_1)+B(y_3-y_1)=0;$$

故 $$\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}=-\frac{B}{A}=\frac{x_3-x_1}{y_3-y_1};$$

由是 $$(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)=0,$$

或 $$x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-y_1x_2-y_2x_3-y_3x_1=0.$$

如是則由該等點所構成之三角形面積爲零，又故該三點必同位於一直線上 (§13). 因此一事實對於任何三點概屬眞確，是故，如變易其中任一點而固定其他二點，凡該軌跡上之點必皆位於同一直線上；由此可知該軌跡乃表一直線.

31. 描繪已與方程式之直線.——吾人今玆旣知一次方程式概表直線；是故如欲描繪其軌跡自可不必求出其上之點系，蓋因任何直線上之兩點即足以決定其位置.

若該直線不通過原點，則其最簡便之法莫如求出其截雙坐標軸之點. 於該方程式中令 $y=0$, 吾人求得該線截 x 軸所在處之 x 之值；如令 $x=0$, 吾人乃得其截 y 軸之所在點；聯結此二點，吾人即得所求之直線.

若直線通過原點，則吾人當求在該線上之某另一點；如欲爲此吾人可予 x 以除零以外之任何簡便値，並從該方程式求與 x 對應之 y 値.

欲釋明此法則須慣習下列例題：——

例題

1. 描繪直線 $y-x=2$. (§15, 例 1).

於該方程式中，令 $y=0$, 則 $x=-2$. 令 $x=0$, 則 $y=2$. 故該直線截 x 軸於原點左方 2 單位距離處，又截 y 軸於原點上方 2 單位距離處. 該直線表於裏封面對面之插圖中，

2. 描繪直線 $2y-3x=0$ (§15, 例 3).

此直線顯必通過原點(因若 $x=0$, 則 $y=0$.) 令 $x=2$ 則吾人求得 $y=3$. 聯結點 (2, 3) 與原點，則吾人乃得所與直線.

3. 描繪直線 $3x+2y=12$.

令 $y=0$, 則 $x=4$. 令 $x=0$, 則 $2y=12$；故 $y=6$. 是故，若吾人在 x 軸之正向上量出 4 單位長，又於 y 軸上量出 6 單位長，則吾人乃得所求直線 AB.

4. 描繪直線 $ax+by=0$.

此線必通過原點，因，若 $x=0$，y 亦 $=0$.

令 $x=b$，則 $y=-a$；故該直線通過點$(b,-a)$．若已與 a 與 b 之值，則吾人必能求出此點，又聯結之至原點吾人乃得所求之直線.

吾人亦可如是求之．將原方程式書呈次形：

$$y=-\frac{a}{b}x,$$

吾人可知 (§25) 其通過原點且與 x 軸作正切為 $-\frac{a}{b}$之角．惟為欲給出具有此正切之角度起見，一般言之，吾人必當仍照前法行之.

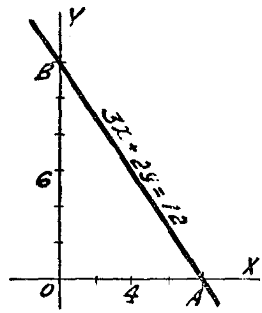


圖 25

習　題——§§24, 25.

1. 求等距直線 $x=-1$ 與 $x=3$ 之直線方程式.

2. 求等距直線 $y=b$ 與 $y=b'$ 之直線方程式.

3. 求通過原點並與 x 軸傾成下列諸角之直線方程式：——$0°, 30°, 90°, 135°$.

習　題——§§26—28.

4. 求通過點$(0, 4)$並與 x 軸作角如前題之直線方程式.

5. 求通過點$(0, 2)$並與 x 軸作角$\frac{1}{3}\pi$ 與$\frac{2}{3}\pi$ 之直線．又求 $\parallel$ 該二直線並截 y 軸於原點以下 2 單位距離處之直線方程式．更求該等直線與 x 軸之交點.

6. 求等距並平行於 $y=\frac{2}{3}x$ 與 $y=\frac{2}{3}x+2$ 二直線之直線方程式.

7. 求 $y=\frac{1}{3}x\sqrt{3}+3$ 及 $y=\sqrt{3}x+3$ 二直線與 x 軸所成之斜度．試證直線 $y=x+3$ 平分該二直線間所夾之角.

習　題——§§29, 30.

8. 求作通過原點並 $\parallel$ 直線 $3x+2y=7$，及通過點$(0, 3)$並 $\parallel$ 同一直線之兩直線方程式.

9. 試證 $(3a, 0)$, $(0, 3c)$, $(2a, c)$ 三點位於一直線上.

10. 試證 $(-1, 3)$, $(3, 2)$, $(11, 0)$ 三點位於一直線上.

11. 試證 $(6a, -2b)$, $(0, b)$, $(2a, 0)$ 三點位於一直線上.

12. 試證 $(0, 0)$, (x, y), (mx, my) 三點位於一直線上.

習 題——§31.

13. 作直線 $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$.

14. 作直線 $x=2y$, $x=-2y$, $y=2x$, $y=-2x$.

15. 作直線 $x+y=3$, $x-y=3$, $y-x=3$, $x+y+3=0$.

16. 作下列直線:

$$y=2x+2,\quad y=2x-2,\quad y=-2x+2,\quad y=-2x-2;$$

$$x=2y+2,\quad x=2y-2,\quad x=-2y+2,\quad x=-2y-2.$$

17. 作線 $7x-3y=0$.

18. 作線 $3x+7y=0$.

19. 作線 $5x+3y+15=0$.

20. 作線 $5x+3y=0$.

21. 作線 $5x+3y-15=0$.

雜 題

22. 求在直線 $3x+2y=18$ 上 x 各等於 $0, 2, 4$ 處之三點;並證明由該三點所構成之三角形之面積爲零.

23. 以某直線在 x 軸上之截距及其與 y 軸所作之角之正切二者表出該直線之方程式.

24. 解釋方程式 $y=m(x-a)$ 中常數 m 與 a 之意義.

25. 若 $\parallel OY$ 之任一縱標截直線 $y=mx$ 與 $y=mx+b$, 求證其中所截之部分具有定長.

26. 試將前題之結果推及直線 $Ax+By=0$ 與 $Ax+By+C=0$.

27. 若 $\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}$, 試證 $Ax+By+C=0$, $A'x+B'y+C'=0$ 二直線相互平行.

28. 試證方程式 $y=-x\cot\theta$ 表 $\perp$ $y=x\tan\theta+b$ 之直線.

試卷五

1. 求平行於 x 軸之任何直線方程式.

2. 求位於 $x=3$ 與 $x=7$ 二直線之中途之直線方程式.

3. 求過原點所作之任何直線方程式.

4. 求通過原點並平分坐標軸間之夾角之直線方程式.

5. 求任何直線方程式以"正切"式表之.

6. 試釋方程式 $y=mx+b$ 中常數之意義.

7. 求與 x 軸作角 $135°$ 並在 y 軸上截出截距 $=-2$ 之直線方程式, 假定坐標軸係直角者.

8. 直線之"通式"爲何? 試證其能够化成切線式.

9. 試證任何一次方程式必表一直線.

10. 作直線 $y=2x$ 與 $y=2x+4$.

第六章　直線方程式之其他形式

32. 求直線方程式以其在坐標軸上所截之長表之（"截　距"　式）*

令 AB 爲直線，又令 OA 與 OB 二截距如等於 a 與 b.

若 PM 爲 $P(x, y)$ 點之縱標，則 $\triangle PMA, BOA$ 相似［幾何學 13］.

故 $$\frac{MP}{OB}=\frac{MA}{OA}=\frac{OA-OM}{OA};$$

或 $$\frac{y}{b}=\frac{a-x}{a}=1-\frac{x}{a};$$

∴ $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \cdots\cdots [12]$$

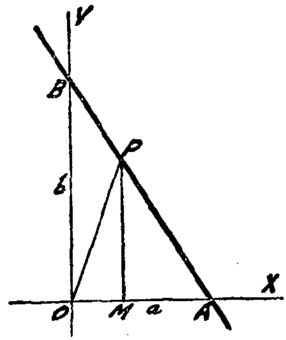


圖 26

此卽所求之方程式.

33. 交代證法:—

(a) $\triangle AOP$ 與 POB 之和等於 AOB；故由［幾何學 12］,

$$\frac{1}{2}ay+\frac{1}{2}bx=\frac{1}{2}ab;$$

由是，以 $\frac{1}{2}ab$ 遍除上式各項，乃得

---

* 英文原名 "intercept form".

$$\frac{y}{b}+\frac{x}{a}=1.$$

(b)　假定直線方程式乃一次者，令 AB 之方程式為

$$Ax+By+C=0.$$

因在雙軸上之截距為 a 與 b，當 $y=0$ 時，$x=a$；

故　$$Aa+C=0 \text{ 或 } a=-\frac{C}{A}.$$

同樣，當 $x=0$ 時，$y=b$；

故　$$Bb+C=0 \text{ 或 } b=-\frac{C}{B}.$$

今上方程式可書為

$$-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y=1,$$

或　$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1.$$

將頃所求得之 $-\frac{C}{A}$ 與 $-\frac{C}{B}$ 二值代入，

吾人乃得　$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

如前.

34.　方程式[12]常稱為直線方程式之"截距式".

若吾人書　$$L=\frac{1}{a},\ M=\frac{1}{b},$$

該方程式乃成　$$Lx+My=1,\cdots\cdots\cdots\cdots[12\,a]$$

二截距為 $\frac{1}{L}$ 與 $\frac{1}{M}$. 該方程式之此種形式亦有時能使吾人感到便利之處.

[當吾人記憶[12]時，應予注意每一坐標系必當位於對應軸上之截距以上. 又當注意式中之 b 與方程式[10]中者具有同義.]

吾人常假定該二截距在符號方面應受普通慣例之限制，卽如在圖 26 中二者應皆為正. 事實上該所與件實卽該直線必須通過之二點之坐標 $(a,0)$ 與 $(0,b)$

35. 已與從原點引至某直線上之垂線之長及其與 x 軸所成之傾斜，求該直線之方程式.

("垂 線" 式)*

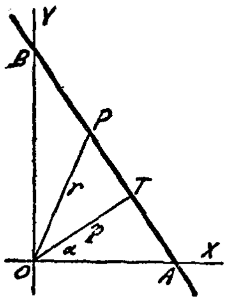


圖 27

令 AB 為已與直線, 又 OT 為具有 p 長之垂線; 令 α 為 OT 與 OX 所成之傾斜 $\angle XOT$; p 與 α 係所與者 (p, α) 顯為 T 點之極坐標.

令 (x, y) 為該直線上任一點 P 之直角坐標, 又 (r, θ) 為其極坐標.

則 $$\angle TOP = \theta - \alpha.$$

茲因 $$OP \cos TOP = OT;$$

故 $$r \cos (\theta - \alpha) = p, \text{（參閱第十七章）}$$

或 $$r \cos \theta \cos \alpha + r \sin \theta \sin \alpha = p. \text{（由三角術 8）},$$

又因 $$r \cos \theta = x, \quad r \sin \theta = y, \quad \text{由[5]}$$

故 $$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p, \cdots\cdots\cdots\cdots [13]$$

此即所求之方程式.

36. 垂線 p 必須為正; 蓋因若 p 為負, 則吾人必當如 §17 中所述者釋之, 又 α 當為非由該垂線本身, 但由此垂線通過原點向後延長之方向與 x 軸所作之角

---

* 英文原名 "perpendicular form"; 於其他教本中或有稱之為 "法線式" (normal form) 者.

〔譯者按：如是，則該角 $\angle AOT'$，乃成 $(180°+\alpha)$ 而非 α 矣.〕

極坐標系之應用可用次法藉免訛誤.

37. 交代證法：——

(a) 作縱標 PM 又作 ML 與 MU 分別 ∥ 與 ⊥ 該直線. 則，因 $\angle$s PTO 與 PMO 皆係直角，故

$$\angle TPM=\angle TOM=\alpha.$$

茲因 $OT=OL+LT=OL+MU=OM\cos LOM+MP\sin UPM$;

故 $$p=x\cos\alpha+y\sin\alpha.$$

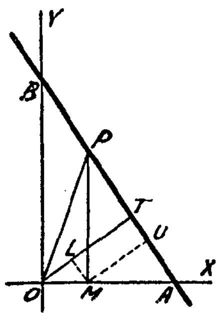


圖 28

(b) 令該直線截雙軸於 A 與 B 二點. 顯然

$$OA=\frac{OT}{\cos AOT}=\frac{p}{\cos\alpha},$$

$$OB=\frac{OT}{\cos TOB}=\frac{p}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{p}{\sin\alpha}.$$

故，假定 [12]，該直線之方程式以此等截距表之爲

$$\frac{x}{\frac{p}{\cos\alpha}}+\frac{y}{\frac{p}{\sin\alpha}}=1,$$

或 $$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p.$$

例　題

設某圓圓心之坐標爲 $(a\cos\beta, a\sin\beta)$，又其半徑爲 b. 求與該圓相切且其垂線與 x 軸作 α 角之二直線之方程式.

令 C 爲該圓之圓心，QT 與 $Q'T'$ 爲二切線，OTT' 爲自原點引至其上之垂線. 是故由所與件，$\angle XOT=\alpha$. 作 $CK\perp OTT'$.

令 CK 之方程式爲 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$，該處 $p=OK$. 因 C 點 $(a\cos\beta, a\sin\beta)$ 位於此線上，其坐標應滿足此方程式；

故 $$a\cos\beta\cos\alpha+a\sin\beta\sin\alpha=p;$$

由此 $$a\cos(\alpha-\beta)=p=OK.$$

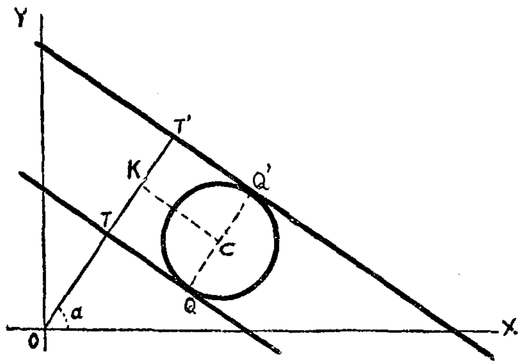


圖 29

由歐幾 III. 18，直徑 QCQ'⊥該二切線，又故 ∥ TKT'；是故

$$TK=KT'=QC=b.$$

故
$$OT=OK-TK=a\cos(\alpha-\beta)-b$$
$$OT'=OK+KT'=a\cos(\alpha-\beta)+b.$$

故 TQ 之方程式爲

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=a\cos(\alpha-\beta)-b,$$

又 $T'Q'$ 之方程爲　$x\cos\alpha+y\sin\alpha=a\cos(\alpha-\beta)+b.$

38. 化通式 $Ax+By+C=0$ 爲"垂線"式 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$.

方程式 [11] 與 [13] 各可書爲

$$-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y=1$$

與
$$\frac{\cos\alpha}{p}x+\frac{\sin\alpha}{p}y=1.$$

若二者係表同一直線，則顯然 (使 x 與 y 之係數相等或使在 y 軸與 x 軸上之截距相等)

$$\frac{\cos \alpha}{p} = -\frac{A}{C} \quad \text{又} \quad \frac{\sin \alpha}{p} = -\frac{B}{C}. \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(a)}$$

平方而相加之，吾人乃得［由三角術 5］

$$\frac{1}{p^2} = \frac{A^2+B^2}{C^2}; \quad \therefore \quad p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

但 p 必須為正(§36)．故吾人必使該根具有與 C 相同之符號．如是，若 C 本身係一正量，則

$$= \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

又故，由(a)，

$$\cos \alpha = -\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin \alpha = -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}};$$

是故方程式

$$-\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x - \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}. \cdots\cdots [14]$$

在形式上與

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p.$$

完全一致．

若 C 為負，則吾人必當對所有之根號悉取負號，又實用上之適當形式為

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y = \frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}}. \cdots\cdots [14a]$$

是故吾人乃得下列

39. 求作任一直線方程表呈"垂線"式之定則．

第一，將常數項移至等號之右邊，又，遇必要時，遍易符號務使該項為正.

第二，用 $\sqrt{A^2+B^2}$ 遍除各項.

§§38 與 39 中所載之法對於求自任一點引至任一直線上之垂線之長頗關重要，吾人將於第九章中見之.

例 題

1. 化方程式 $3x-4y+12=0$ 呈 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ 之形式

將常數項 12 移至等號之右邊，並使其為正，原方程式當可書爲

$$-3x+4y=12.$$

今 $$\sqrt{(-3)^2+4^2}=5.$$

用 5 除該方程式，吾人乃得

$$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=\frac{12}{5},$$

該式與 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ 完全一致，

該處 $$\cos\alpha=-\frac{3}{5},\quad \sin\alpha=\frac{4}{5};$$

故 $$\alpha=\cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right),$$

又 $$p=\frac{12}{5}.$$

2. 表下列諸方程式——

(i) $3x+\sqrt{3}\,y-3\sqrt{3}=0$, (ii) $x+\sqrt{3}\,y-\sqrt{3}=0$,

(iii) $y-6=0$, (iv) $x+y+5=0$,

呈 (*a*) "正切"式 $y=mx+b$,

(*b*) "截距" 式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$,

(*c*) "垂線" 式 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$.

並就幾何學之立場解釋所得諸結果.

該等結果可予彙書如次;

通　　式 $Ax+By+C=0$	正　切　式 $y=mx+b$.	截　距　式 $x/a+y/b=1$.	垂　線　式 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$.
$3x+\sqrt{3}y-3\sqrt{3}=0$.	$y=-\sqrt{3}x+3$, $y=x\tan 120^\circ+3$; $\therefore$ 與OX所成之傾斜$=120^\circ$, 在 OY 上之截距$=3$.	$\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{y}{3}=1$; $\therefore$ 截距為 $\sqrt{3}$ 與 3.	$\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=\frac{3}{2}$, $x\cos 30^\circ+y\sin 30^\circ=\frac{3}{2}$; $\therefore$ 垂線$=3/2$, 與 OX 作 30° 角.
$x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}=0$	$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+1$, $y=x\tan 150^\circ+1$; $\therefore$ 與OX所成之傾斜$=150^\circ$, 在 OY 上之截距$=1$.	$\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{y}{1}=1$; $\therefore$ 截距為 $\sqrt{3}$ 與 1.	$\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x\cos 60^\circ+y\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\therefore$ 垂線$=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 與 OX 作 60° 角.
$y-6=0$ (此係平行於 OX 之直線,又故僅能遇之於無窮遠處.)	$y=0\cdot x+6$, $y=x\cdot\tan 0^\circ+6$; $\therefore$ 與 OX 所成之傾斜$=0^\circ$, 在 OY 上之截距$=6$.	$\frac{x}{\infty}+\frac{y}{6}=1$; $\therefore$ 截距為 ∞ 與 6.	$0x+1\cdot y=6$, $x\cos 90^\circ+y\sin 90^\circ=6$; $\therefore$ 垂線$=6$, 與 OX 作 90° 角.
$x+y+5=0$.	$y=-x-5$, $y=x\tan 135^\circ+(-5)$; $\therefore$ 與OX所成之傾斜$=135^\circ$, 在 OY 上之截距$=-5$.	$\frac{x}{-5}+\frac{y}{-5}=1$; $\therefore$ 截距為 -5 與 -5.	$-\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}y=\frac{5}{\sqrt{2}}$, $x\cos 225^\circ+y\sin 225^\circ=\frac{1}{2}5\sqrt{2}$; $\therefore$ 垂線$=\frac{1}{2}5\sqrt{2}$, 與 OX 作 225° 角.

該等直線悉見本書裏封面對面之插圖中. 吾人應予注意,從"正切"式所求得之該等直線與 OX 所成之傾斜角度依次各為 120°, 150°, 0°, 135°, 又此等角度理應較由"垂線"式所求得之各該垂線之傾斜角度相差 90°, 即 30°, 60°, 90°, 225°.

40. 摘要 —— 今茲吾人已知任何直線方程式可能以下列任一形式表之:——

$$Ax+By+C=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots [11]$$

("通式", §§29, 30),

$$\left.\begin{array}{l} y=mx+b \\ y=x\tan\theta+b \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots [10]$$

("正切式", §26),

$$\left.\begin{array}{r} x/a+y/b=1 \\ Lx+My=1 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots [12]$$

("截距式", §§32——34)

或

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots [13]$$

("垂線式", §§35——37).

吾人又曾證明通式能予化成其他任一種形式,又如將此等後三方程式視爲通式之等殊情形則吾人可見方程式之任一形式必可化爲任何其他形式.

就後三情形之每一款而言, 該直線必藉各式直線方程式中所有之二已知件, 如 [10] 中之常數 m 與 b, [12] 中之 a 與 b, 及 [13] 中之 α 與 p 是, 決定之.

通式 [11] 之原形函有三個常數, A,B,C. 但經用 C 遍除各項後, 該式乃成次形:

$$\left(\frac{A}{C}\right)x+\left(\frac{B}{C}\right)y+1=0,$$

其中僅存有兩個眞常數, 卽 A 與 B 對 C 之比. 此二比可藉任二所與件決定之; 當如是而行時, 決不能使該直線滿足任何其他條件, 若吾人予 A 與 B 以適當之值,

則吾人可任意予 C 以任何值；因若以任一常數量遍乘該方程式，其必恆表同一直線故也.

於繼續前進作更較週密之探討以前，吾人必當令諸生對於彼等所論及之方程式中常數與變數間之判別之必要性特加注意．於上列各方程式中變數爲 x 與 y，又此二變數乃表該直線上任一點之"流動坐標"(§7)．其他諸字母則表常數量，又對任一特殊直線言，此等數量乃假定其各具定值焉．於次章中尤須特別注意，蓋因吾人正擬常用 x, y 二字母表變數及 (x_1, y_1) (x_2, y_2) 等表常數．除非學子確能判認孰者爲常數與孰者爲變數，必致混淆叢生．若將 §24 ii 之教材誤解爲"方程式 $y=mx+b$ 表 ‖ x 軸並相距 $mx+b$ 遠之直線"，則荒謬孰甚！雖然，如對種種記號之意義不加注意而深究之，則遲早必致造成如上或更甚之嚴重錯誤.

習　題——§§32—34.

1. 求聯結 $(2, 0)$ 與 $(0, -7)$ 所成之直線方程式.

2. 求聯結 $(-3, 0)$ 與 $(0, -5)$ 所成之直線方程式.

3. 求由直線 $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ 所構成之矩形之對角線方程式.

4. 作直線 $\frac{x}{5}+\frac{y}{9}=2$.

5. 作直線 $2x-3y+9=0$.

6. 比較 $y=mx+b$ 與 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 二方程式中之常數，並藉幾何學證驗彼此間之關係.

習　題——§§35—37.

7. 求 ‖ 直線 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ 並自之至二對邊上之距離爲 c 之兩直線方程式.

8. 求在圓心爲原點半徑爲 $\sqrt{2}$ 之圓上，與 x 軸作 $45°$ 角之直徑之二端所引之二切線之方程式.

9. 求通過 $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ 點並與直線 $y=x\tan\alpha$ 相⊥之直線方程式.

10. 今有二直線，自原點引至其上之二垂線各長 6 單位，又該二垂線各與 x 軸作角 150° 及 300°. 試求該二直線之方程式.

習 題——§§38, 39.

11. 比較呈 $y=mx+b$ 與 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ 二形之直線方程式中之常數. 又，用幾何學方法作圖證驗此等常數間之關係.

將下列三題中所舉之直線方程式化呈 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ 形：——

12. $7x-24y+50=0$;　13. $\sqrt{3}x+y+1=0$;　14. $2x+3=0$.

將下列八方程式表呈"正切"，"截距"及"垂線"諸形式，並作出彼等軌跡之草圖：——

15. $4x+3y-15=0$;　16. $x\sqrt{3}-y+2=0$;　17. $5x+12y+10=0$;

18. $x-y-3=0$;　19. $\sqrt{3}y-x+2=0$;　20. $8x+15y+255=0$;

21. $4x-3y=0$;　22. $x=3$.

雜 題

因割截二軸致構成一三角形之直線應位於何一象限——

23. 當其方程式爲 $y=mx+b$ 又 m, b 二者俱爲正時?

24. 當其方程式爲 $Ax+By+C=0$ 又 A, B, C 三者俱爲正時?

25. 當其方程式爲 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 又 a, b 俱爲正時?

26. 當其方程式爲 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$，又 α 位於 0 與 $\frac{1}{2}\pi$ 之間，p 爲正時?

試指正下列三語之謬點：——

27. "方程式 $y=mx+b$ 乃表 ‖ x 軸並遠隔 $mx+b$ 距離之直線."

28. "若直線 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ 通過所與點 (h, k)，則 $h\cos\alpha+k\sin\alpha=p$. 故通過 (h, k) 點且其垂線與 x 軸作 α 角之直線方程式爲 $p=h\cos\alpha+k\sin\alpha$." 其方程式究應爲何?

29. "欲化方程式 $3x+4y=5$ 成 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ 之形式，吾人必當先用 5 遍除各項；則所與方程式乃成

$$\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=1 \text{ 或 } x\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)+y\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)=1."$$

30. 若 l 爲二軸間所包截之直線之長，θ 爲其與 x 軸正向所作之角，試證其方程式爲

$$y\csc\theta=l+x\sec\theta.$$

試卷六

1. 試證如何求直線方程式以其在二軸上所截之長表之.

2. 求在 x 與 y 軸上各截成 4 與 5 單位長之直線方程式.

3. 求聯結 $(3, 0)$ 與 $(0, -4)$ 二點所成之直線方程式.

4. 試作一直線方程式使呈 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ 之形式.

5. 若從原點引至二直線上之垂線皆具 4 單位長，且各與 x 軸傾交成 $45°$ 與 $135°$；試求該二直線之方程式.

6. 試表如何將直線方程式之通式化成 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ 之形式.

7. 試化方程式 $12x-5y+9=0$ 成"垂線"式.

8. 將方程式 $3x-4y+10=0$ 書呈"垂線"式.

9. 求自原點引至直線 $4x+3y=5$ 上之垂線長及其與 x 傾交所成之角.

10. 試表方程式 $8x+6y=9$ 成"正切"，"截距"，與"垂線"諸式，並作圖表示其軌跡.

第七章　滿足所與條件之直線

41. 直線必通過所與點之條件乃為該點之坐標必當滿足該直線之方程式.

如是(例如)直線 $y=x+1$ 應通過點(4, 5); 因 $5=4+1$.

若吾人已知一直線通過所與點，單憑此一條件決不足以決定該直線；蓋因吾人能作無數直線通過該點．但若更予吾人以另一條件，如該直線之方向或其所通過之第二點之位置是，則有此二已知件方足以完全確定該直線．［譯者按：對於此理，凡稍具初等幾何學之常識者必能了然無疑；蓋以幾何學中曾云及"任何二點間可以決定唯一之直線".］

此點恰與次一事實相符，卽任一直線方程式常函具二常數，是故如欲決定該直線必當予以二已與件方可．次例當可使吾人了然於此義：——

已與一直線通過點 (4, 5)，代入方程式 $y=mx+b$ 中吾人乃得

$$5=4m+b, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

該式僅表未定常數間之關係而已；但若更謂其通過點 (8, 10)，則吾人又可得另一方程式

$$10=8m+b; \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

又解 (i) 與 (ii) 吾人得 b 與 m 之値，卽 $b=0$，與 $m=\frac{5}{4}$;

故該直線方程式為

$$y=\frac{5}{4}x+0 \quad 或 \quad 4y-5x=0.$$

若吾人必欲求滿足二已與條件之直線方程式，則當如是按步行之：——

第一步——寫出直線方程式使呈各種形式中之最簡便適宜者.

［不時演習自可對此不感絲毫困難．每遇一題必當審愼讀之細察之根據所與

條件以決定方程式應呈之形式． 例如，若所與件之一爲二截距間之關係，則吾人自應選取方程式之“截距”式；若已與方向，則最好採用“正切”式；又，一般言之，所與件及確定任一標準形式之已知件間之任何相似處乃暗示吾人以應予選取之最確當之形式． 若一時不易察出如是之相似點，則姑試以 $y=mx+b$ 式也可.]

第二步——寫出表所與條件之二方程式，並聯立之以求解該二未知常數．

第三步——將如是求得之値代入第一步中所寫之方程式內．

該法祇爲自該直線方程式與條件之間消去未知常數而已；此外，吾人尙可採用更較適合於所論某特殊情形之任何其他消元法．

例　題

求在 y 軸上截出具有單位長之截距並通過點 (2, 3) 之直線方程式．

令所求方程式爲　　　　$y=mx+b.$

第一條件予　　　　$b=1;$ ……………………………………(i)

蓋因，於公式 $y=mx+b$ 中，b 爲該直線在 y 軸上所成之截距．

第二條件予　　　　$3=2m+b;$ ……………………………………(ii)

蓋因 $x=2, y=3$ 必滿足方程式 $y=mx+b$，又因點 (2, 3) 位於該直線上．

解 (i) 與 (ii)，得 $b=1, m=1.$

代之入方程式 $y=mx+b$ 中，吾人乃得

$$y=x+1.$$

42. 求過所與點沿所與向而作之直線方程式*

令 (x_1, y_1) 爲所與點，又令所與向可藉該直線與 x 軸所作之 θ 角決定之．

[所與角 (θ) 暗示“正切”式，蓋因其中 $m=\tan\theta$．]

* 此種方程式[15]，在其他教本中往往稱之爲“點斜式”(Point-slope Form)[譯者附註]

與 x 軸作 θ 角之任一直線方程式當呈

$$y=mx+b \text{ 之形}, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

該處 $m=\tan\theta$，故屬已知常數；又，因該線通過點 (x_1, y_1) 故吾人又得

$$y_1=mx_1+b. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

從 (i) 減去 (ii)，吾人可將未定量 b 消去，又得

$$y-y_1=m(x-x_1), \quad\cdots\cdots\cdots\cdots[15]$$

或
$$y-y_1=\tan\theta\ (x-x_1).$$

緣此方程式祇函已知件 $(x_1, y_1, \tan\theta)$，故其乃為所求之方程式.

若吾人忘卻相減一步驟，則吾人先求得 $b=y_1-mx$，次代之入 (ii)，最後亦可求得同 [15] 之結果惟略較麻煩.

例 題

1. 求通過點 (4,5) 而與 x 軸作 60° 角之直線方程式.

因 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$，由公式 [15] 運即可得所求之方程式為

$$y-5=\sqrt{3}\ (x-4),$$

或
$$y-\sqrt{3}\cdot x=5-4\sqrt{3}.$$

2. 求通過點 (2, 1) 所作 ‖ 直線 $y-x=0$ 之直線方程式.

令 θ 為直線 $y-x=0$ 與 x 軸所作之角；則 $\tan\theta=1$. 因所求直線必 ‖ $y-x=0$，故其必與 x 軸傾交成同一角度，又故 $m=\tan\theta=1$. 故其方程式，由 [15]，當為

$$y-1=1\cdot(x-2),$$

或
$$y-x+1=0.$$

43. 求通過二所與點之直線方程式.*

令所與點爲 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2).

假設該直線之方程式具呈"正切"式 $y=mx+b$,

該處 m 與 b 係未知數.

因該線通過 (x_1, y_1),

故
$$y_1=mx_1+b;$$

故, 相減, 如於 §42 中然, 該方程式當可書爲

$$y-y_1=m(x-x_1).$$

但此線亦通過 (x_2, y_2). 將此等値代 [15] 中之 (x,y), 吾人乃得條件

$$y_2-y_1=m(x_2-x_1).$$

此予
$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

又, 代此 m 値入 [15], 吾人乃得該直線之方程式

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

該式復可簡化之成次式:†

---

* 表成此種形式之直線方程式, [16] 在若干其他教本中輒名曰 "兩點式" (Two-point Form). [譯者附註]

† 注意: 在此方程式中, 唯一之變數乃爲 x, y, 而 x_1, y_1, x_2, y_2, 則均係常數.

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots[16]$$

該方程式當以書呈此形最便記憶. 吾人應予注意該式可用文法書之; 即

$$\frac{(\text{流動 } y)-(\text{一所與 } y)}{\text{二所與 } y \text{ 之差}}=\left\{\begin{array}{l}\text{形式相似, 但以 } x\\ \text{代相當之 } y \text{ 而已.}\end{array}\right.$$

系.——令 $x_1=0$, $y_1=0$, 吾人乃知通過原點與點(x_2, y_2)之直線方程式爲

$$\frac{y}{y_2}=\frac{x}{x_2}.$$

或

$$y_2\,x=x_2\,y.$$

44. [16] 經去分母後當可書爲

$$(y-y_1)\,(x_2-x_1)-(x-x_1)\,(y_2-y_1)=0,$$

或

$$x\,(y_1-y_2)-y\,(x_1-x_2)-x_2\,y_1+x_1\,y_2=0,$$

又或

$$x\,y_1+x_1\,y_2+x_2\,y-y\,x_1-y_1\,x_2-y_2\,x=0.$$

此等方程式中之第二式乃呈 $Ax+By+C=0$ 之形式, 又其中任一形式乃表一種事實, 即點 (x, y) 與二定點 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 構成一具有面積爲零之三角形, 如由聯結位於一直線上之三點所得者然. [參閱 §§11, 13 (i)] 吾人可藉書出此條件而逕得該方程式.

例題

1. 求通過 (2, 3) 與 (−4, 1) 二點之直線方程式.

所求方程式爲

$$\frac{y-3}{1-3}=\frac{x-2}{-4-2}, \quad \text{或} \quad \frac{y-3}{-2}=\frac{x-2}{-6};$$

由此可得

$$3(y-3)-(x-2)=0,$$

或*
$$3y-x-7=0.$$

2. 求通過點 (3, 2) 與聯結 (4, 5) 及 (8, 7) 所成直線之中點之直線方程式.

由 §8 系，聯結 (4, 5) 與 (8, 7) 二點所成直線之中點之坐標爲

$$x=\frac{4+8}{2}=6 \quad 又 \quad y=\frac{5+7}{2}=6.$$

通過 (3, 2) 與 (6, 6) 二點之直線方程式，即所求直線方程式，爲

$$\frac{y-2}{6-2}=\frac{x-3}{6-3},$$

或
$$\frac{y-2}{4}=\frac{x-3}{3},$$

由之而得
$$3(y-2)=4(x-3),$$

或
$$3y-4x+6=0.$$

3. 求頂點爲 (2, 1), (4, 2) 與 (6, 6) 之三角形三邊之方程式.

聯結 (2, 1) 與 (4, 2) 所成直線之方程式爲

$$\frac{y-1}{2-1}=\frac{x-2}{4-2},$$

由此
$$2(y-1)=x-2, \quad 或 \quad 2y-x=0.$$

聯結 (4, 2) 與 (6, 6) 所成直線之方程式爲

$$\frac{y-2}{6-2}=\frac{x-4}{6-4},$$

由此
$$2(y-2)=4(x-4), \quad 或 \quad y-2x+6=0.$$

同樣，可得聯結 (2, 1) 與 (6, 6) 所成之直線方程式爲

$$4y-5x+6=0.$$

§§ 42, 43 之結果亦可用幾何學求得之如次：——

45. 求過所與點沿所與向所作之直線方程式.（交代法）

---

* 通常當以將答案表呈"通"式爲最佳，果屬可能，則祇需將式中分母悉皆除去，使所有係數盡成整數

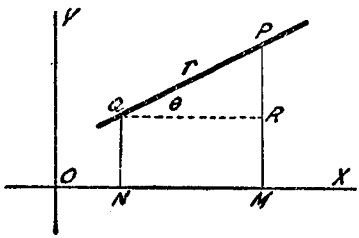


圖 30

令 Q 爲所與點 (x_1, y_1)，P 爲該線上之任何他點 (x, y).

作縱標 PM, QN.

作 $QR \parallel OX$, 又令 $\theta = \angle RQP$ = 該線在 OX 上所作之傾斜.

則 $\qquad QR = x - x_1$ 又 $RP = y - y_1$. [如 §5 中然]

茲因 $\qquad RP = QR \tan\theta$,

是故 $\qquad (y - y_1) = (x - x_1)\tan\theta$. ....[15]

46. 求通過二所與點所作之直線方程式.（交代法）

令所與點爲 $Q_1(x_1, y_1)$ 與 $Q_2(x_2, y_2)$，又令 $P(x, y)$ 爲該直線上之任何他點，作其他直線如圖中. 則

$Q_1R = x - x_1, \quad Q_1S = x_2 - x_1,$

$RP = y - y_1, \quad SQ_2 = y_2 - y_1.$

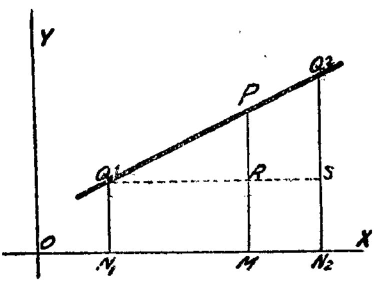


圖 31

因 △s Q_1RP 與 Q_1SQ_2 相似；故

$$\frac{RP}{SQ_2} = \frac{Q_1R}{Q_1S}. \qquad \text{[幾何學 13]}$$

是故

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.\text{……………………}[16]$$

47. 方程式 [15] 可書爲

$$\frac{y-y_1}{\sin\theta}=\frac{x-x_1}{\cos\theta}.$$

若令每端$=r$，吾人乃得

$$r\cos\theta=x-x_1,\quad r\sin\theta=y-y_1;$$

故，平方而相加，

$$r^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2,$$

是故 r=點 (x,y) 遠隔點 (x_1,y_1) 之距離. (§5)

此結果尤宜於用幾何學求得之如次：——

48. 求作通過所與點 (x_1,y_1) 並與 x 軸相交成所與傾斜 (θ) 所引直線之方程式使呈次形：

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r,$$

該處 r 爲自點 (x_1,y_1) 至點 (x,y) 之距離.

作圖法及圖形與 §45 中全同.

取 Q 點爲點 (x_1,y_1) 又 P 爲 (x,y).

作 $QR\parallel OX$，遇縱標 MP 於 R 點.

令 $\angle RQP$=角 θ，又令 $QP=r$.

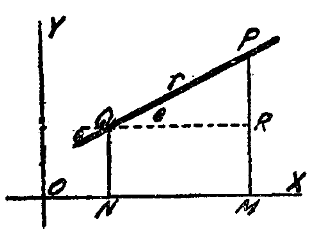


圖 32

令 $QR=QP\cos\theta$

又 $RP=QP\sin\theta$;

即 $x-x_1=r\cos\theta,$

$y-y_1=r\sin\theta;$

故 $$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r.\text{……}[17]$$

註——該直線方程式，嚴格言之，實由[17]之左二端所構成；第三端 r 乃係另一變數，即距離 QP. [稱爲"可變指向長度"，其義意詳見本節後譯者之附註中.]

方程式 [17] 因其能使吾人求出自所與點沿所與向所引直線之長是故頗關重要. 茲吾人試舉其應用一例如次:

[註] 譯者按: 方程式 [17] 可予化成下列兩種形式:

作圖 就圖 32 中，將 QP 與 QR 分別向左下方及正左方延長之，使各遇 OY 於 T 與 S 二點.

吾人首需證明 $\sin\theta=\cos\phi$，該處 ϕ 爲 QP 之延長線段 QT 與 OY 間之夾角.

證. 據幾何學中之對頂角定理可知

$$\angle SQT=\angle RQP=\theta,$$

又據幾何學中"三角形內角之和必等於 $180°$"一定理可知

$$\theta+\phi=90° \quad 或 \quad \theta=90°-\phi.$$

故由三角術可逕得

$$\sin\theta=\sin(90°-\phi)=\cos\phi.$$

或直接觀察圖 32，於直角三角形 QST 中,

$$\sin\theta=\frac{ST}{QT}, \quad 又 \quad \cos\phi=\frac{ST}{QT};$$

$$\therefore \sin\theta=\cos\phi.$$

(i) 參數式 (Parametric Form)——用單獨可變參數 r 表示某有向直線上任一點 P 之流動坐標 (x, y) 之方程式稱爲該直線之參數方程式 (Parametric Equations)，或稱爲該直線方程式之參數式.

由 [17] 可逕得

$$\begin{cases} x-x_1=r\cos\theta \\ y-y_1=r\sin\theta \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} x=x_1+r\cos\theta \\ y=y_1+r\sin\theta; \end{cases}$$

但因　　$\sin\theta=\cos\phi$, [證已見上]

$$\therefore\quad \begin{cases} x=x_1+r\cos\theta \\ y=y_1+r\cos\phi \end{cases} \text{,}\cdots\cdots\cdots\cdots[17a]$$

(ii) 對稱式 (Symmetric Form)

$\because$　　$\sin\theta=\cos\phi$,

$\therefore$ 方程式[17]當可書爲更較對稱之形式如次:

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\cos\phi}\ .\cdots\cdots\cdots\cdots[17b]$$

譯者於加述該二種直線方程式後,今更擬於讀者前介紹若干與其有關之習見名詞及其定義如次:

(1) 方向角 (direction angle) 介函於上向直線 (any line directed upward), 如圖 32 中之 QP, 與坐標軸間之夾角, 如圖 32 中之 θ 與 ϕ, 稱爲方向角. [他書中亦有以 α 與 β 表之者: 形雖不同, 其義則一.]

(2) 方向餘弦 (direction cosines) 某直線之方向角之餘弦曰該直線之方向餘弦, 如 $\cos\theta$, $\cos\phi$ 是.

(3) 可變指向長度 (variable directed length) 動點 $P(x, y)$ 向上移動時與定點 $Q(x_1, y_1)$ 間所隔之距離. [本書中以 r 表之. 但在其他教本中亦有用 ρ 表之者, 蓋所以避免初學者誤認其爲"常數".]

例　題

求通過點 Q, $(\sqrt{3}, 2)$, 並與 OX 交成 30° 角之直線方程式. 又求自 Q 點量至 P 點之直線之長, 在 P 點該線與直線 $\sqrt{3}\,x+y=9$ 相遇.

(i) 因　　$\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,　$\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$,

故該方程式表成 [17] 式爲

$$\frac{x-\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{y-2}{\frac{1}{2}}=r, \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(i)}$$

該處 r 爲 $(\sqrt{3}, 2)$ 與 (x, y) 二點間之距離.

左二端爲 $(x-\sqrt{3})=\sqrt{3}(y-2)$, 或 $x-\sqrt{3}y+\sqrt{2}=0$,

該方程式表成"通"式.

(ii) 以 r 表 x, y. 從 (i),

吾人得

$$\left.\begin{aligned} x&=\sqrt{3}+\frac{1}{2}r\cdot\sqrt{3} \\ y&=2+\frac{1}{2}r. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(ii)}$$

若 P 點 (x, y) 爲直線 (i) 與直線

$$\sqrt{3}\cdot x+y=9, \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(iii)}$$

相遇之點, 則 P 之坐標必滿足方程式 (iii).

故, 將表以 r 之 x 與 y 之值代入 (iii), 由 (ii), 吾人乃得 $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}r\sqrt{3}\right)+\left(2+\frac{1}{2}r\right)=9$;

故 $$5+2r=9,$$

或 $$r=2.$$

故所求 QP 之長爲 2.

習 題——§§41, 42, 與 45.

1. 求通過點 $(2,-3)$, 與 x 軸作角 $\tan^{-1}\frac{3}{5}$ 之直線方程式.

2. 求通過點 $(-5,-3)$ 並沿與直線 $2y+3x+4=0$ 同一之方向所引之直線方程式.

3. 求平分聯結 $(5, 3)$ 與 $(4, 4)$ 所成直線並與 x 軸作 $45°$ 角之直線方程式.

4. 求通過點 $(4, 4)$ 並與 x 軸作 $120°$ 角之直線方程式.

習 題——§§43, 44 及 46.

5. 若上例中之直線截雙軸於 A 與 B 二點, 求聯結原點至 AB 中點所成直線之方程式.

求聯結下列各對點所成直線之方程式:——

6. $(-5, 2)$ 與 $(7, 0)$.　　7. $(1,-2)$ 與 $(2, 2)$.

8. $(a,-b)$ 與 $(b,-a)$.　　9. $(-a, 0)$ 與 (a, b).

10. 求作由下列四線所構成之矩形之二對角線之方程式:

$$x=a_1,\qquad x=a_2,\qquad y=b_1,\qquad y=b_2.$$

11. 求作三頂爲點 (b, c), (c, a), (a, b) 之三角形各邊之方程式.

12. 設三角形三頂爲點 $(0, 0)$, $(2, 4)$ 及 $(-6, 4)$, 求其三邊之方程式.

13. 承前題, 於同一三角形中, 求通過各頂及對邊中點而引成之三直線之方程式. 試證該三線必會於同一點 $\left(-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

14. 又求聯結同前三角形三邊之中點所成之直線方程式.

15. 求通過點 (h, k) 並於二軸上截成相等截距之直線方程式 (用截距式).

16. 應用"垂線"式以求通過點 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$, 隔離原點之垂距爲 1 之直線方程式.

17. 求通過點 $(2, 2)$ 使在二軸上所成截距之和爲 9 之直線方程式, 並證明其有二解.

習　題——§§47, 48.

18. 通過 Q 點 $(-4, 1)$ 作一直線與 x 軸傾交成正弦爲 $\frac{3}{5}$ 之角. 求其方程式, 並求其上 Q 點二對面各遠 Q 點 10 單位距離處之二點之坐標系.

19. 求過 Q 點 $(2, 3)$ 與 x 軸作 45° 角之直線方程式, 並決定在 x 軸上包於 Q 點與直線 $x+y+1=0$ 間之線段之長.

試 卷 七

1. 當直線 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 通過 (x', y') 與 $\left(\frac{x'}{2}, 0\right)$ 二點時, 求決定該方程式之 a 與 b.

2. 決定方程式 $y=mx+b$ 中之 m 與 b，使該直線可通過 (4, 2) 與 (8, 10) 二點.

3. 求通過所與點沿所與向而引之直線之方程式.

4. 求通過點 (2, 1) 又與 x 軸傾交成 135° 角之直線方程式.

5. 求通過點 (h, k) 並 ∥ 直線 $Ax+By+C=0$ 之直線方程式.

6. 求通過二所與點之直線方程式.

7. 求通過 (4, 3) 與 (12, 7) 二點之直線方程式.

8. 求聯結頂點為 (4, 0) (6, 2) 與 (3, 3) 之三角形三邊之中點所成之三直線之方程式.

9. 求作通過所與點並與 x 軸成所與傾斜 (θ) 之直線方程式表成次式:

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r.$$

10. 自所與點沿所與向作一直線使與直線 $Ax+By+C=0$ 相遇，試求該所作直線之長.

第八章　點對於直線之位置—直線之交點—共點性條件

49. 令所與直線之方程式爲

$$Ax+By+C=0,$$

又令 (x', y') 爲 P 點之坐標.

當 P 點位於所與線上任何處時，式 $Ax'-By'-C$ 等於零. 若 P 點不位於該線上，則同式或正或負，但不爲零，若 P 點之位置漸自該線一邊移至他邊，則因正當 P 點越過該線時式 $Ax'+By'+C$ 當通過零值，吾人自可預知*其值當從正量變至負量，或反之. 雖然，若 P 點自一種位置移動至另一種位置而並不跨越該線，則在任何時期 $Ax'+By'+C$ 必不能成零，又其值顯不能不經爲零一階段即突然自正變成負；是故吾人可以斷言 $Ax'+By'+C$ 之值必始終保持同號.

由此吾人可推知該事實之或然率——

式 $Ax'+By'+C$ 爲正或負端隨點 (x', y') 位於方程式爲 $Ax+By+C=0$ 之直線之一邊或他邊而定.

50. 爲欲對前述一語作嚴正之證明起見，吾人應予求證——

點 (x', y') 在直線 $Ax+By+C=0$ 以上或以下端隨 $Ax'+By'+C$ 一量在代數學上具有與 B 相同或相反之符號而定.

令 P 爲點 (x', y')，又令縱標 PM 遇線 $Ax+By+C=0$ 於 Q 點.

因 Q 點具有與 P 點相同之橫標，又其坐標爲 (x', y_1). 因 Q 點位於該直線上，故 $Ax'+By_1+C=0$，又

---

* 雖然，此並非嚴正之證明.

$$Ax'+By'+C=Ax'+By_1+C+By'-By_1$$
$$=\quad 0 \quad +B(y'-y_1)$$
$$=\quad B(MP-MQ)$$

在代數學上，
$$=\quad B\cdot QP.$$

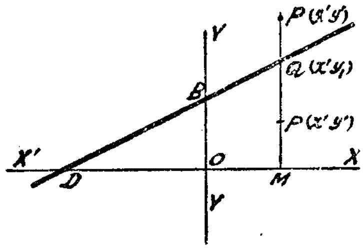


圖 33

若 P 點在該線以上，則 $MP>MQ$；故 $MP-MQ$ 爲正，又 $Ax'+By'+C$ 具有與 B 相同之符號.

若 P 點在該線以下，則 $MP<MQ$；故 $MP-MQ$ 爲負，又 $Ax'+By'+C$ 具有與 B 相反之符號.

51. 求二所與點或係位於所與直線之同側或係分別位於其異側之情形.

表該直線方程式呈一種形式使其右端爲零. 將該二點之坐標逐一代左端中之 x 與 y: 若結果兩者具同號則該二點乃在該直線之同側；若結果具反號，則該二點乃分別位於其異側.

此一定則可從前節結果證明之.

雖然，學者必當愼予注意，經將所與點之坐標代入所與直線方程式中而求得之表式，其眞實符號不特藉賴該點位於該直線之何側，並且憑依所書該直線方程式呈何種形式爲判. 因方程式

$$Ax+By+C=0$$

與

$$-Ax-By-C=0$$

乃表同一直線，但 $Ax'+By'+C$ 與 $-Ax'-By'-C$ 二式符號各異，雖然，$(x'y')$ 點之位置乃係固定者

於若干教科書中輒予吾人以次一定義:——"隨 $Ax'+By'+C$ 之爲正或負,吾人謂 (x',y') 點位於直線 $Ax+By+C=0$ 之正側或負側." 惟吾人對學者輒戒以弗襲用"正側"及"負側"二詞. 蓋因吾人頃已知悉用 -1 遍乘該方程式僅祇改變該方程式之形式而已,吾人所稱爲正側者適成負側,又反之亦然;是故該線每邊實具有或稱正側或稱負側之同樣理由.

52. 求所與點位於某直線之何側之最妥善之方法當爲比較其對於原點之位置. 因,將 $x=0$, $y=0$ 代入方程式左邊中,吾人得

$$A\cdot 0+B\cdot 0+C,\text{ 該式等於 } C.$$

是故若 $Ax'+By'+C$ 具有與 C 相同之符號,則 (x',y') 點當位於直線

$$Ax+By+C=0$$

之原點同側.*

若 $Ax'+By'+C$ 與 C 互具反號,則該點與原點將分別位於該線之異側. 若該線通過原點,則 $C=0$, 又吾人必當應用 § 49.

例　題

1. 求證 $(3,4)$ 點位於直線 $3x-2y+1=0$ 之原點同側.

代入,吾人得, $$3\cdot 3-2\cdot 4+1=+2,$$

又就原點言 $$3\cdot 0-2\cdot 0+1=+1;$$

又,因該二符號相同,故 $(3,4)$ 與 $(0,0)$ 二點當位於該直線之同一側.

---

*譯者按 "Origin side" 一詞之意義爲與原點所在處相同之一邊,爲簡便計,乃譯成"原點同側".

若吾人將該方程式書呈次式:

$$2y-3x-1=0.$$

則吾人亦可獲得同一結果, 因 $2\cdot4-3\cdot3-1=-2$,

及 $2\cdot0-3\cdot0-1=-1$,

於此一情形中二者俱得負.

若吾人援用'正''負'邊之慈人定義, 並爲他人以"(3, 4) 與 (0, 0) 二點究應位於該線之何側?"一問相詰難, 則吾人當可察知於第一情形中二者同位於正邊上, 而於第二情形中二者則同位於負邊上, 雖然, 該直線於任一情形中其本身必不致有何變化.

2. 試證 $(0, 0)$, $(-2, 2)$, $(-\frac{1}{2}, 3)$, $(2, 2)$ 四點乃位於由直線

$$2x+3y-6=0 \quad 與 \quad y-x-3=0$$

所構成之四個不同區域內.

將下列諸坐標代右列二式中之 (x, y)	$2x+3y-6$ 結果爲	$y-x-3$ 結果爲
$(0, 0)$	$-(=-6)$	$-(=-3)$
$\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$	$+(=2)$	$+\left(=\frac{1}{2}\right)$
$(-2, 2)$	$-(=-4)$	$+(=1)$
$(2, 2)$	$+(=4)$,	$-(=-3)$.

由是可見並無二點位於該二直線之同一側者, 是故各點必分位於各不同區域內.

此證可由圖上驗出之.

53. 求已與方程式之二直線交點之坐標, 聯立該二方程式則求解 x, y, 所得之根, 卽所求之坐標.

因該二直線所共具之任一點之坐標顯應滿足該二方程式, 而此情形對於其他諸點並不適合.

54. 三所與直線會交於一點之條件爲任二直線方程式之根(由聯立求解而得者)必滿足第三直線方程式.

因題中之根乃首二直線交點之坐標，又此點顯必位於該第三線上.

如是則吾人不惟當檢視該三線果否相會於一點，果然，抑且需求其相會於何處.

凡此法則當可推廣之使及於表以任何方程式之諸軌跡，一般言之，吾人輒可求得二軌跡不止一個之交點，但對於一次方程式所表之直線當屬例外.*

55. 已與三角形三邊之方程式，求該三角形之面積.

逐次取聯二方程式，經求解後乃得三頂之坐標，然後代之入公式 [3] 中.

例　題

1. 求次二直線之交點:

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(i)}$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(ii)}$$

以 B_2 乘 (i)，又以 B_1 乘 (ii)，更相減後，乃得

$$(A_1B_2-A_2B_1)\ x+C_1B_2-C_2B_1=0;$$

故
$$x=\frac{B_1C_2-C_1B_2}{A_1B_2-B_1A_2}.$$

以 A_2 乘 (i)，又以 A_1 乘 (ii)，倣此可得

$$y=\frac{C_1A_2-A_1C_2}{A_1B_2-B_1A_2};$$

是故該二直線相交於一點其坐標爲

$$\left(\frac{B_1C_2-C_1B_2}{A_1B_2-B_1A_2},\ \frac{C_1A_2-A_1C_2}{A_1B_2-B_1A_2}.\right);$$

---

* 譯者按：蓋因幾何學中曾有"二直線祇能相交於唯一之點"一定理.

表坐標 (x, y) 之式亦可書呈次形:

$$\frac{x}{B_1C_2-C_1B_2}=\frac{y}{C_1A_2-A_1C_2}=\frac{1}{A_1B_2-B_1A_2}.$$

2. 求下列三線交會於一點之條件:

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0, \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

$$A_3x+B_3y+C_3=0. \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{iii})$$

如前例中然，求得 (i) 與 (ii) 交點之坐標爲

$$x=\frac{B_1C_2-C_1B_2}{A_1B_2-B_1A_2}, \quad y=\frac{C_1A_2-A_1C_2}{A_1B_2-B_1A_2},$$

又線 (iii) 亦須通過該同一點之所求條件爲

$$A_3\left(\frac{B_1C_2-C_1B_2}{A_1B_2-B_1A_2}\right)+B_3\left(\frac{C_1A_2-A_1C_2}{A_1B_2-B_1A_2}\right)+C_3=0,$$

或 $$A_3(B_1C_2-C_1B_2)+B_3(C_1A_2-A_1C_2)+C_3(A_1B_2-B_1A_2)=0,$$

又或 $$A_1B_2C_3+B_1C_2A_3+C_1A_2B_3-A_3B_2C_1-B_3C_2A_1-C_3A_2B_1=0.$$

3. 求 $Ax+By+C=0$ 與 $Ax+By+C'=0$ 二線之交點.

若吾人從任一方程式減去另一者，乃得 $C-C'=0$ (或 $C'-C=0$)，顯係不可能者. 雖然，若吾人援用例 1 中所得之式而變易其字母，吾人乃得

$$x=\frac{B(C'-C)}{AB-BA}=\frac{B(C'-C)}{0}=\infty,$$

$$y=\frac{A(C-C')}{AB-BA}=\frac{A(C-C')}{0}=\infty,$$

該處∞示"無限"，如在三角術中然. 吾人乃得結論謂該二直線可視爲相交於無限或無窮遠處. 此語意謂該二直線互相平行，蓋因，若化之爲"正切"式，則成

$$y=\left(-\frac{A}{B}\right)x-\frac{C}{B} \quad 及 \quad y=\left(-\frac{A}{B}\right)x-\frac{C'}{B};$$

如是，則該二線之傾斜之正切二者皆等於 $-\frac{A}{B}$，又據 §28 可知彼此必相平行. 此種結果常可如是云云："平行線相會於無窮遠處，" 當二線交點愈去愈遠時，該二

線乃愈益近於平行．此乃吾人可以察得之確認上述一語之唯一方法．

4. 求證下列三直線全皆通過一點：——

$$3y+4x-7=0,\ 4y-5x=0,\quad 及\quad 3y+4x-7+2\ (4y-5x)=0.$$

此證由直接觀察此一特例立即可以顯見；因，若首二方程式可予滿足，則第三方程左端必致恆等於零．

從第三方程式之特種形式，吾人當能省去求該前二者之交點之工作；若使該式呈 $11y-6x-7=0$ 之形式，則此步工作固未能省略．此例題可以表示一種小巧思想慣將如何助吾人以避免關於解析方面之冗繁手續之一佳例．

5. 如欲令次三直線通過一點則當予 a 以何值方可，又此點何在？

$$3x+y+2=0, \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

$$2x-y+3=0, \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

$$x+4y+a=0. \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iii)}$$

將 (i), (ii) 相加，吾人求得 $5x+5=0$；故 $x=-1$．將 -1 代 (i) 或 (ii) 中之 x，吾人求得 $y=1$．如是 (i) (ii) 兩線相交於 $(-1,1)$ 點．據題中之條件，線(iii) 必須通過該同一點，故 $-1+4+a=0$，或 $a=-3$，又吾人求得點 $(-1,1)$．

注意——直線 $x+4y+a=0$ 恆 ∥ 直線 $x+4y=0$，是故此問題等於求 ∥ $x+4y=0$ 並通過 (i)，(ii) 二線交點之直線方程式．

習　題——§§49—55.

1. 點 $(2,1)$ 與 $(-4,3)$ 位於直線 $2x-3y+1=0$ 之何側？試證該二點皆位於直線 $x=3y$ 之同一側．

2. $(2,-3)$ 與 $(3,-2)$ 位於直線 $5x+6y=4$ 之同側抑或位於其異側？

3. 研討下列二直線中何線通過 $(4,3)$ 點與原點之間：

$$x-2y+1=0\quad 或\quad x-2y+4=0.$$

4. 試證原點與 $(1,1)$ $\left(0,\frac{5}{8}\right)$ $\left(\frac{9}{4},-3\right)$ 三點各在由次二直線所構成之四個不同區域之內：

$$3x+2y=1 \quad 與 \quad 5x+3y=2.$$

5. 一直線形之運河在某鎮正西 5 哩及正南 3 哩二處架橋橫越之. 試證位在距該鎮以西 3 哩以南 $1\frac{1}{2}$ 哩處之人必須橫過該河方可回至該鎮.

6. 試證次三直線全皆通過一點，並求此點. 又作圖以明之：

$$3x-2y+7=0, \quad 4x+y+3=0, \quad 與 \quad 19x+13y=0.$$

7. 求直線 $y=m_1x+b_1$，與 $y=m_2x+b_2$ 之交點.

8. 推求次三直線全皆通過一公共點之條件：

$$y=m_1x+b_1, \quad y=m_2x+b_2, \quad y=m_3x+b_3.$$

9. 試求 $Lx+My=1$ 及 $Mx+Ly=1$ 二直線之交點.

探討次三題中各組直線是否通過一點：——

10. $2x-5y+1=0$, $x+y+4=0$, 與 $x+3y+6=0$.

11. $5x-7y+99=0$, $3x-2y-77=0$, 與 $x-y-5=0$.

12. $3x+5y+7=0$, $4x-3y-10=0$, 與 $x+2y+2=0$.

13. 已與三角形三邊之方程式爲

$$2x+y=5, \quad x+2y=7, \quad 及 \quad x-y=1.$$

求該三角形之三頂及面積，並繪出其圖形

14. 試證 $(2, 2)$ 點位於前題之三角形以內.

15. 求已與三邊方程式爲 $8x-5y-1=0$, $7x-4y+1=0$, $x-y+1=0$, 之三角形三頂之坐標. 並求算其面積.

16. 作出上述三角形，並用解析方法求證原點位於其中.

17. 六邊形 $ABCDEF$ 之六頂爲 $(1, 3)$, $(0, 5)$, $(-2, 3)$, $(-3, 1)$, $(-2, -1)$ 與 $(2, -1)$ 六點. 試證 AD, BE, CF 通過同點，並求其坐標.

18. 求四邊依次爲直線 $x=2$, $y=1$, $3x+2y=16$, $3x-2y=0$, 之四邊形之頂，並試證其面積等於 $\frac{14}{3}$.

19. 承前題，於該四邊形中求兩對對邊沿長線之交點，及聯結此二交點所成直線之方程式.

20. 試證方程式 $Ax+By+C+k(A'x+B'y+C')=0$ 乃表通過 $Ax+By+C=0$ 及 $A'x+B'y+C'=0$ 二直線交點之直線.

又求如使其亦可通過原點則 k 必當具有何值.

21. 試證直線 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ 與 $x\cos\beta+y\sin\beta=p$ 相交於一點其坐標爲

$$p\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sec\frac{1}{2}(\alpha-\beta) \quad 及 \quad p\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sec\frac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

(此證需用三角術中關於二已與角之半和與半差之公式)

22. 若 $p_1x+q_1y=1$, $p_2x+q_2y=1$, $p_3x+q_3y=1$ 三直線全皆通過一點, 則坐標爲 (p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3) 之三點當全位於一直線上, 又反之亦必眞確.

試　卷　八

1. 試表如何求二所與點位於所與直線之同側抑或異側.

2. 討論 $(4, 2)$ 與 $(3, -4)$ 兩點是否位於直線 $3x+2y=5$ 之原點同側.

3. 試檢定原點係位於三頂爲 $(1, 1)$ $(-3, -1)$, 與 $(2, -5)$ 之三角形之內或外.

4. 求二所與直線交點之坐標.

5. 求 $4x+3y=10$ 與 $3x+5y=13$ 二直線交點之坐標.

6. 求三邊爲 $3x+y=7$, $5x+3y=13$ 與 $7x+3y=23$ 之三角形各頂.

7. 求以方程式, $x=3$, $y=4$, $y=x$, $y=2x$ 表四邊之四邊形二對角線之方程式.

8. 求三所與直線交會於一點之條件.

9. 試證直線 $4x-3y-1=0$, $6x+8y+1=0$, 及 $2x+11y+2=0$ 交會於一點.

10. 求直線 $lx+my+n=0$ 通過次二直線交點之條件:

$$Ax+By+C=0 \quad 與 \quad A'x+B'y+C'=0.$$

第九章

二直線間所夾之角·平行與正交之條件
從已與點至已與直線上所引垂線之長

當討論二所與直線間之夾角時，吾人應援用歐氏幾何學 I. 32. 此命題顯示若吾人有二直線並欲求二者間之夾角，則凡吾人所應知者乃爲該二直線與引與相交之任一第三直線所作之二角. 若此二角俱係從該第三直線之同一方向而量得者（依據習常三角術中之符號慣例），則該二角之差卽等於該所與二直線間之夾角.

若該二直線彼此平行，則據歐氏幾何學 I. 29 可知其必各與引交二者之任一直線之同一方向作成等角. 從歐氏幾何學 I. 32，吾人亦可推得平行之條件爲：——若二直線相互平行，則彼此間之夾角爲零；故該二直線各與與之相交之直線之同一方向所作之二角之差亦必爲零.

正交條件亦可由歐幾 I. 32 推得之；因該二直線與與之相交之任一直線所作之兩角之差定必爲直角.

有此導言，則吾人對於 §§56—58 中所應用之方法必可完全了解.

56. 求方程式書呈次形之二直線間之夾角:

$$y=m_1x+b_1 \quad 及 \quad y=m_2x+b_2.$$

令此二方程式各表直線 A_1PB_1 與 A_2PB_2，又令 $\angle A_1PA_2$ $(=\angle B_1PB_2)$ 爲 ϕ.

吾人今知 (§26) $\tan XA_1P=m_1$ 及 $\tan XA_2P=m_2$.

兹因（歐幾 I. 32） $\angle\phi$ 或 $\angle A_1PA_2=\angle XA_2P-XA_1P$;

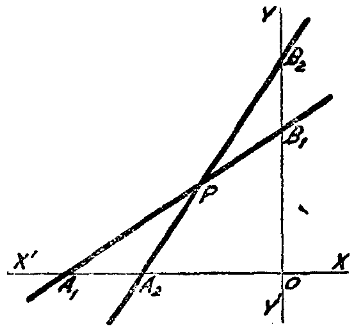


圖 34

故 $$\tan\phi = \tan(XA_2P - XA_1P)$$

$$= \frac{\tan XA_2P - \tan XA_1P}{1 + \tan XA_2P \tan XA_1P};$$ …[三角術9]

是故，由上可得，

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1},$$

或，該二直線間之夾角，

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots [18]$$

此處 ϕ 乃旋轉線須繞 P 點沿正向自 A_1B_1 轉至 A_2B_2 所移過之角. 該二線間之另一角，$\angle B_2PA_1$，乃此角之補角，又其正切其與前相同之絕對值，惟反號而已，即

$$\frac{m_1 - m_2}{(1 + m_2 m_1)}.$$

57. 求二直線相互平行之條件.

仍用前節中之圖形及記法，因該二直線相互平行，故二者與 x 軸作成等角，

即 $$\angle XA_1B_1=\angle XA_2B_2;$$

故 $$\tan XA_1B_1=\tan XA_2B_2,$$

或 $$m_1=m_2\ (\text{試與 §28 相較}), \quad \cdots\cdots[19]$$

即於表呈 $y=mx+b$ 形式之該二直線方程式中 x 之係數必相等.

58. 求一直線垂直於另一直線之條件.

仍用 §56 中之圖形及記法，但使 $\angle A_1PA_2=90°$ 而已.

如是，則 $$\angle XA_2P-\angle XA_1P=90°;$$

故 $$\angle XA_2P=90°+\angle XA_1P,$$

又 $$\tan XA_2P=\tan(90°+XA_1P)$$

$$=-\cot XA_1P$$

$$=-\frac{1}{\tan XA_1P}; \qquad [\text{三角術 } 6]$$

是故正交條件當爲

$$m_2=-\frac{1}{m_1}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots[20]$$

或 $$m_1m_2=-1, \quad \text{又} \quad \therefore m_1m_2+1=0;$$

即一方程式中 x 之係數必等於並反號於另一方程式中 x 係數之倒數.

前述二條件如 [19] 與 [20] 中所表者，亦可逕由方程式 [18] 推得之.

若該二直線相互平行，$\phi=0$;

$$\therefore \tan\phi=0, \qquad \therefore m_2-m_1=0.$$

若該二直線彼此相垂直，$\phi=90°$；

$$\therefore\ \tan\phi=\infty,\qquad \therefore\ 1+m_1m_2=0.$$

例　題

1. 求直線 $4x-3y+2=0$ 與 $7x+y-1=0$ 間之夾角.

該二直線方程式可予書呈次形:

$$y=\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}\quad 及\quad y=-7x+1;$$

故代入 [18] 可得

$$\tan\phi=\frac{-7-\dfrac{4}{3}}{1-\dfrac{28}{3}}=\frac{-\dfrac{25}{3}}{-\dfrac{25}{3}}=1,$$

故 $$\phi=45°.$$

2. 試證 $y=3x+9$ 與 $2y=6x+7$ 二直線相互平行.

第二方程式可書爲 $y=3x+3\dfrac{1}{2}$，由 [19] 該式一望可知其平行於 $y=3x+9$.

3. 試證 $3y+x=6$ 及 $3x-y=19$ 二直線彼此相垂直.

該二方程式可以分別書成 $y=-\dfrac{1}{3}x+2$ 及 $y=3x-19$，是乃滿足條件 [20] 之兩直線.

59. 求與呈下列通式之二直線間之夾角:

$$A_1x+B_1y+C_1=0\quad 及\quad A_2x+B_2y+C_2=0.$$

將此二方程式書呈次形:

$$y=-\frac{A_1}{B_1}x-\frac{C_1}{B_1}\quad 及\quad y=-\frac{A_2}{B_2}x-\frac{C_2}{B_2},$$

又援用方程式 [18]，吾人乃得

$$\tan\phi=\frac{-\dfrac{A_2}{B_2}+\dfrac{A_1}{B_1}}{1+\dfrac{A_2}{B_2}\cdot\dfrac{A_1}{B_1}}=\frac{A_1B_2-B_1A_2}{A_1A_2+B_1B_2}.$$

於演算數字題時當以化所與方程式成"正切"式而逕卽援用 [18] 求之爲佳，以免強記此較煩之公式. 雖然，下述條件式固應牢記之.*

60. 平行之條件 [據 19] 爲

$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2} \quad \text{或} \quad \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots [21]$$

或該二方程式中 x, y 之係數必成正比例.

就特殊情形言之，直線

$$Ax+By+C=0 \quad \text{及} \quad Ax+By+C'=0,$$

彼此互相平行；如是可知若二直線方程式僅只常數項互異，則彼此必相平行.

61. 正交之條件 [據 20] 爲

$$\frac{A_2}{B_2}=-\frac{B_1}{A_1}, \quad \text{或} \quad A_1A_2+B_1B_2=0; \cdots\cdots\cdots [22]$$

卽 x 係數之積 $+y$ 係數之積 $=0$.

就特殊情形而言，直線

$$Ax+By+C=0 \quad \text{及} \quad Bx-Ay+C'=0$$

兩相垂直；是故乃得下列

定則：求垂直於所與直線之直線方程式. 互換 x 與 y 之係數並變易其一之符號.

* 切盼學者能將 §§59—61 中之方程式改用其他字母書出之，如 $ax+by+c=0$，$lx+my+n=0$，庶免拘泥之弊.

因常數項可任意取爲任何文字或數字，故據上定則，吾人可得無數直線；如是，吾人可選定一常數使該線更通過某所與點．關於此點，容於附接 §62 以后之例題中加以解釋．

62. 垂線式——尙有另一種情形須予注意者．若二線方程式與呈"垂線"式，則該二直線間之夾角顯卽等於該二垂線間之夾角；如是可知：——

$$x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1=p_1 \text{ 與 } x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2=p_2$$

二直線間之夾角爲 $(\alpha_2-\alpha_1)$.

平行之條件爲 $\alpha_2=\alpha_1$.

正交之條件爲 $\alpha_2-\alpha_1=\pm 90^\circ$ 或 $\pm\frac{\pi}{2}$.

例 題

1. 求⊥直線 $6x-7y+17=0$ 並通過 $(1,2)$ 點之直線方程式．

方程式 $7x+6y+c=0$ 表⊥所與直線之任何垂線．

因 $(1,2)$ 點必在該垂線上，故該方程式必爲 $x=1$ 及 $y=2$ 所滿足；卽 $7\times1+6\times2+c=0$；

故 $$c=-19.$$

如是乃得所求方程式爲 $$7x+6y-19=0.$$

2. 求通過 (x_1, y_1) 點並 ∥ 及 ⊥ $Ax+By+C=0$ 之二直線方程式．

(i) 方程式 $Ax+By+C'=0$ 表 ∥ 所與線之任何平行線．若其通過 (x_1, y_1)，則 $Ax_1+By_1+C'=0$．相減之，消去未知常數 C'；故所求方程式爲

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0.$$

(ii) 所求之方程式爲 $Bx-Ay+C'=0$ 之前須受 $Bx_1-Ay_1+C'=0$ 一條件所限制者．如前相減；故得該方程式爲

$$B(x-x_1)-A(y-y_1)=0,$$

該式亦可書爲
$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}.$$

3. 求通過 (2, 3) 點並與直線* $y=2x+4$ 作成正切爲 $\frac{1}{3}$ 之夾角(沿與該直線之反向量之)所引成之二直線之方程式.

令 $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$, 係所與之角, 卽每一直線與直線 $y=2x+4$ 所作之角, 以 ϕ 表之; 又令 $\tan^{-1}2$, 係直線 $y=2x+4$ 與 x 軸所作之角, 以 θ 表之.

則從理想或已繪之圖中顯然可見所求直線當各與 x 軸作成 $\theta+\phi$ 與 $\theta-\phi$ 兩種角度; 又因二者均過 (2, 3) 點, 故據 [15], 其方程式應爲

$$y-3=\tan(\theta+\phi)(x-2)$$

及
$$y-3=\tan(\theta-\phi)(x-2).$$

據三角術,

$$\tan(\theta+\phi)=\frac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi}=\frac{2+\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}=7,$$

$$\tan(\theta-\phi)=\frac{\tan\theta-\tan\phi}{1+\tan\theta\tan\phi}=\frac{2-\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}}=1;$$

故所求方程式爲

$$y-3=7(x-2) \quad 及 \quad y-3=x-2,$$

或
$$7x-y-11=0 \quad 及 \quad x-y+1=0.$$

63. 求點 (x', y') 離開方程式爲

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$$

* 愼予注意此題與 §56 之研究有何不同之點.

之直線之垂距.

令 AB 爲所與直線，P 爲所與點 (x', y')，d 爲所求垂線 NP 之長.

作 $A'PB' \parallel AB$，又作公共垂線 OTT'；吾人今知 $OT=p$，又 $\angle AOT=\alpha$. [§§35, 36.]

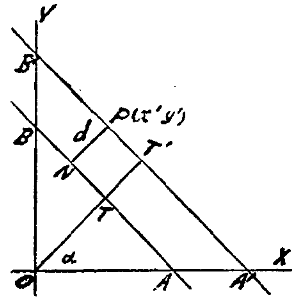


圖 35

$A'B'$ 之方程式顯爲

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=OT'$$

$$=OT+NP\ (\text{據}\ \square TNPT'\ \text{可知})$$

$$=p+d.$$

又，P 位於 $A'B'$ 上；故其坐標 (x', y') 應滿足此方程式，

卽 $$x'\cos\alpha+y'\sin\alpha=p+d.$$

故 $$d=x'\cos\alpha+y'\sin\alpha-p, \qquad [23]$$

此乃吾人所欲求者.

此公式甚易記憶，蓋因吾人僅需將該點之坐標代入次式中，結果卽得該垂線之長.

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p.$$

64. 於上列圖形及研究中，吾人曾令 P 點位於該線遠隔原點之一邊上．由 §51，就此情形言，式 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p$ 應爲正．雖然，若 P 點位於該線之原點同邊，則 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p$ 爲負．但爲欲使公式 [23] 可予一般通用

計，但需採用與在坐標系情形中相同之慣例，卽垂線方向可用其代數符號示之．若吾人假設從位於遠隔原點之一邊上之諸點所引之垂線皆視爲正，又從原點同邊所引之垂線爲負，則公式［23］，就各種情形而言，當可決定點 (x', y') 遠隔直線 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ 之垂距之符號及長短．

§63 之證全係一般的，意謂凡所函之長皆可視爲應受同一代數慣例所限制者．雖然，如欲使此事實更趨明朗化，吾人今當證明在直線 AB 之原點同邊之 $P,(x', y')$ 點之垂距 PN 可用正量．

$$-(x'\cos\alpha+y'\sin\alpha-p) \quad 或 \quad p-x'\cos\alpha-y'\sin\alpha.$$

單獨表其大小．

作直線 $A'T'PB' \parallel ATB$，如前，又以 d' 表垂線 PN，吾人於此情形中可得

$$OT'=OT-PN=p-d',$$

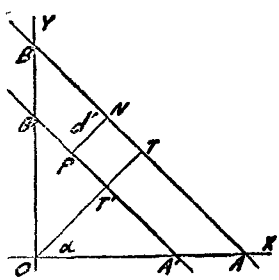


圖 36

故 $A'B'$ 之方程式乃爲

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p-d';$$

又，因 P 點位於 $A'B'$ 上，故

$$x'\cos\alpha+y'\sin\alpha=p-d';$$

由此，
$$\begin{aligned} d'&=p-x'\cos\alpha-y'\sin\alpha \\ &=-(x'\cos\alpha+y'\sin\alpha-p). \end{aligned}$$

65. 求 (x', y') 點離隔直線 $Ax+By+C=0$ 之垂距．

化所與直線方程式呈"垂線"式，如 §38 中然；該方程式乃成

$$-\frac{A}{\pm\sqrt{(A^2+B^2)}}x-\frac{B}{\pm\sqrt{(A^2+B^2)}}y=\frac{C}{\pm\sqrt{(A^2+B^2)}},$$

式中所有之根皆應令具同號．

故，由 [23]，

$$d=-\frac{A}{\pm\sqrt{(A^2+B^2)}}x'-\frac{B}{\pm\sqrt{(A^2+B^2)}}y'-\frac{C}{\pm\sqrt{(A^2+B^2)}},$$

或
$$d=\frac{Ax'+By'+C}{\pm\sqrt{(A^2+B^2)}}.\dots\dots\dots\dots[24]$$

如前節中然，若恆令該根具有同一符號，則據該結果之代數符號當可決定該垂線之方向，但於數字題中僅需求得其長已足．職是之故，吾人當可不計結果之符號，又若吾人必欲求出 (x', y') 點位於該線之何側，則最簡之法厥爲應用 §51 中之定則．

例　題

1．求 (1, 11) 遠隔直線 $6x-8y-3=0$ 之垂距．所求距離 [由 24] 爲

$$d=\frac{6\times1-8\times11-3}{\sqrt{(6^2+8^2)}}=-\frac{85}{10}=-8\frac{1}{2},$$

又，不計符號，該距離爲 $8\frac{1}{2}$．

2．求點 (a, b) 遠隔直線 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 之垂距．

所求距離爲

$$d=\frac{\frac{a}{a}+\frac{b}{b}-1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=\frac{2-1}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

習　題——§§56—62.

1．求 $y-\sqrt{3}x-5=0$ 及 $\sqrt{3}y-x+6=0$ 二直線間所成之角．

2．求 $x-2y+1=0$ 及 $x+3y+2=0$ 二直線間之夾角．

3．求直線 $4x+3y+5=0$ 及 $3x-4y-2=0$ 間之夾角．

4．求直線 $2x-y+1=0$ 及 $11x-(8+5\sqrt{3})y+5\sqrt{3}=0$ 間之夾角．

5. 求 $y=mx+b$ 與 $(m-1)x-(m+1)y=(m^2-1)b$ 二直線間所夾之角.

6. 求過 (3, 2) 點並各平行及垂直於 $y=2x+5$ 之兩直線方程式.

7. 求過點 $(2,-1)$ 並各 $\parallel$ 及 $\perp$ $3x+y=2$ 之兩直線方程式.

8. 求通過 $(-1,-3)$ 點並各 $\parallel$ 及 $\perp$ $x+7y=2$ 之二直線方程式.

9. 求過原點並 $\perp$ 聯結 $(3,-6)$ 與 $(4, 5)$ 二點所成直線之直線方程式.

10. 求通過原點而與直線 $y=5x+6$ 交成 $45°$ 角之二直線方程式. 又求沿相同方向通過 (1, 1) 點之直線方程式.

11. 求通過原點而與直線 $x+y\sqrt{3}+3\sqrt{3}=0$ 作 $60°$ 角之直線方程式；並求其與該直線相遇之點之坐標.

12. 求從三角形三項 (0, 0), (2, 3), 與 $(-1, 2)$, 至其對邊上所引之垂線之方程式；又求此等垂線之交點.

13. 將方程式 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 與 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 化成"垂線"式 (或否則), 試證, 若 ϕ 爲該二方程式所表之二線間之夾角, 則

$$\sin\phi=\frac{A_1B_2-B_1A_2}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2)}\ \sqrt{(A_2^2+B_2^2)}},$$

又

$$\cos\phi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2)}\ \sqrt{(A_2^2+B_2^2)}}.$$

習 題——§§63—65.

14. 求 (0, 3) 點離開直線 $2x+3y+6=0$ 之垂距.

15. 求 $(6, -5)$ 點遠去直線 $4x-3y-9=0$ 之垂距.

16. 求點 (1, 3) 去直線 $12x-5y-10=0$ 之垂距.

17. 求點 (b, a) 去直線 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ 之垂距.

18. 求點 (0, 0) 離直線 $y=\sqrt{3}x+4$ 之垂距.

19. 求從三角形三項 (0, 0), $(1,-1)$, (3, 2) 引至各對邊上之垂線之長.

20. 承前題, 更求該三角形三邊之長, 又驗證任一邊與對應垂線之乘積必等於該三角形面積之兩倍.

21. 試證原點等距次三直線：

$$4x+3y+10=0, \qquad 5x-12y+26=0, \qquad 7x+24y=50.$$

22. 求三邊爲 $3x+y=7$, $3y-x=1$, 及 $7y+x+11=0$ 三直線之三角形各頂之坐標；並求從此等頂至各頂邊上所引諸垂線之長.

23. 若 p 爲原點去在二軸上之截距爲 a 與 b 之直線之垂距，求證

$$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

24. 若 A, B, P 各爲 $(a, 0)$, $(0, b)$ 與 (h, k) 三點，求自 P 點引至 AB 上之垂線之長 d；並校驗此長與距離 AB 二者之乘積等於面積 APB 之兩倍

25. 在一直線上，有一火車站位於某鎮之正東 5 哩，另一站位於該鎮以西 1 哩，以北 $4\frac{1}{2}$ 哩．求欲達一站使能距離該鎮最近，當在何處，並決定此距離.

26. 求在 x 軸上之一點，其去直線 $3x+4y=12$ 之垂距爲 4 且係位於該線遠隔原點之一邊者.

27. 求在直線 $y=x$ 上之一點，係在直線 $4y+3x=1$ 之原點同邊且相去 5 單位距離、

28. 求從 $(3, -3)$ 點引至直線 $x-2y=4$ 上之垂趾之坐標.

29. 求自 $(-2, 0)$ 點至直線 $2x+3y=9$ 上之垂趾之坐標.

30. 求自 (h, k) 點至直線 $y=mx+b$ 上之垂趾之坐標.

31. 求自 (a, b) 點至直線 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ 上之垂趾之坐標.

32. 承前題，用公式 [1] 求 (a, b) 點去該垂趾之距離，並證明該距離與公式 [23] 之結果全符.

試卷九

1. 求 $y=m_1x+b_1$ 及 $y=m_2x+b_2$ 二直線間之夾角.

2. 求直線 $3x+4y=8$ 與 $2x+3y=5$ 間夾角之正切.

3. 求通過 $(1, 2)$ 點並與直線 $y+x=3$ 傾交成 60° 角之直線方程式.

4. 求二所與直線相平行之條件.

5. 試表如何求 $ax+by+c=0$ 及 $a'x+b'y+c'=0$ 二直線彼此垂直或正交之條件.

6. 試證直線 $4x-3y-1=0$ 與 $6x+8y+1=0$ 彼此正交.

7. 求 (h, k) 點去直線 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ 之垂距.

8. 求自原點至直線 $h(x-h)+k(y-k)=0$ 上所引垂線之長.

9. 求 $3x+2y+4=0$ 與 $2x+5y+8=0$ 二直線之交點去直線 $y=5x+6$ 之距離.

10. 求通過原點至直線 $3y=2x+6$ 上所引垂線之方程式；並求該垂線之長.

第十章

所與角之平分線方程式及通過二所與線之交點之直線方程式

66. 相交於 Q 點之任二直線 AQB, CQD, 在 Q 點作成四角, 又有平分此四角之二直線. 其一 P_1QP_2 平分 AQC 與 BQD 對頂角, 另一平分線 P_3QP_4 平分 CQB 與 DQA 對頂角.

若 P 點爲位於此二平分線任一線上之一點, 又自 P 引 PM 與 PN 分別⊥該二直線之本身, 則, 因 $\angle PQM=\angle PQN$, 由幾何學吾人可以立知 $PM=PN$. 是故該平分線乃與該二直線等距離之點之軌跡.

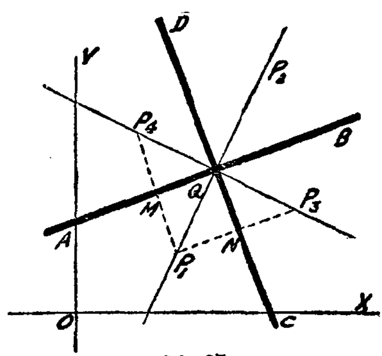


圖 37

67. 求平分下列所與直線間之夾角之二直線方程式.

$$x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1=0$$

與

$$x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2=0.$$

每一平分線乃係與該二直線等距離之點之軌跡.

令 (x, y) 爲在該二平分線之任一線上之點, 則 (x, y) 去該二線之垂距在代數學上乃以 d_1 與 d_2 二者表之, 該處 [由 23]

$$d_1=x\ \cos\ \alpha_1+y\ \sin\ \alpha_1-p_1, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

$$d_2=x\ \cos\ \alpha_2+y\ \sin\ \alpha_2-p_2. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

就平分線 P_1QP_2 [參閱圖 37] 而言，該線平分函具原點之 $\angle AQC$，上述 d_1 與 d_2 之值兩皆為正 [如在 P_2 點乃係位在兩線之"原點"異側 (non-origin side)] 或兩皆為負 [如在 P_1 點乃係位在兩線之"原點同側" (origin side)]；因該二距離必相等，是故在該平分線上之各點吾人必得

$$d_1=d_2,$$

或 $$x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1=x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2. \cdots\cdots\text{(iii)}$$

就另一平分線 P_3QP_4 而言，d_1 與 d_2 各如 (i) 與 (ii) 所示者，一正一負．因二者之大小曾假定其相等，故彼此必相等而反號．是故，凡在此平分線上諸點必然 $d_1=-d_2$，

或 $$x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1=-(x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2). \cdots\text{(iv)}$$

故總括上述吾人乃得該二平分線方程式之公式為

$$x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1=\pm(x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2), \cdots[25]$$

其中正號乃指函具原點之角之平分線．

68. 求函於次二直線間之夾角之二平分線方程式：

$$A_1x+B_1y+C_1=0$$

與 $$A_2x+B_2y+C_2=0.$$

若 (x, y) 為該二平分線之任一線上之任一點，又若其位

於由所與二線所構成之"函有原點"之區域或鉛直相反之區域中，則從 $(x,\ y)$ 引至該二直線上之垂線之長 d_1 與 d_2 必定相等；而若 $(x,\ y)$ 位於與函有原點之區域相鄰之兩個區域之任一域中，則 d_1 與 d_2 定必等量而反號.

今 [由 24],

$$d_1=\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\mp\sqrt{(A_1^2+B_1^2)}},\quad \text{又}\quad d_2=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\mp\sqrt{(A_2^2+B_2^2)}}.$$

是故吾人必得

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2)}}=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{(A_2^2+B_2^2)}},$$

[譯者按：此乃上述前一情形]

故該式乃該二平分線之一之方程式，或得

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2)}}=-\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{(A_2^2+B_2^2)}},$$

[此乃上述後一情形]

此乃另一平分線之方程式.

是故上述二方程式可予合併,表以次一公式:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2)}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{(A_2^2+B_2^2)}}.\quad\cdots\cdots\cdots[26]$$

將 [26] 與 [25] 兩相比較，吾人可知，就函有原點之角之平分線而言，兩邊常數項具有同號；至另一平分線則適具反號.

半記之，吾人察得，若平分線通過原點，則在兩邊之常數項必須相等，且具同號．若該平分線在原點區域以內，則吾人必當取用同號，儼若其通過原點然．

例　題

1．求直線 $3x+y-7=0$ 與 $x-3y+5=0$ 間之夾角之平分線．

令 (x, y) 爲該二平分線之任一線上之點；則從 (x, y) 引至該二所與直線上之垂線之長由 [24] 可知其各爲

$$\frac{3x+y-7}{\sqrt{(3^2+1)}} \quad 及 \quad \frac{x-3y+5}{\sqrt{(1+3^2)}},$$

置符號於不顧．

因該二垂線必相等，故此二式必相等，或量相等而號相反，

故
$$3x+y-7=\pm(x-3y+5),$$

又該二平分線爲

$$4x-2y-2=0 \quad 及 \quad 2x+4y-12=0,$$

即
$$2x-y-1=0 \quad 及 \quad y+2y-6=0.$$

[註——從其方程式吾人可知此二平分線必彼此相交成直角，或相正交.]

2．求 $3x+4y=7$ 與 $8x+6y=13$ 二線間夾角之平分線．

由 [26]，所求二平分線方程式可函括於次一公式內：

$$\frac{3x+4y-7}{\sqrt{(3^2+4^2)}}=\pm\frac{8x+6y-13}{\sqrt{(8^2+6^2)}},$$

或
$$2(3x+4y-7)=\pm(8x+6y-13);$$

故所求二方程式爲

$$2x-2y+1=0 \quad 及 \quad 14x+14y-27=0.$$

3．用解析法證明次二平分線彼此成直角：

$$x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1=\pm(x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2).$$

所與二平分線方程式可分書成

$$x(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)+y(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)-(p_1-p_2)=0,$$

$$x(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2)+y(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2)-(p_1+p_2)=0.$$

∴ (x 係數之積)+(y 係數之積)

$$=(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)\ (\cos\alpha_1+\cos\alpha_2)+(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)\ (\sin\alpha_1+\sin\alpha_2)$$

$$=\cos^2\alpha_1-\cos^2\alpha_2+\sin^2\alpha_1-\sin^2\alpha_2$$

$$=(\cos^2\alpha_1+\sin^2\alpha_1)-(\cos^2\alpha_2+\sin^2\alpha_2)=1-1=0;$$

即此可證 (§61) 該二平分線彼此交成直角，蓋吾人從純正幾何學可以知之.

69. (i) 求通過已與方程式之二直線交點之直線通式，並(ii) 決定通二已與直線之交點且滿足某另一已與條件之直線.

吾人儘可應用 §53 所述之法以求該二直線之交點，及應用 §42 之方程式 [15] 或 §43 之方程式 [16] 藉以書出通過此點之所求直線之方程式. 否則，如用別法，則解該二方程式之麻煩手續當可全免，且尤以應用下述定則，更可使工作益趨簡化.

定則.——(I) 用未知常數 k 遍乘該二直線中任一線之方程式，復使之與另一方程式相加. 就一切 k 值言，該終結方程式乃表通過二所與線之交點之直線.

(II) 從表另一所與條件之方程式決定 k 值，又將此值代入直線方程式中.

證.——令該二直線之方程式爲

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

與

$$A_2x+B_2y+C_2=0. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

若吾人以 k 徧乘 (ii)，又加之於 (i)，則，據定則 (I)，吾人乃得方程式

$$A_1x+B_1y+C_1+k(A_2x+B_2y+C_2)=0. \cdots\cdots\cdots\cdots[27]$$

此乃一次方程式，故其表一直線. 若取 x 與 y 值使同時滿足 (i) 與 (ii)，則方程式 [27] 乃成 $0+k.\ 0=0$，此乃顯然必然者；是故此等 x 與 y 值亦必滿足

[27]，又故表以該方程式之直線必通過 (i) (ii) 兩直線之交點. 又，因 k 可令具任何值，吾人可藉該線所滿足之另一所與條件而決定 k 值. 故 [27] 乃通過 (i) 與 (ii) 兩線之交點之直線方程式之最普通形式；就其作用言，此乃一個所與條件，又一直線僅能使之滿足二所與條件而已.

凡此定則極關重要，又甚多數字例題每因應用該等定則而獲求解之捷徑. 慣習次例，可以知之.

例 題

1. 求連接 $4x-5y+6=0$ 與 $3x-5y+12=0$ 二直線之交點與(3,4)點所成之直線方程式.

通過此等直線之交點之任何直線方程式爲

$$4x-5y+6+k(3x-5y+12)=0.\qquad\text{(i)}$$

將 $x=3$, $y=4$ 代入 (i) 吾人求得此線通過 (3, 4) 之條件爲

$$12-20+6+k(9-20+12)=0 \quad 或 \quad -2+k=0;$$

$$\therefore \qquad k=2;$$

又，代 $k=2$ 入 (i)，所求方程式爲

$$4x-5y+6+2\ (3x-5y+12)=0,$$

簡化之，即
$$2x-3y+6=0.$$

2. 求過 $x-7y+13=0$ 與 $7x+y-9=0$ 二直線之交點並分別平行及垂直於直線 $3x+4y+2=0$ 之方向所引之二直線方程式.

通過前二直線交點之任一直線爲

$$x-7y+13+k(7x+y-9)=0,\qquad\text{(i)}$$

或
$$(1+7k)x+(-7+k)y+(13-9k)=0.\qquad\text{(ia)}$$

(a) 假設此線 $\parallel 3x+4y+2=0$. 據 §60 之定則及方程式 [21]，乃得次之條件：

$$\frac{1+7k}{3}=\frac{-7+k}{4},$$

或
$$4(1+7k)-3(-7+k)=0,$$

$$\therefore\ 25+25k=0, \qquad \therefore\ k=-1.$$

代此 k 值入 (ia) 吾人乃得

$$-6x-8y+22=0,$$

或 $$3x+4y-11=0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(ii)}$$

此卽所求方程式.

(b) 假設線 (ia) $\perp 3x+4y+2=0$, 則, 據 §61 之定則及方程式 [22], 可得條件如次:

$$3(1+7k)+4(-7+k)=0;$$

故 $$-25+25\,k=0, \quad \therefore\ k=1;$$

由此, 如前, 代 k 值入 (ia), 吾人乃得

$$8x-6y+4=0,$$

或 $$4x-3y+2=0 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(iii)}$$

卽所求方程式.

此等方程式中常數之關係顯示直線 (ii) 與 (iii) 各據假定而分別 $\parallel$ 與 $\perp$ $3x+4y+2=0$.

共 點 性 條 件

***70.** 次法有時能使吾人檢視三所與直線是否通過一公點.

令 $$A_1x+B_1y+C_1=0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(i)}$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(ii)}$$

$$A_3x+B_3y+C_3=0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(iii)}$$

表三所與直線.

若吾人可能求得三常數量 k, l, m, 而將其同時代入次式中足令該式恆等於零(卽不計 x 與 y 之值若何); 則該三直線當必通過一公點:

$$k(A_1x+B_1y+C_1)+l(A_2x+B_2y+C_2)+m(A_3x+B_3y+C_3).$$

易言之，若用某數常數分乘 (i)，(ii)，(iii) 之左邊後相加之，吾人當能獲得使其本身簡化為 $0x+0y+0$ 或 0 之結果，則該等直線必全皆通過一公點.

此語之意義在審察其對於下列證明以後所附例題之應用後，吾人當可對之更益了然.

證.——假設吾人求 k, l, m 之值恆使

$$k(A_1x+B_1y+C_1)+l(A_2x+B_2y+C_2)+m(A_3x+B_3y+C_3)=0. \cdots[28]$$

令 (x', y') 為直線 (i) 與 (ii) 之交點. 則 x' 與 y' 乃為滿足該二方程式中之 x 與 y 之值；即成立次之關係：

$$A_1x'+B_1y'+C_1=0, \cdots\cdots(iv)$$

及

$$A_2x'+B_2y'+C_2=0. \cdots\cdots(v)$$

因 [28] 為一切 x 與 y 值所滿足，故其必為 $x=x'$ 與 $y=y'$ 所滿足，即，吾人乃得

$$k(A_1x'+B_1y'+C_1)+l(A_2x'+B_2y'+C_2)+m(A_3x'+B_3y'+C_3)=0.\cdots(vi)$$

由 (iv)，(vi) 之首項為零. 由 (v)，其第二項亦為零.

故該方程式乃成

$$k\times0+l\times0+m(A_3x'+B_3y'+C_3)=0,$$

或

$$m(A_3x'+B_3y'+C_3)=0;$$

又，因吾人並未假設 m 為零，則顯必

$$A_3x'+B_3y'+C_3=0,$$

即 (x', y') 位於直線 (iii) 上. 但，據假設，(x', y') 乃直線 (i) 與 (ii) 之交點. 是故直線 (i) 與 (ii) 之交點乃位於直線 (iii) 上，即該三直線必全通過一點.

* **71**. 若吾人可能由直接觀察法測知 k, l, m, 應為何值方可使方程式 [28] 成為一恆等式，則不妨應用上述定理. 雖然，遇必要時此法仍屬可行 因，書 [28] 成次形：

$$(A_1k+A_2l+A_3m)x+(B_1k+B_2l+B_3m)y+(C_1k+C_2l+C_3m)=0,$$

吾人可見，爲欲使其全可滿足起見，下列關係必可成立，且彼此必可相容，

$$A_1k+A_2l+A_3m=0,$$

$$B_1k+B_2l+B_3m=0,$$

$$C_1k+C_2l+C_3m=0,$$

又吾人必當從任二式間決定 k, l, m 之比，並代之入第三式；此法比較以前 §54 中所述者似更爲拙笨，更欠明白，並且不能決定公點之坐標。

例　題

1. 試證直線

$$4x-5y+6=0,\quad 3x-5y+12=0 \quad 及 \quad 2x-3y+6=0$$

悉過一點.

因 $1(4x-5y+6)+2(3x-5y+12)-5(2x-3y+6)=(4+6-10)x+(-5-10+15)y+6+24-30$ 恆$=0$；故關係式 [28] 乃以成立（該處 $k=1, l=2$，又 $m=-5$）.

2. 試證平分三角形各角之直線通過一點.

令原點取位於該三角形之內，又令三邊之方程式爲

$$x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1=0, \quad\cdots\cdots\text{(i)}$$

$$x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2=0, \quad\cdots\cdots\text{(ii)}$$

$$x\cos\alpha_3+y\sin\alpha_3-p_3=0. \quad\cdots\cdots\text{(iii)}$$

據公式 [25]，可得由 (i) (ii) 二線所構成之角之平分線爲

$$(x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1)-(x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2)=0. \quad\cdots\cdots\text{(iv)}$$

（因其平分函有原點之角）.

同樣可得其他二平分線，以次方程式表之：

$$(x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2)-(x\cos\alpha_3+y\sin\alpha_3-p_3)=0, \quad\cdots\cdots\text{(v)}$$

$$(x\cos\alpha_3+y\sin\alpha_3-p_3)-(x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1)=0. \quad\cdots\cdots\text{(vi)}$$

(iv), (v), (vi) 之左邊當相加時恆等於零. 故若 $k=l=m=1$, 則公式 [28] 卽可予滿足, 又故該三平分線必皆通過一點.

習 題——§§66—69.

試求由下列各對直線所構成之角之平分線,並求聯結該等交點至原點所成之直線之方程式:——

1. $y=2x-4$ 及 $y=3x-6$.

2. $4x+3y=3$ 及 $5x-12y=8$.

3. $x+y-3=0$ 及 $7x-y+5=0$.

4. 求三邊爲

$$4x+3y+7=0,\quad 5x+12y+20=0,\quad \text{與}\quad 3x+4y+8=0,$$

三直線之三角形各角之內角平分線.

5. 求連接 $3x+2y-5=0$ 及 $4x+3y+7=0$ 二直線之交點至 $(3, 1)$ 點所成直線之方程式.

6. 求連接 $y=x+1$ 與 $y=2x+2$ 二直線之交點至 $(0, 3)$ 點所成直線之方程式.

7. 求由連接直線 $y=mx+b$ 及 $x=my+a$ 之交點與點 (a, b) 而成之直線之方程式.

8. 求自三邊爲 $3x+y=2$, $x+2y=5$, $2x-3y+7=0$ 之三角形之三頂分別引至各對邊之垂線方程式. 並求此等垂線之交點.

9. 承前題, 在同一三角形中, 求過三頂且平行於各對邊之直線方程式.

10. 求通過 $3x+4y-11=0$ 及 $7y-x-13=0$ 二直線之交點並各垂直於其本身之直線方程式.

習 題——§§70, 71.

11. 求證次三直線通過一點:

$$(b+c)x+ay=d,$$

$$(c+a)x+by=d,$$

$$(a+b)x+cy=d.$$

已與 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 與 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 二直線相交於 P 點，求證下列諸結果：——

12. 連接 P 點至原點所成之直線方程式為

$$\frac{A_1x+B_1y}{C_1}=\frac{A_2x+B_2y}{C_2}.$$

13. 連接 P 點至點 (x', y') 所成之直線為

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_1x'+B_1y'+C_1}=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{A_2x'+B_2y'+C_2}.$$

14. 通 P 點且 $\parallel y=mx$ 之直線表成

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_1+mB_1}=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{A_2+mB_2}.$$

15. 從 P 點引至直線 $ax+by+c=0$ 上之垂線方程式為

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_1a+B_1b}=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{A_2a+B_2b}.$$

16. 因此證明從三角形三頂引至三對邊之垂線必通過一點.

[令 $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$, 及 $A_3x+B_3y+C_3=0$ 為三角形三邊之方程式.]

試　卷　十

1. 求表如何求平分 $ax+by+c=0$ 及 $a'x+b'y+c'=0$ 二所與線間之角之二直線方程式.

2. 求平分 $3x+4y-8=0$ 與 $4x+3y+6=0$ 二線間之夾角之直線方程式.

3. 試表如何求通過二所與直線之交點並滿足某另一條件之直線方程式.

4. 求通過原點及 $x=c$, $x+y+c=0$ 二直線之交點之直線方程式.

5. 求通過直線 $x=c$, $x+y+c=0$ 之交點並丄後者之直線方程式.

6. 求通過 $x+3y-a=0$ 與 $x-2y+4a=0$ 二直線之交點並 $\parallel$ 直線 $3x+4y$

$=0$ 之直線方程式.

7. 求通過 $2y-3x=10$, $12x+14y+29=0$ 二直線之交點並亦通過 $2y+x=6$, $16x-10y=33$ 二線之交點之直線方程式.

8. 求三直線 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ 及 $a''x+b''y+c''=0$ 共點之條件.

9. 試證直線 $x+3y+5=0$, $4x+6y-1=0$ 及 $3x+5y+1=0$ 遇於一公點.

10. 求使直線 $x-6y+a=0$ 可予通過直線 $2x+3y+4=0$ 與 $x+4y+1=0$ 之交點時之 a 值.

第十一章

二次方程式所表之直線—軸之變換

72. 定義.——表以 x 與 y 之一般二次方程式爲一種方程式，如諸特殊情形然，包括方程式之各種合理形式，其中無有一項共具 x 與 y 爲因子超過兩次者.

吾人常書之如次式:

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i})$$

該處 $a, 2h, b, 2g, 2f, c$ 皆表常數係數. 用 h, g, f 三字母以表 xy, x, y 之係數之半 (half)，是故諸係數爲 $2h, 2g, 2f$; 此種表示法當較之用 h, g, f 諸字母表係數本身者所得之結果爲更簡單. 至選取此等字母之理由固未能於此間詳論之.

n 次齊次方程式爲一種方程式，其中所有 x 與 y 等字母在該方程式各項中以因子之立場一齊出現二次. 如是，一般的齊次二次方程式乃呈次形:

$$ax^2+2hxy+by^2=0. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ii})$$

73. 吾人既知任何直線之通式爲一次方程式，若吾人任取如是之二方程式使其中各項皆位於一邊，又互乘之，吾人乃得一新方程式，若原二方程式之任一者能予滿足則該新方程式亦必予滿足. 此新方程式自當爲二次者，且應表二直線.

[該二直線方程式初時若不將其書成各項皆位於同邊之形式，則徒然將其相乘；蓋就該情形而言，該終結方程式未必斷能爲滿足所與二直線方程式中之任一者之一切 x 與 y 值所滿足.]

試舉次例以明之:——

例題

1. 假設二直線之方程式爲

$$x-y-1=0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(i)$$

與

$$x-4y+2=0. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(ii)$$

相乘之，吾人得

$$(x-y-1)(x-4y+2)=0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(iii)$$

或

$$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(iv)$$

若或 $x-y-1$ 抑 $x-4y+2$ 等於 0，則方程式 (iii) 之左邊亦應等於 0. 故若 x 與 y 之値滿足方程式 (i) 與 (ii) 中之任一者，則方程式 (iii) 亦必可予滿足. 是故方程式 (iii) 和 (iv) 之軌跡乃係由方程式爲 (i) 與 (ii) 之二直線所構成.

就此種情形而言，方程式初時卽表成適當形式，又吾所必需演化之手續厥爲使之相乘而已. 雖然，若將該二方程式表呈 $y=x-1$ 與 $x=4y-2$ 之形式，則縱可使之相乘，但屬徒然之事；蓋以相乘以後所得之終結方程式應爲 $xy=(x-1)(4y-2)$，而該式除於 $x=2$ 與 $y=1$ 時而外，餘決不能爲 $y=x-1$ 或 $x=4y-2$ 所滿足. 是故吾人必當將該等方程式書成如上所與之形式，又吾人所應爲之工作亦應恰如上述者.

2. 令二直線方程式爲 $y=x$ 與 $y=2x+1$.

若吾人使二者原式相乘，則得 $y^2=2x^2+x$，而此方程式除當 $x=-1$ 及 $y=-1$ 時而外決不能爲 $y=x$ 抑或 $y=2x+1$ 所滿足.

但若吾人將所與方程式中諸項全移至一邊而改書爲 $y-x=0$ 及 $y-2x-1=0$，然後相乘之，吾人可見，設二因子中有一爲零，則方程式 $(y-x)(y-2x-1)=0$ 必可予以滿足，又故該方程式乃表二直線.

此方程式可改書成二次形式：

$$y^2-3xy+2x^2-y+x=0.$$

74. 如是足見吾人恆可援用次一定則，以函有 x 與 y 之獨個二次方程式表出任二直線：

定則.——將分立方程式中諸項全移至一邊並相乘之.

若有三個或更多方程式亦可應用此定則，又其能使吾人以一函有 x 與 y 之獨個三次方程式表三直線，以一個四次方程式表四直線，餘可類推.

75. 該轉辭（舊稱“逆定理”）未必能成立，蓋任何二次方程式並不恆表二直線也. 此種情形之釋例已見於前之“論軌跡”章內（§15）. 如是，方程式 $x^2+y^2=25$ 乃表一圓（與 §§15 與 16 之例 6 較之），又方程式 $y^2=x$ 表一“拋物線”（見同節例 9）. 雖然，當二次方程式確表二直線時，此二直線當可援用下述任一定則求之：

定則 1.——將所有諸項全移至一邊，而後用任何簡便方法分解該式成簡單因子.

若該等因子立時不易察出，則須使用.

定則 2.——將該方程式處理成函有任一坐標 x 或 y 之二次方程式. 用適用於一切二次方程式之常法解之. 考慮所求得之二根，吾人終得決定該二不同直線之兩簡單方程式.

定則 1 慣可適用於當二次以上之方程式表諸直線時之各種情形.

例題

1.
$$2xy-x+6y-3=0.$$

分解因子，吾人得 $(x+3)(2y-1)=0$. 故該方程式乃表 $x+3=0$ 及 $2y-1=0$；即 $x=-3$ 及 $y=\frac{1}{2}$ 二直線，該二直線各 $\parallel y$ 與 x 軸.

2.
$$x^3y-4xy^3=0;$$

即 $xy(x^2-4y^2)=0$，或 $xy(x-2y)(x+2y)=0$. 此軌跡乃由二軸 $y=0$, $x=0$, 及通過原點之二直線 $x-2y=0$ 及 $x+2y=0$ 所構成.

3.
$$y^2+3xy+x^2=0.$$

因諸因子不易目察，吾人乃用定則 2. 將該方程式視爲單函變數 y 之二次方程式解之（譯者按：卽將 x 視如常數然），如是，由公式［代數學 1］吾人乃得

$$y=\frac{1}{2}\left\{-3x\pm\sqrt{(9x^2-4x^2)}\right\},$$

或

$$y=\frac{1}{2}\left\{-3\pm\sqrt{5}\right\}x.$$

上二 y 值中之任一值必滿足該二次方程式，如是，該軌跡乃由通過原點之下列二直線所構成：

$$y=-\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\,x \quad 及 \quad y=-\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})x.$$

4. $$y^2+2xy+x^2=0.$$

此卽 $(y+x)^2=0$. 故 $y+x=0$. 因所與方程式函有因子 $(y+x)$ 二次，故該方程式之軌跡應由重複兩次之直線 $y+x=0$ 所形成．此種結果可表謂該所與方程式乃表二疊合直線．若視之爲以 x 決定 y 之二次方程式，則謂該方程式具有"二等根".

5. $$y^2+xy+x^2=0. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

求解 y，吾人得

$$y=\frac{1}{2}\left\{-1\pm\sqrt{(-3)}\right\}x. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

因 $\sqrt{(-3)}$ 乃不可能或不合理之量，凡與除零以外之任何 x 值相對應之一切 y 值乃成"虛數". 因當 $x=0$ 時，$y=0$，該軌跡通過原點；但此外卽無其他實點可以滿足該方程式．同時，方程式 (ii) 顯具 $y=mx$ 之形式，該處 m 乃係不可能之量或虛量．則，當 m 爲實量時，方程式 $y=mx$ 乃表通過原點之直線．據此，吾人可云當 m 係虛量時，方程式 $y=mx$ 乃表一虛直線．如是，該軌跡可謂爲由通過原點之二虛直線所構成．雖然，如是之直線並非眞實存在，且不能表之於圖中．原點乃滿足該方程式之唯一實點．

6. $$y^2-5xy+4x^2+y+2x-2=0.$$

該方程式可書爲

$$y^2-(5x-1)y+4x^2+2x-2=0.$$

視如 y 之二次方程式解之，由 [代數學 1]，

$$y=\frac{1}{2}\left\{(5x-1)\pm\sqrt{(5x-1)^2-4(4x^2+2x-2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(5x-1)\pm\sqrt{9x^2-18x+9}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(5x-1)\pm(3x-3)\right\};$$

故　　$y=4x-2$　或　$y=x+1$.

是故該軌跡乃由 $y=4x-2$ 與 $y=x+1$ 二直線所構成.

7. 試釋僅函 x 或 y 之二次方程式之意義.

令該方程式為，僅函 x 者，　$ax^2+bx+c=0$,

求解 x，吾人得

$$x=\frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}\quad\text{或}\quad x=\frac{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}.$$

故該方程式乃表平行於 y 軸之二直線. 若 b^2-4ac 為正，其平方根具有可能值(或合理值)，又該二直線乃為實而不等者 [代數學 3]. 若 $b^2-4ac=0$，該二 x 值相等 [代數學 2]，各等於 $\frac{-b}{2a}$，故該方程式表二疊合直線 (本節例 4). 若 b^2-4ac 為負，則 $b^2<4ac$，該二 x 值俱為虛數 [代數學 3]，又該方程式乃可謂為表 $\parallel y$ 軸之二虛直線 (本節例 5).

仿此，方程式 $ay^2+by+c=0$ 乃表平行於 x 軸之直線；若 $b^2>4ac$ 則該二線為實線；若 $b^2=4ac$，則兩相疊合；若 $b^2<4ac$ 則二者皆為虛直線.

76. 齊次二次方程式乃表通過原點之二直線.

令該方程式為

$$ax^2+2hxy+by^2=0. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{I})$$

視如 y 之二次方程式解之，吾人求得 [代數學 1]

$$y=\frac{-h+\sqrt{(h^2-ab)}}{b}\cdot x\quad\text{與}\quad y=\frac{-h-\sqrt{(h^2-ab)}}{b}\cdot x,$$

二者乃係通過原點之二直線方程式. 若 $h^2-ab>0$ 或 $h^2>ab$, 則此二直線乃係實線; 若 $h^2=ab$, 則相疊; 若 $h^2<ab$, 則成虛直線 [代數學 2, 3]. (參閱 §75, 3, 4, 5 三例.)

*77. 求次方程式所表之二直線間之夾角:

$$ax^2+2hxy+by^2=0. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(I)}$$

令 $m_2=\frac{1}{b}\{-h+\sqrt{(h^2-ab)}\}$, $m_1=\frac{1}{b}\{-h-\sqrt{(h^2-ab)}\}$; 則由 §76, 該二直線之方程式為

$$y=m_2x \quad 及 \quad y=m_1x.$$

若 ϕ 為該二直線間之夾角, 則據 §50 中方程式 [18] 得

$$\tan\phi=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}.$$

今由 m_1, m_2 二值, 或由 [代數學 5, 6] 吾人求得

$$m_2-m_1=\frac{2\sqrt{(h^2-ab)}}{b}, \quad 及 \quad m_2m_1=\frac{a}{b}.$$

將此等值代入上方程式中乃得

$$\tan\phi=\frac{\dfrac{2\sqrt{(h^2-ab)}}{b}}{1+\dfrac{a}{b}}=\frac{2\sqrt{(h^2-ab)}}{a+b}. \quad \cdots\cdots\text{(II)}$$

若 $h^2=ab$, $\tan\phi=0$, 據此結果則該二直線兩相疊合.

就正交之情形而言, $\tan\phi=\tan 90^\circ=\infty$;

故 $$a+b=0,$$

即 x^2 及 y^2 之係數和$=0$.

*78. 求一般二次方程式表二直線之條件.

令該方程式為

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0. \cdots\cdots\cdots \text{(III)}$$

依 y 之遞降冪排列之，如是

$$by^2+2(hx+f)y+ax^2+2gx+c=0.$$

如常法求解此二次方程式中之 y，吾人得

$$y=\frac{1}{b}\{-(hx+f(\pm\sqrt{(hx+f)^2-b(ax^2+2gx+c)}\},$$

或
$$y=\frac{1}{b}\{-(hx+f)\pm\sqrt{(h^2-ab)x^2+2(hf-bg)x+(f^2-bc)}\}.$$

試將此式與 §26 中表以相當形式之直線方程式 [10] 兩相較之，吾人可見祇能於該平方根能予縮成 x 之簡式時即於

$$(h^2-ab)x^2+2(hf-bg)x+(f^2-bc)$$

爲知是簡式之完全平方時，該二解方能表示直線.

此種情形之條件乃爲 [代數學 7]

$$(hf-bg)^2=(h^2-ab)\ (f^2-bc).$$

乘開後，再用 b 徧除之，此條件乃化成（若 $b\neq 0$）所求條件：

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{[IV]}$$

若 $b=0$，而 $a\neq 0$，則吾人當可解得 x，並求得相同之結果.

若 $a=b=0$，吾人用 $2h$ 除 (III)，所得方程式可予分解成因子

$$\left(x+\frac{f}{h}\right)\ \left(y+\frac{g}{h}\right)=0,$$

假設
$$\frac{c}{2h}=\frac{fg}{h^2},\quad 或\quad 2fgh-ch^2=0.$$

此與條件 (IV) 相符. 就此種情形而言，方程式 (III) 乃表各 ‖ 二軸之二直線.

*79　當方程式 (III) 確表直線時，吾人可能證明此等直線 ‖ 直線

$$ax^2+2hxy+by^2=0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(I)}$$

又故彼此間之夾角之正切可以 (II) 表之.

例　題

試證方程式 $2x^2-10xy+12y^2+5x-16y-3=0$ 表二直線.

將上方程式與 (III) 比較之，吾人可見

$$a=2,\quad h=-5\quad b=12,\quad g=\frac{5}{2},\quad f=-8,\quad 及\quad c=-3;$$

故據條件 (IV) 可得

$$2\cdot12\cdot(-3)+2(-8)\frac{5}{2}(-5)-2(-8)^2-12\left(\frac{5}{2}\right)^2-(-3)(-5)^2$$

$$=-72+200-128-75+75=0.$$

是故該所與方程式乃表二直線.

吾人亦可處理該方程式如 y 之二次方程式. 依 y 之遞降冪重行排列之，吾人乃得

$$12y^2+2(-5x-8)y+2x^2+5x-3=0;$$

故
$$y=\frac{-(-5x-8)\pm\sqrt{(-5x-8)^2-12(2x^2+5x-3)}}{12};$$

$$\therefore\quad 12y=(5x+8)\pm\sqrt{x^2+20x+100}$$

$$=5x+8\pm(x+10);$$

$$\therefore\quad 12y=6x+18\quad 與\quad 12y=4x-2,$$

即
$$x-2y+3=0\quad 與\quad 2x-6y-1=0.$$

是故所與方程式乃表下列二直線:

$$x-2y+3=0\quad 與\quad 2x-6y-1=0.$$

後法之優點在於，除可顯示該方程果否表二直線外，更可求得該二直線之方程式焉.

80. 當 x 與 y 之二次方程式可予表成二平方差之形式時，如

$$(Ax+By+C)^2-(Dx+Ey+F)^2=0, \cdots\cdots\cdots(\mathrm{V})$$

立可將其分解成因子

$$(Ax+By+C)\pm(Dx+Ey+F)=0$$

又故表二直線.

若其能予表成二平方和之形式，如次式是：

$$(Ax+By+C)^2+(Dx+Ey+F)^2=0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(VI)}$$

分解所得之因子皆爲虛量，即

$$(Ax+By+C)\pm\sqrt{-1}\cdot(Dx+Ey+F)=0.$$

如是，則該方程式乃表二虛直線. 雖然，在該軌跡上尙有一實點，即次二直線之交點：

$$Ax+By+C=0 \quad 與 \quad Dx+Ey+F=0,$$

該點顯可滿足 (VI). 是故吾人可稱 (VI) 爲"點軌跡"之方程式.

81. 軸之改易或變換 (change or transformation of axes).

至是吾人恆常假設坐標系與方程式係措對成直角之一對直線即直角軸而言者. 雖然，吾人輒須將如是一組之坐標變換爲另一組. 吾人正擬着手研究若干公式，俾可據之求出已與對於一組原軸之一點之坐標或一直線或曲線之方程式，當其對新軸而言時，該點之對應坐標或該直線或曲線之對應方程式應成何形.

82. 變換任何坐標系成平行於前者但具不同原點之另一組坐標系.

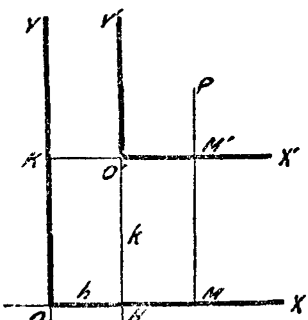


圖 38

令 OX, OY 爲原軸,

$O'X'$, $HO'Y'$ 爲平行於 OX, OY 之新軸,

P 爲任一點, $MM'P$ 爲平行於 OY 及 $O'Y'$ 之 P 點之縱標.

令 (h, k) 爲新原點 O' 對於原軸之坐標,

(x, y) 爲 P 點對於 OX, OY 之坐標。

(x', y') 爲其對於新軸之坐標。

顯然 $OH=h$, 及 $HO'=k$, 又吾人乃得

$$\left.\begin{aligned} x&=OM=OH+HM=OH+O'M'=h+x' \\ y&=MP=MM'+M'P=HO'+M'P=k+y' \end{aligned}\right\}\cdots\cdots[29]$$

若已與吾人以表以 x 與 y 之軌跡方程式, 公式 [29] 能使吾人求得表以新坐標 x' 與 y' 之同前軌跡方程式, 僅須將 $x'+h$ 及 $y'+k$ 各替代原方程式中之 x 及 y 而已. 雖然, 若已與一點 (x, y) 對於 OX, OY 二軸之坐標, 則吾人當可從次一公式求得新坐標 x' 與 y'.

$$x'=x-h,\ y'=y-k, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots[29a]$$

該公式可從 [29] 逕即求得之.

此間須予注意者卽老原點對於新軸之坐標爲 $(-h,-k)$.

例題

已與點 $(2, 3)$ 及直線 $2x+3y=6$, 求對於原軸及通過點 $(3, 2)$ 之新軸而言, 前者之坐標與後者之方程式.

由公式 [29 a] 可得該點之新坐標 (x', y') 爲

$$x'=x-3=2-3=-1, \quad 與 \quad y'=y-2=3-2=1;$$

如是則該點對於新軸之位置可以坐標 $(-1, 1)$ 決定之.

由公式 [29], 將 $3+x'$ 與 $2+y'$ 各代該方程中之 x 與 y, 吾人乃得

$$2(3+x')+3(2+y')=6; \qquad \therefore\ 2x'+3y'+6=0,$$

又此卽該直線對於新軸之方程式.

[註.——因"流動"坐標常便於用未加標記之字母 x, y 表之,是故在習慣上,當吾人將一組坐標軸變換爲另一組時,常用此等字母先表一點對於原系之坐標,繼後則仍用相同字母 x, y (不必用如上之 x', y') 以表該點對於新軸之坐標. 無論如何,最妥善之法乃爲先用 x', y' 以表新坐標,而於該變換完畢後,如遇必要時,吾人仍可用未加標記之字母代換之. 雖然,較有經驗之學子固可採用較爲簡短之手續,又,例如,若變換原點至 (h, k),則可簡書 $x+h$ 以代所與方程式中之 x 及 $y+k$ 以代其中之 y. 若每有混誤發生,則此法不宜行之.]

***83. 變換一組直角軸爲另一組具有相同原點暨不同方向之直角軸.**

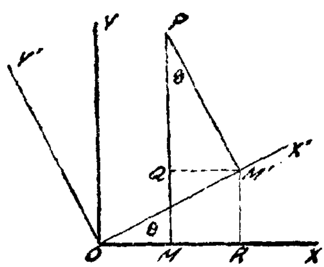


圖 39

令新軸 OX', OY' 各與 OX 與 OY 作 θ 角. 令 P 爲任一點其對原軸之坐標爲 (x, y) 而對新軸者爲 (x', y').

從 P 點引縱標 PM, PM' 各 $\perp OX, OX'$. 更作 $M'R \perp$ 及 $M'Q \parallel OX$ 以完成作圖.

吾人易見 $\angle QPM' = \angle ROM' = \theta$, 又故

$$OM = OR - MR = OR - QM' = OM' \cos ROM' - M'P \sin QPM',$$

即
$$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta;$$

又
$$MP = MQ + QP = RM' + QP = OM' \sin ROM' + M'P \cos QPM',$$

即
$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta.$$

此二結果可使吾人變換 x 與 y 之方程式成爲 x' 與 y' 之方程式.

*84. 更推廣言之,若 $O'X', O'Y'$ 爲具有異於 OX 與 OY 之原點與方向之新直角軸,又若 OX, OY 對於 $O'X', O'Y'$ 之方程式各爲

$$x' \cos\alpha_1 + y' \sin\alpha_1 - p_1 = 0 \quad 及 \quad x' \cos\alpha_2 + y' \sin\alpha_2 - p_2 = 0,$$

則 $x =$ 自 P 點引至 OY 上之垂線 $= x' \cos\alpha_2 + y' \sin\alpha_2 - p_2$ [由 23],

及 $y=$ 自 P 點引至 OX 上之垂線 $=x'\cos\alpha_1+y'\sin\alpha_1-p_1$,

該處，因 OX, OY 交成直角, $\alpha_2-\alpha_1=90°$.

習題——§§72—80.

試顯示次方程式表何軌跡:——

1. $xy=0$. 2. $x^2=0$. 3. $y^2=0$. 4. $x^2+y^2=0$. 5. $xy+y^2=0$.

6. $x^2-2xy+y^2=0$. 7. $x^2+x=0$. 8. $x^2y+xy=0$. 9. $y^2+1=0$.

10. $(x-a)^2+(y-b)^2=0$. 11. $xy-3x-2y+6=0$.

12. 求表以方程式 $y^2-xy-6x^2=0$ 之直線，並求其間之夾角.

13. 試證方程式

$$x^2-y^2-x+3y-2=0$$

乃表一對直線；求之，並求證該二直線互交成直角.

14. 作方程式 $(x+y-1)^2-4x^2=0$ 之軌跡，又求其所表之直線之交點.

習題——§§81—84.

求當原點變換至 (1, 1) 點時次八方程式應成何形，並描繪前四式之軌跡.

15. $x^2+xy-3x-y+2=0$.

16. $xy-y^2-x+y=0$.

17. $xy-x-y+1=0$.

18. $x^2-y^2-2x+2y=0$.

19. $x^2+y^2=2$.

20. $x^2+y^2-2x-2y=0$.

21. $x^2+y^2-2x=0$.

22. $x^2+y^2-2y=0$.

求當原軸轉過 45° 角時次四方程式將成何形:——

23. $xy=0$. 24. $x+y=\sqrt{2}$. 25. $x-y=\frac{1}{2}\sqrt{2}$. 26. $x^2+y^2=1$.

27. 於方程式 $x^2+y^2-2hx-2ky=a^2-h^2-k^2$ 中變換原點至 (h, k) 點.

28. 於方程式 $x^2+y^2=c+h^2+k^2$ 中將原點變換至 (h, k) 點.

29. 於方程式 $x^2+y^2=a^2$ 中將原點換至 $(-g, -f)$ 點.

30. 於方程式 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 中將原點變換至 $(-g, -f)$ 點.

試卷十一

*1. 求方程式 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ 表二直線之條件.

2. 試證方程式 $xy-3ay+2ax-6a^2=0$ 表二直線.

3. 試證方程式 $2y^2-3xy-2x^2+10x+5y-12=0$ 係表彼此交成直角之二直線.

4. 求表以方程式 $x^2-xy-6y^2=0$ 所表之二直線間之夾角.

5. 方程式 $2x^2+3xy-2y^2-2x+y=0$ 表何軌跡?

6. 證示如何從一組坐標軸變換成任何他組, ∥前者但具不同原點者.

7. 變換方程式 $x^2+y^2-6x-10y=2$ 成通過 (3, 5) 點並 ∥ 原軸之新軸者.

8. 當將原點移至 (1, 1) 點又新軸 ∥ 原軸時方程式 $7x+3y=10$ 成爲何形?

9. 證示如何將一組直角軸變換成另一組與之相平行惟具不同原點者.

*10. 試求當軸轉過 45° 角而原點仍未移動時方程式 $y^2-x^2=10$ 變成何形 (二系俱爲直角者).

第十二章 圓方程式

85. "圓方程式"者，圓周方程式之簡稱. 吾人正擬着手求此方程式，特圓或圓周視爲去固定中心之距離恆定且等於半徑之諸點之軌跡.

86. 求一圓對於其圓心定於原點之方程式.

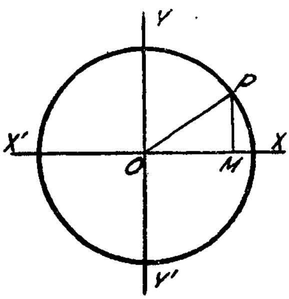


圖 40

令 a 爲該圓之半徑，又令 P (x, y) 爲圓上之任一點，PM 爲 P 點之縱標，O 爲圓心.

由圓之定義可知 OP 恆定*且等於 a.

據商高或畢氏定理

$OM^2+MP^2=OP^2$.

故 $$x^2+y^2=a^2, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots [30]$$

此即所求之圓方程.

87. 求任何圓方程.

("通"式或"中心"式)

令 C 爲該圓之圓心，又令 C 之坐標爲 h 與 k.

令 a 爲半徑，又 P 爲圓周上之任一點 (x, y).

---

* 此方程式當可直接由 §5, [1] 求得之. 同時請參閱附列於 §6 以後之例 2.

作 CN 與 PM 俱 $\parallel OY$, 又 $CM' \parallel OX$.

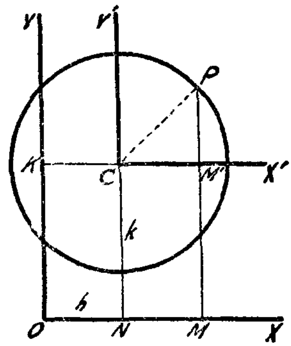


圖 41

則 $$CP^2 = CM'^2 + M'P^2$$
$$= (OM - ON)^2 + (MP - MM')^2$$
$$= (x-h)^2 + (y-k)^2.$$

但 $$CP^2 = a^2,$$

$$\therefore\ (x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots [31]$$

此卽所求之方程式.

此乃圓心爲 (h, k) 點半徑爲 a 之圓方程式之"通"式或"中心"式.

88. 交代法.——吾人可直接由 [30] 用 [29 a] 推得該圓方程式.

蓋因,若 x' 與 y' 爲 P 點對於 CX' 與 CY' 二軸之坐標,又 x 與 y 爲 P 點對於 OX 與 OY 二軸之坐標,則吾人得

$$x'^2 + y'^2 = a^2.$$

但 $$x' = x - h \quad 又 \quad y' = y - k;$$

$$\therefore\ (x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2.$$

或再者,由圓之定義, $CP = a$.

但,由 [1], $$CP^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2;$$

故 $$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots[31]$$

[於更進討論前，對 h 與 k 所具之意義必當預有十分確切之了解.]

89. 圓之一般方程式.

將 [31] 即

之前二項展開 $\quad (x-h)^2+(y-k)^2=a^2,$

化成

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-a^2=0.$$

從此吾人應予注意:——

(i) 圓方程式乃爲二次者.

(ii) x^2 與 y^2 之係數相等（在上方程式中兩俱爲一）.

(iii) 並無函具 xy 乘積之項.

吾人慣用與前述一般二次方程式（§72）中相同之字母書代此展開方程式中之常數(見於該處者). 則該方程式乃成

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0,\quad\cdots\cdots\cdots\cdots[32]$$

又此卽所求之圓之一般方程式.

[再須注意 g 爲 $2x$ 之係數，又 f 爲 $2y$ 之係數.]

既已證明任何圓方程式可予化成 [32] 式，今吾人猶須進而證驗其轉理是否亦爲眞確.

90. 釋一般方程式，$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 之意義，並證其乃表一圓

遷移常數項 c；如是吾人乃得

$$x^2+2gx+y^2+2fy=-c.$$

兩邊同加* g^2+f^2 使左邊得以完成平方之形式，該方程式乃成

$$x^2+2gx+g^2+y^2+2fy+f^2=g^2+f^2-c,$$

或

$$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c. \qquad \text{[32a]}$$

若 $h=-g,\ k=-f,\ a^2=g^2+f^2-c$，則此方程式與中心式

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2,$$

當可全同.

是故一般方程式 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 乃表圓心為 $(-g,-f)$，半徑為 $a=\sqrt{(g^2+f^2-c)}$ 之圓 ⋯ [32b]

(i) 為欲使該圓須為實圓計，故 g^2+f^2-c 勢必為正.

(ii) 若 $g^2+f^2-c=0$，則該圓之半徑為零.

該方程式乃成 $(x+g)^2+(y+f)^2=0$，

又若 x, y 為實量，則此必需 $x=-g$，又 $y=-f$. 該圓如是乃成滿足該方程式之單點 $(-g,-f)$. 名此軌跡曰點圓.

(iii) 若 g^2+f^2-c 為負，則半徑 a 為虛量.

因 $(x+g)^2+(y+f)^2$，係二平方和，若 x 與 y 俱為實量，則其值決不能為負，是故，吾人不能求得滿足該方程式之實點. 故其軌跡並無實點存在，又故不能於圖中表之. 雖然為表示前後一律計，吾人可謂該軌跡乃為一虛圓，其圓心位於 $(-g,-f)$ 點，又其半徑為一虛量.

91. 交代法.——設若 $g=-h,\ f=-k,\ c=h^2+k^2-a^2$，則方程式 [32] 當可與 [31] 之展開式完全相同，該展開式為

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-a^2=0,$$

---

* 注意此確為代數學中所用之求解二次方程式之配方法，所不同者在於此間吾人必須完成兩個平方而代數學中祇需完成一個而已.

從上假設可得 $h=-g,\ k=-f,\ a^2=g^2+f^2-c.$

但 [31] 表圓心在 (h, k) 點半徑爲 a 之圓. 故 [32] 乃表圓心爲 $(-g, -f)$ 點及半徑爲 $\sqrt{(g^2+f^2-c)}$ 之圓.

92. 滿足 §89 之條件惟 x^2+y^2 之係數不爲 1 之最一般而合理之二次方程式爲

$$ax^2+ay^2+2gx+2fy+c=0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots[32\ c]$$

該處 a 係某常數. 用 a 遍除 [32 c], 乃成

$$x^2+y^2+2\frac{g}{a}x+2\frac{f}{a}y+\frac{c}{a}=0,$$

又此與 [32] 具有同形, 祇須將 $\frac{g}{a}$, $\frac{f}{a}$, $\frac{c}{a}$ 各代 g, f, c 卽可. 是故 [32 c] 乃表一圓 (或實或虛), 又此乃圓方程式之最一般而合理之形式.

例 題

1. 求圓心位在 $(3, 4)$ 點及半徑爲 5 之圓方程式.

由 [31], 該方程式爲

$$(x-3)^2+(y-4)^2=25,$$

或 $$x^2+y^2-6x-8y=0.$$

2. 求前例中之圓 $x^2+y^2-6x-8y=0$ 之圓心與半徑.

該方程式可書爲 (完成平方)

$$x^2-6x+9+y^2-8y+16=16+9=25,$$

或 $$(x-3)^2+(y-4)^2=5^2,$$

又, 與 [31] 比較, 吾人可見該圓心當在 $(3, 4)$ 點又半徑爲 5, 此結果與例 1 全符.

3. 求方程式 $3x^2+3y^2+4x+2y+\frac{5}{3}=0$ 之軌跡.

用 3 遍除上方程式乃得

$$x^2+y^2+\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{5}{9}=0,$$

或
$$x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}+y^2+\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}-\frac{5}{9}=0;$$

故
$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=0,$$

又故該軌跡乃爲在 $\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$ 點之點圓.

93. 圓之描繪法.——當吾人求得已與方程式之圓之圓心與半徑時，此等已知件卽可使吾人描繪該圓. 但如先將該圓截割二軸之處求出，而後再事描繪其軌跡，此亦殊屬方便. 欲爲此，則當先後令方程式中 $y=0$ 及 $x=0$，而分別求解該終結二次方程式之 x 與 y 值；該二根乃可決定在每一情形中之兩個交點. 若二根相等，則該圓與軸相切；若係虛數，則其不能與軸相交.（雖然，欲窺全豹，猶當參閱第十四章.）

94. 滿足所與條件之圓.——方程式 [31] 函有三常數 $(h,\ k,\ a)$，又方程式 [32] 亦函有三常數 $(g,\ f,\ c)$. 若欲確定圓方程式，故必予以三已知件. 凡能表成關於上述任一方程式中三常數之三個方程式之任何條件當可用以決定此等常數之值，又可如是以決定該圓之方程式.

95. 求通過三所與點之圓方程式.*

令所與點爲 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$.

設該圓以通式 [32] 表之，卽
$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0.$$

因其通過 $(x_1,\ y_1)$ 點，則坐標 x_1, y_1 滿足該方程式；故吾人必得
$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0; \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

同樣，
$$x_2^2+y_2^2+2gx_2+2fy_2+c=0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

又
$$x_3^2+y_3^2+2gx_3+2fy_3+c=0. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iii)}$$

---

* 學者當能察知，數字例題之聯立討論，如緊接 §98 之例 1 與 2 是，可使簡化此題及後繼三題.

將 (i), (ii), (iii) 視為聯立方程式解之，未知常數 g, f, c 可求以所與點之已知坐標表之. 若將此等 g, f, c 之值代入方程式 [32] 中，則所得之方程式即所求圓之方程式.

此種程序乃等於從 (i), (ii), (iii), 與 [32] 四方程式中消去三常數 (g, f, c), 又此種消元法可選用任何簡便方式行之.

96. 就此間所論之一般情形而言，冗煩消元之結果每致求得用簡法不能表成簡便形式之方程式.

於數字例中，該處 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 三坐標為所與數. 吾人極易求得 g, f, c 之數值，並代之入 [32]. 又有若干特殊情形（如當若干所與點位於軸上時是），該處當以用消元法為易，又結果可以表成簡便形式.

97. 吾人亦可從呈 [31] 形式之圓方程式入手研討之，又，依次將坐標 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 代 (x, y), 吾人可得三方程式以決定圓心之坐標 (h, k) 及半徑 a. 就任何情形而言，吾人可得如下之定則.

定則. —— 將圓之一般方程式書成函有三未知常數之任一形式. 於此方程式中逐次代入三所與點之坐標. 如是吾人乃得未知常數間之三方程式. 視如聯立方程式解之，又如是乃以決定諸常數，更將此等值代入圓方程式. 或從該圓方程式及該三條件方程式間消去常數.

98. （交代法）求通過三所與點 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 之圓方程式.

令其圓心為 (h, k) 又半徑為 a.

則 (h, k) 點必等距該三所與點，又該公距即係半徑 a. 由 [1]，可逕得次三條件：

$$\left.\begin{aligned}&(x_1-h)^2+(y_1-k)^2\\=&(x_2-h)^2+(y_2-k)^2\\=&(x_3-h)^2+(y_3-k)^2\end{aligned}\right\}=a^2$$

由之而決定 h, k, a 三值. 代之入方程式 [31], $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$, 吾人卽得所求之圓方程式.

在實用上，此法與前法實屬"異曲同工"；蓋以上所求得之條件與由依次將該三所與點之坐標代入方程式 [31] 所得之條件並無二致.

例　題

1. 求通過 (0, 0), (2, 3), (3, 4) 三點之圓方程式.

令所求方程式分呈次形:

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0.$$

將 (0, 0) 代此方程式中之 (x, y),

吾人乃得　$c=0.$ ……………………………(i)*

代入 (2, 3)，吾人得　$4+9+4g+6f+c=0;$

因由 (i) $c=0$, 故吾人得　$4g+6f=-13.$ ……………………………(ii)

代入 (3, 4) 吾人得　$9+16+6g+8f+c=0;$

由之　$6g+8f=-25.$ ……………………………(iii)

由 (ii) 與 (iii) 吾人得　$2g=-23,\ 2f=11,$

又由 (i),　$c=0.$

故得所求方程式爲　$x^2+y^2-23x+11y=0.$

2. 求通過 (2, 3), (4, 5), (6, 1) 三點之圓.

令圓心爲 (h, k) 又半徑爲 a.

---

*吾人應予注意,當直線或圓（或其他曲線）通過原點時, 其方程式必無常數項, 又反之亦然. 此語可於該方程式中令 $x=0$ $y=0$ 立卽見之.

因 (h, k) 點去該三所與點之距離互等，公距爲 a，吾人乃得，令此等距離之平方相等，

$$(2-h)^2+(3-k)^2=(4-h)^2+(5-k)^2=(6-h)^2+(1-k)^2=a^2.$$

從前三端各減去 h^2+k^2，吾人得

$$13-4h-6k=41-8h-10k=37-12h-2k,$$

又，視爲二聯立方程式而解之，吾人得

$$h=\frac{13}{3}, \quad k=\frac{8}{3}.$$

將此等值代入上式，吾人乃得

$$a^2=\frac{50}{9}, \quad \therefore \quad a=\frac{1}{3}\sqrt{50}=\frac{5}{3}\sqrt{2};$$

又該圓之方程式爲

$$\left(x-\frac{13}{3}\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{50}{9},$$

或

$$3x^2+3y^2-26x-16y+61=0.$$

習 題——§§85—92.

題 1 至 6 中，已與下列已知件，求圓方程式:——

1. 圓心 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，半徑 $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
2. 圓心 $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$，半徑 $\frac{1}{2}$.
3. 圓心 $(3, -2)$，半徑 3.
4. 圓心 $(3, -2)$，半徑 3.
5. 圓心 $(0, -1)$，半徑 1.
6. 圓心 $(1, 1)$，半徑 1.

求下列諸圓，(題 7 至 14) 之圓心及半徑:——

7. $x^2+y^2-2y-3x=0.$
8. $x^2+y^2+4x-4y=1.$
9. $x^2+y^2+x=0.$
10. $x(x+y-6)=y(x-y+8).$
11. $x^2+y^2+2a(x-y)+a^2=0.$
12. $x^2+y^2+2(3x+4y)=0.$
13. $(x-a)(x-c)+(y-b)(y-d)=0.$
14. $(x-y+a)^2+(x+y-a)^2=2a^2.$

檢討下列軌跡之性質:——

15. $x^2+y^2=a\left(x-\frac{1}{4}a\right)$.　　16. $x(x+4)+y(y-2)+8=0$.

習　題——§93.

求下列諸圓與坐標軸之交點；並描繪各圖：——

17. $x^2+y^2+7x-5y+6=0$.　　18. $x^2+y^2+x-4y-12=0$.

19. $x^2+y^2-4x+4y+4=0$.　　20. $x^2+y^2-8y-9=0$.

習　題——§§94—98.

求通過三點之圓方程式，該三點之坐標分別見於下列六題中，並於每一情形中將方程式變換成以原點爲圓心者：——

21. $(1, 0)$, $(2, 3)$, 與 $(3, -1)$.　　22. $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 0)$.

23. $(6, 9)$, $(7, 6)$, $(4, 5)$.　　24. (h, k), $(h, 0)$, $(0, k)$.

25. $(1, 6)$, $(3, 2)$, $(2, 3)$　　26. (a, b), (a, a), (b, b).

求圓方程式——

27. 通過 $(0, 0)$ 並於二軸上各截成 a 與 b 二長.

28. 其圓心爲 (h, k) 並通過 (p, q) 點.

29. 通過 (p, q), $(-q, p)$ 及原點三點.

30. 求一點如是運動使其去 $(a, 0)$ 與 $(-a, 0)$ 之距離之平方和等於 $2b^2$ 時所生成之軌跡.

31. 承前題，特予檢討當 $b=a$ 時之情形.

32. 求一點如是運動，使其去原點之距離之平方等於其去 x 軸之距離乘以常數 a 時所成之軌跡. 求其中心及半徑.

33. 若一點去原點之距離之平方乃 $2a$ 倍於其去直線 $x=\frac{1}{2}a$ 之距離，試證該軌跡乃係點圓，並求其位置.

試　卷　十　二

1. 求以原點爲圓心之圓方程式.

2. 試表如何求圓方程式呈次形者:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2.$$

3. 求次圓圓心之坐標及半徑:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0.$$

4. 求圓 $\sqrt{1+b^2}\,(x^2+y^2)-2ax-2aby=0$ 之半徑.

5. 求圓心在 (4, 5) 點又圓周通過次圓圓心之圓方程式:

$$x^2+y^2+4x+6y=12.$$

6. 試證方程式 $x^2+y^2+2lx+2my+n=0$, 對直角軸而言, 恆表一圓.

7. 圓 $x^2+y^2-7x-8y+12=0$ 截軸之點之坐標爲何?

8. 求證圓 $x^2+y^2-2ax\cos\theta-2by\sin\theta-b^2\cos^2\theta=0$ 在 y 軸上截成 $2b$ 之長.

9. 試表如何求通過三所與點之圓方程式.

10. 求通過 (0, 0), $(-8a, 0)$, $(0, 6a)$ 三點之圓方程式.

第十三章　圓之切線與法線

99. 定義.——曲線之弦 (chord) 爲聯結該曲線上二點所成之任何直線. 與曲線相交之直線有時亦可稱爲該曲線之割線 (secant).

由此等定義吾人可轉得曲線上之切線 (tangent) 與割線之分析定義:——

若割截曲線之直線固定任一交點 (二者之一) 而轉動使第二交點逐漸移至第一交點爲止; 則當最後該二點併合時該直線之"極限位置"稱爲該曲線在該點之切線.

是故, 切線可簡釋爲當割線之二交點趨向重合時該割線之極限位置.

與通過曲線上切點之切線交成直角之直線稱爲該曲線之法線 (normal).

吾人決不可謂當二點眞實相重時二者乃成一點, 又謂通過一點之直線乃係不定者. 如是, 若該二點爲 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2), 則聯結之而成之直線可表爲

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

又當 $x_2=x_1$ 及 $y_2=y_1$ 時, $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 呈 $\frac{0}{0}$ 之形.

若吾人引述極限 (Limit) 之概念, 則此種困難當可迎刃而解. 若該二點位於所與圓或他種曲線上, 則吾人可將其坐標代入後者之方程式中. 由該二所得方程式吾人能得表爲 y_2-y_1 對 x_2-x_1 之比之另一式, 該式縱於 $y_2=y_1$ 及 $x_2=x_1$

時亦決不致變成不定者. 如是, 則該弦之方程式乃可書呈一不同形式, 縱使其二點 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 互相重合,亦只會趨近一完全確定之極限而已. 此種極限式卽在 (x_1, y_1) 點之切線方程式.

100. 示例.——令 P 爲圓上之定點, 又令直線 PQ (又截圓於 Q 點) 繞 P 點沿矢頭方向旋轉. 當 Q 點通過 Q, Q', Q'' 諸位置時 Q 將愈轉愈趨近 P 點; 嗣後其* 將轉至 P 點之他邊, 如在 Q''' 點. 在 PQ'' 與 PQ''' 二位置之間, 當 Q 通過 P 時該旋轉線必佔有某一位置如 PT'. 者. 在此位置中 Q 與 P 相重合, 又直線 PT 卽在 P 點之切線.

過 P 點作 PG 與 PT 交成直角; 則 PG 卽在 P 點之法線.

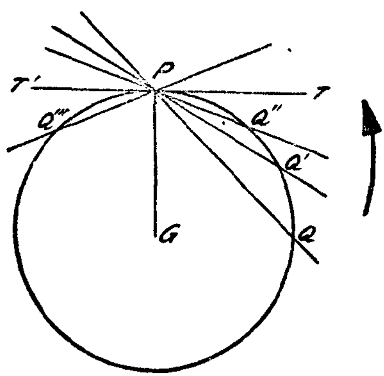


圖 42

上述圓之切線一定義與歐氏幾何學中 [III. 定義 2] 所述者相等. 因, 當 Q 點上移至與 P 點相重合時, 弦 QP 之長終歸消失, 故該切線將無一部截於圓內. 是故該切線不割該圓. 吾人又須注意該直線恆割該圓於二點直至到達極限位置時爲止, 故在該圓周與不割該圓之切線間不能引作任何直線.

[此間所用 "tangent" 及 "secant" 二字之意義顯與三角術中一角之 "tan-

* 學者應牢記, 該直線, 沿任一方向, 並非有限者.

gent" 與 "secant" 全不相同；蓋以前者指線（卽 "切線" 與 "割線"）而後者則指三角形二邊之比（卽 "角之正切" $=\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$，"角之正割" $=\frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}$）.]

101. 求在圓 $x^2+y^2=a^2$ 上任一點之切線方程式.*

令 P 爲圓上任一點 (x_1, y_1)，又 $Q(x_2, y_2)$ 爲近 P 點之圓上另一點. 直線 PQ 之方程式爲 [由 16]:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

因 P, Q 二點皆位圓上. 故二者之坐標必滿足其方程式，又吾人得

$$x_1^2+y_1^2=a^2, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i})$$

及

$$x_2^2+y_2^2=a^2. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ii})$$

相減，

$$x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2=0,$$

由之，分解因子，

$$(x_2-x_1)(x_2+x_1)+(y_2-y_1)(y_2+y_1)=0;$$

故

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}; \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{iii})$$

從該項關係，代入 [16]，吾人乃得割線 PQ 之方程式之另一種新形式，卽

$$y-y_1=-\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}(x-x_1),$$

或

$$(x-x_1)(x_2+x_1)+(y-y_1)(y_2+y_1)=0. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{iv})$$

今時吾人可令 (iv) 中 $y_2=y_1$，又 $x_2=x_1$，並如是以求該切線之方程式，但需將其視爲當 Q 點與 P 點併合時該割線之極限式而已. 吾人求得

$$(x-x_1)\cdot 2x_1+(y-y_1)\cdot 2y_1=0.$$

以 2 遍除之，並移項，乃得

$$xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2;$$

---

* §103 中所舉述之法較此稍易，但此法較爲一般且更切實際.

譯者按：此法之優點卽在於此法可適用於求任何已與方程式之曲線之切線.

由此，從 (i)，

$$xx_1+yy_1=a^2, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots [33]$$

此即所求在 (x_1, y_1) 點之切線方程式.

102. 求在圓上任一點之法線方程式.

令 P 爲圓 $x^2+y^2=a^2$ 上之點 (x_1, y_1).

法線通過 P 點並垂直於在 P 點之切線，該切線方程式可書爲

$$x_1(x-x_1)=-y_1(y-y_1).$$

故該法線方程式爲 [由 20]

$$y_1(x-x_1)=x_1(y-y_1),$$

即 $$y_1x-x_1y=y_1x_1-x_1y_1=0,$$

或 $$y_1x=x_1y. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots [34]$$

此式亦可書成

$$\frac{y}{y_1}=\frac{x}{x_1},$$

該式在解析幾何學上乃表（§43，系）法線即聯結切點 (x_1, y_1) 至圓心(原點)所成之直線. 此與歐氏幾何學 III. 16 相符.

103. §101 中所述之法乃係最普通者，並可用以求得已與方程式之任何曲線之切線. 下列乃關於圓之簡易證法，其根據即爲圓上之切線恆垂直於通過 P 點之半徑.

交代證法.——聯結 $P(x_1, y_1)$ 點至圓心而成半徑之方程式爲

$$y=\frac{y_1}{x_1}x. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (v)$$

因切線通過 $P(x_1, y_1)$ 點並垂直此半徑；故其方程式爲 [由公式 15 與 20]

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1),$$

或

$$x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)=0,$$

或 [謹記 (x_1, y_1) 點乃在圓上]

$$xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2=a^2. \qquad [33]$$

又，在 P 點之法線與通過 P 點之圓半徑相同，又故可以方程式 (v) 表之，或

$$xy_1=yx_1. \qquad [34]$$

[此種求切線及法線之法僅適用於圓，又故不及 §101 中之解析證法爲佳．(參閱 §107.)]

例　題

求圓 $x^2+y^2=25$ 上爲直線 $x=4$ 所割二點之切線方程式．

吾人必當先求二交點之 y 值．

代 $x=4$ 入方程式 $x^2+y^2=25$，吾人得 $16+y^2=25$；

故

$$y^2=9, \quad 或 \quad y=\pm 3.$$

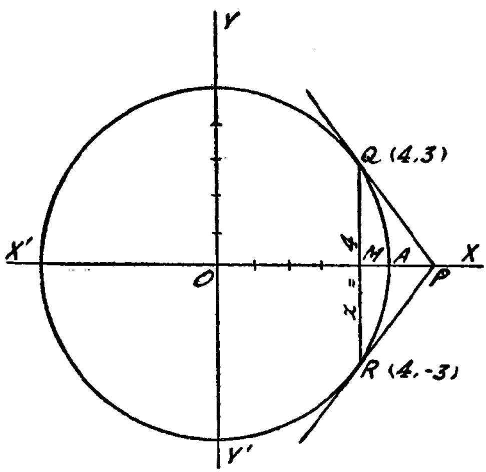


圖 43

是故該二交點爲 (4, 3) 與 (4, −3).

由 [33], 在點 (4, 3) 之切線方程式爲

$$4x+3y=25;$$

同樣, 在 (4, −3) 點之切線可以方程式 $4x-3y=25$ 表之.

故該二切線可以合併成一方程式, 即

$$4x\pm 3y=25.$$

在圖 43 中, 該二切線爲 PQ, PR 二直線. 二者相交於 P 點, 其坐標爲 $\left(\frac{25}{4}, 0\right)$.

***104.** 求圓 $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ 上任一點 (x_1, y_1) 切線及法線之方程式.

變換原軸成與之相平行之另一對新坐標軸, 具有中心 (h, k) 以爲新原點. 令 x', y' 爲相當於 x, y 之新坐標系, 又令 (x'_1, y'_1) 爲 (x_1, y_1) 點之新坐標. 由 [29 a], 吾人得

$$\left.\begin{array}{ll} x'=x-h, & y'=y-k, \\ x'_1=x_1-h, & y'_1=y_1-k, \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(vi)}$$

又

該圓之新方程式爲 $x'^2+y'^2=a^2$.

由 [33]* 此圓上 (x'_1, y'_1) 點處之切線當爲

$$x'x'_1+y'y'_1=a^2;$$

是故, 用關係式 (vi) 化之成原坐標, 吾人求得在 (x_1, y_1) 點處圓 $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ 之切線方程式爲

$$(x-h)(x_1-h)+(y-k)(y_1-k)=a^2. \cdots\cdots\cdots[35]$$

又, 表以新坐標 x', y' 之法線方程式, 由 [34], 爲

$$x'y'_1=y'x'_1;$$

* [33] 之證必當引出俾用此法以補充 [35] 之證. 但須參閱 §106.

是故該法線以原坐標表之可書爲

$$(x-h)(y_1-k)=(y-k)(x_1-h),$$

或
$$x(y_1-k)-y(x_1-h)=hy_1-kx_1. \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots[36]$$

[方程式 [36] 亦能從"法線必通過 (x_1, y_1) 點並垂直於方程式爲 [35] 之切線"一事實求得之.]

*105. 方程式 [35], 當展開時, 可書成

$$xx_1+yy_1-h(x+x_1)-k(y+y_1)+h^2+k^2-a^2=0, \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{vii})$$

又故此即在圓 [31] 上 (x_1, y_1) 點處之切線方程式. 該圓方程式展開時爲

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-a^2=0.$$

若此方程式書成"通"式

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0,$$

則吾人得
$$g=-h,\quad f=-k,\quad c=h^2+k^2-a^2.$$

代之入 (vii), 吾人可見在圓 [32] 上 (x_1, y_1) 點處之切線方程式爲

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0. \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots[37]$$

此種結果當以用次法求之更佳:——

106. 求方程式爲 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 之圓上任一點之切線.

令 P 爲圓上之點 (x_1, y_1); 又令 $Q(x_2, y_2)$ 爲接近 P 點之另一點. 則, 由 [16], 直線 PQ 之方程式爲

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

因 P, Q 二點皆在圓上, 故

$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0, \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{viii})$$

$$x_2^2+y_2^2+2gx_2+2fy_2+c=0. \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ix})$$

二者相減,

$$x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2+2g(x_2-x_1)+2f(y_2-y_1)=0,$$

即 $(x_2-x_1)(x_2+x_1)+(y_2-y_1)(y_2+y_1)+2g(x_2-x_1)+2f(y_2-y_1)=0,$

或 $(x_2-x_1)(x_2+x_1+2g)(y_2-y_1)(y_2+y_1+2f)=0;$

故
$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{x_2+x_1+2g}{y_2+y_1+2f}. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(x)}$$

代入 [16], 吾人乃得割線 PQ 方程式之新式,

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=-\frac{x_2+x_1+2g}{y_2+y_1+2f},$$

或
$$(x-x_1)(x_2+x_1+2g)+(y-y_1)(y_2+y_1+2f)=0.\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(xi)}$$

當 Q 點與 P 點相重合時, 直線 (xi) 乃成在 P 點之切線. 令 $x_2=x_1$, $y_2=y_1$, 吾人得 $2x_1$ 以代 x_2+x_1, $2y_1$ 以代 y_2+y_1; 故對 (x_1, y_1) 點處之切線言, 可得

$$(x-x_1)(2x_1+2g)+(y-y_1)(2y_1+2f)=0,\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(xii)}$$

該式又可書爲 $x(x_1+g)+y(y_1+f)=x_1^2+y_1^2+gx_1+fy_1.$

但, 由 (viii), 吾人得 $x_1^2+y_1^2+gx_1+fy_1=-gx_1-fy_1-c;$

故該切線之方程式乃成

$$x(x_1+g)+y(y_1+f)+gx_1+fy_1+c=0,$$

或
$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0,\cdots\cdots\cdots[37]$$

此即所求之切線方程式.

107. 吾人所應予注意者, 如 §99 中所釋者然, 即吾人不能令方程式 [16] 中 $x_2=x_1$ 及 $y_2=y_1$, 又故吾人必當在吾人引入 "P, Q 二點趨成重合" 一事實以前, 將 PQ 之方程式書成新式 (xi). §106 中之證, 如 §101 中者然, 殊較冗繁, 但顯較切實. 雖然, 若吾人假定歐幾 III. 16, 如 §103 中然, 吾人當可如是求之:——

聯結 (x_1, y_1) 點至圓心 $(-g, -f)$ 之半徑之方程式爲

$$y-y_1=\frac{y_1+f}{x_1+g}(x-x_1).$$

因切線乃通過 (x_1, y_1) 點並 ⊥ 此半徑之直線; 故其方程式爲 $y-y_1=-\dfrac{x_1+g}{y_1+f}$ $(x-x_1)$,

或 $$(x-x_1)(x_1+g)+(y-y_1)(y_1+f)=0.$$

此式可用 §106 之後部，從方程式 (xii) 起，化成 [37].

108. 最後一證具有與 §103 之證相同之可議之處. 該證曾據幾何學而假定圓之切線性質之已往研究，且其只能適用於圓. 雖然，該解析證法卻可供予吾人以亦可適用於較圓具有更一般之性質之曲線的研究方法，且該法並不必具有與歐氏幾何學第三册中所證明之性質相當之性質.

[類此曲線之研究，雖屬超越本書範圍以外，但爲坐標幾何學之主要對象. 除圓而外之最簡要之曲線爲一般表以二次方程式之曲線，如當 §78 或 §90 之條件不予滿足時，§72 之 (i) 是. 該等曲線可由沿不同方向截割一圓錐體，致成種種截面，而得. 故名"圓錐曲線"該名吾人於初等坐標幾何學中不時用之.]

109. 在 (x_1, y_1) 點之切線方程式，即

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0,$$

儘可立即由書寫圓 [32] 之方程式成次形而擬得：

$$xx+yy+g(x+x)+f(y+y)+c=0.$$

如欲求作任一所與圓上之切線方程式，當以牢記次之定則爲便：

定則.——先書出所與圓方程式，又將 xx_1 代其中之 x^2，yy_1 代 y^2，$x+x_1$ 代 $2x$，$y+y_1$ 代 $2y$；如是而成之方程式乃表在 (x_1, y_1) 點之切線.

泛言之，吾人可謂在 (x_1, y_1) 點之切線方程式乃爲 (x, y) 與 (x_1, y_1) 二點之圓方程式間之間雜形式.

例　題

1. 求引至次圓上 (2, 4) 點之切線方程式：

$$x^2+y^2-4x-4y+4=0.$$

[此點位於該圓上，蓋因 $x=2$，$y=4$ 滿足該方程式之故.]

據 §109 中之定則立即可得該切線之方程式爲

$$2x+4y-2(x+2)-2(y+4)+4=0,$$

或 $$2x+4y-2x-4-2y-8+4=0,$$

卽 $$2y-8=0,\quad 或\quad y=4,$$

又故該切線 $\parallel x$ 軸.

2. 求在下列圓 (i) 上其與圓 (ii) 相交之點之切線方程式:

$$x^2+y^2-2x-2y=23, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(i)$$

$$x^2+y^2=25. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(ii)$$

吾人首應求圓 (i) 與 (ii) 之交點. 欲為此, 吾人又必聯立該二方程式而求解之 (§53).

從 (ii) 減去 (i) 吾人得 $\quad 2x+2y=2;$

故 $$x+y=1,\quad 或\quad x=1-y. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(iii)$$

代 (iii) 入 (ii), 故 $$(1-y)^2+y^2=25;$$

故 $$2y^2-2y-24=0,\quad 或\quad y^2-y-12=0,$$

分解因子, 乃得 $$(y-4)\ (y+3)=0;$$

故 $$y=4\quad 或\quad y=-3.$$

若吾人令 $y=4$, 則方程式 (iii) 乃予 $x=-3$; 若令 $y=-3$, 則得 $x=4$. 是故 (i), (ii) 二圓之交點為 $(-3,\ 4)$ 與 $(4,\ -3)$.

既已求得二圓之交點, 今先取 $(-3,\ 4)$ 點. 由 [37] 式 §109 中之定則, 在圓 (i) 上此點之切線方程式為

$$-3x+4y-(x-3)-(y+4)-23=0,$$

或 $$3y-4x-24=0. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \mathrm{I}$$

次取點 $(4,\ -3)$, 圓 (i) 之切線方程式為

$$4x-3y-(x+4)-(y-3)-23=0,$$

或 $$3x-4y-24=0. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \mathrm{II}$$

是故所求之二切線為

$$3y-4x-24=0\quad 及\quad 3x-4y-24=0.$$

習　題——§§99—103.

1. 求在圓 $x^2+y^2=13$ 上 $x=2$ 處之一點之切線方程式.

2. 求在圓 $x^2+y^2=13$ 上 $x=-3$ 處之一點之切線方程式.

3. 書出圓 $x^2+y^2=a^2$ 上 $(a\cos\alpha,\ a\sin\alpha)$ 點之切線方程式.

4. 書出圓 $x^2+y^2=a^2$ 上 $\left(-\dfrac{am}{\sqrt{1+m^2}},\ \dfrac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right)$ 點之切線方程式.

5. 又求圓 $x^2+y^2=\dfrac{a^2b^2}{(a^2+b^2)}$ 上在點 $\left\{-\dfrac{ab^2}{(a^2+b^2)},\ \dfrac{a^2b}{(a^2+b^2)}\right\}$ 之切線.

習　題——§104.

6. 求在圓 $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ 上點 $(h+a\cos\alpha,\ k+a\sin\alpha)$ 之切線方程式

求自原點引至切線之垂線之長.

7. 書出在圓 $(x-2)^2+(y+3)^2=2$ 上點 $(3,\ -2)$ 切線與法線之方程式.

習　題——§§105—109.

8. 在下列圓上之原點處所引切線之方程式爲何?

$$\text{(i)}\ x^2+y^2-5x+6y=0,$$

$$\text{(ii)}\ x^2+y^2+2gx+2fy=0.$$

9. 在次圓上 (i) $x=0$ 處之一點, (ii) $y=0$ 處之一點之切線方程式爲何

$$x^2+y^2-2a(x+y)+a^2=0?$$

10. 求作圓 $x^2+y^2-5x-4y+4=0$ 上 $(5,\ 2)$ 點之切線與法線之方程式.

11. 求作圓 $x^2+y^2+3x-2y=0$ 上 $(-3,\ 2)$ 及 $(-3,\ 0)$ 二點之切線及法線之方程式.

12. 求 $x^2+y^2=9$ 及 $x^2+y^2-10x+9=0$ 二圓之交點, 又求在二圓上之交點處之切線方程式.

試證該二切線在該二點俱相交成直角.

*13. 試證聯結圓 $x^2+y^2=a^2$ 上 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 二點所成之割線方程式可書成

$$x(x_1+x_2)+y(y_1+y_2)=x_1x_2+y_1y_2+a^2.$$

*14. 若圓方程式爲 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, 則其割線方程式爲

$$x(x_1+x_2+2g)+y(y_1+y_2+2f)=x_1x_2+y_1y_2-c.$$

*15. 若在圓 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 上 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 二點之切線交成直角, 求證次之關係:

$$x_1x_2+y_1y_2+g(x_1+x_2)+f(y_1+y_2)+g^2+f^2=0.$$

書出下列諸圓之切線方程式:

16. $x^2+y^2+dx+ey=0$ 在 $(-d, -e)$ 點.

17. $x^2+y^2-2hx-2ky+k^2=0$ 在 $(2h, k)$ 點.

18. $x^2+y^2=ax+by$ 在 $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$, 與 (a, b) 4 點.

19. 在圓 $x^2+y^2=a^2$ 上 P 點之切線與 x 與 y 二軸各遇於 T 與 t 二點, 又作 PM 與 PN $\perp$ 二軸; 求證

$$CM\cdot CT=a^2,$$

又

$$CN\cdot Ct=a^2.$$

C 係該圓之圓心.

試卷十三

1. 試釋何謂"曲線上之切線".

2. 試表如何求圓 $x^2+y^2=r^2$ 上 (x', y') 點之切線方程式

3. 求在圓 $x^2+y^2=169$ 上 $(5, 12)$ 點之切線方程式.

4. 書出圓 $x^2+y^2=61$ 上 $(5, 6)$ 點之切線方程式.

5. 試證如何求圓 $x^2+y^2=r^2$ 上點 (x', y') 之法線方程式

6. 在圓 $x^2+y^2=100$ 上 $(8, 6)$ 點之法線方程式爲何?

7. 求證如何求圓 $x^2+y^2+2mx+2ly+n=0$ 上在點 (x', y') 之切線方程式.

8. 求在圓 $x^2+y^2-2by=0$ 上點 $(b\cos\theta,\ b+b\sin\theta)$ 之切線方程式.

9. 求圓 $x^2+y^2-6x-4y=12$ 上 $(7,\ 5)$ 點之法線方程式.

*10. 求在圓 $(x-h)^2+(y-k)^2=c^2$ 上 $(h+c\cos\theta.\ k+c\sin\theta)$ 點之切線方程式.

第十四章　直線與圓之交點—相切條件—沿已與向過已與點所引之切線—直徑

110. 決定直線與圓之交點.

令 $y=mx+b$ 為直線，又 $x^2+y^2=a^2$ 為圓.

如 §53 中然，吾人可見題中交點之坐標系理當滿足該二方程式，又故可由視為 x 與 y 之聯立方程式求解而得.

平方 $y=mx+b$，吾人得 $y^2=(mx+b)^2$；代之入 $x^2+y^2=a^2$ 中，又得 $x^2+(mx+b)^2=a^2$.

展開，移項，並依 x 之遞減冪排列之，吾人得

$$(1+m^2)x^2+2mbx+b^2-a^2=0. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

從此二次方程式，吾人可求得 x 之值 [代數學 1.] 該二根即該二交點之橫標.

令此二根以 x_1 與 x_2 示之. 則將其分別代入 $y=mx+b$ 中之 x 即可求得對應縱標. 此即 mx_1+b 與 mx_2+b 二值.

為示例起見，吾人今將從事於同上之工作，惟以數字係數易代文字係數而已.

例　題

1. 決定下列直線 (i) 與圓 (ii) 之交點：

$$y=-2x+10,\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

$$x^2+y^2=25.\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

由 (i)　　$y^2=4x^2-40x+100.$

代此 y 值入 (ii)，吾人得　$5x^2-40x+100=25,$

或 $$x^2-8x+15=0,$$

由之 $$(x-5)(x-3)=0,\quad \therefore\quad x=5 \text{ 或 } 3;$$

或，不用因子分解法來解該二次方程式，而用公式 $x=\frac{1}{2a}\{-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}\}$ 解之，亦可求得同上之結果，即

$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot1\cdot15}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{4}}{2}=4\pm1;$$

$$\therefore\quad x=5 \text{ 或 } 3.$$

將此二值代入 (i)，吾人乃得

$$y=-10+10 \text{ 或 } -6+10,$$

即 $$y=0 \text{ 或 } 4;$$

是故所求之交點為 (5, 0) 與 (3, 4) 二點.

2. 求下列直線 (i) 與圓 (ii) 之交點:

$$y=mx+1, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (i)$$

$$x^2+y^2=1. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (ii)$$

由 (i)，以 $mx+1$ 代 (ii) 中之 y，吾人得

$$x^2+(mx+1)^2=1,$$

或 $$(1+m^2)x^2+2mx=0,$$

該式之解為 $$x=0 \text{ 與 } x=-\frac{2m}{1+m^2}.$$

先令 $x=0$，又代入 (i)，吾人得

$$y=m\cdot0+1=1.$$

次令 $x=-\frac{2m}{1+m^2}$ 代入 (i) 吾人得

$$y=m\left(-\frac{2m}{1+m^2}\right)+1=-\frac{2m^2}{1+m^2}+1=\frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

故所求交點之坐標即為 (0, 1) 與 $\left(-\frac{2m}{1+m^2},\ \frac{1-m^2}{1+m^2}\right)$.

111. 求直線 $y=mx+b$ 與圓 $x^2+y^2=a^2$ 相切之條件.

若割線成切線，則二交點必相併合，又故該二交點之坐標之數值必相等，卽 §110 中之二次方程式 (i) 必有一對等根.

由[代數學 2]，此語之條件爲:——x 之係數之半之平方=(x^2 之係數)×(常數項)，

或 $$m^2b^2=(1+m^2)\ (b^2-a^2),$$

卽 $$m^2b^2=b^2+m^2b^2-a^2(1+m^2).$$

故相切之條件爲 $$b^2=a^2(1+m^2).$$

若果 $$b^2=a^2(1+m^2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots[38]$$

卽謂——則直線 $y=mx+b$ 與圓 $x^2+y^2=a^2$ 相切.

112. 系.——不論 m 之值爲何，直線

$$y=mx\pm a\sqrt{(1+m^2)},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots[39]$$

恆必與圓 $x^2+y^2=a^2$ 相切.

此系可使吾人立卽寫出與 x 軸傾交成所與角 ($\tan^{-1}m$)之所與圓之切線方程式. 因吾人可取根式之兩種符號，故有兩段如是之切線. 該二切線誠必平行.

推論.——將原點變換至$(-h,\ -k)$ 點. 用 $x-h$ 以代 x，又 $y-k$ 代 y，則以上所得之方程式，卽 [39]，之 x 與 y 當另成新坐標. [參閱 §82 之註.]

如是吾人察知——

直線 $$y-k=m(x-h)\pm a\sqrt{(1+m^2)}.\cdots\cdots\cdots[39a]$$

於 m 爲任何値時定必與圓 $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ 相切.

例　題

如欲令直線 $3x+4y+d=0$ 可成爲圓 $x^2+y^2=25$ 之切線，則當予 d 以何値?

書該直線方程式成次式:

$$y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}d.$$

使之與 [38] 相較吾人可見相切之條件應爲

$$\frac{1}{16}d^2=5^2\left(1+\frac{3^2}{4^2}\right)=25\times\frac{25}{16};$$

故　$$d^2=(25)^2 \text{ 又 } d=\pm 25.$$

故該二切線爲　$$3x+4y\pm 25=0.$$

113. 由 [24]，自原點引至直線 $y=mx+b$ 上之垂線之長爲 $\pm\frac{b}{\sqrt{1+m^2}}$.

此長必使與半徑相等之條件爲　$a=\pm\frac{b}{\sqrt{1+m^2}}$,

或　$$b^2=a^2(1+m^2),$$

此卽上所求得之相切條件 [38].

此與歐氏幾何學上之結果，卽自圓心至圓之任何切線上所引之垂線卽爲半徑，全相符合.

此法誠可用以證明條件 [38]，但其仍然有可議之處，如 §108 中所述者然.

114. 由 [代數學 3]，§110 中方程式 (i) 之根之爲實爲虛全視

$$m^2b^2> \text{ 或 } <(1+m^2)(b^2-a^2),$$

卽視　$$a^2(1+m^2)> \text{ 或 } <b^2 \text{ 以爲斷.}$$

故若 $a^2>\frac{b^2}{1+m^2}$ 則該二交點之橫標爲實；若 $a^2<\frac{b^2}{1+m^2}$，則爲虛.

如於 §113 中然，此等乃係“該直線上之圓心垂線可小於及大於該半徑”之各別情形.

今假若該圓心垂線大於半徑，則該直線必全位於圓外又在事實上必全不與圓相

徵. 是故，此乃"用以決定直線與圓之交點坐標的二次方程式具有二虛根"之代數結果之幾何解釋.

就類此情形而言，吾人慣謂該直線與圓相交於二"虛點". 在幾何學上，虛點之存在只可釋爲暗示並無實點之存在而已. 在代數學上，其意義乃謂欲求坐標之企圖終致生成二虛值.

115. 若已與圓方程式呈通式，卽

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0,$$

則其與直線 $y=mx+b$ 之交點可以次方程式表之:

$$x^2+(mx+b)^2+2gx+2f(mx+b)+c=0,$$

或
$$(1+m^2)x^2+2(mb+mf+g)x+b^2+2fb+c=0. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

相切條件爲此二次方程式中之二根必相等，卽 [代數學 2]

$$(mb+mf+g)^2=(1+m^2)\ (b^2+2fb+c).\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iii)}$$

若此條件能予滿足，則該二等根之值爲

$$x=-\frac{mb+mf+g}{1+m^2},\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iv)}$$

又此予切點之橫標.

代入 $y=mx+b$，吾人求得相應之縱標.

於數字例題及特殊情形中，凡不能適用公式 [38] 或 [40] 者，此間所述之法當可依據之. 此定則乃爲:——

從所與圓及直線之方程式消去 y. 所得之 x 之二次方程式卽可決定交點.

若該二次方程式有等根則該直線乃爲切線，又此等根之值當表切點之坐標.

例 題

1. 求在圓 $x^2+y^2+2x=0$ 上並與 x 軸作角 $45°$ 之切線方程式.

令
$$y=x\ \tan\ 45°+b=x+b$$
爲該切線之方程式．其與所與圓之交點之橫標乃由 x 之二次方程式決定之，該方程式爲
$$x^2+(x+b)^2+2x=0,$$
或
$$2x^2+2(b+1)x+b^2=0.$$
二者相切之條件即爲此二次方程式中二根相等，又故
$$(b+1)^2=2b^2,$$
或
$$b^2-2b-1=0,$$
由之
$$b=1\pm\sqrt{2}.$$
故所求之切線方程式爲
$$y=x+1\pm\sqrt{2}.$$

2　求證下列二圓相切，並求其切點：
$$x^2+y^2+10x+5=0, \cdots\cdots(i)$$
及
$$x^2+y^2+5y+5=0. \cdots\cdots(ii)$$

求二者之交點，從 (ii) 減去 (i)；此予 $5y-10x=0$，或 $y=2x$.

代此值入 (i)，吾人乃得 $x^2+4x^2+10x+5=0,$

或
$$5x^2+10x+5=0;$$
故
$$x^2+2x+1=0 \quad 或 \quad (x+1)^2=0.$$
此二 x 值相等，俱爲 -1.

故該二圓相切於 $x=-1$ 處之一點.

因
$$y=2x, \quad 故 \quad y=-2.$$
是故所求之切點爲 $(-1, -2)$.

*116.　求在圓 $x^2+y^2=a^2$ 上並通過所與點 (x_1, y_1) 之切線.

通過 (x_1, y_1) 點之任何直線爲，由 [15]，
$$y=mx+y_1-mx_1.$$
相切之條件 [38] 爲

$$(y_1-mx_1)^2=a^2(1+m^2),$$

該式又可化成 m 之二次方程式,

$$m^2(a^2-x_1^2)+2mx_1y_1+(a^2-y_1^2)=0. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(v)}$$

解之，吾人得［代數學 1］

$$m=-\frac{x_1y_1\pm\sqrt{x_1^2y_1^2-(a^2-x_1^2)(a^2-y_1^2)}}{a^2-x_1^2}$$

$$=-\frac{x_1y_1\pm a\sqrt{x_1^2+y_1^2-a^2}}{a^2-x_1^2}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(vi)}$$

若 (x_1, y_1) 位於圓外，其遠隔圓心之距離必大於半徑，故 $x_1^2+y_1^2-a^2$ 爲正．故 m 之二值俱爲實［代數學 3］；即自圓外之一點至圓可引作二切線．

若 (x_1, y_1) 位於圓上，則 $x_1^2+y_1^2-a^2=0$；二 m 值相等［代數學 2］，二切線俱與在 (x_1, y_1) 點之切線相重合．

若 (x_1, y_1) 位於圓內，則 $x_1^2+y_1^2-a^2$ 爲負，又二 m 值俱爲虛［代數學 3］．此顯與"過圓內一點絕不可能引作切線"一事實相符．就常情言，吾人可謂有二"虛切線"．

117. 求聯結具有坐標 (0,0) 之原點至所與直線與圓之交點所成之二直線之方程式．

令該直線之方程式書呈［12 a］之形式，即

$$Lx+My=1,$$

又圓方程式呈［32］之形式;

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

將此二方程式合併之，使成 x 與 y 之二次齊次方程式．此方程式乃表所求之直線．

如欲爲此吾人當如是書出［32］

$$x^2+y^2+2(gx+fy)\times 1 \quad +c\times 1^2=0.$$

由 [12 a], 將 $Lx+My$ 代此最後方程式中之 1, 又故吾人得

$$x^2+y^2+2(gx+fy)(Lx+My)+c(Lx+My)^2=0, \cdots[40]$$

此乃所求之方程式.

因二次方程式 [40] 乃齊次者, 又故乃表通過原點之二直線. 又, 因其係由合併 [12 a] 及 [32] 二方程式而得, 故其必爲同時滿足後二方程式之該等 x 與 y 値所滿足. 是故 [40] 之軌跡當通過爲直線 [12 a] 及圓 [32] 所共有之該等點.

更一般言之, 聯結原點至直線 $Lx+My=1$ 與所謂"圓錐曲線", 卽下列二次方程式之軌跡:

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0,$$

之交點所成之該對直線可以下列齊次方程式表之:

$$ax^2+2hxy+by^2+2(gx+fy)(Lx+My)+c(Lx+My)^2=0. \cdots\cdots(\text{vii})$$

證法同前.

*118. 相切條件.——若直線 $Lx+My=1$ 切於圓 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 上, 則該二交點必互相重合; 故聯結之至原點之直線亦必相重, 又 [40] 當表一對相重直線. 前節中最後所書之方程式, 卽 (vii), 經乘開並整理排列後, 乃成

$$(1+2gL+cL^2)x^2+2(gM+fL+cLM)xy+(1+2fM+cM^2)y^2=0.$$

若將 §76 中所述之相重直線之條件應用於此方程式, 吾人可得

$$(gM+fL+cLM)^2=(1+2gL+cL^2)(1+2fM+cM^2).$$

此相切條件又可化爲

$$1+2(gL+fM)-(gM-fL)^2+c(L^2+M^2)=0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{viii})$$

又, 如是, 充其量似較複雜而已. 雖頃所求得之法自以應用之於數字題或特殊情形中以求直線是否與所與圓相切時爲最相宜,

例題

求 p 值，令下列直線 (i) 與圓 (ii) 相切：

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p, \quad\cdots\cdots\text{(i)}$$

$$x^2+y^2-2ax=0. \quad\cdots\cdots\text{(ii)}$$

所與直線方程式亦可書成 $(x\cos\alpha+y\sin\alpha)/p=1$ 之形式，聯結原點與 (i) (ii) 之交點所成之直線可表以方程式：

$$x^2+y^2-2ax(x\cos\alpha+y\sin\alpha)/p=0,$$

或（以 p 遍乘之） $(p-2a\cos\alpha)x^2-2a\sin\alpha\cdot xy+py^2=0.$

若 $a^2\sin^2\alpha=p(p-2a\cos\alpha)$，則此二直線乃相重合；

此乎 $\quad p^2-2ap\cos\alpha+a^2\cos^2\alpha=a^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=a^2;$

故 $\quad p-a\cos\alpha=\pm a.$

是故若 $\quad p=a(1+\cos\alpha)$ 或 $p=-a(1-\cos\alpha)$,

則該直線乃爲切線.

119. 直線 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=a$ 恆切於圓 $x^2+y^2=a^2$.

由"從圓心至該直線上所引之垂線等於半徑"一事實可以顯見是語之可靠.

或，如不假定此種性質，吾人求知聯結原點至交點所成之直線可表以

$$x^2+y^2=(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2,$$

卽 $\quad x^2\sin^2\alpha-2xy\sin\alpha\cos\alpha+y^2\cos^2\alpha=0,$

或 $\quad (x\sin\alpha-y\cos\alpha)^2=0;$

是故此二直線必相重合.

120. 直徑性質.——若吾人研討爲 $\parallel x$ 軸之直線 $y=b$ 所截之圓 $x^2+y^2=a^2$ 之弦，可知該弦之二端之橫標爲 [§110] 二次方程式 $x^2+b^2=a^2$ 中之一對根，由之，得

$$x=\sqrt{(a^2-b^2)}, \quad \text{或} \quad x=-\sqrt{(a^2-b^2)}.$$

該二 x 值（絕對值）相等而符號相反，該弦之二端與 y 軸等距；故其中點必在 y 軸上. 是故凡 $\parallel x$ 軸之弦其中點之軌跡卽爲 y 軸，又如是，一般言之，圓中任何平行弦系之中點之軌跡顯爲通過圓心並垂直諸弦之直線.

習　題——§§110—115.

1. 試證圓 $x^2+y^2+2a(x+y)+a^2=0$ 與二軸相切，並求出切點.

2. 承上題，試證該圓亦與直線 $x+2a=0$ 及 $y+2a=0$ 相切.

求圓心在原點又各與次三直線相切之圓方程式:

3. $y=2x+5$.　　4. $y=\frac{1}{3}x+3\frac{1}{3}$.　　5. $3x+4y=10$.

求與圓 $x^2+y^2=2$ 相切並與 x 軸傾交成下列諸角之切線方程式:

6. $45°$.　　7. $120°$.　　8. $-30°$.　　9. $\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$.

求證下列直線與圓相切，並於每一種情形內決定其切點:

10. $x^2+y^2+x+y=0$ 與 $x+y+2=0$.

11. $x^2+y^2=1$ 與 $x^2+y^2-8x-6y+9=0$.

12. $x^2+y^2=6y$ 與 $y=\sqrt{3}\,x+9$.

13. $x^2+y^2=4$ 及 $x^2+y^2+\sqrt{3}x+y=0$.

14. 求證直線 $y=mx+a\,\{1\pm\sqrt{(1+m^2)}\}$ 恆與圓 $x^2+y^2=2ay$ 相切.

習　題——§§116—120.

15. 書出聯結原點至直線 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 與圓 $x^2+y^2=c^2$ 之交點所成之一對直線之方程式.

求證,若該所與直線與圓相切，則 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}$.

16. 求證聯結原點至 $x^2+y^2=a^2$ 與 $x^2+y^2+2(gx+fy)=0$ 二圓之交點所成之直線可用下列二次方程式表之:

$$a^2(x^2+y^2)-4(gx+fy)^2=0.$$

17. 求切於圓 $x^2+y^2=3$ 並通過點 $(1,\sqrt{3})$ 之二切線之方程式.

18. 求 $x^2+y^2=25$ 與 $x^2+y^2-26y+25=0$ 二圓之交點，並求證該二圓相截成直角.

19. 就一般情形，求證下列二圓相截成直角：

$$x^2+y^2=a^2 \quad 及 \quad x^2+y^2+2gx+a^2=0.$$

20. 求內切(或內接)於用下列方程式以表三邊之三角形內之圓之方程式：

$$y=0,\quad y=\sqrt{3}x,\quad 及\quad y=-x\sqrt{3}+6.$$

21. 承上題，若該三角形三邊之方程式爲

$$x=y,\quad x=-y,\quad 及\quad x=2+\sqrt{2}.$$

22. 求證直線 $y=mx$ 切於下列二圓：

$$x^2+y^2-2ax\sqrt{(1+m^2)}+a^2=0$$

與

$$x^2+y^2-2by\sqrt{(1+m^2)}+b^2m^2=0.$$

推論若 $a=\pm mb$，則該二圓本身相切.

試 卷 十 四

1. 求直線 $y=mx+c$ 與圓 $x^2+y^2=r^2$ 相切之條件.

2. 求直線 $y=mx$ 與圓 $x^2+y^2-8x-6y+12=0$ 相交之點之坐標.

3. 承前題，如該二交點相重則 m 之值爲何？又由之而求通過原點之所與圓上之切線方程式.

*4. 求直線 $y=mx+c$ 與圓 $x^2+y^2+2gx+2py+r=0$ 相切之條件.

*5. 如欲令直線 $3x+4y=b$ 與圓 $x^2+y^2-6x-4y=12$ 相切，則 b 值爲何？

6. 試證直線 $4x+3y=36$ 切於圓 $x^2+y^2-4x-2y=20$ 上，並求該切點之坐標.

7. 求切於圓 $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ 並平行於直線 $3x+4y+7=0$ 之切線方程式.

8. 求與圓 $x^2+y^2=25$ 相切並與 x 軸作 30° 角之二切線之方程式.

9. 試表如何求聯結原點至直線 $lx+my+n=0$ 與圓 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 之交點所成二直線之方程式.

10. 求通過原點及直線 $x+y=4$ 與圓 $x^2+y^2-4x-4y=16$ 之交點之直線方程式.

第十五章　對圓而言之極點與極線之理論

121. 於此章中，吾人將應用坐標法於對圓而言之極點與極線之理論. 在進行初步研究時，讀者可以發見，如對極點與極線之幾何理論已能完全澈底了解，則必可獲有相當裨益，而關於該種論述，每可於若干近版歐氏幾何學中見之.

"極點"與"極線"二詞可據下列基本性質釋之:——

若圓內諸弦通過一定點則在該等弦之兩端所引諸對切線之交點之軌跡爲一定直線.

此直線名曰該定點之極線 (polar).

該點名曰該定直線之極點 (pole).

一直線之極點亦可藉下列逆轉性質釋明之，卽

若自位於固定直線上之諸點至圓上引作諸對切線則聯結該等諸對切點所成諸弦必通過一定點. 此點稱爲該直線之極點.

於用解析法求證此等性質前，吾人必當先行求出自所與圓外之點至圓上所引二切線之切點弦之方程式.

122. 已知自所與圓外之一點至圓上所作之一對切線，求聯結該對切點之弦之方程式.

令 $P(x_1, y_1)$ 爲所與圓外之一點; 又令所與圓爲

$$x^2+y^2=a^2.$$

令 PQ, PR 爲自 P 點所引各與該圓相切於 Q, R 二點之二切線. 吾人意欲求直線 QR 之方程式.

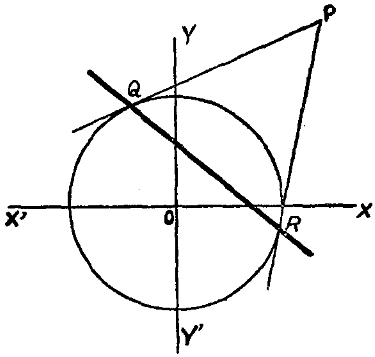


圖 44

令 x', y' 爲 Q* 點之坐標. x'', y'' 爲 R* 點坐標.

在 (x', y') 點之切線 QP 之方程式爲, 由 [33],

$$xx'+yy'=a^2, \cdots\cdots \text{(i)}$$

又在 (x'', y'') 點之切線 RP 之方程式爲

$$xx''+yy''=a^2. \cdots \text{(ii)}$$

此二切線俱皆通過 P 點, 故方程式 (i) 與 (ii) 俱爲 P 點之坐標 x_1, y_1 所滿足; 即吾人得

$$x_1x'+y_1y'=a^2, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(iii)}$$

$$x_1x''+y_1y''=a^2. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(iv)}$$

但因以 x', y' 與 x'', y'' 代方程式 $xx_1+yy_1=a^2$ 中之流動坐標† x, y 致得 (iii) 與 (iv), 故吾人可知該等表式即乃直線

---

*注意 Q 點與 R 點之坐標在最後之結果中並不能仍舊存在, 易言之, 即最後俱皆除去右上角之撇點 "′".

†讀者須愼予注意, 凡此證中所見之 x 與 y 悉皆爲"流動"坐標; 又悉爲變數.

$$xx_1+yy_1=a^2. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots[41]$$

通過 Q 點與 R 點，卽點 (x', y') 與 (x'', y'') 之條件.

故 $xx_1+yy_1=a^2$ 卽爲所求切點弦 QR 之方程式.

123. 方程式 [41] 與 [33] 在形式上全無二致. 是故自圓外一點至圓上所引切線之切點弦可用恰與在該圓上一點之切線具有同形之方程式表之.

在事實上，若令該圓外之點 P 漸漸移向該圓直至其位於圓周上爲止，則 Q, R 二點當愈趨愈近終至與 P 點相合爲止，又 QR 弦終成在 P 點之切線 (§99).

*若 (x_1, y_1) 點位於圓內，則切線爲虛 (§117). 雖方程式 [41]

$$xx_1+yy_1=a^2$$

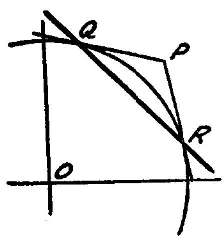


圖　45

乃表一實直線；但吾人可以顯見，此線今已全位於圓之範圍以外.（譯者按：此"以外"二字實乃指 QR 弦全位於圓周"以內"，惟與圓周不能相接.）故其與圓相遇於二虛點 (§114). 此等點乃係自點 (x_1, y_1) 至圓上所引之虛切線之切點.

就幾何學之立場而言，此種敍述不能表之於圖中. 但在代數學之觀點上，吾人可見 [41] 恆具與從圓外一點至圓上所引二切線之切點弦方程式相同之形式，且不論 (x', y'), (x'', y'') 諸量之爲實或虛，概可藉同樣之代數代換法求得之.

例　題

令自 (4, 5) 點至圓 $x^2+y^2=9$ 上引作二切線. 求二者之切點弦，卽聯結二者之切點所成之弦，之方程式.

令 Q, R 二切點之坐標各爲 (x', y') 與 (x'', y'')，其值非吾人所欲求者.

在 (x', y') 點之切線 QP 之方程式爲

$$xx'+yy'=9, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

又在 (x'', y'') 點之切線 RP 之方程式爲

$$xx''+yy''=9. \cdots\cdots \text{(ii)}$$

因二者俱通過 $(4, 5)$ 點，故

$$4x'+5y'=9, \cdots\cdots \text{(iii)}$$

又
$$4x''+5y''=9. \cdots\cdots \text{(iv)}$$

由 (iii)，$Q(x', y')$ 點滿足方程式　$4x+5y=9$，

又，由 (iv)，$R(x'', y'')$ 點滿足同一方程式；

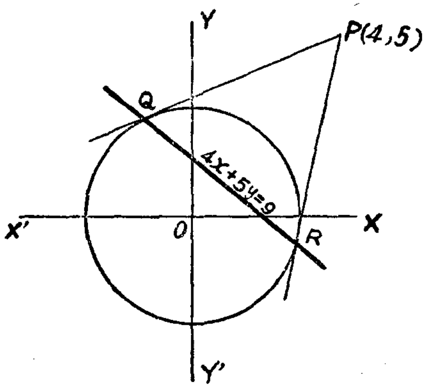


圖 46

故
$$4x+5y=9.$$

卽所求之 QR 弦之方程式.

124. 極線性質.——若通過一定點引作圓弦，則在弦端各對切線之交點必悉皆位於一個定直線上.

令圓方程式爲　$x^2+y^2=a^2$.

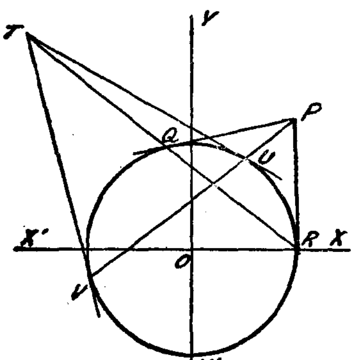


圖 47

令 T 爲所與定點，其坐標設爲 x_0, y_0. 過 T 點作任一圓弦 TQR，又令在 Q, R 二點之切線相交於 $P(x_1, y_1)$ 點.

切點弦　QR　之方程式爲

$$xx_1+yy_1=a^2.$$

因，由假設，此弦必通過 T 點，(x_0, y_0)，故

$$x_0x_1+y_0y_1=a^2.$$

此種關係亦表 $P(x_1, y_1)$ 點位於方程式如次之直線上:

$$xx_0+yy_0=a^2; \quad\cdots\cdots\cdots\cdots[42]$$

又此式對於通過 T 點之 TQR 弦之任何位置必可確立. 如是,若令 TQR 繞 T 而轉, 則 P 點必將沿定線 $xx_0+yy_0=a^2$ [42] 而移動.

系.——故, 由 §124 之定義,

對圓 $x^2+y^2=a^2$ 而言之 (x_0, y_0) 點之極線乃爲直線

$$xx_0+yy_0=a^2.$$

試將[42] 與 [41] 兩相比較, 吾人可知

125. 圓外點之極線乃自該點所引之切線之切點弦

此一結果可據下列論述推得之: 令弦 TQR 逐漸趨近自 T 點所引之切線以爲其極限位置. 則 Q, R 二點終趨合併. 但 P 點於彼時亦必與該二點相合, 致成切線之切點,故該點必位於該軌跡上.

吾人固可將一點之極線釋爲自該點所引切線之切點弦, 但此一定義必致引起如 §123 中, 自內點作切線, 同樣之困難.

圓上一點之極線乃在該點之切線.

吾人必當慎重注意, 極線方程式, 在形式上, 與在圓上一點之切線方程式之通常形式毫無二致.

126. 若 P 點之極線通過 T 點，則 T 點之極線必通過 P 點.

令 (x_0, y_0) 爲 T 點之坐標，(x_1, y_1) 爲 P 點之坐標，圓方程式爲，如前，

$$x^2+y^2=a^2.$$

P 點之極線方程式爲

$$xx_1+yy_1=a^2, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

又 T 點之極線方程式爲

$$xx_0+yy_0=a^2. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

若
$$x_0x_1+y_0y_1=a^2, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{iii})$$

則前一直線 (i)，必通過 T 點，又此亦表線 (ii) 通過 P 點之條件.

例題

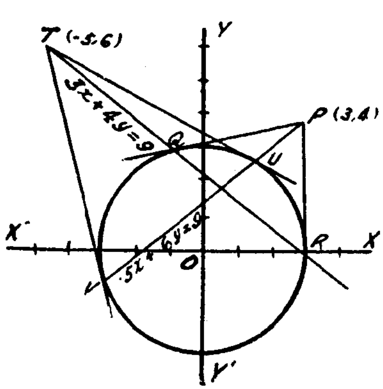


圖 48

已與圓 $x^2+y^2=9$，及 P (3, 4) 與 T (−5, 6) 二點. 求證 P 點之極線 (QR) 通過 T 點，並 T 點之極線 (UV) 通過 P 點.

(3, 4) 點之極線 QR 之方程式爲

$$3x+4y=9.$$

若 (−5, 6) 點滿足該方程式，卽若

$$3\times-5+4\times6=9,$$

或
$$-15+24=9.$$

則極線 QR 通過 T 點.

但此果恰如是，故 (3, 4) 之極線確過 (−5, 6) 點.

再者，(−5, 6) 點之極線 UV 之方程式爲

$$-5x+6y=9.$$

若 (3, 4) 點滿足該方程式，即若

$$-5\times3+6\times4=9.$$

則此極線，UV，通過 P 點.

因此與前者情形相同，又恰予滿足，故 (−5, 6) 點之極線必過 (3, 4) 點.

127. 用幾何方法求作所與點 P 對所與圓之極線.

定則.——聯結 P 點與圓心，又令直線 OP 截圓周於 A 點.

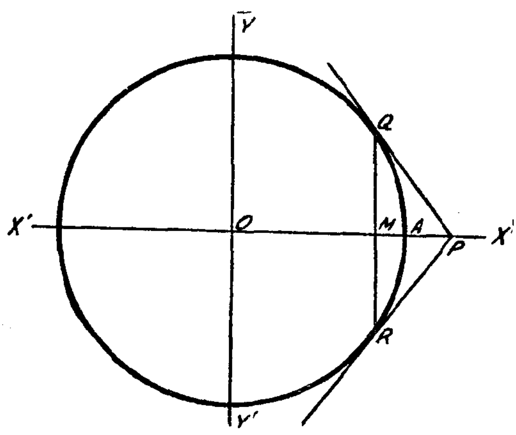


圖　49

於 OP 上量取長度 OM——OP 與半徑 OA 的比例第三項 [歐幾 VI. 11.]，(使 $OM\cdot OP=OA^2$).

過 M 點作直線 $QMR \perp OP$.

此直線即 P 點之極線.

證.——取 O 爲原點，又直線 OP 爲 x 軸.

令 $OP=h$，又令圓方程式爲 $x^2+y^2=a^2$. P 點之坐標爲 $(h,0)$.

故 P 點之極線方程式當爲 $hx+0\cdot y=a^2$，或 $x=\dfrac{a^2}{h}$.

故該極線 $\perp$ x 軸，即 OP，又其去 O 點之距離爲 $\dfrac{a^2}{h}$ 或 $\dfrac{OA^2}{OP}$，如是即可證明上列作圖.

*128. 二直線交點之極線爲聯結二線極點之直線.

令 QSR，USV 爲相交於 S 點之二直線，又 P，T (圖 48) 爲彼等之極點. 因 S 點位於 P 點之極線上，故 S 點之極線通過 P 點；又，因 S 點位於 T 點之極點上，故 S 點之極線通過 T 點. 是故直線 PT 乃 S 點之極線. [$Q.E.D.$]

自配三角形.——就前一特殊情形而言，若 QSR 通過 T 點，則 USV 將通過 P 點 (§126)，又，故，於 $\triangle PST$ 中各頂應爲其頂邊之極線. 如是之三角形乃稱爲"自配" (self-conjugate) 三角形.

極配形.——若與吾人以由諸點及直線所構成之任何幾何圖形，則，若取，對於任何圓而言，所與諸點之極線及所與諸直線之極點，吾人能另行作出由其他諸直線及點所構成之另一種新圖形. 此新圖形稱爲對於該圓而言之原圖形之極配形 (polar reciprocal)，又由原圖形之幾何性質吾人常可證明關於新圖形之其他性質.

129. 一般極線方程式(或謂極線之通式).——若與圓方程式成通式

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0,$$

則 $(x_0,\ y_0)$ 點之極線方程式爲

$$xx_0+yy_0+g(x+x_0)+f(y+y_0)+c=0,\cdots\cdots\cdots[48]$$

且與當點 (x_0, y_0) 在圓上時表切線之方程式具有同形. [比較 §125.]

如以呈 [32] 之形式之切線方程式爲出發點，更將 §§122 與 124 中之方程式內稍予相當變化，則上述方程式可以恰如以前證明圓心在原點之圓之情形證明之. 或用"極線"以代"切線"，使 §125 中所述之結果可用恰如 §§104, 105 相同之方法予以引申之.

130. 直線之極點.——欲推求極點之性質當以從極線之性質入手爲最易. 當吾人需求所與直線之極點之坐標之時，最簡易之法莫如將其方程式與 (x_1, y_1) 點之極線方程式比較之. 此法當於本節之末諸例題中實用之. 今時吾人先行舉述關於不論該極線之性質如何，一直線之極點之基本性質之證法.

自所與直線上諸點至所與圓上引作切線若干對：求證該等切線之切點弦必通過一定點.

令圓方程式爲 $$x^2+y^2=a^2, \qquad \text{(i)}$$

又令直線方程式爲 $$y=mx+b. \qquad \text{(ii)}$$

令 (x', y') 爲此直線上之任一點，自 (x', y') 點所引之切線之切點弦可表以方程式

$$xx'+yy'=a^2. \qquad \text{(iii)}$$

(x', y') 點位於直線 (ii) 上之條件爲

$$y'=mx'+b. \qquad \text{(iv)}$$

以 (iv) 中之 y' 值代入 (iii)，吾人可見該切點弦之方程式可書爲

$$xx'+y(mx'+b)=a^2,$$

或
$$(x+my)x'+by-a^2=0.$$

此式顯示 (§69)，就 x' 之一切值而言，該切點弦必通過次二直線之交點；

$$\left.\begin{aligned} x+my&=0 \\ by-a^2&=0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(v)}$$

將方程式 (v) 聯立解之，吾人求得 $y=\frac{a^2}{b}$,

$$x=-my=-\frac{ma^2}{b},$$

故該一對根卽爲所與直線之極點之坐標.

例 題

1. 求下列直線 (i) 對於圓 (ii) 之極點:

$$3x-5y=4, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

$$x^2+y^2=16. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

令 (x_1, y_1) 爲該直線之極點. 則 (x_1, y_1) 之極線爲直線

$$xx_1+yy_1=16.$$

此必與直線 (i) 全相一致. 今時，方程式 (i) 可書爲

$$12x-20y=16;$$

故，比較係數，吾人顯然可得

$$x_1=12, \quad y_1=-20,$$

又故該所求之極點乃卽點 $(12, -20)$.

2. 求下列直線 (i) 對於圓 (ii) 之極點:

$$Lx+My=1, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

$$x^2+y^2=a^2. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

令 (x_1, y_1) 爲該極點. 其極線方程式爲

$$xx_1+yy_1=a^2,$$

或 (令該常數爲 1)

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{a^2}=1.$$

此必與 (i) 相同，故

$$\frac{x_1}{a^2}=L, \quad \frac{y_1}{a^2}=M,$$

卽　$$x_1=La^2,\quad y_1=Ma^2,$$

又此二値卽所求極點之坐標.

習　題——§§121—130.

寫出下列諸點對於圓 $x^2+y^2=14$ 之極線:

1. $(6,\ 8)$.　2. $(21,\ -35)$.　3. $(-3,\ 1)$.　4. $(0,\ 1)$

求下列諸直線對於同前之圓之極點:

5. $2x+3y=7$.　6. $3x-y=2$.　7. $x-y=14$.　8. $3x=7$.

求下列二點對於圓 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 之極線:

9. $(4,\ 4)$.　10. $(-11,\ -16)$.

11. 書出 $(5,\ 4)$ 點對於圓 $x^2+y^2-4x-3y=8$ 之極線.

12. 原點對於圓 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 之極線爲直線 $gx+fy+c=0$. 試證之.

13. 求與圓 $x^2+y^2=5$ 相切於爲直線 $x=1$ 所截之點之切線方程式, 並證明其彼此相交於 $(5,\ 0)$ 點.

*14. 自點 $(x_1,\ y_1)$ 引切線至圓 $x^2+y^2=a^2$ 上, 求聯結該二切線之切點至圓心(原點)所成之一對直線之方程式. 若此等直線交成直角, 試證 $(x_1,\ y_1)$ 必位於圓 $x^2+y^2=2a^2$ 上. (參閱 §77.)

試 卷 十 五

1. 表證如何求自圓外一點至圓 $x^2+y^2=r^2$ 上所引切線之切點弦之方程式.

2. 求證, 若作諸圓弦通過一定點, 則該等弦端之各對切線之交點之軌跡必爲一直線.

3. 試釋一點對於一所與圓之極線.

4. 求直線 $Ax+By+C=0$ 對於圓 $x^2+y^2=a^2$ 之極點.

5. 求證, 若一直線對於圓 $x^2+y^2=c^2$ 之極點位於圓 $x^2+y^2=9c^2$ 上, 則該極線乃切於圓 $x^2+y^2=\dfrac{c^2}{9}$ 上之切線.

6. 若 P, Q 爲任二點，又若 P 點對於所與圓之極線通過 Q 點，則 Q 點對於同圓之極線必通過 P 點.

7. 若對於圓 $x^2+y^2=c^2$ 之極點恆位於直線 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 上，求極線方程式，並求證其通過一定點.

8. 表證如何用幾何方法繪作一所與點對於一所與圓之極線.

*9. 示證如何求任一點對於圓 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 之極線方程式

*10. 求點 (5, 6) 對於圓 $x^2+y^2-3x-4y=8$ 之極線.

第十六章

自任一點至圓上所引切線之長—根軸

131. 求自已與點至已與圓所引切線之長.

令 $P(x', y')$ 點為所與點, $C(h, k)$ 點為半徑為 a 之圓之圓心, PQ, PR 為自 P 點所引之一對切線.

$\angle CQP$ 為直角, 故

$$CQ^2+QP^2=CP^2, \quad 或 \quad QP^2=CP^2-CQ^2.$$

但 $CQ=a$, 又由 [1],

$$CP^2=(x'-h)^2+(y'-k)^2;$$

故 $QP^2=(x'-h)^2+(y'-k)^2-a^2.$

是故, 若圓方程式為

$$(x-h)^2+(y-k)^2-a^2=0,$$

自圓外一點 (x', y') 至圓上所引切線之長之平方等於

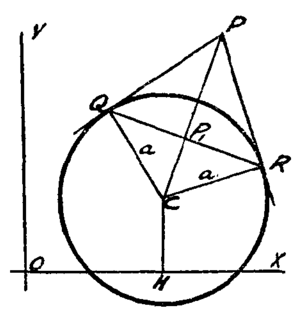


圖 50

$$(x'-h)^2+(y'-k)^2-a^2. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots [44]$$

132. 系.——若圓方程式表成通式

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0,$$

此式亦可書為

$$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c.$$

由 [44]，自 (x',y') 點至該圓上之切線之平方

$$=(x'+g)^2+(y'+f)^2-(g^2+f^2-c)$$

$$=x'^2+y'^2+2gx'+2fy'+c. \cdots\cdots\cdots\cdots[45]$$

是故若圓方程式中 x^2+y^2 之係數爲 1 又所有諸項悉皆位於一邊，則由以圓外 P 點之坐標替代該邊中之 x, y 所求得之量等於自 P 點至該圓上所引切線之平方.

133. 若 (x',y') 點位於圓內，如在 P_1 點，則式

$$(x'-h)^2+(y'-k)^2-a^2$$

當爲負. 於此種情形中，作弦 $QP_1R \perp CP_1$；則

$$P_1Q^2=CQ^2-CP_1{}^2$$

$$=a^2-(x'-h)^2-(y'-k)^2;$$

是故，就此種情形而言，由將 (x',y') 代 $x^2+y^2+2gx+2fy+c$ 式中之 (x,y) 並變易其符號所得之量等於平分於 P_1 點之弦之半之平方.

由歐幾 III. 35, 36, 或後之 §143, 吾人當可證明量

$$(x'-h)^2+(y'-k)^2-a^2,$$

或

$$x'^2+y'^2+2gx'+2fy'+c,$$

在任何情形中，必等於在過 (x',y') 點所作圓之任何弦之弓形下之矩形. 若該點位在圓上，則該量自必爲零*.

例題

求證自一點至二所與同心圓所引之切線之平方差與該點之位置無關.

令 (x',y') 爲該點，(h,k) 爲二圓之公心，a 與 a' 爲二圓之半徑.

*今稱此量爲 (x',y') 點對於該圓之冪 (power).

則自 (x', y') 點至該二圓上所引之切線之平方各爲 $(x'-h)^2+(y'-k)^2-a^2$ 及 $(x'-h)^2+(y'-k)^2-a'^2$. 二者之差 $=a'^2-a^2$, 據此結果可資證明該差與 (x', y') 點之位置毫無關係.

134. 二圓之交點.——二圓交點之坐標可以由聯立求解其方程式中之 x 與 y (§53) 求得之. 若書該二圓之方程式成任何形式使其中 x^2 與 y^2 之係數俱皆爲 1, 則吾人如令該二方程式相減, 當可求得一新方程式, 僅函 x 與 y 之一次冪並爲同時滿足該二圓方程式之 x 與 y 之值所滿足. 因該方程式爲一次方程式, 故表通過該二圓交點之直線.

135. 求下列二圓之公弦方程式:

$$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

及

$$x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

(i) − (ii), 吾人得

$$(x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1)-(x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2)=0, \quad \text{(iii)}$$

或

$$2(g_1-g_2)x+2(f_1-f_2)y+(c_1-c_2)=0. \cdots\cdots\cdots[46]$$

方程式 [46] 乃屬一次者. 故其乃表某種直線. 再者, 令其呈 (iii) 之形, 吾人可見: 其爲同時滿足方程式 (i) 與 (ii) 之任何 x 與 y 值所滿足. 故其乃表聯結圓 (i) 與 (ii) 之交點之直線, 即該二圓之公弦.

縱令圓 (i) 與 (ii) 不相交於實點, 方程式 [46] 猶可表一實直線. 爲欲符合通常所定之慣例起見, 吾人可謂此直線通過該二圓之"虛交點".

136. 定義——二圓之根軸 (radical axis) 爲自諸點至該二圓上所引諸切線悉皆等長之該等點之軌跡.

137. 二圓根軸乃通過其交點之直線.

令該二圓之方程式爲

$$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{i})$$

及

$$x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{ii})$$

令 (x, y) 爲該根軸上之任一點. 由前節之定義, 自 (x, y) 點至 (i) 與 (ii) 二圓上所引切線之平方應相等; 故, 由 [45], 吾人得

$$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2,$$

或

$$2(g_1-g_2)x+2(f_1-f_2)y+(c_1-c_2)=0, \cdots\cdots\cdots [46]$$

又故 (x, y) 點之軌跡爲聯結 (i), (ii) 二圓之交點之直線.

不論該二圓相交於實點與否, §136 之定義在幾何學之立場上殊甚了然. 若二者相交, 則介於該二交點間之根軸部分卽該二圓之相等平分弦之點之軌跡. (§133.)

138. 二圓之根軸必垂直於聯結其圓心之直線.

前節中圓 (i) 與 (ii) 之圓心之坐標分別爲 $(-g_1, -f_1)$ 與 $(-g_2, -f_2)$.

故, 由 [16], 聯結該二圓心之直線可表以

$$\frac{x+g_1}{g_1-g_2}=\frac{y+f_1}{f_1-f_2},$$

或

$$(f_1-f_2)x-(g_1-g_2)y+f_1g_2-g_1f_2=0. \cdots\cdots\cdots (\text{iv})$$

又，自 [46]，該根軸卽直線

$$(g_1-g_2)x+(f_1-f_2)y+\frac{1}{2}(c_1-c_2)=0,$$

由 §61，且可知其垂直於 (iv)．

*139．逐對選配之三圓之三根軸通過一公點．

令三圓之方程式爲

$$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0, \cdots\cdots\cdots\cdots(i)$$

$$x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0, \cdots\cdots\cdots\cdots(ii)$$

$$x^2+y^2+2g_3x+2f_3y+c_3=0. \cdots\cdots\cdots\cdots(iii)$$

三根軸之方程式爲

$$2(g_1-g_2)x+2(f_1-f_2)y+c_1-c_2=0,$$

$$2(g_2-g_3)x+2(f_2-f_3)y+c_2-c_3=0,$$

$$2(g_3-g_1)x+2(f_3-f_1)y+c_3-c_1=0.$$

若使之相加，則左邊之和悉皆成零．故該三根軸會交於一點 [§70，令 $k=l=m$]．

否則，如是：——令 (i) 與 (ii) 之根軸與 (i) 與 (iii) 之根軸相交於 P 點．

則自 P 點至 (i) 與 (ii) 所引之切線相等，又至 (i) 與 (iii) 之切線亦相等．

故自 P 點至 (ii) 與 (iii) 之切線相等，卽 P 點亦位於 (ii) 與 (iii) 之根軸上．

若 P 點位在圓內，則以"平分弦"代"切線"亦可．

此公點 P 稱爲該三圓之根心．

*140．由某點至二所與圓上之切線槪成定比之該點之軌跡乃通過該二所與圓之交點之圓．

令 (x, y) 爲如是之一點，使自之至 §137 之 (i)，(ii) 二圓上所引之切線成 $k:1$ 之比．(i) 上切線之平方爲 (ii) 上切線之平方之 k^2 倍；故

$$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=k^2(x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2), \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{v})$$

或 $$(1-k^2)(x^2+y^2)+2(g_1-k^2g_2)x+2(f_1-k^2f_2)y+(c_1-k^2c_2)=0,$$

或 $$x^2+y^2+2\frac{g_1-k^2g_2}{1-k^2}x+2\frac{f_1-k^2f_2}{1-k^2}y+\frac{c_1-k^2c_2}{1-k^2}=0. \cdots\cdots(\text{vi})$$

此表一圓．令其方程式呈最初所得者之形式，則吾人可見其通過為 (i) (ii) 二圓所共有之點．故凡此三圓皆具同一根軸．

*141．如與 λ 以適當值，吾人能使方程式

$$(x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1)-\lambda(x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2)=0. \cdots\cdots(\text{vii})$$

表通過 (i)，(ii) 二圓之交點並共具一公共根軸之任何圓．再者，若吾人欲令該圓通過一所與點 (x_1, y_1) 則 λ 之值可由 (x_1, y_1) 點滿足該圓方程式之條件決定之．

關於根軸之性質本書中不擬再作更詳盡之研討．

142. 求過已與點沿已與向並與圓相遇所引直線之長．

令 $Q(x_1, y_1)$ 為所與點，過 Q 作一直線使與 x 軸作 θ 角並截次圓於 P, P' 二點：

$$x^2+y^2=a^2. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{viii})$$

吾人所需決定者乃 QP, QP' 二線之長．

由 §48，該直線之方程式為

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ix})$$

該處 r 係 (x, y) 點去 (x_1, y_1) 之距離．故流動坐標 (x, y) 可以 r，藉次之關係，表之：

$$x=x_1+r\cos\theta, \quad y=y_1+r\sin\theta.$$

若 (x, y) 點乃直線與圓 (viii) 之一個交點，則，代之入該方程式，吾人乃得

$$(x_1+r\ \cos\ \theta)^2+(y_1+r\ \sin\ \theta)^2=a^2,$$

或 $$r^2+2r(x_1\cos\theta+y_1\sin\theta)+x_1{}^2+y_1{}^2-a^2=0. \cdots\cdots(\text{x})$$

(注意 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$).

此方程式乃 r 之二次方程式.

今知 r 為 P 點或 P' 點去 Q 點之距離, P,P' 二點乃直線 (ix) 與圓 (viii) 之交點.

故該二次方程式之根卽所求之長 QP, QP'.

*143. 線段之矩形.——此 r 之二次方程式 (X), 二根之積為 $x_1{}^2+y_1{}^2-a^2$, 由 [代數學 6];

故 $$\text{矩形 } QP\cdot QP'=x_1{}^2+y_1{}^2-a^2, \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{xi})$$

又據歐幾 III. 35, 36, 可知此種關係必要成立, 與 θ 無關, 亦不論弦之方向如何.

試就某種特殊情形而言, 若該直線變成切線, 則 P, P' 二點相重; 因此矩形 $QP\cdot QP'$ 乃成切線 QP 上之正方形;

故 $$\text{自 } (x_1, y_1) \text{ 點所引切線之平方 } =x_1{}^2+y_1{}^2-a^2.$$

此可視為 §§131, 133 之結果之交代證法.

本結果之另一種證法, 當於次章中舉述之.

*直徑性質.——設 Q (x_1, y_1) 為弦 PP' 之中點. 因 QP 與 QP' 相等, 但係自 Q 點反向而作成者, 則由二次方程式 (X) 所決定之兩個 r 值應相等, 而互具反號, 故該代數和必等於 0.

故 [代數學 5], (X) 中 r 一次冪之係數$=0$,

卽 $$x_1\ \cos\ \theta+y_1\ \sin\ \theta=0. \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{xii})$$

若吾人研討所作平行於所與直線之弦系, 羣弦之傾斜 θ 全同, 又故其在方程式 (xii) 中乃為一常數. 因此, (x_1, y_1), 任一如是之弦之中點之坐標, 必可滿

足 (xii), 又故, 若將流動坐標 (x, y) 書代 (x_1, y_1), 則該等弦之中點之軌跡卽爲直線

$$x \cos \theta + y \sin \theta = 0. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(xiii)}$$

此直線必垂直於該等弦. [參閱 §120.]

習 題——§§131—133.

求自下列所示之點至諸圓上所引諸切線之長——

1. $x^2+y^2=20$ 自 $(6, 3)$ 點.　　2. 又自 $(-5, 2)$ 點.

3. $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 自原點.　　4. 又自 $(-1, 5)$ 點.

5. $x^2+y^2-6x+2y+8=0$ 自 $(6, -2)$ 點.

6. $2x^2+2y^2-5x-7y+6=0$ 自 $(2, 3)$ 點.

7. 求證自原點至圓 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 上所引切線之長爲 $\sqrt{c}$.

8. 證驗上圓在 x 或 y 軸上所截成之線段所函之矩形等於 c.

習 題——§§134—143.

9. 求下列二圓之根軸:

$$x^2+y^2+4y-4x-1=0, \quad x^2+y^2+6x-8y-1=0.$$

10. 又求 $x^2+y^2-2x-3y+1=0$ 及 $4x^2+4y^2-3x-y+5=0$ 二圓之根軸.

11. 試證 $x^2+y^2+2y=0$, $x^2+y^2+x-y-2=0$, $x^2-y^2+3x-7y-6=0$ 三圓共具一公共根軸, 並求之.

12. 求逐對取配之下列諸圓之根軸:——

$x^2+y^2-3x-6y+8=0$, $x^2+y^2-x-4y+2=0$, $x^2+y^2+2x-6y+3=0$;

又求此等三根軸相交之點.

13. 求通過原點及 $x^2+y^2-4x+5y+3=0$ 與 $x^2+y^2-6x-y+9=0$ 二圓之交點之圓方程式.

14. 試證自圓 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 上之任一點至圓 $x^2+y^2+2gx+2fy+c'=0$ 上所引之切線之長爲 $\sqrt{c'-c}$.

試 卷 十 六

1. 試表如何求自所與點至圓 $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ 上所引切線之長.

2. 求自點 $(12, 6)$ 至圓 $x^2+y^2+18x-8y=227$ 上所引切線之長.

3. 求自 $(3a, 3a)$ 點至圓 $x^2+y^2-2ax-2ay+a^2=0$ 上所引切線之長.

4. 試證自圓 $x^2+y^2=3a^2$ 上任一點至圓 $x^2+y^2=a^2$ 上所引切線之長爲一常數.

5. 當 (x', y') 點位於圓 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 內時，式 $x'^2+y'^2+2gx'+2fy'+c$ 所表之意義若何?

6. 試釋二圓之根軸，並示其方程式之求法.

7. 求 $x^2+y^2-2x-4y=1$ 與 $x^2+y^2-4x-6y+5=0$ 二圓之根軸方程式.

8. 求次二圓之根軸方程式：

$$x^2+y^2+2x+4y=7 \quad 及 \quad x^2+y^2-6x+2y=5,$$

並證明其與聯結該二圓圓心之直線交成直角.

*9. 求下列三圓之根心之坐標：

$$x^2+y^2=9,\ x^2+y^2-2x-2y=5 \quad 與 \quad x^2+y^2+4x+6y=19.$$

*10. 求通過定點 (h, k) 之圓 $x^2+y^2=a^2$ 內諸弦之中點之軌跡.

第十七章　直線與圓之極方程式

(讀此章以前學者應先行温習 §§17—23.)

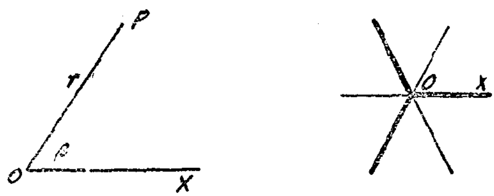
直　線

144. 求通過極點之直線之極方程式.

令直線 OP 與極軸 OX 作角 β.

若 P 爲該直線上之任一點(r, θ)(圖 51 之 A),$\angle XOP=\beta$;故 OP 之方程式爲

$$\theta=\beta. \qquad\qquad [47]$$



(A)　　圖 51　　(B)

例　題

求方程式 $\cos 3\theta=1$ 之軌跡.

求解 θ, 吾人得 $\theta=\frac{2}{3}n\pi$, 該處 n 爲任何整數. 限界 θ 角之直線與極軸或和極軸斜交成 120° 及 240° 角之二直線之一相疊合. 故該軌跡乃由三直線(圖 51 之 B) 所構成. r 爲正之部分繪以粗黑線.

145. 求任何直線之極方程式.

令決定直線之已知件為自極點至該直線上之垂線 (OT) 之長 p 及此垂線與極軸所作之角 (XOT) α. [仍如 §35 中然，(p, α) 乃該垂線之趾 T 之極坐標.]

令 P 為該直線上之任一他點 (r, θ)，故 $OP=r$ 又 $\angle XOP=\theta$，又故 $TOP=\theta-\alpha$.

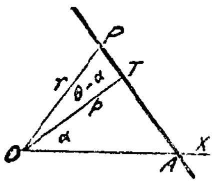


圖 52

因 $OT\perp PT$，故

$$OP\cos TOP=OT,$$

即
$$r\cos(\theta-\alpha)=p; \quad \cdots\cdots[48]$$

又此即所求之直線 TP 之極方程式.

例　題

1. 方程式 $r=\sec\theta$ 可寫為 $r\cos\theta=1$. 此處 $p=1$，又 $\alpha=0$. 故其軌跡乃為垂直於極軸並去 O 單位距離之直線.

2. 方程式 $r=\operatorname{cosec}\theta$. 此與 $r\sin\theta=1$ 或 $r\cos(\theta-90^\circ)=1$ 相同. 此處 $p=1$，$\alpha=90^\circ$. 該直線平行於極軸且去 O 一單位距離.

146. 於 §35 中吾人已曾證明若吾人在方程式

$$r\cos(\theta-\alpha)=p,$$

中展開 $\cos(\theta-\alpha)$ 並書 x, y 各代 $r\cos\theta, r\sin\theta$，則其當可化成 [13] 之形式，即

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p.$$

試將該二式相較，吾人不難見知:——

(i) $r\cos(\theta-\alpha_1)=p_1$ 及 $r\cos(\theta-\alpha_2)=p_2$ 二直線間之夾角爲 $\alpha_2-\alpha_1$.　　(與 §62 相較.)

(ii) 若 P 爲任一點 (r',θ')，則式

$$r'\cos(\theta'-\alpha)=p.$$

當 P 點位於直線 $r\cos(\theta-\alpha)=p$ 之原點異側時爲正，當 P 點位在該直線上時爲零，當 P 點位在該直線之原點同側時爲負. (與 §§51, 52 相較.)

(iii) 自點 (r',θ') 至直線 $r\cos(\theta-\alpha)=p$ 上所引垂線之長爲

$$d=\pm\{r'\cos(\theta'-\alpha)-\mathrm{p}\}.\quad(\text{與 §63 相較.})$$

此等結果亦殊易純就幾何學立場證明之，固毋需假定笛卡爾幾何學中之相當結果.

吾人存此以作學者之練習題.

147. 一般直線方程式之呈 [12 a] 形式者，即:

$$Lx+My=1,$$

當變換之爲極坐標系時，乃成

$$Lr\cos\theta+Mr\sin\theta=1,$$

或
$$\frac{1}{r}=L\cos\theta+M\sin\theta.\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

反之，凡可予化成此式之任何極方程式乃表一直線.

148. 求通過二所與點之直線之極方程式.

令 Q_1 (r_1, θ_1) 與 Q_2 (r_2, θ_2) 爲在直線 Q_1Q_2 上之二所與點，P (r, θ) 爲其上之任一他點.

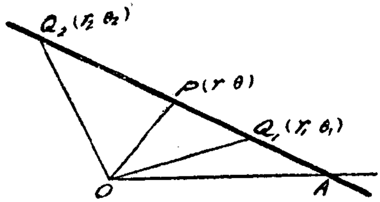


圖 53

直線 OP, OQ_1, OQ_2 與 Q_1PQ_2 直線構成三個三角形，其一爲他二者之和.

若 Q_1, P, Q_2 三點係依次表出於圖 53 中者，則吾人得

$$\triangle Q_1OQ_2=\triangle Q_1OP+\triangle POQ_2. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

又 [三角術 12]，或據 §21,

$$\triangle Q_1OQ_2=\frac{1}{2}OQ_1\cdot OQ_2 \sin Q_1OQ_2=\frac{1}{2}r_1r_2 \sin(\theta_2-\theta_1),$$

$$\triangle Q_1OP=\frac{1}{2}OQ_1\cdot OP \sin Q_1OP=\frac{1}{2}r\,r_1 \sin(\theta-\theta_1),$$

$$\triangle POQ_2=\frac{1}{2}OP\cdot OQ_2 \sin POQ_2=\frac{1}{2}r\,r_2 \sin(\theta_2-\theta);$$

由之，代入關係 (ii) 中並以 2 遍乘之，吾人得

$$r_1r_2 \sin(\theta_2-\theta_1)=r_1r \sin(\theta-\theta_1)+rr_2 \sin(\theta_2-\theta),$$

該式又可寫成更較對稱之形式

$$r_1r_2 \sin(\theta_2-\theta_1)+r_2r \sin(\theta-\theta_2)+rr_1 \sin(\theta_1-\theta)=0, \cdots\cdots\cdots[49]$$

或，再書爲

$$\frac{1}{r} \sin(\theta_2-\theta_1)+\frac{1}{r_1} \sin(\theta-\theta_2)+\frac{1}{r_2} \sin(\theta_1-\theta)=0. \quad \cdots\cdots[49]$$

學者可將方程式 [49] 視作一習題而就與吾人所曾論述者不同之其他情形證明之——例如當該等諸點依 Q_1, Q_2, P 或 P, Q_1, Q_2 之次序現出之時.

[學者當以此節與 §22 相較閱之.]

圓

149. 求在極坐標系中圓之方程式.

若圓心爲極點又半徑爲 a，則方程式顯爲

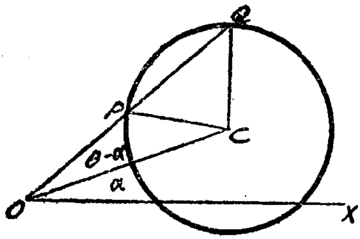


圖 54

$$r=a.\cdots\cdots\cdots[50]$$

否則，令圓心之極坐標爲 (ρ, α)，又令 a 爲半徑．

在圖中，令 P 爲圓周上之任一點 (r, θ)，又 C 爲圓心．

則 $$OC=\rho,\ OP=r,\ COP=\theta-\alpha,$$

又，自圓之定義，$CP=a$.

又，由［三角術 10］或［6］，§20,

$$CP^2=OC^2+OP^2-2OC\cdot OP\cos COP;$$

$$\therefore\quad a^2=\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha);$$

如是，則圓之極方程式爲

$$r^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)+\rho^2-a^2=0.\cdots\cdots\cdots\cdots[51]$$

150. 特殊情形.——設原點位在圓周上．則 $\rho=a$，故方程式爲

$$r^2-2ra\cos(\theta-\alpha)=0,$$

或，略去因子 r，

$$r=2a\cos(\theta-\alpha).\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots[52]$$

此種方程式之形式亦可單獨證明之：

因，若延長半徑 OC 使成直徑 OA 再遇圓周於 A 點，則 $\angle OPA$ 爲直角（歐幾 III. 31）；

故 $$OP=OA\cos AOP.$$

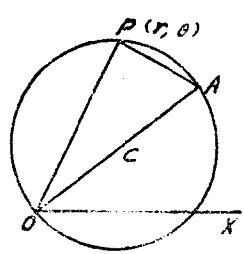


圖 55

或 $$r=2a\cos(\theta-\alpha). \quad\cdots\cdots[52]$$

若，加之，圓心位在極軸上，吾人乃得 $\alpha=0$，又圓方程式乃化成

$$r=2a\cos\theta. \quad\cdots\cdots[52a]$$

151. 自一定點引作任一直線使截所與圓於二點：求證弓形中所函之矩形，就該直線之一切位置而言，必係恆定. [比較歐幾 III. 36 系，及 §148.]

令定點爲原點，又令圓方程式爲

$$r^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)+\rho^2-a^2=0. \quad\cdots\cdots[51]$$

對 θ 之任何值而言，此可視爲 r 之二次方程式. 若 OPQ（圖 54）爲與極軸作 θ 角之直線，則滿足該二次方程式之二 r 値即 OP 與 OQ.

由［代數學 6］［51］中二根之積等於 ρ^2-a^2，

故 $$OP\cdot OQ=\rho^2-a^2. \quad\cdots\cdots[53]$$

因此式與 θ 無關，故矩形 $OP\cdot OQ$ 恆定，不論弦之方向爲何. 就特殊情形而言，若 P, Q 二點相重，則此矩形乃成自 O 點所引之切線上之正方形.

例　題

求極方程式如下 (i) 之圓之圓心及半徑：

$$r^2-2\sqrt{2}\,r(\cos\theta+\sin\theta)+3=0. \quad\cdots\cdots(i)$$

令 (ρ,α) 爲圓心之極坐標，a 爲半徑. 則所與方程式必同

$$r^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)+\rho^2-a^2=0,$$

即［三角術 8］同

$$r^2-2r\rho(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)+\rho^2-a^2=0. \quad\cdots\cdots(ii)$$

使 (ii) 中各項與 (i) 中對應各項相等，由 $r\cos\theta$, $r\sin\theta$ 之係數，及常數項，吾人依次可得

$$2\rho\cos\alpha=2\sqrt{2}, \quad\cdots\cdots(iii)$$

$$2\rho\sin\alpha=2\sqrt{2}, \quad\cdots\cdots(iv)$$

$$\rho^2-a^2=3. \quad\cdots\cdots(v)$$

由 (iii) 與 (iv)，相除，吾求得

$$\tan a=1; \quad \therefore \quad a=45^\circ.$$

因此 $\cos a=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又，代入 (iii)，吾人求得 $\rho=2$. 代此值入 (v)，吾人又得 $a=1$.

故圓心爲 $(2, 45^\circ)$ 及半徑爲 1.

習 題——§§144—148.

1. 作方程式 $\sin\theta=\frac{1}{2}$ 所表之二直線.

2. 詳釋方程式 $\cos\theta=\frac{1}{2}$.

3. 試證方程式 $\tan\theta=1$ 祇表一直線，並繪出之.

4. 方程式 $\frac{1}{r}=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$ 及 $\frac{1}{r}=3\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$ 各表何直線?

5. 承前題，試證該二直線相交成直角.

6. 化方程式 $\frac{1}{r}=\cos\theta+\sin\theta$ 成 $r\cos(\theta-a)=p$ 之形式，並因而求出自極坐標爲 $(\sqrt{6}, 75^\circ)$ 之點引至其上之垂線.

7. 試證方程式 $r^2\cos^2(\theta-a)=p^2$ 乃表一對平行直線.

8. 試證直線 $r\cos(\theta-a)=p$ 及 $r\cos(\theta-\beta)=p$ 相交於 $r=p\sec\frac{1}{2}(a-\beta)$，$\theta=\frac{1}{2}(a+\beta)$ 之點.

9. 試證方程式 $\frac{1}{r}=A\cos\theta+B\cos(\theta-a)$ 表一直線，不論用何法均可.

10. 求通過 $(6, 0)$，$(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$ 二點之直線方程式，並表之星 $r\cos(\theta-a)=p$ 之形式.

習 題——§§149—151.

11. 求圓 $r^2-6r\cos\left(\theta-\frac{1}{5}\pi\right)-16=0$ 之圓心及半徑.

12. 又求圓 $r^2-2r(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)=5$ 之圓心及半徑.

13. 釋方程式 $r=0$.

14. 用任何方法求證，對 α 之一切值而言，直線 $r\cos(\theta-\alpha)=\rho\cos\alpha+a$ 與圓

$$r^2-2r\rho\cos\theta+\rho^2-a^2=0.$$

相切.

15. 求證 $r\cos(\theta-\alpha)=2a$ 及 $r\sin(\theta-\alpha)=2b$ 二直線互截成直角.

16. 圓 $r=2a\cos(\theta-\alpha)$ 及 $r=2b\cos(\theta-\beta)$ 互截成 $(\alpha-\beta)$ 角.

17. 求通過定點（令此點爲極點）之圓弦中點之軌跡. 求證該軌跡與圓之半徑無關.

18. 求圓 $r=4\cos\theta$ 與直線 $r\cos\theta=3$ 之交點. 求證此二交點連同原點構成一等邊三角形.

19. 變換方程式 $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ 到極坐標系，並推求圓之極方程式成次形：

$$r^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)+\rho^2-a^2=0,$$

該處 (ρ,α) 乃相當於笛卡兒坐標 (h,k) 之極坐標.

20. 變換方程式 $r=a\cos\theta$ 到笛卡兒系，並求證其終可呈 $x^2+y^2-ax=0$ 之形式.

試卷十七

1. 表證如何求任一直線之極方程式.

*2. 表證如何求通過二所與點之直線之極方程式.

3. 求通過 $\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ 及 $\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$ 二點之直線方程式.

4. 描繪次方程式之軌跡：

(i) $r(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)=\sqrt{3}\,a$.

(ii) $r\sin\theta=a$.

5. 表證如何求圓之極方程式.

6. 求圓心爲 $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ 點又半徑爲 3 之圓方程式.

7. 描繪 (i) $r \operatorname{cosec} \theta=2b$ 及 (ii) $r \sec \theta=2a$ 二曲線.

8. 求圓 $r^2-3r(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)+5=0$ 之半徑及圓心之極坐標.

*9. 若過一定點作任一圓弦，則在其弓形以下之矩形其面積必屬恆定.

10. 求直線 $r\cos\theta=a$ 與圓 $r\sec\theta=2a$ 相交之點.

第十八章　幾何問題與軌跡

152. 求解幾何問題常可藉坐標幾何學方法使其簡易化.

當最後結果不致受坐標軸之影響時，吾人慣可藉適當選擇坐標軸使解析法更形簡化.

誠然，當所與件中函有某數點之坐標之時，此法固不可能，蓋，果爾，吾人之原點及軸既已設定，在事實上，吾人已無選擇之餘地.

在已與二定點之問題中，當以取用聯結該二點之直線作爲吾人之 x 軸及其中點爲原點最爲簡便. 如是，則最後結果當可較之以任一該點爲原點更爲對稱.

雖然，並無定法可述，除多事演解習題外別無良法可使學者將解題工作化成最簡之可能形式.

定義.——於此類問題中，以下所釋諸詞乃吾人所常用者.

當三段或更多直線通過一公點時，謂該等直線共點.

當三點或更多點位於一直線上時，稱該等點共線.

當四點或更多點位於同一圓之圓周上時該等點乃謂之共圓.

如是，則在下列四節中每節內所述之諸直線皆爲"共點"線.

三角形之性質

153. 自三角形三頂至各對邊上所引之三垂線通過一公點.（此點稱爲該三角形之垂心.）

令 AD, BE, CF 爲三垂線.

以 DA 爲 x 軸, DB 爲 y 軸, 又令 $DA=a$, $DB=b$, $DC=-c$.

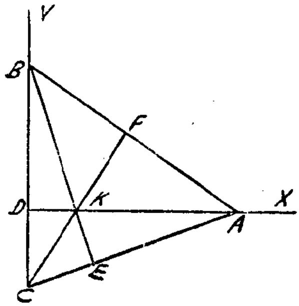


圖 56

AB 之方程式可書爲

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

C 點之坐標爲 $(0,-c)$. 過 C 點至 AB 所作之垂線, CF 之方程式爲

$$y=\frac{a}{b}x-c.$$

在其與 DA 相遇之點吾人得 $y=0$, 又故

$$\frac{a}{b}x-c=0,\quad x=\frac{cb}{a}.$$

同樣, 吾人可以證明垂線 BE 亦遇 DA 於同上一點, 即

$$y=0,\quad x=\frac{cb}{a};$$

故該三垂線皆通過此點 (K, 圖 56).

154. 三角形三邊之三垂直平分線通過一公點.

令 D, E, F 爲三邊之中點.

以與 BC 成直角而作之 DX 爲 x 軸, DB 爲 y 軸. 令 $b=DB=DC$, 又令 (h, k) 爲 A 點之坐標.

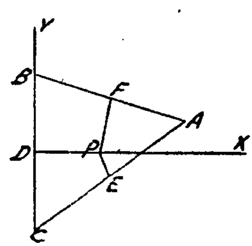


圖 57

B 點之坐標爲 $(0,b)$, C 點坐標爲 $(0,-b)$.

AB 之中點, F 點之坐標爲 $\frac{1}{2}h, \frac{1}{2}(k+b)$;

聯結 $(0,b)$ 與 (h,k) 之直線 AB 之方程式爲

$$y=\frac{k-b}{h}x+b,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

因此, $\perp AB$ 通過 F 點之垂線方程式爲

$$y-\frac{1}{2}(k+b)=-\frac{h}{k-b}\left(x-\frac{1}{2}h\right);\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

此垂線與 DX 相遇之處，$y=0$；故

$$x-\frac{1}{2}h=\frac{(k-b)(k+b)}{2h}=\frac{k^2-b^2}{2h},$$

或

$$x=\frac{h}{2}+\frac{k^2-b^2}{2h}.\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iii)}$$

若吾人書 $-b$ 以代 b，則此 x 值仍然不變．因此，聯結 $(0,\ -b)$ 及 $(h,\ k)$ 二點之直線 AC 之垂直平分線與 DX 相遇之點恰同聯結 $(0,\ b)$ 及 $(h,\ k)$ 二點之直線 AB 之垂線平分線與 DX 相遇之點（如已予證明者然）．

［若學者偶忘前語，則祇需求出 AC 之垂直平分線之方程式又求其與 x 軸相遇之點．如是，當可求得 x 之值全同式 (iii) 所表者．］

155. 過三角三頂而平分各對邊之三直線皆通過一點．［閱 §9 後所附之例題．］

156. 三角形三角之平分線通過一點．［閱 §71 之末例題 2.］

軌　跡　問　題

157．吾人今擬轉論軌跡主題．學者於此當可發見，於深進探討以前，最好應對 §16 中所已解諸例加以重溫，將其視爲此處所述諸較難問題之先導．

例　題

1．已與三角形之底邊，及其他二邊之平方和：求其頂點之軌跡．

令 AB 爲所與底邊．令其長爲 $2a$，又令所與他二邊之平方和 $=k^2$

以 AB 之中點爲原點 O，又以 OA 爲 x 軸．

令 $P\ (x,\ y)$ 爲該軌跡上之任一點．

A 點之坐標爲 $(a,\ 0)$，B 點坐標爲 $(-a,\ 0)$．

故 $$AP^2=(x-a)^2+y^2,$$

$$BP^2=(x+a)^2+y^2.$$

由已與件, $$AP^2+BP^2=k^2;$$

故 $$(x-a)^2+y^2+(x+a)^2+y^2=k^2,$$

或 $$2x^2+2a^2+2y^2=k^2;$$

故 $$x^2+y^2=\frac{1}{2}k^2-a^2.$$

因此，P 點之軌跡乃爲一圓，其圓心爲 AB 之中點 O，又其半徑爲 $\sqrt{\left(\frac{1}{2}k^2-a^2\right)}$

爲欲使該圓係成爲實圓起見，吾人必使 $k^2>2a^2$. 因此，該二邊之平方和自必大於 $2a^2$. 若 $k^2=2a^2$，則該軌跡當爲點圓，又該頂之唯一實有位置應與 O 點相重合.

2. 已與三角形之底及其他二邊之平方差：求其頂點之軌跡. [參閱第三章 §16 以后所附列之例 14.]

3. 已與直角三角形之底：求其頂點之軌跡.

以底 AB 之中點爲原點，又令其二端之坐標爲 $(a,0)$ 及 $(-a,0)$.

令 P 點爲頂，又令 θ 爲 PB 與 x 軸所作之角；則 PA 當與其斜交成 $(90°+\theta)$ 之角.

PB 之方程式爲 $$y=(x+a)\tan\theta,$$

又 PA 之方程式爲 $y=(x-a)\tan(90°+\theta)=-(x-a)\cot\theta$.

P 點之坐標滿足該二方程式. 因此，消去 θ，吾人乃得 P 點之軌跡爲

$$y^2=-(x^2-a^2),$$

或 $$x^2+y^2=a^2,$$

以 AB 爲直徑之圓. [比較歐幾 III. 31.]

4. 已與三角形之底及其他二邊之比：求其頂點之軌跡.

仍用如例 1 中之軸及所註之字母，

令 m 爲二邊之所與比，故，由假定，

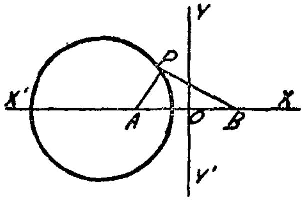


圖　58

$$BP = m \cdot AP;$$

故　$$BP^2 = m^2 \cdot AP^2,$$

又以例1中之 AP^2, BP^2 之值代入上式，吾人乃得

$$(x+a)^2+y^2=m^2\{(x-a)^2+y^2\};$$

由之，

$$(1-m^2)(x^2+y^2)+2a(1+m^2)x+(1+m^2)a^2=0,$$

或

$$x^2+y^2+2a\frac{1+m^2}{1-m^2}x+a^2=0.$$

故該軌跡爲圓．該方程式又可書成次形：

$$\left(x+a\frac{1+m^2}{1-m^2}\right)^2+y^2=a^2\left(\frac{1+m^2}{1-m^2}\right)^2-a^2=\frac{4a^2m^2}{(1-m^2)^2};$$

因此，該圓圓心位於 $\left(-a\frac{1+m^2}{1-m^2}, 0\right)$ 點，又半徑爲 $\frac{2am}{1-m^2}$．

自原點至該圓上所引切線之長 $=a$，由第十六章顯易見之．由此可知，凡由與 m 以不同值所得之圓必皆具有同一之根軸．

5．已與某點去二定直線之距離之比：求該點之軌跡．

若該二直線交成直角，則吾人可以之爲坐標軸，又所求之軌跡方程式顯爲 $y=kx$，該處 k 係所與二距離之比．

否則，以平分該二直線間之內外諸角之二直線作爲坐標軸．

若　$$y-mx=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

爲所與二直線之任一線之方程式，

則　$$y+mx=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

乃他一線之方程式，蓋以二線俱與 x 軸傾成大小相等方向相反之 $\tan^{-1}m$ 角．

令 (x, y) 爲軌跡上之任一點，又令 $k=$ 所與二距離之比．此點去 (i)(ii) 二直線之距離各爲

$$\frac{y-mx}{\pm\sqrt{(1+m^2)}} \text{ 及 } \frac{y+mx}{\pm\sqrt{(1+m^2)}}.$$

因此，由已與件，

$$\frac{y-mx}{\pm\sqrt{(1+m^2)}}=k\frac{y+mx}{\pm\sqrt{(1+m^2)}},$$

或 $$(y-mx)\mp k(y+mx)=0.$$

選取符號全賴吾人將在該二直線之任一邊之垂線視爲正而定．在純粹幾何學問題中，吾人祇須述明垂線之大小而不必涉及其符號，又該軌跡自當由次二直線構成之：

$$(1-k)y-m(1+k)x=0,$$

與 $$(1+k)y-m(1-k)x=0$$

該二直線俱皆通過原點，卽通過該二所與直線之交點．

6． 求一點如是運動使其去一定點之距離之平方與其去一定線之距離成正比例時所生成之軌跡．

以所與定點爲原點，又以自此引至所與直線上之垂線作 x 軸．若此垂線之長爲 a，則該定線之方程式爲 $x=a$．

令 (x, y) 爲軌跡上之任一點．

(x, y) 點隔原點之距離之平方爲 x^2+y^2．

其隔所與直線 $(x=a)$ 之距離爲 $x-a$．

若前者對後者之定比爲 $2k$，吾人乃得

$$x^2+y^2=2k(x-a),$$

又此方程式乃表一圓．

該方程式亦可書成

$$(x-k)^2+y^2=k^2-2ak\equiv k(k-2a),$$

由之吾人可見，如欲使其爲實圓，則 k 必大於 $2a$ 或爲負．

158． 在下列諸例中吾人已知有不止二定點或直線之位置．於此可見，如欲索解該等問題，吾人必當選取二軸之最一般之位置．所以然者，乃由於如是可使定點之坐標，或定線方程式中之常數以對稱之形式存在於結果中，若吾人作任一軸通過任一或更多定點，則斷難獲得如上之結果．

例　題

7. 設任一點隔所與三角形三邊之垂直距離 p, q, r, 由下列關係互相聯繫.

$$lp+mq+nr=0,$$

該處 l,m,n 乃三常數: 試證該點之軌跡為一直線.

設當 P 點位於該三角形之內時吾人視 p,q,r 三垂線為正. 在該三角形內取定任一原點, 又令三邊之方程式為

$$x\cos a_1+y\sin a_1=p_1,\quad x\cos a_2+y\sin a_2=p_2,\quad x\cos a_3+y\sin a_3=p_3.$$

若 (x, y) 為 P 點之坐標, 則得

$$p=p_1-x\cos a_1-y\sin a_1,$$

$$q=p_2-x\cos a_2-y\sin a_2,$$

$$r=p_3-x\cos a_3-y\sin a_3.$$

代之入所與關係式中, 吾人乃得

$$l(p_1-x\cos a_1-y\sin a_1)+m(p_2-x\cos a_2-y\sin a_2)$$
$$+n(p_3-x\cos a_3-y\sin a_3)=0.$$

因此方程式為 x 與 y 之一次者, 故 P 點之軌跡乃一直線.

8. 求當一點如是運動, 使其遠隔所與三角形三頂之距離之平方和$=k^2$, 常數, 時, 所成之軌跡.

令三頂為 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), 又令 (x, y) 為軌跡上之任一點. 由所與件,

$$[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]+[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2]+[(x-x_3)^2+(y-y_3)^2]=k^2,$$

或
$$3(x^2+y^2)-2x(x_1+x_2+x_3)-2y(y_1+y_2+y_3)$$
$$+x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2-k^2=0.$$

故 (x, y) 點之軌跡為圓.

其圓心之坐標為

$$\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),\quad \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3);$$

故該圓圓心位在該三角形之重心. [§9 末後所附之例.]

*9. 已與共具一公項之兩相等三角形之二底: 求該項之軌跡.

令 (h, k) 及 (h', k') 爲二底中任一底之兩端之坐標, (p, q), (p', q') 爲另一底之兩端之坐標.

令 (x, y) 爲軌跡上之任一點; 則, 由假設, 三項在 (x, y), (h, k), (h', k') 三點之三角形等於三項在 (x, y), (p, q), (p', q') 之三角形.

應用 §13 之第二公式以求二者之面積, 故吾人乃得

$$(x-h)(k'-k)-(y-k)(h'-h)=(x-p)(q'-q)-(y-q)(p'-p).$$

此間 x, y 乃流動坐標, 又當該方程式展開時, 其顯爲 x, y 之一次方程式. 故該軌跡乃直線.

159. 次例乃極坐標系對軌跡之應用之一佳例.

例 題

10. 過定點 O 作任一輻距遇定直線於 P 點, 又於其上取一點 Q, 使 $OP\cdot OQ=k^2=$常數. 求 Q 點之軌跡.

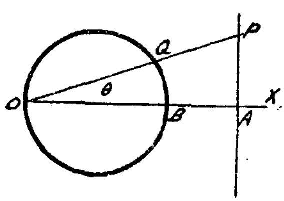


圖 59

用極坐標系以 O 點爲極點, 又令極軸垂直於所與直線, 令後者之方程式爲

$$r\cos\theta=a. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i})$$

令 (r, θ) 爲 P 點之極坐標, (r', θ) 爲 Q 點之極坐標; θ 顯係二者所公具之角.

由所與件, $$rr'=OP\cdot OQ=k^2;$$

故 $$r=\frac{k^2}{r'}.$$

茲因 P 點位於所與定線之上, 故其必滿足方程式 (i). 以之代 r, 吾人乃得

$$\frac{k^2}{r'}\cos\theta=a;\quad 故\quad r'=\frac{k^2}{a}\cos\theta,$$

該式顯示 $Q(r',\theta)$ 點之軌跡乃爲通過 O 點之圓，其圓心在 OX 上又其直徑爲 $\frac{k^2}{a}$.

*160.　下列二例，關於圓錐曲線者，乃求軌跡方程式之方法之佳例.

例　題

*11.　求一點如是運動，使其去 $(a,\ 0)$ 點之距離等於其去直線 $x+a=0$ 之距離時，所成之軌跡.

令 $(x,\ y)$ 爲軌跡上之任一點.

其去 $(a,\ 0)$ 之距離爲 $\sqrt{(x-a)^2+y^2}$.

其去直線 $x+a=0$ 之距離爲 $x+a$.

使二者相等，據假設，吾人乃得

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}=x+a;$$

故，平方兩邊，
$$(x-a)^2+y^2=(x+a)^2,$$

由之
$$y^2=4ax.$$

此乃稱爲拋物線之曲線之方程式，與§16末後之例9中由方程式 $y^2=x$ 所抽出之形頗相類似．拋物線可由在平行於切面之平面中將圓錐體截去一片而得．該曲線亦即當吾人斜擲一石入空中由於重力作用而下墜時所作成之曲線.

*12.　求一點如是運動，使其去極點之距離 e 倍於其去方程式爲 $r\cos\theta=p$ 之直線之距離時，所成之軌跡之極方程式.

令 $(r,\ \theta)$ 爲軌跡上之任一點，其去極點之距離爲 r．其去所與直線之垂距爲 $p-r\cos\theta$.

據假設，得
$$r=e(p-r\cos\theta),$$

或
$$r(1+e\cos\theta)=ep;$$

或
$$r=\frac{ep}{1+e\cos\theta},$$

該式亦可書爲
$$\frac{l}{r}=1+e\cos\theta,$$

該處 $l=ep$;

又此乃所求之軌跡方程式.

因圓錐體之表面與任一平面所成之截面曲線恆爲此種曲線, 故此軌跡乃以圓錐曲線名之.

若 $e=1$, 則該曲線爲一拋物線, 且與例 11 中之曲線相同, 惟所參據之坐標系有別而已.

若 $e<1$, 則該曲線爲一橢圓 (ellipse). 地球繞日作週年運動時所歷之路線乃屬一橢圓, 又行星亦然. 於前之研究中, 吾人必當假設日乃位於極點. 此點稱爲焦點. 量 e 稱爲離心率, 又對一切行星而言, e 值極小.

若 $e>1$, 則該曲線謂之雙曲線 (hyperbola).

***161.** 斜角軸 (oblique axes)——一點在平面中之位置亦可據相交不成直角之二軸決定之.

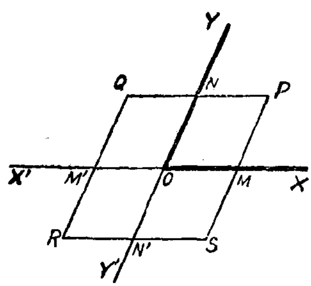


圖 60

若 XOX', YOY' 爲相交成任何角 ω 之二直線, 如吾人已知由過該平面中之任一點 P 引作 ∥ 二軸之平行線所構成之平行四邊形之二邊之長 OM 與 MP, 則 P 點位置因以全定. 此等斜坐標 (oblique coordinates), 一如直角坐標, 用文字

x, y 表之，且對符號方面亦當依據與直角坐標系相同之慣例；如是，於圖中，若 P 點之坐標爲 (a, b)，則 Q, R, S 三點之坐標當各依次爲 $(-a, b)$, $(-a, -b)$, $(a, -b)$.

關於此點，下列結果殊有一述之價值：——

(1) 一次方程式 $Ax+By+C=0$ 恆表直線．方程式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 乃表在二軸上之截距爲 a 與 b 之直線．

[證見 §32 中.]

(2) 圓心 (h, k) 半徑 a 之圓方程式爲

$$(x-h)^2+(y-k)^2+2(x-h)(y-k)\cos\omega=a^2.$$

[§87, 圖 41. 據（三角術 10），$CP^2=CM'^2+M'P^2-2CM'\cdot M'P\cos CM'P$, 又 $CM'P=\pi-\omega$.]

習　題——§§152—156.

1. 求三頂爲 $(0, 0)$, (h, k), (h', k) 三點之三角形之垂線.

2. 承前題，求外接於該三角形之圓之圓心.

3. 求三邊爲 $y=x\tan\alpha$, $y=-x\tan\alpha$, $x\cos\beta+y\sin\beta=p$,（該處 $\beta+\alpha<90°$）之三角形之內切圓圓心.

4. 求證聯結三角形二邊之中點所成之直線平行於底邊.

5. 求證以所與三角形三邊之中點爲頂之三角形之面積，爲原三角形面積之四分之一.

習　題——§§157,158.

6. 求一點如是運動，使其去 $(1, 0)$, $(2, -1)$, $(-3, 1)$ 三點之距離之平方和等於 43 時所成之軌跡.

7. 求一點如是運動，使其去直線 $3x+4y-2=0$ 及 $4x-3y+1=0$ 之距離之和等於 1 時之軌跡.（將在任一直線之原點同邊之垂線視爲正.）

8. 求一點如是運動，使其去 $(1, -1)$，$(3, 3)$ 二點之距離之平方和等於該二點去原點之距離之平方和時所成之軌跡.

9. 已與三角形 APB 之底 AB，及式 $m \cdot AP^2 + n \cdot BP^2$ 之值：求 P 頂之軌跡.

10. 若某點去 (1) 一正方形之四邊，(2) 一正方形之四角之距離之平方和爲一常數，試證其軌跡爲圓.

11. 已與自任一點至若干定圓上所作切線之平方和，求該點之軌跡.

12. 若某點去二所與直線之距離之和爲一常數，求證其軌跡乃一直線.

13. 已與共具一公頂之二三角形之二底及面積之和，求該頂之軌跡.

14. 承上題，求當已與二面積之比時，該頂之相當軌跡.

15. 已與某點去 (a) 三角形三邊；(b) 任一多邊形諸邊；之距離之代數和：求其軌跡.

16. 求某點如是運動，使其去 $(am, 0)$ 點之距離 m 倍於其去 $\left(\frac{a}{m}, 0\right)$ 點之距離時所成之軌跡.

17. 求所與直線之極點對於具有以原點爲公共圓心之圓系之軌跡.

18.* 求證下列最普遍之定理：——設已與吾人以 (a) 若干定直線；(b) 若干定點；(c) 若干定圓．若 P 點爲一點使當

(a) P 點去所與直線之距離各乘以種種所與常數時；

(b) P 點去所與點之距離各乘以第二組所與常數時；

(c) 自 P 點至所與圓上之切線之平方各乘以第三組所與常數時；

使凡此結果統共相加所得之總和乃一常數，則 P 點之軌跡乃係一圓．單就已與直線 (a) 之特殊情形而言，求證該軌跡乃一直線.

[註：此例之定理函義，就特殊情形而言，包括諸軌跡例題之大部.]

習　題——§159.

19. 通過極點 O 作直線 OP 遇圓 $r^2-2ar\cos\theta+a^2-c^2=0$ 於 P 點. 求 OP 上之 Q 點之軌跡, 使 (1) $OQ=m\cdot OP$, (2) $OQ\cdot OP=k^2$.

討論當 $a=c$ 時之特殊情形.

20. 求通過定點之圓弦中點之軌跡.

21. 過極點 O 引作一弦與圓 $r^2-2r\rho\cos\theta+\rho^2-a^2=0$ 相遇於 P, Q 二點, 又於其上取定一點使

$$\frac{2}{OR}=\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}.$$

求 R 點之軌跡. 求證其爲 O 點對於該圓之極線.

習　題——§160.

22. 求一點如是運動, 使其去 (0, 1) 點之距離對其去直線 $x=2$ 之距離成 1 對 $\sqrt{2}$ 之比時所成之軌跡之方程式.

23. 求某點如是運動, 使其去 (0, 2) 點之距離 $\sqrt{2}$ 倍於其去直線 $x=1$ 之距離時所成軌跡之方程式.

24. 試證一點其去極點之距離等於其去直線 $r\cos\theta+a=0$ 時, 該點之軌跡爲

$$2r\sin^2\frac{1}{2}\theta=a.$$

雜　題

25. 於方程式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 中, 若已與 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 之值, 則該直線必通過一定點.

若已與 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 之值, 則該直線與圓心爲原點之定圓相切.

26. 令具有長度 $(2a)$ 之直線如是滑動, 使其二端恆位於坐標軸上. 求其中點之軌跡.

27. 試證介於圓 $x^2+y^2=a^2$ 上 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 二點間之距離之平方等於

$$2(a^2-x_1x_2-y_1y_2).$$

28. 推證與圓相遇於去圓周上 (x_1, y_1) 點之距離相等之二點之直線方程式爲

$$xx_1+yy_1-a^2+\frac{1}{2}d^2=0,$$

並應用此結果以求在 (x_1, y_1) 點之切線方程式.

試 卷 十 八

1. 試證自三角形三項各至其對邊上所引之三垂線通過一公點.

2. 求證一三角形三角之內角平分線共點.

3. 已與一三角形之底邊及他二邊長之比：試表如何求其頂點之軌跡.

4. 已與一三角形之底邊 a 及頂角 A：求該頂之軌跡.

5. 求一點如是運動，使其去若干定點 (a_1, b_1)，$(a_2, b_2)\cdots\cdots(a_n, b_n)$ 之距離之平方和爲一常數時之軌跡.

6. 試證至圓 $x^2+y^2=a^2$ 上所引諸切線（彼此交成直角）之交點之軌跡乃一同心圓.

7. 若自某點至定圓 $x^2+y^2=a^2$ 上所引切線之平方等於爲其去定線 $lx+my+n=0$ 之距離及具有定長 k 之直線二者所函成之矩形；求該點之軌跡.

8. 求一點如是運動，使其去 $(3, 5)$，$(2, 3)$，$(4, 1)$ 之距離之平方和等於 64 時所成之軌跡.

9. 若自任一點 O 沿任何方向作一直線與一定直線相遇於 P 點，又若在 OP 上取一點 Q 使矩形 $OP\cdot OQ$ ＝常數；則 Q 點之軌跡爲圓.

10. 試表如何求圓方程式，設二軸係交成斜角者.

總 試 題

1. 求當原點位於圓周上又 x 軸爲通過原點之直徑時之圓方程式.

2. 求圓對於直角坐標系之一般方程式. 若限令原點位於 (1) 圓周上, (2) 圓心處, 則該方程式當成何式?

3. 求通過一所與點並與所與直線交成直角之直線之直角坐標系方程式.

4. 若 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 爲直線對於直角坐標系之方程式, 則在幾何學上 a 與 b 各表何意? 求自原點垂直於上線所引直線之方程式.

5. 於直線方程式 $y=ax+b$ 中, 就幾何學之立場而言, a 與 b 各表何意? 當該直線通過坐標爲 (x', y') $\left(0, \frac{y'}{2}\right)$ 二點時, 決定 a 與 b 之值.

6. 求所與圓在直角坐標系中之一般方程式. 並由之推得 (1) 當原點位在圓周上時, (2) 當原點位在圓心處時之圓方程式.

7. 求截直角坐標軸於二所與點之直線方程式.

8. 求垂直於直線 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 之直線方程式.

9. 求通過一所與點並垂直於所與直線之直線方程式.

10. 用直角坐標系, 求自所與點引落於所與直線上之垂線之長.

11. 假定已知用直角坐標系表諸點軌跡之法, 試證 x 與 y 之一般一次方程式乃表直線.

12. 求圓對於直角坐標系之一般方程式: 當原點位於 (1) 圓周上, (2) 圓心處時, 該方程式爲何?

13. 任何 x 與 y 之一次方程式必爲直線方程式. 求通過所與點並與所與直線作成所與角之直線之直角坐標系方程式.

14. 一直線截二坐標軸於所與去原點之距離之處; 求該直線之方程式以該二距離表之.

15. 若 $y=2x+3$ 爲直線方程式，求自原點⊥其上之直線方程式；又求此垂線之長.

16. 二變數間之一次方程式之通式爲何？ 試證其在坐標幾何學中，乃表一直線.

17. 求一直線之直角坐標系方程式以自原點至其上所引之垂線表之，並求該垂線與任一坐標軸所成之角.

18. 求圓之一般直角坐標系方程式.

19. 若 $y=ax+b$ 爲對直角坐標系而言之直線方程式，試釋 a 與 b 二量之幾何涵義.

20. 求自已與點至已與直線上所引之垂線方程式.

21. 求通過原點並具有圓心於 x 軸上及半徑等於 a 之圓方程式.

22. 試釋 $x^2+y^2=0$ 及 $x^2-y^2=0$ 二方程式之意義.

23. 一點如是運動，使其去一三角形三角之距離之平方和爲一常數. 求證其沿一圓圓周上而運動.

24. 求自所與點 (h, k) 垂直於所與直線 $ax+by+c=0$ 上所引之直線方程式.

25. 求通過所與點 (h, k) 並與直線 $ax+by+c=0$ 相切之圓系方程式.

26. 試釋當 x 與 y 爲一點對於二定軸之坐標系時，x 與 y 之方程式之軌跡意義.

27. 求次方程式之軌跡：

(1) $x=3y$, (2) $(x^2-a^2)^2\ (x^2-b^2)^2+c^4(y^2-a^2)^2=0$.

28. 解釋曲線方程式，並求直線方程式.

29. 若 α, β 爲圓心坐標，又 C 爲圓半徑，求圓方程式，假定二軸爲直角相交.

求該圓自二軸上截去之弦長各爲 a 與 b 之條件.

30. 試證方程式 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ 表一直線，且祇能表一直線. α, p 二常數之幾何意義爲何？

31. 圖示方程式 $x^2y=0$, $x^2+y^2=0$, 及 $x-y=4$ 之軌跡.

32. 試證如何決定表以次方程式之曲線之位置及大小:

$$Ax^2+Ay^2+Bx+Cy+E=0.$$

33. 求聯結原點至 $x^2+y^2=a^2$ 與 $y=bx+c$ 二線之交點所成二直線之方程式.

34. 試釋曲線方程式; 並求直線方程式呈 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 之形式.

35. 求通過所與點並自坐標軸上截去所與面積之直線之方程式, 決定此乃可能之條件.

36. 試釋次方程式之意義:

(1) $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$; (2) $x^2+y^2+a^2+b^2=2ax+2by$.

37. 求通過原點及 (a, b), (b, a) 二點之圓方程式; 並決定該圓自二軸上所截去之弦長.

38. 求通過所與點並與所與直線作成所與角之直線之方程式.

39. 求通過原點並與直線 $x+y+\sqrt{3}\cdot(y-x)=a$ 傾成 $75°$ 之角之直線方程式.

40. 求直線方程式使呈 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 之形式.

41. 圖示直線 $2x+3y+6=0$ 及 $x^2-y^2=0$ 之位置.

42. 求表以所與方程式之二直線間之夾角.

43. 求通過 (h, k) 點並與直線 $y=mx+c$ 作成正切爲 m 之角之二直線方程式.

44. 試證圓對於圓上原點之方程式乃呈 $x^2+y^2=2ax+2by$ 之形式.

45. 若直線 $y=mx+c$ 截圓 $x^2+y^2=2ax+2by$, 決定代表自原點至該二交點之二直線之方程式.

46. 已知一直線去原點之距離爲 p, 又其與 x 軸作 α 角: 求其方程式.

47. 求聯結 $2x+3y-4=0$ 及 $x+2y-1=0$ 二直線之交點至 $x=2$, $y=3$ 一點所成之直線方程式; 並圖示此三直線之位置.

48. 求圓之一般方程式; 並研討直線 $y=mx+c$ 爲其切線之條件.

49. 研討直線方程式之呈 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 之形式者.

50. 決定垂直於直線 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 並通過 $x=a,\ y=b$ 一點之直線方程式.

51. 試證方程式之呈 $x^2+y^2+Ax+By=C$ 之形者乃表一圓. 一點，在運動時，其去一定點之距離對其去另一點之距離成定比：試爲研討其軌跡.

52. 求通過坐標爲 a 與 b 之點並平行於直線 $Ax+By+C=0$ 之直線方程式.

53. 圖示圓 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 之位置，並決定直線 $x+y=2+\sqrt{2}$ 是否爲其切線.

54. 已與 $A,\ B$ 二點之坐標，求將直線 AB 分成所與比之截點之坐標.

55. 設一平行四邊形之某一頂點位在原點；鄰近此頂點之他二頂點之坐標各爲 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$. 求其餘一頂點之坐標.

56. 求圓 $x^2+y^2+2x-6y=0$ 之圓心坐標及其半徑. 描繪此圓，並說明其截二軸於何點.

57. 求 $(\xi,\ \eta)$ 點遠隔直線 $y=ax+b$ 之垂距.

58. 用解析方法證明自三角形頂點至對邊之中點或垂直於各該對邊上所引之三直線會於一點.

59. 求作聯結 $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ 及 $x^2+y^2-2x-2ay+c=0$ 二圓中心所成之直線方程式；並求當此二圓相切時 $a,\ b,\ c$ 間之關係.

60. 設 $P,\ Q$ 二點之坐標各爲 $(a,\ b)$ 與 $(b,\ a)$，又 O 點爲原點，求直線 $OP,\ OQ,\ PQ$ 之方程式及 $\triangle OPQ$ 之面積.

61. 已與二直線 $ax+by=c,\ ay-bx=c$，決定二者之相互傾斜及交點. 又求內分或外分該二直線相遇處之夾角之直線方程式.

62. 求作圓對於直角坐標系之一般方程式.

63. 已知圓方程式爲 $\sqrt{1+m^2}\,(x^2+y^2)-2cx-2mcy=0$，求其半徑.

64. 試證直線 $4x-y=17$ 通過圓 $x^2+y^2-8x+2y=0$ 之圓心.

求與該直線交成直角之直徑方程式，及其截該圓之點之坐標.

65. 一平面中之某圓具有其圓心在直角坐標系爲 a 與 b 之點，並通過原點；求其方程式，在原點之切線方程式，及其在二軸所截去之截距之長.

66. 求證對於方程式爲

$$15x-18y+1=0,$$
$$12x+10y-3=0,$$
$$6x+66y-11=0,$$

之三直線而言之下列數語，卽：

(i) 該三直線會交於一點；

(ii) 前二者彼此相垂直；

(iii) 第三者平分餘二者間之夾角.

67. 求去二定點之距離成一定比之點之軌跡.

68. 若 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3) 爲位於一平面中之三點 P_1, P_2, P_3，各對於該平面中任一對直角軸之笛卡兒坐標；對同一對軸而言，決定通過 P_3 點至直線 P_1P_2 之平行線及垂線之方程式.

69. 在笛卡兒直角坐標系中，圓方程式爲 $x^2+y^2+2r\cos\phi\cdot x+2r\sin\phi\cdot y+r^2=0$；決定其圓心之坐標，其半徑之平方，及自原點至其上所引二相等切線之公長.

70. 過直線 $2x-3y+7=0$ 及 $x+4y+3=0$ 之交點引作一直線與 x 軸成直角，又作另一直線與直線 $x+y+1=0$ 交成直角．求此二直線之方程式.

71. 求至圓 $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$ 上並平行於直線 $x+2y-6=0$ 所引之切線方程式.

72. 求證遠隔二定點之距離成一定比之點之軌跡爲圓.

73. 位於一平面中之三點 P, Q, R 之直角坐標各爲 $(3, 4)$, $(5, 6)$, $(7, 8)$；用任何方法決定 $\triangle PQR$ 之面積.

74. 平面內之一圓及過該圓中心之直線之直角坐標系方程式各爲

$$x^2+y^2=r^2 \quad 與 \quad x+y=0;$$

用任何方法求出俱與該直線相平行之該圓上之二切線.

75. 已與具有公頂之若干三角形之底邊及面積之和，試表如何應用坐標幾何學以求該頂之軌跡.

76. 求平分 $2x+3y-5=0$ 及 $3x+2y-7=0$ 二直線間之夾角之直線方程式.

77. 求證自某點至二圓上所作切線具有等長之該點之軌跡為一直線；若已與該二圓之方程式，並決定該直線之方程式.

78. 求聯結 (3, 2) 點至 $2x+3y=1$ 與 $3x-4y=6$ 二直線交點所成直線之方程式.

79. 已與某點去若干定點之距離之平方和，試用任何方法以求該點之軌跡.

80. 一圓在直角坐標系中之方程式為 $x^2+y^2+lx+my+n=0$. 求其圓心之坐標及其半徑之長.

*81. 決定方程式 $ax^2+bxy+cy^2+lx+my+n=0$ 表圓之條件，假設二軸斜交.

82. 求通過 $2x-3y=10$, $x+2y=6$ 二直線之交點及 $16x-10y=33$, $12x+14y+29=0$ 二直線之交點之直線方程式.

83. 已與某點隔三所與直線之距離之和，試求該點之軌跡.

84. 求圓心為 (2, 3) 點及通過 $x^2+y^2+8x+10y=53$ 之中心之圓方程式.

85. 求自三邊表以 $3y-x=1$, $3x+y=7$, $x+7y+11=0$ 三方程式之三角形之各頂至其對邊所作三垂線之方程式.

86. 求點 (4, 3) 對於圓 $x^2+y^2-6x-2y=8$ 之極線方程式.

87. 求自點 (α, β) 至圓 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 上所引切線之長之表式.

決定自 (13, 8) 點至圓 $x^2+y^2+22x-2y=278$ 上所引切線之長.

88. 求作直線方程式呈次之形式：

(i) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$; (ii) $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$; (iii) $\dfrac{x-h}{\cos\theta}=\dfrac{y-k}{\sin\theta}=r$.

89. 求自點 (x', y') 至直線 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ 上所作垂線之長.

90. 求對直角坐標系而言之圓，其方程式為 $x^2+y^2-2ax\cos\alpha-2by\sin\alpha-a^2\sin^2\alpha=0$, 之圓心坐標及半徑. 求證該圓在 x 軸上截成 $2a$ 之長.

91. 求令直線 $x\cos\theta+y\sin\theta=p$ 與圓 $x^2+y^2-2ax\cos\alpha-2by\sin\alpha-a^2\sin^2\alpha=0$ 相切時之 p 值.

92. 試釋方程式 $y=mx+c$ 及 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ 中之常數.

93. 試釋 $\dfrac{x-h}{\cos\theta}=\dfrac{y-k}{\sin\theta}=r$ 中之常數.

94. 求證直線 $(x-a)\cos\theta+(y-b)\sin\theta=c$ 與圓 $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ 相切；並求其切點.

95. 已與曲線在極坐標系中之方程式如下，試繪出該等曲線.

(i) $r=\sin\theta$, (ii) $r=\cos\theta$, (iii) $r=\sec\theta$, (iv) $r=\operatorname{cosec}\theta$.

96. 求 $2x+6y+1=0$ 及 $6x-3y-4=0$ 二直線交點之坐標.

97. 承前題，求通過此交點並各平行及垂直於直線 $7x-4y+3=0$ 之直線方程式.

98. 求圓 $r^2-2rc\cos(\theta-\alpha)+c^2-a^2=0$ 之半徑及圓心之極坐標系.

99. A 點之坐標爲 $(a, 0)$；B 點坐標 $(-a, 0)$；求運動時使 $\dfrac{AP}{BP}=m$ 之 P 點之軌跡.

100. 求證在平面坐標幾何學中 x 與 y 間之一次方程式 $Ax+By+C=0$, 恆表一直線.

101. 試述在呈次列形式之直線方程式中常數 a, b, α, 及 p 之幾何意義：

$$\text{(i)}\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1; \qquad \text{(ii)}\quad x\cos\alpha+y\sin\alpha=p.$$

102. 繪出直線 $2x+3y=5$ 及 $3x+5y=8$, 並求二者之交點.

103. 解釋極坐標系，並繪出下列方程式之軌跡：

$$\text{(i)}\quad r=a\cos(\theta-\alpha); \qquad \text{(ii)}\quad r=a\sec(\theta-\alpha);$$

該處 a 與 α 爲常數，又 r 與 θ 乃極坐標.

104. 求聯結直角坐標爲 $(1, 2)$, $(-3, 3)$ 之二點所成之直線方程式；並決定其隔 $(2, 4)$ 點之距離.

105. 假定坐標係用呎量計者，試求三頂爲 $(1, 1)$, $(-2, 3)$, $(4, -6)$ 之三角形面積以平方呎計之.

106. 求作能予表圓之最普通之方程式（以直角坐標系表之），並求其半徑及圓心之坐標.

107. 設自某點至定圓 $x^2+y^2=a^2$ 上所引切線之平方等於其去定直線之距離及具有定長 c 之直線二者所函成之矩形：求該點之軌跡.

108. 求通過 $(2, -3)$ 點並垂直於聯結 $(5, 7)$ 與 $(-6, 3)$ 二點所成直線之直線方程式.

109. 求直線 $y=mx$ 截圓 $x^2+y^2-4x-6y+12=0$ 相交二點之坐標.

如欲令此二點相重，則 m 之值當爲何?

求通過坐標原點至上述圓上所作二切線之方程式.

110. 在圖上繪出對於直角軸之坐標系爲 $(3, 4)$，$(2, -3)$ 與 $\left(-2, -2\frac{1}{2}\right)$ 之三點；並確定原點是否位於由該三點所構成之三角形內.

111. 求通過 $(3, 4)$，$(2, -3)$ 及 $\left(-2, -2\frac{1}{2}\right)$ 三點之圓之圓心坐標.

112. 作表以方程式 $x-\sqrt{3}\ y=4$ 之直線；並求

(i) 其自二軸上截成之三角形之面積，

(ii) 自 $(1, 2)$ 點至此線所引垂線之長.

(iii) 此垂線去原點之距離.

113. 求證 $(5, 1)$，$(-1, -1)$，$(11, 3)$ 三點位於一直線上，又求此直線在坐標軸上所成之截距. 作圖示之.

114. 方程式 $r=a\sin\theta$，$r=a\cos\theta$ 各表何軌跡?

求作通過原點並截 x 與 y 軸使去原點之距離各爲 a 與 b 之圓之極方程式.

115. 在 $\triangle OAB$ 中，令直角在 O 點，作直線 HK 各遇 OA，OB 於 H，K 二點，使 $OH=n\cdot OA$，$OK=n\cdot OB$. 已與 $OA=a$，$OB=b$；求 HB 與 KA（以 OA，OB 爲 x 與 y 軸）之交點 M 之坐標；又求 OM 直線爲 AB 邊所分成之比.

116. 求表以方程式 $x^2+y^2=x$ 之圓之中心及半徑.

自某點至圓 $x^2+y^2=4$ 上所引之切線上之正方形等於其去直線 $x+6=0$ 之距離及一單位長二者所函構而成之矩形：求該點之軌跡方程式.

117. 在圖上標明 $(-2, 3)$, $(4, -1)$, $(1, -3)$, $(-11, 5)$ 四點之位置，並證明其為不規則四邊形之四角點.

又求該不規則四邊形對角線交點之坐標.

118. 用解析方法，如何證明一直線與一圓不能相遇在二點以上?

描繪圓 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 之軌跡，並求通過原點之二切線方程式.

119. 求通過 (a, b) 點並在二軸上截成相等截距之直線方程式 (該二軸設為相正交者).

120. 求以圓直徑與其一端之切線為坐標軸之圓方程式，並由之證明半圓中所函之角恆為直角.

若一圓直徑二端之坐標系為 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2)，求證該圓方程式當為

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0;$$

(假定二軸正交，成直角.)

121. 求自 (f, g) 點至直角坐標系方程式為 $Ax+By+C=0$ 之直線上所引垂線之長.

求證方程式 $4x^2-12xy+9y^2=1$ 表二平行直線，並求垂直於該二直線且通過 $(1, -1)$ 點之直線方程式.

122. 求證 $x^2+y^2-6x-2y+1=0$ 及 $x^2+y^2+2x-8y+13=0$ 二圓相切，並求在該切點之切線方程式.

123. 求直線方程式，並就 x 或 y 之係數或常數項為 1 時日而解釋諸常數之意義. (假定二軸交成直角.) 於此三情形之何一種中，常數之幾何意義對於斜角軸一如對於直角軸然?

直線 AB 與 $A'B'$ 各截 Ox 與 Oy 於 A 與 A', B 與 B' 四點. 求 AB 中點 C, 及 OC' 或 OC 之延長線截 $A'B'$ 之點 C' 二者之坐標；並求證

$$\frac{OA}{OA'}+\frac{OB}{OB'}=\frac{2OC}{OC'}.$$

124. 求通過原點並從 x 與 y 軸上各截得長 a 與 b 之二弦之圓方程式.

若 b 爲常數 a 爲變數，求自 x 軸截去之弦之兩端所引二切線交點之軌跡方程式.

125. 若已與二直線對於直角坐標系之方程式，求該二直線 (i) 互相正交 (ii) 彼此傾成 $45°$ 角之條件.

已知二直線通過直線 $x-y+2=0$ 與 $2x-y+3=0$ 之交點，並知自 $(-1,-1)$ 點引至該所求每一直線上之垂線之長各爲 $\frac{6}{5}$; 求該二直線之方程式.

126. 求圓 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 之半徑及圓心之坐標.

已知二圓俱與坐標軸相切，又自 $(2,\ -1)$ 點至各該圓上所引切線之長皆爲 $2\sqrt{5}$: 求該二圓之方程式.

127. 描繪於直角坐標系中表以方程式 $x^2+y^2=2x$ 之曲線.

求圓心在原點並與直線 $x-3y=4$ 相切之圓在直線 $3x+2y=1$ 上所截成之線段之長至二位有效數字. 又作草圖以表之.

128. 繪出表以極方程式 $r\cos\theta=1,\ r=4\sin\theta$ 之二軌跡; 並決定二者之交點.

決定聯結在極坐標系中之二點 $(7,\ 30°)$ 與 $(9,\ 45°)$ 之直線遇軸 $\theta=0$ 於何處至二位有效數字; 並決定其截此軸之角之正切. 作一草圖.

129. 求俱皆通過 $(f,\ g)$ 點並分別平行及垂直於直線 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 之二直線方程式.

求聯結自 $(f,\ g)$ 點引至表以方程式 $ax^2+2hxy+by^2=0$ 之兩直線上二垂線之趾所成直線之長.

130. 求各與直線 $4x+3y=1$ 相切亦與 y 軸相切於原點之二圓方程式; 並將此二圓表於草圖中.

又求該二圓與所與直線之切點間之距離.

131. 設坐標軸係交成直角者，試用自原點至一直線上所引垂線之長及該垂線與 x 軸所作之角表該直線之方程式.

求證 $x+y+c=0$ 與 $\sqrt{3}\ x+y+c=0$ 相交成 15° 角.

132. 求證 $x^2+(y-a)^2-a^2=0$, $\{x-2\sqrt{ab}\}^2+(y-b)^2-b^2=0$, 二圓俱與 x 軸相切,並彼此互切.

描繪當 $a=4$, $b=1$ 時之該二圓.

133. 求證坐標 (x, y) 滿足一次方程式之點皆列於一直線上；並舉述當方程式假定呈

$$\text{(i)}\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \qquad \text{(ii)}\ x\cos\alpha+y\cos\beta=1$$

形式時其中常數之幾何意義.

於圖中繪出方程式 $5x+12y=169$ 之正整數解.

134. 決定原點位於圓周上之圓之極方程式.

求證下列諸項級數和可表成 $a\cos(\theta+\epsilon)$ 之形式；並述其幾何釋義:

$$a_1\cos(\theta+\epsilon_1)+a_2\cos(\theta+\epsilon_2)+a_3\cos(\theta+\epsilon_3)+\cdots\cdots.$$

135. 求證聯繫坐標 x 與 y 之一次方程式乃表排列於一直線中之點集 (assemblage of points).

繪出 (不定) 方程式 $19x+5y=119$ 之正整數解於圖上.

136. 試述下列二組聯立方程式之解答之幾何釋義:

(i) $x\cos\theta+y\sin\theta=a$, $\quad x\cos\phi+y\sin\phi=a$;

(ii) $x\cos\frac{1}{2}(\theta+\phi)+y\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)=a\cos\frac{1}{2}(\theta-\phi)$, $\quad x^2+y^2=a^2$.

137. 作 $y=x$, x^2, $\sqrt{x}$, $\sin x$, $\tan x$ 之圖形.

138. 釋極坐標系,並述其應用所及之若干問題.

討論次數方程式之軌跡:

(i) $\dfrac{1}{r}=\dfrac{\cos\theta}{a}+\dfrac{\sin\theta}{b}$, $\qquad$ (ii) $r=a\cos\theta+b\sin\theta$,

(iii) $r=a\sec\theta+b\operatorname{cosec}\theta$.

139. 繪出次二方程式之圖形:

(i) $y=\frac{x}{1-x}$, (ii) $\begin{cases} x=4\cos nt-3\sin nt \\ y=4\sin nt+3\cos nt. \end{cases}$

答 案

第一章 (P. 11—13)

4. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$.

6. 13 哩, 10 哩.

7. 各 15, 5, 及 13 哩.　　8. 25.

10. (i) $4\sqrt{5}=8.94$,　(ii) $2\sqrt{2}=2.83$,　(iii) $2\sqrt{10}=6.32$,
(iv) $4\sqrt{2}=5.66$,　(v) $\sqrt{13}=3.60$,　(vi) $2\sqrt{13}=7.21$.

11. $(-1, 1)$.　　12. $(2, 1)$, $(-1, -8)$, $(5, 10)$.

13. $\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$, $\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$.

14. $\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)$, $\frac{1}{4}(y_1+y_2+y_3+y_4)$.

16. 坐標系爲 $\{(n-r)x_1+rx_2\}/n$ 及 $\{(n-r)y_1+ry_2\}/n$.

第二章 (P. 19, 20)

1. 2 平方哩.　　2. 8.　　3. 7.

4. $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$.　　5. $\frac{1}{2}(ay+bx-ab)$.　　6. $\frac{1}{2}p(m-n)-\frac{1}{2}q(l-m)$.

.. $\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$.　　11. 3.　　12. 2.

第三章 (P. 29)

1. 通過原點並平分第二及第四象限中之 YOX' 及 XOY' 二角之直線.

2. 平行於 y 軸並在其左 6 單位距離之直線.

3. 平行於 x 軸並在其下 1 單位距離之直線.

4. 通過原點及 $(1, 2)$ 點之直線.

5. 截軸於 $(2, 0)$ 與 $(0, -4)$ 二點之直線.

6. 具有原點爲中心及半徑爲 4 之圓.

7. 聯結原點與 $(1, 2)$ 及 $(1, -2)$ 二點之兩直線.

8. 俱皆平行於 x 軸並各位於其上與其下二單位距離之二直線.

9. 稱爲"拋物線"之曲線,該曲線應位於 x 軸以上,並與之相切於原點.

10. 二軸.

11. 截二軸於 $(2, 0)$, $(0, 3)$ 二點之直線.

12. y 軸及通過原點與 $(1, 1)$ 點之直線.

13. $y=3x$. 14. $x=1$. 15. $x+y=0$.

16. $x^2+y^2=2$. 17. $x^2+y^2-2y=0$. 18. $x^2+y^2=4$.

第四章 (P. 38,39)

1. $(-1, -1)$. 2. $(-1, -1)$.

3. $(-1, \sqrt{3})$. 4. $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

5. $\left(1, \frac{1}{2}\pi\right)$. 6. $\left(2, \frac{1}{3}\pi\right)$.

7. $\left(4, \frac{3}{4}\pi\right)$. 8. $\left(2, \frac{5}{4}\pi\right)$.

9. $\left(\sqrt{3}, \frac{5}{3}\pi\right)$. 10. $(5, \pi)$.

11. $\left(1, \frac{1}{3}\pi\right)$, $\left(1, \frac{5}{6}\pi\right)$, $\left(1, \frac{4}{3}\pi\right)$, $\left(1, \frac{11}{6}\pi\right)$.

12. $\sqrt{7}$; $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. 13. 2; 2.

14. $\frac{1}{2}$. 15. $\frac{5}{4}\sqrt{3}$.

19. 極軸.

20. 通過極點並與極軸傾成 1 弧度 (約 57°) 之角之直線.

21. 通過極點並垂直於極軸之直線 (y 軸).

22. 極點 (實乃繞極點之無限小之圓).

23. 具有極點爲中心及半徑 4 之圓.

24. 圖同題 8.

第五章 (P. 47,48)

1. $x=1$. 2. $y=\frac{1}{2}(b+b')$.

3. $y=0$, $y=\frac{1}{3}\sqrt{3}\ x$, $x=0$, $y=-x$.

4. $y=4$, $y=\frac{1}{3}\sqrt{3}\ x+4$, $x=0$, $y+x=4$.

5. $y=x\sqrt{3}+2$, 與 $y=-x\sqrt{3}+2$; $y=x\sqrt{3}-2$ 與 $y=-x\sqrt{3}-2$; $\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3},\ 0\right)$ 與 $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3},\ 0\right)$.

6. $y=\frac{2}{3}x+1$.

7. 30° 及 60°, 第三線之傾斜爲 45°, 又該三直線悉皆通過 (0, 3) 點.

8. $3x+2y=0$, $3x+2y=6$. 22. (0, 9), (2, 6), (4, 3).

23. $x=y\ \tan\ \theta+a$, 該處 θ 爲角, a 爲截距.

24. $a=$在 x 軸上之截距, $m=$該直線與 x 軸所作傾斜之正切.

25. 定截距$=b$. 26. 定截距$=-C/B$.

第六章 (P. 59—61)

1. $7x-2y=14$. 2. $5x+3y+15=0$.

3. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, 及 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

6. b 在該二方程中具有同義, $b=-ma$.

7. $x\cos a+y\sin a=p\pm c$.　　8. $x+y=\pm 2$.

9. $x\cos a+y\sin a=a$.　　10. $y-x\sqrt{3}=12$, $x-y\sqrt{3}=12$.

11. $m=-\cot a$, $b=p\operatorname{cosec} a$.　　12. $-\frac{7}{25}x+\frac{24}{25}y=2$.

13. $x\cos 210^\circ+y\sin 210^\circ=\frac{1}{2}$.　　14. $x\cos 180^\circ+y\sin 180^\circ=\frac{3}{2}$.

15. $y=-\frac{4}{3}x+5$, $\frac{x}{15/4}+\frac{y}{5}=1$, $\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y=3$.

16. $y=\tan 60^\circ\cdot x+2$, $\frac{x}{-\frac{2}{3}\sqrt{3}}+\frac{y}{2}=1$, $x\cos 150^\circ+y\sin 150^\circ=1$.

17. $y=-\frac{5}{12}x-\frac{5}{6}$, $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-5/6}=1$, $-\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y=\frac{10}{13}$.

18. $y=\tan 45^\circ\cdot x-3$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{-3}=1$, $x\cos 315^\circ+y\sin 315^\circ=\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

19. $y=\tan 30^\circ\cdot x-\frac{2}{3}\sqrt{3}$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{-\frac{2}{3}\sqrt{3}}=1$, $x\cos 300^\circ+y\sin 300^\circ=1$.

20. $y=-\frac{8}{15}x-17$, $\frac{x}{-\frac{255}{8}}+\frac{y}{-17}=1$, $-\frac{8}{17}x-\frac{15}{17}y=15$.

21. $y=\frac{4}{3}x+0$, $\frac{x}{3\times 0}+\frac{y}{-4\times 0}=1$, $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y=0$.

22. $y=\tan 90^\circ\cdot x-\infty\times 3$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{\infty}=1$, $x\cos 0^\circ+y\sin 0^\circ=3$.

23. 第二象限.　　24. 第三.　　25. 第一.　　26. 第一.

27. 當 x 在事實上為流動坐標之時，將其作常數用.

28. 當 h 與 k 在事實上爲常數時將其用作流動坐標. 則該直線方程式爲

$$x\cos a+y\sin a=h\cos a+k\sin a.$$

29. 在此語中，用反三角函數，卽角，代替角之三角比.

第七章 (P. 72,73)

1. $5y-3x+21=0$.　　2. $2y+3x+21=0$.

3. $y-\frac{7}{2}=x-\frac{9}{2}$， 或 $y-x+1=0$.

4. $y+\sqrt{3}x-4(1+\sqrt{3})=0$.　　5. $y-\sqrt{3}x=0$.

6. $x+6y-7=0$.　　7. $y-4x+6=0$.

8. $x-y=a+b$.

9. $(x+a)/2a=y/b$, 或 $bx-2ay+ab=0$.

10. $\frac{x-a_1}{a_2-a_1}=\frac{y-b_1}{b_2-b_1}$ 及 $\frac{x-a_1}{a_2-a_1}=\frac{y-b_2}{b_1-b_2}$.

11. $\frac{x-b}{c-b}=\frac{y-c}{a-c}$, $\frac{x-c}{a-c}=\frac{y-a}{b-a}$, $\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-b}{c-b}$.

12. $y=4$, $2x+3y=0$, $2x-y=0$.

13. $2x+y=0$, $2x-5y+16=0$, $2x+7y-16=0$.

14. $y=2$, $2x+3y-8=0$, $2x-y+8=0$.

15. $x+y=h+k$. 16. $y=1$ 及 $x\sqrt{3}+y=2$. 17. $2x+y=6$, 或 $x+2y=6$.

18. 滿足所與條件之直線有二； 其方程式爲 $3x-4y+16=0$ 與 $3x+4y+8=0$.

所求之點在第一直線上者爲 $(4, 7)$ 與 $(-12, -5)$；在第二直線上者爲 $(-12, 7)$ 與 $(4, -5)$.

19 $x-y+1=0$；所截之長 $=3\sqrt{2}$.

第八章 (P. 81—83)

1. $(2, 1)$ 在所與直線之原點同側，$(-4, 3)$ 點在其對邊(卽原點異側)；二點俱在直線 $x=3y$ 上.

2 二點皆在所與直線之同一邊.

3．第一直線通過 (4, 3) 點與原點，第二直線則否．

5．令該鎮所在處爲原點，又二軸之方向爲正東與正北，該運河之方程式爲 $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=-1$，又該人之位置在 $\left(-3,\ -\frac{3}{2}\right)$ 點，不位在原點同邊．

6．$\left(-\frac{13}{11},\ \frac{19}{11}\right)$．　　7．$\frac{b_2-b_1}{m_1-m_2}$，$\frac{b_2m_1-b_1m_2}{m_1-m_2}$．

8．$b_1(m_2-m_3)+b_2(m_3-m_1)+b_3(m_1-m_2)=0$．

9．$\left(\frac{1}{L+M},\ \frac{1}{L+M}\right)$．　10．三綫相交於 $(-3,\ -1)$ 點．

11．三綫相交於 (67, 62) 點．　12．該三直線並不相交於一點．

13．(3, 2)，(2, 1)，(1, 3)；面積＝3/2．

14．吾人證明 (2, 2) 點位在直線 $2x+y-5=0$ 之與對頂 (3, 2) 相同之一邊，又他二邊仿此．從圖上吾人可以顯見與上言相符之事實．

15．(1, 2)，(2, 3)，(−3, −5)；面積＝3/2．

16．證明如題 14．

17．該三直線相交於 (−1, 2) 點．

18．(2, 1)，$\left(4\frac{2}{3},\ 1\right)$，$\left(2\frac{2}{3},\ 4\right)$，(2, 3)．

19．(2/3, 1)，(2, 5)；$3x-y-1=0$．

20．$k=-C/C'$．

第九章 (P. 93—95)

1．30°．　2．45°．　3．90°．　4．30°．　5．45°．

6．$y-2x+4=0$，$x+2y-7=0$．　7．$3x+y-5=0$，$3y-x+5=0$．

8．$x+7y+22=0$，$y-7x-4=0$．　9．$x+11y=0$．

10．$2x-3y=0$，$3x+2y=0$，$3x+2y=5$，$3y-2x=1$．

11．$x=0$，$\sqrt{3}y-x=0$；(0, −3) $\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3},\ -\frac{3}{2}\right)$．

12. $y+3x=0$, $x-2y+4=0$, $2x+3y-4=0$; $\left(-\frac{4}{7}, \frac{12}{7}\right)$.

14. $15/\sqrt{13}$. 15. 6. 16. 1. 17. $(a-b)^2/\sqrt{a^2+b^2}$. 18. 2.

19. $5/\sqrt{13}$, $5/\sqrt{13}$, $\frac{5}{2}\sqrt{2}$. 20. $\sqrt{2}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{13}$; 又 面積$=5/2$.

21. 其去各該所與直線之距離為 2.

22. $(-4, -1)$, $(3, -2)$, $(2, 1)$; $2\sqrt{10}$, $\sqrt{10}$, $2\sqrt{2}$.

24. $(bh+ak-ab)\div\sqrt{a^2+b^2}$.

25. 該站必距該鎮 3 哩之遠, 又聯結鎮站之直線必與向東通過該鎮所引之直線作成一角$=\tan^{-1}\frac{4}{3}$.

26. $\left(10\frac{2}{3}, 0\right)$. 27. $\left(-3\frac{3}{7}, -3\frac{3}{7}\right)$. 28. $(2,-1)$. 29. $(0, 3)$.

30. $x=(h+mk-mb)/(1+m^2)$, $y=(mh+m^2k+b)/(1+m^2)$.

31. $x=p\cos\alpha+a\sin^2\alpha-b\sin\alpha\cos\alpha$, $y=p\sin\alpha+b\cos^2\alpha-a\sin\alpha\cos\alpha$.

32. 由公式 [1], $(\text{距離})^2=(x-a)^2+(y-b)^2$, 又此可化成 $(a\cos\alpha+b\sin\alpha-p)^2$.

第十章 (P. 106, 107)

1. $y-3x+6\pm\sqrt{2}(y-2x+4)=0$; $y=0$.

2. $77x-21y-79=0$, $27x+99y+1=0$, $17x+60y=0$.

3. $6x+2y-5=0$, $x-3y+10=0$, $y+13x=0$.

4. 作圖時, 吾人可發見: 由該前二直線所構成之角之內角平分線位於原點部分內, 其餘則否. 故三角之內角平分線為

$$9x-7y-3=0, \quad 16x+28y+51=0, \quad 7x+7y+15=0.$$

5. $21x+13y-76=0$. 6. $y=3x+3$. 7. $(am+b)y-(a+bm)x+a^2-b^2=0$.

8. $7x-21y+50=0$, $22x-11y+27=0$, $15x+10y-23=0$, $\left(-\frac{17}{385},\right.$

$\frac{911}{385}$).

9. $10x-15y+41=0$, $21x+7y-20=0$, $11x+22y-49=0$.

10. $4x-3y+2=0$, $7x+y-9=0$.

11. 各以 $(b-c)$, $(c-a)$, $(a-b)$ 乘之，並相加；結果盡爲零.

16. 該三垂線方程式可書爲

$$(A_1A_2+B_1B_2)(A_3x+B_3y+C_3)-(A_1A_3+B_1B_3)(A_2x+B_2y+C_2)=0,$$

及其他二相似方程式，左邊之和全等於零；故，由 §70 (令 $k=l=m=1$)，結果即出.

第十一章 (P. 120)

1. 二軸.

2. 俱與 y 軸相重合之二直線.

3. 俱與 x 軸相重合之二直線.

4. 通過軌跡上之唯一實點，原點之二"虛"直線 ($x+y\sqrt{-1}=0$ 及 $x-y\sqrt{-1}=0$).

5. x 軸及直線 $x+y=0$.

6. 方程式各爲 $x-y=0$ 之二相重直線.

7. y 軸及直線 $x+1=0$.

8. 二軸及直線 $x+1=0$.

9. 平行於 x 軸之二虛直線 $y=\pm\sqrt{-1}$.

10. 通過 (a, b) 點之二虛直線 $x-a=\pm\sqrt{-1}\cdot(y-b)$.

11. $x=2$ 及 $y=3$.

12. $y-3x=0$ 及 $y+2x=0$; $45°$.

13. $x-y+1=0$ 及 $x+y-2=0$.

14. $y+3x-1=0$ 及 $y-x-1=0$. 二線相交於 $(0, 1)$ 點.

15. $x^2+xy=0$. 新 y 軸及平分新軸在第二與第四象限中之夾角之直線.

16. $xy-y^2=0$. 新 x 軸及平分新軸在第一與第三象限中之夾角之直線.

17. $xy=0$. 二新軸.

18. $x^2-y^2=0$. 平分二新軸間之夾角之二直線.

19. $x^2+y^2+2x+2y=0$.　　20. $x^2+y^2=2$.

21. $x^2+y^2+2y=0$.　　22. $x^2+y^2+2x=0$.

23. $x^2-y^2=0$.　　24. $x=1$.

25. $y=-\frac{1}{2}$.　　26. $x^2+y^2=1$.

27. $x^2+y^2=a^2$.　　28. $x^2+y^2+2hx+2ky=c$.

29. $x^2+y^2-2gx-2fy+g^2+f^2-a^2=0$.

30. $x^2+y^2-g^2-f^2+c=0$.

第十二章 (P. 130, 131)

1. $x^2+y^2-x-y=0$.　　2. $x^2+y^2+x-2y+1=0$.

3. $x^2+y^2-6x+4y+4=0$.　　4. $x^2+y^2+6x-3y-1=0$.

5. $x^2+y^2+2y=0$.　　6. $x^2+y^2-2x-2y+1=0$.

7. 圓心 $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$, 半徑 $\frac{1}{2}\sqrt{13}$.　　8. 圓心 $(-2, 2)$, 半徑 3.

9. 圓心 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, 半徑 $\frac{1}{2}$.　　10. 圓心 $(3, 4)$, 半徑 5.

11. 圓心 $(-a, a)$, 半徑 a.　　12. 圓心 $(-3, -4)$, 半徑 5.

13. 圓心爲聯結 (a, b), (c, d) 二點之直線之中點. 半徑爲該二點間距離之半.

14. 圓心 $(0, a)$, 半徑 a.　　15. 在點 $\left(\frac{1}{2}a, 0\right)$ 之點圓.

16. 謂爲圓心在 $(-2, 1)$ 點半徑$=\sqrt{-3}$ 之虛圓.

17. $(-1, 0)$, $(-6, 0)$; $(0, 3)$, $(0, 2)$.

18. $(3, 0)$, $(-4, 0)$; $(0, -2)$, $(0, 6)$.

19. 與二軸相切於 $(2, 0)$ 及 $(0, -2)$ 二點.

20. $(3, 0)$, $(-3, 0)$; $(0, 9)$, $(0, -1)$.

21. $7x^2+7y^2-39x-15y+32=0$. $98\,(x^2+y^2)=425$.

22. $x^2+y^2-9x-5y+14=0$. $2(x^2+y^2)=25$.

23. $x^2+y^2-10x-14y+69=0$. $x^2+y^2=5$.

24. $x^2+y^2-hx-ky=0$. $x^2+y^2=\frac{1}{4}(h^2+k^2)$.

25. $x^2+y^2-12(x+y)+47=0$. $x^2+y^2=25$.

26. $x^2+y^2-(a+b)(x+y)+2ab=0$. $x^2+y^2=\frac{1}{2}(a-b)^2$.

27. $x^2+y^2-ax-by=0$.

28. $x^2+y^2-2hx-2ky=p^2+q^2-2hp-2kq$.

29. $x^2+y^2-(p-q)x-(p+q)y=0$.

30. $x^2+y^2=b^2-a^2$.

31. 該軌跡爲在原點之點圓.

32. $x^2+y^2-ay=0$; 圓心 $\left(0,\ \frac{1}{2}a\right)$, 半徑 $\frac{a}{2}$.

33. $(x-a)^2+y^2=0$, 即在 $(a, 0)$ 點之點圓.

第十三章 (P. 143,144)

1. $2x\pm3y=13$.

2. $3x\pm2y+13=0$.

3. $x\cos a+y\sin a=a$.

4. $y=mx+a\sqrt{1+m^2}$.

5. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

6. $(x-h)\cos a+(y-k)\sin a=a$. $h\cos a+k\sin a+a$.

7. $x+y=1$, $x-y=5$.

8. (i) $5x-6y=0$, (ii) $gx+fy=0$.

9. 該二切線各爲 $x=0$ 與 $y=0$.

10. $x=5$ 及 $y=2$.

11. $3x-2y+13=0$ 及 $2x+3y=0$; $3x+2y+9=0$ 及 $2x-3y+6=0$.

12. $\left(\frac{9}{5},\ \pm\frac{12}{5}\right)$, $3x\pm4y=15$, $4x\mp3y=0$.

13. 應用 §101 方程式 (iv), 並記清 $x_1^2+y_1^2=a^2$.

14. 應用 §106 方程式 (xi).

16. $dx+ey+d^2+e^2=0$. 17. $x=2h$.

18. $ax+by=0$, $ax-by=a^2$, $by-ax=b^2$, $ax+by=a^2+b^2$.

19. 令 (x', y') 爲 P 點之坐標，在切線 $xx'+yy'=a^2$ 與軸 $y=0$ 相遇之處，吾人得

$x=a^2/x'$；又在其與 $x=0$ 相遇之處，$y=a^2/y$.

第十四章 (P. 155,156)

1. $(-a, 0)$, $(0, -a)$. 2. 二切點爲 $(-2a, -a)$, $(-a, -2a)$.

3. $x^2+y^2=5$. 4. $x^2+y^2=10$. 5. $x^2+y^2=4$. 6. $y=x\pm 2$.

7. $y+\sqrt{3}x=\pm 2\sqrt{2}$. 8. $\sqrt{3}y+x=\pm 2\sqrt{2}$.

9. $12y=5x\pm 13\sqrt{2}$. 10. $(-1, -1)$.

11. $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$. 12. $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

13. $(-\sqrt{3}, -1)$. 15. $a^2b^2(x^2+y^2)-c^2(bx+ay)^2=0$.

17. $y=\sqrt{3}$，及 $y+\sqrt{3}x=2\sqrt{3}$.

18. $\left(\frac{60}{13}, \frac{25}{13}\right)$, $\left(-\frac{60}{13}, \frac{25}{13}\right)$.

20. $x^2+y^2-2\sqrt{3}x-2y+3=0$. 21. $x^2+y^2-4x+2=0$.

第十五章 (P. 167)

1. $3x+4y=7$. 2. $3x-5y=2$. 3. $y-3x=14$. 4. $y=14$.

5. $(4, 6)$. 6. $(21, -7)$. 7. $(1, -1)$. 8. $(6, 0)$.

9. $3x+2y=8$. 10. $12x+18y=47$.

11. $6x+5y=48$. 13. $x\pm 2y=5$.

14. $a^2(x^2+y^2)=(xx_1+yy_1)^2$.

第十六章 (P. 176)

1. 5. 2. 3. 3. 1. 4. 3. 5. $2\sqrt{2}$. 6. $1/\sqrt{2}$.

9. $10x-7y=0$.　　10. $5x+11y+1=0$.　　11. $x-3y=2$.

12. $x+y=3,\ 3x-2y+1=0,\ x=1$；根心爲 $(1,\ 2)$.

13. $x^2+y^2-3x+8y=0$.

第十七章 (P. 184,185)

1. 通過極點並與極線各傾成 $30°$ 與 $150°$ 之角之二直線.

2. 通過極點並在極線兩側與之斜交成 $60°$ 角之二直線.

3. 通過極點並與極線傾成 $45°$ 角之直線.

4. 自極點至第一直線上之垂線爲 $\frac{1}{2}$ 並與極線傾成 $60°$ 角；自極點至第二直線上之垂線爲 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 並與極線傾成 $-30°$ 角.

6. $r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$；$\sqrt{2}$.

7. 該二直線相互平行且相去 $2p$ 距離.

9. §147 之逆理.

10. $\frac{1}{r}=\frac{1}{6}\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\theta$；$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=3$.

11. $\left(3,\ \frac{\pi}{5}\right)$, 5.　　12. $\left(2,\ \frac{\pi}{6}\right)$, 3.　　13. 在極點之點圓.

17. 參閱 §§149 與 151.　　18. $(2\sqrt{3},\ 30°)$, $(2\sqrt{3},\ -30°)$.

19. $r^2-2r(h\cos\theta+k\sin\theta)+h^2+k^2-a^2=0$.

第十八章 (P. 197—199)

1. $\left(0,\ k+h\frac{h'}{k}\right)$.　　2. $\left\{\frac{1}{2}(h+h'),\ \frac{1}{2}\left(k-h\frac{h'}{k}\right)\right\}$.

3. $\left(\frac{p}{\sin\alpha+\cos\beta},\ 0\right)$.　　6. $x^2+y^2=9$.

7. $x-7y=2$.　　8, 9, 10, 11 均爲圓.

12, 13, 14, 15 均爲直線.　　16. $x^2+y^2=a^2$.

17. 通過原點並與所與直線相垂直之直線.

19. (1) 圓 $r^2-2arm\cos\theta+a^2m^2-c^2m^2=0$;

(2) 圓 $r^2-2\dfrac{ak^2}{a^2-c^2}r\cos\theta+\dfrac{k^4}{a^2-c^2}=0$.

當 $a=c$ 時, 前者成爲通過極點之圓 $r=2am\cos\theta$, 後者成爲直線 $r\cos\theta=\dfrac{k^2}{2a}$.

20. 具有以聯結定點至所與圓圓心之直線爲直徑之圓.

21. $r\rho\cos\theta=\rho^2-a^2$. 22. $x^2+2y^2+4x-4y=2$. 23. $x^2-y^2-4x+4y=2$.

25. (i) 若 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{k}$, 則該直線通過 (k, k) 點;

(ii) 若 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{k^2}$, 則該直線切於圓 $x^2+y^2=k^2$ 上.

26. 具有半徑 a 圓心在原點之圓.

總試題答案

1. $x^2+y^2-2ax=0$, 該處 a 爲半徑.

2. 參閱 §87. 該二式爲:

(1) $x^2+y^2-2hx-2ky=0$ 及 (2) $x^2+y^2=a^2$.

3. $y-y'=-\dfrac{1}{m}(x-x')$, 該處 (x', y') 爲所與點, 又 $y=mx+b$ 爲所與直線.

4. 參閱 §32. $ax-by=0$.

5. 參閱 §26. $a=\dfrac{y'}{2x'}$, $b=\dfrac{y'}{2}$.

6. 參閱 §87, 及題 2. 之答. 7. 參閱 §32.

8. $\dfrac{y}{a}-\dfrac{x}{b}=k$, 該處 k 爲任何隨意常數.

9. 參閱題 3 之答. 10. 參閱 §§63, 65.

11. 參閱 §30. 12. 參閱 §87 及題 2 之答.

13. 參閱 §29 或 30, 應用附接 §62 以後例 3 之法可得方程式.

$$y-y'=\frac{m-\tan\phi}{1+m\tan\phi}(x-x') \text{ 或 } y-y'=\frac{m+\tan\phi}{1-m\tan\phi}(x-x'),$$

該處 (x', y') 乃所與點, ϕ 所與角, 又 $y=mx+b$ 所與直線.

14. 參閱 §32. 15. $x+2y=0$; $3/\sqrt{5}$. 16. 參閱 §29 或 30.

17. 參閱 §35 或 37. 18. 參閱 §87. 19. 參閱 §26.

20. 參閱題 3 之答. 21. $x^2+y^2-2ax=0$.

22. 在原點之點圓; 平分二軸間夾角之二直線: $x+y=0$ 及 $x-y=0$.

23. 參閱 §158 後之例 8. 24. $b(x-h)-a(y-k)=0$.

25. $(x-x')^2+(y-y')^2=(x'-h)^2+(y'-k)^2$ 爲圓心在 (x', y') 點並通過 (h, k) 點之圓; 若

$$\frac{(ax'+by'+c)^2}{a^2+b^2}=(x'-h)^2+(y'-k)^2,$$

則直線 $ax+by+c=0$ 爲切於此圓上之切線.

該圓系之一般方程式, 可書成次形:

$$(ah+bk+c)\{(ax+by+c)^2+(bx-ay+\lambda)^2\}$$
$$=(ax+by+c)\{(ah+bk+c)^2+(bh-ak+\lambda)^2\},$$

該處 λ 爲隨意常數.

26. 參閱 §15.

27. (i) 通過原點及 (3, 1) 點之直線; (ii) $(\pm a, \pm a)$ 及 $(\pm b, \pm a)$ 八點.
[嚴格言之, 方程式 (2) 乃表通過此等八實點之 "虛軌跡".]

28. 參閱 §15. 參閱 §§26, 32, 或 35.

29. $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=C^2$, $a^2=4(C^2-\beta^2)$; $b^2=4(C^2-\alpha^2)$.

30. 參閱 §29 或 30; §35.

31. (i) 二軸 (y 軸重複二次); (ii) 在原點之點圓; (iii) 通過 $(0, -4)$ 點並與 x 軸傾成 45° 角之直線.

32. 參閱 §§90 與 92. 33. $c^2(x^2+y^2)=a^2(y-bx)^2$.

34. 閱 §§15 與 32.

35. 令 (x', y') 爲該點，又 A 爲面積. 若 $\frac{x'}{a}+\frac{y'}{b}=1$，又 $2A=ab$；則 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 爲所求方程式. 故吾人求得該直線爲

$$\frac{xy'}{A\pm\sqrt{A^2-2Ax'y'}}+\frac{x'y}{A\mp\sqrt{A^2-2Ax'y'}}=1.$$

所求之條件爲 $A-2x'y'$ 必須爲正，否則 a 與 b 將爲虛量矣.

36 (i) 中心爲 (a, b) 點又半徑爲 c 之圓.

(ii) 在 (a, b) 點之點圓.

37. $x^2+y^2-\frac{a^2+b^2}{a+b}(x+y)=0$. 二弦相等且各具長度 $\frac{a^2+b^2}{a+b}$.

38. 參閱題 13 之答. 39. $y+\sqrt{3}x=0$ 及 $x=0$. 40. 參閱 §32.

41. 截二軸於 $(-3, 0)$ 與 $(0, -2)$ 二點之直線. 通過原點並平分二軸間夾角之一對直線.

42. 參閱 §56.

43. $y-k=\frac{2m}{1-m^2}(x-h)$ 及 $y=k$.

44. 參閱 §87，及 §98 後例 1. 方程式 (i) 之註.

45. $c(x^2+y^2)=2(ax+by)(y-mx)$.

46. 參閱 §35 或 37. 47. $5x+3y=19$.

48. 參閱 §§87, 111, 及 112 或 115.

49. 參閱 §32. 50. $a(x-a)-b(y-b)=0$.

51. 參閱 §90 及 §157 後例 4. 52. $A(x-a)-B(y-b)=0$.

53. 圓心在 $(1, 1)$ 點半徑爲 1 之圓. 該圓與二軸及該所與直線均相切.

54. 參閱 §8. 55. (x_1+x_2, y_1+y_2).

56. $(-1, 3)$；$\sqrt{10}$. 該圓與二軸相截於原點及 $(-2, 0)$, $(0, 6)$ 二點.

57. $\pm\frac{\eta-a\xi-b}{\sqrt{a^2+1}}$. 58. 參閱 §§153, 155.

59. $y-x=a-b$. $(a-b)^2=2c$.

60. $ay-bx=0$, $by-ax=0$, $x+y=a+b$; 面積$=\frac{1}{2}(a^2-b^2)$

61. 角$=90°$. 交點爲$\left\{\frac{c(a-b)}{a^2+b^2}, \frac{c(a+b)}{a^2-b^2}\right\}$.

二平分線爲 $(a+b)x-(a-b)y=0$; $(a-b)x+(a+b)y=2c$.

62. 參閱 §87. 63. 半徑$=c$.

64. 圓心爲 $(4, -1)$ 點. 垂直直徑爲 $4y+x=0$, 並截該圓於原點及 $(8,-2)$ 點.

65. $x^2+y^2-2ax-2by=0$. 切線 $ax+by=0$. 截距 $2a$ 與 $2b$.

66. 應用 §§61, 68, 以推求結果 (i).

67. 圓 (§157 後之例 4.)

68. $\frac{y-y_3}{y_1-y_2}=\frac{x-x_3}{x_1-x_2}$ 及 $\frac{y-y_3}{x_1-x_3}+\frac{x-x_3}{y_1-y_2}=0$.

69. $(-r\cos\phi, -r\sin\phi)$; 半徑$=0$; 切線$=r$.

70. $11x+37=0$, $11y-11x=38$.

71. $x+2y+A+2B=\pm\sqrt{5(A^2+B^2-C)}$.

72. §157 以後之例 4.

73. 面積$=0$; 故 P, Q, R 三點位在一直線上.

74. $x+y=\pm r\sqrt{2}$. 75. 該軌跡乃直線系.

76. $x-y=2$ 與 $5x+5y=12$. 77. 參閱 §13.

78. $43x-29y=71$. 79. 圓.

80. 圓心 $\left(-\frac{l}{2}, -\frac{m}{2}\right)$, 半徑爲 $\frac{\sqrt{l^2+m^2-4n}}{2}$.

*81. $a=c$, 又 $b=2a\cos\omega$, 該處 ω 爲二軸間之交角.

82. $23y-13x+64=0$. 83. 直線系. 84. $x^2+y^2-4x-6y=87$

85. $3x+y=7$, $3y-x=1$ 及 $7x-y=13$.

86. $x+2y=23$. 87. 參閱 §§131, 132; 15.

88. 參閱 §§32, 35 及 48. 39. 參閱 §63

90. $(a \cos \alpha, b \sin \alpha)$; $\sqrt{a^2+b^2 \sin^2 \alpha}$.

91. $a \cos \alpha \cos \theta + b \sin \alpha \sin \theta \pm \sqrt{a^2+b^2 \sin^2 \alpha}$.

92. 參閱 §§26 及 35. 93. 參閱 47 或 48.

94. $(a+c \cos \theta, b+c \sin \theta)$.

95. (i) 與 (ii) 爲俱皆通過原點並各以 OY 及 OX 上之單位長爲直徑之二圓. (iii) 與 (iv) 爲各平行於 OY 及 OX 並各去之單位距離之二直線.

96. $\left(2, -\frac{1}{3}\right)$. 97. $42x-24y=29$, $12x+21y+1=0$.

98. a; (c, a). 99. $x^2+y^2+2ax\frac{m^2+1}{m^2-1}+a^2=0$.

100. 參閱 §29 或 30. 101. 參閱 §§32 及 35. 102. $(1, 1)$.

103. 參閱 §§17 及 18. (i) 參閱 §150; (ii) 參閱 §145.

104. $x+4y=9$; $\frac{9}{17}\sqrt{17}$. 105. $7\frac{1}{2}$ 平方呎.

106. 參閱 §§90, 92.

107. $(x^2+y^2-a^2)\sqrt{p^2+q^2}=\pm c(px+qy+r)$, (圓).

108. $11x+4y=10$.

109. $\left(\frac{2+3m\pm\sqrt{-3m^2+12m-8}}{1+m^2}, \frac{2m+3m^2\pm m\sqrt{-3m^2+12m-8}}{1+m^2}\right)$;

$$m=\frac{2}{3}(3\pm\sqrt{3});\ 3y=2(3\pm\sqrt{3})x.$$

110. 原點位於該三角形之內. 111. $\left(\frac{101}{228}, \frac{181}{228}\right)$.

112. 所與直線通過 (4, 0) 點並與 x 軸之正向作 30° 角; (i) $\frac{3}{8}\sqrt{3}$; (ii) $\frac{3}{2}+\sqrt{3}$; (iii) $\frac{1}{2}\sqrt{3}+1$.

113. $x=2$; $y=\frac{2}{3}$.

114. 二等圓, 半徑爲 $\frac{1}{2}a$, 圓心各在 y 與 x 軸上; 在原點截成直角. $r=a \cos \theta + b \sin \theta$.

115. $\dfrac{na}{n+1}$，$\dfrac{nb}{n+1}$；$\dfrac{2n}{n+1}$.

116. $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$；$\dfrac{1}{2}$. $x^2+y^2-x=10$.

117. $(-1, 1)$.

118. $y=0$；$y=\dfrac{4}{3}x$.

119. $x+y=a+b$.

120. $x^2+y^2=2ax$.

121. 參閱 §65. $3x+2y-1=0$.

122. $4x-3y+6=0$.

123. C' 爲 $\left(\dfrac{aa'b'}{ab'+a'b}, \dfrac{ba'b'}{ab'+a'b}\right)$.

124. $x^2+y^2-ax-by=0$；$2x^2+by=0$.

125. $4x+3y+1=0$；$4x-3y+7=0$.

126. 參閱 §90. $x^2+y^2-10x-10y+25=0$，$x^2+y^2+6x+6y+9=0$.

127. 2.47.

128. (1) 直線；(2) 圓. $\theta=\dfrac{\pi}{12}$ 或 $\dfrac{5\pi}{12}$. $r=5.66$. $\tan\phi=9.5$

129. (i) $a(y-g)+b(x-f)=0$； (ii) $a(x-f)-b(y-g)=0$；

(iii) $\dfrac{2\sqrt{h^2-ab}\ \sqrt{f^2+g^2}}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$.

130. $x^2+y^2-\dfrac{2x}{9}=0$；$x^2+y^2+2x=0$；$\dfrac{2}{3}$.