Н.К.О. ВСЕУКРАЇНСЬКА АКАДЕМІЯ НАУК У.С.Р.Р.
ПРИРОДНИЧО-ТЕХНІЧНИЙ ВІДДІЛ

Commissariat du Peuple pour l'instruction publique

ACADÉMIE DES SCIENCES D'UKRAINE
CLASSE DES SCIENCES NATURELLES ET TECHNIQUES

République Socialiste des Soviets d'Ukraine

Пролетарі всіх країн, єднайтеся!
Prolétaires de tous les pays, unissez-vous!

Акад. М. КРАВЧУК

ЗАСТОСУВАННЯ СПОСОБУ МОМЕНТІВ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЯЛЬНИХ ТА ІНТЕҐРАЛЬНИХ РІВНАНЬ

ВИПУСК I

M. KRAWTCHOUK

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES DIFFÉRENTIELLES ET INTÉGRALES PAR LA MÉTHODE DE MOMENTS

FASCICULE I

У КИЄВІ — 1932

(194)

Н.К.О.

Commissariat du peuple pour l'instruction publique.

ВСЕУКРАЇНСЬКА АКАДЕМІЯ НАУК
ПРИРОДНИЧО-ТЕХНІЧНИЙ ВІДДІЛ

ACADÉMIE DES SCIENCES D'UKRAINE
CLASSE DES SCIENCES NATURELLES ET TECHNIQUES

У.С.Р.Р.

République Socialiste des soviets d-Ukraine

Пролетарі всіх країн, єднайтеся!
Prolétaires de tous les pais, unissez-vous

Krawchuk, Mykhailo Pylypovich

Акад. М. КРАВЧУК

ЗАСТОСУВАННЯ СПОСОБУ МОМЕНТІВ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЯЛЬНИХ ТА ІНТЕҐРАЛЬНИХ РІВНАНЬ

ВИПУСК I

M. KRAWTCHOUK

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES DIFFÉRENTIELLES ET INTÉGRALES PAR LA MÉTHODE DE MOMENTS

FASCICULE I

У КИЄВІ—1932

Бібліографічний опис цього видання вміщено в „Літопису Українського Друку“, „Картковому репертуарі“ та інших покажчиках Української Книжкової Палати.

Дозволяється випустити в світ.
Неодмінний Секретар Академії Наук
акад. *О. Корчак-Чепурківський.*

Київський Обліт № 232. 1932.
З друкарні Всеукраїнської Академії Наук (Цитаделя, 9).
Зам. № 374—1000 прим.

Застосування способу моментів до розв'язання лінійних диференціяльних та інтегральних рівнань

Акад. М. Кравчук

Sur la résolution des équations linéaires différentielles et intégrales par la méthode de moments

Par M. Krawtchouk

ВСТУП

Значна частина лінійних проблем математичної фізики в одному вимірі зводиться на лінійні диференціяльні рівнання з граничними умовами, що мають за свій найпростіший тип задачу: визначити на інтервалі (a, b) функцію $y(x)$ з умов:

$$\frac{dy^2}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \tag{1}$$

$$y(a) = y(b) = 0 \tag{2}$$

Таким задачам, узятим у найзагальнішій формі, присвячено першу частину цієї праці. У випадку, коли ця задача є так звана самоспряжена, отже може бути зведена на задачу варіяційного числення, W. Ritz (не згадуємо тут давніших авторів) перший чітко поставив питання про те, щоб розв'язати її наближено, шукаючи функцію $y(x)$ у формі даного виразу від x та від довільної кількости параметрів a_i:

$$y(x) \approx y_m(x, a_1, a_2, \ldots, a_m),$$

через мінімізацію певного інтеграла

$$J(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \int_a^b F[x, y_m(x, a_1, \ldots, a_m), y'_m(x, a_1, \ldots, a_m)]\, dx,$$

що зводиться в даному випадку на мінімізацію функції $J(a_1, a_2, \ldots a_m)$ від скінченної кількости змінних. Функцію y_m можна вибрати, як лінійну функцію від параметрів a_i, і тоді її визначення зведеться на розв'язання системи m лінійних рівнань щодо параметрів a_i.

W. Ritz довів збіжність свого процесу, тобто рівність

$$\lim_{m=\infty} y_m(x, a_1, a_2, \ldots, a_m) = y(x)$$

тільки для випадку, коли $J(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ є означена квадратична форма від змінних a_i, що накладає дуже тісні обмеження на сучинники $p(x)$.

Не вважаючи на це, практика застосування його альґоритму зразу виступила поза ці дуже вузькі межі. Пізніші досліди (акад. М. Крилов, L Lichtenstein, Trefftz, Courant, Mac Evans, автор цієї праці та інші) довели збіжність Ritz-ового способу або подібних до нього в усіх випадках, коли розв'язка $y(x)$ нашої задачі (1) — (2) існує. Із авторових робіт виявилося, що на те, щоб забезпечити цю збіжність, досить дібрати функцію $y_m(x, a_1, a_2, \ldots, a_m)$ у вигляді

$$y_m(x, a_1, a_2, \ldots, a_m) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \ldots + a_m \varphi_m(x),$$

наклавши спеціяльні умови на функції $\varphi_i(x)$; найзручніше вимагати, щоб функції $\varphi_i(x)$ були фундаментальними функціями другого, відповідно дібраного диференціяльного лінійного рівняння з тими самими граничними умовами (2).

Автор далі показує, як таке рівняння дібрати: тут завжди можна обмежитися рівнанням з сталими сучинниками, отже функції $\varphi_i(x)$ легко здобути, як раціональні комбінації з многочленів, покажчикових та тригонометричних функцій. У наступних розділах показано також, як звільнитися від варіяційного Ritz-ового альґоритму, перейшовши до загальнішого методу. Це має значіння поперше тим, що поширює застосування методу й на задачі несамоспряжені, а подруге, вводячи, крім чисел a_i, значну кількість інших параметрів, дозволяє добирати їх стосовно до індивідуальних особливостей задачі та щоб підвищити точність висліду. Нарешті, завдяки згаданому вище способові добору функцій $\varphi_i(x)$, щастить дати також і точні розв'язки для лінійних задач одного виміру в формі певних рядів, у яких функції $\varphi_i(x)$ відіграють ролю подібну до ролі фундаментальних функцій, маючи проте ту перевагу, що їх завжди можна взяти точно і в простому вигляді.

Автор багато менше розробляє важке питання про докладну оцінку похибки здобутих наближених розв'язок. Детально розроблені зразки таких дослідів подано в численних працях акад. М. Крилова. У цій праці подається переважно тільки оцінку порядку похибки, залежно від числа m параметрів a_i. Глибший розгляд питання про оцінку похибки приводить до потреби вміти наближено (з перевишкою) оцінити абсолютну вартість Green-ової функції задачі, що своєю чергою веде до питання про визначення відповідних характеристичних чисел. У цій царині ще надовго лишиться багато важливого матеріялу для дуже важких дослідів. За остаточно розв'язану цю проблему можна вважати тільки для випадків, де Green-ова функція є відома точно, та для задач, що в них Fredholm-ова трансцендентна переводиться на стале число.

У розділі III діялектика розвитку поданого наближеного методу веде до встановлення теоретично точних розв'язок, отже до побудови повної теорії питання, незалежної навіть від загальних теорем про існування тих розв'язок. Авторові здається, що таке поєднання теорії з практикою має методологічну цінність і обіцяє дальші здобутки на цьому полі. Напр., воно не раз може звільнити від надзвичайно складних обчислень зв'язаних з характеристичними числами та фундаментальними функціями, а крім того указує шляхи утворити функції, що можуть заміняти собою характеристичні у випадках задач несамоспряжених.

Другу частину цієї праці присвячено лінійним рівнанням з частинними похідними математичної фізики. Тут, як відомо, Ritz-ів спосіб не дає, взагалі кажучи, збіжного висліду навіть у випадку Laplace-ового рівнання:

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Тимчасом сам Ritz довів, що спосіб дає вислід збіжний для рівнань вищого порядку, а саме для бігармонічного рівнання:

$$\Delta\Delta z = \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0$$

за умов типу

$$z = \Theta(s)\ ,\ \frac{dz}{dn} = \vartheta(s)$$

на контурі s обсягу, де треба визначити функцію $z(x,y)$. Подані в цій праці методи, узагальнюючи Ritz-ів спосіб, дають змогу, відповідно добираючи функції $\varphi_i(x,y)$, визначити збіжну наближену вартість функції $z(x,y)$ у формі

$$z_m(x,y) = a_1 \psi_1(x,y) + a_2 \psi_2(x,y) + \ldots + a_m \psi_m(x,y)$$

для обох зазначених задач та для великої кількости задач загальніших.

Проте в другій частині поданої тут праці не досягнено такої повноти, як у першій. Хоч наведені методи можна звільнити (і в даній праці їх звільнено) від потреби базуватися на теоремі про існування розв'язок досліджуваних задач, проте вони істотно базуються на існуванні розв'язок та Green-ових функцій певних лінійних задач із сталими сучинниками. У перших параграфах першої частини це питання для задач одного виміру розібрано докладно. Щодо задач двох та кількох вимірів, то хоч для випадку сталих сучинників (а почасти й для загальніших) маємо загальні методи (Cauchy) та загальні досліди існування основних розв'язок, отже й Green-ових функцій (Zeilon, Hadamard), проте це питання не можна вважати за остаточно закінчене. Тому треба, вважати, що міркування другої частини стосуються тільки до тих задач з частинними похідними, що для однотипних із ними найпростіших задач із сталими сучинники доведено існування розв'язок або Green-ових функцій. Розвинено їх переважно на задачах еліптичного типу, як на найважливіших у застосуваннях і незводних до задач меншої кількости вимірів. У решті — методи та висліди другої частини аналогічні методам та вислідам першої частини і доведено їх теж до розвинень розв'язок у ряди. Так само кінець-кінцем функції $\varphi_i\ (x,\ y)$, що заміняють та взагальнюють фундаментальні функції, дають змогу перейти від наближених розв'язок до точних у формі рядів, обминувши важке подеколи обчислення фундаментальних функцій. Але тут виникає нова трудність: практично може бути дуже важко дібрати функції $\varphi_i\ (x,\ y)$ так, щоб вони справджували граничні (та початкові) умови задачі. Тоді практичне значіння методу в такому вигляді зводиться майже до нічого. Автор показує, як через належну відміну способу можна обмежитися обчисленням функцій $\varphi_i\ (x,\ y)$ для найпростіших контурів, напр. квадрата або кола. Застосування цієї ідеї до задач одного виміру може дати інколи теж корисні наслідки, але, загалом кажучи, воно збільшує похибку висліду, знижуючи ступінь його точности.

Подані в цій праці наближення розв'язок задач математичної фізики мають ту властивість, що для звичайного диференціяльного рівнання k-го порядку збігається не тільки саме наближення y_m, а й його похідні до порядку $k-1$-го включно, а похідна k-го порядку збігається в середньому, тобто справджує рівність:

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b (y_m-y)^2\,dx=0$$

Щодо задач двох вимірів k-го порядку, то тут похідні відповідного наближення $z_m(x, y)$ розв'язки $z(x, y)$ збігаються всі до порядку $k-2$-го включно, а похідні порядку $k-1$-го збігаються в середньому. Щодо похідних k-го порядку, то можна твердити тільки збіжність у середньому комплексу з найвищих членів відповідного диференціяльного рівнання; отже, напр., для рівнання

$$\Delta\Delta z+A_{30}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+A_{21}\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}+A_{12}\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}+A_{03}\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}+A_{20}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+A_{11}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+$$

$$+A_{02}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+A_{10}\frac{\partial z}{\partial x}+A_{01}\frac{\partial z}{\partial y}+Az=f(x, y)$$

$$z=\theta(s),\ \frac{dz}{dn}=\vartheta(s)\qquad\text{(на контурі)},$$

маємо:

$$\lim_{m\to\infty} z_m=z$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\partial z_m}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x},\qquad \lim_{m\to\infty}\frac{\partial z_m}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\partial^2 z_m}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x},\qquad \lim_{m\to\infty}\frac{\partial^2 z_m}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\qquad \lim_{m\to\infty}\frac{\partial^2 z_m}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$\lim_{m\to\infty}\iint_s\left(\frac{\partial^3 z_m}{\partial x^2\partial y}-\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}\right)^2 dxdy=0,\ \lim_{m\to\infty}\iint_s\left(\frac{\partial^3 z_m}{\partial x\partial y^2}-\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\right)^2 dxdy=0$$

$$\lim_{m\to\infty}\iint_s\left(\frac{\partial^3 z_m}{\partial x^3}-\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)^2 dxdy=0,\quad \lim_{m\to\infty}\iint_s\left(\frac{\partial^3 z_m}{\partial y^3}-\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)^2 dxdy=0$$

$$\lim_{m\to\infty}\iint_s(\Delta\Delta z_m-\Delta\Delta z)^2\,dxdy=0.$$

Із цих вислідів дещо тратиться, коли функції $\varphi_i(x, y)$ не можна дібрати так, щоб вони справджували граничні умови задачі.

Кілька параграфів праці присвячено застосуванню тих самих ідей до інтеґральних рівнань, хоч практичне значіння цих застосувань — не велике. Якраз можна вважати, що подані в цій праці висліди мають, як одну з цілей, показати, що не раз уживаний спосіб заміни диференціяльного рівнання — рівнанням інтеґральним у багатьох випадках не спрощує задачі, і що Hilbert-ову ідею розв'язувати лінійні інтеґральні рівнання рядами ортогональних функцій можна, з відповідними змінами, застосувати й безпосередньо до рівнань диференціяльних.

Одна з загальних думок, що лягла в основу цієї роботи, — було бажання і в практичних методах і в загальних теоретичних міркуваннях та конструкціях математичної фізики — звільнитися від схеми постави питання, як задачі екстремальної. Не зважаючи на великі послуги, що цей обсяг завдячує принципові мінімуму та максимуму з погляду формулювання проблем та їх зв'язку з загальними принципами динаміки, з погляду формулювання й досліду питань, зв'язаних з характеристичними числами та функціями, — автор уважає, що прийшов час переглянути цю думку. Із одного боку обмеження науки самими самоспряженими задачами не можна не вважати за тимчасове та абсолютизувати його; настає пора, коли це обмеження з чинника поступу науки може зробитися її гальмом. З другого боку й для суто практичних потреб наближеної розв'язки навіть самоспряжених задач виявляється, що варіяційний принцип надмірно обмежений; це й не дало змоги на Ritz-овому шляху дійти викінчених вислідів. І якраз авторові цієї розвідки на підставі поданого матеріялу здається, що, розсунувши рямці цього принципу за вимогами практичними, пощастило поширені практичні вислідн вивести на рівень теоретичної викінчености.

Ціла низка дальших питань чекає ще ув'язки з цією схемою. Тимчасом, напр., важко вказати, як поза схемою мінімального принципу складеться питання про характеристичні числа та фундаментальні функції — так воно натурально з неї виростає. Діялектика розвитку наукової думки примушує сподіватися та добиватися такого поширення мінімального принципу, що поєднав би зазначені суперечливі моменти в одній вищій цілості.

Назва цієї праці має на меті підкреслити її генезу та її орієнтацію на методи математичної статистики. У математичній статистиці складніші задачі вимагають не раз, залишивши принцип найменших квадратів, звертатися до гнучкішого та придатнішого практично способу моментів (що являє собою певною мірою взагальнення способу найменших квадратів). Одна з авторових цілей є показати, що спосіб моментів у застосуванні до диференціяльних рівнань має таке саме практичне значіння та відограє ролю такого самого взагальнення варіяційного мінімального принципу. Проте, заразом спосіб моментів являє й узагальнення того способу, висуненого в працях академіка М. Крилова, що його можна назвати властивим способом найменших квадратів у розв'язанні диференціяльних рівнянь, і що в випадку задачі (1) — (2) зводиться до мінімізації інтеґралу

$$J_1(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \int\limits_a \left[\frac{d^2 y_m}{dx^2} + p(x) \frac{dy_m}{dx} + q(x) y_m - f(x) \right]^2 dx,$$

як функції від параметрів a_i. Ширше кажучи, спосіб моментів поєднує спосіб варіяційного альґоритму та спосіб найменших квадратів, сперті обидва на принцип мінімуму, рядом із безліччю їх варіянтів, в одному загальному принципі. Крім того, він являє собою також пряме взагальнення звичайного способу моментів. Що своїм корінням поданий спосіб спирається на принцип найменших квадратів, видно з його оцінок похибок наближень: вони всі базуються на певних середніх квадратах.

Уважаємо, що на часі поставити питання про застосування загальних вислідів та способів цієї праці до задачі про криві розподілу. Ті спрощені крайньою мірою диференціяльні рівнання, що в Pearson-овій теорії кривих розподілу інтегруються безпосередньо, ведуть, як відомо, до вульгарних, і методологічно і математично хибних вислідів. Є змога зв'язати теорію кривих розподілу з диференціяльними рівнаннями загальніших типів, що приведуть до задач типу (1)—(2) та до їх узагальнень. Особливо доцільно для їх розв'язання взяти схему нашого взагальненого способу моментів. У них має значіння випадок, коли інтервал (a, b) нескінченно великий, що вимагає додаткового розгляду питань збіжности та деяких інших елементів поданого способу.

Потреби внутрішнього викінчення методу; нерозв'язані проблеми, що мають своє коріння в звичайному способі моментів; незакінчені питання, зв'язані з застосуванням мінімального принципу в задачах математичної фізики; математичний апарат статистичних теорій сучасної фізики; конкретне розроблення методу в технічних застосуваннях,—ось питання, що промовляють на користь дальшої роботи над обсягом, що його начеркнено в цій роботі.

Крім зазначених вище проблем, що чекають на розв'язання в рямцях способу моментів, на часі практичне його розроблення на числових прикладах. Для цієї мети катедра математичної статистики ВУАН організує колектив математиків та дослідників з інших галузей науки.

Складаючи цю книжку, автор базувався переважно на власних розвідках, друкованих, починаючи з 1926 року, в виданнях Всеукраїнської та Паризької Академій Наук, Вістях Київського Політехнічного Інституту, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Boletin Matematico, Atti del Congresso Internationale dei Matematici (1928) та інших. Із загальних курсів, що можуть допомогти читачеві ввійти в цей обсяг, назвімо:

Mises und Frank. Differential- und Integralgleichungen der Mathematischen Physik.

Courant und Hilbert. Methoden der Mathematischen Physik, Bd. I.

Автор обмежився переважно задачами з граничними умовами однорідними, бо загальний випадок умов неоднорідних легко зводиться на цей.

ЧАСТИНА ПЕРША

РОЗДІЛ І

Існування розв'язок у лінійних диференціяльних рівнань та існування диференціяльних рівнань, що мають даного характеру розв'язки

§ 1. Лінійна задача із сталими сучинниками та її Green-ова функція.

Візьмімо диференціяльне рівняння із сталими сучинниками:

$$M_x[z] = z^{(k)} + B_1 z^{(k-1)} + \ldots + B_k z = F(x) \tag{1}$$

пошукаймо на інтервалі (a, b) той його інтеґрал, що справджує на кінцях a та b лінійні однорідні умови:

$$\begin{gathered}
\alpha_0^{(0)} z(a) + \alpha_0^{(1)} z'(a) + \ldots + \alpha_0^{(k-1)} z^{(k-1)}(a) + \beta_0^{(0)} z(b) + \beta_0^{(1)} z'(b) + \\
+ \ldots + \beta_0^{(k-1)} z^{(k-1)}(b) = 0 \\
\alpha_1^{(0)} z(a) + \alpha_1^{(1)} z'(a) + \ldots + \alpha^{(k-1)} z^{(k-1)}(a) + \beta_1^{(0)} z(b) + \beta_1^{(1)} z'(b) + \\
+ \ldots + \beta_1^{(k-1)} z^{(k-1)}(b) = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2) \\
\alpha_{k-1}^{(0)} z(a) + \alpha_{k-1}^{(1)} z'(a) + \ldots + \alpha^{(k-1)} z_{k-1}^{(k-1)}(a) + \beta_{k-1}^{(0)} z(b) + \beta_{k-1}^{(1)} z'(b) + \\
+ \ldots \beta_{k-1}^{(k-1)} z^{(k-1)}(b) = 0
\end{gathered}$$

Ці умови обіймають, як частинний випадок, умови Cauchy:

$$\begin{gathered}
z(a) = 0 \\
z'(a) = 0 \\
\ldots\ldots \\
z^{(k-1)}(a) = 0,
\end{gathered}$$

умови періодичности:

$$\begin{gathered}
z(a) = z(b) \\
z'(a) = z'(b) \\
\ldots\ldots \\
z^{(k-1)}(a) z^{(k-1)}(b)
\end{gathered}$$

та всі інші, що раз-у-раз трапляються в практиці та мають зв'язки з важливими застосуваннями.

Обмежившися зразу випадком, коли характеристичне рівняння

$$M(r) = r^k + B_1 r^{k-1} + \cdots + B_k = 0$$

не має кратних коренів, і зазначивши його корені через

$$r_0, r_1, \ldots, r_{k-1},$$

запишімо інтеграл рівнання (1) у формі:

$$z(x) = C_0(x)\, e^{r_0 x} + C_1(x)\, e^{r_1 x} + \cdots + C_{k-1}(x)\, e^{r_{k-1} x}, \tag{4}$$

де

$$C_0(x),\ C_1(x), \ldots, C_{k-1}(x) \tag{5}$$

є тимчасом невизначені функції від x.

Запровадивши зазначення

$$y_x(\xi) = C_0'(\xi)\, e^{r_0 x} + C_1'(\xi)\, e^{r_1 x} + \cdots + C_{k-1}'(\xi)\, e^{r_{k-1} x} \tag{6}$$

і знаючи, що функції (5) визначаються з умов:

$$\begin{aligned}
&C_0'(\xi)\, e^{r_0\xi} + C_1'(\xi) e^{r_1\xi} + \cdots + C_{k-1}'(\xi)\, e^{r_{k-1}\xi} = 0\\
&C_0'(\xi)\, r_0\, e^{r_0\xi} + C_1'(\xi)\, r_1\, e^{r_1\xi} + \cdots + C_{k-1}'(\xi)\, \xi_{k-1}\xi\, e^{r}_{k-1}{}^{\xi} = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&C_0'(\xi)\, r_0^{k-2} e^{r_0\xi} + C_1'(\xi)\, r_1^{k-2} e^{r_1\xi} + \cdots + C_{k-1}'(\xi)\, r_{k-1}^{k-2}\, e^{r_{k-1}\xi} = 0\\
&C_0'(\xi)\, r_0^{k-1} e^{r_0\xi} + C_1'(\xi)\, r_1^{k-1}\, e^{r_1\xi} + \cdots + C_{k-1}'(\xi)\, r_{k-1}^{k-1}\, e^{r_{k-1}\xi} = F(\xi),
\end{aligned} \tag{7}$$

виводимо з (6) та (7):

$$y_x(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} e^{r_0 x}, & e^{r_1 x}, & \ldots, & e^{r_{\kappa-1} x} \\ e^{r_0\xi}, & e^{r_1\xi}, & \ldots, & e^{r_{\kappa-1}\xi} \\ r_0 e^{r_0\xi}, & r_1 e^{r_1\xi}, & \ldots, & r_{\kappa-1} e^{r_{\kappa-1}\xi} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_0^{\kappa-2} e^{r_0\xi}, & r_1^{\kappa-2} e^{r_1\xi}, & \ldots, & r_{\kappa-1}^{\kappa-2} e^{r_{\kappa-1}\xi} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{r_0\xi}, & e^{r_1\xi}, & \ldots, & e^{r_{\kappa-1}\xi} \\ r_0 e^{r_0\xi}, & r_1 e^{r_1\xi}, & \ldots, & r_{\kappa-1} e^{r_{\kappa-1}\xi} \\ r_0^2 e^{r_0\xi}, & r_1^2 e^{r_1\xi}, & \ldots, & r_{\kappa-1}^2 e^{r_{\kappa-1}\xi} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_0^{\kappa-1} e^{r_0\xi}, & r_1^{\kappa-1} e^{r_1\xi}, & \ldots, & r_{\kappa-1}^{\kappa-1} e^{r_{\kappa-1}\xi} \end{vmatrix}} \cdot (-1)^{\kappa} \cdot F(\xi) = \tag{8}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} e^{r_0(x-\xi)}, & e^{r_1(x-\xi)}, & \ldots, & e^{r_{\kappa-1}(x-\xi)} \\ 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ r_0, & r_1, & \ldots, & r_{\kappa-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_0^{\kappa-2}, & r_1^{\kappa-2}, & \ldots, & r_{\kappa-1}^{\kappa-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ r_0, & r_1, & \ldots, & r_{\kappa-1} \\ r_0^2, & r_1^2, & \ldots, & r_{\kappa-1}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_0^{\kappa-1}, & r_1^{\kappa-1}, & \ldots, & r_{\kappa-1}^{\kappa-1} \end{vmatrix}} \cdot (-1)^{\kappa} \cdot F(\xi)$$

Заведімо для скорочення зазначення:

$$g(x,\xi)=(-1)^{\kappa}\cdot\frac{\begin{vmatrix} e^{r_0(x-\xi)}, & e^{r_1(x-\xi)}, & \ldots, & e^{r_{\kappa-1}(x-\xi)} \\ 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ r_0, & r_1, & \ldots, & r_{\kappa-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_0^{\kappa-2}, & r_1^{\kappa-2}, & \ldots, & r_{\kappa-1}^{\kappa-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ r_0, & r_1, & \ldots, & r^{\kappa-1} \\ r_0^2, & r_1^2, & \ldots, & r_{\kappa-1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_0^{\kappa-1}, & r_1^{\kappa-1}, & \ldots, & r_{\kappa-1}^{\kappa-1} \end{vmatrix}}. \tag{9}$$

Очевидно

$$\begin{gathered} \Big[g(x,\xi)\Big]_{\xi=x}=0 \\ \left[\frac{\partial g(x,\xi)}{\partial x}\right]_{\xi=x}=0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \left[\frac{\partial^{\kappa-2} g(x.\,\xi)}{\partial x^{\kappa-2}}\right]_{\xi=x}=0 \\ \left[\frac{\partial^{\kappa-1} g(x,\xi)}{\partial x^{\kappa-1}}\right]_{\xi=x}=-1 \end{gathered} \tag{10}$$

Із (8) маємо:

$$v_x(\xi)=g(x,\xi)\cdot F(\xi)$$

$$z(x)=\int_a^x y_x(\xi)d\xi+D_0e^{r_0x}+D_1e^{r_1x}+\ldots+D_{\kappa-1}e^{r_{\kappa-1}x}$$

$$z(x)=\int_a^x g(x,\xi)F(\xi)d\xi+D_0e^{r_0x}+D_1e^{r_1x}+\ldots+D_{k-1}e^{r_{k-1}x} \tag{11}$$

де

$$D_0, D_1, \ldots, D_{k-1} \tag{12}$$

є сталі числа. Їх треба дібрати згідно з умовами (2), отже з рівнань:

$$\begin{gathered} \sum_{i=0}^{k-1} D_i\left(\alpha_0^{(0)}e^{r_ia}+\ldots+\alpha_0^{(k-1)}r_i^{k-1}e^{r_ia}+\beta_0^{(0)}e^{r_ib}+\ldots+\beta_0^{(k-1)}r_i^{k-1}e^{r_ib}\right)= \\ =\int_a^b g_0(x,\xi)F(\xi)d\xi \\ \sum_{i=0}^{k-1} D_i\left(\alpha_1^{(0)}e^{r_ia}+\ldots+\alpha_1^{(k-1)}r_i^{k-1}e^{r_ia}+\beta_1^{(0)}e^{r_ib}+\ldots+\beta_1^{(k-1)}r_i^{k-1}e^{r_ib}\right)= \\ =\int_a^b g_1(x,\xi)F(\xi)d\xi \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{13}$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} D_i(\alpha_{k-1}^{(0)} e^{r_i a} + \cdots + \alpha_{k-1}^{(k-1)} r_i^{k-1} e^{r_i a} + \beta_{k-1}^{(0)} e^{r_i b} + \cdots + \beta_{k-1}^{(k-1)} r_i^{k-1} e^{r_i b}) =$$

$$= \int_a^b g_{k-1}(x,\xi) F(\xi) d\xi$$

де

$$g_j(x,\xi) = -\sum_{i=0}^{k-1} \beta_j^{(i)} \frac{\partial^i g(x,\xi)}{\partial x^i} \qquad (j = 0, 1, \ldots, k-1) \tag{14}$$

Визначник системи лінійних рівнань (13) щодо невідомих (12) є добуток із матиць:

$$\{u\} = \begin{pmatrix} \alpha_0^{(0)}, \alpha_0^{(1)}, \ldots, \alpha_0^{(k-1)}, \beta_0^{(0)}, \beta_0^{(1)}, \ldots, \beta_0^{(k-1)} \\ \alpha_1^{(0)}, \alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_1^{(k-1)}, \beta_1^{(0)}, \beta_1^{(1)}, \ldots, \beta_1^{(k-1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{k-1}^{(0)}, \alpha_{k-1}^{(1)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(k-1)}, \beta_{k-1}^{(0)}, \beta_{k-1}^{(1)}, \ldots, \beta_{k-1}^{(k-1)} \end{pmatrix} \tag{15}$$

та

$$\{v\} = \begin{pmatrix} e^{r_0 a}, r_0 e^{r_0 a}, \ldots, r_0^{k-1} e^{r_0 a}, e^{r_0 b}, r_0 e^{r_0 b}, \ldots, r_0^{k-1} e^{r_0 b} \\ e^{r_1 a}, r_1 e^{r_1 a}, \ldots, r_1^{k-1} e^{r_1 a}, e^{r_1 b}, r_1 e^{r_1 b}, \ldots, r_1^{k-1} e^{r_1 b} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e^{r_{k-1} a}, r_{k-1} e^{r_{k-1} a}, \ldots, r_{k-1}^{k-1} e^{r_{k-1} a}, e^{r_{k-1} b}, \ldots r_{k-1}^{k-1} e^{r_{k-1} b} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

що перша з них має очевидно ранґ k. Ранґ матиці (16) за неозначених

$$r_0, r_1, \ldots, r_{k-1} \qquad ($$

є теж k; але можна в цьому випадку твердити більше: визначники k-го ступеня матиці (16) є всі не нулі і лінійно незалежні.

Справді, коли б хоч один із них був тотожний нуль, то це доводило б, що існує лінійна залежність між деякими елементами якогось рядка матиці (16), чого, очевидно, зважаючи на неозначеність чисел (17), немає. Коли б, далі, між згаданими визначниками k-го ступеня була лінійна залежність, то, зважаючи на лінійну незалежність елементів кожного рядка матиці (16), мала б бути лінійна залежність між визначниками з $k-1$ якихось рядків цієї матиці; продовживши це міркування, дійдемо неможливого висновку, що є лінійна залежність між елементами якогось рядка матиці (16).

Так бачимо, що за неозначених чисел (17) визначник системи рівнань (13) є не нуль, як лінійна комбінація з визначників k-го ступеня матиці (16). Отже доходимо висновку, що задача (1)—(2) має одну і тільки одну розв'язку. Зважаючи на (11), (13) та (15), (16), цю розв'язку можна записати так:

$$z(x) = \int_a^x g(x,\xi) F(\xi) d\xi + \int_a^b j(x,\xi) F(\xi) d\xi, \tag{18}$$

де функція

$$j(x,\xi)=\left|\begin{array}{c:c} \{u\}\cdot\{v\} & \begin{matrix}\int_a^b g_0\ (x,\xi)F(\xi)d\xi\\ \vdots\\ \int_a^b g_{k-1}(x,\xi)F(\xi)d\xi\end{matrix} \\ \hdashline e^{r_0 x},\ \dots\ ,e^{r_{k-1}x} & 0 \end{array}\right|$$

та всі її похідні є суцільні на інтервалі $(a,\ b)$.

Запровадивши тепер зазначення

$$\begin{aligned} G(x,\ \xi)&=g(x,\ \xi)+j(x,\ \xi) && (\xi\leqslant x)\\ G(x,\ \xi)&=g(x,\ \xi) && (\xi>x), \end{aligned}\tag{19}$$

маємо:

$$z(x)=\int_a^b G(x,\ \xi)F(\xi)d\xi\tag{20}$$

скрізь на інтервалі $(a,\ b)$ та на його кінцях. Функцію (19) звемо Green-овою функцією задачі (1) — (2).

§ 2. Властивості Green-ової функції

Згадавши рівності (10), можемо твердити, що функції

$$G(x,\ \xi),\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x},\ \dots\ ,\frac{\partial^{k-2}G(x,\xi)}{\partial x^{k-2}}$$

є суцільні функції змінних x та ξ; щодо похідної

$$\frac{\partial^{k-1}G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}},$$

то в точці

$$\xi=x$$

вона має скінчену перерву.

Легко показати також, що функція $G(x,\xi)$, як функція від x, справджує всі ті умови (2), що й функція z. Справді, з (20) дістаємо рівності:

$$\begin{aligned} z(x)&=\int_a^b G\cdot F(\xi)d\xi\\ z'(x)&=\int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}\cdot F(\xi)d\xi\\ &\dots\dots\dots\dots\\ z^{(k-1)}(x)&=\int_a^b \frac{\partial^{k-1}G}{\partial x^{k-1}}\cdot F(\xi)d\xi, \end{aligned}\tag{21}$$

звідки:

$$\alpha_i^{(0)}z(a)+\dots+\alpha_i^{(k-1)}z(a)^{(k-1)}+\beta_i^{(0)}z(b)+\dots+\beta_i^{(k-1)}z(b)^{(k-1)}=$$

$$=\int\limits_a^b\left\{\alpha_i^{(0)}G(x,\xi)+\cdots+\alpha_i^{(\kappa-1)}\frac{\partial^{(\kappa-1)}G(x,\xi)}{\partial x^{\kappa-1}}+\beta_i^{(0)}G(b,\xi)+\cdots+\right.$$

$$\left.+\beta_i^{(\kappa-1)}\frac{\partial^{\kappa-1}G(b,\xi)}{\partial b^{\kappa-1}}\right\}F(\xi)d\xi. \qquad (22)$$

А що, як ми бачили, функція $G(x,\xi)$ не залежить від $F(x)$, то покладімо:

$$F(\xi)=\alpha_i^{(0)}G(a,\xi)+\cdots+\alpha_i^{(k-1}\frac{\partial^{k-1}G(a,\xi)}{\partial a^{k-1}}+$$

$$+\beta_i^{(0)}G(b,\xi)+\cdots+\beta_i^{(k-1)}\frac{\partial^{k-1}G(b,\xi)}{\partial b^{k-1}}$$

Тоді з (22) дістанемо:

$$\int\limits_a^b\left\{\alpha_i^{(0)}G(a,\xi)+\cdots+\alpha_i^{(k-1)}\frac{\partial^{k-1}G(a,\xi)}{\partial a^{k-1}}+\beta_i^{(0)}G(b,\xi)+\cdots+\right.$$

$$\left.+\beta_i^{(k-1)}\frac{\partial^{k-1}G(b,\xi)}{\partial b^{k-1}}\right\}^2 d\xi=0$$

Коли взяти під увагу, що підінтеґральна функція є суцільна на інтервалі $(a,b,)$ то з цього виникає:

$$\alpha_i^{(0)}G(a,\xi)+\cdots+\alpha_i^{(k-1)}\frac{\partial^{k-1}G(a,\xi)}{\partial a^{k-1}}+\beta_i^{(0)}G(b,\xi)+\cdots+$$

$$+\beta_i^{(k-1)}\frac{\partial^{k-1}G(b,\xi)}{\partial b^{k-1}}=0$$

$$(i=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1),$$

що й треба було довести.

Нарешті покажімо, що функція $G x,\xi)$, як функція змінного x, справджує рівнання:

$$M_x[G(x,\xi)]=0 \qquad (23)$$

скрізь на інтервалі (a,b), крім точки

$$x=\xi$$

Переписавши останню рівність (21) так:

$$z^{(k-1)}(x)=\int\limits_a^x\frac{\partial^{k-1}G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}}\cdot F(\xi)\,d\xi+\int\limits_x^b\frac{\partial^{k-1}G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}}\cdot F(\xi)\,\partial\xi)$$

і продиференціювавши по x, дістанемо:

$$z^{(k)}(x)=\left[\frac{\partial^{k-1}G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}}F(\xi)\right]_{\xi=x-0}-\left[\frac{\partial^{k-1}G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}}F(\xi)\right]_{\xi=x+0}+$$

$$+\int\limits_a^x\frac{\partial^k G(x,\xi)}{\partial x^k}F(\xi)\,d\xi+\int\limits_x^b\frac{\partial^k G(x,\xi)}{\partial x^k}F(\xi)\,d\xi$$

або остаточно

$$z^{(k)}(x)=\int_a^b \frac{\partial^k G(x,\xi)}{\partial x^k} F(\xi)\, d\xi + F(x) \tag{24}$$

Комбінуючи тепер рівності (21) та (24), легко дістанемо, використавши (1):

$$\int_a^b M_x[G(x,\xi)]\, F(\xi)\, d\xi = 0,$$

звідки, зважаючи на те, що функції $F(\xi)$ довільні, випливає рівність (23) скрізь, де $M_x[G(x,\xi)]$ є суцільна функція від ξ, а це й треба було довести.

Далі ми потребуватимемо оцього висліду з поданих тут міркувань: Хоч би які були сучинники $\alpha_i^{(j)}$, $\beta_i^{(j)}$ лінійно незалежних рівностей (2), завжди можна дібрати такі сталі сучинники B_i рівняння (1), що задача (1)—(2) на інтервалі (a, b) матиме одну і тільки одну розв'язку.

І цю розв'язку, і Green-ову функцію задачі (1)—(2) можна збудувати в скінченому вигляді через покажчикові функції.

§ 3. Частинні та особливі випадки

Найпростіший випадок серед задач типу (1)—(2) є задача Cauchy, коли в умовах (2) всі сучинники $\beta_i^{(j)}$ є нулі, а самі умови зводяться очевидно на такі:

$$z(a)=z'(a)=\cdots=z^{(k-1)}(a)=0$$

Тоді, як бачимо з (13) та (14), буде й

$$D_0=D_1=\cdots=D_{k-1}=0$$
$$j(x,\xi)=0$$

Цікаво, що тоді можна взяти

$$B_1=B_2=\cdots=B_k=0 \tag{25}$$

не вважаючи на те що таким робом усі корені характеристичного рівняння (3) стають рівні

$$r_0=r_1=\cdots=r_{k-1}=0$$

і формула (9) стає непридатна. Але тоді, заступивши (4) через

$$z=C_0(x)+C_1(x)\cdot x+\cdots+C_{k-1}(x)\cdot x^{k-1}, \tag{4'}$$

вираз (6) через

$$y_x(\xi)=C_0'(\xi)+C_1'(\xi)\,x+\cdots+C_{k-1}'(\xi)\,x^{k-1}, \tag{6'}$$

визначимо функції (5) з умов:

$$C_0'(\xi)+C_1'(\xi)\,\xi+\cdots+C_{k-1}'(\xi)\,\xi^{k-1}=0$$
$$C_1'(\xi)\quad\cdots+(k-1)+C_{k-1}'(\xi)\,\xi^{k-2}=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(k-1)!\,C_{k-1}'(\xi)=0$$

і дістанемо:

$$y_x(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} 1, & x, & x^2, & \ldots, & x^{k-1} \\ 1, & \xi, & \xi^2, & \ldots, & \xi^{k-1} \\ 0, & 1, & 2\xi, & \ldots, & (k-1)\,\xi^{k-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & (k-1)\,!\,\xi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1, & \xi, & \xi^2, & \ldots, & \xi^{k-1} \\ 0, & 1, & 2\xi, & \ldots, & (k-1)\,\xi^{k-2} \\ 0, & 0, & 2, & \ldots, & (k-1)^{(k-2)}\,\xi^{k-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & (k-1\,! \end{vmatrix}} \cdot -1)^k F(\xi) = \tag{8'}$$

$$= -\frac{(x-\xi)^{k-1}}{k-1\,!} F(\xi)$$

Отже в цьому випадку

$$G(x,\xi) = g(x,\xi) = (-1)_k \frac{(\xi - x)^{k-1}}{(k-1)\,!} \cdot \quad (\xi \leqslant x) \tag{26}$$

$$G(x,\xi) = 0 \qquad\qquad \cdot \quad (\xi > x)$$

Цікаво, що зручного добору (25) рівнання (1) вистачає не тільки в розібраному простому прикладі, а майже за всяких умов типу (2). Справді бо все питання зводиться очевидно до можливости або неможливости визначити сучинники D_i виразу

$$z(x) = \int_a^x g(x,\xi) F(\xi)\, d\xi + D_0 + D_1 x + \cdots + D_{k-1} x^{k-1} \tag{11'}$$

з умов (2). Отож приходимо, замість системи (13), до системи:

$$D_0(\alpha_0^{(0)} + \beta_0^{(0)}) + D_1(\alpha_0^{(0)}\alpha + \beta_0^{(0)} b + \alpha_0^{(1)} + \beta_0^{(1)}) + \cdots + D_{\kappa-1}(\alpha_0^{(0)}\alpha^{\kappa-1} + \beta_0^{(0)}\beta^{\kappa-1} +$$
$$+ \cdots + \alpha_0^{(\kappa-1)}(\kappa-1)! + \beta_0^{(\kappa-1)}(\kappa-1)!) = \ldots$$

$$D_0(\alpha_1^{(0)} + \beta_1^{(0)}) + D^1(\alpha_1^{(0)} a + \beta_1^{(0)} b + \alpha_1^{(1)} + \beta_1^{(1)}) + \cdots + D_\kappa(\alpha_1^{(0)} a^{\kappa-1} + \beta_1^{(0)} b^{\kappa-1} +$$
$$+ \cdots + \alpha_1^{(\kappa-1)}(\kappa-1)! + \beta_1^{(\kappa-1)}(\kappa-1)!) = \ldots \tag{13'}$$

. . . .

$$D_0(\alpha_{\kappa-1}^{(0)} + \beta_{\kappa-1}^{(0)}) + D_1(\alpha_{\kappa-1}^{(0)} a + \beta_{\kappa-1}^{(0)} b + \alpha_{\kappa-1}^{(1)} + \beta_{\kappa-1}^{(1)}) + \cdots D_\kappa(\alpha_{\kappa-1}^{(0)} a^{\kappa-1} +$$
$$+ \beta_{\kappa-1}^{(0)} b^{\kappa-1} + \cdots + \alpha_{\kappa-1}^{(\kappa-1)}(\kappa-1)! + \beta_{\kappa-1}^{(\kappa-1)}(\kappa-1)!) = \ldots$$

Тимчасом її визначник тільки в виняткових випадках може бути нуль.

Нехай вираз $M_x[z]$ є самоспряжений, отже з самими похідними паристого порядку. Тоді розгляньмо задачу:

$$M_x[z] = \lambda z \tag{1'}$$

за умов (2) з неозначеним параметром λ. Коли умови (2) не суперечать рівнанню (1′), отже коли існує Green-ова функція $G(x, \xi)$, то з (1′) дістаємо:

$$z(x) = \lambda \int_a^b G(x,\xi)\, z(\xi)\, d\xi,$$

однорідне інтеґральне рівнання Fredholm-ового типу, рівноважне з рівнанням (1') за умов (2). Відомо, що воно має безліч характеристичних вартостей параметра:

$$\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots,$$

бо функція $G(x, \xi)$ є симетрична. Кожному λ_i відповідає щонайменше одна фундаментальна функція — розв'язка інтеґрального рівнання:

$$z(x) = \lambda_i \int_a^b G(x, \xi) z(\xi) d\xi$$

або задачі

$$M_x[z] = \lambda_i z$$

за умов (2).

§ 4. Узагальнення

Коли поставити задачу параграфу 1 добору сучинників B_i так, щоб інтеґрал рівнання (1) справдив умови (2), загально, то не треба конче вимагати, щоб сучинники B_i були сталі; вони можуть бути функціями від x. Справді бо маємо взагалі

$$z(x) = C_0(x) z_0(x) + C_1(x) z_1(x) + \ldots + C_{k-1}(x) z_{k-1}(x),$$

де

$$z_0, z_1, \ldots, z_{k-1}$$

є лінійно незалежні інтеґрали рівнання (2), а функції

$$C_0(x), C_1(x), \ldots, C_{k-1}(x)$$

справджують умови:

$$\begin{aligned}
&C_0'(\xi) z_0(\xi) + C_1'(\xi) z_1(\xi) + \ldots + C_{k-1}'(\xi) z_{k-1}(\xi) = 0 \\
&C_0'(\xi) z_0'(\xi) + C_1'(\xi) z_1'(\xi) + \ldots + C_{k-1}'(\xi) z_{k-1}'(\xi) = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&C_0'(\xi) z_0^{(k-1)}(\xi) + C_1'(\xi) z_1^{(k-1)}(\xi) + \ldots + C_{k-1}'(\xi) z_{k-1}^{(k-1)}(\xi) = 0
\end{aligned}$$

Отже вираз

$$y_x(\xi) = C_0'(\xi) z_0(x) + C_1'(\xi) z_1(x) + \ldots + C_{k-1}'(\xi) z_{k-1}(x)$$

виглядає так:

$$y_x(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} z_0(x), & z_1(x), & \ldots, & z_{k-1}(x) \\ z_0(\xi), & z_1(\xi), & \ldots, & z_{k-1}(\xi) \\ z_0'(\xi), & z_1'(\xi), & \ldots, & z_{k-1}'(\xi) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_0^{(k-2)}(\xi), & z_1^{(k-2)}(\xi), & \ldots, & z_{k-1}^{(k-2)}(\xi) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_0(\xi), & z_1(\xi), & \ldots, & z_{k-1}(\xi) \\ z_0'(\xi), & z_1'(\xi), & \ldots, & z_{k-1}'(\xi) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_0^{(k-1)}(\xi), & z_1^{(k-1)}(\xi), & \ldots, & z_{k-1}^{(k-1)}(\xi) \end{vmatrix}} \cdot (-1)^k F(\xi)$$

Тут функція

$$g(x,\xi) = (-1)^k \cdot \frac{\begin{vmatrix} z_0(x), & z_1(x), & \dots, & z_{k-1}(x) \\ z_0(\xi), & z_1(\xi), & \dots, & z_{k-1}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_0^{(k-2)}(\xi), & z_1^{(k-2)}(\xi), & \dots, & z_{k-1}^{(k-2)}(\xi) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_0(\xi), & z_1(\xi), & \dots, & z_{k-1}(\xi) \\ z_0'(\xi), & z_1'(\xi), & \dots, & z_{k-1}'(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_0^{(k-1)}(\xi), & z_1^{(k-1)}(\xi), & \dots, & z_{k-1}^{(k-1)}(\xi) \end{vmatrix}}$$

має властивості (10).

Як відомо, знаменника цього дробу можна замінити, напр., виразом

$$\begin{vmatrix} z_0(\xi_0), & z_1(\xi_0), & \dots, & z_{k-1}(\xi_0) \\ z_0'(\xi_0), & z_1'(\xi_0), & \dots, & z_{k-1}'(\xi_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_0^{(k-1)}(\xi_0), & z_1^{(k-1)}(\xi_0), & \dots, & z_{k-1}^{(k-1)}(\xi_0) \end{vmatrix} \cdot e^{-\int\limits_{\xi_0}^{\xi} \beta_1(\xi)\,d\xi},$$

де ξ_0 є довільне число в межах (a, b).

Далі очевидно:

$$z(x) = \int\limits_a^x g(x, \xi) F(\xi) d\xi + D_0 z_0(x) + D_1 z_1(x) + \dots + D_{k-1} z_{k-1}(x),$$

де сталі числа

$$D_0, D_1, \dots, D_{k-1} \tag{12'}$$

треба визначити з умов (2). Коли визначник цієї системи рівнань щодо невідомих (12') є не нуль, то матимемо остаточний вислід (20) з тими самими властивостями функції $G(x, \xi)$, що й у параграфах 1 та 2.

Далі скрізь задачу (1)—(2) вважатимемо за розв'язану, отже її Green-ову функцію — за відому.

§ 5. Існування розв'язки загального лінійного диференціяльного рівнання за довільних лінійних однорідних граничних умов

Візьмімо довільне лінійне диференціяльне рівнання k-го порядку. Його завжди можна подати в формі:

$$L_x[y] = M_x[y] - \lambda N_x[y] = f(x), \tag{28}$$

де λ є числовий чинник, а $N_x[y]$ має вигляд:

$$N_x[y] = a_1(x)\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}} + a_2(x)\frac{d^{k-2}y}{dx^{k-2}} + \dots + a_k(x)y \tag{29}$$

Лишивши число λ неозначеним і вимагаючи, щоб функції

$$a_1(x), a_2(x), \dots, a_k(x)$$

інтеґрувалися на інтервалі (a, b) разом з своїми квадратами, доведімо наступне твердження:

Задача

$$L_x[y] = f(x) \tag{30}$$

$$\alpha_i^{(0)} y(a) + \alpha_i^{(1)} y'(a) + \cdots + \alpha_i^{(k-1)} y^{(k-1)}(a) +$$
$$+ \beta_i^{(0)} y(b) + \beta_i^{(1)} y'(b) + \cdots + \beta_i^{(k-1)} y^{(k-1)}(b) = 0 \tag{31}$$
$$(i = 0, 1, \ldots, k-1)$$

має на інтервалі (a,b) одну і тільки одну розв'язку для всіх вартостей параметра λ, крім деяких ізольованих.

Справді, розгляньмо систему лінійних інтеґральних рівнань

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x,\xi) \cdot N_\xi[y] d\xi + \int_a^b G(x,\xi) f(\xi) d\xi$$

$$y'(x) = \lambda \int_a^b \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} \cdot N_\xi[y] d\xi + \int_a^b \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} f(\xi) d\xi \tag{32}$$

. . . .

$$y^{(k-1)}(x) = \lambda \int_a^b \frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}} \cdot N_\xi[y] d\xi + \int_a^b \frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}} f(\xi) d\xi,$$

що є вислід із (30) — (31) та з (21).

Як відомо, ця система має на інтервалі (a, b) якраз одну розв'язку для всякої неособливої вартости параметра λ, при чім очевидно невідомі функції

$$y'(x), y''(x), \ldots, y^{(k-1)}(x)$$

якраз є перша, друга, . . , $k-1$-а похідні від невідомої функції $y(x)$. Утворивши, далі, з (32) лінійну комбінацію:

$$\alpha_i^{(0)} y(a) + \cdots + \alpha_i^{(k-1)} y^{(k-1)}(a) + \beta_i^{(0)} y(b) + \cdots + \beta^{(k-1)} y^{(k-1)}(b) =$$

$$= \int_a^b \left\{ \alpha_i^{(0)} G(a,\xi) + \cdots + \alpha_i^{(k-1)} \frac{\partial^{(k-1)} G(a,\xi)}{\partial a^{k-1}} + \beta_i^{(0)} G(b,\xi) + \cdots + \right.$$

$$\left. + \beta_i^{(k-1)} \frac{\partial^{k-1} G(b,\xi)}{\partial b^{k-1}} \right\} \left\{ \lambda N_\xi[y] + f(\xi) \right\} d\xi$$

і нагадавши, що Green-ова функція справджує умови (2), дістанемо залежності (31).

Нарешті, перепишімо останню рівність (32) так:

$$\overset{(k-1)}{y}(x) = \int_a^x \frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}} \left\{ \lambda N_\xi[y] + f(\xi) \right\} d\xi + \int_x^b \frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}} \left\{ \lambda N_\xi[y] + f(\xi) \right\} d\xi$$

та продиференціюймо її в довільній точці x інтервалу (a, b), де функції $a_i(x)$ — суцільні; дістанемо:

$$y^{(k)}(x) = \left\{ \left[\frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}} \right]_{\xi=x-0} - \left[\frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}} \right]_{\xi=x+0} \right\} \left\{ \lambda N_x[y] + f(x) \right\} +$$

$$+ \int_a^b \frac{\partial^k G(x,\xi)}{\partial x^k} \left\{ \lambda N_\xi[y] + f(\xi) \right\} d\xi$$

Комбінуючи цю рівність із рівностями (32) та нагадуючи, що

$$\left[\frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}} \right]_{\xi=x-0} - \left[\frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}} \right]_{\xi=x+0} = 1,$$

дістанемо легко:

$$M_x[y] = \lambda N_x[y] + f(x),$$

тобто (30).

Отож розв'язка $y(x)$ системи рівнань (32) є заразом розв'язка задачі (30)—(31) в усіх точках інтервалу (a, b), де сучинники $a_i(x)$ — суцільні. Другої, істотно відмінної розв'язки у нашої задачі не може бути, бо тоді різниця цих двох розв'язок

$$\mathfrak{z} = y - y_1$$

мусіла б справджувати систему інтеґральних рівнань:

$$\mathfrak{z}(x) = \lambda \int_a^b G(x,\xi) N_\xi[\mathfrak{z}] d\xi$$

$$\mathfrak{z}'(x) = \lambda \int_a^b \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} N_\xi[\mathfrak{z}] d\xi \ .$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathfrak{z}^{(k-1)}(x) = \lambda \int_a^b \frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}} N_\xi[\mathfrak{z}] d\xi$$

звідки ми вивели б:

$$N_x[\mathfrak{z}] = \lambda \int_a^b N_x[G(x,\xi)] N_\xi[\mathfrak{z}] d\xi,$$

отже

$$N_x[\mathfrak{z}] = 0,$$

а тоді й

$$M_x[\mathfrak{z}(x)] = 0$$

і

$$\mathfrak{z}(x) = 0$$

§ 6. Існування Green-ової функції у загальної лінійної задачі

Лінійною комбінацією з рівностей (32) здобудемо:

$$N_x[y] = \lambda \int_a^b N_x[G(x,\xi)] N_\xi[y] d\xi + \int_a^b N_x[G(x,\xi)] f(\xi) d\xi \qquad (32_a)$$

Пошукаймо невідоме $N_x[y]$ цього інтеґрального рівнання у вигляді:

$$N_x[y] = \int_a^b \Gamma_1(x, \eta; \lambda) f(\eta) d\eta, \tag{32$_b$}$$

де функція $\Gamma_1(x, \eta; \lambda)$, так зване розв'язне ядро рівнання (32_a), є тимчасом невідома. Запровадивши вираз (32_a) до рівнання (32_b), дістанемо:

$$\int_a^b \left\{ \Gamma_1(x, \eta; \lambda) - \lambda \int_a^b N_x[G(x, \xi)] \Gamma_1(\xi, \eta; \lambda) d\xi - N_x[G(x, \eta)] \right\} f(\eta) d\eta = 0;$$

отже, зважаючи на те, що $\Gamma_1(x, \eta; \lambda)$ не залежить від функції $f(\eta)$, розв'язне ядро $\Gamma_1(x, \eta; \lambda)$ повинно справджувати інтеґральне рівнання:

$$\Gamma_1(x, \eta; \lambda) = \lambda \int_a^b N_x[G(x, \xi)] \Gamma_1(\xi, \eta; \lambda) d\xi + N_x[G(x, \eta)],$$

чим воно і визначається.

Запровадивши тепер вираз (32_b) до рівностей (32), дістанемо:

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) \int_a^b \Gamma_1(\xi, \eta; \lambda) f(\eta) d\eta \, d\xi + \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

$$y'(x) = \lambda \int_a^b \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \int_a^b \Gamma_1(\xi, \eta; \lambda) f(\eta) d\eta \, d\xi + \int_a^b \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} f(\xi) d\xi$$

. . . .

$$y^{(k-1)}(x) = \lambda \int_a^b \frac{\partial^{k-1} G(x, \xi)}{\partial x^{k-1}} \int_a^b \Gamma_1(\xi, \eta; \lambda) f(\eta) d\eta \, d\xi + \int_a^b \frac{\partial^{k-1} G(x, \xi)}{\partial x^{k-1}} f(\xi) d\xi$$

або

$$y(x) = \int_a^b \left\{ \lambda \int_a^b G(x, \xi) \Gamma_1(\xi, \eta; \lambda) d\xi + G(x, \eta) \right\} f(\eta) d\eta$$

$$y'(x) = \int_a^b \left\{ \lambda \int_a^b \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \Gamma_1(\xi, \eta; \lambda) d\xi + \frac{\partial G(x, \eta)}{\partial x} \right\} f(\eta) d\eta \tag{32$_c$}$$

. . . .

$$y^{(k-1)}(x) = \int_a^b \left\{ \lambda \int_a^b \frac{\partial^{k-1} G(x, \xi)}{\partial x^{k-1}} \Gamma_1(\xi, \eta; \lambda) d\xi + \frac{\partial^{k-1} G(x, \eta)}{\partial x^{k-1}} \right\} f(\eta) d\eta$$

Отож функція

$$\Gamma(x, \eta; \lambda) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) \Gamma_1(\xi, \eta; \lambda) d\xi + G(x, \eta) \tag{32$_d$}$$

відограє для задачі (30) — (31) ту саму ролю, що функція $G(x, \xi)$ для задачі (1) — (2). Справді, насамперед, як бачимо з рівностей (32_c), буде:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \int_a^b \Gamma(x, \eta; \lambda) f(\eta)\, d\eta \\
y'(x) &= \int_a^b \frac{\partial \Gamma(x, \eta; \lambda)}{\partial x} f(\eta)\, d\eta \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
y^{(k-1)}(x) &= \int_a^b \frac{\partial^{k-1} \Gamma(x, \eta; \lambda)}{\partial x^{k-1}} f(\eta)\, d\eta
\end{aligned}
\tag{32_e}
$$

Утворивши з цих рівностей лінійну комбінацію:

$$
\alpha_i^{(0)} y(a) + \cdots + \alpha_i^{(k-1)} y_{(a)}^{(k-1)} + \beta_i^{(0)} y(b) + \cdots + \beta_i^{(k-1)} y_{(b)}^{(k-1)} =
$$

$$
= \int_a^b \left\{ \alpha_i^{(0)} \Gamma(a, \eta; \lambda) + \cdots + \alpha_i^{(k-1)} \frac{\partial^{k-1} \Gamma(a, \eta; \lambda)}{\partial a^{k-1}} + \beta_i^{(0)} \Gamma(b, \eta; \lambda) + \cdots + \right.
$$

$$
\left. + \beta_i^{(k-1)} \frac{\partial^{k-1} \Gamma(b, \eta; \lambda)}{\partial b^{k-1}} \right\} f(\eta)\, d\eta
$$

і взявши під увагу, що функція $f(\eta)$ довільна, бачимо, що $\Gamma(x, \eta; \lambda)$, як функція від x, справджує граничні умови (31). Той самий вислід випливає й з (32_d).

Із рівности (32_d) бачимо, що функції

$$
\Gamma, \frac{\partial \Gamma}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{k-2} \Gamma}{\partial x^{k-2}}
$$

є суцільні, а функція

$$
\frac{\partial^{k-1} \Gamma(x, \eta; \lambda)}{\partial x^{k-1}}
$$

має одну перерву — в точці

$$
x = \eta,
$$

і ця перерва є скок на 1, як і у функції $\frac{\partial^{k-1} G(x, \eta)}{\partial x^{k-1}}$.

Диференціюючи тоді останню рівність (32_e), дістанемо

$$
y^{(k)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^k \Gamma(x, \eta; \lambda)}{\partial x^k} f(\eta)\, d\eta + f(x)
$$

Звідси та з (32_e), через лінійну комбінацію, доходимо рівности:

$$
\int_a^b L_x[\Gamma(x, \eta; \lambda)]\, f(\eta)\, d\eta = 0
$$

і остаточно:

$$
L_x[\Gamma(x, \eta; \lambda)] = 0 \qquad (x \neq \eta)
$$

Отже функція Γ, як функція від x, справджує однорідне рівнання

$$
L_x[\quad] = 0
$$

Отож ми довели існування Green-ової функції Γ у задачі (30) — (31), так само, як давніше існування Green-ової функції G у задачі (1) — (2), для всіх вартостей параметра λ, крім хіба деяких самотних.

§ 7. Повна система многочленів, що справджують певні лінійні умови на кінцях даного інтервалу

Для наближеного розв'язання задачі (30) — (31) ми далі потребуватимемо систем функцій

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots$$

можливо простої будови, що справджують граничні умови (2). В цьому параграфі ми збудуємо функції $\varphi_i(x)$ у формі многочленів.

Ясно, що всякий многочлен від x можна подати в формі суми:

$$\phi(x) = \varkappa(x) + \theta(x)(x-a)^k(x-b)^k,$$

де $\varkappa(x)$ та $\theta(x)$ є теж многочлени, при чім ступінь першого з них не більший за $2k-1$. А що добуток $\theta(x)(x-a)^k(x-b)^k$ очевидно справджує всі умови (2), уся сума справджуватиме їх тоді і тільки тоді, коли згідно з ними дібрати сучинники многочлена $\varkappa(x)$:

$$\varkappa(x) = \varkappa_0 + \varkappa_1 x + \ldots + \varkappa_{2k-1} x^{2k-1}$$

Цей добір лишить у сучинниках многочлена $\varkappa(x)$ якраз k неозначених параметрів.

Щоб у цьому пересвідчитися, завважмо, що матиця

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \alpha_0^{(0)}, & \ldots, & \alpha_0^{(k-1)}, & \beta_0^{(0)}, & \ldots, & \beta_0^{(k-1)} \\ \alpha_1^{(0)}, & \ldots, & \alpha_1^{(k-1)}, & \beta_1^{(0)}, & \ldots, & \beta_1^{(k-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{k-1}^{(0)}, & \ldots, & \alpha_{k-1}^{(k-1)}, & \beta_{k-1}^{(0)}, & \ldots, & \beta_{k-1}^{(k-1)} \end{pmatrix} \qquad (32_f)$$

з сучинників рівностей (31) має ранг k.

Із другого боку на сучинники $\varkappa_i$ многочлена $\varkappa(x)$, що справджує умови (31), накладено, очевидно, такі умови:

$$\varkappa_0(\alpha_i^{(0)} + \beta_i^{(0)}) + \varkappa_1(a\alpha_i^{(0)} + b\beta_i^{(0)} + \alpha_i^{(1)}) + \varkappa_2(a^2\alpha_i^{(0)} + b^2\beta_i^{(0)} + 2a\alpha_i^{(1)} + 2b\beta_i^{(1)} + 2\alpha^{(2)} +$$
$$+ 2\beta_i^{(2)}) + \ldots + \varkappa^{2p-2}(a^{2k-1}\alpha_i^{(0)} + b^{2k-1}\beta_i^{(0)} + (2k-1)a^{2k-2}\alpha_i^{(1)} + (2k-1)b^{2k-2}\beta^{(1)} +$$
$$+ \ldots + \frac{(2k-1)!}{k!} a^k \alpha^{(k-1)} + \frac{(2k-1)!}{k!} b^k \beta_i^{(k-1)}\Big) = 0$$

$$(i = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Отже ранг цієї системи однорідних лінійних рівнань щодо невідомих

$$\varkappa_0,\ \varkappa_1,\ \ldots,\ \varkappa_{2k-1}$$

є такий, як у матиці:

$$\mathfrak{B}=\left|\begin{array}{l}
\alpha_0^{(0)}+\beta_0^{(0)},\ a\alpha_0^{(0)}+b\beta_0^{(0)}+\alpha_0^{(1)}+\beta_0^{(1)},\ \ldots,\ a^{2k-1}\alpha_0^{(0)}+b^{2k-1}\beta_0^{(0)}+ \\
\qquad +(2k-1)\,a^{2k-2}\alpha_0^{(1)}+(2k-1)\,b^{2k-2}\beta_0^{(1)}+\ldots+ \\
\qquad\qquad +\frac{(2k-1)!}{k!}a^k\alpha_0^{(k-1)}+\frac{(2k-1)!}{k!}b^k\beta_0^{(k-1)} \\
\alpha_1^{(0)}+\beta_1^{(0)},\ a\alpha_1^{(0)}+b\beta_1^{(0)}+\alpha_1^{(1)}+\beta_1^{(1)},\ \ldots,\ a^{2k-1}\alpha_1^{(0)}+b^{2k-1}\beta_1^{(0)}+ \\
\qquad +(2k-1)\,a^{2k-2}\alpha_1^{(1)}+(2k-1)\,b^{2k-2}\beta_1^{(1)}+\ldots+ \\
\qquad\qquad +\frac{(2k-1)!}{k!}a^k\alpha_1^{(k-1)}+\frac{(2k-1)!}{k!}b^k\beta_1^{(k-1)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{k-1}^{(0)}+\beta_{k-1}^{(0)},\ a\alpha_{k-1}^{(0)}+b\beta_{k-1}^{(0)}+\alpha_{k-1}^{(1)}+\beta_{k-1}^{(1)},\ \ldots,\ a^{2k-1}\alpha_{k-1}^{(0)}+ \\
\qquad +b^{2k-1}\beta_{k-1}^{(0)}+(2k-1)\,a^{2k-2}\alpha_{k-1}^{(0)}+(2k-1)\,b^{2k-2}\beta_{k-1}^{(1)}+\ldots+ \\
\qquad\qquad +\frac{(2k-1)!}{k!}a^k\alpha_{k-1}^{(k-1)}+\frac{(2k-1)!}{k!}b^k\beta_{k-1}^{(k-1)}
\end{array}\right| \qquad (32_a)$$

Тим часом очевидно

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{A}\,\mathfrak{C},$$

де матиця

$$\mathfrak{C}=\left|\begin{array}{l|l}
1,\ a,\ \ldots,\ a^{k-1} & a^k,\ a^{k+1},\ \ldots,\ a^{2k-1} \\
0,\ 1,\ \ldots,\ (k-1)\,a^{k-2} & ka^{k-1},\ (k+1)\,a^k,\ \ldots,\ (2k-1)\,a^{2k-1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0,\ 0,\ \ldots,\ (k-1)! & \frac{k!}{1!}a,\ \frac{(k+1)!}{2!}a^2,\ \ldots,\ \frac{(2k-1)!}{k!}a^k \\
\hline
1,\ b,\ \ldots,\ b^{k-1} & b^k,\ b^{k+1},\ \ldots,\ b^{2k-1} \\
0,\ 1,\ \ldots,\ (k-1)\,b^{k-2} & kb^{k-1},\ (k+1)\,b^k,\ \ldots,\ (2k-1)\,b^{2k-2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0,\ 0,\ \ldots,\ (k-1)! & \frac{k!}{1!}b,\ \frac{(k+1)!}{2!}b^2,\ \ldots,\ \frac{(2k-1)!}{k!}b^k
\end{array}\right|$$

має очевидно ранґ $2k$. Отже ранґ матиці $\mathfrak{B}$ є такий самий, як і матиці $\mathfrak{A}$.

Отож остаточно маємо вислід: *усякий многочлен, що справджує умови (2), є лінійна комбінація з лінійно незалежних многочленів:*

$$\varkappa_0(x),\ \varkappa_1(x),\ \varkappa_{k-1}(x),$$
$$(x-a)^k(x-b)^k,\ (x-a)^k(x-b)^k x,\ (x-a)^k(x-b)^k x^2,\ \ldots \qquad (33)$$

де ступені многочленів $\varkappa_i$ всі не більші за $2k-1$.

Нехай якась функція $z(x)$ на інтервалі $(a,\ b)$ диференціюється p разів і p-а її похідна справджує Lipschitz-ову умову α-го ступеня ($\alpha\leqslant 1$). Тоді, зазначивши через

$$\varphi_{-k}(x),\ \varphi_{-k+1}(x),\ \ldots,\ \varphi_{-1}(x),\ \varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots \qquad (34)$$

вовну систему многочленів, тобто систему многочленів, дібрану так, щоб вони були лінійно залежні і вичерпували всі степені змінного x, можемо (34) дібрати так, щоб система

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots$$

була тотожна з системою (33), а ступені многочленів

$$\varphi_{-1}(x),\ \varphi_{-2}(x), \ldots, \varphi_{-k}(x) \tag{35}$$

були всі менші за $2k$.

Як відомо з теорії наближення функцій многочленами, існують рівності:

$$\begin{aligned} z - z_m &= \frac{K_m(x)}{m^{p+\alpha}} \\ z' - z'_m &= \frac{K_{m1}(x)}{m^{p+\alpha-1}} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z^{(k-1)} - z_m^{(k-1)} &= \frac{K_{m,k-1}(x)}{m^{p+\alpha-k+1}} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z^{(p)} - z_m^{(p)} &= \frac{K_{m,p}(x)}{m^{\alpha}}, \end{aligned} \tag{36}$$

де

$$K_m(x),\ K_{m1}(x), \ldots, K_{mp}(x)$$

є обмежені функції від m та x, а

$$z_m = a_{-k}^{(m)}\varphi_{-k} + a_{-k+1}^{(m)}\varphi_{-k+1} + \cdots + a_m^{(m)}\varphi_m \qquad (m \geqslant 2k) \tag{37}$$

з відповідно дібраними сучинниками

$$a_{-k}^{(m)},\ a_{-k+1}^{(m)}, \ldots, a_m^{(m)}$$

Визначивши

$$z,\ z', \ldots, z^{(k-1)}$$

із перших k рівностей (36) та запровадивши до умов (2), дістанемо k лінійних залежностей між сучинниками $a_i^{(m)}$ такого типу:

$$\begin{aligned} \gamma_{00}\,a_{-1}^{(m)} + \gamma_{01}\,a_{-2}^{(m)} + \cdots + \gamma_{0,k-1}\,a_{-k}^{(m)} &= \frac{K_0}{m^{p+\alpha-k+1}} \\ \gamma_{10}\,a_{-1}^{(m)} + \gamma_{11}\,a_{-2}^{(m)} + \cdots + \gamma_{1,k-1}\,a_{-k}^{(m)} &= \frac{K_1}{m^{p+\alpha-k+1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{k-1,0}\,a_{-1}^{(m)} + \gamma_{k-1,1}\,a_{-2}^{(m)} + \cdots + \gamma_{k-1,k-1}\,a_{-k}^{(m)} &= \frac{K_{k-1}}{m^{p+\alpha-k+1}}, \end{aligned} \tag{38}$$

де

$$K_0,\ K_1, \ldots, K_{k-1}$$

є обмежені функції від m, а γ_{ij} — сталі числа, не залежні від m. Із самого утворення системи рівнань (38) щодо невідомих

$$a_{-1}^{(m)},\ a_{-2}^{(m)},\ .\ .\ .\ ,a_{-k}^{(m)} \tag{39}$$

видно, що вона не суперечна. Коли б вона була неозначена, то знайшлися б відмінні від нуля числа

$$b_0,\ b_1,\ .\ .\ .\ ,\ b_{k-1},$$

що справджували б відповідну однорідну систему:

$$\gamma_{00}b_0 + \cdot \cdot \cdot + \gamma_{0,k-1}\, b_{k-1} = 0$$
$$\gamma_{10}b_0 + \cdot \cdot \cdot + \gamma_{1,k-1}\, b_{k-1} = 0$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$\gamma_{k-1,0}b_0 + \cdot \cdot \cdot + \gamma_{k-1,k-1}\, b_{k-1} = 0$$

Отже многочлен

$$b_0\varphi_0 + b_1\varphi_1 + \cdot \cdot \cdot + b_{k-1}\varphi_{k-1}$$

справджував би всі умови (2), що не можливо, бо тоді він був би лінійною комбінацією з

$$\varphi_k,\ \varphi_{k+1},\ \varphi_{k+2},\ .\ .\ .\ ,$$

а тим часом функції (34) — лінійно незалежні. Так бачимо, що

$$\begin{vmatrix} \gamma_{00}, & \gamma_{01}, & .\ .\ .\ , & \gamma_{0,k-1} \\ \gamma_{10}, & \gamma_{11}, & .\ .\ .\ , & \gamma_{1,k-1} \\ . & . & . & . \\ \gamma_{k-1,0}, & \gamma_{k-1,1}, & .\ .\ .\ , & \gamma_{k-1,k-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

отже числа (39) є ступеня мализни щодо $\frac{1}{m}$ не слабшого за

$$p + \alpha + 1 - k \quad > 0$$

А тоді рівності (36) показують, що різниці

$$z - (a_0^{(m)}\varphi_0 + \cdot \cdot \cdot + a_m^{(m)}\varphi^m)$$
$$z' - (a_0^{(m)}\varphi_0 + \cdot \cdot \cdot + a_m^{(m)}\varphi_m')$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$z^{(p)} - (a_0^{(m)}\varphi^{(p)} + \cdot \cdot \cdot + a_m^{(m)}\varphi_m^{(p)})$$

мають усі ступінь мализни не слабший за $p + \alpha + 1 - k$.

Ми називатимемо систему функцій (34) **повною** в тому розумінні, що на інтервалі (a, b) з довільно малою похибкою можна лінійною комбінацією з них представити всяку функцію Z, що k разів суцільно диференціюється і справджує умови (2):

$$Z = \lim_{m=\sim} (a_0^{(m)}\varphi_0 + \cdot \cdot \cdot + a_m^{(m)}\varphi^m), \tag{40}$$

при чім одночасно правдиві й рівності

$$Z' = \lim_{m=\sim} (a_0^{(m)}\varphi_0' + \cdot \cdot \cdot + a_m^{(m)}\varphi_m')$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$Z^{(k)} = \lim_{m=\sim} (a_0^{(m)}\varphi_0^{(k)} + \cdot \cdot \cdot + a_m^{(m)}\varphi_m^{(k)}) \tag{41}$$

§ 8. Зв'язок з теорією замкнености

Часом, заступивши вимогу суцільности попереднього параграфу для похідної $z^{(p)}$ вимогою, щоб похідна $z^{(k)}$ інтеґрувалася разом із своїм квадратом, доведеться заступити останню рівність (41) такою:

$$\lim_{m \to \infty} \int_a^b (z^{(k)} - a_0^{(m)} \varphi_0^{(k)} - \ldots - a_m^{(m)} \varphi_m^{(k)})^2 \, dx = 0 \tag{42}$$

Ось які міркування доводять, що вона правдива. Розгляньмо функцію

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} z \, dx = \frac{Z(x+h) - Z(x)}{h},$$

де

$$Z(x) = \int_a^x z \, dx \tag{43}$$

Вона, очевидно, має k-у похідну:

$$\frac{z^{(k-1)}(x+h) - z^{(k-1)}(x)}{h}$$

суцільну, а різниці

$$Z(x) - z(x), \; Z'(x) - z'(x), \; \ldots, \; Z^{(k-1)}(x) - z^{(k-1)}(x) \tag{44}$$

ідуть до нуля разом із h.

Те саме можна сказати за вираз:

$$\int_a^b (Z^{(k)} - z^{(k)})^2 \, dx, \tag{45}$$

як це видно, коли повторити відомі міркування Стеклова в доводі його теореми замкнености.

Із другого боку, як відомо з теорії наближення функцій многочленами, існує таке наближення

$$Z_m = A_{-k}^{(m)} \varphi_{-k} + A_{-k+1}^{(m)} \varphi_{-k+1} + \ldots + A_m^{(m)} \varphi_m \tag{46}$$

функції Z, що, подібно до рівностей (36), буде:

$$\begin{aligned} Z - Z_m &= \frac{L_m(x)}{h \cdot m^{k+1}} \\ Z' - Z'_m &= \frac{L_{m,1}(x)}{h \cdot m^k} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ Z^{(k)} - Z_m^{(k)} &= \frac{L_{mk}(x)}{h \cdot m} \end{aligned} \tag{47}$$

Із перших k рівностей (47), згадавши величину різниць (44) та (45), виводимо, що сучинники

$$A_{-1}^{(m)}, \; A_{-2}^{(m)}, \; \ldots, \; A_{-k}^{(m)}$$

так само, як сучинники

$$a_{-1}^{(m)}, \; a_{-2}^{(m)}, \; \ldots, \; a_{-k}^{(m)}$$

ідуть до нуля, коли

$$h \to 0, \ \frac{1}{hm} \to 0 \qquad (m \to \sim)$$

Отож виходить, що тоді й

$$\lim_{m=\sim} (Z^{(k)} - A_0^{(m)} \varphi_0^{(k)} - \ldots - A_m^{(m)} \varphi_m^{(k)}) = 0$$

Зіставляючи цю рівність із (45), виводимо:

$$\lim_{m=\sim} \int_a^b (Z^{(k)} - A_0^{(m)} \varphi_0^{(k)} - \ldots - A_m^{(m)} \varphi_m^{(k)})^2 \, dx = 0,$$

що треба було довести.

Головний висновок для дальшого з міркувань цього параграфу є такий: функції

$$\Phi_0 = M_x[\varphi_0], \ \Phi_1 = M_x[\varphi], \ \Phi_2 = M_x[\varphi_2], \ldots \tag{48}$$

є лінійно незалежні і творять на інтервалі (a, b) систему замкнену.

Справді, з їх лінійної залежности випливало б, що рівняння

$$M_x[Z] = 0$$

за умов (2) має інтеграл відмінний від нуля, типу:

$$a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \ldots + a_h\varphi_h,$$

що неможливо, бо задача (1) — (2) має єдину розв'язку, отже в даному разі нуль. Замкненість системи (48) є вислід із рівностей (40), (41) та (42). Справді, хочби яка була суцільна функція $F(x)$, завжди для неї, зважаючи на рівність (1) та на згадані рівності, буде:

$$\lim_{m=\sim} \min \int_a^b \left\{ F(x) - \sum_{i=0}^{m} a_i M_x[\varphi_i] \right\}^2 dx = 0$$

§ 9. Частинні випадки

Коли умови (2) є умови Cauchy:

$$z(a) = z'(a) = \ldots = z^{(k-1)}(a) = 0,$$

то очевидно за систему функцій φ_i можна взяти:

$$(x-a)^k, (x-a)^{k+1}, (x-a)^{k+2}, \ldots$$

або

$$(x-a)^k, (x-a)^k x, (x-a)^k x^2, \ldots$$

За систему (48) у першім випадку можна взяти:

$$\frac{\varphi_0^{(k)}}{k!} = 1, \frac{\varphi_1^{(k)}}{(k+1)!} = \frac{x-a}{1}, \frac{\varphi_2^{(k)}}{(k+2)!} = \frac{(x-a)^2}{2!}, \ldots$$

Нехай

$$k = 2l$$

і граничні умови виглядають так:

$$z(a) = z'(a) = \ldots = z^{(l-1)}(a) = 0$$

$$z(b) = z'(b) = \ldots = z^{(l-1)}(b) = 0$$

Тоді можна взяти:

$$\varphi_0 = (x-a)^l (x-b)^l \qquad \Phi_0 = \frac{d^{2l}}{dx^{2l}} (x-a)^l (x-b)^l$$

$$\varphi_1 = \frac{d}{dx} (x-a)^{l+1} (x-b)^{l+1} \qquad \Phi_1 = \frac{d^{2l+1}}{dx^{2l+1}} (x-a)^{l+1} (x-b)^{l+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_m = \frac{d^m}{dx^m} (x-a)^{l+m} (x-b)^{l+m} \qquad \Phi_m = \frac{d^{2l+m}}{dx^{2l+m}} (x-a)^{l+m} (x-b)^{l+m}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Нехай ще для k паристого буде

$$z(a) = z(b) = 0$$
$$z''(a) = z''(b) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z^{(k-2)}(a) = z^{(k-2)}(b) = 0$$

Тут натурально за φ_i взяти вже не многочлени. Візьмімо

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \sin \pi \frac{x-a}{b-a} \\ \varphi_1 &= \sin 2\pi \frac{x-a}{b-a} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m &= \sin m\pi \frac{x-a}{b-a} \end{aligned} \tag{49}$$

і знов

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \varphi_0^{(k)} \\ \Phi_1 &= \varphi_1^{(k)} \\ &\cdots\cdots \\ \Phi_m &= \varphi_m^{(k)} \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{50}$$

Справді, ми бачимо, що система (49) за поданих граничних умов є повна, а система (50) — замкнена (бо вона повторює по суті систему (40)).

Нарешті, пошукаймо функції φ_i та Φ_i за умов періодизму:

$$z(a) = z(b)$$
$$z'(a) = z'(b)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z^{(k-1)}(a) = z^{(k-1)}(b)$$

Тут за функції φ_i можна взяти:

$$1,\ \cos 2\pi \frac{x-a}{b-a},\ \cos 4\pi \frac{x-a}{b-a},\ \cos 6\pi \frac{x-a}{b-a},\ \ldots$$

$$\sin 2\pi \frac{x-a}{b-a},\ \sin 4\pi \frac{x-a}{b-a},\ \sin 6\pi \frac{x-a}{b-a},\ \ldots$$

а за Φ_i вирази типу:

$$\Phi_i = \varphi_i^{(k)} + t^k \varphi_i \qquad (t \neq 0)$$

Ми бачимо, що далеко не завжди зручно, добираючи функції φ_i та Φ_i, обмежуватися многочленами. У наступному параграфі, де ми починатимемо цей добір не з функцій φ_i, а з функцій Φ_i, це виявиться особливо яскраво.

§ 10. Повні системи функцій, що справджують дані граничні умови

Візьмімо довільну замкнену систему лінійно незалежних функцій

$$\Phi_0(x),\ \Phi_1(x),\ \Phi_2(x), \ldots \tag{51}$$

на інтервалі (a, b) і розгляньмо рівняння

$$M_x[\varphi] = \Phi_i \tag{52}$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

з граничними умовами (2). За цих умов вона має одну едину розв'язку φ_i. Доведімо, що система

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots \tag{53}$$

є повна в нашому розумінні.

Справді, маємо очевидно:

$$\varphi_i(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, \Phi_i(\xi)\, d\xi \tag{54}$$

$$z(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, F(\xi)\, d\xi \tag{55}$$

А що система (51) замкнена, то minimum виразу:

$$\int_a^b \left\{ F(\xi) - \sum_{i=0}^m a_i^{(m)} \Phi_i(\xi) \right\}^2 d\xi \tag{56}$$

іде до нуля разом із $\frac{1}{m}$. Лінійна комбінація з рівностей (54) та (55) дає:

$$z - a_0^{(m)} \varphi_0 - a_1^{(m)} \varphi_1 - \ldots - a_m^{(m)} \varphi_m =$$

$$= \int_a^b G(x, \xi) \left\{ F(\xi) - a_0^{(m)} \Phi_0(\xi) - a_1^{(m)} \Phi_1(\xi) - \ldots - a_m^{(m)} \Phi_m(\xi) \right\} d\xi, \tag{57}$$

звідки, за допомогою нерівности Буняковського, виводимо:

$$\left\{ z - a_0^{(m)} \varphi_0 - a_1^{(m)} \varphi_1 - \ldots - a_m^{(m)} \varphi_m \right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b G^2(x, \xi)\, d\xi \cdot \int_a^b \left\{ F(\xi) - a_0^{(m)} \Phi_0(\xi) - a_1^{(m)} \Phi_1(\xi) - \ldots - a_m^{(m)} \Phi_m(\xi) \right\}^2 d\xi$$

і остаточно, зважаючи на властивість виразу (56),

$$z = \lim_{m \to \infty} \left(a_0^{(m)} \varphi_0 + a_1^{(m)} \varphi_1 + \ldots + a_m^{(m)} \varphi_m \right)$$

Запровадивши далі зазначення:

$$\eta_m(\xi) = F(\xi) - \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \Phi_i(\xi)$$

$$z_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \varphi_i(x)$$

та диференціюючи $k-1$ раз рівність (57), дістанемо:

$$z' - z_m' = \int_a^b \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} \eta_m(\xi)\, d\xi$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z^{(k-1)} - z_m^{(k-1)} = \int_a^b \frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}} \eta_m(\xi)\, d\xi$$

За допомогою нерівности Буняковського ці залежності дають:

$$(z' - z_m')^2 \leqslant \int_a^b \left(\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\right)^2 d\xi \cdot \int_a^b \eta_m^2(\xi)\, d\xi$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(z^{(k-1)} - z_m^{(k-1)})^2 \leqslant \int_a^b \left(\frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}}\right)^2 d\xi \cdot \int_a^b \eta_m^2(\xi)\, d\xi$$

Отож, зважаючи на залежність

$$\lim_{m \to \infty} \int_a^b \eta_m^2(\xi)\, d\xi = 0, \tag{58}$$

маємо остаточно:

$$\begin{aligned} z &= \lim_{m=\infty} z_m \\ z' &= \lim_{m=\infty} z_m' \\ &\cdots\cdots\cdots \\ z^{(k-1)} &= \lim_{m=\infty} z_m^{(k-1)} \end{aligned} \tag{59}$$

Роблячи лінійну комбінацію з рівнань (1) та (52), доходимо висліду:

$$M_\infty\left[z - \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \varphi_i\right] = F(x) - \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \Phi_i(x) = \eta_m(x)$$

або

$$M_\infty[z - z_m] = \eta_m(x)$$

Звідси

$$z^{(k)} - z_m^{(k)} = \eta_m(x) - \beta_1 \int_a^b \frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}} \eta_m(\xi)\, d\xi - \cdots - \beta_k \int_a^b G(x,\xi)\, \eta_m(\xi)\, d\xi,$$

а на підставі нерівности Cauchy:

$$\left(z^{(k)}-z_m^{(k)}\right)^2 \leqslant (k+1)\left\{\eta_m^2(x)+\beta_1^2\left[\int_a^b \frac{\partial^{k-1}G}{\partial x^{k-1}}\eta_m(\xi)\,d\xi\right]^2+\cdots\right.$$

$$\left.+\beta_k^2\left[\int_a^b G\,\eta_m(\xi)\,d\xi\right]^2\right\}.$$

Застосовуючи тут нерівність Буняковського, доходимо залежности:

$$(z^{(k)}-z_m^{(k)})^2 \leqslant (k+1)\,\eta_m^2(x)+$$

$$+\int_a^b \eta_m^2(\xi)\,d\xi\cdot\left\{\beta_1^2\int_a^b\left(\frac{\partial^{k-1}G}{\partial x^{k-1}}\right)^2 d\xi+\cdots+\beta_k^2\int_a^b G^2\,d\xi\right\}(k+1) \tag{60}$$

Зінтегрувавши цю нерівність по x у межах (a, b), дістанемо, зважаючи на (58):

$$\lim_{m=\infty}\int_a^b (z^{(k)}-z_m^{(k)})^2\,dx=0, \tag{59$_a$}$$

що доповнює систему рівностей (59).

Зауважмо тут, що коли система (51) є не тільки замкнена, але й повна, і коли обмежитися суцільними функціями $F(x)$, отже й $z^{(k)}$ вважати за суцільну, тоді замість (58) матимемо:

$$\lim_{m=\infty}\eta_m(x)=0 \tag{61}$$

Із (60) тоді виводимо:

$$z^{(k)}=\lim z_m^{(k)} \tag{59$_b$}$$

Отже в цьому випадку ми маємо повну збіжність суми $z_m^{(k)}$ до $z^{(k)}$, а у випадку (59) тільки середню квадратичну збіжність.

Коли вираз $M_x[z]$ є самоспряжений і Green-ова функція $G(x, \xi)$ симетрична, то за φ_i зручно буває взяти фундаментальні функції задачі

$$M_x[\varphi]=\lambda\varphi$$

за умов (2). Коли характеристичні числа

$$\lambda=\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ldots$$

є всі не нулі, то й за систему (51) можна взяти ту саму систему фундаментальних функцій φ_i.

§ 11. Частинні випадки

Відомо, що система функцій

$$1,\ \cos\pi\frac{x-a}{b-a},\ \cos 2\pi\frac{x-a}{b-a},\ \cos 3\pi\frac{x-a}{b-a},\ \ldots \tag{62}$$

є замкнена на інтервалі (a, b).

Візьмімо

$$\Phi_m(x) = \cos m\pi \frac{x-a}{b-a} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

Доберімо тепер вираз $M_x[\ ]$ так, щоб рівняння

$$M_x[z] = F(x)$$

мало на інтервалі (a, b) єдиний інтеґрал за умов (2), а рівняння

$$M_x[z] = 0$$

не мало інтеґралів типу $e^{im\pi x}$, де m ціле число. Тоді

$$\varphi_n(x) = \frac{a_n \sin n\pi \frac{x-a}{b-a} + b_n \cos n\pi \frac{x-a}{b-a}}{n^k} + \tag{63}$$
$$+ c_0^{(n)} e^{r_0 x} + c_1^{(n)} e^{r_1 x} + \cdots + c_{k-1}^{(n)} e^{r_{k-1} x},$$

де числа

$$a_n, \ nb_n, \ c_0^{(n)}, \ c_1^{(n)}, \ldots, \ c_{k-1}^{(n)}$$

для k паристого та

$$na_n, \ b_n, \ c_0^{(n)}, \ c_1^{(n)}, \ldots, \ c_{k-1}^{(n)}$$

для k непаристого є обмежені функції від n.

Отже добутки

$$n\varphi_n(x), \ n\varphi_n'(x), \ldots, \ n\varphi_n^{(k-1)}(x) \tag{64}$$

є обмежені функції від n.

Коли за систему функцій Φ_n узяти

$$1, \ x, \ x^2, \ldots, \tag{65}$$

то функція φ_n із рівняння

$$M_x[\varphi_n] = \Phi_n$$

має вигляд:

$$\varphi_n = \theta_n(x) + \sum_{i=0}^{k-1} c_i^{(n)} e^{r_i x},$$

де $\theta_n(x)$ є знак многочлена.

Спинімося ще на доборі функцій φ_i та Φ_i у випадку, коли задача (1)—(2) є самоспряжена, $M_x[z]$ є диференціяльний вираз із самими паристими похідними від z.

Розгляньмо випадок, коли всі корені характеристичного рівняння

$$M(r) = 0 \tag{66}$$

є недійсні, а всі характеристичні числа

$$\mu = \mu_1, \ \mu_2, \ \mu_3, \ldots \tag{67}$$

рівняння

$$M_x[z] = \mu z$$

від'ємні.

Щоб корені характеристичного рівняння були недійсні, досить умов:

$$B_2 > 0,\ B_4 > 0,\ B_6 > 0, \ldots, B_k > 0 \qquad (k = 2b)$$

Тоді

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^{k-1} C_i^{(m)} \cos(r_{in} x + \rho_{in}),$$

де r_{in} та ρ_{in} дійсні числа.

Ці функції є, як відомо, ортогональні. Тому, коли їх знормалізувати, то сучинники $a_i^{(m)}$ наближення

$$z(x) \approx \sum a_i^{(m)} \varphi_i(x)$$

можна визначити формулами:

$$a_i^{(m)} = \int_a^b z \varphi_i(x)\, dx$$

і вони не залежатимуть від m. Отже для функції z дістаємо розвинення

$$z = a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \ldots$$

типу Fourier. Його можна $k-1$ разів почленно диференціювати. Зауважмо, що вимога, щоб числа (67) були всі від'ємні та корені рівняння (66) недійсні, для цього загального висліду — не істотна. Коли її зректися, то в будові функцій φ_n, крім тригонометричних виразів, можуть узяти участь ще й покажчикові типу:

$$e^{r_{in} x + \rho_{in}}$$

§ 12. Про добір виразу $M_x[\ ]$

Коли функції φ_i шукаємо в формі многочленів, а сучинники виразу $M_x[\ ]$ беремо сталі, то функції Φ_i мають теж форму многочленів. Для того, щоб вони творили замкнену систему функцій лінійно незалежних, досить усім функціям φ_i бути многочленами та мати ступінь не нижчий за k.

Справді бо тоді многочлени

$$\varkappa_0(x),\ \varkappa_1(x), \ldots, \varkappa_k(x)$$

параграфу 7, як лінійно незалежні, можна дібрати відповідно ступенів:

$$k,\ k+1, \ldots, 2k-1$$

Далі многочлени

$$\Phi_i(x) = M_x[\varphi_i] \qquad (i = 0, 1, \ldots, k-1)$$

будуть, очевидно, ступенів

$$0, 1, \ldots, k-1,$$

многочлен

$$\Phi_{i+e} = M_x[(x-a)^k (x-b)^k x^e]$$

ступеня e. Отже многочлени

$$\Phi_j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

творитимуть за всяких сучинників B_i систему не тільки замкнену, а й повну.

У цьому випадку можна взяти, напр., просто

$$M_x[\mathfrak{z}] = \mathfrak{z}^{(k)}$$

Але для цього, очевидно, треба впевнитися, що ні один многочлен типу:

$$\chi_0 + \chi_1 x + \ldots + \chi_{k-1} x^{k-1}$$

не справджує умов (2), коли він не є тотожний нуль. Ці умови для нього мають вигляд:

$$\begin{gathered}\chi_0 (\alpha_i^{(0)} + \beta_i^{(0)}) + \chi_1 (a\alpha_i^{(0)} + b\beta_i^{(0)} + \alpha_i^{(1)} + \beta_i^{(1)} + \ldots + \\ + \chi_{k-1} (a^{k-1}\alpha_i^{(0)} + b^{k-1}\beta_i^{(0)} + (k-1)\, a^{k-2}\alpha_i^{(1)} + (k-1)\, b^{k-2}\beta_1^{(1)} + \ldots + \\ + (k-1)!\,\alpha_i^{(k-1)} + (k-1)!\,\beta_i^{(k-1)}) = 0\end{gathered}$$

$$(i = 0,\ 1, \ldots, k-1),$$

і наш многочлен їх може справдити тоді й тільки тоді, коли

$$\left|\begin{array}{c} \alpha_0^{(0)} + \beta_0^{(0)},\ a\alpha_0^{(0)} + b\beta_0^{(0)} + \alpha_0^{(1)} + \beta_0^{(1)}, \ldots, a^{k-1}\alpha_0^{(0)} + b_1^{k-1}\beta_0^{(0)} + \\ + \ldots + (k-1)!\,\alpha_0^{(k-1)} + (k-1)!\,\beta_0^{(k-1)} \\ \alpha_1^{(0)} + \beta_1^{(0)},\ a\alpha_1^{(0)} + b\beta_1^{(0)} + \alpha_1^{(1)} + \beta_1^{(1)}, \ldots, a^{k-1}\alpha_1^{(0)} + b^{k-1}\beta_1^{(0)} + \\ + \ldots + (k-1)!\,\alpha_1^{(k-1)} + (k-1)!\,\beta_1^{(k-1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{k-1}^{(0)} + \beta_{k-1}^{(0)},\ a\alpha_{k-1}^{(0)} + b\beta_{k-1}^{(0)} + \alpha_{k-1}^{(1)} + \beta_{k-1}^{(1)}, \ldots, a^{k-1}\alpha_{k-1}^{(0)} + \\ + b^{k-1}\beta_{k-1}^{(0)} + \ldots + (k-1)!\,\alpha_{k-1}^{(k-1)} + (k-1)!\,\beta_{k-1}^{(k-1)} \end{array}\right| \neq 0 \qquad (68)$$

Якщо

$$k = 2$$

і умови (2) є

$$z(a) = z(b) = 0,$$

то вимога (68) справджується. Замінивши ці умови такими

$$z'(a) = z'(b) = 0,$$

бачимо, що вона не справджується.

Найпростіший добір виразу $M_x[\ \ ]$, а саме:

$$M_x[\mathfrak{z}] = \mathfrak{z}^{(k)}$$

ми, згідно з параграфом 1, можемо дозволити собі тоді, коли диференціяльне рівняння

$$\mathfrak{z}^{(k)} = 0$$

за умов (2) має тільки тривіяльну розв'язку:

$$\mathfrak{z} = 0$$

А що його загальна розв'язка має вигляд многочлена:

$$\chi_0 + \chi_1 x + \ldots + \chi_{k-1} x^{k-1},$$

то умова (68) взагалі конечна і достатня, щоб функції φ_i та Φ_i можна було однозначно дібрати, зв'язавши їх рівністю:

$$\Phi_i(x) = \varphi_i^{(k)}(x)$$

Справді бо, загальний інтеграл рівнання

$$\varphi^{(k)} = \Phi(x) \tag{69}$$

за умов (2) є

$$\varphi_i(x) = \theta_i(x) + \chi_0 + \chi_1 x + \cdots + \chi_{k-1} x^{k-1}, \tag{70}$$

де $\theta_i(x)$ є якийсь частинний інтеграл цього рівнання. Щоб функція (70) справдила умови (2) однозначно, треба, очевидно, щоб було додержано нерівности (68).

Отже, коли хочемо, щоб системи лінійно незалежних функцій $\varphi_i(x)$ та $\Phi_i(x)$ були зв'язані простою рівністю (69) і цілком одна через одну визначалися, треба і досить нерівности (68). Ця нерівність, зважаючи на ранґ матиці (32), взагалі, крім випадків виняткових, справджується.

РОЗДІЛ II

Наближене розв'язання звичайних лінійних диференціяльних та інтеґральних рівнань

§ 13. Форма наближеної розв'язки

Пошукаймо наближену розв'язку задач (30) — (31) у формі

$$y_m = a_0^{(m)}\varphi_0 + a_1^{(m)}\varphi_1 + \ldots + a_m^{(m)}\varphi_m \tag{71}$$

із рівнань:

$$\int_a^b L_x[y_m]\cdot M_x[\varphi_i]\,dx = \int_a^b f\cdot M_x[\varphi_i]\,dx \tag{72}$$

$$(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m),$$

що докладніше перепишуться так:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)}\left\{\int_a^b M_x[\varphi_i]\,M_x[\varphi_0]\,dx - \lambda\int_a^b N_x[\varphi_i]\,M_x[\varphi_0]\,dx\right\} = \int_a^b f\cdot M_x[\varphi_0]\,dx\\
&\sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)}\left\{\int_a^b M_x[\varphi_i]\,M_x[\varphi_1]\,dx - \lambda\int_a^b N_x[\varphi_i]\,M_x[\varphi_1]\,dx\right\} = \int_a^b f\cdot M_x[\varphi_1]\,dx\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)}\left\{\int_a^b M_x[\varphi_i]\,M_x[\varphi_m]\,dx - \lambda\int_a^b N_x[\varphi_i]\,M_x[\varphi_m]\,dx\right\} = \int_a^b f\cdot M_x[\varphi_m]\,dx
\end{aligned} \tag{73}$$

Ця система рівнань щодо невідомих

$$a_0^{(m)},\ a_1^{(m)},\ \ldots,\ a_m^{(m)} \tag{74}$$

є означена для всіх вартостей λ, крім деяких особливих. Справді, для

$$\lambda = 0$$

визначник цієї системи є

$$\Delta = \begin{vmatrix}
\int_a^b M_x[\varphi_0]\,M_x[\varphi_0]\,dx, & \ldots, & \int_a^b M_x[\varphi_m]\,M_x[\varphi_0]\,dx\\
\int_a^b M_x[\varphi_0]\,M_x[\varphi_1]\,dx, & \ldots, & \int_a^b M_x[\varphi_m]\,M_x[\varphi_1]\,dx\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
\int_a^b M_x[\varphi_0]\,M_x[\varphi_m]\,dx, & \ldots, & \int_a^b M_x[\varphi_m]\,M_x[\varphi_m]\,dx
\end{vmatrix} \tag{75}$$

Коли б він був нуль, то це значило б, що існує лінійна залежність типу

$$\sum_{i=0}^{m} k_i\,M_x[\varphi_i] = 0 \tag{76}$$

із сталими чинниками k_i; отже, що рівняння

$$M_x[z]=0 \tag{77}$$

має інтеґрал типу

$$\sum k_i \varphi_i \tag{78}$$

Коли функції φ_i взято як інтеґрали рівнань

$$M_x[\varphi_i]=\Phi_i\,,$$

де функції Φ_i творять замкнену систему лінійно незалежних функцій, то неможливість рівности (76) ясна сама собою. Коли ж ми φ_i дібрали наперед, як лінійно незалежні, то треба тільки нагадати, що рівняння (77) за умов (2) не має інших інтеґралів, крім

$$z=0$$

Поза тим, коли φ_i є многочлени, то досить B_i дібрати так, щоб корені рівнання

$$r^k+B_1 r^{k-1}+\ldots+B_k=0$$

всі були не нулі.

Отож упровадивши зазначення

$$\Delta^m(\lambda)=\begin{vmatrix} \int\limits_a^b L_x[\varphi_0]\,M_x[\varphi_0]\,dx\,, & \ldots\,, & \int\limits_a^b L_x[\varphi_m]\,M_x[\varphi_0]\,dx \\ \int\limits_a^b L_x[\varphi_0]\,M_x[\varphi_1]\,dx\,, & \ldots\,, & \int\limits_a^b L_x[\varphi_m]\,M_x[\varphi_1]\,dx \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \int\limits_a^b L_x[\varphi_0]\,M_x[\varphi_m]\,dx\,, & \ldots\,, & \int\limits_a^b L_x[\varphi_m]\,M_x[\varphi_m]\,dx \end{vmatrix}, \tag{79}$$

матимемо для неозначеного λ:

$$y=\frac{1}{\Delta_m(\lambda)}\cdot\begin{vmatrix} 0\,, & \varphi_0\,, & \varphi_1\,, & \ldots\,, & \varphi_m \\ \int\limits_a^b f\,\Phi_0\,dx\,, & \int\limits_a^b L_x[\varphi_0]\Phi_0\,dx, & \int\limits_a^b L_x[\varphi_1]\,\Phi_0\,dx\,, & \ldots\,, & \int\limits_a^b L_x[\varphi_m]\Phi_0\,dx \\ \int\limits_a^b f\Phi_0\,dx\,, & \int\limits_a^b L_x[\varphi_0]\Phi_1\,dx, & \int\limits_a^b L_x[\varphi_1]\,\Phi_1\,dx\,, & \ldots\,, & \int\limits_a^b L_x[\varphi_m]\Phi_1\,dx \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \int\limits_a^b f\,\Phi_m dx\,, & \int\limits_a^b L_x[\varphi_0]\Phi_m\,dx, & \int\limits_a^b L_x[\varphi_0]\,\Phi_m\,dx, & \ldots\,, & \int\limits_a^b L_x[\varphi_m]\Phi_m\,dx \end{vmatrix} \tag{80}$$

Ми хочемо довести, що

$$\lim_{m=\infty} y_m=y \tag{81}$$

для всіх тих вартостей λ, для яких задача (1) — (2) має єдину розв'язку.

§ 14. Збіжність наближеної розв'язки

Візьмімо такий замкнений обсяг S на площі комплексного змінного λ, де нема ні одної характеристичної вартости цього параметра. Ясно, що множина s точок, які справджують рівнання

$$\Delta_1(\lambda)=0,\ \Delta_2(\lambda)=0,\ \ldots\,,\ \Delta_m(\lambda)=0\,,\ \ldots\,, \tag{82}$$

та їх точок скупчення є ніде не щільна. Умовмося надалі брати λ в обсягу $S-s$, але завважмо зразу, що кожна точка множини s є точка скупчення для множини $S-s$.

Забезпечивши таким способом існування функцій y та y_m, перепишімо рівності (73) так:

$$\int_a^b L_x[y_m-y]\,M_x[\varphi_i]\,dx=0 \tag{83}$$

$$(i=0,\ 1,\ .\ .\ .\ ,\ m),$$

або, що на одно виходить, так:

$$\int_a^b L_x[y_m-y]\,\Phi_i\,dx=0 \tag{84}$$

$$(i=0,\ 1,\ .\ .\ .\ ,\ m)$$

Помноживши рівність (83) на $a_i^{(m)}$ і просумувавши по i від 0 до m, дістанемо очевидно:

$$\int_a^b L_x[y_m-y]\,M_x[y_m]\,dx=0 \tag{85}$$

З другого боку, зважаючи на те, що система функцій Φ_i замкнена, впровадивши зазначення

$$\sum_{i=0}^{m} b_i^{(m)}\Phi_i-M_x[y]=\alpha_m(x), \tag{86}$$

за умови:

$$\int_a^b [\alpha_m(x)]^2\,dx=\min, \tag{87}$$

дістанемо:

$$\lim_{m=\infty}\int_a^b [\alpha_m(x)]^2\,dx=0 \tag{88}$$

Помноживши далі рівність (83) на $b_i^{(m)}$ і просумувавши по i від 0 до m, дістанемо:

$$\int_a^b L_x[y_m-y]\,(M_x[y]+\alpha_m(x))\,dx=0 \tag{89}$$

Нарешті з рівностей (85) та (89) виводимо:

$$\int_a^b L_x[y_m-y]\,(M_x[y_m-y]-\alpha_m(x))\;dx=0, \tag{90}$$

що можна переписати так:

$$\int_a^b L_x^2[y_m-y]\,dx=\int_a^b L_x[y_m-y]\cdot\{\lambda N_x[y_m-y]+\alpha_m(x)\}\,dx \tag{91}$$

Застосовуючи до правої сторони цієї рівности нерівність Буняковського, доходимо залежности:

$$\int_a^b L_x^2[y_m-y]\,dx\leqslant\int_a^b \{\lambda N_x[y_m-y]+\alpha_m(x)\}^2\,dx, \tag{92}$$

що далі гратиме основну ролю.

Розглянувши тепер диференціяльне рівнання:

$$M_x[w] = L_x[y_m - y] + \lambda N_x[y_m - y]$$

щодо змінного $w(x)$ за умов

$$\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_i^{(j)} w_{(a)}^{(j)} + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_i^{(j)} w^{(j)}(b) = 0$$

$$(i = 0, 1, \ldots, k-1),$$

бачимо, що воно має одну едину розв'язку:

$$w = y_m - y$$

Очевидно, аналогічно до системи (32), маємо:

$$\begin{aligned} y_m - y &= \lambda \int_a^b G \cdot N_\xi[y_m - y]\, d\xi + \int_a^b G \cdot L_\xi[y_m - y]\, d\xi \\ y'_m - y' &= \lambda \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x} \cdot N_\xi[y_m - y]\, d\xi + \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x} L_\xi[y_m - y]\, d\xi \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m^{(k-1)} - y^{(k-1)} &= \lambda \int_a^b \frac{\partial^{k-1} G}{\partial x^{k-1}} \cdot N_\xi[y_m - y]\, d\xi + \int_a^b \frac{\partial^{k-1} G}{\partial x^{k-1}} \cdot L_\xi[y_m - y]\, d\xi \end{aligned} \tag{93}$$

Через те, що функції

$$G(x, \xi),\ \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{k-1} G(x, \xi)}{\partial x^{k-1}}$$

розглядані, як функції від ξ, інтегруються разом із своїми квадратами, то визначивши сучинники

$$C_{0l}^{(m)},\ C_{1l}^{(m)}, \ldots, C_{ml}^{(m)}$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1)$$

так, щоб різниці

$$\gamma_{ml}(x, \xi) = \frac{\partial^l G(x, \xi)}{\partial x^l} - \sum_{i=0}^{m} C_{il}^{(m)} \Phi_i(\xi) \tag{94}$$

справджували вимоги:

$$\int_a^b \gamma_{ml}^2(x, \xi)\, d\xi = \min$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1)$$

матимемо, що

$$\lim_{m = \infty} \int_a^b [\gamma_{ml}(x, \xi)]^2\, d\xi = 0 \tag{95}$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Помноживши рівність (84) на $C_{il}^{(m)}$ та просумувавши по i від 0 до m, дістанемо, зважаючи на (94):

$$\int_a^b L_\xi [y_m - y] \left\{ \frac{\partial^l G(x,\xi)}{\partial x^l} - \gamma_{ml}(x,\xi) \right\} d\xi = 0$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1),$$

або:

$$\int_a^b \frac{\partial^l G(x,\xi)}{\partial x^l} L_\xi [y_m - y]\, d\xi = \int_a^b \gamma_{ml}(x,\xi) L_\xi [y_m - y]\, d\xi \tag{96}$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Це дає змогу заступити систему (93) такою:

$$\begin{aligned} y_m - y &= \lambda \int_a^b G \cdot N_\xi [y_m - y]\, d\xi + \int_a^b \gamma_{m0} L_\xi [y_m - y]\, d\xi \\ y'_m - y' &= \lambda \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x} \cdot N_\xi [y_m - y]\, d\xi + \int_a^b \gamma_{m1} L_\xi [y_m - y]\, d\xi \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m^{(k-1)} - y^{(k-1)} &= \lambda \int_a^b \frac{\partial^{k-1} G}{\partial x^{k-1}} \cdot N_\xi [y_m - y]\, d\xi + \int_a^b \gamma_{m,\,k-1} L_\xi [y_m - y]\, d\xi \end{aligned} \tag{97}$$

Звідси, беручи під увагу скінченість функцій

$$G, \frac{\partial G}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{k-1} G}{\partial x^{k-1}}$$

і застосовуючи знов клясичні Fredholm-ові результати щодо лінійних інтегральних рівнань та систем таких рівнань, доходимо вислідів:

$$\begin{aligned} (y_m - y)^2 &\leqslant \int_a^b \Gamma_{m0}^2(x,\xi)\, d\xi \cdot \int_a^b L_\xi^2 [y_m - y]\, d\xi \\ (y'_m - y')^2 &\leqslant \int_a^b \Gamma_{m1}^2(x,\xi)\, d\xi \cdot \int_a^b L_\xi^2 [y_m - y]\, d\xi \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (y_m^{(k-1)} - y^{(k-1)})^2 &\leqslant \int_a^b \Gamma_{m,\,k-1}^2(x,\xi)\, d\xi \cdot \int_a^b L_\xi^2 [y_m - y]\, d\xi, \end{aligned} \tag{98}$$

де

$$\lim_{m=\infty} \int_a^b \Gamma_{ml}^2(x,\xi)\, d\xi = 0 \tag{99}$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Перепишімо ці рівності за допомогою залежности (92) та нерівности Cauchy так:

$$(y_m^{(l)} - y^{(l)})^2 = r_{ml} \int_a^b \Gamma_{ml}^2\, d\xi \int_a^b \left\{ \lambda^2 \sum_{i=1}^{k} a_i^2(\xi) \left[y_m^{(k-i)} - y^{(k-i)} \right]^2 + \alpha_m^2(\xi) \right\}^2 d\xi \tag{100}$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1),$$

де r_{ml} обмежені функції від m. Із рівностей (100), зважаючи на (99), дістаємо:

$$y_m^{(l)} - y^{(l)} = s_{ml} \sqrt{\int_a^b \alpha_m^2(\xi)\, d\xi} \qquad (101)$$

$$(l = 0,\ 1, \ldots, k-1),$$

де s_{ml} є обмежені функції від m.

Рівності (101) доведено для всіх вартостей λ, належних до множини точок $S-s$. Але зближаючи λ до одної з точок множини s так, щоб не зійти з множини $S-s$, бачимо, що різниці

$$y_m - y,\ y'_m - y', \ldots, y_m^{(k-1)} - y^{(k-1)}$$

при досить великому m лишаються обмежені. Це показує, що множина s не має жадної точки скупчення і що для досить великого m скрізь у обсягу S буде

$$y^{(l)} = \lim_{m=\infty} y_m^{(l)} \qquad (102)$$

$$(l = 0,\ 1, \ldots, k-1)$$

Це доводить збіжність способу наближеної інтеґрації даного рівнаннями (72) або (84) для всіх неособливих вартостей параметра λ.

§ 15. Інший довід збіжности

Довід попереднього параграфу можна провести трохи інакше, застосувавши теорему замкнености в обсягу двох змінних. Із рівнань (93), застосувавши Fredholm-ову теорію, дістанемо:

$$
\begin{aligned}
y_m - y &= \int_a^b \Gamma(x, \xi; \lambda)\, L_\xi[y_m - y]\, d\xi \\
y'_m - y' &= \int_a^b \frac{\partial \Gamma(x, \xi; \lambda)}{\partial x} \cdot L_\xi[y_m - y]\, d\xi \qquad (103) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_m^{(k-1)} - y^{(k-1)} &= \int_a^b \frac{\partial^{k-1} \Gamma(x, \xi; \lambda)}{\partial x^{k-1}} \cdot L_\xi[y_m - y]\, d\xi,
\end{aligned}
$$

де функції

$$\Gamma(x, \xi; \lambda),\ \frac{\partial \Gamma(x, \xi; \lambda)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{k-1}\Gamma(x, \xi; \lambda)}{\partial x^{k-1}}$$

є обмежені та інтеґруються разом із своїми квадратами. Отож можемо дібрати числа

$$l_{ijl}^{(m)} \qquad (i, j = 0,\ 1, \ldots, m)$$

$$l = 0,\ 1, \ldots, k-1$$

так, щоб різниці

$$h_{ml}(x, \xi) = \frac{\partial^l \Gamma}{\partial x^l} - \sum_{i,j=0}^{m} l_{ijl}^{(m)}\, \Phi_i(\xi)\, \Phi_j(x)$$

справджували вимоги:

$$\int_a^b \int_a^b [h_{ml}(x, \xi)]^2 \, dx \, d\xi = \min$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Тоді матимемо:

$$\lim_{m \to \infty} \int_a^b \int_a^b [h_{ml}(x,\xi)]^2 dx \, d\xi = 0$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Помноживши рівність (84) на $\sum_{j=0}^{m} l_{i,l}^{(m)} \, \Phi_j(x)$ та просумувавши по i від 0 до m, дістанемо

$$\int_a^b L_\xi [y_m - y] \left(\frac{\partial^l \Gamma}{\partial x^l} - h_{ml} \right) d\xi = 0$$

або:

$$\int_a^b \frac{\partial^l \Gamma}{\partial x^l} L_\xi [y_m - y] \, d\xi = \int_a^b h_{ml} \, L_\xi [y_m - y] \, d\xi$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Отже з системи (103) виводимо легко

$$\int_a^b [y_m^{(l)} - y^{(l)}]^2 \, dx \leqslant \int_a^b \int_a^b h_{ml}^2 \, dx \, d\xi \cdot \int_a^b L_\xi^2 [y_m - y] \, d\xi \qquad (104)$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Звідси висновок, що вирази

$$\int_a^b [y_m^{(l)} - y_m^{(l)}]^2 \, dx$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1)$$

є ступеня мализни не слабшого, як число $\int_a^b \alpha_m^2(\xi) \, d\xi$. А тоді за допомогою нерівности (92) дістанемо з (103), що

$$y_m - y = t_m(x) \sqrt{\int_a^b \alpha_m^2(\xi) \, d\xi}$$

$$y_m' - y' = t_{m-1}(x) \sqrt{\int_a^b \alpha_m^2(\xi) \, d\xi}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_m^{(k-1)} - y^{(k-1)} = t_{m,k-1}(x) \sqrt{\int_a^b \alpha_m^2(\xi) \, d\xi},$$

де $t_{ml}(x)$ обмежені функції від m та x. Це й дає відшукувану збіжність способу.

Наприкінці зазначмо, що ті самі висліди дістанемо, коли за φ_i узяти фундаментальні функції задачі

$$M_x[\mathfrak{z}] = \mu\,\mathfrak{z}$$

за умов (2) і покласти

$$\Phi_i = \varphi_i \qquad (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

§ 16. Збіжність старших похідних наближеного інтеґралу та докладніша оцінка ступеня мализни наближень

Звернувши увагу на нерівність (92), легко виводимо з неї за допомогою рівностей (101) ще й таку рівність:

$$\int_a^b [y_m^{(k)} - y^{(k)}]^2\, dx = s_{mk} \int_a^b \alpha_m^2(\xi)\, d\xi, \tag{105}$$

де s_{mk} є обмежена функція від m.

Отже маємо й збіжність похідної $y_m^{(k)}$ до $y^{(k)}$ тільки не точкову, а середню квадратичну.

Але розглянувши величину $\alpha_m(x)$, легко бачимо, що за існування, напр., суцільних r-х похідних у функцій

$$a_1(x),\ a_2(x), \ldots, a_k(x),\ f(x)$$

і при доборі системи функцій Φ_i у формі повної системи многочленів, на підставі вислідів про наближення функцій С. Берштейна та de la Vallée Poussin, можна з формули (105) або з рівности

$$y_m^{(k-1)} - y^{(k-1)} = t_{m,\,k-1} \sqrt{\int_a^b \alpha_m^2(\xi)\, d\xi}$$

вивести, що й

$$\begin{gathered} \lim_{m=\infty} y_m^{(k)} = y^{(k)} \\ \lim_{m=\infty} y_m^{(k+1)} = y^{(k+1)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \lim_{m=\infty} y_m^{(k+r-1)} = y^{(k+r-1)} \end{gathered} \tag{106}$$

й установити ступінь мализни та горішню межу різниць абсолютних вартостей

$$y_m^{(k+u)} - y^{(k+u)} \tag{107}$$

$$(u = -k,\ -k+1, \ldots, 0, 1, \ldots, r-1)$$

Для цього доведімо помічне твердження:

Коли p-та похідна функції $\Gamma(\xi)$ є скінчена на інтервалі $(a,\ b)$ та справджує Lipschitz-ову умову на інтервалах $(a,\ x)$, $(x,\ b)$, а многочлени

$$\theta_0(x),\ \theta_1(x),\ \theta_2(x), \ldots$$

творять абсолютно повну систему, то є таке наближення

$$\Gamma_m(\xi) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i^{(m)} \theta_i(\xi)$$

цієї функції, що

$$\int_a^b (\Gamma - \Gamma_m)^2 d\xi = \frac{M_m}{m^{\frac{2}{3}(p+1)}} \text{ або } \frac{M_m}{m^{2p}}, \tag{108}$$

де M_m є обмежена функція від m.

В усякій точці інтервалів $(a, x-h)$ та $(x, b-h)$ можна заступити $\Gamma(\xi)$ функцією:

$$F(\xi) = \frac{1}{h} \int_\xi^{\xi+h} \Gamma(\xi)\, d\xi \tag{109}$$

з похибкою $hP_m(\xi)$, де P_m величина обмежена. З другого боку, на інтервалі (a, b) функцію $F(\xi)$ можна представити лінійною комбінацією $\Gamma_m(\xi)$ з функцій

$$\theta_0(\xi),\ \theta_1(\xi),\ \theta_2(\xi), \ldots, \theta_{m-1}(\xi)$$

з похибкою типу $h^{-1} m^{-p-1} Q_m(\xi)$, де Q_m є величина обмежена. Отже й різниця $\Gamma - \Gamma_m$ на інтервалі (a, b), крім хіба проміжок $(x-h, x)$ та $(b-h, b)$, є величина типу

$$hP_m(\xi) + h^{-1} m^{-p-1} Q_m(\xi),$$

а тоді

$$\int (\Gamma - \Gamma_m)^2 d\xi = (p_m h + q_m h^{-1} m^{-p-1})^2 + r_m h,$$

де p_m, q_m, r_m є обмежені функції від m. Взявши тут $m^{\frac{2}{3}(p+1)}$ за h, дістанемо перший вислід твердження. Другий просто випливає з існування такої суми $\Gamma_m(\xi)$, що

$$\Gamma - \Gamma_m = \frac{M_m(\xi)}{m^p}.$$

Зауважмо, що коли

$$\Gamma(\xi) = \frac{\partial^l G(x, \xi)}{\partial x^l}$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1),$$

де $G(x, \xi)$ є Green-ова функція лінійного диференціяльного рівнання k-го $(k > 1)$ порядку, то напевно за p можна взяти 0, а коли $G(x, \xi)$ ще й симетрична щодо x та ξ, то при $l = 0$ можна взяти $p = k - 1$.

Запровадивши зазначення

$$\varepsilon_{lm}^{(g)} = \frac{M_{lm}}{m^g}, \tag{110}$$

де M_{lm} є обмежена функція від m, можемо очевидно тепер рівності (103) за допомогою (104) та (108), використавши нерівність Буняковського, переписати так:

$$(y_m - y)^2 \leqslant \varepsilon_{0m}^{\left(\frac{2}{3}\right)}(x) \int_a^b L_\xi^2 [y_m - y]\, d\xi$$

$$(y_m' - y')^2 \leqslant \varepsilon_{1m}^{\left(\frac{2}{3}\right)}(x) \int_a^b L_\xi^2 [y_m - y]\, d\xi$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (111)$$

$$(y_m^{(k-2)} - y^{(k-2)})^2 \leqslant \varepsilon_{k-2,\, m}^{\left(\frac{2}{3}\right)}(x) \int_a^b L_\xi^2 [y_m - y]\, d\xi$$

$$(y_m^{(k-1)} - y^{(k-1)})^2 \leqslant \varepsilon_{k-1,\, m}^{\left(\frac{2}{3}\right)}(x) \int_a^b L_\xi^2 [y_m - y]\, d\xi,$$

де

$$\varepsilon_{lm}^{\left(\frac{2}{3}\right)}(x) = \min \int_a^b \left\{ \frac{\partial^l \Gamma(x, \xi)}{\partial x^l} - \sum_{i=0}^{m} a_{il}^{(m)} \varphi_i(\xi) \right\}^2 d\xi$$

щодо змінних $a_{il}^{(m)}$.

Заступивши інтеґрали на правих сторонах нерівностей (111) за допомогою залежности (92) і назвавши через M найбільшу вартість модулів функцій

$$a_1(x),\ a_2(x), \ldots, a_k(x),$$

дістанемо:

$$(y_m^{(l)} - y^{(l)})^2 \leqslant 2k\lambda^2 M^2 \varepsilon_{lm}^{\left(\frac{2}{3}\right)}(x) \int_a^b [(y_m - y)^2 + \ldots + (y_m^{(k-1)} - y^{(k-1)})^2]\, d\xi +$$

$$+ 2\, \varepsilon_m^{\left(\frac{2}{3}\right)} \int_a^b \alpha_m^2(\xi)\, d\xi \qquad (112)$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Звідси:

$$\int_a^b [(y_m - y)^2 + \ldots + (y_m^{(k-1)} - y^{(k-1)})^2]\, dx \leqslant 2k\lambda^2 M^2 \int_a^b \sum_{l=0}^{k-1} \varepsilon_{lm}^{\left(\frac{2}{3}\right)}(x)\, dx \cdot$$

$$\cdot \int_a^b [(y_m - y)^2 + \ldots + (y_m^{(k-1)} - y^{(k-1)})]\, d\xi + 2 \int_a^b \sum_{l=0}^{k-1} \varepsilon_{lm}^{\left(\frac{2}{3}\right)}(\xi)\, d\xi \cdot \int_a^b \alpha_m^2(\xi)\, d\xi$$

Огже

$$\int_a^b [(y_m - y)^2 + \ldots + (y_m^{(k-1)} - y^{(k-1)})^2]\, dx \leqslant \frac{2 \int_a^b \sum_{l=0}^{k-1} \varepsilon_{lm}^{\left(\frac{2}{3}\right)}(x)\, dx \int_a^b \alpha_m^2(x)\, dx}{1 - 2k\lambda^2 M^2 \int_a^b \sum_{l=0}^{k-1} \varepsilon_{lm}^{\left(\frac{2}{3}\right)}(x)\, dx} \qquad (113)$$

для всякого значка m, для якого

$$2k\lambda^2 M^2 \int_a^b \sum \varepsilon_{lm}^{\left(\frac{2}{3}\right)}(x)\, dx < 1$$

Отже

$$(y_m^{(l)}-y^{(l)})^2 \leqslant \frac{4k\lambda^2 M^2 \varepsilon_{lm}^{\left(\frac{2}{3}\right)}(x)\int_a^b \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_{jm}^{2}(\xi)\, d\xi \int_a^b \alpha_m^2(\xi)\, d\xi}{1-2k\lambda^2 M^2 \int_a^b \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_{jm}^{\left(\frac{2}{3}\right)}(\xi)\, d\xi} + 2\, \varepsilon_{lm}^{\left(\frac{2}{3}\right)} \int_a^b \alpha_m^2(\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{2\, \varepsilon_{lm}^{\left(\frac{2}{3}\right)}(x) \int_a^b \alpha_m^2(\xi)\, d\xi}{1-2k\lambda^2 M^2 \int_a^b \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_{jm}^{\left(\frac{2}{3}\right)}(x)\, dx} \tag{114}$$

$$(l=0, 1, \ldots, k-1)$$

Припустивши тепер, що існують і справджують Lipschitz-ову умову δ-го ступеня функції

$$\frac{d^r a_1(x)}{dx^r}, \frac{d^r a_2(x)}{dx^r}, \ldots, \frac{d^r a_k(x)}{dx^r}, \frac{d^r f(x)}{dx^r},$$

можемо $\alpha_m(x)$ дібрати так, що буде

$$\int_a^b \alpha_m^2(\xi)\, d\xi = \varepsilon_m^{(2r+2\delta)}$$

А тоді з (114) виводимо:

$$|y_m^{(l)} - y^{(l)}| < \varepsilon_m^{\left(r+\delta+\frac{1}{3}\right)} \tag{115}$$

$$(l=0, 1, \ldots, k-1),$$

тим часом, як найкраще наближення функцій $y^{(l)}$ сумами $y_m^{(l)}$ мусіло б мати похибку типу:

$$\varepsilon_m^{(r+\delta+k-l)} \qquad (l=0, 1, \ldots, k-1)$$

Нерівності (115) показують, що крім того й

$$|y_m^{(k-1+u)} - y^{(k-1+u)}| < \varepsilon^{\left(r+\delta+\frac{1}{3}-u\right)} \tag{116}$$

$$(u=1, 2, \ldots, r)$$

отже, що взагалі

$$y^{(s)} = \lim y_m^{(s)}$$

$$(s=0, 1, \ldots, k+r-1)$$

§-17. Увага про випадок задачі самоспряженої

Коли

$$\Gamma(x, \xi) = \Gamma(\xi, x),$$

то першу з нерівностей (111) можна заступити такою:

$$(y_m - y)^2 \leqslant \varepsilon_{0m}^{(2k-2)}(x) \int_a^b L_\xi^2 [y_m - y]\, d\xi,$$

а тоді замість (115) дістанемо:

$$|y_m^{(l)} - y^{(l)}| < \varepsilon^{(k+r+\delta-l-1)}(x) \tag{117}$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Отож випадок, коли задача (30)—(31) є самоспряжена, як може здаватися, дає кращі наближення для функції $y(x)$ та її перших $k-2$ похідних, ніж випадок загальний (пор. (115) та (117)). Алеж справді для такого твердження нема досить підстав у вислідах попереднього параграфу. Справді, взявши нерівності (104), завважмо, що

$$\min \int_a^b \int_a^b h_{lm}^2(x, \xi)\, dx\, d\xi \leqslant \varepsilon_m^{\left(2k-2l-\frac{4}{3}\right)}$$

Це випливає з того, що, зважаючи на (108), буде:

$$\min \int_a^b h_{lm}^2(x, \xi)\, dx \leqslant \eta_m^{(2k-2l-2)}(\xi) \tag{118}$$

та

$$\min \int_a^b \eta_m^{(2k-2l-2)}(\xi)\, d\xi \leqslant \frac{\max[\eta_m^{(2k-2l-2)}]}{m^{\frac{2}{3}}}$$

Отож із згаданих нерівностей (104) виводимо:

$$\int_a^b [y_m^{(l)} - y^{(l)}]^2\, dx \leqslant \varepsilon_m^{\left(2k-2l-\frac{4}{3}\right)} \int_a^b \left\{\sum_{j=0}^{k-1} (y_m^{(j)} - y^{(j)})^2 + \alpha_m^2\right\} dx \tag{119}$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Сумуючи рівності (119), дістанемо:

$$\int_a^b \sum_{j=0}^{k-1} (y_m^{(j)} - y^{(j)})^2\, dx \leqslant \varepsilon_m^{\left(\frac{2}{3}\right)} \int_a^b \alpha_m^2\, dx,$$

і тоді рівності (103) за допомогою (118) дають:

$$|y_m^{(l)} - y^{(l)}| \leqslant \varepsilon^{\left(k-l-\frac{2}{3}\right)} \int_a^b \alpha_m^2\, dx \tag{120}$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1)$$

§ 18. Самоспряжене лінійне диференціяльне рівнання другого порядку

Розгляньмо докладніше випадок рівнання

$$y'' - A(x)\, y = f(x) \tag{121}$$

на інтервалі (0, 1) за умов

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{122}$$

Тут можемо взяти

$$M_x[z] = z''(x)$$

$$\varphi_n(x) = (x-1)\, x^{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Як відомо, коли η_1 та η_2 є інтеґрали однорідного рівнання

$$\eta'' - A(\xi)\,\eta = 0$$

й справджують вимоги:

$$\eta_1(0) = 0$$

$$\eta_2(1) = 0,$$

то Green-ова функція задачі (121) — (122) є:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\eta_1(\xi)\,\eta_2(x)}{\eta_1'(0)\,\eta_2(0)} & \text{для } \xi \leqslant x \\ \dfrac{\eta_2(\xi)\,\eta_1(x)}{\eta_1'(0)\,\eta_2(0)} & \text{для } \xi > x \end{cases} \tag{123}$$

Способом ступеневих наближень знайдемо:

$$\eta_1(x) = \eta_1'(0)\,v(x)$$

$$\eta_2(x) = \eta_2'(0)\,v(1-x),$$

де

$$v(x) = x + \int_0^x\int_0^x A\,dx^2 + \int_0^x\int_0^x A\left(\int_0^x\int_0^x A\,dx^2\right)dx^2 + \ldots$$

Отже

$$\max|v| \leqslant 1 + \frac{M}{2!} + \frac{M^2}{4!} + \ldots = \frac{e^{\sqrt{M}} + e^{-\sqrt{M}}}{2}$$

$$\max|v'| \leqslant 1 + \frac{M}{1!} + \frac{M^2}{3!} + \ldots = \frac{e^{\sqrt{M}} - e^{-\sqrt{M}}}{2\sqrt{M}}$$

$$\left|\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}\right| \leqslant \frac{\max|v|\max|v'|}{|v(1)|} \leqslant \frac{e^{M} - e^{-M}}{4|v(1)|\cdot\sqrt{M}},$$

де

$$M = \max|A(x)|,$$

а $|v(1)|$ можна взяти наближено з недостачею.

Перша з нерівностей (111) тут має вигляд:

$$(y_m - y)^2 \leqslant 2\,\varepsilon_m^{(2)} \int_0^1 \{A^2(\xi)\,[y_m(\xi) - y(\xi)]^2 + \alpha_m^2(\xi)\}\,d\xi, \tag{124}$$

де, як відомо з теорії наближення функцій многочленами,

$$\varepsilon_m^{(2)} \leqslant Q \cdot \frac{\max\left(\dfrac{\partial \Gamma}{\partial \xi}\right)^2}{m^2} \leqslant Q \cdot \frac{(e^{M} - e^{-M})^2}{16\,M m^2\,v^2(1)}, \tag{125}$$

а Q є числовий чинник, незалежний ні від m, ні від $A(x)$, ні від $f(x)$.

Із другого боку, припустивши, що існують і справджують Lipschitz-ові умови δ-го порядку похідні $\frac{d^r A}{dx}$ та $\frac{d^r f}{dx}$, маємо:

$$\int_0^1 \alpha_m^2\, dx \leqslant R^2 \cdot \left(\frac{\max|y^{(2+r)}|}{m^{r+\delta}}\right)^2, \tag{126}$$

де R теж не залежить ні від m, ні від $A(x)$, ні від $f(x)$, та скориставшися з рівнання (121), легко дістанемо, що

$$\max|y^{(2+r)}| \leqslant$$

$$\leqslant \text{многочл.}\,(\max|A|, \max|A'|, \ldots, \max|A^{(r)}|, \max|f|, \max|f'|, \ldots$$

$$\ldots, \max|f^{(r)}|, \max|y|, \max|y'|),$$

де $\max|y|$ та $\max|y'|$ беруть участь лінійно.

А що $y'(x)$ на інтервалі $(0,1)$ у якійсь точці a напевно анулюється, зважаючи на умови (122), то з (121) маємо:

$$y'(x) = \int_a^x [A(x)y(x) + f(x)]\, dx,$$

звідки

$$\max|y'| \leqslant \max|A| \cdot \max|y| + \max|f|$$

Отож остаточно

$$\max|y^{(2+r)}| \leqslant \text{многочл.}\,(\max|A|, \ldots, \max|A^{(r)}|, \max|f|, \ldots, \max|f^{(r)}|, \max|y|) =$$

$$= N\max|y| + P$$

Напр., коли

$$r = 1,$$

то

$$N = \max|A'| + \max A^2$$

$$P = \max|f'| + \max|A| \cdot \max|f|$$

Отже нерівність (126) переписується так:

$$\int_0^1 \alpha_m^2\, dx \leqslant R^2 \cdot \frac{(N\max|y| + P)^2}{m^{2r+2\delta}}$$

Із другого боку, нерівність (124), за умови

$$2M^2 \varepsilon_m^{(2)} < 1,$$

дає:

$$(y_m - y)^2 \leqslant \frac{2\varepsilon_m^{(2)} \int_0^1 \alpha_m^2\, dx}{1 - 2M^2 \varepsilon_m^{(2)}}$$

або

$$|y_m - y| \leqslant \frac{R\,(N \max|y| + P)}{m^{r+\delta}\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon_m^{(2)}} - M^2}} \tag{127}$$

Отже

$$|y| \leqslant \left(\max|y_m| + \frac{RP}{m^{r+\delta}\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon_m^{(2)}} - M^2}}\right) : \left(1 - \frac{RN}{m^{r+\delta}\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon_m^{(2)}} - M^2}}\right) \tag{128}$$

коли

$$\frac{RN}{m^{r+\delta}\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon_m^{(2)}} - M^2}} < 1$$

Запровадивши в праву сторону нерівности (127) верхню межу $|y|$ із (128), дістанемо:

$$|y_m - y| \leqslant \frac{R}{m^{r+\delta}\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon_m^{(2)}} - M^2}} \cdot \left\{N \max|y| + P\right\} : \left\{1 - \frac{RN}{m^{r+\delta}\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon_m^{(2)}} - M^2}}\right\} +$$

$$+ \frac{NR^2P}{m^{2r+2\delta}\left(\frac{1}{2\varepsilon_m^{(2)}} - M^2\right)} : \left(1 - \frac{RN}{m^{r+\delta}\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon_m^{(2)}} - M^2}}\right)$$

$$|y_m - y| \leqslant \frac{RN\max|y_m|}{m^{r+\delta}\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon_m^{(2)}} - M^2} - RN} +$$

$$+ \frac{RP}{m^{r+\delta}\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon_m^{(2)}} - M^2}} \cdot \frac{m^{r+\delta}\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon_m^{(2)}} - M^2} + RN}{m^{r+\delta}\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon_m^{(2)}} - M^2} - RN} \tag{129}$$

Коли фактично визначено y_m, то (129) і дає горішню межу похибки цього наближеного інтеґрала. Отож оцінку похибки зведено, як показує формула (125), на обчислення нижньої межі $|v(1)|$. Ця порівняно проста задача має розв'язання цілком тривіяльне, коли на інтервалі (0,1) minimum функції $A(x)$ є число додатне. Бо тоді, зазначивши його через μ, матимемо:

$$v(1) \geqslant 1 + \frac{\mu}{2!} + \frac{\mu^2}{4!} + \ldots = \frac{e^{\sqrt{\mu}} + e^{-\sqrt{\mu}}}{2}$$

Для цього випадку ще *W.* Ritz довів збіжність свого способу, що являє частинний випадок поданого в цій праці.

§ 19. Узагальнення.

Міркування, застосовані в прикладі попереднього параграфу, можна узагальнити. Справді, давніше показано, як обчислення Green-ової функції та її похідних у задачі (30)—(31) можна звести на обчислення частинних інтеґралів відповідного однорідного диференціяльного рівнання. Спосіб ступеневих наближень або якийсь інший наближений спосіб, що визначав би горішні та нижні межі розв'язок задачі Cauchy, визначить тоді наближені вартості цих інтеґралів та їх похідних і дасть змогу визначити maximum модуля функції $\Gamma(x, \xi)$ та її похідних до порядку $k-1$-го включно. А тоді теорія наближення функцій многочленами дасть нам величини

$$\varepsilon_{lm}^{\left(\frac{2}{3}\right)} \qquad (l=0,\ 1, \cdot \cdot \cdot, k-1)$$

у рівностях (112).

Далі маємо:

$$\int_a^b \alpha_m^2\, dx \leqslant R^2 \cdot \left(\frac{\max|y^{(k+r)}|}{m^{r+\delta}}\right)^2, \tag{130}$$

де R є стала величина незалежна ні від m, ні від функцій:

$$a_1(x),\ a_2(x),\ .\ .\ .\ , a_k(x),\ f(x) \tag{131}$$

А що диференціяльне рівнання (30) визначає $y^{(k+r)}$ як лінійну функцію від

$$y, y', \ .\ .\ .\ , y^{(k-1)}$$

і як многочлен від функцій (130) та їх похідних до порядку r-го включно, то (114) можемо переписати так:

$$|y_m^{(l)} - y^{(l)}| \leqslant L_l \cdot \eta_l \cdot \frac{(\rho + \max|y| + \max|y'| + \ .\ .\ . + \max|y^{(k-1)}|}{m^{r+\delta}} \tag{132}$$

$$(l=0, 1, \ .\ .\ .\ , k-1),$$

де L_l та ρ легко визначити через R та через модулі функцій (131) і їхніх похідних, а

$$\eta_l = \sqrt{\frac{2\varepsilon_{lm}^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{1 - 2k\lambda^2 M^2 \int\limits_a^b \sum\limits_{i=0}^{k-1} \varepsilon_{im}^{\left(\frac{2}{3}\right)} dx}}$$

Узявши число m таке велике, щоб було

$$L = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{L_j \eta_j}{m^{r+\delta}} < 1,$$

бачимо з (132), що

$$\rho + \max|y| + \max|y'| + \cdot \cdot \cdot + \max|y^{(k-1)}| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\rho + \max|y_m| + \max|y_m'| + \cdot \cdot \cdot + \max|y_m^{(k-1)}|}{1-L}$$

Отже нерівності (132) можна заступити такими:

$$|y_m^{(l)} - y^{(l)}| \leqslant \frac{L_l \eta_l}{1-L} \cdot \frac{\rho + \max|y_m| + \max|y_m'| + \ .\ .\ . + \max|y_m^{(k-1)}|}{m^{r+\delta}},$$

$$(l=0, 1, \cdot \cdot \cdot, k-1)$$

що дає відшукувану оцінку похибок.

§ 20. Застосування тригонометричних сум.

У параграфі 18 дано таке наближення розв'язки $y(x)$ задачі (121)—(122), що його можна $r+1$ разів диференціювати. Тепер ми хочемо дати таке саме наближення в формі не многочлена, а тригонометричної суми.

Нехай періодична функкція $y(x)$ з періодом 2 має похідну $r+2$-го порядку, що справджує Lipschitz-ову умову δ-го ступеня. Тоді, як відомо, що функцію можна представити тригонометричною сумою:

$$Y_m=\sum_{i=0}^{m}(a_i \sin \pi ix + b_i \cos \pi ix) \tag{133}$$

з похибкою $\varepsilon_m^{(r+\delta+2)}(x)$ ступеня мализни щодо $\frac{1}{m}$ не слабшого за $r+\delta+2$:

$$y=Y_m+\varepsilon_m^{r+\delta+2} \tag{134}$$

Очевидно, отже, що вирази

$$\frac{\Delta Y_m}{\Delta x}, \frac{\Delta^2 Y_m}{\Delta x^2}, \ldots, \frac{\Delta^{r+2} Y_m}{\Delta x^{r+2}}, \frac{\Delta^{r+3} Y_m}{\Delta x^{r+\delta}} \qquad \left(\Delta x \sim \frac{1}{m}\right)$$

є обмежені.

Візьмімо відомі формули:

$$\frac{\Delta^k Y_m}{\Delta x^k}=Y_m^{(k)}+\alpha_k h Y_m^{(k+1)}+\beta_k h^2 Y_m^{(k+2)}+\gamma_k h^3 Y_m^{(k+3)}+\ldots \tag{135}$$

$$(h=\Delta x, \quad k=1,2,\ldots,r+3),$$

де множина чисел:

$$|\sqrt{\alpha_k}|, |\sqrt[3]{\beta_k}|, |\sqrt[4]{\gamma_k}|, \ldots$$

має границю нуль, бо вони визначаються рівністю:

$$(e^h-1)^k=h^k+\alpha_k h^{k+1}+\beta_k h^{k+2}+\gamma_k h^{k+3}+\ldots$$

Можна дібрати таке додатне число l незалежне від m, що буде:

$$|\alpha_k| l+|\beta_k| l^2+|\gamma_k| l^3+\ldots \leqslant \frac{1}{2}$$

$$(k=1,2,\ldots,r+3);$$

тоді, зважаючи на відому теорему С. Бернштейна, що коли

$$|Y_m|<L,$$

то

$$|Y_m^{(s)}|<m^s \cdot L,$$

з (135) для

$$h \leqslant \frac{1}{m}$$

випливає нерівність:

$$\max\left|\frac{\Delta^k Y_m}{h^k}\right| \geqslant \frac{1}{2}\max|Y_m^{(k)}|$$

$$(k=1,2,\ldots,r+3)$$

Отже, зважаючи на (134), вирази

$$Y_m', Y_m'', \ldots, Y_m^{(r+2)}, Y_m^{(r+3)} \cdot m^{\delta-1},$$

як функції від m, є обмежені. А тоді з очевидних рівностей:

$$y - Y_m + kh(y' - Y'_m) + \ldots + \frac{(kh)^{r+2}}{(r+2)!}(y^{(r+2)} - Y_m^{(r+2)}) = \varepsilon_{km}^{(r+\delta+2)}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, r+1),$$

де $\varepsilon_{km}^{(r+\delta+2)}$ має щодо $\frac{1}{m}$ ступінь мализни не слабший за $r+\delta+2$, дістанемо:

$$y^{(j)} = Y_m^{(j)} + \varepsilon_{jm}^{(r+\delta+2-j)} \tag{136}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, r+2)$$

для всякої тригонометричної суми Y_m, що справджує умову (134)[1]).

Легко збагнути, що цей вислід цілком застосовується й до неперіодичної функції $y(x)$ на інтервалі (0,1), коли вона справджує ті самі диференціяльні умови, анулюється на кінцях цього інтервалу та має властивості

$$\begin{aligned} y''_{(0)} &= y''_{(1)} = 0 \\ y^{IV}_{(0)} &= y^{IV}_{(1)} = 0 \\ y^{VI}_{(0)} &= y^{VI}_{(1)} = 0 \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{137}$$

$$y^{(2\rho)}_{(0)} = y^{(2\rho)}_{(1)} = 0, \tag{138}$$

де

$$\rho = \left[\frac{r}{2}\right] + 1;$$

для цього випадку всі сучинники b_i у формулі (133) є нулі.

З наведеного доводу також очевидно, що подані висліди лишаються незмінні, коли періодизму функції $y(x)$ або умов (137) та (138) додержано не точно, а з похибками ступеня мализни щодо $\frac{1}{m}$ не слабшого за $r+\delta+2$.

Також ясно, що коли б замість рівности (134) існувала рівність

$$y' = Y'_m + \varepsilon_m^{(r+\delta)}, \tag{139}$$

де $\varepsilon_m^{(r+\delta)}$ є ступеня мализни щодо $\frac{1}{m}$ не слабшого за $r+\delta$, то в обох зазначених випадках формули (136) дістали б вигляд:

$$y^{(j)} = Y_m^{(j)} + \varepsilon_m^{(r+\delta+1-j)} \tag{139a}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, r+1)$$

Розуміється формули (139a) вимагають, щоб існувала похідна $y^{(r+1)}$, яка справджує Lipschitz-ову умову δ-го ступеня.

[1]) Цей вислід випливає також із загальної теорії наближення функцій тригонометричними сумами.

Нехай тепер $y(x)$ є знов розв'язка задачі (121)—(122). Візьмімо на цей раз

$$M_x[z] = z''_{(x)}$$

$$\varphi_n(x) = \sin n\pi x \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Тоді

$$y^{(j)} = y_m^{(j)} + \varepsilon_{jm}^{(r+\delta+1-j)} \qquad (140)$$
$$(j = 0, 1, 2, \ldots, r+1),$$

отже й тут збіжність перших $r+1$ похідних від наближеного інтеграла y_m забезпечена.

Покажімо тепер, як звільнити ці висліди від обмежених умов (137) та (138).

Щодо умов (137), то їх очевидно завжди справдимо, заступивши $y(x)$ функцією:

$$y - \frac{f(0)+2f(1)}{6}x^2(1-x) - \frac{2f(0)+f(1)}{6}x(1-x)^2 \qquad (141)$$

Далі скрізь уважатимемо, що їх справджено.

Знаючи (напр., визначивши способом попереднього параграфу) досить точно числа $y'(0)$ та $y'(1)$, знайдемо кінцеві вартості дальших похідних від $y(x)$ з рівнання (121), напр.,

$$y''(0) = f(0) - A(0)y(0)$$
$$y''(1) = f(1) - A(1)y(1)$$
$$y^{IV}(0) = f''(0) - 2A'(0)y'(0)$$
$$y^{IV}(1) = f''(1) - 2A'(1)y'(1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Заступімо тепер функцію y виразом:

$$y + \alpha_2 x^4(1-x)^3 + \beta_2 x^3(1-x)^4 + \ldots + \alpha_\rho x^{2\rho}(1-x)^{2\rho-1} + \beta_\rho x^{2\rho-1}(1-x)^{2\rho},$$

що не порушує умов (137) і дає змогу здійснити умови (138) з довільно малою похибкою. Елементарні обчислення показують, що для цього слід узяти, напр.

$$\alpha_2 = \frac{f''(0) - 4f''(1) - 2A'(0)y'(0) + 8A'(1)y'(1)}{360}$$

$$\beta_2 = \frac{f''(1) - 4f''(0) - 2A'(1)y'(1) + 8A'(0)y'(0)}{360}$$

Отже, знаючи досить точно $y'(0)$ та $y'(1)$, довільно точно справдимо всі рівності (138).

Щоб звільнитися від попереднього обчислення величин $y'(0)$ та $y'(1)$, можна просто шукати суму типу:

$$\bar{y}_m = \sum_{j=1}^{\rho} \left[\bar{a}_j x^{2j}(1-x)^{2j-1} + \bar{b}_j x^{2j-1}(1-x)^{2j}\right] + y_m,$$

з неозначеними сучинниками $\bar{a}_j, \bar{b}_j, a_j$. Очевидно, в цьому випадку наші загальні міркування так само доводять збіжність виразів $\bar{y}_m$ та $\bar{y}'_m$ відповідно до y та y' з похибкою ступеня мализни щодо $\frac{1}{m}$ не слабшого від $r+\delta$. Але не важко довести й рівності

$$y^{(j)} = \bar{y}_m^{(j)} + \varepsilon^{r+\delta+1-j}$$
$$(j=1, 2, \ldots, r+1)$$

цілком подібні до рівностей (140).

Для цього завважмо, що функцію $y(x)$ можна на інтервалі (0,1) представити з похибкою ступеня мализни щодо $\frac{1}{m}$ не слабшого за $r+\delta+2$ виразом:

$$\bar{Y}_m = \sum_{j=1}^{\rho} [\bar{A}_j x^{2j}(1-x)^{2j-1} + \bar{B}_j x^{2j-1}(1-x)^{2j}] + \sum_{i=1}^{m} A_i \sin \pi ix$$

При тім числа $\bar{A}_j, \bar{B}_j$ не залежать від m. Отже досить довести рівності

$$\lim_{m \to \infty} \bar{a}_j = \bar{A}_j, \lim_{m \to \infty} \bar{b}_j = \bar{B}_j,$$

щоб мати право застосувати до суми $\bar{Y}_m$ всі ті висліди, що для суми Y_m.

Для останнього доводу досить завважити, що різниця

$$v_m = \bar{Y}'_m - \bar{y}'_m$$

має ступінь мализни не слабший за $r+\delta$, а її сучинники Fourier

$$p_i = \int_0^1 v_m \cos \pi ix\, dx,$$

почавши з

$$j = m+1$$

є ті самі, що у многочлена

$$\sum_{j=1}^{\rho} [(\bar{A}_j - \bar{a}_j) x^{2j}(1-x)^{2j-1} + (\bar{B}_j - \bar{b}_j) x^{2j-1}(1-x)^{2j}]$$

§ 21. Спосіб найменших квадратів та варіяційний альґоритм.

Коли взяти

$$M_x[y] = L_x[y],$$

отож покласти

$$N_x[\quad] = 0,$$

то рівнання (72) перейдуть у

$$\int_a^b \{L_x[y_m] - f(x)\} L_x[\varphi_i]\, dx = 0 \tag{142}$$
$$(i=0, 1, \ldots, m),$$

отже в умови minimum-у інтеграла:

$$\int_a^b \{L_x[y_m] - f(x)\}^2 dx,$$

і ми дістанемо спосіб найменших квадратів М. Крилова.

Щодо добору функцій φ_i та Φ_i, то починати його практично можна тут тільки з функцій φ_i, бо визначення φ_i з рівнання

$$L_x[\varphi_i] = \Phi_i(x)$$

та відповідних граничних умов, є така сама важка задача, як і (30) — (31).

Уявімо тепер, що умови (31) можна справдити для рівнання

$$M_x[\mathfrak{z}] = F(x),$$

де $M_x[\ \ ]$ є вираз самоспряжений, при чім його Green-ова функція є симетрична. Тоді за φ_i можна взяти фундаментальні функції задачі

$$M_x[\varphi] = \mu\varphi$$

за умов (31), а за Φ_i — добутки $\mu_i\varphi_i$, де μ_i є її характеристичні числа. Розуміється, треба так добирати $M_x[\ \ ]$, щоб усі μ_i були відмінні від нуля.

Рівнання (72) тоді запишуться так:

$$\int_a^b \{L_x[y_m] - f(x)\}\, \varphi_i(x)\, dx = 0 \qquad (143)$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m)$$

Коли й вираз $L_x[\ \ ]$ є самоспряжений, то цей спосіб можна справді не раз згідно з Ritz-овою думкою звести до мінімізації певного інтеграла. Справді, в цьому випадку рівнання $2r$-го порядку

$$L_x[y] = f(x)$$

є Euler-ове рівнання інтеграла типу

$$\int_a^b \{ [y^{(r)}]^2 + A_1(x)[y^{(r-1)}]^2 + \cdots + A_r(x)y^2 - 2f(x)y \} dx$$

Щоб дійти рівнань (143), досить мінімізувати суму:

$$D[y_m] = \int_a^b \{ [y_m^{(r)}]^2 + A_1(x)[y_m^{(r-1)}]^2 + \cdots A_r(x)y_m^2 - 2f(x)y_m\} dx +$$

$$+ \sum_{i,j=0}^{m} a_i^{(m)} a_j^{(m)} b_{ij},$$

де квадратичну форму

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_i^{(m)} a_j^{(m)} b_{ij}$$

дібрано так, щоб частинні похідні

$$\frac{\partial D[y_m]}{\partial a_i^{(m)}} \qquad (i = 0, 1, \ldots, m)$$

звелися відповідно на вирази:

$$\int_a^b \{L_x[y_m] - f(x)\} \varphi_i \, dx$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m),$$

що можливо в багатьох випадках, але не завжди.

Так буде, напр., з задачею попереднього параграфу, коли φ_i шукати з умов

$$\varphi''(x) = \mu \varphi(x)$$

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0;$$

вийде:

$$\varphi_n = \sin \pi n x$$

Нехай загальніше

$$L_x[y] = f(x)$$

є довільне лінійне диференціяльне рівнання паристого порядку, а граничні умови нехай виглядають так:

$$y(0) = y(1) = 0$$

$$y''(0) = y''(1) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(k-2)}(0) = y^{(k-2)}(1) = 0$$

Візьмімо за φ_i фундаментальні функції задачі

$$\varphi^{(k)}(x) = \mu \varphi(x) \tag{144}$$

за тих самих граничних умов. Вони будуть:

$$\sin \pi n x \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Найлегше переконаемося в цьому так: нехай на інтервалі $(-1, +1)$

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sin \pi i x + \sum_{i=0}^{\infty} b_i \cos \pi i x \tag{145}$$

Цей ряд можна, очевидно, довільне число разів диференціювати, бо φ_n є елементарна комбінація з тригонометричних та експотенціяльних функцій. Запровадивши (145) до рівнання (144), дістанемо:

$$-\mu_i a_0 + \sum a_i \{(\pi i)^k - \mu_i\} \sin \pi i x + \sum b_i (\pm \pi i)^k - \mu_i) \cos \pi i x = 0$$

Отже виходить, що повинно бути:

$$a_0 = 0, \; a_1 = 0, \ldots, a_{i-1} = 0, \; a_{i+1} = 0, \ldots$$

$$b_1 = 0, \ldots, b_{i-1} = 0, \; b_{i+1} = 0, \ldots$$

$$\mu_i = \pm (\pi i)^k;$$

а тому

$$\varphi_i = a_i \sin \pi i x + b_i \cos \pi i x$$

Алеж із граничних умов видно зразу, що тут

$$b_i = 0,$$

і тому

$$\varphi_i = \sin \pi i x \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

Коли не вимагати, щоб число k було паристе, а граничні умови взяти такі:

$$y(0)=y(1)$$
$$y'(0)=y'(1)$$
$$\cdots\cdots$$
$$y^{(k-1)}(0)=y^{(k-1)}(1), \tag{145 a}$$

то, узагальнюючи трохи ідею використання фундаментальних функцій, зв'язаних із виразом $M_x[\ ]$, завважмо, що функції

$$\varphi_0(x)=1, \quad \varphi_{2n}(x)=\cos 2\pi nx$$
$$\varphi_{2n-1}(x)=\sin 2\pi nx$$
$$(n=1, 2, 3, \ldots)$$

справджують умови (145a) і залежності:

$$\varphi_0^{(k)}+\varphi_0=\varphi_0$$

$$\varphi_{2n-1}^{(k)}+\varphi_{2n-1}=\begin{cases}\varphi_{2n-1}\pm(2\pi n)^k\varphi_{2n-1} & (k \text{ паристе})\\ \varphi_{2n-1}\pm(2\pi n)^k\varphi_{2n} & (k \text{ непаристе})\end{cases}$$

$$\varphi_{2n}^{(k)}+\varphi_{2n}=\begin{cases}\varphi_{2n}\pm(2\pi n)^k\varphi_{2n} & (k \text{ паристе})\\ \varphi_{2n}\pm(2\pi n)^k\varphi_{2n-1} & (k \text{ непаристе})\end{cases}$$

Отже взявши

$$M_x[\mathfrak{z}]=\mathfrak{z}^{(k)}(x)+\mathfrak{z}(x),$$

ми бачимо, що функції

$$\Phi_i(x)=M_x[\varphi_i]$$

є лінійні комбінації з функцій φ_i і навпаки. А тому й тут рівнання (72) можна заступити такими:

$$\int_0^1\left\{L[y_{2m}]-f(x)\right\}\varphi_i(x)\,dx=0$$
$$(i=0, 1, \ldots, 2m)$$

Коли $M_x[\ ]$ вибрано так, що

$$N_x[y]=y(x),$$

а φ_i е фундаментальні функції задачі

$$M_x[\varphi]=\mu\varphi,$$

то узагальнений Ritz-ів спосіб (рівнання (143)), очевидно, дае в наближенні y_m перші $m+1$ членів розвинення функції y по фундаментальних функціях задачі (30) — (31). За цих умов він покриваеться способом найменших квадратів; справді бо рівнання (143) можна заступити такими:

$$(\mu_i-\lambda)\int_a^b\left\{L_x[y_m]-f(x)\right\}\varphi_i\,dx=0 \tag{146}$$
$$(i=0, 1, \ldots, m),$$

бо рівність

$$\lambda = \mu_i$$

показувала б, що задача (30) — 31) не має розв'язки.

Рівняння (146) далі переписуються так:

$$\int_a^b \{L_x[y_m] - f(x)\} \cdot \{M_x[\varphi_i] - \lambda\varphi_i\} dx = 0$$

і, нарешті, так:

$$\int_a^b \{L[y_m] - f(x)\} L_x[\varphi_i]\, dx = 0,$$

що й доводить наше твердження.

§ 22. Наближене розв'язання лінійних інтеґральних рівнань.

Нехай функція $y(x)$ є на інтервалі (a, b) єдина розв'язка інтеґрального рівняння:

$$L_x[y] = y(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) y(\xi)\, d\xi = f(x) \tag{147}$$

із змінним параметром λ. Щодо функцій $K(x, \xi)$ та $f(x)$ ми ставимо тим часом вимогу, щоб вони інтеґрувалися на тім інтервалі; отже вони можуть бути, напр., і необмежені. Але завважмо, що коли K та f, як функції від x, мають p-ті похідні, при чім похідна $\frac{\partial^p K}{\partial x^p}$ є суцільна, то існує й похідна $\frac{d^p y}{dx^p}$. Справді бо тоді, як бачимо з (147):

$$y^{(p)}(x) - \lambda \int_a^b \frac{\partial^p K(x, \xi)}{\partial x^p} y(\xi)\, d\xi = f^{(p)}(x)$$

Загальніше, коли похідна $\frac{\partial^p K(x, \xi)}{\partial x^p}$ існує та є суцільна, то різниця $y(x) - f(x)$ має p-у похідну, бо тоді

$$L_x^{(p)}[y] = [y(x) - f(x)]^{(p)} - \lambda \int_a^b \frac{\partial^p K(x, \xi)}{\partial x^p} [y(\xi) - f(\xi)]\, d\xi =$$

$$= \lambda \int_a^b \frac{\partial^p K(x, \xi)}{\partial x^p} f(\xi)\, d\xi = F(x) \tag{148}$$

Наступне твердження показує, як спосіб моментів можна застосувати до розв'язання рівняння (147):

Сума

$$y^m = a_0^{(m)} \varphi_0 + a_1^{(m)} \varphi_1 + \ldots + a_m^{(m)} \varphi_m, \tag{149}$$

де функції

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots$$

творять повну систему, а сучинники

$$a_0^{(m)},\ a_1^{(m)},\ a_2^{(m)},\ \ldots,\ a_m^{(m)}$$

справджують рівнання

$$\int_a^b L_x[y_m]\,\varphi_i\,dx = \int_a^b f(x)\,\varphi_i\,dx \qquad (150)$$

$$(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m),$$

має властивість:

$$\lim_{m\to\infty}\int_c^x y_m(x)\,dx = \int_c^x y(x)\,dx \qquad (151)$$

$$(a \leqslant c \leqslant x \leqslant b)$$

для всякої вартости параметра λ, для якої існує едина розв'язка рівнання (147). Коли до того функція $y(x)$ має p-у похідну з модулем суцільности $\omega(x)$, то

$$y - y_m = \frac{M\omega\left(\frac{1}{m}\right)}{m^{p-1}},$$

де M є обмежена функція від m, отже

$$\lim_{m\to\infty} y_m = y$$

Розписавши рівнання (150) докладніше:

$$\sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)}\int_a^b \varphi_i\varphi_j\,dx - \lambda\sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)}\int_a^b\left[\int_a^b K(x,\xi)\varphi_i(\xi)\,d\xi\right]\varphi_j(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,\varphi_j(x)\,dx$$

$$(j = 0, 1, \ldots, m),$$

бачимо, що визначник цієї системи

$$\Delta_m(\lambda) =$$

$$= \begin{vmatrix} \int_a^b \varphi_0\varphi_0\,dx - \lambda\int_a^b \varphi_0\,dx\int_a^b K(x,\xi)\varphi_0(\xi)\,d\xi, & \ldots, & \int_a^b \varphi_m\varphi_0\,dx - \lambda\int_a^b \varphi_0\,dx\int_a^b K(x,\xi)\varphi_m(\xi)\,d\xi \\ \int_a^b \varphi_0\varphi_1\,dx - \lambda\int_a^b \varphi_1\,dx\int_a^b K(x,\xi)\varphi_0(\xi)\,d\xi, & \ldots, & \int_a^b \varphi_m\varphi_1\,dx - \lambda\int_a^b \varphi_1\,dx\int_a^b K(x,\xi)\varphi_m(\xi)\,d\xi \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \int_a^b \varphi_0\varphi_m\,dx - \lambda\int_a^b \varphi_m\,dx\int_a^b K(x,\xi)\varphi_0(\xi)\,d\xi, & \ldots, & \int_a^b \varphi_m\varphi_m\,dx - \lambda\int_a^b \varphi_m\,dx\int_a^b K(x,\xi)\varphi_m(\xi)\,d\xi \end{vmatrix} \qquad (152)$$

є многочлен від λ:

$$\Delta_m(\lambda) = A_0 + A_1\lambda + \cdots + A_{m+1}\lambda^{m+1}$$

При тім, зважаючи на лінійну незалежність функцій φ_i, визначник

$$A_0 = \begin{vmatrix} \int_a^b \varphi_0\varphi_0\,dx, & \ldots, & \int_a^b \varphi_m\varphi_0\,dx \\ \int_a^b \varphi_0\varphi_1\,dx, & \ldots, & \int_a^b \varphi_m\varphi_1\,dx \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \int_a^b \varphi_0\varphi_m\,dx, & \ldots, & \int_a^b \varphi_m\varphi_m\,dx \end{vmatrix} \qquad (153)$$

є, як відомо, істотно додатне число. Тому взагалі рівність

$$\Delta_m(\lambda) = 0 \tag{154}$$

є правдива тільки для обмеженого числа вартостей параметра λ, і в обсягу всякої вартости цього параметра є такі, де система рівнань (150) є означена.

Упровадьмо тепер зазначення:

$$u_m = y_m - y \tag{155}$$

$$\eta_m(x) = \int_a^b K(x, \xi)\, u_m(\xi)\, d\xi,$$

обмеживши зміну параметра λ обсягом якоїсь його неособливої вартости. Хоч би яке було m, завжди можна λ в тім обсягу вибрати так, щоб було

$$\Delta_m(\lambda) \neq 0,$$

що в дальших міркуваннях само собою й розумітиметься. Тоді, взявши під увагу, що

$$\int_a^b f(x)\varphi_i\, dx = \int_a^b L_x[y]\varphi_i\, dx$$

$$L_x[y_m] - L_x[y] = L_x[u_m],$$

можемо рівнання (150) переписати так:

$$\int_a^b L_x[u_m]\, \varphi_i\, dx = 0 \tag{156}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m).$$

Помноживши обидві сторони рівности (156) на $a_i^{(m)}$ та просумувавши по i від 0 до m дістанемо:

$$\int_a^b L_x[u_m]\, y_m(x)\, dx = 0 \tag{157}$$

Нехай далі сучинники $b_i^{(m)}$ є такі, що різниця

$$y - (b_0^{(m)}\varphi_0 + b_1^{(m)}\varphi_1 + \ldots + b_m^{(m)}\varphi_m) = \varepsilon_m(x) \tag{158}$$

справджує рівнання замкнености:

$$\lim_{m=\infty} \int_a^b \varepsilon_m^2(x)\, dx = 0 \tag{159}$$

Якщо існує суцільна похідна $y^{(p)}$ з модулем суцільности $\omega(x)$, то можна навіть уважати, що

$$|\varepsilon_m(x)| < \frac{M\omega\left(\frac{1}{m}\right)}{m^p} \tag{160}$$

Помноживши тепер обидві сторони рівности (156) на $b_i^{(m)}$ та знов просумувавши по i від 0 до m, — дістанемо:

$$\int_a^b L_x[u_m](y - \varepsilon_m)\, dx = 0 \tag{161}$$

Нарешті, віднявши (161) від (157) та використавши зазначення (155), дістанемо:

$$\int_a^b L_x[u_m]\left\{L_x[u_m]+\lambda\eta_m+\varepsilon_m\right\}dx=0 \tag{162}$$

За допомогою нерівности Буняковського легко дістанемо:

$$\int_a^b L_x[u_m](\lambda\eta_m+\varepsilon_m)\,dx=$$

$$=2\mu\sqrt{\int_a^b L_x^2[u_m]\,dx}\cdot\sqrt{\int_a^b(\lambda^2\eta_m^2+\varepsilon_m^2)\,dx},$$

де

$$|\mu|\leqslant 1,$$

отже залежність (162) перепишеться так:

$$\int_a^b L_x^2[u_m]\,dx=2\mu\sqrt{\int_a^b L_x^2[u_m]\,dx}\cdot\sqrt{\int_a^b(\lambda^2\eta_m^2+\varepsilon_m^2)\,dx},$$

звідки:

$$\int_a^b L_x^2[u_m]\,dx\leqslant 2\int_a^b(\varepsilon_m^2+\lambda^2\eta_m^2)\,dx \tag{163}$$

Із другого боку, зазначивши через $\Gamma(x,\xi;\lambda)$ розв'язне ядро (noyau résolvant) рівняння (147) можемо, зважаючи на очевидну рівність:

$$L_x[u_m]=L_x[u_m]$$

написати:

$$u_m=L_x[u_m]+\lambda\int_a^b\Gamma(x,\xi;\lambda)L_\xi[u_m]\,d\xi, \tag{164}$$

де $L_\xi[u_m]$ є вираз, що постає з $L_x[u_m]$ через заміну скрізь змінного x змінним ξ, або, зважаючи на другу формулу (155):

$$\eta_m(x)=\int_a^b L_x[u_m]\,\Gamma(x,\xi;\lambda)\,d\xi \tag{165}$$

Зважаючи на теорему замкнености, існують такі чинники $C_i^{(m)}$, що різниця

$$\gamma_m(x,\xi;\lambda)=\Gamma(x,\xi;\lambda)-C_0^{(m)}\varphi_0(\xi)-C_1^{(m)}\varphi_1(\xi)-\ldots-C_m^{(m)}\varphi_m(\xi) \tag{166}$$

має властивість:

$$\lim_{m=\infty}\int_a^b\gamma_m^2(x,\xi;\lambda)\,d\xi=0 \tag{167}$$

Помноживши тепер ліву сторону рівности (156) на $C_i^{(m)}$, просумувавши по i від 0 до m та віднявши від правої сторони рівности (165), дістанемо:

$$\eta_m(x)=\int_a^b L_\xi[u]\,\gamma_m\,d\xi \tag{168}$$

або

$$u_m=L_x[u_m]+\lambda\int_a^b L_\xi[u_m]\,\gamma_m\,d\xi, \tag{169}$$

звідки через нерівність Буняковського доводимо:

$$\eta_m^2(x) \leqslant \int_a^b \gamma_m^2 \, d\xi \int_a^b L_\xi^2[u_m] \, d\xi,$$

і остаточно, нагадавши нерівність (163):

$$\eta_m^2(x) \leqslant 2 \int_a^b \gamma_m^2 \, d\xi \int_a^b (\varepsilon_m^2 + \lambda^2 \eta_m^2) \, dx$$

Для досить великих вартостей m, зважаючи на (167), маємо нерівніс

$$\eta_m^2(x) \leqslant \frac{2 \int_a^b \lambda_m^2 \, d\xi \int_a^b \varepsilon_m^2 \, dx}{1 - 2\lambda^2 \int_a^b \gamma_m^2 \, d\xi} \qquad (17$$

Отже за наших загальних умов буде:

$$\lim_{m \to \infty} \eta_m = 0, \qquad (17$$

а коли $y(x)$ має p-у суцільну похідну, то й

$$|\eta_m| < \frac{M \omega\left(\frac{1}{m}\right)}{m^p} \qquad (17$$

Далі, зінтеґрувавши рівність (169), дістанемо:

$$\int_c^x u_m \, dx = \int_c^x L_x[u_m] \, dx + \lambda \int_c^x \int_a^b \gamma_m L_\xi[u_m] \, d\xi \, dx$$

$$(a \leqslant c \leqslant x \leqslant b),$$

звідки, за допомогою нерівности Буняковського, виходить:

$$\left| \int_c^x u_m \, dx \right| \leqslant \sqrt{\int_c^x L_x^2[u_m] \, dx \int_c^x dx} +$$

$$+ |\lambda| \int_c^x \left(\sqrt{\int_a^b \gamma_m^2 \, dx} \sqrt{\int_a^b L_\xi^2[u_m] \, d\xi} \right) dx \qquad (17$$

Нагадавши нерівність (163), що за умов (171) дає:

$$\lim_{m \to \infty} \int_a^b L_x^2[u_m] \, dx = 0, \qquad (174$$

а за умов (172) веде до

$$\int_a^b L_x^2[u_m] < \frac{N \omega^2\left(\frac{1}{m}\right)}{m^{2p}}, \qquad (175$$

де N є обмежена функція від m, дістанемо з (173) відповідно:

$$\lim_{m \to \infty} \int_c^x u_m \, dx = 0 \qquad (176$$

або

$$\left|\int_c^x u_m\,dx\right| < \frac{P\,\omega\left(\frac{1}{m}\right)}{m^p}, \tag{177}$$

де P є теж обмежена функція від m. З цих формул ясно, що в обсягу всякої неособливої вартости параметра λ, при досить великім значку m, нема нулів у визначника $\Delta_m(\lambda)$, бо поблизу такого нуля $\int_c^x u_m\,dx$ був би необмежений.

Формули (176) та (177) доводять обидві частини нашого твердження. Крім того, ми показали, що особливі вартості параметра λ є границі нулів визначника $\Delta_m(\lambda)$, коли m нескінченно росте.

§ 23. Узагальнення та додатки

Завважмо, що цілком подібні викладки можна було б проробити на рівнанні (142), виходячи, замість системи рівнань (150), із системи:

$$\int_a^b L_x^{(p)}[y_m]\,\varphi_i^{(p)}\,dx = \int_a^b F(x)\,\varphi_i^{(p)}\,dx$$

$$(i = 0,\ 1,\ .\ .\ .\ ,m),$$

аби лиш похідні $\varphi_i^{(p)}$ творили систему повну. Тоді замість висліду (176) ми дістали б такий:

$$\lim_{m=\infty} \int_c^x u_m^{(p)}\,dx = 0,$$

а з нього рівності:

$$y^{(p-1)} = \lim_{m=\infty} y_m^{(p-1)}$$

$$y^{(p-2)} = \lim_{m=\infty} y_m^{(p-2)}$$

$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$y = \lim_{m=\infty} y_m$$

Зробімо тут ще дві додаткові уваги.

Замість рівнань (150) можна було б узяти трохи загальніші:

$$\int_a^b L_x[y_m]\,\Phi_i\,dx = \int_a^b f(x)\,\Phi_i\,dx$$

$$(i = 0,\ 1,\ .\ .\ .\ ,m),$$

де

$$M_x[\mathfrak{z}] = \mathfrak{z}(x) - \int_a^b Q(x,\xi)\,\mathfrak{z}(\xi)\,d\xi,$$

аби лиш функції Φ_i були лінійно незалежні та творили систему замкнену. Ця увага, сама по собі не істотна, тільки відзначає повну аналогію наведених у параграфі 22 міркувань із теорією попередніх параграфів.

Остання увага приведе нас до деяких нових вислідів. Піднісши обидві сторони рівности (169) до квадрату, застосувавши нерівність Cauchy та зінтеґрувавши, дістанемо:

$$\int_a^b u_m^2(x)\,dx \leqslant 2\int_a^b L_x^2[u_m]\,dx + 2\lambda^2 \int_a^b \left\{\int_a^b L_\xi[u_m]\,\gamma_m\,d\xi\right\}^2 dx$$

Звідси, за допомогою нерівностей Буняковського, рівність

$$\lim_{m=\infty} \int_a^b u_m^2(x)\,dx = 0, \tag{178}$$

що з неї знов випливає залежність (176).

Ця рівність доводить середню квадратичну збіжність суми y_m до функції y.

Розгляньмо тепер нову функцію $Y_m(x)$:

$$Y_m(x) = \lambda\int_a^b K(x,\xi)\,y_m(\xi)\,d\xi + f(x) \tag{179}$$

Віднявши рівність (147) від (179), дістанемо:

$$Y_m(x) - y(x) = \lambda\int_a^b K(x,\xi)\,u_m(\xi)\,d\xi \tag{180}$$

Зробивши звичайне припущення, що ядро $K(x,\xi)$, як функція від ξ, інтеґрується разом із своїм квадратом, дістанемо з (180):

$$\{Y_m(x) - y(x)\}^2 \leqslant \lambda^2 \int_a^b K^2(x,\xi)\,d\xi \int_a^b u_m^2(\xi)\,d\xi$$

Отже

$$y(x) = \lim_{m=\infty} Y_m(x), \tag{181}$$

тобто точкову збіжність функції $Y_m(x)$ до відшукуваної розв'язки $y(x)$.

Тому, що для інтеґральних рівнань у двох та кількох вимірах усі міркування цього параграфа по суті лишаються ті самі, то ми в другій частині цієї праці до інтеґральних рівнань уже не вернемося.

§ 24. Характеристичні числа та фундаментальні функції

Для всякої точки обсягу S комплексного змінного λ (пор. § 11), що не є точка скупчення для коренів рівнань (82), є правдива рівність (80), що її напишемо так:

$$y_m(x) = \frac{\Delta_m(x;\lambda)}{\Delta_m(\lambda)}, \tag{182}$$

або так:

$$y_m(x) = \frac{\int_a^b G(x,\xi)\,\delta_m(\xi)\,d\xi}{\Delta_m(\lambda)}, \tag{183}$$

е

$$\delta_m(\xi)=\begin{vmatrix} 0, & \Phi_0(\xi), & \ldots, & \Phi_m(\xi) \\ \int_a^b f\Phi_0\,dx, & \int_a^b L_x[\varphi_0]\Phi_0 dx, & \ldots, & \int_a^b L_x[\varphi_m]\Phi_0\,dx \\ \int_a^b f\Phi_1\,dx, & \int_a^b L_x[\varphi_0]\Phi_1\,dx, & \ldots, & \int_a^b L_x[\varphi_m]\Phi_1\,dx \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \int_a^b f\Phi_m\,dx, & \int_a^b L[_x\varphi_0]\Phi_m dx, & \ldots, & \int_a^b L_x[\varphi_m]\Phi_m\,dx \end{vmatrix}, \tag{184}$$

бо ще й так:

$$y_m=\int_a^b \Gamma_m(x,\xi;\lambda)f(\xi)\,d\xi, \tag{185}$$

е

$$\Gamma_m(x,\xi;\lambda)=\frac{1}{\Delta_m(\lambda)}\cdot\begin{vmatrix} 0, & \varphi_0(x), & \ldots, & \varphi_m(x) \\ \Phi_0(\xi), & \int_a^b L_x[\varphi_0]\Phi_0\,dx, & \ldots, & \int_a^b L_x[\varphi_m]\Phi_0\,dx \\ \Phi_1(\xi), & \int_a^b L_x[\varphi_0]\Phi_1\,dx, & \ldots, & \int_a^b L_x[\varphi_m]\Phi_1\,xd \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Phi_m(\xi), & \int_a^b L_x[\varphi_0]\Phi_m\,dx, & \ldots, & \int_a^b L_x[\varphi_m]\Phi_m\,dx \end{vmatrix} \tag{186}$$

рипустімо, що функція

$$y(x)=\lim_{m\to\infty} y_m(x),$$

к функція змінного λ, має полюси. Нехай поблизу полюса

$$\lambda=\lambda_j$$

она виглядає так:

$$y(x)=\frac{\psi_j(x)}{(\lambda-\lambda_j)^h}+\frac{\psi_{1j}(x)}{(\lambda-\lambda_j)^{h-1}}+\ldots+\frac{\psi_{hj}(x)}{\lambda=\lambda_j}+\ldots \tag{187}$$

$$(\psi_j\not\equiv 0),$$

е ненаписані члени є реґулярні щодо $\lambda-\lambda_j$.

Уявімо, що полюс λ_j не є точка скупчення множини s. Тоді, почавши досить великого значка m, в обсягу цього полюса не буде полюсів функцій $y_m(x)$. Отже, зінтеґрувавши вираз:

$$[y(x)-y_m(x)](\lambda-\lambda_j)^{h-1}=\frac{\psi_j(x)}{\lambda-\lambda_j}+\psi_{1j}(x)+\ldots, \tag{187$_a$}$$

е ненаписані члени є реґулярні щодо $\lambda-\lambda_j$; по нескінченно малому контуру, що оточує точку

$$\lambda=\lambda_j,$$

ми дістали б:

$$0 \equiv 2\pi i\ \psi_j(x),$$

що неможливо. Отже λ_j є одна з точок скупчення нулів рівнань (82).

Нехай обсяг S є круг з центром у початку координат та радіюсом R

$$|\lambda| < R \tag{188}$$

Викиньмо з нього круги, визначені нерівностями

$$|\lambda - \lambda_j| \leqslant r,$$

де r є таке мале число, як хочемо, а λ_j перебігає всі характеристичні числа, що належать до обсягу (188) або його границі. Тоді в новому обсягу, що справджує нерівності:

$$\begin{aligned} &|\lambda| < R \\ &|\lambda - \lambda_j| \geqslant r, \end{aligned} \tag{189}$$

при досить великому m, буде

$$|y - y_m| < \varepsilon_m, \tag{190}$$

де ε_m є таке мале число, як хочемо; докладніше його визначено в параграфах 14 — 16. Нехай, крім того, число r узято таке мале, що кола

$$|\lambda - \lambda_j| = r \tag{191}$$

не мають спільних точок. Тоді, інтеґруючи рівність (187_a) по колу (191) ми дістали б, завдяки нерівності (190):

$$|\psi_j(x)| \leqslant \varepsilon_m r^h, \tag{191_a}$$

коли б у цьому колі $y_m(x)$ було реґулярною функцією від λ. А що нерівність (191_a) неможлива, то існує бодай один полюс у функції $y_m(x)$ як функції параметра λ, у колі (191). Цей полюс і є наближена вартість характеристичного числа λ_i.

Щодо фундаментальних функцій, то вони визначаються наближено, очевидно, рівностями:

$$\left|\psi_{kj}(x) - \frac{1}{2\pi i}\oint y_m(x)\,(\lambda - \lambda_j)^{h-k-1}\,d\lambda\right| \leqslant \varepsilon_m r^{h-k},$$

де інтеґрал $\oint$ береться по колу (191).

Нарешті, функція (186) є наближення Green-ової функції $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ нашої задачі такого роду, що

$$\lim_{m=\infty} \int_a^\xi (\Gamma - \Gamma_m)\, d\xi = 0$$

Справді, віднявши від рівности (185) рівність

$$y = \int_a^b \Gamma(x, \xi; \lambda) \cdot f(\xi)\, d\xi,$$

дістанемо:

$$y_m - y = \int_a^b (\Gamma_m - \Gamma) f(\xi)\, d\xi$$

оклавши тут

$$(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi \leqslant x) \\ 0 & (\xi > x), \end{cases}$$

станемо:

$$\lim_{m=\infty} \int_a^\xi (\Gamma_m - \Gamma)\, d\xi = 0 \tag{192}$$

ак само

$$\lim_{m=\infty} \int_a^\xi \left(\frac{\partial^l \Gamma_m}{\partial x^l} - \frac{\partial^l \Gamma}{\partial x^l} \right) d\xi = 0 \tag{192$_a$}$$

$$(l = 0, 1, \ldots k-1)$$

Питання про визначення фундаментальних функцій, коли відомі характеистичні числа λ_j, зводиться, очевидно, до розв'язання однорідного дифеенціяльного рівнання

$$L_{xj}[y_j] = M_x[y_j] - \lambda_j N_x[y_j] = 0 \tag{193}$$

а однорідних граничних умов (31). Припустімо, що ми знаємо λ_j тільки аближено:

$$\lambda_j \approx \lambda^{(m)},$$

к нуль визначника $\Delta_m(\lambda)$, і пошукаймо наближену вартість відповідної ундаментальної функції y_j:

$$y_j \approx y_{jm} = a_0^{(m)} \varphi_0 + a_1^{(m)} \varphi_1 + \cdots + a_m^{(m)} \varphi_m,$$

изначивши її до кінця такими двома умовами:

$$\int_a^b L_{xj}[y_{jm}]\, M_x[\varphi_i]\, dx = (\lambda_j^{(m)} - \lambda_j) \int_a^b N_x[y_{jm}]\, M_x[\varphi_i]\, dx \tag{193$_a$}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m)$$

$$\int_a^b N_x^2 [y_{jm}]\, dx = 1 \tag{193$_b$}$$

Легко бачити, що умова (193$_a$) не вимагає знати число λ_j, бо вона зводиться на таку систему лінійних однорідних рівнань:

$$\int_a^b M_x[y_{jm}]\, M_x[\varphi_i]\, dx = \lambda_j^{(m)} \int_a^b N_x[y_{jm}]\, M_x[\varphi_i]\, dx$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m),$$

що має визначник

$$\Delta_m(\lambda_j^{(m)}) = 0$$

Припустивши для простоти, що $\lambda_j^{(m)}$ є простий корінь рівнання

$$\Delta_m(\lambda) = 0,$$

бачимо, що умови (193$_a$) та (193$_b$) цілком визначають сучинники

$$a_0^{(m)}, a_1^{(m)}, \ldots, a_m^{(m)}$$

Комбінуючи вже відомим способом рівності (193) та (193$_a$) і називаючи різницю $y_{jm} - y_j$ через u_{jm}, дістанемо:

$$\int_a^b L_{xj}[u_{jm}]\, M_x[\varphi_i]\, dx = (\lambda_j^{(m)} - \lambda_j) \int_a^b N_x[y_{jm}]\, M_x[\varphi_i]\, dx \tag{193$_c$}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m)$$

Ці рівності для неоднорідної задачі

$$L_{xj}\{u_{jm}] = L_{xj}[y_{jm}] - L_{xj}[y_j] \qquad (193$$

з невідомою функцією u_{jm} за однорідних умов (31) грають ту саму ролю що рівності (72) для задачі (30)—(31). Треба тільки пам'ятати, що ролю Green-ової функції G в задачі (193_d) грає так звана Green-ова функція в поширеному розумінні (im erweiterten Sinne); назвімо її $H(x, \xi)$.

Повторюючи в основному міркування параграфа 14, виводимо легко з (193_a):

$$\int_a^b L_{xj}[u_{jm}]\,\{L_{xj}[u_{jm}] + \lambda_j N_{jx}[u_{jm}] + \alpha_m(x)\}\,dx =$$

$$= (\lambda_j^{(m)} - \lambda_j)\int_a^b N_x[y_{jm}]\,\{L_{xj}\,[u_{jm}] + \lambda_j N_x\,[u_{jm}] + \alpha_m(x)\}\,dx,$$

де

$$\lim_{m=\infty}\int_a^b \alpha_m^2(x)\,dx = 0$$

Звідси, застосовуючи нерівності Cauchy та Буняковського, маємо нерівність:

$$\int_a^b L_{xj}^2[u_{jm}]\,dx \leqslant \int_a^b (\lambda_j N_{xj}[u_{jm}] + \alpha_m(x))^2\,dx + (\lambda_j^{(m)} - \lambda_j)^2,$$

що в цій задачі грає ролю нерівности (92).

Далі маємо, очевидно, подібно до рівностей (93):

$$y_{jm} - y_j = \lambda_j \int_a^b H(x,\xi)\,N_\xi\,[y_{jm} - y_j]\,d\xi + \int_a^b H(x,\xi)\cdot L_{\xi j}[y_{jm} - y_j]\,d\xi$$

$$y'_{jm} - y'_j = \lambda_j \int_a^b \frac{\partial H}{\partial x} N_\xi\,[y_{jm} - y_j]\,d\xi + \int_a^b \frac{\partial H}{\partial x}\cdot L_{\xi j}\,[y_{jm} - y_j]\,d\xi$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{jm}^{(k-1)} - y_j^{(k-1)} = \lambda_j \int_a^b \frac{\partial^{k-1} H}{\partial x^{k-1}} N_\xi\,[y_{jm} y_j]\,d\xi + \int_a^b \frac{\partial^{k-1} H}{\partial x^{k-1}} L_{\xi j}\,[y_{jm} - y_j]\,d\xi,$$

і з них, як із рівностей (93), виведемо остаточно:

$$y_{jm}^{(l)} - y_j^{(l)} = \sigma_{jml}\cdot\sqrt{\int_a^b \alpha_m^2(x)\,dx + (\lambda_j^{(m)} - \lambda_j)^2} \qquad (193_c)$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1),$$

де σ_{jml} є обмежені функції від m. Так показано, що до фундаментальної функції y_j можна необмежено наближатися через функції y_{jm}. Умова (193_b) істотна не тільки тим, що вона до кінця визначає сучинники $a_i^{(m)}$, а й тим, що без неї не можна було б запевнити обмеженість чинника σ_{jml}.

РОЗДІЛ III

Застосування ортогональних функцій до розв'язання та розвивання в ряди розв'язок лінійних диференціяльних рівнань

§ 25. Hadamard-ова нерівність

Нехай

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

є додатна квадратична форма. Відомо, що її дискримінант

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{194}$$

та всі його підвизначники, належні до головної косини, є додатні.

Усяка неособлива квадратова матиця B n-го ступеня є квадрат другої квадратової матиці C того самого ступеня. При тім, коли матиця B є дійсна і має полюси додатні, то матицю C можна теж добрати дійсну, а коли B є симетрична, то й за C можна взяти матицю симетричну. Тому матиця:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

визначника (194) є квадрат якоїсь дійсної симетричної матиці:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{k1} & Y_{k2} & \dots & Y_{kn} \\ Y_{k+1,1} & Y_{k+1,2} & \dots & Y_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} \; k \text{ рядків} \\ \} \; n-k \text{ рядків} \end{matrix} \tag{195}$$

Отже

$$A = YY' = \begin{pmatrix} Y_1 Y_1', & Y_1 Y_2' \\ Y_2 Y_1', & Y_2 Y_2' \end{pmatrix}, \tag{196}$$

де

$$Y' = \begin{pmatrix} Y_{11} & \vdots & Y_{k1} & Y_{k+1,1} & \vdots & Y_{n1} \\ Y_{12} & \vdots & Y_{k2} & Y_{k+1,2} & \vdots & Y_{n2} \\ \cdot & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot \\ \cdot & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot \\ \cdot & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot \\ Y_{1n} & \vdots & Y_{kn} & Y_{k+1,n} & \vdots & Y_{nn} \end{pmatrix} = \underbrace{(Y_1'}_{k\ \text{стовпців}} \qquad \underbrace{Y_2')}_{n\quad k\ \text{стовпців}}$$

Із другого боку, розвиваючи визначник:

$$Y = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \ldots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \ldots & Y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \ldots & Y_{nn} \end{vmatrix}$$

по підвизначниках перших k рядків, дістанемо:

$$Y = \sum_{i_1, i_2, \ldots i_k} Y(i_1, i_2, \ldots, i_k) \cdot y(i_1, i_2, \ldots, i_k), \tag{197}$$

де

$$Y(i_1, i_2, \ldots, i_k) = \begin{vmatrix} Y_{1i_1} & Y_{1i_2} & \ldots & Y_{1i_k} \\ Y_{2i_1} & Y_{2i_2} & \ldots & Y_{2i_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_{ki_1} & Y_{ki_2} & \ldots & Y_{ki_k} \end{vmatrix}$$

Із (197), за допомогою нерівности Cauchy, дістаємо:

$$Y^2 \leqslant \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k} Y^2(i_1, i_2, \ldots, i_k) \cdot \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k} y^2(i_1, i_2, \ldots, i_k) \tag{198}$$

Алеж відомо, що

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k} Y^2(i_1, i_2, \ldots, i_k) = |Y_1 \cdot Y_1'|$$

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k} y^2(i_1, i_2, \ldots, i_k) = |Y_2 \cdot Y_2'|,$$

де $|\ |$ є знак визначника; а тому (198) дістає вигляд:

$$|Y \cdot Y'| \leqslant |Y_1 Y_1'| \cdot |Y_2 Y_2'|,$$

що за допомогою (196) дає:

$$A \leqslant \begin{vmatrix} a_{11}, & \ldots, & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1}, & \ldots, & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{k+1,k+1}, & \ldots, & a_{k+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,k+1}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Звідси випливає й загальніший вислід:

$$A \leqslant \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{k+1,k+1} & \ldots & a_{k+1,l} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l,k+1} & \ldots & a_{ll} \end{vmatrix} \ldots \begin{vmatrix} a_{p+1,p+1} & \ldots & a_{p+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,p+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{199}$$

$$k < l < \ldots < p < n$$

Зосібна маємо:

$$A \leqslant a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}, \tag{199$_a$}$$

тобто так звану Hadamard-ову нерівність.

Нехай ще

$$A = |\mathfrak{A}\mathfrak{A}'|,$$

де

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 \\ \mathfrak{A}_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{A}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (m \leqslant n)$$

Тоді із (199) дістаємо:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{A}'| \leqslant |\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1'| \cdot |\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2'| \ldots |\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_r'| \tag{200}$$

Зосібна

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{A}| \leqslant \prod_{i=1}^{m} (a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{in}^2) \tag{201}$$

На цю нерівність ми звичайно й посилатимемося, як на Hadamard-ову. Нерівності (199) та (200) є узагальнення Hadamard-ової нерівности. Вони обидві є, як бачимо, висліди з нерівности Cauchy:

$$(\sum ab)^2 \leqslant \sum a^2 \sum b^2$$

§ 26. Інший довід

Інакше нерівність (199) можна довести так.

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{12}' & A_2 \end{pmatrix},$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{k+1,\,k+1} & \ldots & a_{k+1,\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,\,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (2k \leqslant n)$$

Відомо, що симетричну матицю A_1 можна ортогональним перетворенням звести на діягональну. Отже можна дібрати таку ортогональну матицю P_1 порядку k, що буде

$$\begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & I \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} P_1^{-1} & O \\ O & I \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 & B_{12} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_k & \\ \hline & & B_{12}' & & A_2 \end{array}\right), \tag{202}$$

де λ_i є полюси матиці A_1, отже числа додатні.

Із (202), розвиваючи визначник правої сторони по підвизначних першого рядка, виводимо:

$$A = \lambda_1 \left| \begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda_2 0 \cdot \cdot 0 \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 0 0 \cdot \cdot \lambda_k \end{matrix} & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \cdot & A_2 \end{array} \right| - Q_1$$

де Q_1 є додатна квадратична форма. Отже

$$A \leqslant \lambda_1 \left| \begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda_2 \cdot \cdot 0 \\ 0 \cdot \cdot \lambda_k \end{matrix} & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \cdot & A_2 \end{array} \right|$$

Продовживши цю редукцію, дістанемо:

$$A \leqslant \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k \cdot |A_2| \tag{203}$$

А що

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k = |A_1|,$$

то з (203) і маємо:

$$|A| \leqslant |A_1| . |A_2|,$$

що безпосередньо дає нерівність (199).

§ 27. Деякі теореми про нескінченні визначники

Доведімо тепер таке твердження:

Коли ряди

$$\sum_i |a_{ii}|, \quad \sum_{i,j} |a_{ij}^2| \tag{204}$$

збігаються, то нескінченний визначник

$$A = \begin{vmatrix} 1 + a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots \\ a_{21}, & 1 + a_{22}, & a_{23}, & \ldots \\ a_{31}, & a_{32}, & 1 + a_{33}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \tag{205}$$

та підвизначники $\dfrac{\partial A}{\partial a_{ij}}$ *збігаються абсолютно і є обмежені в своїй сукупності*[1]).

Справді, запровадивши зазначення

$$A_m = \begin{vmatrix} 1 + a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots, & a_{1m} \\ a_{21}, & 1 + a_{22}, & a_{23}, & \ldots, & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & a_{m3}, & \ldots, & 1 + a_{mm} \end{vmatrix},$$

[1]) Пор. Riesz, Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, pp. 35 — 39.

маемо на підставі Hadamard-ової нерівности:

$$|A_m^2| \leqslant \prod_{i=1}^{m} (1 + 2|a_{ii}| + \sum_{k=1}^{m} |a_{ik}^2|)$$

$$\left|\left(\frac{\partial A_m}{\partial a_{ll}}\right)^2\right| \leqslant \frac{\prod_{i=1}^{m} (1 + 2|a_{ii}| + \sum_{k=1}^{m} |a_{ik}^2|)}{1 + 2|a_{ll}| + \sum_{k=1}^{m} |a_{lk}^2|}$$

$$\left|\left(\frac{\partial A_m}{\partial a_{hl}}\right)^2\right| \leqslant \frac{\prod_{i=1}^{m} (1 + 2|a_{ii}| + \sum_{k=1}^{m} |a_{ik}^2|^2)}{(1 + 2|a_{hh}| + \sum_{k=1}^{m} |a_{hk}^2|)(1 + 2|a_{ll}| + \sum_{k=1}^{m} |a_{lk}^2|)} \cdot \sum_{i=1}^{m} |a_{hi}|,$$

що доводить обмеженість сукупности згадуваних визначників.

Окрім того, маемо:

$$A_{m+1} - A_m = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\partial A_{m+1}}{\partial a_{m+1,i}} \cdot a_{m+1,i}$$

$$A_{m+2} - A_{m+1} = \sum_{i=1}^{m+2} \frac{\partial A_{m+2}}{\partial a_{m+2,i}} \cdot a_{m+2,i}$$

. . . .

$$A_{m+p} - A_{m+p-1} = \sum_{i=1}^{m+p} \frac{\partial A_{m+p}}{\partial a_{m+p,i}} \cdot a_{m+p,i}$$

Звідси, сумуючи, дістаемо:

$$A_{m+p} - A_m = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial A_{m+j}}{\partial a_{m+j,m+j}} \cdot a_{m+j,m+j} + \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{m+j-1} \frac{\partial A_{m+j}}{\partial a_{m+p,i}} a_{m+j,i}$$

Застосовуючи нерівності Cauchy та Буняковського, маемо:

$$|(A_{m+p} - A_m)^2| \leqslant 2\left\{\max\left|\frac{\partial A_{m+j}}{\partial a_{m+j,m+j}}\right| \sum_{j=1}^{p} |a_{m+j,m+j}|\right\}^2 +$$

$$+ 2 \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{m+j-1} \left|\left(\frac{\partial A_{m+j}}{\partial a_{m+j,i}}\right)^2\right| \cdot \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{m+j-1} |a_{m+j,i}^2| \tag{206}$$

На підставі Hadamard-ової нерівности виходить:

$$\left|\left(\frac{\partial A_{m+j}}{\partial a_{m+j,i}}\right)^2\right| \leqslant \sum_{k=1}^{m+1} \left|\left(\frac{\partial^2 A_{m+j}}{\partial a_{m+j,i} \partial a_{ik}}\right)^2\right| \cdot \sum_{k=1}^{m+j} |a_{ik}^2| \qquad (k \neq i),$$

що дає змогу заступити формулу (206) такою

$$|(A_{m+p}-A_m)^2| \leqslant 2\max \frac{\partial A_{m+j}}{\partial a_{m+j,\, m+j}} \left| \left(\sum_{j=1}^{p} |a_{m+j,\, m+j}| \right)^2 + \right.$$

$$+ 2\max \left| \frac{\partial^2 A_{m+j}}{\partial a_{m+j}\, \partial a_{ik}} \right|^2 \cdot \sum_{i,\, k=1}^{m+p} |a_{ik}^2| \cdot \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{m+j-1} |a_{m+j}^2| \qquad (207)$$

А що ряди (204) збіжні, то якраз виходить, що

$$\lim_{m=\sim} \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{m+j-1} a_{m+j,\, i}^2 \, | = 0$$

$$\lim_{m=\sim} \sum_{j=1}^{p} |a_{m+j,\, m+j}| = 0$$

Отже (206) дає:

$$\lim_{m=\sim} (A_{m+p} - A_m) = 0$$

Це доводить, що існує границя

$$A = \lim_{m=\sim} A_m$$

Ті самі міркування застосовують і для того, щоб довести збіжність підвизначників, бо, напр., визначник $\frac{\partial A}{\partial a_{ij}}$ відрізняється від A тим, що всі елементи i-го рядка та j-го стовпця, крім їхнього спільного елементу, що дорівнює 1, є нулі, отже справджує умови теореми.

Як висновок, з цієї теореми випливає, що, за самої умови збіжности ряду

$$\sum |a_{ij}^2| \qquad (208)$$

визначники

$$\left| \begin{matrix} 1, & \frac{a_{12}}{1+a_{11}}, & \frac{a_{13}}{1+a_{11}}, & \ldots \\ \frac{a_{21}}{1+a_{22}}, & 1, & \frac{a_{31}}{1+a_{22}}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right|$$

$$(205_a)$$

$$\left| \begin{matrix} 1, & \frac{a_{12}}{\sqrt{(1+a_{11})(1+a_{22})}}, & \frac{a_{13}}{\sqrt{(1+a_{11})(1+a_{33})}}, & \ldots \\ \frac{a_{21}}{\sqrt{(1+a_{11})(1+a_{22})}}, & 1, & \frac{a_{23}}{\sqrt{(1+a_{22})(1+a_{33})}}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right|$$

та їх підвизначники збігаються абсолютно і є обмежені в своїй сукупності, якщо тільки

$$\liminf |1 + a_{ii}| \neq 0 \qquad (i = 1,\, 2,\, \ldots)$$

§ 28. Другий довід теореми попереднього параграфа

Інакше збіжність визначника (205) можна довести так.

Розкладімо визначник A_{m+p} за підвизначниками перших m рядків. Вийде

$$A_{m+p} = \sum A(i_1, i_2, \ldots, i_m) \cdot a(i_1, i_2, \ldots, i_m) +$$

$$+ A_m \begin{vmatrix} 1 + a_{m+1,m+1}, & \ldots, & a_{m+1,m+p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m+p,m+1}, & \ldots, & 1 + a_{m+p,m+p} \end{vmatrix}, \tag{209}$$

де $A(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ є один із тих визначників (тільки не A_m), а $a(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ його доповнення. Ясно, що бодай у одному з рядків усякого визначника $a(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ нема елементу типу

$$1 + a_{m+j,m+j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, p);$$

нехай нумер цього рядка є i.

Те саме буде правдиве, коли (209) перепишемо так:

$$A_{m+p} - A_m = \sum A(i_1, i_2, \ldots, i_m) . a(i_1, i_2, \ldots, i_m), \tag{209$_a$}$$

тобто до визначників $a(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ зачислимо всі ті, що постають із визначника

$$\begin{vmatrix} 1 + a_{m+1,m+1}, & \ldots, & a_{m+1,m+p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m+p,m+1}, & \ldots, & 1 + a_{m+p,m+p} \end{vmatrix}$$

через зменшення на одиницю одного або кількох елементів його головної діягоналі.

Застосувавши до рівности (209$_a$) нерівність Cauchy, матимемо:

$$|(A_{m+p} - A_m)^2| \leqslant |\mathfrak{A}_m \mathfrak{A}'_m| \cdot \sum_{k=1}^{n} |\mathfrak{A}_{pk} \mathfrak{A}'_{pk}|, \tag{210}$$

де

$$\mathfrak{A}_m = \begin{pmatrix} 1 + a_{11}, & \ldots; & a_{1,m}, & \ldots, & a_{1,m+p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}, & \ldots, & 1 + a_{mn}, & \ldots, & a_{m,m+p} \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{A}_{pk} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{m+1,1}, \ldots, a_{m+1,m}, 1 + a_{m+1,m+1}, \ldots, a_{m+1,m+k-1}, a_{m+1,m+k+1}, \ldots, a_{m+1,m+p} \\ \cdots \\ a_{m+p,1}, \ldots, a_{m+p,m}, a_{m+p,m+1}, \ldots, a_{m+p,m+k-1}, a_{m+p,m+k+1}, \ldots \end{pmatrix}$$

або:

$$|(A_{m+p} - A_m)^2| \leqslant \prod_{i=1}^{m} (1 + 2|a_{ii}| + \sum_{l=1}^{m} |a_{il}^2|) \cdot \sum_{k=1}^{p} (|a_{m+k,1}^2| + \ldots +$$

$$+ |a_{m+k,m+p}^2|) \prod_{j=1} (1 + 2|a_{m+j,m+j}| + \sum_{l=m+1}^{m+p} |a_{m+j,l}^2|)$$

$$|(A_{m+p} - A_m)^2| \leqslant \prod_{i=1}^{m+p} (1 + 2|a_{ii}| + \sum_{l=1}^{m} |a_{il}^2|) \cdot \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{m+p} |a_{m+k,i}^2|,$$

що знов дає існування

$$\lim_{m=\infty} A_m$$

Так само легко пересвідчитися, що за умови збіжности ряду (208) збігається абсолютно визначник:

$$\begin{vmatrix} e^{-a_{11}}(1+a_{11}), & e^{-a_{11}}a_{12}, & e^{-a_{11}}a_{13}, & \ldots \\ e^{-a_{22}}a_{21}, & e^{-a_{22}}(1+a_{22}), & e^{-a_{22}}a_{23}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}, \tag{205$_b$}$$

що всі його підвизначники теж збігаються та є обмежені в своїй сукупності.

§ 29. Застосування ортогональних функцій

Нехай функції

$$\Phi_0(x),\ \Phi_1(x),\ \Phi_2(x),\ \ldots \tag{211}$$

розділу I є ортогональні й нормалізовані, тобто справджують рівності:

$$\int_a^b \Phi_i \Phi_j \, dx = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \tag{212}$$

Тоді для всякої функції $F(\xi)$, що інтеґрується разом із своїм квадратом на інтервалі (a, b), існуватиме такий ряд сучинників

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots, \tag{213}$$

що

$$\int_a^b \{ F(\xi) - a_0\Phi_0(\xi) - a_1\Phi_1(\xi) - a_2\Phi_2(\xi) \}^2 \, d\xi = 0 \tag{214}$$

або, зважаючи на (212),

$$\int_a^b F^2(\xi)\, d\xi = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots \tag{215}$$

Рівності (214) та (215) являють собою в цьому випадку **т е о р е м у з а м к н е н о с т и**.

Візьмімо знов функції

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \int_a^b G(x, \xi)\, \Phi_0(\xi)\, d\xi \\ \varphi_1 &= \int_a^b G(x, \xi)\, \Phi_1(\xi)\, d\xi \\ \varphi_2 &= \int_a^b G(x, \xi)\, \Phi_2(\xi)\, d\xi \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{215$_a$}$$

Тоді для функції z, що справджує рівняння

$$M_x[z] = F(x), \tag{216}$$

за умов (31), замість рівностей (59) та (59_a) розділу I буде:

$$
\begin{aligned}
z &= a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots \\
z' &= a_0\varphi_0' + a_1\varphi_1' + a_2\varphi_2' + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z^{(k-1)} &= a_0\varphi_0^{(k-1)} + a_1\varphi_1^{(k-1)} + a_2\varphi_2^{(k-1)} + \ldots
\end{aligned} \tag{217}
$$

$$
\int_a^b \{z^{(k)}(\xi) - a_0\varphi_0^{(k)}(\xi) - a_1\varphi_1^{(k)}(\xi) - \ldots\}^2 d\xi = 0 \tag{218}
$$

А коли система (211) є не тільки замкнена, але й повна, а функція $F(x)$ — суцільна, то замість (218) матимемо й

$$
z^{(k)} = a_0\varphi_0^{(k)} + a_1\varphi_1^{(k)} + a_2\varphi_2^{(k)} + \ldots \tag{219}
$$

Приклади замкненої системи (211) ортогональних функцій:

1) $\sqrt{\dfrac{1}{b-a}}, \quad \sqrt{\dfrac{2\pi}{b-a}}\cos\pi\,\dfrac{x-a}{b-a}, \quad \sqrt{\dfrac{2\pi}{b-a}}\cos 2\pi\,\dfrac{x-a}{b-a}, \ldots;$

2) Legendre-ові многочлени

$$
\frac{1}{\sqrt{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)(b-a)}}\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n] \tag{220}
$$

$$
(n = 0, 1, 2, \ldots)
$$

Коли за φ_i взяти фундаментальні функції самоспряженої задачі

$$
M_x[\varphi] = \mu\varphi \tag{220_a}
$$

за умов (31), то й вони і функції

$$
\Phi_i = \mu_i\varphi_i
$$

творитимуть системи ортогональні й замкнені.

Звернімося до задачі (30) — (31) розділу I:

$$
L_x[y] = M_x[y] - \lambda N_x'[y] = f(x) \tag{30}
$$

$$
\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_i^{(j)} y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_i^{(j)} y^{(j)}(b) = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, k-1), \tag{31}
$$

що її наближена розв'язка

$$
y_m = a_0^{(m)}\varphi_0 + a_1^{(m)}\varphi_1 + \ldots + a_m^{(m)}\varphi_m \tag{221}
$$

визначається з рівнань:

$$
\int_a^b L_x[y_m]\,\Phi_i\,dx = \int_a^b f\,\Phi_i\,dx \, (i = 0, 1, \ldots, m) \tag{222}
$$

Вони в даному разі, зважаючи на умови ортогональности (212), дають (пор. формулу (80) розділу II):

$$
\left.
\begin{aligned}
y_m(x) &= \frac{\delta_m(x;\lambda)}{\Delta_m(\lambda)} \\
y'_m(x) &= \frac{\delta'_m(x;\lambda)}{\Delta_m(\lambda)} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
y_m^{(k-1)}(x) &= \frac{\delta_m^{(k-1)}(x;\lambda)}{\Delta_m(\lambda)},
\end{aligned}
\right\} \tag{223}
$$

де

$$
\Delta_m(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+b_{00}, & b_{01}, & \ldots, & b_{0m} \\ b_{10}, & 1+b_{11}, & \ldots, & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m0}, & b_{m1}, & \ldots, & 1+b_{mm} \end{vmatrix} \tag{224}
$$

$$
\delta_m(x;\lambda) = \begin{vmatrix} 0, & \varphi_0(x), & \ldots, & \varphi_m(x) \\ \int_a^b f\Phi_0\,d\xi, & 1+b_{00}, & \ldots, & b_{0m} \\ \int_a^b f\Phi_1\,d\xi, & b_{10}, & \ldots, & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_a^b f\Phi_m\,d\xi, & b_{m0}, & \ldots, & 1+b_{mm} \end{vmatrix}
$$

$$
\delta_m^{(l)}(x;\lambda) = \begin{vmatrix} 0, & \varphi_0^{(l)}(x), & \ldots, & \varphi_m^{(l)}(x) \\ \int_a^b f\Phi_0\,d\xi, & 1+b_{00}, & \ldots, & b_{0m} \\ \int_a^b f\Phi_1\,d\xi, & b_{10}, & \ldots, & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_a^b f\Phi_m\,d\xi, & b_{m0}, & \ldots, & 1+b_{mm} \end{vmatrix} \tag{225}
$$

$$
bij = -\lambda \int_a^b N_x[\varphi_j]\,\Phi_i\,dx \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, m) \tag{226}
$$

§ 30. Розвинення розв'язок у ряди

Ми вже знаємо, що

$$
\left.
\begin{aligned}
y &= \lim_{m=\infty} y_m \\
y' &= \lim_{m=\infty} y'_m \\
&\cdots\cdots \\
y^{(k-1)} &= \lim_{m=\infty} y_m^{(k-1)}
\end{aligned}
\right\} \tag{227}
$$

$$
\lim_{m=\infty} \int_a^b (y^{(k)} - y_m^{(k)})^2\,dx = 0
$$

Перепишімо тепер рівність (226) за допомогою залежностей (215_a) так:

$$b_{ij} = \lambda \int_a^b \int_a^b N_x[G(x,\xi)]\, \Phi_j(\xi)\, \Phi_i(x)\, d\xi\, dx \tag{228}$$

$$(i, j = 0, 1, \ldots, m)$$

Беручи під увагу, що $N_x[G(x,\xi)]$, як функція змінних x та ξ, інтегрується разом із своїм квадратом, а функції

$$\Phi_i(x) \cdot \Phi_j(\xi)$$
$$(i, j = 0, 1, 2, \ldots) \tag{229}$$

творять замкнену нормальну ортогональну систему на прямокутнику

$$a \leqslant x \leqslant b$$
$$a \leqslant \xi \leqslant b,$$

отже справджують вимоги:

$$\int_a^b \int_a^b \Phi_i(\xi)\, \Phi_j(x)\, \Phi_{i_1}(\xi)\, \Phi_{j_1}(x)\, d\xi\, dx = \begin{cases} 0 & (i, j) \neq (i_1, j_1) \\ 1 & (i, j) = (i_1, j_1), \end{cases}$$

пошукаймо minimum виразу:

$$\int_a^b \int_a^b \left\{ \lambda N_x[G(x,\xi)] - \sum_{i,j=0}^{m} C_{ij}\, \Phi_j(\xi)\, \Phi_i(x) \right\}^2 d\xi\, dx \geqslant 0$$

Дістанемо:

$$C_{ij} = b_{ij}$$

Отже

$$\lambda \int_a^b \int_a^b N_x^2[G(x,\xi)]\, d\xi\, dx \geqslant \sum_{i,j=0}^{m} b_{ij}^2, \tag{230}$$

а тому ряд

$$\sum_{i,j} b_{ij}^2 \tag{231}$$

збігається.

Так само візьмімо суму квадратів усіх елементів визначника (225), зменшивши вперед на 1 усі елементи головної діягоналі; дістанемо:

$$1 + \sum_{i,j=0}^{m} b_{ij}^2 + \sum_{i=0}^{m} \left(\int_a^b f\, \Phi_i\, d\xi \right)^2 + \sum_{i=0}^{m} [\varphi_i^{(l)}(x)]^2 \tag{232}$$

Алеж

$$\int_a^b f^2(\xi)\, d\xi \geqslant \sum_{i=0}^{m} \left(\int_a^b f\, \Phi_i\, d\xi \right)^2 \tag{232_a}$$

$$\varphi_i^{(l)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^l G}{\partial x^l}\, \Psi_i(\xi)\, d\xi$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1)$$

$$\int_a^b \left\{ \frac{\partial^l G(x,\xi)}{\partial x^l} \right\}^2 d\xi \geqslant \sum_{i=0}^{m} \left\{ \int_a^b \frac{\partial^l G}{\partial x^l}\, \Phi_i(\xi)\, d\xi \right\}^2 = \sum_{i=0}^{m} [\varphi_i^{(l)}(x)]^2 \tag{232_b}$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Тому сума (232) є не більша за

$$1+\sum_{i,j} b_{ij}^2+\int_a^b f^2(\xi)\,d\xi+\int_a^b \left(\frac{\partial^l G}{\partial x^l}\right)^2 d\xi, \tag{233}$$

тобто є величина обмежена.

Замінивши отже визначники $\Delta_m(\lambda)$ та $\delta_m^{(l)}(x;\lambda)$ відповідно такими:

$$\Delta_{1m}(\lambda)=\begin{vmatrix} e^{-b_{00}}(1+b_{00}), & e^{-b_{00}}b_{01}, & \ldots, & e^{-b_{00}}b_{0m} \\ e^{-b_{11}}b_{10}, & e^{-b_{11}}(1+b_{11}), & \ldots, & e^{-b_{11}}b_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{-b_{mm}}b_{m0}, & e^{-b_{mm}}b_{m1}, & \ldots, & e^{-b_{mm}}(1+b_{mm}) \end{vmatrix} \tag{234}$$

та

$$\delta_{1m}^{(l)}(x,\lambda)=\begin{vmatrix} 0, & \varphi_0^{(l)}(x), & \ldots, & \varphi_m^{(l)}(x) \\ e^{-b_{00}}\int_a^b f\Phi_0\,d\xi, & e^{-b_{00}}(1+b_{00}), & \ldots, & e^{-b_{00}}b_{0m} \\ e^{-b_{11}}\int_a^b f\Phi_1\,d\xi, & e^{-b_{11}}b_{10}, & \ldots, & e^{-b_{11}}b_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{-b_{mm}}\int_a^b f\Phi_m\,d\xi, & e^{-b_{mm}}b_{m0}, & \ldots, & e^{-b_{mm}}(1+b_{mm}) \end{vmatrix}, \tag{235}$$

бачимо, на підставі вислідів попереднього параграфа, що існують границі:

$$\Delta(\lambda)=\lim_{m=\infty}\Delta_{1m}(\lambda) \tag{236}$$

$$\delta^{(l)}(x;\lambda)=\lim_{m=\infty}\delta_{1m}^{(l)}(x;\lambda) \qquad (l=0,\ 1,\ \ldots,k-1),$$

а також границі всіх підвизначників визначників (234) та (235). Отож сучинники A_{im} розвинення визначника (235) елементами першого рядка:

$$\delta_{1m}^{(l)}(x;\lambda)=A_{0m}\,\varphi_0^{(l)}(x)+A_{1m}\,\varphi_1^{(l)}(x)+\ldots+A_{mm}\,\varphi_m^{(l)}(x) \tag{237}$$

$$(l=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1)$$

усі мають границі:

$$\lim_{m=\infty} A_{im}=A_i \tag{238}$$

Переписавши нарешті рівності (223) так:

$$y_m^{(l)}(x)=\sum_{i=0}^{m}\frac{A_{im}}{\Delta_{1m}(\lambda)}\cdot\varphi_i^{(l)}(x) \tag{239}$$

$$(l=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1),$$

порівняймо цю суму з рядом:

$$Y^{(l)}(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{A_i}{\Delta(\lambda)}\varphi_i^{(l)}(x) \tag{240}$$

$$(l=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1)$$

Що цей ряд абсолютно збігається, видно з нерівности:

$$\{Y^{(l)}(x)\}^2 \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} A_i^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{\varphi_i^{(l)}(x)}{\Delta(\lambda)}\right]^2$$

Справді бо другий чинник на правій стороні збігається, зважаючи на (232_b), а перший є $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}')$, де

$$\left|\begin{array}{lllllll}
e^{-b_{00}}\int_a^b f\Phi_0\,d\xi, & e^{-b_{00}}(1+b_{00}),\ldots, & e^{-b_{00}}b_{0i-1}, & e^{-b_{00}}b_{0,i+1}, & \ldots, & e^{-b_{00}}b_{0m}, & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
e^{-b_{ii}}\int_a^b f\Phi_i\,d\xi, & e^{-b_{ii}}b_{i0}, \quad \ldots, & e^{-b_{ii}}b_{i,i-1}, & e^{-b_{ii}}b_{i,i+1}, & \ldots, & e^{-b_{ii}}b_{im}, & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
e^{-b_{mm}}\int_a^b f\Phi_m\,d\xi, & e^{-b_{mm}}b_{m0}, \quad \ldots, & e^{-b_{mm}}b_{m,i-1}, & e^{-b_{mm}}b_{m,i+1}, & \ldots, & e^{-b_{mm}}b_{mm}, & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}\right|$$

Але на підставі Hadamard-ової нерівности, буде:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{A}'| \leqslant \prod_{i=0}^{\infty}\left\{e^{-2a_{ii}}(1+2|a_{ii}|)+e^{-2a_{ii}}\left(\int_a^b f\Phi_i\,d\xi\right)^2\right.$$
$$\left.+\,e^{-2a_{ii}}(a_{i0}^2+a_{i1}^2+\ldots+a_{im}^2+\ldots)\right\}$$

Отже ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} A_i^2$$

збігається.

Розгляньмо тепер різницю:

$$Y^{(l)}(x)-y_m^{(l)}(x)=\sum_{i=0}^{m}\left(\frac{A_i}{\Delta(\lambda)}-\frac{A_{im}}{\Delta_{1m}(\lambda)}\right)\varphi_i^{(l)}(x)+\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{A_i}{\Delta(\lambda)}\varphi_i^{(l)}(x)=$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{A_i}{\Delta(\lambda)}-\frac{A_{im}}{\Delta_{1m}(\lambda)}\right)\varphi_i^{(l)}(x)+\sum_{i=k+1}^{m}\left(\frac{A_i}{\Delta(\lambda)}-\frac{A_{im}}{\Delta_{1m}(\lambda)}\right)\varphi_i^{(l)}(x)+\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{A_i}{\Delta(\lambda)}\varphi_i^{(l)}(x) \quad (241)$$

Зважаючи на збіжність ряду (240), третя з сум $\left(\sum_{i=m+1}^{\infty}\right)$ останнього виразу при досить великому m є така мала, як хочемо. Так само, на підставі (236) та (238), для всіх вартостей параметра, крім особливих, перша сума при довільному, але незмінному k теж така мала, як хочемо. Нарешті, щодо другої з цих трьох сум маємо:

$$\left\{\sum_{i=k+1}^{m}\left(\frac{A_i}{\Delta(\lambda)}-\frac{A_{im}}{\Delta_{1m}(\lambda)}\right)\varphi_i^{(l)}(x)\right\}^2 \leqslant \sum_{i=k+1}^{m}\left\{\frac{A_i}{\Delta(\lambda)}-\frac{A_{im}}{\Delta_{1m}(\lambda)}\right\}^2\sum_{i=k+1}^{m}\{\varphi_i^{(l)}x\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\left\{\sum_{i=k+1}^{m}\frac{A_i^2}{\Delta^2(\lambda)}+\sum_{i=k+1}^{m}\frac{A_{im}^2}{\Delta_m^2(\lambda)}\right\}\cdot\sum_{i=k+1}^{m}\left\{\varphi_i^{(l)}(x)\right\}^2;$$

тут перші дві суми обмежені, а третя — для досить великого k є така мала, як хочемо. Отож остаточно з (241) маємо:

$$Y^{(l)}(x) = \lim y_m^{(l)}(x) \tag{242}$$

$$(l = 0,\ 1,\ .\ .\ .\ .\ ,\ k-1)$$

або:

$$\begin{aligned} y\ (x) &= b_0\varphi_0(x) + b_1\varphi_1(x) + \dots \\ y'(x) &= b_0\varphi_0'(x) + b_1\varphi_1'(x) + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(k-1)}(x) &= b_0\varphi_0^{(k-1)}(x) + b_1\varphi_1^{(k-1)}(x) + \dots \end{aligned} \tag{243}$$

Отож виходить, що коли функції $\Phi_i(x)$ є ортогональні і творять систему замкнену, то розв'язка $y(x)$ задачі (30) — (31) розвивається в абсолютно та одностайно збіжний ряд із функцій

$$\varphi_i = \int_a^b G(x, \xi)\, \Phi_i(\xi)\, d\xi$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2,\ .\ .\ .\ .);$$

цей ряд можна $k - 1$ раз почленно диференціювати.

Сучинники

$$b_0,\ b_1,\ b_2, \dots \tag{244}$$

цього ряду, очевидно, визначаються з нескінченної системи лінійних рівнань:

$$\int_a^b L_x[b_0\varphi_0 + b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + \ .\ .\ .\ ]\ \Phi_i\, dx = \int_a^b f\Phi_i\, dx \tag{245}$$

$$(i = 0, 1, 2,\ .\ .\ .\ )$$

з безліччю невідомих.

Нехай система (212) є не тільки замкнена, але й повна. Тоді, за певних обмежених умов щодо функції $f(x)$, буде:

$$f(x) = b_0\Phi_0(x) + b_1\Phi_1(x) + b_2\Phi_2(x) + \ .\ .\ . \tag{246}$$

Звідси

$$M_x[y] = \sum_{i=0}^{\infty} b_i\, \Phi_i(x) - \lambda N_x[y] =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} b_i \left\{ \Phi_i - \lambda N_x[\varphi_i] \right\} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i M_x[\varphi_i]$$

Скомбінувавши цю рівність із рівностями (243), дістаємо остаточно ще й

$$y^{(k)}(x) = b_0\varphi_0^{(k)}(x) + b_1\varphi_1^{(k)}(x) + \ .\ .\ . \tag{243$_a$}$$

у додаток до рівностей (243). Так, напр., буде, коли функції φ_i є фундаментальні функції рівнання (220_a).

Ми бачимо, що, почавши з наближеного розв'язання задач математичної фізики, наш виклад прийшов до точних розв'язок у формі рядів. Ці розв'язки спрощують та узагальнюють теорію розвинень по фундаментальних функціях, що являє собою найістотнішу частину клясичної теорії лінійних самоспряжених задач математичної фізики. Узагальнення йде в двох напрямах: на задачі несамоспряжені та в напрямі великої довільности в доборі функцій φ_i та Φ_i, що грають тут ролю фундаментальних функцій. У випадку самоспряжености довільність добору функцій φ_i править за істотний засіб до спрощення, завжди бо функції φ_i можна мати в точному вигляді в скінченій формі, у випадку несамоспряжености — дає змогу поставити, в тій самій формі, як і для задачі самоспряженої, задачу про розвинення розв'язки в ряд.

§ 31. Інтеґрал від Green-ової функції в формі нескінченної суми та нескінченного визначника

Наближений вираз $\Gamma_m(x, \xi; \lambda)$ (формула (186)) для Green-ової функції має для випадку, коли функції Φ_i є ортогональні та нормальні, вигляд:

$$\Gamma_m(x, \xi; \lambda) = \frac{1}{\Delta_m(\lambda)} \begin{vmatrix} 0, & \varphi_0(x), & \varphi_1(x), & \ldots, & \varphi_m(x) \\ \Phi_0(\xi), & 1 + b_{00}, & b_{01}, & \ldots, & b_{0m} \\ \Phi_1(\xi), & b_{10}, & 1 + b_{11}, & \ldots, & b_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Phi_m(\xi), & b_{m0}, & b_{m1}, & \ldots, & 1 + b_{mm} \end{vmatrix} \tag{247}$$

Розгляньмо інтеґрал:

$$\int_a^b \Gamma \; \Phi_i(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\Delta_m(\lambda)} \cdot \begin{vmatrix} 0, & \varphi_0(x), & \varphi_1(x), & \ldots, & \varphi_m(x) \\ 0, & 1 + b_{00}, & b_{01}, & \ldots, & b_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & b_{i-1,0}, & b_{i-1,1}, & \ldots, & b_{i-1,m} \\ 1, & b_{i0}, & b_{i1}, & \ldots, & b_{im} \\ 0, & b_{i+1,0}, & b_{i+1,1}, & \ldots, & b_{i+1,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & b_{m0}, & b_{m1}, & \ldots, & 1 + b_{mm} \end{vmatrix} \tag{248}$$

Отже

$$\int_a^b \Gamma_m \Phi_i(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\Delta_m(\lambda)} \cdot \frac{\partial \delta_m(x; \lambda)}{\partial \Phi_i(\xi)},$$

а на підставі Hadamard-ової нерівности буде:

$$\left\{ \int_a^b \Gamma_m \Phi_i(\xi)\, d\xi \right\}^2 \leqslant \left\{ \varphi_i^2(x) + b_{0i}^2 + b_{1i}^2 + \cdots + b_{mi}^2 \right\} M_i^2, \tag{249}$$

де множина чисел M_i^2 є обмежена. Виходить, що інтеґрал

$$\int_a^b \Gamma_m^2\, d\xi = \sum_{i=0}^{m} \left\{ \int_a^b \Gamma_m \Phi_i(\xi)\, d\xi \right\}^2 \leqslant \max M_i^2 \cdot \left\{ \sum_{i=0}^{m} \varphi_i^2(x) + \sum_{i,j=0}^{m} b_{ij}^2 \right\} \tag{250}$$

є обмежений, як функція від m. До цього ж висліду можна дійти, помноживши обидві сторони рівности (247) на $\Gamma_m(x, \xi; \lambda)$ та зінтеґрувавши по ξ.

Загальніше, помноживши обидві сторони рівности (247) на якусь функцію $\psi(\xi)$, що інтеґрується разом із своїм квадратом, та зінтеґрувавши по ξ, дістанемо, що визначник

$$\int_a^b \Gamma_m \psi(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\Delta_m(\lambda)} \cdot \begin{vmatrix} 0, & \varphi_0(x), & \ldots, & \varphi_m(x) \\ \int_a^b \psi(\xi)\Phi_0(\xi)\, d\xi, & 1+b_{00}, & \ldots, & b_{0m} \\ \int_a^b \psi(\xi)\Phi_1(\xi)\, d\xi, & b_{10}, & \ldots, & b_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \int_a^b \psi(\xi)\Phi_m(\xi)\, d\xi, & b_{m0}, & \ldots, & 1+b_{mm} \end{vmatrix}$$

є обмежена функція від m. Узявши зосібна

$$\psi(t) = 1 \text{ для } t \leqslant \xi$$

$$\psi(t) = 0 \text{ для } t > \xi,$$

дістаемо, що визначник

$$\int_a^\xi \Gamma_m(x, \xi; \lambda)\, d\xi = \frac{1}{\Delta_m(\lambda)} \begin{vmatrix} 0, & \varphi_0(x), & \ldots, & \varphi_m(x) \\ \int_a^\xi \Phi_0(\xi)\, d\xi, & 1+b_{00}, & \ldots, & b_{0m} \\ \int_a^\xi \Phi_1(\xi)\, d\xi, & b_{10}, & \ldots, & b_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \int_a^\xi \Phi_m(\xi)\, d\xi, & b_{m0}, & \ldots, & 1+b_{mm} \end{vmatrix}$$

збігається до нескінченного визначника:

$$\frac{1}{\Delta_m(\lambda)} \cdot \begin{vmatrix} 0, & \varphi_0(x), & \varphi_1(x), & \ldots \\ \int_a^\xi \Phi_0(\xi)\, d\xi, & 1+b_{00}, & b_{01}, & \ldots \\ \int_a^\xi \Phi_1(\xi)\, d\xi, & b_{10}, & 1+b_{11}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

А що з другого боку (формула 192):

$$\lim_{m \to \infty} \int_a^\xi \Gamma_m\, d\xi = \int_a^\xi \Gamma\, d\xi,$$

то виходить:

$$\int_a^\xi \Gamma(x,\xi;\lambda)\,d\xi = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} 0, & \varphi_0(x), & \varphi_1(x), & \dots \\ \int_a^\xi \Phi_0(\xi)\,d\xi, & 1+b_{00}, & b_{01}, & \dots \\ \int_a^\xi \Phi_1(\xi)\,d\xi, & b_{10}, & 1+b_{11}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \tag{251}$$

Так само з формули (192_a) маємо:

$$\int_a^\xi \frac{\partial^l \Gamma}{\partial x^l}\,d\xi = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} 0, & \varphi_0^{(l)}(x), & \varphi_l^1(x), & \dots \\ \int_a^\xi \Phi_0(\xi)\,d\xi, & 1+b_{00}, & b_{01}, & \dots \\ \int_a^\xi \Phi_1(\xi)\,d\xi, & b_{10}, & 1+b_{11}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \tag{251$_a$}$$

$$(l=0,\ 1,\ \dots,\ k-1)$$

Повторивши тут міркування попереднього параграфа щодо розвинення в ряди функцій $y^{(l)}(x)$, дійдемо висновку, що визначник (251) розвивається в одностайно та абсолютно збіжний ряд:

$$\int_a^\xi \Gamma(x,\xi;\lambda)\,d\xi = C_0(\xi)\varphi_0(x) + C_1(\xi)\varphi_1(x) + C_2(\xi)\varphi_2(x) + \dots \tag{252}$$

із функцій $\varphi_i(x)$. Цей ряд можна $k-1$ раз почленно диференціювати:

$$\int_a^\xi \frac{\partial^l \Gamma(x,\ \xi;\ \lambda)}{\partial x^l}\,d\xi = C_0(\xi)\varphi_0^{(l)}(x) + C_1(\xi)\varphi_1^{(l)}(x) + C_2(\xi)\varphi_2^{(l)}(x) + \dots \tag{252$_a$}$$

$$(l=1,\ 2,\ \dots,\ k-1)$$

Так само, розвинувши визначники елементами першого стовпця, дістанемо розвинення вигляду:

$$\int_a^\xi \Gamma(x,\ \xi;\ \lambda)\,d\xi = e_0(x)\int_a^\xi \Phi_0(\xi)\,d\xi + e_1(x)\int_a^\xi \Phi_1(\xi)\,d\xi + \dots \tag{253}$$

$$\int_a^\xi \frac{\partial^l \Gamma(x,\ \xi;\ \lambda)}{\partial x^l}\,d\xi = e_0^{(l)}(x)\int_a^\xi \Phi_0(\xi)\,d\xi + e_1^{(l)}(x)\int_a^\xi \Phi_1(\xi)\,d\xi + \dots \tag{253$_a$}$$

$$(l=1,\ 2,\ \dots,\ k-1)$$

Особливий інтерес має випадок, коли задача (30) — (31) є самоспряжена, або коли бодай вираз $M_x[\ ]$ можна дібрати так, щоб він був самоспряжений, а його Green-ова функція $G(x,\xi)$ симетрична. Тоді бо, взявши за функції φ_i фундаментальні функції рівнання

$$M_x[\varphi]=\mu\varphi,$$

а за функції Φ_i — добутки $\mu_i\varphi_i$, де μ_i є відповідні характеристичні числа, і пам'ятаючи, що

$$\int_a^b \Phi_i\Phi_j\,dx=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ 1 & (i=j)\end{cases} \tag{254}$$

$$\int_a^b \varphi_i\varphi_j\,dx=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ \dfrac{1}{\mu_i^2} & (i=j)\end{cases}$$

$$\int_a^b M_x[\varphi_i]\,\Phi_j\,dx=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ 1 & (i=j),\end{cases} \tag{255}$$

матимемо:

$$\Gamma_m(x,\ \xi;\ \lambda)=\frac{\begin{vmatrix} 0, & \dfrac{1}{\mu_0}\Phi_0(x), & \dfrac{1}{\mu_1}\Phi_1(x), & \ldots, & \dfrac{1}{\mu_m}\Phi_m(x)\\ \Phi_0(\xi), & 1+b_{00}, & b_{0,1}, & \ldots, & b_{0m}\\ \Phi_1(\xi), & b_{10}, & 1+b_{11}, & \ldots, & b_{1m}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \Phi_m(\xi), & b_{m0}, & b_{m1}, & \ldots, & 1+b_{mm}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+b_{00}, & b_{01}, & \ldots, & b_{0m}\\ b_{10}, & 1+b_{11}, & \ldots, & b_{1m}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ b_{m0}, & b_{m1}, & \ldots, & 1+b_{mm}\end{vmatrix}} \tag{256}$$

Тут напевно матимемо

$$\Gamma_m(x,\ \xi;\ \lambda)=\Gamma_m(\xi,\ x;\ \lambda),$$

коли

$$\mu_j b_{ij}=\mu_i b_{ji}$$

Достатня умова для цього, як видно з формули (228), є

$$N_x[\Phi_i]\,\Phi_j=N_x[\Phi_j]\,\Phi_i$$

або

$$N_x[G(x,\ \xi)]=N_\xi[G(\xi,\ x)] \tag{256$_a$}$$

Отож у цьому випадку ми, замість рівности (256), можемо написати:

$$
\Gamma_m = \frac{\begin{vmatrix} 0, & \sqrt{\mu_0}\,\varphi_0(x), & \sqrt{\mu_1}\,\varphi_1(x), & \ldots, & \sqrt{\mu_m}\,\varphi_m(x) \\ \sqrt{\mu_0}\,\varphi_0(\xi), & 1+b_{00}, & \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_0}}\,b_{01}, & \ldots, & \sqrt{\frac{\mu_m}{\mu_0}}\,b_{0m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sqrt{\mu_m}\,\varphi_m(\xi), & \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_m}}\,b_{m0}, & \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_m}}\,b_{m1}, & \ldots, & 1+b_{mm} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+b_{00}, & \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_0}}\,b_{01}, & \ldots, & \sqrt{\frac{\mu_m}{\mu_0}}\,b_{0m} \\ \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_1}}\,b_{10}, & 1+b_{11}, & \ldots, & \sqrt{\frac{\mu_m}{\mu_1}}\,b_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_m}}\,b_{m0}, & \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_m}}\,b_{m1}, & \ldots, & 1+b_{mm} \end{vmatrix}} \tag{257}
$$

Отже бачимо, що

$$
\Gamma_m(x, \xi; \lambda) = \Gamma_m(\xi, x; \lambda), \tag{258}
$$

тобто функція Γ_m є симетрична функція арґументів x та ξ усякий раз, коли правдива рівність (256_a).

У частинному випадку, коли

$$
N_x[z] = z, \qquad \lambda = -\mu,
$$

отже Φ_i фундаментальні функції задачі (30) — (31), і ця задача є самоспряжена, очевидно буде:

$$
b_{ii} = \frac{\lambda}{\mu_i} \qquad b_{ij} = 0 \qquad (i \neq j)
$$

Отже формула (256) тоді дає:

$$
\Gamma_m(x, \xi; \lambda) = -\sum_{i=0}^{m} \frac{\Phi_i(x)\ \Phi_i(\xi)}{\mu_i + \lambda} \tag{259}
$$

У випадках, коли ряд

$$
\frac{\Phi_0(x)\,\Phi_0(\xi)}{\mu_0+\lambda} + \frac{\Phi_1(x)\,\Phi_1(\xi)}{\mu_1+\lambda} + \frac{\Phi_2(x)\,\Phi_2(\xi)}{\mu_2+\lambda} + \ldots \tag{260}
$$

збігається, він дорівнює $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ — вислід відомий.

Усі міркування цього параграфа та нашого способу можна було б подати трохи загальніше, коли б умову ортогональности

$$
\int_a^b \Phi_i \Phi_j \, dx = 0 \qquad (i \neq j)
$$

заступити трохи загальнішою:

$$
\int_a^b p(x)\, \Phi_i \Phi_j(x) = 0 \qquad (i \neq j,\ p(x) > 0)
$$

§ 32. Теорема замкнености для Green-ової функції

У кожнім разі маємо:

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^{\xi}\left\{\frac{\partial^l \Gamma}{\partial x^l}+\sum_{i=0}^{m}\frac{\Phi_i^{(l)}(x)\,\Phi_i(\xi)}{\mu_i+\lambda}\right\}d\xi=0 \tag{261}$$

$$(l=0, 1, \ldots, k-1),$$

що є частинний випадок рівности (192) розділу II, і загальніше:

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^{b}\left\{\frac{\partial^l \Gamma(x,\xi;\lambda)}{\partial x^l}+\sum_{i=0}^{m}\frac{\Phi_i^{(l)}(x)\,\Phi_i(\xi)}{\mu_i+\lambda}\right\}\psi(\xi,y)\,d\xi=0 \tag{262}$$

$$(l=0, 1, \ldots, k-1),$$

де $\psi(x,\xi)$ є довільна функція, що інтеґрується разом із своїм квадратом. Покладімо:

$$\psi(\xi,y)=\Gamma(\xi,y;\lambda)$$

і нагадаймо, що Γ є симетрична функція від (ξ, y). Тоді (262) перепишеться так:

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\Gamma^{(2)}(x,y;\lambda)+\sum_{i=0}^{m}\frac{\Phi_i(x)\,\Phi_i(y)}{(\mu_i+\lambda)^2}\right\}=0, \tag{263}$$

де $\Gamma^{(2)}$ є ітерована функція Γ. Звідси:

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\Gamma^{(2)}(x,x;\lambda)+\sum_{i=0}^{m}\frac{\Phi_i^2(x)}{(\mu_i+\lambda)^2}\right]=0 \tag{264}$$

Можна перевірити, що ця рівність є рівноважна з такою:

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b\{\Gamma(x,\xi;\lambda)-\Gamma_m(x,\xi;\lambda)\}^2\,d\xi=0 \tag{265}$$

Справді, з огляду на симетричність функції $\Gamma(x,\xi;\lambda)$ та ортогональність функцій $\Phi_i(x)$, маємо:

$$\int_a^b\{\Gamma(x,\xi;\lambda)-\Gamma_m(x,\xi;\lambda)\}^2\,d\xi=\int_a^b\Gamma(x,\xi;\lambda)\,\Gamma(\xi,x;\lambda)\,d\xi+$$

$$+2\int_a^b\Gamma(x,\xi;\lambda)\sum_{i=0}^{m}\frac{\Phi_i(x)\,\Phi_i(\xi)}{\lambda+\mu_i}\,d\xi+\int_a^b\frac{\Phi_i^2(x)\,\Phi_i^2(\xi)}{(\mu_i+\lambda)^2}\,d\xi \tag{266}$$

Перший член цієї суми є якраз $\Gamma^{(2)}(x,x;\lambda)$, третій дорівнює

$$\sum_{i=0}^{m}\frac{\Phi_i^2}{(\mu_i+\lambda)^2}$$

Щодо другого, то, поклавши

$$\psi(\xi,y)=\Phi_i(\xi)$$

в рівності (262), дістанемо:

$$\int_a^b \frac{\partial^l \Gamma}{\partial x^l}\,\Phi_i(\xi)\,d\xi = \frac{\Phi_i^{(l)}(x)}{\lambda+\mu_i} \tag{267}$$

$$i = 0, 1, \ldots, m$$

$$l = 0, 1, \ldots, k-1;$$

а тоді видно, що другий член суми (266) дорівнює:

$$2\sum_{i=0}^{m} \frac{\Phi_i^2(x)}{(\lambda+\mu_i)^2}$$

Отже

$$\int_a^b \{\Gamma(x, \xi; \lambda) - \Gamma_m(x, \xi; \lambda)\}^2\,d\xi = \Gamma^{(2)}(x, x; \lambda) - \Gamma_m^{(2)}(x, x; \lambda), \tag{268}$$

що й доводить рівноважність рівностей (264) та (265).

Подібною ж викладкою можна довести цілу низку рівностей, подібних до (75), а саме:

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^b \left\{\frac{\partial^l \Gamma}{\partial x^l} - \frac{d^l \Gamma_m}{d\,x^l}\right\}^2 d\xi = 0 \tag{265a}$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Ми доведемо їх у загальнім випадку, коли Φ_i є довільні ортогональні функції. Із рівностей

$$y_m^{(l)} - y^{(l)} = \int_a^b \left\{\frac{\partial^l \Gamma_m}{\partial x^l} - \frac{\partial^l \Gamma}{\partial x^l}\right\} f(\xi)\,d\xi \tag{269}$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1),$$

поклавши

$$f(\xi) = \Phi_i(\xi),$$

дістанемо:

$$\int_a^b \frac{\partial^l \Gamma}{\partial x^l}\,\Phi_i(\xi)\,d\xi = \lim_{m\to\infty} \int_a^b \frac{\partial^l \Gamma_m}{\partial x^l}\,\Phi_i(\xi)\,d\xi \tag{270}$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Запровадивши зазначення

$$U_i^{(l)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^l \Gamma}{\partial x^l}\,\Phi_i(\xi)\,d\xi$$

$$U_{im}^{(l)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^l \Gamma_m}{\partial x^l}\,\Phi_i(\xi)\,d\xi \tag{271}$$

$$l = 0, 1, \ldots, k-1$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots,$$

запишемо (270) так:

$$U_i^{(l)}(x) = \lim_{m \to \infty} U_{im}^{(l)}(x) \tag{272}$$

Завваживши, що

$$\frac{\partial^l \Gamma_m(x, \xi; \lambda)}{\partial x^l} = \sum_{i=0}^{m} U_{im}^{(l)}(x)\, \Phi_i(\xi) \tag{273}$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1),$$

покладімо в рівності (269):

$$f(\xi) = \frac{\partial^l \Gamma(x, \xi; \lambda)}{\partial x^l};$$

дістанемо:

$$\int_a^b \left\{ \frac{d^l \Gamma}{dx^l} \right\}^2 d\xi = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=0}^{m} U_i^{(l)}(x)\, U_{im}^{(l)}(x) \tag{274}$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Тепер обчислімо

$$\int_a^b \left\{ \frac{\partial^l \Gamma}{\partial x^l} - \frac{\partial^l \Gamma_m}{\partial x^l} \right\}^2 d\xi = \int_a^b \left\{ \frac{\partial^l \Gamma}{\partial x^l} \right\}^2 d\xi - 2 \sum_{i=0}^{m} U_i^{(l)}(x)\, U_{im}^{(l)}(x) + \sum_{i=0}^{m} \left\{ U_{im}^{(l)}(x) \right\}^2 \tag{275}$$

З огляду на (274), з цієї рівности дістанемо:

$$\lim_{m \to \infty} \int_a^b \left\{ \frac{\partial^l \Gamma}{\partial x^l} - \frac{\partial^l \Gamma_m}{\partial x^l} \right\}^2 d\xi = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=0}^{m} \left\{ U_{im}^{(l)}(x) \right\}^2 - \int_a^b \left\{ \frac{\partial^l \Gamma}{\partial x^l} \right\}^2 d\xi \geqslant 0 \tag{276}$$

Крім того, очевидно,

$$\int_a^b \left\{ \frac{\partial^l \Gamma}{dx^l} \right\}^2 d\xi \geqslant \sum_{i=0}^{m} \left\{ U_i^{(l)}(x) \right\}^2 \tag{277}$$

Із (276) та (277) маємо:

$$\lim_{m \to \infty} \int_a^b \left\{ \frac{\partial^l \Gamma}{\partial x^l} - \frac{\partial^l \Gamma_m}{\partial x^l} \right\}^2 d\xi \leqslant \lim_{m \to \infty} \sum_{i=0}^{m} \left[\left\{ U_{im}^{(l)}(x) \right\}^2 - \left\{ U_i^{(l)}(x) \right\}^2 \right] \tag{278}$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Відомо, що для досить великого значка $i > k$ буде

$$\left. \begin{aligned} &\left\{ U_{im}^{(l)}(x) \right\}^2 < \frac{1}{3} \varepsilon_k(m) \\ &\left\{ U_i^{(l)}(x) \right\}^2 < \frac{1}{3} \varepsilon_k(m), \end{aligned} \right\} \tag{279}$$

де $\varepsilon_k(m)$ є довільно мале число. З другого боку, для даного k можна дібрати таке велике число m, що теж буде, зважаючи на (279):

$$\sum_{l=0}^{k}\left[\{U_{im}^{(l)}(x)\}^2-\{U_i^{(l)}(x)\}^2\right]<\frac{1}{3}\varepsilon_k(m) \tag{280}$$

$$(l=0,\,1,\,\ldots,\,k-1)$$

За допомогою (279) та (280) нерівність (278) перепишеться так:

$$\lim_{m=\sim}\int_a^b\left(\frac{\partial^l\Gamma}{\partial x^l}-\frac{\partial^l\Gamma_m}{\partial x^l}\right)^2 d\xi\leqslant\lim_{m=\sim}\varepsilon_k(m),$$

що й дає залежності (265a).

У загальнім випадку можна довести таку рівність:

$$\lim_{m=\sim}\Gamma_m^{(2)}=\Gamma^{(2)}$$

та подібні ж рівності для похідних:

$$\frac{\partial^l\Gamma_m}{\partial x^l}\qquad(l=0,\,1,\,\ldots,\,k-1)$$

§ 33. Частинні випадки

Візьмімо задачу

$$\begin{gathered}y''-A(x)y=f(x)\\ y(0)=y(1)=0\end{gathered} \tag{281}$$

на інтервалі (0, 1), що за неї вже говорено в розділі II. Нехай система функцій Φ_i є

$$1,\ \sqrt{2}\cos\pi x,\ \sqrt{2}\cos 2\pi x,\ \sqrt{2}\cos 3\pi x,\ \ldots$$

Вона є не тільки замкнена, але й повна на інтервалі (0, 1). Лінійною комбінацією з перших $m+1$ функцій цієї системи довільну суцільну функцію на інтервалі (0, 1) можна представити з тим самим ступенем точности, що й многочленом m-го ступеня. Визначивши функції φ_i з умов:

$$\begin{gathered}\varphi_i''=\Phi_i\\ \varphi_i(0)=\varphi_i(1)=0\\ (i=0,\,1,\,2,\,\ldots),\end{gathered} \tag{282}$$

дістанемо:

$$\varphi_0=\frac{x^2-x}{2}$$

$$\varphi_1=\sqrt{2}\cdot\frac{1-2x-\cos\pi x}{\pi^2}$$

$$\varphi_2=\sqrt{2}\cdot\frac{1-\cos 2\pi x}{4\pi^2}$$

$$\varphi_3=\sqrt{2}\cdot\frac{1-2x-\cos 3\pi x}{9\pi^2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Отже

$$\begin{aligned} y &= a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \dots \\ y' &= a_0\varphi_0' + a_1\varphi_1' + a_2\varphi_2' + \dots \\ &\int_0^1 (y'' - a_0\Phi_0 - a_1\Phi_1 - a_2\Phi_2 - \dots)^2 dx = 0 \end{aligned} \tag{283}$$

З останньої рівности випливає:

$$\int_0^1 y''^2 dx = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \dots,$$

отже ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2$$

збігається; а тоді перші дві рівності (283) дають:

$$(y - a_0\varphi_0 - \dots - a_m\varphi_m)^2 \leqslant \sum_{i=m+1}^{\infty} a_i^2 \cdot \sum_{i=m+1}^{\infty} \varphi_i^2 < \frac{M_m^2}{m^3}$$

$$(y' - a_0\varphi_0' - \dots - a_m\varphi_m')^2 \leqslant \sum_{i=m+1}^{\infty} a_i^2 \cdot \sum_{i=m+1}^{\infty} (\varphi_i')^2 < \frac{M_{1m}^2}{m}, \tag{284}$$

де M_m та M_{1m} є обмежені функції від m. Отож остачі рядів (283), коли спинитися в них на m-му члені, є відповідно ступенів мализни не менших, як числа

$$\frac{1}{m^{\frac{3}{2}}} \text{ та } \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}$$

Можна було б зробити докладнішу оцінку цих похибок, але вони не мають практичного значення, бо сучинники

$$a_0, a_1, a_2, \dots$$

визначаються з системи безлічі лінійних рівнань, що є задача мало приступна.

Можна було б тут за Φ_i взяти Legendre-ові многочлени

$$C_n \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - x)^n$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$

Тоді функціями φ_i, згідно з умовами (282), були б

$$x^2, \quad \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} \quad \text{та} \quad C_n \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2 - x)^n$$

$$(n = 2, 3, \dots)$$

Нарешті за φ_i та Φ_i можна взяти й фундаментальні функції задачі:

$$\begin{aligned} \Phi'' &= \mu\Phi \\ \Phi(0) &= \Phi(1) = 0, \end{aligned} \tag{285}$$

що дає:

$$\Phi_k = \sqrt{2}\sin n\pi x$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ .\ .\ .)$$

Візьмімо загальнішу задачу

$$\begin{gathered} L_x[y] = y^{(2r)} + A_1(x)y^{(2r-1)} + \ .\ .\ . + A_r(x)y = f(x) \\ y(0) = y(1) = 0 \\ y'(0) = y'(1) = 0 \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ y^{(r-1)}(0) = y^{(r-1)}(1) = 0 \end{gathered} \tag{286}$$

на інтервалі $(0,\ 1)$. Спробуймо за $M_x[z]$ узяти простий вираз $z^{(2r)}$. Тоді зразу видно, що, взявши

$$\Phi_n(x) = C_n \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - x)^n,$$

матимемо:

$$\varphi_n(x) = C_n \frac{d^{n-2r}}{dx^{n-2r}}(x^2 - x)^n$$

$$n = 2r,\ 2r+1,\ 2r+2,\ .\ .\ .\ ,$$

при чім

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ .\ .\ .\ .\ ,\ \varphi_{2r-1}$$

є певні многочлени відповідно ступенів

$$0,\ 1,\ .\ .\ .\ .\ ,\ 2r-1$$

Узявши

$$\Phi_n = \cos n\pi x,$$

дістанемо φ_n у формі суми:

$$\frac{(-1)^r \cos n\pi x + \psi_r(x)}{(n\pi)^r},$$

де $\psi_r(x)$ є многочлен ступеня не більшого за r. Очевидно, він обчисляється однозначно за допомогою узагальненої Lagrange-ової інтерполяційної формули.

§ 34. Другий довід збіжности шуканих наближень

Існування границь:

$$\lim_{m=\infty} y_m,\ \lim_{m=\infty} y'_m,\ .\ .\ .\ .\ ,\ \lim_{m=\infty} y_m^{(k-1)}$$

ми доводили досі, базуючися на існуванні Green-ової функції задачі (30)—(31), або на існуванні Green-ової функції задачі (1)—(2) розділу I та на основах теорії лінійних інтеґральних рівнань. Тепер за допомогою вислідів параграфа 27 щодо нескінченних визначників ми можемо цей довід провести незалежно.

Нехай

$$\Phi_0(x),\ \Phi_1(x),\ \Phi_2(x),\ .\ .\ . \tag{287}$$

є система ортогональних та нормальних функцій на інтервалі $(a, b,)$ при чім ми тим часом не вимагаємо, щоб вона була повна або замкнена. Визначивши функції φ_i з умов

$$M_x[\varphi_i] = \Phi_i \tag{288}$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots)$$

та

$$\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_l^{(j)} \varphi_i^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_l^{(j)} \varphi_i^{(j)}(b) = 0 \tag{289}$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1),$$

дістанемо:

$$\varphi_i(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, \Phi_i(\xi)\, d\xi \tag{290}$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots)$$

Доведімо, що для всіх вартостей параметра λ, крім деяких виняткових, сума

$$y_m(x) = a_0^{(m)} \varphi_0(x) + a_1^{(m)} \varphi_1(x) + \ldots + a_m^{(m)} \varphi_m(x),$$

визначена з рівнань:

$$\int_a^b \left\{ L_x[y_m] - f(x) \right\} \Phi_i(x)\, dx = 0 \tag{291}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m),$$

для

$$m \to \sim$$

збігається абсолютно й одностайно до певної функції $Y(x)$:

$$\lim_{m = \sim} y_m(x) = Y(x) \tag{292}$$

при чім одночасно:

$$\begin{gathered} \lim_{m = \sim} y'_m(x) = Y'(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lim_{m = \sim} y_m^{(k-1)}(x) = Y^{(k-1)}(x), \end{gathered} \tag{292$_a$}$$

та існує границя

$$\lim_{m = \sim} \int_a^b [y_m^{(k)}(x)]^2\, dx \tag{292$_b$}$$

щоразу, коли сучинники

$$a_0(x),\ a_1(x),\ \ldots,\ a_k(x)$$

виразу $N_x[\ ]$ інтеґруються на інтервалі (a, b) разом із своїми квадратами.

Цей довід уже майже закінчено в параграфах 29 та 30, але ми тут проведемо його трохи відмінно, щоб здобути вислідів глибших.

Нехай

$$u_{m+p} = y_{m+p} - y_m = b_0\varphi_0 + b_1\varphi_1 + \ldots + b_{m+p}\varphi_{m+p} \tag{293}$$

Замінивши в системі рівнань (291) значок m значком $m+p$, матимемо:

$$\int_a^b \{L_x[y_{m+p}] - f(x)\} \Phi_i(x)\,dx = 0 \qquad (291_a)$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m+p)$$

Замість системи (291) напишімо таку:

$$\int_a^b \{L_x[y_m] - f(x)\} \Phi_i(x)\,dx = \varepsilon_i \qquad (291_b)$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m+p),$$

де очевидно

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_m = 0$$

Доведімо, що

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_{m+1}^2 = 0 \qquad (294)$$

Справді, маемо:

$$\varepsilon_{m+j} = \int_a^b \{\lambda N_x[y_m] - f\} \Phi_{m+j}(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \{\lambda \int_a N_x[G(x,\xi)] \sum_{i=0}^{m} b_i^{(m)} \Phi_i(\xi)\,d\xi - f(x)\} \Phi_{m+j}(x)\,dx =$$

$$= \lambda \int_a \int_a N_x[G(x,\varepsilon)] \sum_{i=0}^{m} b_i^{(m)} \Phi_i(\xi)\, \Phi_{m+j}(x)\,d\xi\,dx - \int_a^b f(x)\, \Phi_{m+j}(x)\,dx$$

Звідси, за допомогою нерівностей Cauchy та Буняковського, виходить:

$$\varepsilon_{m+j}^2 \leqslant 2\lambda^2 \sum_{i=0}^{m} (b_i^{(m)})^2 \sum_{i=0}^{m} \left\{ \int_a^b \int_a^b N_x[G(x,\xi)]\, \Phi_i(\xi)\, \Phi_{m+j}(x)\,d\xi\,dx \right\}^2 +$$

$$+ 2 \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b f(x)\, \Phi_{m+j}(x)\,dx \right\}^2$$

Звідси

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_{m+j}^2 \leqslant 2\lambda^2 \sum_{i=0}^{m} (b_i^{(m)})^2 \cdot \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b \int_a^b N_x[G(x,\xi)]\, \Phi_i(\xi)\, \Phi_{m+j}(x)\,d\xi\,dx \right\}^2 +$$

$$+ 2 \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b f(x)\, \Phi_{m+j}(x)\,dx \right\}^2 \qquad (295)$$

Алеж, як видно з розгляду визначників та застосування узагальненої Hadamard-ової нерівности, сума

$$\sum_{i=0}^{\infty} (b_i^{(m)})^2$$

є скінчена. Тому в формулі (295) сума

$$M_m = \sum_{i=0}^{m} (b_i^{(m)})^2$$

є обмежена. Щодо суми

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{\sim} \left\{ \int_a^b \int_a^b N_x [G(x, \xi)] \, \Phi_i(\xi) \, \Phi_{m+j}(x) \, d\xi \, dx \right\}^2, \tag{295$_a$}$$

то це є сума квадратів деяких сучинників Fourier функції двох змінних $N_x [G(x, \xi)]$ у її розвиненні по ортогональних функціях:

$$\Phi_i(\xi) \, \Phi_j(x)$$

у квадраті:

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad a \leqslant \xi \leqslant b$$

Через те, що подвійна сума

$$\sum_{i=0}^{\sim} \sum_{j=0}^{\sim} \left\{ \int_a^b \int_a^b N_x [G(x, \xi)] \, \Phi_j(\xi) \, \Phi_j(x) \, d\xi \, dx \right\}^2 \leqslant \int_a^b \int_a^b \left\{ N_x [G(x, \xi)] \right\}^2 dx \, d\xi$$

збігаеться абсолютно, то сума (295_a) іде до нуля при

$$m \to \sim$$

Нарешті те саме треба сказати за суму

$$\sum_{j=1}^{\sim} \left\{ \int_a^b f(x) \, \Phi_{m+j}(x) \, dx \right\}^2,$$

бо вона є остача ряду:

$$\sum_{i=0}^{\sim} \left\{ \int_a^b f(x) \, \Phi_i(x) \, dx \right\}^2 \leqslant \int_a^b f^2(x) \, dx$$

Отож виходить із нерівности (295) залежність (294). Віднявши тепер рівнання (291_b) від рівнань (291) дістанемо систему:

$$\int_a^b L_x [u_{mp}] \, \Phi_i(x) \, dx = \varepsilon_i$$

$$(i = 0, \ 1, \ . \ . \ . \ . \ , m + p), \tag{296}$$

при чім

$$\lim \sum_{i=0}^{\sim} \varepsilon_i^2 = 0, \tag{297}$$

а зосібна

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \ . \ . \ . \ . = \varepsilon_m = 0$$

Переписавши систему (296) так:

$$b_i + \sum_{j=0}^{m+p} b_{ji} \, b_j = \varepsilon_i \tag{298}$$

$$(i = 0, 1, \ . \ . \ . \ . \ , m + p)$$

і дописавши до неї рівність:

$$b_0 \varphi_0^{(l)}(x) + b_1 \varphi_1^{(l)} + \cdot \cdot \cdot + b_{m+p} \varphi_{m+p}^{(l)}(x) = u_{mp}^{(l)}(x) \tag{299}$$

$$(l = 0, \ 1, \cdot \cdot \cdot , \ k - 1),$$

визначимо з (298) та (299):

$$u_{mp}^{(l)}=\frac{1}{\Delta_{m+p}(\lambda)}\cdot\begin{vmatrix} 0, & \varphi_0^{(l)}(x), & \ldots, & \varphi_m^{(l)}(x), & \varphi_{m+1}^{(l)}(x), & \ldots, & \varphi_{m+p}^{(l)}(x) \\ 0, & 1+b_{00}, & \ldots, & b_{0m}, & b_{0,m+1}, & \ldots, & b_{0,m+p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & b_{m0}, & \ldots, & 1+b_{mm}, & b_{m,m+1}, & \ldots, & b_{m,m+p} \\ \varepsilon_{m+1}, & b_{m+1,0}, & \ldots, & b_{m+1,m}, & 1+b_{m+1,m+1}, & \ldots, & b_{m+1,m+p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_{m+p}, & b_{m+p,0}, & \ldots, & b_{m+p,m}, & b_{m+p,m+1}, & \ldots, & 1+b_{m+p,m+p} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{D_{m+p}^{(l)}(x;\lambda)}{\Delta_{m+p}(\lambda)} \tag{300}$$

$$(l=0,\ 1,\ldots,\ k-1)$$

Нагадуючи, що існує

$$\lim_{m+p=\infty} e^{-b_{00}-b_{11}-\cdots-b_{m+p,m+p}}\Delta_{m+p}(\lambda) \tag{301}$$

і застосовуючи Hadamard-ову нерівність до визначника

$$e^{-b_{00}-b_{11}-\cdots-b_{m+p,m+p}}D_{m+p}^{(l)}(x;\lambda),$$

що дасть

$$\left\{e^{-b_{00}-b_{11}-\cdots-b_{m+p,m+p}}D_{m+p}^{(l)}(x;\lambda)\right\}^2\leqslant\sum_{i=m+1}^{m+p}\varepsilon_i^2\left|\mathfrak{A}_{m+p}\mathfrak{A}'_{m+p}\right|,$$

де

$$=\begin{vmatrix} \varphi_0^{(l)}(x), & e^{-b_{00}}(1+b_{00}), & \ldots, & e^{-b_{00}}b_{m0}, & \ldots, & e^{-b_{00}}b_{m+p,0} \\ \varphi_1^{(l)}(x), & e^{-b_{11}}b_{01}, & \ldots, & e^{-b_{11}}b_{m1}, & \ldots, & e^{-b_{11}}b_{m+p,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{m+p}^{(l)}(x), & e^{-b_{m+p,m+p}}b_{0,m+p}, & \ldots, & e^{-b_{m+p,m+p}}b_{m,m+p}, & \ldots, & e^{-b_{m+p,m+p}}(1+b_{m+p,m+p}) \end{vmatrix}$$

бачимо, що

$$\lim\left\{e^{-b_{00}-b_{11}-\cdots-b_{m+p,m+p}}D_{m+p}^{(l)}(x;\lambda)\right\}^2=\lim_{m=\infty}\widetilde{\sum_{m=m+1}}\varepsilon_i^2=0$$

Отже, коли границя (301) не є нуль, то:

$$\lim_{m=\infty}\left[u_{mp}^{(l)}\right]^2=0,\qquad \lim_{m=\infty}u_{mp}^{(l)}=0$$

$$(l=0,\ 1,\ldots,\ k-1)$$

Звідси випливає існування границь (292) та (292$_a$). Що останні постають із (292) через диференціяцію функції $Y(x)$, випливає з одностайної збіжности суцільної функції $y_m(x)$ та її похідних. Візьмімо під увагу, що формула (300) є правдива й для

$$l=k,$$

і що лінійною комбінацією з рівностей (300) можна утворити рівність:

$$M_a[u_{mp}] = \frac{1}{\Delta_{m+p}(\lambda)} \begin{vmatrix} 0, & \Phi_0(x), & \ldots, & \Phi_m(x), & \ldots, & \Phi_{m+p}(x) \\ 0, & 1+b_{00}, & \ldots, & b_{0m}, & \ldots, & b_{0,m+p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & b_{m0}, & \ldots, & 1+b_{mm}, & \ldots, & b_{m,m+p} \\ \varepsilon_{m+1}, & b_{m+1,0}, & \ldots, & b_{m+1,m}, & \ldots, & b_{m+1,m+p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_{m+p}, & b_{m+p,0}, & \ldots, & b_{m+p,m}, & \ldots, & 1+b_{m+p,m+p} \end{vmatrix} \tag{302}$$

Із другого боку очевидно

$$M_x[u_{mp}]\, b_0\, \Phi_0(x) + b_1\, \Phi_1(x) + \ldots + b_{m+p}\, \Phi_{m+p}(x),$$

звідки

$$\int_a^b M_x^2[u_{mp}]\, dx = b_0^2 + b_1^2 + \ldots + b_{m+p}^2 \tag{303}$$

Отож із (302) маємо, помноживши обидві сторони на $M_x[u_{mp}]$ та зінтеґрувавши:

$$\int_a^b M_x^2[u_{mp}]\, dx = \frac{1}{\Delta_{m+p}(\lambda)} \cdot \begin{vmatrix} 0, & b_0, & \ldots, & b_m, & \ldots, & b_{m+p} \\ 0, & 1+b_{00}, & \ldots, & b_{0m}, & \ldots, & b_{0,m+p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & b_{m0}, & \ldots, & 1+b_{mm}, & \ldots, & b_{m,m+p} \\ \varepsilon_{m+1}, & b_{m+1,0}, & \ldots, & b_{m+1,m}, & \ldots, & b_{m+1,m+p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_{m+p}, & b_{m+p,0}, & \ldots, & b_{m+p,m}, & \ldots, & 1+b_{m+p,m+p} \end{vmatrix}$$

$$= \varepsilon_{m+1} B_{m1} + \varepsilon_{m+2} B_{m2} + \ldots + \varepsilon_{m+p} B_{mp}, \tag{304}$$

де

$$B_{mi} = \frac{1}{\Delta_{m+p}(\lambda)} \cdot \begin{vmatrix} b_0, & \ldots, & b_m, & \ldots, & b_{m+p} \\ 1+b_{00}, & \ldots, & b_{0m}, & \ldots, & b_{0,m+p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m0}, & \ldots, & 1+b_{mm}, & \ldots, & b_{m,m+p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m+i-1,0}, & \ldots, & b_{m+i-1,m}, & \ldots, & b_{m+i-1,m+p} \\ b_{m+i+1,0}, & \ldots, & b_{m+i+1,m}, & \ldots, & b_{m+i+1,m+p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m+p,0}, & \ldots, & b_{m+p,m}, & \ldots, & 1+b_{m+p,m+p} \end{vmatrix} = \frac{C_{m+p,i}(\lambda)}{\Delta_{m+p}(\lambda)}$$

На підставі теорем параграфа 26, добутки

$$e^{-b_{00}-b_{11}-\ldots-b_{m+p,m+p}} C_{m+p,i}(\lambda)$$

та

$$e^{-b_{00}-b_{11}-\ldots-b_{m+p,m+p}} \Delta_{m+p}(\lambda)$$

при

$$m \to \sim$$

мають границі і ці границі є обмежені в своїй сукупності, отже для всіх вартостей параметра λ, крім особливих, буде

$$B_{mi}^2 < M(\lambda),$$

де $M(\lambda)$ є стале число, незалежне ні від i, ні від m. Тоді з рівности (304) виводимо:

$$\left\{\int_a^b M_x^2[u_{mp}]\,dx\right\}^2 \leqslant M(\lambda)\cdot\sum_{i=0}^{\sim}\varepsilon_{m+i}^2,$$

отже

$$\lim_{m=\sim}\int_a^b M_x^2[u_{mp}]\,dx = 0 \tag{305}$$

Нагадавши зазначення (293), виводимо звідси:

$$\int_a^b M_x^2[y_{m+p}]\,dx + \int_a^b M_x^2[y_m]\,dx - 2\int_a^b M_x[y_{m+p}]\,M_x[y_m]\,dx < \eta_m^2$$

$$\lim_{m=\sim}\eta_m = 0,$$

або, застосувавши нерівність Буняковського,

$$\int_a^b M_x^2[y_{m+p}]\,dx + \int_a^b M_x^2[y_m]\,dx - 2\sqrt{\int_a^b M_x^2[y_{m+p}]\,dx\int_a^b M_x^2[y_m]\,dx} < \eta_m^2$$

$$\left\{\sqrt{\int_a^b M_x^2[y_{m+p}]\,dx} - \sqrt{\int_a^b M_x^2[y_m]\,dx}\right\}^2 < \eta_m^2,$$

звідки існування

$$\lim_{m=\sim}\sqrt{\int_a^b M_x^2[y_m]\,dx}$$

Отож існує

$$\lim\int_a^b M_x^2[y_m]dx \tag{306}$$

А що існування

$$\lim\int_a^b [y_m^{(l)}(x)]^2\,dx \tag{307}$$

$$(l = 0,\ 1,\ .\ .\ .\ ,\ k-1)$$

випливає з рівностей (292_a), то, комбінуючи лінійно (306) та (307), виведемо легко й існування границі (292_b).

§ 35. Другий довід існування шуканої розв'язки

Міркування попереднього параграфа довели, що сума y_m, її похідні до порядку $k-1$-го включно та інтеґрал від квадрата k-ої похідної мають границі. Але вони зовсім не показують, що $\lim\limits_{m=\sim} y_m$ є розв'язка задачі (30)—(31), та це й не правдиво, взагалі кажучи, бо систему (287) ми вибрали дуже довільно (вона могла бути не замкнена). Тепер ми доведемо, що ця границя справджує рівняння (30) щоразу, коли система функцій (287) є замкнена.

Перепишімо рівності (291) так:

$$\int_a^b \{M_x[y_m]+\lambda N_x[y_m]-f(x)\}\,\Phi_i(x)\,dx=0 \tag{308}$$

$$(i=0,\ 1,\ .\ .\ .\ ,\ m)$$

Очевидно,

$$M_x[y_m]=b_0^{(m)}\Phi_0(x)+\cdot\cdot\cdot+b_m^{(m)}\Phi_m(x)$$

Далі функція

$$\lambda N_x[Y]-f(x) \tag{309}$$

інтеґрується з своїм квадратом. Справді бо таку властивість мають функції

$$a_1(x),\ a_2(x),\ .\ .\ .\ ,\ a_k(x)$$

та функції

$$Y(x),\ Y'(x),\ .\ .\ .\ ,\ Y^{(k-1)}(x)$$

Отже існують такі сучинники

$$\alpha_0^{(m)},\ \alpha_1^{(m)},\ .\ .\ .\ ,\ \alpha_m^{(m)},$$

що

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b \{\lambda N_x[Y]-f(x)-\alpha_0^{(m)}\Phi_0(x)-\cdot\cdot\cdot-\alpha_m^{(m)}\Phi_m(x)\}^2\,dx=0 \tag{310}$$

А з другого боку

$$\lim\{N_x[Y]-N_x[y_m]\}=0 \tag{311}$$

Отже бачимо з (310) та (311), що існує величина $\alpha_m(x)$, яка справджує рівність:

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b \alpha_m^2(x)\,dx=0 \tag{312}$$

та вимогу

$$\lambda N_x[y_m]-f(x)-\alpha_0^{(m)}\Phi_0(x)-\cdot\cdot\cdot-\alpha_m^{(m)}\Phi_m(x)=\alpha_m(x)$$

Помноживши тепер рівність (308) на

$$b_i^{(m)}+\alpha_i^{(m)}$$

та просумувавши по i від 0 до m, дістанемо:

$$\int_a^b \{M_x[y_m]+\lambda N_x[y_m]-f(x)\}\,\{M_x[y_m]+\lambda N_x[y_m]-\alpha_m(x)\}\,dx=0$$

Звідси:

$$\int_a^b \{L_x[y_m]-f(x)\}^2-\int_a^b \alpha_m(x)\,\{L_x[y_m]-f(x)\}\,dx=0$$

Застосувавши нерівність Буняковського, легко дістаємо:

$$\int_a^b \{L_x[y_m]-f(x)\}^2\leqslant\int_a^b \alpha_m^2(x)\,dx, \tag{313}$$

звідки, з огляду на (312):

$$\lim\int_a^b \{L_x[y_m]-f(x)\}^2\,dx=0 \tag{314}$$

Із нерівности (313), за допомогою нерівности Буняковського, виводимо:

$$\int_{x_0}^{x} \{L_x[y_m]-f(x)\}\,dx \leqslant \sqrt{(b-a)^2\int_a^b \alpha_m^2(x)\,dx} \qquad (a\leqslant x_0\leqslant x\leqslant b)$$

Отже

$$\lim_{m\to\infty}\int_{x_0}^{x} \{L_x[y_m]-f(x)\}\,dx=0 \tag{315}$$

або:

$$\lim\{y_m^{(k-1)}(x)-y_m^{(k-1)}(x_0)+\int_{x_0}^{x}(B_1y_m^{(k-1)}(x)+\cdots+B_ky_m(x)+\lambda N_x[y_m])\,dx\}=0,$$

тобто:

$$Y^{(k-1)}(x)-Y^{(k-1)}(x_0)+\int_{x_0}^{x}\{B_1Y^{(k-1)}(x)+\cdots+B_kY(x)+\lambda N_x[Y]-f(x)\}\,dx=0, \tag{316}$$

де x_0 та x є довільні точки інтервалу (a, b). Для всякої точки x, де підінтеґральна функція

$$B_1Y^{(k-1)}(x)+\cdots+B_kY(x)+\lambda N_x(Y)-f(x) \tag{317}$$

є суцільна, рівність (316) можна почленно диференціювати, і вийде:

$$Y^{(k)}(x)+B_1Y^{(k-1)}(x)+\cdots+B_kY(x)+\lambda N_x[Y]-f(x)=0,$$

тобто

$$L_x[Y]=f(x), \tag{318}$$

отже в усякій такій точці функція $Y(x)$ справджує рівнання (30). Очевидно також, що $Y(x)$ справджує всі умови (31). Щодо виразу (317), то, як установлено в попереднім параграфі, перші k його членів є суцільні скрізь на інтервалі (a, b); щодо виразу $\lambda N_x[Y]-f(x)$, то очевидно він може мати перерви тільки в тих точках, де їх мають функції

$$a_1(x),\ \ldots,\ a_k(x),\ f(x) \tag{319}$$

Отож остаточно функція $Y(x)$ є розв'язка задачі (30)—(31) в усіх точках, де сучинники (319) є суцільні, а загальніше в усіх тих точках, де функція (317) суцільна.

Наведімо тут коротко інші міркування, що ведуть до того самого висліду. Вони базуються на такій відомій теоремі: коли ряд функцій

$$v_1(x),\ v_2(x),\ v_3(x),\ \ldots$$

на інтервалі (a, b) має властивість:

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b\{v_{m+p}(x)-v_m(x)\}^2\,dx=0$$

для всякого p, то існує функція $v(x)$, що інтеґрується разом із своїм квадратом і справджує рівність:

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b\{v_m(x)-v(x)\}^2\,dx=0$$

Переписавши тепер рівності (296) так:

$$\int_a^b \left\{M_x[u_{mp}] + \lambda N_x[u_{mp}]\right\} \Phi_i(x)\,dx = \varepsilon_i \tag{320}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m+p)$$

і завваживши, що функція

$$\alpha_m(x) = \lambda N_x[u_{mp}]$$

іде до нуля, коли

$$m \to \sim,$$

утворімо з рівностей (320) таку лінійну комбінацію:

$$\int_a^b \left\{M_x[u_{mp}] + \alpha_m(x)\right\} M_x[u_{mp}]\,dx = b_0\varepsilon_0 + b_1\varepsilon_1 + \cdots + b_{m+p}\varepsilon_{m+p}$$

Звідси

$$\int_a^b M_x^2[u_{mp}]\,dx - \sqrt{\int_a^b M_x^2[u_{mp}]\,dx \int_a^b \alpha_m^2(x)\,dx} \leqslant |b_0\varepsilon_0 + b_1\varepsilon_1 + \cdots + b_{m+p}\varepsilon_{m+p}| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{i=0}^{m+p} b_i^2 \sum_{i=0}^{m+p} \varepsilon_i^2}\,. \tag{321}$$

А що

$$\lim_{m=\sim} \int_a^b \alpha_m^2(x)\,dx = 0$$

$$\lim_{m=\sim} \sum_{i=0}^{m+p} \varepsilon_i^2 = 0,$$

то з (321) виходить:

$$\lim_{m=\sim} \int_a^b M_x^2[u_{mp}]\,dx = 0$$

або:

$$\lim_{m=\sim} \int_a^b \left\{M_x[y_{m+p}] - M_x[y_m]\right\}^2 dx = 0$$

і остаточно

$$\lim_{m=\sim} \int_a^b \left\{y_{m+p}^{(k)}(x) - Y_m^{(k)}(x)\right\}^2 dx = 0$$

Отже існує функція $Y_k(x)$, що справджує рівність:

$$\lim_{m=\sim} \int_a^b \left\{y_m^{(k)}(x) - Y_k(x)\right\}^2 dx = 0,$$

звідки

$$\int_{x_0}^x Y_k(x)\,dx = Y^{(k-1)}(x) - Y^{(k-1)}(x_0)$$

$$(a \leqslant x_0 \leqslant x \leqslant b)$$

Отже скрізь, де функція $Y_k(x)$ суцільна, вона дорівнює $Y^{(k)}x$. Тепер ясно, що функція $Y(x)$ справджує рівняння (30) скрізь на інтервалі (a, b), крім хіба множини точок нульової міри. Але функція $Z(x)$ визначена з рівняння

$$M_x[Z] + \lambda N_x[Y] = f(x) \tag{322}$$

за тих самих граничних умов, що $y_m(x)$, справджує рівнання (30) і граничні умови (31) цілком. Справді, сучинники

$$\int_a^b M_x[\ ]\,\Phi_i(x)\,dx$$

у функцій Z та Y є відповідно рівні, отже

$$Z^{(l)} = Y^{(l)}$$

$$(l=0,\,1,\,\ldots,\,k-1),$$

а тому в рівнанні (322) можна Y заступити функцією Z:

$$M_x[Z] + \lambda N_x[Z] = 0,$$

що й треба було довести. Маємо вислід:

Коли сучинники задачі (30)—(31) разом із своїми квадратами інтеґруються, то вона має на інтервалі (a, b) одну єдину розв'язку для всіх вартостей параметра λ, крім тих, що справджують рівнання

$$\Delta(\lambda) = 0$$

Корені цього рівнання

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots$$

є характеристичні числа задачі (30)—(31). Поблизу точки

$$\lambda = \lambda_i$$

$$(i=0,\,1,\,2,\,\ldots)$$

маємо:

$$Z = Y = \frac{\Psi_i(x)}{(\lambda-\lambda_i)^{h_i}} + \frac{\Psi_{1i}(x)}{(\lambda-\lambda_i)^{h_i-1}} + \ldots$$

Запровадивши Y до рівнання (30) і поклавши λ_i за λ, дістанемо:

$$M_x[\Psi_{k_i i}] + \lambda_i N_x[\Psi_{k_i i}] = 0$$

$$(k_i = h_i,\ h_i - 1,\ \ldots,\ 1)$$

Розв'язки рівнання

$$M_x[\Psi] + \lambda N_x[\Psi] = 0$$

за граничних умов задачі (30)—(31) і за тих вартостей параметра λ, коли вони не є тотожні нулі, є фундаментальні функції задачі (30)—(31).

§ 36. Узагальнена ортогоналізація

Очевидно систему функцій $\varphi_i(x)$ можна заступити системою функцій $\psi_i(x)$ згідно з рівностями:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k_0}\psi_0(x) = \varphi_0(x)\\
&\frac{1}{k_1}\psi_1(x) = k_0^{(1)}\varphi_0(x) + \varphi_1(x)\\
&\frac{1}{k_2}\psi_2(x) = k_0^{(2)}\varphi_0(x) + k_1^{(2)}\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{1}{k_m}\psi_m(x) = k_0^{(m)}\varphi_0(x) + k_1^{(m)}\varphi_1(x) + \ldots + k_{m-1}^{(m)}\varphi_{m-1}(x) + \varphi_m(x)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\tag{323}$$

де числа $k_i^{(m)}$ визначаються з рівнань:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b L_x[\psi_m]\,\Phi_0(x)\,dx = 0\\
&\int_a^b L_x[\psi_m]\,\Phi_1(x)\,dx = 0\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\int_a^b L_x[\psi_m]\,\Phi_{m-1}(x)\,dx = 0\\
&(m = 0,\ 1,\ 2, \ldots)
\end{aligned} \tag{324}$$

Визначник цієї системи лінійних рівнань щодо невідомих

$$k_0^{(m)},\ k_1^{(m)}, \ldots,\ k_{m-1}^{(m)} \tag{325}$$

є

$$\begin{vmatrix}
\int_a^b L_x[\varphi_0]\,\Phi_0(x)\,dx, & \int_a^b L_x[\varphi_1]\,\Phi_0(x)\,dx, & \ldots, & \int_a^b L_x[\varphi_{m-1}]\,\Phi_0(x)\,dx\\
\int_a^b L_x[\varphi_0]\,\Phi_1(x)\,dx, & \int_a^b L_x[\varphi_1]\,\Phi_1(x)\,dx, & \ldots, & \int_a^b L_x[\varphi_{m-1}]\,\Phi_1(x)\,dx\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\int_a^b L_x[\varphi_0]\,\Phi_{m-1}(x)\,dx, & \int_a^b L_x[\varphi_1]\,\Phi_{m-1}(x)\,dx, & \ldots, & \int_a^b L_x[\varphi_{m-1}]\,\Phi_{m-1}(x)\,dx
\end{vmatrix} \tag{326}$$

А ми знаємо, що для всякої нехарактеристичної вартости параметра λ та для всякого досить великого значка m цей визначник є не нуль. Отже числа (325) є взагалі цілком визначені, а з системи (324) випливає:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b L_x[\psi_m]\,M_x[\psi_0]\,dx = 0\\
&\int_a^b L_x[\psi_m]\,M_x[\psi_1]\,dx = 0\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\int_a^b L_x[\psi_m]\,M_x[\psi_{m-1}]\,dx = 0\\
&(m = 0,\ 1,\ 2, \ldots)
\end{aligned} \tag{327}$$

Крім того, визначмо неозначений досі чинник k_m так, щоб було:

$$\int_a^b L_x[\psi_m]\,M_x[\psi_m]\,dx = 1, \tag{327$_a$}$$

що зводиться на вимогу:

$$\int_a^b \left\{M_x^2[\psi_m] + \lambda N_x[\psi_m]\,M_x[\psi_m]\right\} dx = 0$$

Звідси:

$$k_m^2 = \int_a^b \left\{k_0^{(m)}\Phi_0(x) + \ldots + k_{m-1}^{(m)}\Phi_{m-1}(x) + \Phi_m(x) + \lambda N_x\left[\tfrac{1}{k_m}\psi_m\right]\right\}\Phi_m(x)\,dx$$

ія всіх вартостей параметра λ, крім деяких виняткових. Коли функції $\varphi_i(x)$ є ортогональні та нормальні, то

$$k_m^2 = 1 + \lambda \int_a^b N_x [k_0^{(m)} \varphi_0(x) + \cdots + k_{m-1}^{(m-1)} \varphi_{m-1}(x) + \varphi_m(x)] \Phi_m(x)\, dx$$

оли б вимогу (327_a) не можна було справдити разом з рівностями (327), то тоді існували б рівності:

$$\int_a^b L_x[\psi_m] \Phi_0\, dx = 0$$

$$\int_a^b L_x[\psi_m] \Phi_1\, dx = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_a^b L_x[\psi_m] \Phi_m\, dx = 0,$$

отже було б:

$$\begin{vmatrix} \int_a^b L_x[\varphi_0] \Phi_0(x)\, dx, & \ldots, & \int_a^b L_x[\varphi_{m-1}] \Phi_0(x)\, dx, & \int_a^b L_x[\varphi_m] \Phi_0(x)\, dx \\ \int_a^b L_x[\varphi_0] \Phi_1(x)\, dx, & \ldots, & \int_a^b L_x[\varphi_{m-1}] \Phi_1(x)\, dx, & \int_a^b L_x[\varphi_m] \Phi_1(x)\, dx \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_a^b L_x[\varphi_0] \Phi_m(x)\, dx, & \ldots, & \int_a^b L_x[\varphi_{m-1}] \Phi_m(x)\, dx, & \int_a^b L_x[\varphi_m] \Phi_m(x)\, dx \end{vmatrix} = 0,$$

всупереч згадуваній властивості визначників (326).

Отож існують дві системи лінійно незалежних функцій:

$$\psi_0(x),\ \psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots \tag{328}$$

та

$$\Psi_0(x),\ \Psi_1(x),\ \Psi_2(x),\ \ldots \tag{329}$$

що справджують залежності:

$$M_x[\psi_h] = \Psi_h(x) \tag{330}$$

$$(h = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_i^{(j)} \psi_h^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_i^{(j)} \psi_h^{(j)}(b) = 0 \tag{331}$$

$$i = 0,\ 1,\ \ldots,\ k-1$$

$$h = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

при чім система (329) є замкнена, і що для їх функцій правдиві т рівності:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b L_x[\psi_m]\,\Psi_0(x)\,dx=0\\
&\int_a^b L_x[\psi_m]\,\Psi_1(x)\,dx=0\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\int_a^b L_x[\psi_m]\,\Psi_{m-1}(x)\,dx=0\\
&\int_a^b L_x[\psi_m]\,\Psi_m(x)\,dx=1\\
&(m=0,\ 1,\ 2,\ .\ .\ .),
\end{aligned}\qquad (33$$

що їх зватимемо умовами взагальненої ортогональности.

Бажаючи заступити функції

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ .\ .\ .$$
$$\Phi_0,\ \Phi_1,\ \Phi_2,\ .\ .\ .$$

відповідно функціями:

$$\psi_0,\ \psi_1,\ \psi_2,\ .\ .\ .$$
$$\Psi_0,\ \Psi_1,\ \Psi_2,\ .\ .\ .,$$

доведеться розв'язати одно лінійне рівнання, щоб визначити $k_0^{(1)}$, систе двох лінійних рівнань, щоб визначити $k_0^{(2)}$ та $k_1^{(2)}$, . . . , нарешті, систему лінійних рівнань, щоб визначити $k_0^{(m)}$, $k_1^{(m)}$, . . . , $k_{m-1}^{(m)}$. Крім того, тре буде добути $m+1$ квадратових коренів, щоб здобути k_0, k_1, . . . , Ці операції можна полегшити, коли шукати $\psi_m(x)$ із рівности:

$$\frac{1}{k_m}\psi_m(x)=l_0^{(m)}\psi_0(x)+l_1^{(m)}\psi_1(x)+\cdot\cdot\cdot+l_{m-1}^{(m)}\psi_{m-1}(x), \qquad (3$$

вважаючи всі попередні функції:

$$\psi_0(x),\ \psi_1(x),\ .\ .\ .\ .,\psi_{m-1}(x)$$

за вже визначені. Справді бо тоді система (332) перепишеться так:

$$\begin{aligned}
-\int_a^b L_x[\psi_m]\,\Psi_0(x)\,dx &= l_0^{(m)}\int_a^b L_x[\psi_0]\,\Psi_0(x)\,dx\\
-\int_a^b L_x[\psi_m]\,\Psi_1(x)\,dx &= l_0^{(m)}\int_a^b L_x[\psi_0]\,\Psi_1(x)\,dx+l_1^{(m)}\int_a^b L_x[\psi_1]\,\Psi_1(x)\,dx\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
-\int_a^b L_x[\psi_m]\,\Psi_{m-1}(x)\,dx &= l_0^{(m)}\int_a^b L_x[\psi_0]\,\Psi_{m-1}(x)\,dx+\cdot\cdot\cdot+l_{m-1}^{(m)}\int_a^b L_x[\psi_{m-1}]\,\Psi_{m-1}(x)\,d
\end{aligned}\qquad (33$$

Звідси сучинники

$$l_0^{(m)},\ l_1^{(m)},\ .\ .\ .\ .,\ l_{m-1}^{(m)}$$

визначаться легко один по одному; а тоді k_m здобудемо з умови (332).

Долучивши до рівнань (334) рівність:

$$l_0^{(m)}\psi_0(x)+l_1^{(m)}\psi_1(x)+\ .\ .\ .\ +l_{m-1}^{(m)}\psi_{m-1}(x)+\varphi_m(x)=\frac{1}{k_m}\psi_m(x),$$

станемо:

$$\begin{vmatrix} \varphi_m(x), & \psi_0(x), & \psi_1(x), & \ldots, & \psi_{m-1}(x) \\ \Psi_{m-1}(x)\,dx, & \int\limits_a^b L_x[\psi_0]\Psi_{m-1}(x)\,dx, & \int\limits_a^b L_x[\psi_1]\Psi_{m-1}(x)\,dx, & \ldots, & \int\limits_a^b L_x[\psi_{m-1}]\Psi_{m-1}(x)\,dx \\ \Psi_{m-2}(x)\,dx, & \int\limits_a^b L_x[\psi_0]\Psi_{m-2}(x)\,dx, & \int\limits_a^b L_x[\psi_1]\Psi_{m-2}(x)\,dx, & \ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Psi_0(x)\,dx, & \int\limits_a^b L_x[\psi_0]\Psi_0(x)\,dx, & 0, & \ldots, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\int\limits_a^b L_x[\psi_0]\,\Psi_0(x)\,dx \ldots \int\limits_a^b L_x[\psi_{m-1}]\,\Psi_{m-1}(x)\,dx \cdot \frac{1}{k_m}\psi_m(x) =$$

$$\begin{vmatrix} \varphi_m(x), & \psi_0(x), & \ldots, & \psi_{m-1}(x) \\ \int\limits_a^b L_x[\varphi_m]\,\Psi_{m-1}(x)\,dx, & \int\limits_a^b L_x[\psi_0]\,\Psi_{m-1}(x)\,dx, & \ldots, & \int\limits_a^b L_x[\psi_{m-1}]\,\Psi_{m-1}(x)\,dx \\ \int\limits_a^b L_x[\varphi_m]\,\Psi_{m-2}(x)\,dx, & \int\limits_a^b L_x[\psi_0]\,\Psi_{m-2}(x)\,dx, & \ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int\limits_a^b L_x[\varphi_m]\,\Psi_0(x)\,dx, & \int\limits_a^b L_x[\psi_0]\,\Psi_0(x)\,dx, & \ldots, & 0 \end{vmatrix} \qquad (335)$$

явімо, що за граничних умов нашої задачі, для функцій y та z справджується тотожно рівність:

$$\int\limits_a^b L_x[y]\,M_x[z]\,dx = \int\limits_a^b L_x[z]\,M_x[y]\,dx \qquad (336)$$

іегко, напр., переконатися, що так буде, коли сучинники виразів $L_x[\ ]$ а $M_x[\ ]$ сталі, а згадані граничні умови мають вигляд:

$$y(a) = y'(a) = \ldots = y^{(h-1)}(a) = 0$$

$$y(b) = y'(b) = \ldots = y^{(k-h-1)}(b) = 0$$

Тоді й виходить:

$$\int\limits_a^b L_x[\psi_i]\,\Psi_j(x)\,dx = \int\limits_a^b L_x[\psi_j]\,\Psi_i(x)\,dx \qquad (337)$$

що

$$\int\limits_a^b L_x[\psi_i]\,\Psi_j(x)\,dx = 0 \qquad (338)$$

$$(i > j),$$

о, зважаючи на (337), ця рівність є правдива взагалі для

$$i \neq j,$$

РОЗДІЛ IV

Наближене розв'язання систем звичайних лінійних диференціяльних та інтеґральних рівнань

§ 38. Система лінійних рівнань із сталими сучинниками та її Green-ів тензор

Візьмімо систему диференціяльних рівнань:

$$\begin{aligned} M_{1x}[z] &= z_1' + B_{11} z_1 + B_{12} z_2 + \cdots + B_{1k} z_k = F_1(z) \\ M_{2x}[z] &= z_2' + B_{21} z_1 + B_{22} z_2 + \cdots + B_{2k} z_k = F_2(z) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{kx}[z] &= z_k' + B_{k1} z_1 + B_{k2} z_2 + \cdots + B_{kk} z_k = F_k(z), \end{aligned} \tag{347}$$

де B_{ij} є сталі числа, і пошукаймо на інтервалі (a, b) ту її розв'язку:

$$z_1(x),\ z_2(x), \ldots, z_k(x),$$

що справджує на кінцях a та b лінійні однорідні умови:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(1)} z_i(a) + \sum_{i=1}^{k} \beta_i^{(1)} z_i(b) &= 0 \\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(2)} z_i(a) + \sum_{i=1}^{k} \beta_i^{(2)} z_i(b) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &; \\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(k)} z_i(a) + \sum_{i=1}^{k} \beta_i^{(k)} z_i(b) &= 0 \end{aligned} \tag{348}$$

Частинні випадки цих умов є умови Cauchy:

$$z_1(a) = z_2(a) = \cdots = z_k(a) = 0,$$

умова періодичности розв'язки:

$$\begin{aligned} z_1(a) &= z_1(b) \\ z_2(a) &= z_2(b) \\ &\cdots\cdots \\ z_k(a) &= z_k(b) \end{aligned}$$

та інші, що трапляються в застосуваннях.

Відомо, що система (347) має загальну розв'язку типу:

$$\begin{aligned} z_1(x) &= C_1 u_{11}(x) + C_2 u_{12}(x) + \cdots + C_k u_{1k}(x) \\ z_2(x) &= C_1 u_{21}(x) + C_2 u_{22}(x) + \cdots + C_k u_{2k}(x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_k(x) &= C_1 u_{k1}(x) + C_2 u_{k2}(x) + \cdots + C_k u_{kk}(x), \end{aligned} \tag{349}$$

де

$$u_{1i},\ u_{2i},\ \ldots,\ u_{ki}$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

є частинний інтеграл однорідної системи:

$$\begin{aligned} u_1' + B_{11} u_1 + B_{12} u_2 + \cdots + B_{1k} u_k &= 0 \\ u_2' + B_{21} u_1 + B_{22} u_2 + \cdots + B_{2k} u_k &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_k' + B_{k1} u_1 + B_{k2} u_2 + \cdots + B_{kk} u_k &= 0, \end{aligned} \tag{350}$$

а сучинники

$$C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_k$$

є функції від x, що справджують рівнання:

$$\begin{aligned} C_1'(\xi) u_{11}(\xi) + C_2'(\xi) u_{12}(\xi) + \cdots + C_k'(\xi) u_{1k}(\xi) &= F_1(\xi) \\ C_1'(\xi) u_{21}(\xi) + C_2'(\xi) u_{22}(\xi) + \cdots + C_k'(\xi) u_{2k}(\xi) &= F_2(\xi) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1'(\xi) u_{k1}(\xi) + C_2'(\xi) u_{k2}(\xi) + \cdots + C_k'(\xi) u_{kk}(\xi) &= F_k(\xi) \end{aligned} \tag{351}$$

Запровадивши зазначення:

$$y_{ix}(\xi) = C_1'(\xi) u_{i1}(x) + C_2'(\xi) u_{i2}(x) + \cdots + C_k'(\xi) u_{ik}(x) \tag{352}$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k),$$

виведемо з рівностей (351) та (352):

$$y_{ix}(\xi) = -\frac{\begin{vmatrix} 0, & u_{i1}(x), & u_{i2}(x), & \ldots, & u_{ik}(x) \\ F_1(\xi), & u_{11}(\xi), & u_{12}(\xi), & \ldots, & u_{1k}(\xi) \\ F_2(\xi), & u_{21}(\xi), & u_{22}(\xi), & \ldots, & u_{2k}(\xi) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_k(\xi), & u_{k1}(\xi), & u_{k2}(\xi), & \ldots, & u_{kk}(\xi) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_{11}(\xi), & u_{12}(\xi), & \ldots, & u_{1k}(\xi) \\ u_{21}(\xi), & u_{22}(\xi), & \ldots, & u_{2k}(\xi) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{k1}(\xi), & u_{k2}(\xi), & \ldots, & u_{kk}(\xi) \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{F_1(\xi)\begin{vmatrix} u_{i1}(x),\ldots, u_{ik}(x) \\ u_{21}(\xi),\ldots, u_{2k}(\xi) \\ u_{31}(\xi),\ldots, u_{3k}(\xi) \\ \cdots\cdots\cdots \\ u_{k1}(\xi),\ldots, u_{kk}(\xi) \end{vmatrix} - F_2(\xi)\begin{vmatrix} u_{i1}(x),\ldots,u_{ik}(x) \\ u_{11}(\xi),\ldots,u_{1k}(\xi) \\ u_{31}(\xi),\ldots,u_{3k}(\xi) \\ \cdots\cdots\cdots \\ u_{k1}(\xi),\ldots,u_{kk}(\xi) \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{k-1}F_k(\xi).\begin{vmatrix} u_{i1}(x), & \ldots, u_{ik}(x) \\ u_{11}(\xi), & \ldots, u_{1k}(\xi) \\ u_{21}(\xi), & \ldots, u_{2k}(\xi) \\ \cdots & \cdots \\ u_{k-1,1}(\xi), & \ldots, u_{k-1,k}(\xi) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_{11}(\xi),\ldots, u_{1k}(\xi) \\ u_{21}(\xi),\ldots, u_{2k}(\xi) \\ \cdots\cdots\cdots \\ u_{k1}(\xi),\ldots, u_{kk}(\xi) \end{vmatrix}} \tag{353}$$

Зазначмо для скорочення:

$$G_{ij}(x,\xi) = (-1)^{j-1} \cdot \frac{\begin{vmatrix} u_{i1}(x) & ,\ldots, & u_{ik}(x) \\ u_{11}(\xi) & ,\ldots, & u_{1k}(\xi) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{j-1,1}(\xi) & ,\ldots, & u_{j-1,k}(\xi) \\ u_{j+1,1}(\xi) & ,\ldots, & u_{j+1,k}(\xi) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{k1}(\xi) & ,\ldots, & u_{kk}(\xi) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_{11}(\xi),\ldots, u_{1k}(\xi) \\ u_{21}(\xi),\ldots, u_{2k}(\xi) \\ \cdots\cdots\cdots \\ u_{k1}(\xi),\ldots, u_{kk}(\xi) \end{vmatrix}} \tag{354}$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, k),$$

де знаменник, як відомо, є не нуль.

Очевидно

$$[G_{ij}(x,\xi)]_{\xi=x} = 0 \tag{355}$$

для

$$i \neq j$$

та

$$[G_{ii}(x,\xi)]_{\xi=x} = 1 \tag{356}$$

Із рівностей (352) та (353) маемо:

$$z_i = \int_a^x G_{i1}(x,\xi)\, F_1(\xi)\, d\xi + \cdots + \int_a^x G_{ik}(x,\xi)\, F_k(\xi)\, d\xi + D_1\, u_{i1}(x) + \cdots$$
$$\cdots + D_k\, u_{ik}(x) \tag{357}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k),$$

де сталі числа

$$D_1, D_2, \ldots, D_k \tag{358}$$

треба дібрати згідно з умовами (348), тобто з рівнань:

$$\sum_{i=1}^{k} D_i \left[\alpha_1^{(1)} u_{1i}(a) + \cdots + \alpha_1^{(k)} u_{ki}(a) + \beta_1^{(1)} u_{1i}(b) + \cdots + \beta_1^{(k)} u_{ki}(b)\right] = \sum_{j=1}^{k} \int_a^b h_j^{(1)}(x, \xi) F_j(\xi)\, d\xi$$

$$\sum_{i=1}^{k} D_i \left[\alpha_2^{(1)} u_{1i}(a) + \cdots + \alpha_2^{(k)} u_{ki}(a) + \beta_2^{(1)} u_{1i}(b) + \cdots + \beta_2^{(k)} u_{ki}(b)\right] = \sum_{j=1}^{k} \int_a^b h_j^{(2)}(x, \xi) F_j(\xi)\, d\xi \tag{359}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{k} D_i \left[\alpha_k^{(1)} u_{1i}(a) + \cdots + \alpha_k^{(k)} u_{ki}(a) + \beta_k^{(1)} u_{1i}(b) + \cdots + \beta_k^{(k)} u_{ki}(b)\right] = \sum_{j=1}^{k} \int_a^b h_j^{(k)}(x, \xi) F_j(\xi)\, d\xi,$$

де

$$h_j^{(i)}(x, \xi) = \sum_{l=1}^{k} \beta_j^{(l)} G_{il}(x, \xi) \tag{360}$$

Визначник системи лінійних рівнань (359) щодо невідомих (358) є добуток із матиць:

$$\left|\begin{matrix} \alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_1^{(k)}, \beta_1^{(1)}, \ldots, \beta_1^{(k)} \\ \alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_2^{(k)}, \beta_2^{(1)}, \ldots, \beta_2^{(k)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_k^{(1)}, \ldots, \alpha_k^{(k)}, \beta_k^{(1)}, \ldots, \beta_2^{(k)} \end{matrix}\right| \tag{361}$$

та

$$\left|\begin{matrix} u_{11}(a), \ldots, u_{k1}(a), & u_{11}(b), \ldots, u_{k1}(b) \\ u_{12}(a), \ldots, u_{k2}(a), & u_{12}(b), \ldots, u_{k2}(b) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{1k}(a), \ldots, u_{kk}(a), & u_{1k}(b), \ldots, u_{kk}(b) \end{matrix}\right| \tag{362}$$

Перша з них, очевидно, має ранґ k. Щодо другої, то сучинники B_{ij} системи диференціяльних рівнань (347) можна дібрати так, що всі визначники k-го порядку матиці (362) будуть лінійно незалежні. Справді, нехай

$$\begin{aligned} &u_{11}(x) = e^{r_1 x}, \quad u_{21}(x) = r_1 e^{r_1 x}, \ldots, \quad u_{k1}(x) = r_1^{k-1} e^{r_1 x} \\ &u_{12}(x) = e^{r_2 x}, \quad u_{22}(x) = r_2 e^{r_2 x}, \ldots, \quad u_{k2}(x) = r_2^{k-1} e^{r_2 x} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &u_{1k}(x) = e^{r_k x}, \quad u_{2k}(x) = r_k e^{r_k x}, \ldots, \quad u_{kk}(x) = r_k^{k-1} e^{r_k x} \end{aligned} \tag{363}$$

Тоді система (350) має вигляд:

$$u_1' = u_2$$

$$u_2' = u_3$$

$$\cdots\cdots$$

$$u_{k-1}' = u_k,$$

$$\begin{vmatrix} u_1(x), & 1, & \ldots, & 1 \\ u_2(x), & r_1, & \ldots, & r_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_k(x), & r_1^{k-1}, & \ldots, & r_k^{k-1} \\ u_k', & r_1^k, & \ldots, & r_k^k \end{vmatrix} = 0$$

Узявши числа

$$r_1, r_2, \ldots, r_k,$$

як незалежні змінні, бачимо, що лінійна залежність між визначниками k- ступеня матиці (362) вимагає одного з двох:

1) або лінійної залежности між елементами якогось (напр., першоі рядка цієї матиці, чого нема, зважаючи на добір (363), бо функції змінного

$$e^{ra}, re^{ra}, \ldots, r^{k-1}e^{ra}, e^{rb}, re^{rb}, \ldots, r^{k-1}e^{rb}$$

є лінійно незалежні;

2) або лінійної залежности між визначниками якихось $k-1$ рядк цієї матиці.

Ця остання можливість вимагає тоді лінійної залежности між визн никами з якихось $k-2$ рядків нашої матиці, і т. д., аж поки дійде до вимоги лінійної залежности між елементами якогось рядка цієї мати що, як зазначено, неможливо, зважаючи на добір функцій (363).

Тим часом добуток із матиці (361) та (362) є якраз лінійна комбіна з визначників матиці (362). Отже він — не нуль.

Отож можна на безліч способів добрати сучинники системи (347) так, щоб задача (347)—(348) мала одну і тіль одну розв'язку.

Зважаючи на (357) та (359), цю розв'язку можна записати так:

$$z_i = \int_a^x \sum_{l=i}^k g_{il}(x, \xi) F_l(\xi)\, d\xi + \int_a^b \sum_{l=i}^k j_{il}(x, \xi)\; F_l(\xi)\, d\xi \qquad (36$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k),$$

де функції

$$j_{il}(x, \xi),$$

як видно з (354) та (360), є суцільні на інтервалі (a, b).

Запровадивши тепер зазначення:

$$\begin{aligned} G_{il}(x, \xi) &= g_{il}(x, \xi) + j_{il}(x, \xi) && (\xi \leq x) \\ G_{il}(x, \xi) &= j_{il}(x, \xi) && (\xi > x), \end{aligned} \qquad (36$$

маемо:

$$z_i = \int_a^b \sum_{j=1}^{k} G_{ij}(x, \xi)\, F_j(\xi)\, d\xi \tag{366}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k)$$

скрізь на інтервалі (a, b) та на його кінцях. Тензор

$$\begin{matrix} G_{11}(x,\xi), & G_{12}(x,\xi), & \ldots, & G_{1k}(x,\xi) \\ G_{21}(x,\xi), & G_{22}(x,\xi), & \ldots, & G_{2k}(x,\xi) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{k1}(x,\xi), & G_{k2}(x,\xi), & \ldots, & G_{kk}(x,\xi) \end{matrix}$$

звемо Green-овим тензором задачі (347)—(348).

§ 39. Властивості Green-ового тензора

Нагадавши рівності (355) та (356), бачимо, що функції

$$G_{ij}(x, \xi) \quad (i \neq j)$$

є суцільні скрізь на інтервалі (a, b), як функції змінних x та ξ. Щождо функцій

$$G_{ii}(x, \xi),$$

то в точці

$$\xi = x$$

вони мають скінченні перерви.

Доведімо, що кожен стовпчик Green-ового тензора справджує всі ті самі граничні умови, що й функції z_i. Справді, з (366) маємо:

$$\int_a^b \sum_{j=1}^{k} [\alpha_1^{(l)} G_{1j}(a,\xi) + \cdots + \alpha_k^{(l)} G_{kj}(a,\xi) + \beta_1^{(l)} G_{1j}(b,\xi) + \cdots$$

$$\cdots + \beta_k^{(l)} G_{kj}(b,\xi)]\, F_j(\xi)\, d\xi = 0 \tag{367}$$

$$(l = 1, 2, \ldots, k)$$

А що, як видно з нашої викладки, функції $G_{ij}(x, \xi)$ не залежать від функцій $F_j(\xi)$, то можемо тут покласти:

$$F_j(\xi) = \alpha_1^{(l)} G_{1j}(a,\xi) + \cdots + \alpha_k^{(l)} G_{kj}(a,\xi) + \beta_1^{(l)} G_{1j}(b,\xi) + \cdots + \beta_k^{(l)} G_{kj}(b,\xi) \tag{368}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, k)$$

і тоді з (367) та з суцільности функцій (368) вийде:

$$\alpha_1^{(l)} G_{1j}(a,\xi) + \cdots + \alpha_k^{(l)} G_{kj}(a,\xi) + \beta_1^{(l)} G_{1j}(b,\xi) + \ldots + \beta_k^{(l)} G_{kj}(b,\xi) = 0 \tag{368_a}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, k),$$

що й треба було довести.

Доведімо ще, що система функцій

$$G_{1j}(x,\xi), \quad G_{2j}(x,\xi), \ldots, \quad G_{kj}(x,\xi)$$

аргумента x справджує систему рівнань (350) скрізь на інтервалі (a, b), крім хіба точки $x = \xi$.

Переписавши рівність (366) так:

$$z_i = \int_a^x \sum_{j=1}^k G_{ij}(x, \xi) F_i(\xi)\, d\xi + \int_x^b \sum_{j=1}^k G_{ij}(x, \xi) F_j(\xi)\, d\xi$$

та продиференціювавши по x, дістанемо:

$$\frac{dz_i}{dx} = \int_a^x \sum_{j=1}^k \frac{\partial G_{ij}}{\partial x} F_j(\xi)\, d\xi + \int_x^b \sum_{j=1}^k \frac{\partial G_{ij}}{\partial x} F_j(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \left\{ \sum_{j=1}^k G_{ij} F_j(\xi) \right\}_{\xi = x - 0} - \left\{ \sum_{j=1}^k G_{ij} F_i(\xi) \right\}_{\xi = x + 0},$$

або

$$\frac{dz_i}{dx} = \int_a^b \sum_{j=1}^k \frac{\partial G_{ij}}{\partial x} F_j(\xi)\, d\xi + F_i(x) \tag{369}$$

в усіх точках, де функція $F_i(x)$ є суцільна. Комбінуючи рівності (369) та (366), дістанемо:

$$\int_a^b \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial G_{ij}}{\partial x} + B_{i1} G_{1j} + \cdots + B_{ik} G_{kj} \right) F_j(\xi)\, d\xi = 0$$

Звідси, поклавши

$$F_j(\xi) = \frac{\partial G_{ij}}{\partial x} + B_{i1} G_{1j} + \cdots + B_{ik} G_{kj},$$

виводимо для всіх точок, де функції $G_{ij}(x, \xi)$, як функції від ξ, є суцільні, рівність:

$$\frac{\partial G_{ij}(x, \xi)}{\partial x} + B_{i1} G_{1j}(x, \xi) + \cdots + B_{ik} G_{kj}(x, \xi) = 0 \tag{369$_1$}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k)$$

Отже ця рівність правдива скрізь на інтервалі (a, b), крім хіба точки:

$$x = \xi$$

У випадку задачі Cauchy, коли граничні умови мають вигляд:

$$z_1(a) = z_2(a) = \ldots = z_k(a) = 0,$$

можемо взяти:

$$B_{ij} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k),$$

а Green-ів тензор задачі (347) — (348) має тоді вигляд:

$$\begin{matrix} \dfrac{\dfrac{x-\xi}{|x-\xi|} + 1}{2}, & 0, & , \ldots, & 0 \\ 0, & \dfrac{\dfrac{x-\xi}{|x-\xi|} + 1}{2} & , \ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \ldots, & \dfrac{\dfrac{x-\xi}{|x-\xi|} + 1}{2} \end{matrix}$$

Той спосіб конструювати та доводити існування Green-ового тензора, що його подано в попередньому параграфі, без змін переноситься на загальний випадок, коли сучинники B_{ij} системи (347) можуть бути змінні. Треба тільки вимагати, щоб задача Cauchy для цієї системи розв'язувалася і щоб ранґ добутку з матиць (361) та (362) був k.

§ 40. Існування розв'язки у системи лінійних диференціяльних рівнань за довільних лінійних однорідних граничних умов

Візьмімо довільну систему з k лінійних диференціяльних рівнань 1-го порядку. Її можна записати в формі:

$$
\begin{aligned}
L_{1x}[y] &= M_{1x}[y] - \lambda N_{1x}[y] = f_1(x) \\
L_{2x}[y] &= M_{2x}[y] - \lambda N_{2x}[y] = f_2(x) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
L_{kx}[y] &= M_{kx}[y] - \lambda N_{kx}[y] = f_k(x),
\end{aligned}
\tag{370}
$$

де λ є числовий чинник, а вирази $N_{ix}[y]$ мають вигляд:

$$
N_{lx}[y] = a_{l1}(x)\, y_1 + a_{l2}(x)\, y_2 + \cdots + a_{lk}(x)\, y_k \qquad (l = 1, 2, \ldots, k)
\tag{371}
$$

Лишивши тим часом чинник λ неозначеним і обмеживши функції $a_{ij}(x)$ вимогою, щоб вони інтеґрувалися на інтервалі (a, b) разом із своїми квадратами, доведімо таке твердження:

Задача

$$
\begin{aligned}
L_{1x}[y] &= f_1(x) \\
L_{2x}[y] &= f_2(x) \\
&\cdots\cdots \\
L_{kx}[y] &= f_k(x)
\end{aligned}
\tag{372}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_1^{(1)} y_1(a) + \cdots + \alpha_1^{(k)} y_k(a) + \beta_1^{(1)} y_1(b) + \cdots + \beta_1^{(k)} y_k(b) &= 0 \\
\alpha_2^{(1)} y_1(a) + \cdots + \alpha_2^{(k)} y_k(a) + \beta_2^{(1)} y_1(b) + \cdots + \beta_2^{(k)} y_k(b) &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_k^{(1)} y_1(a) + \cdots + \alpha_k^{(k)} y_k(a) + \beta_k^{(1)} y_1(b) + \cdots + \beta_k^{(k)} y_k(b) &= 0
\end{aligned}
\tag{373}
$$

має на інтервалі (a, b) одну і тільки одну розв'язку для всіх вартостей параметра λ, крім деяких особливих.

Справді, розгляньмо систему лінійних інтеґральних рівнань:

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= \lambda \int_a^b \sum_{j=1}^k G_{1j}(x, \xi)\, N_{j\xi}[y]\, d\xi + \int_a^b \sum_{j=1}^k G_{1j}(x, \xi)\, f_j(\xi)\, d\xi \\
y_2(x) &= \lambda \int_a^b \sum_{j=1}^k G_{2j}(x, \xi)\, N_{j\xi}[y]\, d\xi + \int_a^b \sum_{j=1}^k G_{2j}(x, \xi)\, f_j(\xi)\, d\xi, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_k(x) &= \lambda \int_a^b \sum_{j=1}^k G_{kj}(x, \xi)\, N_{j\xi}[y]\, d\xi + \int_a^b \sum_{j=1}^k G_{kj}(x, \xi)\, f_j(\xi)\, d\xi,
\end{aligned}
\tag{374}
$$

що випливає з задачі (372) — (373). Як відомо, ця система має на інтервалі (a, b) якраз одну і тільки одну розв'язку

$$y_1, y_2, \ldots, y_k$$

для всякої неособливої вартости параметра λ.

Доведімо, що ця розв'язка і є якраз розв'язка задачі (372) — (373).

Із рівностей (374) через лінійну комбінацію маємо:

$$\alpha_l^{(1)} y_1(a) + \cdots + \alpha_l^{(k)} y_k(a) + \beta_l^{(1)} y_1(b) + \cdots + \beta_l^{(k)} y_k(b) =$$
$$= \lambda \int_a^b \sum_{j=1}^k \{\alpha_l^{(1)} G_{1j}(a, \xi) + \cdots + \alpha_l^{(k)} G_{kj}(a, \xi) + \beta_l^{(1)} G_{1j}(b, \xi) + \cdots$$
$$\cdots + \beta_l^{(k)} G_{kj}(b, \xi)\} \{\lambda N_{j\xi}[y] + f_j(\xi)\} d\xi,$$

що, зважаючи на (368_a), дає рівності (373).

Далі, розписавши рівності (374) так:

$$y_l(x) = \int_a^x \sum_{j=1}^k G_{jl}(x, \xi) \{\lambda N_{j\xi}[y] + f_j(\xi)\} d\xi + \int_a^b \sum_{j=1}^k G_{lj}(x, \xi) \{\lambda N_{j\xi}[y] + f_j(\xi)\} d\xi$$
$$(l = 1, 2, \ldots, k)$$

та продиференціювавши їх по x, дістанемо:

$$y_l'(x) = \sum_{j=1}^k \left[G_{lj}(x, \xi)\right]_{\xi=x-0}^{\xi=x+0} \cdot \{\lambda N_{jx}[y] + f_j(x)\} +$$
$$+ \int_a^b \sum_{j=1}^k \frac{\partial G_{lj}}{\partial x} \{\lambda N_{j\xi}[y] + f_j(\xi)\} d\xi \qquad (375)$$

Нагадавши, що

$$C_{lj}(x, \xi)\Big|_{\xi=x-0}^{\xi=x+0} = G_{lj}(x, x+0) - G_{lj}(x, x-0) = \begin{cases} 0 & (l \neq j) \\ 1 & (l = j) \end{cases}$$

та скомбінувавши рівність (375) з рівностями (374), дістанемо легко:

$$M_{lx}[y] = \lambda N_{lx}[y] + f_l(x)$$
$$(l = 1, 2, \ldots, k),$$

тобто (374).

Отож функції

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x),$$

визначені з системи (374), являють собою розв'язку задачі (370) — (371) в усіх точках інтервалу (a, b), де сучинники $a_{ij}(x)$ є суцільні. Другої істотно відмінної розв'язки

$$Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_k(x)$$

бути не може, бо тоді система функцій

$$\mathfrak{z}_1 = y_1 - Y_1$$
$$\mathfrak{z}_2 = y_2 - Y_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$\mathfrak{z}_k = y_k - Y_k$$

справджувала б рівності:

$$\mathfrak{z}_1(x) = \lambda \int_a^b \sum_{j=1}^{k} G_{1j}(x, \xi)\, \mathfrak{z}_j(\xi)\, d\xi$$

$$\mathfrak{z}_2(x) = \lambda \int_a^b \sum_{j=1}^{k} G_{2j}(x, \xi)\, \mathfrak{z}_j(\xi)\, d\xi$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathfrak{z}_k(x) = \lambda \int_a^b \sum_{j=1}^{k} G_{kj}(x, \xi)\, \mathfrak{z}(\xi)\, d\xi,$$

звідки

$$\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_2 = \cdots = \mathfrak{z}_k = 0$$

§ 41. Повні системи функцій, що справджують завдані умови на кінцях даного інтервалу

Нехай k-кратна система функцій змінного x:

$$\begin{array}{l} \Phi_{10},\ \Phi_{11},\ \dots,\ \Phi_{1m},\ \dots \\ \Phi_{20},\ \Phi_{21},\ \dots,\ \Phi_{2m},\ \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi_{k0},\ \Phi_{k1},\ \dots,\ \Phi_{km},\ \dots \end{array} \qquad (376)$$

є замкнена на інтервалі (a, b), тобто нехай для всяких k функцій

$$F_1(x),\ F_2(x),\ \dots,\ F_k(x),$$

що інтеґруються на тому інтервалі, minimum виразу

$$\gamma(t_1, t_2, \dots, t_m) = \sum_{j=1}^{k} \int_a^b \left\{ F_0(x) - t_0\, \Phi_{j0}(x) - \cdots - t_m\, \Phi_{jm}(x) \right\}^2 dx \qquad (377)$$

іде до нуля разом із $\frac{1}{m}$. Нехай функції кожного стовпця системи:

$$\begin{array}{l} \varphi_{10},\ \varphi_{11},\ \dots,\ \varphi_{1m},\ \dots \\ \varphi_{20},\ \varphi_{21},\ \dots,\ \varphi_{2m},\ \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{k0},\ \varphi_{k1},\ \dots,\ \varphi_{km},\ \dots \end{array} \qquad (378)$$

справджують на кінцях інтервалу (a, b) наперед дані однорідні лінійні залежності:

$$\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(1)} \varphi_{jn}(a) + \sum_{j=1}^{k} \beta_j^{(1)} \varphi_{jn}(b) = 0 \\ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(2)} \varphi_{jn}(a) + \sum_{j=1}^{k} \beta_j^{(2)} \varphi_{jn}(b) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k)} \varphi_{jn}(a) + \sum_{j=1}^{k} \beta_j^{(k)} \varphi_{jn}(b) = 0 \end{array} \qquad (379)$$

$$(n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots)$$

та якісь диференціяльні рівнання типу:

$$\begin{aligned} M_{1x}[\varphi_n] &= \varphi'_{1n} + B_{11}\varphi_{1n} + \cdots + B_{1k}\varphi_{kn} = \Phi_{1n} \\ M_{2x}[\varphi_n] &= \varphi'_{2n} + B_{21}\varphi_{1n} + \cdots + B_{2k}\varphi_{kn} = \Phi_{2n} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{kx}[\varphi_n] &= \varphi'_{kn} + B_{k1}\varphi_{1n} + \cdots + B_{kk}\varphi_{kn} = \Phi_{kn} \end{aligned} \tag{380}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Слід зауважити, що функції (378) завжди існують, хоч би як було дібрано функції (376), бо в системі лінійних диференціяльних рівнань із сталими сучинниками типу (347):

$$\begin{aligned} M_{1x}[\varphi_n] &= \Phi_{1n} \\ M_{2x}[\varphi_n] &= \Phi_{2n} \\ &\cdots\cdots \\ M_{kx}[\varphi_n] &= \Phi_{kn} \end{aligned} \tag{381}$$

можна, як показано в параграфі 38, дібрати чинники B_{ij} так, що її інтеграл

$$\begin{matrix} \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{2n}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{kn}(x) \end{matrix}$$

справджуватиме умови:

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(i)} \varphi_{jn}(a) + \sum_{j=1}^{k} \beta_j^{(i)} \varphi_{jn}(b) = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k)$$

Отож функції φ_{ik} завжди є змога визначити з рівнань типу (380) на безліч способів, відповідно дібравши сучинники тих рівнань (практично — в формі сталих чисел). Щодо системи (376), то її можна, напр., вибрати так:

$$\begin{matrix} 1, 0, \ldots, 0, x, 0, \ldots, 0, x^2, 0, \ldots, 0, x^3, 0, \ldots \\ 0, 1, \ldots, 0, 0, x, \ldots, 0, 0, x^2, \ldots, 0, 0, x^3, \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \ldots, 1, 0, 0, \ldots, x, 0, 0, \ldots, x^2, 0, 0, \ldots \end{matrix} \tag{382}$$

Тоді кожна з функцій φ_{ik} буде проста комбінація з експоненціяльних функцій та степенів змінного x. Але можна зробити й навпаки, а саме зразу утворити систему функцій (378); коли, напр., її збудувати з усіх многочленів, що справджують умови (379), то її можна звести до вигляду:

$$\begin{array}{l|l|l|} \varphi_{10}, \varphi_{11}, \ldots, \varphi_{1,k-1} & (x-a)(x-b), 0, \ldots, 0 & x(x-a)(x-b), 0, \ldots, 0 \\ \varphi_{20}, \varphi_{21}, \ldots, \varphi_{2,k-1} & 0, (x-a)(x-b), \ldots, 0 & 0, x(x-a)(x-b), \ldots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{k0}, \varphi_{k1}, \ldots, \varphi_{k,k-1} & 0, 0, \ldots, (x-a)(x-b) & 0, 0, \ldots, x(x-a)(x-b) \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^2(x-a)(x-b),\ 0, \ldots, \ 0 & x^3(x-a)(x-b),\ 0, \ldots \ldots \\ 0,\ x^2(x-a)(x-b), \ldots, \ 0 & 0,\ x^3(x-a)(x-b), \ldots \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0,\ 0, \ldots, x(x-a)(x-b) & 0,\ 0,\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

де функції

$$\varphi_{ij}(x) \qquad (i=1, 2, \ldots, k, \quad j=0, 1, \ldots, k-1) \tag{383}$$

є всі ступеня не старшого за 1; справді бо, тоді всяку систему функцій

$$F_j(x) \qquad (j=1, 2, \ldots, k),$$

що інтеґруються на інтервалі (a, b), можна представити так:

$$M_{1x}[\theta]=F_1(x)$$
$$M_{2x}[\theta]=F_2(x)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$M_{kx}[\theta]=F_k(x),$$

де функції $\theta_j(x)$ справджують умови (379), при чім

$$\lim_{m=\infty} \min |\theta_j(x)-t_1\varphi_{j1}(x)-\ldots-t_m\varphi_{jm}(x)|=0 \tag{384}$$

$$\lim_{m=\infty} \min \int_a^b \{\theta'_j(x)-t_1\varphi'_{j1}(x)-\ldots-t_m\varphi'_{jm}(x)\}^2 dx=0$$

$$(j=1, 2, \ldots, k),$$

і тому за Φ_{ji} можна взяти вираз:

$$\Phi_{ji}(x)=M_{jx}[\varphi] \tag{385}$$

У випадку, коли всі чинники B_{ji} є сталі числа, функції (376) будуть тут многочлени, якщо в многочленній формі вибрано функції (378).

Нарешті припустімо, що за умов (379) можна систему рівнань (386) дібрати так, щоб її Green-ів тензор:

$$\begin{array}{l} G_{11}(x,\xi),\ G_{12}(x,\xi), \ldots, G_{1k}(x,\xi) \\ G_{21}(x,\xi),\ G_{22}(x,\xi), \ldots, G_{2k}(x,\xi) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_{k1}(x,\xi),\ G_{k2}(x,\xi), \ldots, G_{kk}(x,\xi) \end{array} \tag{386}$$

був симетричний. Тоді за функції Φ_{ji} можна не раз узяти просто φ_{ji}, коли визначити їх як фундаментальні функції задачі:

$$\begin{array}{l} M_{1x}[\varphi]=\mu\varphi_1 \\ M_{2x}[\varphi]=\mu\varphi_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ M_{kx}[\varphi]=\mu\varphi_k, \end{array} \tag{387}$$

за умов (379). Треба тільки, щоб ні одна з особливих вартостей параметра μ не була нуль, що легко здійснити.

§ 42. Форма наближеної розв'язки

Нехай треба зінтеґрувати систему лінійних диференціяльних рівнань:

$$\begin{aligned} L_{1x}[z] &= M_{1x}[z] - N_{1x}[z] = f_1(x) \\ L_{2x}[z] &= M_{2x}[z] - N_{2x}[z] = f_2(x) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ L_{kx}[z] &= M_{kx}[z] - N_{kx}[z] = f_k(x) \end{aligned} \tag{388}$$

за однорідних лінійних граничних умов:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(1)} z_j(a) + \sum_{j=1}^{k} \beta_j^{(1)} z_j(b) &= 0 \\ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(2)} z_j(a) + \sum_{j=1}^{k} \beta_j^{(2)} z_j(b) &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k)} z_j(a) + \sum_{j=1}^{k} \beta_j^{(k)} z_j(b) &= 0 \end{aligned} \tag{389}$$

на інтервалі (a, b). Знаючи, що ця задача має одну єдину розв'язку

$$z_1(x),\ z_2(x),\ \dots,\ z_k(x), \tag{390}$$

пошукаймо цю розв'язку наближено в формі:

$$\begin{aligned} z_{1m} &= a_0^{(m)} \varphi_{10} + a_1^{(m)} \varphi_{11} + \dots + a_m^{(m)} \varphi_{1m} \\ z_{2m} &= a_0^{(m)} \varphi_{20} + a^{(m)} \varphi_{21} + \dots + a_m^{(m)} \varphi_{2m} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{km} &= a_0^{(m)} \varphi_{k0} + a_1^{(m)} \varphi_{k1} + \dots + a_m^{(m)} \varphi_{km}, \end{aligned} \tag{391}$$

визначаючи сучинники

$$a_0^{(m)},\ a_1^{(m)},\ \dots,\ a_m^{(m)}$$

із рівнань:

$$\begin{aligned} \int_a^b \sum_{j=1}^{k} \{L_{jx}[z_m] - f_j(x)\}\, M_{jx}[\varphi_0]\, dx &= 0 \\ \int_a^b \sum_{j=1}^{k} \{L_{jx}[z_m] - f_j(x)\}\, M_{jx}[\varphi_1]\, dx &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \int_a^b \sum_{j=1}^{k} \{L_{jx}[z_m] - f_j(x)\}\, M_{jx}[\varphi_m]\, dx &= 0, \end{aligned} \tag{392}$$

або, що на одно виходить, із рівнань:

$$\int_a^b \sum_{j=1}^{k} \{L_{jx}[z_m] - f_j(x)\}\, \Phi_{ji}(x)\, dx = 0 \tag{393}$$

$$(i = 0, 1, \dots, m),$$

де функції φ_{ji}, Φ_{ji} взято згідно з указівками параграфа 41.

У наступнім параграфі буде показано, що для досить великого значка m функції (390) довільно мало відрізняються від відповідних функцій (391). Але вперед ми повинні були б довести, що система лінійних рівнань (392) або (393) щодо невідомих $a_i^{(m)}$ не є суперечна і визначає цілком ці сучинники. Для цього заступімо цю систему загальнішою:

$$\int_a^b \sum_{j=1}^k \left\{ M_{jx}[z_m] - \lambda N_{jx}[z_m] \right\} M_{jx}[\varphi_i]\, dx = 0 \tag{394}$$

$$(i = 0,\ 1, \ldots, m)$$

або, що на одно виходить, такою:

$$\int_a^b \sum_{j=1}^k L_{jx}[z_m]\, \Phi_{ji}(x)\, dx = \sum_{j=1}^k \int_a^b f_j(x)\, \Phi_{ji}(x)\, dx \tag{394$_a$}$$

$$(i = 0,\ 1, \ldots, m)$$

Система (394) зводиться на (392), коли $\lambda = 1$, і має визначник $\Delta_m(\lambda)$, що для $\lambda = 0$ дорівнює:

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{j=1}^k \int\limits_a^b \Phi_{j0}\Phi_{j0}\, dx, & \sum\limits_{j=1}^k \int\limits_a^b \Phi_{j1}\Phi_{j0}\, dx, & \ldots, & \sum\limits_{j=1}^k \int\limits_a^b \Phi_{jm}\Phi_{j0}\, dx \\ \sum\limits_{j=1}^k \int\limits_a^b \Phi_{j0}\Phi_{j1}\, dx, & \sum\limits_{j=1}^k \int\limits_a^b \Phi_{j1}\Phi_{j1}\, dx, & \ldots, & \sum\limits_{j=1}^k \int\limits_a^b \Phi_{jm}\Phi_{j1}\, dx \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{j=1}^k \int\limits_a^b \Phi_{j0}\Phi_{jm}\, dx, & \sum\limits_{j=1}^k \int\limits_a^b \Phi_{j1}\Phi_{jm}\, dx, & \ldots, & \sum\limits_{j=1}^k \int\limits_a^b \Phi_{jm}\Phi_{jm}\, dx \end{vmatrix}$$

Цей останній визначник міг би бути нулем тільки за умови, коли б між стовпцями системи функцій (376) була лінійна залежність, чого завжди можна позбутися. Отож рівнання

$$\Delta_m(\lambda) = 0$$

має щодо λ найбільше m коренів. Тому для всіх досить великих вартостей m можна вказати таку вартість параметра λ, довільно близьку до

$$\lambda = 1,$$

що буде:

$$\Delta_m(\lambda) \neq 0$$

Отож, коли взяти замість системи диференціяльних рівнань (388) систему

$$M_{jx}[z] - \lambda N_{jx}[z] = f_j(x) \tag{395}$$

$$(j = 1,\ 2, \ldots, k)$$

за тих самих умов (389), то визначник $\Delta_m(\lambda)$ не буде нуль для вартостей λ, нескінченно близьких до

$$\lambda = 1$$

А тим часом зауважмо, що за таких умов інтеґрали систем (394_a) та (388) відрізняються нескінченно мало і є обмежені. Тому в той момент, коли доведемо для системи (395) рівності

$$\begin{aligned} z_1 &= \lim_{m=\infty} z_{1m} \\ z_2 &= \lim_{m=\infty} z_{2m} \\ &\cdots\cdots \\ z_k &= \lim_{m=\infty} z_{km}, \end{aligned} \tag{396}$$

вийде само собою, що й

$$\Delta_m(1) \neq 0$$

З цього випливає, що далі досить, припустивши правдивість останньої нерівности, довести для функцій z_{jm}, визначених із рівнань (393), залежності (396). Отож у дальшій аналізі вважатимемо, що система рівнань (392) або (393) із невідомими $a_i^{(m)}$ є означена.

§ 43. Збіжність наближеної розв'язки та ступінь мализни похибки

Упровадивши зазначення

$$z_j - z_{jm} = u_{jm} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k), \tag{397}$$

можемо переписати рівнання (392) та (393) так:

$$\int_a^b \sum_{j=1}^k L_{jx}[u_m] M_{jx}[\varphi_i]\, dx = 0 \tag{398}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m)$$

$$\int_a^b \sum_{j=1}^k L_{jx}[u_m]\, \Phi_{ji}(x)\, dx = 0 \tag{399}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m)$$

Очевидно, з рівностей (398) можна утворити таку лінійну комбінацію:

$$\int_a^b \sum_{j=1}^k L_{jx}[u_m] M_{jx}[z_m]\, dx = 0 \tag{400}$$

З другого боку, визначивши сучинники

$$b_0^{(m)}, b_1^{(m)}, \ldots, b_m^{(m)}$$

із вимоги

$$J_m = \int_a^b \sum_{j=1}^k \varepsilon_{jm}^2\, dx = \min,$$

де

$$\varepsilon_{jm} = b_0^{(m)} \Phi_{j0} + b_1^{(m)} \Phi_{j1} + \ldots + b_m^{(m)} \Phi_{jm} - M_j[z],$$

матимемо:

$$\lim_{m \to \infty} J_m = 0$$

Отже з рівностей (392) та (400) можна утворити таку лінійну комбінацію:

$$\int_a^b \sum_{j=1}^k L_{jx}[u_m]\{M_{jx}[u_m]+\varepsilon_{jm}\}\,dx=0, \tag{401}$$

що дає:

$$\int_a^b \sum_{j=1}^k L_{jx}^2[u_m]\,dx+\int_a^b \sum_{j=1}^p L_{jx}[u_m]\{N_{jx}[u_m]+\varepsilon_{jm}\}\,dx=0,$$

і остаточно, використавши нерівність Буняковського:

$$\int_a^b \sum_{j=1}^k L_{jx}^2[u_m]\,dx=q_m\int_a^b \sum_{j=1}^k \{N_{jx}[u_m]+\varepsilon_{jm}\}^2\,dx. \tag{402}$$

де q_m є число обмежене.

Тепер зазначмо через

$$\begin{array}{llll} \Gamma_{11}(x,\xi), & \Gamma_{12}(x,\xi), & \ldots, & \Gamma_{1k}(x,\xi) \\ \Gamma_{21}(x,\xi), & \Gamma_{22}(x,\xi), & \ldots, & \Gamma_{2k}(x,\xi) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Gamma_{k1}(x,\xi), & \Gamma_{k2}(x,\xi), & \ldots, & \Gamma_{kk}(x,\xi) \end{array}$$

Green-ів тензор системи рівнань (388). Тоді, як легко бачити,

$$u_{jm}(\xi)=\int_a^b \sum_{g=0}^k \Gamma_{gj}(\xi,x)\,L_{gx}[u_m]\,dx \tag{403}$$

$$(j=1,\ 2,\ \ldots\ k)$$

Визначивши далі сучинники $C_i^{(m)}(\xi)$ так, щоб для різниць

$$\gamma_{gj}^{(m)}(\xi,x)=\Gamma_{gj}(\xi,x)-C_0^{(m)}(\xi)\,\Phi_{j0}(x)-C_1^{(m)}(\xi)\,\Phi_{j1}(x)-\ldots-C_m^{(m)}\,\Phi_{jm}(x) \tag{403$_a$}$$

$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

справджувалися вимоги:

$$\int_a^b \sum_{g=1}^k \{\gamma_{gj}^{(m)}(\xi,x)\}^2\,dx=\min,$$

утворімо з рівностей (402) та (403$_a$) такі лінійні комбінації:

$$u_{jm}(\xi)=\int_a^b \sum_{g=1}^k \gamma_{gj}^{(m)}(\xi,x)\,L_{gx}[u_m]\,dx=0 \tag{404}$$

$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

Нарешті, з рівностей (402) та (404), за допомогою нерівности Буняковського, виводимо:

$$u_{jm}^2(\xi)<\delta_{jm}^2\int_a^b \sum_{g=1}^k \{u_{gm}^2(x)+\varepsilon_{gm}^2\}\,dx \tag{405}$$

$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ k),$$

де

$$\lim_{m=\infty}\delta_{jm}^2=0$$

Звідси висновок:

$$\lim_{m=\infty} u_{jm}(x) = 0$$

$$(j = 1, 2, \ldots, k)$$

Так доходимо основного висліду:

Спосіб наближеної інтеґрації системи лінійних диференціяльних рівнань (388) через визначення сучинників $a_i^{(m)}$ із рівнань (392) є збіжний щоразу, коли система має розв'язку. Отже

$$z_j = \lim_{m=\infty} z_{jm}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, k)$$

Щодо мализни різниць

$$u_{jm} = z_j - z_{jm}$$

$$(j=1, 2, \ldots, k),$$

тобто швидкости збігання поданого процесу наближеної інтеґрації диференціяльних рівнань, то, напр., при доборі функцій (376) у формі (382) або в формі:

$$\begin{array}{l|llll|llll|l}
1, 0, \ldots, 0 & \cos\pi\frac{x-a}{b-a}, & 0, & \ldots, & 0 & \cos 2\pi\frac{x-a}{b-a}, & 0, & \ldots, & 0 & \cos 3\pi\frac{x-a}{b-a}, 0, \ldots \\
0, 1, \ldots, 0 & 0, & \cos\pi\frac{x-a}{b-a}, & \ldots, & 0 & 0, & \cos 2\pi\frac{x-a}{b-a}, & \ldots, & 0 & 0, \cos 2\pi\frac{x-a}{b-a}, \ldots \\
\cdots & \cdots & & & & \cdots & & & & \cdots \\
0, 0, \ldots, 1 & 0, & 0, & \ldots, & \cos\pi\frac{x-a}{b-a} & 0, & 0, & \ldots, & \cos 2\pi\frac{x-a}{b-a} & 0, \quad 0, \quad \ldots,
\end{array}$$

коли існують обмежені похідні $z_j^{(p)}$, буде за певних граничних умов:

$$|z_j - z_{jm}| < \frac{M}{m^{p-1}} \eta_{jm}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, k),$$

де M є число обмежене, а

$$\lim_{m=\infty} \eta_{jm} = 0$$

Справді бо, за згаданих умов, як відомо з дослідів над наближеним представленням функцій многочленами, маємо:

$$|\varepsilon_{jm}| < \frac{M}{m^{p-1}},$$

бо функція $M_{jx}[\varphi]$ має $p-1$-шу обмежену похідну, а з рівности (405) видно, що η_{jm} є число ступеня мализни не слабшого за ступінь мализни числа δ_{jm}. Отож дослідімо докладніше число δ_{jm}, або, що на одно виходить, число

$$\sqrt{\int_a^b \sum_{g=1}^{k} (\gamma_{gj}^{(m)}(x))^2\, dx}$$

Через те, що функція

$$\Gamma_{gj}(x, \xi)$$

обмежена на інтервалі (a, b) і суцільна на інтервалах (a, ξ) та (ξ, b), то функція

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h} \Gamma_{gj}(x, \xi)\,dx$$

має похідну з модулем не більшим за $\frac{M}{h}$, де M є число обмежене, незалежне від h. Отже існують такі числа $K_{ij}^{(m)}$, що

$$\left|\frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h} \Gamma_{gj}\,dx - K_{0j}^{(m)}\Phi_{j0}(x) - \cdots - K_{mj}^{(m)}\Phi_{jm}(x)\right| < \frac{M}{hm} \tag{406}$$

З другого боку, скрізь на інтервалі (a, b), крім хіба проміжки $(\xi - h, \xi + h)$, буде:

$$\left|\frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h} \Gamma_{gj}\,dx - \Gamma_{gj}\right| < hN, \tag{407}$$

де N є обмежене число, бо скрізь на (a, b), крім хіба точки ξ, існує похідна $\frac{\partial \Gamma_{gj}}{\partial x}$. Тому

$$\int\limits_{a}^{b} \{\Gamma_{gj} - K_{0j}^{(m)}\Phi_{j0}(x) - \cdots - K_{mj}^{(m)}\Phi_{jm}(x)\}^2\,dx < \left(\frac{M}{hm} + hN\right)^2 + hP, \tag{408}$$

де P є теж число обмежене. Поклавши

$$h = \frac{1}{m^{\frac{2}{3}}}, \tag{409}$$

дістанемо остаточно, що

$$\sqrt{\int\limits_{a}^{b}\sum_{g=1}^{k} (\gamma_{gj}^{(m)}(x))^2\,dx} < \frac{Q}{m^{\frac{1}{3}}}$$

та

$$\eta_{jm} < \frac{R}{m^{\frac{1}{3}}}, \tag{410}$$

де Q та R є числа обмежені. Так дістаємо остаточно нерівність:

$$|z_j - z_{jm}| < \frac{M}{m^{p-\frac{1}{3}}} \tag{411}$$

Розгляньмо частинний випадок, коли система (388) сходить на одно диференціяльне рівнання k-го порядку (пор. § 16, розд. II):

$$L_x[z] = z^{(k)} + A_1(x)\,z^{(k-1)} + \cdots + A_k(x)\,z = f(x)$$

Тоді рівності (403) дістають вигляд:

$$u_{1m}(\xi) = u_m(\xi) = \int_a^b \Gamma(\xi, x) L_x[u_m]\, dx$$

$$u'_{2m}(\xi) = u'_m(\xi) = \int_a^b \frac{\partial \Gamma(\xi, x)}{\partial \xi} L_x[u_m]\, dx$$

. . . .

$$u_{km}^{(k-1)}(\xi) = u_m^{(k-1)}(\xi) = \int_a^b \frac{\partial^{k-1} \Gamma(\xi, x)}{\partial \xi^{k-1}} L_x[u_m]\, dx,$$

де

$$u_m = z - z_m$$

$$z_m = a_0^{(m)} \varphi_0 + a_1^{(m)} \varphi_1 + \cdots + a_m^{(m)} \varphi_m$$

$$\varphi_{1n} = \varphi_n, \; \varphi_{2n} = \varphi'_n, \ldots, \; \varphi_{kn} = \varphi_n^{(k-1)}$$

При тім нехай z_m визначається з рівнань:

$$\int_a^b L_x[z_m] x^i\, dx = \int_a^b f(x) x^i\, dx$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m),$$

отже функції $\varphi_i(x)$ — з рівнань:

$$M_x[\varphi_i] = x^i$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m)$$

за граничних умов тих самих, що поставлено для функції z, де $M_x[$ є належно дібраний лінійний оператор k-го порядку. Тут буде знов

$$\eta_{km} < \frac{R}{m^{\frac{1}{3}}}$$

Але вже різницю

$$\gamma_{k1}^{(m)} = \frac{\partial^{k-2} \Gamma(x, \xi)}{\partial x^{k-2}} - K_0^{(m)} - K_1^{(m)} x - \cdots - K_m^{(m)} x^m$$

можна дібрати так, щоб абсолютна вартість її похідної була менша з $R m^{-\frac{1}{3}}$, коли

$$a + h \leqslant \xi \leqslant b - h \tag{412}$$

$$(h = m^{-\frac{2}{3}}),$$

що видно з формул (406), (407) та (409)[1]. Отже за умов (412) матимемо

$$\gamma_{k-1, j}^{(m)} < \frac{K_1}{m^{\frac{4}{3}}},$$

---

[1]) Пор. Стеклов, Основные задачи матем. физики, ч. I, ст. 16—17.

де K_1 є число обмежене. Для решти вартостей параметра ξ на інтервалі (a, b) матимемо, згідно з загальною теорією наближеного представлення функцій многочленами та тригонометричними сумами:

$$\gamma_{k-1}^{(m)} < \frac{r_1}{m},$$

де r_1 є теж число обмежене. Тому

$$\sqrt{\int_a^b \{\gamma_{k-1}^{(m)}(x)\}^2\, dx} < \frac{R_1}{m^{\frac{4}{3}}}$$

$$\eta_{k-1,\, m} < \frac{R_1}{m^{\frac{4}{3}}},$$

де R_1 є число обмежене. І т. д.

Отже коли існують і є обмежені похідні

$$A_1^{(r)}(x),\ A_2^{(r)}(x), \ldots, A_k^{(r)}(x),\ f^{(r)}(x)$$

сучинників рівнання

$$L_x[z] = f(x)$$

на інтервалі (a, b), то

$$|z - z_m| < \frac{S}{m^{r+k-\frac{2}{3}}},$$

де S є число обмежене.

§ 44. Використання ортогональних функцій для розвинення розв'язки в ряди

Уявімо тепер, що функції (376) параграфа 41 справджують умови ортогональности та нормальности, що в данім разі мають виглядати так:

$$\begin{gathered} \int_a^b \{\Phi_{1i}\Phi_{1j} + \Phi_{2i}\Phi_{2j} + \cdots + \Phi_{ki}\Phi_{kj}\}\, dx = 0 \qquad (i \neq j) \\ \int_a^b \{\Phi_{1i}^2 + \Phi_{2i}^2 + \cdots + \Phi_{ki}^2\}\, dx = 1 \\ (i, j = 0, 1, 2, \ldots) \end{gathered} \tag{413}$$

Тоді для всякої системи функцій

$$F_1(\xi),\ F_2(\xi), \ldots, F_k(\xi),$$

що на інтервалі (a, b) інтеґруються разом із своїми квадратами, існуватиме такий ряд сучинників

$$a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots,$$

що справдить рівність:

$$\sum_{j=1}^{k} \int_a^b \{F_j(\xi) - a_0\Phi_0(\xi) - a_1\Phi_1(\xi) - \cdots\}^2 d\xi = 0 \tag{414}$$

Її можна переписати так:

$$\sum_{j=1}^{k}\int_a^b F_j^2(\xi)\,d\xi = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots \tag{415}$$

Рівності (414) та (415) називатимемо в цьому випадку **теоремою замкнености.**

Візьмімо знов функції (378), що їх можемо записати так:

$$\begin{aligned}
\varphi_{1i} &= \sum_{j=1}^{k}\int_a^b G_{1j}(x,\xi)\,\Phi_{ji}(\xi)\,d\xi \\
\varphi_{2i} &= \sum_{j=1}^{k}\int_a^b G_{2j}(x,\xi)\,\Phi_{ji}(\xi)\,d\xi \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_{ki} &= \sum_{j=1}^{k}\int_a^b G_{kj}(x,\xi)\,\Phi_{ji}(\xi)\,d\xi \\
&(i = 0,\ 1,\ 2, \ldots)
\end{aligned} \tag{416}$$

Запровадивши зазначення:

$$\lambda\int_a^b \sum_{l=1}^{k} N_{l\xi}[\varphi_j]\,\Phi_{li}(\xi)\,d\xi = b_{ji} \tag{417}$$

$$\int_a^b \sum_{l=1}^{k} f_l(x)\,\Phi_{lj}(x)\,dx = c_i \tag{418}$$

$$(i,\ j = 0,\ 1, \ldots, m),$$

можемо, зважаючи на умови (413), переписати систему рівнань (394 $_a$) так

$$a_i^{(m)} + \sum_{j=1}^{m} b_{ji}\,a_j^{(m)} = c_i \tag{419}$$

$$(i = 0,\ 1, \ldots, m)$$

Долучивши сюди рівність

$$\sum_{j=0}^{m} a_j^{(m)}\,\varphi_{lj}(x) = z_{lm}(x), \tag{420}$$

дістанемо з (419) та (420):

$$z_{lm}(x) = -\frac{\begin{vmatrix} 0, & \varphi_{l0}(x), & \varphi_{l1}(x), & \ldots, & \varphi_{lm}(x) \\ c_0, & 1+b_{00}, & b_{01}, & \ldots, & b_{0m} \\ c_1, & b_{10}, & 1+b_{11}, & \ldots, & b_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_m, & b_{m0}, & b_{m1}, & \ldots, & b_{mm} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+b_{00}, & b_{01}, & \ldots, & b_{0m} \\ b_{10}, & 1+b_{11}, & \ldots, & b_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m0}, & b_{m1}, & \ldots, & 1+b_{mm} \end{vmatrix}} \tag{421}$$

$$(l = 1,\ 2, \ldots, k)$$

Щодо елементів визначника

$$\Delta_m(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+b_{00}, & b_{01}, & \ldots, & b_{0m} \\ b_{10}, & 1+b_{11}, & \ldots, & b_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m0}, & b_{m1}, & \ldots, & 1+b_{mm} \end{vmatrix}, \tag{422}$$

то, зважаючи на загальну залежність (415), маємо:

$$\sum_{i=0}^{m} b_{ij}^2 \leqslant \sum_{l=1}^{k} \lambda^2 \int_a^b N_{l\xi}^2 [\varphi_j]\, d\xi \tag{423}$$

Далі, зважаючи на (416), маємо:

$$N_{l\xi}[\varphi_j] = \int_a^b \sum_{i=1}^{k} H_{ij}^{(l)}(x, \xi)\, \Phi_{jl}(\xi)\, dx, \tag{424}$$

де функції

$$H_{ij}^{(l)}(x, \xi)$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, k; \quad l = 1, 2, \ldots, k)$$

інтеґруються разом із своїми квадратами. А тоді з (423) та (424) маємо:

$$\sum_{i, j=0}^{m} b_{ij}^2 \leqslant K \int_a^b \int_a^b \sum_{i=1}^{k} \left\{ H_{ij}^{(l)}(x, \xi) \right\}^2 dx\, d\xi, \tag{425}$$

де K є обмежене число.

Щодо елементів визначника

$$\delta_{ml}(x; \lambda) = \begin{vmatrix} 0_0, & \varphi_{l0}(x), & \varphi_{l1}(x), & \ldots, & \varphi_{lm}(x) \\ c_0, & 1+b_{00}, & b_{01}, & \ldots, & b_{0m} \\ c_1, & b_{10}, & 1+b_{11}, & \ldots, & b_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_m, & b_{m0}, & b_{m1}, & \ldots, & 1+b_{mm} \end{vmatrix}, \tag{426}$$

то, зважаючи на (418), буде:

$$\sum_{i=0}^{m} c_i^2 \leqslant \sum_{j=1}^{k} \int_a^b f_j^2(\xi)\, d\xi; \tag{427}$$

а зважаючи на (416), буде:

$$\sum_{i=0}^{m} \varphi_{li}^2(x) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \int_a^b G_{li}^2(x, \xi)\, d\xi \tag{428}$$

$$(l = 1, 2, \ldots, k)$$

Цих нерівностей досить, щоб довести існування границі виразу (421). Справді бо, тоді напевно існують границі добутків

$$e^{-b_{00}-b_{11}-\ldots-b_{mm}} \cdot \Delta_m(\lambda) = \begin{vmatrix} e^{-b_{00}}(1+b_{00}), & e^{-b_{00}} b_{01}, & \ldots, & e^{-b_{00}} b_{0m} \\ e^{-b_{11}} b_{10}, & e^{-b_{11}}(1+b_{11}), & \ldots, & e^{-b_{11}} b_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{-b_{mm}} b_{m0}, & e^{-b_{mm}} b_{m1}, & \ldots, & e^{-b_{mm}}(1+b_{mm}) \end{vmatrix} \tag{429}$$

та

$$e^{-b_{00}-b_{11}-\dots-b_{mm}}\delta_{ml}(x;\ \lambda)=$$
$$(l=1,\ 2,\ \dots,\ k)$$

$$=\begin{vmatrix} 0, & \varphi_{l0}(x), & \varphi_{l1}(x), & \dots, & \varphi_{lm}(x) \\ e^{-b_{00}}c_0, & e^{-b_{00}}(1+b_{00}), & e^{-b_{00}}b_{01}, & \dots, & e^{-b_{00}}b_{0m} \\ e^{-b_{11}}c_1, & e^{-b_{11}}b_{10}, & e^{-b_{11}}(1+b_{11}), & \dots, & e^{-b_{11}}b_{0m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{-b_{mm}}c_m, & e^{-b_{mm}}b_{m0}, & e^{-b_{mm}}b_{m1}, & \dots, & e^{-b_{mm}}(1+b_{mm}) \end{vmatrix} \quad (430)$$

для

$$m\to\infty,$$

як випливає з теорем розділу III про збіжність нескінченних визначників, а відношення цих добутків якраз дорівнює $z_{lm}(x)$.

Зазначмо границі визначників (429) та (430) відповідно через

$$\Delta(\lambda)\ \text{та}\ \delta_l(x;\ \lambda) \quad (431)$$

Взявши розвинення визначників

$$e^{-b_{00}-b_{11}-\dots-b_{mm}}\cdot\delta_{lm}(x;\lambda)=A_{0m}\varphi_{l0}(x)+A_{1m}\varphi_{l1}(x)+\dots+A_{mm}\varphi_{lm}(x) \quad (432)$$
$$(l=1,\ 2,\ \dots,\ k)$$

та

$$\delta_l(x;\ \lambda)=\begin{vmatrix} 0, & \varphi_{l0}(x), & \varphi_{l1}(x), & \varphi_{l2}(x), & \dots \\ e^{-b_{00}}c_0, & e^{-b_{00}}(1+b_{00}), & e^{-b_{00}}b_{01}, & e^{-b_{00}}b_{02}, & \dots \\ e^{-b_{11}}c_1, & e^{-b_{11}}b_{10}, & e^{-b_{11}}(1+b_{11}), & e^{-b_{11}}b_{12}, & \dots \\ e^{-b_{22}}c_2, & e^{-b_{22}}b_{20}, & e^{-b_{22}}b_{21}, & e^{-b_{22}}(1+b_{22}), & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}= \quad (433)$$

$$=A_0\varphi_{l0}(x)+A_1\varphi_{l1}(x)+A_2\varphi_{l2}(x)+\dots \quad (433_a)$$
$$(l=1,\ 2,\ \dots,\ k)$$

і поділивши їх відповідно на $e^{-b_{00}-b_{11}-\dots-b_{mm}}\Delta_m(\lambda)$ та $\Delta(\lambda)$, дістанемо:

$$z_{lm}(x)=\sum_{i=0}^{m}\frac{A_{im}}{e^{-b_{00}-b_{11}-\dots-b_{mm}}\Delta_m(\lambda)}\varphi_{li}(x) \quad (434)$$

та певну функцію:

$$Z_l(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{A_i}{\Delta(\lambda)}\varphi_{li}(x) \quad (435)$$

Що цей ряд, як і ряд (433_a), абсолютно збігається, бачимо з нерівности:

$$\{Z_l(x)\}^2\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}A_i^2\sum_{i=0}^{\infty}\left\{\frac{\varphi_{il}(x)}{\Delta(\lambda)}\right\}^2$$

Справді бо другий чинник другої сторони цієї нерівности збігається з огляду на нерівність (428), а перший є $|\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{A}'|$, де

$$\mathfrak{A}=\left\{\begin{array}{lllll} e^{-b_{00}}\int\limits_a^b\sum\limits_{j=1}^k f_j\Phi_{j0}\,dx, & e^{-b_{00}}(1+b_{00}), & e^{-b_{00}}b_{01}, & e^{-b_{00}}b_{02}, & \ldots \\ e^{-b_{11}}\int\limits_a^b\sum\limits_{j=1}^k f_j\Phi_{j1}\,dx, & e^{-b_{11}}b_{10}, & e^{-b_{11}}(1+b_{11}), & e^{-b_{11}}b_{12}, & \ldots \\ e^{-b_{22}}\int\limits_a^b\sum\limits_{j=1}^k f_j\Phi_{j2}\,dx, & e^{-b_{22}}b_{20}, & e^{-b_{22}}b_{21}, & e^{-b_{22}}(1+b_{22}), & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right\};$$

а що, на підставі Hadamard-ової нерівности, буде:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{A}'|\leqslant\prod_{j=0}^{\sim}\{e^{-2b_{ii}}(1+2b_{ii})+e^{-2b_{ii}}c_i^2+e^{-2b_{ii}}(b_{i0}^2+b_{i1}^2+\ldots)\},$$

то й сума $\sum\limits_{i=0}^{\sim}A_i^2$ збігається.

Розглянувши тепер різницю

$$Z_l(x)-z_m(x)=\sum_{i=0}^{k}\left\{\frac{A_i}{\Delta(\lambda)}-\frac{A_{im}}{e^{-b_{00}-b_{11}-\ldots-b_{mm}}\Delta_m(\lambda)}\right\}\varphi_{li}(x)+$$

$$+\sum_{i=k+1}^{m}\left\{\frac{A_i}{\Delta(\lambda)}-\frac{A_{im}}{e^{-b_{00}-b_{11}-\ldots-b_{mm}}\Delta_m(\lambda)}\right\}\varphi_{li}(x)+\sum_{i=m+1}^{\sim}\frac{A_i}{\Delta(\lambda)}\varphi_{li}(x), \qquad (436)$$

бачимо, що, на підставі збіжности ряду (435), третя з написаних тут сум $\left(\sum\limits_{i=m+1}^{\sim}\right)$ є, для досить великого m, така мала, як хочемо. Так само, зважаючи на існування границі виразу (429) та на залежність:

$$A_i=\lim_{m=\sim}A_{mi}$$

для всіх неособливих вартостей параметра λ, перша сума для всякого k є теж така мала, як хочемо. Нарешті, друга з цих сум справджує нерівність:

$$\left[\sum_{i=k+1}^{m}\left\{\frac{A_i}{\Delta(\lambda)}-\frac{A_{im}}{e^{-b_{00}-b_{11}-\ldots-b_{mm}}\Delta_m(\lambda)}\right\}\varphi_{li}(x)\right]^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=k+1}^{m}\left\{\frac{A_i}{\Delta(\lambda)}-\frac{A_{im}}{e^{-b_{00}-b_{11}-\ldots-b_{mm}}\Delta_m(\lambda)}\right\}^2\sum_{i=k+1}^{m}\{\varphi_{li}(x)\}^2\leqslant$$

$$\leqslant 2\left\{\sum_{i=k+1}^{m}\frac{A_i^2}{\Delta^2(\lambda)}+\sum_{i=k+1}^{m}\frac{A_{im}^2}{e^{-2(b_{00}+b_{11}+\ldots+b_{mm})}\Delta_m^2(\lambda)}\right\}\sum_{i=k+1}^{m}\left\{\varphi_{li}(x)\right\}^2, \qquad (437)$$

де перші дві суми є обмежені, а третя для досить великого k є довільно мала.

Отож остаточно маємо:

$$Z_l(x) = \lim_{m \to \infty} z_{lm}(x) \tag{438}$$

$$(l = 1, 2, \ldots, k)$$

або

$$\begin{aligned} z_1(x) &= b_0 \varphi_{10}(x) + b_1 \varphi_{11}(x) + b_2 \varphi_{12}(x) + \ldots \\ z_2(x) &= b_0 \varphi_{20}(x) + b_1 \varphi_{21}(x) + b_2 \varphi_{22}(x) + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_k(x) &= b_0 \varphi_{k0}(x) + b_1 \varphi_{k1}(x) + b_2 \varphi_{k2}(x) + \ldots \end{aligned} \tag{439}$$

Отож, коли функції

$$\Phi_{1i}, \Phi_{2i}, \ldots, \Phi_{ki}$$

є ортогональні і творять систему замкнену, то розв'язку

$$z_1(x), z_2(x), \ldots, z_k(x)$$

задачі (388) — (389) можна подати в формі абсолютно та одностайно збіжних рядів (439). Сучинники цих рядів, очевидно, визначаються з нескінченної системи лінійних рівнань:

$$\int_a^b \sum_{l=1}^k L_{lx}[b_0 \varphi_0 + b_1 \varphi_1 + b_2 \varphi_2 + \ldots] \Phi_{li}(x)\, dx = \int_a^b f_l(x) \Phi_{li}(x)\, dx \tag{440}$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots)$$

з безліччю невідомих:

$$b_0, b_1, b_2, \ldots \tag{441}$$

За певних обмежених умов щодо функцій $f_l(x)$ буде:

$$f_l(x) = b_0 \Phi_{l0}(x) + b_1 \Phi_{l1}(x) + b_2 \Phi_{l2}(x) + \ldots$$
$$(l = 1, 2, \ldots k)$$

А тоді, в додаток до рівностей (439), легко виводимо й

$$\begin{aligned} z_1'(x) &= b_0 \varphi_{10}'(x) + b_1 \varphi_{11}'(x) + b_2 \varphi_{12}'(x) + \ldots \\ z_2'(x) &= b_0 \varphi_{20}'(x) + b_1 \varphi_{21}'(x) + b_2 \varphi_{22}'(x) + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_k'(x) &= b_0 \varphi_{k0}'(x) + b_1 \varphi_{k1}'(x) + b_2 \varphi_{k2}'(x) + \ldots \end{aligned} \tag{439a}$$

§ 45. Спосіб найменших квадратів та аналог Ritz-ового альґоритму

Коли покласти

$$M_{jx}[\quad] \doteq L_{jx}[\quad]$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k),$$

то легко бачити, що рівнання для визначення сучинників $a_i^{(m)}$ наближеної розв'язки:

$$z_{jm}(x) = a_0^{(m)} \varphi_{j0}(x) + a_1^{(m)} \varphi_{j1}(x) + \ldots + a_m^{(m)} \varphi_{jm}(x)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k),$$

переходять в умови minimum-у інтеграла:

$$J(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \int_a^b \sum_{j=1}^k \{L_{jx}[z_m] - f_j(x)\}^2 dx;$$

отже дістаємо спосіб найменших квадратів.

Тут добір функцій φ_{jn} та Φ_{jn} можна, загалом кажучи, починати тільки з φ_{jn}.

Найближче до Ritz-ової ідеї в цьому випадку був би добір функцій φ_{jn} та Φ_{jn}, як фундаментальних систем функцій у задачі:

$$M_{jx}[\varphi] = \mu\varphi_j(x) \qquad (442)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k)$$

за граничних умов нашої задачі (388) — (389). Справді, коли б система фукцій φ_{jn} (або Φ_{jn}, що тут на одно виходить) була повна або замкнена то сучинники $a_i^{(m)}$ було б доцільно визначити з системи рівнань:

$$\int_a^b \sum_{j=1}^k L_{jx}[z_m]\,\varphi_{j0}(x)\,dx = \int_a^b \sum_{j=1}^k f_j(x)\,\varphi_{j0}(x)\,dx$$

$$\int_a^b \sum_{j=1}^k L_{jx}[z_m]\,\varphi_{j1}(x)\,dx = \int_a^b \sum_{j=1}^k f_j(x)\,\varphi_{j1}(x)\,dx$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_a^b \sum_{j=1}^k L_{jx}[z_m]\,\varphi_{jm}(x)\,dx = \int_a^b \sum_{j=1}^k f_j(x)\,\varphi_m(x)\,dx$$

Ця система цілком заступає собою систему (392) в загальнім випадку і забезпечує збіжність суми $z_{jm}(x)$ до функції $z_j(x)$.

Треба відзначити, що цей варіянт можна здійснити тільки за умови, коли система фундаментальних функцій задачі (442) існує і є замкнена, отже застосування його, як і Ritz-ової ідеї, є обмежене.

Міркування щодо безпосереднього застосування варіяційного альгоритму до систем рівнань подано далі в параграфах 47 та 48.

§ 46. Система лінійних рівнань 2-го порядку

Спинімося на системі типу:

$$L_{jx}[z] = M_{jx}[z] + \lambda N_{jx}[z] = f_j(x) \qquad (443)$$
$$U_j[z] = 0, \qquad V_j[z] = 0$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k),$$

де

$$M_{jx}[z] = B_{j1} z_1' + B_{j2} z_2' + \cdots + B_{jk} z_k' + C_{j1} z_1 + C_{j2} z_2 + \ldots + C_{jk} z_k$$

$$N_{jx}[z] = b_{j1}(x) z_1' + b_{j2}(x) z_2' + \cdots + b_{jk}(x) z_k' + c_{j1}(x) z_1 + c_{j2}(x) z_2 + \cdots + c_{jk}(x) z_k$$

$$U_j[x] = \sum_{l=1}^k \{\alpha_{lj}' z_l'(a) + \alpha_{lj} z_l(a) + \beta_{lj}' z_l'(b) + \beta_{lj} z_l(b)\}$$

$$V_j[z] = \sum_{l=1}^k \{\gamma_{lj}' z_l'(a) + \gamma_{lj} z_l(a) + \delta_{lj}' z_l'(b) + \delta_{lj} z_l(b)\}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, k),$$

вона бо має часті застосування. Коли сучинники $b_{ji}(x)$ та $c_{ji}(x)$ є довільні функції від x, то система (443) є загальна система 2-го порядку. Припустімо, що вона має одну-єдину розв'язку на інтервалі (a, b):

$$z_1(x),\ z_2(x), \ldots, z_k(x)$$

Узявши за

$$\Phi_{j0},\ \Phi_{j1},\ \Phi_{j2}, \ldots$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k)$$

замкнену систему функцій на інтервалі (a, b), можемо дібрати сучинники B_{ji} та C_{ji} так, щоб розв'язка

$$\varphi_{jn},\ \varphi_{2n}, \ldots, \varphi_{kn}$$

системи:

$$\begin{gathered} M_{jx}[\varphi] = \Phi_{jn}(x) \\ U_j[\varphi] = 0, \quad V_j[\varphi] = 0 \end{gathered} \tag{444}$$

єнувала і була єдина. Щоб у цьому переконатися, довелося б повторити з відповідними узагальненнями міркування розділу I щодо випадку одного рівнання k-го порядку.

Тоді наближену розв'язку системи (443) у формі:

$$z_{jm}(x) = a_0^{(m)} \varphi_{j0}(x) + a_1^{(m)} \varphi_{j1}(x) + \cdots + a_m^{(m)} \varphi_{jm}(x) \tag{445}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k)$$

визначаємо з рівнань:

$$\int_a^b \sum_{j=1}^k L_{jx}[z_m]\Phi_{j0}(x)\,dx = \int_a^b \sum_{j=1}^k f_j(x)\,\Phi_{j0}(x)\,dx$$
$$\int_a^b \sum_{j=1}^k L_{jx}[z_m]\Phi_{j1}(x)\,dx = \int_a^b \sum_{j=1}^k f_j(x)\,\Phi_{j1}(x)\,dx$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\int_a^b \sum_{j=1}^k L_{jx}[z_m]\Phi_{jm}(x)\,dx = \int_a^b \sum_{j=1}^k f_j(x)\,\Phi_{jm}(x)\,dx$$

Збіжність:

$$z_j = \lim_{m=\infty} z_{jm}$$

$$z_j' = \lim_{m=\infty} z_{jm}'$$

$$\lim_{m=\infty} \int_a^b (z_j'' - z_{jm}'')^2\,dx = 0$$

$$(j = 1, 2, \ldots, k)$$

доводиться цілком аналогічно із збіжністю способу для системи рівнань 1-го порядку.

§ 47. Варіяційний альґоритм для систем рівнань 2-го порядку

Спосіб найменших квадратів тривіяльно поширюється й на системи типу (443).

Щоб вивести наближену розв'язку задачі (443) із задачі варіяційного числення, згідно з Ritz-овою думкою, зробімо такі обмеження.

1. Припустімо, що задача (443) є самоспряжена. Без істотного обмеження загальности в цьому випадку можна покласти:

$$B_{j1} = B_{j2} = \ldots = B_{jk} = 0$$
$$b_{j1}(x) = b_{j2}(x) = \ldots = b_{jk}(x) = 0 \tag{446}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k),$$

що ми й зробимо.

2. Припустімо, що систему (444) можна замінити такою самоспряженою однорідною:

$$M_{jx}[\varphi] = \mu\varphi_j$$
$$U_j[\varphi] = 0, \quad V_j[\varphi] = 0, \tag{444$_a$}$$

отже, що за φ_{jn}, Φ_{jn} можна взяти системи фундаментальних функцій задачі (446).

Тоді наближена розв'язка (445) визначиться з системи рівнань:

$$\int_a^b \sum_{j=1}^k L_{jx}[z_m]\,\varphi_{j0}(x)\,dx = \int_a^b \sum_{j=1}^k f_j(x)\,\varphi_{j0}(x)\,dx$$
$$\int_a^b \sum_{j=1}^k L_{jx}[z_m]\,\varphi_{j1}(x)\,dx = \int_a^b \sum_{j=1}^k f_j(x)\,\varphi_{j1}(x)\,dx \tag{446$_a$}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\int_a^b \sum_{j=1}^k L_{jx}[z_m]\,\varphi_{jm}(x)\,dx = \int_a^b \sum_{j=1}^k f_j(x)\,\varphi_{jm}(x)\,dx$$

лінійних щодо невідомих

$$a_0^{(m)},\ a_1^{(m)}, \ldots, a_m^{(m)}$$

Пам'ятаючи, що, зважаючи на самоспряженість задачі (443) та задачі (444$_a$), крім рівностей (446), маємо:

$$C_{jh} = C_{hj},\ c_{jh}(x) = c_{hj}(x)$$
$$(j, h = 1, 2, \ldots, k),$$

розгляньмо інтеґрали:

$$\overline{Y}(a_0^{(m)}, a_1^{(m)}, \ldots, a_m^{(m)}) = \int_a^b \Bigg[\sum_{j=1}^k \{z'_{jm}(x)\}^2 -$$
$$-\sum_{j,h=1}^k \{C_{jh} + \lambda c_{jh}(x)\}\{z_{jm}(x)\,z_{hm}(x)\} + 2\sum_{j=1}^k f_j(x)\,z_{jm}(x)\Bigg]dx \tag{447}$$

$$I = \int_a^b \Bigg[\sum_{j=1}^k \{z'_j(x)\}^2 - \sum_{j,h=1}^k \{C_{jh} + \lambda c_{jh}(x)\}\,z_j(x) z_h(x) + 2\sum_{j=1}^k f_j(x)\,z_j(x)\Bigg]dx \tag{448}$$

Умова стаціонарности другого з них є:

$$\frac{1}{2}\delta \overline{Y} = \int_a^b \Bigg[\sum_{j=1}^{k} z_j'(x)\,\delta z_j'(x) + \sum_{j,h=1}^{k} \{C_{jh} + \lambda c_{jh}(x)\} \{z_j(x)\,\delta z_h(x) + z_h(x)\,\delta z_j(x)\} -$$

$$- \sum_{j=1}^{k} f_j(x)\,\delta z_j(x) \Bigg] dx = 0 \qquad (449)$$

або, після частинної інтеґрації:

$$\int_a^b \sum_{j=1}^{k} \Big\{ z_j''(x) + \sum_{h=1}^{k} [C_{jh} + \lambda c_{jh}(x)]\, z_h(x) - f_h(x) \Big\} \delta z_j(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \{ z_j'(b)\,\delta z_j(b) - z_j'(a)\,\delta z_j(a) \} \qquad (450)$$

Коли умови

$$U_j[z] = 0, \quad V_j[z] = 0$$

зводяться на

$$z_j'(a) = 0, \quad z_j'(b) = 0$$

$$(j = 1, 2, \ldots, k),$$

то бачимо, що вимога (450) і веде до системи (443). А тоді рівнання

$$\frac{\partial Y(a_0^{(m)}, a_1^{(m)}, \ldots, a_m^{(m)})}{\partial a_i^{(m)}} = 0 \qquad (451)$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m)$$

зводяться на (446_a), отже мінімізація інтеґрала (447) веде до розв'язки нашої задачі.

За інших типів умов

$$U_j[z] = 0, \quad V_j[z] = 0$$

доведеться замість інтеґралів (447) та (448) брати відповідно:

$$Y(a_0^{(m)}, a_1^{(m)}, \ldots, a_m^{(m)}) = \overline{Y}(a_0^{(m)}, a_1^{(m)}, \ldots, a_m^{(m)}) +$$

$$+ \Theta(z_{jm}(a), z_{jm}'(a), z_{jm}(b), z_{jm}'(b))$$

$$Y = \overline{Y} + \Theta(z_j(a), z_j'(a), z_j(b), z_j'(b)),$$

де Θ є належно дібрана квадратична форма від $4k$ величин:

$$z_j(a),\ z_j'(a),\ z_j(b),\ z_j'(b)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, k)$$

Дібрати її треба так, щоб перша варіяція інтеґрала Y звелася, по використанні умов

$$U_j[z] = 0, \quad V_j[z] = 0. \qquad (452)$$

на

$$2\int_a^b \sum_{j=1}^{k} \Big\{ z_j''(x) + \sum_{h=1}^{k} [C_{jh} + \lambda c_{jh}(x)]\, z_h(x) - f_h(x) \Big\} \delta z_j(x)$$

Це не завжди можливо. Для випадку, коли умови (452) мають вигляд:

$$z_j(a)=0, \quad z_j(b)=0$$
$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ k),$$

можна ще покласти

$$\Theta=0$$

§ 48. Додаткові уваги

1. Відзначмо тут, що варіяційний Ritz-ів альґоритм у властивому розумінні цього слова деколи буває можна застосувати до диференціяльних рівнань та систем рівнань непаристого порядку.

Візьмімо для прикладу задачу (388)—(389). Продиференціювавши рівнання (388) по x та вставивши у вислід вирази похідних z_j' із рівнань (388), дістанемо систему типу:

$$\begin{aligned}
z_1'' &= \alpha_{11}(x)z_1+\alpha_{12}(x)z_2+\cdots+\alpha_{1k}(x)z_k\\
z_2'' &= \alpha_{21}(x)z_1+\alpha_{22}(x)z_2+\cdots+\alpha_{2k}(x)z_k\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
z_k'' &= \alpha_{k1}(x)z_1+\alpha_{k2}(x)z_2+\cdots+\alpha_{kk}(x)z_k
\end{aligned}$$

Коли до граничних умов (389) додамо ще умови:

$$L_{aj}[z]=f_j(a)$$
$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

або умови

$$L_{bj}[z]=f_j(b)$$
$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ k),$$

то очевидно система (452) дасть ту саму розв'язку

$$z_1(x),\ z_2(x),\ \ldots,\ z_k(x),$$

що й задачі (388)—(389). Як до неї застосовувати варіяційний альґоритм, і коли це можливо — з'ясовано в попередньому параграфі.

2. Можна було б міркування цього розділу зробити цілком незалежними від теорем про існування розв'язок не тільки у систем диференціяльних, але й у систем інтеґральних рівнань. Але нічого ідейно нового проти міркувань розділу III ці міркування не дають, і тому їх опущено.

3. Безпосереднє застосування способу до систем інтеґральних рівнань, зосібна з використанням ортогональних функцій, можливе, але ідейно не нове. Думка бо цієї праці якраз і є поширити безпосередньо на диференціяльні рівнання той апарат, що його Hilbert та його наступники утворили для рівнань інтеґральних.

4. Скрізь у цій частині праці функції φ_i та φ_{ji} добиралося так, щоб вони справджували ті граничні умови, що їх справджує й відшукувана розв'язка задачі.

Можна наперед цього обмеження не ставити, вимагаючи тільки, щоб наближена розв'язка справджувала умови на кінцях інтервала (a, b) не точно, а наближено, з таким ступенем точности, з яким вона наближається до точної розв'язки в середових точках інтервала. Але тому, що добір функцій φ_i та φ_{ij} і поза цим — дуже зручний, такого узагальнення не введено: воно ускладнило б деякі міркування. Натомість у другій частині праці це узагальнення використовується широко, бо для диференціяльних рівнань з частинними похідними воно має істотне значення.

5. Поданий метод має ширше застосування, ніж те, що виявлено в попередніх розділах. Він без відмін у основних своїх рисах придатний і для нелінійних задач. І основні рівнання, щоб визначати параметри виразів y_m та z_{jm}, і доводи збіжности цих виразів, засновані на загальних вислідах теорії інтеґральних рівнань, лишаються істотно ті самі, що й для задачі лінійної. Але по суті і практичне використання методу і його обґрунтування в кожному окремому випадку задачі нелінійної — задача дуже складна за сучасного стану розвитку цієї важливої, але надто нерозробленої галузі аналізи. В тому або тому варіянті, на тому або на тому ступені процедури обчислення — в нелінійних задачах доводиться цей спосіб комбінувати з застосуванням принципу ступеневих наближень. Можна сказати більше: при фактичному проведенні обчислень навіть у застосуванні до задач лінійних ступеневі наближення можуть бути корисні, а не раз практично і неминучі, щоб визначати параметри наближень y_m та z_{jm}.

RÉSUMÉ DE LA PREMIÈRE PARTIE

(équations différentielles ordinaires et équations intégrales)

§ 1. Fonction de Green pour quelques cas particuliers

Considérons le problème:

$$M_x[z] = \frac{d^k z}{dx^k} + B_1 \frac{d^{k-1} z}{dx^{k-1}} + \ldots + B_k z = F(x) \qquad (1)$$

$$\left\{\begin{array}{l} U_0[z] = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_0^{(i)} z^{(i)}(a) + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_0^{(i)} z^{(i)}(b) = 0 \\ U_1[z] = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_1^{(i)} z^{(i)}(a) + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_1^{(i)} z^{(i)}(b) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_{k-1}[z] = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{k-1}^{(i)} z^{(i)}(a) + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_{k-1}^{(i)} z^{(i)}(b) = 0, \end{array}\right. \qquad (2)$$

où les coefficients $B_1, B_2, \ldots, B_k$ sont constants et les conditions (2) sont linéairement indépendantes. Les égalités (1) et (2) déterminent la fonction cherchée $z(x)$ dans l'intervalle (a, b) sous la forme suivante:

$$z(x) = \int_a^x g(x, \xi) F(\xi) d\xi + \int_a^b j(x, \xi) F(\xi) d\xi, \qquad (3)$$

où

$$g(x, \xi) = (-1)^k \cdot \frac{\begin{vmatrix} e^{r_0(x-\xi)}, & e^{r_1(x-\xi)}, & \ldots, & e^{r_{k-1}(x-\xi)} \\ 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ r_0, & r_1, & \ldots, & r_{k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_0^{k-2}, & r_1^{k-2}, & \ldots, & r_{k-1}^{k-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ r_0, & r_1, & \ldots, & r_{k-1} \\ r_0^2, & r_1^2, & \ldots, & r_{k-1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_0^{k-1}, & r_1^{k-1}, & \ldots, & r_{k-1}^{k-1} \end{vmatrix}} \qquad (4)$$

$$j(x,\xi)=\left|\begin{array}{c:c} \{u\}\cdot\{v'\} & \begin{matrix}\int_a^b g_0(x,\xi)F(\xi)\,d\xi \\ \int_a^b g_1(x,\xi)F(\xi)\,d\xi \\ \vdots \\ \int_a^b g_{k-1}(x,\xi)F(\xi)\,d\xi\end{matrix} \\ \hdashline e^{r_0x},\ e^{r_1x},\dots,\ e^{r_{k-1}x} & 0 \end{array}\right| \tag{5}$$

$$\{u\}=\left|\begin{matrix} \alpha_0^{(0)} & \alpha_0^{(1)} & \dots & \alpha_0^{(k-1)} & \beta_0^{(0)} & \beta_0^{(1)} & \dots & \beta_0^{(k-1)} \\ \alpha_1^{(0)} & \alpha_1^{(1)} & \dots & \alpha_1^{(k-1)} & \beta_1^{(0)} & \beta_1^{(1)} & \dots & \beta_1^{(k-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{k-1}^{(0)} & \alpha_{k-1}^{(1)} & \dots & \alpha_{k-1}^{(k-1)} & \beta_{k-1}^{(0)} & \beta_{k-1}^{(1)} & \dots & \beta_{k-1}^{(k-1)} \end{matrix}\right| \tag{6}$$

$$\{v\}=\left|\begin{matrix} e^{r_0a}, & r_0e^{r_0a}, & \dots, & r_0^{k-1}e^{r_0a}, & e^{r_0b}, & r_0e^{r_0b}, & \dots, & r_0^{k-1}e^{r_0b} \\ e^{r_1a}, & r_1e^{r_1a}, & \dots, & r_1^{k-1}e^{r_1a}, & e^{r_1b}, & r_1e^{r_1b}, & \dots, & r_1^{k-1}e^{r_1b} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e^{r_{k-1}a}, & r_{k-1}e^{r_{k-1}a}, & \dots, & r_{k-1}^{k-1}e^{r_{k-1}a}, & e^{r_{k-1}b}, & r_{k-1}e^{r_{k-1}b}, & \dots, & r_{k-1}^{k-1}e^{r_{k-1}b} \end{matrix}\right|, \tag{7}$$

les nombres

$$r_0,\ r_1,\dots,\ r_{k-1} \tag{8}$$

étant les racines de l'équation

$$M(r)=r^k+B_1r^{k-1}+\dots+B_k=0 \tag{9}$$

En introduisant la fonction

$$G(x,\xi)=\begin{cases} g(x,\xi)+j(x,\xi) & (\xi\leqslant x) \\ g(x,\xi) & (\xi>x), \end{cases} \tag{10}$$

on peut écrire la formule (3) comme il suit:

$$z(x)=\int_a^b G(x,\xi)F(\xi)\,d\xi \tag{11}$$

La fonction (10) est la fonction de Green du problème (1)—(2). Elle satisfait aux égalités:

$$M_x[G]=0 \tag{12}$$

$$\begin{gathered} U_0[G]=0 \\ U_1[G]=0 \\ \dots\dots \\ U_{k-1}[G]=0 \end{gathered} \tag{13}$$

ns tous les points de l'intervalle (a, b), à l'exception du point

$$x=\xi,$$

l'égalité (12) est dépourvue de sens, parce que dans ce point la derivée

$$\frac{\partial^{k-1}G}{\partial x^{k-1}}$$

t discontinue, notamment:

$$\left(\frac{\partial^{k-1}G}{\partial x^{k-1}}\right)_{\xi=x-0}-\left(\frac{\partial^{k-1}G}{\partial x^{k-1}}\right)_{\xi=x+0}=1 \tag{14}$$

Le résultat (11) peut être obtenu par l'application directe du procédé lassique de Lagrange de l'intégration des équations linéaires non-homogènes. l reste valable (mutatis mutandis) dans le cas, où l'équation (9) a des racines nultiples, ainsi que dans le cas où les coefficients B_i sont fonctions de x. Dans ce dernier cas, pour la construction effective de la fonction de Green, m doit avoir un système fondamental d'intégrales de l'équation:

$$M_x[z]=0 \tag{15}$$

§ 2. Existence de la solution dans le cas général

Toute équation différentielle linéaire peut être présentée d'une infinité de nanières, sous la forme:

$$L_x[y]=M_x[y]-\lambda N_x[y]=f(x) \tag{16}$$

où λ est un facteur numérique et

$$N_x[y]=a_1(x)\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}+a_2(x)\frac{d^{k-2}y}{dx^{k-2}}+\ldots+a_k(x)y \tag{17}$$

A condition que les fonctions $a_i(x)$, $f(x)$ soient de carré intégrables dans l'intervalle (a, b), on a le théorème suivant:

Le problème

$$L_x[y]=f(x) \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} U_0[y]&=0\\ U_1[y]&=0\\ \cdots&\cdots\\ U_{k-1}[y]&=0\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

a dans l'intervalle (a, b) une solution unique pour toute valeur du paramètre λ, à l'exception de certaines valeurs singulières.

Pour la démonstration, considérons le système d'équations intégro-différentielles:

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \lambda \int_a^b G(x,\xi)\, N_\xi[u]\, d\xi + \int_a^b G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi \\
u'(x) &= \lambda \int_a^b \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} N_\xi[u]\, d\xi + \int_a^b \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} f(\xi)\, d\xi \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u^{(k-1)}(x) &= \lambda \int_a^b \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} N_\xi[u]\, d\xi + \int_a^b \frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}} f(\xi)\, d\xi
\end{aligned}
\tag{20}
$$

A l'aide des égalités (12), (13) et (14) on en déduit:

$$
u^{(k)}(x) = \lambda N_x[u] + f(x) + \left(\int_a^{x-0} + \int_{x+0}^b \right) \frac{\partial^k G}{\partial x^k} \{\lambda N_\xi[u] + f(\xi)\}\, d\xi \tag{21}
$$

En se servant de (21) et (20) on parvient à l'égalité:

$$
M_x[u] = \lambda N_x[u] + f(x)
$$

et aux égalités:

$$
\begin{aligned}
U_0[u] &= 0 \\
U_1[u] &= 0 \\
&\cdots\cdots \\
U_{k-1}[u] &= 0,
\end{aligned}
$$

ce qui démontre que la solution du problème (20) est égale à celle du problème (18) — (19). Or, il est connu que le problème (20) a une solution unique pour toutes les valeur de λ, à l'exception des valeurs caractéristiques.

Le théorème démontré prouve par ex. l'existence du système fondamental d'intégrales de l'équation générale (16). Il en découle l'existence de la fonction de Green du problème (18) — (19), c'est à dire de la fonction $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ qui pour $x \neq \xi$ satisfait aux égalités:

$$
\begin{aligned}
L_x[\Gamma] &= 0 \\
U_0[\Gamma] &= 0 \\
U_1[\Gamma] &= 0 \\
&\cdots\cdots \\
U_{k-1}[\Gamma] &= 0,
\end{aligned}
\tag{22}
$$

la dérivée

$$
\frac{\partial^{k-1} \Gamma(x, \xi; \lambda)}{\partial x^{k-1}}
$$

ayant forcément la discontinuité dans le point

$$
x = \xi
$$

Comme fonction du paramètre λ, la fonction Γ a pour pôles tous les nombres caractéristiques du problème (20).

Notons en passant que le problème (20) se réduit immédiatement à une équation intégrale de Fredholm:

$$
v(x) = \lambda \int_a^b G(x,\xi)\, v(\xi)\, d\xi + \int_a^b G(x,\xi)\, (\xi) f\, d\xi \tag{23}
$$

et aux quadratures:

$$
\left.
\begin{aligned}
u(x) &= \lambda \int_a^b G(x,\xi)\, v(\xi)\, d\xi + \int_a^b G(x,\xi) f(\xi)\, d\xi \\
u'(x) &= \lambda \int_a^b \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\, v(\xi)\, d\xi + \int_a^b \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} f(\xi)\, d\xi \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u^{(k-1)}(x) &= \lambda \int_a^b \frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}}\, v(\xi)\, d\xi + \int_a^b \frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}} f(\xi)\, d\xi,
\end{aligned}
\right\} \quad (24)
$$

§ 3. Systèmes complets de polynômes

Nous nommons complet un système de fonctions

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ldots \qquad (25)$$

dans l'intervalle (a, b), si pour toute fonction $Z(x)$ ayant k-ème dérivée continue et satisfaisant aux conditions (2), on peut indiquer les nombres

$$a_0^{(m)},\ a_1^{(m)},\ldots,\ a_m^{(m)}$$

qui vérifient les égalités

$$
\left.
\begin{aligned}
Z(x) &= \lim_{m=\infty} \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \varphi_i(x) \\
Z'(x) &= \lim_{m=\infty} \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \varphi_i'(x) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Z^{(k-1)}(x) &= \lim_{m=\infty} \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \varphi_i^{(k-1)}(x) \\
Z^{(k)}(x) &= \lim_{m=\infty} \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \varphi_i^{(k)}(x)
\end{aligned}
\right\} \quad (26)
$$

Si au lieu des égalités (26) on a seulement:

$$
\left.
\begin{aligned}
Z(x) &= \lim_{m=\infty} \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \varphi_i(x) \\
Z'(x) &= \lim_{m=\infty} \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \varphi_i'(x) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Z^{(k-1)}(x) &= \lim_{m=\infty} \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \varphi_i^{(k-1)}(x) \\
\lim_{m=\infty} \int_a^b & [Z^{(k)}(x) - \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \varphi_i^{(k)}(x)]^2 dx = 0,
\end{aligned}
\right\} \quad (27)
$$

nous nommerons le système (25) un système fermé.

Tout polynôme qui satisfait aux conditions (2), a la forme suivante:

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{k-1} k_i \chi_i(x) + (x-a)^k (x-b)^k \theta(x) \tag{28}$$

$\theta(x)$ étant un polynôme quelconque et $\chi_i(x)$ les k polynômes linéairement indépendants, dont les degrés ne dépassent pas $2k-1$.

Démontrons que le système

$$\begin{aligned} &\chi_0(x),\ \chi_1(x), \ldots,\ \chi_{k-1}(x), \\ &\chi_k(x) = (x-a)^k (x-b)^k, \\ &\chi_{k+1}(x) = (x-a)^k (x-b)^k x, \\ &\chi_{k+2}(x) = (x-a)^k (x-b)^k x^2, \ldots \end{aligned} \tag{29}$$

est un système complet.

Il est bien évident que, si les systèmes de fonctions

$$\chi_{-k},\ \chi_{-k+1}, \ldots,\ \chi_0,\ \chi_1, \ldots,\ \chi_k \tag{30}$$

et

$$1,\ x,\ x^2, \ldots \tag{31}$$

sont équivalents, le système de polynômes:

$$\begin{aligned} &\varphi_0 = \chi_{-k}, \quad \varphi_1 = \chi_{-k+1}, \ldots, \quad \varphi_{k-1} = \chi_{-1}, \quad \varphi_k = \chi_0 \\ &\varphi_{k+1} = \chi_1, \ldots, \quad \varphi_{2k-1} = \chi_{k-1}, \quad \varphi_{2k} = \chi_k, \quad \varphi_{2k+1} = \chi_{k+1}, \ldots \end{aligned} \tag{32}$$

est complet. En considérant les égalités (2) pour les fonctions (26) dans le cas (32), on en déduit:

$$\begin{aligned} &\lim_{m=\infty} (\gamma_{00} a_0^{(m)} + \gamma_{01} a_1^{(m)} + \ldots + \gamma_{0,k-1} a_{k-1}^{(m)}) = 0 \\ &\lim_{m=\infty} (\gamma_{10} a_0^{(m)} + \gamma_{11} a_1^{(m)} + \ldots + \gamma_{1,k-1} a_{k-1}^{(m)}) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\lim_{m=\infty} (\gamma_{k-1,0} a_0^{(m)} + \gamma_{k-1,1} a_1^{(m)} + \ldots + \gamma_{k-1,k-1} a_{k-1}^{(m)}) = 0, \end{aligned} \tag{33}$$

où les nombres γ_{ij} ne dépendent pas de m.

Par conséquent

$$\begin{aligned} &\lim_{m=\infty} a_0^{(m)} = 0 \\ &\lim_{m=\infty} a_1^{(m)} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\lim_{m=\infty} a_{k-1}^{(m)} = 0, \end{aligned}$$

ce qui démontre notre assertion.

Si la fonction $Z(x)$ possède la dérivée $k+p$-ième continue dans l'intervalle (a, b), alors, d'après les résultats fondamentaux bien connus de la réprésentation des fonctions par polynômes, on peut compléter les égalités (26) par les égalités suivantes:

$$Z^{(k+1)}(x) = \lim_{m=\sim} \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \varphi_i^{(k+1)}(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Z^{(k+p)}(x) = \lim_{m=\sim} \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \varphi_i^{(k+p)}(x)$$

§ 4. Systèmes fermés de fonctions

Prenons dans l'intervalle (a, b) un système quelconque de fonctions

$$\Phi_0(x),\ \Phi_1(x),\ \Phi_2(x), \ldots \tag{34}$$

fermé dans le sens ordinaire de ce mot, c'est à dire satisfaisant à l'égalité:

$$\min \lim_{m=\sim} \int_a^b [F(x) - \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \Phi_i(x)]^2\, dx = 0 \tag{35}$$

pour toute fonction $F(x)$ de carré intégrable dans cet intervalle. Prenons les fonctions

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots \tag{36}$$

comme solutions des problèmes

$$\begin{aligned} M_x[\varphi_i] &= \Phi_i(x) \qquad\qquad (i = 0, 1, 2, \ldots) \\ U_0[\varphi_i] &= 0 \\ U_1[\varphi_i] &= 0 \\ &\cdots\cdots \\ U_{k-1}[\varphi_i] &= 0 \end{aligned} \tag{37}$$

D'après (11), on a évidemment:

$$\varphi_i(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, \Phi_i(\xi)\, d \tag{38}$$

Des égalités (11) et (38) on déduit:

$$z - \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \varphi_i = \int_a^b G(x, \xi) \left[F(\xi) - \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \Phi_i(\xi)\right] d\xi, \tag{39}$$

ce qui donne:

$$\left[z - \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \varphi_i\right]^2 \leqslant \int_a^b G^2(x, \xi)\, d\xi \cdot \int_a^b \left[F(\xi) - \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \Phi_i(\xi)\right]^2 d\xi$$

De cette dernière inégalité et de (35) on obtient:

$$z(x) = \lim_{m=\sim} \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \varphi_i(x) \tag{40}$$

En différentiant l'égalité (39) on obtient de la même manière:

$$
\left.
\begin{aligned}
z'(x) &= \lim_{m=\sim} \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \varphi_i'(x) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
z^{(k-1)}(x) &= \lim_{m=\sim} \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \varphi_i^{(k-1)}(x)
\end{aligned}
\right\} \qquad (40_a)
$$

La condition (35) pouvant être transformée en

$$\min \lim_{m=\sim} \int_a^b \left\{ M_x[z] - \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} M_x[\varphi_i] \right\}^2 dx = 0,$$

on en déduit, à l'aide des inégalités de Cauchy et de Bouniakowský, le résultat suivant:

$$\lim_{m=\sim} \int_a^b [z^{(k)}(x) - z_m^{(k)}(x)]^2 dx = 0 \qquad (40_b)$$

$$z_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \varphi_i(x)$$

Les égalités (40), (40_a) et (40_b) montrent que le système (36) est fermé au sens du paragraphe 3.

Si, au lieu d'être fermé, le système (34) était complet au sens ordinaire du mot, on aurait l'égalité:

$$\lim_{m=\sim} \left[F(x) - \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \Phi_i(x) \right] = 0, \qquad (34_a)$$

plus forte que celle de (35). Dans ce cas le système (36) serait non seulement fermé, mais complet au sens du paragraphe 3.

Supposons par exemple que le système (34) a la forme:

$$1, x, x^2, x^3, \ldots$$

et que la fonction $F(x)$ a la p-ième dérivée avec le module de continuité $\omega(\Delta x)$. Alors, comme il est connu de la théorie de la représentation des fonctions par polynômes, il existe l'inégalité suivante:

$$|F(x) - \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \Phi_i(x)| < K \frac{\omega\left(\dfrac{1}{m}\right)}{m^p},$$

où K ne dépend pas de m. On obtient alors sans peine:

$$
\left.
\begin{aligned}
|z(x) - \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \varphi_i(x)| &< K_0 \frac{\omega\left(\dfrac{1}{m}\right)}{m^p} \\
|z'(x) - \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \varphi_i'(x)| &< K_1 \frac{\omega\left(\dfrac{1}{m}\right)}{m^p} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\right\} \qquad (41)
$$

$$\left| z^{(k-1)}(x) - \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \varphi_i^{(k-1)}(x) \right| < K_{k-1} \frac{\omega\left(\frac{1}{m}\right)}{m^p}$$

$$\left| z^{(k)}(x) - \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \varphi_i^{(k)}(x) \right| < K_k \frac{\omega\left(\frac{1}{m}\right)}{m^p} \tag{41}$$

$$\left| z^{(k+1)}(x) - \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \varphi_i^{(k+1)}(x) \right| < K_{k+1} \frac{\omega\left(\frac{1}{m}\right)}{m^{p-1}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left| z^{(k+p)}(x) - \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \varphi_i^{(k+p)}(x) \right| < K_{k+p}\, \omega\left(\frac{1}{m}\right)$$

On aura un résultat analogue, en prenant pour (34) le système:

$$1,\ \cos 2\pi \frac{x-a}{b-a},\ \sin 2\pi \frac{x-a}{b-a},\ \cos 4\pi \frac{x-a}{b-a},\ \sin 4\pi \frac{x-a}{b-a},$$

$$\cos 6\pi \frac{x-a}{b-a},\ \sin 6\pi \frac{x-a}{b-a}, \ldots$$

Enfin, dans le cas particulier où le problème (1) est self-adjoint, l'on peut prendre pour $\varphi_i(x)$ et $\Phi_i(x)$ les fonctions fondamentales du problème:

$$\begin{aligned} M_x[\varphi] &= \lambda\varphi \\ U_0[\varphi] &= 0 \\ U_1[\varphi] &= 0 \\ \cdots & \cdots \\ U_{k-1}[\varphi] &= 0 \end{aligned} \tag{42}$$

§ 5. Sur le choix de l'opérateur $M_x[\,]$

Si l'on cherche les fonctions $\varphi_i(x)$ sous la forme de polynômes, en prenant pour coefficients de l'opérateur $M_x[\,]$ des nombres constants ou des polynômes, les fonctions $\Phi_i(x)$ sont alors aussi des polynômes. Pour qu'elles fassent un système fermé (et complet), il suffit que les degrés de polynômes (30) ne soient pas inférieurs à k.

Si cette condition est compatible avec les conditions (2), on peut prendre simplement:

$$M_x[\,] = \frac{d^k}{dx^k} \tag{43}$$

Dans la suite l'indépendance linéaire des fonctions $\Phi_i(x)$ jouera un rôle fondamental. Pour qu'on puisse prendre pour $\varphi_i(x)$ et $\Phi_i(x)$ des polynômes linéairement indépendants il faut et il suffit que le problème

$$
\begin{aligned}
M_x[z] &= 0 \\
U_0[z] &= 0 \\
U_1[z] &= 0 \\
&\cdots\cdots \\
U_{k-1}[z] &= 0
\end{aligned}
$$

n'ait pas d'autre solution que triviale. Cette condition sera satisfaite, si l' prend par ex.

$$M_x[\,] = \frac{d}{dx^k} - \nu^*,$$

où ν^* est un nombre arbitraire différent des nombres caractéristiques problème:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^k z}{dx^k} &= \nu z \\
U_0[z] &= 0 \\
U_1[z] &= 0 \\
&\cdots\cdots \\
U_{k-1}[z] &= 0
\end{aligned}
$$

Dans tous les cas on peut prendre

$$\Phi_i(x) = x^i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots$$

Les paramètres arbitraires de l'opérateur $M_x[\,]$ peuvent être utilisés po la diminution des secondes parties des inégalités (35) et pour diverses simpl fications concernant les fonctions $\varphi_i(x)$ et les sommes (26) et (27).

§ 6. La résolution approchée des équations différentielles linéaires

Cherchons la solution approchée du problème (18)—(19) sous la form suivante:

$$y_m = a_0^{(m)} \varphi_0 + a_1^{(m)} \varphi_1 + \ldots + a_m^{(m)} \varphi_m, \qquad (4$$

où les coefficients $a_i^{(m)}$ sont déterminés par les conditions:

$$\int_a^b L_x[y_m] M_x[\varphi_i]\, dx = \int_a^b f(x) M_x[\varphi_i]\, dx, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, m), \qquad (4$$

formant un système d'équations linéaires dont le déterminant $\Delta_m(\lambda)$ pour

$$\lambda = 0$$

est égal à

$$
\begin{vmatrix}
\int_a^b \Phi_0\Phi_0\, dx, & \int_a^b \Phi_1\Phi_0\, dx, \ldots, & \int_a^b \Phi_m\Phi_0\, dx \\
\int_a^b \Phi_0\Phi_1\, dx, & \int_a^b \Phi_1\Phi_1\, dx, \ldots, & \int_a^b \Phi_m\Phi_1\, dx \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\int_a^b \Phi_m\Phi_0\, dx, & \int_a^b \Phi_m\Phi_1\, dx, \ldots, & \int_a^b \Phi_m\Phi_m\, dx
\end{vmatrix}
$$

Ce déterminant est différent de zéro, parce que les fonctions $\Phi_i(x)$ sont choisies linéairement indépendantes.

Démontrons que la somme (45) pour m suffisamment grand diffère aussi peu qu'on veut de la solution $y(x)$ du problème (18)—(19).

Pour cela, transformons les égalités (46) à la forme:

$$\int_a^b L_x[y_m - y]\, M_x[\varphi_i]\, dx = 0 \tag{47}$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, m),$$

ou bien à la forme

$$\int_a^b L_x[y_m - y]\, \Phi_i\, dx = 0 \tag{48}$$

donnant immédiatement:

$$\int_a^b L_x[y_m - y]\, M_x[y_m]\, dx = 0 \tag{49}$$

D'autre part, vu que le système de fonctions $\Phi_i(x)$ est fermé, on a pour l'expression

$$\alpha_m(x;\ b_0^{(m)}, b_1^{(m)}, \ldots, b_m^{(m)}) = \sum_{i=0}^{m} b_i^{(m)} \Phi_i(x) - M_x[y] \tag{50}$$

l'égalité suivante:

$$\lim_{m=\infty} \min \int_a^b [\alpha_m(x;\ b_0^{(m)}, b_1^{(m)}, \ldots, b_m^{(m)})]^2\, dx = 0 \tag{51}$$

Des égalités (48) et (49) on déduit à l'aide de l'inégalité de Bouniakowsky la relation fondamentale de la démonstration:

$$\int_a^b L_x^2[y_m - y]\, dx \leqslant \int_a^b \left\{ \lambda N_x[y_m - y] + \alpha_m \right\}^2 dx \tag{52}$$

La solution unique

$$w = y_m - y$$

du problème:

$$\begin{aligned} M_x[w] &= L_x[y_m - y] + \lambda N_x[y_m - y] \\ U_0[w] &= 0 \\ U_1[w] &= 0 \\ &\cdots\cdots \\ U_{k-1}[w] &= 0 \end{aligned} \tag{53}$$

et ses dérivées $w^{(l)}$ peuvent être représentées comme il suit:

$$\begin{aligned} y_m - y &= \lambda \int_a^b G(x, \xi)\, N_\xi[y_m - y]\, d\xi + \int_a^b G(x, \xi)\, L_\xi[y_m - y]\, d\xi \\ y_m' - y' &= \lambda \int_a^b \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} N_\xi[y_m - y]\, d\xi + \int_a^b \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} L_\xi[y_m - y]\, d\xi \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m^{(k-1)} - y^{(k-1)} &= \lambda \int_a^b \frac{\partial^{k-1} G(x, \xi)}{\partial x^{k-1}} N_\xi[y_m - y]\, d\xi + \int_a^b \frac{\partial^{k-1} G(x, \xi)}{\partial x^{k-1}} L_\xi[y_m - y]\, d\xi \end{aligned} \tag{53$_a$}$$

En déterminant les coefficients

$$C_{0l}^{(m)}(x),\ C_{1l}^{(m)}(x), \ldots,\ C_{ml}^{(m)}(x) \qquad (l=0, 1, \ldots, k-1)$$

par les conditions:

$$\int_a^b \gamma_{ml}^2(x, \xi;\ C_{0l}^{(m)},\ C_{1l}^{(m)}, \ldots,\ C_{ml}^{(m)})\, d\xi = \min, \ (l=0, 1, \ldots, k-1)$$

où

$$\gamma_{ml} = \frac{\partial^l G}{\partial x^l} - \sum_{i=0}^{m} C_{il}^{(m)}(x)\, \Phi_i(\xi),$$

on aura évidemment:

$$\lim_{m=\sim} \min \int_a^b \gamma_{ml}^2\, d\xi = 0 \qquad (l=0, 1, \ldots, k-1)$$

Alors, en combinant les égalités (48) avec les égalités (53), on obtient sans peine:

$$\begin{aligned}
y_m - y &= \lambda \int_a^b G N_\xi[y_m - y]\, d\xi + \int_a^b \gamma_{m0} L_\xi[y_m - y]\, d\xi \\
y_m' - y' &= \lambda \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x} N_\xi[y_m - y]\, d\xi + \int_a^b \gamma_{m1} L_\xi[y_m - y]\, d\xi \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_m^{(k-1)} - y^{(k-1)} &= \lambda \int_a^b \frac{\partial^{k-1} G}{\partial x^{k-1}} N_\xi[y_m - y]\, d\xi + \int_a^b \gamma_{m, k-1} L_\xi[y_m - y]\, d\xi,
\end{aligned} \tag{54}$$

ce qui donne, analogiquement au paragraphe 2, à l'aide de l'inégalité de Bouniakowsky:

$$\begin{aligned}
(y_m - y)^2 &\leqslant \int_a^b \Gamma_{m0}^2(x, \xi)\, d\xi \,.\, \int_a^b L_\xi^2[y_m - y]\, d\xi \\
(y_m' - y')^2 &\leqslant \int_a^b \Gamma_{m1}^2(x, \xi)\, d\xi \,.\, \int_a^b L_\xi^2[y_m - y]\, d\xi \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(y_m^{(k-1)} - y^{(k-1)})^2 &\leqslant \int_a^b \Gamma_{m, k-1}^2(x, \xi)\, d\xi \,.\, \int_a^b L_\xi^2[y_m - y]\, d\xi,
\end{aligned} \tag{55}$$

où

$$\lim_{m=\sim} \int_a^b \Gamma_{ml}^2(x, \xi)\, d\xi = 0 \qquad (l=0, 1, \ldots, k-1) \tag{56}$$

Les relations (52), (55) et (56) donnent, à l'aide des inégalités de Cauchy et de Bouniakowsky, le résultat cherché:

$$\begin{aligned}
y_m - y &= s_{m0} \sqrt{\int_a^b \alpha_m^2\, d\xi} \to 0 \\
y_m' - y' &= s_{m1} \sqrt{\int_a^b \alpha_m^2\, d\xi} \to 0 \qquad (m \to \infty) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_m^{(k-1)} - y^{(k-1)} &= s_{m, k-1} \sqrt{\int_a^b \alpha_m^2\, d\xi} \to 0,
\end{aligned} \tag{57}$$

où s_{ml} sont fonctions bornées de m.

En particulier on peut prendre pour φ_i et Φ_i les fonctions fondamentales du problème:

$$M_x[z] = \lambda z$$
$$U_0[z] = 0$$
$$U_1[z] = 0$$
$$\cdots\cdots$$
$$U_{k-1}[z] = 0,$$

pourvu que le problème (18) — (19) soit self-adjoint.

§ 7. Sur la convergence des dérivées supérieures de la solution approchée y_m

Supposons que les dérivées

$$\frac{d^r a_1(x)}{dx^r}, \frac{d^r a_2(x)}{dx^r}, \ldots, \frac{d^r a_k(x)}{dx^r}, \frac{d^r f(x)}{dx^r} \tag{58}$$

existent dans l'intervalle (a, b) et vérifient la condition de Lipschitz d'ordre δ.

Prenons pour les fonctions $\varphi_i(x)$ polynômes et pour les coefficients B_i des nombres constants.

Alors, comme on sait de la théorie de l'approximation par polynômes, l'égalité (50) peut être précisée comme il suit:

$$\int_a^b \alpha_m^2\, dx = \frac{M(m)}{m^{r+\delta}}, \tag{59}$$

où la fonction $M(m)$ est bornée. Il s'ensuit que la suite des égalités (57) peut être prolongée par différentiation jusqu'à l'ordre $k+r-1$:

$$\begin{aligned} y_m^{(k)} - y^{(k)} &= \frac{M_k(m)}{m^{r-1+\delta}} \\ y_m^{(k+1)} - y^{(k+1)} &= \frac{M_{k+1}(m)}{M^{r-2+\delta}} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m^{(k+r-1)} - y^{(k+r-1)} &= \frac{M_{k+r-1}(m)}{m^{\delta}}, \end{aligned} \tag{60}$$

les $M_i(m)$ étant fonctions bornées de m. Une analyse plus détaillée permet d'augmenter de $\frac{1}{3}$ l'exposant de m dans tous les dénominateurs de ces formules.

Dans le cas, où les fonctions $\Phi_i(x)$ font un système complet de polynômes, on a évidemment:

$$M_x[y_m - y] = \frac{M(m)}{m^{r+\delta}}, \tag{61}$$

ce qui donne:

$$\frac{d}{dx} M_x[y_m - y] = \frac{M_1(m)}{m^{r-1+\delta}}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} M_x[y_m - y] = \frac{M_2(m)}{m^{r-2+\delta}} \tag{62}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^r}{dx^r} M_x[y_m - y] = \frac{M_r(m)}{m^{\delta}}$$

les $M_j(m)$ étant fonctions bornées de m. De (61) et (62) on déduit de nouveau, à l'aide de (57), les égalités du type (60).

§ 8. L'intégration approchée par sommes trigonométriques

A cause de l'usage très répandu de sommes trigonométriques dans divers problèmes de physique et de sciences appliquées, une attention spéciale est due au cas de représentation approchée de la solution y par la somme trigonométrique. Une telle représentation s'impose naturellement dans le cas des conditions frontières du type:

$$\begin{aligned} y(a) &= y(b) \\ y'(a) &= y'(b) \\ &\cdots\cdots \\ y^{(k-1)}(a) &= y^{(k-1)}(b) \end{aligned} \tag{63}$$

permettant le prolongement continu et périodique des fonctions $y, y', \ldots, y^{(k-1)}$ au delà de l'intervalle (a, b). Alors on peut poser:

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_{2h-1}(x) = \cos 2h\pi \frac{x-a}{b-a}, \quad \varphi_{2h}(x) = \sin 2h\pi \frac{x-a}{b-a} \tag{64}$$

$$(h = 1, 2, 3, \ldots)$$

Dans le cas plus spécial, où l'ordre k de l'équation différentielle est pair et où les conditions (19) ont la forme:

$$\begin{aligned} y(a) = y(b) \quad &= 0 \\ y''(a) = y''(b) \quad &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y^{(k-2)}(a) = y^{(k-2)}(b) &= 0, \end{aligned} \tag{65}$$

on peut poser

$$\varphi_h(x) = \sin h\pi \frac{x-a}{b-a} \tag{66}$$

$$(h = 1, 2, 3, \ldots)$$

et la somme y_m sera celle des sinus seuls.

Pour que les dérivées supérieures $y_m^{(k-1+i)}$ $(i=1,2,\ldots,r)$ convergent, il faut et il suffit qu'on ait:

$$\left.\begin{array}{l} y^{(k)}(a)=y^{(k)}(b) \\ y^{(k+1)}(a)=y^{(k+1)}(b) \\ \cdots\cdots\cdots \\ y^{(k+r-1)}(a)=y^{(k+r-1)}(b) \end{array}\right. \qquad (64_a)$$

dans le cas (63) et

$$\left.\begin{array}{l} y^{(k)}(a)=y^{(k)}(b) \qquad =0 \\ y^{(k+2)}(a)=y^{(k+2)}(b) \qquad =0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{\left(k+2\left[\frac{r}{2}\right]\right)}(a)=y^{\left(k+2\left[\frac{r}{2}\right]\right)}(b)=0 \end{array}\right. \qquad (66_a)$$

dans le cas (65).

En général, les conditions (64_a), resp. (66_a), n'ont pas lieu. Alors, dans le cas (63), il suffit de poser par exemple:

$$\begin{gathered} y_m(x)=(x-a)^k(x-b)^k\,[a_{-r}^{(m)}+ \\ +a_{-r+1}^{(m)}(x-a)^2(x-b)+\ldots+a_{-1}^{(m)}(x-a)^r(x-b)^{r-1}]+ \\ +a_0^{(m)}\varphi_0(x)+a_1^{(m)}\varphi_1(x)+\ldots+a_m^{(m)}\varphi_m(x), \end{gathered} \qquad (67)$$

où les fonctions $\varphi_i(x)$ sont celles de (64). La somme (67) vérifie toutes les conditions (63). Quant aux conditions (64_a), elle doivent être changées en celles de la forme:

$$\left.\begin{array}{l} a_{-r}^{(m)}= \\ a_{-r}^{(m)}\alpha_1+a_{-r+1}^{(m)}= \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{-r}^{(m)}\alpha_{r-1}+a_{-r+1}^{(m)}\alpha_{-r-2}+\ldots+a_{-1}^{(m)}= \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{fonctions linéaires de} \\ a_0^{(m)},\ a_1^{(m)},\ldots,\ a_n^{(m)}\end{array} \qquad (68)$$

construites conformément à l'équation (18) et aux conditions (63). En ajoutant aux équations (68) le système (46) on obtiendra un système de $m+r+1$ équations linéaires qui déterminent (uniquement en général) les coefficients

$$a_{-r}^{(m)},\ a_{-r+1}^{(m)},\ldots,\ a_{-1}^{(m)},\ a_0^{(m)},\ a_1^{(m)},\ldots,\ a_m^{(m)},$$

car le déterminant de ce système est différent de zéro pour $\lambda=0$. La somme y_m ainsi définie converge, de même que ses dérivées jusqu'à l'ordre $k+r-1$-ème vers y et ses dérivées correspondantes.

On peut appliquer des considérations analogues dans le cas (65), si l'on prend

$$\begin{gathered} y_m=(x-a)^k(x-b)^k\Big[a^{(m)}_{-2\left[\frac{r}{2}\right]}+a_{-2\left[\frac{r}{2}\right]+1}(x-a)^2(x-b)^2+\ldots+ \\ +a_{-1}(x-a)^{2\left[\frac{r}{2}\right]}(x-b)^{2\left[\frac{r}{2}\right]}\Big]+a_0^{(m)}\varphi_0(x)+a_1^{(m)}\varphi_1(x)+\ldots+a_m^{(m)}\varphi_m(x), \end{gathered} \qquad (69)$$

où les fonctions $\varphi_h(x)$ sont celles de (66).

§ 9. La méthode de moindres carrés et l'algorithme variationnel

Si l'on prend en particulier

$$M_x[\ ]=L_x[\ ],$$

les équations (46) revêtissent alors la forme:

$$\int_a^b \{L_x[y_m]-f(x)\}\, L_x[\varphi_i]\, dx=0$$

$$(i=0, 1, \ldots, m)$$

Ce système est équivalent à la condition:

$$\int_a^b \{L_x[y_m]-f(x)\}^2 dx=\min$$

et nous arrivons à la méthode de moindres carrés de M. N. Kryloff. De deux voies diverses de construire les fonctions $\varphi_i(x)$ et $\Phi_i(x)$ il reste dans ce cas, en général, une seule: celle du choix immédiat des fonctions $\varphi_i(x)$ formant un système complet aux conditions frontières (19); car la résolution des équations

$$M_x[\varphi_i]=\Phi_i(x) \qquad (i=0, 1, 2, \ldots)$$

aux conditions frontières susdites est un problème pas plus facile que le problème (18)—(19). Dans le cas, où le problème (18)—(19) est self-adjoint et que l'opérateur $M_x[\,]$ l'est aussi, l'on peut ordinairement en déterminant les fonctions $\varphi_i(x)$ comme fonctions fondamentales du problème:

$$M_x[\varphi]=\lambda\varphi$$
$$U_0[\varphi]=0$$
$$U_1[\varphi]=0$$
$$\cdots\cdots$$
$$U_{k-1}[\varphi]=0,$$

réduire le système (46) à la condition de minimum d'une somme du type:

$$\int_a^b\left\{\left[y_m^{\left(\frac{k}{2}\right)}\right]^2+A_1(x)\left[y_m^{\left(\frac{k}{2}-1\right)}\right]^2+\ldots+A_{\frac{k}{2}}y_m^2-2f(x)y_m\right\}dx+\sum_{i\,j=1}^{m}h_{ij}a_i\ldots$$

ce qui correspond à l'idée fondamentale de *W.* Ritz (algorithme variationnel).

§ 10. La résolution approchée des équations intégrales linéaires

Des considérations analogues peuvent être appliquées à l'équation intégrale linéaire:

$$L_x[y]=y(x)-\lambda\int_a^b K(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi=f(x)$$

On a le résultat suivant:

La somme

$$y_m(x)=a_0^{(m)}\varphi_0(x)+a_1^{(m)}\varphi_1(x)+\ldots+a_m^{(m)}\varphi_m(x),$$

où les fonctions $\varphi_i(x)$ forment un système complet et les coefficients sont définis par les équations

$$\int_a^b L_x[y_m]\,\varphi_i(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,\varphi_i(x)\,dx \tag{70}$$

$$(i=0,1,\ldots,m),$$

vérifie l'égalité:

$$\lim_{m=\sim}\int_c^x y_m(x)\,dx=\int_c^x y(x)\,dx \tag{71}$$

$$(a\leqslant c\leqslant x\leqslant b)$$

pour toute valeur non-singulière du paramètre λ. Si les fonctions $K(x,\xi)$, $f(x)$ ont de plus les dérivées p-ièmes avec le module de continuité $\omega(\Lambda x)$, on peut obtenir le résultat plus précis:

$$y(x)=y_m(x)+\frac{M\omega\left(\frac{1}{m}\right)}{m^{p-1}}, \tag{72}$$

où M est une fonction bornée de m.

Pour la démonstration de la première partie de cette assertion, introduisons les fonctions:

$$u_m(x)=y_m(x)-y(x)$$

Alors de (70) on obtient:

$$\int_a^b L_x[u_m]\,\varphi_i(x)\,dx=0 \tag{73}$$

$$(i=0,1,\ldots,m)$$

et

$$\int_a^b L_x[u_m]\,y_m(x)\,dx=0 \tag{74}$$

En définissant les paramètres $b_i^{(m)}$ de la différence

$$\varepsilon_m(x)=y(x)-[b_0^{(m)}\varphi_0(x)+b_1^{(m)}\varphi_1(x)+\ldots+b_m^{(m)}\varphi_m(x)] \tag{75}$$

par la condition:

$$\int_a^b \varepsilon_m^2(x)\,dx=\min,$$

on aura:

$$\lim_{m=\sim}\int_a^b \varepsilon_m^2(x)\,dx=0$$

Des égalités (73), (74) et (75) on déduit aisément:

$$\int_a^b L_x[u_m]\left\{L_x[u_m]+\lambda\eta_m(x)+\varepsilon_m(x)\right\}dx=0,$$

ce qui donne à l'aide de l'inégalité de Bouniakowsky:

$$\int_a^b L_x^2[u_m]\,dx\leqslant 2\int_a^b\left\{\varepsilon_m^2(x)+\lambda^2\eta_m^2(x)\right\}dx \tag{76}$$

D'autre part, on a évidemment:

$$u_m=L_x[u_m]+\lambda\int_a^b\Gamma(x,\xi;\lambda)\,L_\xi[u_m]\,d\xi \tag{77}$$

où $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ est le noyau résolvant de notre problème, ou bien:

$$\eta_m(x) = \int_a^b L_\xi[u_m]\, \Gamma(x, \xi; \lambda)\, d\xi \tag{78}$$

Déterminons encore les facteurs $C_i^{(m)}(x)$ dans l'expression

$$\gamma_m(a, \xi; \lambda) = \Gamma(x, \xi; \lambda) - C_0^{(m)}(x)\, \varphi_0(\xi) - C_1^{(m)}(x)\, \varphi_1(\xi) - \ldots - C_m^{(m)}(x)\, \varphi_m(\xi)$$

par la condition:

$$\int_a^b \gamma_m^2(x, \xi; \lambda)\, d\xi = \min$$

et donnons à l'égalité (78) à l'aide de (73), la forme:

$$\eta_m(x) = \int_a^b L_\xi[u]\, \gamma_m\, d\xi,$$

ou bien la forme:

$$u_m = L_x[u_m] + \lambda \int_a^b L_\xi[u_m]\, \gamma_m\, d\xi, \tag{79}$$

d'où l'on déduit:

$$\eta_m^2(x) \leqq \int_a^b \gamma_m^2\, d\xi \int_a^b L_\xi^2[u_m]\, d\xi,$$

et définitivement, à l'aide de l'inégalité (76), pour m assez grand:

$$\eta_m^2(x) \leqq \frac{2 \int_a^b \gamma_m^2\, d\xi \int_a^b \varepsilon_m^2(\xi)\, d\xi}{1 - 2\lambda^2 \int_a^b \gamma_m^2\, d\xi}$$

Par conséquent on a:

$$\lim_{m=\infty} \eta_m(x) = 0$$

et l'on déduit sans peine de (79) et (78) l'égalité:

$$\lim_{m=\infty} \int_c^x u_m\, dx = 0$$

équivalente à l'égalité (71).

Il est presque évident que la fonction:

$$Y_m(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, y_m(\xi)\, d\xi + f(x)$$

satisfait à l'égalité:

$$\lim_{m=\infty} Y_m(x) = y(x)$$

c'est à dire est une solution approchée convergente de notre équation intégrale.

§ 11. Nombres caractéristiques et fonctions fondamentales

On a pour la somme (45) l'égalité suivante:

$$y_m(x) = \frac{\int_a^b G(x, \xi)\, \delta_m(\xi)\, d\xi}{\Delta_m(\lambda)}, \tag{80}$$

où

$$= \begin{vmatrix} 0, & \Phi_0(\xi), & \Phi_1(\xi), & \ldots, & \Phi_m(\xi) \\ \int_a^b f(x)\, \Phi_0(x)\, dx, & \int_a^b L_x[\varphi_0]\, \Phi_0(x)\, dx, & \int_a^b L_x[\varphi_1]\, \Phi_0(x)\, dx, & \ldots, & \int_a^b L_x[\varphi_m]\, \Phi_0(x)\, dx \\ \int_a^b f(x)\, \Phi_1(x)\, dx, & \int_a^b L_x[\varphi_0]\, \Phi_1(x)\, dx, & \int_a^b L_x[\varphi_1]\, \Phi_1(x)\, dx, & \ldots, & \int_a^b L_x[\varphi_m]\, \Phi_1(x)\, dx \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_a^b f(x)\, \Phi_m(x)\, dx, & \int_a^b L_x[\varphi_0]\, \Phi_m(x)\, dx, & \int_a^b L_x[\varphi_1]\, \Phi_m(x)\, dx, & \ldots, & \int_a^b L_x[\varphi_m]\, \Phi_m(x)\, dx \end{vmatrix} \tag{81}$$

En introduisant la notation:

$$(x, \xi; \lambda) = \frac{1}{\Delta_m(\lambda)} \cdot \begin{vmatrix} 0, & \varphi_0(x), & \varphi_1(x), & \ldots, & \varphi_m(x) \\ \Phi_0(\xi), & \int_a^b L_x[\varphi_0]\, \Phi_0(x)\, dx, & \int_a^b L_x[\varphi_1]\, \Phi_0(x)\, dx, & \ldots, & \int_a^b L_x[\varphi_m]\, \Phi_0(x)\, dx \\ \Phi_1(\xi), & \int_a^b L_x[\varphi_0]\, \Phi_1(x)\, dx, & \int_a^b L_x[\varphi_1]\, \Phi_1(x)\, dx, & \ldots, & \int_a^b L_x[\varphi_m]\, \Phi_1(x)\, dx \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi_m(\xi), & \int_a^b L_x[\varphi_0]\, \Phi_m(x)\, dx, & \int_a^b L_x[\varphi_1]\, \Phi_m(x)\, dx, & \ldots, & \int_a^b L_x[\varphi_m]\, \Phi_m(x)\, dx \end{vmatrix} \tag{82}$$

on obtient:

$$y_m(x) = \int_a^b \Gamma_m(x, \xi; \lambda)\, f(\xi)\, d\xi \tag{83}$$

On peut démontrer que la fonction (82) satisfait aux égalités:

$$\lim_{m=\infty} \int_a^b [\Gamma^{(l)} - \Gamma_m^{(l)}]^2\, d\xi = 0$$

$$(l = 0, 1, \ldots, k-1)$$

$$\lim_{m=\infty} \int_a^\xi [\Gamma^{(l)} - \Gamma_m^{(l)}]\, d\xi = 0$$

et que ses nombres caractéristiques $\lambda_i^{(m)}$ convergent vers les nombres caractéristiques λ_i de la fonction Γ.

En développant la fonction (82) suivant les puissances de $\lambda - \lambda_i^{(m)}$:

$$y_m(x) = \frac{\Psi_{im}^{(0)}(x)}{(\lambda - \lambda_i^{(m)})^h} + \frac{\Psi_{im}^{(1)}(x)}{(\lambda - \lambda_i^{(m)})^{h-1}} + \ldots$$

on démontre que les fonctions

$$\lim_{m=\infty} \Psi_{im}(x)$$

existent et représentent les fonctions fondamentales du problème (18) — (19).

§ 12. L'inégalité de M. J. Hadamard et ses conséquences

Soit

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

une forme quadratique positive définie. Alors on a l'inégalité suivante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \leqslant \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{k+1,\,k+1} & a_{k+1,\,k+2} & \dots & a_{k+1,\,n} \\ a_{k+2,\,k+1} & a_{k+2,\,k+2} & \dots & a_{k+2,\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,\,k+1} & a_{n,\,k+2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (84)$$

$$(0 < k < n)$$

Nous la citerons dans la suite comme celle de M. J. Hadamard, qui l'a donnée pour le cas particulier très important $k=1$.

Les théorèmes suivants présentent des conséquences presque immédiates de l'inégalité de M. J. Hadamard:

1. Le déterminant infini:

$$A = \begin{vmatrix} 1+a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n}, & \dots \\ a_{21}, & 1+a_{22}, & \dots, & a_{2n}, & \dots \\ a_{31}, & a_{32}, & \dots, & a_{3n}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

converge absolument ainsi que ses mineurs $\frac{\partial A}{\partial a_{ij}}$ si les séries

$$\sum |a_{ii}|, \qquad \sum |a_{ij}|^2$$

sont convergentes; l'ensemble des mineurs $\frac{\partial A}{\partial a_{ij}}$ est borné.

2. Le déterminant infini:

$$A' = \begin{vmatrix} e^{-a_{11}}(1+a_{11}), & e^{-a_{11}}a_{12}, & e^{-a_{11}}a_{13}, & \dots \\ e^{-a_{11}}a_{21}, & e^{-a_{11}}(1+a_{22}), & e^{-a_{11}}a_{23}, & \dots \\ e^{-a_{11}}a_{31}, & e^{-a_{11}}a_{32}, & e^{-a_{11}}(1+a_{33}), & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+b_{11}, & b_{12}, & b_{13}, & \dots \\ b_{21}, & 1+b_{22}, & b_{23}, & \dots \\ b_{31}, & b_{32}, & 1+b_{33}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

converge absolument ainsi que ses mineurs $\frac{\partial A'}{\partial b_{ij}}$, si la série

$$\sum |a_{ij}|^2$$

est convergente; l'ensemble des mineurs $\frac{\partial A'}{\partial b_{ij}}$ est borné.

§ 13. Application de fonctions orthogonales

Prenons le système (34)

$$\Phi_0(x),\ \Phi_1(x),\ \Phi_2(x),\ldots \tag{85}$$

comme un système complet de fonctions orthogonales et normales dans l'intervalle (a, b). Alors les équations (46) donnent:

$$\begin{aligned} y_m(x) &= \frac{\delta_m(x,\lambda)}{\Delta_m(\lambda)} \\ y_m'(x) &= \frac{\delta_m'(x,\lambda)}{\Delta_m(\lambda)} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_m^{(k-1)}(x) &= \frac{\delta^{(k-1)}(x,\lambda)}{\Delta_m(\lambda)}, \end{aligned} \tag{86}$$

où

$$\Delta_m(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+b_{00}, & b_{01}, & b_{02}, & \ldots, & b_{0m} \\ b_{10}, & 1+b_{11}, & b_{12}, & \ldots, & b_{1m} \\ b_{20}, & b_{21}, & 1+b_{22}, & \ldots, & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m0}, & b_{m1}, & b_{m2}, & \ldots, & 1+b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$\delta_m(x,\lambda) = \begin{vmatrix} 0, & \varphi_0(x), & \varphi_1(x), & \ldots, & \varphi_m(x) \\ \int_a^b f\Phi_0\,dx, & 1+b_{00}, & b_{01}, & \ldots, & b_{0m} \\ \int_a^b f\Phi_1\,dx, & b_{10}, & 1+b_{11}, & \ldots, & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_a^b f\Phi_m\,dx, & b_{m0}, & b_{m1}, & \ldots, & 1+b_{mm} \end{vmatrix} \tag{87}$$

$$\delta_m^{(l)}(x,\lambda) = \frac{d^l}{dx^l}\delta_m(x,\lambda) \qquad (l = 1, 2, \ldots, k-1)$$

$$b_{ij} = \lambda\int_a^b N_x[\varphi_j]\,\Phi_i(x)\,dx = \lambda\int_a^b\int_a^b N_x[G(x,\xi)]\,\Phi_j(\xi)\Phi_i(x)\,d\xi\,dx \tag{88}$$
$$(i, j = 0, 1, \ldots, m)$$

La formule (88) démontre la convergence de la série

$$\sum b_{ij}^2$$

Il s'ensuit que les limites des déterminants

$$\Delta_{1m}(\lambda) = \begin{vmatrix} e^{-b_{00}}(1+b_{00}), & e^{-b_{00}} b_{01}, & \ldots, & e^{-b_{00}} b_{0m} \\ e^{-b_{11}} b_{10}, & e^{-b_{11}}(1+b_{11}), & \ldots, & e^{-b_{11}} b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{-b_{mm}} b_{m0}, & e^{-b_{mm}} b_{m1}, & \ldots, & e^{-b_{mm}}(1+b_{mm}) \end{vmatrix}$$

$$\delta_{1m}^{(l)}(x,\lambda) = \begin{vmatrix} 0, & \varphi_0^{(l)}(x), & \varphi_1^{(l)}(x), & \ldots, & \varphi_m^{(l)}(x) \\ e^{-b_{00}} \int_a^b f \Phi_0\, dx, & e^{-b_{00}}(1+b_{00}), & e^{-b_{00}} b_{01}, & \ldots, & e^{-b_{00}} b_{0m} \\ e^{-b_{11}} \int_a^b f \Phi_1\, dx, & e^{-b_{11}} b_{10}, & e^{-b_{11}}(1+b_{11}), & \ldots, & e^{-b_{11}} b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{-b_{mm}} \int_a^b f \Phi_m dx, & e^{-b_{mm}} b_{m0}, & e^{-b_{mm}} b_{m1}, & \ldots, & e^{-b_{mm}}(1+b_{mm}) \end{vmatrix}$$

existent.

En donnant aux formules (86) la forme:

$$y_m^{(l)}(x) = \sum_{i=0}^{m} A_{im} \varphi_i^{(l)}(x) \qquad (l = 0, 1, \ldots, k-1)$$

on peut démontrer l'existence des limites A_i des nombres A_{im} et la validité des développements suivants:

$$y(x) = A_0\varphi_0(x) + A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) + \ldots$$
$$y'(x) = A_0\varphi_0'(x) + A_1\varphi_1'(x) + A_2\varphi_2'(x) + \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(k-1)}(x) = A_0\varphi_0^{(k-1)}(x) + A_1\varphi_1^{(k-1)}(x) + A_2\varphi_2^{(k-1)}(x) + \ldots$$

Les coefficients A_i représentent la solution du système d'une infinité d'équations linéaires suivantes:

$$\int_a^b L_x[A_0\varphi_0 + A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 + \ldots]\, \Phi_i(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, \Phi_i(x)\, dx$$

$$(i = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

En approfondissant l'idée esquissée ci-dessus, l'auteur a montré comment on peut s'affranchir de la théorie des équations intégrales et construire une théorie tout à fait indépendante du problème (18) — (19).

On peut aussi se servir des fonctions $\varphi_i(x)$ satisfaisant aux conditions d'orthogonalité généralisée:

$$\int_a^b L_x[\varphi_l]\, M_x[\varphi_h]\, dx = 0 \qquad (l > h)$$

$$\int_a^b L_x[\varphi_l]\, M_x[\varphi_l]\, dx = 1$$

Pour construire un tel système de fonctions $\varphi_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ il faut en général résoudre une série de systèmes d'équations linéaires resp. à une, à deux, . . ., à m inconnues. Dans ce cas on a

$$y(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots$$

$$y'(x) = \alpha_0\varphi_0'(x) + \alpha_1\varphi_1'(x) + \alpha_2\varphi_2'(x) + \ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(k-1)}(x) = \alpha_0\varphi_0^{(k-1)}(x) + \alpha_1\varphi_1^{(k-1)}(x) + \alpha_2\varphi_2^{(k-1)}(x) + \ldots,$$

où

$$\alpha_i = \int_a^b f(x)\, M_x[\varphi_i]\, dx$$

§ 14. Système d'équations différentielles linéaires

On peut indiquer d'une infinité de manières un système de fonctions

$$\begin{matrix} \Phi_{10} & \Phi_{11} & \Phi_{12} & \ldots \\ \Phi_{20} & \Phi_{21} & \Phi_{22} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Phi_{k0} & \Phi_{k1} & \Phi_{k2} & \ldots \end{matrix} \tag{89}$$

satisfaisant à la condition:

$$\lim_{m=\infty} \min \sum_{j=1}^{k} \int_a^b [F_j - t_1\Phi_{j1} - t_2\Phi_{j2} - \ldots - t_m\Phi_{jm}]^2\, dx = 0 \tag{90}$$

où F_j est une fonction arbitraire de carré intégrable dans l'intervalle (a, b).

Soit

$$\begin{matrix} \varphi_{1n} \\ \varphi_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_{kn} \end{matrix}$$

la solution d'un système quelconque d'équations différentielles

$$M_{1x}[\varphi_n] = \frac{d\varphi_{1n}}{dx} + B_{11}\varphi_{1n} + B_{12}\varphi_{2n} + \ldots + B_{1k}\varphi_{kn} = \Phi_{1n}$$

$$M_{2x}[\varphi_n] = \frac{d\varphi_{2n}}{dx} + B_{21}\varphi_{1n} + B_{22}\varphi_{2n} + \ldots + B_{2k}\varphi_{kn} = \Phi_{2n} \tag{91}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$M_{kx}[\varphi_n] = \frac{d\varphi_{kn}}{dx} + B_{k1}\varphi_{1n} + B_{k2}\varphi_{2n} + \ldots + B_{kk}\varphi_{kn} = \Phi_{kn}$$

vérifiant les conditions:

$$U_1[\varphi_n] = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(1)} \varphi_{jn}(a) + \sum_{j=1}^{k} \beta_j^{(1)} \varphi_{jn}(b) = 0$$

$$U_2[\varphi_n] = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(2)} \varphi_{jn}(a) + \sum_{j=1}^{k} \beta_j^{(2)} \varphi_{jn}(b) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{92}$$

$$U_k[\varphi_n] = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k)} \varphi_{jn}(a) + \sum_{j=1}^{k} \beta_j^{(k)} \varphi_{jn}(b) = 0$$

Si l'on prend par ex.:

$$B_{ij} = \text{const},$$

le problème (91) — (92) peut être alors effectivement résolu par les fonctions élémentaires.

La solution du problème général:

$$L_{1x}[z] = M_{1x}[z] - \lambda N_{1x}[z] = f_1(x)$$

$$L_{2x}[z] = M_{2x}[z] - \lambda N_{2x}[z] = f_2(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \tag{93}$$

$$L_{kx}[z] = M_{kx}[z] - \lambda N_{kx}[z] = f_k(x)$$

$$U_1[z] = 0$$

$$U_2[z] = 0$$

$$\cdots \tag{94}$$

$$U_k[z] = 0,$$

où

$$N_{jx}[z] = A_{j1}(x) z_1 + A_{j2}(x) z_2 + \ldots + A_{jk}(x) z_k$$

$$(j = 1, 2, \ldots, k),$$

peut être présentée approximativement sous la forme:

$$z_{1m} = a_0^{(m)} \varphi_{10} + a_1^{(m)} \varphi_{11} + \ldots + a_m^{(m)} \varphi_{1m}$$

$$z_{2m} = a_0^{(m)} \varphi_{20} + a_1^{(m)} \varphi_{21} + \ldots + a_m^{(m)} \varphi_{2m}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{95}$$

$$z_{km} = a_0^{(m)} \varphi_{k0} + a_1^{(m)} \varphi_{k1} + \ldots + a_m^{(m)} \varphi_{km},$$

où les coefficients

$$a_0^{(m)}, \quad a_1^{(m)}, \ldots, \; a_m^{(m)}$$

satisfont aux équations linéaires:

$$\int_a^b \sum_{j=1}^{k} \left\{ L_{jx}[z_m] - f_j(x) \right\} \Phi_{ji}(x)\, dx = 0 \tag{96}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m)$$

A condition que les dérivée $z_j^{(p)}$ existent et soient bornées, on a:

$$|z_j - z_{jm}| < \frac{M}{m^{p-\frac{2}{3}}} \tag{97}$$

où M ne dépend pas de m. L'inégalité (97) démontre que la fonction z_{jm} converge vers z_j et indique l'ordre de l'erreur $|z_j - z_{jm}|$.

Si le système (89) vérifie les conditions d'orthogonalité:

$$\int_a^b (\Phi_{1i}\Phi_{1j} + \Phi_{2i}\Phi_{2j} + \ldots + \Phi_{ki}\Phi_{kj})\, dx = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j), \end{cases}$$

on peut prendre au lieu de (95) les séries:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_0\varphi_{10} + a_1\varphi_{11} + a_2\varphi_{12} + \ldots \\ z_2 &= a_0\varphi_{20} + a_1\varphi_{21} + a_2\varphi_{22} + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_k &= a_0\varphi_{k0} + a_1\varphi_{k1} + a_2\varphi_{k2} + \ldots \end{aligned}$$

dont les coefficients se déterminent par les conditions:

$$\int_a^b \sum_{j=1}^{k} \left\{ L_{jx}[z] - f_j(x) \right\} \Phi_{ji}(x)\, dx = 0$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots)$$

La démonstration de ces résultats se fait à l'aide de la théorie des équations intégrales linéaires ou bien à l'aide de déterminants infinis.

ЗМІСТ

Вид. № 14. Ф. п. 720×1100 мм. Вага п. 49,6 кгр. Друк. зн. 53.600. Друк. арк. 10¼. Здано до друкарні 2/III. 1932 р.
Дозволено до друку 17/IX. 1932 р.

Ціна 7 крб. 50

УКРАЇНСЬКА АКАДЕМІЯ НАУК
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ACADÉMIE DES SCIENCES D'UKRAINE
INSTITUT MATHÉMATIQUE

Акад. М. КРАВЧУК

ЗАСТОСУВАННЯ СПОСОБУ МОМЕНТІВ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ТА ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

ВИПУСК II

M. KRAWTCHOUK

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES DIFFÉRENTIELLES ET INTÉGRALES PAR LA MÉTHODE DES MOMENTS

FASCICULE II

ВИДАВНИЦТВО УКРАЇНСЬКОЇ АКАДЕМІЇ НАУК
КИЇВ—1936—KYIV

УКРАЇНСЬКА АКАДЕМІЯ НАУК
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ACADÉMIE DES SCIENCES D'UKRAINE
INSTITUT MATHEMATIQUE

Акад. М. КРАВЧУК

ЗАСТОСУВАННЯ СПОСОБУ МОМЕНТІВ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ТА ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

ВИПУСК II

M. KRAWTCHOUK

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES DIFFÉRENTIELLES ET INTÉGRALES PAR LA MÉTHODE DE MOMENTS

FASCICULE II

ВИДАВНИЦТВО УКРАЇНСЬКОЇ АКАДЕМІЇ НАУК
КИЇВ—1935—KYIV

Бібліографічний опис цього видання вміщено в „Літопису українського друку", „Картковому репертуарі" та інших покажчиках Української книжної палати.

Відповід. редактор акад. О. Д. Граве
Літредактор і учений коректор І. Коган
Техкер С. Ліпов

Друкується з розпорядження Української Академії Наук.
Неодмінний секретар акад. О. В. Палладін

З друкарні-літографії Української Академії Наук. Київ

7-2-37

РОЗДІЛ V

Існування та форма розв'язок деяких лінійних рівнянь з частинними похідними

§ 1. Лінійне рівняння з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними еліптичного типу

Назвімо через $g(x, y; \xi, \eta)$ Green'ову функцію рівняння

$$\Delta_{xy} z(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F(x, y) \tag{1}$$

в будьякому обмеженому обсязі S на площі xy, за будьякої лінійної однорідної умови на межі s цього обсягу. Ця умова може напр. бути така:

$$z/_s = 0, \tag{2}$$

де знак $/s$ показує, що змінні x, y треба міняти вздовж контура s. Коли напр. також через s назвемо довжину дуги цього контура, раховану від якоїсь точки (вважаємо контур за односпійний) і коли рівняння цього контура є

$$x = \varphi(s)$$

$$y = \psi(s),$$

то рівність (2) має вигляд:

$$z[\varphi(s), \psi(s)] = 0$$

Загальніше замість умови (2) в задачі (1)—(2) може фігурувати умова:

$$\alpha(s) z/_s + \beta(s) \frac{\partial z}{\partial n} \Big/_s = 0 \tag{2_a}$$

де $\alpha(s)$ та $\beta(s)$ є якісь функції від s, а $\frac{\partial z}{\partial n}$ означає похідну по нормалі до кривої s.

Як відомо, функція $g(x, y; \xi, \eta)$ має вигляд:

$$g(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln r + j(x, y; \xi, \eta),$$

де (2)

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$$

а функція $j(x, y; \xi, \eta)$ справджує рівняння:

$$\Delta_{xy} j(x, y; \xi, \eta) = \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 j}{\partial y^2} = 0$$

скрізь, крім, очевидно, точки:

$$x = \xi;\ y = \eta,$$

де вона стає нескінченно-великою; крім того, функція $g(x, y; \xi, \eta)$ справджує ту саму умову на межі обсягу S, що й функція $z(x, y)$, отже умову (2):

$$g/_S = g[\varphi(s), \psi(s); \xi, \eta] = 0 \tag{3}$$

або умову (2_a):

$$\alpha(s) g/_S + \beta(s) \frac{\partial g}{\partial n} = 0 \tag{3_a}$$

при довільному положенні точки (ξ, η) в обсязі S.

Коли відома функція $g(x, y; \xi, \eta)$, то розв'язка задачі (1) — (2) або відповідно задачі (1) — (2_a) дається формулою:

$$z(x, y) = \iint\limits_{(S)} g(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta) d\xi d\eta \tag{4}$$

Візьмімо тепер задачу загальнішу:

$$M_{xy}[z] = F(x, y) \tag{5}$$

$$u[z] = 0, \tag{6}$$

де

$$M_{xy}[z] = \Delta_{xy} z + B_1(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + B_2(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + B_3(x, y) z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + B_1 \frac{\partial z}{\partial x} + B_2 \frac{\partial z}{\partial y} + B_3 z = 0 \tag{7}$$

$$u[z] = \alpha(s) z/_S + \beta(s) \frac{\partial z}{\partial n}\Big/_S \tag{8}$$

і припустімо, що відома Green'ова функція $g(x, y; \xi, \eta)$ задачі

$$\Delta_{xy} z = F(x, y) \tag{8_a}$$

$$u[z] = 0$$

Щоб виявити, чи задача (5) — (6) має розв'язку і чи вона означена, розгляньмо поруч неї систему рівнянь:

$$z = -\iint\limits_{(S)} g(x, y; \xi, \eta) [B_1(\xi, \eta) \frac{\partial z}{\partial \xi} + B_2(\xi, \eta) \frac{\partial z}{\partial \eta} + B_3(\xi, \eta) z(\xi, \eta)] d\xi d\eta + \iint\limits_{(S)} g(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta) d\xi d\eta \tag{9}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\iint\limits_{(S)} \frac{\partial g(x, y;\ \xi, \eta)}{\partial x} [B_1(\xi, \eta)\frac{\partial z}{\partial \xi} + B_2(\xi, \eta)\frac{\partial z}{\partial \eta} +$$

$$+ B_3(\xi, \eta) z(\xi, \eta)] d\xi d\eta + \iint\limits_{(S)} \frac{\partial g(x, y;\ \xi, \eta)}{\partial x} F(\xi, \eta)\, d\xi d\eta \tag{9}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\iint\limits_{(S)} \frac{\partial g(x, y;\ \xi, \eta)}{\partial y} [B_1(\xi, \eta)\frac{\partial z}{\partial \xi} + B_2(\xi, \eta)\frac{\partial z}{\partial y} +$$

$$+ B_3(\xi, \eta) z(\xi, \eta)]\, d\xi d\eta + \iint\limits_{(S)} \frac{\partial g(x, y;\ \xi, \eta)}{\partial y} F(\xi, \eta)\, d\xi d\eta$$

та рівняння:

$$u(x, y) = -\iint\limits_{(S)} h(x, y;\ \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi d\eta + \tag{10}$$

$$+ \iint\limits_{(S)} h(x, y;\ \xi, \eta)\, F(\xi, \eta)\, d\xi d\eta,$$

де

$$h(x, y;\ \xi, \eta) = B_1(x, y)\frac{\partial g(x, y;\ \xi, \eta)}{\partial x} + B_2(x, y)\frac{\partial g(x, y;\ \xi, \eta)}{\partial y} + \tag{11}$$

$$+ B_3(x, y)\, g(x, y;\ \xi, \eta)$$

Ядро інтегрального рівняння (10) — особливе, але цю особливість можна знищити ітерацією.

Нехай рівняння (10) має одну-єдину розв'язку $u(x, y)$. Тоді розв'язка системи (9) виглядає так:

$$z = -\iint\limits_{(S)} g(x,y;\ \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \iint\limits_{(S)} g(x, y;\ \xi, \eta)\, F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$\frac{dz}{dx} = -\iint\limits_{(S)} \frac{\partial g(x, y;\ \xi, \eta)}{\partial x} u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \iint\limits_{(S)} \frac{\partial g(x, y;\ \xi, \eta)}{dx} F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{12}$$

$$\frac{dz}{dy} = -\iint\limits_{(S)} \frac{\partial g(x, y;\ \xi, \eta)}{\partial y} u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \iint\limits_{(S)} \frac{\partial g(x, y;\ \xi, \eta)}{\partial y} F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

у чому легко пересвідчитися через безпосереднє підставлення виразів (12) у рівності (9) та використання залежності (10).

Нехай розв'язне ядро інтегрального рівняння (10) є $H(x, y;\ \xi, \eta)$. Тоді з (10) виводимо:

$$u(x, y) = \iint\limits_{(S)}\iint\limits_{(S)} H(x, y; p, q)\, h(p, q;\ \xi, \eta)\, F(\xi, \eta)\, dp\, dq\, d\xi\, d\eta \tag{13}$$

або так:

$$u(x, y) = \iint\limits_{(S)} H_1(x, y;\ \xi, \eta)\, F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{14}$$

ввівши зазначення

$$H_1(x, y;\ \xi, \eta) = \iint\limits_{(S)} (x, y;\ p, q)\, h(p, q;\ \xi, \eta)\, dp\, dq,$$

Тоді рівності (12) перепишуться так:

$$z=\iint\limits_{(S)}\left[g(x,y;\ \xi,\eta)-\iint\limits_{(S)}g(x,y;\ p,q)H_1(p,q;\ \xi,\eta)\,dp\,dq\ \right]F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\iint\limits_{(S)}\left[\frac{\partial g(x,y;\ \xi,\eta)}{\partial x}-\iint\limits_{(S)}\frac{\partial g(x,y;\ p,q)}{\partial x}H_1(p,q;\ \xi,\eta)\,dp\,dq\right]F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \tag{15}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\iint\limits_{(S)}\left[\frac{\partial g(x,y;\ \xi,\eta)}{\partial y}-\iint\limits_{(S)}\frac{\partial g(x,y;\ p,q)}{\partial y}H_1(p,q;\ \xi,\eta)\,dp\,dq\right]F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

або нарешті так:

$$z=\iint\limits_{(S)}G(x,y;\ \xi,\eta)F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\iint\limits_{(S)}\frac{\partial G(x,y;\ \xi,\eta)}{\partial x}F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \tag{17}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\iint\limits_{(S)}\frac{\partial G(x,y;\ \xi,\eta)}{\partial y}F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

при зазначенні

$$G(x,y;\ \xi,\eta)=g(x,y;\ \xi,\eta)-\iint\limits_{(S)}g(x,y;p,q)H_1(p,q;\ \xi,\eta)\,dp\,dq \tag{16}$$

Доведімо тепер еквівалентність систем (5)—(6) та (9).

Для цього досить зауважити, що система (8_a) еквівалентна системі:

$$z=\iint\limits_{(S)}g(x,y;\ \xi,\eta)F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\iint\limits_{(S)}\frac{\partial g(x,y;\ \xi,\eta)}{\partial x}F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \tag{18}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\iint\limits_{(S)}\frac{\partial g(x,y;\ \xi,\eta)}{\partial y}F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

якщо напр. припустити у функції $F(\xi,\eta)$ існування суцільних перших похідних, що ми далі робитимемо.

Замінивши тут $F(\xi,\eta)$ через

$$-B_1(\xi,\eta)\frac{\partial z}{\partial \xi}-B_2(\xi,\eta)\frac{\partial z}{\partial \eta}-B_3(\xi,\eta)\,z(\xi,\eta),$$

виведемо (9) як висновок із (5)—(6), і навпаки. Для останнього, очевидно, досить вимагати, крім суцільності перших похідних функцій $F(x,y)$,— снування та суцільності перших похідних функцій

$$B_1(x,y),\ B_2(x,y),\ B_3(x,y),$$

що далі скрізь і робитимемо.

Отже доведено для задачі (5) — (6) існування Green-ової функції. Це є функція $G(x, y; \xi, \eta)$ формул (16) та (17).

§ 2. Властивості функції $G(x, y; \xi, \eta)$

Як показує формула (16), функція $G(x, y; \xi, \eta)$ має таку саму логарифмічну особливість у точці $x=\xi$, $y=\eta$, як і функція $g(x, y; \xi, \eta)$. Щодо похідних

$$\frac{\partial G}{\partial x}, \quad \frac{\partial G}{\partial y},$$

то в тій самій точці $x=\xi$, $y=\eta$ вони стають нескінченними так само, як функція

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$$

Покажімо, що $G(x, y; \xi, \eta)$, як функція від x, y, — справджує рівність (6) — скрізь на контурі s, крім, розуміється, точки (ξ, η).

Справді, з рівностей (17), через лінійну комбінацію, дістаємо:

$$\alpha(s)\, z/_s+\beta(s)\frac{\partial z}{\partial n}\Big/_s=\iint\limits_{(S)}\left[\alpha(s)\, G/_s+\beta(s)\frac{\partial G}{\partial n}\Big/_s\right]F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

Звідси, через незалежність функції G від завдання функції $F(x, y)$, легко виводимо:

$$\alpha(s) G/_s+\beta(s)\frac{\partial G}{\partial n}\Big/_s=0 \tag{6_a}$$

Доведімо ще, що функція $G(x, y; \xi, \eta)$ справджує рівняння

$$M_{xy}[G]=0$$

скрізь, за винятком розуміється точки

$$x=\xi, \quad y=\eta$$

Для цього передусім із рівності (16) через диференціювання та лінійну комбінацію виводимо:

$$\Delta_{xy} G(x, y; \xi, \eta)=\Delta_{xy}\, g(x, y; \xi, \eta)-\Delta_{xy}\iint\limits_{(S)} g(x, y; p, q)\, H(p, q; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

або:

$$\begin{aligned}\Delta_{xy} G(x, y; \xi, \eta) &= -H_1(x, y; \xi, \eta)= \\ &= \iint\limits_{(S)} H(x, y; p, q)\, h(p, q; \xi, \eta)\, dp\, dq\end{aligned} \tag{19}$$

Так само:

$$\begin{aligned}B_1(x, y)\frac{\partial \xi}{\partial x}+B_2(x, y)\frac{\partial \xi}{\partial y}+B_3(x, y)\, G &= \\ = h(x, y; \xi, \eta)-\iint\limits_{(S)} h(x, y; p, q\cdot H_1(p, q; \xi, \eta)\, dp\, dq\end{aligned} \tag{20}$$

Додаймо (19) та (20); дістаємо

$$M_{xy}[G(x, y;\ \xi, \eta)] = h(x, y;\ \xi, \eta)\, H_1(x, y;\ \xi, \eta) - \\ - \iint\limits_{(S)} h(x, y;\ p, q)\, H_1(p, q;\ \xi, \eta)\, dp\, dq \tag{21}$$

З другого боку, завівши вираз (14) до рівності (10), маємо

$$\iint\limits_{(S)} H_1(x, y; \xi, \eta)\, F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \\ = - \iint\limits_{(S)} \iint\limits_{(S)} h(x, y; p, q)\, H_1(p, q; \xi, \eta)\, F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \\ + \iint\limits_{(S)} h(x, y; \xi, \eta)\, F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

Звідси, через довільність функції $F(\xi, \eta)$, виводимо:

$$h(x, y; \xi, \eta) - H_1(x, y; \xi, \eta) - \iint\limits_{(S)} h(x, y; p, q)\, H_1(p, q; \xi, \eta)\, dp\, dq = 0$$

Отож рівність (21) переписується остаточно так:

$$M_{xy}[G] = 0,$$

що й малося довести.

§ 3. Загальне лінійне рівняння з частиними похідними еліптичного типу з двома незалежними змінними

Нехай відома і є єдина розв'язка якогось еліптичного рівняння

$$M_{xy}[z] = \underset{k,0}{B}(x,y)\frac{\partial^k z}{\partial x^k} + \underset{k-1,1}{B}(x,y)\frac{\partial^k z}{\partial x^{k-1}\partial y} + \cdots + \underset{1,k-1}{B}(x,y)\frac{\partial^k z}{\partial x\, \partial y^{k-1}} + \\ + \underset{0,k}{B}(x,y)\frac{\partial^k z}{\partial y^k} + \underset{k-1,0}{B}(x,y)\frac{\partial^{k-1} z}{\partial x^{k-1}} + \underset{k-2,1}{B}(x,y)\frac{\partial^{k-1} z}{\partial x^{k-2}\partial y} + \cdots + \\ + \underset{0,k-1}{B}(x,y)\frac{\partial^{k-1} z}{\partial y^{k-1}} + \cdots + \underset{1,0}{B}(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + \underset{0,1}{B}(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} + \\ + \underset{0,0}{B}(x,y) z = F(x, y) \tag{22}$$

в обсязі S за всякої функції $F(x, y)$ та за певних лінійних однорідних на контурі s обсягу S умов, що включають функцію z та її похідні порядків менших k:

$$U_l[z] = 0 \tag{23}$$

$$(l = 0, 1, \ldots)$$

інакше кажучи, нехай відома Green'ова функція $G(x, y; \xi, \eta)$ задачі (22) – (23). Вона справджує рівність:

$$M_{xy}[G] = 0 \tag{22$_a$}$$

в обсязі S скрізь, крім точки

$$x = \xi, y = \eta$$

та

$$U_l[G]=0 \tag{23_a}$$

на контурі s — скрізь, крім теж точки

$$x=\xi; y=\eta$$

Сама функція G та її частинні похідні по x та по y — усі до порядку $k-3$ включно є суцільні функції змінних

$$x, y; \xi, \eta$$

Те саме стосується й дальших похідних порядків $k-2$ та $k-1$, але виняток дає точка

$$x=\xi, y=\eta,$$

де ці похідні стають нескінченними. При тому похідні $(k-2)$-го порядку мають нескінченність такого характеру, як функція $\ln r$, а похідні $(k-1)$-го порядку — такого, як функція $\frac{1}{r}$, де

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

Нарешті існують формули:

$$\left.\begin{aligned} z(x,y) &= \iint\limits_{(S)} G(x,y;\xi,\eta)\,F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\ \frac{\partial^h z(x,y)}{\partial x^g\,\partial y^{h-g}} &= \iint\limits_{(S)} \frac{\partial^h G(x,y;\xi,\eta)}{\partial x^g\,\partial y^{h-g}}\,F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$\left(\begin{matrix} h=1,2,\ldots,k-1 \\ g\leqslant h \end{matrix}\right)$$

Навпаки, з формул (24), за певних вимог щодо диференціальних властивостей функції $F(x,y)$, випливає рівність (22), а також рівності (23).

Візьмімо задачу загальнішу. Нехай

$$\begin{aligned} N_{xy}[z] = {} & \underset{k-1,0}{a}(x,y)\frac{\partial^{k-1}z}{\partial x^{k-1}} + \underset{k-2,1}{a}(x,y)\frac{\partial^{k-1}z}{\partial x^{k-2}\,\partial y} + \cdots + \underset{0,k-1}{a}(x,y)\frac{\partial^{k-1}z}{\partial y^{k-1}} + \\ & + \underset{k-2,0}{a}(x,y)\frac{\partial^{k-2}z}{\partial x^{k-2}} + \underset{k-3,1}{a}(x,y)\frac{\partial^{k-2}z}{\partial x^{k-3}\,\partial y} + \cdots + \underset{0,k-2}{a}(x,y)\frac{\partial^{k-2}z}{\partial y^{k-2}} + \\ & + \underset{1,0}{a}(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + \underset{0,1}{a}(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} + \underset{0,0}{a}(x,y)z \end{aligned}$$

$$L_{xy}[z]=M_{xy}[z]-\lambda N_{xy}[z].$$

Розгляньмо задачу:

$$L_{xy}[z]=F(x,y) \tag{25}$$

$$U_l[z]=0 \tag{26}$$

$$(l=0,1,\ldots)$$

Покажімо, що система (25) — (26) має одну-єдину розв'язку завжди, за винятком певних дискретних числових значень параметра λ, та збудуймо її Green'ову функцію.

Для цього розгляньмо систему рівнянь:

$$z(x,y)=\lambda\iint\limits_{(S)} G(x,y;\xi,\eta)\,.\,N_{\xi\eta}[z]\,d\xi\,d\eta+\iint\limits_{(S)} G(x,y;\xi,\eta)\,F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

$$\frac{\partial^h z(x,y)}{\partial x^g\,\partial y^{h-g}}=\lambda\iint\limits_{(S)}\frac{\partial^h G(x,y;\xi,\eta)}{\partial x^g\,\partial y^{h-g}}N_{\xi\eta}[z]\,d\xi d\eta+$$
$$+\iint\limits_{(S)}\frac{\partial^h G(x,y;\xi,\eta)}{\partial x^g\,\partial y^{h-g}}F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \tag{27}$$
$$\begin{pmatrix}h=1,2,\ldots,k-1\\ g\leqslant h\end{pmatrix}$$

та рівняння

$$u_{(x,y)}=\lambda\iint\limits_{(S)} N_{xy}[G]\,u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta+$$
$$+\iint\limits_{(S)} N_{xy}[G]\,F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \tag{28}$$

де $G(x,y;\xi,\eta)$ є Green'ова функкція задачі (22)—(23).

Хоч ядро інтегрального рівняння (28) — особливе, але цю особливість можна знищити ітерацією. Знаємо, що завжди, за винятком особливих значень параметра λ, рівняння (28) має одну-єдину розв'язку $u(x,y)$. Тоді розв'язку системи (27) можна подати в формі:

$$z(x,y)=\lambda\iint\limits_{(S)} G(x,y;\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta+$$
$$+\iint\limits_{(S)} G(x,y;\xi,\eta)\;F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \tag{29}$$

$$\frac{\partial^h z(x,y)}{\partial x^g\,\partial y^{h-g}}=\lambda\iint\limits_{(S)}\frac{\partial^h G(x,y;\xi,\eta)}{\partial x^g\,\partial y^{h-g}}u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta+$$
$$+\iint\limits_{(S)}\frac{\partial^h G(x,y;\xi,\eta)}{\partial x^g\,\partial y^{h-g}}F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \tag{30}$$
$$\begin{pmatrix}h=1,2,\ldots,k-1\\ g\leqslant h\end{pmatrix}$$

як пересвідчимося, завівши вирази (30) у рівняння (27) та використавши залежність (28).

Назвавши через $H(x,y;\xi,\eta;\lambda)$ розв'язне ядро інтегрального рівняння (28), маємо:

$$u(x,y)=\iint\limits_{(S)}\iint\limits_{(S)} H(x,y;\;p,q;\;\lambda)\,h(p,q;\xi,\eta)F(\xi,\eta)dp\,dq\,d\xi\,d\eta$$

або

$$u(x,y)=\iint\limits_{(S)} H_1(x,y;\;\xi,\eta;\;\lambda)\,F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta, \tag{31}$$

де

$$H_1(x,y;\xi,\eta;\lambda)=\iint\limits_{(S)} H(x,y;\;p,q;\;\lambda)\,h(p,q;\;\xi,\eta)\,dp\,dq \tag{32}$$

Тоді рівності (30) дістають остаточно вигляд:

$$z(x, y) = \iint\limits_{(S)} F(x, y;\ \xi, \eta;\ \lambda) F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$\frac{\partial^h z(x, y)}{\partial x^g\, \partial y^{h-g}} = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial^h \Gamma(x, y;\ \xi, \eta)}{\partial x^g\, \partial y^{h-g}} F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{33}$$

$$\begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, k-1 \\ g = 0, 1, \ldots, h \end{pmatrix},$$

де

$$\Gamma(x, y;\ \xi, \eta;\ \lambda) = G(x, y;\ \xi, \eta) - \lambda \iint\limits_{(S)} G(x, y;\ p, q) H_1(p, q;\ \xi, \eta;\ \lambda)\, dp\, dq \tag{34}$$

Не трудно довести еквівалентність систем (27)—(28) та (25)—(26) за певних умов щодо існування та суцільності похідних функцій $F(x, y)$ та коефіцієнтів оператора $L_{xy}[\ \ ]$ (пор. § 1). Так доведено існування Green-ової функції у задачі (25)—(26) при всіх значеннях параметра λ, за винятком деяких особливих. Ця функція є $\Gamma(x, y;\ \xi, \eta;\ \lambda)$ у рівності (34).

§ 4. Властивості функції $\Gamma(x, y;\ \xi, \eta;\ \lambda)$

Як показує формула (34), функція $\Gamma(x, y;\ \xi, \eta)$ та її похідні мають розриви того самого характеру, що й розриви функції $G(x, y;\ \xi, \eta)$ та відповідних її похідних. Усі ці розриви є тільки в точці

$$x = \xi, y = \eta$$

Покажімо, що $\Gamma(x, y;\ \xi, \eta;\ \lambda)$, як функція від x, y, справджує всі рівності (26):

$$U_l[\Gamma] = 0 \tag{35}$$

$$(l = 0, 1, \ldots)$$

скрізь на контурі s, за винятком розуміється точки

$$x = \xi,\ y = \eta,$$

якщо в рівностях (26) фігурують похідні порядку вищого за $k-3$.

Для цього досить застосувати оператор $U_l[\ \ ]$ до обох сторін рівності (34); дістаємо

$$U_l[\Gamma] = U_l[G] - \lambda \iint\limits_{(S)} U_l[G(x, y; p, q)] H_1(p, q;\ \xi, \eta;\ \lambda)\, dp\, dq$$

А що

$$U_l[G] = 0,$$

то звідси й випливає (35).

Так само можна довести, що $\Gamma(x, y;\ \xi, \eta;\ \lambda)$ справджує рівняння

$$L_{xy}[\Gamma] = 0 \tag{36}$$

скрізь в обсязі S, за винятком, розуміється, точки

$$x = \xi,\ y = \eta$$

Для цього нагадаймо рівність (22) і застосуймо до обох сторін рівності (34) оператори $M_{xy}[\ ]$ та $N_{xy}[\ ]$:

$$M_{xy}[\Gamma(x,y;\ \xi,\eta;\ \lambda)] = -\lambda H_1(x,y;\ \xi,\eta;\lambda)$$

$$N_{xy}[\Gamma(x,y;\ \xi,\eta;\ \lambda)] = N_{xy}[G] - \lambda \iint\limits_{(S)} N_{xy}[G(x,y;\ p,q)]\, H_1(p,q;\ \xi,\eta;\ \lambda)\, dp\, dq$$

Лінійно скомбінувавши ці рівності, дістанемо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} L_{xy}[\Gamma] = N_{xy}[G] - H_1(x,y;\ \xi,\eta;\ \lambda) - \\ -\lambda \iint\limits_{(S)} N_{xy}[G(x,y;\ p,q)]\, H_1(p,q;\ \xi,\eta;\ \lambda)\, dp\, dq \end{aligned} \tag{37}$$

З другого боку, завівши вираз (31) до рівності (28), дістанемо:

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{(S)} H_1(x,y;\ \xi,\eta;\ \lambda)\, F(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = \\ &= \lambda \iint\limits_{(S)} \iint\limits_{(S)} N_{xy}[G(x,y;\ p,q)]\, H_1(p,q;\xi,\eta;\lambda)\, F(\xi,\eta)\, dp\, dq\, d\xi\, d\eta + \\ &+ \iint\limits_{(S)} N_{xy}[G]\, F(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta; \end{aligned}$$

а що функція $F(\xi,\eta)$ довільна, то звідси виводимо:

$$N_{xy}[G] - H_1 - \lambda \iint\limits_{(S)} N_{xy}[G(x,y;\ p,q)]\, H_1(p,q;\ \xi,\eta;\ \lambda)\, dp\, dq.$$

Це зводить рівність (37) на таку:

$$L_{xy}[\Gamma] = 0,$$

що й малося довести.

§ 5. Випадок, коли кількість незалежних змінних довільна

Ті самі результати переносяться на еліптичні рівняння з частинними похідними при будькількох незалежних змінних. Напр. у випадку трьох незалежних змінних, коли

$$M_{xyz}[v] = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + B_1 \frac{\partial v}{\partial x} + B_2 \frac{\partial v}{\partial y} + B_3 \frac{\partial v}{\partial z} + B_4 v$$

$$N_{xyz}[v] = A_1 \frac{\partial v}{\partial x} + A_2 \frac{\partial v}{\partial y} + A_3 \frac{\partial v}{\partial z} + A_4 u$$

$$U[v] = \alpha v + \beta \frac{\partial v}{\partial n},$$

шукаємо функцію $v(x,y,z)$ в певному замкненому просторовому обсязі τ так, щоб у ньому скрізь вона справджувала вимогу:

$$L_{xyz}[v] = M_{xyz}[v] - \lambda N_{xyz}[v] = F(x,y,z) \tag{38}$$

а на його поверхні σ — вимогу:

$$U[v] = 0 \tag{39}$$

Ця задача дає розв'язку для всіх значень параметра λ, за винятком деяких особливих, якщо тільки є означена задача

$$M_{xyz}[v] = F(x, y, z) \tag{40}$$

$$U_l[v] = 0 \tag{41}$$

Знаючи Green-ову функцію $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ задачі (40)—(41), легко знаходимо Green-ову функцію $\Gamma(x,y,z; \xi,\eta,\zeta)$ задачі (38)—(39). Обидві вони мають одну-єдину особливість, а саме в точці

$$x = \xi; \; y = \eta; \; z = \zeta \tag{42}$$

стають нескінченно-великими, як функція

$$\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}$$

Крім того, існує рівність:

$$U(\Gamma) = 0$$

скрізь на поверхні σ, крім точки (42), та

$$L_{xyz}[\Gamma] = 0$$

скрізь в обсязі γ, крім точки (42). Нарешті, за певних широких умов система (40)—(41) еквівалентна системі:

$$\begin{gathered}
v(x, y, z) = \iiint\limits_{(\gamma)} \Gamma F(\xi,\eta,\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \\
\frac{\partial v}{\partial x} = \iiint\limits_{(\gamma)} \frac{\partial \Gamma}{dx} F(\xi,\eta,\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \\
\frac{\partial v}{\partial y} = \iiint\limits_{(\gamma)} \frac{\partial \Gamma}{\partial y} F(\xi,\eta,\zeta)\, \partial\xi\, d\eta\, d\zeta \\
\frac{\partial v}{\partial z} = \iiint\limits_{(\gamma)} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} F(\xi,\eta,\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta
\end{gathered} \tag{43}$$

та системі:

$$\begin{gathered}
v(x. y, z) = \lambda \iiint\limits_{(\gamma)} G \cdot N_{\xi\eta\zeta}[v]\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + \iiint\limits_{(\gamma)} GF(\xi,\eta,\zeta)\, d\xi\, d\eta\, dz \\
\frac{\partial v}{\partial x} = \lambda \iiint\limits_{(\gamma)} \frac{\partial G}{\partial z} N_{\xi\eta\zeta}[v]\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + \iiint\limits_{(\gamma)} \frac{\partial G}{\partial x} F(\zeta,\eta,\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \\
\frac{\partial v}{\partial y} = \lambda \iiint\limits_{(\gamma)} \frac{dG}{\partial y} N_{\xi\eta\zeta}[v]\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + \iiint\limits_{(\gamma)} \frac{\partial G}{\partial v} F(\xi,\eta,\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \\
\frac{dv}{\partial z} = \lambda \iiint\limits_{(\gamma)} \frac{\partial G}{\partial z} N_{\xi\eta\zeta}[v]\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + \iiint\limits_{(\gamma)} \frac{\partial G}{\partial z} F(\xi,\eta,\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta
\end{gathered} \tag{44}$$

§ 6. Деякі окремі випадки

1. Коли задача

$$M_{xy}[z] = F(x, y)$$

параграфа 1 самоспряжена, то

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0$$

і система (9) заміняється одним рівнянням:

$$z = \iint\limits_{(S)} g(x, y;\ \xi, \eta) B_3(\xi, \eta) z(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \iint\limits_{(S)} g(x, y;\ \xi, \eta) F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

Нетрудно довести, що тоді Green'ова функція задачі — симетрична, тобто не міняється від заміни аргументів x, y на ξ, η й навпаки.

2. Рівняння

$$\Delta\Delta z + B_{30}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + B_{21}\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + B_{12}\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + B_{03}\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} +$$

$$+ B_{20}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B_{11}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + B_{02}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + B_{10}\frac{\partial z}{\partial x} +$$

$$+ B_{01}\frac{\partial z}{\partial y} + B_{00} z = F(x, y),$$

де

$$\Delta\Delta z = \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4},$$

що є узагальненням бігармонічного:

$$\Delta\Delta z = P(x, y),$$

має Green'ову функцію в вигляді:

$$\Gamma(x, y;\ \xi, \eta) = r^2 \ln r + j(x, y;\ \xi, \eta)$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$$

при чому всі похідні функції $j(x, y;\ \xi, \eta)$ до 4-го порядку включно — суцільні в обсязі S, якщо суцільні коефіціенти рівняння.

В найважливішому — самоспряженому — випадку буде:

$$B_{30} = B_{21} = B_{12} = B_{03} = 0$$

$$B_{10} = B_{01} = 0.$$

3. Самоспряжене еліптичне рівняння 2-го порядку з 3 незалежними змінними, коли комплекс старших членів є

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

виглядає так:

$$\Delta v + Bv = F(x, y, z)$$

Для нього система (44) замінюється одним інтегральним рівнянням:

$$v(x, y, z) = \lambda \iiint\limits_{(\tau)} GB(\xi, \eta, \zeta) v(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + \iiint\limits_{(\tau)} GF(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

§ 7. Повна система многочленів, що анулюються на сторонах даного прямокутника

Для наближеного роз'язання задачі (25)—(26) нам далі потрібні будуть системи функцій:

$$
\begin{array}{lll}
\varphi_{00}(x,y), & \varphi_{10}(x,y), & \varphi_{20}(x,y) \\
\varphi_{01}(x,y), & \varphi_{11}(x,y), & \varphi_{21}(x,y) \\
\varphi_{02}(x,y) & \varphi_{12}(x,y), & \varphi_{22}(x,y) \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
\tag{45}
$$

можливо простої будови, що справджують граничні умови (26) — точно або наближено, з достатньою точністю.

Припустімо зразу, що обсяг S є прямокутник, обмежений лініями

$$x=a, \quad x=b$$

$$y=\alpha, \quad y=\beta,$$

і що умова (26) має вигляд:

$$z/_S=0,$$

тобто

$$z(a,y)=0; \quad z(b,y)=0$$

$$z(x,\alpha)=0; \quad z(x,\beta)=0$$

Тоді систему функцій (45) можна вибрати так:

$$\varphi_{00}(x,y)=(x-a)(x-b)(y-\alpha)(y-\beta)$$

$$\varphi_{ij}(x,y)=\varphi_{00}(x,y)\,x^i\,y^j$$

$$\begin{pmatrix} i=1,\ 2,\ 3,\dots \\ j=1,\ 2,\ 3,\dots \end{pmatrix}$$

Для доводу звернімо увагу на те, що всякий многочлен від x та y ступеня, не вищого за m-й щодо кожного з цих змінних, можна подати в формі:

$$z_m(x,y)=(x-a)(x-b)P_m(x,y)+(x-a)A_m(y)+B_m(y), \tag{46}$$

де $P_m(x,y)$, $A_m(y)$, $B_m(y)$ є многочлени: перший від x та y, а другий і третій від y — усі ступеня не вищого за m щодо кожного зі змінних. Щоб у цьому пересвідчитися, досить поділити $z_m(x,y)$ на $x-a$. Очевидно, остача не залежатиме від x; зазначмо її через $B_m(y)$, а частку через $C_m(x,y)$. Поділімо тепер многочлен $C_m(x,y)$ на $x-b$ та зазначмо знов остачу, що не залежатиме очевидно від x, через $A_m(y)$, а частку через $P_m(x,y)$. Тоді й прийдемо до рівності (46).

Так само очевидно, можна $z_m(x,y)$ подати в вигляді:

$$z_m(x,y)=(y-\alpha)(y-\beta)\,Q_m(x,y)+(y-\alpha)D_m(x)+\varepsilon_m(x) \tag{46'}$$

де $Q_m(x,y)$, $D_m(x)$, $\varepsilon_m(x)$ — многочлени — перший від x та y, а другий та третій від y — усі ступеня не вищого за m щодо кожного зі змінних.

Нехай $z_m(x, y)$ є многочленне наближення якоїсь функції $z(x, y)$ в обсязі, що обіймає прямокутник S, причому на сторонах того прямокутника ця функція є нуль.

Нехай похибки рівностей

$$z_m(x, y) \approx z(x, y)$$

$$\frac{\partial z_m}{\partial x} \approx \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z_m}{\partial y} \approx \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_m}{\partial y^2} = \Delta z_m \approx \Delta z$$

є на всьому прямокутнику S, включаючи сторони, відповідно не більші за

$$\varepsilon_m, \ \varepsilon_{xm}, \ \varepsilon_{ym}, \ \eta_m \tag{46''}$$

Тоді з рівностей (46) та (46′) маємо:

$$|z_m(a, y)| = |B_m(y)| \leqslant \varepsilon_m$$

$$|z_m(b, y)| = |(b-a) \ A_m(y) + B_m(y)| \leqslant \varepsilon_m$$

$$|z_m(x, \alpha)| = |\varepsilon_m(x)| \leqslant \varepsilon_m$$

$$|z_m(x, \beta)| = |(\beta - \alpha) D_m(x) + \varepsilon_m(x)| \leqslant \varepsilon_m$$

Із цих нерівностей випливає, що в межах зміни y від α до β многочлени $A_m(y)$ та $B_m(y)$ справджують нерівності:

$$|A_m(y)|, \ |B_m(y)| \leqslant \frac{2\varepsilon_m}{b-a} + \varepsilon_m \tag{47}$$

Так само в межах зміни x від a до b буде:

$$|D_m(x)|, \ |\varepsilon_m(x)| \leqslant \frac{2\varepsilon_m}{\beta - \alpha} + \varepsilon_m \tag{47'}$$

Далі, на основі теореми про maximum модуля похідної многочлена дістаємо з нерівностей (47) та (47′) в заданому прямокутнику та на його сторонах:

$$|A'_m(y)|, \ |B'_m(y)| \leqslant m \left(\frac{2\varepsilon_m}{b-a} + \varepsilon_m\right) \tag{48}$$

$$|D'_m(x)|, \ |\varepsilon'_m(x)| \leqslant m \left(\frac{2\varepsilon_m}{\beta - \alpha} + \varepsilon_m\right) \tag{48'}$$

$$|A''_m(y)|, \ |B''_m(y)| \leqslant m^2 \left(\frac{2\varepsilon_m}{\beta - \alpha} + \varepsilon_m\right) \tag{49}$$

$$|D''_m(x)|, \ |\varepsilon''_m(x)| \leqslant m^2 \left(\frac{2\varepsilon_m}{\beta - \alpha} + \varepsilon_m\right) \tag{49'}$$

Отже за умови, що функція z двічі суцільно диференціюється по обох змінних, при чому другі похідні, напр., справджують Lipschitz-ові умови будьякого порядку, виходить, що при необмеженому зростанні числа m функції

$$\left.\begin{matrix} A_m(y),\ A'_m(y),\ A''_m(y) \\ B_m(y),\ B'_m(y),\ B''_m(y) \end{matrix}\right\} \quad \text{на інтервалі } [\alpha, \beta]$$

$$\left.\begin{matrix} D_m(x),\ D'_m(x),\ D''_m(x) \\ E_m(x),\ E'_m(x),\ E''_m(x) \end{matrix}\right\} \quad \text{на інтервалі } [a, b]$$

одностайно йдуть до нуля.

Звідси висновок, що наближено можна покласти

$$z \approx (x-a)(x-b) P_m(x, y) \tag{50}$$

або

$$z \approx (y-\alpha)(y-\beta) Q_m(x, y) \tag{50'}$$

з похибками відповідно не більшими за

$$(b-a+3)\varepsilon_m \quad \text{та} \quad (\beta-\alpha+3)\varepsilon_m \tag{51}$$

При цьому похибки наближених рівностей

$$\frac{\partial z}{\partial x} \approx (y-\alpha)(y-\beta)\frac{\partial Q_m}{\partial x} \approx (x-a)(x-b)\frac{\partial P_m}{\partial x} + (2x-a-b) P_m(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \approx (x-a)(x-b)\frac{\partial P_m}{\partial y} \approx (y-\alpha)(y-\beta)\frac{\partial Q_m}{\partial y} + (2y-\alpha-\beta) Q_m(x, y)$$

$$\Delta_{xy} z \approx \Delta_{xy}\left\{(y-\alpha)(y-\beta) Q_m\right\} \approx \Delta_{xy}\left\{(x-a)(x-b) P_m\right\}$$

ідуть теж до нуля при необмеженому зростанні m.

Представмо тепер многочлен $P_m(x, y)$ у формі

$$P_m(x, y) = (y-\alpha)(y-\beta) q_m(x, y) + (y-\alpha) d_m(x) + l_m(x)$$

цілком на зразок формули (46′)

Отже маємо:

$$z_m(x, y) = (x-a)(x-b)(y-\alpha)(y-\beta) q_m(x) +$$
$$+ (x-a)(x-b)(y-\alpha) d_m(x) + (x-a(x-b) l_m(x) +$$
$$+ (x-a) A_m(y) + B_m(y)$$

Звідси

$$0 = z_m(x, \alpha) = (x-a)(x-b) l_m(x) + (x-a) A_m(\alpha) + B_m(\alpha)$$

$$0 = z_m(x, \beta) = (x-a)(x-b)\left[(\beta-\alpha) d_m(x) + l_m(x)\right] +$$
$$+ (x-a) A_m(\beta) + B_m(\beta)$$

Отже вирази

$$(x-a)(x-b) l_m(x)$$

$$(x-a)(x-b) d_m(x)$$

на всьому інтервалі $[a, b]$ одностайно йдуть до нуля при необмеженому зростанні m; докладніше, вони мають той самий порядок малости, що й число ε_m, або вищий.

Отож остаточно наближена рівність

$$z(x, y) \approx (x-a)(x-b)(y-\alpha)(y-\beta)\, q_m(x, y) \tag{52}$$

має того самого порядку похибку, що й рівність

$$z(x, y) \approx z_m(x, y),$$

або й вищого. Отже многочленне наближення функції $z(x, y)$ за допомогою самих многочленів типу (45′):

$$(x-a)(x-b)(y-\alpha)(y-\beta)\, x^i y^j$$
$$(i, j = 0, 1, 2, \ldots)$$

при належному його доборі, має щонайменше похибку того самого порядку і стільки само раз диференціюється, як і найкраще многочленне наближення. Зокрема коли функції $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ та $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ суцільні і справджують Lipschitz-ову умову якогось порядку, то його можна диференціювати двічі й утворене таким способом наближення виразу Δz буде збіжне.

Коли вважати, що функція $z(x, y)$ має вищезазначені диференціальні властивості тільки в прямокутнику

$$\begin{aligned} x = a;\ x = b; \\ y = \alpha;\ y = \beta; \end{aligned} \tag{52′}$$

та на його обводі, тоді, як відомо, нерівності (48), (48′), (42) та (49′) доводиться замінити такими:

$$|A'_m(y)|,\ |B'_m(y)| \leqslant m^2 \left(\frac{2\varepsilon_m}{b-a} + \varepsilon_m\right) \tag{53}$$

$$|D'_m(x)|,\ |E_m(x)| \leqslant m^2 \left(\frac{2\varepsilon_m}{\beta-\alpha} + \varepsilon_m\right) \tag{53′}$$

$$|A''_m(y)|,\ |B''_m(y)| \leqslant m^4 \left(\frac{2\varepsilon_m}{b-a} + \varepsilon_m\right) \tag{54}$$

$$|D''_m(x)|,\ |E''_m(x)| \leqslant m^4 \left(\frac{2\varepsilon_m}{\beta-\alpha} + \varepsilon_m\right) \tag{54′}$$

Отже виходить, що при наближенні функції $z(x, y)$ виразом (52) можна забезпечити одностайну збіжність тільки перших похідних по x та по y цього наближення.

Щодо других похідних, то в цьому випадку їх збіжність теж забезпечена, але неодностайна, бо, як відомо, нерівності (53), (53′), (54) та (54′) можна замінити й такими:

$$|A'_m(y)|,\ |B'_m(y)| \leqslant \frac{m}{\sqrt{(y-\alpha)(\beta-y)}} \left(\frac{2\varepsilon_m}{b-a} + \varepsilon_m\right) \tag{55}$$

$$|D'_m(x)|, \; |E'_m(x)| \leqslant \frac{m}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\left(\frac{2\varepsilon_m}{\beta-\alpha}+\varepsilon_m\right) \tag{55'}$$

$$|A''_m(y)|, \; |B''_m(y)| \leqslant \frac{m^2}{(y-\alpha)(\beta-y)}\left(\frac{2\varepsilon_m}{b-a}+\varepsilon_m\right) \tag{56}$$

$$|D''_m(x)|, \; |E''_m(x)| \leqslant \frac{m^2}{(x-a)(b-x)}\left(\frac{2\varepsilon_m}{\beta-\alpha}+\varepsilon_m\right) \tag{56'}$$

Як бачимо з цього, одностайність збіжності других похідних може порушуватися на межах нашого обсягу S.

Систему многочленів (45′) називатимемо повною щодо функцій $z(x, y)$, які задані в прямокутнику

$$x=a; \; x=b;$$
$$y=\alpha; \; y=\beta$$

та анулюються на його обводі.

§ 8. Повна система многочленів, що анулюються на сторонах даного опуклого многокутника

Узагальнімо результат попереднього параграфа на будьякі многокутні обсяги. Нехай опуклий многокутник на площі обмежено прямими:

$$\begin{aligned} y &= a_0x+b_0 \\ y &= a_1x+b_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y &= a_hx+b_h \end{aligned} \tag{57}$$

Нехай $z_m(x, y)$ є будьякий многочлен ступеня не вищого за m щодо кожного зі змінних x та y. Можемо очевидно переписати його так:

$$z_m(x, y)=(y-a_0x-b_0)\,u_m^{(0)}(x, y)+v_m^{(0)}(x), \tag{58}$$

де $v_m(x)$ є остача від ділення $z_m(x, y)$ на $y-a_0x-b_0$. Коли вважати, що $z_m(x, y)$ е наближення якоїсь суцільної функції $z(x, y)$, що анулюється на сторонах многокутника (57), і назвати похибку рівності

$$z(x, y) \approx z_m(x, y) \tag{59}$$

в якомусь обсязі, що обіймає наш многокутник, через ε_m, то одержується:

$$|z(x, a_0x+b_0)|=0 \approx |v_m^{(0)}(x)|$$

з похибкою не більшою за ε_m для всіх значень змінного x у межах згаданого обсягу.

Отже наближену рівність (59) можна замінити такою:

$$z(x, y) \approx (y-a_0x-b_0)\,u_m^{(0)}(x, y), \tag{60}$$

при чому похибка цієї рівності є не більша за $2\varepsilon_m$:

$$|z(x, y) - (y - a_0 x - b_0)\, u_m^{(0)}(x, y)| \leqslant 2\varepsilon_m \tag{60'}$$

Далі, на зразок рівності (58), через ділення $u_m^{(0)}(x, y)$ на $(y - a_1 x - b_1)$, дістанемо:

$$u_m^{(0)}(x, y) = (y - a_1 x - b_1)\, u_m^{(0)}(x, y) + v_m^{(1)}(x)$$

і перепишемо нерівність (60′) так:

$$|z(x, y) - (y - a_0 x - b_0)(y - a_1 x - b_1)\, u_m^{(1)}(x, y) -$$
$$- (y - a_0 x - b_0)\, v_m^{(1)}(x)| \leqslant 2\varepsilon_m \tag{60''}$$

Звідси, поклавши

$$y = a_1 x + b_1$$

виводимо:

$$|(a_1 - a_0)\, x + (b_1 - b_0)| \cdot |v_m^{(1)}(x)| \leqslant 2\varepsilon_m \tag{60'''}$$

Отже для всіх значень змінного x у нашому обсязі, де

$$|a_1 - a_0)\, x + (b_1 - b_0)| > H^{(1)} \tag{61}$$

($H^{(1)}$ є будьяке стале додатне число), буде

$$|v_m^{(1)}(x)| \leqslant \frac{2\varepsilon_m}{H^{(1)}}$$

Отже для всіх точок нашого обсягу, що справджують нерівність (61), маємо

$$|z(x, y) - (y - a_0 x - b_0)(y - a_1 x - b_1)\, u_m^{(1)}(x, y)| \leqslant \varepsilon_m^{(1)}, \tag{62}$$

де $\varepsilon_m^{(1)}$ того самого порядку малості, що ε_m.

Далі, поділивши $u_m^{(1)}(x, y)$ на $y - a_2 x - b_2$ і провівши знов цілком аналогічні міркування, за умови (61) та аналогічної умови:

$$|(a_2 - a_0)\, x + (b_2 - b_0)|\, |(a_2 - a_1)\, x + (b_2 - b_1)| > H^{(2)}, \tag{61'}$$

де $H^{(2)}$ є будьяке стале додатне число, виводимо:

$$|z(x, y) - (y - a_0 x - b_0)(y - a_1 x - b_1)(y - a_2 x - b_2)\, u_m^{(2)}(x, y)| \leqslant \varepsilon_m^{(2)} \tag{62'}$$

Тут $u_m^{(2)}(x, y)$ є многочлен від x та y ступеня не вищого за m щодо кожного зі змінних, а $\varepsilon_m^{(2)}$ — величина того самого ступеня малості, що ε_m. Нарешті, по скінченному числу кроків, дійдемо нерівності:

$$|z(x, y) - (y - a_0 x - b_0)(y - a_1 x - b_1) \ldots (y - a_h x - b_h\; u_m^{(h)}(x, y)| < \varepsilon_m^{(h)} \tag{63}$$

де $u_m^{(h)}(x, y)$ є многочлен ступеня не вищого за m щодо змінних x та y. Ця нерівність має силу для всіх точок (x, y) нашого обсягу S, за винятком щонайбільше тих, які справджують нерівності:

$$\begin{gathered}
|(a_1 - a_0)\, x + (b_1 - b_0)| > H^{(1)} \\
|(a_2 - a_0)\, x + (b_2 - b_0)|\, |(a_2 - a_1)\, x + (b_2 - b_1)| > H^{(2)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
|(a_h - a_0)\, x + (b_h - b_0)|\, |(a_h - a_1)\, x + (b_2 - b_1)| \ldots |(a_h - a_{h-1})\, x + \\
+ (b_h - b_{h-1})| > H^{(h)}
\end{gathered} \tag{64}$$

Збільшуючи m, ми можемо зменшувати величини

$$H^{(1)}, H^{(2)}, \ldots H^{(h)}$$

Такі самі висновки можна поробити, помінявши ролями змінні x та y, отже вимагаючи замість нерівностей (64) — таких нерівностей:

$$\left|\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_0}\right)y-\left(\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_0}{a_0}\right)\right|>H_1$$

$$\left|\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_0}\right)y-\left(\frac{b_2}{a_0}-\frac{b_0}{a_0}\right)\right|\cdot\left|\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)y-\left(\frac{b_2}{a_2}-\frac{b_1}{a_1}\right)\right|>H_2 \qquad (64')$$

$$\left|\left(\frac{1}{a_h}-\frac{1}{a_0}\right)y-\left(\frac{b_h}{a_h}-\frac{b_0}{a_0}\right)\right|\cdot\left|\left(\frac{1}{a_h}-\frac{1}{a_1}\right)y-\left(\frac{b_h}{a_h}-\frac{b_1}{a_1}\right)\right|\ldots$$

$$\ldots\left|\left(\frac{1}{a_h}-\frac{1}{a_{h-1}}\right)y-\left(\frac{b_h}{a_h}-\frac{b_{h-1}}{a_{h-1}}\right)\right|>H_h$$

Так виявляється, що нерівність (63) може не мати сили, тільки коли одночасно не справджуються нерівності (64) та (64'), що може бути в околі вершини многокутника (57).

Так доходимо висновку:

Можна утворити наступ многочленів типу

$$(y-a_0x-b_0)(y-a_1x-b_1)\ldots(y-a_hx-b_h)\,u_m(x,y), \qquad (65)$$

що при наближеному зростанні m іде до функції $z(x,y)$ скрізь, де вона суцільна, на полі та на обводі многокутника

$$(y-a_0x-b_0)(y-a_1x-b_1)\ldots(y-a_1x-b_1)=0, \qquad (66)$$

на сторонах якого функція z анулюється.

Через добір величин $H^{(i)}$ в нерівностях (64) можна зробити згадану збіжність одностайною скрізь на полі й на обводі цього многокутника, за винятком довільно малих трикутників, відрізаних прямими лініями від вершин нашого многокутника.

Із нерівностей (60'') та (60''') випливає:

$$|z(x,y)-(y-a_0x-b_0)(y-a_1x-b_1)\,u_m^{(1)}(x,y)|\leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon_m\left[1+\left|\frac{y-a_0x-b_0}{(a_1-a_0)\,x+b_1-b_0}\right|\right] \qquad (67')$$

й аналогічно, помінявши ролями x та y:

$$|z(x,y)-(y-a_0x-b_0)(y-a_1x-b_1)\,u_m^{(1)}x,y)|\leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon_m\left[1+\left|\frac{\frac{y}{a_0}-x-\frac{b_0}{a_0}}{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_0}\right)y-\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_0}{a_0}}\right|\right] \qquad (67')$$

Як би не мінялася точка (x, y), завжди менша з двох величин:

$$\left|\frac{y-a_0x-b_0}{(a_1-a_0)x+(b_1-b_0)}\right| \quad \text{та} \quad \left|\frac{\frac{y}{a_0}-x-\frac{b_0}{a_0}}{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_0}\right)y-\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_0}{a_0}}\right|$$

не перевищує на полі многокутника певної сталої межі. Справді бо, з точністю до сталого множника ці величини є відношення віддалей від точки (x, y) до першої сторони нашого многокутника та до одної з прямих, проведених паралельно координатним осям через один із кінців цієї сторони.

Продовживши ці міркування в зв'язку з нерівністю (62) і дальшими подібними, доведемо однoстайність нерівності (63) для всього нашого обсягу без винятку.

Коли функція $z(x, y)$ суцільно диференціюється k разів по обох змінних, і k-ті похідні справджують Lipschitz-ову умову якогось порядку, то цілком подібно до міркувань попереднього параграфа виведемо одностайну збіжність усіх наближених рівностей:

$$\frac{\partial^l z(x,y)}{\partial x^i \partial y^{l-i}} \approx \frac{\partial^l}{\partial x^i \partial y^{l-i}} \left\{(y-a_0x-b_0)(y-a_1x-b_1)\ldots(y-a_hx-b_h)u_m^{(h)}(x,y)\right\} \tag{67}$$

$$\begin{pmatrix} l=1,2,\ldots,k \\ i\leqslant l \end{pmatrix}$$

у кожній замкненій частині поля нашого многокутника (66), вільній від точок сторін многокутника. Коли обвід многокутника має спільні точки з межею цієї частини, то для похідних порядку нижчого за $\left[\frac{k}{2}\right]$ одностайність збіжності не порушується.

Систему многочленів

$$(y-a_0x-b_0)(y-a_1x-b_1)\ldots(y-a_hx-b_h)\,x^iy^j \tag{68}$$
$$(i, j=0, 1, 2, \ldots)$$

на основі доведеного, будемо називати повною системою многочленів, що анулюються на сторонах многокутника:

$$(y-a_0x-b_0)(y-a_1x-b_1)\ldots(y-a_hx-b_h)=0$$

Зауважмо, що серед множників $y-a_ix-b_i$ можуть фігурувати й множники типу $x-a$, що не порушує теорії, бо такого множника можна перетворити до типу $y-ax-b$ поворотом координатних осей.

Як бачимо, властивість опуклості многокутника (66) в наших міркуваннях не була використана. Ми її вимагали, маючи на оці застосування результатів цього параграфа до інтегралів рівнянь з частинними похідними, що існують у даному обсязі та анулюються на його межах. Коли б відкинути вимогу опуклості, то на функцію z цього параграфа її наближення многочленами типу (65) наклало б вимогу анулюватися вздовж певних прямолінійних відрізків, що лежать на полі даного обсягу S.

§ 9. Інші приклади повних систем функцій, що справджують певні лінійні однорідні умови на межах даного обсягу

I. Не зменшуючи загальності, можна прямокутний обсяг взяти в формі квадрата:

$$\begin{array}{ll} x=0, & x=1 \\ y=0, & y=1 \end{array} \tag{69}$$

Повною системою функцій, що анулюються на сторонах цього квадрата, буде:

$$\sin k\pi x \sin l\pi y$$

$$(k, l=1, 2, 3, \ldots) \tag{70}$$

Це видно з того, що всяку суцільну функцію $z(x, y)$ на цьому квадраті, що анулюеться на його сторонах, можна суцільно непарно продовжити, як функцію від x та як функцію від y. Тоді система (70) стае повною системою для представлення суцільних періодичних функцій двох змінних.

II. Повна система функцій, що їх похідні по нормалі до контура (69) анулюються, може бути, цілком подібно до попереднього, дана в формі:

$$\begin{array}{c} \cos k\pi x \cos l\pi y \\ (k, l=0, 1, 2, 3, \ldots) \end{array} \tag{71}$$

III. Повна система функцій на крузі:

$$x^2+y^2=1,$$

що анулюються на його обводі, може бути дана в формі:

$$(r-1) r^k \cos l\varphi, \quad (r-1) r^k \sin l\varphi$$

$$\begin{pmatrix} k=0, 1, 2, \ldots \\ l=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

де

$$r=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{r}; \ \sin\varphi=\frac{y}{r}$$

Це легко виявити, перейшовши в наближеній рівності:

$$z \approx \sum^{m} a_{ij} x^i y^j$$

$$(i, j=1)$$

до полярних координат та нагадавши вимогу, що

$$z/_{r=1}=0$$

IV. Повною системою функцій, що анулюються на обводі прямокутника (52) разом зі своїми похідними по нормалі до цього обводу, буде:

$$\psi_{ij}(x, y)=(x-a)^2 (x-b)^2 (y-\alpha)^2 (y-\beta)^2) x^i y^j \tag{72}$$

$$(i, j=0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Справді, як знаемо з параграфа 7, можливе многочленне представлення функції z, що анулюється на сторонах прямокутника:

$$x=a;\quad x=b$$
$$y=\alpha;\quad y=\beta \tag{72'}$$

у формі:

$$z(x,y)\approx(x-a)(x-b)(y-\alpha)(y-\beta)\,u_m(x,y), \tag{73}$$

що на всьому прямокутнику (72′) одностайно має похибку $\leqslant \delta_m$ того самого порядку малості, що й найкраще загальне многочленне наближення цієї функції.

Очевидно $u_m(x,y)$ можна переписати так:

$$u_m(x,y)=(x-a)(x-b)\bar{u}_m(x,y)+(x-a)\,r_m(y)+s_m(y)$$

де $\bar{u}_m(x,y)$, $r_m(y)$, $s_m(y)$ — многочлени. Тоді припустивши, що функція z — суцільна разом зі своїми похідними до третього порядку включно в обсязі, який обіймає наш многокутник, маємо:

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\approx[(x-a)^2(x-b)^2]'(y-\alpha)(y-\beta)\bar{u}_m(x,y)+$$
$$+(x-a)^2(x-b)^2(y-\alpha)(y-\beta)\frac{\partial u_m}{\partial x}+[2(x-a)(x-b)+(x-a)^2].$$
$$.(y-\alpha)(y-\beta)\,r_m(y)+(2x-a-b)(y-\alpha)(y-\beta)\,s_m(y).$$

одностайно з похибкою $\leqslant m\delta_m$, що йде проте до нуля при необмеженому зростанні m. Поклавши тут

$$x=a\quad\text{та}\quad x=b,$$

дістанемо відповідно:

$$(y-\alpha)(y-\beta)\,s_m(y)\approx 0$$
$$(b-a)^2(y-\alpha)(y-\beta)\,r_m(y)+(b-a)(y-\alpha)(y-\beta)\,s_m(y)\approx 0$$

з похибками $\leqslant m\,\delta_m$. Звідси бачимо, що такий самий порядок малості мають многочлени

$$(y-\alpha)(y-\beta)\,r_m(y),\quad (y-\alpha)(y-\beta)\,s_m(y) \tag{74}$$

Отже можемо написати

$$z(x,y)\approx(x-a)^2(x-b)^2(y-\alpha)(y-\beta)\,\bar{u}_m(x,y)$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}\approx\frac{\partial}{\partial x}\{(x-a)^2(x-b)^2(y-\alpha)(y-\beta)\bar{u}_m(x,y)\}$$

з похибками порядку не більшого за порядок числа $m\,\delta_m$

Далі $\bar{u}_m(x,y)$ можемо записати так:

$$\bar{u}_m(x,y)=(y-\alpha)(y-\beta)\,\bar{\bar{u}}_m(x,y)+(y-\alpha)\,R_m(x)+S_m(x)$$

де $\bar{\bar{u}}_m(x,y)$, $R_m(x)$, $S_m(x)$ многочлени. Отже

$$z(x,y)\approx(x-a)^2(x-b)^2(y-\alpha)^2(y-\beta)^2\,\bar{\bar{u}}_m(x,y)+$$
$$+(x-a)^2(x-b)^2(y-\alpha)^2(y-\beta)^2R_m(x)+$$
$$+(x-a)^2(x-b)^2(y-\alpha)(y-\beta)\,S_m(x)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \approx \frac{\partial}{\partial x}\{(x-a)^2(x-b)^2(y-\alpha)^2(y-\beta)^2\bar{\bar{u}}_m(x,y)\}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\{(x-a)^2(x-b)^2(y-\alpha)^2(y-\beta)R_m(x)\}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\{(x-a)^2(x-b)^2(y-\alpha)(y-\beta)S_m(x)\}$$

з похибкою $\leqslant m\delta_m$. Звідси

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} \approx \frac{\partial}{\partial x}(x-a)^2(x-b)^2(y-\alpha)^2(y-\beta)^2\bar{\bar{u}}_m(x,y)+$$

$$+[2(y-\alpha)(y-\beta)+(y-\alpha)^2](x-a)^2(x-b)^2R_m(x)+$$

$$+(2y-\alpha-\beta)(y-a)^2(x-b)^2S_m(x)$$

з похибкою $\leqslant m^2\delta_m$. Вона йде до нуля при необмеженому зростанні m. При

$$y=\alpha \quad \text{та} \quad y=\beta$$

маємо відповідно:

$$(\alpha-\beta)(x-a)^2(x-b)^2S_m(x)\approx 0$$

$$(\beta-\alpha)^2(x-a)^2(x-b)^2R_m(x)+(\beta-\alpha)(x-a)^2(x-b)^2S_m(x)\approx 0$$

з похибкою $\leqslant m^2\delta_m$. Звідси виводимо, що порядок малості многочленів

$$(x-a)^2(x-b)^2R_m(x),\ (x-a)^2(x-b)^2S_m(x) \tag{75}$$

є не слабший за порядок малості числа $m^2\delta_m$. Те саме стосується похибок рівностей:

$$z(x,y)\approx(x-a)^2(x-b)^2(y-\alpha)^2(y-\beta)^2\bar{\bar{u}}_m(x,y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\approx\frac{\partial}{\partial x}\{(x-a)^2(x-b)^2(y-\alpha)^2(y-\beta)^2\bar{\bar{u}}_m(x,y)\} \tag{76}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\approx\frac{\partial}{\partial y}\{(x-a)^2(x-b)^2(y-\alpha)^2(y-\beta)^2\bar{\bar{u}}_m(x,y)\}$$

Так доведено повноту системи функцій (72).

V. Певна система многочленів в середині опуклого многогранника:

$$(z-a_0x-b_0y-c_0)(z-a_1x-b_1y-c_1)\ldots(z-a_hx-b_hy-c_h)=0,$$

що анулюється на поверхні цього многогранника, є

$$\varphi_{ijg}(x,y,z)=(z-a_0x-b_0y-c_0)(z-a_1x-b_1y-c_1)\ldots$$
$$\ldots(z-a_hx-b_hy-c_h)x^iy^jz^g$$
$$(i,j,g=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots)$$

Усяку суцільну в цьому обсязі функцію можна з довільною точністю представити як лінійну комбінацію з многочленів:

$$\sum^m a_{ijg}\varphi_{ijg}(x,y,z)$$
$$(i,j,g=0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

§ 10. Повна система многочленів двох змінних, що анулюються разом зі своїми всіма частинними похідними до 1-го порядку включно на сторонах опуклого многокутника

Нехай функція $z(x, y)$ в обсязі, що обіймає многокутник:

$$(y-a_0 x-b_0)(y-a_1 x-b_1)\dots(y-a_h x-b_h)=0 \tag{77}$$

суцільна і має суцільні перші похідні, які разом з нею анулюються на сторонах цього многокутника та справджують Lipschitz-ову умову якогось порядку.

Як знаємо з параграфа 8, її можемо наближено представити в формі

$$z(x, y)\approx(y-a_0 x-b_0)(y-a_1 x-b_1)\dots(y-a_h x-b_h)\, u_m(x, y), \tag{78}$$

де $u_m(x, y)$ є многочлен ступеня не вищого за m щодо кожного зі змінних, при чому похибка $\leqslant \varepsilon_m$ рівності (78) при наближеному зростанні числа m іде до нуля — так само, як і похибки $\leqslant m\varepsilon_m$ рівностей:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\approx\frac{\partial}{\partial x}\left\{(y-a_0 x-b_0)(y-a_1 x-b_1)\dots(y-a_h x-b_h)\, u_m(x, y)\right\} \tag{78'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\approx\frac{\partial}{\partial y}\left\{(y-a_0 x-b_0)(y-a_1 x-b_1)\dots(y-a_h x-b_h)\, u_m(x, y)\right\} \tag{78''}$$

Можемо $u_m(x, y)$ переписати у формі:

$$u_m(x,y)=v_m(x)+v_m^{(0)}(x)(y-a_0x-b_0)+v_m^{(1)}(x)(y-a_0 x-b_0)(y-a_1 x-b_1)+$$
$$+\dots+\bar{u}_m(x, y)(y-a_0 x-b_0)(y-a_1 x-b_1)\dots(y-a_h x-b_h)$$

Нехай тепер на сторонах нашого многокутника буде

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0;\ \frac{\partial z}{\partial y}=0$$

Переписавши рівність (78″) так:

$$\frac{\partial z}{\partial y}\approx(y-a_0 x-b_0)(y-a_1 x-b_1)\dots(y-a_h x-b_h)\frac{\partial u_m}{\partial y}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}[(y-a_0 x-b_0)(y-a_1 x-b_1)\dots(y-a_h x-b_h)]\cdot\{v_m(x)+$$
$$+v_m^{(0)}(x)(y-a_0 x-b_0)+\dots+v_m^{(h)}(x)(y-a_0 x-b_0)(y-a_1 x-b_1)\dots$$
$$\dots(y-a_h x-b_h)\}$$

і поклавши послідовно:

$$y=a_0 x+b_0$$
$$y=a_1 x+b_1$$
$$\dots\dots$$
$$y=a_h x+b_h,$$

дістанемо наступні рівності — всі з похибкою $\leqslant m\varepsilon_m$:

$$[(a_0-a_1)x+(b_0-b_1)][(a_0-a_2)x+(b_0-b_2)]\dots$$
$$\dots[(a_0-a_h)x+(b_0-b_h)]\, v_m(x)\approx 0$$

$$[(a_1-a_0)x+(b_1-b_0)]\,[(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)]\ldots$$

$$\ldots[(a_1-a_h)x+(b_1-b_h)]\,\{v_m(x)+[(a_1-a_0)x+(b_1-b_0)]\,v_m^{(0)}(x)\}\approx 0$$

$$[(a_2-a_0)x+(b_2-b_0)]\,[(a_2-a_1)x+(b_2-b_1)].$$

$$[(a_2-a_3)x+(b_2-b_3)]\ldots[(a_2-a_h)x+(b_2-b_h)].$$

$$\cdot\,\{v_m(x)+[(a_2-a_0)x+(b_2-b_0)]\,v_m^{(0)}(x)+[(a_2-a_0)x+(b_2-b_0)]\,.$$

$$.\,[a_2-a_1)x+(b_2-b_0)]\,v_m^{(1)}(x)\}\approx 0$$

. . . .

$$[(a_h-a_0)x+(b_h-b_0)]\,[(a_h-a_1)x+(b_h-b_1]\ldots[(a_h-a_{h-1})x\,.$$

$$.\,b_h-b_{h-1})]\cdot\{v_m(x)+[(a_h-a_0)x+(b_h-b_0)]\,v_m^{(0)}(x)+[(a_h-a_0)x+$$

$$+(b_h-b_0)]\,[(a_h-a_1)x+(b_h-b_0)]\,v_m^{(1)}(x)+\ldots+[(a_h-a_0)x+$$

$$+(b_h-b_0)]\,[(a_h-a_1)x+(b_h-b_1)]\ldots[a_h-a_{h-1})x+(b_h-b_{h-1})]\,v_m^{(h-1)}(x)\}\approx 0$$

Із цих рівностей — так само, як у параграфі 8, виводимо, що скрізь у нашому обсязі за виключенням околів вершин многокутника (77), многочлени

$$v_m(x),\; v_m^{(0)}(x),\ldots,v_m^{(h-1)}(x)$$

мають порядок малості числа $m\varepsilon_m$ або вищий. Це показує, що рівності (78), (78′) та (78″) так само можна замінити такими:

$$z(x,y)\approx(y-a_0x-b_0)^2(y-a_1x-b_1)^2\ldots(y-a_hx-b_h)^2\,\bar{u}_m(x,y) \tag{80}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\approx\frac{\partial}{\partial x}\{(y-a_0x-b_0)^2(y-a_1x-b_1)^2\ldots(y-a_hx-b_h^2\,\bar{u}_m(x,y,)\} \tag{80′}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\approx\frac{\partial}{\partial y}\{(y-a_0x-b_0)^2(y-a_1x-b_1)^2\ldots(y-a_hx-b_h)^2\,\bar{u}_m(x,y)\} \tag{80″}$$

з похибкою $\leqslant m\varepsilon_m$, коли обмежити зміну величини x так само, як для функцій $v_m^{(i)}(x)$. Помінявши ролями x та y (як у параграфі 8), виявимо, що рівності (80), (80′), (80″) правдиві одностайно з зазначеним ступенем точності скрізь на нашому многокутнику та на його контурі, поки точка (x,y) не попадае в окіл одної з вершин нашого многокутника.

Нарешті, з допомогою міркувань та нерівностей, аналогічних нерівностям (67′) та (67″) параграфа 8, можна звільнитися від обмежень щодо околів вершин нашого многокутника.

Так доходимо висновків:

1) Існує наступ многочленів типу

$$(y-a_0x-b_0)^2(y-a_1x-b_1)^2\ldots(y-a_hx-b_h)^2\,u_m(x,y) \tag{81}$$

$$(m=0,1,2,3,\ldots)$$

такий, що в многокутнику

$$(y-a_0x-b_0)(y-a_1x-b_1)\ldots(y-a_hx-b_h)=0 \tag{82}$$

та на його контурі збігається до довільної наперед даної суцільної зі своїми першими похідними функції z, якщо на контурі многокутника справджено умови:

$$z=0,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=0;\ \frac{\partial z}{\partial y}=0$$

або

$$z=0,\quad \frac{\partial z}{\partial n}=0$$

Одночасно наступи з похідних многочленів (31) по x та по y збігаються на полі та на обводі многокутника відповідно до $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$.

2) Функцію z висновку 1 можна наблизити одностайно з довільно малою похибкою многочленом типу (81) на полі та на обводі многокутника (82). При тому перші частинні похідні від цього многочлена одностайно наближатимуться в тому самому обсязі до відповідних похідних від функції.

Цілком подібно можна довести такі загальніші результати:

3) Існує наступ многочленів типу:

$$(y-a_0x-b_0)^l(y-a_1x-b_1)^l\ldots(y-a_hx-b_h)^l u_m(x,y) \tag{81'}$$

$$(m=0, 1, 2,\ldots)$$

такий, що в многокутнику

$$(y-a_0x-b_0)(y-a_1x-b_1)\ldots(y-a_hx-b_h)=0 \tag{82'}$$

та на його контурі збігається одностайно до довільної наперед даної суцільної зі своїми похідними до $(l-1)$-го порядку включно функції $z(x,y)$, якщо на контурі многокутника значення самої функції z та зазначених похідних є нулі.

Із поданих міркувань випливає ще такий результат.

Припустімо, що функція z має всі суцільні похідні до порядку k-го включно, де

$$k>l$$

в тому самому обсязі, що обіймає собою многокутник (82), при чому k-ті похідні справджують Lipschitz-ову умову якогось порядку. Тоді з теорії наближення функцій многочленами не трудно вивести існування рівностей:

$$\frac{\partial^\alpha z(x,y)}{\partial x^\beta\,\partial y^{\alpha-\beta}}=\lim_{m\ \infty}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha\,\partial y^{\alpha-\beta}}\left\{(y-a_0x-b_0)^l(y-a_1x-b_1)^l\ldots(y-a_hx-b_h)^l u_m(x,y)\right\}$$

$$(\alpha=1, 2,\ldots,l,\quad \beta\leqslant\alpha)$$

§ 11. Зв'язок з теорією замкнености

Нехай функція z суцільна в якомусь замкненому обсязі γ, що обіймає поле S многокутника (77). При тому нехай вона анулюється скрізь на лініях (77). Нехай, крім того, її частинні похідні перших двох порядків суцільні в усіх точках того обсягу за винятком щонайбільше вершин того многокутника.

Покажімо, що тоді похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ та } \frac{\partial z}{\partial y}$$

анулюються в цих вершинах.

Справді, похідні $\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_0$, $\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_1$ від z, узяті в напрямах сторін

$$y = a_0 x + b_0$$

$$y = a_1 x + b_1,$$

у точці їх перетину, є нулі, бо

$$z = 0$$

скрізь на цих сторонах. Коли зазначимо напрямні cosinus-и цих сторін відповідно через

$$\alpha_0, \beta_0$$

$$\alpha_1, \beta_1$$

то в названій вершині матимемо такі зв'язки між похідними:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_0 \alpha_0 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_1 \alpha_1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_0 \beta_0 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_1 \beta_1$$

Ці рівності доводять існування похідних

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$$

у вершинах многокутника (77) і показують зразу, що в тих вершинах

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Візьмімо тепер функцію (7):

$$M_{xy}[z] = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + B_1 \frac{\partial z}{\partial x} + B_2 \frac{\partial z}{\partial y} + B_3$$

в тому самому обсязі γ і припустімо, що в ньому функції z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ та $M_{xy}[z]$ абсолютно інтегруються разом зі своїми квадратами. Доведімо тоді, що при належному доборі многочлена

$$z_m(x, y) = (y - a_0 x - b_0)(y - a_1 x - b_1) \dots (y - a_h x - b_h)\, u_m(x, y) \qquad (78_a)$$

інтеграл:

$$\iint\limits_{(S)} M^2_{xy}[z_m - z]\, dx\, dy \qquad (78_a')$$

іде до нуля при необмеженому зростанні m.

Для доводу розгляньмо, крім функції z, ще функцію $\overline{z}$, що визначається так:

1) $$\overline{z} = z$$

скрізь в обсязі γ за винятком круга досить малого радіуса R з центром у вершині многокутника (77);

2) на цих кругах нехай

$$\overline{z} = z \cdot \left(1 - \frac{(R-r)^3}{R^3}\right), \tag{79$_a$}$$

де r є віддаль змінної точки (x, y) від центра круга.

Назвавши через θ кут між r та якимось сталим напрямом, поведеним через центр круга, маємо

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \overline{z}}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial r}\left(1 - \frac{(R-r)^3}{R^3}\right) + 3z\frac{(R-r)^3}{R^3} \\ \frac{\partial \overline{z}}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial \theta}\left(1 - \frac{(R-r)^3}{R^3}\right) \end{aligned}\right\} \tag{80$_a$}$$

Подібно ж:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \overline{z}}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\left(1 - \frac{(R-r)^3}{R^3}\right) + 3\frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{(R-r)^2}{R^3} - 6z\frac{R-r}{R^3} \\ \frac{\partial^2 \overline{z}}{\partial r \partial \theta} &= \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta}\left(1 - \frac{(R-r)^3}{R^3}\right) + 3\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{(R-r)^2}{R^3} \\ \frac{\partial^2 \overline{z}}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\left(1 - \frac{(R-r)^3}{R^3}\right) \end{aligned}\right\} \tag{81$_a$}$$

Поклавши у рівностях (79$_a$), (80$_a$) та (81$_a$)

$$r = R$$

побачимо, що скрізь на обводі нашого круга буде:

$$\overline{z} = z$$

$$\frac{\partial \overline{z}}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \overline{z}}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{z}}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{z}}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{z}}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

Отже

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

при

$$r = R$$

Далі, очевидно, похідна $\frac{\partial z}{\partial r}$ у центрі круга існує і дорівнює

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin\theta = 0$$

Так само:

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -\frac{\partial z}{\partial x} r \sin\theta + \frac{\partial z}{\partial y} r \cos\theta$$

або:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} = -\frac{\partial z}{\partial x} \sin\theta + \frac{\partial z}{\partial y} \cos\theta$$

А тоді з (80) маемо при $r = 0$:

$$\left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial r}\right)_{r=0} = \frac{3}{R} \cdot z/_{r=0} = 0; \qquad \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \theta}\right)_{r=0} = 0$$

отже зокрема існують у точці

$$r = 0$$

похідні

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} \quad \text{та} \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial y},$$

які дорівнюють нулеві.

Нарешті, з рівностей (80_a) обчислімо похідну $\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial r^2}$ (та одночасно доведімо її існування). Маемо:

$$\lim_{r \to 0} \frac{\frac{\partial \bar{z}}{\partial r} - \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial r}\right)_{r=0}}{r} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{z}}{\partial r}$$

Тим часом перша з рівностей (80_a) дає:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{z}}{\partial r} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial z}{\partial r} (3R^2 - 3Rr + r^2) + 3 \frac{z}{r} \frac{(R-r)^2}{R^3}$$

Зробивши граничний перехід та пам'ятаючи, що

$$\lim_{r \to 0} \frac{z}{r} = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_{r=0} = 0,$$

дістанемо звідси:

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial r^2}\right)_{r=0} = 0$$

Отже зокрема

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial x^2}\right)_{r=0}=0,\ \left(\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial y^2}\right)_{=0}=0,$$

Використавши тепер рівності

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{r=0}=0;\quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{r=0}=0;\quad \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_{r=0}=0$$

або, що на те саме сходить, рівність

$$\left(\frac{z}{r}\right)_{r=0}=0$$

утворімо лінійною комбінацією з рівностей (79_a), (80_a) та (81_a) у нашому крузі

$$M_{xy}[\bar{z}]=M_{xy}[z]\cdot\left(1-\frac{(R-r)^3}{R^3}\right)+$$

$$+M'_{xy}[z]\cdot\frac{(R-r)^2}{R^3}+M''_{xy}[z]\cdot\frac{R-r}{R^3},$$

де

$$M'_{xy}[z]=a_1(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+a_2(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}+a_3(x,y)\,z$$

$$M''_{xy}[z]=b(x,y)\cdot z,$$

при чому коефіціенти

$$a_1(x,y),\ a_2(x,y),\ a_3(x,y),\ b(x,y)$$

суцільні.

Отже:

$$M_{xy}[\bar{z}-z]=-M_{xy}[z]\,\frac{(R-r)^3}{R^3}+M'_{xy}[z]\,\frac{(R-r)^2}{R^3}+M''_{xy}[z]\cdot\frac{R-r}{R^3} \quad (81_c)$$

на нашому крузі та

$$M_{xy}[\bar{z}-z]=0 \quad (81)$$

скрізь поза ним.

Далі будемо називати через $\bar{z}$ функцію, утворену вищеописаним способом з урахуванням усіх вершин многокутника (77) і з таким малим радіусом R усіх $h+1$ кругів описаних з тих вершин, щоб ці круги не перетиналися.

Ми обмежимося випадком, коли функції

$$z,\ r^{\alpha-1}\frac{\partial z}{\partial x},\quad r^{\alpha-1}\frac{\partial z}{\partial y},\quad r^{\alpha-1}\frac{\partial z}{\partial r} \quad (82_a)$$

$$r^{\alpha}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad r^{\alpha}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\quad r^{\alpha}\frac{\partial^2 z}{\partial^2 r}\quad (\alpha<1)$$

обмежені. Тут α — будьяке число менше за 1.

Такий, напр., випадок буде, коли z є Green'ова функція задачі (1) в обсязі, обмеженому обводом опуклого многокутника, продовжена поза цей обвід. Тоді її легко продовжити одночасно в усьому обсязі γ так, щоб додержати й суцільності перших та других похідних скрізь, за винятком хіба вершин нашого многокутника. Справді бо, задача зводиться до побудови функцій в обсягах, обмежених прямими з заданими (нулевими) значеннями цих функцій на тих прямих і заданими суцільними значеннями похідних по нормалях до цих прямих, при чому ці похідні анулюються в точках перетину названих прямих.

Відома формула Schwarz-a — Christoffel-я, що здійснює конформне відображення круга на поле многокутника, доводить суцільність виразів (82_a) скрізь на контурі нашого многокутника, включаючи й вершини, коли належно добрати число $\alpha < 1$.

Із обмеженості виразів (82) випливає, як показують формули (80) та (81), суцільність похідних

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial y^2}$$

скрізь в обсязі γ включаючи й вершини нашого многокутника. Звідси висновок, що для певного многочлена $z_m(x, y)$ типу (78) існує нерівність

$$\iint\limits_{(S)} M^2_{xy}[z_m - \bar{z}]\, dx\, dy < \varepsilon_m \tag{83}$$

де

$$\varepsilon_m \to 0$$

при необмеженому зростанні m. З другого боку, рівності (81′) та (81″) показують, що при досить малому R буде:

$$\iint\limits_{(S)} M^2_{xy}[\bar{z} - z]\, dx dy < \eta_R, \tag{84}$$

де η_R довільне додатне число; отже можна зробити

$$\eta_R \to 0,$$

коли R необмежено меншає.

Застосувавши нерівність Cauchy, легко здобуваємо:

$$\iint\limits_{(S)} M_{xy}{}^2[z_m - z] \leqslant 2(\varepsilon_m + \eta_R),$$

отже

$$\lim_{m \to \infty} \min \iint\limits_{(S)} M^2_{xy}[z_m - z]\, dx\, dy = 0 \tag{85}$$

Ця рівність і є теорема замкнености для функції $M_{xy}[z]$.

§ 12. Повні системи функцій, що справджують граничні умови

Систему функцій

$$\Phi_0(x, y), \quad \Phi_1(x, y), \quad \Phi_2(x, y) \tag{86}$$

в обсязі S називатимемо замкненою, коли для всякої функції $F(x, y, \ldots)$, що інтегрується в цьому обсязі разом зі своїм квадратом, можна належним добором коефіціентів

$$a_0{}^{(m)}, \quad a_1{}^{(m)}, \quad a_2{}^{(m)}, \ldots, \; a_m{}^{(m)} \tag{87}$$

справдити вимогу:

$$\lim \min \iint\limits_{(S)} [F(x, y) - a_0{}^{(m)} \Phi_0(x, y) - a_1{}^{(m)} \Phi_1(x, y) - \ldots$$
$$\ldots - a_m{}^{(m)} \Phi_m(x, y)]^2\, dx = 0$$

Розгляньмо систему функцій

$$\varphi_0(x, y), \quad \varphi_1(x, y), \quad \varphi_2(x, y) \tag{88}$$

що визначаються однозначно з умов:

$$M_{xy}[\varphi_i] = \Phi_i \tag{89}$$
$$U_l[\varphi_i] = 0$$

(пор. § 3 цього розділу). Тоді

$$\varphi_i(x, y) = \iint_{(S)} G(x, y; \xi, \eta)\, \Phi_i(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots)$$

Коли функція $z(x, y)$ є розв'язка задачі

$$M_{xy}[z] = F(x, y) \tag{90}$$
$$U_l[z] = 0$$

то

$$z(x, y) = \iint_{(S)} G(x, y; \xi, \eta)\, F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{91}$$

Звідси виводимо легко

$$z - a_0^{(m)}\varphi_0 - a_1^{m}\varphi_1 - \ldots - a_m^{(m)}\varphi_m = \tag{92}$$
$$= \iint_{(S)} G(x, y; \xi, \eta) . \{F(\xi, \eta) - a_0^{(m)}\Phi_0(\xi, \eta) - a_1^{(m)}\Phi_1(\xi, \eta) - \ldots - a_m^{(m)}\Phi_m(\xi, \eta)\}\, d\xi\, d\eta$$

що, за допомогою нерівності Буняковського, дає:

$$(z - a_0^{(m)}\varphi_0 - a_1^{(m)}\varphi_1 - \ldots - a_m^{(m)}\varphi_m)^2 \leqslant \iint_{(S)} G^2(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \cdot$$
$$\cdot \iint_{(S)} [F(\xi, \eta) - a_0^{(m)}\Phi_0(\xi, \eta) - a_1^{(m)}\Phi_1(\xi, \eta) - \ldots - a_m^{(m)}\Phi_m(\xi, \eta)]^2\, d\xi\, d\eta$$

і остаточно, на основі рівності (87), виходить:

$$z = \lim_{m \to \infty} (a_0^{(m)}\varphi_0 + a_1^{(m)}\varphi_1 + \ldots + a_m^{(m)}\varphi_m) \tag{93}$$

Ввівши зазначення:

$$\eta_m(\xi, \eta) = F(\xi, \eta) - \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)}\Phi_i(\xi, \eta)$$

$$z_m(x, y) = \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)}\varphi_i(x)$$

та диференціюючи $k - 2$ рази (k — порядок оператора M_{xy}) рівність (92), дістанемо:

$$\frac{\partial^l z}{\partial x^\alpha \delta y^{l-\alpha}} - \frac{\partial^l z_m}{\partial x^\alpha \partial y^{l-\alpha}} = \iint_{(S)} \frac{\partial\, G(x, y; \xi, \eta)}{\partial x^\alpha\, \partial y^{l-\alpha}}\, \eta_m(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$\begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, k-2 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix}$$

З допомогою нерівності Буняковського звідси дістаємо:

$$\left(\frac{\partial^l z}{\partial x^\alpha \partial y^{l-\alpha}}-\frac{\partial^l z_m}{\partial x^\alpha \partial y^{l-\alpha}}\right)^2 \leqslant \iint\limits_{(S)}\left(\frac{\partial^l G}{\partial x^\alpha \partial y^{l-\alpha}}\right)^2 d\xi\, d\eta \iint\limits_{(S)} \eta_m^2(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

Звідси, зважаючи на залежність

$$\lim_{m\to\infty} \iint\limits_{(S)} \eta_m^2(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0 \tag{94}$$

та на те, що функція $\left(\frac{\partial^l G}{\partial x^\alpha \partial y^{l-\alpha}}\right)^2$ інтегрується, маємо:

$$\frac{\partial^l z}{\partial x\ \partial y^{l-\alpha}} = \lim_{m\to\infty} \frac{\partial^l z_m}{\partial x^\alpha \partial y^{l-\alpha}} \tag{95}$$

$$\begin{pmatrix} l=0,\ 1, \ldots, k-2 \\ \alpha=0,\ 1, \ldots, l \end{pmatrix}$$

Рівність

$$\frac{\partial^{k-1} z}{\partial x_\alpha \partial y^{k-1-}} = \lim \frac{\partial^{k-1} z_m}{\partial x^\alpha \partial y^{l-\alpha}} \tag{95'}$$

таким способом вивести не можна. Але припустімо, що можна вираз $\eta_m(\xi, \eta)$ утворити так, щоб він одностайно йшов до нуля в обсязі S; тоді можемо написати:

$$\frac{\partial^{k-1} z}{\partial x^\alpha \partial y^{k-1-\alpha}}-\frac{\partial^{k-1} z_m}{\partial x^\alpha \partial y^{k-1-\alpha}} = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial G}{\partial x^\alpha \partial y^{k-1-\alpha}} \eta_m(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{96}$$

звідси, застосувавши теорему про середню:

$$\left|\frac{\partial^{k-1} z}{\partial x^\alpha \partial y^{k-1-\alpha}}-\frac{\partial^{k-1} z_m}{\partial x^\alpha \partial y^{k-1-}}\right| \leqslant \max \left|\eta_m(\xi, \eta)\right| \iint\limits_{(S)} \left|\frac{\partial^{k-1} G}{\partial x^\alpha \partial y^{k-1-\alpha}}\right| d\xi\, d\eta$$

виводимо (95″) (пор. Додаток 1).

Можна поставити до функцій $F(x, y)$ та (86) вимогу слабшу, а саме можливість здійснити рівність

$$\lim_{m\to\infty} \iint\limits_{(S)} \eta_m^q\, d\xi\, d\eta = 0,$$

де

$$q > 2.$$

Тоді застосувавши Hölder-ову нерівність

$$\sum |a| . |b| \leqslant \left(\sum |a|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum |b|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=2$$

$$(p<2, \quad q>2)$$

у формі:

$$\iint\limits_{(S)} A(x, y), B(x, y)\, dx\, dy \leqslant \left(\iint\limits_{(S)} |A|^p dx\, dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\iint\limits_{(S)} |B|\, dx\, dy\right)^{\frac{1}{q}}$$

дістанемо з рівності (96):

$$\left|\frac{\partial^{k-1} z}{\partial x^\alpha \partial y^{k-1-\alpha}} - \frac{\partial^{k-1} z_m}{\partial x^\alpha \partial y^{k-1-\alpha}}\right| \leqslant \left(\iint\limits_{(S)} \left|\frac{\partial^{k-1} G}{\partial x^\alpha \partial y^{k-1-\alpha}}\right|^p d\xi\, d\eta\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\iint\limits_{(S)} \left|\eta_m\right|^q d\xi\, d\eta\right)^{\frac{1}{q}} \quad (97)$$

Функція $\frac{\partial^{k-1} G}{\partial x^\alpha \partial y^{k-1-\alpha}}$ стає нескінченністю в точці

$$x = \xi, \quad y = \eta$$

так само, як

$$r^{-1} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$$

Отже інтеграл

$$Q = \iint\limits_{(S)} \left|\frac{\partial^{k-1} G}{\partial x^\alpha\, \partial y^{k-1-\alpha}}\right|^p d\xi d\eta \quad (p < 2)$$

збігається, і з нерівності (97) знов випливає (95′).

Комбінуючи лінійно рівності (90) та (89), дістанемо:

$$M_{xy}[z - z_m] = \eta_m(x, y)$$

Звідси

$$\lim_{m \to \infty} \iint\limits_{(S)} |M_{xy}[z_m - z]|^q\, dx\, dy = 0 \tag{95″}$$

а також, урахувавши рівності (95) та (95′), ще рівність:

$$\lim_{m \to \infty} \iint\limits_{(S)} |z_m - z|^q\, dx\, dy = 0 \tag{95‴}$$

Якщо ж система функцій (86) та функція $F(x, y)$ такі, що в усьому обсязі S одностайно

$$\eta_m(x, y) \to 0, \tag{98}$$

то замість рівностей (96″), (95‴) матимемо (пор. § 3):

$$M_{xy}[z] = \lim M_{xy}[z] \tag{99}$$

та

$$B_{k0} \frac{\partial^k z}{\partial x^k} + B_{k-1,1} \frac{\partial^k z}{\partial x^{k-1} \partial y} + \ldots + B_{0k} \frac{\partial^k z}{\partial y^k} = \lim_{m \to \infty} \Big[[B_{k0} \frac{\partial^k z_m}{\partial x_k} +$$

$$+ B_{k-1,1} \frac{\partial^k z_m}{\partial x^{k-1} \partial y} + \ldots + B_{0k} \frac{\partial^k z_m}{\partial y^k} \Big] \tag{100}$$

Ми будемо називати систему функцій $\varphi_i(x, y)$ повною щодо задачі (89), коли вона має властивість для всякої суцільної функції $F(x, y)$ з суцільними першими похідними — справджувати рівності (93), (95) та (95′).

Спосіб добору повної системи функцій φ_i, виходячи з замкненої системи функцій Φ_i цього параграфа, цілком загальний. Проте практично він мало коли зручний, бо вимагає розв'язати вперед задачі (89) або збудувати Green-ову функцію $G(x, y; \xi, \eta)$. Натомість способи добору функцій φ_i, особливо в формі многочленів, дані в параграфах 7—11, хоч не такі загальні, але цінніші, бо вони дають змогу ці функції побудувати практично.

Щодо виразу $M_{xy}[\;]$, то пізніше, для розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними математичної фізики, ми його добиратимемо найчастіше в формі:

$$M_{xy}[z] = B_{k0}\frac{\partial^k z}{\partial x^k} + B_{k-1,1}\frac{\partial^k z}{\partial^{k-1}\partial y} + \ldots + B_{0k}\frac{\partial^k z}{\partial y^k},$$

або в формі

$$M_{xy}[z] = B_{k0}\frac{\partial^k z}{\partial x^k} + B_{k-1,1}\frac{\partial^k z}{\partial x^{k-1}\partial y} + \ldots + B_{0k}\frac{\partial_k z}{\partial y^k} +$$

$$+ B'_{k-1,0}\frac{\partial^{k-1} z}{\partial x^{k-1}} + \ldots + B_{0,k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial y^{k-1}},$$

при чому обмежимося сталими коефіцієнтами

$$B_{k0},\ B_{k-1,1} \ldots,\ B_{0k},$$

не накладаючи такого обмеження на коефіцієнти

$$B_{k-1,0},\ B_{k-2,1}, \ldots,\ B_{0,k-1}$$

Викладене в цьому параграфі тривіально узагальнюється на випадок довільної кількості незалежних змінних. Вже саме узагальнення з випадку одного змінного (розд. 1) на випадок двох змінних являє ідейно мало нових моментів.

РОЗДІЛ VI

Наближене розв'язання рівнянь з частинними похідними еліптичного типу за однорідних лінійних граничних умов

§ 13. Форма та збіжність наближеної розв'язки

Ми обмежимося одним лінійним рівнянням з двома незалежними змінними; але подані нижче міркування є цілком загальні, придатні для лінійних завдань із будьяким числом незалежних змінних та й для систем рівнянь.

Нехай за певних граничних умов, що всі є лінійні та однорідні, в обмеженому обсязі S на площі xy функція z є єдина розв'язка рівняння:

$$L_{xy}[z]=\sum_{\alpha=0}^{k} A_{k-\alpha,\alpha}(x,y)\frac{\partial^k z}{\partial x^{k-\alpha}\partial y^\alpha}+\sum_{\alpha=0}^{k-1} A_{k-1-\alpha,\alpha}(x,y)\frac{\partial^{k-1} z}{\partial x^{k-1-\alpha}\partial y^\alpha}+ \\ \ldots+A_{00}(x,y)z=f(x,y)$$

Візьмімо будьякий лінійний вираз типу:

$$M_{xy}(z)=\sum_{\alpha=0}^{k} A_{k-\alpha,\alpha}(x,y)\frac{\partial^k z}{\partial x^{k-\alpha}\partial y^\alpha}+\sum_{\alpha=0}^{k-1} A_{k-1-\alpha,\alpha}(x,y)\frac{\partial^{k-1} z}{\partial x^{k-1-\alpha}\partial y^\alpha}+ \\ +\sum_{\alpha=0}^{k-2} B_{\alpha,k-2-\alpha}(x,y)z\frac{\partial^{k-z} z}{\partial x^\alpha\partial y^{k-z-p}}+\ldots+B_{00}(x,y)z, \tag{102}$$

де всі члени порядків k та $k-1$ є ті самі, що у $L_{xy}[z]$.

Тоді різниця

$$N_{xy}[z]=M_{xy}[z]-L_{xy}[z] \tag{103}$$

матиме вигляд

$$N_{xy}[z]=\sum_{\alpha=0}^{k-2} C_{k-2-\alpha,\alpha}(x,y)\frac{\partial^{k-2} z}{\partial x^{k-2-\alpha}\partial y^\alpha}+\ldots+C_{00}(x,y)z, \tag{104}$$

де

$$C_{j\alpha}(x,y)=B_{j\alpha}(x,y)-A_{j\alpha}(x,y)$$

Впровадьмо ще зазначення

$$P_{xy}[z]=\sum_{\alpha=0}^{k} A_{k-\alpha,\alpha}(x,y)\frac{\partial^k z}{\partial x^{k-\alpha}\partial y^\alpha}+\sum_{\alpha=0}^{k-1} A_{k-1-\alpha,\alpha}\frac{\partial^{k-1} z}{\partial x^{k-1-\alpha}\partial y^\alpha} \tag{105}$$

і доберімо систему лінійно незалежних функцій

$$\varphi_1(x,y),\ \varphi_2(x,y),\ \varphi_3(x,y),\ldots, \tag{106}$$

що задовольняють дві вимоги:

1) Кожна функція $\varphi_i(x, y)$ справджує ті самі граничні та початкові умови, що й функція z.

2) Функції

$$M_{xy}[\varphi_i] = \Phi_i(x, y) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{107}$$

утворюють замкнену систему.

Доведімо теорему:

Хочби які були коефіцієнти рівняння (101) та функція (x, y), вираз

$$z_m = a_1^{(m)} \varphi_1(x, y) + a_2^{(m)} \varphi_2(x, y) + \ldots + a_m^{(m)} \varphi_m(x, y),$$

де числа $a_i^{(m)}$ справджують систему лінійних рівнянь

$$\iint\limits_{(S)} L_{xy}[z_m] - f) M_{xy}[\varphi_i]\, dx\, dy = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{110}$$

є наближення функції z таке, що

$$z = \lim_{m=\infty} z_m$$

$$\frac{\partial^l z}{\partial x^{l-\alpha} \partial y^\alpha} = \lim_{m=\infty} \frac{\partial^l z_m}{\partial x^{l-\alpha} \partial y^\alpha} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, k-2 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix} \tag{111}$$

Щоб довести рівності (111), впровадьмо зазначення:

$$u_m = z - z_m \tag{112}$$

і перепишімо рівності (110) так:

$$\iint\limits_{(S)} L_{xy}[u_m] M_{xy}[\varphi_i]\, dx\, dy = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{113}$$

З огляду на замкненість системи функцій $M_{xy}[\varphi^i]$, маємо з рівностей (113) при належному доборі чинників $B_i^{(m)}$:

$$\iint\limits_{(S)} L_{xy}[u_m] (M_{xy}[z] + \varepsilon_m)\, dx\, dy = 0, \tag{114}$$

де

$$\lim_{m=\infty} \int\limits_{(S)} \varepsilon_m^2\, dx\, dy = 0 \tag{115}$$

З другого боку, з рівностей (113) маємо:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^{(m)} \iint\limits_{(S)} L_{xy}[u_m] M_{xy}[\varphi_i]\, dx\, dy = \\ = \iint\limits_{(S)} L_{xy}[u_m] M_{xy}[z_m]\, dx\, dy = 0 \tag{116}$$

Віднявши (116) від (114) і взявши на увагу (112) та (103), дістанемо:

$$\iint\limits_{(S)} L_{xy}[u_m] \left\{ L_{xy}[u_m] + N_{xy}[u_m] + \varepsilon_m \right\} dx\, dy = 0 \tag{117}$$

Останню рівність, на основі нерівності Буняковського, переписуємо так:

$$\iint\limits_{(S)} L^2_{xy}[u_m]\,dxdy - p_m\sqrt{\iint\limits_{(S)} L^2_{xy}[u_m]\,dx\,dy \iint\limits_{(S)} (N_{xy}[u_m] + \varepsilon_m)^2\,dx\,dy} = 0, \quad (118)$$

де

$$0 \leqslant p_m \leqslant 1$$

Звідси:

$$\iint\limits_{(S)} L^2_{xy}[u_m]\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_{(S)} (N_{xy}[u_m] + \varepsilon_m)^2\,dx\,dy \quad (119)$$

Тепер звернімося до рівняння

$$L_{xy}[w] = L_{xy}[u_m] \quad (120)$$

Як знаемо, u_m є лінійна комбінація з функцій

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m,$$

що всі справджують однакові однорідні лінійні (граничні) умови. Тому єдина розв'язка задачі (120) за цих умов є:

$$w = u_m$$

і може бути записана так із допомогою Green-ової функції, спільної для задач (101) та (120):

$$u_m(x, y) = \iint\limits_{(S)} L_{\xi\eta}[u_m]\,G(x, y;\ \xi, \eta)\,d\xi\,d\eta, \quad (121)$$

Звідси

$$\frac{\partial^l u_m(x, y)}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha} = \iint\limits_{(S)} L_{\xi\eta}[u_m]\,\frac{\partial^l G(x, y;\ \xi, \eta)}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha}$$

$$\begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, k-1 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix} \quad (122)$$

З огляду на замкненість системи функцій (7), зазначивши через $\delta_{l\alpha m}$ різниці

$$\Delta_{l\alpha m} = \frac{\partial^l G(x, y;\ \xi, \eta)}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha} - \sum_{i=1}^{m} B^{(m)}_{l\alpha,i}\,\Phi_i(\xi, \eta)$$

$$\begin{pmatrix} l = 0, 1, \ldots, k-2 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix}$$

за умов

$$\iint\limits_{(S)} \Delta^2_{l\alpha}\,d\xi\,d\eta = \min,$$

матимемо:

$$\lim_{m=\infty} \iint\limits_{(S)} \delta^2_{l\alpha m}\,d\xi\,d\eta = 0$$

Отже, утворивши з рівностей (113) такі лінійні комбінації:

$$0 = \iint\limits_{(S)} L_{\xi\eta}[u_m] \sum_{i=1}^{m} B^{(m)}_{00,i}\,\Phi_i(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$$

$$0 = \iint\limits_{(S)} L_{\xi\eta}[u_m] \sum_{i=1}^{m} B^{(m)}_{l\alpha,i}\,\Phi_i(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$$

$$\begin{pmatrix} l = 0, 1, \ldots, k-2 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix}$$

та віднявши їх відповідно від (121) та від (122), дістанемо:

$$u_m(x, y) = \iint\limits_{(S)} L_{\xi\eta}[u_m]\,\delta_{00,m}\,d\xi\,d\eta$$

$$\frac{\partial^l u_m(x, y)}{\partial x^{l-\alpha}\partial y^\alpha} = \iint\limits_{(S)} L_{\xi\eta}[u_m]\,\delta_{l\alpha,m}\,d\xi\,d\eta$$

$$\begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, k-2 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix} \tag{123}$$

Звідси, на основі нерівності Буняковського та залежності (119), випливає:

$$\left[\frac{\partial^l u_m(x, y)}{\partial x^{l-\alpha}\partial y^\alpha}\right]^2 \leqslant \iint\limits_{(S)} \delta^2_{l\alpha,m}\,d\xi\,d\eta \iint\limits_{(S)} (N_{xy}[u_m] + \varepsilon_m)^2\,dx\,dy$$

$$\begin{pmatrix} l = 0, 1, \ldots, k-2 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix} \tag{124}$$

Нарешті, застосовуючи до виразу

$$(N_{xy}[u_m] + \varepsilon_m)^2$$

нерівність Cauchy та до інтеграла від цього виразу нерівність Буняковського, доходимо рівностей:

$$\left[\frac{\partial^l u_m(x, y)}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha}\right]^2 = \sum_{r=0,\,\gamma=0}^{r=k-2,\,\gamma=r} \Pi^{(r,\gamma)}_{l\alpha,m}(x, y) \iint\limits_{(S)} \left[\frac{\partial^r u_m(\xi, \eta)}{\partial \xi^{r-\gamma}\,\partial \eta^\gamma}\right]^2 d\xi\,d\eta + \Pi_{l\alpha,m} \iint \varepsilon^2_m\,d\xi\,d\eta \tag{125}$$

$$\begin{pmatrix} l = 0, 1, \ldots, k-2 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix},$$

де

$$\lim_{m=\infty} \Pi^{(r,\gamma)}_{l\alpha,m}(x, y) = 0$$

$$\lim_{m=\infty} \Pi_{l\alpha,m} = 0 \tag{126}$$

в усьому обсязі S. Із рівності (125) легко виводимо всі рівності (111) Похибки наближених рівностей

$$\frac{\partial^l z_m}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha} \approx \frac{\partial^l z}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha}$$

$$\begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, k-2 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix}$$

всі є ступеня малості не слабшого за ступінь малості числа

$$\sqrt{\iint\limits_{(S)} \varepsilon^2_m\,d\xi\,d\eta}$$

Може виникнути сумнів, чи завсіди коефіцієнти $a_i^{(m)}$ визначаються (і то цілком) рівняннями (110). Щоб це виявити, перепишімо систему рівнянь (110) так:

$$\iint\limits_{(S)} \left\{M_{xy}[u_m] - N_{xy}[u_m]\right\} M_{xy}[\varphi_i]\,dx\,dy = 0$$

і заступімо її загальнішою:

$$\iint_{(S)} \{M_{xy}[u_m] - \nu N_{xy}[u_m]\} M_{xy}[\varphi_i]\, dx\, dy = 0,$$

де ν є параметр; визначник останньої системи є

$$\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1m} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2m} \\ s_{m1} & s_{m2} & \dots & s_{mm} \end{vmatrix}, \tag{127}$$

де

$$s_{kl} = \iint_{(S)} M_{xy}[\varphi_k] M_{xy}[\varphi_l]\, dx\, dy - \nu \iint_{(S)} M_{xy}[\varphi_k] N_{xy}[\varphi_l]\, dx\, dy$$

Тим часом Gram-ів визначник

$$\left| \iint_{(S)} M_{xy}[\varphi_i] M_{xy}[\varphi_j]\, dx\, dy \right| = \left| \iint_{(S)} \Phi_i \Phi_j\, dx\, dy \right| \tag{128}$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, m)$$

є нуль тільки тоді, коли рівняння

$$M_{xy}[z] = 0$$

за тих самих граничних та початкових умов, що й рівняння (101), має інтеграл типу

$$c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_m \varphi_m,$$

відмінний од нуля; тобто коли між функціями Φ_i є лінійна залежність, але це суперечило б єдиності розв'язки задачі (101).

Отже визначник (127), що має вигляд:

$$\left| \iint_{(S)} \Phi_i \Phi_j\, dx\, dy \right| + \nu A_1 + \nu^2 A_2 + \dots + \nu^m A_m,$$

за неозначеного ν не є нуль. Легко пересвідчитися також, що точка

$$\nu = 1$$

не може бути точкою скупчення нулів многочленів (127) при нескінченному зростанні числа m. Справді бо, в противнім разі можна було б добрати такий ряд значень числа m:

$$m_1,\ m_2,\ m_3$$

і відповідний ряд значень числа ν:

$$\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3 \dots$$

$$\left(\lim_{k=\infty} \nu_k = 1\right),$$

для яких відповідні визначники (127) були б не нулі, але $\max|z_m|$ був би необмежений — усупереч першій із рівностей (111).

§ 14. Поводження наближених похідних функції z порядку $(k-1)$-го та k-го

Із рівностей (121) та (122) утворюємо таку лінійну комбінацію:

$$N_{xy}[u_m] = \iint_{(S)} L_{\xi\eta}[u_m] \cdot N_{xy}[G]\, d\xi\, d\eta \tag{129}$$

Звідси цілком подібно до того, як виведено нерівності (123) та (124), станемо відповідно:

$$N_{xy}[u_m] = \iint_{(S)} L_{\xi\eta}[u_m] . \delta_{mN}\, d\xi\, d\eta \tag{130}$$

$$N_{xy}^2[u_m] \leqslant \iint \delta_{mN}^2\, d\xi\, d\eta \iint_{(S)} (N_{xy}[u_m] + \varepsilon_m)^2\, dx\, dy \tag{131}$$

де $\iint_{(S)} \delta_{mN}\, d\xi d\eta$, є мінімум середнього квадрата виразу:

$$\Delta_{mN} = N_{xy}[G] - \sum_{i=1}^{m} b_{mN,i}\, \Phi_i(\xi, \eta)$$

або

$$\delta_{mN} = \Delta_{mN}$$

з умови, що числа $b_{mN,i}$ справджують вимогу:

$$\iint_{(S)} \Delta_{mN}^2\, d\xi\, d\eta = \min \tag{131'}$$

Звідси не трудно виводиться, через інтеграцію обох сторін та застосування нерівності Cauchy:

$$\lim_{m\to\infty} \iint_{(S)} N_{xy}^2[u_m]\, dx\, dy = 0 \tag{132}$$

А тоді бачимо з нерівності (131), що й

$$\lim_{m\to\infty} N_{xy}[u_m] = 0 \tag{133}$$

Нарешті застосуймо ще до рівності (129) нерівність Hölder-a:

$$|N_{xy}[u_m]| \leqslant \left\{ \iint_{(S)} |L_{\xi\eta}[u_m]|^p d\xi\, d\eta \right\}^{\frac{1}{p}}, \left\{ \iint_{(S)} |N_{xy}[G]|^q dx\, dy \right\}^{\frac{1}{q}} \tag{134}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad (p < 2)$$

Знаючи, що

$$\left\{ \iint_{(S)} |f|^p dx\, dy \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{ \iint_{(S)} |f|^q dx\, dy \right\}^{\frac{1}{q}} = \text{const} \tag{135}$$

при

$$p \leqslant q,$$

можемо нерівність (134) переписати так:

$$|N_{xy}[u_m]|^q \leqslant \text{const} \left\{ \iint_{(S)} L_{xy}^2[u_m]\, dx\, dy \right\} q/p \iint_{(S)} |N_{xy}[G]|^q dx\, dy$$

Звідси нетрудно вивести, спираючися на нерівність (119) та на (135), що

$$|N_{xy}[u_m]|^q \leqslant \text{const} \left\{ \iint_{(S)} |N_{xy}[u_m]|^q dx\, dy + \eta_m \right\} \iint |N_{xy}[G]|^q dx\, dy \tag{136}$$

$$q > 2, \qquad \lim_{m\to\infty} \eta_m = 0$$

Нагадавши, що $N_{xy}[G]$ має в точці

$$x=\xi,\ y=\eta$$

нескінченність того ж типу, що

$$\lg\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2},$$

бачимо, що останній інтеграл на правій стороні нерівності (136) існує. Так само з нерівності (130) маємо:

$$|N_{xy}[u_m]|^q \leqslant \text{const}\left\{\iint\limits_{(S)} |N_{xy}[u_m]|^q\,dx\,dy+\eta_m\right\}\iint\limits_{(S)} |\delta_{mN}|^q\,d\xi\,d\eta, \quad (137)$$

беручи тут знов за δ_{mN} те значення виразу Δ_{mN}, що визначається з умови:

$$\iint\limits_{(S)} (\Delta_{mn})^2\,d\xi\,d\eta=\min$$

Із нерівності (137) виводимо, як узагальнення рівності (132):

$$\lim\iint\limits_{(S)} |N_{xy}[u_m]|^q\,dx\,dy=0 \quad (138)$$
$$q\geqslant 2$$

Тепер нерівність (119) легко дає:

$$\lim_{m\to\infty}\iint\limits_{(S)} L_{xy}[u_m]\,dx\,dy=0$$

$$\lim_{m\to\infty}\iint\limits_{(S)} M_{xy}^2[u_m]\,dx\,dy=0$$

Зокрема, коли

$$M_{xy}[\ ]=P_{xy}[\ ],$$

то й

$$\lim_{m\to\infty}\iint\limits_{(S)} P_{xy}[u_m]\,dx\,dy=0$$

Отже ми довели середню квадратичну збіжність виразів $L_{xy}[z_m]$ та $M_{xy}[z_m]$ відповідно до $L_{xy}[z]$ та $M_{xy}[z]$.

§ 15. Деякі самоспряжені задачі

I. У випадку самоспряженого рівняння другого порядку:

$$L[z]=\Delta_{xy}z+A(x,y)z=F(x,y)$$

можна взяти

$$M_{xy}[z]=P_{xy}[z]=\Delta_{xy}z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Тоді, визначивши наближення z_m функції z за схемою параграфа 13, матимемо:

$$z=\lim_{m\to\infty} z_m$$

$$\lim_{m\to\infty}\iint\limits_{(S)} (\Delta_{xy}z-\Delta_{xy}z_m)^2\,dx\,dy=0$$

Крім того, очевидно з рівності

$$z-z_m=\iint\limits_{(S)} G(x,y;\xi,\eta)\left\{F(\xi,\eta)-L_{\xi\eta}[z_m]\right\}d\xi\,d\eta,$$

: G є Green-ова функція нашої задачі, маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z_m}{\partial x}=\iint\limits_{(S)}\frac{\partial G}{\partial x}\left\{\Delta_{\xi\eta}z-\Delta_{\xi\eta}z_m\right\}+\iint\limits_{(S)}\frac{\partial G}{\partial x}A(\xi,\eta)(z-z_m)\,d\xi\,d\eta$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z_m}{\partial y}=\iint\limits_{(S)}\frac{\partial G}{\partial y}\left\{\Delta_{\xi\eta}z-\Delta_{\xi\eta}z_m\right\}+\iint\limits_{(S)}\frac{\partial G}{\partial y}A(\xi,\eta)(z-z_m)\,d\xi\,d\eta$$

Іе зважаючи на те, що квадрати функцій

$$\frac{\partial G}{\partial x},\ \frac{\partial G}{\partial y} \tag{139}$$

е інтегруються, можна в цих рівностях замінити їх такими різницями:

$$g_{xm}=\frac{\partial G}{\partial x}-\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_m$$

$$g_{ym}=\frac{\partial G}{\partial y}-\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_m$$

іе через $\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_m$ та $\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_m$ названо m-ті суми Fourier-ових похідних (139) щодо функцій (107), які ми тут вважаємо за ортогоналізовані та нормовані. Ці суми існують, бо похідні (139) інтегруються. Отож дістаємо:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z_m}{\partial x}&=\iint\limits_{(S)}g_{xm}(\Delta_{\xi\eta}z-\Delta_{\xi\eta}z_m)\,d\xi\,d\eta+\iint\limits_{(S)}g_{xm}A(\xi,\eta)(z-z_m)\,d\xi\,d\eta\\ \frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z_m}{\partial y}&=\iint\limits_{(S)}g_{ym}(\Delta_{\xi\eta}z-\Delta_{\xi\eta}z_m)\,d\xi\,d\eta+\iint\limits_{(S)}g_{ym}A(\xi,\eta)(z-z_m)\,d\xi\,d\eta\end{aligned} \tag{140}$$

Нарешті, зазначивши через $P_m[z]$ різницю

$$P_m[z]=\Delta_{\xi\eta}z-(\Delta_{\xi\eta}z)_m,$$

де $(\Delta_{\xi\eta}z)_m$ є m-та сума Fourier-ової функції $\Delta_{\xi\eta}z$, нетрудно збагнути, що рівності (140) можна переписати так:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z_m}{\partial x}&=\iint\limits_{(S)}g_{xm}A(\xi,\eta)(z-z_m)\,d\xi\,d\eta+\iint\limits_{(S)}\frac{\partial G}{\partial x}p_m[z]\,d\xi\,d\eta\\ \frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z_m}{\partial y}&=\iint\limits_{(S)}g_{ym}A(\xi,\eta)(z-z_m)\,d\xi\,d\eta+\iint\limits_{(S)}\frac{\partial G}{\partial y}p_m[z]\,d\xi\,d\eta\end{aligned} \tag{141}$$

Нехай тепер функції $\Phi_i(x,y)$ мають ту властивість, що

$$\left\{\iint\limits_{(S)}|f_m(x,y)-f(x,y)|^p\,dx\to 0\quad(p>1)\right. \tag{141'}$$

при $m \to 0$, де $f(x, y)$ є будьяка функція, що її p-й степінь абсолютн інтегрується, а $f_m(x, y)$—її m-а сума Fourier. Так буде, напр., коли обсяг є прямокутник з сторонами:

$$x=0; \quad x=a$$
$$y=0; \quad y=b,$$

а функції $\Phi_1(x, y)$ мають вигляд:

$$\cos\frac{k\pi x}{a}\cos\frac{l\pi y}{b}$$
$$(l=0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Тоді з рівностей (141), застосовуючи Hölder-ову нерівність та нерівніст Міньковського:

$$\{\sum(a+b)^p\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \{\sum|a|^p + \{\sum|b|^p\}^{\frac{1}{p}}$$
$$(p>1)$$

виводимо:

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z_m}{\partial x}\right| \leqslant \alpha_m \left\{\iint\limits_{(S)}|g_{xm}|^p\, d\xi\, d\eta\right\}^{\frac{1}{p}} \iint\limits_{(S)}|A(\xi, \eta)(z-z_m)|^q\, d\xi\, d\eta\}^{\frac{1}{q}} +$$
$$+\iint\limits_{(S)}\left|\frac{\partial G}{\partial x}P_m[z]\right| d\xi\, d\eta$$

(141')

$$\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z_m}{\partial y} \leqslant |\beta_m| \{\iint\limits_{(S)}|g_{ym}|\, d\xi\, d\eta|\}^{\frac{1}{p}} \{\iint\limits_{(S)}|A(\xi, \eta)(z-z_m)|^q\, d\xi\, d\eta\}^{\frac{1}{q}} +$$
$$+\iint\limits_{(S)}\left|\frac{dG}{dy}P_m[z]\right| d\xi\, d\eta$$

$$|\alpha_m| \leqslant 1, \quad |\beta_m| \leqslant 1$$

Звідси далі:

$$\iint\left|\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z_m}{\partial x}\right|^q dxdy = \text{const}\{\iint\limits_{(S)}dxdy\iint\limits_{(S)}|g_{xm}|^p d\xi d\eta\}^{\frac{q}{p}}\iint\limits_{(S)}|A(\xi, \eta)(z-z_m)^q\, d\xi d\eta +$$
$$+\text{const}\left\{\iint\limits_{(S)}dx\,dy\iint\limits_{(S)}\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|P_m[z]\, d\xi\, d\eta\right\}^q \iint\limits_{(S)}\left|\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial_m z}{\partial y}\right|^q dx\,dy =$$ (142)
$$=\text{const}\{\iint\limits_{(S)}dx\,dy\iint\limits_{(S)}|g_{ym}|^p\, d\xi\, d\eta\}^{\frac{q}{p}}\iint\limits_{(S)}A(\xi, \eta)(z-z_m)^q\, d\xi\, d\eta +$$
$$+\text{const}\left\{\iint\limits_{(S)}dx\,dy\iint\limits_{(S)}\left|\frac{dG}{dy}\right|P_m[z]\, d\xi\, d\eta\right\}^q.$$

леж цілком подібно до рівностей (142) маємо:

$$\iint\limits_{(S)}|z-z_m|^q\,dx\,dy=\mathrm{const}\{\iint\limits_{(S)}|g_m|^p\,d\xi\,d\eta\}^{\frac{1}{p}}\iint\limits_{(S)}|A(\xi,\eta)(z-z_m)^q\,d\xi\,d\eta+$$

$$+\{|\iint\limits_{(S)}GP_m[z]\,d\xi\,d\eta|^q \qquad (142')$$

З рівностей (142) та (142') виводимо:

$$\lim_{m\to\infty}\iint\limits_{(S)}|z-z_m|^q\,dx\,dy=0$$

$$\lim_{m\to\infty}\iint\limits_{(S)}\left|\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z_m}{\partial x}\right|^q dx\,dy=0$$

$$\lim_{m\to\infty}\iint\limits_{(S)}\left|\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z_m}{\partial y}\right|^q dx\,dy=0$$

А тоді нерівності (141) дають:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{m\to\infty}\frac{\partial z_m}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{m\to\infty}\frac{\partial z_m}{\partial y}$$

Отже в цьому випадку маємо збіжність наближених похідних $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ього загальна теорія попереднього параграфа не дала.

Обмежна вимога (141'), накладена на функцію $\Phi_i(x, y)$, щоправда, зменшує значення цього результату (загальніший результат див. у Додатку 1).

II. Для рівняння 4-го порядка:

$$L_{xy}[z]=\Delta_{xy}\Delta_{xy}z+A(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+B(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial z^2}+$$

$$+D(x,y)z=F(x,y)$$

за належних лінійних однорідних граничних умов, поклавши

$$M_{xy}[z]=\Delta_{xy}\Delta_{xy}z=\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}+z\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 z}{\partial y^4},$$

маємо ($m\to\infty$):

$$z_m\to z$$

$$\frac{\partial z_m}{\partial x}\to\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{\partial z_m}{\partial y}\to\frac{dz}{dy}$$

$$\frac{\partial^2 z_m}{\partial x^2}\to\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z_m}{\partial x\,\partial y} \to \frac{\partial^2 z_m}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z_m}{\partial y^2} \to \frac{\partial^2 z_m}{\partial y^2}$$

згідно з загальною теорією. Але за умови (141′) щодо функції $\Phi_i($ дістаємо так само, як у попередньому прикладі, ще збіжність усіх на жених третіх похідних, і нарешті

$$\lim_{m\to\infty} \iint_{(S)} (\Delta_{2y}\Delta_{xy} z - \Delta_{xy}\Delta_{xy} z_m)^2\,dx\,dy = 0$$

§ 16. Інший довід збіжності способу

Використавши міркування прикладу I попереднього параграфа, мож довід збіжності способу, даний у параграфах 13 та 14, змінити, ві нувши нерівність (119), а натомість використавши деякі прості вла вості розвинень функцій за ортогональними функціями.

Будемо вважати, що систему функцій

$$\Phi_0(x, y),\ \Phi_1(x, y),\ \Phi_2(x, y), \ldots \qquad (\ $$

ортогоналізовано та нормовано в обсязі S.

Додержуючи зазначень параграфа 13, маємо очевидно

$$u_m = \iint_{(S)} G(x, y;\ \xi, \eta)\, L_{\xi\eta}[u_m]\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \iint_{(S)} G(x, y;\ \xi, \eta)\, M_{\xi\eta}[u_m]\, d\xi d\eta + \iint_{(S)} G(x, y;\ \xi, \eta)\, N_{xy}[u_m]\, d\xi\, d\eta \qquad (\ $$

Назвавши через $f_m(\xi, \eta)$ суму Fourier m-го порядку функції f, утвор з функцій (143), можемо з рівностей (113) утворити таку:

$$\iint_{(S)} G_m L_{\xi\eta}[u_m]\, d\xi\, d\eta = \iint_{(S)} G_m M_{\xi\eta}[u_m]\, d\xi\, d\eta - \iint_{(S)} G_m N_{\xi\eta}[u_m]\, d\xi\, d\eta = 0 \quad (1$$

Зазначивши різницю $G - G_m$ через g_m, виводимо з рівностей (144) та (1

$$u_m = \iint_{(S)} g_m \{M[z] - M[z_m]\}\, d\xi\, d\eta - \iint_{(S)} g_m N_{\xi\eta}[u_m]\, d\xi\, d\eta$$

і звідси:

$$u_m = \iint_{(S)} G(\mu_{\xi\eta}[z])_m\, d\xi\, d\eta - \iint_{(S)} g_m N_{\xi\eta}[u_m]\, d\xi\, d\eta \qquad (1$$

де $(\mu_{\xi\eta}[z])_m$ означає різницю між $M[z]$ та сумою перших m членів р Fourier цієї функції щодо функцій (143).

Далі, з рівності (144) маємо:

$$N_{xy}[u_m] = \iint_{(S)} N_{xy}[G]\, M_{\xi\eta}[u_m]\, d\xi\, d\eta - \iint_{(S)} N_{xy}[G]\, N_{\xi\eta}[u]\, d\xi\, d\eta, \qquad (1$$

а з рівностей (113) виводимо:

$$\iint_{(S)} (N_{xy}[G])_m M_{\xi\eta}[u]\, d\xi\, d\eta - \iint_{(S)} (N_{xy}[G])_m N_{\xi\eta}[u_m]\, d\xi\, d\eta = 0, \qquad (1$$

де $(N_{xy}[G])_m$ є знов сума перших m членів Fourier-ового ряду функції $N_{xy}[G]$ щодо функцій

$$\Phi_0(\xi, \eta),\ \Phi_1(\xi, \eta),\ \Phi_2(\xi, \eta), \ldots \tag{143'}$$

Із рівностей (146) та (147), увівши зазначення:

$$h_m(\xi, \eta) = N_{xy}[G] - (N_{xy}[G])_m,$$

дістаємо:

$$N_{xy}[u_m] = \iint_{(S)} h_m \{M_{\xi\eta}[z_m] - M_{\xi\eta}[z] - \iint_{(S)} h_m N_{\xi\eta}[u_m]\, d\xi\, d\eta$$

і остаточно:

$$N_{xy}[u_m] = \iint_{(S)} N_{xy}[G]\,(M_{\xi\eta}[z])_m\, d\xi\, d\eta - \iint h_m N_{\xi\eta}[u_m]\, d\xi\, d\eta \tag{148}$$

Звідси, за допомогою нерівностей Cauchy та Буняковського, виводимо

$$N_{xy}^2[u_m] \leqslant \text{const} \iint_{(S)} N_{xy}^2[G]\, d\xi\, d\eta \iint_{(S)} (\mu_{\xi\eta}[z])_m^2\, d\xi\, d\eta +$$
$$+ \text{const} \iint_{(S)} h_m^2\, d\xi\, d\eta \iint_{(S)} N_{\xi\eta}^2[u_m]\, d\xi\, d\eta$$

Нарешті, проінтегрувавши цю нерівність по обсягу S, маємо:

$$\iint_{(S)} N_{xy}^2[u_m]\, d\xi\, d\eta \leqslant \text{const} \iint_{(S)} \iint_{(S)} N_{xy}^2[G]\, d\xi\, d\eta\, dx\, dy \iint_{(S)} (\mu_{\xi\eta}[z])_m^2\, d\xi\, d\eta +$$
$$+ \text{const} \iint_{(S)} \iint_{(S)} h_m^2\, d\xi\, d\eta\, dx\, dy \iint_{(S)} N_{xy}[u_m]\, dx\, dy$$

Звідси виходить, що

$$\iint_{(S)} N_{xy}^2[u_m]\, dx\, dy \leqslant \text{const} \iint_{(S)} \iint_{(S)} N_{xy}^2[G]\, d\xi\, d\eta\, dx\, dy \iint_{(S)} (\mu_{\xi\eta}[z])^2\, d\xi\, d\eta$$

Через те, що функція

$$M[z] = F(xy) + N[z]$$

інтегрується разом зі своїм квадратом в обсязі S, права сторона останньої нерівності йде до нуля при необмеженому зростанні m. Отже

$$\lim_{m \to \infty} \iint N_{xy}^2[u_m]\, dx\, dy = 0 \tag{149}$$

Тоді з рівності (145') маємо:

$$u_m^2 \leqslant \text{const} \iint_{(S)} G^2\, d\xi\, d\eta \iint_{(S)} (\mu_{\xi\eta}[z])_m\, d\xi\, d\eta +$$
$$+ \text{const} \iint_{(S)} g_m^2\, d\xi\, d\eta \iint_{(S)} N_{\xi\eta}^2[u_m]\, d\xi\, d\eta \tag{150}$$

та звідси:

$$\iint_{(S)} u_m^2\, dx\, dy \leqslant \text{const} \iint_{(S)} \iint_{(S)} G^2\, d\xi\, d\eta\, dx\, d\eta \iint_{(S)} (\mu_{\xi\eta}[z])_m^2\, d\xi\, d\eta +$$
$$+ \text{const} \iint_{(S)} \iint_{(S)} g_m^2\, d\xi\, d\eta\, dx\, dy \iint_{(S)} N_{\xi\eta}^2[u_m]\, d\xi\, d\eta,$$

що на підставі щойно одержаного результату дає:

$$\lim_{m \to 0} z_m = z$$

$$\lim_{m \to \infty} \iint_{(S)} (z - z_m)^2\, dx\, dy = 0$$

Цілком так само можна вивести, що

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\partial^l z_m}{\partial x^\alpha\,\partial y^{l-\alpha}}=\frac{\partial^l z}{\partial x^\alpha\,\partial y^{l-\alpha}}$$

$$\begin{pmatrix} l=0,1,\ldots,k-2 \\ \alpha=0,1,\ldots,l \end{pmatrix}$$

та

$$\lim_{m\to\infty}\iint_{(S)}\left(\frac{\partial^l z}{\partial x^\alpha\,\partial y^{l-\alpha}}-\frac{\partial^l z_m}{\partial x^\alpha\,\partial y^{l-\alpha}}\right)^2 dx\,dy=0$$

$$\begin{pmatrix} l=0,1,\ldots,k-2 \\ \alpha=0,1,\ldots,l \end{pmatrix}$$

Важливе питання про одностайність збіжності виразу z_m та його похідних при зближенні точки (x, y) до границі обсягу лишається тут нерозв'язаним.

§ 17. Використання Green-ової функції оператора $M_{xy}[\ \ ]$

Оператор $M_{xy}[\ \ ]$ може мати простішу форму ніж $L_{xy}[\ \ ]$. У випадку еліптичного рівняння 2-го порядку його не раз можна взяти в формі Laplace-ового оператора:

$$\Delta_{xy}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Відповідно до цього аналітичні властивості Green-ової функції задачі

$$\begin{gathered} M_{xy}[z]=F(x,y) \\ U_l[z]=0 \\ (l=0,1,\ldots) \end{gathered} \tag{151}$$

будуть простіші за аналітичні властивості Green-ової функції задачі

$$\begin{gathered} L_{xy}[z]=F(x,y) \\ U_l[z]=0 \\ (l=0,1,\ldots) \end{gathered} \tag{151'}$$

Назвімо Green-ову функцію задачі (151) знов через

$$G(x, y; \xi, \eta)$$

Отже, напр., коли $M_{xy}[\ \ ]$ є Laplace-ів оператор, то $G(x, y;\ \xi, \eta)$ — аналітична функція всі хчотирьох змінних скрізь у обсязі S, за винятком точки

$$x=\xi,\ y=\eta$$

При тім, коли контур s аналітичний, то G можна однозначно аналітично продовжити поза цей контур у довільній його точці. Коли контур складається зі скінченної кількості аналітичних дуг, то через них це продовження можливе скрізь, крім хіба кутових точок (точок сполучення цих дуг).

Отож покажімо, як у міркуваннях доводу збіжності способу можна обмежитися використанням самої Green-ової функції G задачі (151).

Маємо очевидну рівність:

$$u_m=\iint_{(S)} G(x, y; \xi, \eta)\,M_{\xi\eta}[u_m]\,d\xi\,d\eta$$

або:

$$u_m = \iint G(x, y; \xi, \eta) L_{\xi\eta}[u_m] d\xi d\eta + \iint G(x, y; \xi, \eta) N_{\xi\eta}[u_m] d\xi d\eta \tag{152}$$

Увівши тепер зазначення

$$v_m = u_m - \iint_{(S)} G(x, y; \xi, \eta) N_{\xi\eta}[u_m] d\xi d\eta,$$

маємо замість (152) рівність:

$$v_m = \iint_{(S)} G(x, y; \xi, \eta) L_{xy}[u_m] \tag{153}$$

Далі з (152) маємо:

$$N_{xy}[u_m] = \iint_{(S)} N_{xy}[G] L_{\xi\eta}[u_m] d\xi d\eta + \iint_{(S)} N_{\xi\eta}[G] N_{\xi\eta}[u_m] d\xi d\eta$$

або, по зазначенні

$$w_m = N_{xy}[u_m] - \iint_{(S)} N_{\xi\eta}[G] N_{\xi\eta}[u_m] d\xi d\eta,$$

рівність:

$$w_m = \iint_{(S)} N_{xy}[G] L_{\xi\eta}[u_m] d\xi d\eta \tag{154}$$

Далі тут, як і в параграфах 13 та 14, через використання основних рівностей (113), дістаємо:

$$w_m = \iint_{(S)} \delta_{mN} L_{\xi\eta}[u_m] d\xi d\eta$$

$$v_m = \iint_{(S)} \delta_{00,m} L_{\xi\eta}[u_m] d\xi d\eta \tag{155}$$

$$\frac{\partial^l v_m}{\partial x^{l-\alpha} \partial y^\alpha} = \iint_{(S)} \delta_{l\alpha,m} L_{\xi\eta}[u_m] d\xi d\eta$$

$$\begin{pmatrix} l = 1, \ldots, k-2 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix}$$

Тут величини δ_{mN}, $\delta_{00,m}$, $\delta l\alpha_m$, для нової функції Green-а утворено так само, як у параграфах 13 та 14 для Green-ової функції задачі (151').

Із рівностей (155) виводимо

$$w_m^2 \leqslant \iint_{(S)} \delta_{mN}^2 d\xi d\eta \cdot \iint_{(S)} L_{\xi\eta}^2[u_m] d\xi d\eta$$

$$v_m^2 \leqslant \iint_{(S)} \delta_{00,m} d\xi d\eta \cdot \iint_{(S)} L_{\xi\eta}^2[u_m] d\xi d\eta \tag{157}$$

$$\left(\frac{\partial^l v_m}{\partial x^{l-\alpha} \partial y^\alpha}\right)^2 \leqslant \iint_{(S)} \delta_{l\alpha,m}^2 d\xi d\eta \cdot \iint_{(S)} L_{\xi\eta}^2[u_m] d\xi d\eta$$

$$\begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, k-2 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix}$$

Використавши ще нерівність (119), звідси виведемо, що

$$|w_m| \leqslant \text{const} \sqrt{\iint_{(S)} \delta_{mN}^2 d\xi d\eta} \left[\sqrt{\iint_{(S)} N^2[n_m] dx dy} + \varepsilon_m^2\right].$$

Звідси, назвавши через $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$ розв'язне ядро інтегрального рівняння:

$$t(x, y) = \iint\limits_{(S)} N_{xy}[G]\, t(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + F(x, y),$$

дістанемо:

$$N_{xy}[u_m] = \text{const} \iint\limits_{(S)} \Gamma(x, y; \xi, \eta)\, w_m(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$N_{xy}^2[u_m] = \text{const} \iint\limits_{(S)} \Gamma^2(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \cdot \iint\limits_{(S)} w_m^2(x, y)\, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \iint\limits_{(S)} \Gamma^2(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \cdot \iint\limits_{(S)} \iint\limits_{(S)} \delta_{mN}^2\, d\xi\, d\eta\, dx\, dy \cdot$$

$$\cdot \left(\iint\limits_{(S)} N_{xy}^2[u_m]\, dx\, dy + \varepsilon_m^2 \right)$$

Звідси:

$$\iint\limits_{(S)} N_{xy}^2[u_m]\, dx\, dy \leqslant \text{const} \iint\limits_{(S)} \iint\limits_{(S)} \Gamma^2(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\, dx\, dy \cdot$$

$$\cdot \iint\limits_{(S)} \iint\limits_{(S)} \delta_{mN}^2\, d\xi\, d\eta\, dx\, dy \cdot \left(\iint\limits_{(S)} N_{xy}^2[u_m]\, dx\, dy + \varepsilon_m^2 \right)$$

Це показує, що

$$\lim_{m \to \infty} \iint\limits_{(S)} N_{yx}^2[u_m]\, dx\, dy = 0$$

Тоді друга та третя нерівності (157) дають

$$\left.\begin{aligned} |v_m| &\leqslant \text{const} \sqrt{\delta_{00,m}^2\, d\xi\, d\eta \cdot \eta_{00,m}^2}, \\ \left| \frac{\partial^l v_m}{\partial x^{l-\alpha} \partial y^\alpha} \right| &\leqslant \text{const} \sqrt{\delta_{l\alpha,m}^2\, d\xi\, d\eta\; \eta_{l\alpha,m}^2} \\ &\begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, k-2 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l, \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (158)$$

де

$$\eta_{00,m} \to 0, \quad \eta_{l\alpha,m} \to 0$$

при необмеженому зростанні m. Ці нерівності дають:

$$|u_m| \leqslant \iint \Gamma_{00}^2(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \cdot \varepsilon_{00,m}$$

$$\left| \frac{\partial^l u_m}{\partial x^{l-\alpha} \partial y_\alpha} \right| \leqslant \iint \Gamma_{l\alpha}^2(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \cdot \varepsilon_{l\alpha,m},$$

де

$$\Gamma_{00}(x, y; \xi, \eta) \text{ та } \Gamma_{l\alpha}(x, y; \xi, \eta)$$

є відповідно розв'язні ядра Fredholm-ових інтегральних рівнянь з ядрами:

$$G(x, y; \xi, \eta), \quad \frac{\partial^l G}{\partial x^{l-\alpha} \partial y^\alpha},$$

і сталі $\varepsilon_{00,m}$ та $\varepsilon_{l\alpha,m}$ ідуть до нуля при необмеженому зростанні m. Звідси виводимо, що

$$\lim_{m\to\infty} \iint\limits_{(S)} (z - z_m)^2\, dx\, dy = 0$$

$$\lim_{m\to\infty} \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial^l z}{\partial x^{l-\alpha}\, \partial y^\alpha} - \frac{\partial^l z_m}{\partial x^{l-\alpha}\, \partial y^\alpha} \right)^2 dx\, dy = 0$$

$$\begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, k-2 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix}$$

та

$$\lim z_m = z$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\partial^l z_m}{\partial x^{l-\alpha}\, \partial y^\alpha} = \frac{\partial^l z}{\partial x^{l-\alpha}\, \partial y^\alpha}$$

$$\begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, k-2 \\ \alpha = 1, 0, \ldots, l \end{pmatrix}$$

§ 18. Застосування способу до рівняння гіперболічного типу

Довід збіжності способу в цьому розділі ми будуємо на заміні даного рівняння з частинними похідними певним інтегральним або інтегро-диференціальним рівнянням, де бере участь наближення z_m шуканої функції z. Самий довід щастить провести завдяки існуванню та певним властивостям щодо суцільності, диференційувальності та інтегрувальності Green-ової функції задачі. При тому основна властивість Green-ової функції, яка використовується, є „джерельне" представлення інтеграла рівняння

$$L_{xy}[z] = F(x, y),$$

тобто представлення у формі:

$$z = \iint\limits_{(S)} G(x, y;\ \xi, \eta)\, F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

У задачах гіперболічного типу 2-го порядку роль Green-ової функції грає так звана Riemann-ова функція, що ми її називаємо теж Green-овою.

Покажімо коротко, як основну ідею способу можна застосувати до рівнянь із частинними похідними другого порядку гіперболічного типу

$$L_{xy}[z] = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + [c(x, y) - \lambda\, c(x, y)]\, z = f(x, y) \quad (159)$$

Обмежмося такими простими граничними умовами:

$$z(0, y) = 0$$
$$z(x, 0) = 0 \quad (160)$$

для інтеграла z у квадраті

$$0 \leqslant x \leqslant 1$$
$$\leqslant y \leqslant 1\ 0$$

Коли функції φ_i утворюють повну систему щодо функцій, які справджують умови (160), напр. систему:

$$x^{i+1}y^{j+1}$$
$$(i, j = 0, 1, 2, \ldots),$$

то система функцій

$$\Phi_k = M_{xy}[\varphi_k]$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots),$$

де

$$M_{xy}[z] = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz,$$

за певних широких умов щодо коефіцієнта $c(x, y)$, є замкнена.

Навпаки, коли замкнену систему:

$$\Phi_0(x, y),\ \Phi_1(x, y),\ \Phi_2(x, y),$$

взяти довільно, а функції φ_k визначити з рівнянь

$$M_{xy}[\varphi_k] = \Phi_k \tag{161}$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots,)$$

за умов (160), то вони утворюватимуть повну систему для функцій, що справджують умови (160). Розв'язати рівняння (161) легко, напр., коли взяти

$$c = ab + \frac{\partial a}{\partial x} \quad \text{або:} \quad c = ab + \frac{\partial b}{\partial y}$$

бо тоді

$$M_{xy}[z] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y} + az\right) + b\left(\frac{\partial z}{\partial y} + az\right)$$

або відповідно

$$M_{xy}[z] = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + bz\right) + a\left(\frac{\partial z}{\partial x} + bz\right)$$

Покажімо, що за наближену розв'язку задачі (159)—(161) можна взяти суму:

$$z_m = a_0^{(m)}\varphi_0 + a_1^{(m)}\varphi_1 + \ldots + a_m^{(m)}\varphi_m,$$

визначену рівняннями:

$$\int_0^1\int_0^1 L_{xy}[z_m]\,M_{xy}[\varphi_i]\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 M_{xy}[\varphi_i]\,dx\,dy$$
$$(i = 0, 1 \ldots, m)$$

або, що на одно сходить, рівняннями:

$$\int_0^1\int_0^1 L_{xy}[z_m - z]\,\Phi_i\,dx\,dy = 0 \tag{162}$$
$$(i = 0, 1, \ldots, m)$$

Назвавши Green-ову (Riemann-ову) функцію виразу $M_{xy}[\ ]$ через $G(x, y; \xi, \eta)$ та приписавши їй нульові значення для

$$\xi < x$$

або

$$\eta < y,$$

дістанемо

$$z_m - z = \int_0^1\int_0^1 G\,M_{\xi\eta}[z_m - z]\,d\xi\,d\eta$$

або

$$z_m - z = \int_0^1 \int_0^1 G\,\Gamma_{\xi\eta}[z_m - z]\,d\xi\,d\eta - \lambda \int_0^1 \int_0^1 G\,C(\xi, \eta)\big(z_m(\xi, \eta) - z(\xi, \eta)\big)\,d\xi\,d\eta \qquad (163)$$

Узявши на увагу, що функція G інтегрується разом зо своїм квадратом через комбінацію рівностей (163) та (162), легко прийдемо до залежності:

$$z_m - z + \lambda \int_0^x \int_0^y G\,C(\xi, \eta)\,(z_m(\xi, \eta) - z(\xi, \eta))\,d\xi\,d\eta = \varepsilon_m \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 L^2_{\xi\eta}[z_m - z]\,d\xi\,d\eta} \qquad (164)$$

де

$$\lim \varepsilon_m = 0 \quad (m \to \infty)$$

Із другого боку, з рівностей (162) можемо очевидно зробити таку лінійну комбінацію:

$$\int_0^1 \int_0^1 L_{xy}[z_m - z]\,(M_{xy}[z_m - z] + a_m)\,dx\,dy = 0,$$

де

$$\lim \int_0^1 \int_0^1 \alpha_m^2\,dx\,dy = 0,$$

що з неї легко виведемо нерівність:

$$\int_0^1 \int_0^1 L^2_{xy}[z_m - z]\,dx\,dy \leqslant \int_0^1 \int_0^1 \{\lambda C(z_m - z) - \alpha_m\}^2\,dx\,dy$$

Тоді (164) дасть:

$$(z_m - z)^2 \sim \varepsilon_m^2 \int_0^1 \int_0^1 \{\lambda\,C(z_m - z] - \alpha_m\}^2\,dx\,dy$$

Отже

$$z_m - z \sim \varepsilon_m \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 \alpha_m^2\,dx\,dy}$$

$$z = \lim_{m \to \infty} z_m$$

§ 19. Спосіб найменших квадратів та спосіб Ritz-a

Взявши за оператор $M_x[\,]$ сам оператор $L_{xy}[\,]$, зведемо спосіб моментів до мінімізації інтеграла

$$I_m(a_0^{(m)}, \ldots a_m^{(m)}) = \iint\limits_{(S)} L^2_{xy}[z - z_m]\,dx\,dy, \qquad (165)$$

як функції від $a_0^{(m)}, a_1^{(m)}, \ldots, a_m^{(m)}$.

Тут очевидно для того, щоб спосіб був корисний, треба вміти добрати функції $\varphi_i(x, y)$ незалежно, а не визначати їх із рівностей

$$M_{xy}[\varphi_i] = \Phi_i(x, y)$$

$$U_l[\varphi_i] = 0$$

$$(l = 0, 1, \ldots),$$

бо це звелося б на розв'язання самої даної задачі.

Цікаво тут зауважити, що деколи спосіб найменших квадратів дає змогу зробити гостріші висновки щодо збіжності виразу z_m та його похідних, аніж зроблено в попередніх параграфах. Переписавши рівність (165) так:

$$I_m = \iint\limits_{(S)} \left[F(x, y) - \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \Phi_i(x, y) \right]^2 dx\,dy$$

і припустивши, що функції $\Phi_i(x, y)$ утворюють в обсязі S разом з його межею (s) систему не тільки замкнену, але й повну, не раз будемо мати

$$F(x, y) = \lim_{m\to\infty} L[z_m] \tag{166}$$

одностайно в обсязі S. Тоді з рівностей

$$z - z_m = \iint\limits_{(S)} G(x, y; \xi, \eta) L_{\xi\eta}[z - z_m]\, d\xi\, d\eta$$

$$\frac{\partial^l z}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha} - \frac{\partial^l z_m}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha} = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial^l G(x, y; \xi, \eta)}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha} L_{\xi\eta}[z - z_m]\, d\xi\, d\eta \tag{166'}$$

$$\begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, k-1 \\ \alpha = 1, 2, \ldots, l \end{pmatrix},$$

де фігурують також похідні порядку $(k-1)$-го, виводимо:

$$|z - z_m| \leqslant \max |L_{\xi\eta}[z - z_m]| \iint\limits_{(S)} |G|\, d\xi\, d\eta$$

$$\left| \frac{\partial^l z}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha} - \frac{\partial^l z_m}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha} \right| \leqslant \max |L_{\xi\eta}[z - z_m]| \iint\limits_{(S)} \left| \frac{\partial^l G}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha} \right| d\xi\, d\eta \tag{166''}$$

Отже маємо не тільки

$$z = \lim_{m\to\infty} z_m$$

$$\frac{\partial^l z}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha} = \lim_{m\to\infty} \frac{\partial^l z_m}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha} \tag{167}$$

$$\begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, k-2 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix},$$

але й

$$\frac{\partial^{k-1} z}{\partial x^{k-1-\alpha}\,\partial y^\alpha} = \lim_{m\to\infty} \frac{\partial^{k-1} z_m}{\partial x^{k-1-\alpha}\,\partial y^\alpha} \tag{167'}$$

$$(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1),$$

бо функції $\dfrac{\partial^{k-1} G}{\partial x^{k-1-\alpha}\,\partial y^\alpha}$ інтегруються в обсязі S.

Так само з формул (166') та (166'') можна вивести, напр., крім рівностей

$$\lim_{m\to\infty} \iint\limits_{(S)} |z - z|_m{}^p\, dx\, dy = 0$$

$$\lim_{m\to\infty} \iint\limits_{(S)} \left| \frac{\partial^l z}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha} - \frac{\partial^l z_m}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha} \right|^p dx\, dy = 0$$

$$\begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots k-2 \\ \alpha = 0, 1, \ldots l \end{pmatrix},$$

також рівності

$$\lim_{m\to\infty}\iint_{(S)}\left|\frac{\partial^{k-1}z}{\partial x^{k-1-\alpha}\partial y^{\alpha}}-\frac{\partial^{k-1}z_m}{\partial x^{k-1-\alpha}\partial y^{\alpha}}\right|^p dxdy=0$$

$$(\alpha=0,1,\ldots,k-1)$$

для довільного $p>0$, отже й для $p=2$.

Із рівностей (166), (167) через лінійну комбінацію випливає й рівність:

$$\sum_{\alpha=0}^{k}A_{k-\alpha,\alpha}\frac{\partial^k z}{\partial x^{k-\alpha}\partial y^{\alpha}}=\lim_{m\to\infty}\sum_{\alpha=0}^{k}A_{k-\alpha,\alpha}\frac{\partial^k z_m}{\partial x^{k-\alpha}\partial y^{\alpha}},$$

також

$$\lim_{m\to\infty}\iint_{(S)}\left|A_{k-\alpha,\alpha}\frac{\partial^k(z-z_m)}{\partial x^{k-\alpha}\partial y^{\alpha}}\right|^p dx=0$$

Коли порядок похибки рівності (166) щодо $\frac{1}{m}$ високий, то при доборі функцій $\Phi_i(x,y)$ у формі многочленів, звичайних або тригонометричних, та й у багатьох інших випадках поруч рівності (166) існуватимуть такі рівності:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}&=\lim_{m\to\infty}\frac{\partial}{\partial x}L[z_m]\\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2}&=\lim_{m\to\infty}\frac{\partial^2}{\partial^2 x}L[z_m]\\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}&=\lim_{m\to\infty}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}L[z_m]\\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}&=\lim_{m\to\infty}\frac{\partial^2}{\partial y^2}L[z_m]\end{aligned}\tag{168}$$

одностайно в обсязі S та на його межі.

Тоді, застосовуючи Green-ове перетворення до останньої з рівностей (166'), матимемо:

$$\frac{\partial^{k-1}(z-z_m)}{\partial x^{k-1-\alpha}\partial y^{\alpha}}=\int_{(S)}\left(\int\frac{\partial^{k-1}G}{\partial x^{k-1-\alpha}\partial y^{\alpha}}d\xi\right)L_{\xi\eta}[z-z_m]\,d\eta-$$

$$-\iint_{(S)}\left(\int\frac{\partial^{k-1}G}{\partial x^{k-1-\alpha}\partial y^{\alpha}}d\xi\right)\frac{\partial}{\partial\xi}L_{\xi\eta}[z-z_m]\,d\xi\,d\eta$$

Отже в довільній внутрішній точці обсягу S буде, в результаті диференціювання цієї рівності по змінному x:

$$\frac{\partial^k(z-z_m)}{\partial x^{k-\alpha}\partial y^{\alpha}}=\int_{(S)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\xi\partial^{k-1}G}{\partial x^{k-1-\alpha}\partial y^{\alpha}}d\xi\right)L_{\xi\eta}[z-z_m]\,d\eta-$$

$$-\iint_{(S)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\frac{\xi\partial^{k-1}G}{\partial x^{k-1}\partial y^{\alpha}}d\xi\right)\frac{\partial}{\partial\xi}L_{\xi\eta}[z-z_m]\,Ld\xi\,d\eta$$

Через те, що $L_{\xi\eta}[z-z_m]$ та $\frac{\partial}{\partial\xi}L_{\xi\eta}[z-z_m]$ одностайно йдуть до нуля, то йдуть до нуля й обидва інтеграли правої сторони нашої рівності, отже

$$\frac{\partial^k z}{\partial x^{k-\alpha}\partial y^\alpha}=\lim_{m\to\infty}\frac{\partial^k z_m}{\partial x^{k-\alpha}\partial y^\alpha}$$

Таким самим міркуванням можна встановити рівності:

$$\frac{\partial^{k-1+\beta} z}{\partial x^{k-1+\beta-\alpha}\partial y^\alpha}=\lim_{m\to\infty}\frac{\partial^{k-1+\beta} z_m}{\partial x^{k-1+\beta-\alpha}\partial y^\alpha}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha=0, 1\ldots, k-1+\beta\\ \beta=1,2,\ldots,\lambda\end{pmatrix}, \tag{169}$$

де λ є найвищий порядок похідних від $F(x, y)$, що фігурують у рівностях (168).

У випадку самоспряженої задачі

$$L_{xy}[z]=\Delta_{xy}z+A(x,y)z=F(x,y)$$

$$z/_S=0$$

можна спосіб моментів звести к мінімізацію інтеграла:

$$I(a_0^{(m)}, a_1^{(m)},\ldots,a_m^{(m)})=\iint\limits_{(S)}\left\{\left(\frac{\partial z_m}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z_m}{\partial y}\right)^2+A_{xy}z_m^2-2Fz_m\right\}dx\,dy \tag{170}$$

якщо можна належно добрати функції $\varphi_i(x, y)$.

Справді, умова minimum-у цього інтеграла:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial I}{\partial a_i^{(m)}}=\iint\limits_{(S)}\left(\frac{\partial z_m}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}+\frac{\partial z_m}{\partial y}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}+A_{xy}z_m\varphi_i-F\varphi_i\right)\partial x\,\partial y=0$$

$$(i=0,1,\ldots,m)$$

через застосування Green-ового перетворення, може бути переписана так:

$$\iint\limits_{(S)}\left(\frac{\partial^2 z_m}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z_m}{\partial y^2}+A_{xy}z_m-F\right)\varphi_i(x,y)\,dx\,dy=0 \tag{171}$$

Отже, коли функції φ_i є фундаментальні функції задачі типу

$$\begin{aligned}M_{xy}[\varphi_i]&=\lambda\varphi_i\\ U[\varphi_i]&=0,\end{aligned} \tag{172}$$

де

$$M_{xy}[z]=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+Bz$$

(B—довільне), то рівності (171) перепишуться так:

$$\iint\limits_{(S)}L_{xy}[z_m]\,M_{xy}(\varphi_i)\,dx\,dy=0$$

$$(i=0,1,2,\ldots,m),$$

тобто в формі рівнянь для визначення коефіцієнтів $a^{(m)}$ у способі моментів. Так виявляється, що Ritz-ів спосіб є окремий випадок способу моментів; при тому показується, як можна напевно зробити цей спосіб збіжним: досить, щоб функції φ_i були фундаментальними функціями задачі типу (172).

Хоч цей результат дано на окремому прикладі, але він є загальний.

§ 20. Спосіб найменших q-их степенів

Міркування, цілком аналогічні до міркувань попереднього параграфа, доводять, що спосіб визначати коефіцієнти $a_i^{(m)}$ із умови

$$I_q(a_0^{(m)}, a_1^{(m)}, \ldots, a_m^{(m)}) = \iint\limits_{(S)} |L_{xy}[z - z_m]|^q \, dx\, dy = \min\,, \tag{173}$$

де q є будьяке додатне число > 1, дає теж збіжний процес для наближеного визначення функції z та її похідних. Треба тільки зразу зауважити що навіть у випадку, коли q є ціле парне число, умови minimum-у:

$$\frac{\partial I_q}{\partial a_i^{(m)}} = 0$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m)$$

являють собою систему нелінійних рівнянь, малоприступну практично.

Припустивши, що minimum (173), при необмеженому зростанні m іде до нуля (що буде напевно, коли функція $F(x, y)$ взята згідно з нашими вимогами, а функції $\Phi_i\,(x, y)$ утворюють систему повну), можемо з рівності

$$z - z_m = \iint\limits_{(S)} G(x, y;\ \xi, \eta)\, L_{\xi\eta}\,[z - z_m]\, d\xi\, d\eta$$

з допомогою Hölder-ової нерівності вивести:

$$|z - z_m| \leqslant \left\{ \iint\limits_{(S)} |G|^p \, d\xi\, d\eta \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \iint\limits_{(S)} |L_{\xi\eta}[z - z_m]|^q \, d\xi\, d\eta \right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

звідси й випливає

$$z = \lim_{m \to \infty} z_m, \tag{174}$$

бо функція $|G|^q$ інтегрується при всякому додатному показнику p.

Так само маємо з рівності:

$$\frac{\partial^l z}{\partial x^{l-\alpha}\, \partial y^\alpha} - \frac{\partial^l z_m}{\partial x^{l-\alpha}\, \partial y^\alpha} = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial^l G}{\partial x^{l-\alpha}\, \partial y^\alpha} L_{\xi\eta}\,[z - z_m]\, \partial\xi\, \partial\eta$$

$$\begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, k-1 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix}$$

таку нерівність:

$$\frac{\partial^l z}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha}-\frac{\partial^l z_m}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha}\Bigg| \leqslant \left\{\iint\limits_{(S)}\left|\frac{\partial^l G\,\partial\xi,\partial\eta}{\partial x^{l-}\ \partial y^\alpha}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{\iint\limits_{(S)}\Big|L_{\xi\eta}\,[z-z_m]\Big|^q\,d\xi\,d\eta\right\}^{\frac{1}{q}} \quad (175)$$

і звідси

$$\frac{\partial^l z}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha}=\lim_{m\to\infty}\frac{\partial^l z_m}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha} \quad (175')$$

для тих значень показника $l \leqslant k-1$, для яких вираз $\left|\frac{\partial^l G}{\partial x^{l-\alpha} y^\alpha}\right|^p$ інтегрується. Взявши цікавіший випадок $q > 2$, отже $p < 2$, бачимо, що можна за l взяти всі числа до $k-1$ включно:

$$l=1, 2, \ldots, k-1$$

Крім рівностей (174) та (175′), маємо з нерівності (175) таку:

$$\left\{\iint\limits_{(S)}\left|\frac{\partial^l[z-z_m]}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha}\right|^p dx\,dy\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{\iint\limits_{(S)}\iint\limits_{(S)}\left|\frac{\partial^l G}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha}\right|^p dx\,dy\,d\xi\,d\eta\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot$$

$$\cdot\left\{\iint\limits_{(S)}\Big|L_{\xi\eta}[z-z_m]\Big|^q\,d\xi\,d\eta\right\}^{\frac{1}{q}}$$

Отже виходить, що

$$\lim_{m\to\infty}\iint\limits_{(S)}\left|\frac{\partial^l z}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha}-\frac{\partial^l z_m}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha}\right|^p dx\,dy=0$$

$$\begin{pmatrix} l=0, 1, \ldots, k-1 \\ \alpha=0, 1, \ldots, l \end{pmatrix}$$

§ 21. Узагальнення

Перепишімо рівність (129) так:

$$N_{xy}[u_m]=\iint\limits_{(S)}N_{xy}[G]\cdot M_{\xi\eta}[u_m]\,d\xi\,d\eta-\iint\limits_{(S)}N_{xy}[G]N_{\xi\eta}[u_m]\,d\xi\,d\eta \quad (176)$$

та замінімо функцію $N_{xy}[G]$ остачею h_m її m-ої суми Fourier щодо функцій

$$\Phi_j(\xi, \eta)$$

$$(j=0, 1, 2, 3, \ldots, m)$$

Ця сума має вигляд:

$$\sum_{j=0}^{m} b_{ij}^{(x,y)}\Phi_j(\xi, \eta)$$

Коли відповідну остачу для $M_{\xi\eta}[z]$ назвемо $\mu_m(\xi, \eta)$, то рівність (176) перепишеться так:

$$N_{xy}[u_m]=\iint\limits_{(S)}N_{xy}[G]\,\mu_m(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta-\iint\limits_{(S)}h_m N_{\xi\eta}[u_m]\,d\xi\,d\eta \quad (177)$$

Далі будемо вважати, що існує інтеграл

$$Q=\iint\limits_{(S)}\left\{\iint\limits_{(S)}|N_{xy}[G]|^p\,d\xi\,d\eta\right\}^{\frac{q}{p}}dx\,dy,$$

та що

$$\lim_{m\to\infty}\iint\limits_{(S)}\left\{\iint\limits_{(S)}|h_m|^p\,d\xi\,d\eta\right\}^{\frac{q}{p}}dx\,dy=0,$$

хочби для будьякого одного значення числа p в межах:

$$1<p<2,$$

при чому

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

що в кожнім разі має силу для деяких систем ортогональних функцій $\Phi_i(x, y)$-

Через застосування до рівності (177) нерівностей Hölder-а та Міньковського дістаємо легко:

$$|N_{xy}[u_m]|^q=\text{const}\left\{\iint\limits_{(S)}|N_{xy}[G]|^p\,d\xi\,d\eta\right\}^{\frac{q}{p}}\left\{\iint\limits_{(S)}\mu_m(\xi,\eta)\,|^q\,d\xi\,d\eta+\right.$$

$$+\text{const}\left\{\iint\limits_{(S)}|h_m|^p\,d\xi\,d\eta\right\}^{\frac{q}{p}}\cdot\iint\limits_{(S)}|N_{\xi\eta}[u_m]^q\,d\xi\,d\eta,$$

що, по інтеграції, дає:

$$\iint\limits_{(S)}|N_{xy}[u_m]|^q\,dx\,dy\leqslant\text{const}\iint\limits_{(S)}|\mu_m(\xi,\eta)|^q\,d\xi\,d\eta+$$

$$+\text{const}\iint\limits_{(S)}\left.\iint\limits_{(S)}|h_m|^p\,d\xi\,d\eta\right\}^{\frac{q}{p}}dx\,dy\cdot\iint\limits_{(S)}|N_{xy}[u_m]^p\,dx\,dy$$

Звідси виводимо, що

$$\iint\limits_{(S)}|N_{xy}[u_m]|^q\,dx\,dy\leqslant\text{const}\iint\limits_{(S)}|\mu_m(\xi,\eta)|^q\,d\xi\,d\eta \tag{178}$$

Через те, що функція

$$M_{xy}[z]=F(x,y)-N_{xy}[z]$$

суцільна та диференціюється в обсязі S, то в багатьох випадках буде

$$\lim_{m\to\infty}\iint\limits_{(S)}|\mu_m(x,y)|^q\,dx\,dy=0$$

не тільки для

$$q=2$$

(що є напевно), але й для

$$q>2,$$

особливо коли різницю $q-2$ взяти малу.

Отже з нерівності (178) дістаємо:

$$\lim_{m\to\infty}\iint\limits_{(S)}|N_{xv}[z-z_m]|^q\,dx\,dy=0 \tag{179}$$

Далі, з рівності

$$\frac{\partial^l u_m}{\partial x^{l-\alpha}\partial y^\alpha}=\iint \frac{\partial^l G}{\partial x^{l-\alpha}\partial y^\alpha} M_{\xi\eta}[u_m]\,d\xi\,d\eta-\iint \frac{\partial^l G}{\partial x^{l-\alpha}\partial y^\alpha} N_{\xi\eta}[u_m]\,d\xi\,d\eta\,,$$

яка має силу не тільки для

$$l=0,\,1,\,\ldots,\,k-2,$$

але й для

$$l=k-1,$$

на зразок рівності (178), дістаємо:

$$\frac{\partial^l u_m}{\partial x^{l-\alpha}\partial y^\alpha}=\iint\limits_{(S)} \frac{\partial^l G}{\partial x^{l-\alpha}\delta y^\alpha}\,\mu_m(\xi,\eta)d\xi\,d\eta-\iint h_{l\alpha,m} N_{\xi\eta}[u_m]d\xi\,d\eta, \tag{180}$$

де $h_{l\alpha,m}$ є, подібно до h_m, остача m-ої суми Fourier-ової функції $\frac{\partial^l G}{\partial x^{l-\alpha}\partial y^\alpha}$ щодо функцій

$$\Phi_i(\xi,\eta)$$

$$(i=0,\ldots,m)$$

Припустивши, що існують інтеграли

$$Q_{l\alpha}=\iint\limits_{(S)}\left\{\iint\limits_{(S)}\left|\frac{\partial^l G}{\partial x^{l-\alpha}\partial y^\alpha}\right|^p d\xi\,d\eta\right\}^{\frac{q}{p}} dx\,dy$$

$$\begin{pmatrix} l=0,\,1,\ldots,\,k-1\\ \alpha=0,\,1,\ldots,\,l\end{pmatrix},$$

та що

$$\lim_{m\to\infty}\iint\limits_{(S)}\left\{\iint\limits_{(S)}|L_{l\alpha,m}|^p\,d\xi\,d\eta\right\}^{\frac{q}{p}} dx\,dy=0,$$

застосуймо Hölder-ову нерівність до рівності (180), використовуючи поруч нерівність Міньковського.

Одержується

$$\left|\frac{\partial^l u}{\partial x^{l-\alpha}\partial y^\alpha}\right|^q\leqslant \text{const}\left\{\iint\limits_{(S)}\left|\frac{\partial^l G}{\partial x^{l-\alpha}\partial y^\alpha}\right|^p d\xi\,d\eta\right\}^{\frac{q}{p}}\cdot\iint\limits_{(S)}|\mu_m(\xi,\eta)|^q d\xi\,d\eta+$$

$$+\text{const}\left\{\iint\limits_{(S)}\left|L_{l\alpha,m}\right|^p d\xi\,d\eta\right\}^{\frac{q}{p}}\cdot\iint\limits_{(S)}\left|N_{\xi\eta}[u_m]\right|^q d\xi\,d\eta$$

По інтеграції, звідси дістанемо:

$$\iint\limits_{(S)}\left|\frac{\partial^l u_m}{\partial x^{l-\alpha}\partial y^\alpha}\right|^q dx\,dy\leqslant \text{const}\iint\limits_{(S)}\left\{\left|\frac{\partial^l G}{\partial x^{l-\alpha}\partial y^\alpha}\right|^p d\xi\,d\eta\right\}^{\frac{q}{p}} dx\,dy\cdot\iint\limits_{(S)}\left|\mu_m(\xi,\eta)\right|^q d\xi d\eta+$$

$$+\text{const}\iint\limits_{(S)}\left\{\iint\limits_{(S)}\left|L_{l\alpha,m}\right|^p d\xi\,d\eta\right\}^{\frac{q}{p}}\cdot\iint\limits_{(S)}\left|N_{xy}[u_m]\right|^q dx\,dy$$

остаточно, з допомогою нерівності (178):

$$\iint\limits_{(S)} \left| \frac{\partial^l u_m}{\partial x^{l-\alpha} \partial y^\alpha} \right|^q dx\, dy \leqslant \text{const} \iint\limits_{(S)} |\mu_m(x, y)|^q dx\, dy \tag{181}$$

Звідси

$$\lim_{m\to\infty} \iint\limits_{(S)} \left| \frac{\partial^l z}{\partial x^{l-\alpha} \partial y^\alpha} - \frac{\partial^l z_m}{\partial x^{l-\alpha} y^\alpha} \right|^q dx\, dy = 0$$

$$\begin{pmatrix} l = 0, 1, \ldots, k-1 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix} \tag{182}$$

Звідси ж, як відомо, зокрема одержуємо:

$$\lim_{m\to\infty} \iint\limits_{(S)} \left| \frac{\partial^l z}{\partial x^{l-\alpha} \partial y^\alpha} - \frac{\partial^l z_m}{\partial x^{l-\alpha} \partial y^\alpha} \right|^2 dx\, dy = 0$$

$$\begin{pmatrix} l = 0, 1, \ldots, k-1 \\ \alpha = 0, 1, \ldots l \end{pmatrix} \tag{182'}$$

і такі ж рівності для всякого показника q', не меншого за 1 і не більшого за q.

Щодо похідних до порядку $(k-2)$-го включно, то, крім рівностей (182), для них ще маємо:

$$z = \lim_{m\to\infty} z_m$$

$$\frac{\partial^l z}{\partial x^{l-\alpha} \partial y^\alpha} = \lim_{m\to\infty} \frac{\partial^l z_m}{\partial x^{l-\alpha} \partial y^\alpha}$$

$$\begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, k-2 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix},$$

що випливає просто із застосування нерівностей Cauchy та Буняковського до формули (180)

$$\left| \frac{\partial^l u_m}{\partial x^{l-\alpha} \partial y^\alpha} \right|^2 \leqslant \text{const} \iint\limits_{(S)} \left| \frac{\partial^l G}{\partial x^{l-\alpha} \partial y^\alpha} \right|^2 d\xi\, d\eta \iint\limits_{(S)} \mu_m^2(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \text{const} \iint\limits_{(S)} L_{l\alpha, m}^2\, d\xi\, d\eta \iint\limits_{(S)} N_{\xi\eta}^2 [u_m]\, d\xi\, d\eta$$

Ця залежність, на основі рівностей (182'), дає:

$$\frac{\partial^l z}{\partial x^{l-\alpha} \partial y^\alpha} = \lim_{m\to\infty} \frac{\partial^l z_m}{\partial x^{l-\alpha} \partial y^\alpha}$$

$$\begin{pmatrix} l = 0, 1, \ldots, k-2 \\ \alpha = 0, 1 \ldots, l \end{pmatrix}$$

Щоб одержати таку саму рівність для

$$l=k-1,$$

потрібне здійснення умов:

$$\lim_{m\to\infty}\iint |h_{l\alpha,m}|^p\, d\xi\, d\eta=0$$

Подані тут результати узагальнюють нашу теорію не тільки щодо збіжності $(k-1)$-х похідних наближення z_m функції. z Як видно з наведених міркувань, давніша вимога щодо оператора $N_{xy}[\ ]$ бути порядку не вищого за $k-2$ й тут відпадає. Оператор $N_{xy}[\ ]$ може бути порядку $(k-1)$-го щодо похідних—так само, як у випадку звичайних диференціальних рівнянь (див. випуск 1 та Додаток 1).

Із нерівності (119) виводимо тепер, розуміється, такі результати:

$$\lim_{m\to\infty}\iint_{(s)} L^2_{xy}[z-z_m]\,dxdy=0$$

$$\lim_{m\to\infty}\iint_{(s)} M^2_{xy}[z-z_m]\,dx\,dy=0$$

$$\lim_{m\to\infty}\iint_{(s)}\left[\sum A_{k-\alpha,\alpha}\frac{\partial^k(z-z_m)}{\partial x^{k-\alpha}\partial y^{\alpha}}\right]^2 dx\,dy=0$$

і подібні ж рівності

$$\lim_{m\to\infty}\iint_{(S)} |L_{xy}[z-z_m]|^{q'}\,dx\,dy=0$$

$$\lim_{m\to\infty}\iint_{(S)} |M_{xy}[z-z_m]|^{q'}\,dx\,dy=0$$

$$\lim_{m\to\infty}\iint_{(s)}\left|\sum A_{k-\alpha,\alpha}\frac{\partial^k[z-z_m]}{\partial x^{k-\alpha}\partial y^{\alpha}}\right|^q dx\,dy=0$$

для всіх показників q' за умови:

$$q'\leqslant 2$$

§ 22. Характеристичні числа та фундаментальні функції

Доведімо тепер, що поданий спосіб наближеного обчислення інтеграла z рівняння

$$M_{xy}[z]-\lambda N[z]=0 \tag{183}$$

заразом дає, з похибкою того самого ступеня, **наближення характеристистичних чисел λ та фундаментальних функцій задачі.**

Взявши для скорочення простий випадок, коли розв'язка z задачі (183) має вигляд

$$z=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\psi_i(x,y)}{\lambda-\lambda_i}, \tag{184}$$

де всі числа λ_i різні, обмежмо параметр λ нерівностями:

$$|\lambda|\leqslant R,\ \ |\lambda-\lambda_i|\geqslant r, \tag{185}$$

де число r вибрано так, щоб для всіх λ_i, λ_{i_1}, що справджують нерівність

$$R \geqslant |\lambda_i|, |\lambda_{i_1}|$$

було

$$2r > |\lambda_i - \lambda_{i_1}|$$

Нерівності (185) обмежують зверху модуль функції $G(x, y; \xi, \eta)$.

Із нерівностей (110) дістаємо наближення z_m у формі:

$$z_m = \sum \frac{\phi_i^{(m)}(x, y)}{(\lambda - \lambda_i^{(m)})^{p_i^{(m)}}} \tag{186}$$

де $p_i^{(m)}$ є цілі додатні числа, а $\phi_i^{(m)}$ не тотожні нулі.

Якщо нерівності (185) заступити такими:

$$|\lambda| \leqslant R, \ |\lambda - \lambda_i| \geqslant h \iint_{(S)} \varepsilon_m^2 \, d\xi \, d\eta, \tag{187}$$

то стале число h можна ще добрати так, щоб було:

$$|z - z_m| < k \tag{188}$$

де k є теж стале число, незалежне від m. Тим часом, коли б якесь із чисел $\lambda_i^{(m)}$ належало до обсягу (187), то в тому обсязі були б точки, де наближення z_m стає необмежене, що суперечить нерівності (188). Отож для всякого числа $\lambda_i^{(m)}$ маємо або

$$|\lambda_{i_1}^{(m)}| > R \tag{188}$$

або

$$|\lambda_i^{(m)} - \lambda| < h \int_{(s)} \varepsilon_m^2 \, d\xi \, d\eta \quad (|\lambda_i| \leqslant R) \tag{189}$$

Взявши одно з чисел $\lambda_i^{(m)}$, що справджують нерівність (189), проінтегруймо тепер різницю

$$z - z_m = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\phi_i}{\lambda - \lambda_i} - \sum \frac{\phi_i^{(m)}}{\lambda - \lambda_i^{(m)}}$$

по змінному λ, взявши за путь інтеграції коло

$$|\lambda - \lambda_i| = r,$$

де λ_i є одно з чисел, що справджують нерівності (185). Дістанемо:

$$\phi_i - \sum' \phi_{ij}^{(m)} = \frac{1}{2\pi i} \Phi [z - z_m] \, d\lambda \tag{190}$$

де сума Σ' поширено на всі значки i', що справджують нерівність (189) і для яких при тому

$$p_1^{(m)} = 1$$

Звідси

$$|\phi_i - \sum' \phi_i^{(m)}| < H \int_{(S)} \varepsilon_m^2 \, d\xi \, d\eta, \tag{191}$$

де H є стале число, незалежне від m. Формули (189) та (191) доводять наше твердження.

Зауважмо, що коли б для якогось значка i при необмежено великому m під знаком суми Σ' не було ні одного члена, то це привело б до неможливого висновку:

$$\phi_i = 0 \tag{192}$$

Отже поданий спосіб при досить великому m дає кінець-кінцем збіжне наближення до всякого характеристичного числа λ_i і до всякої відповідної фундаментальної функції.

Щодо обчислення фундаментальних функцій, то тут по схему й довід збіжності доведеться просто відіслати до аналогічної задачі для звичайних диференціальних рівнянь (випуск 1, § 24).

§ 23. Повніше використання ортогональних функцій для доводу здобутих результатів

Візьмімо знов задачу другого порядку:

$$L_{xy}[z] = M_{xy}[z] + \lambda N_{xy}[z] = f(x, y) \tag{193}$$

$$U_l[z] = 0, \tag{194}$$

де $N_{xy}[\;]$ є оператор порядку не вищого за $(k-2)$-й:

Візьмімо тепер функції

$$\varphi_0, \quad \varphi_1, \quad \varphi_2, \ldots \tag{195}$$

та

$$\Phi_0 \quad \Phi_1 \quad \Phi_2, \ldots \tag{196}$$

так, щоб $\Phi_i(x, y)$ становили замкнену ортогональну нормовану систему.

Пошукаймо наближену розв'язку задачі (190) у формі:

$$z_m = a_0^{(m)}\varphi_0 + a_1^{(m)}\varphi_1 + \ldots + a_m^{(m)}\varphi_m, \tag{197}$$

визначивши коефіцієнти $a_i^{(m)}$ з рівнянь:

$$\iint\limits_{(S)} L_{xy}[z_m]\,\Phi_i(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(S)} f\Phi_i\,dx\,dy$$
$$(i = 0,\ 1 \ldots, m), \tag{198}$$

що їх можемо переписати так:

$$\iint\limits_{(S)} L_{xy}[z_m - z)\,M_{xy}[\varphi_i]dx\,dy = 0$$
$$(i = 0,\ 1 \ldots, m) \tag{199}$$

Легко впевнитися, що для неозначеного λ визначник системи лінійних рівнянь (199) щодо невідомих:

$$a_0^{(m)}, \quad a_1^{(m)}, \ldots, a_m^{(m)}$$

не є нуль, отже що ці невідомі умовами (199) цілком визначаються.

Визначник цієї системи є

$$\Delta_m(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+\alpha_{00}, & \alpha_{01}, \ldots, & {}_0\alpha_m \\ \alpha_{10}, & 1+\alpha_{11}, \ldots, & \alpha_{1mm} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \alpha_{m0}, & \alpha_{m1}, \ldots, & 1+\alpha_{mm} \end{vmatrix}, \tag{200}$$

де

$$\alpha_{ij} = \iint\limits_{(S)} G(x, y; \xi, \eta)\, \Phi_j(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

Він має таку властивість, що величина

$$\sum_{i,j=0}^{m} \alpha_{ij}^2$$

є обмежена для обмеженого λ. Справді, тому що

$$\varphi_j = \iint\limits_{(S)} G(x, y; \xi, \eta)\, \Phi_j(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta),$$

де $G(x, y; \xi, \eta)$ є Green-ова функція виразу M_{xy} [ ], маємо:

$$\alpha_{ij} = \iint\limits_{(S)} \iint\limits_{(S)} N_{xy} [G(x, y; \xi, \eta)\, \Phi_j(\xi, \eta)\, \Phi_i(x, y)\, d\xi d\eta\, dx\, dy,$$

отже

$$\iint\limits_{(s)} \iint\limits_{(s)} N_{xy}^2 [G]\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta \geqslant \sum_{i,j=0}^{m} \alpha_{ij}^2, \tag{201}$$

а тим часом функція N_{xy}^2 $[G]$, як функція двох пар змінних $(x, y; \xi, \eta)$, інтегрується в обсязі S. Отож існує скінченне число

$$\alpha = \lim_{m \to \infty} \sum_{j=0}^{m} a_{ij}^2$$

Звідси випливає, що для досить великого значка k буде:

$$|\alpha_{kk}| < r < 1,$$

а в визначнику:

$$\Delta_m'(\lambda) = e^{-\sum\limits_{i=0}^{m} \alpha_{ii}} \Delta_m(\lambda) = \begin{vmatrix} e^{-\alpha_{00}}(1 + \alpha_{00}), & e^{-\alpha_{00}}\alpha_{01}, & \ldots, & e^{-\alpha_{00}}\alpha_{0m} \\ e^{-\alpha_{11}}\alpha_{10}, & e^{-\alpha_{11}}(1 + \alpha_{11}), & \ldots, & e^{-\alpha_{11}}\alpha_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{-\alpha_{mm}}\alpha_{m0}, & e^{-\alpha_{mm}}\alpha_{m1} & \ldots, & e^{-\alpha_{mm}}(1 + \alpha_{mm}) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 + a_{00}, & a_{01}, & \ldots, & a_{0m} \\ a_{10}, & 1 + a_{11}, & \ldots, & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m0}, & a_{m1}, & \ldots, & 1 + a_{mm} \end{vmatrix}$$

суми:

$$\sum_{i=0}^{m} |a_{ii}| \quad \text{та} \quad \sum_{i,j=0}^{m} a_{ij}^2$$

мають для $m \to \infty$ певні границі.

Коли ще зважимо на нерівності:

$$\sum_{i=0}^{m} (\iint\limits_{(S)} f \Phi_i\, dx\, dy)^2 \leqslant \iint\limits_{(S)} f^2\, dx\, dy \tag{202}$$

та

$$\sum_{i=0}^{m} \varphi_i^2 = \sum_{i=0}^{m} \left\{ \iint\limits_{(S)} G\,\Phi_i(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \right\}^2 \leqslant \iint\limits_{(S)} G^2\, d\xi\, d\eta, \tag{203}$$

що їх праві сторони є теж скінченні величини, то вийде, що й вираз

$$\delta_m(\lambda) = e^{-\sum\limits_{i=0}^{m} \alpha_{ii}} \begin{vmatrix} 0, & \varphi_0, & \varphi_1, \ldots\ldots\ldots, & \varphi_m \\ \iint\limits_{(S)} f\Phi_0\, d\xi\, d\eta, & 1+\alpha_{00}, & \alpha_{10}, \ldots\ldots\ldots, & \alpha_{0m} \\ \iint\limits_{(S)} f\Phi_1\, d\xi\, d\eta, & \alpha_{10}, & 1+\alpha_{11}, \ldots\ldots, & \alpha_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \iint\limits_{(S)} f\Phi_m\, d\xi\, d\eta, & \alpha_{m0}, & \alpha_{m1}, \ldots\ldots\ldots, & 1+\alpha_{mm} \end{vmatrix} \tag{204}$$

для $m \to \infty$ іде до певної границі. На крузі

$$|\lambda| = R$$

довільного, наперед даного радіуса R, вирази

$$\Delta'_m(\lambda) \quad \text{та} \quad \delta_m(\lambda)$$

ідуть одностайно до певних аналітичних функцій від λ.

У такому разі вираз z_m, що на основі рівнянь (199) має вигляд:

$$z_m = \frac{1}{\Delta_m(\lambda)} \begin{vmatrix} 0, & \varphi_0, & \varphi_1, \ldots\ldots\ldots, & \varphi_m \\ \iint\limits_{(S)} f\Phi_0\, d\xi\, d\eta, & 1+\alpha_{00}, & \alpha_{01}, \ldots\ldots\ldots, & \alpha_{0m} \\ \iint\limits_{(S)} f\Phi_1\, d\xi\, d\eta, & \alpha_{01}, & 1+\alpha_{11}, \ldots\ldots, & \alpha_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \iint\limits_{(S)} f\Phi_m\, d\xi\, d\eta, & \alpha_{m0}, & \alpha_{m1}, \ldots\ldots\ldots, & 1+\alpha_{mm} \end{vmatrix} = \frac{\delta_m(\lambda)}{\Delta'_m(\lambda)}, \tag{205}$$

розгляданий як функція від λ, має своєю границею мероморфну в крузі

$$|\lambda| = R$$

функцію. А що R можна вибрати таке велике, як хочемо, то бачимо, що границя

$$z = \lim_{m=\infty} z_m \tag{206}$$

є мероморфна, на площі комплексного змінного λ, функція від λ. Отже $\lim z_m$ може не існувати тільки для певних поодиноких значень λ, що є полюси тієї мероморфної функції.

Переписавши рівність (205) так:

$$z_m = \frac{1}{\Delta_m(\lambda)} \begin{vmatrix} 0, & \iint\limits_{(S)} G\Phi_0(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \ldots\ldots, & \iint G\Phi_m(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \\ \iint\limits_{(S)} f\Phi_0\, d\xi\, d\eta, & 1+\alpha_{00}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \alpha_{0m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \iint\limits_{(S)} f\Phi_m\, d\xi\, d\eta, & \alpha_{m0}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & 1+\alpha_{mm} \end{vmatrix}$$

та продиференціювавши її по x та по y $k-2$ рази, виведемо легко, що існують також границі

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\partial z_m}{\partial x^{l-\alpha}\, \partial y^{\alpha}} \tag{207}$$

$$\begin{pmatrix} l = 0, 1, \ldots, k-2 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix}$$

Далі візьмімо різницю:

$$z_{m+p} - z_m = b_0\varphi_0 + b_1\varphi_1 + \ldots + b_{m+p}\varphi_{m+p}$$

що її коефіцієнти, зважаючи на (199), очевидно справджують систему рівнянь:

$$b_i = \sum_{i=0}^{m+p} \alpha_{ij} b_j = \varepsilon_i$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m+p),$$

де

$$\alpha_{ij} = \lambda \iint\limits_{(s)} N_{xy}[\varphi_j]\, \Phi_i\, dx\, dy$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m) \tag{208}$$

$$\varepsilon_i = \{ \iint\limits_{(s)} f_m \Phi_i\, dx\, dy$$

$$(i = m+1, \ldots, m+p)$$

$$f_m = f - \lambda N_{xy}[z_m]$$

Визначник цієї системи є $\Delta_{m+p}(\lambda)$. Припустімо, що існує

$$\lim_{m\to\infty} \Delta_m(\lambda)$$

Якби цього не було, то досить було б заступити $\Delta_{m+p}(\lambda)$ через

$$e^{-\sum\limits_{i=0}^{m+p} \alpha_{ii}} \Delta_{m+p}(\lambda),$$

чого не робимо для спрощення дальших записів.

Із рівнянь (207) дістанемо:

$$z_{m+p}-z_m=\frac{1}{\Delta_{m+p}(\lambda)}\begin{vmatrix} 0, & \iint\limits_{(s)} G\Phi_0(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta, \ldots, & \iint\limits_{(s)} G\Phi_m(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta, \ldots & \iint\limits_{(s)} G\Phi_{m+p}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\ 0, & 1+\alpha_{00}, \ldots\ldots, & \alpha_{0m}, \ldots\ldots, & \alpha_{0,m+p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & \alpha_{m0}, \ldots\ldots, & 1+\alpha_{mm}, \ldots\ldots, & \alpha_{m,m+p} \\ \varepsilon_{m+1}, \alpha_{m+1}, & 0, \ldots\ldots, & \alpha_{m+1,m}, \ldots\ldots, & \alpha_{m+1,m+p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_{m+p}, \alpha_{m+p}, & 0, \ldots\ldots, & \alpha_{m+p,m}, \ldots\ldots, & 1+\alpha_{m+p,m+p} \end{vmatrix}$$

Так само напр.

$$\frac{\partial z_{m+p}}{\partial x}-\frac{\partial z_m}{\partial x}=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{vmatrix} 0, & \iint\limits_{(s)}\frac{\delta G}{\partial x}\Phi_0(\xi,\eta), d\xi d\eta \ldots, & \iint\limits_{(s)}\frac{\partial G}{\partial x}\Phi_{m+p}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\ 0, & 1+\alpha_{00}, \ldots\ldots, & \alpha_{0,m+p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & \alpha_{m0}, \ldots\ldots, & \alpha_{m,m+p} \\ \varepsilon_{m+1}, & \alpha_{m+1,0}, \ldots\ldots, & \alpha_{m+1,m+p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_{m+p}, & \alpha_{m+p,0}, \ldots\ldots, & 1+\alpha_{m+p,m+p} \end{vmatrix} \quad (209)$$

$$=\sum_{j=1}^{p} b_{ij}\,\varepsilon_{m+i}\iint\limits_{(s)}\frac{\partial G}{\partial x}\Phi_{m+1}(\xi,\eta),d\xi\,d\eta+\sum_{j=i}^{p}\sum_{i=0}^{m+p} b_{ij}\,\varepsilon_{m+1}\iint\limits_{(s)}\frac{\partial G}{\partial x}\Phi_i(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

$$(i \neq j)$$

Користуючися з формули:

$$|a+b|^k \leqslant 2^k|a|^k+2^k|b|^k$$

та Hölder-ової нерівності, дістанемо з (209):

$$\left|\frac{\partial z_{m+p}}{\partial x}-\frac{\partial z_m}{\partial x}\right|^{\frac{q}{q-1}} \leqslant 2^{\frac{q}{q-1}}\max|b_{ij}|^{\frac{q}{q-1}} \left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|^{\frac{q}{q-1}} d\xi\,d\eta\left\{\sum_{j=i}^{p}\varepsilon_{\substack{m=j}}\Phi(\xi,\eta)^q_{m=j}\,d\xi\,d\eta\right\}^{\frac{1}{q-1}}+$$

$$+2^{\frac{q}{q-1}}\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|^{\frac{q}{q-1}} d\xi\,d\eta\left\{\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=0}^{m+p} b_{ij}\,\varepsilon_{m+1}\,\Phi_i)^q\,d\xi\,d\eta\right\}^{\frac{1}{q-1}}$$

$$(q>2)$$

Проінтегрувавши тут по обсягу S і взявши $q=2$, матимемо:

$$\iint\limits_{(s)}\left(\frac{\partial z_{m+p}}{\partial x}-\frac{\partial z_m}{\partial x}\right)^2 dx\,dy < k\cdot\sum_{j=1}^{p}\varepsilon^2_{m+j}+4\cdot\sum_{i=0}^{m+p}(b_{i1}\,\varepsilon_{m+1}+\ldots+b_{ip}\,\varepsilon_{m+p})^2,$$

$$(i \neq j)$$

де k є стале число.

Інакше це напишемо так:

$$\iint\limits_{(s)}\left(\frac{\partial z_{m+p}}{\partial x}-\frac{\partial z_m}{\partial x}\right)^2 dx\,dy < k\cdot\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_{m+j}^2+4\cdot\sum_{i=0}^{m+p}(b_{i1}^2+\dots b_{ip}^2)\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_{m+j}^2 <$$

$$< \left(k+L\sum_{i=0}^{m+p}\sum_{j=1}^{p}a_{i,m+j}^2\right)\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_{m+j}^2,$$

де L є стале число. Отож остаточно:

$$\iint\limits_{(s)}\left(\frac{\partial z_{m+p}}{x}-\frac{\partial z_m}{\partial x}\right)^2 dx\,dy < A\iint\limits_{(s)}\Phi_i\iint\limits_{(s)} f\Phi_i\,d\xi\,d\eta)^2 dx\,dy,$$

де A є стале число. Звідси висновок, що існує функція z_x, яка інтегрується разом зо своїм квадратом та справджує рівність:

$$\lim_{m\to\infty}\iint\limits_{(s)}\left(\frac{\partial z_m}{\partial x}-z_x\right)^2 dx\,dy=0$$

Так само існують функції $z_{x^{l-\alpha}y^\alpha}$, що справджують рівність:

$$\lim_{m=\infty}\iint\left(\frac{\partial^l z_m}{\partial x^{l-\alpha}y^\alpha}-z_{x^{l-\alpha}y^\alpha}\right)^2 dx\,dy=0$$

$$\begin{pmatrix} l=0,1,\dots,k-2 \\ \alpha=0,1,\dots,l \end{pmatrix}$$

Ясно, що скрізь, де функція $z_{x^{l-\alpha}y^\alpha}$ є суцільна відповідно щодо x та y, вона дорівнює

$$\frac{\partial^l z}{\partial x^{l-\alpha}\partial y^\alpha}$$

Із основних рівностей тепер виводимо легко:

$$\iint\limits_{(s)}(L_{xy}[z_m]-f)(L_{xy}[z_m]-f+\eta_m)\,dx\,dy=0,$$

де

$$\lim_{m\to\infty}\iint\limits_{(s)}\eta_m^2\,dx\,dy=0$$

Звідси:

$$\iint\limits_{(s)}(L_{xy}[z_m]-f)^2\,dx\,dy\leqslant\iint\limits_{(s)}\eta_m^2\,dx\,dy\underset{(m\to\infty)}{\to}0 \tag{210}$$

Тепер легко показати, що функція z_m, за певних умов суцільності та існування похідних у коефіцієнтів операторів $M_{xy}[\ ]$ та $N_{xy}[\ ]$ і функцій f, справджує наше диференціальне рівняння для всіх значень λ, за винятком деяких особливих, з похибкою, що йде до нуля разом із $\frac{1}{m}$.

Справді, залежність (210) можна переписати так:

$$\iint\limits_{(s)}\{\,M_{xy}[z_m]+\lambda N_{xy}[z_m]\,\}^2 < r^2\iint\limits_{(s)}\eta_m^2\,dx\,dy,$$

де r є число обмежене.

Звідси

$$\left|\int_\alpha^x\int_\beta^y\left\{\sum_{i=0}^{m}a_i^{(m)}\Phi_i+\lambda N_{xy}[!]\right\}\right|dx\,dy<p\sqrt{\iint_{(s)}\eta_m^2\,dx\,dy}$$

де під $N_{xy}[!]$ розуміємо результат заміни в операторі $N_{xy}[\ ]$ усіх похідних $\frac{\partial^l z_m}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y}$ відповідно на $z_x{}^{l-\alpha}{}_y{}^\alpha$

Узявши за Φ_i повну систему многочленів або тригонометричних функцій і вимагаючи, щоб згадані коефіцієнти були суцільні разом зо своїми похідними першого та другого порядку, дістанемо звідси:

$$\lim_{m=\infty}\sum_{i=0}^{m}a_i^{(m)}\Phi_i+\lambda N_{xy}[!]-f=0 \tag{211}$$

Коли тепер взяти задачу:

$$M_{xy}[w]+\lambda N_{xy}[!]=f$$

за умов

$$U_l[w]=0$$
$$(l=0,1,\ldots)$$

на контурі s, то її розв'язка напевно існує. А тоді очевидно

$$\lim_{m=\infty}M_{xy}[w-z_m]=0$$

що легко дає:

$$w=\lim z_m$$

$$\frac{\partial^l w}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha}=\lim\frac{\partial^l z_m}{\partial x^{l-\alpha}\,\partial y^\alpha}$$

$$\begin{pmatrix} l=1,2,\ldots,k-2 \\ \alpha=0,1,\ldots,l \end{pmatrix}$$

З другого боку, нетрудно пересвідчитися, що w справджує рівняння:

$$L_{xy}[w]=f(x,y)$$

Отож, уважаючи за доведене існування функції G, ми довели існування розв'язки у задачі (193)—(194) та заразом ту розв'язку визначили.

Лишаємо тут без докладного розгляду особливо простий випадок, коли $M_{xy}[z]$ є вираз самоспряжений, і коли зосібна за φ_i можна взяти фундаментальні функції задачі:

$$M_{xy}[\varphi]=\mu\varphi$$

Зауважмо в кінці, що, заступивши рівності (198) нескінченною системою рівнянь:

$$\iint_{(S)}L_{xy}[z]\,\Phi_i\,dx\,dy=\iint_{(S)}f\,\Phi_i\,dx\,dy$$
$$(i=0,1,2\ldots),$$

де

$$z=\alpha_0\varphi_0+\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2+\ldots, \tag{212}$$

прийдемо до висновку, що ряд (212) збігається та майже скрізь в обсязі S являє собою інтеграл нашого рівняння за певних умов щодо існування та суцільності похідних від функції $f(x,y)$ та коефіцієнтів рівняння.

РОЗДІЛ VII

Задачі з неоднорідними граничними умовами

§ 24. Спряжені звичайні диференціальні рівняния

Вернімося до звичайного диференціального рівняння (див. випуск , § 13):

$$L[y] = F(x), \tag{213}$$

же з неоднорідними лінійними граничними умовами:

$$\begin{aligned} U_0[y &= {}_0 \\ U_1[y] &= g_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ U_{k-1}[y] &= g_{k-1} \end{aligned} \tag{214}$$

тут

$$L_x[y] = M_x[y] - \lambda \bar{N}_x[y]$$

$$M_x[y] = \frac{d^k y}{dx^k} + B\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}} + \ldots + B_k v$$

$$N_x[y] = a_1(x)\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}} + a^2(x)\frac{d^{k-2}y}{dx^{k-2}} + \ldots + a_k(x)y$$

$$U_i[y] = \alpha_i^{(0)} y(a) + \alpha_i^{(1)} y'(a) + \ldots + \alpha_i^{(k-1)} y^{(k-1)}(a) +$$

$$+ \beta_i^{(0)} y(b) + \beta_i^{(1)} y'(b) + \ldots + \beta_i^{(\kappa-1)} y^{(k-1)}(b)$$

$$(i = 0, 1, \ldots, k-1).$$

а g_i є сталі числа. Нехай на інтервалі $[a, b]$ задача (213)—(214) має одну-єдину розв'язку y. Хоч можна неоднорідні умови (214) перетворити на однорідні через заміну y на $y + \psi(x)$, де $\psi(x)$ є відповідно дібраний многочлен, але далі ми будемо трактувати цю нову задачу безпосередньо.

Наведімо всамперед ще деякі властивості Green-ової функції задачі (213)—(214) (пор. випуск I, розділ I). Увівши зазначення

$$L_x[y] = y^{(k)} + A_1(x)y^{k-1} + \ldots + A_k(x)y \tag{215}$$

$$\Lambda_x[y] = z^{(k)} - (A_1 z)^{(k-1)} + (A_2 z)^{(k-2)} \ldots + (-1)^{(k)} A_k z, \tag{216}$$

будемо називати оператори $L_x[\;\;]$ та $\Lambda_x[\;\;]$ спряженими. Безпосередня викладка показує що спряженість є властивість взаємна: $\Lambda_x[\;\;]$ так само утворюється з $L_x[\ ]$, як $L_x[\ ]$ з $\Lambda_x[\ ]$. Через частинну інтеграцію дістаємо

$$\int_a^b A_{k-l}\, z y^{(l)}\, dx = \Big/_a^b\, A_{k-l} z y^{(l-1)} - (A_{k-l} z)' y^{(l-2)} + (A_{k-l} z)'' y^{(l-3)} - \ldots +$$

$$+ (-1)^{l-1} (A_{k-l} z)^{l-1} y + (-1)^l \int_a^b (A_{k-l} z)^{(l)} y dx$$

Сумуючи ці рівності по значку l:

$$l = 0, 1, \ldots, k,$$

де

$$A_0 = 1,$$

дістаємо:

$$\int_a^b \{ z L_x[y] - (-1)^k y \Lambda_x[z] \} dx = \Big/_a^b \sum_{l=1}^{k} \{ A_{k-l} z y^{(l-1)} - (A_{k-l} z)' y^{(l-2)} +$$

$$+ (A_{k-l} z)'' y^{(l-3)} - \ldots + (-1)^{l-1} (A_{k-l} z)^{(l-1)} y \} = \Big/_a^b \sum_{l=0}^{k} \{ [A_{k-l} z y^{(l-1)} - \mathfrak{a}_{k-l} y z^{(l-1)}]$$

$$- [(A_{k-l} z)' y^{(l-2)} - (\mathfrak{a}_{k-l} y) z^{(l-2)}] + \ldots + (-1)^{l-1} [(A_{k-l} z)^{(l-1)} y - (\mathfrak{a}_{k-l} y)^{(l-1)} z] \} \quad (215)$$

де функції $\mathfrak{a}_i(x)$ є коефіціенти оператора $(-1)^k \Lambda_x[\ ]$:

$$\Lambda_x[z] = (-1)^k z^{(k)} + \mathfrak{a}_1(x) z^{(k-1)} + \ldots + \mathfrak{a}_k(x) z$$

отже зокрема

$$\mathfrak{a}_1(x) = -A_1(x)$$

$$\mathfrak{a}_2(x) = \ A_2(x) - (k-1) A_1'(x)$$

$$\mathfrak{a}_3(x) = -A_3(x) + (k-2) A_2'(x) \frac{(k-1)(k-2)}{1.2} A''(x)$$

. . . .

Коротко, ввівши зазначення

$$P[y, z] = \sum_{l=1}^{k} [(A_{k-l} z) y^{(l-1)} - (\mathfrak{a}_{k-l} y)^{(l-1)} z] - [(A_{k-l} z)' y^{(l-2)} - (\mathfrak{a}_{k-l} y)' z^{(l-2)}] + \ldots +$$

$$+ (-1)^l [(A_{k-l} z) y - (\mathfrak{a}_{k-l} y) z], \quad (216)$$

запишемо формулу (215) так:

$$\int_a^b \{ z L_x[y] - (-1)^k y \Lambda_x[z] \} dx = \Big/_a^b P[y, z] \quad (217)$$

де $P[y, z]$ є білінійна форма від змінних

$$y, y', \ldots, y^{(k-1)},$$

$$z, z', \ldots, z^{(k-1)},$$

Поруч лінійних однорідних умов:

$$U_0\ [y] = 0$$

$$U_1\ [y] = 0 \quad (218)$$

$$\ldots\ldots$$

$$U_{k-1}[y] = 0$$

будемо розглядати лінійні однорідні умови з ними спряжені:

$$\begin{aligned} V_0\ [z] &= 0 \\ V_1\ [z] &= 0 \\ \cdots&\cdots \\ V_{k-1}\,[z] &= 0, \end{aligned} \tag{219}$$

що визначаються так: білінійна форма

$$\int_a^b P[y, z] = P[y(b), z(b)] - P[y(a), z(a)] \tag{219'}$$

від $4k$ змінних

$$\begin{aligned} &y(a), \quad y'(a), \ldots, y^{(k-1)}(a) \\ &y(b), \quad y'(b), \ldots, y^{(k-1)}(b) \end{aligned} \tag{220}$$

$$\begin{aligned} &z(a), \quad z'(a), \ldots, z^{(k-1)}(a) \\ &z(b), \quad z'(b), \ldots, z^{(k-1)}(b) \end{aligned} \tag{221}$$

по використанні зв'язків (218) стає білінійною формою $3k$ змінних; а саме, переписавши залежності (218) у будьякій параметричній формі, дістанемо:

$$\begin{aligned} y(a) &= \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i^{(0)} t_i \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(k-1)}(a) &= \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i^{(k-1)} t_i \\ y(b) &= \sum_{i=0}^{k-1} \delta_i^{(1)} t_i \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{((k-1)}(b) &= \sum_{i=0}^{k-1} \delta_i^{(k=1)} t_i, \end{aligned} \tag{222}$$

де

$$t_0, \quad t_1, \ldots, t_{k-1} \tag{223}$$

є параметри, а $\gamma_i^{(j)}$ та $\delta_i^{(j)}$ — числові коефіціенти; замінивши тоді у формі (219) змінні (220) через вирази (222), дістанемо:

$$\int_a^b P\ (y, z) = \sum_{i=0}^{k-1} t_i \Big\{ q_0^{(i)} z(a) + q_1^{(i)} z'(a) + \ldots + q_{k-1}^{(i)} z^{(k-1)}(a) + \\ + \sigma_0^{(i)} z(b) + \sigma_1^{(i)} z'(b) + \ldots + \sigma_{k-1}^{(i)} z^{(k-1)}(b) \Big\}, \tag{224}$$

де

$$q_0^{(i)},\quad q_1^{(i)},\dots,q_{k-1}^{(i)}$$

$$\sigma_0^{(i)},\quad \sigma_1^{(i)},\dots,\sigma_{k-1}^{(i)}$$

$$(i=0,1,\dots,k-1)$$

є якісь числові коефіцієнти, що залежать, взагалі кажучи, від способу вибору параметрів (223). Вирази $V_i[z]$ у спряжених з (218) умовах (219) визначаються рівностями:

$$V_i[z]=q_0^{(i)}z(a)+q_1^{(i)}z'(a)+\dots+q_{k-1}^{(i)}z^{k-1}(a)+$$
$$+\sigma_0^{(i)}z(b)+\sigma_1^{(i)}z'(b)+\dots+\sigma_{k-1}^{(i)}z^{k-1}(b) \qquad (225)$$

Отже рівність (224) можна записати так:

$$\int_a^b P[y,z]=\sum_{i=0}^{k-1}t_i V_i[z] \qquad (226)$$

за умов (218). Навпаки, легко показати, що вона записується так:

$$\int_a^b P[y,z]=\sum_{i=0}^{k-1}\tau_i U_i[y] \qquad (227)$$

за умов (219), де τ_i є параметри аналогічні параметрам t_i, введені для реалізації в явному вигляді залежностей (219).

Дві задачі

$$\begin{aligned} &L_x[y]=F(x)\\ &U_0[y]=0\\ &U_1[y]=0\\ &\dots\dots\\ &U_{k-1}[y]=0 \end{aligned} \qquad (228)$$

та

$$\begin{aligned} &\Lambda_x[z]=\Phi(x)\\ &V_0[z]=0\\ &V_1[z]=0\\ &\dots\dots\\ &V_{k-1}[z]=0 \end{aligned} \qquad (229)$$

називатимемо спряженими (спряженість є властивість взаємна).

Коли замість однорідних умов (218) взяти неоднорідні (219), то рівності (222) заміняться такими:

$$
\begin{aligned}
y(a) &= \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i^{(0)} t_i + \gamma^{(0)} \\
y'(a) &= \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i^{(1)} t_i + \gamma^{(1)} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
y^{(k-1)}(a) &= \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i^{(k-1)} t_i + \gamma^{(k-1)} \\
y(b) &= \sum_{i=0}^{k-1} \delta_i^{(0)} t_i + \delta^{(0)} \\
y'(b) &= \sum_{i=0}^{k-1} \delta_i^{(1)} t_i = \delta^{(1)} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
y^{(k-1)}(b) &= \sum_{i=0}^{k-1} \delta_i^{(k-1)} t_i + \delta^{(k-1)},
\end{aligned}
\tag{230}
$$

де $\gamma^{(j)}$, $\delta^{(j)}$ є певні числа. Рівність (224) перепишеться так:

$$
\int_a^b P[z, u] = \sum_{i=0}^{k-1} t_i V_i[z] + V[z], \tag{231}
$$

де $V[z]$ має таку саму форму, як $V_i[z]$.

$$
\begin{aligned}
V[z] = {} & \mathfrak{a}_0 z(a) + \mathfrak{a}_1 z'(a) + \ldots + \mathfrak{a}_{k-1} z^{(k-1)}(a) + \\
& + \mathfrak{b}_0 z(b) + \mathfrak{b}_1 z'(a) + \ldots + \mathfrak{b}_{k-1} z^{(k-1)}(b)
\end{aligned}
\tag{232}
$$

Аналогічно маємо:

$$
\int_a^b P[z, U] = \sum_{i=0}^{k-1} \tau_i U_i[y] + U[y] \tag{233}
$$

за неоднорідності умов

$$
\begin{aligned}
V_0[z] &= \mathfrak{g}_0 \\
V_1[z] &= \mathfrak{g}_1 \\
& \cdots\cdots \\
V_{(k-1)}[z] &= \mathfrak{g}_{k-1},
\end{aligned}
\tag{234}
$$

де $U[y]$ має форму:

$$
\begin{aligned}
U[y] = {} & \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) + \ldots + \alpha_{k-1} y^{(k-1)}(a) + \\
& + \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) + \ldots + \beta_{k-1} y^{(k-1)}(b).
\end{aligned}
\tag{235}
$$

Неоднорідні задачі

$$
\begin{aligned}
& L_x[y] = F(x, y) \\
& U_i[y] = g_i \\
& (i = 0, 1, \ldots, k-1)
\end{aligned}
\tag{236}
$$

та

$$\Lambda_x[z] = \Phi(x, y)$$
$$V_i[z] = \mathfrak{g}_i \qquad (237)$$
$$(i = 0, 1, \ldots, k-1),$$

де числа g_i та $\mathfrak{g}_i$ — довільні, теж зватимемо спряженими.

Коли функції y та z справджують спряжені лінійні умови на кінцях інтервалу $[a, b]$, то, як видно з залежностей (217), (231) та (233), існує рівність

$$\int_a^b \{zL_x[y] - (-1)^k y\Lambda_x[z]\} \, dx = 0 \qquad (238)$$

у випадку однорідних умов, і рівність:

$$\int_a^b \{zL_x[y] - y\Lambda_x[z]\} \, dx = \sum t_i \mathfrak{g}_i + V[z] = \sum \tau_i g_i + U[y] \qquad (239)$$

у випадку неоднорідних умов.

§ 25. Деякі властивості Green-ової функції звичайного диференціального рівняння

Green-овою функцією $G(x_i, \xi_1)$ неоднорідної задачі (236) називатимемо Green-ову функцію відповідної задачі (228). Одночасно зазначмо через $\Gamma(x; \xi_2)$ Green-ову функцію спряжених з ними задач (237) та (229).

Поклавши в рівності (238)

$$y = G(x, \xi_1)$$
$$z = \Gamma(x, \xi_2),$$

дістанемо:

$$\int_a^b \{\Gamma(x, \xi_2) L_x[G(x, \xi_1)] - (-1)^k G(x, \xi_1) \lambda_x[\Gamma(x, \xi_2)]\} \, dx = 0 \qquad (240)$$

Коли тут виконати інтеграцію, врахувавши, що

$$L_x[G(x, \xi_1)] = 0 \qquad (x \neq \xi_1)$$
$$\Lambda_x[\Gamma(x, \xi_2)] = 0 \qquad (x \neq \xi_2)$$

та що $(k-1)$-і похідні від Green-ових функцій мають відомі стрибки в точках відповідно

$$x = \xi_1$$

перша, та

$$x = \xi_2$$

друга, то дістанемо з рівності (240):

$$\Gamma(\xi_1, \xi_2) = (-1)^k G(\xi_2, \xi_1)$$

Отже, коли в Green-овій функції поміняти місцями аргументи, то вона переходить у Green-ову функцію спряженої задачі з множником $(-1)^k$. Будемо називати і самі Green-ові функції G та Γ спряженими.

Можна висловитися й так: Green-ова функція $G(x, \xi)$, розглядана як ...нкція другого аргумента, є з точністю до знаку Green-ова функція ...ряженої задачі.

Коли

$$L_x[\,] = \Lambda_x[\,]$$

... k число парне, і коли при цьому умови (218) та (219) тотожні, то ви...одить звідси, що

$$G(x, \xi) = G(\xi, x)$$

...бто симетрія функції G. Задача (236) називається в такому випадку ...моспряженою.

Коли

$$L_x[\,] = -\Lambda_x[\,]$$

... k — непарне, то виходить

$$G(x, \xi) = -G(\xi, x)$$

...ернувшися тепер до рівностей (227) та (231), припустімо, що z справ...джує однорідні граничні умови (229), а y — неоднорідні (214). Тоді рів...ість (231) очевидно дістане вигляд:

$$\int_a^b P[y, z] = V[z]$$

... що тут параметри τ_i є лінійні комбінації з величин

$$z(a), z'(a), \ldots, z^{(k-1)}(a)$$
$$z(b), z'(b) \ldots, z^{(k-1)}(b),$$

...то остаточно в цьому випадку

$$\int_a^b P[y, z] = \sum_{i=0}^{k-1} \vartheta_i z^{(i)}(a) + \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i z^{(i)}(b) =$$

$$Q[z] = \sum_{i,j=0}^{k-1} a_{ij} z^{(i)}(a) U_j[y] - \sum_{i,j=0}^{k-1} b_{ij} z^{(i)}(b) U_j[y],$$

де $\vartheta_i, \theta_i, a_{ij}, b_{ij}$ є певні числові множники.

Такий випадок, як ми довели, матимемо, коли взяти

$$z = \Gamma(x, \xi) = (-1)^k G(\xi, x)$$

Тоді рівність (217) дасть, по виконанні інтеграцій та урахуванні перерв похідних $(k-1)$-го та k-го порядків функцій Γ та G:

$$y(\xi) = \int_a^b G(\xi, x) L_x[y]\, dx + Q[G(\xi; x)] \qquad (241)$$

де

$$Q[G(\xi, x)] = \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i G_x^{(i)}(a) + \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i G_x^{(i)}(b) =$$

$$= \sum_{i,j=0}^{k-1} \{ a_{ij} G_x^{(i)}(\xi, a) + b_{ij} G_x^{(i)}(\xi, b) \} u_j(y) =$$

$$= \sum_{i,j=0}^{k-1} \{ a_{ij} G_x^{(i)}(\xi, a) + b_{ij} G_x^{(i)}(\xi, b) \} g_j$$

$$G_x^{(i)}(\xi, a) = \left(\frac{\partial^i G(\xi, x)}{\partial x^i} \right)_{x=a}$$

$$G_x^{(i)}(\xi, b) = \left(\frac{\partial^i G(\xi, x)}{\partial x^i} \right)_{x=b}$$

Рівність (241) і є загальне „джерельне" представлення розв'язки зада (213)—(214). Відміною проти випадку однорідних граничних умов є пр сутність у правій стороні члена $\theta[G(\xi, x)]$.

Ми волітимемо писати рівність (241), помінявши взаємно змінні x та

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) L_\xi[y] d\xi + Q[G(x, \xi)] \tag{24}$$

Отже

$$Q[G(x, \xi)] = \sum_{i,j=0}^{k-1} \{ a_{i,j} G_\xi^{(0)}(x, a) + b_{i,j} G_\xi^{(i)}(x, b) \} g_j$$

§ 26. Наближене розв'язання способом моментів звичайного лінійног диференціального рівняння за неоднорідних граничних умов

1-й випадок. Уявімо, що повна система функцій

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$$

якими наближено хочемо представити функцію y у формі:

$$y_m = a_0^{(m)} \varphi_0(x) + a_1^{(m)} \varphi_1(x) + \ldots + a_m^{(m)} \varphi_m(x), \tag{243}$$

має властивість точно представляти на кінцях інтервалу $[a, b]$ скінчен ними сумими одночасно всі функціонали

$$U_0[y], U_1[y], \ldots, U_{k-1}[y]$$

при довільному y.

Так буде, напр., у випадку, коли

$$\varphi_i(x) = x^i$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots)$$

Тоді спосіб моментів у застосуванні до задачі (213)—(214), можна звести

1) передусім до параметричного розв'язання неозначеної системи лінійних рівнянь:

$$U_i[y_m] = g_i$$
$$(i = 0,\ 1, \ldots, k-1)$$

щодо чисел $a_i^{(m)}$ $(m > k)$

2) до введення цих параметрів

$$t_1^{(m)}, \quad t_2^{(m)}, \ldots$$

у вираз (243):

$$y_m = \psi_0(x) + t_1^{(m)}\psi_1(x) + t_2^{(m)}\psi_2(x) + \ldots,$$

при чому виявиться, що

$$U_i[\psi_0(x)] = g_i$$
$$(i = 0,\ 1, \ldots,)$$

а

$$U_i[\psi_h(x)] = 0$$
$$\begin{pmatrix} i = 0,\ 1, \ldots, k-1 \\ h = 1,\ 2,\ 3, \ldots \end{pmatrix}$$

3) до заміни y на $Y - \psi_0(x)$ та y_m на $Y_m - \psi_0(x)$, що зведе задачу на однорідну.

2-й випадок. Спосіб найменших квадратів. Визначаємо числа $a_i^{(m)}$ із умови:

$$I_m = \int_a^b L_x^2[y_m - y]\,dx = \min$$

з додатковими умовами

$$U_l[y_m] = 0$$
$$(l = 0,\ 1, \ldots, k-1)$$

отже зводимо задачу до розв'язання системи $m+k+1$ рівнянь:

$$\int_a^b L_x[y_m - y] L_x[\varphi_n] - \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i U_i[\varphi_n] \equiv 0$$
$$(n = 0,\ 1, \ldots, m)$$
$$U_i[y_m] = g_i$$
$$(i = 0,\ 1, \ldots, k-1)$$

з $m+k+1$ невідомими:

$$a_0^{(m)}, \ldots, a_m^{(m)}$$
$$\lambda_0,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$$

Шуканий minimum очевидно завжди існує.

Задача

$$L_x[w] = L_x[z - z_m]$$
$$U_0|w| = 0 \qquad (242)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$U_{k-1}[w] = 0$$

має одну-єдину розв'язку:

$$w = y - y_m$$

Звідси:

$$y_m - y = \int_a^b G(x, \xi) L_\xi [y_m - y] d\xi,$$

що відомим способом, через застосування нерівності Буняковського, дає

$$y = \lim_{m \to \infty} y_m$$

Так само виходить:

$$y' = \lim_{m \to \infty} y'_m$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(k-1)} = \lim_{m \to \infty} y_m^{(k-1)}$$

Цей спосіб можна перенести і на системи рівнянь і на рівняння з частинними похідними, але ми цього не робитимемо, бо взагальнення йде цілком тривіально, а тим часом одна з основних трудностей у задачах з частинними похідними математичної фізики — точно справджувати граничні умови скінченними сумами $\sum_{i=0}^{m} a^m \varphi_i$.

3-й випадок. Спосіб моментів. Визначаємо числа $a_i^{(m)}$ з рівнянь:

$$\int_a^b L_x [y_m - y] M_x [\varphi_n] dx - \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i U_i [\varphi_n] = 0 \qquad (243)$$
$$(n = 0, 1, \ldots, m)$$
$$U_i [y_m] = g_i \qquad (244)$$
$$(i = 0, 1, \ldots, k - 1)$$

Коли

$$L_x[\ ] = M_x[\ ] - \lambda N_x[\ ],$$

то ця система може стати неозначеною або суперечною тільки для скінченної кількості значень параметра λ. Міркування, що вже наводилися, показують, що для досить великого m значення

$$\lambda = 1$$

серед цих значень трапитися не може, якщо воно не є характеристичне число задачі (213)—(214).

Лінійно комбінуючи рівності (243) та пам'ятаючи, що системи функцій

$$\varphi_0, \ \varphi_1, \ \varphi_2, \ldots$$

та

$$M_x[\varphi_0], \quad M_x[\varphi_1], \ldots$$

легко можуть бути дібрані, як абсолютні повні, дістанемо:

$$\int_a^b L_x[y_m - y]\,\{M_x[y_m - y] + \varepsilon_m\}\,dx - \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \{\,U_0[y_m - y] + \varepsilon_{im}\,\} = 0, \quad (245)$$

де

$$\begin{gathered} \lim_{m\to\infty} \varepsilon_{im} = 0 \\ (i = 0,\ 1, \ldots, k-1) \\ \lim_{m\to\infty} \int_a^b \varepsilon_m^2\,dx = 0 \end{gathered} \qquad (245')$$

За допомогою рівностей (244) можемо (248) переписати так:

$$\int_a^b L_x[y_m - y]\,\{M_x[y_m - y] + \varepsilon_m\}\,dx - \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \varepsilon_{im} \qquad (246)$$

При тому очевидно з властивостей функцій φ_i, що можна зробити точно:

$$\varepsilon_{im} = 0,$$

не порушивши рівності (245′). Тоді з рівності (246), як відомо маємо:

$$\int_a^b L_x^2[y_m - y]\,dx \leqslant \text{const} \int_a^b (\lambda N_x[y_m - y] + \eta_m)^2\,dx,$$

де

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^b \eta_m^2\,dx = 0$$

Далі маємо:

$$y_m - y = \int_a^b G L_x[y_m - y]\,dx$$

де G є Green-ова функція задачі (242′) і все міркування закінчується відомим уже способом.

Цю схему теж без ніяких принципіальних змін можна застосувати і до системи звичайних диференціальних рівнянь і до рівнянь з частинними похідними, але й цього в дальшому ми не зробимо з тих самих міркувань, які висловлено з приводу випадку 2-го.

§ 27. Узагальнення способу найменших квадратів

Через те, що ми шукаємо наближену розв'язку y_m задачі (213)—(214), нема потреби граничні умови (214) здійснювати т о ч н о, як це досі у нас скрізь роблено, не виключаючи й попереднього параграфа. Дозвольмо собі і граничні умови здійснювати наближено. Для цього принцип способу найменших квадратів застосуймо так. Поставмо задачу про minimum виразу

$$I_m(a_0^{(m)}, a_1^{(m)}, \ldots a_m^{(m)}) = \int_a^b L_x^2[y_m - y]\,dx + \tau^2 \sum_{i=0}^{k} U_i^2[y_m - y], \qquad (247)$$

де множник τ^2 будемо необмежено збільшувати зі зростанням m.

Про minimum інтеграла $I_m a_0^{(m)}, \ldots, a_m^{(m)}$ можна напевно сказати, що він є величина обмежена, якщо функція y обмежена, функції φ_i взято, напр., у формі

$$1, x, x^2, x^3, \ldots$$

а число τ росте не дуже швидко при зростанні m. Справді бо, можна взяти за y_m таке многочленне наближення функції y, що вирази

$$|y-y_m|,\ |y'-y'_m|, \ldots, |y^{(k-1)}-y_m^{(k-1)}|$$

та

$$\int_a^b (y^{(k)}-y_m^{(k)})^2\,dx$$

всі необмежено меншатимуть при зростанні m. Звідси виходить, що

$$U_i[y_m-y] < \frac{\text{const}}{\tau^2} \tag{247'}$$

Так само й

$$\int_a^b L_x^2[y_m-y]\,dx \to 0$$

при $m \to \infty$.

Взявши далі для задачі

$$L_x[w] = L_x[y_m-y]$$

$$U_i[w] - L_x[y_m-y]$$

$$(i=0, 1, \ldots, k-1)$$

формулу (241'), маємо:

$$\begin{aligned} y_m - y = \int_a^b G(x,\xi)\, L_\xi[y_m-y]\,d\xi + \\ + \sum_{i,\ j=0}^{k-1} \left\{ a_{ij} G^{(i)}(x,a) + b_{ij} G_\xi^{(i)}(x,b) \right\} U_j[y_m-y] \end{aligned} \tag{248}$$

Продиференціювавши цю рівність $k-1$ разів, дістанемо аналогічно:

$$\begin{aligned} y_m^{(h)} - y^{(h)} = \int_a^b \frac{\partial^h G(x,\xi)}{\partial x^h} L_\xi[y_m-y]\,d\xi + \sum_{i,\ j}^{k-1} \left\{ a_{ij} \frac{\partial^h G^{(i)}(x,a)}{\partial x^h} + \right. \\ \left. + b_{ij} \frac{\partial^h G_\xi^{(i)}(x,b)}{\partial x^h} \right\} U_j[y_m-y] \end{aligned} \tag{249}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, k-1)$$

Ці рівності мають силу скрізь на інтервалі $[a, b]$, за винятком хіба його кінців.

Застосувавши до рівностей (248) та (249) нерівності Буняковського та Cauchy, дістанемо:

$$[y_m - y]^2 \leqslant (k+1) \int_a^b G^2\,d\xi \int_a^b L_x^2[y_m-y]\,dx +$$

$$+ (k+1) \sum_{i=0}^{k-1} \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} a_{ij} G_\xi^{(i)}(x,a) + \sum_{i=0}^{k+1} b_{ji} G_\xi^{(i)}(x,b) \right\}^2 U_j^2[y_m-y]$$

$$|y_m^{(h)} - y^{(h)}|^2 \leqslant (k+1) \int_a^b \left(\frac{\partial^h G}{\partial x^h}\right)^2 d\xi . \int_a^b L_x^2 [y_m - y]\, dx +$$

$$+ (k+1) \sum_{j=0}^{k-1} \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} a_i \frac{\partial^h G^{(i)}(x, a)}{\partial x^h} + \sum_{i=0}^{k-1} b_{ij} \frac{\partial^h G^{(i)}(x, b)}{\partial x^h} \right\} U_j^2 [y_m - y]$$

Отже, з огляду на формули (247) та (247′), виходить

$$y = \lim_{m\to\infty} y_m$$

$$y' = \lim_{m\to\infty} y'_m$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(k-1)} = \lim_{m\to\infty} y_m^{(k-1)}$$

Цей спосіб безпосередньо узагальнюється на випадок систем лінійних диференціальних рівнянь. Візьмімо (розділ IV, § 40) систему:

$$\begin{aligned} L_{1x}[z] &= M_{1x}[z] - \lambda N_1 [z] = f_1(x) \\ L_{2x}[z] &= M_{2x}[z] - \lambda N_{2x}[z] = f_2(x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_{kx}[z] &= M_{kx}[z] - \lambda N_{kx}[z] = f_k(x) \end{aligned} \tag{249′}$$

за неоднорідних граничних умов:

$$\begin{aligned} U_1 [z] &= g_1 \\ U_2 [z] &= g_2 \\ &\cdots\cdots \\ U_k [z] &= g_k \end{aligned} \tag{249″}$$

Нехай k-кратна система функцій

$$\begin{array}{l} \varphi_{10},\ \varphi_{11}, \dots \varphi_{1m}, \dots \\ \varphi_{20},\ \varphi_{21}, \dots \varphi_{2m}, \dots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{k0},\ \varphi_{k1}, \dots \varphi_{km}, \dots \end{array} \tag{249‴}$$

є повна в звичайному розумінні слова.

Нетрудно показати, що мінімізація виразу:

$$\sum_{j=i}^{k} \int_a l_j^2 L_{jx}^2 [z_m - z]\, dx + \sum \tau_j^2 U_j^2 [z - z_m]$$

визначить коефіцієнти наближень

$$z_m = a_0^{(m)} \varphi + a_1^{(m)} \varphi_j, + \dots + a_m^{(m)} \varphi_{jm}$$

$$(j = 1, 2, \dots, k)$$

розв'язки $z_j (j = 1, 2, \dots, k)$ так, що буде

$$z_j = \lim_{m\to\infty} z_m$$

$$(j = 1, 2, \dots, k),$$

коли числа τ належним способом необмежено збільшувати разом з m, а числа l_i залишити обмеженими.

§ 28. Узагальнення способу моментів

Замість мінімізувати інтеграл (247), визначмо коефіцієнти $a_i^{(m)}$ із рівнянь:

$$\int_a^b L_x[y_m - y]\, M_x[\varphi_n]\, dx + \sum_{i=0}^{k-1} \tau_i^2 U_i[y_m - y]\, U_i[\varphi_n] = 0 \tag{250}$$

$$(n = 0, 1, \ldots, m),$$

де числа τ_i^2 необмежено ростуть разом з m, але не швидше за m. Система рівнянь (250) означена для

$$\lambda = 1$$

$$\tau_i = 0$$

$$(i = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Отже вона означена взагалі за винятком деяких дискретних особливих значень параметрів λ та τ_i.

Лінійно комбінуючи рівності (250), як це роблено вже не раз, дістанемо:

$$\int_a^b L_x[y_m - y]\, \{ M_x[y_m - y] + \varepsilon_m \}\, dx + \\ + \sum_{i=0}^{k-1} \tau_i^2 U_i[y_m - y]\, \{ u_i[y_m - y] + \eta_m \} \tag{251}$$

Тут можна добитися, щоб було

$$\lim_{m \to \infty} \int_a^b \varepsilon_m^2\, dx = 0 \tag{252}$$

та

$$\tau_i^2 \eta_m \to 0 \tag{253}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, k-1)$$

хоч τ_i і необмежено росте разом з m. Отже будемо вважати, що τ_i ростуть повільніше ніж m, напр., нехай

$$\tau \backsim \sqrt{m}$$

Через застосування нерівностей Cauchy та Буняковського з цієї рівності дістанемо:

$$\int_a^b L_x^2[y_m - y]\, dx + \sum_{i=0}^{k-1} \tau_i^2 U_i^2[y_m - y] < \\ < \text{const} \int_a^b \{ \lambda N_x[y_m - y] + \delta_m \}^2 dx, \tag{254}$$

де

$$\lim_{m \to \infty} \int_a^b \delta_m^2\, dx = 0$$

Далі розгляньмо рівняння:

$$M_\xi\,[g^{(h)}(x,\xi)] = \frac{\partial^h G(x,\xi)}{\partial x^h}$$

$$(h = 0, 1, \ldots, k-1)$$

з невідомою функцією $g^{(h)}(x,\xi)$.
за умов

$$U_i\,[g^{(h)}] = 0$$

$$\begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, k-1 \\ h = 0, 1, \ldots, k-1 \end{pmatrix}$$

Функції $g(x,\xi)$ як функції від ξ усі суцільно диференціюються не менш як по $k-1$ разу, і тільки у випадку

$$h = k-1$$

k-та похідна функції $y^{(k-1)}(x,\xi)$ має скінченну перерву. Отже є таке наближення

$$g_m^{(h)}(x,\xi) = a_0^{(m)}(x)\,\varphi_0(\xi) + \ldots + a_m^{(m)}(x)\,\varphi_m(\xi)$$

функції $g^{(h)}(x,\xi)$, що

$$g_m^{(h)}(x,\xi) - g^{(h)}(x,\xi) \to 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(g_m^{(h)}(x,\xi) - g^{(h)}(x,\xi\Big) \to 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial\xi^{k-1}}\Big(g_m^{(h)}(x,\xi) - g^{(h)}(x,\xi\Big) \to 0$$

при необмеженому зростанні m. Крім того,

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b\left[\frac{\partial^k(g_m - g)}{\partial\xi^k}\right]^2 d\xi = 0$$

Тому, утворивши з рівностей (250) лінійну комбінацію:

$$\int_a^b L_\xi\,[y_m - y]\,M_\xi\,[g_m^{(h)}]\,d\xi + \sum_{i=0}^{k-1}\tau_i^2\,U_i\,[y_m - y]\,U_i\,[g_m^{(h)}] = 0$$

та віднявши її відповідно від правих сторін рівностей (248) та (249), дістанемо:

$$y_m - y = \int_a^b \gamma_m\,L_\xi\,[y_m - y]\,d\xi + \sum_{j=0}^{k-1}\tau_j\,U_j\,[y_m - y]\cdot\left\{\frac{1}{\tau_i}\sum_{i=0}^{k-1}a_{ij}\,G_\xi^{(i)}(x,a) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\tau_j}\sum_{i=1}^{k-1}b_{ij}\,G_\xi^{(i)}(x,b) - \tau.\,U_j\,[y_m^{(0)}]\right\}$$

$$y_m^{(h)} - y^{(h)} = \int_a^b \gamma_{mh}\,L_\xi\,[y_m - y]\,d\xi + \sum_{j=0}^{k-1}\tau_i\,U_j\,[y_m - y]\left\{\frac{1}{\tau_j}\cdot\sum_{i=0}^{k-1}a_{ij}\,\frac{\partial^h}{\partial x^h}\,G_\xi^{(i)}(x,a) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\tau_j}\cdot\sum_{i=0}^{k-1}b_{ij}\,\frac{\partial^h}{\partial x^h}\,G_\xi^{(i)}(x,b) - \tau_j\,U_j\,[g_m^{(h)}]\right\}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, k-1),$$

де

$$\lim_{m\to\infty} \int \gamma_m^2 d\xi = 0$$

$$\lim_{m\to\infty} \int \gamma_{mh}^2 d\xi = 0$$

$$(h = 1, 2, \ldots, k-1)$$

Нагадавши, що τ росте повільніше за m та застосувавши до цих рівностей нерівності Cauchy та Буняковського, дістанемо:

$$(y_m - y)^2 < \text{const} \left\{ \int_a^b \gamma_m^2 d\xi + \sum_{j=0}^{k-1} \left[\frac{1}{\tau_j} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} a_j G_\xi^{(i)}(x, a) + \frac{1}{\tau_j} \sum_{i=0}^{k-1} b_{ij} G_\xi^{(i)}(x, b) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \tau_j u_j [g_m^{(0)}] \right]^2 \right\} \left\{ \int_a^b U_\xi^2 [y_m - y] d\xi + \sum_{j=0}^{k-1} \tau_j^2 U_j^2 [y_m - y] \right\}$$

$$(y_m^{(h)} - y^{(h)})^2 < \text{const} \left\{ \int_a^b \gamma_{mh}^2 d\xi + \sum_{j=0}^{k-1} \left[\frac{1}{\tau_j} \sum_{i=0}^{k-1} a_{ij} \frac{\partial^h}{\partial x^h} G_\xi^{(i)}(x, a) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\tau_j} \sum_{i=0}^{k-1} b_{ij} \frac{\partial^h}{\partial x^h} G_\xi^{(i)}(x, b) - \tau_j u_j [g_m^{(h)}] \right]^2 \right\} \cdot \left\{ \int_a^b L_\xi^2 [y_m - y] d\xi + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{k-1} \tau_j^2 U_j^2 [y_m - y] \right\}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, k-1)$$

На основі нерівності (254) та нерівності Cauchy, ці формули можна переписати так:

$$(y_m - y)^2 < \text{const}\, \zeta_m^2 \cdot \left\{ \int_a^b \lambda^2 N_x^2 [y_m - y] dx + \delta_m^2 \right\}$$

$$(y_m^{(h)} - y^{(h)})^2 < \text{const}\, \zeta_{mh}^2 \left\{ \int_a^b \lambda^2 N_x^2 [y_m - y] dx + \delta_m^2 \right\} \qquad (225)$$

$$(h = 1, 2, \ldots, k-1),$$

де

$$\lim_{m\to\infty} \zeta_m(x) = 0$$

$$\lim_{m\to\infty} \zeta_{mh}(x) = 0$$

$$(h = 1, 2, \ldots, k-1)$$

Звідси, через лінійну комбінацію та інтеграцію, маємо:

$$\int_a^b N_x^2 [y_m - y] dx < \text{const.} (\zeta_m^2 + \zeta_{m1}^2 + \ldots + \zeta_{m;k-1}^2) \cdot \qquad (256)$$

$$\cdot \left\{ \int_a^b \lambda^2 N_x^2 [y_m - y] dx + \delta_m^2 \right\}$$

і остаточно

$$\int_a^b \lambda N_x^2 [y \quad - y] dx \sim \text{const} \cdot \delta_m^2 (\zeta_m^2 + \zeta_{m1}^2 + \ldots + \zeta_{m,k-1}^2)$$

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^b \lambda^2 N_x^2 [y_m - y] dx = 0$$

Завівши цей результат до рівностей (255), дістаємо звідси знов висновок:

$$\begin{aligned} y &\to y_m \\ y' &\to y'_m \\ &\cdots\cdots \\ y^{(k-1)} &\to y_m^{(k-1)} \end{aligned} \tag{257}$$

при необмеженому зростанні m.

Для системи диференціальних рівнянь (249′) — (249″) це взагальнення зводиться до визначення коефіцієнтів a_{ij} із умов

$$\sum_{j=1}^{k} l_j^2 \int_a^b L_{jx}[z_m - z]\, M_{jx}[\varphi_m]\, dx + \sum_{j=1}^{k} \tau_j^2 U_j[z_m - z]\, U_j \cdot [\varphi_{jn}] = 0$$

$$(n = 0, 1, \ldots, m)$$

Тут числа l_j, τ_j треба вибирати так само, як у попередньому параграфі.

Цей спосіб не має великого значення для звичайних рівнянь. Але він має особливе значення для рівнянь з частинними похідними, бо там основну трудність являє як раз добір функцій $\varphi_i(x, y)$, що справджують дані умови на границі.

Розуміється, цей спосіб може бути застосований і до задач з однорідними граничними умовами, як до окремого випадку.

§ 29. Одностайність збіжності поданих наближень

Зауважмо, що несуцільність функції $\frac{\partial^k}{\partial x^k} g^{(k-1)}(x, \xi)$ на кінцях інтервалу $[a, b]$ не позбавляє змоги вивести з нерівностей (255) через інтегрування та використання нерівності (256) такі результати:

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^b (y - y_m)^2\, dx = 0$$

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^b (y' - y'_m)^2\, dx = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^b (y^{(k-1)} - y_m^{(k-1)})^2\, dx = 0$$

тобто середню квадратичну збіжність виразів

$$y_m, y'_m, \ldots, y_m^{(k-1)}$$

Далі, очевидно, одностайна збіжність залежностей (257) забезпечена в усякому внутрішньому інтервалі $[a, b]$ інтеграла.

Виникає сумнів, чи граничні умови задачі при необмеженому зростанні m справджуються досить точно для наближення y_m функції y. Щоб у цьому пересвідчитися, досить зауважити, що, на основі нерівності (254), маємо:

$$U_i^2[y\ \ - y] < \frac{\text{const}}{\tau_i^2} \int_a^b \lambda^2 N_x^2[y_m - y]\, dx + \frac{\text{const}}{\tau_i^2} \int_a^b \delta_m^2\, dx$$

Отже

$$\lim U_i[y_m] = U_i[y] = g_i$$

$$(i = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Щоб забезпечити одностайну збіжність залежностей (257) на всьому інтервалі $[a, b]$, можна зразу за поданою схемою розв'язати нашу задачу на інтервалі

$$\Delta = [a - \varepsilon,\ b + \varepsilon],$$

продовживши суцільно за цей інтервал коефіціенти та вільний член нашого диференціального рівняння та встановивши в точках $a-\varepsilon$, $b+\varepsilon$ ті самі граничні умови, що було дано для точок a, b. Тоді наближена розв'язка $\bar{y}_m$ такої зміненої задачі на інтервалі $[a, b]$ збігатиметься одностайно до точної розв'язки $\bar{y}$. Те саме буде правдиво відповідно щодо похідних

$$\bar{y}_m, \ldots, \bar{y}_m^{(k-1)}$$

та

$$\bar{y}', \ldots, \bar{y}^{(k-1)}$$

Тим часом, узявши число ε досить мале, матимемо в точках a та b та на всьому інтервалі $[a, b]$ різниці

$$\bar{y} - y,\ \bar{y}' - y', \ldots, \bar{y}^{(k-1)} - y^{(k-1)}$$

досить малі.

Справді, різниця $\bar{y} - y$ справджує на інтервалі $[a, b]$ рівняння:

$$L_x[w] = 0$$

та умови:

$$U_i[w] = U_i[\bar{y} - y]$$

$$(i = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Отже, застосувавши тут формулу (241), маємо:

$$\begin{gathered}
\bar{y}(x) - y(x) = \sum_{i,j=0}^{k-1} \left\{ a_{ij} G_\xi^{(i)}(x, a) + b_{ij} G_\xi^{(i)}(x, b) \right\} U_j[\bar{y} - y] \\
\bar{y}^{(h)}(x) - y^{(h)}(x) = \sum_{i,j=0}^{k-1} \left\{ a_{ij} \frac{\partial^h}{\partial x^h} G_\xi^{(i)}(x, a) + b_{ij} \frac{\partial^h}{\partial x^h} G_\xi(x, b) \right\} U_j[\bar{y} - y]
\end{gathered} \tag{258}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, k-1)$$

Через суцільність функцій

$$\bar{y}, \ldots, \bar{y}^{(k-1)}$$

на інтервалі $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ виходить, що вирази

$$U_i[\bar{y}] - g_i$$

$$(i = 0, 1, \ldots, k-1)$$

будуть досить малі при досить малому ε. Отже, через обмеженість функції G та їх похідних, із рівностей (258), дістаємо, що

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \bar{y}(x) = y(x)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \bar{y}'(x) = y'(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \bar{y}^{(k-1)}(x) = y^{(k-1)}(x)$$

одностайно на інтервалі $[a, b]$. Так виходить, що функції y_m справджує з довільно малою похибкою на кінцях інтервалу $[a, b]$ умови

$$U_i[y_m] = g_i$$
$$(i = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Отож на цьому інтервалі маємо одностайно:

$$\bar{y}_m \to y$$
$$\bar{y}_m \to y'$$
$$\cdots\cdots$$
$$\bar{y}^{(k-1)} \to y^{(k-1)}$$

при необмеженому зростанні m, коли одночасно належно зменшувати число ε.

§ 30. Спряжені задачі еліптичного типу з частинними похідними другого порядку

Вирази

$$L_{xy}[z] = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + A(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + C(x, y)z$$

та

$$\Lambda_{xy}[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}[A(x, y)u] - \frac{\partial}{\partial y}[B(x, y)u] + C(x, y)u$$

звемо спряженими.

Застосуймо Green-ове перетворення до виразу

$$I = \iint\limits_{(S)} uL_{xy}[z]\,dx\,dy,$$

де інтеграція ведеться по обсягу S, обмеженому контуром s. Маємо:

$$\iint\limits_{(S)} \Delta z u\,dx\,dy = \int\limits_{(s)} u\frac{\partial z}{\partial n}ds - \iint\limits_{(S)}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{(s)} u\frac{dz}{dn}ds \int\limits_{(s)} z\frac{du}{dn}ds + \iint\limits_{(S)} \Delta u z\,dx\,dy$$

$$\iint\limits_{(S)} A\frac{\partial z}{\partial x}u\,dx\,dy = -\int\limits_{(s)} Azu\,dy - \iint\limits_{(S)} z\frac{\partial}{\partial x}(Au)\,dx\,dy$$

$$\iint\limits_{(S)} B\frac{\partial z}{\partial y}u\,dx\,dy = \int\limits_{(s)} Bzu\,dx - \iint\limits_{(S)} z\frac{\partial}{\partial y}(Bu)\,dx\,dy$$

$$\iint\limits_{(S)} Czu\,dx\,dy = \iint\limits_{(S)} Czu\,dx\,dy$$

Тут $\frac{dz}{dn}$, $\frac{du}{dn}$ є похідні по внутрішній нормалі до контура s, а ds — диференціал дуги цього контура.

Додавши ці рівності, дістаємо:

$$\iint\limits_{(S)} \{uL_{xy}[z] - z\Lambda_{xy}[u]\}\,dx\,dy = -\int\limits_{(S)} \left\{\left(u\frac{dz}{dn} - z\frac{du}{dn}\right) + \right.$$

$$\left. + [A\cos(nx) + B\cos(ny)]z\cdot u\right\} ds \qquad (259)$$

Тут

$$\cos(nx), \quad \cos(ny)$$

є напрямні cosinus-и внутрішньої нормалі до контура s.

Нехай функція z справджує якусь лінійну однорідну умову на контурі s:

$$P(s)\frac{dz}{dn} + Q(s)z = 0 \qquad (260)$$

Ми можемо її записати в параметричній формі:

$$z = \gamma(s)t$$

$$\frac{dz}{dn} = \delta(s)t \qquad (260')$$

де γ, δ — дані функції дуги s, а t параметр. Завівши її в вираз

$$R[z, u] = u\frac{dz}{dn} - z\frac{du}{dn} + [A\cos(nx) + B\cos(ny)]zu,$$

дістанемо:

$$R[z, u] = \left\{\delta(s)\cdot u - \gamma(s)\frac{du}{dn} + [A\cos(nx) + B\cos(ny)]\gamma(s)\cdot u\right\} t$$

Назвімо умовою спряженою щодо умови (260) або (260′) таку залежність на контурі для $u(x, y)$:

$$-\gamma(s)\frac{du}{dn} + \delta(s) + [(A\cos(nx) + B\cos(ny))\gamma(s) + \delta(s)]\,u = 0 \qquad (261)$$

або, симетричніше:

$$u = \mathfrak{g}(s), t$$

$$\frac{du}{dn} = \mathfrak{d}(s), \tau \qquad (261')$$

де τ — параметр, а функції $\mathfrak{g}(s)$ та $\mathfrak{d}(s)$ добрано так, щоб вираз $R[z, u]$ при довільному t тотожно ставав нулем. Тоді рівність (259) перейде в таку:

$$\iint\limits_{(S)} \{u L_{xy}[z] - z\Lambda_{xy}[u]\}\,dx\,dy = \int\limits_{(s)} R[z, u]\,ds = 0 \qquad (262)$$

Задачі

$$\left.\begin{aligned} L_{xy}[z] &= F(x, y) \\ z &= \gamma(s)\cdot t \\ \frac{dz}{dn} &= \delta(s)\cdot t \end{aligned}\right\} \qquad (263)$$

та

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_{xy}[u] &= \Phi(x, y) \\ u &= \mathfrak{g}(s)\cdot t \\ \frac{du}{dn} &= \mathfrak{d}(s)\cdot t \end{aligned}\right\} \qquad (264)$$

зватимемо спряженими.

Нехай ще функкія z справджує умову на контурі s:

$$P(s)\frac{dz}{dn} + Q(s)z = \psi(s) \qquad (265)$$

або в параметричній формі:

$$\begin{aligned} z &= \gamma(s)\cdot t + \gamma_0(z) \\ \frac{dz}{dn} &= \delta(s)t + \delta_0(s) \end{aligned} \qquad (265')$$

де

$$\gamma(s), \quad \gamma_0(z), \quad \delta(s), \quad \delta_0(s)$$

є дані функції дуги s, а t — параметр. Тоді умовою спряженою з (265) або з (265′) назвемо залежності

$$\begin{aligned} u &= \mathfrak{g}(s)t + \mathfrak{g}_0(s) \\ \frac{du}{dn} & \mathfrak{d}(s)\cdot + \mathfrak{d}_0(s), \end{aligned} \qquad (266)$$

де $\mathfrak{g}(s)$ та $\mathfrak{d}(s)$ є ті самі функції, що в рівностях (261′), $\mathfrak{g}_0(s)$, $\mathfrak{d}_0(s)$ — довільні функції і τ — параметр.

Тоді рівність (259) дістає вигляд:

$$\iint\limits_{(S)} \{u L_{xy}[z] - z\Lambda_{xy}[u]\}\, dx\, dy - \int\limits_{(s)} [\mathfrak{g}_0(s)\delta_0(s) - \mathfrak{d}_0(s)\gamma_0(s) + \\ + (A\cos(nx) + B\cos(ny))\,\mathfrak{g}_0(s)\gamma_0(s)]\, ds \qquad (266)$$

Задачі

$$\left.\begin{aligned} L_{xy}[z] &= F(x, y) \\ z &= \gamma(s)\cdot t + \gamma_0(s) \\ \frac{dz}{dn} &= \delta(s)\cdot t + \delta_0(s) \end{aligned}\right\} \qquad (267)$$

та

$$\Lambda_{xy}[u] = F(x, y)$$
$$u = \mathfrak{g}(s) \cdot \tau + \mathfrak{g}_0(s) \qquad (268)$$
$$\frac{du}{dn} = \mathfrak{g}(s) \cdot \tau + \mathfrak{g}_0(s)$$

зватимемо знов спряженими.

Нарешті візьмімо випадок, коли функція $z(x, y)$ справджує умови неоднорідні (265) або (265′), а функція $u(x, y)$ — спряжені з ними однорідні (261) або (261′). Тоді формула (259) залишиться так:

$$\iint_{(S)} \{u L_{xy}[z] - z \Lambda_{xy}[u]\} \, dx \, dy = -\int_{(s)} [\mathfrak{g}(s)\delta_0(s) - \mathfrak{d}(s)\gamma_0(s) +$$
$$+ (A\cos(nx) + B\cos(ny))\, \mathfrak{g}(s)\gamma_0(s)] \, \tau \, ds \qquad (269)$$

або:

$$\iint_{(S)} \{u L_{xy}[z] - z \Lambda_{xy}[u]\} \, dx \, dy = -\int_{(s)} [u\,\delta_0(s) - \frac{du}{dn}\gamma_0(s) +$$
$$+ (A\cos(nx) + B\cos(ny))\, u\gamma_0(s)] \, ds \qquad (270)$$

Нехай z є розв'язка задачі (267) (вважаємо, що вона є єдина), а

$$u = \Gamma(x, y; \xi, \eta)$$

є Green-ова функція задачі (268), отже, як функція від x та y, справджує умови:

$$\Gamma(x, y; \xi, \eta) = \mathfrak{g}(s) \cdot \tau \qquad (271)$$
$$\frac{d\Gamma(x, y; \xi, \eta)}{dn} = \mathfrak{g}(s)\tau$$

на контурі s завжди, за винятком хіба точки

$$x = \xi, \quad y = \eta, \qquad (272)$$

та рівняння

$$\Lambda_x[\Gamma] = 0 \qquad (273)$$

теж скрізь у обсязі S, за винятком хіба точки (272).

Коли, через $G(x, y; \xi, \eta)$ назвемо Green-ову функцію задачі (267), то з рівності (262), застосованої до випадку

$$z = G$$
$$u = \Gamma,$$

виведемо легко:

$$\Gamma(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) = G(\xi_2, \eta_2; \xi_1, \eta_1) \qquad (274)$$

Це показує, що кожна з функцій Γ, G, розглядана як функція змінних ξ та η, є Green-ова функція задачі спряженої з задачею даної Green-ової функції.

Зокрема, коли

$$L_{xy}[\ ]=\Lambda_{xy}[\ ]$$

$$\mathfrak{g}(\ )=\gamma(\ )$$

$$\mathfrak{d}(\ )=\delta(\ ),$$

то задачу (267) або (268) називаємо самоспряженою. Тоді маємо з формули (274):

$$G(x, y; \xi, \eta)=\Gamma(\xi, \eta; x, y),$$

тобто Green-ова функція самоспряженої задачі є симетрична функція двох пар змінних

$$(x, y) \text{ та } (\xi, \eta)$$

Тепер з рівності (270) виводимо легко:

$$z(x, y)=\iint\limits_{(S)} G(x, y; \xi, \eta)\, L_{\xi\eta}[z]\, d\xi\, d\eta+\int\limits_{(S)}[A\cos(nx)+$$

$$+B\cos(ny)\,\gamma_0(s)+\delta_0(s)]\,G(x, y; \xi, \eta)\, d_0 s-\int\frac{dG(x, y; \xi, \eta)}{dn}\gamma_0(s)ds \qquad (275)$$

Тут похідна $\frac{dG}{dn}$ береться по зміні величин ξ, η.

Зокрема напр., коли умови (265′) на контурі зводяться на

$$z=\gamma_0(s),$$

тобто коли

$$\delta_0(s)=0,$$

то (275) дістає вигляд:

$$z(x, y)=\iint\limits_{(S)} G L_{\xi\eta}[z]\, d\xi\, d\eta+\int\limits_{(s)}\left\{[A\cos(nx)+B\cos(ny)]\,G\, dx-\gamma_0\frac{dG}{dn}\right\}ds \quad (275')$$

У випадку умов

$$\frac{dz}{dn}=\delta_0(s)$$

на контурі, коли

$$\gamma_0(s)=0,$$

виходить:

$$z(x, y)=\iint\limits_{(S)} G L_{\xi\eta}[z]\, d\xi\, d\eta-\int\limits_{(s)}\gamma_0(s)\frac{dG}{dn}ds \qquad (275'')$$

Основне для нас у цих формулах те, що під знаком $\int\limits_{(s)}$ фігурує білінійна форма від двох пар величин:

$$G, \frac{dG}{dn}$$

та

$$z, \frac{dz}{dn}$$

§ 31. Узагальнення способу найменших квадратів у застосуванні до рівнянь з частинними похідними другого порядку еліптичного типу

Будемо тут шукати наближену розв'язку названої задачі так, щоб вона й граничні умови справджувала теж наближено з похибкою, що нескінченно меншає (хочби в середньому) при необмеженому зростанні ступеня наближення.

Запровадивши зазначення

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \tag{276}$$

$$N_{xy}[z] = c(x, y) z, \tag{277}$$

ми обмежимося зразу рівняннями типу:

$$L_{xy}[z] = \Delta z + \lambda N_{xy}[z] = 0 \tag{278}$$

Нехай в обмеженому обсязі S, що належить до квадрата

$$\begin{gathered} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1, \end{gathered} \tag{279}$$

рівняння (278) має один єдиний інтеграл z, що справджує на границі s цього обсягу умову:

$$z = \psi(x, y) \tag{280}$$

при чому функція $\psi(x, y)$ має в квадраті (279) та на його границі суцільні перші та другі похідні і сама є суцільна.

Ми будемо шукати інтеграл z наближено в формі:

$$z_m = a_0^{(m)} \varphi_0(x, y) + a_1^{(m)} \varphi_1(x, y) + \ldots + a_{m'}^{(m)} \varphi_{m'}(x, y), \tag{281}$$

де система функцій

$$\varphi_0, \ \varphi_1, \ \varphi_2, \ldots \tag{282}$$

є замкнена на полі квадрата. За таку систему можна взяти, напр.,

$$\sin k\pi x \sin l\pi y, \ \sin k\pi x \cos l\pi y, \ \cos k\pi x \sin l\pi y, \ \cos k\pi x \cos l\pi y \tag{283}$$

$$(k, l = 0, 1, 2, \ldots)$$

або

$$x^k y^l \tag{283a}$$

$$(k, l = 0, 1, 2, \ldots)$$

У кожному разі, припустивши існування обмежених та суцільних других похідних у функції $t(x, y)$ у якомусь обсязі S', що належить до S і має віддаль від його границі s більшу за нуль, будемо вважати за можливе для всякого m так добрати коефіцієнти $\alpha_i^{(m)}$, щоб сума

$$t_m(x, y) = \alpha_0^{(m)} \varphi_0(x, y) + \alpha_1^{(m)} \varphi_1(x, y) + \ldots + a_{m'}^{(m)} \varphi_{m'}(x, y) \tag{284}$$

скрізь у S' справджувала умови:

$$
\begin{aligned}
&| \; t - t_m \; | < k\sigma(m) \\
&\left| \frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial t_m}{\partial x} \right| < k_x m\sigma(m) \\
&\left| \frac{\partial t}{\partial y} - \frac{\partial t_m}{\partial y} \right| < k_y m\sigma(m) \\
&\left| \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 t_m}{\partial x^2} \right| < k_{x^2} m^2\sigma(m) \\
&\left| \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 t_m}{\partial x \partial y} \right| < k_{xy} m^2\sigma(m) \\
&\left| \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 t_m}{\partial y^2} \right| < k_{y^2} m^2\sigma(m)
\end{aligned}
\tag{285}
$$

де

$$\sigma(m) = \frac{1}{m^2}\,\omega\left(\frac{1}{m}\right), \quad \lim_{m \to \infty} \omega\left(\frac{1}{m}\right) = 0,$$

а числа

$$k, \; k_x, \; k_y, \; k_{x^2}, \; k_{xy}, \; k_{y^2}$$

є сталі обмежені. Така гіпотеза є, напр., правдива, коли за функції φ_i взято (283) або (283_a).

Покажімо насамперед, як можна до нашої задачі застосувати спосіб найменших квадратів.

Розгляньмо задачу (278) — (280) в обсязі S_ε, що цілком належить до квадрата (4), включає в собі S і має границю s_ε віддалену від s на $\varepsilon k(x, y)$, де $k(x, y)$ та $k^{-1}(x, y)$ є обмежені функції від x та y.

Пошукаймо коефіцієнти

$$a_0^{(m)}, \; a_1^{(m)}, \ldots, a_{m^2}^{(m)} \tag{286}$$

суми (281) із умови:

$$D_\varepsilon[z_m] = \iint_{(S_\varepsilon)} L_{xy}^2\,[z_m]\,dx\,dy + \tau^2 \int_{(s_\varepsilon)} (z_m - \psi)\,ds = \min \tag{287}$$

де

$$\lim_{m \to \infty} \tau = \infty$$

Це дає систему лінійних рівнянь:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial D_\varepsilon[z_m]}{\partial \alpha_i^{(m)}} = \iint_{(S_\varepsilon)} L_{xy}[z_m]\,L_{xy}[\varphi_i]\,dx\,dy + \tau^2 \int_{(s_\varepsilon)} (z_m - \psi)\,\varphi_i\,ds = 0 \tag{288}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m^2)$$

з невідомими (286).

Очевидно можна, зважаючи на (285), так добрати ці невідомі, що буде на S_ε та на s_ε:

$$|z_m - \psi| < l\frac{1}{\tau}\,\delta_m,$$

де l є обмежене число. Отже напевно вираз $D_\varepsilon[z_m]$ у рівності (287) є число обмежене.

Доведімо тепер, що сума (281), визначена рівняннями (288), справджує вимогу:

$$z = \lim_{m\to\infty} z_m, \tag{289}$$

коли вести ε та $\frac{1}{m}$ до нуля, отже що спосіб найменших квадратів, застосований у формі (287) до рівняння (278), збігається. Для цього розгляньмо рівняння:

$$L_{xy}[w] = L_{xy}[z_m - z] \tag{290}$$

в обсязі S_ε при умові, щоб на контурі s_ε було:

$$w = z_m - \psi \tag{291}$$

Коли зазначимо через $G(x, y;\ \xi, \eta)$ Green-ову функцію цієї задачі, то матимемо для всякої осередньої точки обсягу S_ε:

$$w = z_m - z = \iint\limits_{(S_\varepsilon)} L_{\xi\eta}[z_m - z]\, G(x, y;\ \xi, \eta)\, d\xi d\eta - \int\limits_{(s_\varepsilon)} (z_m - \psi)\frac{dG}{dn}\, ds$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_\beta^y \left(\frac{\partial z_m}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right) dy = \iint\limits_{(S_\varepsilon)} \xi\eta\, [z_m - z]\, G_x d\xi d\eta - \int\limits_{(s_\varepsilon)} (z_m - \psi)\frac{dG_x}{dn}\cdot ds \\
&\int_\alpha^x \left(\frac{\partial z_m}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) dx = \iint\limits_{(S_\varepsilon)} L_{\xi\eta}\, [z_m - z]\, G_y\, d\xi d\eta - \int\limits_{(s_\varepsilon)} (z_m - \psi)\frac{dG_y}{dn}
\end{aligned}\right\} \tag{292}$$

$$\left(G_x = \int_\beta^y \frac{\partial G}{\partial x}\, dy,\ \ G_y = \int_\alpha^x \frac{\partial G}{\partial y}\, dx\right)$$

Візьмімо ще рівняння:

$$L_{\xi\eta}(t) = G(x, y;\ \xi, \eta)$$

$$L_{\xi\eta}(t_x) = G_x$$

$$L_{\xi\eta}(t_y) = G_y$$

за таких граничних умов на контурі s_ε:

$$t(\xi, \eta) = 0;\ \ t_x(\xi, \eta) = 0;\ \ t_y(\xi, \eta) = 0$$

Застосовуючи нерівності (285) до функцій

$$t,\ t_x,\ t_y$$

в обсязі S з виключенням круга радіуса ε, що має за осередок точку (y, x), можемо добрати коефіцієнти

$$b_i^{(m)},\ c_i^{(m)},\ \partial_i^{(m)}$$

$$(i=0, 1, \ldots, m^2)$$

так, що різниці

$$t-\sum_{i=0}^{m^2} b_i^{(m)}\varphi_i(\xi, \eta)=\frac{\delta_m}{\tau}$$

$$t_x-\sum_{i=0}^{m^2} c_i^{(m)}\varphi_i(\xi, \eta)=\frac{\delta_{xm}}{\tau}$$

$$t_y-\sum_{i=0}^{m^2} d_i^{(m)}\varphi_i(\xi, \eta)=\frac{\delta_{ym}}{\tau}$$

та різниці

$$G-\sum_{i=0}^{m^2} b_i^{(m)} L_{\xi\eta}[\varphi_i]=\gamma_m$$

$$G_x-\sum_{i=0}^{m^2} d_i^{(m)} L_{\xi\eta}[\varphi_i]=\gamma_{xm}$$

$$G_y-\sum_{i=0}^{m^2} d_i^{(m)} L_{\xi\eta}[\varphi_i]=\gamma_{ym}$$

справджуватимуть умови:

$$\lim_{m=\infty}\iint_{(S\varepsilon)}\gamma_m^2\, d\xi\, d\eta=0;\quad \lim_{m=\infty}\int_{(s\varepsilon)}\delta_m^2\, ds=0$$

$$\lim_{m=\infty}\iint_{(S\varepsilon)}\gamma_{xm}^2\, d\xi\, d\eta=0,\quad \lim_{m=\infty}\int_{(s\varepsilon)}\delta_{xm}^2\, ds=0$$

$$\lim_{m=\infty}\iint_{(S\varepsilon)}\gamma_{ym}^2\, d\xi\, d\eta=0,\quad \lim_{m=\infty}\int_{(s\varepsilon)}\delta_{ym}\, ds=0$$

Тим часом із рівностей (288) та (292) можемо утворити такі лінійні комбінації:

$$z_m-z=\iint_{(S\varepsilon)} L_{\xi\eta}[z_m-z]\,\gamma_m\, d\xi\, d\eta-\int_{(s\varepsilon)}(z_m-\psi)\left(\frac{dG}{dn}+\tau\delta_{xm}\right) ds \tag{293}$$

$$\int_\beta^y\left(\frac{\partial z_m}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}\right) dy=\iint_{(S\varepsilon)} L_{\xi\eta}[z_m-z]\,\gamma_{xm}\, d\xi\, d\eta-\int_{(s\varepsilon)}(z_m-\psi)\left(\frac{dG_x}{dn}+\tau\delta_{xm}\right) ds \tag{293'}$$

$$\int_\alpha^x\left(\frac{\partial z_m}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}\right) dx=\iint_{(S\varepsilon)} L_{\xi\eta}[z_m-z]\,\gamma_{ym}\, d\xi\, d\eta-\int_{(s\varepsilon)}(z_m-\psi)\left(\frac{dG_y}{dn}+\tau\delta_{ym}\right) ds \tag{293''}$$

Звідси, застосовуючи нерівності Буняковського та Cauchy, дістаємо:

$$(z_m - z)^2 \leqslant \left\{ 2 \iint\limits_{(S\varepsilon)} \gamma_m^2 \, d\xi \, d\eta + 4 \int\limits_{(s\varepsilon)} \left[\frac{1}{\tau^2} \left(\frac{dG}{dn} \right)^2 + \delta_{xm}^2 \right] ds \right\} D_\varepsilon [z_m] \tag{294}$$

$$\left[\int\limits_\beta^y \left(\frac{\partial z_m}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) dy \right]^2 \leqslant \left\{ 2 \iint\limits_{(S\varepsilon)} \gamma_{xm}^2 \, d\xi \, d\eta + 4 \int\limits_{(s\varepsilon)} \left[\frac{1}{\tau^2} \left(\frac{dG_x}{dn} \right)^2 + \delta_{xm}^2 \right] ds \right\} D_\varepsilon [z_m] \tag{294'}$$

$$\left[\int\limits_\alpha^x \left(\frac{\partial z_m}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx \right]^2 \leqslant \left\{ 2 \iint\limits_{(S\varepsilon)} \gamma_{ym}^2 \, d\xi \, d\eta + 4 \int\limits_{(s\varepsilon)} \left[\frac{1}{\tau^2} \left(\frac{dG_y}{dn} \right)^2 + \delta_{ym}^2 \right] ds \right\} D_\varepsilon [z_m] \tag{294''}$$

Отже, на S_ε буде:

$$z = \lim_{m=\infty} z_m \tag{295}$$

$$\int\limits_\beta^y \frac{\partial z}{\partial x} dy = \lim_{m=\infty} \int\limits_\beta^y \frac{\partial z_m}{\partial x} dy \tag{295'}$$

$$\int\limits_\alpha^x \frac{\partial z}{\partial y} dx = \lim_{m=\infty} \int\limits_\alpha^x \frac{\partial z_m}{\partial y} dx \tag{295''}$$

Тому, хочби яке було мале ε, завсіди можна добрати такі числа τ та m, що скрізь у обсязі S та на його границі s різниці

$$z - z_m, \quad \int\limits_\beta^y \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z_m}{\partial x} \right) dy, \quad \int\limits_\alpha^x \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z_m}{\partial y} \right) dx$$

матимуть ступінь малості не слабший за ступінь малості числа ε, та йтимуть до нуля разом з $\frac{1}{m}$.

Коли в таких міркуваннях скрізь замінити обсяг S_ε на S, а контур s_ε на s, та ми знов прийдемо до рівностей:

$$z = \lim_{m=\infty} z_m, \quad \int\limits_\alpha^x \frac{\partial z}{\partial y} dx = \lim_{m \to \infty} \int\limits_\alpha^x \frac{\partial z_m}{\partial y} dx, \quad \int\limits_\beta^y \frac{\partial z}{\partial x} dy = \lim_{m \to \infty} \int\limits_\beta^y \frac{\partial z_m}{\partial x} dy$$

в обсязі S, але одностайність цієї збіжності не буде забезпечена при зближенні до s.

§ 32. Узагальнення способу моментів у застосуванні до рівнянь з частинними похідними другого порядку еліптичного типу

Маючи на меті узагальнити висліди попереднього параграфа, візьмімо рівняння

$$L_{xy}[z] = M_{xy}[z] + \lambda N_{xy}[z], \tag{296}$$

де

$$M_{xy}[z] = \Delta z + A(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + C(x, y)z$$

Нехай воно має в обсязі S один-единий інтеграл z, що на границі s справджує умову:

$$z = \psi(x, y)$$

Коефіцієнти $a_i^{(m)}$ суми (281) шукатимемо з системи лінійних рівнянь:

$$\iint\limits_{(S\varepsilon)} L_{xy}[z_m]\, M_{xy}[\varphi_i]\, dx\, dy + \tau^2 \int\limits_{(s\varepsilon)} (z_m - \psi)\,\varphi_i\, ds = 0 \tag{297}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m^2),$$

що за певних нерівностей для τ та λ є означена, бо її визначник для

$$\lambda = 0, \quad \tau = 0$$

є так званий Gram-ів визначник.

Лінійно комбінуючи рівняння (297), можемо дійти рівності:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(S\varepsilon)} L_{xy}[z_m]\left\{L_{xy}[z_m] - \lambda N_{xy}[z_m] - M_{xy}[\psi] + \frac{1}{\tau}\alpha^m\right\} dx\, dy + \\ + \tau^2 \int\limits_{(s\varepsilon)} (z_m - \psi)(z_m - \psi + \frac{1}{\tau}\beta_m)\, ds = 0,\end{aligned} \tag{298}$$

де

$$\lim_{m=\infty} \iint\limits_{(S\varepsilon)} \alpha_m^2\, dx\, dy = 0; \quad \lim_{m=\infty} \int\limits_{(s\varepsilon)} \beta_m^2\, ds = 0$$

Узявши зазначення (287), із рівності (298) та застосовуючи нерівності Буняковського та Cauchy, виведемо:

$$D_\varepsilon^2[z_m] \leqslant u \iint\limits_{(S\varepsilon)} N_{\xi\eta}^2[z_m - z]\, d\xi\, d\eta + v, \tag{299}$$

де u та v є обмежені числа.

Узявши далі допоміжні рівняння:

$$\begin{aligned} M_{\xi\eta}[t] &= G(x, y;\ \xi, \eta) \\ M_{\xi\eta}[t_x] &= G_x \\ M_{\xi\eta}[t_y] &= G_y \end{aligned}$$

за умов

$$t(\xi, \eta) = 0,\ t_x(\xi, \eta) = 0,\ t_y(\xi, \eta) = 0$$

на границі s_ε зможемо, як у параграфі 31, добрати коефіцієнти $B_i^{(m)}$, $C_i^{(m)}$ та $D_i^{(m)}$ так, що різниці

$$t - \sum_{i=0}^{m^2} B_i^{(m)} \varphi_i = \frac{1}{\tau} \Delta_m$$

$$t_x - \sum_{i=0}^{m^2} C_i^{(m)} \varphi_i = \frac{1}{\tau} \Delta_{xm}$$

$$t_y - \sum_{i=0}^{m^2} D_i^{(m)} \varphi_i = \frac{1}{\tau} \Delta_{ym}$$

$$G - \sum_{i=0}^{m^2} B_i^{(m)} M_{\xi\eta} [\varphi_i] = \Gamma_m$$

$$G_x - \sum_{i=0}^{m^2} C_i^{(m)} M_{\xi\eta} [\varphi_i] = \Gamma_{xm}$$

$$G_y - \sum_{i=0}^{m^2} D_i^{(m)} M_{\xi\eta} [\varphi_i] = \Gamma_{ym}$$

справджуватимуть умови:

$$\lim_{m=\infty} \iint_{(S_\varepsilon)} \Gamma_m^2 \, d\xi \, d\eta = 0; \quad \lim_{m=\infty} \int_{(s_\varepsilon)} \Delta_m^2 \, ds = 0$$

$$\lim_{m=\infty} \iint_{(S_\varepsilon)} \Gamma_{xm}^2 \, d\xi \, d\eta = 0; \quad \lim_{m=\infty} \int_{(s_\varepsilon)} \Delta_{xm}^2 \, ds = 0$$

$$\lim_{m=\infty} \iint_{(S_\varepsilon)} \Gamma_{ym}^2 \, d\xi \, d\eta = 0; \quad \lim_{m=\infty} \int_{(s_\varepsilon)} \Delta_{ym}^2 \, ds = 0$$

Отже рівності (292), комбінуючи їх лінійно з рівностями (297), можемо переписати так:

$$z_m - z = \iint_{(S_\varepsilon)} L_{\xi\eta} [z \;] \Gamma_m \, d\xi \, d\eta - \int_{(s_\varepsilon)} \left[\frac{dG}{dn} + \tau\Delta_m\right] (z_m - \psi) \, ds$$

$$\int_\beta^y \left(\frac{\partial z_m}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) dy = \iint_{(S_\varepsilon)} L_{\xi\eta} [z_m] \, \Gamma_{xm} \, d\xi d\eta - \int_{(s_\varepsilon)} \left[\frac{d\,G_x}{dn} + \tau\Delta_{xm}\right] (z_m - \psi) \, ds \tag{300}$$

$$\int_\alpha^x \left(\frac{\partial z_m}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx = \iint_{(S_\varepsilon)} L_{\xi\eta} [z_m] \, \Gamma_{ym} \, d\xi d\eta - \int_{(s_\varepsilon)} \left[\frac{dG_y}{dn} + \Delta_{ym}\right] (z_m - \psi) \, ds$$

Застосовуючи до цих залежностей нерівність Буняковського й Cauchy та нерівність (298), дістанемо остаточно:

$$(z_m - z)^2 \leqslant \left\{ \iint_{(S_\varepsilon)} \Gamma_m^2 d\xi d\eta + 2 \int_{(s_\varepsilon)} \left[\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{dG}{dn}\right)^2 + \Delta_m{}^2\right] ds \right\} \left\{ u \iint_{(S_\varepsilon)} N_{\xi\eta}^2 [z_m - z] \, d\xi d\eta + v \right\}$$

$$\left[\int_{\beta}^{y}\left(\frac{\partial z_m}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)dy\right]^2 \leqslant \left\{\iint\limits_{(S_\varepsilon)} \Gamma_{xm}^2\, d\xi d\eta + 2\int\limits_{(s_\varepsilon)}\left[\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{dG_x}{dn}\right)^2+\Delta_{xm}^2\right]ds\right\}$$

$$\left[\int_{\alpha}^{x}\left(\frac{\partial z_m}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx\right]^2 \leqslant \left\{\iint\limits_{(S_\varepsilon)} \Gamma_{ym}^2\, d\xi d\eta + 2\int\limits_{(s_\varepsilon)}\left[\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{dG_y}{dn}\right)^2+\Delta_{ym}^2\right]ds\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{u\iint\limits_{(S_\varepsilon)} N_{\xi\eta}^2\,[z_m - z]\,d\xi d\eta + v\right\}$$

Звідси знову робимо висновок, що в обсязі S та його границі s різниці

$$z - z_m\,,\quad \int_{\beta}^{y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z_m}{\partial x}\right)dy\,,\quad \int_{\alpha}^{x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z_m}{\partial y}\right)dx$$

для відповідно дібраних чисел τ та m мають ступінь малості не слабший за ступінь малості числа ε.

Замінивши тут обсяг S_ε на S та контур s_ε на s, прийдемо теж до висновків:

$$z = \lim_{m\to\infty} z_m$$

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\beta}^{y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z_m}{\partial x}\right)dy = 0$$

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\alpha}^{x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z_m}{\partial y}\right)dx = 0,$$

але ці наближення будуть одностайні тільки в усякому обсязі, середньому для обсягу S.

Міркування, подібні до поданих вище, можна застосувати й до диференціальних рівнянь з іншими граничними умовами.

Напр., цілком подібно приходимо до аналогічних вислідів щодо загальнішого рівняння:

$$L_{xy}[z] = f(x, y)$$

за граничних умов типу:

$$l_{xy}[z] = P(x, y)\frac{dz}{dn} + Q(x, y)\,z = \psi(x, y)$$

на контурі s. Для цього досить у способі параграфа 31 заступити вимогу (287) такою:

$$\iint\limits_{(S_\varepsilon)}(L_{xy}[z_m]-f)^2\,dxdy + \tau^2\int\limits_{(s_\varepsilon)}(l_{xy}[z_m]-\psi)^2\,ds = \min,$$

а спосіб цього параграфа в цьому випадку зводиться на систему рівнянь:

$$\iint\limits_{(S_\varepsilon)} (L_{xy}[z_m] - f) M_{xy}[\varphi_i] + \tau^2 \int\limits_{(s_\varepsilon)} (l_{xy}[z_m] - \psi) l_{xy}[\varphi_i]\, ds = 0$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m^2)$$

§ 33. Узагальнений спосіб найменших квадратів для контурів спеціального типу

Нехай границя s обмеженого обсягу S на площі xy складається із скінченної кількості дуг, що даються рівнянням типу:

$$\begin{aligned} x &= F(t) \\ y &= \Phi(t) \end{aligned} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{301}$$

де F та Φ є многочлени l-го ступеня — звичайні або тригонометричні. Усякий інший суцільний контур можна, очевидно, розглядати як границю контурів типу (301), напр. контурів многокутних.

Узявши зазначення:

$$\Delta_{xy} z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \tag{302}$$

$$N_{xy}[z[= a(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + c(x, y) z, \tag{303}$$

розгляньмо в обсязі S рівняння:

$$L_{xy}[z] = \Delta_{xy} z + \lambda N_{xy}[z] = f(x, y) \tag{304}$$

за умови

$$z = \psi(x, y) \tag{305}$$

на границі s того обсягу, при чому функція $\psi(x, y)$ має перші та другі суцільні похідні в обсязі, що обіймає собою s, напр. у квадраті

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{aligned} \tag{306}$$

Очевидно всяка суцільна функція двох змінних в обсязі (306) є границя функцій типу $\psi(x, y)$; те саме можна сказати за всяку функцію, суцільну на контурі s.

Коли $u(x, y)$ є функція суцільна в обсязі (306) разом із своїми першими та другими похідними, то існує її наближення $u_m(x, y)$ звичайним або тригонометричним многочленом m-го ступеня щодо x та щодо y, яке при нескінченному зростанні m збігається — разом із своїми першими та другими похідними — до $u(x, y)$ та до відповідних похідних від $u(x, y)$.

Назвімо через

$$\varphi_0(x, y),\ \varphi_1(x, y),\ \varphi_2(x, y), \ldots \tag{307}$$

повну систему лінійно незалежних (звичайних або тригонометричних) многочленів у квадраті (306). Припустивши, що система (304) — (305) має одну-єдину розв'язку z, пошукаймо її наближено в формі:

$$z_m = \sum_{i=0}^{m^2} a_i^{(m)} \varphi_i(x, y) \tag{308}$$

із умови:

$$D[z_m] = \iint\limits_{(S_\varepsilon)} P(x, y)(L_{xy}[z_m] - f)^2 dxdy + \tau^2 \int\limits_{(s_\varepsilon)} p(s)(z_m - \psi)^2 ds = \min, \tag{309}$$

де $\frac{1}{\tau}$ іде до нуля разом із $\frac{1}{m}$, а $P(x, y)$ та $p(s)$ є додатні функції. Очевидно для

$$\tau < \frac{m^2}{k},$$

де k є додатне стале число, вираз (309) є обмежений, бо з огляду на властивості функції $\psi(x, y)$ належним добором коефіцієнтів $a_i^{(m)}$ вирази

$$m^2(z_m - \psi)$$

та

$$L_{xy}[z_m] - L_{xy}[\psi]$$

для досить великого m можна зробити такими малими, як хочемо. Отож із (309) випливає:

$$\iint\limits_{(S_\varepsilon)} P(x, y)(L_{xy}[z_m] - f)^2 dxdy < Q \tag{310}$$

$$\int\limits_{(s_\varepsilon)} p(s)(z_m - \psi)^2 ds < \tau^2 Q \tag{311}$$

де Q є якесь стале число.

Із (311), переходячи до змінного t через рівняння (301), дістаємо:

$$\int_a^t r(t)[z_m(t) - \psi(t)]^2 < \tau^2 Q \tag{312}$$

Тут $z_m(t)$ є звичайний або тригонометричний многочлен ступеня, не вищого за $2l_m$, де l_m стале число, а

$$r(t) = p(s)\frac{ds}{dt} > 0$$

Нерівність Буняковського дає:

$$\int_a^t [z_m(t) - \psi(t)\, dt| \leqslant \sqrt{\int_a^t r(t)[z_m(t) - \psi(t)]^2 dt \cdot \int_a^t \frac{dt}{r(t)}}$$

що з допомогою (312) можна звести на

$$\int_a^t [z_m(t) - \psi(t)]\, dt < \frac{1}{\tau R}, \tag{313}$$

де R є стале число

Коли зосібна, як припущено, $F(t)$, $\Phi(t)$ є звичайні або тригонометричні многочлени, а τ взяти так, щоб було:

$$\frac{1}{\tau}=\frac{1}{m}\,\omega\left(\frac{1}{m}\right), \tag{314}$$

де

$$\lim_{m=\infty}\omega\left(\frac{1}{m}\right)=0\,,$$

при чому функцію $\omega\left(\frac{1}{m}\right)$ дібрано так, щоб порушити обмеженості виразу (309), то, як бачимо з (313), вираз

$$\int\limits_a^t z_m(t)\,dt$$

є теж (звичайний або тригонометричний) многочлен, що являє собою наближення функції $\int\limits_a^t z_m(t)\,dt$ з похибкою ступеня малості, не слабшого за ступінь малості числа (314). Як відомо, похибка похідної від цього многочлена, як наближення похідної $\psi(t)$ від функції $\int\limits_a^t \psi(t)\,dt$, іде до нуля не повільніше за $\omega\left(\frac{1}{m}\right)$. Отже

$$|z_m(t)-\psi(t)|<T\omega\left(\frac{1}{m}\right), \tag{315}$$

де T — стале число. Остаточно, за умови (314), маємо:

$$\psi(t)=\lim_{m\to\infty} z_m(t) \tag{316}$$

Дальші міркування та викладки цього параграфа повторять у значній мірі міркування параграфа 31.

Коефіціенти $a_i^{(m)}$ визначаються з системи лінійних рівнянь:

$$\frac{\partial D[z_m]}{\partial a_1^{(m)}}=\iint\limits_{(S)} P(x,y)\,L_{xy}[z_m-z]\,L_{xy}[\varphi_i]\,dxdy+$$
$$+\tau^2\int\limits_{(s)} p(s)(z_m-\psi)\,\varphi_i\,ds=0 \tag{317}$$
$$(i=0,1,\ldots,m^2)$$

Розглядаючи рівняння:

$$L_{xy}[w]=L_{xy}[z_m-z] \tag{318}$$

в обсязі S за граничної умови

$$w=z_m-\psi$$

на контурі s, бачимо, що його розв'язка є z_m-z. Зазначивши відповідну

Green-ову функцію через $G(x, y; \xi, \eta)$, дістаємо:

$$z_m - z = \iint\limits_{(S)} G L_{\xi\eta}[z_m - z]\, d\xi d\eta - \int\limits_{(s)} \frac{dG}{dn}(z_m - \psi)\, ds$$

$$\int\limits_{\beta}^{y}\left(\frac{\partial z_m}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) dy = \iint\limits_{(S)} G_x L_{\xi\eta}[z_m - z]\, d\xi d\eta - \int\limits_{(s)} \frac{dG_x}{dn}(z_m - \psi)\, ds \qquad (319)$$

$$\int\limits_{\alpha}^{x}\left(\frac{\partial z_m}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx = \iint\limits_{(S)} G_y L_{\xi\eta}[z_m - z]\, d\xi d\eta - \int\limits_{(s)} \frac{dG_y}{dn}(z_m - \psi)\, ds,$$

де

$$G_x = \int\limits_{\beta}^{y} \frac{\partial G}{\partial x} dy, \quad G_y = \int\limits_{\alpha}^{x} \frac{\partial G}{\partial y} dx$$

Візьмімо на увагу, що

$$G = 2\pi u \ln r + v$$

де

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

а u та v є функції пари точок

$$(x, y) \text{ та } (\xi, \eta)$$

правильні в обсязі S та на його границі s, тоді, як показує легке обчислення, для всіх точок обсягу за умови (315) буде:

$$\int\limits_{(s)} \frac{dG}{dn}(z_m - \psi)\, ds = T_m\, \omega\left(\frac{1}{m}\right), \qquad (320)$$

де T_m є обмежена функція від m.

Подібно ж можна показати, що за цієї умови для всіх точок (x, y) довільного обсягу, внутрішнього для S, буде:

$$\int\limits_{(s)} \frac{dG_x}{dn}(z_m - \psi)\, ds = T_{xm}\, \omega\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$\int\limits_{(s)} \frac{dG_y}{dn}(z_m - \psi)\, ds = T_{ym}\, \omega\left(\frac{1}{m}\right), \qquad 321)$$

де T_{xm} та T_{ym} є обмежені функції від m.

Отже рівності (319), за умови (315), можемо переписати так:

$$z_m - z = \iint\limits_{(S)} G L_{\xi\eta}[z_m - z]\, d\xi d\eta - T_m\, \omega\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$\int\limits_{\beta}^{y}\left(\frac{\partial z_m}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) dy = \iint\limits_{(S)} G_x L_{\xi\eta}[z_m - z]\, d\xi d\eta - T_{xm}\, \omega\left(\frac{1}{m}\right) \qquad (322)$$

$$\int_{\alpha}^{x}\left(\frac{\partial z_m}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx=\iint_{(S)} G_y\, L_{\xi\eta}\,[z_m-z]\,d\xi\,d\eta-T_{my}\,\infty\left(\frac{1}{m}\right).$$

Нехай тепер, узявши рівняння

$$L_{\xi\eta}[u]=\frac{G}{P(x,y)}$$

$$L_{\xi\eta}[u_x]=\frac{G_x}{P(x,y)} \tag{323}$$

$$L_{\xi\eta}]u_y]=\frac{G_y}{P(x,y)}$$

відповідно за граничних умов

$$u=0$$

$$u_x=0 \tag{324}$$

$$u_y=0$$

на контурі s можемо дібрати наближення функції u, u_x, та u_y у формі лінійних комбінацій (307) так, щоб їхні похибки

$$\frac{1}{\tau}\delta_m,\quad \frac{1}{\tau}\delta_{xm},\quad \frac{1}{\tau}\delta_{ym}$$

та похибки величин (323):

$$\gamma_m,\quad \gamma_{xm},\quad \gamma_{ym}$$

справджували умови:

$$\lim_{m\to\infty}\iint_{(S)} P\gamma_m{}^2\,d\xi\,d\eta=0,\qquad \lim_{m\to\infty}\int_{(s)} p\delta_m{}^2\,ds=0$$

$$\lim_{m\to\infty}\iint_{(S)} P\gamma_m{}^2\,d\xi\,d\eta=0,\qquad \lim_{m\to\infty}\int_{(s)} p\delta_{xm}{}^2\,ds=0 \tag{325}$$

$$\lim_{m\to\infty}\iint_{(S)} P\gamma_{ym}{}^2\,d\xi\,d\eta=0,\qquad \lim_{m\to\infty}\int_{(s)} p\delta_{ym}{}^2\,ds=0$$

Утворімо далі з рівностей (319) та (317) такі лінійні комбінації:

$$z_m-z=\iint_{(S)} P\gamma_m\, L_{\xi\eta}[z_m-z]\,d\xi\,d\eta-\int_{(s)}\frac{d\xi}{dn}\,(z_m-\psi)\,ds-\tau\int_{(s)} p\,(z_m-\psi)\,\delta_m\,ds$$

$$\int_{\beta}^{y}\left(\frac{\partial z_m}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)dy=\iint_{(S)} P\gamma_{xm}\, L_{\xi\eta}[z_m-z]\,d\xi\,d\eta-$$

$$-\int\frac{dG_x}{dn}\,(z_m-\psi)\,ds-\tau\int_{(s)} p\,(z_m-\psi)\,\delta_{xm}\,ds \tag{326}$$

$$\int_{\alpha}^{y}\left(\frac{\partial z_m}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx=\iint_{(S)} P\gamma_{ym}\, L_{\xi\eta}\,[z_m-z]\,d\xi\, d\eta-\int_{(s)}\frac{dG_y}{dn}(z_m-\psi)\,ds-$$

$$-\tau\int_{(S)} P(z_m-\psi)\,\delta_{ym}\,ds$$

Застосувавши тут нерівність Буняковського та залежності (310) і (311), дістаємо:

$$z_m'-z=A_m\sqrt{\iint_{(S)} P\gamma_m{}^2\,d\xi\,d\eta}+B_m\sqrt{\int_{(s)} p\delta_m{}^2\,ds}$$

$$\int_{\beta}^{y}\left(\frac{\partial z_m}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)dy=A_{xm}\sqrt{\iint_{(S)} P\gamma_{ym}{}^2\,d\xi\,d\eta}+B_{xm}\sqrt{\int_{(s)} p\delta_{ym}{}^2\,ds} \qquad (327)$$

$$\int_{\alpha}^{x}\left(\frac{\partial z_m}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx=A_{ym}\sqrt{\iint_{(S)} P\gamma_{ym}{}^2\,d\xi\,d\eta}+B_{ym}\sqrt{\int_{(s)} p\delta_{ym}{}^2\,ds}$$

де

$$A_m,\quad A_{xm},\quad A'_{ym}$$
$$B_m,\quad B_{xm},\quad B_{ym}$$

є величини обмежені.

Узявши ще на увагу рівність (316), доходимо висліду, що в обсязі S на його границі s буде

$$z=\lim_{m\to\infty} z_m \qquad (328)$$

та що в обсязі S буде

$$\int_{\beta}^{y}\frac{\partial z}{\partial x}\,dy=\lim_{m=\infty}\int_{\beta}^{y}\frac{\partial z_m}{\partial x}\,dy$$
$$\int_{\alpha}^{x}\frac{\partial z}{\partial y}\,dx=\lim_{n=\infty}\int_{\alpha}^{x}\frac{\partial z_m}{\partial y}\,dx \qquad (329)$$

Ступінь малості різниць

$$z_m-z,\quad \int_{\beta}^{y}\frac{\partial(z_m-z)}{\partial x}\,dy,\quad \int_{\alpha}^{x}\frac{\partial(z_m-z)}{\partial y}\,dx$$

можна тоді визначити із рівностей (322).

В кінці зазначмо, що обмеження, покладене на функції $F(t)$ та $\Phi(t)$, мало істотне, бо всякий суцільний контур можна з довільною точністю представити такими рівняннями, як (301).

§ 34. Окремий випадок узагальненого способу моментів для спеціальних контурів

Розгляньмо окремий випадок нашої задачі, а саме коли

$$\psi(x, y) = 0; \quad a(x, y) = 0, \quad b(x, y) = 0 \tag{330}$$

Крім того, нехай функції $\varphi_i(x, y)$ є фундаментальні функції задачі:

$$\Delta_{xy}\varphi = \mu\varphi \tag{331}$$

в обсязі S за умови

$$\varphi = 0 \tag{332}$$

на контурі s.

Для скорочення записів візьмімо скрізь далі

$$p(x, y) = 1$$

Тоді умова (309) звелася б на таку простішу:

$$\iint\limits_{(S)} (L_{xy}[z_m] - f)^2 \, dx\, dy = \min,$$

що значно спростило б і всі дальші висліди параграфа 33, а подекуди й загострило б їх. Але тут ми хочемо коефіцієнти $a_i^{(m)}$ визначити з рівнянь ще простіших:

$$\iint\limits_{(S)} (L_{xy}[z_m] - f)\varphi_i \, dx\, dy = 0 \tag{333}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m^2)$$

Ця система рівнянь є означена для всіх значень параметра λ, крім деяких особливих.

Не роблячи наперед припущення, що існує розв'язка задачі (304) — (305) за умови (330), розгляньмо задачу таку:

$$\Delta_{xy} w = L_{xy}[z_m] - \lambda N_{xy}[z_m], \tag{334}$$

що має розв'язку

$$w = z_m$$

за умови

$$w = 0$$

на контурі s. Зазначивши через $G(x, y; \xi, \eta)$ Green-ову функцію задачі Dirichlet для обсягу S, матимемо:

$$z_m = \iint\limits_{(S)} G(L_{\xi\eta}[z_m] - \lambda N_{\xi\eta}[z_m])\, d\xi\, d\eta \tag{335}$$

Узявши на увагу (331), дістанемо, як лінійну комбінацію з рівностей (333):

$$\iint\limits_{(S)} (L_{xy}[z_m] - f)(\Delta_{xy} z_m - f + \alpha_m)\, dx\, dy = 0, \tag{336}$$

де різниця

$$\alpha_m = f - \sum_{i=0}^{m^2} b_i^{(m)} \varphi_i(x, y)$$

справджує вимогу:

$$\iint\limits_{(S)} \alpha_m{}^2 \, dx\, dy = \min \tag{337}$$

Із рівності (336) легко виводимо:

$$\iint\limits_{(S)} (L_{xy}[z_m]-f)^2\,dx\,dy = r^2 \iint\limits_{(S)} (\lambda N_{xy}[z_m]-\alpha_m)^2\,dx\,dy \tag{338}$$

$$(0 \leqslant r^2 \leqslant 1)$$

Із другого боку, лінійно комбінуючи рівність (335) з умовами (333), дістаємо

$$z_m + \lambda \iint\limits_{(S)} G\,(N_{\xi\eta}[z_m]-f)\,d\xi\,d\eta = \iint\limits_{(S)} \gamma_m\,(L_{\xi\eta}[z_m]-f)\,d\xi\,d\eta \tag{339}$$

$$\lim_{m\to\infty} \iint\limits_{(S)} \gamma_m{}^2\,d\xi\,d\eta = 0 \tag{340}$$

Нарешті, рівність (339), за допомогою (338) та (340), перепишеться так:

$$z_m + \lambda \iint\limits_{(S)} G\,(N_{\xi\eta}[z_m]-f)\,d\xi\,d\eta = \rho_m \sqrt{\iint\limits_{(S)} (L^2_{xy}[y_m-y])\,dx\,dy} =$$

$$= \rho_m \sqrt{\iint\limits_{(S)} (\lambda N_{xy}[z_m]-\alpha_m)^2\,dx\,dy} \tag{341}$$

де

$$\lim_{m=\infty} \rho_m \neq 0 \tag{342}$$

Звідси виводимо, що для всіх значень λ, крім деяких дискретних, існує функція

$$z = \lim_{m=\infty} z_m \tag{343}$$

А тоді з (333) можемо зробити таку лінійну комбінацію

$$\iint\limits_{(S)} (L_{xy}[z_m]-f)\,(N_{xy}[z_m]+\beta_m)\,dx\,dy = 0, \tag{344}$$

де

$$\lim_{m=\infty} \iint\limits_{(S)} \beta_m{}^2\,dx\,dy = 0$$

Сполучаючи (336) та (344), легко дістанемо рівність типу:

$$\iint\limits_{(S)} (L_{xy}[z_m]-f)\,(L_{xy}[z_m]-f+\varepsilon_m)\,dx\,dy = 0$$

Звідси

$$\iint\limits_{(S)} (L_{xy}[z_m]-f)^2\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_{(S)} \varepsilon_m^2\,dx\,dy \tag{345}$$

Зробивши граничний перехід $m\to\infty$ у рівності (41), дістанемо:

$$z + \lambda \iint\limits_{(S)} G\,(N_{\xi\eta}[z]-f)\,d\xi\,d\eta = 0$$

Отже z є розв'язка нашої задачі.

Ми бачимо, що, не роблячи наперед припущення про існування розв'язки у нашої задачі, ми базувалися тут на тому, що рівняння

$$\Delta_{xy} w = 0$$

за умов на контурі s типу

$$w = \psi(x, y)$$

має одну і тільки одну розв'язку та що існують фундаментальні функції задачі (331), які становлять замкнену систему.

На задачу цього параграфа зводиться всяка задача типу (304)—(305), де

$$a(x, y) = 0, \quad b(x, y) = 0$$

Справді, досить для цього замість z узяти

$$\xi = z + \psi,$$

а рівняння (304)—(305) заступити такими:

$$L_{xy}[\xi] = f - L_{xy}[\psi] \tag{346}$$

$$\xi = 0 \tag{347}$$

Практична трудність тут—у визначенні функцій φ_i з рівняння (331) за умов (332). Але для контура прямокутного, напр. (307), маємо очевидно:

$$\varphi = \sin \pi m x \sin \pi n y$$

$$(m, n = 1, 2, 3, \ldots)$$

при чому

$$\lambda = -(m^2 + n^2)\pi^2$$

Замість рівнянь (333) можна взяти:

$$\iint\limits_{(S)} (L_{xy}[z_m] - f)\, \Phi_i \, dx dy = 0$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots m^2),$$

де функції

$$\Phi_0(x, y), \quad \Phi_1(x, y), \quad \Phi_2(x, y), \ldots$$

утворюють повну систему. Але тоді за функції φ_i в сумі (308) слід узяти розв'язки рівнянь типу:

$$\Delta_{xy} \varphi_i = \Phi_i \tag{348}$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots)$$

за умови, що на контурі обсягу S має бути

$$\varphi_i = 0$$

Результат щодо збіжності z_m на контурі (301) тут лишається в силі.

§ 35. Узагальнений спосіб моментів для контурів аналітичних

Щоб укоротити записи та міркування, покладімо надалі скрізь

$$M_{xy}[z] = \Delta_{xy} z$$

та Green-ову функцію цього виразу зазначмо через $G(x, y; \xi, \eta)$

Обмежмося, крім того, скрізь далі випадком, коли контур є аналітичний, що практично не зменшує загальності задачі.

У такому разі функція

$$v(x, y; \xi, \eta) = \lg r - G,$$

де

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

є гармонічна щодо кожної пари змінних:

$$(x, y) \text{ та } (\xi, \eta)$$

і може бути аналітично поширена скрізь поза контур s.

Таке саме поширення очевидно можливе і для функції $G(x, y; \xi, \eta)$.

Розгляньмо тепер ще рівняння

$$\Delta_{\xi\eta} g(x, y; \xi, \eta)=G(x, y; \xi, \eta) \tag{349}$$

в первісному обсязі S за умови

$$g(x, y; \xi, \eta)=0$$

на контурі s. Легко перевірити, що

$$g=w-\frac{1}{4\pi}r^2 \lg r+\frac{3}{8\pi}r^2, \tag{350}$$

де $w(x, y; \xi, \eta)$ є аналітична функція, що справджує рівняння

$$\Delta_{\xi\eta} w=-\frac{1}{2\pi}v(x, y; \xi, \eta) \tag{351}$$

за умови

$$w=\frac{1}{4\pi}r^2 \lg r-\frac{3}{8\pi}r^2$$

на контурі s.

З другого боку, ясно з властивостей функції v, що існує така аналітична в обсязі S і на контурі s функція $\mathfrak{M}$, що справджує вимогу:

$$\Delta_{\xi\eta}\mathfrak{M}=-\frac{1}{2\pi}v$$

Це дає змогу заступити рівняння (351) однорідним:

$$\Delta_{\xi\eta}(w-\mathfrak{M})=0$$

за умови

$$v-\mathfrak{M}=\frac{1}{4\pi}r^2 \lg r-\frac{3}{8\pi}r^2-\mathfrak{M}$$

на контурі s. А що функція $w-\mathfrak{M}$ є гармонічна в обсязі і набирає на контурі s аналітичні значення, то і функції w та g, як перед тим функцію v, можна аналітично поширити поза обсяг S.

Звідси бачимо, що w має суцільні похідні

$$\frac{\partial w}{\partial x} \text{ та } \frac{\partial w}{\partial y}$$

скрізь на контурі s.

Отож можемо на безліч способів поширити w суцільно, разом із першими похідними на довільний обсяг S' з контуром s', що цілком обіймає S. У цьому поширеному обсязі другі похідні від w скрізь існують і суцільні, крім хіба лінії s, а перші похідні скрізь у ньому справджують Lipschitz-ову умову. Будемо вважати, що поширення функції w зроблено так, щоб для g справджувалася вимога

$$g=0$$

на контурі s' поширеного обсягу.

Візьмімо рівняння:

$$L_{xy}[z]=\Delta_{xy}z+\lambda c(x,y)z=f(x,y) \tag{352}$$

в обсязі S за умови

$$z=0 \tag{353}$$

на контурі s. За функції φ_i візьмімо повну систему функцій у поширеному обсязі S'.

Через те, що вибір цього обсягу в нашій волі, можемо його взяти напр. у формі квадрата:

$$\begin{gathered}0<x<1\\ 0<y<1\end{gathered} \tag{354}$$

або круга:

$$x^2+y^2<1 \tag{355}$$

що зразу дає змогу збудувати функції φ_i та

$$\Phi_i=\Delta_{xy}\varphi_i$$

Пошукаймо суму z_m із рівнянь:

$$\begin{gathered}\iint\limits_{(S)}\{L_{xy}[z_m]-f\}\Delta_{xy}\Phi_k\,dx\,dy+\tau^2\int\limits_{(s)}z_m\varphi_k\,ds=0\\ (k=0,1,\ldots,m)\end{gathered} \tag{356}$$

Ця система рівнянь очевидно цілком визначає z_m

Запровадивши зазначення:

$$D[z_m]=\iint\limits_{(S)}\{L_{xy}[z_m]-f\}^2dx\,dy+\tau^2\int\limits_{(s)}z_m^2\,ds \tag{357}$$

через лінійну комбінацію рівнянь (356), дістаємо:

$$D[z_m]=\iint\limits_{(S)}\{L_{xy}[z_m]-f\}(\lambda cz_m-f)\,dx\,dy,$$

що дає остаточно:

$$D|z_m|\leqslant\iint\limits_{(S)}(\lambda cz_m-f)^2dx\,dy \tag{358}$$

Із рівності

$$z_m-z=\iint\limits_{(S)}G\,(\Delta_{\xi\eta}z_m-\Delta_{\xi\eta}z)\,d\xi\,d\eta-\int\limits_{(s)}\frac{dG}{dn}z_m\,ds \tag{359}$$

виводимо:

$$\begin{gathered}z_m-z+\lambda\iint\limits_{(S)}Gc(z_m-z)\,d\xi\,d\eta=\iint\limits_{(S)}G\,\{L_{\xi\eta}[z_m]-f\}\,d\xi\,d\eta-\\ -\int\limits_{(s)}\frac{dG}{dn}z_m\,ds\end{gathered} \tag{359}$$

Лінійно комбінуючи рівності (359) та (356) і нагадуючи властивості функції g, здобудемо рівність:

$$z_m - z + \lambda \iint_{(S)} Gc(z_m - z)\, d\xi\, d\eta = \iint_{(S)} \gamma_m \{ L_{\xi\eta}[z_m] - f \}\, d\xi\, d\eta - \tag{360}$$

$$-\int_{(s)} \left(\frac{dG}{dn} + \tau \delta_m\right) z_m\, ds,$$

де

$$\lim_{m=\infty} \iint_{(S)} \gamma_m^2\, d\xi\, d\eta = 0 \tag{361}$$

$$\lim_{m=\infty} \delta_m = 0 \tag{362}$$

Із (360), з допомогою (358), виводимо:

$$\{ z_m - z + \lambda \iint_{(S)} Gc\, (z_m - z)\, d\xi\, d\eta \}^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \{ \iint_{(S)} \gamma_m^2\, d\xi d\eta + \int_{(s)} \left(\frac{1}{\tau} \frac{dG}{dn} + \delta_m \right)^2 ds \} \iint_{(S)} (\lambda c z_m f)^2\, dx\, dy \tag{363}$$

Проінтегрувавши обидві сторони цієї нерівності по обсягу S, доходимо висліду:

$$\lim_{m=\infty} \iint_{(S)} (z_m - z)^2\, dx\, dy = 0$$

Тоді (361) дає:

$$z = \lim_{m=\infty} z_m,$$

якщо зі зростанням числа m число τ^2 теж необмежено росте. Маємо теорему:

Сума z_m, визначена рівняннями (87), є збіжне наближення розв'язки задачі

$$L_{xy} | z | - f(x, y)$$

за умови

$$z = 0$$

на контурі s.

Нетрудно довести ще й рівності:

$$\lim_{m=\infty} \int_{\beta}^{y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z_m}{\partial x} \right) dy = 0$$

$$\lim_{m=\infty} \int_{a}^{x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx = 0$$

та і рівності [1]):

$$\lim_{m=\infty} \iint_{(S)} \left(\frac{\partial z_m}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 dx\, dy = 0$$

$$\lim_{m=\infty} \iint_{(S)} \left(\frac{\partial z_m}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 dx\, dy = 0$$

[1]) Пор. Додаток I.

Множник $\frac{dG}{dn}$ під знаком $\int_{(s)}$ у формулі (359) може порушувати одностайність збіжності до нуля члена $\int_{(s)} \frac{dG}{dn} z_m ds$

Але для широкого класу контурів s типу:

$$x = F(t),$$

$$y = \Phi(t),$$

де F та Φ є знаки многочленів, ця одностайність є забезпечена, коли функції φ_i взято напр. у формі многочленів. Справді, з (358) бачимо, що величина

$$T = \tau^2 \int_{(s)} z_m^2 ds$$

є обмежена. Нехай

$$\tau^2 = m\sigma^2(m),$$

де

$$\lim_{m \to \infty} \sigma(m) = \infty$$

Коли

$$\lim \frac{\sigma(m)}{m^\alpha} = 0 \quad \left(\alpha < \frac{1}{2}\right),$$

то це не порушує рівності (362), бо з огляду на те, що функція w та її похідні справджують Lipschitz-ові умови в обсязі S, число $\frac{\delta_m}{\tau}$ можна взяти менше за $\frac{1}{m^{\alpha + \frac{1}{2}}}$. А тоді з (365) легко дістаємо, що скрізь на контурі s

$$|z_m| \leqslant \frac{R}{\sigma(m)},$$

де R — величина обмежена. Отже член $\int_{(s)} \frac{dG}{dn} z_m ds$ у формулі (359) іде до нуля одностайно разом із $\frac{1}{m}$. Узявши тепер замість (360) нерівність:

$$\left\{z_m - z + \lambda \iint_{(S)} Gc(z_m - z) d\xi d\eta + \int_{(s)} \frac{dG}{dn} z_m ds\right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left\{2 \iint_{(S)} \gamma_m^2 d\xi d\eta + 2 \int_{(s)} \delta_m^2 ds\right\} \cdot \iint_{(S)} (\lambda c z_m \cdot f) dx dy,$$

виявимо, що z_m іде одностайно до z в обсязі S.

Нема рації ще раз повторяти вже знайомі міркування, щоб показати збіжність у випадку неоднорідних граничних умов та для загальнішої форми оператора $M_{xy}[\ ]$.

§ 36. Можливі взагальнення одержаних результатів

1. Одержані в останніх параграфах результати взагальнюються безпосередньо на задачу визначення функції u з рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z}+Du=F(x, y, z) \qquad (352_a)$$

в обсязі V так, щоб на поверхні Σ цього обсягу ця функція справджувала якусь лінійну умову:

$$U(u)=P(\alpha, \beta)\, u+Q(\alpha, \beta)\frac{du}{dn}=R(\alpha, \beta) \qquad (353)$$

де (α, β) є криволінійні координати точки на цій поверхні.

Справді, ввівши вираз

$$\Lambda_{xyz}[v]=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-\frac{\partial}{\partial x}(Av)\frac{\partial}{\partial y}(Bv)\frac{\partial}{\partial z}(Cv)+Dv,$$

спряжений з виразом

$$L_{xyz}[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z}+Du,$$

легко встановимо формулу:

$$\iiint_{(V)}\left\{vL_{xyz}[u]-u\Lambda_{xyz}[v]\right\}dx\,dy\,dz=\iint_{(\Sigma)}T[u, v]\,d\Sigma$$

де $T[u, v]$ є білінійна форма від двох пар величин;

$$u, \frac{du}{dn}$$

$$v, \frac{dv}{dn}$$

а знак $\dfrac{d}{dn}$ означає похідну по (внутрішній) нормалі до поверхні Σ.

Коли назвемо через $G(x, y, z;\ \xi, \eta, \zeta)$ Green-ову функцію задачі (352_a)—(353_a), то цілком подібно до того, як у параграфі 30, установимо рівність:

$$U(x, y, z)=\iiint_{(V)}G\cdot L[u]\,d\xi\, d\eta\, d\zeta+\iint_{(\Sigma)}\theta\,[G, P, Q, R]\,d\Sigma, \qquad (354_a)$$

де $\theta\,[G, P, Q, R]$ є лінійна комбінація з величин

$$G, \frac{dQ}{dn}, P, Q, R$$

Ця залежність, цілком аналогічна залежності (275), дає змогу цілком застосувати до випадку трьох змінних усі основні міркування параграфів 31—35.

II. Так само вся теорія переноситься на випадок задачі еліптичного типу будьякого k-го порядку:

$$L_{xy}[z]=F(x, y) \qquad (354_b)$$

з неоднорідними лінійними граничними умовами

$$U_l[z] = \psi_l/s \qquad (l = 0, 1, \ldots), \tag{355$_a$}$$

якщо існує Green-ова функція цієї задачі. Справді, замінивши у виразі $L_{xy}[z]$ усякий член

$$A_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta}$$

виразом

$$(-1)^{\alpha+\beta}\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta}(A_{\alpha\beta}\, z) \tag{356$_a$}$$

назвавши через $\Lambda_{xy}[z]$ утворений так многочлен, легко встановимо формулу:

$$\iint\limits_{(S)} \{u L_{xy}[z] - z(-1)^k \Lambda_{xy}[u]\}\, dxdy = \int\limits_{(s)} P[z, u]\, ds \tag{357$_a$}$$

де $P[z, u]$ є білінійна форма двох рядів величини:

$$z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^{k-1} z}{\partial y^{k-1}} \tag{358$_a$}$$

$$u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial y^{k-1}}$$

Ця основна формула й тут дає змогу, назвавши через $G(x, y; \xi, \eta)$ Green-ову функцію задачі (354_b), через встановлення поняття про спряжені задачі, дати формулу:

$$z = \iint\limits_{(S)} G(x, y; \xi, \eta)\, L_{\xi\eta}[z]\, dx\, dy + \int\limits_{(s)} \theta\,[G, \ldots]\, ds, \tag{359$_a$}$$

де вираз θ є лінійний вираз, аналогічний уведенному в формулі (354). Так знов здобуто основний засіб до застосування до цієї задачі способу моментів.

III. В кінці зауважмо, що подана теорія може бути поширена й на інтегро-диференціальні рівняння та взагалі на всі задачі, що зводяться до системи рівностей:

$$L\,[z_1, z_2, \ldots] = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots) \tag{360$_a$}$$

де L_j є знаки будьяких лінійних операторів, а $z_1, z_2, \ldots$—шукані функції будьякої кількості змінних.

РОЗДІЛ VIII

Точність наближення способом моментів

§ 37. Ще про деякі властивості Green-ової функції звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

Мета цього розділу — точне визначення верхньої межі порядку похибок наближень розв'язок рівнянь математичної фізики способом моментів. Деякі результати, подані в розділі II та IV, стосуються звичайних диференціальних рівнянь та не мають остаточного характеру. Тут ми переважно теж беремо це питання в обсязі звичайних диференціальних рівнянь, але в певному розумінні розв'язуємо його до кінця, показуючи, що шукана точність така сама, як при наближеному представленні функцій методами гармонічного аналізу.

Нехай корені рівняння

$$M(r) = r^k + B_1 r^{k-1} + B_2 r^{k-2} + \ldots + B = 0 \tag{361}$$

є тим часом незалежні змінні

$$r_0, \quad r_1, \quad r_2, \ldots, r_{k-1}. \tag{362}$$

Пошукаймо інтеграл лінійного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами:

$$M_x[z] = \frac{d^k z}{dx^k} + B_1 \frac{d^{k-1} z}{dx^{k-1}} + \beta_2 \frac{d^{k-2} z}{dx^{k-2}} + \ldots + B_k z = F(x) \tag{363}$$

на інтервалі $[a, b]$ за лінійно незалежних умов:

$$\begin{gathered}
U_0[z] = \alpha_0^{(0)} z(a) + \alpha_0^{(1)} z'(a) + \ldots \\
\ldots + \alpha_0^{(k-1)} z^{(k-1)}(a) + \beta_0^{(0)} z(b) + \beta_0^{(1)} z'(b) + \ldots + \beta_0^{(k-1)} z^{(k-1)}(b) = 0 \\
U_1[z] = \alpha_1^{(0)} z(a) + \alpha_1^{(1)} z'(a) + \ldots \\
\ldots + \alpha_1^{(k-1)} z^{(k-1)}(a) + \beta_1^{(0)} z(b) + \beta_1^{(1)} z'(b) + \ldots + \beta_1^{(k-1)} z^{(k-1)}(b) = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
U_{k-1}[z] = \alpha^{(0)} z(a) + \alpha^{(1)} z'(a) + \ldots \\
\ldots + \alpha^{(k-1)} z^{(k-1)}(a) + \beta^{(0)} z(b) + \beta^{(0)} z'(b) + \ldots + \beta^{(k-1)} z^{(k-1)}(b) = 0
\end{gathered} \tag{364}$$

Для цього розгляньмо вперед вираз:

$$g(x,\xi)=(-1)^k.\frac{\begin{vmatrix} e^{r_0(x-\xi)}, & e^{r_1(x-\xi)}, & \ldots, & e^{r_{k-1}(x-\xi)} \\ 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ r_0, & r_1, & \ldots, & r_{k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_0^{k-2}, & r_1^{k-2}, & \ldots, & r_{k-1}^{k-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots & 1 \\ r_0, & r_1, & \ldots, & r_{k-1} \\ r_0^2, & r_1^2, & \ldots, & r_{k-1}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_0^{k-1}, & r_1^{k-1}, & \ldots, & r_{k-1}^{k-1} \end{vmatrix}} \tag{365}$$

Він справджує рівності:

$$\begin{gathered} g(x,\xi)\Big|_{x=\xi}=0 \\ \frac{\partial g(x,\xi)}{\partial x}\Big|_{x=\xi}=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^{k-2} g(x,\xi)}{\partial x}\Big|_{x=\xi}=0 \end{gathered} \tag{366}$$

Але

$$\frac{\partial^{k-1} g(x,\xi)}{\partial x^{k-1}}\Big|_{x=\xi}=-1$$

Далі

$$\begin{gathered} \frac{\partial^k g(x,\xi)}{\partial x^k}\Big|_{x=\xi}=B_1 \\ \frac{\partial^{k+1} g(x,\xi)}{\partial x^{k+1}}\Big|_{x=\xi}=-B_1^2+B_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered} \tag{367}$$

Останні рівності легко довести, коли, згадавши рівність (361), зробити такі заміни:

$$\begin{aligned} r_i^k &= -B_1 r_i^{k-1} - B_2 r_i^{k-2} - \ldots - B_k \\ r_i^{k+1} &= -B_1 r_i^k - B_2 r_i^{k-1} - \ldots - B_k r_i = \\ &= (B_1^2 - B_2) r_i^{k-1} + (B_1 B_2 - B_3) r_i^{k-2} + \ldots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

в детермінантах:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ r_0, & r_1, & \ldots, & r_{k-1} \\ r_0^2, & r_1^2, & \ldots, & r_{k-1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_0^{k-2}, & r_1^{k-2}, & \ldots, & r_{k-1}^{k-2} \\ r_0^{k}, & r_1^{k}, & \ldots, & r_{k-1}^{k} \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ r_0, & r_1, & \ldots, & r_{k-1} \\ r_0^2, & r_1^2, & \ldots, & r_{k-1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_0^{k-2}, & r_1^{k-2}, & \ldots, & r_{k-1}^{k-2} \\ r_0^{k+1}, & r_1^{k+1}, & \ldots, & r_{k-1}^{k+1} \end{vmatrix}$$

Шуканий інтеграл рівняння (363) за умов (364) буде:

$$z(x) = \int_a^x g(x, \xi) F(\xi)\, d\xi + D_0 e^{r_0 x} + D_1 e^{r_1 x} + \ldots + D_{k-1} e^{r_{k-1} x}, \tag{368}$$

якщо числа D_i справджують рівності

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} D_i U_0(e^{r_i x}) &= \int_a^b g_0(x, \xi) F(\xi)\, d\xi \\ \sum_{i=0}^{k-1} D_i U_1(e^{r_i x}) &= \int_a^b g_1(x, \xi) F(\xi)\, d\xi \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ \sum_{i=0}^{k-1} D_i U_{k-1}(e^{r_i x}) &= \int_a^b g_{k-1}(x, \xi) F(\xi)\, d\xi, \end{aligned}\right\} \tag{369}$$

де

$$g_j(x, \xi) = -\sum_{i=0}^{k-1} \beta^{(i)} \cdot \frac{\partial^i g(x, \xi)}{\partial x^i} \tag{370}$$

$$(j = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$$

Рівності (369) дістанемо, завівши вираз (368) в умови (364). Детермінант системи лінійних рівнянь (369) щодо невідомих

$$D_0,\ D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_{k-1}$$

є добуток uv матриць:

$$u = \begin{Vmatrix} \alpha_0^{(0)}, & \alpha_0^{(1)}, & \ldots, & \alpha_0^{(k-1)}, & \beta_0^{(0)}, & \beta_0^{(1)}, & \ldots, & \beta_0^{(k-1)} \\ \alpha_1^{(0)}, & \alpha_1^{(1)}, & \ldots, & \alpha_1^{(k-1)}, & \beta_1^{(0)}, & \beta_1^{(1)}, & \ldots, & \beta_1^{(k-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{k-1}^{(0)}, & \alpha_{k-1}^{(1)}, & \ldots, & \alpha_{k-1}^{(k-1)}, & \beta_{k-1}^{(0)}, & \beta_{k-1}^{(1)}, & \ldots, & \beta_{k-1}^{(k-1)} \end{Vmatrix} \tag{371}$$

та

$$v = \left\| \begin{matrix} e^{r_0 a}, & e^{r_1 a}, \ldots, & e^{r_{k-1} a} \\ r_0 e^{r_0 a}, & r_1 e^{r_1 a}, \ldots, & r_{k-1} e^{r_{k-1} a} \\ r_0^2 e^{r_0 a}, & r_1^2 e^{r_1 a}, \ldots, & r_{k-1}^2 e^{r_{k-1} a} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r_0^{k-1} e^{r_0 a}, & r_1^{k-1} e^{r_1 a}, \ldots, & r_{k-1}^{k-1} e^{r_{k-1} a} \\ e^{r_0 b}, & e^{r_1 b}, \ldots, & e^{r_{k-1} b} \\ r_0 e^{r_0 b}, & r_1 e^{r_1 b}, \ldots, & r_{k-1} e^{r_{k-1} b} \\ r_0^2 e^{r_0 b}, & r_1^2 e^{r_1 b}, \ldots, & r_{k-1}^2 e^{r_{k-1} b} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r_0^{k-1} e^{r_0 b}, & r_1^{k-1} e^{r_1 b}, \ldots, & r_{k-1}^{k-1} e^{r_{k-1} b} \end{matrix} \right\| \qquad (372)$$

Ранг матриці (371) дорівнює k, тому що умови (364) є лінійно незалежні.

Про детермінанти l-го порядку, утворені з перших l стовпців матриці (372), де l є будьяке число з ряду

$$1, 2, \ldots, k,$$

можна довести, що вони є лінійно незалежні функції змінних

$$r_0, r_1, \ldots, r_l$$

Справді, це зразу видно для

$$l = 1,$$

бо в противному разі існувала б тотожність

$$(c_0 + c_1 r_0 + c_2 r_0^2 + \ldots + c_{k-1} r_0^{k-1}) e^{r_0 a} +$$
$$+ (c_k + c_{k+1} r_0 + c_{k+2} r_0^2 + \ldots + c_{2k-1} r_0^{k-1}) e^{rb} = 0,$$

де числа c_i не залежать від змінного r_0 і не всі нулі; ця тотожність неможлива, бо веде до рівності між трансцендентною та алгебричною функціями:

$$e^{r_0(b-a)} = -\frac{c_0 + c_1 r_0 + c_2 r_0^2 + \ldots + c_{k-1} r_0^{k-1}}{c_k + c_{k+1} r_0 + c_{k+2} r_0^2 + \ldots + c_{2k-1} r_0^{k-1}}$$

Припустімо, що назване твердження правдиве для перших l стовпців матриці (372), і доведімо його правдивість для перших $l+1$ стовпців.

Коли б між детермінантами $(l+1)$-го порядку, утвореними з цих стовпців існувала лінійна залежність, то розвинувши в ній усі детермінати за елементами $(l+1)$-го стовпця, ми одержали б лінійну залежність між функціями

$$e^{r_l a}, r_l e^{r_l a}, r_l^2 e^{r_l a}, \ldots, r_l^{k-1} e^{r_l a}, r_l e^{r_l b}, r_l e^{r_l b}, r_l^2 e^{r_l b}, \ldots, r_l^{k-1} e^{r_l b} \qquad (373)$$

змінного r_l з коефіцієнтами, що являють собою лінійні комбінації детермінантів l-го порядку, утворених із перших l стовпців матриці (372). Через лінійну незалежність функцій (373), усі названі коефіціенти повинні бути нулями. Тим часом це неможливо, бо так вийшло б, що існує лінійна залежність між детермінантами, утвореними з перших стовпців матриці (372).

Так виходить, що детермінанти k-го порядку матриці (372) лінійно незалежні. Тоді детермінант добутку

$$T = uv,$$

як лінійна комбінація з детермінатів k-го порядку матриці v, є нуль.

Отож систему (369) можна розв'язати щодо невідомих

$$D_0, D_1, \ldots, D_{k-1}$$

Завівши їх значення до формули (368), дістанемо розв'язку задачі (363)—(364) в формі

$$z(x) = \int_a^x g(x, \xi) F(\xi) d\xi + \int_a^b j(x, \xi) F(\xi) d\xi, \tag{374}$$

де

$$j(x, \xi) = \frac{\begin{vmatrix} U_0(e^{r_0 x}), & U_0(e^{r_1 x}) & , \ldots, U_0(e^{r_{k-1} x}), & g_0(x, \xi) \\ U_1(e^{r_0 x}), & U_1(e^{r_1 x}) & , \ldots, U_1(e^{r_{k-1} x}), & g_1(x, \xi) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{k-1}(e^{r_0 x}), & U(e^{r_1 x}) & , \ldots, U_{k-1}(e^{r_{k-1} x}), & g_{k-1}(x, \xi) \\ e^{r_0 x}, & e^{r_1 x} & , \ldots, \quad e^{r_{k-1} x}, & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} U_0(e^{r_0 x}), & U_0(e^{r_1 x}) & , \ldots, U_0(e^{r_{k-1} x}) \\ U_1(e^{r_0 x}), & U_1(e^{r_1 x}) & , \ldots, U_1(e^{r_{k-1} x}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{k-1}(e^{r_0 x}), & U_{k-1}(e^{r_{1k-1} x}) & , \ldots, U_{k-1}(e^{r_{k-1} x}) \end{vmatrix}} \tag{374'}$$

Увівши зазначення:

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= g(x, \xi) + j(x, \xi) \text{ для } \xi \leqslant x \\ G(x, \xi) &= \qquad\qquad j(x, \xi) \text{ для } \xi > x \end{aligned} \tag{375}$$

перепишімо формулу (374) стисліше

$$z(x) = \int_a^b G(x, \xi) F(\xi) d\xi \tag{375'}$$

Так доходимо висновку: хоч які були б лінійно незалежні лінійні однорідні умови (374), завжди можна дібрати коефіціенти B_i рівняння (373) так, щоб задача (373)—(364) мала розв'язку і при тому єдину. Ця розв'язка є (375').

Єдина вимога щодо добору чисел B_i є та, щоб детермінант

$$\begin{vmatrix} U_0(e^{r_0 x}), & U_0(e^{r_1 x}), \ldots, & U_0(e^{r_{k-1} x}) \\ U_1(e^{r_0 x}), & U_1(e^{r_1 x}), \ldots, & U_1(e^{r_{k-1} x}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{k-1}(e^{r_0 x}), & U_{k-1}(e^{r_1 x}), \ldots, & U_{k-1}(e^{r_{k-1} x}) \end{vmatrix}$$

не був нулем.

Очевидно, функції $g(x,\xi)$ та $j(x,\xi)$, як функції аргументів x та ξ, є аналітичні без особливих точок на скінченній віддалі. Отже існують для всіх значень змінних похідні

$$\frac{\partial^n g(x,\xi)}{\partial x^m\,\partial\xi^{n-m}},\ \frac{\partial^n j(x,\xi)}{\partial x^m\,\partial\xi^{n-m}} \tag{376}$$

всіх порядків.

Функція G є Green-ова функція задачі (363) і (364). Рівності (375) дають змогу щодо неї та її похідних зробити такі висновки.

Функції

$$\begin{gathered} G(x,\xi) \\ \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x},\ \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\xi} \\ \frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x\,\partial\xi},\ \frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial\xi^2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^{k-2} G(x,\xi)}{\partial x^{k-2}},\ \frac{\partial x^{k-2} G(x,\xi)}{\partial x^{k-3}\,\partial\xi},\ \frac{\partial^{k-2} G(x,\xi)}{\partial x^{k-4}\,\partial\xi^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{k-2} G(x,\xi)}{\partial\xi^{k-2}} \end{gathered} \tag{377}$$

існують і є неперервні функції обох аргументів.

Щодо дальших похідних

$$\begin{gathered} \frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}},\ \frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial x^{k-2}\,\partial\xi},\ \ldots,\ \frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial\xi^{k-1}} \\ \frac{\partial^k G(x,\xi)}{\partial x^k},\ \frac{\partial^k G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}\,\partial\xi},\ \ldots,\ \frac{\partial^k G(x,\xi)}{\partial\xi^k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered} \tag{378}$$

то вони теж всі існують і неперервні, але на прямій

$$x=\xi \tag{379}$$

вони мають скінченні розриви, залишаючися обмеженими.

Справді, як видно з виразу (365), маємо

$$\begin{gathered} g(x,\xi)\big|_{x=\xi}=0 \\ \frac{\partial g(x,\ )}{\partial x}\bigg|_{x=\xi}=0\quad \frac{\partial g(x,\xi)}{\partial\xi}\bigg|_{x=\xi}=0 \\ \frac{\partial^2 g(x,\xi)}{\partial x^2}\bigg|_{x=\xi}=0,\ \frac{\partial^2 g(x,\xi)}{\partial x\,\partial\xi}\bigg|_{x=\xi}=0,\ \frac{\partial^2 g(x,\xi)}{\partial\xi^2}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^{k-2} g(x,\xi)}{\partial x^{k-2}}\bigg|_{x=\xi}=0,\ \frac{\partial^{k-2} g(x,\xi)}{\partial x^{k-3}\,\partial\xi}\bigg|_{x=\xi}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial^{k-2} g(x,\xi)}{\partial\xi^{k-2}}\bigg|_{x=\xi}=0 \end{gathered} \tag{380}$$

Але

$$\begin{gathered} \frac{\partial^{k-1} g(x,\xi)}{\partial x^{k-1}}\bigg|_{x=\xi}=-1,\ \frac{\partial^{k-1} g(x,\xi)}{\partial x^{k-2}\,\partial\xi}\bigg|_{x=\xi}=+1,\ \ldots,\ \frac{\partial^{k-1} g(x,\xi)}{\partial\xi^{k-1}}=(-1)^{k-1} \\ \frac{\partial^k g(x,\xi)}{\partial x^k}\bigg|_{x=\xi}=B_1;\ \frac{\partial^k g(x,\xi)}{\partial x^{k-1}\partial\xi}\bigg|_{x=\xi}=-B_1,\ \ldots,\ \frac{\partial^k g(x,\xi)}{\partial\xi^k}=(-1)^{k-1}B_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

Тим часом, як бачимо з визначення Green-ової функції, тобто з (375),

$$\left[\frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x^m \partial \xi^{n-m}}\right]_{\xi=x-0}^{\xi=x+0} = -\left.\frac{\partial^n g(x,\xi)}{\partial x^m \partial \xi^{n-m}}\right|_{\xi=x} \qquad (380')$$

Отже для

$$n \leqslant k-2$$

хідні

$$\frac{\partial^n G(x,\xi)}{\partial x^m \partial \xi^{n-m}}$$

мають розривів, а для

$$n > k-1$$

ни неперервні скрізь за винятком прямої (379), на якій вони мають зриви першого роду.

Зокрема

$$\left.\frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}}\right|_{\xi=x+0} - \left.\frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}}\right|_{\xi=x-0} = \left[\frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}}\right]_{\xi=x-0}^{\xi=x+0} = 1$$

$$\left.\frac{\partial^{k} G(x,\xi)}{\partial x^{k}}\right|_{\xi=x+0} - \left.\frac{\partial^{k} G(x,\xi)}{\partial x^{k}}\right|_{\xi=x-0} = \left[\frac{\partial^{k} G(x,\xi)}{\partial x^{k}}\right]_{\xi=x-0}^{\xi=x+0} = -B_1 \qquad (381)$$

. . . .

Через диференціювання рівності (375) дістаємо:

$$z(x) = \int_a^b G(x,\xi) d\xi F(\xi)\, d\xi$$

$$z'(x) = \int_a^b \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} F(\xi)\, d\xi$$

$$z''(x) = \int_a^b \frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x^2} F(\xi)\, d\xi \qquad (382)$$

. . . .

$$z^{(k-1)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{dx^{k-1}} F(\xi)\, d\xi$$

Звідси

$$U_i[z] = \int_a^b U_i[G(x,\xi)] F(\xi)\, d\xi = 0$$

Функція $G(x,\xi)$ не залежить від F; тому з останньої рівності маємо:

$$U_0[G(x,\xi)] = 0$$

$$U_1[G(x,\xi)] = 0 \qquad (383)$$

. . . .

$$U_{k-1}[G(x,\xi)] = 0$$

Отже Green-ова функція, як функція змінного x, справджує умови (364).

Бажаючи останню рівність (382) продиференціювати ще раз по x, мусимо урахувати розрив функції $\frac{\partial^{k-1}(Gx, \xi)}{\partial x^{k-1}}$

Дістанемо:

$$z^{(k)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^k G(x, \xi)}{\partial x^k} F(x, \xi)\, d\xi + F(x) \tag{382'}$$

Лінійно комбінуючи рівності (380) та (380') дістанемо:

$$M_x[z] = \int_a^b M_x[G] \cdot F(\xi)\, d\xi + F(x)$$

Звідси

$$\int_a^b M_x[G] F(\xi)\, d\xi = 0$$

Через довільність функції $F(\xi)$ остання рівність дає

$$M_x[G] = 0 \tag{384}$$

скрізь на інтервалі $[a, b]$, за винятком хіба точки

$$x = \xi \tag{384'}$$

Отже Green-ова функція (375') є розв'язка однорідної задачі (383)—(384), відповідної неоднорідній задачі (363)—(364). Ця розв'язка має в точці (384') особливість, з'ясовану вище.

§ 38. Green-ова функція будьякого лінійного диференціального рівняння і її диференціальні властивості

Введімо зазначення:

$$N_x[y] = a_1(x)\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}} + a_2(x)\frac{d^{k-2}y}{dx^{k-2}} + \ldots + a_k(x)\, y \tag{385}$$

Будемо вважати, що коефіцієнти

$$a_1(x),\ a_2(x), \ldots, a_k(x) \tag{386}$$

інтегруються на інтервалі $[a, b]$

Тоді довільне лінійне диференціальне рівняння k-го порядку:

$$L_x[y] = \frac{d^k y}{dx^k} + A_1(x)\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}} + A_2(x)\frac{d^{k-2}y}{dx^{k-2}} + \ldots + A_k(x)\, y = f(x),$$

де дані функції

$$A_1(x),\ A_2(x), \ldots A_k(x),\ f(x) \tag{386'}$$

інтегруються на інтервалі $[a, b]$, можна на безліч способів записати так:

$$L_x[y] = M_x[y] - \lambda N_x[y] \tag{387}$$

де λ є числовий множник, а оператор $M_x[\ ]$ має той самий вигляд, що у параграфі 1. Як там показано, коефіцієнти цього оператора можна дібрати так, щоб задача

$$
\begin{aligned}
&M_x[y]=\theta(x)\\
&U_0[y]=0\\
&U_1[y]=0\\
&\cdots\cdots\\
&U_{k-1}[y]=0
\end{aligned}
$$

[пор. задачу (363)—(364)] мала одну-єдину розв'язку. Далі вважатиметься, що $M_x[\,]$ саме так і дібрано, і що Green-ова функція цієї задачі є $G(x, \xi)$, як у параграфі 1.

Диференціальне рівняння (387) за умов

$$
\begin{aligned}
&U_0[y]=0\\
&U_1[y]=0\\
&\cdots\cdots\\
&U_{k-1}[y]=0
\end{aligned}
\tag{388}
$$

має на інтервалі $[a, b]$ одну і тільки одну розв'язку тоді і тільки тоді, коли одну-єдину розв'язку на тому інтервалі має система інтегральних рівнянь:

$$
\begin{aligned}
y(x)&=\lambda\int_a^b G(x,\xi)N_\xi[y]\,d\xi+\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\,d\xi\\
y'(x)&=\lambda\int_a^b \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}N_\xi[y]\,d\xi+\int_a^b \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}f(\xi)\,d\xi\\
y''(x)&=\lambda\int_a^b \frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x^2}N_\xi[y]\,d\xi+\int_a^b \frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x^2}f(\xi)\,d\xi\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y^{(k-1)}(x)&=\lambda\int_a^b \frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}}N_\xi[y]\,d\xi+\int_a^b \frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}}f(\xi)\,d\xi
\end{aligned}
\tag{389}
$$

Справді, на підставі результатів параграфа 1, переписавши рівність (387) у формі

$$
M_x[y]=\lambda N_x[y]+f(x)
\tag{390}
$$

і припустивши, що задача (387)—(388) має розв'язку y, виводимо з рівності (390) залежність

$$
y(x)=\int_a^b G(x,\xi)\{\lambda N_\xi[y]+f(\xi)\}\,d\xi
$$

що постає з формули (375′) через заміну z на y і $F(x)$ на $N_x[y]+f(x)$. Ця залежність є перша з рівностей (389); решта постають з неї через послідовне диференціювання по змінному x. Отже всяка розв'язка системи (387)—(388) справджує систему інтегральних рівнянь (389).

Припустімо тепер, що навпаки, $y(x)$ є якась розв'язка системи (389). Диференціюючи її останнє рівняння по змінному x, дістаємо:

$$\overset{(k)}{y}(x)=\lambda\int_a^b\frac{\partial^k G(x,\xi)}{\partial x^k}N_\xi[y]\,d\xi+\int_a^b\frac{\partial^k G(x,\xi)}{\partial x^k}f(\xi)\,d\xi+\lambda N_x[y]+f(x)\quad(389')$$

Тут при диференціюванні враховано перервність функції $\frac{\partial^{k-1}G(x,\xi)}{dx^{k-1}}$, зокрема використано першу з формул (381). Через лінійну комбінацію рівностей (389) та (389') дістаємо далі:

$$M_x[y]=\lambda\int_a^b M_x[G(x,\xi)]N_\xi[y]\,d\xi+\int_a^b M_x[G(x,\xi)]f(\xi)\,d\xi+\lambda N_x[y]+f(x)$$

Звідси на основі рівності

$$M_x[G(x,\xi)]=0$$

виводимо, що y справджує рівняння (387):

$$M_x[y]=\lambda N_x[y]+f(x)$$

Лінійно комбінуючи рівності (389) при

$$x=a\quad\text{та}\quad y=b,$$

дістанемо так само легко залежність:

$$U_i[y]=\lambda\int_a^b U_i[G(x,\xi)]N_\xi[y]\,d\xi+\int_a^b U_i[G(x,\xi)]f(\xi)\,d\xi,$$

А що функція $G(x,\xi)$ справджує, як функція від змінного ξ, умови (388):

$$U_i[G(x,\xi)]=0$$

$$(i=0,1,2,\ldots,k-1),$$

то виведена залежність дає:

$$U_i[y]=0$$

$$(i=0,1,2,\ldots,k-1)$$

Отже всяка розв'язка системи (389) є також розв'язка системи (387)–(388).

Так бачимо, що системи (387) — (388) та (389) еквівалентні. Тим часом відомо, що система (389) має при довільних коефіцієнтах

$$B_1,B_2,\ldots,B_k$$

$$a_1(x),a_2(x),\ldots,a_k(x)$$

одну і тільки одну розв'язку, яке б числове значення не дати множникові λ, крім хіба деяких дискретних значень

$$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots$$

характеристичних чисел задачі, при яких вона стає або суперечною або неозначеною.

Збудуймо тепер Green-ову функцію $\Gamma(x, \xi)$ задачі (387)—(388), тобто функцію, що скрізь на інтервалі $[a, b]$ крім точки

$$x = \xi$$

справджує рівності:

$$L_x[\Gamma(x, \xi)] = 0$$

$$U_0[\Gamma(x, \xi)] = 0 \qquad (387')$$

$$U_1[\Gamma(x, \xi)] = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (388')$$

$$U_{k-1}[\Gamma(x, \xi)] = 0$$

Лінійно комбінуючи рівності (389) дістаємо:

$$N_x[y] = \lambda \int_a^b N_x[G(x, \xi)]\, N_\xi[y]\, d\xi + \int_a^b N_x[G(x, \xi)]\, f(\xi)\, d\xi \qquad (390)$$

Розглядаючи цю рівність, як лінійне інтегральне рівняння щодо невідомої функції $N_x[y]$ виводимо звідси:

$$N_x[y] = \int_a^b \Gamma_1(x, \eta)\, f(\eta)\, d\eta \qquad (391)$$

де $\Gamma_1(x, \eta)$ є так зване розв'язне ядро рівняння (390) щодо $N_x[y]$. Завівши вираз (391) до рівності (390), дістанемо:

$$\int_a^b \left\{ \Gamma_1(x, \eta) - \lambda \int_a^b N_x[G(x, \xi)]\, \Gamma_1(\xi, \eta)\, d\xi + N_x[G(x, \eta)]\, f(\eta) \right\} d\eta = 0$$

Звідси через незалежність функцій Γ_1 та G від f маємо:

$$\Gamma_1(x, \eta) = \lambda \int_a^b N_x[G(x, \xi)]\, \Gamma_1(\xi, \eta)\, d\xi + N_x[G(x, \eta)] \qquad (392)$$

Це є інтегральне рівняння, що визначає функцію $\Gamma_1(x, \eta)$. Розберімо її диференціальні властивості і зокрема поводження її та її похідних у точці

$$\eta = x \qquad (393)$$

Функція

$$N_x[G(x, \eta)] = a_1(x) \frac{\partial^{k-1} G(x, \eta)}{\partial x^{k-1}} + a_2(x) \frac{\partial^{k-2} G(x, \eta)}{\partial x^{k-2}} + \ldots + a_k(x)\, G(x, \eta),$$

як функція змінного η, є неперервна разом з усіма своїми похідними

$$\frac{\partial^m}{\partial \eta^m} N[G(x, \eta)]$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots),$$

бо така є властивість функції $G(x, \eta)$ (див. § 1). Виняток становить точка (393), де маємо, на основі формул (380') та (381):

$$\Gamma_1(x, \eta)\big|_{\eta = x+0} - \Gamma_1(x, \eta)\big|_{\eta = x-0} = \left[\Gamma_1(x, \eta)\right]_{\eta = x-0}^{\eta = x+0} =$$

$$= \left[N_x[G(x, \eta)]\right]_{\eta = x-0}^{\eta = x+0} = a_1(x) \qquad (394)$$

в усякій точці інтервалу $[a, b]$, де функції $a_i(x)$ неперервні.

Далі, диференціюючи рівність (392) по змінному η, маємо:

$$\frac{\partial \Gamma_1(x,\eta)}{\partial \eta}=\lambda\int_a^b N_x[G(x,\xi)]\,\frac{\partial \Gamma_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}+N_x[G(x,\eta)]\cdot[\Gamma_1(\xi,\eta)]_{\xi=\eta-0}^{\xi=\eta-0}+$$

$$+N_x\left[\frac{\partial G(x,\eta)}{\partial \eta}\right]=$$

$$=\lambda\int_a^b N_x[G(x,\xi)]\,\frac{\partial \Gamma_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}d\xi+a_1(\eta)\,N_x[G(x,\eta)]+N_x\left[\frac{\partial G(x,\eta)}{\partial \eta}\right]$$

Звідси

$$\left[\frac{\partial \Gamma_1(x,\eta)}{d\eta}\right]_{\eta=x-0}^{\eta=x+0}=a_1^2(x)+C_1^{(1)}a_1(x)+C_2^{(1)}a_2(x) \tag{395}$$

в усякій точці x інтервалу $[a, b]$, де функції $a_i(x)$ неперервні. Тут сталі множники $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}$ визначаються через коефіцієнти $B_1, B_2, \ldots$, але ці вирази нам далі не потрібні. Те саме стосується й усіх дальших коефіцієнтів $C_i^{(i)}$ Обчислімо ще

$$\frac{\partial^2 \Gamma_1(x,\eta)}{\partial \eta^2}=\lambda\int_a^b N_x[G(x,\xi)]\,\frac{\partial^2 \Gamma_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}d\xi+N_x[G(x,\xi)]\left[\frac{\partial \Gamma_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right]_{\xi=\eta+0}^{\xi=\eta-0}+$$

$$+a_1'(\eta)\,N_x[G(x,\eta)]+a_1(\eta)N_x\left[\frac{\partial G(x,\eta)}{\partial \eta}\right]+N_x\left[\frac{\partial^2 G(x,\eta)}{\partial \eta^2}\right]=$$

$$=\lambda\int_a^b N_x[G(x,\xi)]\,\frac{\partial^2 \Gamma_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}+\{a_1^2(\eta)+C_1^{(1)}a_1(\eta)+C_2^{(1)}a_2(\eta)+a_1'(\eta)\}N_x[G(x,\eta)]+$$

$$+a_1(\eta)N_x\left[\frac{\partial G(x,\eta)}{\partial \eta}\right]+N_x\left[\frac{\partial^2 G(x,\eta)}{\partial \eta^2}\right]$$

Звідси:

$$\left[\frac{\partial^2 \Gamma_1(x,\eta)}{\partial \eta^2}\right]_{\eta=x-0}^{\eta=x+0}=a_1^3(x)+C_1^{(2)}a_1^2(x)+C_2^{(2)}a_1(x)a_2(x)+$$

$$+C_3^{(2)}a_1(x)+C_4^{(2)}a_2(x)+C_5^{(2)}a_3(x)+C_6^{(2)}a_1(x)a_1'(x) \tag{396}$$

в усякій точці інтервалу $[a, b]$, де функції

$$a_1(x), a_2(x), a_3(x), \ldots, a_k(x)$$

$$a_1'(x)$$

існують і неперервні.

І т. д.

Так можна показати існування всіх похідних

$$\frac{\partial^m}{\partial \eta^m}\Gamma_1(x,\eta) \tag{397}$$

$$(m=0, 1, 2, \ldots, l)$$

скрізь на інтервалі $[a, b]$, крім точки

$$x = \eta, \tag{398}$$

якщо функції

$$\begin{array}{l} a_1(x),\ a_2(x),\ a_3(x),\ \ldots,\ a_l(x);\ a_{l+1}(x),\ \ldots,\ a_k(x) \\ a_1'(x),\ a_2'(x),\ \ldots,\ a_{l-1}'(x) \\ a_1''(x),\ a_2''(x),\ \ldots,\ a_{l-2}''(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^{(l-2)}(x),\ a_2^{(l-3)}(x) \\ a_1^{(l-1)}(x) \end{array} \tag{399}$$

існують і неперервні на цьому інтервалі.

Зокрема перерва похідної (397) l-го порядку у точці (398) є перерва першого роду, а саме вираз:

$$\left[\frac{\partial^l \Gamma_1(x,\eta)}{\partial \eta^l}\right]_{\eta=x-0}^{\eta=x+0} = \frac{\partial^l \Gamma_1(x,\eta)}{\partial \eta^l}\Bigg|_{\eta=x+0} - \frac{\partial^l \Gamma_1(x,\eta)}{\partial \eta^l}\Bigg|_{\eta=x-0}$$

є ціла раціональна функція від функцій

$$\begin{array}{l} a_1(x),\ a_1'(x),\ \ldots,\ a_1^{(l-2)}(x),\ a_1^{(l-1)}(x) \\ a_2(x),\ a_2'(x),\ \ldots,\ a_2^{(l-2)}(x) \\ a_3(x),\ a_3'(x),\ \ldots,\ a_3^{(l-3)}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{l-1}(x),\ a_{l-1}'(x) \\ a_l(x),\ a_{l+1}(x),\ \ldots,\ a_k(x), \end{array} \tag{400}$$

коли ці функції існують і неперервні.

Завівши тепер вираз (391) до рівностей (389), маємо:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_a^b \left\{\lambda \int_a^b G(x,\xi)\,\Gamma_1(\xi,\eta)\,d\xi + G(x,\eta)\right\} f(\eta)\,d\eta \\ y'(x) &= \int_a^b \left\{\lambda \int_a^b \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\,\Gamma_1(\xi,\eta)\,d\xi + \frac{\partial G(x,\eta)}{\partial x}\right\} f(\eta)\,d\eta \\ y''(x) &= \int_a^b \left\{\lambda \int_a^b \frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x^2}\,\Gamma_1(\xi,\eta)\,d\xi + \frac{\partial^2 G(x,\eta)}{\partial x^2}\right\} f(\eta)\,d\eta \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{-1}(x) &= \int_a^b \left\{\lambda \int_a^b \frac{\partial^{k-1} G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}}\,\Gamma_1(\xi,\eta)\,d\xi + \frac{\partial^{k-1} G(x,\eta)}{\partial x^{k-1}}\right\} f(\eta)\,d\eta \end{aligned} \tag{401}$$

Покажімо, що вираз

$$\lambda\int_a^b G(x,\xi)\Gamma_1(\xi,\eta)\,d\xi + G(x,\eta) = \Gamma(x,\eta) \tag{402}$$

і є шукана Green-ова функція $\Gamma(x,\eta)$ задачі (387)—(388). Справді, рівності (401) можна записати так:

$$y(x) = \int_a^b \Gamma(x,\eta) f(\eta)\,d\eta$$

$$y'(x) = \int_a^b \frac{\partial\Gamma(x,\eta)}{\partial x} f(\eta)\,d\eta$$

$$y''(x) = \int_a^b \frac{\partial^2\Gamma(x,\eta)}{\partial x^2} f(\eta)\,d\eta \tag{403}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(k-1)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^{k-1}\Gamma(x,\eta)}{\partial x^{k-1}} f(\eta)\,d\eta$$

На основі досліджених у параграфі 37 диференціальних властивостей функції $G(x,\xi)$ рівність (402) показує, що функція $\Gamma(x,\eta)$ та її похідні

$$\frac{\partial\Gamma(x,\eta)}{\partial x},\quad \frac{\partial^2\Gamma(x,\eta)}{\partial x^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{k-2}\Gamma(x,\eta)}{\partial x^{k-2}}$$

є неперервні функції обох аргументів x та η на інтервалі $[a, b]$. Щодо похідних

$$\frac{\partial^{k-1}\Gamma(x,\eta)}{\partial x^{k-1}},\quad \frac{\partial^{k}\Gamma(x,\eta)}{\partial x^{k}},\quad \frac{\partial^{k+1}\Gamma(x,\eta)}{\partial x^{k+1}},\ \ldots,$$

то всі вони існують і неперервні скрізь, крім точок прямої

$$\eta = x$$

де вони, лишаючися обмеженими, роблять скінченний стрибок.

Зокрема

$$\frac{\partial^{k-1}\Gamma(x,\eta)}{\partial x^{k-1}} = \lambda\int_a^b \frac{\partial^{k-1}G(x,\xi)}{\partial x^{k-1}}\Gamma_1(\xi,\eta)\,d\xi +$$

$$+ \frac{\partial^{k-1}G(x,\eta)}{\partial x^{k-1}} \left[\frac{\partial^{k-1}\Gamma(x,\eta)}{\partial x^{k-1}}\right]_{\eta=x-0}^{\eta=x+0} = 1 \tag{404}$$

Тому, диференціюючи ще раз останню рівність (403) по змінному x, дістанемо:

$$y^{(k)} = \int_a^b \frac{\partial^k\Gamma(x,\eta)}{\partial x^k} f(\eta)\,d\eta + f(x) \tag{403}$$

Через лінійну комбінацію рівностей (403) та (403′) маємо:

$$L_x[y] = \int_a^b L_x[\Gamma(x, \eta)] f(\eta)\, d\eta + f(x),$$

що на основі рівності (387), дає:

$$\int_a^b L_x[\Gamma(x, \eta)] f(\eta)\, d\eta = 0$$

Звідси, через незалежність функції $\Gamma(x, \eta)$ від $f(\eta)$, випливає

$$L_x[\Gamma(x, \eta)] = 0,$$

тобто рівність (387′). Далі, даючи змінному x у рівностях (403) значення a та b, можемо з одержаних рівностей утворити такі лінійні комбінації:

$$U_i[y] = \int_a^b U_i[\Gamma(x, \eta)] f(\eta)\, d\eta$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$$

Ці вирази є нулі на основі рівностей (388). Тому звідси, знов на основі незалежності функції Γ від функції f, виходить:

$$U_i[\Gamma(x, \eta)] = 0$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, k-1),$$

тобто рівності (28).

Так доведено існування і єдиність Green-ової функції у всякого лінійного диференціального рівняння (387) за довільних лінійних однорідних умов (388), якщо не рахувати особливих значень параметра λ (характеристичних чисел), коли такі існують. На цій підставі далі оператор $M_x[\ ]$ ми зможемо брати в загальніший формі, ніж у параграфі 37; за коефіцієнти

$$B_1, B_3, \ldots, B_k \tag{405}$$

можна буде брати будьякі функції від x. Коли ми схочемо забезпечити цьому операторові існування і неперервність усіх похідних

$$\frac{\partial^n G(x, \xi)}{\partial x^m \partial \xi^{n-m}}$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots, k-2; m \leqslant n)$$

до порядку $k-2$ включно, то досить буде забезпечити коефіцієнтам (405) існування похідних досить високого порядку, як це докладніше виявиться з наступного параграфа.

§ 39. Дальші диференціальні властивості Green-ової функції

Дослідімо тепер питання про існування та неперервність похідних усіх порядків по обох аргументах Green-ової фунції $\Gamma(x, \eta)$ задачі (387) — (388). Для цього візьмімо рівність (402):

$$\Gamma(x, \eta) = \lambda \int_a^b G(x, \xi)\, \Gamma_1(\xi, \eta)\, d\xi + G(x, \eta) \tag{405}$$

і продиференціюймо її m разів по змінному x:

$$\frac{\partial^m \Gamma(x,\eta)}{\partial x^m}=\lambda\int_a^b \frac{\partial^m G(x,\xi)}{\partial x^m}\Gamma(x,\eta)\,d\xi+\frac{\partial^m G(x,\eta)}{\partial x^m}, \tag{406}$$

при чому нехай буде:

$$m\leqslant k-2$$

Ми бачимо, що ця похідна існує скрізь на інтервалі $[a, b]$ і є неперервна, через неперервність функції $\frac{\partial^m G(x,\eta)}{\partial x^m}$. Як ми бачили в попередньому параграфі, на лінії

$$\eta = x \tag{407}$$

ця похідна теж не має ніяких особливостей.

Продифренціюймо тепер рівність (406) по змінному η:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m+1}\Gamma(x,\eta)}{\partial x^m\,\partial\eta}&=\lambda\int_a^b \frac{\partial^m G(x,\xi)}{\partial x^m}\cdot\frac{\partial \Gamma_1(\xi,\eta)}{\partial\eta}\,d\xi+\frac{\partial^{m+1}G(x,\eta)}{\partial x^m\,\partial\eta}+\\&+\lambda\frac{\partial^m G(x,\xi)}{\partial x^m}\Gamma_1(\xi,\eta)\Big|_{\xi=\eta-0}-\lambda\frac{\partial^m G(x,\xi)}{\partial x^m}\Gamma_1(\xi,\eta)\Big|_{\xi=\eta+0}=\\&=\lambda\int_a^b \frac{\partial^m G(x,\xi)}{\partial x^m}\cdot\frac{\partial \Gamma_1(\xi,\eta)}{\partial\eta}\,d\xi+\frac{\partial^{m+1}G(x,\eta)}{\partial x^m\,\partial\eta}+\lambda\frac{\partial^m G(x,\eta)}{\partial x^m}a_1(\eta)\end{aligned} \tag{408}$$

Цей результат здобуто за припущення, що

$$m+1\leqslant k-2$$

і що функція $a_1(x)$ неперервна на інтервалі $[a, b]$, через використання формули (394).

Через неперервність функцій

$$\frac{\partial^m G(x,\eta)}{\partial x^m},\ \frac{\partial^{m+1}G(x,\eta)}{\partial x^m\,\partial\eta},\quad a_1(x)$$

від аргументів x та η бачимо, що й функція $\frac{\partial^{m+1}\Gamma(x,\eta)}{\partial x^m\,\partial\eta}$ неперервна для всіх без винятку значень змінних x та η в прямокутнику:

$$\begin{aligned}a\leqslant x\leqslant b\\ a\leqslant \eta\leqslant b\end{aligned} \tag{409}$$

Продиференціюймо рівність (408) знов по змінному η:

$$\frac{\partial^{m+2}\Gamma(x,\eta)}{\partial x^m\partial\eta^2}=\lambda\int_a^b\frac{\partial^m G(x,\xi)}{\partial x^m}\cdot\frac{\partial^2\Gamma_1(\xi,\eta)}{\partial\eta^2}d\xi+\frac{\partial^{m+2}G(x,\eta)}{\partial x^m\partial\eta^2}+\lambda\frac{\partial^{m+1}G(x,\eta)}{\partial x^m\partial\eta}a_1(\eta)+$$

$$+\lambda\frac{\partial^m G(x,\eta)}{\partial x^m}a'_1(\eta)+\lambda\frac{\partial^m G(x,\xi)}{\partial x^m}\left[\frac{\partial\Gamma_1(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right]_{\xi=\eta+0}^{\xi=\eta-0}=$$

$$=\lambda\int_a^b\frac{\partial^m G(x,\xi)}{\partial x^m}\cdot\frac{\partial^2\Gamma_1(\xi,\eta)}{\partial\eta^2}d\xi+\frac{\partial^{m+2}G(x,\eta)}{\partial x^m\partial\eta^2}+\lambda a_1(\eta)\cdot\frac{\partial^{m+1}G(x,\eta)}{\partial x^m\partial\eta}+$$

$$+\lambda\left\{a'_1(\eta)+a_1^2(\eta)+C_1^{(1)}a_1(\eta)+C_2^{(1)}a_2(\eta)\right\}\frac{\partial^m G(x,\eta)}{\partial x^m} \tag{410}$$

Цей результат здобуто за припущення, що

$$m+2\leqslant k-2$$

та що функції

$$a_1(x),\ a_1'(x)$$
$$a_2(x)$$

існують і неперервні скрізь на інтервалі $[a,b]$. При тому використано формулу (395).

Неперервність функцій

$$\frac{\partial^m G(x,\eta)}{\partial x^m},\ \frac{\partial^{m+1}G(x,\eta)}{\partial x^m\partial\eta},\ \frac{\partial^{m+2}G(x,\eta)}{\partial x^m\partial\eta^2},\ a_1(x),\ a_2(x),\ a_1'(x)$$

від аргументів x та η показує, що й функція $\frac{\partial^{m+2}\Gamma(x,\eta)}{\partial x^m\partial\eta^2}$ неперервна для всіх без винятку значень змінних x та η в прямокутнику (409).

Так само маємо з формули (410):

$$\frac{\partial^{m+3}\Gamma(x,\eta)}{\partial x^m\partial\eta^3}=\lambda\int_a^b\frac{\partial^m G(x,\xi)}{\partial x^m}\cdot\frac{\partial^3\Gamma_1(\xi,\eta)}{\partial\eta^3}d\xi+\frac{\partial^{m+3}G(x,\eta)}{\partial x^m\partial\eta^3}+$$

$$+\lambda a_1(\eta)\frac{\partial^{m+2}G(x,\eta)}{\partial x^m\partial\eta^2}+\lambda a_1'(\eta)\frac{\partial^{m+1}G(x,\eta)}{\partial x^m\partial\eta}+\lambda a_1''\frac{\partial^m G(x,\eta)}{\partial x^m}+$$

$$+\lambda\left\{a_1''(\eta)+2a_1(\eta)a_1'(\eta)+C_1^{(1)}a_1'(\eta)+C_2^{(1)}a_2'(\eta)\right\}\frac{\partial^m G(x,\eta)}{\partial x^m}+$$

$$+\lambda\left\{a_1'(\eta)+a_1^2(\eta)+C_1^{(1)}a_1(\eta)+C_2^{(1)}a_2(\eta)\right\}\frac{\partial^{m+1}G(x,\eta)}{\partial x^m\partial\eta}+$$

$$+\lambda\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x^m}\left[\frac{\partial^2{}_1\Gamma(\xi,\eta)}{\partial\eta^2}\right]_{\xi=\eta+0}^{\xi=\eta-0}=\lambda\int_a^b\frac{\partial^m G(x,\xi)}{\partial x^m}\cdot\frac{\partial^3\Gamma_1(\xi,\eta)}{\partial\eta^3}d\xi+\frac{\partial^{m+3}G(x,\eta)}{\partial x^m\partial\eta^3}+$$

$$+\lambda a_1(\eta)\frac{\partial^{m+2}G(x,\eta)}{\partial x^m\partial\eta^2}+\lambda\left\{2a_1'(\eta)+a_1^2(\eta)+C_1^{(1)}a_1(\eta)+C_2^{(1)}a_2(\eta)\right\}\frac{\partial^{m+1}(x,\eta)}{\partial x^m\partial\eta}+$$

$$+\lambda\left\{2a_1''(\eta)+C_2^{(1)}a_2^1(\eta)+C_3^{(1)}a_3+\ldots\right\}\frac{\partial^m G(x,\eta)}{\partial x^m\partial\eta} \tag{411}$$

Цей результат має силу за припущення, що

$$m+3 \leqslant k-2$$

і що функції

$$a_1(x),\ a_1'(x),\ a_1''(x)$$
$$a_2(x),\ a_2'(x)$$
$$a_3(x)$$

існують і неперервні скрізь на інтервалі $[a, b]$. При цьому використано формулу (396).

З неперервності функцій

$$\frac{\partial^m G(x, \eta)}{\partial x^m},\ \frac{\partial^{m+1} G(x, \eta)}{\partial x^m \partial \eta},\ \frac{\partial^{m+2} G(x, \eta)}{\partial x^m \partial \eta^2},\ \frac{\partial^{m+3} G(x, \eta)}{\partial x^m \partial \eta^3},$$

$$a_1(x),\ a_2(x),\ a_3(x),\ a_1'(x),\ a_2'(x),\ a_1''(x)$$

аргументів x та η випливає, що й функція $\dfrac{\partial^{m+3} \Gamma(x, \eta)}{\partial x^m \partial \eta^3}$ неперервна для всіх значень змінних у прямокутнику (409).

Продовживши ці міркування далі, прийдемо остаточно до висновку, що функція

$$\frac{\partial^{l+m} \Gamma(x, \eta)}{\partial x^m \partial \eta^l} \tag{412}$$

$$(l \leqslant k-2,\ m \leqslant k-2,\ l+m \leqslant k-2)$$

існує і є неперервна, як функція обох аргументів x і η, в прямокутнику (409), коли існують і є неперервні скрізь на інтервалі $[a, b]$ функції

$$\begin{array}{l} a_1(x), a_1'(x), a_1''(x), \ldots, a_1^{(l-1)}(x) \\ a_2(x), a_2'(x), \ldots, a_2^{(l-2)}(x) \\ a_3(x), \ldots, a_3^{(l-3)}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{l-1}(x), a_{l-1}'(x) \\ a_l(x), a_{l+1}(x), \ldots, a_k(x) \end{array} \tag{413}$$

Треба зауважити, що в наведених обчисленнях і міркуваннях припускається, крім того, існування похідних

$$\frac{\partial \Gamma_1(x, \eta)}{\partial \eta},\ \frac{\partial^2 \Gamma_1(x, \eta)}{\partial \eta^2}, \ldots, \frac{\partial^l \Gamma(x, \eta)}{\partial \eta^l} \tag{414}$$

і їх неперервність скрізь у прямокутнику (409), за винятком хіба прямої (407). Але умови щодо функцій (413), як бачимо з записів (419) та (400), якраз забезпечують існування і згадані властивості функцій (414).

Візьмімо для l верхню границю, а саме $k-2$. Тоді доходимо такого результату:

Коли існують і є неперервні [(пор. формулу (386)] функції

$$\begin{array}{l} A_1(x),\ A_2(x),\ A_3(x),\ \ldots,\ A_{k-1}(x),\ A_k(x) \\ A_1'(x),\ A_2'(x),\ A_3'(x),\ \ldots,\ A_{k-1}'(x) \\ A_1''(x),\ A_2''(x),\ A_3''(x),\ \ldots,\ A_{k-2}''(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_1^{(k-2)}(x),\ A_2^{(k-2)}(x) \\ A_1^{(k-1)}(x) \end{array} \tag{415}$$

на інтервалі $[a, b]$, то похідні всіх порядків до $(k-2)$-го включно Green-ової функції задачі (387)—(388) є неперевні функції обох аргументів у прямокутнику (409). Отже функції таблиці

$$\begin{array}{c} \Gamma(x, \eta) \\ \frac{\partial \Gamma(x, \eta)}{\partial x},\ \frac{\partial \Gamma(x, \eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 \Gamma(x, \eta)}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 \Gamma(x, \eta)}{\partial x\, \partial \eta},\ \frac{\partial^2 \Gamma(x, \eta)}{\partial \eta^2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^{k-2} \Gamma(x, \eta)}{\partial x^{k-2}},\ \frac{\partial^{k-2} \Gamma(x, \eta)}{\partial x^{k-3}\, \partial \eta},\ \frac{\partial^{k-2} \Gamma(x, \eta)}{\partial x^{k-4}\, \partial \eta^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{k-2} \Gamma(x, y)}{\partial x\, \partial \eta^{k-3}},\ \frac{\partial^{k-2} \Gamma(x, \eta)}{\partial \eta^{k-2}} \end{array} \tag{416}$$

не мають розривів.

Коли для l взяти нижню границю, тобто 0, то дістанемо такий результат:

Коли неперервні функції

$$A_1(x),\ A_2(x),\ A_3(x),\ \ldots,\ A_k(x), \tag{417}$$

то неперервні скрізь у прямокутнику (409) функції

$$\Gamma(x, \eta),\ \frac{\partial \Gamma(x, \eta)}{\partial x},\ \frac{\partial^2 \Gamma(x, \eta)}{\partial x^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{k-2} \Gamma(x, \eta)}{\partial x^{k-2}} \tag{418}$$

Нехай в оператора $L_x[\ ]$ є спряжений оператор $\Lambda_x[\ ]$, тобто нехай існує

$$\Lambda_x[y] = (-1)^k \left\{ \frac{d^k y}{dx^k} - \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(A_1(x)y) + \frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}(A_2(x)y) - \ldots + (-1)^k A_k(x)y \right\}$$

Це вимагає якраз існування функцій (415), отже при неперервності цих функцій забезпечує існування і неперервність функцій (416). Зокрема існування функцій (416) забезпечене для випадку, коли задача (27) є самоспряжена, отже коли

$$\Lambda_x[y] = (-1)^k L_x[y],$$

як часто і буває в задачах математичної фізики.

Коли припустити існування і неперервність функцій (413), то похідні

$$\frac{\partial^{1+m} \Gamma(x, \eta)}{\partial x^m\, \partial \eta},\ \frac{\partial^{2+m} \Gamma(x, \eta)}{\partial x^m\, \partial \eta^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{l+m} \Gamma(x, \eta)}{\partial x^m\, \partial \eta^l}$$

існують при всякому значенні m, для якого існує похідна, отже напевно для

$$m \leqslant k-2$$

Взявши

$$m = k-1,$$

ми вже повинні замінити рівність (406) такою:

$$\frac{\partial^{k-1}\Gamma(x, \eta)}{\partial x^{k-1}} = \lambda \int_a^b \frac{\partial^{k-1}G(x, \xi)}{\partial x^{k-1}} \Gamma_1(\xi, \eta)\, d\xi + \frac{\partial^{k-1}G(x, \eta)}{\partial x^{k-1}} +$$
$$+ \lambda \left[\frac{\partial^{k-2}G(x, \xi)}{\partial x^{k-2}} \Gamma_1(\xi, \eta)\right]_{\xi=\eta+0}^{\xi=\eta-0} =$$
$$= \lambda \int_a^b \frac{\partial^{k-1}G(x, \xi)}{\partial x^{k-1}} \Gamma_1(\xi,\eta)\, d\xi + \frac{\partial^{k-1}G(x, \eta)}{\partial x^{k-1}} + \lambda \Gamma a_1(\eta) \frac{\partial^{k-2}G(x, \eta)}{\partial x^{k-2}} \quad (419)$$

Тут в перетвореннях використано формулу (394).

Диференціюючи рівність (419) знов по змінному x, дістанемо аналогічно

$$\frac{\partial^k \Gamma(x, \eta)}{\partial x^k} = \lambda \int_a^b \frac{\partial^k G(x, \xi)}{\partial x^k} \Gamma_1(\xi, \eta)\, d\xi + \frac{\partial^k G(x, \eta)}{\partial x^k} + \lambda a_1(\eta) \frac{\partial^{k-1}G(x, \eta)}{\partial x^{k-1}} +$$
$$+ \lambda \Gamma_1(x, \eta) + \lambda a_1(\eta) \frac{\partial^{k-1}G(x, \eta)}{\partial x^{k-1}} = \lambda \int_a^b \frac{\partial^k G(x, \xi)}{\partial x^k} \Gamma_1(\xi, \eta)\, d\xi + \quad (420)$$
$$+ \frac{\partial^k G(x, \eta)}{\partial x^k} + 2\lambda a_1(\eta) \frac{\partial^{k-1}(x, \eta)}{\partial x^{k-1}} + \lambda \Gamma_1(x, \eta)$$

Тут у перетвореннях взято на увагу, що підінтегральна функція

$$\frac{\partial^{k-1}G(x, \xi)}{\partial x^{k-1}} \Gamma_1(\xi, \eta)$$

має розриви в точках:

$$\xi = x \text{ та } \xi = \eta,$$

і використано формулу (394).

Так само

$$\frac{\partial^{k+1}\Gamma(x, \eta)}{\partial x^{k+1}} = \lambda \int_a^b \frac{\partial^{k+1}G(x, \xi)}{\partial x^{k+1}} \Gamma_1(\xi, \eta)\, d\xi + \frac{\partial^{k+1}G(x, \eta)}{\partial x^{k+1}} + 2\lambda a_1(\eta) \frac{\partial^k G(x, \eta)}{\partial x^k} +$$
$$+ \lambda \frac{\partial \Gamma_1(x, \eta)}{\partial x} + \lambda C' \Gamma_1(x, \eta) + \lambda a_1(\eta) \frac{\partial^k G(x, \eta)}{\partial x^k} = \lambda \int_a^b \frac{\partial^{k+1}G(x, \xi)}{\partial x^{k+1}} \Gamma_1(\xi,\eta)\, d\xi +$$
$$+ \frac{\partial^{k+1}G(x, \eta)}{\partial x^{k+1}} + 3\lambda a_1(\eta) \frac{\partial^k G(x, \eta)}{\partial x^k} + \lambda C_1' \Gamma_1(x, \eta) + \lambda \frac{\partial \Gamma_1(x, \eta)}{\partial x}, \quad (421)$$

де C_1' є певна стала.

І т. д. Нарешті вийде:

$$\frac{\partial^{k+l}\Gamma(x,\eta)}{\partial x^{k+l}}=\lambda\int_a^b\frac{\partial^{k+l}G(x,\xi)}{\partial x^{k+l}}\cdot\Gamma_1(\xi,\eta)\,d\xi+\frac{\partial^{k+l}G(x,\eta)}{\partial x^{k+l}}+$$

$$+(l+2)\lambda a_1(\eta)\frac{\partial^{k+l-1}G(x,\eta)}{\partial x^{k+l-1}}+\lambda C_l'\Gamma_1(x,\eta)+\lambda C_l''\frac{\partial\Gamma_1(x,\eta)}{\partial x}+\dots \tag{422}$$

$$\dots+\lambda C_l^{(l+1)}\frac{\partial^l\Gamma_1(x,\eta)}{\partial x^l}$$

Звернувши увагу на рівність (392), бачимо, що за умови, що існують функції

$$a_i(x),\ a_i'(x),\dots,a_i^l\ (x \tag{422'}$$

$$(i=1,2,\dots,k),$$

похідні

$$\frac{\partial\Gamma_1(x,\eta)}{\partial x},\ \frac{\partial^2\Gamma_1(x,\eta)}{\partial x^2},\dots,\frac{\partial^l\Gamma_1(x,\eta)}{\partial x}.$$

теж існують, хоч і мають, взагалі кажучи, розриви на прямій

$$\eta=x \tag{423}$$

Тоді, як видно з формул (420), (421), (422), існують похідні

$$\frac{\partial^{k-1}\Gamma(x,\eta)}{\partial x^{k-1}},\ \frac{\partial^k\Gamma(x,\eta)}{\partial x^k},\dots,\frac{\partial^{k+l}\Gamma(x,\eta)}{\partial x^{k+l}}$$

з розривами на прямій (423) і без ніяких інших особливостей. Звідси виводимо існування похідних

$$\frac{\partial^{m+n}\Gamma(x,\eta)}{\partial x^m\,\partial\eta^n} \tag{424}$$

для

$$m\leqslant k+l,\quad n\leqslant l$$

за умови, що існують функції

$$\begin{matrix} a_1(x), & a_2(x), & \dots, & a_k(x) \\ a_1'(x), & a_2'(x), & \dots, & a_k'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{(l)}(x), & a_2^{(l)}(x), & \dots, & a_k^{(l)}(x) \end{matrix} \tag{425}$$

Похідні (424) неперервні при

$$m+n\leqslant k-2$$

§ 40. Збіжність способу моментів

Нехай коефіціенти рівняння:

$$L_x[y]=\frac{d^ky}{dx^k}+A_1(x)\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}+A_2(x)\frac{d^{k-2}y}{dx^{k-2}}+\dots+A_ky=f(x)$$

є неперервні функції на інтервалі $[a, b]$. Доберімо й коефіцієнти оператора

$$M_x[\ ] = \frac{d^k}{dx^k} + B_1 \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} + B_2 \frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}} + \ldots + B_k$$

теж як неперервні функції на тому інтервалі. Нехай, нарешті, ту саму вимогу справджує і функція $f(x)$. Очевидно, тоді те саме буде правдиве і для коефіцієнтів

$$\lambda a_i(x) = B_i(x) - A_i(x)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k)$$

оператора

$$\lambda N_x[\ ] = \lambda \left(a_1(x) \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} + a_2(x) \frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}} + \ldots + a_k(x) \right).$$

Пошукаймо розв'язку задачі (387)—(388):

$$L_x[y] = M_x[y] - \lambda N_x[y] = f(x) \tag{426}$$

$$\begin{aligned} U_0[y] &= 0 \\ U_1[y] &= 0 \\ &\cdots\cdots \\ U_{k-1}[y] &= 0 \end{aligned} \tag{427}$$

у формі суми:

$$y_m(x) = a_0^{(m)} \varphi_0(x) + a_1^{(m)} \varphi_1(x) + \ldots + a_m^{(m)} \varphi_m(x), \tag{428}$$

де функції

$$\varphi_0(x), \quad \varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \ldots \tag{429}$$

є відповідно розв'язки системи:

$$M_x[\varphi_i] = \Phi_i(x) \cdot q(x) \tag{430}$$

$$\begin{aligned} U_0[\varphi_i] &= 0 \\ U_1[\varphi_i] &= 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, m) \\ &\cdots\cdots \\ U_{k-1}[\varphi_i] &= 0 \end{aligned} \tag{431}$$

при чому функції

$$\Phi_0(x), \quad \Phi_1(x), \quad \Phi_2(x), \ldots \tag{432}$$

утворюють повну або замкнену систему на інтервалі $[a, b]$, а множник $q(x)$ є якась невід'ємна на цьому інтервалі функція. Для дальших міркувань зручно буде вважати, що система (432) ортогоналізована і нормована на інтервалі $[a, b]$ з характеристичною функцією

$$P(x) \geqslant 0, \tag{433}$$

отже що

$$\int^b P(x)\, \Phi_k(x)\, \Phi_l(x)\, dx = \begin{cases} 0 & (k = l) \\ 1 & (k \neq l) \end{cases} \tag{434}$$

Коефіцієнти

$$a_0^{(m)}, \quad a_1^{(m)}, \quad a_2^{(m)}, \ldots \tag{435}$$

суми (428) будемо визначати з рівнянь:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \{L_x[y_m] - f(x)\}\, \Phi_0(x) r(x)\, dx = 0 \\
&\int_a^b \{L_x[y_m] - f(x)\}\, \Phi_1(x) r(x)\, dx = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\int_a^b \{L_x[y_m] - f(x)\}\, \Phi_m(x) r(x)\, dx = 0
\end{aligned} \tag{436}$$

де $r(x)$ є якась невід'ємна функція на інтервалі $[a, b]$:

$$r(x) \geqslant 0 \tag{437}$$

Назвімо через $\varepsilon_m(x)$ різницю:

$$M_x[y_m - y] - [b_0^{(m)} \Phi_0^{(x(} + b_1^{(m)} \Phi_1(x) + \ldots + b_m^{(m)} \Phi_m(x)]\, q(x) \tag{438}$$

за умови, що

$$\int_a^b \frac{p(x)}{q^2(x)} \varepsilon_m^2(x)\, dx = \min \tag{440}$$

Тоді, лінійно комбінуючи рівності (434), легко дістаємо:

$$\int_a^b \frac{r(x)}{q(x)} \{L_x[y_m] - f(x)\} \{M_x[y_m - y] - \varepsilon_m(x)\}\, dx = 0 \tag{441}$$

або

$$\int_a^b \frac{r(x)}{q(x)} L_x[y_m - y] \{M_x[y_m - y] - \varepsilon_m(x)\}\, dx = 0 \tag{442}$$

або

$$\int_a^b \frac{r(x)}{q(x)} L_x[y_m - y] \{M_x[y_m - y] + \lambda N_x[y_m - y] - \varepsilon_m(x)\}\, dx = 0 \tag{443}$$

Звідси, з допомогою нерівності Буняковського, виводимо:

$$\int_a^b \frac{r(x)}{q(x)} L_x^2[y_m - y]\, dx \leqslant \int_a^b \frac{r(x)}{q(x)} \left(\lambda N_x[y_m - y] - \varepsilon_m(x)\right)^2 dx$$

або остаточно:

$$\int_a^b \frac{r(x)}{q(x)} L_x^2[y_m - y]\, dx \leqslant 2\lambda^2 \int_a^b \frac{r(x)}{q(x)} N_x[y_m - y]\, dx + 2 \int_a^h \frac{r(x)}{q(x)} \varepsilon_m^2(x)\, dx \tag{444}$$

Взявши

$$q(x) \cdot r(x) = p(x), \tag{445}$$

матимемо:

$$\frac{p(x)}{q^2(x)} = \frac{r(x)}{q(x)}, \tag{445}$$

отже останній член формули (444) дорівнюватиме величині (440).

Із очевидних рівностей

$$\begin{aligned} y_m - y &= \int_a^b \Gamma(x, \xi)\, L_\xi[y_m - y]\, d\xi \\ y_m' - y' &= \int_a^b \frac{\partial \Gamma(x, \xi)}{\partial x} L_\xi [y_m - y\ ]\, d \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m^{(k-1)} - y^{(k-1)} &= \int_a^b \frac{\partial^{k-1} \Gamma(x, \xi)}{e x^{k-1}} L_\xi [y_m - y]\, d\xi, \end{aligned} \tag{446}$$

лінійно комбінуючи їх з рівностями (436), дістаемо:

$$\begin{aligned} y_m - y &= \int_a^b \Gamma_\xi [y_m - y]\, \gamma_{m,0}(x, \xi)\, d\xi \\ y_m' - y' &= \int_a^b \Gamma_\xi [y_m - y]\, \gamma_{m,1}(x, \xi)\, d\xi \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m^{(k-1)} - y^{(k-1)} &= \int_a^b \Gamma_\xi [y_m - y]\, \gamma_{m,k-1}(x, \xi)\, d\xi, \end{aligned} \tag{447}$$

де функції

$$\gamma_{m,h}(x, \xi) = \frac{\partial^h \Gamma(x, \xi)}{\partial x^h} - \left(C_{0,h}^{(m)} \Phi_0(\xi) + C_{1,h}^{(m)} \Phi_1(\xi) + \ldots + C_{m,h}^{(m)} \Phi_m(\xi) \right) r(x)$$

$$(h = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$$

визначено з умов:

$$\int_a^b \frac{p(x)}{r^2(x)} \gamma_{m,h}^2(x, \xi)\, d\xi = \min \qquad (h = 0, 1, \ldots, k-1) \tag{448}$$

Далі з залежностей (446) воводимо:

$$N_x[y_m - y] = \int_a^b N_x[\Gamma(x, \xi)]\, L_\xi [y_m - y]\, d\xi, \tag{449}$$

що за допомогою рівностей (436) заводиться легко на

$$N_x[v_m - y] = \int_a^b L_\xi [\Gamma(x, \xi)]\, V_m(x, \xi)\, d\xi \tag{450}$$

Тут за $V\ \ (x, \xi)$ беремо функцію:

$$V_m(x, \xi) = N_x[\Gamma(x, \xi)] - \left(\partial_0^{(m)} \Phi_0(\xi) + \partial_1^{(m)} \Phi_1(\xi) + \ldots + \partial_m^{(m)} \Phi_1(\xi) \right) r(x),$$

визначену з умови:

$$\int_a^b \frac{p(x)}{r^2(x)} V_m^2(x, \xi)\, d\xi = \min \tag{451}$$

Застосувавши до рівності (450) нерівність Буняковського, маємо:

$$N_x^2[y_m - y] \leqslant \int_a^b \frac{p(x)}{r^2(x)} V_m^2(x, \xi)\, d\xi \int_a^b \frac{r^2(x)}{p(x)} L_\xi^2 [y_m - y]\, d\xi \tag{452}$$

Взявши остаточно

$$q(x) = r(x), \quad p(x) = q^2(x) \tag{453}$$

використавши нерівність (444), дістаємо з (452):

$$V_m^2[y_m - y] \leqslant 2\lambda^2 \int_a^b N_x^2 [y_m - y]\, dx \int_a^b V_m^2(x,\xi)\, d\xi + 2\int_a^b \varepsilon_m^2(x)\, dx \int_a^b V_m^2(x, \xi)\, d\xi \tag{453'}$$

Отже величина $N_x^2[y_m - y]$ має порядок малості однаковий з порядком малості добутку

$$\int_a^b \varepsilon_m^2(x)\, dx \int_a^b V_m^2(x, \xi)\, d\xi$$

або в усякому разі не менший. Тоді нерівність

$$\int_a^b L_m^2 [y_m - y]\, dx < 2\lambda^2 \int_a^b N_x^2 [y_m - y]\, dx + 2\int_a^b \varepsilon_m^2(x)\, dx \tag{454}$$

показує, що порядок малості числа

$$\int_a^b L_m^2 [y_m - y]\, dx$$

не менший за порядок величини

$$\int_a^b \varepsilon_m^2(x)\, dx$$

Нарешті, рівності (447) дають тоді:

$$\begin{aligned}
|y_m - y| &\leqslant K_0 \sqrt{\int_a^b \varepsilon_m^2(x)\, dx \int_a^b \gamma_{m,0}^2(x,\xi)\, d\xi} \\
|y_m' - y'| &< K_1 \sqrt{\int_a^b \varepsilon_m^2(x)\, dx \int_a^b \gamma_{m,1}^2(x,\xi)\, d\xi} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
|y_m^{(k-1)} - y^{(k-1)}| &< K_{k-1} \sqrt{\int_a^b \varepsilon_m^2(x)\, dx \int_a^b \gamma_{m,k-1}^2(x, \xi)\, d\xi}
\end{aligned} \tag{455}$$

Звідси випливають рівності:

$$
\left.\begin{aligned}
y &= \lim_{m\to\infty} y_m \\
y' &= \lim_{m\to\infty} y'_m \\
&\cdots\cdots\cdots \\
y^{(k-1)} &= \lim_{m\to\infty} y_m^{(k-1)},
\end{aligned}\right\} \qquad (455)
$$

що й дають обгрунтування способу моментів. Але наша мета—визначити якнайточніше порядок малості різниць:

$$y-y_m,\ y'-y'_m,\ \ldots,\ y^{(k-1)}-y_m^{(k-1)},$$

чого нерівності (455) не дають.

§ 41. Використання тригонометричних функцій

У цьому параграфі ми розглянемо деякі важливі окремі випадки загальної задачі (387)—(388).

Випадок 1. Не обмежуючи загальності, можна за інтервал $[a, b]$ взяти $[0, 2\pi]$. Нехай граничні умови (388) зводяться до вимог „періодизму".

$$
\left.\begin{aligned}
U_0[y] &= y(0)-y(2\pi)=0 \\
U_1[y] &= y'(0)-y'(2\pi)=0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
U_{k-1}[y] &= y^{(k-1)}(0)-y^{(k-1)}(2\pi)=0
\end{aligned}\right\} \qquad (456)
$$

Тут можна взяти:

$$p(x)=q(x)=r(x)=1$$

$$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \Phi_{2n-1}(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\quad \Phi_{2n}(x)=\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},$$

отже ряд (432) взяти в формі:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\quad \ldots$$

Фур'єрові коефіціенти функції $\frac{\partial^l G(x,\xi)}{\partial x^l}$ є

$$
\left.\begin{aligned}
g_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^l \Gamma(x,\xi)}{\partial x^l}\,d\xi \\
g_{2n-1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^l \Gamma(x,\xi)}{\partial x^l}\sin n\xi\,d\xi \\
g_{2n}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^l \Gamma(x,\xi)}{\partial x^l}\cos n\xi\,d\xi \\
&(n=1,\ 2,\ldots)
\end{aligned}\right\} \qquad (457)
$$

Застосовуючи в двох останніх виразах частинну інтеграцію, дістанемо, пам'ятаючи, що функція $\Gamma(x, \xi)$ задовольняє умови (456):

$$g_{2n-1}^{(l)}(x)=\frac{1}{n\sqrt{\pi}}\left[\frac{\partial^l\Gamma(x,\xi)}{\partial x^l}\right]_{\xi=0}^{\xi=2\pi}+\left[\frac{\partial^l\Gamma(x,\xi)}{\partial x^l}\right]_{\xi=x-0}^{\xi=x+0}\cdot\frac{\cos nx}{n\sqrt{\pi}}+$$
$$+\frac{1}{n\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^{l+1}\Gamma(x,\xi)}{\partial x^l\,\partial\xi}\sin n\xi\,d\xi$$
$$g_{2n}^{(l)}(x)=-\frac{\partial^l\Gamma(x,\xi)}{\partial x^l}\Bigg|_{\xi=x-0}^{\xi=x+0}\cdot\frac{\sin nx}{n\sqrt{\pi}}+\frac{1}{n\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^{l+1}\Gamma(x,\xi)}{\partial x^l\,\partial\xi}\cos n\xi\,d\xi \tag{458}$$
$$(n=1,2,3,\ldots)$$

Назвімо через C_h Фур'єрові коефіцієнти функції $L_x[y_m-y]$. Починаючи з

$$h=m+1,$$

вони є ті самі, що Фур'єрові коефіцієнти функції

$$-\lambda N_x[y_m-y]-M_x[y]$$

Теорема замкнености дозволяє написати замість рівностей (447) такі:

$$y_m^{(l)}-y^{(l)}=\sum_{n=m+1}^{\infty}g_n^{(l)}(x)\,C_n \tag{459}$$
$$(l=0,1,2,\ldots,k-1),$$

що, на основі рівностей (458), дає:

$$y_m^{(l)}-y^{(l)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\partial^l\Gamma(x,\xi)}{\partial x^l}\right]_{\xi=0}^{\xi=2\pi}\cdot\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{C_{2k-1}}{n}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\partial^l\Gamma(x,\xi)}{\partial x^l}\right]_{\xi=x-0}^{\xi=x+0}\cdot$$
$$\cdot\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{C_{2n}}{n}\sin nx-\frac{C_{2n-1}}{n}\cos nx\right)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{C_{2n-1}}{n}\right)\int_0^{2\pi}\frac{\partial^{l+1}\Gamma(x,\xi)}{\partial x^l\,d\xi}\cos n\xi\,d\xi-$$
$$-\frac{C_{2n}}{n}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^{l+1}\Gamma(x,\xi)}{\partial x^l\,\partial\xi}\sin n\xi\,d\xi$$
$$(l=0,1,2,\ldots,k-1)$$

Звідси

$$|y_m^{(l)}-y^{(l)}|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left|\left[\frac{\partial^l\Gamma(x,\xi)}{\partial x^l}\right]_{\xi=0}^{\xi=2\pi}\right|\cdot\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{C_{2n+1}}{n}\right|+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\left|\left[\frac{\partial^l\Gamma(x,\xi)}{\partial x^l}\right]_{\xi=0}^{\xi=2\pi}\right|\cdot\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{C_{2n}}{n}\sin nx-\frac{C_{2n-1}}{n}\cos nx\right)\right|+ \tag{460}$$
$$+\sqrt{\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\partial^{l+1}\Gamma(x,\xi)}{\partial x^l\,\partial\xi}\right\}^2 d\xi}\cdot\sqrt{\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{C_{2n-1}^2+C_{2n}^2}{n^2}\right)}$$

Щоб виявити порядок малості цього виразу, зауважмо, що сума

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{C_{2k}}{n}\sin nx-\frac{C_{2k-1}}{n}\cos nx\right)-\int_0^x M_x[y]\,dx$$

є Фур'єрова сума функції

$$\int_0^x \{\lambda N_x[y_m-y]-M_x[y]\}\,dx-C_0x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{2n-1}}{n}, \tag{460'}$$

яка має період 2π і справджує Lipschitz-ову умову. Отже на підставі відомого Лебеггового результату в теорії наближення функцій сумами Фур'є, маємо:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{C_{2n}}{n}\sin nx-\frac{C_{2n-1}}{n}\cos nx\right)\right|\leqslant\frac{\ln m}{m}\cdot\text{const} \tag{461}$$

При $x=0$ ця нерівність дає:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{C_{2n-1}}{n}\right|\leqslant\frac{\ln m}{m}\cdot\text{const} \tag{461'}$$

Нарешті сума

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{C_{2n-1}^2+C_{2n}^2}{n^2}\right)$$

є середнє квадратичне значення остачі ряду Фур'є для функції (460), отже

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{C_{2n-1}^2+C_{2n}^2}{n^2}\right)<\frac{\text{const}}{m} \tag{462}$$

Нерівність (460) з допомогою нерівностей (461), (461') та (462) дає остаточно:

$$\begin{aligned}
|y_m\;-y\;|&\leqslant\frac{A_0\ln m+B_0}{m}\cdot\text{const}\\
|y_m'\;-y'\;|&\leqslant\frac{A_1\ln m+B_1}{m}\cdot\text{const}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
|y_m^{(k-1)}-y^{(k-1)}|&\leqslant\frac{A_{k-1}\ln m+B_{k-1}}{m}\cdot\text{const}
\end{aligned} \tag{463}$$

Тут числа A_i, B_i є абсолютні сталі, а множники const визначаються через maximum модуля похідної $y^{(k)}$.

Припустімо, що за тих самих умов „періодизму“ (459) задача (387) є самоспряжена. Тоді функція $\Gamma(x, \xi)$ є симетрична функція аргументів x та ξ, і тому справджує рівності:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma(x, 0) - \Gamma(x, 2\pi) = 0 \\
&\left[\frac{\partial\, \Gamma(x, \xi)}{\partial \xi}\right]_{\xi=0}^{\xi=2\pi} = 0 \\
&\left[\frac{\partial^2\, \Gamma(x, \xi)}{\partial \xi^2}\right]_{\xi=0}^{\xi=2\pi} = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\left[\frac{\partial^{k-1}\, \Gamma(x, \xi)}{\partial \xi^{k-1}}\right]_{\xi=0}^{\xi=2\pi} = 0
\end{aligned}
\tag{464}
$$

Формули (458) у цьому випадку для $l=0$ стають такі:

$$g_{2n-1}(x) = \frac{1}{n\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \frac{\partial\, \Gamma(x, \xi)}{\partial \xi} \sin n\xi\, d\xi$$

$$g_{2n}(x) = -\frac{1}{n\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \frac{\partial\, \Gamma(x, \xi)}{\partial \xi} \cos n\xi\, d\xi$$

Звідси частинною інтеграцією виводимо остаточно:

$$g_{2n-1}^{(0)}(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{\pi}\, n^{k-1}} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^{k-1}\, \Gamma(x, \xi)}{\partial \xi^{k-1}} \sin n\xi\, d\xi$$

$$g_{2n}^{(0)}(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{\pi}.n^{k-1}} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^{k-1}\, \Gamma(x, \xi)}{\partial \xi^{k-1}} \cos n\xi\, d\xi$$

Проробивши тут ще одну частинну інтеграцію, дістанемо, цілком подібно до формул (463), таку нерівність:

$$|y_m - y| \leqslant \frac{\mathfrak{A}_0 \ln m + \mathfrak{B}_0}{m^k} \operatorname{const}, \tag{465}$$

де $\mathfrak{A}$ та $\mathfrak{B}$ є абсолютні сталі.

Звідси, за допомогою загальної теорії наближення функцій тригонометричними сумами, виводимо:

$$
\begin{aligned}
&|y_m' - y'| \leqslant \frac{\mathfrak{A}_1 \ln m + \mathfrak{B}_1}{m^{k-1}} \cdot \operatorname{const} \\
&|y_m'' - y''| \leqslant \frac{\mathfrak{A}_2 \ln m + \mathfrak{B}_2}{m^{k-2}} \cdot \operatorname{const} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&|y_m^{(k-1)} - y^{(k-1)}| \leqslant \frac{\mathfrak{A}_{k-1} \ln m + \mathfrak{B}_{k-1}}{m} \cdot \operatorname{const},
\end{aligned}
\tag{465'}
$$

коли оператор $M_x[\ ]$ узято так, щоб було

$$B_1 = B_3 = \ldots = 0,$$

бо тоді функції $\varphi_k(x)$ матимуть форму

$$B_k \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} kx$$

Ці наближення функції y та її похідних — того самого ступеня малості, що наближення Фур'є. В окремих випадках вони і зводяться на наближення Фур'є. Тому нерівність (465) дає справжню верхню границю порядку точності наближення інтеграла рівняння (27) способом моментів.

Випадок II. Нехай k є парне число, інтервал $[a, b]$ зведено до $[0, \pi]$, а граничні умови нехай будуть

$$\begin{gathered} y'(0) = 0,\ y'(\pi) = 0 \\ y'''(0) = 0,\ y'''(\pi) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(k-1)}(0) = 0,\ y^{(k-1)}(\pi) = 0 \end{gathered} \tag{466}$$

При тому нехай задача буде самоспряжена. Тоді

$$\begin{gathered} \left.\frac{\partial \Gamma(x, \xi)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \Gamma(x, \xi)}{\partial \xi}\right|_{\xi=\pi} = 0 \\ \left.\frac{\partial^3 \Gamma(x, \xi)}{\partial \xi^3}\right|_{\xi=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^3 \Gamma(x, \xi)}{\partial \xi^3}\right|_{\xi=\pi} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left.\frac{\partial^{k-1} \Gamma(x, \xi)}{\partial \xi^{k-1}}\right|_{\xi=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^{k-1} \Gamma(x, \xi)}{\partial \xi^{k-1}}\right|_{\xi=\pi} = 0 \end{gathered}$$

В такому разі зручно взяти

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \Phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$p(x) = q(x) = r(x) = 1$$

Тут Фур'єрові коефіціенти функції $\Gamma(x, \xi)$ є

$$g_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi \Gamma(x, \xi)\, d\xi$$

$$g_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \Gamma(x, \xi) \cos n\xi\, d\xi$$

$$(k = 1, 2, \ldots)$$

Частинна інтеграція дає:

$$g_n(x) = -\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{n}\int_0^\pi \frac{\partial \Gamma(x, \xi)}{\partial \xi} \sin n\xi \, d\xi =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{n^2}\int_0^\pi \frac{\partial^2 \Gamma(x, \xi)}{\partial \xi^2} \cos n\xi \, d\xi =$$

$$= \dots\dots\dots\dots\dots =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{n^{k-1}}\int_0^\pi \frac{\partial^{k-1} \Gamma(x, \xi)}{\partial \xi^{k-1}} \sin n\xi \, d\xi = \cos nx \frac{\text{const}}{n^k} + \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{n^k}\int_0^\pi \frac{\partial^k \Gamma(x, \xi)}{\partial \xi^k} \cos n\xi \, d\xi$$

Назвавши знов Фур'єрові коефіцієнти функції

$$\theta(x) = -\lambda N_x[y_m - y] - M_x[y]$$

через C_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), бачимо, що числа $\frac{C_n}{n^k}$ є Фур'єрові коефіцієнти функції, яка відрізняється від

$$\tau(x) = \int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x \theta(x)\, dx$$

тільки певним многочленом.

Далі знов маємо:

$$y_m - y = \sum_{n=m+1}^{\infty} g_n(x) C_n = \text{const} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{C_n}{n^k} \cos nx +$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \frac{\partial^k \Gamma(x, \xi)}{\partial \xi^k} \frac{C_n}{n^k} \cos n\xi \, d\xi$$

$$|y_m - \quad \leqslant \text{const} \cdot \frac{\ln m}{m^k} + \sqrt{\int_0^\pi \left[\frac{\partial^k \Gamma(x, \xi)}{\partial \xi^k}\right]^2 d\xi} \cdot \sqrt{\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{C_k^2}{n^{2k}}} \leqslant \tag{467}$$

$$\leqslant \frac{A \ln m + B}{m^k} \text{const}$$

Отже і тут удалося досягти такого самого наближення, як сумою Фур'є.

Випадок III. Нехай інтервал $[a, b]$ є $[0, \pi]$,—число парне, задача (387)—(388)—самоспряжена з граничними умовами (28) типу:

$$y\,(0) = 0, \quad y\,(\pi) = 0$$

$$y''(0) = 0, \quad y''(\pi) = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(k-2)}(0) = 0, \quad y^{(k-2)}(\pi) = 0$$

Тоді й

$$\Gamma(x, 0) = 0 \quad \Gamma(x, \pi) = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 \Gamma(x, \xi)}{\partial \xi^2}\right|_{\xi=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 \Gamma(x, \xi)}{\partial \xi^2}\right|_{\xi=\pi} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.\frac{\partial^{k-2} \Gamma(x, \xi)}{\partial \xi^{k-2}}\right|_{\xi=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^{k-2} \Gamma(x, \xi)}{\partial \xi^{k-2}}\right|_{\xi=\pi} = 0$$

Беремо

$$\Phi_0(x) = 0, \ \Phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$p(x) = q(x) = r(x) = 1$$

Дальша викладка та остаточний результат—цілком аналогічні випадкові II.

Переходимо тепер до загального випадку.

§ 42. Використання ортогональних многочленів у загальному випадку

Нерівності (453) та (455) дали загальний довід збіжності способу моментів, але не дали остаточної оцінки похибки m-го наближення y_k інтеграла. Проте рівності (455) були істотно потрібні при виводі результатів параграфа 41. Переглядаючи викладки параграфа 40, легко виявимо, що остаточний результат, а саме рівності (455), можна встановити, відкинувши рівності (445) та (453) і замінивши їх такими умовами: дроби

$$\frac{q(x)}{r(x)}, \ \frac{r(x)}{q(x)}, \ \frac{p(x)}{r^2(x)}, \ \frac{r^2(x)}{p(x)} \tag{468}$$

є обмежені на інтервалі $[a, b]$ і на цьому інтервалі інтегруються.

Справді, за цих умов із рівності [(див. форм. (440)]

$$\lim_{m \to \infty} \int_a^b \frac{p(x)}{q^2(x)} \varepsilon_m^2(x)\, dx = 0$$

випливає:

$$\int_a^b \varepsilon_m^2(x)\, dx \to 0 \quad (m \to \infty)$$

і рівність (84) може бути переписана так:

$$\int_a^b L_x^2[y_m - y] \leqslant 2C\lambda^2 \int_a^b N_x^2[y_m - y]\, dx + 2C \int_a^b \varepsilon_m^2(x)\, dx, \tag{469}$$

де C верхня границя функції $\frac{r(x)}{q(x)}$ на інтервалі $[a, b]$; із рівності (448) виводимо:

$$\int_a^b \gamma_{m'}^2(x, \xi)\, d\xi \to 0 \quad (m \to \infty)$$

Так само із рівності (91) маємо:

$$\int_a^b V_m^2(x, \xi)\, d\xi \to 0 \quad (m \to \infty)$$

Нарешті, з (92) маємо:

$$N_x^2[y_m - y] \leqslant \frac{D}{\partial} \int_a V_m^2(x, \xi)\, d\xi \int_a^b L\xi\,[y_m - y]\, d\xi, \tag{470}$$

де D та ∂ є відповідно верхня та нижня границі функції $\dfrac{p(x)}{r^2(x)}$ на інтервалі $[a, b]$.

Із нерівностей (469) та (470) виводимо легко

$$N_x^2[y_m - y] = \frac{2CD}{\partial} \left\{ \lambda^2 \int_a^b N_x^2[y_m - y]\, dx + \int_a^b \varepsilon_n^2(x)\, dx \right\} \int_a^b V_m^2(x, \xi)\, d\xi$$

Це показує, що порядок малості величини $N_x^2[y_m - y]$ є не менший за порядок малості величини

$$\int_a^b \varepsilon_m^2(x)\, dx \int_a^b V_m^2(x, \xi)\, d\xi$$

Тоді далі нерівність (469) показує, що порядок малості величини $\int_a^b L^2[y_m - y]\, dx$ є не менший за порядок малості величини

$$\int_a^b \varepsilon_m^2(x)\, dx$$

Нарешті, з рівностей (446) виводимо нерівності (455) цілком так само, як у параграфі 40, і приходимо до результату (455).

Будемо називати узагальненими Фур'єровими коефіцієнтами функції $\dfrac{\partial^l \Gamma(x, \xi)}{r(\xi)\, \partial x^l}$ інтеграли

$$g_n^{(l)}(x) = \int_a^b \frac{p(\xi)}{r^2(\xi)} \cdot \frac{\partial\ \Gamma(x, \xi)}{\partial x^l} \Phi_n(\xi)\, d\xi \tag{471}$$

$$(n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

Відомо, що тоді

$$\int_a^b \frac{p(\xi)}{r^2(\xi)} \left\{ \frac{\partial^l \Gamma(x, \xi)}{\partial x^l} \right\} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ g_n^l(x) \right\}^2$$

і що

$$\min \int_a^b p(\xi) \left\{ \frac{1}{r(\xi)} \frac{\partial^l \Gamma(x, \xi)}{\partial x^l} - a_0 \Phi_0(\xi) - a_1 \Phi_1(\xi) - \ldots - a_m \Phi_m(\xi) \right\}^2 d\xi =$$

$$= \left\{ g_{m+1}^{(l)}(x) \right\}^2 + \left\{ g_{m+2}^{(l)}(x) \right\}^2 + \left\{ g_{m+3}^{(l)}(x) \right\}^2 + \ldots = \sum_{n=m+1}^{\infty} \left\{ g_n^{(l)}(x) \right\}^2 \tag{472}$$

та що цей minimum досягається при

$$a_i = g_i^{(l)}(x)$$

$$(i=0,\ 1,\ 2, \ldots, m)$$

Так само узагальненими Фур'єровими коефіцієнтами функції $\dfrac{L_\xi[y_m-y]}{q(\xi)}$ називаємо інтеграли:

$$C_{2n} = \int_a^b \frac{p(\xi)}{q(\xi)} L_\xi[y_m-y]\,\Phi_n(\xi)\,d\xi$$

$$(n=0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{473}$$

Тоді буде:

$$\int_a^b \frac{p(\xi)}{q^2(\xi)} L_\xi^2[y_m-y]\,d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} C_h^2$$

та

$$\min \int_a^b p(\xi) \left\{ \frac{1}{q(\xi)} L_\xi[y_m-y] - b_0\Phi_0(\xi) - b_1\Phi_1(\xi) - \ldots - b_m\Phi_m(\xi) \right\}^2 d\xi =$$

$$= C_{m+1}^2 + C_{m+2}^2 + C_{m+3}^2 + \ldots = \sum_{n=m+1}^{\infty} C_n^2 \tag{474}$$

Цей minimum досягається при

$$b_i = C_i$$

$$(i=0, 1, 2, \ldots, m)$$

Нарешті

$$\int_a^b \frac{p(\xi)}{q(\xi)\,r(\xi)} L_\xi[y_m-y] \cdot \frac{\partial^l \Gamma(x,\xi)}{\partial x^l}\,d\xi = \sum_{i=0}^{\infty} C_i g_i^{(l)}(x) \tag{475}$$

Коли скомбінувати рівність (448) з рівністю (472), то вийде

$$\gamma_{m,h}(x,\xi) = \sum_{n=m+1}^{\infty} g_n^{(l)}(x)\,\Phi_n(\xi)$$

а рівності (87) перепишуться відповідно так:

$$y_m - y = D_{1,m} \int_a^b \frac{p(\xi)}{q(\xi)\,r(\xi)} L_\xi[y_m-y]\,\gamma_{m,0}(x,\xi)\,d\xi = D_{1,m} \sum_{n=m+1}^{\infty} g_k^{(0)}(x)\,C_h$$

$$y'_m - y' = D_{2,m} \int_a^b \frac{p(\xi)}{q(\xi)\,r(\xi)} L_\xi[y_m-y]\,\gamma_{m,1}(x,\xi)\,d\xi = D_{2,m} \sum_{n=m+1}^{\infty} g_n^{(l)}(x)\,C_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{476}$$

$$y_m^{(k-1)} - y^{(k-1)} = D_{k-1,m} \int_a^b \frac{p(\xi)}{q(\xi)\,r(\xi)} L_\xi[y_m-y]\,\gamma_{m,k-1}(x,\xi)\,d\xi = D_{k-1,m} \sum_{n=m+1}^{\infty} g_n^{(k-1)}(x),$$

де $D_{l,m}$ є якесь середнє значення функції $\frac{q(\xi)\,r(\xi)}{p(\xi)}$ на інтервалі $[a, b]$. Ця функція є обмежена, як добуток із першої і четвертої функцій (468).

Узагальненими Фур'єровими розвиненнями функцій $\frac{1}{r(\xi)}$, $\frac{\partial^l \Gamma(x,\xi)}{\partial x^l}$ та $\frac{1}{q(\xi)} L_\xi [y_m - y]$ будемо називати відповідно розвинення:

$$\frac{1}{r(\xi)} \frac{\partial^l \Gamma(x,\xi)}{\partial x^l} \sim \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(l)}(x)\,\Phi_n(\xi), \tag{477}$$

та

$$\frac{1}{q(\xi)} L_\xi [y_m - y] \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n\,\Phi_n(\xi), \tag{478}$$

а m-ими остачами тих розвинень відповідно суми:

$$R_m\left[\frac{1}{r(\xi)} \frac{\partial^l \Gamma(x,\xi)}{\partial x^l}\right] = \sum_{n=m+1}^{\infty} g_n^{(l)}(x)\,\Phi_n(\xi) \tag{479}$$

$$R_m\left[\frac{1}{q(\xi)} L_\xi [y_m - y]\right] = \sum_{n=m+1}^{\infty} C_n\,\Phi_n(\xi) \tag{480}$$

Маємо:

$$\delta_m^{(l)}(x) = \int_a^b p(\xi)\,R_m\left[\frac{1}{r(\xi)} \frac{\partial^l \Gamma(x,\xi)}{\partial x^l}\right] \cdot R_m\left[\frac{1}{q(\xi)} L_\xi [y_m - y]\right] d\xi =$$

$$= \sum_{n=m+1}^{\infty} C_n\,g_n^{(l)}(x) \tag{481}$$

$$(l = 0, 1, 2, \ldots\ldots, k-1)$$

Отож оцінка точності рівностей

$$y = y_m; \quad y' = y'_m, \quad \ldots, \quad y^{(k-1)} = y_m^{(k-1)}$$

зводиться до визначення порядку малості величини $\delta_m^{(l)}(x)$, що її, очевидно, можна записати й у такій формі:

$$\delta_m^{(l)}(x) = \int_a^b p(x) \cdot \frac{1}{r(\xi)} \cdot \frac{\partial^l \Gamma(x,\xi)}{\partial x^l}\,R_m\left\{\frac{1}{q(\xi)} L_\xi [y_m - y]\right\} d\xi \tag{482}$$

Застосовуючи тут частинну інтеграцію і використовуючи рівність:

$$\int_a^b p(\xi)\,R\left[\frac{1}{q(\xi)} L_\xi [y_m - y]\right] d\xi = \sum_{n=m+1}^{\infty} C_n \int_a^b p(\xi)\Phi_n(\xi)\,d\xi = 0, \tag{483}$$

дістанемо:

$$\delta_m^{(l)}(x) = -\int_a^b \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r(\xi)} \frac{\partial^l \Gamma(x,\xi)}{\partial x^l}\right) \int_a^{\xi} p(\xi)\,R_m\left[\frac{1}{q(\xi)} L_\xi [v \quad - y]\right] d\xi^2$$

Далі так само:

$$\delta_m^{(l)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\frac{1}{r(\xi)}\frac{\partial^l \Gamma(x,\xi)}{\partial x^l}\right)\int_a^\xi\int_a^\xi p(\xi) R_m\left[\frac{1}{q(\xi)} L_\xi[y_m - y]\right] d\xi^2 =$$

$$= \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot = \tag{484}$$

$$= (-1)^{k-l-1}\int_a^b \frac{\partial^{k-l-1}}{\partial \xi^{k-l-1}}\left(\frac{1}{r(\xi)}\frac{\partial\, \Gamma(x,\xi)}{\partial x^l}\right)\int_a^\xi \cdots \int_a^\xi p(\xi) R_m\left[\frac{1}{q(\xi)} L_\xi[y_m - y]\right] d\xi^{k-l}$$

Ця рівність правдива для

$$k - l < m + 3$$

Щоб її довести, досить пересвідчитися, що

$$\int_a^b\int_a^\xi \cdots \int_a^\xi p(\xi) R_m\left[\frac{1}{q(\xi)} L_\xi[y \quad - y]\right] d\xi^{k-l-1} = 0$$

Для цього досить установити рівність:

$$\int_a^b\int_a^\xi \cdots \int_a^\xi p(\xi)\, \Phi_n(\xi)\, d\xi^{k-l-1} = 0 \tag{485}$$

для

$$k - l < n + 2$$

Остання рівність стає очевидною, коли переписати її так:

$$\int_a^b p(\xi)(b-\xi)^{k-l-2}\, \Phi_n(\xi)\, d\xi = 0$$

і нагадати, що функції $\Phi_n(\xi)$ — ортогональні.

Остання частинна інтеграція зведе рівність (484) на таку:

$$\delta_m^{(l)}(x) = (-1)^{k-l-1}\frac{\partial^{k-l-1}}{\partial \xi^{k-l-1}}\left(\frac{1}{r(\xi)}\frac{\partial^l \Gamma(x,\xi)}{\partial x^l}\right|_{\xi=x-0}^{\xi=x+0}\cdot$$

$$\cdot\int_a^x\int_a^\xi \cdots \int_a^\xi p(\xi) R_m\left[\frac{1}{q(\xi)} L_\xi[y_m - y]\right] d\xi^{k-l} + \tag{486}$$

$$+ (-1)^{k-}\int_a^b \frac{\partial^{k-l}}{\partial \xi^{k-l}}\left(\frac{1}{r(\xi)}\frac{\partial^l \Gamma(x,\xi)}{\partial x^l}\right)\int_a^\xi\int_a^\xi \cdots \int_a^\xi p(\xi) R_m\left[\frac{1}{q(\xi)} L_\xi[y - y_m]\right] d\xi^{--}$$

Очевидно, ці перетворення можна робити, коли коефіцієнти заданого рівняння (387) мають належні диференціальні властивості, як це з'ясовано в параграфі 39.

Для дальшого перетворення виразу (486), розгляньмо функцію:

$$\int_a^\xi\int_a^\xi \cdots \int_a^\xi \frac{p(\xi)}{q(\xi)} L_\xi[y_m - y]\, d\xi^{k-l} - \int_a^\xi\int_a^\xi \cdots \int_a^\xi p(\xi)\sum_{n=0}^{t} C_n \Phi_n(\xi)\, d\xi^{k-l} = P_{(\xi)}, \tag{487}$$

де

$$t \geqslant k-1$$

Ця функція диференціюється $k-l$ разів, при тому її $(k-l)$-а похідна обмежена на всякому інтервалі, де обмежена функція. Рівність (487) можна переписати так:

$$P_m^{(l)}(\xi) = \sum_{n=t+1}^{\infty} C_n \int_a^{\xi}\int_a^{\xi}\dots\int_a^{\xi} p(\xi)\,\Phi_n(\xi)\,d\xi^{k-l} \tag{488}$$

Звідси

$$\int_a^b P_m^{(l)}(\xi)(\xi-a)^{\xi}\,d\xi = \sum_{n=t+1}^{\infty} C_n \int_a^b (\xi-a)^{\xi} \int_a^{\xi}\dots\int_a^{\xi} p(\xi)\,\Phi_n(\xi)\,d\xi^{k-l+1}$$

$$= -\sum_{n=t+1}^{\infty} C_n \int_a^b \frac{(\xi-a)^{\xi+1}}{\mu+1}\int_a^{}\dots\int_a^{} p(\xi)\,\Phi_n(\xi)\,d\xi^{k-l} = 0$$

$$= +\sum_{n=t+1}^{\infty} C_n \int_a^b \frac{(\xi-a)^{\xi+2}}{(\mu+1)(\mu+2)}\int_a^{\xi}\dots\int_a^{\xi} p(\xi)\,\Phi_n(\xi)\,d\xi^{k-l-1} =$$

$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots =$$

$$= (-1)^{k-l}\sum_{n=t+1}^{\infty} C_n \int_a \frac{(\xi-a)^{\xi+k-l}}{(\mu+1)(\mu+2)\dots(\mu+k-l)}\,p(\xi)\,\Phi_n(\xi)\,d\xi$$

Отож, з огляду на ортогональність функцій $\Phi_n(\xi)$, маємо

$$\int_a^b P_m(\xi)(\xi-a)^{\xi}\,d\xi =$$

$$= (-1)^{k-l}\sum_{n=t+1}^{\mu+k-l} C_n \int_a^b \frac{(\xi-a)^{\xi+k-l}}{(\mu+1)(\mu+2)\dots(\mu+k-l)}\,p(\xi)\,\Phi_n(\xi)\,d\xi \tag{489}$$

Звідси бачимо, що порядок малості остачі $R_n[P_m^{(l)}(\xi)]$ від узагальненого Фур'єрового розвинення функції $P_m^{(l)}(\xi)$ той самий, що й виразу

$$\int_a^{\xi}\int_a\dots\int_a p(\xi)\,R_{n+k+l}\left[\frac{1}{q(\xi)}L_{\xi}[y-y_m]\right]d\xi^{k-l}$$

Перепишімо тепер рівність (486) так:

$$\delta_m^{(l)}(x) \sim C_1^{(m)} R_{m-k+l}[P_m^{(l)}(x)] + C_2^{(m)}\sqrt{\int_a^b R^2_{m-k+l}[P_m^{(l)}(\xi)]\,d\xi} \tag{490}$$

де $C_1^{(m)}$ та $C_2^{(m)}$ є обмежені (при зміні m) числа. Цей вираз дає порядок похибки наближеної рівності

$$y^{(l)} \approx y_m^{(l)}$$

§ 43. Застосування

1. Візьмімо для прикладу

$$a = -1; \quad b = +1$$

$$p(x) = q(x) = r(x) = 1$$

тобто випадок, коли многочлени $\Phi_n(x)$ є Legendre-ові:

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)\sqrt{\frac{2n+1}{2^{2n+1}}}$$

Зробивши заміну змінного

$$\xi = \cos\theta,$$

матимемо:

$$\int_{-1}^{+1} R^2_{m-k+l}[P_m^{(l)}(\xi)]^2 d\xi = \int_0^{\pi} R_{m-k+l}[P_m^{(l)}(\cos\theta)]^2 \sin\theta \, d\theta \tag{491}$$

Тому, що $R_{m-k+l}[P_m^{(l)}(\xi)]$ визначаються з умови:

$$\varepsilon_m = \sqrt{\int_{-1}^{+1} R^2_{m-k+l}[P_m^{(l)}(\xi)] \, d\xi} = \min, \tag{492}$$

а функція $P_m^{(l)}(\xi)$ диференціюється $k-l$ разів, то величина цього minimum-у є

$$\varepsilon_m = \frac{D_2^{(m)}}{m^{k-l}}, \tag{493}$$

де $D_2^{(m}$ є число обмежене (при зміні m). Далі, умова (492) показує, що

$$R_{m-k+l}[P_m^{(l)}(\cos\theta)]\sin\theta$$

є остача від розвинення функції

$$P_m^{(l)}(\cos\theta)\sin\theta$$

в ряд Фур'є за функціями

$$1, \cos\theta, \quad \cos 2\theta, \cos 3\theta, \ldots$$

Як відомо, ця остача є того ж порядку, що число $\frac{\ln m}{m^{k-l}}$. Тому

$$R_{m-k+l}[P_m^{(l)}(\cos\theta)] = \frac{D_0^{(m)} + D_1^{(m)}\ln m}{m^{k-l}\sin\theta}, \tag{494}$$

де числа $D_0^{(m)}$ та $D_1^{(m)}$ є обмежені (при зміні m).

На основі рівностей (493) та (494) маємо остаточно

$$\delta_m^{(l)}(x) = \frac{A_m(x) + B_m(x)\ln m}{m^{k-l}\sqrt{1-x^2}}, \tag{495}$$

де функції $A_m^{(l)}(x)$ та $B_m(x)$ є обмежені функції від x та m. Так доходимо висновку: коли Green-ова функція задачі (387)—(388) має неперервні похідні:

$$\frac{\partial^l \Gamma(x,\xi)}{\partial x^l}, \quad \frac{\partial^{l+1} \Gamma(x,\xi)}{\partial x^l \partial \xi}, \quad \frac{\partial^{l+2} \Gamma(x,\xi)}{\partial x^l \partial \xi^2}, \ldots, \frac{\partial^{k-1} \Gamma(x,\xi)}{\partial x^l \partial \xi^{k-l-1}}, \tag{496}$$

то наближення y_m розв'язки y цієї задачі, зроблене за допомогою Legendre-ових многочленів:

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n \cdot \sqrt{\frac{2n+1}{2^{2n+1}}}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

справджує нерівності:

$$\left.\begin{aligned} |y_m - y| &< \frac{A_m + B_m \ln m}{m^k \sqrt{1-x^2}} \\ |y'_m - y'| &< \frac{A'_m + B'_m \ln m}{m^{k-1} \sqrt{1-x^2}} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |y_m^{(k-1)} - y^{(k-1)}| &< \frac{A_m^{(k-1)} + B_m^{(k-1)} \ln m}{m\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{497}$$

де

$$A_m, \ B_m, \ A'_m, \ B'_m, \ldots, A_m^{(k-1)}, \ B_m^{(k-1)}$$

є обмежені функції від m.

Ми бачимо, що наближення (497) — такого самого порядку, як в окремих самоспряжених випадках попереднього параграфа. Тільки на кінцях інтервалу інтеграції (при зближенні x до ± 1) вони гіршають через присутність множника $\sqrt{1-x^2}$ у знаменнику.

Коли не всі похідні ряду (496) неперервні, а тільки перші k_1 ($<k$) з них, то нерівності (497) заміняються такими:

$$\left.\begin{aligned} |y_m - y| &< \frac{A_m + B_m \ln m}{m^{k_1} \sqrt{1-x^2}} \\ |y'_m - y'| &< \frac{A_m^{(1)} + B_m^{(1)} \ln m}{m^{k_1-1} \sqrt{1-x^2}} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |y_m^{(k_1-1)} - y^{(k_1-1)}| &< \frac{A_m^{(k_1-1)} + B_m^{(k_1-1)} \ln m}{m\sqrt{1-x^2}} \\ |y_m^{(k_1)} - y^{(k_1)}| &< \frac{A_m^{(k_1)} + B_m^{(k_1)} \ln m}{m\sqrt{1-x^2}} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |y_m^{(k-1)} - y^{(k-1)}| &< \frac{A_m^{(k-1)} + B_m^{(k-1)} \ln m}{m\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}\right\} \tag{498}$$

В окремому випадку, коли

$$k_1 = 1$$

ці нерівності стають нерівностями того типу, що і (463).

Коли задача (387)—(388) є самоспряжена, то напевно існують нерівності (497).

II. Візьмімо

$$a = -1, \quad b = +1$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Тоді можна взяти (згідно з параграфом 4)

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}, \quad r(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}$$

Многочлени $\Phi_n(x)$ стають многочленами Чебишова:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(\arc\cos x), \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(2\arc\cos x),$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(3\arc\cos x), \quad \ldots \tag{499}$$

Відношення (468) всі стають одиницями.

Функції $\varphi_n(x)$ визначаються тоді з рівнянь:

$$M_x(\varphi_n) = \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}\Phi_n(x) \tag{500}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots),$$

а коефіцієнти $a_i^{(m)}$ суми (428)

$$y_m(x) = a_0^{(m)}\varphi_0(x) + a_1^{(m)}\varphi_1(x) + \ldots + a_m^{(m)}\varphi_m(x) \tag{501}$$

з рівнянь:

$$\int_{-1}^{+1}\left\{L_x[y_m] - f(x)\right\}\frac{\Phi_n(x)\,dx}{\sqrt[4]{1-x^2}} = 0 \tag{502}$$

$$(n = 0, 1, \ldots, m)$$

Очевидно, рівність (490) і в даному випадку, і взагалі можна замінити такою:

$$\delta_m^{(l)}(x) = C^{(m)}(x)\,R_{m-k+}\;[P_m^{(l)}(x)], \tag{503}$$

де $C^{(m)}(x)$ є обмежене число (при зміні m).

Звідси робимо той самий висновок, що в пункті 1, бо похідна $(k-l)$-го порядку по змінному θ від $P^{(l)}(\cos\theta)\sin\theta$ тут теж обмежена.

III. Ті самі висновки матимемо, коли взяти

$$p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$$

$$q(x) \pm r(x) = \sqrt{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta},$$

якщо

$$-\frac{1}{2} \leqslant \alpha, \quad \beta \leqslant 0 \tag{504}$$

Тоді многочлени $\Phi_n(x)$ стають Jacobi-євими многочленами. Коли нижню границю нерівності (144) ще знизити, то точність наближень

$$y_m, \; y'_m, \; y''_m, \ldots$$

погіршується.

§ 44. Точність наближених розв'язок систем лінійних диференціальних рівнянь

Обмежмося тут випадком, коли граничні умови (249") є умови періодизму:

$$y_1(0) = y_1(2\pi)$$
$$y_2(0) = y_2(2\pi)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y_k(0) = y_k(2\pi)$$

Для простоти записів за інтервал $[a, b]$ узято $[0,2\pi]$.

Тоді й Green-ів тензор системи (249) (див. випуск 1, розд. IV):

$$\begin{matrix} \Gamma_{11}(x, \xi), & \Gamma_{12}(x, \xi), \ldots, & \Gamma_{1k}(x, \xi) \\ \Gamma_{21}(x, \xi), & \Gamma_{22}(x, \xi), \ldots, & \Gamma_{2x}(x, \xi) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Gamma_{k1}(x, \xi), & \Gamma_{k2}(x, \xi), \ldots, & \Gamma_{kk}(x, \xi) \end{matrix} \tag{505}$$

справджує теж умови:

$$\Gamma_{ij}(0, \xi) = \Gamma_{ij}(2\pi, \xi)$$
$$(i, j = 1, 2 \ldots k),$$

Знаємо, що функції (α) є суцільні та диференціюються скрізь за винятком точки

$$x = \xi$$

У цій точці вони мають скінченний розрив. Щодо похідних

$$\Gamma'_{ji} = \frac{\partial \Gamma_{ij}(x, \xi)}{\partial x}$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, k),$$

то, як відомо, вони справджують рівності:

$$_{1x}[\Gamma_1] = 0$$
$$L_{2x}[\Gamma_1] = 0$$
$$\cdots\cdots$$
$$L_{kx}[\Gamma_1] = 0,$$

де (пор. розділ IV, § 38):

$$M_{ix}[\Gamma_j] = \frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial x} + B_{i1}\Gamma_{1j} + B_{i2}\Gamma_{2j} + \ldots B_{ik}\Gamma_{kj}$$

$$N_{ix}[\Gamma_j] = a_{i1}\Gamma_{1j} + a_{i2}\Gamma_{2i} + \ldots a_{ik}\Gamma_{kj}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k)$$

Із розгляду системи так званої спряженої з системою (249′), а саме системи

$$\Lambda_{1x}[z] = \theta_1(x)$$

$$\Lambda_{2x}[z] = \theta_2(x)$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\Lambda_{kx}[z] = \theta_k(x),$$

де

$$\Lambda_{ix}[\ ] = M_{ix}[\ ] - \lambda N_{ix}[\ ]$$

$$M_{ix}[z] = \frac{\partial z_i}{\partial x} + B_{1i}z_1 + B_{2i}z_2 + \ldots + B_{ki}z_k$$

$$N_{ix}[z] = a_{1i}z_1 + a_{2i}z_2 + \ldots + a_{ki}z_k$$

$$(i = 1, a, \ldots, k),$$

за тих самих граничних умов

$$z_1(0) = z_1(2\pi)$$

$$z_2(0) = z_2(2\pi)$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$z_k(0) = z_k(2\pi)$$

легко вивести, через частинну інтеграцію виразу:

$$\sum_{i=1}^{k}\int_0^{2\pi}\left\{z_i L_{ix}[y] + y_i \Lambda_{ix}[y]\right\} dx,$$

що Green-ів тензор (α) має щодо другого аргумента ξ ті самі властивості, що й до першого, а саме він періодичний:

$$\Gamma_{ij}(x, 0) = \Gamma_{ij}(x, 2\pi),$$

всі функції $\Gamma_{ij}(x, \xi)$, як функції від ξ, разом зі своїми першими похідними по ξ суцільні скрізь, за винятком точки

$$\xi = x,$$

де і самі функції Γ_{ij}, і похідні $\dfrac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial \xi}$ мають скінченні розриви.

Систему функцій

$$\pi\Phi_{10}, \pi\Phi_{11}, \ldots \pi\Phi_{1m}, \ldots$$

$$\pi\Phi_{20}, \pi\Phi_{21}, \ldots \pi\Phi_{2m}, \ldots$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\pi\Phi_{k0}, \pi\Phi_{k1}, \ldots, \pi\Phi_{km},$$

візьмімо в формі

$$\left|\begin{array}{c} \frac{1}{2}\,0\ldots0 \\ 0\,\frac{1}{2}\ldots0 \\ \ldots\ldots \\ 0\,0\ldots\frac{1}{2} \end{array}\right| \begin{array}{c} \cos x\;0\ldots0 \\ 0\cos x\ldots0 \\ \ldots\ldots \\ 0\;0\quad\cos x \end{array}\left| \begin{array}{c} \sin x\;0\ldots0 \\ 0\sin x\ldots0 \\ \ldots\ldots \\ 0\;0\quad\sin x \end{array}\right| \begin{array}{c} \cos 2x\;0\ldots0 \\ 0\cos 2x\ldots0 \\ \ldots\ldots \\ 0\;0\quad\cos 2x \end{array}\left| \begin{array}{c} \sin 2x\;0\ldots0 \\ 0\sin 2x\ldots0 \\ \ldots\ldots \\ 0\;0\quad\sin 2x \end{array}\right| \begin{array}{c} \cos 3x\;0\ldots \\ 0\cos 3x\ldots \\ \ldots\ldots \\ 0\;0\quad\ldots \end{array}\right|$$

Перепишімо тепер рівність (404) розд. IV (вип. I) у такій формі:

$$u_{jm}(\xi)=\int_a^b\sum_{g=1}^k\gamma_{gj}^{(m)}(\xi,x)M_{gx}[z-z_m]\,dx-\int_a^b\sum_{j=1}^k\gamma_{gi}^{(m)}(\xi,x)N_{gx}[u_m]\,dx$$

$$(j=1,2,\ldots,k),$$

що очевидно перетворюеться так:

$$u_{jm}(\xi)=\int_a^b\sum_{g=1}^k\Gamma_{gj}(\xi,x)R_m[M_{yx}[z]]\,dx-\int_a^b\sum_{j=1}^k\gamma_{gi}^{(m)}(\xi,x)N_{gx}[u_m]\,dx \tag{506}$$

$$(j=1,2,\ldots,k),$$

де знак $R_m[M_{gx}[z]]$ означає остачу m-ої суми Fourier-ової функції $M_{gx}[z]$. Далі через частинну інтеграцію першого члена правої сторони рівності (506), дістаємо

$$u_{jn}(\xi)=\sum_{g=1}^k\text{const}\,R_m\left[\int_0 M_{gx}[z]\,dx\right]_\xi-\int_a^b\sum_{g=1}^k\frac{\Gamma_{gj}(\xi,x)}{\partial x}R_m\left[\int_0^0 M_{gx}[z]\,dx\right]-$$

$$-\int_a^b\sum_{g=1}^k\gamma_{gi}^{(m)}(\xi,x)N_{gx}[u_m]\,dx \tag{507}$$

$$(j=1,2,\ldots,k)$$

Із рівностей (507) виводимо, що порядок малості різниць:

$$U_{jm}[z]=z_j-z_{jm} \tag{508}$$

$$(j=1,2,\ldots,k)$$

є не слабший за порядок малості величин:

$$R_m\left[\int_0^x M_{gx}[z]\,dx\right]$$

$$(g=1,2,\ldots,k)$$

Звідси висновок, що коли функції

$$f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_k$$

суцільні на інтервалі $[0,\ 2\pi]$ та справджують умови

$$f_1(0)=f_1(2\pi)$$

$$f_2(0)=f_2(2\pi)$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$f_k(0)=f_k(2\pi)$$

то порядки малості різниць (508) є не нижчі за порядок малості числа $\frac{\ln m}{m}$.

§ 45. Про точність наближеної розв'язки у випадку рівняння з частинними похідними

Обмежмося випадком, коли у даної задачі еліптичного типу:

$$\begin{gathered} L_{xy}[z] = F(x, y) \\ U_l[z] = 0 \\ (l = 0, 1, \ldots) \end{gathered} \tag{509}$$

з однорідними лінійними граничними умовами на контурі s обсягу S існує задача спряжена:

$$\begin{gathered} \Lambda_{xy}[u] = \Phi(x, y \\ V_l[z] = 0 \\ (l = 0, 1, \ldots) \end{gathered}$$

Тоді Green-ова функція $G(x, y; \xi, \eta)$ задачі (509) є суцільна функція всіх чотирьох аргументів:

$$x,\ y;\ \xi,\ \eta$$

так само, як усі її частинні похідні до порядку $(k-3)$-го включно. Щодо всіх похідних

$$\frac{\partial^{k-2} G}{\partial x^{\alpha}\, \partial y^{\beta}\, \partial \xi^{\gamma}\, \partial \eta^{\delta}}$$

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta = k - 2)$$

$(k-2)$-го порядку, то вони скрізь в обсязі S суцільні, як функції від (x, y) і як функції від (ξ, η) за винятком точки

$$x = \xi; \quad y = \eta,$$

де вони стають нескінченними так само, як $\lg r$, де

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

Нарешті, похідні $(k-1)$-го порядку мають ті самі властивості суцільності, стаючи в точці

$$x = \xi; \quad y = \eta$$

нескінченними такого порядку, як $\frac{1}{r}$.

Нехай система функцій

$$\Phi_0(x, y), \quad \Phi_1(x, y), \quad \Phi_2(x, y) \ldots \tag{510}$$

є повна, ортогональна та нормальна в обсязі S.

Нагадавши зазначення та результати розділу VI, бачимо, що порядок малості виразів

$$
\begin{gathered}
z - z_m \\
\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z_m}{\partial x}, \; \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z_m}{\partial y}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial^{k-2} z}{\partial x^{k-2}} - \frac{\partial^{k-2} z_m}{\partial y^{k-2}}, \; \frac{\partial z^{k-2}}{\partial x^{-3} \partial y} - \frac{\partial^{k-2} z_m}{\partial x^{k-3} \partial y}, \ldots, \frac{\partial y^{k-2} z}{\partial y^{k-2}} - \frac{\partial^{k-2} z_m}{\partial y^{k-2}}
\end{gathered}
\tag{511}
$$

є не слабший за порядок малості виразу

$$
\Delta_m = \iint_{(S)} N_{xy} [G(x, y; \xi, \eta)] R_m [M_{\xi\eta}[z]] \, d\xi \, d\eta \tag{512}
$$

де знак $R_m[\;]$ означає остачу m-ої суми Fourier щодо функцій (510), а $N_{xy}[\;]$ є оператор порядку не вищого за $k-2$ (пор. Додаток 1). На правій стороні формули (512) можливе однократне застосування Green-ового перетворення в формі:

$$
\begin{aligned}
\Delta_m = & \int_{(s)} N_{xy} [G(x, y; \xi, \eta] \, R_m [\int_0^\xi M_{\xi\eta}[z] \, d\xi] \, d\eta - \\
& - \iint_{(S)} \frac{\partial}{\partial \xi} N_{xy} [G(x, y; \xi, \eta] \, R_m [\int_0^\xi M_{\xi\eta}[z] \, d\xi] \, d\xi \, d\eta
\end{aligned}
\tag{513}
$$

або в формі:

$$
\begin{aligned}
\Delta_m = & \int_{(S)} N_{xy} [G(x, y; \xi, \eta) \, R_m [\int_0^\eta M_{\xi\eta}[z] \, d\eta] \, d\xi - \\
& - \iint_{(S)} \frac{\partial}{\partial \eta} N_{xy} [G(x, y; \xi, \eta)] \, R_m [\int_0^\eta M_{\xi\eta}[z] \, d\eta] \, d\xi \, d\eta
\end{aligned}
\tag{514}
$$

Звідси робимо висновок, що порядок малості всіх величин не слабший за порядок малості величини:

$$
R_m [\int_0^\eta M_{\xi\eta}[z] \, d\eta] \tag{515}
$$

Напр. в окремому випадку, коли $L_{xy}[\;]$ є оператор еліптичного типу другого порядку, а умови на контурі s є

$$
z/s = 0,
$$

при чому сам контур s прямокутний, то величина (515) є остача скінченної звичайної подвійної Fourier-ової суми функції, що не менше як один раз суцільно диференціюється в обсязі S (бо вважаємо, що $F(x, y)$ має цю властивість). Тоді напр.

$$
\Delta_m = - \iint_{(S)} \frac{\partial}{\partial \eta} N_{xy} [G(x, y; \xi, \eta)] \, R_m [\int_0^\eta M_{\xi\eta}[z] \, d\xi \, d\eta
$$

$$
|\Delta_m| \leqslant \max \left| R_m \left[\int_0^\eta M_{\xi\eta}[z] \, d\eta \cdot \iint_{(S)} \left| \frac{\partial}{\partial \eta} N_{\xi\eta}[G] \right| d\xi \, d\eta \right. \right.
$$

Отже остаточно в цьому випадку рівності

$$z \approx z_m$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \approx \frac{\partial z_m}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \approx \frac{\partial z_m}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^{k-2} z}{\partial x^{k-2}} \approx \frac{\partial^{k-2} z_m}{\partial x^{k-2}}, \quad \frac{\partial^{k-2} z}{\partial x^{k-3} \partial y} \approx \frac{\partial^{k-2} z_m}{\partial x^{k-2} \partial y}, \ldots, \frac{\partial^{k-2} z}{\partial y^{k-2}} \approx \frac{\partial^{k-2} z_m}{\partial y^{k-2}}$$

мають похибки порядку малості не слабшого, ніж m-а звичайна Fourier-ова сума функції, що в обсязі S суцільно диференціюється по обох змінних.

Додаток I

Деякі узагальнення при доборі операторів у застосуванні способу моментів до рівнянь з частинними похідними

Наступне узагальнення схеми розв'язання загальної задачі параграфа 13 (розд. VI) може мати значення для задач несамоспряжених, а також з погляду теоретичної викінченості способу моментів.

Нехай дано рівняння [пор. формулу (101)]

$$L_{xy}[z]=\sum_{\alpha=0}^{k}A_{k-\alpha,\alpha}(x,y)\frac{\partial^k z}{\partial x^{k-\alpha}\partial y^{\alpha}}+\sum_{\alpha=0}^{k-1}A_{k-1-\alpha,\alpha}(x,y)\frac{\partial^{k-1}z}{\partial x^{k-1-\alpha}\partial y^{\alpha}}+\dots$$

$$\dots+A_{00}(x,y)z=f(x,y) \qquad (1)$$

еліптичного типу з єдиною розв'язкою в обсязі S при будьяких лінійних однорідних граничних умовах.

Візьмімо оператор $M_{xy}[\ ]$ з усіма тими самими коефіцієнтами при похідних вищого порядку, що й оператор $L_{xy}[\ ]$, а в решті членів — довільно:

$$M_{xy}[z]=\sum_{\alpha=0}^{k}A_{k-\alpha,\alpha}(x,y)\frac{\partial^k z}{\partial x^{k-\alpha}\partial y^{\alpha}}+\sum_{\alpha=0}^{k-1}B_{k-1-\alpha,\alpha}(x,y)\frac{\partial^{k-1}z}{\partial x^{k-1-\alpha}\partial y^{\alpha}}+\dots$$

$$\dots+B_{00}(x,y)z \qquad (2)$$

[пор. формулу (102)]. Отже тут не вимагаємо, щоб старші похідні в операторі $N_{xy}[\ ]$ були порядку не вищого за $k-2$: вони можуть мати й порядок $k-1$:

$$N_{xy}[z]=\sum_{\alpha=0}^{k-1}C_{k-1-\alpha,\alpha}(x,y)\frac{\partial^{k-1}z}{\partial x^{k-1-\alpha}\partial y^{\alpha}}+\dots+C_{00}(x,y)z \qquad (3)$$

Нехай функції $\varphi_i(x,y)$ справджують ті граничні та початкові умови задачі, що й функція z, а функції

$$M_{xy}[\varphi_i]=\Phi_i(x,y) \qquad (4)$$

$$(i=1,2,\dots),$$

творять замкнену систему.

Тоді має силу таке узагальнення твердження, даного на с. 40 част. II цієї книги:

Хоч би які були коефіцієнти рівняння (1) і функція $f(x,y)$, вираз

$$z_m=a_1^{(m)}\varphi_1(x,y)+a_2^{(m)}\varphi_2(x,y)+\dots+a_m^{(m)}\varphi_m(x,y), \qquad (5)$$

де числа $a_i^{(m)}$ справджують систему лінійних рівнянь

$$\iint\limits_{(S)}(L_{xy}[z_m]-f)\,\Phi_i(x,y)\,dx\,dy=0 \qquad (6)$$

$$(i=1,2,\dots,m),$$

є таке наближення функції z, що

$$z = \lim_{m\to\infty} z_m$$

$$\frac{\partial^l z}{\partial x^{l-\alpha}\partial y^\alpha} = \lim_{m\to\infty} \frac{\partial^l z_m}{\partial x^{l-\alpha}\partial y^\alpha} \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, k-2 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix}$$

та

$$\lim_{m\to\infty} \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial^{k-1} z}{\partial x^{k-1-\alpha}\partial y^\alpha} - \frac{\partial^{k-1} z_m}{\partial x^{k-1-\alpha}\partial y^\alpha} \right)^2 dxdy = 0 \tag{8}$$

Для доводу — відомим способом (пор. розд. VI, с. 40—41) виводимо нерівність

$$\iint\limits_{(S)} L^2_{xy}[u_m]\, dx\, dy \leqslant \iint\limits_{(S)} (N_{xy}[u_m] + \varepsilon_m)^2\, dx\, dy, \tag{9}$$

де

$$u_m = z - z_m \tag{10}$$

Крім того, коли $G(x, y; \xi, \eta)$ є Green-ова функція задачі (1), то, як відомо, буде

$$u_m(x, y) = \iint\limits_{(S)} L_{\xi\eta}[u_m] \cdot G(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{11}$$

Звідси:

$$\frac{\partial^l u_m}{\partial x^{l-\alpha}\partial y^\alpha} = \iint\limits_{(S)} L_{\xi\eta}[u_m] \frac{\partial^l G(x, y; \xi, \eta)}{\partial x^{l-\alpha}\partial y^\alpha}\, d\xi\, \partial\eta \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, k-1 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix}$$

Найстарші похідні функції G в цій рівності є порядку k—1. Вони стають нескінченністю в єдиній точці:

$$x = \xi,\ y = \eta, \tag{13}$$

і порядок цієї нескінченності не вищий за порядок величини:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$$

Отже всі похідні функції G до порядку $k-2$ включно в формулах (12) інтегруються разом із своїми квадратами, і тому до них можна застосувати теорему замкнености. Щождо похідних порядку (k—1)-го, то до них цієї теореми застосувати не можна. Описавши з точки (13) круг γ радіуса ρ, введімо функції $H_{k-1,\alpha}(x, y; \xi, \eta)$ та $h_{k-1,\alpha}(x, y; \xi, \eta)$ за такими умовами:

$$\left.\begin{aligned} H_{k-1,\alpha} &= \frac{\partial^{k-1} G}{\partial x^{k-1-\alpha}\partial y^\alpha} && \text{скрізь поза кругом } \gamma \\ H_{k-1,\alpha} &= 0 && \text{» у крузі } \gamma \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} h_{k-1,\alpha} &= 0 && \text{скрізь поза кругом } \gamma \\ h_{k-1,\alpha} &= \frac{\partial^{k-1} G}{\partial x^{k-1-\alpha}\partial y^\alpha} && \text{» у крузі } \gamma \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Для функцій $H_{k-1,\alpha}$ теорема замкнености має силу.

Тоді, на основі рівностей (6), можемо переписати рівності (12) так:

$$\frac{\partial^l u_m}{\partial x^{l-\alpha}\partial y^\alpha} = \iint\limits_{(S)} L_{\xi\eta}[u_m] \cdot \delta_{l,\alpha}\, d\xi\, d\eta \qquad (16)$$

$$\begin{pmatrix} l = 0, 1, 2, \dots, k-2 \\ \alpha = 0, 1, \dots, l \end{pmatrix},$$

та

$$\frac{\partial^{k-1} u_m}{\partial x^{k-1-\alpha}\partial y^\alpha} = \iint\limits_{(S)} L_{\xi\eta}[u_m]\,(\Delta_{k-1,\alpha} + h_{k-1,\alpha})\, d\xi\, d\eta, \qquad (17)$$

де

$$\lim_{m\to\infty} \iint\limits_{(S)} r\delta^2_{l,\alpha}\, d\xi\, d\eta = 0 \qquad (18)$$

$$\lim_{m\to\infty} \iint\limits_{(S)} r\Delta^2_{k-1,\alpha}\, d\xi\, d\eta = 0 \qquad (19)$$

Крім того, можна, збільшуючи число m, одночасно так зменшувати число ρ, щоб, не порушуючи рівностей (18) та (19), добитися й рівності:

$$\lim_{\rho\to\infty} \iint\limits_{(S)} rh_{k-1,\alpha}\, d\xi\, d\eta = 0 \qquad (20)$$

Через лінійну комбінацію рівностей (16) та (17) легко дістати тоді:

$$N_{xy}[u_m] = \iint\limits_{(S)} \frac{1}{\sqrt{r}} L_{\xi\eta}[u_m] \cdot \theta_m\, d\xi\, d\eta, \qquad (21)$$

де θ_m є лінійна функція від величин $\sqrt{r}\,\delta_{l,\alpha}$, $\sqrt{r}\,\Delta_{k-1,\alpha}$, $\sqrt{r}\,h_{k-1,\alpha}$. Застосовуючи до виразу (5) нерівність Буняковського, легко дістанемо:

$$N^2_{xy}[u_m] \leqslant \iint\limits_{(S)} \frac{1}{r} L^2_{\xi\eta}[u_m]\, d\xi\, d\eta \,.\, \iint\limits_{(S)} \theta^2_m\, d\xi\, d\eta, \qquad (22)$$

де

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ \rho\to 0}} \iint\limits_{(S)} \theta^2_m\, d\xi\, d\eta = 0 \qquad (23)$$

Далі, через інтеграцію нерівності (22), доходимо результату:

$$\iint\limits_{(S)} N^2_{xy}[u_m]\, dx\, dy = \eta_m \iint\limits_{(S)} L^2_{\xi\eta}[u_m]\, d\xi\, d\eta, \qquad (24)$$

де

$$\eta_m \underset{m\to\infty}{\to} 0 \qquad (25)$$

Комбінуючи формулу (22) з нерівністю (9), остаточно дістаємо:

$$\varepsilon_m = \iint\limits_{(S)} N^2_{xy}[u_m]\, dx\, dy \to 0 \qquad (26)$$

$$\tau_m = \iint\limits_{(S)} L^2_{xy}[u_m]\, dx\, dy \to 0, \qquad (27)$$

коли $m \to \infty$.

З другого боку, з рівностей (16) легко виводимо:

$$\left(\frac{\partial^l u_m}{\partial x^{l-\alpha} \partial y}\right)^2 \leqslant \tau_m \cdot \iint \delta_{l,\alpha}^2 \, d\xi \, d\eta \tag{28}$$

$$\begin{pmatrix} l = 0, 1, 2, \ldots, k-2 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix}$$

та з рівності (17):

$$\left(\frac{\partial^{k-1} u_m}{\partial x^{k-1-\alpha} \partial y^\alpha}\right) \leqslant \iint\limits_{(S)} \frac{1}{r} L_{\xi\eta}^2 [u_m] \, d\xi \, d\eta \cdot 2 \iint\limits_{(S)} r(\Delta_{k-1,\alpha}^2 + h_{k-1,\alpha}^2) \, d\xi \, d\eta, \tag{29}$$

звідки:

$$\iint\limits_{(S)} \left\{\frac{\partial^{k-1} u_m}{\partial x^{k-1-\alpha} \partial y}\right\}^2 dx \, dy \leqslant \tau_m \cdot \max \iint\limits_{(S)} r(\Delta_{k-1,\alpha}^2 + h_{k-1,\alpha}^2) \, d\xi \, d\eta \cdot \mathrm{const} \tag{30}$$

Нерівності (28) та (30) дають остаточний результат:

$$\left.\begin{aligned} & z_m \to z \\ & \frac{\partial^l z_m}{\partial x^{l-\alpha} \partial y^\alpha} \to \frac{\partial^l z}{\partial x^{l-\alpha} \partial y} \\ & \begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, k-2 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix} \\ & \iint\limits_{(S)} \left\{\frac{\partial^{k-1} z_m}{\partial x^{k-1-\alpha} \partial y^\alpha} - \frac{\partial^{k-1} z}{\partial x^{k-1-\alpha} \partial y^\alpha}\right\}^2 dx \, dy \to 0 \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

при $m \to \infty$. Формули (31) являють собою довід збіжності способу моментів у нашому узагальненому випадку. Так виявляється результат:

Наближена розв'язка z_m задачі (1), здобута способом моментів, збігається разом із своїми похідними до порядку $(k-2)$-го включно. Похідні порядку $(k-1)$-го і вираз $M_{xy}[z_m]$ збігаються в середньому.

Нетрудно оцінити порядки похибок формул (31) і взагалі розвинути для цього найзагальнішого випадку всі подробиці, що їх дано в розд. V—VI цієї книги.

Подібні твердження можна довести для рівнянь гіперболічного та параболічного типу.

Додаток II

Про розвинення в ряди розв'язок лінійних диференціальних рівнянь

§ 1

Ця замітка обмежується такою задачею (див. випуск I): визначити розв'язку $y(x)$ рівняння:

$$L[y] = M[y] + N[y] = f(x) \tag{1}$$

на інтервалі $[a, b]$, де

$$M[y] = \frac{d^k y}{dx^k} + A_1 \frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}} + \cdots + A_k y \tag{2}$$

$$N[y] = a_1(x) \frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}} + \cdots + a_k(x) y, \tag{3}$$

якщо розв'язка справджує лінійні однорідні умови:

$$U_i[y] = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^{(i)} y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^{(i)} y^{(j)}(b) = 0 \tag{4}$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$$

і коли відомо, що за цих умов така розв'язка існує та є єдина.

У формі (1) можна записати всяке лінійне диференціальне рівняння k-го порядку, і при тому на безліч способів. Для дальших міркувань зовсім не істотно, щоб коефіцієнти

$$A_1, A_2, \ldots, A_k \tag{5}$$

були сталі числа. Досить тільки вимагати, щоб рівняння

$$M[y] = F(x) \tag{6}$$

за умов (4) мало розв'язку і при тому єдину. Практично важливо, щоб ця розв'язка легко визначалася, що здійснюється, коли коефіцієнти (5) є сталі.

Ми покажемо, як можна фактично в скінченному вигляді, з допомогою самих елементарних операцій, збудувати такі дві системи функцій:

$$\psi_0(x),\ \psi_1(x),\ \psi_2(x), \ldots \tag{7}$$

та

$$\Psi_0(x),\ \Psi_1(x),\ \Psi_2(x), \ldots, \tag{8}$$

що з них друга є замкнена ортогональна й нормальна, щоб розв'язку $y(x)$ можна було подати в вигляді:

$$y = f_0 \psi_0(x) + f_1 \psi_1(x) + f_2 \psi_2(x) + \cdots, \tag{9}$$

де числа

$$f_0,\ f_1,\ f_2, \ldots \tag{10}$$

є Fourier-ові коефіцієнти функції $f(x)$ щодо системи (8), тобто:

$$f_i = \int_a^b f(t)\, \Psi_i(t)\, dt \tag{11}$$

При тому ряд (9) не тільки збігається, але диференціюється почленно $k-1$ раз, отже правдиві й рівності:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= f_0\psi_0'(x) + f_1\psi_1'(x) + f_2\psi_2'(x) + \cdots \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= f_0\psi_0''(x) + f_1\psi_1''(x) + f_2\psi_2''(x) + \cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}} &= f_0\psi_0^{(k-1)}(x) + f_1\psi_1^{(k-1)}(x) + f_2\psi_2^{(k-1)}(x) + \cdots
\end{aligned}
\tag{12}
$$

§ 2

Як показано в розділі II вип. I, коли належно добрати коефіцієнти (5), то всякій замкненій системі функцій:

$$\Phi_0(x),\ \Phi_1(x),\ \Phi_2(x), \ldots \tag{13}$$

на інтервалі $[a, b]$ однозначно підпорядковується система функцій:

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots, \tag{14}$$

що справджують вимоги:

$$
\begin{aligned}
M[\varphi_m] &= \Phi_m \\
U_i[\varphi_m] &= 0
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, k-1; \quad m = 0, 1, 2, \ldots)$$

Доберімо систему (13) як ортогональну та нормальну. Тоді загалом кажучи, функція $f(x)$ на інтервалі (a, b) розвинеться в ряд:

$$f(x) = c_0\Phi_0(x) + c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x) + \cdots, \tag{16}$$

що його можна почленно інтегрувати. Коли задати функцію $f(x)$ надто загально, то розвинення (16) може не існувати, але, як знаємо, досить функції $f(x)$ бути інтегрувальною разом зі своїм квадратом, щоб існувала рівність

$$\lim_{m=\infty} \int_a \{f(x) - \sum_{i=0} c_i \Phi_i(x)\}^2 dx = 0, \tag{16'}$$

де

$$c_i = \int_a^b f(t)\, \Phi_i(t)\, dt, \tag{17}$$

тобто рівняння замкненості:

$$\int_a^b f^2(t)\, dt = c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + \cdots \tag{16''}$$

Наступні висліди будуть однаково правдиві і в цьому загальнішому випадку.

Нагадаймо, що поруч рівності типу (16) або (16′) повинна існувати така рівність:

$$y(x) = y_0\varphi_0(x) + y_1\varphi_1(x) + y_2\varphi_2(x) + \ldots \tag{18}$$

разом з наступними:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= y_0\varphi_0'(x) + y_1\varphi_1'(x) + y_2\varphi_2'(x) + \ldots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}} &= y_0\varphi^{(k-1)}(x) + y_1\varphi^{(k-1)}(x) + y_2\varphi^{(k-1)}(x) + \cdots
\end{aligned}
\tag{19}
$$

(див. розділ III вип. I). Ряди (18) та (19) незручні тим, що немає, взагалі кажучи, практичного способу обчисляти їх коефіцієнти y_i. Щоб цьому запобігти, розгляньмо функції:

$$L[\varphi_m] = \Phi_m + N[\varphi_m] \tag{20}$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots,)$$

що утворюють систему замкнену. Зортогоналізуймо цю систему, для чого очевидно досить замінити функцію $\varphi_m(x)$ сумою

$$\psi_m(x) = \alpha_0^{(m)}\varphi_0(x) + \alpha_1^{(m)}\varphi_1(x) + \cdots + \alpha_m^{(m)}\varphi_m(x) \tag{21}$$

з відповідно добраними коефіцієнтами $\alpha^{(m)}$, а саме за умовами:

$$\begin{gathered}
\int_a^b L[\psi_m(x)]\, L[\varphi_0(x)]\, dx = 0 \\
\int_a^b L[\psi_m(x)]\, L[\varphi_1(x)]\, dx = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\int_a^b L[\psi_m(x)]\, L[\varphi_{m-1}(x)]\, dx = 0 \\
\alpha_m^{(m)} \int_a^b L[\psi_m(x)]\, L[\varphi_m(x)]\, dx = 1
\end{gathered} \tag{22}$$

Очевидно маємо:

$$L[\psi_m(x)] = \alpha_0^{(m)} L[\varphi_0(x)] + \alpha_1^{(m)} L[\varphi_1(x)] + \cdots + \alpha_m^{(m)} L[\varphi_m(x)]$$

Увівши зазначення:

$$\Psi_m(x) = L[\psi_m(x)], \tag{23}$$

утворімо Fourier-ове розвинення:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \Psi_i(x), \tag{24}$$

де очевидно

$$f_i = \int_a^b f(x)\Psi_i(x)\, dx \tag{25}$$

Назвімо через $G(x, \xi)$ Green-ову функцію задачі (1)—(4). Тоді з (23) маємо:

$$\begin{gathered}
\psi_m(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, \Psi_m(\xi)\, d\xi \\
\psi_m'(x) = \int_a \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x}\, \Psi_m(\xi)\, d\xi \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\psi_m^{(k-1)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^{k-1} G(x, \xi)}{\partial x^{k-1}}\, \Psi_m(\xi)\, d\xi
\end{gathered} \tag{26}$$

Помноживши тепер обидві сторони рівності (24) відповідно на

$$G(x, \xi), \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{k-1} G(x, \xi)}{\partial x^{k-1}} \tag{27}$$

та проінтегрувавши, дістанемо:

$$y(x)=\sum_{i=0}^{\infty}f_i\psi_i(x)$$

$$\frac{dy(x)}{dx}=\sum_{i=0}^{\infty}f_i\psi_i'(x) \tag{28}$$

. . . .

$$\frac{d^{k-1}y(x)}{xd^{k-1}}=\sum^{\infty}f_i\psi_i^{(k-1)}(x),$$

що й малося довести.

Цілком подібний результат дістанемо, коли за функції Φ_i візьмемо фундаментальні функції задачі:

$$M[\varphi(x)]=\lambda\varphi(x)$$

$$U_i[\varphi]=0 \tag{29}$$

$$(i=0, 1, 2, \ldots, k-1)$$

отже коли визначимо і функції $\varphi_m(x)$ і функції $\Phi_m(x)$ з умов (29), узявши за λ відповідно значення

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \ldots, \tag{30}$$

характеристичних чисел задачі (29). Розуміється, це, загалом кажучи, можливе напевно тільки тоді, коли умови (4) такі, що дозволяють збудувати задачу (29) як самоспряжену.

Ці самі міркування й результати правдиві і для лінійних рівнянь математичної фізики кількох вимірів.

Нарешті, очевидно, що коли є змога розвинути функцію $f(x)$ безпосередньо за функціями $L[\varphi_m]$, то роль функцій $\psi_m(x)$ можуть грати самі функції $\varphi_m(x)$, і спеціальна ортогоналізація не потрібна.

§ 3

В окремому випадку, щоб визначити розв'язку задачі самоспряженої:

$$L[y]=M[y]-\lambda N[y]=f(x) \tag{31}$$

$$U_i[y]=0 \tag{32}$$

$$(i=0, 1\ 2, \ldots, k-1),$$

можна вести обчислення за наступною схемою, цілком подібною до попередньої:

1. Визначити характеристичні числа μ_i та фундаментальні функції самоспряженої задачі

$$M[\varphi]=\mu\varphi \tag{33}$$

$$U_i[\varphi]=0 \tag{34}$$

$$(i=0, 1, 2, \ldots, k-1)$$

тут для скорочення дальших міркувань та записів уважатимемо, що сума

$$\sum\frac{1}{|\mu_i|}$$

збігається.

2. Ортогоналізувати та нормалізувати систему функцій $L[\varphi(x)]$. Нехай ортогоналізація заступить ці функції функціями $\Psi_i(x)$, а функції $\varphi_i(x)$ відповідно функціями $\psi_i(x)$ — так, що

$$L[\psi_i(x)]=\Psi_i(x)$$

3. Обчислити коефіцієнти

$$f_l = \int_a^b f(x)\, \Psi_l(x)\, dx$$

Тоді шукана розв'язка знов дістане вигляд нескінченної суми:

$$y(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l \psi_l(x),$$

що $k-1$ раз почленно диференціюється та справджує умову:

$$\lim_{m=\infty} \int_a^b \left\{ \frac{d^k y(x)}{dx^k} - \sum_{l=0}^{n} f_l \psi_l(x) \right\}^2 dx = 0$$

Істотний пункт обґрунтування цього висліду є знову факт, що система функцій $L[\varphi_l(x)]$ на інтервалі $[a, b]$ є замкнена. Довід цього твердження, як відомо, зводиться на обґрунтування такої теореми.

Коли

$$\Phi_0(x),\ \Phi_1(x),\ \Phi_2(x), \ldots$$

є будьяка замкнена на інтервалі (a, b) система функцій, а функції $\varphi_l(x)$ справджують рівності:

$$M[\varphi_l] = \Phi_l$$

$$U_l[\varphi_l] = 0$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ k-2)$$

[в окремому випадку задачі самоспряженої за функції Φ_l та φ_l можна взяти й розв'язки задачі (33) — 34)], то сума

$$y_m(x) = a_0^{(m)} \varphi_0(x) + a_1^{(m)} \varphi_1(x) + \ldots + a_m^{(m)} \varphi_m(x)$$

визначена з рівнянь

$$\int_a^b \left\{ L[y_m] - f(x) \right\} \Phi_l(x)\, dx = 0, \tag{35}$$

$$(l = 0, 1, \ldots, m)$$

має властивість:

$$\begin{gathered} \lim_{m=\infty} y_m(x) = y(x) \\ \lim_{m=\infty} \frac{dy_m(x)}{dx} = \frac{dy(x)}{dx} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lim_{m=\infty} \frac{d^{k-1} y_m(x)}{dx^{k-1}} = \frac{d^{k-1} y(x)}{dx^{k-1}} \end{gathered} \tag{36}$$

$$\lim_{m=\infty} \int_a^b \left\{ \frac{d^k y_m(x)}{dx^k} - \frac{d^k y(x)}{dx^k} \right\}^2 dx = 0,$$

відки випливає ще й залежність:

$$\lim_{m=\infty} \int_a^b L^2[y - y_m]\, dx = 0, \tag{37}$$

а також

$$\lim_{m=\infty} \int_a^b M^2[y - y_m]\, dx = 0 \tag{38}$$

Як бачимо, виходить на цій підставі, що замкнена не тільки система функцій $L[\varphi_i]$, але й безліч систем функцій;

$$Л[\varphi_i] = P_0(x)\varphi_i^{(k)}(x) + P_1(x)\varphi_i^{(k-1)}(x) + \ldots + P_k(x)\varphi_i(x)$$

$$(P_0(x) > 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots)$$

Рівності (36) правдиві й для однорідної задачі, тобто для випадку:

$$f(y) \equiv 0,$$

якщо у неї є єдина розв'язка, коли коефіцієнти $a_i^{(m)}$ піддати, обмеженню напр.:

$$\int_a^b N^2[y_m]\,dx = 1$$

Поки ми обмежуємося випадком звичайної ортогоналізації функцій $M[\varphi_i(x)]$, ми не виходимо щодо результатів поза межі способу найменших квадратів і використовуємо для визначення коефіцієнтів наближення y_m власне не рівності (35) (або їх лінійні комбінації), а відповідні рівності, характеристичні для способу найменших квадратів:

$$\int_a^b \{ L[y_m] - f(x) \} L[\varphi_i]\,dx = 0$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m)$$

Але ідея узагальненої ортогоналізації в зв'язку з наведеним тут загальним результатом (36), (37) та (38) дає змогу надати висладам цих трьох параграфів безліч різних інших і при тому зручніших форм. В останньому параграфі ми повернемося до цієї думки, щоб спинитися коротко на ортогоналізації функцій $L[\varphi_i]$ з допомогою функцій Φ_i, тобто до безпосереднього використання саме рівнянь (35).

Зазначмо, що з погляду принципіального ні звичайна, ні взагальнена ортогоналізація не являють нового елемента в нашому розв'язанні задачі (31) — (32). Але практично вона може стати в пригоді в багатьох важливих випадках.

§ 4

Спинімося ще на самоспряженій однорідній задачі

$$L[y] = M[y] - \lambda N[y] = 0 \tag{39}$$

$$U_i[y] = 0$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$$

Знаємо, що

$$y(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots,$$

де функція φ_i взято згідно з умовами (33)—(34) та знормалізовано, а коефіцієнти a_i справджують рівняння:

$$a_h = \lambda(a_0\gamma_0^{(h)} + a_1\gamma_1^{(h)} + a_2\gamma_2^{(h)} + \ldots)$$

$$(h = 0, 1, 2, \ldots)$$

якщо

$$\gamma_i^{(h)} = \frac{1}{\mu_h}\int_a^b N[\varphi_i(x)]\varphi_h(x)\,dx$$

Щоб ці рівняння мали нетривіальну розв'язку, за λ^{-1} треба взяти полюс матриці:

$$\Gamma = \left\| \begin{matrix} \gamma_0^{(0)} & \gamma_1^{(0)} & \gamma_2^{(0)} & \ldots \\ \gamma_0^{(1)} & \gamma_1^{(1)} & \gamma_2^{(1)} & \ldots \\ \gamma_0^{(2)} & \gamma_1^{(2)} & \gamma_2^{(2)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\| \tag{40}$$

Детермінант

$$|I - \lambda\Gamma|$$

збігається, що випливає із збіжності рядів

$$\sum_{l,\,h=0}^{\infty} \left\{\gamma_l^{(h)}\right\}^2 \text{ та } \sum_{l=0}^{h} \left|\gamma_l^{(l)}\right|$$

Отож полюси матриці Γ^{-1} визначимо з рівняння;

$$|I - \lambda\Gamma| = 0 \tag{41}$$

Щоб розв'язати це рівняння (в загальному випадку трансцендентне), можна застосувати, напр., спосіб Graeffe, але обчислення були б, взагалі кажучи, надто важкі. Вони дещо полегшуються тим, що звичайно в самоспряжених випадках, напр., у найпростішому:

$$N[y] = a(x)y,$$

маємо:

$$\gamma_h^{(l)} = \gamma_l^{(h)}$$

Здається зручнішим до застосування Laguerre-ів спосіб. Його якраз можемо тут з певністю вжити, бо всі корені рівняння (41) дійсні; те, що воно, взагалі кажучи, не алгебричне, тільки неістотно змінює схему обчислення.

Нехай λ' є будьяке дійсне число, що його хочемо взяти за перше наближення кореня рівняння (41). Тоді рівності (39) перепишемо так:

$$\lambda'(a_0\gamma_0^{(h)} + a_1\gamma_1^{(h)} + \dots) + a_h = (\lambda - \lambda')(a_0\gamma_0^{(h)} + a_1\gamma_1^{(h)} + \dots)$$

Бачимо, що досить систему функцій:

$$M[\varphi_l(x)] - \lambda' N[\varphi_l(x)] = \underset{\lambda = \lambda'}{L}[\varphi_l(x)]$$

ортогоналізувати, щоб мати змогу переписати ці рівності простіше:

$$\frac{b_h}{\lambda - \lambda'} = b_0\delta_0^{(h)} + b_1\delta_1^{(h)} + b_2\delta_2^{(h)} + \dots,$$

е вирази $\delta_l^{(h)}$ не трудно подати через $\gamma_l^{(l)}$. Отож числа:

$$\frac{1}{\lambda - \lambda'}$$

полюси матриці:

$$\Delta = \begin{Vmatrix} \delta_0^{(0)} & \delta_1^{(0)} & \delta_2^{(0)} & \dots \\ \delta_0^{(1)} & \delta_1^{(1)} & \delta_2^{(1)} & \dots \\ \delta_0^{(2)} & \delta_1^{(2)} & \delta_2^{(2)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}.$$

и чому

$$\sum \frac{1}{(\lambda_l - \lambda')^2} = \sum_{h,\,l=0}^{\infty} \left\{\delta_l^{(h)}\right\}^2$$

Якщо λ' лежить поміж двома характеристичними числами, то звідси наближено визначимо двоє з чисел λ_l, сусідніх з числом λ':

$$|\lambda_l - \lambda'| \cong \Delta\lambda' = -\frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{l,\,h=0}^{\infty} \left\{\delta_l^{(h)}\right\}^2}}$$

Узявши $\Delta\lambda'$ за поправку для наближення λ', повторюємо з сумою:

$$\lambda'' = \lambda' \pm \Delta\lambda'$$

те саме, і т. д. Коли дальші наближення вести монотонно, тобто раз-у-раз в напрямі збільшення або зменшення, то процес конче буде збіжний, і ми довільно збливимося до характеристичного числа.

Отож визначення характеристичних чисел нашої задачі можна звести на такі операції.

1. Визначення чисел μ_l та функцій $\varphi_l(x)$ із умов (33) — (34).

2. Визначення інтегралів:

$$\Phi_{hl}(\lambda) = \int\limits_a^b \theta_h(x,\lambda)\,\theta_l(x,\lambda)\,dx$$

$$(h, l = 0, 1, 2, \ldots),$$

де

$$\theta_l(x,\lambda) = L\,[\varphi_l(x)]$$

3. Ортогоналізація та нормалізація функцій:

$$\theta_l(x,\lambda) = M[\varphi_l(x)] - \lambda N\,[\varphi_l(x)]$$

отже визначення коефіцієнтів $\alpha_l^{(l)}(\lambda)$ сум:

$$\Psi\,(x,\lambda) = \alpha_0^{(l)}(\lambda)\,\theta_0(x,\lambda) + \alpha_1^{(l)}(\lambda)\,\theta_1(x,\lambda) + \ldots + \alpha_l^{(l)}(\lambda)\,\theta_l(x,\lambda)$$

або самих цих сум із умов:

$$\int\limits_a^b \Psi_l(x,\lambda)\,\Psi_h(x,\lambda)\,dx = 0 \qquad (l \neq h)$$

$$\alpha_l^{(l)}(\lambda)\int\limits_b^a \Psi_l(x,\lambda)\,\theta_l(x,\lambda)\,dx = 1$$

Вони за зазначень:

$$\psi_l(x) = \alpha_0^{(l)}(\lambda)\,\varphi_0(x) + \alpha_1^{(l)}(\lambda)\,\varphi_1(x) + \ldots + \alpha_l^{(l)}(\lambda)\,\varphi_l(x)$$

та

$$\delta_l^{(h)}(\lambda) = \int\limits_a^b \varphi_l(x,\lambda)\,\Psi_h(x,\lambda)\,dx$$

$$(l,\ h = 0, 1, 2, \ldots)$$

дають залежність:

$$\sum_{h,\,l=0}^{\infty}\left\{\delta_l^{(h)}(\lambda)\right\}^2 = \sum_{l=0}^{\infty}\int\limits_a^b \psi_l^2(x,\lambda)\,dx = \sum_{l=0}^{\infty}\left\{(\alpha_0^{(l)}(\lambda))^2 + (\alpha_1^{(l)}(\lambda))^2 + \ldots + (\alpha_l^{(l)}(\lambda))^2\right\},$$

де обидві нескінченні суми збігаються для всякого λ.

4. Обчислення суми:

$$A^2(\lambda) = \sum_{l=0}^{\infty}\left\{(\alpha_0^{(l)}(\lambda))^2 + (\alpha_1^{(l)}(\lambda))^2 + \ldots + (\alpha_l^{(l)}(\lambda))^2\right\}$$

5. Обчислення чисел λ'', λ'''. . . . за формулами:

$$\lambda'' = \lambda' \pm \frac{1}{A(\lambda')}$$

$$\lambda''' = \lambda'' \pm \frac{1}{A(\lambda'')}$$

$$\cdots\cdots$$

Задавшися наперед бажаною кількістю певних цифр, спиняємося в обчисленні тоді, коли два послідовні наближення вже не дадуть різниці в цих цифрах.

§ 5

Можна для виразу $A^2(\lambda)$ дати остаточну формулу, зведену на самі величини $\Phi_{ih}(\lambda)$. Зауважмо для цього, що з умов ортогональності та нормальності функцій $\Psi_h(x,\lambda)$ випливає:

$$\alpha_0^{(l)}(\lambda)\,\Phi_{00}(\lambda) + \alpha_1^{(l)}(\lambda)\quad \Phi_{10}(\lambda) + \ldots + \alpha_l^{(l)}(\lambda)\,\Phi_{l0}(\lambda) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_0^{(l)}(\lambda)\Phi_{0,\,l-1}(\lambda) + \alpha_1^{(l)}(\lambda)\Phi_{1,\,l-1}(\lambda) + \ldots + \alpha_1^{(l)}(\lambda)\Phi_{l,\,l-1}(\lambda) = 0$$

$$\alpha_0^{(l)}(\lambda)\Phi_{0l}(\lambda) + \alpha_1^{(l)}(\lambda)\Phi_{1l}(\lambda) + \ldots + \alpha_1^{(l)}(\lambda)\Phi_{ll}(\lambda) = \frac{1}{\alpha_1^{(l)}(\lambda)}$$

Назвавши $\Delta_l(\lambda)$ детермінант:

$$\begin{vmatrix} \Phi_{00}(\lambda) & \Phi_{10}(\lambda)\ldots & \Phi_{10}(\lambda) \\ \Phi_{10}(\lambda) & \Phi_{11}(\lambda)\ldots & \Phi_{l1}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi_{l0}(\lambda) & \Phi_{\ 1}(\lambda)\ldots & \Phi_{ll}(\lambda) \end{vmatrix}$$

виводимо:

$$\alpha_i^{(l)}(\lambda) = \frac{\dfrac{\partial\Delta_l(\lambda)}{\partial\Phi_{il}(\lambda)}}{\sqrt{\Delta_{l-1}(\lambda)\Delta_l(\lambda)}}$$

$$(i = 0,\ 1, \ldots,\ l)$$

Коли ще зазначимо матрицю

$$\begin{Vmatrix} \Phi_{00}(\lambda) & \Phi_{10}\cdots & \Phi_{l0}\ (\lambda) \\ \Phi_{01}(\lambda) & \Phi_{11}\cdots & \Phi_{\ 1}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi_{0,\,l-1}(\lambda) & \Phi_{1,\,l-1}(\lambda)\ldots & \Phi_{l,\,l-1}(\lambda) \end{Vmatrix}$$

через $\overline{\Delta_l(\lambda)}$, а її транспоновану через $\overline{\Delta_l'(\lambda)}$, то дістанемо легко:

$$A^2(\lambda) = \frac{1}{\Delta_0(\lambda)} + \frac{\left|\overline{\Delta_1(\lambda)}\ \overline{\Delta_l'(\lambda)}\right|}{\Delta_0(\lambda)\,\Delta_1(\lambda)} + \frac{\left|\overline{\Delta_2(\lambda)}\ \overline{\Delta_2'(\lambda)}\right|}{\Delta_1(\lambda)\,\Delta_2(\lambda)} + \ldots$$

На підставі відомої Hadamard-ової нерівності в теорії детермінантів виводимо, що

$$\Delta_{l-1}(\lambda)\ \Phi_{ll}(\lambda) \leqslant \Delta_l(\lambda)$$

Крім того, очевидно,

$$\left|\overline{\Delta_l(\lambda)}\,\overline{\Delta_{l'}(\lambda)}\right| \geqslant \Delta_{l-1}{}^2(\lambda).$$

Перемноживши ці дві нерівності, дістанемо:

$$\frac{\left|\overline{\Delta_l(\lambda)}\,\overline{\Delta_l(\lambda)}\right|}{\Delta_{l-1}(\lambda)\Delta_1(\lambda)} \geqslant \frac{1}{\Phi_{ll}(\lambda)}$$

Отже

$$A^2(\lambda) \geqslant \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\Phi_{00}(\lambda)}$$

Коли для одного з чисел λ', λ'',... остання сума є досить велика, то це й забезпечує достатню близкість цього числа до шуканого характеристичного числа, бо

$$\left|\frac{1}{\lambda - \lambda^{(i)}}\right| \approx A(\lambda)$$

§ 6

На підставі сказаного в параграфі 3 покажімо, що неоднорідна задача (31)—(32) має розвязку в формі ряду:

$$y(x) = f_0\psi_0(x) + f_1\psi_1(x) + f_2\psi_2(x) + \dots, \tag{42}$$

де функції

$$\Psi_l(x) = L[\psi_l(x)]$$

є лінійні комбінації з функцій

$$L[\psi_l(x)] = \mu_l\varphi_l(x) - \lambda N[\varphi_l(x)].$$

визначені через таку взагальнену ортогоналізацію:

$$\int_a^b \Psi_l(x)\, M[\psi_h(x)]\, dx = 0 \qquad (l>h)$$

$$\int_a^b \Psi_l(x)\, M[\psi_l(x)]\, dx = 1 \tag{43}$$

Ця ортогоналізація є можлива раз-у-раз, коли тільки однорідна задача (31)—(32) не має розв'язки типу $\sum_{i=1}^{\nu} p_i\varphi_i(x)$.

Так само можна було б перевести взагальнену ортогоналізацію функцій $\psi_l(x)$ з допомогою рівностей:

$$\int_a^b \Psi_l(x)\, M[\psi_h(x)]\, dx = 0 \qquad (l<h)$$

$$\int_a^b \Psi_l(x)\, M[\psi_l(x)]\, dx = 1 \tag{44}$$

Рівність (42) випливає з рівностей (35), що їх можемо переписати так:

$$\int_a^b \left\{ L[y_m] - f(x) \right\} M[\psi_h]\, dx = 0$$

$$(h = 0, 1, \dots m),$$

поклавши

$$y_m = b_0{}^{(m)}\psi_0 + b_1{}^{(m)}\psi_1 + \dots + b_m^{(m)}\psi_m$$

Із них та з умов ортогональності (43) виводимо:

$$b_0^{(m)} = \int_a^b f(x)\, M[\psi_0]\, dx$$

$$b_0^{(m)} \int_a^b L[\psi_0] M[\psi_1]\, dx + b_1^{(m)} = \int_a^b f(x) M[\psi_1]\, dx \tag{45}$$

$$b_0^{(m)} \int_a^b L[\psi_0]\, M[\psi_2]\, dx + b_1^{(m)} \int_a^b L[\psi_0]\, M[\psi_2]\, dx + b_2^{(m)} = \int_a^b f(x)\, M[\psi_1]\, dx$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Із цих рівностей визначаємо послідовно коефіцієнти $b_l^{(m)}$; бачимо, що вони не залежать від m. Цим доведено рівність (42) і дано спосіб обчисляти коефіцієнти f_l."

Коли б ми натомість звернулися до ортогоналізації (44), то замість рівностей (45) прийшли б до не таких зручних:

$$b_m^{(m)} = \int_a^b f(x)\, M[\psi_m]\, dx$$

$$b_m^{(m)} \int_a^b L[\psi_m]\, M[\psi_{m-1}]\, dx + b_m^{(m-1)} = \int_a^b f(x) M\, [\psi_{m-1}]\, dx$$

$$b_m^{(m)} \int_a^b L[\psi_m]\, M\, [\psi_{m-2}]\, dx + b_m^{(m-1)} \int_a^b L[\psi_{m-1}]\, M[\psi_{m-2}]\, dx + b_m^{(m-2)} = \int_a^b f(x)\, M[\psi_{m-2}] dx$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

що не дали б коефіцієнтів $b_l^{(m)}$, незалежних від значка m.

Уявімо собі, наретті, що за φ_i узято фундаментальні функції задачі (33) — (34) та що задача (31) — (32) є с а м о с п р я ж е н а. Тоді умови (43) та (44) стають тотожні, і їх запишемо просто так:

$$\int_a^b \Psi_l(x)\, M[\psi_h(x)]\, dx = \begin{cases} 0 & (h \neq l) \\ 1 & (h = l) \end{cases} \tag{46}$$

Справді бо, тоді $\psi_h(x)$ та $\Psi_h(x)$ є лінійні комбінації з функцій $\varphi_j(x)$ і умови (43) (крім останньої) є, напр., рівноважні з такими:

$$\sum\nolimits_{ah}^{(l)} \int_a^b L[\varphi_l(x)]\, \varphi_h(x)\, dx = 0 \qquad (h < l) \tag{47}$$

Зважаючи на самоспряженість задачі (31) — (32), маємо:

$$\int_a^b L[\varphi_l] \varphi_h\, dx = \int_a^b L[\varphi_h] \varphi_l\, dx,$$

і тому рівності (47) можна переписати так:

$$\sum\nolimits_{ah}^{(l)} \int_a^b L[\varphi_h]\, \varphi_l\, dx = 0 \qquad (h < l)$$

Це показує, що для цього випадку умови (44) є повторення умов (43).

Крім того, тоді система рівнянь (45) зводиться на таку:

$$b_i^{(m)} = \int_a^b f(x)\, M[\varphi_i(x)]\, dx,$$

і ми доходимо твердження:

Розв'язку неоднорідної самоспряженої задачі (31) — (32) можна подати у вигляді:

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(x) \int_a^b f(t)\, M[\Psi_i(t)]\, dt$$

Щодо неоднорідної системи (39), то вислідн параграфів 4 та 5 лишаються правдиві, коли числа $\Phi_{hi}(\lambda)$ замінимо такими:

$$\Phi_{hi}(\lambda) = \int_a^b L[\varphi_h(x)]\, M[\varphi_i(x)]\, dx,$$

але обчислення не раз значно спрощуються.

Цілком ясно також, що коли старший коефіцієнт у виразі $L[\ ]$ є не одиниця, а будь-яка функція:

$$\theta(x) > q > 0,$$

то досить у виразі $M[\ ]$ узяти такий самий старший коефіцієнт, щоб усі наші вислідн залишилися правдиві. Ця увага дає змогу замість звичайної ортогоналізації — ортогоналізувати з вагою $\theta(x)$

§ 7

Напишімо розв'язку самоспряженої задачі (31) — (32) у загальному вигляді, виходячи з представлення в формі ряду:

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i\, \psi_i(x),$$

де функції $\psi_i(x)$ є розв'язки задачі (33) — (34), ортогоналізовані рівностями:

$$\int_a^b L[\psi_i] M[\psi_j]\, dx = 0 \qquad (i \neq j)$$

$$\int_a^b L[\psi_i]\, M[\psi_i]\, dx = 1$$

Увівши зазначення:

$$\int_a^b L[\varphi_i]\, M[\varphi_i]\, dx = \varphi_{ij},$$

маємо:

$$\psi_n(x) = \vartheta_n \cdot \begin{vmatrix} \varphi_{00} & \varphi_{01} & \dots & \varphi_{0n} \\ \varphi_{10} & \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{n-1,0} & \varphi_{n-1,1} & \dots & \varphi_{n-1,n} \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \end{vmatrix}$$

Тут ϑ_n визначимо в умови:

$$\int_a^b L[\psi_n]\, M[\psi_n]\, dx = 1,$$

що дає:

$$\int_a^b L[\psi_n]\, \varphi_n\, dx = \frac{1}{\mu_n},$$

і остаточно

$$\vartheta_n \cdot \begin{vmatrix} \varphi_{00} & \varphi_{01} & \ldots & \varphi_{0n} \\ \varphi_{10} & \varphi_{11} & \ldots & \varphi_{n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{n-1,0} & \varphi_{n-1,1} & \ldots & \varphi_{n-1,n} \\ \varphi_{n0} & \varphi_{n1} & \ldots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_n}$$

Отож, увівши зазначення:

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \varphi_{00} & \varphi_{01} & \ldots & \varphi_{0n} \\ \varphi_{10} & \varphi_{11} & \ldots & \varphi_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{n-1,0} & \varphi_{n-1,1} & \ldots & \varphi_{n-1,n} \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x) \end{vmatrix}$$

$$\Delta n = \begin{vmatrix} \varphi_{00} & \varphi_{01} & \ldots & \varphi_{0n} \\ \varphi_{01} & \varphi_{11} & \ldots, & \varphi_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{n0} & \varphi_{n1} & \ldots & \varphi_{nn} \end{vmatrix}$$

маємо:

$$\psi_n(x) = \frac{\Delta n\,(x)}{\mu n\,\Delta n}$$

Так приходимо до висліду:

$$y(x) = \frac{\Delta_0(x)}{\mu_0\Delta_0}\int_a^b f(t)\frac{\Delta_0(t)}{\Delta_0}dt + \frac{\Delta_1(x)}{\mu_1\Delta_1}\int_a^b f(t)\frac{\Delta_1(t)}{\Delta_1}dt + \frac{\Delta_2(x)}{\mu_2\Delta_2}\int_a^b f(t)\frac{\Delta_2(t)}{\Delta_2}dt + \ldots$$

$$y'(x) = \frac{\Delta_0'(x)}{\mu_0\Delta_0}\int_a^b f(t)\frac{\Delta_0(t)}{\Delta_0}dt + \frac{\Delta_1'(x)}{\mu_1\Delta_1}\int_a^b f(t)\frac{\Delta_1(t)}{\Delta_1}dt + \frac{\Delta_2'(x)}{\mu_2\Delta_2}\int_a^b f(t)\frac{\Delta_2(t)}{\Delta_2}dt + \ldots$$

. . . .

$$y^{(k-1)}(x) = \frac{\Delta_0^{(k-1)}(x)}{\mu_0\Delta_0}\int_a^b f(t)\frac{\Delta_0(t)}{\Delta_0}dt + \frac{\Delta_1^{(k-1)}(x)}{\mu_1\Delta_1}\int_a^b f(t)\frac{\Delta_1(t)}{\Delta_1}dt + \frac{\Delta_2^{(k-1)}(x)}{\mu_2\Delta_2}\int_a^b f(t)\frac{\Delta_2(t)}{\Delta_2}dt + \ldots,$$

а також:

$$\lim_{m=\infty}\int_a^b\Big\{M[y] - M\Big[\sum_{i=0}^m \frac{\Delta_i(x)}{\mu_i\Delta_i}\int_a^b f(t)\frac{\Delta_i(t)}{\Delta_i}dt\Big]\Big\}^2 dx = 0$$

$$\lim_{m=\infty}\int_a^b\Big\{\frac{d^ky}{dx^k} - \sum_{i=0}^m \frac{\Delta_i^{(k)}(x)}{\mu_i\Delta_i}\int_a^b f(t)\frac{\Delta_i(t)}{\Delta_i}dt\Big\}^2 dx = 0$$

§ 8

Розгляньмо кілька прикладів.

I. $$L[y] = \frac{d^2y}{dx^2} - xy = 1$$

За умов:

$$y(0)=y(1)=0$$

визначити розв'язку на інтервалі [0, 1]:

Нехай

$$M[y]=\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\Phi_i(x)=x^i$$

Тоді

$$(i=0,\ 1,\ 2,\dots)$$

$$\varphi_i(x)=\frac{x^{i+2}-x}{(i+1)(i+2)}$$

$$(i=0,\ 1,\ 2,\dots)$$

$$L[\varphi_i(x)]=x^i-\frac{x^{i+3}-x^2}{(i+1)(i+2)}$$

Практично тут можна зректися ортогоналізації, бо права сторона нашого рівняння розвивається в добре збіжний ряд із функцій $L[\varphi^i]$:

$$1=L[\varphi_0]+\frac{L[\varphi_3]}{1.2}+\frac{L[\varphi_6]}{1.2.4.5}+\frac{L[\varphi_9]}{1.2.4.5.7.8}+\dots-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5.7.8}+\dots}{1+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{3.4.6.7}+\dots}\left\{L[\varphi_2]+\frac{L[\varphi_5]}{3.4}+\frac{L[\varphi_8]}{3.4.6.7}+\dots\right\}$$

Отже

$$y=\frac{x^2-x}{1.2}+\frac{x^5-x}{1.2.4.5}+\frac{x^8-x}{1.2.4.5.7.8}+\dots-$$

$$-\frac{\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.4.5}+\frac{1}{1.2.4.5.7.8}+\dots}{1+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{3.4.6.7}+\dots}\left\{\frac{x^4-x}{3.4}+\frac{x^7-x}{3.4.6.7}+\frac{x^{10}-x}{3.4.6.7.9.10}+\dots\right\},$$

або остаточно:

$$y=\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^5}{1.2.4.5}+\frac{x^8}{1.2.4.5.7.8}+\dots-$$

$$-\frac{\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.4.5}+\frac{1}{1.2.4.5.7.8}+\dots}{1+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{3.4.6.7}+\dots}\left\{\frac{x^4}{3.4}+\frac{x^7}{3.4.6.7}+\frac{x^{10}}{3.4.6.7.9.10}+\dots\right\},$$

що зрештою можна вивести й через розвинення $y(x)$ у Taylor'ів ряд.

II.

$$L[y]=\frac{d^2y}{dx^2}-(1+2\alpha\cos\pi x)\,y=$$

$$=\alpha_1\sin\pi x+\alpha_2\sin 2\pi x+\alpha_3\sin 3\pi x+\dots=f(x)$$

$$y(0)=y(1)=0$$

Визначити розв'язку на інтервалі [0, 1].

Нехай

$$M[y]=\frac{d^2y}{dx^2};\quad M[\varphi_i]=\mu_i\varphi_i$$

Тоді

$$\mu_i = -i^2\pi^2$$

$$\mu_i(x) = -\frac{\sin \pi i x}{i^2\pi^2}$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$L[\varphi_i(x)] = \left(1 + \frac{1}{i^2\pi^2}\right)\sin \pi i x + \frac{\alpha}{i^2\pi^2}\sin \pi (i-1)x + \frac{\alpha}{i^2\pi^2}\sin \pi (i+1)x$$

Систему функцій $L[\varphi_i]$ дуже незручно було б ортогоналізувати в звичайному розумінні слова. Ми пошукаємо суми

$$\psi_n(x) = p_1^{(n)}\varphi_1(x) + p_2^{(n)}\varphi_2(x) + \ldots + p_n^{(n)}(x)$$

такі, щоб справджувалися умови взагальненої ортогоналізації:

$$\int_0^1 L[\psi_n]\,\varphi_i\,dx = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$p_n^{(n)}\int_0^1 L[\psi_n]\,\varphi_n\,dx = 1$$

Для цього очевидно потрібно і досить, щоб $L[\psi_n]$ мало форму:

$$L[\psi_n(x)] = \beta_n \sin \pi n x + \gamma_n \sin \pi (n+1)x$$

З другого боку

$$L[\psi_n(x)] = p_1^{(n)}L[\varphi_1(x)] + p_2^{(n)}L[\varphi_2(x)] + \ldots + p_n^{(n)}L[\varphi_n(x)],$$

звідки рівності:

$$p_1^{(n)}\left(1 + \frac{1}{\pi^2}\right) + p_2^{(n)}\frac{\alpha}{4\pi^2} = 0$$

$$p_1^{(n)}\frac{\alpha}{\pi^2} + p_2^{(n)}\left(1 + \frac{1}{4\pi^2}\right) + p_3^{(n)}\frac{\alpha}{9\pi^2} = 0$$

$$p_2^{(n)}\frac{\alpha}{4\pi^2} + p_3^{(n)}\left(1 + \frac{1}{9\pi^2}\right) + p_4^{(n)}\frac{\alpha}{16\pi^2} = 0$$

. . . .

$$p_{n-2}^{(n)}\frac{\alpha}{(n-2)^2\pi^2} + p_{n-1}^{(n)}\left(1 + \frac{1}{(n-1)^2\pi^2}\right) + p_n^{(n)}\frac{\alpha}{n^2\pi^2} = 0$$

$$p_{n-1}^{n}\,\frac{\alpha}{(n-1)^2\pi^2} + p_n^{(n)}\left(1 + \frac{1}{n^2\pi^2}\right) + p_{n+1}^{(n)}\frac{\alpha}{(n+1)^2\pi^2} = 0$$

Так дістанемо:

$$p_2^{(n)} = -\frac{4\pi^2}{\alpha}\left(1 + \frac{1}{\pi^2}\right)p_1^{(n)}$$

$$p_3^{(n)} = \left\{\frac{4\pi^2 \,.\, 9\pi^2}{\alpha^2}\left(1 + \frac{1}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{1}{4\pi^2}\right) - 9\right\}p_1^{(n)}$$

$$p^{(n)} = \left\{\frac{4\pi^2 \,.\, 9\pi^2 \,.\, 16\pi^2}{\alpha^3}\left(1 + \frac{1}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{1}{4\pi^2}\right)\left(1 + \frac{1}{9\pi^2}\right) + 9\,\frac{16\pi^2}{\alpha}\left(1 + \frac{1}{9\pi^2}\right)\right\}p_1^{(n)}$$

. . . .

та

$$(p_n^{(n)})^2 = 2n^2\pi^2 \frac{\Delta_{n-1}}{n},$$

де

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{\pi^2}, & \frac{\alpha}{4\pi^2}, & 0, & 0, & \ldots, & 0. & 0 \\ \frac{\alpha}{\pi^2}, & 1+\frac{1}{4\pi^2}, & \frac{\alpha}{9\pi^2} & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{\alpha}{4\pi^2}, & 1+\frac{1}{9\pi^2}, & \frac{\alpha}{16\pi^2}, & \ldots, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & \frac{\alpha}{(n-1)^2\pi^2}, & 1+\frac{1}{n^2\pi^2} \end{vmatrix}$$

Взагалі

$$\phi_n(x) = \frac{n\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \cdot \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{\pi^2}, & \frac{\alpha}{4\pi^2} & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0 \\ \frac{\alpha}{\pi^2}, & 1+\frac{\alpha}{4\pi^2}, & \frac{\alpha}{9\pi^2}, & \ldots, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{\alpha}{4\pi^2}, & 1+\frac{\alpha}{9\pi^2}, \frac{\alpha}{16\pi^2} & \ldots & 0, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, \; 0, & \ldots, & \frac{\alpha}{(n-2)^2\pi^2}, & 1+\frac{1}{(n-1)^2\pi^2}, & \frac{\alpha}{n^2\pi^2} \\ \varphi_0(x), & \varphi_1(x). & \varphi_2(x), \varphi_3(x), & \ldots, & \varphi_{n-2}(x), & \varphi_{n-1}(x), & \varphi_n(x) \end{vmatrix}$$

Тепер маємо:

$$\int_0^1 f(x)\,\psi_n(x)\,dx = -p_1^{(n)}\frac{\alpha_1}{2\pi^2} - p_2^{(n)}\frac{\alpha^2}{2.4\pi^2} - \ldots - p_n^{(n)}\frac{\alpha_n}{2n^2\pi^2}$$

$$y(x) = p_1^{(1)}\frac{\alpha_1}{2\pi^4}\psi_1(x) + \left[p_1^{(2)}\frac{\alpha_1}{2\pi^4} + p_2^{(2)}\frac{\alpha_2}{2.16\pi^4}\right]\psi_2(x) +$$

$$+ \left[p_1^{(3)}\frac{\alpha_1}{2\pi^4} + p_2^{(3)}\frac{\alpha_2}{2.16\pi^4} + p_3^{(3)}\frac{\alpha_3}{2.81\pi^4}\right]\psi_3(x) + \ldots$$

III. Ортогоналізація, взагалі кажучи, затрудняє практично. Ось як її можна уникнути в багатьох випадках.

Визначити $y(x)$ за умов:

$$L[y] = \frac{d^2y}{dx^2} + 2\theta(x)\,y = f(x)$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

Без істотного порушення загальності можемо покласти:

$$f(x) = \alpha_1 \sin \pi x + \alpha_2 \sin 2\pi x + \alpha_3 \sin 3\pi x + \ldots$$

$$\theta(x) = \beta_0 + \beta_1 \cos \pi x + \beta_2 \cos 2\pi x + \beta_3 \cos 3\pi x + \ldots$$

та шукати $y(x)$ у формі ряду:

$$y(x) = y_1 \sin \pi x + y_2 \sin 2\pi x + y_3 \sin 3\pi x + \ldots$$

через ступневі наближення. Справді бо, існує на інтервалі [0, 1] така точка ξ_{n-1}, де для двох наближень $y_{n-1}(x)$ та $y_n(x)$ нашої функції $y(x)$, які справджують подані граничні умови, буде:

$$y'_n(\xi_{n-1}) - y'_{n-1}(\xi_{n-1}) = 0$$

Тоді згідно з ідеєю ступневих наближень, визначмо $y_n(x)$ так:

$$y'_{n+1}(x) = \int^{x} 2\theta(x)\, y_n(x)\, dx + \int^{x} f(x)\, dx$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Звідси:

$$y'_{n+1}(x) - y_n(x) = \int_{\xi_n}^{x} 2\theta(x)\, [y_n(x) - y_{n-1}(x)]\, dx$$

$$y_{n+1}(x) - y_n(x) = \int_0^{x}\int_{\xi_n}^{x} 2\theta(x)\, [y_n(x) - y_{n-1}(x)]\, dx - \int_1^{x}\int_{\xi_n}^{x} 2\theta(x)\, [y_n(x) - y_{n-1}(x)]\, dx,$$

що дає:

$$|\, y_{n+1}(x) - y_n(x) \,| \leqslant \max |\, 2\theta(x) \,| \max |\, y_n(x) - y_{n-1}(x) \,| \;.\; \frac{|(x-\xi)^2 - \xi^2|}{2}$$

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)\,| \leqslant \max |\, 2\theta(x) \,| \max y_n(x) - y_{n-1}(x) \,| \;.\; \frac{|(x-\xi)^2 - (1-\xi)^2|}{2}$$

А що

$$|\, (x-\xi)^2 - \xi^2 \,| = |\, (2\xi - x)\, x \leqslant \xi^2$$

$$|\, (x-\xi)^2 - (1-\xi)^2 \,| = |\, \{2(1-\xi) - (1-x)\}\, (1-x) \,| \leqslant (1-\xi)^2,$$

то раз-у-раз буде:

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)\,| \leqslant \frac{\max |\, \theta(x) \,|}{4} \max |\, y_n(x) - y_{n-1}(x)|$$

Коли

$$\max |\, \theta(x) \,| < 4,$$

то поданий процес ступневих наближень є збіжний. Нехай ця нерівність справджується. Візьмімо перше наближення таке:

$$y_1(x) = 0$$

Тоді, йдучи за пропонованою схемою, маємо:

$$y''_2 = \alpha_1 \sin \pi x + \alpha_2 \sin 3\pi x + \alpha_3 \sin 3\pi x + \ldots$$

$$y_2 = -\alpha_1 \frac{\sin \pi x}{\pi^2} - \alpha_2 \frac{\sin 2\pi x}{4\pi^2} - \alpha_3 \frac{\sin 3\pi x}{9\pi^2} - \ldots$$

далі

$$y''_3 = f(x) + 2\theta(x)\, y_2(x) = \alpha'_1 \sin \pi x + \alpha'_2 \sin 3\pi x + \alpha'_3 \sin 3\pi x + \ldots,$$

де коефіцієнти α'_i визначаються безпосереднім перемноженням та додаванням рядів. Тоді

$$y_3 = -\frac{\alpha'_1}{\pi^2} \sin \pi x - \frac{\alpha'_2}{4\pi^2} \sin 2\pi x - \frac{\alpha'_3}{3\pi_2} \sin 3\pi x - \ldots$$

д.

Нехай, як у попередньому прикладі,

$$\theta(x) = \frac{1}{2} + \alpha \cos \pi x,$$

при чому $|\alpha| < 3\frac{1}{2}$. Тоді

$$y_3'' = (a_1 \sin \pi x + a_2 \sin 2\pi x + a_3 \sin 3\pi x + \ldots) +$$
$$+ (1 + 2\alpha \cos \pi x) \left(-a_1 \frac{\sin \pi x}{\pi^2} - a_2 \frac{\sin 2\pi x}{4\pi^2} - \ldots\right) =$$
$$= \left[a_1\left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right) - \frac{\alpha a_2}{4\pi^2}\right] \sin \pi x + \left[a_2\left(1 - \frac{1}{4\pi^2}\right) - \frac{\alpha a_1}{\pi^2} - \frac{\alpha a_3}{9\pi^2}\right] \sin 2\pi x + \ldots +$$
$$+ \left[a_n\left(1 - \frac{1}{n^2\pi^2}\right) - \frac{\alpha a_{n-1}}{(n-1)^2\pi^2} - \frac{\alpha a_{n+1}}{(n+1)^2\pi^2}\right] \sin n\pi x + \ldots$$
$$y_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha a_{n-1}}{(n-1)^2 n^2 \pi^4} + \frac{\alpha a_{n+1}}{n^2 (n+1)^2 \pi^4} = \frac{a_n}{n^4\pi^4} - \frac{a_n}{n^2\pi^2} \right\} \sin n\pi x$$

Так само вирахуємо y_4, і т. д.

IV. $$L[y] = \frac{d^2y}{dx^2} - 4\lambda (1 + \alpha \cos 2\pi x) y = f(x),$$
$$y(0) = y(1) = 0,$$

де $|\alpha|$ мала величина.

Можна шукати розвинення функції $y(x)$ за функціями:

$$\sin \pi x, \ \sin 2\pi x, \ \sin 3\pi x, \ldots$$

або за функціями $\varphi_i(x)$, що постають із цих через узагальнену ортогоналізацію типу:

$$\int_0^1 L[\varphi_n(x)] \sin l\pi x \, dx = 0$$
$$(l = 1, 2, \ldots, n-1)$$
$$\int_0^1 L[\varphi_n(x)] \sin n\pi x \, dx = 1,$$

Це очевидно дає й рівності:

$$\int_0^1 L[\varphi_n(x)] \varphi_m(x) \, dx = \begin{cases} 0 \ (m \neq n) \\ a_n^{(n)} \ (m = n) \end{cases}$$

Коли зазначимо:

$$\varphi_n(x) = a_n^{(1)} \sin \pi x + a_n^{(2)} \sin 2\pi x + \ldots + a_n^{(n)} \sin n\pi x,$$

то умови ортогональності дадуть:

$$\sum_{k=1}^{n} a_n^{(k)} \int_0^1 L[\sin k\pi x] \sin l\pi x \, dx = 0$$
$$(l = 1, 2, \ldots, n-1)$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_n^{(k)} \int_0^1 L[\sin k\pi x] \sin n\pi x \, dx = 1$$

Обчислімо

$$\int_0^1 L[\sin k\pi x] \sin l\pi x \, dx = \int_0^1 \left\{4\lambda (1 + \alpha \cos 2\pi x) - k^2\pi^2\right\} \sin k\pi x \sin l\pi x \, dx =$$
$$= \int_0^1 \left(2\lambda - \frac{k^2\pi^2}{2} + 2\lambda\alpha \cos 2\pi x\right) [\cos (k-l)\pi x - \cos (k+l)\pi x] \, dx =$$
$$= \int_0^1 \left\{ \left(\lambda - \frac{k^2\pi^2}{4}\right) \Big[\cos (k-l)\pi x - \cos (k+l)\pi x\Big] + \lambda\alpha \Big[\cos (k-l-2)\pi x + \right.$$
$$\left. + \cos (k-l+2)\pi x - \cos (k+l-2)\pi x - \cos (k+l+2)\pi x \Big] \right\} dx =$$

$$=\left(2\lambda-\frac{k^2\pi^2}{2}\right)\left[\frac{\sin(k-l)\pi}{(k-l)\pi}=\frac{\sin(k+l)\pi}{(k+l)\pi}\right]+\lambda\alpha\left[\frac{\sin(k-l-2)\pi}{(k-l-2)\pi}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin(k-l+2)\pi}{(k-l+2)\pi}-\frac{\sin(k+l-2)\pi}{(k+l-2)\pi}-\frac{\sin(k+l+2)\pi}{(k+l+2)\pi}\right]$$

Отож бачимо, що

$$\int_0^1 L[\sin k\pi x]\sin l\pi x\,dx=\begin{cases}0 & (k-l\neq 0,2,-2)\\ 2\lambda-\dfrac{k^2\pi_2}{2} & (k=l,\ k+l\neq 2)\\ 2\lambda-\dfrac{\pi^2}{2}-\lambda\alpha & (k=l-1)\\ -\lambda\alpha & (k=l\pm 2)\end{cases}$$

к доходимо остаточних умов ортогональності:

$$\alpha_n^{(1)}\left(2\lambda-\frac{\pi^2}{2}-\lambda\alpha\right)-\alpha_n^{(3)}\lambda\alpha=0$$

$$\alpha_n^{(2)}\left(2\lambda-\frac{4\pi^2}{2}\right)-\alpha_n^{(4)}\lambda\alpha=0$$

$$-\alpha_n^{(1)}\lambda\alpha+\alpha_n^{(3)}\left(2\lambda-\frac{9\pi^2}{2}\right)-\alpha_n^{(5)}\lambda\alpha=0$$

$$-\alpha_n^{(2)}\lambda\alpha+\alpha_n^{(4)}\left(2\lambda-\frac{16\pi^2}{2}\right)-\alpha_n^{(6)}\lambda\alpha=0$$

. . . .

$$-\alpha_n^{(k-2)}\lambda\alpha+\alpha_n^{(k)}\left(2\lambda-\frac{k^2\pi^2}{2}\right)-\alpha_n^{(k-2)}\lambda\alpha=0$$

. . . .

$$-\alpha_n^{(n-3)}\lambda\alpha=\alpha^{(n-1)}\left(2\lambda-\frac{(n-1)^2\pi^2}{2}\right)=0$$

$$-\alpha_n^{(n-2)}\lambda\alpha+\alpha_n^{(n)}\left(2\lambda-\frac{n^2\pi^2}{2}\right)=1$$

Візьмімо для прикладу за n число парне. Тоді взагалі:

$$\alpha_n{}^{(2k-n)}=\alpha_n^{(2k)}\left(\frac{2}{\alpha}-\frac{2\pi^2k^2}{\lambda\alpha}\right)-\alpha_n^{(2k-2)}$$
$$(k=2,3,4,\ldots)$$
$$\alpha_n^{(4)}=\alpha_n^{(2)}\left(\frac{2}{\alpha}-\frac{2\pi^2}{\lambda\alpha}\right)$$

$$\alpha_n^{(n-2)}=\alpha_n^{(n)}\left(\frac{2}{\alpha}-\frac{n^2\pi^2}{2\lambda\alpha}\right)-\frac{1}{\lambda\alpha}$$
$$(k=0,1,2,3,\ldots)$$
$$\alpha_n^{(2k+1)}=0$$

аки, для n непарного буде:

$$\alpha_n^{(2k+1)}=\alpha_n^{(2k-1)}\left(\frac{2}{\alpha}-\frac{\pi^2(2k+1)^2}{2\lambda\alpha}\right)-\alpha_n^{(2k-3)}$$
$$(k=2,3,4,\ldots)$$

$$\alpha_n^{(3)} = \alpha_n^{(1)}\left(\frac{2}{\alpha}-\frac{\pi^2}{2\lambda\alpha}-1\right)$$

$$\alpha_n^{(n-2)} = \alpha_n^{(n)}\left(\frac{2}{\alpha}-\frac{n^2\pi^2}{2\lambda\alpha}\right)-\frac{1}{\lambda\alpha}$$

та

$$\alpha_n^{(2k)} = 0$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots$$

Отже для $n \equiv 0 \pmod 2$ буде:

$$\varphi_n(x) = \frac{\begin{vmatrix} \alpha-\frac{2\pi^2}{\lambda\alpha}, & -1, & 0, & 0, \ldots & 0, & 0, & 0 \\ -1, & \frac{2}{\alpha}-\frac{8\pi^2}{\lambda\alpha}, & -1, & 0, \ldots, & 0 & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & 0, \ldots, & -1, & \frac{2}{\alpha}-\frac{(n-2)^2\pi^2}{2\lambda\alpha}, & -1 \\ \sin 2\pi x, & \sin 4\pi x, & \sin 6\pi x, & \sin 8\pi x, \ldots, & \sin(n-4)\pi x, & \sin(n-2)\pi x & \sin n\pi x \end{vmatrix}}{\lambda\alpha.\begin{vmatrix} \frac{2}{\alpha}-\frac{2\pi^2}{\lambda\alpha}, & -1, & 0, & 0, & \ldots, 0, & 0, & 0 \\ -1, & \frac{2}{\alpha}-\frac{8\pi^2}{\lambda\alpha}, & -1, & 0, & \ldots, 0, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & \frac{2}{\alpha}-\frac{18\pi^2}{\lambda\alpha}, & -1, & \ldots, 0, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, 0, & -1, & \frac{2}{\alpha}-\frac{n^2\pi^2}{2\lambda\alpha} \end{vmatrix}}.$$

а для $n \equiv 1 \pmod 2$ буде:

$$\varphi_n(x) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{2}{\alpha}-\frac{\pi^2}{2\lambda\alpha}-1, & -1, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0 \\ -1, & \frac{2}{\alpha}-\frac{9\pi^2}{2\lambda\alpha}, & -1, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & , & 0, & 0, & \ldots, & -1, & \frac{2}{\alpha}-\frac{(n-2)^2\pi^2}{2\lambda\alpha}, & -1 \\ \sin \pi x, & \sin 3\pi x, & \sin 5\pi x, & \sin 7\pi x, & \ldots, & \sin(n-4)\pi x, & \sin(n-2)\pi x, & \sin n\pi x \end{vmatrix}}{\lambda\alpha.\begin{vmatrix} \frac{2}{\alpha}-\frac{\pi^2}{2\lambda\alpha}-1, & -1, & 0, & 0, & \ldots, & 0 & 0, & 0 \\ -1, & \frac{2}{\alpha}-\frac{9\pi^2}{2\lambda\alpha}, & -1, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & \frac{2}{\alpha}-\frac{25\pi^2}{\lambda\alpha}, & -1, & \ldots, & 0, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & -1, & \frac{2}{\alpha}-\frac{n^2\pi^2}{2\lambda\alpha} \end{vmatrix}}$$

Остаточно маємо:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \int_0^1 f(t) \sin n\pi t\, dt$$

обмежитися двома першими членами, то матимемо:

$$\approx \frac{\sin \pi x}{2\lambda - \frac{\pi^2}{2}} \int_0^1 f(t) \sin \pi t\, dt + \frac{\sin 2\pi x}{2\lambda - 2\pi^2} \int_0^1 f(t) \sin 2\pi t\, dt$$

Це наближення визначимо, як суму перших чотирьох членів цього ряду. І т. д.

ЛІТЕРАТУРА [1]

Галеркин Б. Г., Стержни и пластины. Вестник инженеров, № 19, 1915.

Гроссман Е. П., Вибрации хвостового оперения самолетов. Труди ЦАГИ, в. 186, 19...

Динник А. Н., О методе Галеркина для определения критических сил и частот колеба-ний. Техника воздушного флота, № 5, 1935.

Krawtchouk M., Sur la méthode de N. Kryloff pour l'intégration approchée des équat... de la physique mathématique. Comptes Rendus. Paris, T. 183, 1926.

Кравчук М., Про спосіб М. Крилова в теорії наближеної інтеграції диференціальн... рівнань. Труди Фізично-математичного відділу УАН. Т. V, в. 2, 1926.

Кравчук М., Note sur une méthode de N. Kryloff pour l'intégration des équations di-rentielles de la physique mathématique. Записки Фізично-математичного відділу УАН. т. 2. 1927.

Кравчук М., Про похідні від наближених інтегралів деяких диференціальних рівн... Вісті Київського Політехнічного Інституту, 1928.

Кравчук М., Про спосіб найменших квадратів та про спосіб моментів у теорії на-ближеної інтеграції диференціальних рівнань. Вісті К. П. І, кн. І, 1928.

Krawtchouk M., Sur la convergence de quelques procédés de l'intégration appro... des équations différentielles. Comptes Rendus, Paris, t. 187, 1928.

Krawtchouk M., Sur l'intégration approchée des équations différentielles linéaires. At... del Congresso Internazionale dei Matematici, VI, Bologna, 1928.

Кравчук М., Про наближене розв'язання лінійних диференціальных рівнань. Записки Харківського математичного товариства. Сер. 4. Т. III 1929.

Krawtchouk M., Sur la méthode de W. Ritz pour l'intégration approchée des équations différentielles. Buenos Aires, Boletin Matematico, 1929.

Кравчук М., Про застосування способу моментів до наближеного розв'язання інте-ральних та диференціальних рівнань. Вісті К. П. І, кн. 2, 1929.

Krawtchouk M., Sur la résolution des systèmes des équations intégrales linéaires — Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlich-ärztlichen Sektion der Ukrainischen Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften in Lemberg. 1929.

Krawtchouk M., Sur la résolution approchée des équations intégrales linéaires. Comptes Rendus, Paris, t. 188, 1929.

Krawtchouk M., Sur la résolution approchée des équations différentielles linéaires, Comptes Rendus, t. 189, 1929.

Krawtchouk M., Sur la recherche des nombres caractéristiques et des fonctions fonda-mentales. Comptes Rendus, Paris, t. 189, p. 519, 1929.

Krawtchouk M., Sur les dérivées des intégrales approchées de certaines équations dif-férentielles — Rendiconti del Circolo Matematici di Palermo. T. LIV. 1929.

Кравчук М., Про розв'язання систем лінійних диференціальних рівнань. Вісті К. П. І. Т. XXII, в. 1, 1930.

Кравчук М., Кілька висновків із Ressel-евої та Hadamard-ової нерівностей. Записки Фізично-математичного Відділу ВУАН, Т. IV, в. 5, Київ 1930.

---

[1]) Цей список не претендує на повноту. Він обіймає літературу не тільки із способ... моментів, але й з Ritz-ового способу, способів акад. Н. Крилова та споріднених. Скла... за нього подяку К. Я. Латишевій. *М. К.*

Кравчук М., Про наближене розв'язування лінійних задач математичної фізики. Записки фізично-мат. відділу УАН. Т. IV, в. 4, 1930.

Кравчук М., Про наближення інтегралів рівнань із частинними похідними еліптичного типу. Записки Фізично-математичного відділу ВУАН. Т. V, 1931.

Кравчук М., Про існування та наближене визначення розв'язок деяких лінійних рівнань із частинними похідними. (Повідомлення I та Повідомлення II). Записки Фізично-математичного відділу ВУАН, т. V, Київ 1931.

Кравчук і Можар., Диференціальне рівнання та їх застосування. Київ 1934.

Акад. М. Кравчук, Про розвинення в ряди розв'язок лінійних диференціальних рівнань Журнал Мат. Циклу ВУАН, № 1, 1932.

Акад. М. Кравчук., Нові результати в способі моментів. Журнал Математичного Циклу ВУАН, т. I, в. I. Київ 1933, с. 3—20.

Акад. М. П. Кравчук., Про задачу моментів. Журнал Мат. Циклу ВУАН, т. I, в. I, с. 21—39. Київ 1933.

Krawtchouk M., Sur l'approximation des intégrales des équations différentielles linéaires. Записки Харківського Математичного Товариства. Сер. 4. Т. VI, 1933.

Акад. М. Кравчук, Про точність наближення способом моментів розв'язок лінійних диференціальних рівнань. Журнал Інституту Математики № 2, Київ, с. 23, 1934.

Акад. М. Кравчук, Про одно узагальнення способу моментів у задачі наближеної інтеграції звичайних лінійних диференціальних рівнань. Журнал Інституту Математики УАН. № 3—4. с. 77—98, 1934.

Кравчук М. й Латишева К., Застосування способу моментів до розв'язування лінійних диференціальних рівнань, що мають особливості в коефіцієнтах. Журнал Інституту Математики, № 4, 1935.

Крылов Н. М., О вариационных методах Ritz'a и Boussinesq'a. Зап. Горн. Инстит. Пгр. 1915, т. VI.

Крылов Н. М., Sur l'application de la méthode de W. Ritz au problème des oscillations contraintes. Сообщ. Харьк. Мат. Общ. сер. 2, Т. XIV, 1915.

Крылов Н. М., Sur un procédé de M. Boussinesq. C. R. de l'Acad. des Sc. de Paris. T. 161, 1915.

Крылов Н. М., Application of the method of W. Ritz to a system of differential equations. И. Р. А. Н., Т. XI, с. 521, 1917.

Крылов Н. М. Sur les généralisations de la méthode de Walter Ritz. C. R. de l'Acad. des Sc. de Paris, T. 164, 1917.

Krylov N. et J. Tamarkin, Sur la méthode de W. Ritz pour la solution approchée des problèmes de la physique mathématique. И. Р. А. Н. Т. XII, с. 69, 1918.

Крылов Н. М., Application of the method of infinite determinants to some boundary problems in one dimension. Зап. Мат. Каб. Крымск. (б. Тавр.) Универс., Т. II, 1921.

Крылов Н. М., Sur l'estimation de l'erreur commise dans l'application de la méthode de W. Ritz pour l'intégration approchée des équations différentielles. C. R. de l'Acad. des Sc. de Paris, T. 180, 1925.

Крылов Н. М., Sur une méthode, basée sur le principe du minimum, pour l'intégration approchée des équations différentielles. C. R. de l'Acad. des Sc. de Paris. T. 181, 1925.

Крилов Н. М., Про поширення методу найменших квадратів на наближену інтеграцію системи диференціальних рівнань. УАН, Записки Фізичнo-мат. відділу, т. I, вип. 3, 1925.

Крилов Н. М., Про визначення ступеня похибки при застосуванні способу W. Ritz-а до систем диференціальних рівнань математичної фізики. Укр. Акад. Наук, Записки Фізично-мат. відділу, т. I, вип. 4, 1925.

Крилов Н. М., Про один спосіб наближеної інтеграції диференціальних рівнань, оснований на принципі minimum'у. Укр. Ак. Н., Записки Фізично-мат. відділу, т. I, вип. 3, 1925.

Крилов Н. М., Про визначения похибки, при застосуванні способу Ritz-а для наближеної інтеграції диференціальних рівнань. Укр. Ак. Наук, Зап. Фіз-мат. відд., т. I, вип. 3, 1925.

Крылов Н. М., Sur différents procédés d'intégration approchée en physique mathématique. Chap. 1-er. Sur l'intégration approchée des équations différentielles et intégro-différentielles — Ann. de la Fac. des Sc. de l'Univ. de Toulouse, III ser. T. XVII, 1925.

Крылов Н. М., Sur une méthode d'intégration approchée contenant comme cas particuliers la méthode de W. Ritz, ainsi que celles des moindres carrés. C. R. de l'Acad. des Sc. de Paris. T. 182, 1926.

Kryloff N. et N. Bogolioùboff, Sur la justification du principe de Rayleigh par l'ordre de l'erreur commise à la n-me approximation. C. R. de l'Acad. des Sc. de Paris, T. 183, 1926

Крылов Н. М., On the approximate solution of the integrodifferential equations of Mathematical Physics. Ann. of Math. vol. 27, № 1, 1926.

М. Крилов і М. Боголюбов, Про Rayleigh-ів принцип в теорії диференціальних рівнянь математичної фізики та про одну Ейлерову методу в варіяційнім численні. Укр. Акад. Наук, Труды Фіз.-мат. відділу, т. III, вип., 3, 1926.

Крилов М., Спосіб нескінченних визначників у теорії лінійних інтегральних рівнань. Збірник математично-природописно-лікарської секції Наукового Товариства імени Шевченка, т. XXV, 1926.

Крилов М. М., Про наближене розв'язування лінійних інтегральних рівнань. Труди Фіз.-мат. відділу, т. III, вип. 6, УАН, Київ 1926.

Крылов Н. М., Approximate solutions of a system of differential equations of mathematical physics by least squares. Bull. of the Amer. Math. Soc., vol. 32, N 4, 1926.

Крилов М., Про ріжні узагальнення Ritz-ового методу та методу найменших квадратів для наближеного інтегрування рівнань математичної фізики. Укр. Акад. Н., Труди Фіз.-мат. відділу, т III, вип. 2, 1926.

Крылов Н., Sopra il metodo delle minime potenze per l'integrazione approssimata delle equazioni della Fisica Matematica. Rendiconto dell'Accad. delle Sc. Fis. Mat. Napoli. ser. III, vol. 32, 1926.

Крылов Н. М.. Sur l'intégration approchée de quelques équations aux dérivées partielles de la Physique Mathématique. C. R. de l'Acad. des Sc. de Paris, t. 184, 1927.

Kryloff N., Sobre alguns novos metodos da integracao aproximada des equasoes diferencialis da Fisica Matematica. Exposicao sucinta da Conferencia de introducao dum curso realisado a convite da Faculdade de Sciencias da Universidade de Coimbra. O Instituto, 1927.

Kryloff N., Sur différents procédés d'intégration approchée en Physique mathématique. Chap. II — Sur la solution approchée des équations intégrales linéaires. Annales de la Faculté des Sc. de l'Univ. de Toulouse, 1927.

Kryloff N., Sur l'intégration dans certains cas des équations différentielles non linéaires de la Physique Mathématique. Extrait d'ume lettre adressée à Prof. Dr. T. Hayashi. — The Tohoku Math. Journal. vol. 28, № 1 — 2. 1927.

Kryloff N., Sopra un nuovo metodo per l'integrazione approssimata delle equazioni differenziali della Fisica Matematica. (Sunto di una conferenza, tenuta all'Istituto Matematico della Università di Bologna). Estratto dal Bolletino dell'Unione. Mat. Italiana. 1927.

Kryloff N. and N. Bogoliùboff, On Rayleigh's principle in the theory of differential equations of Mathematical Physics and on Euler's method in Calculus of variations. Ann. Math. II ser., vol 29, 1928.

Kryloff N., Sur la méthode des réduites pour la solution approchée des problèmes de la Physique Mathématique. C. R. de l'Acad. des Sc. de Paris. t. 187. 1928.

Крилов М. М., Про методи найменших степенів та варіяційного алгоритма для наближеного розв'язування проблем математичної фізики. Записки Фізично-математичного відділу ВУАН, Київ, т. III, в. 2, 1928.

Kryloff N., Sur l'algorithme variationnel et le problème fondamental de la Physique Mathématique. Comptes Rendus, Paris, T. 186, 1928.

Крылов М., Sur les méthodes des moindres degrés et de l'algorithme variationnel pour la solution approchée des problèmes de la Physique Mathématique. Записки Фіз.-мат. відділу Укр. Акад. Наук, 1928.

Kryloff N. et Bogoliùboff N., Sur le calcul des racines de la transcendante de Fredholm les plus voisines d'un nombre donné par les méthodes des moindres carrés et de l'algorithme variationnel. Bulletin de l'Acad. des Sc. de l'U. R. S S., 1929.

Kryloff N., Sur le calcul approché des solutions périodiques des systèmes différentiels Журнал прикл. фізики, Москва, 1929.

Kryloff N., Sur la résolution approchée des équations différentielles linéaires. Bulletin de l'Acad. des Sc. de l'URSS. 1930.

Kryloff N., Sur quelques travaux récents de la Chaire de la Physique Mathématique de l'Académie des Sc. d'Ukraine. Bulletin de la Classe des Sc. de l'Acad. de l'Ukraine, 1930.

Kryloff N. et Bogoliûboff N., Application de la méthode de l'algorithme variationnel à la solution approchée des équations différentielles aux derivées partielles du type elliptique. Bulletin de l'Académie des Sc. de l'URSS, 1930.

Kryloff N., Sur la solution approchée des problèmes de la Physique Mathématique et de la Science d'Ingénieur. — Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS, 1930.

Kryloff et Bogoliûboff, Sur quelques théorèmes se rapportant à l'existence des intégrales des équations différentielles aux dérivées partielles du type hyperbolique. Bulletin de l'Académie des Sc. de l'URSS, 1931.

Крилов М., Методи наближеного і символічного розв'язання диференціальних рівнань математичної фізики й техніки. 162 стор. ДВОУ, Держтехвидав, 1931.

Kryloff N., Sur la solution approchée des problèmes de la Physique mathématique et de la Science d'Ingénieur — Revista Matematica Hispano-Americana, 1931.

Kryloff N., Sur quelques recherches récentes dans le domaine de la solution approchée des problèmes de la Physique mathématique. Atti del Congresso Internazionale dei Matematici Bologna, 1931.

Kryloff N. et Bogoliûboff N., Sur un problème de l'électrostatique. Travaux de l'Institut Energétique (Kharkov) 1931.

Kryloff N., Les méthodes de solution approchée des problèmes de la Physique Mathématique. № 49 de la Coll. „Mémorial des Sciences Mathématiques" Paris, G. Villars, 1931.

Крылов Н., Основні проблеми математичної фізики й техніки. ДВОУ, 1932.

Можар В., Застосування способу моментів до наближеного розв'язання лінійних диференціальних рівнань з частинними похідними параболічного типу. Журнал Інституту математики, УАН, № 1, 1935.

Можар В., Про наближене визначення розв'язків лінійних рівнань з частинними похідними параболічного типу способом моментів. Журнал Інституту математики, № 2 (Укр. Акад. Наук) Київ 1935.

Ритц. Е., Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. Journal für reine u. angew. Mathem. Bd. 135, 1909.

Смогоржевский О. О., Про узагальнену лінійну диференціальну задачу. Журнал Інституту математики, № 3—4, 1934.

Тополянський Д. Б., До питання про дослідження параметра диференціального рівнання турбулентної теорії. Журнал Інституту математики ВУАН, № 1, Київ 1934.

Тополянський Д. Б., Дослідження параметра диференціального рівнання турбулентної теорії. Журнал Інституту математики, № 2, Київ, с. 121—124, 1935.

Штаерман И., О точном расчете цепных мостов с балкой жесткости, Сборник изданий Научно-исследовательской кафедрой инженерно-строительных наук, Киев 1928.

Штаерман И., Устойчивость арок, Труды Киевского авиационного института, № 3, 1934.

Штаерман И., Обобщение формул ортогонализирования. Вісті КІП, 1929.

Steuermann I., The stiffness of suspension bridges. Proceedings of the American Society of Civil Engineers, December, 1928.

Штаерман І., Стійкість арок. Наукові записки КДУ, Математичний збірник № 1, 1935.

RÉSUME DE LA II PARTIE

(Équations aux dérivées partielles et quelques généralisations)

§ 1. La fonction de Green du problème linéaire de second ordre du type elliptique aux conditions limites homogènes.

Soit $g(x, y; \xi, \eta)$ la fonction de Green du problème:

$$\Delta_{xy} z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F(x, y) \tag{1}$$

$$U[z] = \alpha(s)\, z/s + \beta(s) \frac{dz}{dn}\Big/_s = 0 \tag{2}$$

où la fonction cherchée z est déterminée dans le domaine S, limité par le contour s, z/s étant la valeur donnée de cette fonction dans les points du contour et $\frac{dz}{dn}\Big/_s$ la valeur de sa derivée prise suivant la normale intérieure du contour. Supposons F et ses dérivées continues.
Alors

$$\Delta_{xy} g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 \tag{3}$$

partout dans le domaine S et

$$U[g] = \alpha(s)\, g/s + \beta(s) \frac{dg}{dn}\Big/_s = 0 \tag{4}$$

partout dans le contour s, à l'exception, — dans les deux cas, — du point

$$x = \xi, \; y = \eta$$

où la fonction $(x, y; \xi, \eta)$ devient infinie, comme

$$\lg \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2};$$

de plus

$$z(x, y) = \iint_{(S)} g(x, y; \xi, \eta)\, F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{5}$$

En conséquence, le problème plus général du type elliptique:

$$M_{xy}[z] = \Delta_{xy} z + B_1(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + B_2(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + B_3(x, y)\, z = F(x, y)$$

$$U[z] = 0 \tag{6}$$

a une solution unique dans le cas où une telle solution a le système d'équations suivant:

$$
\begin{aligned}
&z+\iint_{(S)} g(x,y;\ \xi,\eta)\, V_{\xi\eta}[z]\, d\xi\, d\eta = \iint_{(S)} g(x,y;\ \xi,\eta)\, F(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \\
&\frac{\partial z}{\partial x}+\iint_{(S)} \frac{\partial g(x,y;\ \xi,\eta)}{\partial x}\, V_{\xi\eta}[z]\, d\xi\, d\eta = \iint_{(S)} \frac{\partial g(x,y;\ \xi,\eta)}{\partial x}\, F(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \qquad (7) \\
&\frac{\partial z}{\partial y}+\iint_{(S)} \frac{\partial g(x,y;\ \xi,\eta)}{\partial y}\, V_{\xi\eta}[z]\, d\xi\, d\eta = \iint_{(S)} \frac{\partial g(x,y;\ \xi,\eta)}{\partial y}\, F(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta
\end{aligned}
$$

$$\left(V_{xy}[z] = B_1(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + B_2(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} + B_3(x,y)\, z\right)$$

et vice versa. Si la solution $u(x,y)$ de l'équation intégrale

$$u(x,y)+\iint_{(S)} V_{\xi\eta}[g]\, u(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = \iint_{(S)} V[g]\, F(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \qquad (8)$$

existe et si elle est unique, la solution du système (7) a la forme:

$$
\begin{aligned}
z &= -\iint_{(S)} g u(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + \iint_{(S)} g F(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \\
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\iint_{(S)} \frac{\partial g}{\partial x} u(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + \iint_{(S)} \frac{\partial g}{\partial x} F(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \qquad (9) \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\iint_{(S)} \frac{\partial g}{\partial y} u(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + \iint_{(S)} \frac{\partial g}{\partial y} F(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta
\end{aligned}
$$

et la fonction de Green G du problème (6) est:

$$G(x,y;\ \xi,\eta) = g(x,y;\ \xi,\eta) - \iint_{(S)} g(x,y;\ p,q)\, H_1(\xi,\eta;\ p,q)\, dp\, dq$$

où

$$H_1(x,y;\ \xi,\eta) = \iint_{(S)} H(x,y;\ p,q)\, V_{pq}[g]\, dp\, dq$$

et $H(x, y;\ \xi,\eta)$ est le noyau résolvant de l'équation (8).

Le problème (3) — (4) et le problème (7) sont équivalents.

La fonction de Green $G(x,y;\ \xi,\eta)$ satisfait aux égalités:

$$M[G]=0$$

partout dans le domaine S, et

$$U[G]=0$$

partout sur le contour s, à l'exception du point

$$x=\xi,\ y=\eta$$

où G a une infinité du même type que la fonction g.

Ensuite nous avons pour la solution z du problème (6):

$$z(x,y) = \iint_{(S)} GF(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

Prenons maintenant le problème suivant, plus général que le problème (6):

$$\Delta_{xy}[z] + \lambda V_{xy}[z] = F(x, y)$$
$$U[z] = 0 \tag{6'}$$

Il est évident qu'il a une solution unique pour toutes les valeurs du paramètre λ à l'exception peut-être du nombre dénombrable des valeurs discrètes (nombres caractéristiques).

§ 2. Cas général

Supposons que l'équation du type elliptique:

$$\begin{aligned} M_{xy}[z] = {} & B_{k,0}(x, y) \frac{\partial^k z}{\partial x^k} + B_{k-1,1}(x, y) \frac{\partial^k z}{\partial x^{k-1} \partial y} + \ldots + B_{0,k} \frac{\partial^k z}{\partial y^k} + \\ & + B_{k-1,0}(x, y) \frac{\partial^{k-1} z}{\partial x^{k-1}} + B_{k-2,1}(x, y) \frac{\partial^k z}{\partial x^{k-2} \partial y} + \ldots + B_{0,k-1} \frac{\partial^{k-1} z}{\partial y^{k-1}} + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + B_{10}(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + B_{10}(x. y) \frac{dz}{dy} + \\ & + B_{00}(x, y) z = F(x, y) \end{aligned} \tag{10}$$

dans le domaine S, aux conditions linéaires homogènes sur le contour s:

$$U_l[z] = 0$$
$$(l = 0, 1, \ldots) \tag{11}$$

où figurent les dérivées de la fonction z d'ordre inférieur à k, possède une solution déterminée. Alors il existe la fonction de Green $g(x, y; \xi, \eta)$ du problème (10)—(11), qui satisfait aux équations:

$$M_{xy}[g] = 0$$

partout dans le domaine S et

$$U_l[g] = 0$$

partout sur le contour s, à l'exception du point

$$x = \xi, y = \eta$$

En ce qui concerne ce point, toutes les dérivées de la fonction g depuis l'ordre k—2, deviennent infinies. Ona de plus:

$$z(x, y) = \iint_{(S)} g(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta$$

$$\frac{\partial^h z}{\partial x^\alpha \partial x^{h\ \alpha}} \iint_{(S)} \frac{\partial^h g}{\partial x^\alpha \partial y^{h-\alpha}} F(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta$$

$$\begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots, k-1 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, h \end{pmatrix} \tag{12}$$

Introduisons l'opérateur

$$N_{xy}[z] = a_{k-1,0}(x, y)\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} + a_{k-2,1}(x, y)\frac{\partial^{k-1}z}{\partial x^{k-2}\partial y} + \ldots + a_{0,k-1}(x, y)\frac{\partial^{k-1}z}{\partial y^{k-1}}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ a_{1,0}(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + a_{0,1}\frac{\partial z}{\partial y} + a_{00}(x, y)\, z,$$

et considérons le problème plus général:

$$L_{xy}[z] = M_{xy}[z] - \lambda N_{xy}[z] = F(x, y)$$
$$U_l[z] = 0$$
$$(l = 0, 1, \ldots) \tag{13}$$

Comme dans le paragraphe précédent, ce problème est équivalent au système

$$z(x, y) = \lambda \iint_{(S)} g N_{xy}[z]\, d\xi\, d\eta + \iint_{(S)} gF(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$\frac{\partial^h z}{\partial x^\alpha \partial y^{h-\alpha}} = \lambda \iint_{(S)} \frac{\partial^h g}{\partial x^\alpha \partial y^{h-\alpha}} N_{\xi\eta}[z]\, d\xi\, d\eta + \iint_{(S)} \frac{\partial^h g}{\partial x^\alpha \partial y^{h-\alpha}} F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$\begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots, k-1 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, h \end{pmatrix} \tag{14}$$

qui a une solution unique pour toutes valeurs numériques du paramètre λ, exception faite peut-être de certaines valeurs discrètes (dites caractéristiques).

La fonction de Green du Γ problème (13) est

$$\Gamma(x, y;\ \xi, \eta;\ \lambda) = g(x, y;\ \xi, \eta) - \lambda \iint_{(S)} g(x, y;\ p, q)\, H(p, q;\ \xi, \eta;\ \lambda)\, dp\, dq$$

où

$$H_1(x, y;\ \xi, \eta;\ \lambda) = \iint_{(S)} H(x, y;\ p, q;\ \lambda)\, N_{pq}[g]\, dp\, dq$$

et $H(x, y;\ \xi, \eta)$ est le noyau résolvant de l'équation

$$u(x, y) = \lambda \iint_{(S)} N_{xy}[g]\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \iint_{(S)} N_{xy}[g]\, F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

La fonction $\Gamma(x, y;\ \xi, \eta;\ \lambda)$ satisfait aux égalités:

$$L_{xy}[\Gamma] = 0$$

partout dans le domaine S, et

$$U_l[\Gamma] = 0$$
$$(l = 0, 1, \ldots)$$

partout sur le contour s, à l'exception du point

$$x = \xi,\ y = \eta$$

En outre, nous avons pour la solution z du problème (13) les égalités:

$$z(x, y) = \iint_{(S)} \Gamma F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$\frac{\partial^h z}{\partial x^\alpha\ \partial y^{h-\alpha}} = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial^h \Gamma}{\partial x^\alpha\ \partial y^{h-}} F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$\begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots, k-1 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, h \end{pmatrix} \tag{14'}$$

La fonction Γ et ses dérivées par rapport à tous ses arguments jusqu'à l'ordre $k-3$ inclusivement sont continues, et depuis l'ordre $k-2$ possèdent les mêmes singularités que la fonction g.

On obtient des résultats tout-à-fait analogues dans le cas lorsque le nombre des variables indépendantes surpasse deux.

§ 3. Les systèmes complets des polynomes qui satisfont aux conditions linéaires homogènes sur les côtés du polygone donné

1. Supposons que le domaine convexe polygonal S est limité par les lignes droites:

$$\begin{aligned} y &= a_0 x + b_0 \\ y &= a_1 x + b_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y &= a_h x + b_h \end{aligned} \tag{15}$$

Prenons dans ce domaine la fonction $z(x, y)$ continue avec toutes ses dérivées des $k+1$ premiers ordres et égale à zéro sur le contour s du domaine.

Dénotons par $z_m(x, y)$ l'approximation polynomiale de la fonction $z(x, y)$, qui converge avec ses dérivées des $k+1$ premiers ordres avec la croissance illimitée de m. Soit le degré de ce polynome par rapport à chacun des arguments x et y pas supérieur à m. Il est aisé de le présenter sous la forme:

$$\begin{aligned} z_m(x, y) = {} & (y - a_0 x - b_0)(y - a_1 x - b_1) \ldots (y - a_h x - b_h) u_m(x, y) + \\ & + (y - a_0 x - b_0)(y - a_1 x - b_1) \ldots (y - a_{h-1} x - b_{h-1}) v_m^{(h)}(x) + \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + (y - a_0 x - b_0)(y - a_1 x - b_1) v_m^{(2)}(x) + \\ & + (y - a_0 x - b_0) v_m^{(1)}(x) + \\ & + v_m^{(0)}(x) \end{aligned} \tag{16}$$

où

$$u_m(x, y),\ v_m^{(h)}(x),\ v_m^{(h-1)}(x), \ldots, v_m^{(0)}(x)$$

sont des polynomes de degrés non supérieurs à m par rapport à chacune des variables x et y (les fonctions $v_m^{(i)}$ ne dépendent nullement de y).

Ayant changé de rôle les variables x et y, l'on peut écrire une seconde égalité, analogue à l'égalité (16). De ces deux égalités en considérant les valeurs du polynome $z_m(x, y)$ sur les droites (15), il est facile de déduire que toutes les fonctions $v_m^{(l)}$ dans le domaine S tendent vers zéro à la condition de la croissance illimitée de m, et que par conséquent

$$z = \lim_{m\to\infty} (y - a_0x - b_0)(y - a_1x - b_1)\dots(y - a_hx - b_h)u_m(x, y) \tag{17}$$

Ainsi le système des polynomes

$$(y - a_0x - b_0)(y - a_1x - b_1)\dots(y - a_hx - b_h)x^hy^k$$
$$(h, k = 0, 1, 2\dots)$$

est complet par rapport aux fonctions, qui s'annulent sur le contour du polynome (15).

En outre nous avons:

$$\frac{\partial^h z}{\partial x^\alpha \partial y^{h-\alpha}} = \lim_{m\to\infty} \frac{\partial^h}{\partial x^\alpha \partial y^{h-\alpha}} \{(y - a_0x - b_0)(y - a_1x - b_1)\dots(y - a_hx - b_h)u_m(x, y)\} \tag{18}$$
$$\begin{pmatrix} h = 1, 2, \dots, k \\ \alpha = 0, 1, \dots, h \end{pmatrix}$$

2. Si non seulement la fonction z, mais toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $l-1$ inclusivement ($l \leqslant k$) sont égales à zéro sur le contour du domaine polygonal S, on peut montrer en se servant des considérations analogues que

$$z = \lim_{m\to\infty} \{(y - a_0x - b_0)^l(y - a_1x - b_1)^l\dots(y - a_hx - b_h)^l u_m(x, y)\}$$

$$\frac{\partial^h z}{\partial x^\alpha \partial y^{h-\alpha}} = \lim_{m\to\infty} \frac{\partial^h}{\partial x^\alpha \partial y^{h-\alpha}} \{(y - a_0x - b_0)^l(y - a_1x - b_1)^l\dots(y - a_hb - b_d)^l u_m(x, y)\}$$
$$\begin{pmatrix} h = 1, 2, 3, \dots, k \\ \alpha = 0, 1, 2, \dots, h \end{pmatrix}$$

partout dans le domaine S.

Soit la fonction $z(x, y)$ continue dans le domaine fermé γ qui contient le polygone donné.

Soient aussi continues toutes ses dérivées des premiers deux ordres dans le même domaine, partout, à l'exception peut-être des sommets du polygone où la limitation des expressions:

$$r^{\alpha-1}\frac{\partial z}{\partial x};\quad r^{\alpha-1}\frac{\partial z}{\partial y};\quad r^{\alpha-1}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + r^\alpha \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$
$$(\alpha < 0)$$

est assurée si l'on dénote par r la distance d'un point quelconque du sommet du polygone. Alors

$$\lim_{m\to\infty} \iint_{(S)} M_{xy}^2 [z_m - z]\, dx\, dy = 0 \tag{19}$$

où $M_{xy}[\,]$ est un opérateur du type (6), et z_m est un polynome convenablement choisi du type

$$(y - a_0x - b_0)(y - a_1x - b_1)\dots(y - a_hx - b_h)u_m(x, y)$$

§ 4. Les systèmes complets des fonctions qui satisfont aux conditions limites homogènes et linéaires

Si le système des fonctions

$$\Phi_0(x, y), \quad \Phi_1(x, y), \quad \Phi_2(x, y), \quad \ldots \tag{20}$$

est fermé dans le domaine S, c'est-à-dire s'il satisfait à la condition:

$$\lim_{m\to\infty} \min \iint_{(S)} [F(x, y) - a_0^{(m)}\Phi_0(x, y) - a_1^{(m)}\Phi_1(x, y) - \ldots - a_m^{(m)}\Phi_m(x, y)]^2\, dx\, dy = 0 \tag{21}$$

pour toute fonction $F(x, y)$ intégrable avec son carré, on peut au moyen d'une combinaison linéaire des fonctions $\varphi_l(x, y)$ qui présentent les solutions des problèmes:

$$\begin{aligned} &M_{xy}[\varphi_l] = \Phi_l \\ &U_l[\varphi_l] = 0 \\ &(l = 0, 1, \ldots) \end{aligned} \tag{21'}$$

présenter avec l'approximation voulue la solution du problème:

$$\begin{aligned} &M_{xy}[z] = F(x, y) \\ &U_l[z] = 0 \\ &(l = 0, 1, \ldots) \end{aligned}$$

où les opérateurs $M_{xy}[\;]$, $U_l[\;]$ ont la même valeur que dans le paragraphe 2. Autrement dit, il existe de tels nombres:

$$a_0^{(m)}, \quad a_1^{(m)}, \quad \ldots, \quad a_m^{(m)}$$

que

$$z = \lim_{m\to\infty} (a_0^{(m)}\varphi_0 + a_1^{(m)}\varphi_1 + \ldots + a_m^{(m)}\varphi_m) \tag{22}$$

En outre il y aura simultanément:

$$\frac{\partial^l z}{\partial x^\alpha\, \partial y^{l-\alpha}} = \lim_{m\to\infty} \left(a_0^{(m)} \frac{\partial^l \varphi_0}{\partial x^\alpha\, \partial y^{l-\alpha}} + a_1^{(m)} \frac{\partial^l \varphi_1}{\partial x^\alpha\, \partial y^{l-\alpha}} + \ldots + a_m^{(m)} \frac{\partial^l \varphi_m}{\partial x^\alpha\, \partial y^{l-\alpha}} \right) \tag{22'}$$

$$\begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, k-2 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix}$$

Si cependant le système des fonctions (20) et la fonction $F(x, y)$ sont tels qu'outre la condition (21) nous avons aussi uniformément dans tout le domaine S:

$$F(x, y) = \lim_{m\to\infty} \min\, [a_0^{(m)}\Phi_0 + a_1^{(m)}\Phi_1 + \ldots + a_m^{(m)}\Phi_m], \tag{23}$$

ou au moins

$$\lim_{m\to\infty} \min \iint_{(S)} |F(x, y) - a_0^{(m)}\Phi_0 - a_1^{(m)}\Phi_1 - \ldots - a_m^{(m)}\Phi_m|^q\, dx\, dy \tag{23'}$$

avec

$$q < 2,$$

alors, outre les égalités (22) et (22') il y aura aussi:

$$\frac{\partial^{k-1} z}{\partial x^\alpha \partial y^{k-1-\alpha}} = \lim_{m\to\infty} \left(a_0^{(m)} \frac{\partial^{k-1}\varphi_0}{\partial x^\alpha \partial y^{k-1-\alpha}} + a_1^{(m)} \frac{\partial^{k-1}\varphi_1}{\partial x^\alpha \partial y^{k-1-\alpha}} + \dots + a_m^{(m)} \frac{\partial^{k-1}\varphi_m}{\partial x^\alpha \partial y^{k-1-\alpha}} \right) \qquad (22'')$$

$$(\alpha = 0, 1, \dots, k-1)$$

et

$$\lim_{m\to\infty} \iint_{(S)} M_{xy}^2 [z - a_0^{(m)}\varphi_0 - a_1^{(m)}\varphi_1 - \dots - a_m^{(m)}\varphi_m]\, dx\, dy = 0$$

A la condition (23') pour $q = 2$ on a aussi:

$$\lim_{m\to\infty} \iint_{(S)} \left[\frac{\partial^{k-1} z}{\partial x^\alpha \partial y^{k-1-\alpha}} - a_0^{(m)} \frac{\partial^{k-1}\varphi_0}{\partial x^\alpha \partial y^{k-1-\alpha}} - \dots - a_m^{(m)} \frac{\partial^{k-1}\varphi_m}{\partial x^\alpha \partial y^{k-1-\alpha}} \right]^2 dx\, dy = 0$$

$$\lim_{m\to\infty} \iint_{(S)} | M_{xy} [z - a_0^{(m)}\varphi_0 - a_1^{(m)}\varphi_1 - \dots - a_m^{(m)}\varphi_m] |^2 dx\, dy = 0$$

$$(q > 2)$$

§ 5. Le procédé des moments appliqué aux équations linéaires aux dérivées partielles du type elliptique

Prenons le problème (13) et cherchons les coefficients $a_i^{(m)}$ de sa solution approchée prise sous la forme:

$$z_m = a_1^{(m)} \varphi_1(x,y) + a_2^{(m)} \varphi_2(x,y) + \dots + a_m^{(m)} \varphi_m(x,y) \qquad (24)$$

des équations

$$\iint_{(S)} \{ L_{xy}[z_m] - F(x,y) \} M_{xy}[\varphi_i]\, dx\, dy = 0 \qquad (25)$$

$$(i = 0, 1, \dots, m),$$

qui représentent le système d'équations linéaires pour la détermination des inconnues

$$a_0^{(m)},\ a_1^{(m)}, \dots, a_m^{(m)}$$

Ce système est défini pour toutes les valeurs du paramètre λ à l'exception peut-être d'un ensemble de valeurs discrètes pour lesquelles le problème (13) cesse d'être défini ou possible.

Ayant introduit la dénotation

$$z - z_m = u_m$$

représentons le système (25) comme suit:

$$\iint_{(S)} L_{xy}[u_m] M_{xy}[\varphi_i]\, dx\, dy = 0 \qquad (25')$$

$$(i = 0, 1, \dots, m)$$

d'où il est aisé de déduire l'inégalité:

$$\iint_{(S)} L^2_{xy}[u_m]\, dx\, dy \leqslant \iint_{(S)} (\lambda N[u_m] + \varepsilon_m)^2 dx\, dy \qquad (26)$$

où

$$\lim_{m\to\infty} \iint_{(S)} \varepsilon_m^2\, dx\, dy = 0 \qquad (26')$$

Des égalités évidentes:

$$u_m(x, y) = \iint_{(S)} G(x, y; \xi, \eta; \lambda)\, L_{\xi\eta}[u_m]\, d\xi\, d\eta$$

$$\begin{pmatrix} l = 0, 1, \ldots, k-1 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix}$$

nous obtiendrons:

$$\frac{\partial u_m(x, y)}{\partial x^\alpha\, \partial y^{l-\alpha}} = \iint_{(S)} L_{\xi\eta}[u_m]\, \delta_{l\alpha, m}\, d\xi\, d\eta$$

$$\begin{pmatrix} l = 0, 1, \ldots, k-1 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix} \tag{27}$$

en remarquant que

$$\lim_{m \to \infty} \iint_{(S)} \delta^2_{l\pi, m}\, dx\, dy = 0$$

D'ici, à l'aide de l'inégalité de Bouniakovski et de la formule (26), on tire:

$$\left[\frac{\partial^l u_m(x, y)}{\partial x^\alpha\, \partial y^{l-\alpha}}\right]^2 \leqslant \iint_{(S)} \delta^2_{l\alpha, m}\, d\xi\, d\eta \iint_{(S)} (N_{xy}[u_m] + \varepsilon_m]^2\, dx\, dy$$

$$\begin{pmatrix} l = 0, 1, \ldots, k-2 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix} \tag{28}$$

Il s'ensuit que:

$$z(x, y) = \lim_{m \to \infty} z_m(x, y)$$

$$\frac{\partial^l z(x, y)}{\partial x^\alpha\, \partial y^{l-\alpha}} = \lim_{m \to \infty\pi} \frac{\partial^l z_m(x, y)}{\partial x^\alpha\, \partial y^{l-\alpha}}$$

$$\begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, k-2 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix}$$

et aussi:

$$\lim_{m \to \infty} \iint_{(S)} [z - z_m]^2\, dx\, dy = 0$$

$$\lim_{m \to \infty} \iint_{(S)} \left[\frac{\partial^l z}{\partial x^\alpha\, \partial y^{l-\alpha}} - \frac{\partial^l z_m}{\partial x^\alpha\, \partial y^{l-\alpha}}\right]^2 x\, \partial \quad =$$

$$\begin{pmatrix} l = 0, 1, \ldots, k-1 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix}$$

$$\lim_{m \to \infty} \iint_{(S)} L^2_{xy}[z - z_m]\, dx\, dy = 0$$

$$\lim_{m \to \infty} \iint_{(S)} M_{xy}[z - z_m]\, dx\, dy = 0$$

L'application de l'inégalité de Hölder au lieu de l'inégalité de Bouniakovski donne la possibilité d'approfondir à un certain degré le résultat obtenu.

L'appareil des déterminants et des fonctions orthogonales peut être utilisé de la même manière que ceci est fait dans le chapitre III (livraison I) pour le cas des équations différentielles ordinaires.

§ 6. Les cas particuliers et les généralisations

Le même schéma peut être appliqué à d'autres types de problèmes, par ex. aux équations du type hyperbolique ainsi qu'aux cas où le nombre des variables indépendantes est supérieur à deux.

Le procédé de Ritz et celui des moindres carrés sont ici, ainsi que dans le cas des équations différentielles ordinaires, des cas particuliers du procédé des moments. Dans le cas du procédé de Ritz la démonstration de la convergence réussit dans la supposition que

$$\varphi_i = k_i \Phi_i$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

où k_i est un facteur numérique.

Dans le cas du procédé des moindres carrés cette méthode n'a raison qu'à la condition de savoir choisir le système des fonctions

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2, \ldots$$

directement, sans résoudre le problème (21′) qui en ce cas a la forme:

$$L_{xy}[\varphi_i] = \Phi_i$$

$$u_l[\varphi_i] = 0$$

$$l = 0,\ 1, \ldots$$

c'est-à dire qui est essentiellement équivalent au problème (13).

On obtient des résultats plus complets au point de vue théorique si l'on prend au lieu du procédé des moindres carrés celui des moindres q-mes degrés, c'est-à-dire si l'on détermine les nombres

$$a_0^{(m)},\ a_1^{(m)}, \ldots, a_m^{(m)}$$

par la condition:

$$\iint\limits_{(S)} (L_{xy}[u_m])^q \, dx \, dy = \min$$

où

$$q > 2$$

Ici, les égalités

$$z = \lim_{m \to \infty} z_m$$

$$\frac{\partial^l z}{\partial x^\alpha \partial y^{l-\alpha}} = \lim_{m \to \infty} \frac{\partial^l z_m}{\partial x^\alpha \partial y^{l-\alpha}}$$

$$\begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, k-1 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix}$$

se trouvent toujours assurées, y compris toutes les dérivées de l'ordre $k-1$.

En outre nous avons alors:

$$\lim_{m\to\infty} \iint_{(S)} |z - z_m|^p \, dx\, dy = 0$$

$$\lim_{m\to\infty} \iint \left| \frac{\partial^l z}{\partial x^\alpha \partial y^{l-\alpha}} - \frac{\partial^l z_m}{\partial x^\alpha \partial y^{l-\alpha}} \right|^p dx\, dy = 0$$

$$\begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, k-1 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix}$$

où le nombre p est déterminé par l'égalité

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

§ 7. Application du procédé aux équations différentielles linéaires ordinaires dans le cas des conditions limites hétérogènes

Prenons le problème:

$$\begin{aligned} L_x\ &[y] = F(x) \\ U_0\ &[y] = g_0 \\ U_1\ &[y] = g_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_{k-1} &[y] = g_{k-1} \end{aligned} \qquad (29)$$

qui détermine uniformément $y(x)$ dans l'intervalle $[a, b]$. Ici

$$L_x[\ ] = M_x[\ ] - \lambda N_x[\ ]$$

$$M_x[y] = \frac{d^k y}{dx^k} + B_1 \frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}} + \ldots + B_k y$$

$$N_x[y] = a_1(x) \frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}} + \ldots + a_k(x) y$$

$$U_i[y] = \alpha_i^{(0)} y(a) + \alpha_i^{(1)} y'(a) + \ldots + \alpha_i^{(k-1)} y^{(k-1)}(a) +$$
$$+ \beta_i^{(0)} y(b) + \beta_i^{(1)} y'(b) + \ldots + \beta_i^{(k-1)} y^{(k-1)}(b)$$
$$(i = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Soit à présent

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots$$

un système de fonctions, complet à l'intervalle $[a, b]$ au sens général du mot, par ex.:

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3, \ldots$$

Nous cherchons la fonction $y(x)$ approximativement sous la forme:

$$y_m(x) = a_0^{(m)} \varphi_0(x) + a_1^{(m)} \varphi_1(x) + \ldots + a_m^{(m)} \varphi_m(x) \tag{30}$$

en déterminant les coefficients $a_i^{(m)}$ par les équations:

$$\int_a^b L_x[y_m - y]\, M_x[\varphi_n]\, dx + \sum_{i=0}^{k-1} \tau_i^2 U_i[y_m - y]\, U_i[\varphi_n] = 0$$

$$(n = 0, 1, \ldots, m) \tag{31}$$

où les multiplicateurs τ_i croissent infiniment avec m, mais plus rapidement que m. On peut établir alors de nouveau les égalités:

$$y = \lim_{m\to\infty} y_m$$

$$y' = \lim_{m\to\infty} y'_m$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(k-1)} = \lim_{m\to\infty} y_m^{(k-1)}$$

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^b (y - y_m)^2\, dx = 0$$

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^b (y' - y'_m)^2\, dx = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^b (y^{(k-1)} - y_m^{(k-1)})^2 dx = 0$$

Si l'on prend le problème (29) dans l'intervalle $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ en diminuant ε infiniment avec $\frac{1}{m}$, l'intégrale $\bar{y}$ de ce problème tendra vers y.

L'approximation de $\bar{y}$:

$$\bar{y}_m = b_0^{(m)} \varphi_0 + b_1^{(m)} \varphi_1 + \ldots + b_m^{(m)} \varphi_m$$

déterminée par les conditions

$$\int_a^b L_x[\bar{y}_m - \bar{y}]\, M_x[\varphi_n]\, dx + \sum_{i=0}^{k-1} \tau_i^2 U_i[\bar{y}_m - \bar{y}]\, U_i[\varphi_n] = 0$$

$$(n = 0, 1, \ldots, m)$$

tend aussi vers y; en même temps toutes les différences

$$y' - \bar{y}'_m,\; y'' - \bar{y}''_m, \ldots, y^{(k-1)} - \bar{y}_m^{(k-1)}$$

tendent vers zéro.

Les mêmes résultats sont obtenus pour les systèmes des équations linéaires différentielles.

Le procédé des moindres carrés présente ici aussi un cas particulier et se réduit à la minimisation de l'intégrale:

$$J(a_0^{(m)}, a_1^{(m)}, \ldots, a_m^{(m)}) = \int_a^b L_x^2 [y_m - y] \, dx + \sum_{i=0}^{k-1} \tau_i^2 U_i^2 [y_m - y]$$

§ 8. Le procédé des moments appliqué aux équations aux dérivées partielles avec des conditions limites linéaires non homogènes

Le schéma susmentionné (§ 7) n'a pas de grande importance pour les équations différentielles ordinaires, vu que pratiquement il est aisé de remplacer les conditions limites non-homogènes par des conditions homogènes et il est assez facile de construire les fonctions φ_i qui satisfont à ces conditions. Ce schéma acquiert plus de raison dans le cas des équations avec des dérivées partielles, où la construction des fonctions φ_i qui satisfont aux conditions limites données présente la difficulté principale du problème.

Il est applicable aussi dans le cas particulier du problème homogène.

Bornons nous au problème:

$$L_{xy}[z] = \Delta_{xy}[z] + \lambda N_{xy}[z] = 0$$

où

$$\Delta_{xy} z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$N_{xy}[z] = c(x, y) z$$

et où la fonction z doit être déterminée dans le domaine limité S disposé tout entier à l'intérieur du carré

$$\begin{gathered} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{gathered} \tag{33}$$

et doit satisfaire sur le contour de ce domaine à la condition

$$z = \psi(x, y)$$

où la fonction $\psi(x, y)$, ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres est continue dans le carré (33).

Si le système des fonctions

$$\varphi_0(x, y), \ \varphi_1(x, y) \ldots, \varphi_{m^2}(x, y)$$

est fermé dans le carré (33), la somme

$$z_m = a_0^{(m)} \varphi_0 + a_1^{(m)} \varphi_1 + \ldots + a_m^{(m)} \varphi_m = \varphi_m, \tag{33'}$$

déterminée par les équations:

$$\iint_{(S)} L_{xy}[z_m] \, M_{xy}[\varphi_i] \, dx \, dy + r^2 \int_{(S)} (z_m - \psi) \varphi_i \, ds =$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m^2)$$

tend dans chaque point du domaine S vers z à la condition que τ croisse infiniment avec m d'une façon convenable:

$$z = \lim_{m\to\infty} z_m \tag{34}$$

Si l'on considère le même problème dans le domaine S_ε qui présente une extension du domaine S, en diminuant infiniment la distance entre les contours des domaines S_ε et S, à la croissance de m, alors pour l'approximation $\overline{z}_m$ du type (33') de ce nouveau problème l'égalité

$$z = \lim_{m\to\infty} \overline{z}_m$$

se remplit uniformément dans tout le domaine S.

Le procédé des moindres carrés se réduit dans ce cas à la minimisation de l'expression

$$I = \iint_{(S)} L^2[y_m - y]\,dx\,dy + \tau^2 \int_{(S)} (z_m - \psi)^2 ds$$

Ce procédé est aussi applicable dans le cas du problème du type elliptique d'ordre quelconque.

L'uniformité de la convergence peut être maintes fois assurée sans l'extension du domaine S aux conditions limites assez générales.

§ 9. L'exactitude de la solution approchée d'une équation différentielle ordinaire par le procédé des moments

Ici l'auteur a réussi à améliorer les résultats donnés dans la livr. I (chapitre II et III) en indiquant l'ordre maximum de la petitesse de l'erreur des égalités approchées

$$\begin{gathered} y \approx y_m \\ y' \approx y'_m \\ \dots\dots\dots\dots \\ y^{(k-1)} \approx y_m^{(k-1)} \end{gathered} \tag{35}$$

(confr. § 7).

Prenons le système des fonctions

$$\Phi_0(x),\ \Phi_1(x),\ \Phi_2(x), \dots$$

satisfaisant aux conditions suivantes d'orthogonalité:

$$\int_a^b q^2(x)\,\Phi_k(x)\,\Phi_l(x)\,dx = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \begin{cases} (k \neq l) \\ (k = l) \end{cases}$$

Déterminons les coefficients $a_i^{(m)}$ de la somme (30) par les conditions

$$\int_a^b \{L_x[y_m] - F(x)\}\, q(x)\,\Phi_n(x)\,dx = 0$$
$$(n = 0, 1, \dots, m) \tag{36}$$

où

$$q(x) > 0.$$

Si les conditions limites du problème sont celles du „périodisme"

$$y(0)=y(2\pi)$$
$$y'(0)=y'(2\pi)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(k-1)}(0)=y^{(k-1)}(2\pi),$$

on peut poser:

$$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\Phi_{2n-1}(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$$

$$\Phi_n=\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}$$

$$q(x)=1$$

Alors, à la condition de la continuité de la fonction $F(x)$ et des coefficients des opérateurs $M_x[\ ]$ et $N_x[\ ]$ dans le cas du problème self-adjoint nous obtenons

$$|y_m-y|\leqslant\frac{\mathfrak{A}_0\ln m+\mathfrak{B}_0}{m^k}\text{const}$$

$$|y'_m-y'|\leqslant\frac{\mathfrak{A}_1\ln m+\mathfrak{B}_1}{m^{k-1}}\text{const}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$|\overset{(k-1)}{y_m}-\overset{(k-1)}{y}|\leqslant\frac{\mathfrak{A}_{k-1}\ln m+\mathfrak{B}_{k-1}}{m}\text{const} \tag{37}$$

où

$$\mathfrak{A}_i,\ \mathfrak{B}_i\ (i=0,1,\dots,k-1)$$

sont des constantes absolues. Cet ordre d'approximation est le même que l'ordre d'approximation de la fonction $y(x)$ par la somme de Fourier d'ordre m. Il est le plus grand qui puisse être atteint par le procédé des moments, vu que le procédé des moments appliqué aux équations avec des coefficients constants donne dans ce cas pour y_m justement la somme $m^{\text{ème}}$ de Fourier.

Dans le cas d'un problème non self-adjoint l'on obtient un résultat moins exact que celui de (37):

$$|y_m-y|\leqslant\frac{\mathfrak{A}\ln m+\mathfrak{B}}{m}\text{const}$$

$$|y'_m-y'|\leqslant\frac{\mathfrak{A}\ln m+\mathfrak{B}}{m}\text{const} \tag{37'}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$|\overset{(k-1)}{y_m}-\overset{(k-1)}{y}|\leqslant\frac{\mathfrak{A}\ln m+\mathfrak{B}}{m}\text{const}$$

Des résultats analogues sont obtenus lorsque les conditions aux limites ont la forme:

$$y'(0)=0, \quad y'(\pi)=0$$
$$y'''(0)=0, \quad y'''(\pi)=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(k-1)}(0)=0, \quad y^{(k-1)}(\pi)=0$$

et lorsque les fonctions $\Phi_i(x)$ sont choisies de la manière suivante:

$$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$\Phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx$$
$$(n=1, 2, 3, \ldots)$$

avec

$$q(x)=1$$

et enfin dans le cas des conditions aux limites:

$$y(0)=0, \quad y(\pi)=0$$
$$y''(0)=0, \quad y''(\pi)=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(k-2)}(0)=0, \quad y^{(k-2)}(\pi)=0$$

si l'on prend

$$\Phi_0(x)=0$$

$$\Phi_n^0(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx$$

$$q(x)=1$$

Dans le cas général on peut prendre les fonctions $\Phi_n(x)$ sous forme de polynomes jacobiens orthogonaux, en particulier des polynomes de Tchebycheff ou de Legendre. Alors les inégalités (37) et (37') se remplacent respectivement par les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned} |y-y_m| &\leqslant \frac{\mathfrak{A}_0 \ln m+\mathfrak{B}_0}{m^k\sqrt{1-x^2}}\,\text{const} \\ |y'-y'_m| &\leqslant \frac{\mathfrak{A}_1 \ln m+\mathfrak{B}_1}{m^{k-1}\sqrt{1-x^2}}\,\text{const} \end{aligned} \tag{38}$$

et

$$\begin{aligned} |y-y_m| &\leqslant \frac{\mathfrak{A} \ln m+\mathfrak{B}}{m\sqrt{1-x^2}}\,\text{const} \\ |y'-y'_m| &\leqslant \frac{\mathfrak{A} \ln m+\mathfrak{B}}{m\sqrt{1-x^2}}\,\text{const} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |y^{(k-1)}-y_m^{(k-1)}| &\leqslant \frac{\mathfrak{A} \ln m+\mathfrak{B}}{m\sqrt{1-x^2}}\,\text{const} \end{aligned} \tag{38}$$

Des résultats analogues sont obtenus pour les systèmes des équations différentielles ordinaires.

§ 10. L'exactitude de la solution approximative obtenue par le procédé des moments pour les problèmes du type elliptique

Si l'on prend le système des fonctions

$$\Phi_0(x, y), \quad \Phi_1(x, y), \quad \Phi_2(x, y), \ldots \tag{39}$$

comme un système orthogonal et normal, la solution approchée

$$z_m = a_0^{(m)} \varphi_0 + a_1^{(m)} \varphi_1 + \ldots + a_m^{(m)} \varphi_m$$

obtenue par le procédé des moments (§ 6) a un ordre de petitesse qui n'est pas inférieur à celui de l'expression

$$\Delta_m = \iint_{(S)} N_{xy} [G(x, y;\ \xi, \eta)]\, R_m [M_{\xi\eta} [z]]\, d\xi\, d\eta$$

où le signe $R_m[\ ]$ dénote le reste de la somme m^{eme} de Fourier, composée d'après les fonctions (39). On a un résultat analogue pour toutes les dérivées:

$$\frac{\partial^l z_m}{\partial x^\alpha\, \partial y^{l-\alpha}}$$

$$\begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, k-2 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, l \end{pmatrix}$$

Il n'est pas difficile d'établir que

$$\Delta_m = -\iint_{(S)} \frac{\partial}{\partial \eta} N_{xy} [G(x, y;\ \xi, \eta)]\, R_m \left[\int_0^\eta M_{\xi\eta} [z]\, d\eta \right] d\xi\, d\eta$$

$$|\Delta_m| \geqslant \max \left| R_m \left[\int_0^\eta M_{\xi\eta} [z]\, d\eta \right] \right| \cdot \left| \iint_{(S)} \left| \frac{\partial}{\partial \eta} N_{xy} [G]\, d\xi\, d\eta \right.\right.$$

Pour cette raison la différence

$$z - z_m$$

a un ordre de petitesse non inférieur à celui du reste de la série de Fourier de la fonction z [formée suivant les fonctions (39)].

ЗМІСТ

RÉSUMÉ DE LA II PARTIE

(équations aux dérivées partielles et quelques généralisations)

Уповнов. Київськ. Обдліту № 87. Вид. № 108. Зам. № 910. Тир. 1000. Форм. пап. 72×105 *см.*
Вага 50,4 *кг.* Папер. арк. $6^5/_8$. Друк. зн. на 1 пап. арк. 112 тис. Здано до друку 9/X 1935 р.
Підписано до друку 1/II 1936 р.

Ціна 8 крб.

ПРИЙМАННЯ ЗАМОВЛЕНЬ ТА ПЕРЕДПЛАТИ
на всі видання Української Академії Наук провадиться в секторі
поширення Видавництва Української Академії Наук
Київ, вул. Чудновського, 2

ПРОДАЖ ВИДАНЬ
у науковій книгарні Української Академії Наук — Київ, вул. Леніна,
і по всіх книгарнях Книгокульторгу, Книгоцентру ОГИЗ-а
та Книгозбуту ОНТИ

Друкарня-літографія Української Академії Наук у Києві