

Analysis II**Arbeitsblatt 43****Übungsaufgaben**

AUFGABE 43.1. Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy,$$

- (1) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(1, 0)$,
- (2) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(2, 5)$,
- (3) im Punkt $(1, 0)$ in Richtung $(1, 0)$,
- (4) im Punkt $(1, 0)$ in Richtung $(0, 1)$,
- (5) im Punkt $(2, 3)$ in Richtung $(-1, 0)$,
- (6) im Punkt $(3, 7)$ in Richtung $(5, -4)$.

AUFGABE 43.2. Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{x}{y},$$

- (1) im Punkt $(0, 1)$ in Richtung $(1, 0)$,
- (2) im Punkt $(0, 1)$ in Richtung $(0, 1)$,
- (3) im Punkt $(1, 3)$ in Richtung $(2, 4)$,
- (4) im Punkt $(-1, 6)$ in Richtung $(-3, -1)$,
- (5) im Punkt $(1, \frac{1}{100})$ in Richtung $(0, -1)$.

AUFGABE 43.3.*

Bestimme zur Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto t^2,$$

die Richtungsableitung in Richtung 3 für jeden Punkt.

AUFGABE 43.4.*

Bestimme die Richtungsableitung von

$$f(x, y) = x^3 + x^2y - y^5$$

im Punkt $(4, -1)$ in Richtung $(-3, 2)$.

AUFGABE 43.5. Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass f in einem Punkt $P \in \mathbb{R}$ genau dann differenzierbar ist, wenn f in P in Richtung 1 differenzierbar ist, und dass dann die Gleichheit

$$(D_1 f)(P) = f'(P)$$

gilt.

AUFGABE 43.6. Bestimme die Richtungsableitung einer Abbildung in Richtung 0.

AUFGABE 43.7. Es seien V und W endlichdimensionale \mathbb{K} -Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge, und $f: G \rightarrow W$ eine Abbildung. Es sei $P \in G$ ein Punkt und $v \in V$ ein fixierter Vektor. Zeige, dass f in P in Richtung v genau dann differenzierbar ist, wenn die (auf einem Intervall bzw. einer offenen Ballumgebung um $0 \in \mathbb{K}$ definierte) Kurve

$$g: I \longrightarrow W, t \longmapsto g(t) = f(P + tv),$$

differenzierbar ist, und dass in diesem Fall die Gleichheit

$$(D_v f)(P) = g'(0)$$

gilt.

Wie muss dabei das Intervall bzw. die offene Umgebung gewählt werden?

AUFGABE 43.8.*

Es sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge und $v \in V$ ein Vektor. Es seien

$$f, g: G \longrightarrow \mathbb{K}$$

Funktionen, die in Richtung v differenzierbar seien. Zeige, dass dann auch fg in Richtung v differenzierbar ist mit

$$D_v(fg) = fD_v g + gD_v f.$$

AUFGABE 43.9.*

Es sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge und $v \in V$ ein Vektor. Es seien

$$f, g: G \longrightarrow \mathbb{C}$$

Funktionen, die in Richtung v differenzierbar seien. Zeige, dass dann auch fg in Richtung v differenzierbar ist mit

$$D_v(fg) = fD_v g + gD_v f.$$

AUFGABE 43.10. Bestimme, für welche Richtungen die Richtungsableitung im Nullpunkt zur Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \max(x, y),$$

existieren.

AUFGABE 43.11. Bestimme, für welche Punkte $P \in \mathbb{R}^n$ und welche Richtungen $v \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung der euklidischen Norm

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

existiert.

AUFGABE 43.12. Bestimme, für welche Punkte $P \in \mathbb{R}^2$ und welche Richtungen $v \in \mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto |x + y|,$$

existiert.

AUFGABE 43.13. Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - y^2,$$

im Nullpunkt $(0, 0)$ auf Richtungsableitungen. Man entscheide für jede Gerade G durch den Nullpunkt, ob die Einschränkung von f auf G im Nullpunkt ein Extremum besitzt.

AUFGABE 43.14. Es seien V und W euklidische Vektorräume und

$$f, g: G \longrightarrow W$$

seien Abbildungen auf einer offenen Menge $G \subseteq V$, die in Richtung $v \in V$ differenzierbar seien. Zeige, dass dann auch die Abbildung

$$h: G \longrightarrow \mathbb{R}, P \longmapsto \langle f(P), g(P) \rangle,$$

in Richtung $v \in V$ differenzierbar ist, und dass

$$(D_v h)(P) = \langle f(P), (D_v g)(P) \rangle + \langle (D_v f)(P), g(P) \rangle$$

gilt.

AUFGABE 43.15. Es sei $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ der Einheitskreis und

$$g: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion mit $g(-Q) = -g(Q)$, gegenüberliegende Punkte auf dem Kreis haben also zueinander negierte Werte.

- (1) Zeige, dass durch $f(0) = 0$ und

$$f(P) := \|P\|g\left(\frac{P}{\|P\|}\right)$$

für $P \neq 0$ eine Funktion auf \mathbb{R}^2 definiert ist.

- (2) Zeige, dass f genau dann stetig ist, wenn g stetig ist.
 (3) Man gebe ein Beispiel für ein nichtstetiges g derart, dass f im Nullpunkt stetig ist.
 (4) Zeige, dass die Einschränkung von f auf jede Gerade durch den Nullpunkt linear ist.
 (5) Zeige, dass f im Nullpunkt in jede Richtung differenzierbar ist.
 (6) Es sei

$$g(Q) = \begin{cases} 1, & \text{falls die } x\text{-Koordinate von } Q \text{ rational ist} \\ 0, & \text{falls die } x\text{-Koordinate von } Q \text{ irrational ist.} \end{cases}$$

Zeige, dass f in jedem Punkt $P \neq 0$ nur in eine Richtung (bis auf Skalierung) eine Richtungsableitung besitzt.

AUFGABE 43.16. Es seien V und W reelle endlichdimensionale Vektorräume, $G \subseteq V$

offen und $v \in V$ ein Vektor. Es bezeichne $C_v^1(G, W)$ die Menge aller in Richtung v differenzierbaren Abbildungen von G nach W . Zeige, dass die Abbildung

$$C_v^1(G, W) \longrightarrow \text{Abb}(G, W), \varphi \longmapsto D_v\varphi,$$

linear ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 43.17. (4 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 \sin y - e^x y - x,$$

- (1) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(1, 0)$,
- (2) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(0, 1)$,
- (3) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(2, 0)$,
- (4) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(1, -3)$,
- (5) im Punkt $(1, 1)$ in Richtung $(1, 1)$,
- (6) im Punkt $(1, 0)$ in Richtung $(-1, \frac{1}{2})$,
- (7) im Punkt $(5, 7)$ in Richtung $(1, 0)$,
- (8) im Punkt $(1, 0)$ in Richtung $(5, 7)$.

AUFGABE 43.18. (2 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x^2 + y^3 = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{x^2 - xy + y^4}{x^2 + y^3},$$

- (1) im Punkt $(1, 1)$ in Richtung $(1, 0)$,
- (2) im Punkt $(0, 1)$ in Richtung $(0, 1)$,
- (3) im Punkt $(1, 0)$ in Richtung $(0, 1)$,
- (4) im Punkt $(3, -2)$ in Richtung $(2, -5)$.

AUFGABE 43.19. (5 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitungen der Funktion $(r_i \in \mathbb{N})$

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n},$$

in einem Punkt

$$a = (a_1, \dots, a_n)$$

in Richtung

$$v = (v_1, \dots, v_n).$$

AUFGABE 43.20. (4 Punkte)

Zeige, unter Verwendung von Aufgabe 43.19, dass zu einer polynomialen Funktion

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \varphi(x_1, \dots, x_n),$$

zu einer fixierten Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung $D_v \varphi$ existiert und selbst polynomial ist.

AUFGABE 43.21. (3 Punkte)

Es seien V und W endlichdimensionale \mathbb{K} -Vektorräume, sei $G \subseteq V$

offen, $P \in G$ ein Punkt, $v \in V$ ein Vektor und sei

$$f: G \longrightarrow W$$

eine Abbildung, die im Punkt P in Richtung v differenzierbar sei. Zeige, dass f auch in Richtung cv mit $c \in \mathbb{K}$ differenzierbar ist und die Beziehung

$$(D_{cv} f)(P) = c(D_v f)(P)$$

gilt.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7