

**Analysis II****Arbeitsblatt 43****Übungsaufgaben**

AUFGABE 43.1. Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy,$$

- (1) im Punkt  $(0, 0)$  in Richtung  $(1, 0)$ ,
- (2) im Punkt  $(0, 0)$  in Richtung  $(2, 5)$ ,
- (3) im Punkt  $(1, 0)$  in Richtung  $(1, 0)$ ,
- (4) im Punkt  $(1, 0)$  in Richtung  $(0, 1)$ ,
- (5) im Punkt  $(2, 3)$  in Richtung  $(-1, 0)$ ,
- (6) im Punkt  $(3, 7)$  in Richtung  $(5, -4)$ .

AUFGABE 43.2. Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{x}{y},$$

- (1) im Punkt  $(0, 1)$  in Richtung  $(1, 0)$ ,
- (2) im Punkt  $(0, 1)$  in Richtung  $(0, 1)$ ,
- (3) im Punkt  $(1, 3)$  in Richtung  $(2, 4)$ ,
- (4) im Punkt  $(-1, 6)$  in Richtung  $(-3, -1)$ ,
- (5) im Punkt  $(1, \frac{1}{100})$  in Richtung  $(0, -1)$ .

AUFGABE 43.3.\*

Bestimme zur Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto t^2,$$

die Richtungsableitung in Richtung 3 für jeden Punkt.

AUFGABE 43.4.\*

Bestimme die Richtungsableitung von

$$f(x, y) = x^3 + x^2y - y^5$$

im Punkt  $(4, -1)$  in Richtung  $(-3, 2)$ .

AUFGABE 43.5. Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass  $f$  in einem Punkt  $P \in \mathbb{R}$  genau dann differenzierbar ist, wenn  $f$  in  $P$  in Richtung 1 differenzierbar ist, und dass dann die Gleichheit

$$(D_1 f)(P) = f'(P)$$

gilt.

AUFGABE 43.6. Bestimme die Richtungsableitung einer Abbildung in Richtung 0.

AUFGABE 43.7. Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume,  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge, und  $f: G \rightarrow W$  eine Abbildung. Es sei  $P \in G$  ein Punkt und  $v \in V$  ein fixierter Vektor. Zeige, dass  $f$  in  $P$  in Richtung  $v$  genau dann differenzierbar ist, wenn die (auf einem Intervall bzw. einer offenen Ballumgebung um  $0 \in \mathbb{K}$  definierte) Kurve

$$g: I \longrightarrow W, t \longmapsto g(t) = f(P + tv),$$

differenzierbar ist, und dass in diesem Fall die Gleichheit

$$(D_v f)(P) = g'(0)$$

gilt.

Wie muss dabei das Intervall bzw. die offene Umgebung gewählt werden?

AUFGABE 43.8.\*

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge und  $v \in V$  ein Vektor. Es seien

$$f, g: G \longrightarrow \mathbb{K}$$

Funktionen, die in Richtung  $v$  differenzierbar seien. Zeige, dass dann auch  $fg$  in Richtung  $v$  differenzierbar ist mit

$$D_v(fg) = fD_v g + gD_v f.$$

AUFGABE 43.9.\*

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge und  $v \in V$  ein Vektor. Es seien

$$f, g: G \longrightarrow \mathbb{C}$$

Funktionen, die in Richtung  $v$  differenzierbar seien. Zeige, dass dann auch  $fg$  in Richtung  $v$  differenzierbar ist mit

$$D_v(fg) = fD_v g + gD_v f.$$

AUFGABE 43.10. Bestimme, für welche Richtungen die Richtungsableitung im Nullpunkt zur Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \max(x, y),$$

existieren.

AUFGABE 43.11. Bestimme, für welche Punkte  $P \in \mathbb{R}^n$  und welche Richtungen  $v \in \mathbb{R}^n$  die Richtungsableitung der euklidischen Norm

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

existiert.

AUFGABE 43.12. Bestimme, für welche Punkte  $P \in \mathbb{R}^2$  und welche Richtungen  $v \in \mathbb{R}^2$  die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto |x + y|,$$

existiert.

AUFGABE 43.13. Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - y^2,$$

im Nullpunkt  $(0, 0)$  auf Richtungsableitungen. Man entscheide für jede Gerade  $G$  durch den Nullpunkt, ob die Einschränkung von  $f$  auf  $G$  im Nullpunkt ein Extremum besitzt.

AUFGABE 43.14. Es seien  $V$  und  $W$  euklidische Vektorräume und

$$f, g: G \longrightarrow W$$

seien Abbildungen auf einer offenen Menge  $G \subseteq V$ , die in Richtung  $v \in V$  differenzierbar seien. Zeige, dass dann auch die Abbildung

$$h: G \longrightarrow \mathbb{R}, P \longmapsto \langle f(P), g(P) \rangle,$$

in Richtung  $v \in V$  differenzierbar ist, und dass

$$(D_v h)(P) = \langle f(P), (D_v g)(P) \rangle + \langle (D_v f)(P), g(P) \rangle$$

gilt.

AUFGABE 43.15. Es sei  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  der Einheitskreis und

$$g: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion mit  $g(-Q) = -g(Q)$ , gegenüberliegende Punkte auf dem Kreis haben also zueinander negierte Werte.

- (1) Zeige, dass durch  $f(0) = 0$  und

$$f(P) := \|P\|g\left(\frac{P}{\|P\|}\right)$$

für  $P \neq 0$  eine Funktion auf  $\mathbb{R}^2$  definiert ist.

- (2) Zeige, dass  $f$  genau dann stetig ist, wenn  $g$  stetig ist.  
 (3) Man gebe ein Beispiel für ein nichtstetiges  $g$  derart, dass  $f$  im Nullpunkt stetig ist.  
 (4) Zeige, dass die Einschränkung von  $f$  auf jede Gerade durch den Nullpunkt linear ist.  
 (5) Zeige, dass  $f$  im Nullpunkt in jede Richtung differenzierbar ist.  
 (6) Es sei

$$g(Q) = \begin{cases} 1, & \text{falls die } x\text{-Koordinate von } Q \text{ rational ist} \\ 0, & \text{falls die } x\text{-Koordinate von } Q \text{ irrational ist.} \end{cases}$$

Zeige, dass  $f$  in jedem Punkt  $P \neq 0$  nur in eine Richtung (bis auf Skalierung) eine Richtungsableitung besitzt.

**AUFGABE 43.16.** Es seien  $V$  und  $W$  reelle endlichdimensionale Vektorräume,  $G \subseteq V$

offen und  $v \in V$  ein Vektor. Es bezeichne  $C_v^1(G, W)$  die Menge aller in Richtung  $v$  differenzierbaren Abbildungen von  $G$  nach  $W$ . Zeige, dass die Abbildung

$$C_v^1(G, W) \longrightarrow \text{Abb}(G, W), \varphi \longmapsto D_v\varphi,$$

linear ist.

### Aufgaben zum Abgeben

**AUFGABE 43.17.** (4 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 \sin y - e^x y - x,$$

- (1) im Punkt  $(0, 0)$  in Richtung  $(1, 0)$ ,  
 (2) im Punkt  $(0, 0)$  in Richtung  $(0, 1)$ ,  
 (3) im Punkt  $(0, 0)$  in Richtung  $(2, 0)$ ,  
 (4) im Punkt  $(0, 0)$  in Richtung  $(1, -3)$ ,  
 (5) im Punkt  $(1, 1)$  in Richtung  $(1, 1)$ ,  
 (6) im Punkt  $(1, 0)$  in Richtung  $(-1, \frac{1}{2})$ ,  
 (7) im Punkt  $(5, 7)$  in Richtung  $(1, 0)$ ,  
 (8) im Punkt  $(1, 0)$  in Richtung  $(5, 7)$ .

AUFGABE 43.18. (2 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x^2 + y^3 = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{x^2 - xy + y^4}{x^2 + y^3},$$

- (1) im Punkt  $(1, 1)$  in Richtung  $(1, 0)$ ,
- (2) im Punkt  $(0, 1)$  in Richtung  $(0, 1)$ ,
- (3) im Punkt  $(1, 0)$  in Richtung  $(0, 1)$ ,
- (4) im Punkt  $(3, -2)$  in Richtung  $(2, -5)$ .

AUFGABE 43.19. (5 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitungen der Funktion  $(r_i \in \mathbb{N})$

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n},$$

in einem Punkt

$$a = (a_1, \dots, a_n)$$

in Richtung

$$v = (v_1, \dots, v_n).$$

AUFGABE 43.20. (4 Punkte)

Zeige, unter Verwendung von Aufgabe 43.19, dass zu einer polynomialen Funktion

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \varphi(x_1, \dots, x_n),$$

zu einer fixierten Richtung  $v \in \mathbb{R}^n$  die Richtungsableitung  $D_v \varphi$  existiert und selbst polynomial ist.

AUFGABE 43.21. (3 Punkte)

Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume, sei  $G \subseteq V$

offen,  $P \in G$  ein Punkt,  $v \in V$  ein Vektor und sei

$$f: G \longrightarrow W$$

eine Abbildung, die im Punkt  $P$  in Richtung  $v$  differenzierbar sei. Zeige, dass  $f$  auch in Richtung  $cv$  mit  $c \in \mathbb{K}$  differenzierbar ist und die Beziehung

$$(D_{cv} f)(P) = c(D_v f)(P)$$

gilt.



## Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7