Prof. Dr. H. Brenner | Osnabrück WS 2019/2020

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 7

Übungsaufgaben

Aufgabe 7.1. Was hat die Din-Norm für Papier mit Wurzeln zu tun?

Aufgabe 7.2. Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von 5 zum Startwert $x_0 = 2$.

Aufgabe 7.3.*

Führe die ersten drei Schritte des babylonischen Wurzelziehens zu $b = 7$ mit dem Startwert $x_0 = 3$ durch (es sollen also die Approximationen x_1, x_2, x_3 für $\sqrt{7}$ berechnet werden; diese Zahlen müssen als gekürzte Brüche angegeben werden).

Aufgabe 7.4. Es sei $c \in \mathbb{R}_+$ eine positive reelle Zahl und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{c}$ mit dem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Sei $u \in \mathbb{R}_+$, $d = c \cdot u^2$, $y_0 = ux_0$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{d}$ mit dem Startwert y_0. Zeige

$$y_n = ux_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 7.5. Bestimme für die Folge

$$x_n := \frac{2}{3n+5}$$

und

$$\epsilon = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \ldots,$$

ab welchem (minimalen) n die Abschätzung

$$x_n \leq \epsilon$$

gilt.

Aufgabe 7.6. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeige, dass die Folge genau dann gegen x konvergiert, wenn es für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung $|x_n - x| \leq \frac{1}{k}$ gilt.

Aufgabe 7.7.*

Negiere die Aussage, dass eine Folge x_n in einem angeordneten Körper gegen x konvergiert, durch Umwandlung der Quantoren.

Aufgabe 7.8. Untersuche die durch

$$x_n = \frac{1}{n^2}$$

gegebene Folge ($n \geq 1$) auf Konvergenz.

Aufgabe 7.9. Man untersuche ob die folgenden Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt sind oder nicht.

(1) $\mathbb{N}$,
(2) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{-3}{7}, \frac{-4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{13}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$,
(3) $]-5, 2]$,
(4) $\left\{\frac{1}{n} | \, n \in \mathbb{N}_+\right\}$,
(5) $\left\{\frac{1}{n} | \, n \in \mathbb{N}_+\right\} \cup \{0\}$,
(6) $\mathbb{Q}_-$,
(7) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$,
(8) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \geq 4\}$,
(9) $\{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 7.10. Es sei $x > 1$ eine reelle Zahl. Zeige, dass die Folge $x_n := x^n$ nicht beschränkt ist.

Aufgabe 7.11.*

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Nullfolge und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge. Zeige, dass dann auch die Produktfolge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 7.12.*

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente reelle Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann $\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n$ gilt.

Aufgabe 7.13.*

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei reelle Folgen. Es gelte $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a konvergiert.

Aufgabe 7.14. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit Grenzwert x. Zeige, dass dann auch die Folge

$$(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert, und zwar gegen $|x|$.

Aufgabe 7.15.*

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ eine Primzahl ist}\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

definiert.

(1) Bestimme x_{117} und x_{127}.
(2) Konvergiert die Folge in $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 7.16. Beweise durch Induktion die *Binet-Formel* für die Fibonacci-Zahlen. Diese besagt, dass

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

gilt ($n \geq 1$).

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 7.17. (3 Punkte)

Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von 7 zum Startwert $x_0 = 2$.

Aufgabe 7.18. (5 Punkte)

Man entwerfe ein Computer-Programm (Pseudocode) zur Berechnung von rationalen Approximationen der Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl mittels der Heron-Folge.

• Der Computer besitzt beliebig viele Speicher, die natürliche Zahlen enthalten können.

• Der Computer kann natürliche Zahlen miteinander vergleichen (und abhängig vom Vergleichsergebnis zu Befehlen springen).

• Er kann die Summe von zwei Speicherinhalten ausrechnen und in einen weiteren Speicher schreiben.

• Er kann das Produkt von zwei Speicherinhalten ausrechnen und in einen weiteren Speicher schreiben.

• Er kann Speicherinhalte ausdrucken und vorgegebene Texte ausdrucken.

• Es gibt einen Haltebefehl.

Die Anfangskonfiguration sei

$$(a, b, c, d, e, 0, 0, \ldots)$$

mit $b, c, e \neq 0$. Dabei ist a/b die Zahl, von der die Quadratwurzel berechnet werden soll, $x_0 = c$ ist das Startglied und d/e ist die gewünschte Genauigkeit. Das Programm soll die Heron-Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ausrechnen und ausdrucken (und zwar wird der Zähler und der Nenner hintereinander ausgedruckt) und es soll anhalten, wenn das zuletzt ausgedruckte Folgenglied x_n die Eigenschaft

$$\left| x_n^2 - \frac{a}{b} \right| \leq \frac{d}{e}$$

erfüllt.

Achtung! Alle Operationen sind innerhalb von $\mathbb{N}$ auszuführen!

Aufgabe 7.19. (3 Punkte)

Bestimme für die Folge

$$x_n := \frac{2n+1}{3n-4}$$

und

$$\epsilon = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000},$$

ab welchem (minimalen) n die Abschätzung

$$\left| x_n - \frac{2}{3} \right| \leq \epsilon$$

gilt.

Aufgabe 7.20. (5 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Folge mit Grenzwert x. Zeige, dass dann auch die durch

$$y_n := \frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{n+1}$$

definierte Folge gegen x konvergiert.

Tipp: reduziere zuerst auf $x = 0$.

Aufgabe 7.21. (4 Punkte)

Zeige, dass die reelle Folge

$$\left(\frac{n}{2^n} \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

gegen 0 konvergiert.

Tipp: Finde eine geeignete Abschätzung für 2^n mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes.

Aufgabe 7.22. (5 Punkte)

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen und sei die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $z_{2n-1} := x_n$ und $z_{2n} := y_n$. Zeige, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert konvergieren.

Abbildungsverzeichnis