高等數學初步

理學博士
坂井英太郎
著

共立出版株式會社

緒　　言

本書ハ高等數學初歩ノ要項ニ就キテ簡明ナル說述ヲ試ミ,初學者ヲシテ斯學ノ基礎ヲ會得セシメントスルモノニシテ,理論ノ正確ヲ期スルト同時ニ材料ノ選擇ヲ嚴ニセリ.

以上ノ趣旨ニヨリ立體ニ關スル部分ハ殆ンド全ク之ヲ省略セリ,從テ讀者ノ豫備知識トシテハ初等代數,初等平面幾何,及ビ三角法ノ極メテ初歩ヲ以テ足レリトス.

尙指數函數及ビ對數函數ヲ導入シタリト雖ドモ前後ニ關聯スル點少キヲ以テ大體ヲ涉獵セントスル場合ニハ之ヲ除キテ其ノ目的ヲ達スルコトヲ得ベシト信ズ.

著　者　識

目　　次

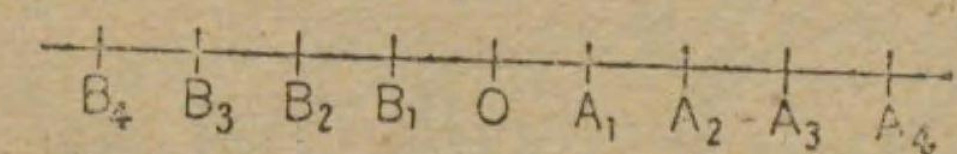
高等數學初步

第一章 數ト其ノ圖示

1. 有理數

正及ビ負ノ整數，零，正及ビ負ノ分數ヲ併セテ有理數トイフ，二ツノ有理數ノ間ニ加減乘除ノ算法ヲ施シテ得タルモノハ何レモ一ツノ有理數ナリ，但シ零ニテ割ル場合ハ之ヲ除クモノトス．

有理數ハ恒ニ $\dfrac{a}{b}$ ノ形ニテ之ヲ表ハスコトヲ得，此ニ a 及ビ b ハ何レモ整數トス．



一定ノ直線上ニ一ツノ定點 O ヲ取リ，一定ノ長サ例ヘバ一糎ヲ單位ノ長サトシテ，O ヨリ右方ニ 1 ニ等シク順次ニ $OA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \cdots\cdots$ ト置キ，又左方ニ順次ニ $OB_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, \cdots\cdots$ ト置クトキハ

$$OA_1=1,\ OA_2=2,\ OA_3=3,\ OA_4=4,\cdots\cdots$$

卽チ $A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots\cdots$ ハ定點 O ニ關シテ夫々 $1, 2, 3, 4, \cdots\cdots$ ヲ表ハス點ナリト考フルコトヲ得

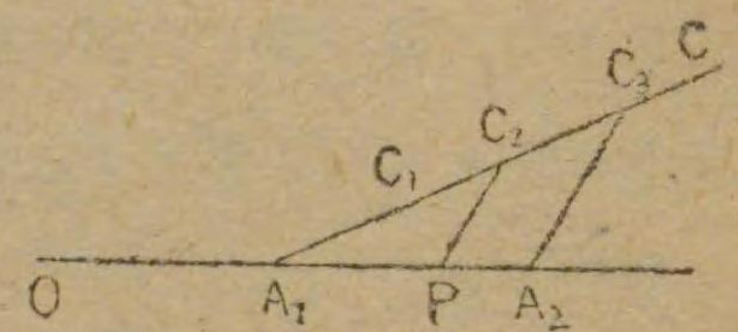
又 O ヨリ右方ニ測リタル長サヲ正トシ，左方ニ測リタル長サヲ負ト定ムルトキハ

$OB_1=-1,\ OB_2=-2,\ OB_3=-3,\ OB_4=-4,\cdots\cdots$

即チ $B_1, B_2, B_3, B_4,\cdots\cdots$ ハ夫々 $-1, -2, -3, -4,\cdots\cdots$ ヲ表ハス點ナリ.

故ニ此ノ方法ニヨレバ點列……$B_4, B_3, B_2, B_1, O, A_1, A_2, A_3, A_4,\cdots\cdots$ヲ以テ數列……$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,\cdots\cdots$ヲ表ハサシムルコトヲ得.

次ニ一ツノ分數例ヘバ $\frac{5}{3}$ 即チ $1+\frac{2}{3}$ ヲ同一ノ方法ニヨリテ表ハサントセバ前ノ如ク直線上ニ1ニ等シク順次ニ OA_1, A_1A_2 ヲ取リ, A_1 ヨリ任意ノ直線 A_1C ヲ引キ, 其ノ上ニ一定ノ長サニ等シク A_1C_1, C_1C_2, C_2C_3 ヲ置キテ C_3A_2 ヲ作リ, C_2 ヨリ之ニ平行線ヲ引キ, 直線 OA_2 トノ交點ヲPトスルトキハ



$$A_1P=\frac{2}{3}$$

從テ
$$OP=OA_1+A_1P=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

故ニPハ$\frac{5}{3}$ヲ表ハス.

同樣ニシテ一般ニ分數ハ恒ニ直線上ノ一點ニテ之ヲ代表セシムルコトヲ得.

注意 1. a 及ビ b ヲ任意ノ有理數トスレバ $\frac{a+b}{2}$ ハ又一ツノ有理數ニシテ, 更ニ $a>b$ ナルトキハ

$$a-\frac{a+b}{2}=\frac{a-b}{2}>0,\quad \frac{a+b}{2}-b=\frac{a-b}{2}>0$$

故ニ
$$a>\frac{a+b}{2}>b$$

即チ任意ノ二ツノ有理數ノ間ニハ少クモ一ツノ有理數アリ.

此ノ特別ナル場合トシテ $a=1,\ b=0$ トスレバ0ト1トノ間ニハ $\frac{1+0}{2}$ 即チ $\frac{1}{2}$ アリ, 同樣ニシテ0ト$\frac{1}{2}$トノ間ニハ $\frac{\frac{1}{2}+0}{2}$ 即チ $\frac{1}{4}$ アリ, $\frac{1}{2}$ト1トノ間ニハ $\frac{1+\frac{1}{2}}{2}$ 即チ $\frac{3}{4}$ アリ, 此ノ手續ヲn回繰リ返ヘストキハ0ト1トノ間ニハ

$$\frac{1}{2^n},\ \frac{2}{2^n},\ \frac{3}{2^n},\ \cdots,\ \frac{2^n-1}{2^n},$$

アリ, 二ツノ續キタル分數ノ差ハ$\frac{1}{2^n}$ニ等シ.

之ニヨリテ二ツノ有理數ノ間ニハ限リナク多クノ有理數アリ, 從テ一ツノ有理數ニ對シテ何程ニテモ之ニ接近シタル他ノ有理數ヲ索メ得ベキコト明カナリ.

注意 2. 既約分數 $\frac{a}{b}$ ヲ小數ニ直ス爲メニ b ニテ a ヲ割ルトキハ剩餘ハ b ヨリモ小ナリ, 即チ $1,2,3,\cdots\cdots, b-1$ ノ中何レカ一ツヲ得, 故ニ順次ニ零ヲ附ケテ割ルトキハ多クトモ b 回目ニハ割リ切レルカ又ハ前ニ一度現ハレタル剩餘ト同一ノ剩餘ヲ得テ以下循環スルコトトナル, 即チ既約分數ハ有限小數又ハ循環小數ノ中何レカ一ツニ變形シ得ルモノトス.

2. 無理數

二ツノ有理數ノ間ニ加減乘除ノ算法ヲ施ストキハ又一ツノ有理數ヲ得レドモ，有理數ノ冪根ヲ索ムル場合ニハ得タルモノハ必ズシモ有理數ニアラズ，例ヘバ最モ簡單ナル$\sqrt{2}$ヲ考フルニ

$$\sqrt{2}-1=\frac{2-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}>0$$

$$2-\sqrt{2}=\frac{4-2}{2+\sqrt{2}}=\frac{2}{2+\sqrt{2}}>0$$

故ニ　$1<\sqrt{2}<2$

即チ $\sqrt{2}$ ハ1ト2トノ間ニアリ，從テ整數ニアラズ.

次ニ

$$\sqrt{2}-1.4=\frac{2-(1.4)^2}{\sqrt{2}+1.4}=\frac{0.04}{\sqrt{2}+1.4}>0$$

$$1.5-\sqrt{2}=\frac{(1.5)^2-2}{1.5+\sqrt{2}}=\frac{0.25}{1.5+\sqrt{2}}>0$$

故ニ　$1.4<\sqrt{2}<1.5$

同樣ニシテ順次ニ次ノ不等式ヲ誘出スルコトヲ得.

$$1.4<\sqrt{2}<1.42$$

$$1.414<\sqrt{2}<1.415$$

$$1.4142<\sqrt{2}<1.4143$$

$$1.41421<\sqrt{2}<1.41422$$

$$1.414213<\sqrt{2}<1.414214$$

$$1.4142135<\sqrt{2}<1.4142136$$

……………………………

之ニヨリ $\sqrt{2}$ ハ二ツノ帶小數ノ間ニアルコト明カナリ.

若シ此ノ手續ヲ繰リ返ストキ結局既約分數 $\frac{a}{b}$ ニテ之ヲ表ハシ得ルモノトスレバ

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b}$$

此ニ a 及ビ b ハ何レモ整數ナリ

從テ　$a-\sqrt{2}b=0$

依テ　$(a-\sqrt{2}b)(a+2\sqrt{b})=0$

即チ　$a^2=2b^2$

a^2 ハ2ニテ割リ切レザルベカラズ，從テ a ハ偶數ナリ.

依テ　$a=2c$

此ニ c ハ一ツノ整數トス.

從テ　$a^2=4c^2$

$a^2=2b^2$ 及ビ $a^2=4c^2$ ヨリ次ノ關係ヲ得

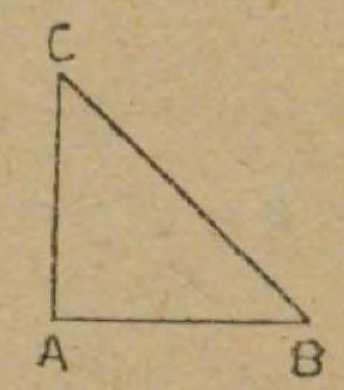
$$b^2=2c^2$$

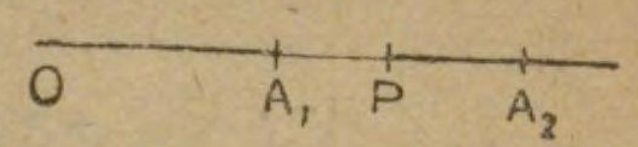
依テ又 b ハ2ニテ割リ切レザルベカラズ，即チ一ツノ偶數ナリ.

故ニ $\sqrt{2}$ ガ既約分數 $\frac{a}{b}$ ニテ之ヲ表ハシ得ルモノトスレバ a, b ハ共ニ偶數ナラザルベカラズ，即チ a, b 共ニ2ノ倍數ナル故ニ $\frac{a}{b}$ ハ既約分數ナリトイフ假定ニ反ス.

之ニヨリテ $\sqrt{2}$ ハ $\frac{a}{b}$ ノ如キ既約分數ニテ之ヲ表ハシ得ザルコト明ナリ.

上證明ニヨリ $\sqrt{2}$ ハ何程ニテモ接近セル二ツノ帶小數ノ間ニアレドモ $\frac{a}{b}$ ノ形ニテ之ヲ表ハスコトヲ得ズ．故ニ前節ニヨリ有理數ニアラズ．然ルニ單位ノ長サヲ直角ノ兩邊 AB, AC トシテ二等邊直角三角形 ABC ヲ作ルトキハ其ノ斜邊 BC ノ長サハ $\sqrt{2}$ ニ等シク從テ $\sqrt{2}$ ニ對應スル線分ヲ索メ得ルヲ以テ $\sqrt{2}$ ハ前節ニ於テ示セルガ如ク有理數ト同樣ニ定直線上ノ一點 P ヲ以テ之ヲ代表セシムコトヲ得ベシ．





$\sqrt{2}$ ノ如キ數ヲ無理數トイフ，$\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{3}$ 等ハ何レモ無理數ナリ，尙或數 a ノ n 乘冪ガ一定ノ有理數 b ニ等シキガ如キ a ヲ索ムル場合又ハ一定ノ數 a ノ n 乘冪ガ一定ノ有理數 b ニ等シキガ如キ n ヲ索ムル場合等ニモ一般ニ無理數ヲ得ベシ．

注意　上ニ示セルガ如ク $\sqrt{2}$ ニ對シテ何程ニテモ之ニ近キ有理數ヲ索ムルコトヲ得，例ヘバ

$$1.4142135<\sqrt{2}<1.4142136$$

ニシテ 1.4142136 ト 1.4142135 トノ差ハ 0.0000001 ニ等シ，從テ $\sqrt{2}$ ノ値ヲ 1.4142136 又ハ 1.4142135 ト取ルトキ其ノ誤差ハ 0.0000001 ヨリモ小ナリ，之ニヨリテ $\sqrt{2}$ ノ近似値ヲ定メテ實際ノ計算ニ代用スルコトヲ得ベシ．

他ノ無理數ニ就テモ同樣ナリ．

3. 實數

有理數及ビ無理數ヲ併セテ實數トイフ，實數ハ一直線上ノ點ニテ之ヲ代表セシメ得ベク，又一直線上ノ點ニハ之ニ對應スル實數存在ス．

實數ノ計算ハ有理數ト同一ノ原則ニヨリテ行ハルルモノトス．

a, b ガ實數ニシテ $a-b>0$ ナルトキハ a ハ b ヨリモ大ナリトイヒ，$a-b<0$ ナルトキハ a ハ b ヨリモ小ナリトイヒ，$a-b=0$ ナルトキハ a ト b トハ相等シトイフ．

$a>0,\ b>0$ ナルトキ

$$a-(-b)=a+b>0$$

即チ　$$a-(-b)>0$$

故ニ正數ハ負數ヨリモ大ナリ

次ニ　$$a-0=a>0$$

$$(-b)-0=-b<0$$

故ニ正數ハ0ヨリモ大ニシテ負數ハ0ヨリモ小ナリ．

又　$$(-a)-(-b)=-a+b=b-a$$

故ニ　$b-a>0$ ナルトキハ

$$(-a)-(-b)>0$$

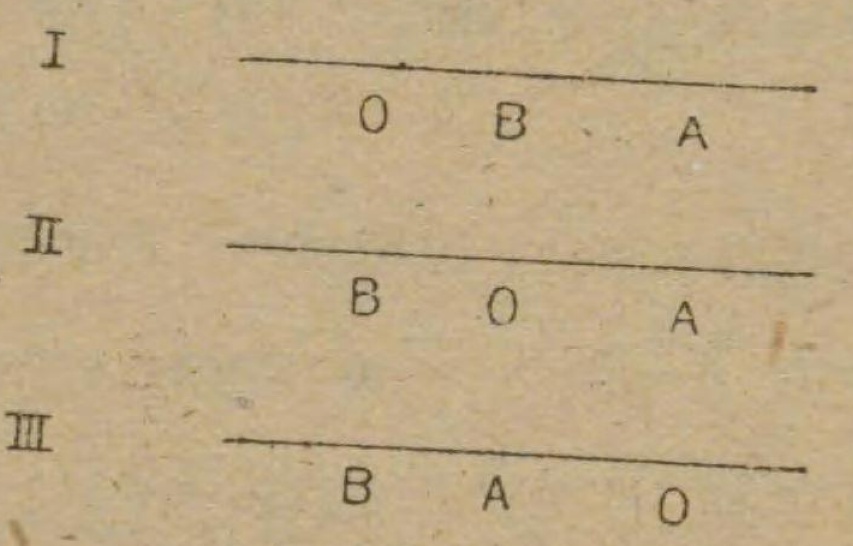
又　$b-a<0$ ナルトキハ

$$(-a)-(-b)<0$$

故ニ負數ノ大小ハ恒ニ其ノ絕對値ノ大小ト相反ス．

一直線上ニ於ケル實數ノ列ニ於テ其ノ何レノ一ツヲ取ルモ其ノ左方ニアルモノヨリモ大ニシテ右方ニアルモノヨリモ小ナリ．

$a>b$ トシ，a ヲ表ハス點ヲA，又 b ヲ表ハス點ヲ Bトスルトキハ次ノ如ク三ツノ場合アリ．



今AヨリBニ至ル距離ヲABニテ表ハスコトトシ，AヨリBニ至ル方向ガ定點Oヨリ見タル正ノ方向ト一致スルトキハ正號又之ト反對ナルトキハ負號ヲ附スルコトト定ムレバ

I　$BA=OA-OB=a-b$

II　$BA=BO+OA=-OB+OA=-b+a=a-b$

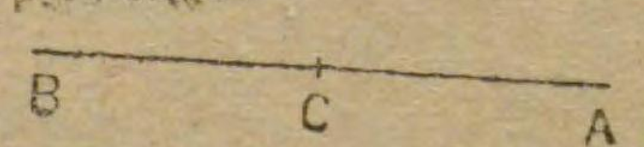
III　$BA=BO-AO=-OB+OA=-b+a=a-b$

故ニ二點ABノ距離ハ恒ニ $a-b$ ニテ之ヲ表ハスコトヲ得，$a<b$ ナルトキモ亦同様ナリ．

又 $a>b$ ナルトキハ前節ニヨリ

$$a-\frac{a-b}{2}=\frac{a-b}{2},\qquad \frac{a-b}{2}-b=\frac{a-b}{2}$$

故ニ $\frac{a+b}{2}$ ヲ表ハス點CヨリAニ至ル距離ハBヨリCニ至ル距離ニ等シ，即チ $\frac{a+b}{2}$ ニ對應スル點ハ線分ABノ中點ナリ．



4. 虛數，複素數

實數ノ偶數冪ハ必ズ正ナリ，從テ負數ノ偶數冪根ヲ實數中ニ索ムルコトヲ得ズ，故ニ開方ニハ一ツノ制限アリ，此ノ制限ヲ除カンガ爲メニ新ナル數ヲ考ヘ $i=\sqrt{-1}$ ヲ虛數ノ單位トス，即チ

$$i^2=-1$$

之ニヨレバ例ヘバ方程式 $x^2+2=0$ ノ根ハ $x=\pm\sqrt{2\times(-1)}$ 即チ $x=\pm\sqrt{2}\,i$ ナリ．然ルニ方程式 $x^2+x+2=0$ ノ根ヲ索メントセバ

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-2=-\frac{7}{4}$$

即チ

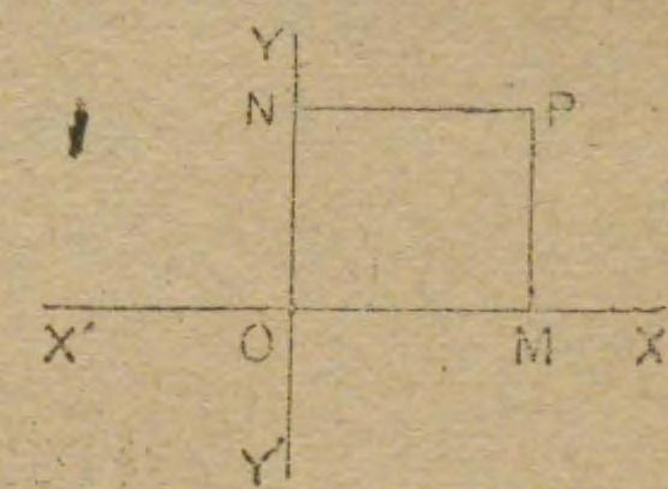
$$x+\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}i$$

故ニ

$$x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i,\quad \text{又ハ}\quad x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i$$

此ノ場合ニハ根ハ實數ノ部分ト虛數ノ部分トヨリ成リ立ツ，依テ更ニ數ノ意義ヲ擴張シテ a 及ビ b ガ實數ニシテ $i=\sqrt{-1}$ ナルトキ $a+bi$ ニテ表ハス數ヲ複素數トイフ

複素數ヲ圖ニテ示サントスルトキハ定點Oヲ通過シテ互ニ垂直ナル直線XX′, YY′ヲ引キ，XX′ノ上ニ a ニ等シクOM，又YY′ノ上ニ b ニ等シクONヲ置キ，M, NヨリXX′, YY′ニ垂線ヲ引キ其ノ交點ヲPトスルトキハ a, b ノ値ニヨリテPノ位置定マリ，又Pガ與ヘラルルトキハ a, b ノ値確定ス．



特ニ $b=0$ ナルトキハ $a+bi$ ハ實數 a トナリ，$a=0$ ナルトキハ虛數 bi トナル，卽チ XX' 上ノ點ハ實數ヲ表ハシ，YY' 上ノ點ハ虛數ヲ表ハシ，平面上ノ其ノ他ノ點ハ複素數ヲ表ハスモノトス.

複素數ノ計算ニ關シテハ實數ト同樣ニシテ $i^2=-1$ トシテ取扱フベク，複素數ノ間ニ加減乘除ノ演算ヲ行ヒテ得タルモノハ何レモ複素數ナリ，卽チ $a+bi$, $a'+b'i$ ヲ二ツノ複素數トスレバ

$$(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i$$

$$(a+bi)-(a'+b'i)=(a-a')+(b-b')i$$

$$(a+bi)(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i$$

$$\frac{a+bi}{a'+b'i}=\frac{(a+bi)(a'-b'i)}{(a'+b'i)(a'-b'i)}=\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}+\frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}i$$

最後ノ式ニ於テ a' 及ビ b' ハ同時ニ零トナラザルモノトス.

又 $a+bi$ 及ビ $a'+b'i$ ニ於テ $a=a'$, $b=b'$ ナルトキハ二ツノ複素數ハ相等シトイフ.

複素數ハ實數ノ如ク一直線上ニ於ケル點列ニテ之ヲ代表セシメ得ルモノニアラズ、從テ複素數ノ間ニハ大小ノ區別ナキモノトス

第二章　函數ト其ノ圖示

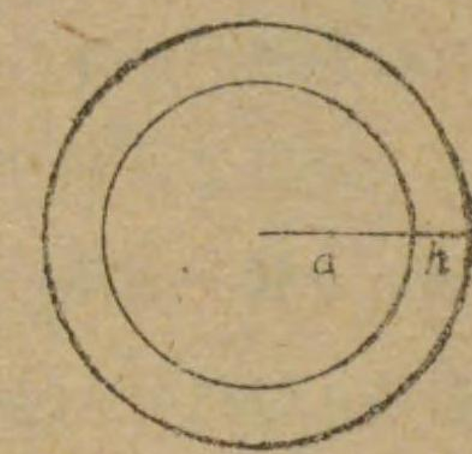
5. 變數及ビ函數

圓ノ半徑ノ長サヲ r トシ，圓周率ヲ π トスルトキハ其ノ面積ハ πr^2 ニテ之ヲ表ハスコトヲ得，然ルニ π ハ如何ナル圓ニ對シテモ一定ノ値ヲ有スルガ故ニ半徑ノ長サヲ知ルトキハ圓ノ面積ハ確定ス，又半徑ガ a ナル場合ト $a+h$ ナル場合トヲ比較スレバ面積ノ差

$$\pi(a+h)^2-\pi a^2=\pi(2a+h)h$$

ニシテ，此ノ差ハ h ト共ニ變化ス. 卽チ半徑ガ種々ノ異リタル値ヲ取ルトキ面積モ亦之ニ從テ種々ノ値ヲ取ル.

今 A ヲ以テ半徑ガ r ナル圓ノ面積ヲ表ハストキハ



$$A=\pi r^2$$

此ノ場合ニ A ハ r ノ函數ナリトイフ.

又 r ノ如ク種々ノ異リタル値ヲ取リ得ル數ヲ變數トイヒ，之ニ對シテ π ノ如ク常ニ一定ノ値ヲ取ル數ヲ常數トイフ.

A ハ r ガ其ノ値ヲ變ズレバ之ニ從テ其ノ値ヲ變ズルガ故ニ又一ツノ變數ナリ.

又上ノ式ヨリ

$$r=\sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

Aノ値定マレバrノ値定マル，故ニ逆ニrハAノ函數ナリトイフコトヲ得.

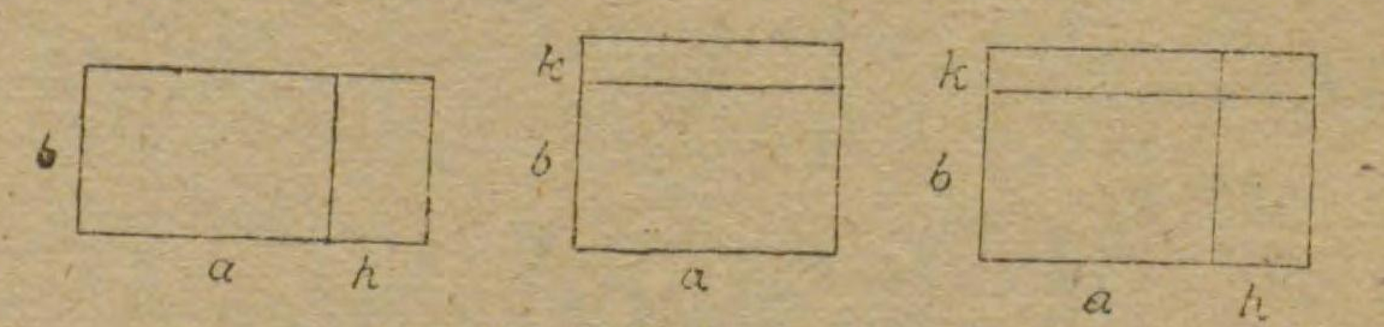
一般ニ一ツノ變數xガ種々ノ異リタル値ヲ取ルトキ之ニ對應シテ他ノ變數yノ値ガ定マル場合ニハyハxノ函數ナリトイヒ，xヲ獨立變數，yヲ從屬變數トイフ.

前例　$A=\pi r^2$　ニ於テハrハ獨立變數ニシテAハ從屬變數ナリ，又 $r=\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$ ニ於テハAハ獨立變數ニシテrハ從屬變數ナリ.

尙變數ノ取ル値ハ必ズシモ實數ト限ラズ，複素數又ハ虛數ヲ取ルコトヲ得ベシ，從テ特ニ實數ノミニ限ル場合ニハ實變數トイフベキナレドモ以下實數値ヲ取ル場合ノミニ就テ論ズルヲ以テ單ニ變數トイフコトヽ定ム，函數ニ就テモ同樣ナリ.

又獨立變數ハ必ズシモ一個ニ限ラズ，例ヘバ矩形ノ兩邊ヲa, bトスルトキハ其ノ面積ハabニテ之ヲ表ハスコトヲ得，卽チ兩邊ノ長サヲ知レバ其ノ面積ハ確定ス，若シbガ一定シテaガ$a+h$ニ變ズレバ面積ノ變化ハ　$(a+h)b-ab=bh$　トナリ，aガ一定シテbガ$b+k$ニ變ズレバ面積ノ變化ハ$a(b+k)-ab=ak$　トナル，又a, bガ同時ニ$a+h$，$b+k$ニ變ズレバ面積ノ變化ハ

$(a+h)(b+k)-ab=ak+bh+hk$　トナル.



故ニ矩形ノ面積ハ其ノ兩邊a, bノ函數ナリ

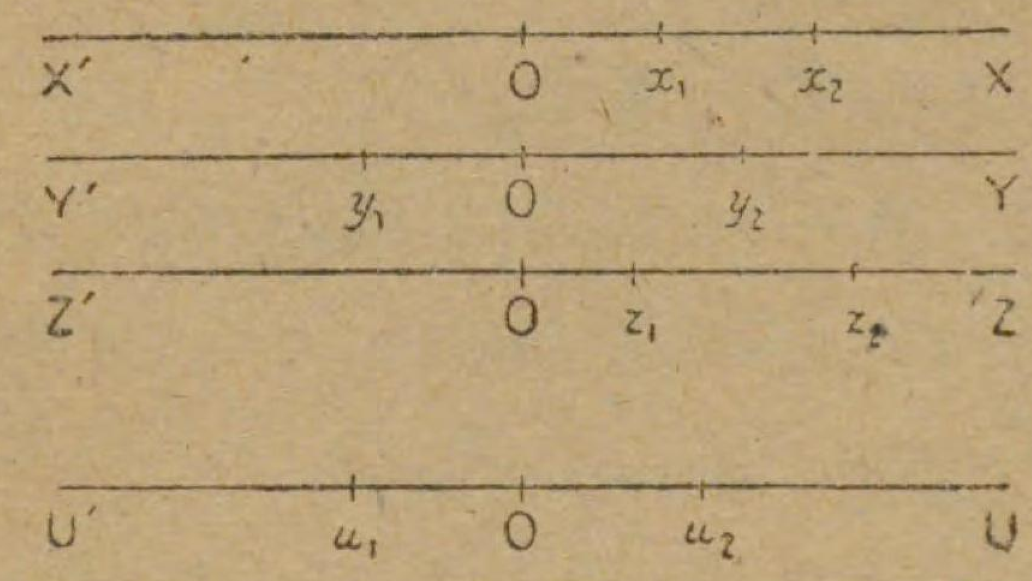
同樣ニ直方體ノ三稜ヲa, b, cトスルトキハ其ノ體積ハabcニテ之ヲ表ハスコトヲ得，故ニ直方體ノ體積ハ三稜a, b, cノ函數ナリ.

一般ニ一ツノ變數uノ値ガ他ノ獨立變數$x, y, z, \cdots\cdots$ノ値ニヨリテ定マルトキハuハ$x, y, z, \cdots\cdots$ノ函數ナリトイヒ，之ヲ

$$u=f(x, y, z, \cdots\cdots)$$

ト記ス，其ノ最モ簡單ナルモノハ獨立變數ガ一個ナル場合卽チ$u=f(x)$ナリ.

尙$x, y, z, \cdots\cdots, u$ハ何レモ實數ニシテ直線上ノ點ニテ之ヲ表ハスコトヲ得ベキニヨリ圖ヲ以テ之ヲ示セバ次ノ如シ.



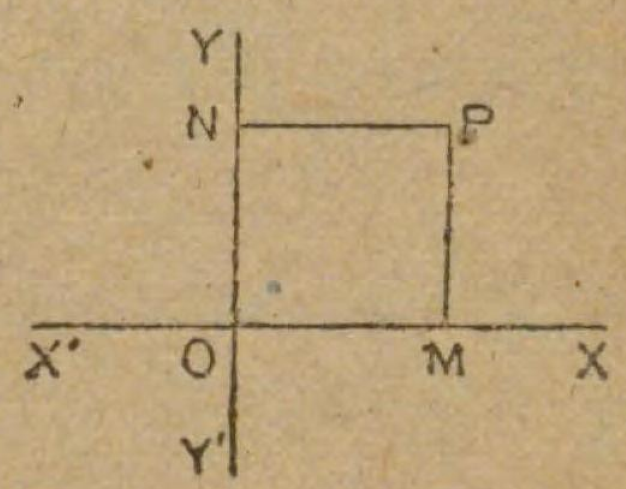
上ノ圖ハ$x, y, z, \cdots\cdots$ガ夫々$x_1, y_1, z_1, \cdots\cdots$ナル値ヲ取ルトキハ$u$ハ$u_1$トナリ，$x, y, z, \cdots\cdots$ガ夫々$x_2, y_2, z_2, \cdots\cdots$トナルトキハ$u$ハ$u_2$トナルコトヲ表ハス.

注意　變數ノ記號ハ問題ニヨリ適宜如何ナル文字ヲ用フルモ差支ナシト雖ドモ通常ハ$x, y, z, \cdots\cdots$等ノ文字ヲ用ヒ，之ニ對シテ常數ニハ$a, b, c, \cdots\cdots$等ノ文字ヲ用フ.

尙獨立變數ガ一個ナル場合ノ研究ニハ次ニ示スガ如ク二ツノ文字ヲ用ヒテ平面上ノ一點ヲ表ハス方法ヲ用フルヲ便トス.

6. 平面上ニ於ケル點ノ座標

平面上ニ二ツノ互ニ直角ニ交ハル直線 XX′, YY′ ヲ引キ, 其ノ交點ヲOトシ, 平面上ノ一點Pヨリ此ノ二ツノ直線ニ垂線ヲ引キ, XX′トノ交點ヲ M, 又 YY′ トノ交點ヲ N トス.



然ルトキハXX′, YY′ ハ一定ナルガ故ニ O ハ一定ノ點ニシテ, 從テ P ヨリ下セル垂線ノ足 M, N ノ位置ハ一定ナリ, 又 XX′ 上ノ點 M 及ビYY′ 上ノ點 N ノ位置定マルトキハ M, N ヨリ XX′, YY′ ニ夫々垂線ヲ引クトキハ其ノ交點 P ノ位置定マル.

然ルニ XX′ 上ノ點 M ノ位置ハ OM ノ長サ及ビ其ノ方向ニヨリテ決定セラルベク, YY′ 上ノ點 N ノ位置ハ ON ノ長サ及ビ其ノ方向ニヨリテ決定セラルベシ.

故ニ同一ノ長サノ單位ヲ用ヒテ OM, ON ヲ測リテ其ノ數値ヲ得; M ガ XX′ ノ上ニ於テ O ノ右方ニアレバ正, 又左方ニアレバ負トシ, N ガ YY′ ノ上ニ於テ O ノ上方ニアレバ正, 又下方ニアレバ負トスルコトニヨリテ M, N ノ位置, 從テ P ノ位置定マル.

O ヲ原點, OM ヲ表ハス數 x ヲ P ノ橫座標又ハ x 座標トイヒ, ON ヲ表ハス數 y ヲ P ノ縱座標又ハ y 座標トイヒ, 之ヲ總稱シテ單ニ P ノ座標トイフ.

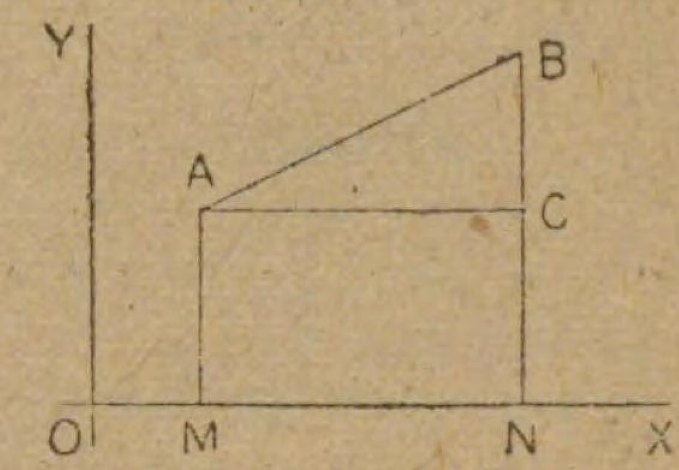
點 P ノ座標ガ x, y ナルコトヲ $P(x, y)$ ト記ス, 原點 O ノ座標ハ $(0,0)$ ナリ.

又 XX′ ヲ橫軸又ハ x 軸トイヒ, YY′ ヲ縱軸又ハ y 軸トイヒ, 之ヲ總稱シテ座標軸トイフ.

橫軸上ノ點ノ座標ハ $(x, 0)$ ニシテ縱軸上ノ點ノ座標ハ $(0, y)$ ナリ.

上ノ如クシテ點ノ座標定マルトキハ第3節ニ於ケルト同樣ニシテ平面上ニ於ケル二點 A, B ノ距離ヲ索ムルコトヲ得.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ヨリ橫軸ニ垂線ヲ引キ, 橫軸トノ交點ヲ夫々 M, N トシ, A ヨリ橫軸ニ平行線ヲ引キ, BN トノ交點ヲ C トスルトキハ



$$AC = MN = ON - OM = x_2 - x_1$$

$$CB = NB - NC = NB - MA = y_2 - y_1$$

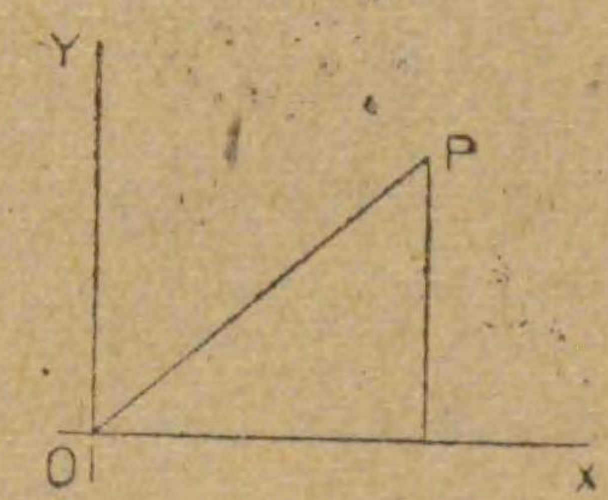
然ルニ　$$AB^2 = AC^2 + CB^2$$

故ニ　$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

卽チ　$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \qquad (1.)$$

上ノ式ガ A, B ノ位置如何ニ係ハラズ眞ナルコトハ第3節ニヨリテ明カナリ.

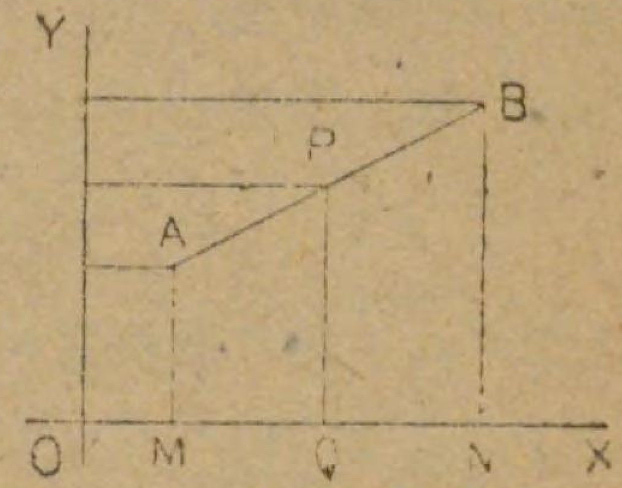
此ノ特別ナル場合トシテ原點 $O(0,0)$ ト點 $P(x, y)$ トノ距離ハ次ノ如シ.



$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

又二點ノ座標ヲ知ルトキハ之ヲ兩端トスル線分ノ中點ノ座標ハ次ノ如クシテ之ヲ索ムルコトヲ得.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ノ中點ヲ $P(x, y)$ トシ, A, B, P ヨリ横軸ニ夫々垂線 AM, BN, PQ ヲ引クトキハ



$$MQ = QN$$

$$MQ = OQ - OM = x - x_1$$

$$QN = ON - OQ = x_2 - x$$

故ニ
$$x - x_1 = x_2 - x$$

即チ
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

同樣ニ A, B, P ヨリ縱軸ニ垂線ヲ引クコトニヨリ

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

故ニ
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (2)$$

ハ線分ノ中點ノ座標ナリ.

以上ノ應用トシテ矩形 OABC ヲ取リ, OA, OC ヲ横軸及ビ縱軸ノ上ニ置キ,

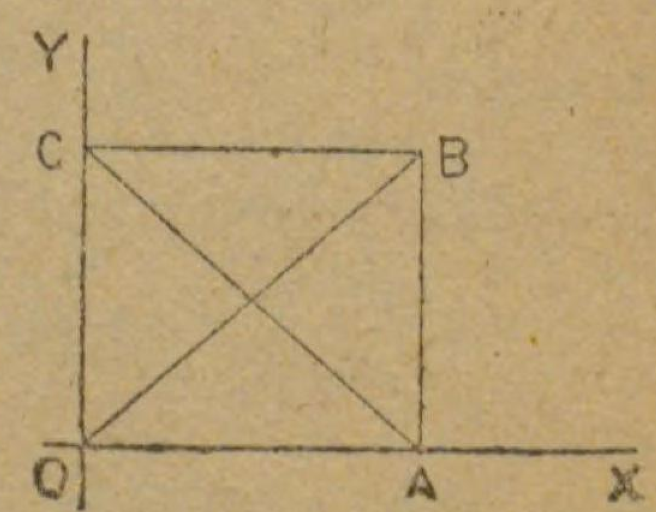
$$OA = a,\quad OC = c$$

トスルトキハ頂點ノ座標ハ夫々

$O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $B(a, c)$,

$C(0, c)$

ナリ.



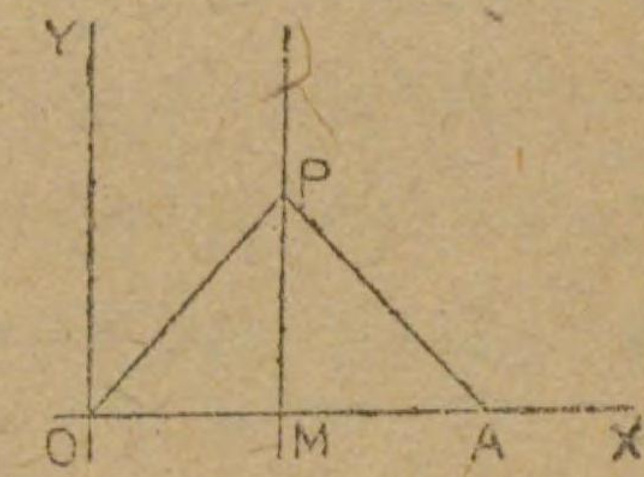
故ニ(1)ニヨリ

$$AC = \sqrt{a^2 + c^2} = OB$$

又 AC 及ビ OB ノ中點ノ座標ハ何レモ $\left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right)$ ナリ.

之ニヨリテ矩形ノ對角線ハ相等シク且ツ互ニ二等分スルコト明カナリ.

次ニ二點ヲ $O(0, 0)$, $A(a, 0)$ トシ, 任意ノ一點ヲ $P(x, y)$ トスルトキハ



$$\overline{OP}^2 = x^2 + y^2$$

$$\overline{AP}^2 = (a - x)^2 + y^2$$

故ニ P ガ O 及ビ A ヨリ等距離ニアリトスレバ

$$x^2 + y^2 = (a - x)^2 + y^2$$

即チ
$$a^2 - 2ax = 0$$

$a > 0$ ナルヲ以テ

$$x = \frac{a}{2}$$

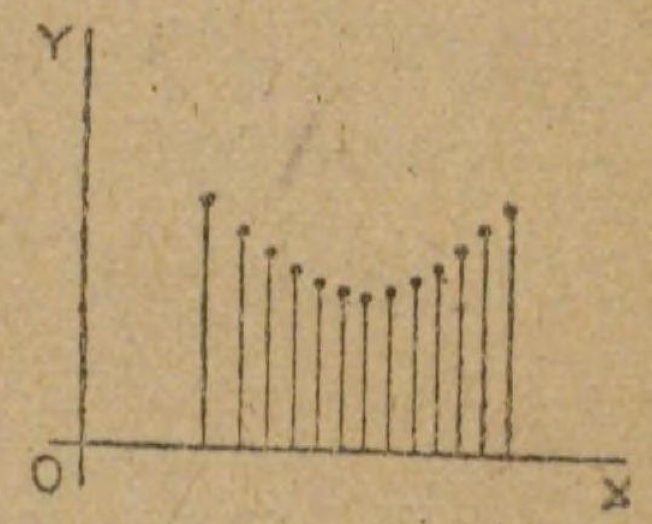
OA ノ中點 $M\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ ヲ通過シテ之ニ垂直ナル直線上ノ點ハ何レモ方程式 $x = \frac{a}{2}$ ヲ滿足シ, 其ノ右方ニアル點ノ座標ヲ x_1, y_1 トスレバ $x_1 > \frac{a}{2}$ 又其ノ左方ニアル點ノ座標ヲ x_2, y_2 トスレバ $x_2 < \frac{a}{2}$

故ニ M ヲ通過シテ, OA ニ垂直ナル直線上ノ點ハ O 及ビ A ヨリ等距離ニアル條件ヲ滿足シ其ノ他ノ點ハ之ヲ滿足セズ, 即チ二點 O, A ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ OA ヲ直角ニ二等分スル直線ナリ.

7. 函數ノ圖示

函數 $y=f(x)$ ニ於テ x ニ一ツノ値ヲ與フルトキ之ニ對應シテ y ノ實値ヲ得ル場合ニハ x, y ノ此ノ一對ノ値ハ前節ニヨリ平面上ニ於ケル一點ノ座標ト考フルコトヲ得.

x ニ順次ニ少シヅツ異リタル値 $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n, \ldots\ldots$ ヲ與フルトキ之ニ對應スル y ノ値 $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots, y_n, \ldots\ldots$ ヲ得, 從テ此ニ限リナク多クノ點ノ列ヲ決定スルコトトナル.



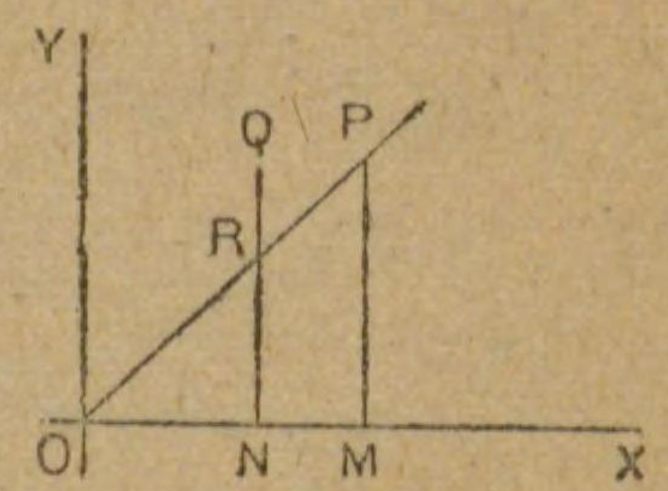
此ノ如クシテ得タル點列ニヨリ方程式 $y=f(x)$ ノ表ハス曲線ノ形ヲ畫キ, 之ニヨリテ函數ノ性質ヲ明カニスルコトヲ得ベシ.

次ニ函數ノ圖示ニ關スル二三ノ例ヲ揭グ.

(i) $y=x$

$x=0$ ノトキ $y=0$ ニシテ x ガ 0 ヨリ增大スルニ從ヒ y モ亦增大シ, 其ノ値ハ恒ニ相等シ, x ガ負ナルトキモ亦同樣ナリ

依テ角 XOY ノ二等分線上ニアル點 $P(x,y)$ ハ何レモ方程式 $y=x$ ヲ滿足ス.



此ノ二等分線ノ上方ニアル一點 $Q(x_1,y_1)$ ヲ取リ, OX ニ垂線ヲ引キ OP, OX トノ交點ヲ夫々 R,N トスルトキハ R ハ二等分線上ノ一點ナルガ故ニ

$$ON=NR$$

然ルニ $$NQ>NR$$

故ニ $$NQ>ON$$

即チ $$y_1>x_1$$

依テ二等分線ノ上方ニアル點ノ座標ハ方程式 $y=x$ ヲ滿足セズ, 其ノ下方ニアル點ニ就テモ同樣ナリ, 故ニ $y=x$ ハ座標軸 OX, OY ノナス角ノ二等分線ヲ表ハス.

(ii) $y=x^2$

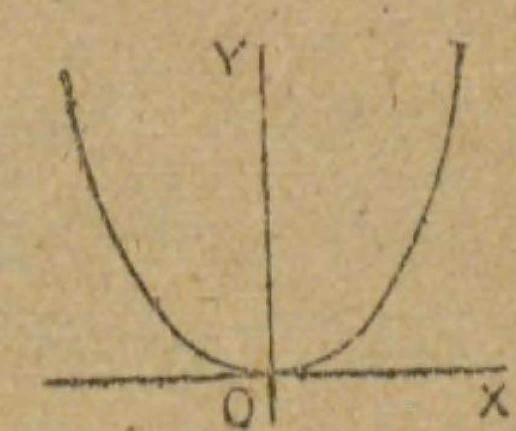
$x=0$ ノトキ $y=0$ ニシテ x ノ正負ニ關セズ y ノ値ハ恒ニ正ナリ, 故ニ曲線ハ橫軸ノ上方ニノミ存在ス,

x ノ代リニ $-x$ ト書クモ y ノ値變ゼズ, 故ニ曲線ハ縱軸ニ沿ウテ之ヲ折リ返ヘシ相重ナラシムルコトヲ得, 即チ縱軸ニ關シテ對稱ナリ.

x, y ノ相對應スル値ヲ擧グレバ次ノ如シ.

x	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8	±9	±10	……
y	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	……

即チ x ノ絕對値ガ增大スルニ從ヒ y ノ値ハ益增大ス, 故ニ曲線ハ原點ヲ左右ニ相距ルニ從ヒ益橫軸ニ遠ザカル.



上記ノ性質ヲ參考シテ曲線ヲ畫ケバ右ノ如キ圖形ヲ得.

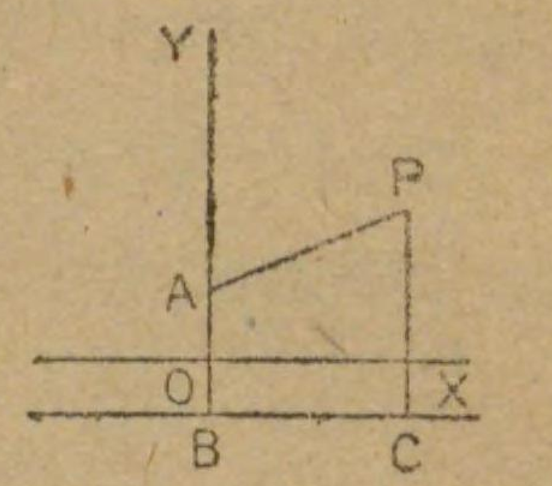
方程式 $y=x^2$ ハ之ヲ次ノ如ク書クコトヲ得.

$$\left(y+\frac{1}{4}\right)^2-\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=x^2$$

即チ

$$\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+x^2$$

O ヲ原點, P(x,y) ヲ曲線上ノ一點トシ, 縱軸上ノ一點 A ヲ取リ, $OA=\frac{1}{4}$ ナラシムルトキハ



$$\overline{AP}^2=\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+x^2$$

又横軸ニ平行ニ $\frac{1}{4}$ ノ距離ニ於テ A ノ反對ノ側ニ直線 BC ヲ引キ, P ヨリ之ニ垂線 PC ヲ下ストキハ

$$\overline{PC}^2=\left(y+\frac{1}{4}\right)^2$$

依テ $\overline{AP}^2=\overline{PC}^2$

從テ $AP=PC$

故ニ此ノ曲線ハ定點 A 及ビ定直線 BC ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ナリ, 之ヲ拋物線トイヒ, O ヲ其ノ頂點, A ヲ其ノ焦點, BC ヲ其ノ準線トイフ.

(iii) $y=\frac{1}{x}$

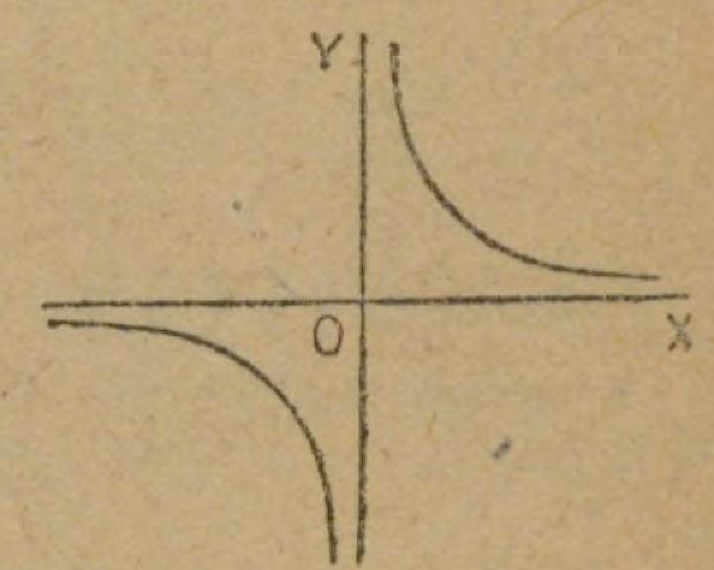
$x>0$ ナルトキハ $y>0$, 又 $x<0$ ナルトキハ $y<0$.

x,y ノ代リニ $-x,-y$ ト書クモ方程式變セズ, 故ニ原點ハ曲線上ノ點(x,y)及ビ點$(-x,-y)$ヲ兩端トスル線分ノ中點ナリ, 即チ曲線ハ原點ニ關シテ對稱ナリ

x,y ノ相對應スル値ヲ擧グレバ次ノ如シ.

x	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8	±9	±10	……
y	±1	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{3}$	$\pm\frac{1}{4}$	$\pm\frac{1}{5}$	$\pm\frac{1}{6}$	$\pm\frac{1}{7}$	$\pm\frac{1}{8}$	$\pm\frac{1}{9}$	$\pm\frac{1}{10}$	……

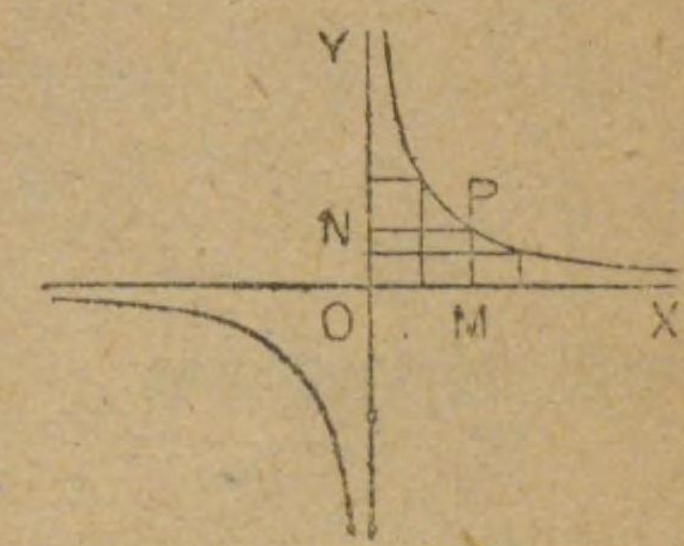
即チ x ガ 0 ヨリ益増大スルニ從ヒ y ノ値ハ益減少シ, x ノ限リナク大ナルトキ, y ノ値ハ限リナク小ナリ, 故ニ曲線ハ益横軸ニ近ヅク.



x ト y トヲ交換シテ考フルモ亦同樣ナリ.

上記ノ性質ヲ參考シテ曲線ヲ畫ケバ右ノ如キ圖形ヲ得.

尙此ノ曲線上ノ一點 P(x,y) ヨリ横軸及ビ縱軸ニ夫々垂線 PM, PN ヲ引クトキハ



$NP=OM=x$

$MP=ON=y$

然ルニ $xy=1$

故ニ $OM\cdot ON=1$

依テ此ノ曲線ハ座標軸ノ上ニ二邊 OM, ON ヲ有シ, 其ノ面積ガ 1 ニ等シキ矩形 OMPN ノ頂點 P ノ軌跡ナリ, 之ヲ雙曲線トイフ.

注意　曲線上ノ一點ヨリ一ツノ定直線ニ至ル距離ガ其ノ點ノ位置原點ヲ遠ザカルニ從ヒ益減少シ,終ニ限リナク小トナリ得ル場合ニハ此ノ直線ヲ其ノ曲線ノ漸近線トイフ.

上ノ場合ニ於テ OX, OY ハ曲線 $y=\frac{1}{x}$ ノ漸近線ナリ.

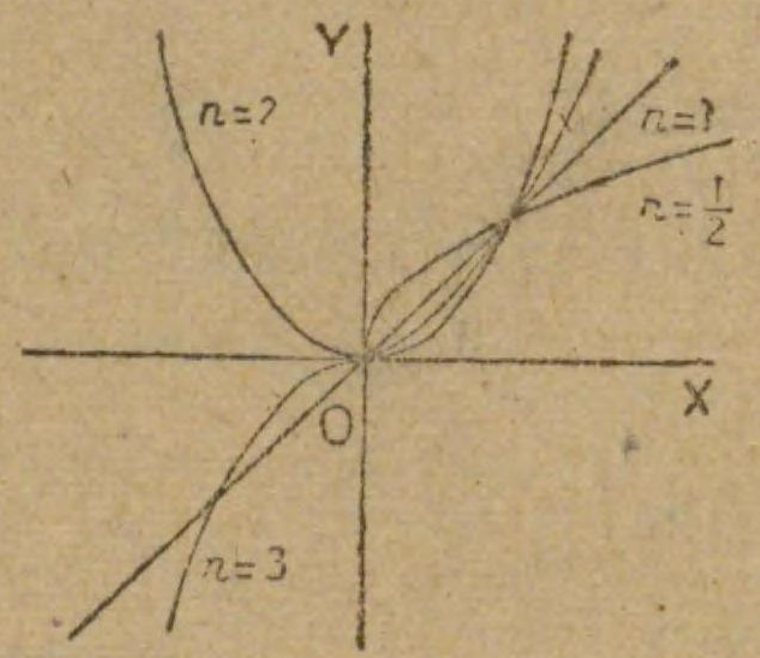
注意　上記ノ曲線ノ方程式ハ何レモ $y=x^n$ ノ特別ナル場合ニシテ此ノ方程式ノ表ハス曲線ハ何レモ點(1,1)ヲ通過シ且ツ n ガ偶數ナルトキハ點$(-1,1)$, n ガ奇數ナルトキハ點$(-1,-1)$, 又 $n>0$ ナルトキハ原點$(0,0)$ヲ通過ス.

$0<x<1$ ナルトキハ $x>x^2>x^3>x^4\cdots$; 從テ $\frac{1}{x}<\frac{1}{x^2}<\frac{1}{x^3}<\frac{1}{x^4},\cdots\cdots$

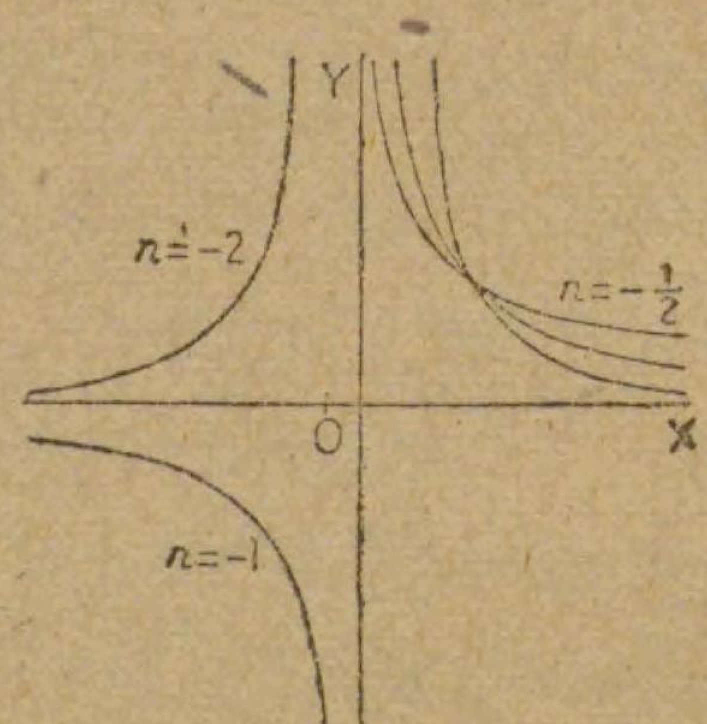
$x>1$ ナルトキハ $x<x^2<x^3<x^4\cdots$; 從テ $\frac{1}{x}>\frac{1}{x^2}>\frac{1}{x^3}>\frac{1}{x^4},\cdots\cdots$

同一ノ座標軸ヲ用ヒテ此等ノ曲線ヲ畫ケバ下ノ如シ.

$n\geqq 0$, 拋物線系曲線



$n<0$, 雙曲線系曲線



之ニヨリテ一ツノ種類ノ曲線ニ各共通ナル性質アルヲ見ルベシ.

8. 函數ノ種類

函數 $y=f(x)$ ハ其ノ形ニヨリ次ノ如キ區別アリ.

$y=ax+b$ ヲ一次ノ整函數, $y=ax^2+bx+c$ ヲ二次ノ整函數トイフ. 一般ニ n ガ正ノ整數ニシテ $a_0, a_1,\cdots\cdots, a_{n-1}, a_n$ ガ何レモ常數ナルトキ $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$ ヲ n 次ノ**整函數**トイフ.

m,n ガ何レモ正ノ整數ニシテ $a_0, a_1,\cdots\cdots, a_{n-1}, a_n, b_0, b_1,\cdots\cdots b_{m-1}, b_m$ ガ何レモ常數ナルトキ

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

ヲ**有理函數**トイフ, 整函數ハ有理函數ニ於テ $m=0$ ナル特別ノ場合ナリ.

$y=\sqrt[3]{x}, y=\sqrt{\frac{ax^2+bx+c}{x+k}}$ ノ如ク變數 x ガ根號ノ下ニアル項ヲ含ムモノヲ**無理函數**トイフ.

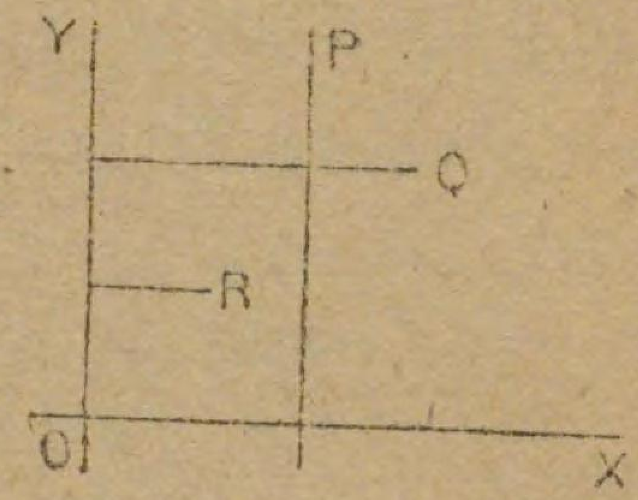
有理函數, 無理函數ヲ併セテ之ヲ**代數函數**トイフ.

代數函數ニアラザル函數ヲ**超越函數**トイフ, $y=\sin x$ ハ一ツノ超越函數ナリ.

第三章　直線，圓，橢圓及ビ雙曲線

9. 直線ノ方程式

直線ガ縱軸ニ平行ナルトキハ其ノ上ニアル點ノ横座標ハ何レモ相等シ，之ヲ c トスレバ直線上ノ任意ノ一點 P ノ座標ハ方程式 $x=c$ ヲ滿足ス．

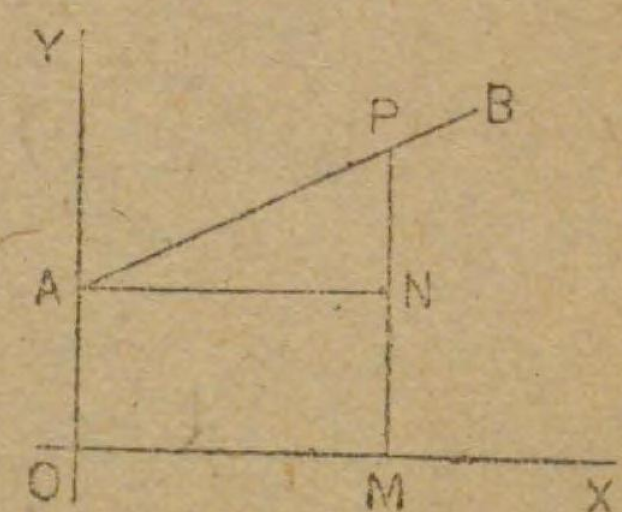


此ノ直線ノ右方ニアル點 Q ノ横座標ヲ x_1 トスレバ $x_1>c$，又左方ニアル點 R ノ横座標ヲ x_2 トスレバ $x_2<c$

故ニ $x=c$ ハ此ノ直線ヲ表ハス方程式ニシテ，其ノ右方ニアル點ノ座標ハ何レモ不等式 $x>c$，又左方ニアル點ノ座標ハ $x<c$ ヲ滿足ス．

同様ニ $y=c'$ ハ横軸ニ平行ナル直線ノ方程式ナリ．

次ニ直線 AB ガ座標軸ニ平行ナラズトスレバ必ズ縱軸ニ交ハル，此ノ點ヲ $A(0,k)$ トシ，AB 上ノ一點 $P(x,y)$ ヨリ横軸ニ垂線 PM，又 A ヨリ PM ニ垂線 AN ヲ引クトキハ



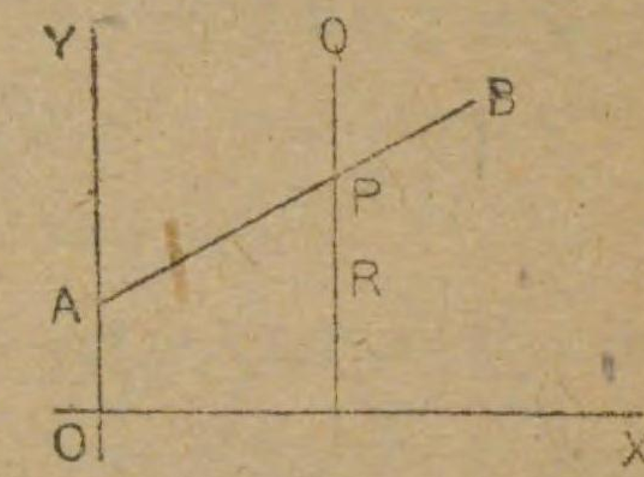
$$OM=x,\quad MP=y,\quad OA=k$$

又 $\dfrac{MP-MN}{OM}=\dfrac{NP}{AN}$ ハ一定ナリ，之ヲ m トスレバ

$$\frac{y-k}{x}=m$$

即チ
$$y=mx+k \qquad (1)$$

此ニ m ハ直線 AB ガ横軸ノ正方向トナス角ノ正切ナリ，之ヲ直線 AB ノ**方向係數**トイフ．



尙 AB ノ上方ニアル一點 $Q(x,y)$ ヲ取リ，Q ヨリ横軸ニ垂線ヲ引キ，AB トノ交點ヲ $P(x,y_1)$ トスルトキハ

$$y_1=mx+k$$

然ルニ
$$y>y_1$$

故ニ
$$y>mx+k$$

同様ニ AB ノ下方ニアル一點 $R(x,y)$ ヲ取ルトキハ

$$y<mx+k$$

故ニ $y=mx+k$ ハ直線 AB ヲ表ハス方程式ニシテ，其ノ上方ニアル點ノ座標ハ何レモ不等式 $y>mx+k$，又其ノ下方ニアル點ノ座標ハ $y<mx+k$ ヲ滿足ス．

一般ニ二元一次方程式 $ax+by+c=0$ ニ於テ，$b=0$ ナルトキハ $y=-\dfrac{c}{a}$ トナリ，$b\gtrless 0$ ナルトキハ $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$ トナル，故ニ二元一次方程式ハ一ツノ直線ヲ表ハスモノトス．

今直線 $ax+by+c=0$ 上ニアル二點ヲ $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ トスレバ

$$ax+by+c=0$$

$$ax_1+by_1+c=0$$

$$ax_2+by_2+c=0$$

即チ $$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$$

$$a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2)=0$$

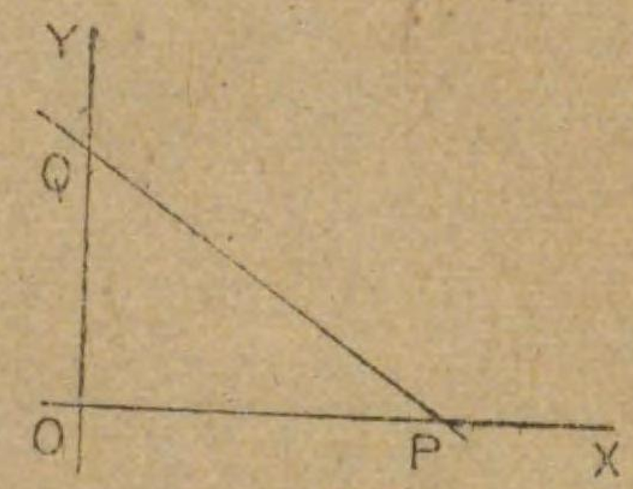
此ノ二式ヨリ a, b ヲ消去スレバ

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2} \qquad (2)$$

(2)ハ二點 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ヲ通過スル直線ノ方程式ナリ.

此ノ特別ナル場合トシテ $x_1=\alpha,\ y_1=0,\ x_2=0,\ y_2=\beta$ トスレバ

$$\frac{x-\alpha}{\alpha}=\frac{y}{-\beta}$$

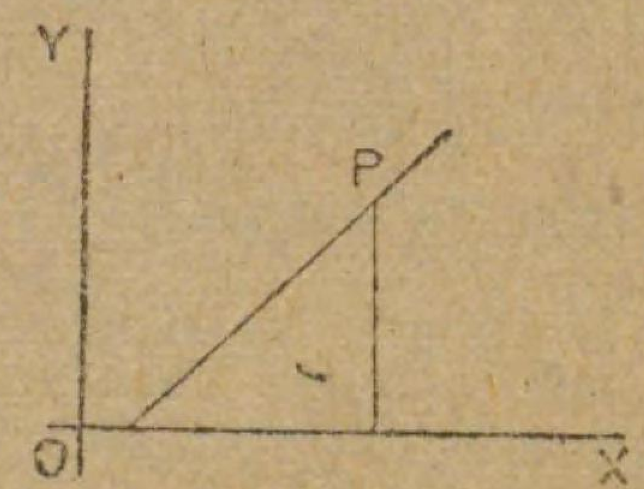


即チ $$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1 \qquad (3)$$

(3)ハ横軸上ノ一點 $P(\alpha,0)$ 及ビ縦軸上ノ一點 $Q(0,\beta)$ ヲ通過スル直線ノ方程式ニシテ, α,β ヲ横軸及ビ縦軸上ニ於ケル直線ノ截片トイフ.

又(2)ヨリ

$$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$$



此ニ $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ ハ直線ガ横軸ノ正方向トナス角ノ正切ニ等シ, 之ヲ m トスレバ

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad (4)$$

(4)ハ一點 $P(x,y)$ ヲ通過シ, 方向係數ガ m ニ等シキ直線ノ方程式ナリ.

10. 二ツノ直線ノ關係

二ツノ直線ノ方程式ヲ

$$y=m_1x+k_1, \qquad y=m_2x+k_2$$

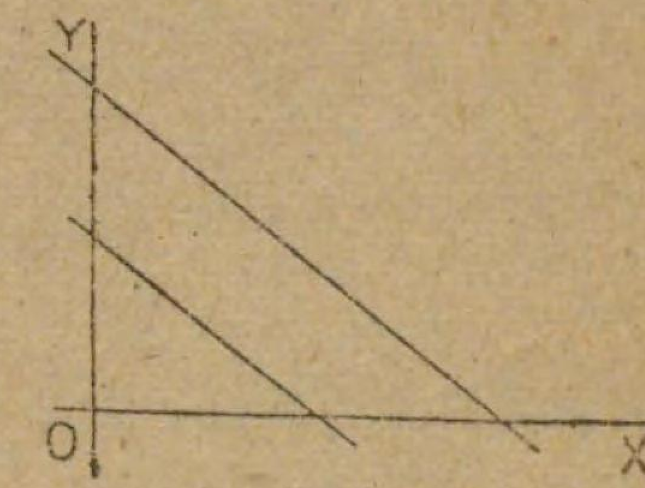
トシ, 此ノ直線ガ横軸ノ正方向トナス角ヲ夫々 α_1, α_2 トスレバ

$$m_1=\tan\alpha_1, \quad m_2=\tan\alpha_2$$

(i) $m_1=m_2,\ k_1=k_2$

此ノ場合ニハ二ツノ方程式ハ全ク同一トナリ, 直線ハ相一致ス.

(ii) $m_1=m_2,\ k_1\gtrless k_2$



此ノ場合ニハ二ツノ直線ノ方向相等シクシテ, 縦軸上ノ截片ハ等シカラズ, 故ニ直線ハ互ニ平行ナリ.

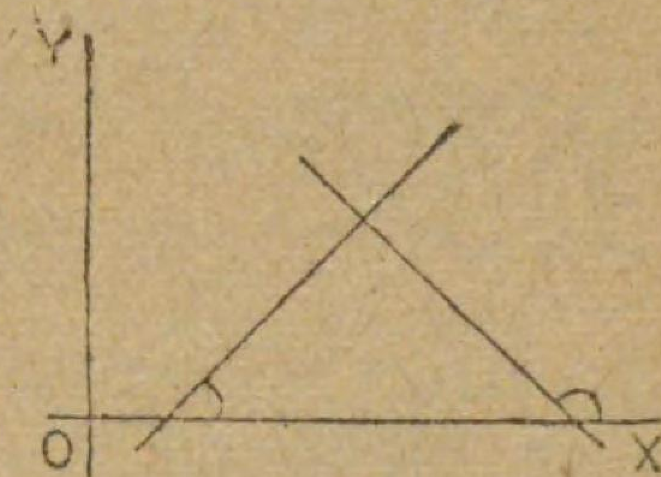
(iii) $m_1\gtrless m_2$

此ノ場合ニハ二ツノ方程式ヲ聯立方程式トシテ

$$x=-\frac{k_1-k_2}{m_1-m_2}, \qquad y=\frac{m_1k_2-m_2k_1}{m_1-m_2}$$

ヲ得, 即チ二ツノ方程式ヲ滿足スル x, y ノ一對ノ値アリ, 故ニ二ツノ直線ハ一點ヲ共有ス, 即チ相交ハル.

此ノ特別ナル場合トシテ二ツノ直線ガ互ニ垂直ナルトキハ

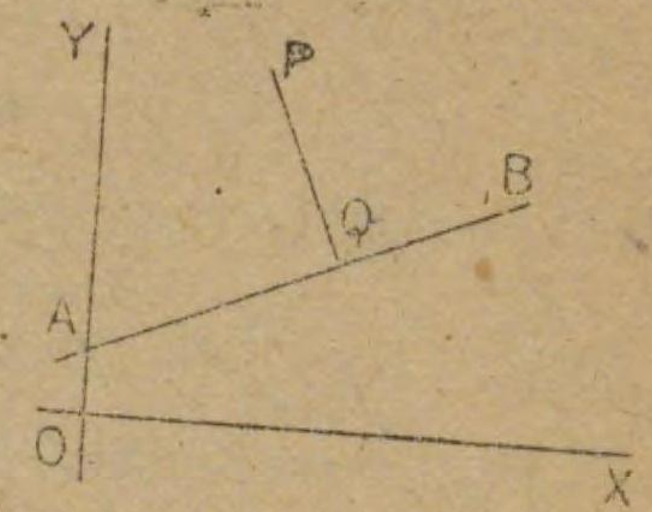


$$\tan\alpha_2=\tan\left(\alpha_1+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\alpha_1}$$

即チ $$m_1m_2=-1$$

故ニ $m_1m_2=-1$ ハ二ツノ直線ガ互ニ直交スル條件ナリ.

今一點 $P(x_0, y_0)$ ヨリ直線 $y=mx+k$ ニ至ル垂線距離ヲ索メントセバ P ヲ通過シテ之ニ垂直ナル直線



$$y-y_0=-\frac{1}{m}(x-x_0)$$

ヲ引、　此ノ二ツノ交點　$Q(x,y)$

ヲ索ムルトキハ第6節ニヨリ

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

ヨリ PQ ノ長サヲ得，即チ二ツノ方程式

$$y=mx+k$$

$$y-y_0=-\frac{1}{m}(x-x_0)$$

ヲ聯立方程式トシテ解クトキハ

$$x-y_0=\frac{m(y_0-mx_0-k)}{1+m^2}$$

從テ　$$y-y_0=-\frac{y_0-mx_0-k}{1+m^2}$$

依テ　$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\pm\sqrt{1+m^2}\,\frac{y_0-mx_0-k}{1+m^2}$$

即チ　$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\pm\frac{y_0-mx_0-k}{\sqrt{1+m^2}}$$

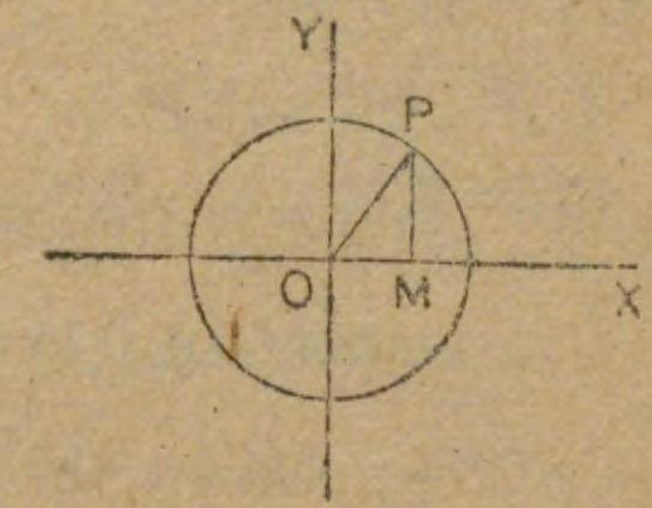
故ニ索ムル垂線距離ハ

$$\pm\frac{y_0-mx_0-k}{\sqrt{1+m^2}}$$

ニシテ ± ノ記號ハ此ノ式ヲ正ナラシムルガ如ク取ルベキモノトス，即チ y_0-mx_0-k ノ正負ニヨリテ＋又ハ－ヲ取ルベシ.

11. 圓ノ方程式

座標ノ原點 (0, 0) ヲ中心トシ，半徑ガ r ナル圓ノ上ニアル一點ヲ $P(x,y)$ トシ，P ヨリ横軸ニ垂線 PM ヲ引クトキハ



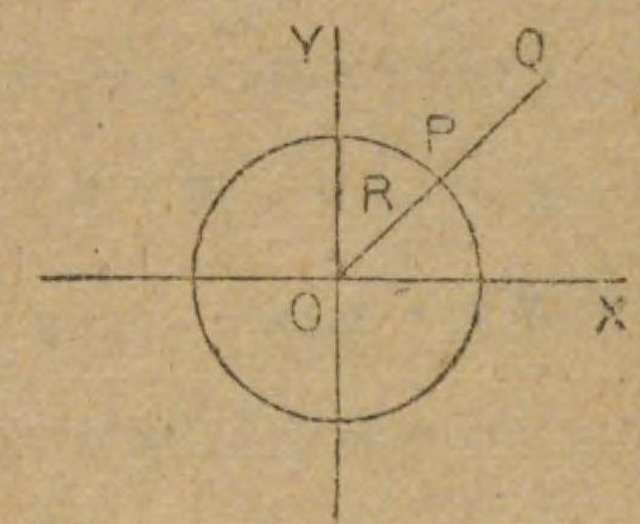
$$\overline{OP}^2=\overline{OM}^2+\overline{MP}^2$$

然ルニ　$OP=r,\ OM=x,\ MP=y$

故ニ　$$x^2+y^2=r^2$$

即チ　$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$$

次ニ圓ノ外ニアル一點ヲ $Q(x,y)$ トシ，直線 OQ ヲ引キ，圓トノ交點ヲ $P(x_1, y_1)$ トスルトキハ



$$x^2+y^2=\overline{OQ}^2$$

$$x_1^2+y_1^2=r^2,\ OQ>r$$

故ニ　$$x^2+y^2>r^2$$

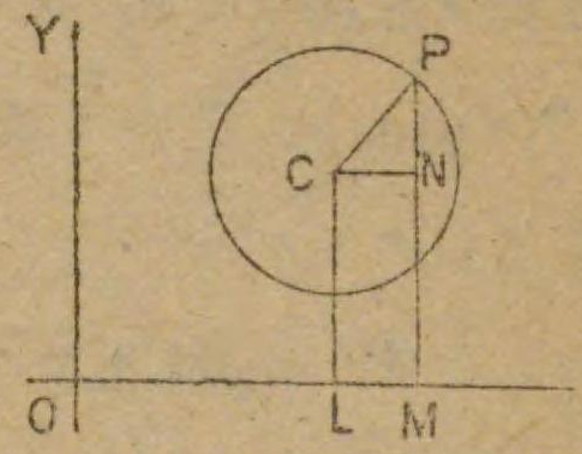
同樣ニ圓ノ内ニアル一點ヲ $R(x,y)$ トスレバ

$$x^2+y^2<r^2$$

故ニ $x^2+y^2=r^2$，即チ $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ ハ原點ヲ中心トシ，半徑ガ r ナル圓ヲ表ハス方程式ニシテ，其ノ外ニアル點ノ座標ハ何レモ不等式 $x^2+y^2>r^2$ ヲ滿足シ，其ノ內ニアル點ノ座標ハ $x^2+y^2<r^2$ ヲ滿足ス

又 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ ハ圓ニ於テ $y\geqq 0$ ナル部分即チ横軸ヨリ上方ニアル半圓ヲ表ハシ，$y=-\sqrt{r^2-x^2}$ ハ $y\leqq 0$ ナル部分即チ横軸ヨリ下方ニアル半圓ヲ表ハスモノトス.

更ニ一定ノ直交軸ニ關シテ定點 $C(a,b)$ ヨリ一定ノ距離 r ニアル點ヲ $P(x,y)$ トシ，C 及ビ P ヨリ横軸ニ夫々垂線 CL, PM ヲ引キ，C ヨリ PM ニ垂線 CN ヲ引ケバ



$$\overline{CP}^2=\overline{CN}^2+\overline{NP}^2$$
$$=(OM-OL)^2+(MP-MN)^2$$
$$=(OM-OL)^2+(MP-LC)^2$$

然ルニ　$CP=r,\ OM=x,\ MP=y,\ OL=a,\ LC=b$

故ニ　$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad (1)$$

即チ　$$y=b\pm\sqrt{r^2-(x-a)^2}$$

(1)ハ $C(a,b)$ ヲ中心トシ，r ヲ半徑トスル圓ノ方程式ナリ．

(1)ニ於テ $b=0$ ト置クトキハ　$(x-a)^2+y^2=r^2$　(2)

$a=0$ ト置クトキハ　$x^2+(y-b)^2=r^2$　(3)

$b=0,\ a=r$ ト置クトキハ　$x^2+y^2=2rx$　(4)

$a=0,\ b=r$ ト置クトキハ　$x^2+y^2=2ry$　(5)

$a=0,\ b=0$ ト置クトキハ　$x^2+y^2=r^2$　(6)

(2)及ビ(3)ハ夫々横軸及ビ縦軸上ニ中心ヲ有スル圓，(4)及ビ(5)ハ原點ヲ通過シ夫々横軸及ビ縦軸上ニ中心ヲ有スル圓，(6)ハ原點ヲ中心トスル圓ヲ表ハス．

(1)　ニ於テ　$x-a=X,\ y-b=Y$ ト置クトキハ

$$X^2+Y^2=r^2$$

トナリ　(6)ト一致ス，之ハ座標軸ヲ平行ニ移動シ圓ノ中心 $C(a,b)$ ヲ新原點トナシタルモノトス．

注意　上ニ擧ゲタル方程式ヨリ種々ノ重要ナル關係ヲ簡單ニ誘出スルコトヲ得，例ヘバ(6)ヨリ

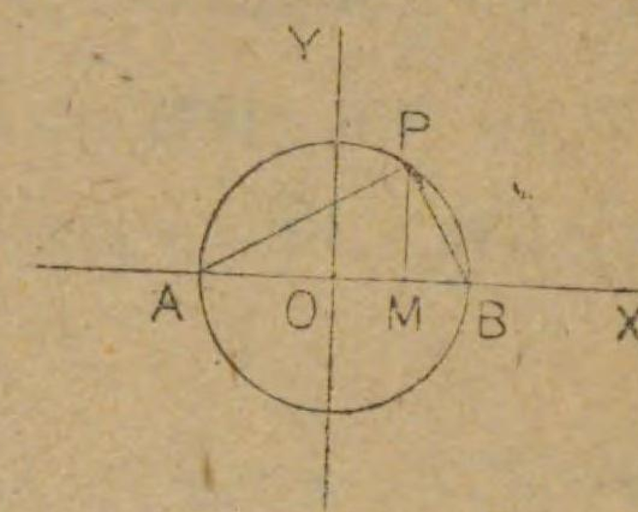
$$y^2=r^2-x^2=(r-x)(r+x) \qquad (7)$$

即チ　$$\frac{y}{x-r}\cdot\frac{y}{x+r}=-1$$

此ノ式ハ次ノ二ツノ方程式ヨリ m ヲ消去シタル結果ト同一ナリ．

$$y=m(x-r),\quad y=-\frac{1}{m}(x+r)$$

然ルニ此ノ二ツノ方程式ハ直徑 AB ノ兩端ヲ通過シテ互ニ垂直ナル直線ヲ表ハシ，其ノ交點ハ恒ニ圓ノ上ニアリ，之ニヨリテ半圓ニ於ケル角ハ直角ナルコト明カナリ．



又 $P(x,y)$ ヨリ直徑 AB ニ垂線 PM ヲ引クトキハ

$$AM=r+x,\ MB=r-x,\ PM=y$$

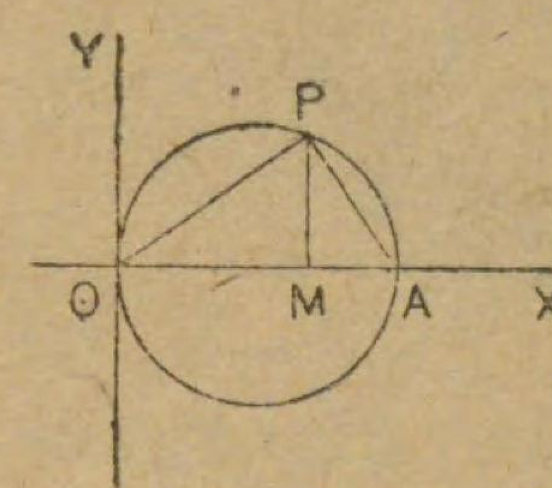
故ニ(7)ヨリ

$$\overline{PM}^2=\overline{AM}\cdot\overline{MB}$$

又(4)ヨリ

$$x^2+y^2=2rx$$

圓上ノ一點 $P(x,y)$ ヨリ直徑 OA ニ垂線 PM ヲ引クトキハ



$$OM=x,\ OA=2r$$
$$\overline{OP}^2=\overline{OM}^2+\overline{MP}^2=x^2+y^2$$

故ニ　$$\overline{OP}^2=\overline{OA}\ \overline{OM}$$

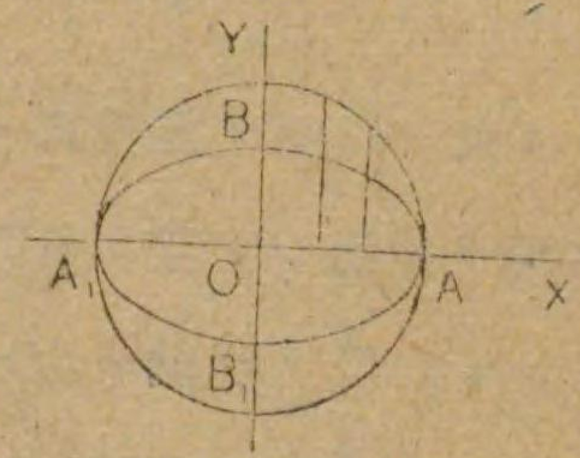
更ニ圓ノ方程式 $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$ ニ於テ $\sqrt{a^2-x^2}$ ノ代リニ $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $a>b$ ト置クトキハ次ノ式ヲ得

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

即チ

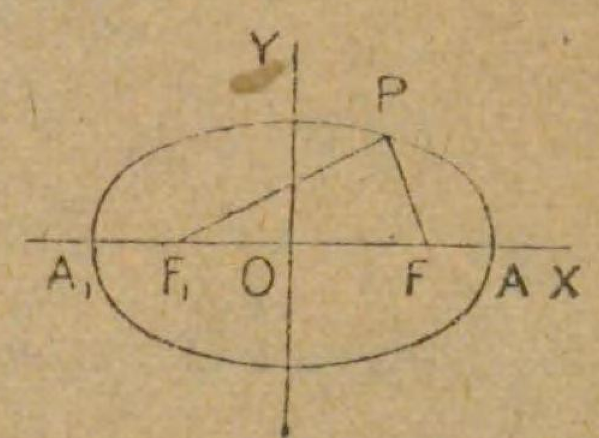
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

此ノ方程式ノ表ハス曲線ハ半徑ガ a ナル圓上ノ點ノ縦座標ヲ $\frac{b}{a}$ ノ比ニ縮メテ得タルモノニシテ之ヲ橢圓トイヒ，座標軸トノ交點 A, A_1, B, B_1 ヲ其ノ頂點トイヒ，AA_1 ヲ其ノ長軸，BB_1 ヲ其ノ短軸トイフ.



今 $\sqrt{a^2-b^2}=c$ ト置キ，AA_1 ノ上ニ二點 F$(c,0)$, $F_1(-c,0)$ ヲ取リ曲線上ノ任意ノ一點ヲ P(x,y) トスルトキハ

$$\begin{aligned} FP^2 &= (c-x)^2+y^2 \\ &= (c-x)^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) \\ &= a^2-2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2 \end{aligned}$$



故ニ $$FP=a-\frac{c}{a}x$$

同樣ニ $$F_1P=a+\frac{c}{a}x$$

依テ $$FP+F_1P=2a$$

故ニ橢圓ハ二定點F, F_1 ヨリノ距離ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ト考フルコトヲ得，定點 F, F_1 ヲ其ノ焦點トイフ.

F 及ビ F_1 ガ相一致スルトキハ $c=0$ 卽チ $a=b$ トナリテ橢圓ハ圓ナルモノトス

尚又 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ノ代リニ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 卽チ $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ ヲ取ルトキハ，此ノ方程式ノ表ハス曲線ハ $x=\pm a$ ノトキ $y=0$ ニシテ $x\geqq a$ 及ビ $x\leqq -a$ ノトキノミ實在ス，故ニ點 $(a,0)$, $(-a,0)$ ニ於テ橫軸ニ交ハリ，直線 $x=a$ ノ右方及ビ $x=-a$ ノ左方ニアリ.

此ノ方程式ハ x 及ビ y ノ偶數冪ノミヲ含ムガ故ニ曲線ハ橫軸ニ關シテモ亦縦軸ニ關シテモ對稱ナリ.

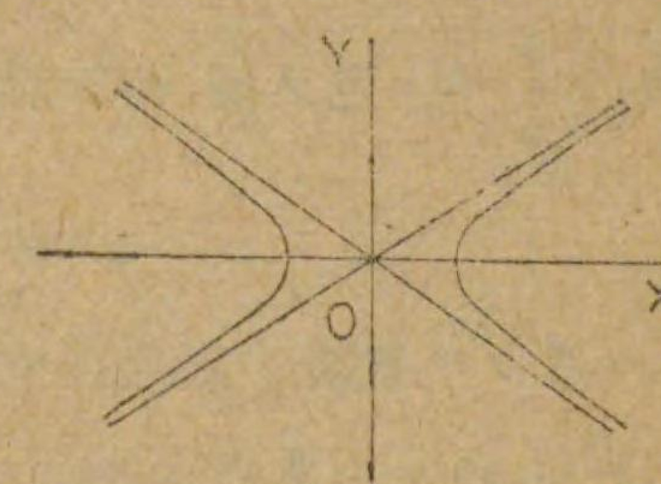
又 $$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \qquad y_1=\frac{b}{a}x$$

ト置クトキハ

$$y_1-y=\frac{b}{a}\left\{x-\sqrt{x^2-a^2}\right\}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

故ニ $x>a$ ナルトキニ $y_1>y$ ニシテ x ノ增大スルニ從ヒ y_1-y ハ益減少シ終ニ 0 ニ近ヅク，卽チ直線 $y=\frac{b}{a}x$ ハ此ノ曲線ノ漸近線ナリ.

此ノ曲線ハ雙曲線ニシテ第7節ニ於テ擧ゲタルモノハ漸近線ガ互ニ直角ヲナセルモノ卽チ $a=b$ ナル場合ナリ.

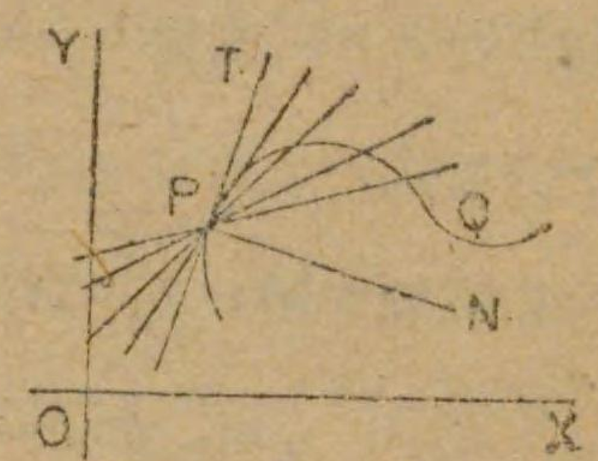


尚雙曲線ハ二ツノ定點ヨリノ距離ノ差ガ一定ナル點ノ軌跡ト考ヘ得ベキコトハ橢圓ノ場合ト同樣ニ容易ニ證明セラルルモノトス

12. 切線及ビ法線

一定ノ曲線上ニ於ケル一ツノ定點ヲ P トシ，此ノ曲線上ニ於テ P ニ近ク第二ノ點 Q ヲ取リ，Q ヲシテ此ノ曲線ニ沿ウテ P ニ近ヅカシムルトキ直線 PQ ガ一定ノ直線 PT ニ限リナク近ヅクトキハ此ノ一定ノ直線ヲ P ニ於ケル此ノ曲線ノ切線トイヒ，P ヲ其ノ切點トイフ.

又 P ヲ通過シテ其ノ點ニ於ケル切線ニ垂直ナル直線 PN ヲ P ニ於ケル此ノ曲線ノ法線トイフ.



一ツノ曲線上ニ於ケル點 $P(x_0, y_0)$ 及ビ (x_0+h, y_0+k) ヲ通過スル直線ノ方程式ヲ

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

トスレバ

$$(y_0+k)-y_0=m(x_0+h-x_0)$$

即チ
$$m=\frac{k}{h}$$

故ニ Q ガ P ニ限リナク近ヅクトキ，即チ k, h ガ共ニ限リナク小ナルトキ，$\frac{k}{h}$ ガ一定ノ値 m_1 ニ限リナク近ヅク場合ニハ

$$y-y_0=m_1(x-x_0)$$

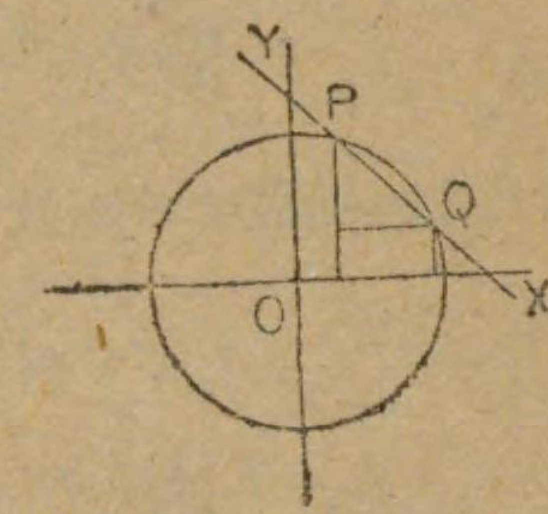
ハ P ニ於ケル切線ノ方程式ナリ.

又 P ニ於ケル法線ハ切線ニ垂直ナルガ故ニ第10節ニヨリ其ノ方程式次ノ如シ

$$y-y_0=-\frac{1}{m_1}(x-x_0)$$

圓 $x^2+y^2=r^2$ 上ニ於ケル二點 $P(x_0, y_0)$, $Q(x_0+h, y_0+k)$ ヲ通過スル直線ノ方程式ハ

$$y-y_0=m(x-x_0)$$



此ニ
$$m=\frac{k}{h}$$
$$x_0^2+y_0^2=r^2,$$
$$(x_0+h)^2+(y_0+k)^2=r^2$$

後ノ二式ヨリ

$$2hx_0+2ky_0+h^2+k^2=0$$

ヲ得,從テ

$$\frac{k}{h}=-\frac{2x_0+h}{2y_0+k}$$

依テ k, h ガ限リナク 0 ニ近ヅクトキ $\frac{k}{h}$ ハ限リナク $-\frac{x_0}{y_0}$ ニ近ヅク

即チ
$$m_1=-\frac{x_0}{y_0}$$

故ニ $P(x_0, y_0)$ ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$$

即チ
$$x_0x+y_0y=r^2$$

又法線ノ方程式ハ

$$y-y_0=\frac{y_0}{x_0}(x-x_0)$$

即チ
$$\frac{y}{y_0}=\frac{x}{x_0}$$

此ノ直線ハ圓ノ中心 (0, 0) ヲ通過ス.

故ニ圓ノ切線ハ其ノ切點ニ於テ半徑ニ垂直ナルコト明カナリ.

又楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上ノ一點 (x_0, y_0) ニ於ケル切線ハ前同様ニシ

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$

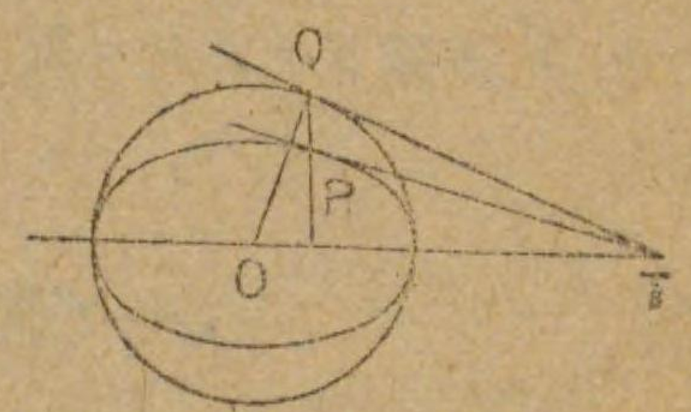
法線ハ之ニ垂直ナルガ故ニ

$$\frac{x-x_0}{\frac{x_0}{a^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{y_0}{b^2}}$$

切線ノ方程式ニ於テ $y=0$ ト置キテ横軸トノ交點ヲ求ムルトキハ

$$x=\frac{a^2}{x_0}.$$

此ノ値ハ b 及ビ y_0 ニ無關係ナルガ故ニ b ノ如何ニ係ハラズ，同一ノ横座標ヲ有スル點ニ於ケル切線ハ同一ノ點ニ於テ横軸ニ交ハル，依テ楕圓上ノ一點 P ニ於ケル切線ヲ引カントセバ原點ヲ中心トシテ半徑ガ a ナル圓ヲ畫キ，P ヨリ横軸ニ垂線ヲ引キ，圓トノ交點ヲ Q トシ，半徑 OQ ヲ作リ，之ニ垂直ニ切線 QT ヲ引キ，横軸トノ交點ヲ T トシ，TP ヲ作ルトキハ P ニ於ケル楕圓ノ切線ヲ得ベシ，又 P ニ於テ PT ニ垂直ナルモノハ卽チ其ノ法線ナリ.



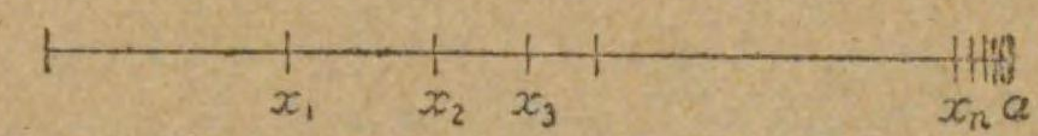
第四章　極限及ビ連續

13. 變數ノ極限値

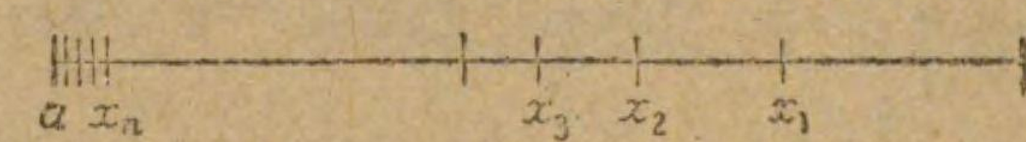
變數 x ガ順次ニ $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots$ ノ値ヲ取リテ，一定ノ値 a ニ限リナク近ヅクトキ卽チ a ト x_n トノ差ノ絶對値ヲ何程ニテモ小ナラシメ得ルトキニハ變數 x ハ a ニ收斂ス，或ハ x ノ極限値ハ a ナリトイヒ，之ヲ $x \to a$ ニテ表ハス.

變數 x ノ極限値ガ a ナルトキ次ノ如ク三種ノ區別アリ.

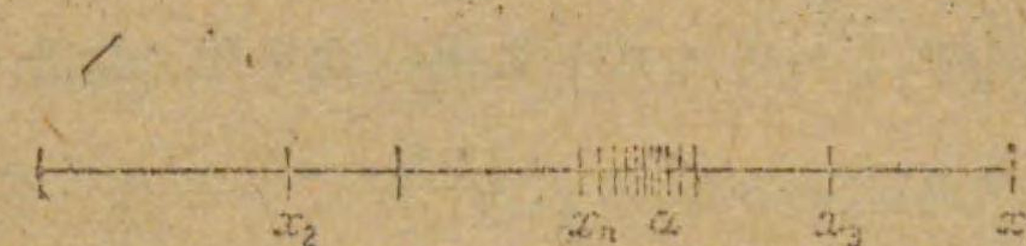
I. x ガ最初ニ a ヨリモ小ナル値ヲ取リ，以後順次ニ増大シテ終ニ a ニ近ヅク場合



II. x ガ最初ニ a ヨリモ大ナル値ヲ取リ，以後順次ニ減少シテ終ニ a ニ近ヅク場合



III. x ガ最初ニ a ヨリモ大ナル値又ハ之ヨリモ小ナル値ヲ取リ，以後或ハ a ヨリモ小，或ハ之ヨリモ大ナル値ヲ經テ終ニ a ニ近ヅク



變數 x ガ 0 ニ收斂スルトキ卽チ $x\to 0$ ナルトキハ x ハ無限小トナルトイフ．

變數 x ノ値ガ次第ニ增大シテ結局何程大ナル正數ヨリモ大ナル値ヲ取ルトキハ之ヲ $x\to\infty$ ニテ表ハシ，x ハ無限大トナルトイフ．

又 x ガ負ノ値ヲ取リ，其ノ絕對値ガ次第ニ增大シテ結局何程大ナル正數ヨリモ大ナルトキハ之ヲ $x\to-\infty$ ニテ表ハシ，x ハ負ノ無限大トナルトイフ．

次ニ變數ノ極限ニ關スル二三ノ例ヲ揭グ．

(i)　$x_1=0.3,\ x_2=0.33,\ x_3=0.333,\ x_4=0.3333,\ \cdots\cdots$

x ガ順次上ノ如キ値ヲ取リテ進ムトキハ

$$\frac{1}{3}-x_1=\frac{1}{3}-0.3=\frac{1}{3}-\frac{3}{10}=\frac{1}{30}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{3}-x_2=\frac{1}{3}-0.33=\frac{1}{3}-\frac{33}{100}=\frac{1}{300}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{10^2}$$

$$\frac{1}{3}-x_3=\frac{1}{3}-0.333=\frac{1}{3}-\frac{333}{1000}=\frac{1}{3000}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{10^3}$$

$$\frac{1}{3}-x_4=\frac{1}{3}-0.3333=\frac{1}{3}-\frac{3333}{10000}=\frac{1}{30000}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{10^4}$$

一般ニ

$$\frac{1}{3}-x_n=\frac{1}{3}\times\frac{1}{10^n}$$

此ノ如クシテ x ハ恒ニ $\frac{1}{3}$ ヨリモ小ニシテ順次ニ增大シ，$\frac{1}{3}$ ト x トノ差ハ何程ニテモ小ナラシムルコトヲ得，故ニ此ノ場合ニ x ノ極限値ハ $\frac{1}{3}$ 卽チ $x\to\frac{1}{3}$ ナリ．

(ii)　$x_1=1,\ x_2=\frac{1}{2},\ x_3=\frac{3}{4},\ \cdots\cdots,\ x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2},\ \cdots\cdots$

x ガ順次上ノ如キ値ヲ取リテ進ムトキハ

$$2x_n+x_{n-1}=2x_{n-1}+x_{n-2}$$

同樣ニ　$$2x_{n-1}+x_{n-2}=2x_{n-2}+x_{n-3}$$

從テ　$$2x_n+x_{n-1}=2x_{n-1}+x_{n-2}=2x_{n-2}+x_{n-3}=\cdots\cdots=2x_2+x_1$$

然ルニ　$x_1=1,\ x_2=\frac{1}{2}.$

故ニ　$$x_n=1-\frac{1}{2}x_{n-1}$$

依テ　$$x_n=1-\frac{1}{2}x_{n-1}=1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}x_{n-2}\right)=1-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2x_{n-2}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}x_1$$

故ニ　$$x_n=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

此ノ場合ニハ x ハ 1 ト $\frac{1}{2}$ トノ間ニアリテ交互ニ增大又ハ減少シ結局 $\frac{2}{3}$ ニ近ヅク，故ニ x ノ極限値ハ $\frac{2}{3}$ 卽チ $x\to\frac{2}{3}$ ナリ．

(iii)　$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=\frac{1}{4},\ x_3=\frac{1}{8},\ \cdots\cdots,\ x_n=\frac{1}{2^n},\ \cdots\cdots$

此ノ場合ニハ x ハ恒ニ正ニシテ次第ニ減少シ何程ニテモ小ナラシムルコトヲ得，故ニ x ハ無限小トナル卽チ $x\to 0$ ナリ．

(iv)　$x_1=10,\ x_2=10^2,\ x_3=10^3,\ \cdots\cdots,\ x_n=10^n,\ \cdots\cdots$

此ノ場合ニハ如何ニ大ナル數ヲ取ルモ 10^n ヲシテ之ヨリモ大ナラシムルコトヲ得，故ニ x ハ無限大トナル卽チ $x\to\infty$ ナリ．

14. 函數ノ極限値

變數 x ガ順次ニ $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots$ ノ値ヲ經テ一定ノ値 a ニ限リナク近ヅクトキ函數 $y=f(x)$ モ亦之ニ對應スル値 $y_1, y_2, y_3, \cdots\cdots, y_n, \cdots\cdots$ ヲ經テ他ノ一定ノ値 b ニ限リナク近ヅク場合ニハ x ガ a ニ收斂スルトキ y ハ b ニ收斂ス，或ハ x ノ極限値ガ a ナルトキ $f(x)$ ノ極限値ハ b ナリトイヒ，之ヲ $\lim\limits_{x\to a} y=b$ ニテ表ハス．

例ヘバ $y=x^3$ ニ於テ

$$x_1=\frac{1}{10},\quad x_2=\frac{1}{10^2},\quad x_3=\frac{1}{10^3},\quad x_4=\frac{1}{10^4},\ \cdots\cdots$$

ナルトキ

$$y_1=\frac{1}{10^3},\quad y_2=\frac{1}{10^6},\quad y_3=\frac{1}{10^9},\quad y_4=\frac{1}{10^{12}},\ \cdots\cdots$$

ニシテ x ガ $\frac{1}{10^n}$ ヨリモ小ナルトキハ x^3 ハ $\frac{1}{10^{3n}}$ ヨリモ小ナリ，故ニ x ガ 0 ニ收斂スルトキハ y モ亦 0 ニ收斂ス，即チ

$$\lim_{x\to 0} x^3=0$$

次ニ x ガ無限大トナルトキ $f(x)$ ノ極限値ガ b ナル場合ニハ之ヲ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$，又 x ガ負ノ無限大トナルトキ $f(x)$ ノ極限値ガ b' ナラバ之ヲ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b'$ ニテ表ハス．

又 x ガ一定ノ値 a ニ收斂スルトキ $f(x)$ ノ値ガ無限大トナル場合ニハ之ヲ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$，又 $f(x)$ ノ値ガ負ノ無限大トナル場合ニハ之ヲ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ ニテ表ハス．

例ヘバ $y=\frac{x+1}{x}$ 即チ $y=1+\frac{1}{x}$ ニ於テ x ガ正ノ値ヲ經テ次第ニ增大スルトキハ $\frac{1}{x}$ ハ正ニシテ次第ニ減少シ，終ニ x ガ無限大トナルトキ $\frac{1}{x}$ ハ無限小トナル，故ニ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$$

又 x ガ -1 ヨリモ小ナル値ヲ取リテ其ノ絕對値ガ次第ニ增大スルトキハ $\frac{1}{x}$ ハ次第ニ減少シテ終ニ無限小トナル，故ニ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x}=1$$

次ニ x ガ正ノ値ヲ取リテ次第ニ減少シ終ニ無限小トナルトキハ $\frac{1}{x}$ ハ益增大シテ終ニ無限大トナル，故ニ

$$\lim_{x\to+0}\frac{x+1}{x}=\infty$$

又 x ガ -1 ヨリモ大ナル値ヲ取リテ次第ニ增大スルトキハ $\frac{1}{x}$ ハ負ニシテ其ノ絕對値ハ益增大シ終ニ負ノ無限大トナル，故ニ

$$\lim_{x\to-0}\frac{x+1}{x}=-\infty$$

注意　以上ノ關係ハ $y=\frac{x+1}{x}$ ノ圖ヲ畫クコトニヨリ明瞭ナルベシ，尙 x ガ右方ヨリ 0 ニ近ヅクト左方ヨリ近ヅクトヲ區別スル必要アル場合ニハ前例ニ於ケル如ク前者ヲ $x\to+0$，後者ヲ $x\to-0$ ト記ス，一般ニ x ガ右方ヨリ a ニ近ヅクト左方ヨリ近ヅクトヲ區別スル場合ニハ前者ヲ $x\to a+0$，後者ヲ $x\to a-0$ ト記スモノトス

次ニ函數ノ極限ニ關スル一二ノ重要ナル例ヲ掲グ.

(i) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$

此ニ n ハ正ノ整數トス.

$x-a=h$ ト置クトキハ x ガ a ニ收斂スルトキ h ハ 0 ニ收斂ス.

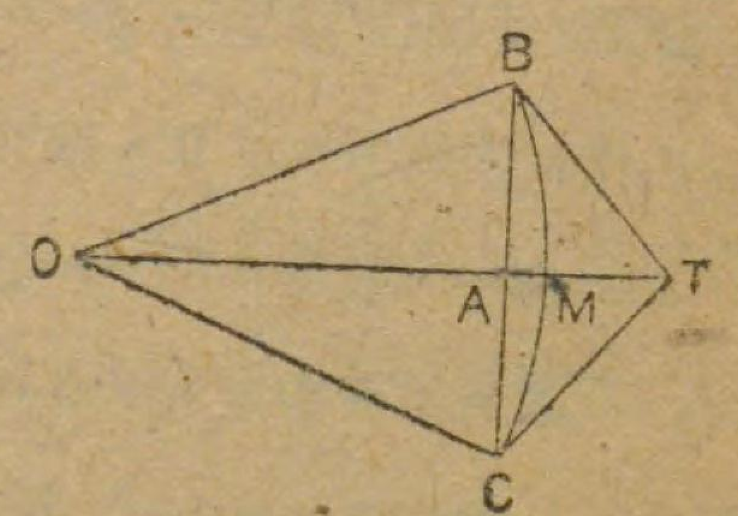
又 $$x^n-a^n=(a+h)^n-a^n$$
$$=\{(a+h)^{n-1}+(a+h)^{n-2}a+(a+h)^{n-3}a^2+\cdots+a^{n-1}\}h$$

從テ $$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^n-a^n}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\{(a+h)^{n-1}+(a+h)^{n-2}a+(a+h)^{n-3}a^2+\cdots+a^{n-1}\}$$
$$=na^{n-1}$$

故ニ $$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

半徑ガ 1 ナル圓ノ中心ヲ O トシ, 其ノ弧 BC ノ中點ヲ M トシ, 弦 BC ト半徑 OM トノ交點ヲ A, 又 B ニ於ケル切線ト直線 OA トノ交點ヲ T トスルトキハ



$$\overline{BC}<\widehat{BC}<\overline{BT}+\overline{CT}$$

然ルニ $$\overline{BT}=\overline{CT}$$
$$\overline{BC}=2\overline{BA},\quad \widehat{BC}=2\widehat{BM}$$

故ニ $$\overline{BA}<\widehat{BM}<\overline{BT}$$

角 AOB$=x$ トスルトキハ半徑ハ 1 ナルガ故ニ
$$\sin x<x<\tan x,\qquad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

從テ $$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

卽チ $$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$$

各項ヲ 1 ヨリ減ジテ
$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x$$

然ルニ $$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2},\quad \sin\frac{x}{2}<\frac{x}{2}$$

故ニ $$0<1-\frac{\sin x}{x}<\frac{x^2}{2}$$

x ガ 0 ニ收斂スルトキハ $\frac{x^2}{2}$ モ亦明カニ 0 ニ收斂ス.

故ニ $$\lim_{x\to+0}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)=0$$

卽チ $$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$$

以上ハ x ガ正ノ値ヲ取リ次第ニ減少シテ 0 ニ近ヅク場合ナリ, 若シ x ガ負ノ値ヲ取リテ次第ニ増大シテ 0 ニ近ヅクトキハ $-x=z$ ト置ケバ
$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{z\to+0}\frac{\sin(-z)}{-z}=\lim_{z\to+0}\frac{\sin z}{z}=1$$

故ニ何レノ場合ニ於テモ
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

15. 無限級數ノ極限値

數列 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ ニ於テ

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n$$

ト置キ, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ ガ一定ノ値 s ヲ有スルトキハ, 無限級數

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots$$

ヲ收斂級數トイヒ, s ヲ其ノ極限値トイフ.

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ ガ無限大トナルカ又ハ不定ナルトキハ此ノ級數ヲ發散級數トイフ.

無限級數ノ各項ガ何レモ x ノ函數ナルトキハ s_n ハ x ノ函數ナリ, 從テ其ノ極限値 s ガ存在スルトキハ s モ亦 x ノ函數ナリ.

次ニ無限級數ノ收斂發散ニ關スル二三ノ例ヲ揭グ.

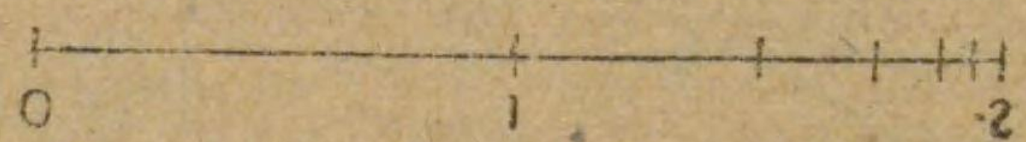
(i) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{2^n} + \cdots\cdots$

此ノ級數ノ最初ノ n 項ノ和ヲ s_n トスレバ

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

故ニ
$$\lim_{n\to\infty} s_n = 2$$



此ノ級數ハ收斂級數ニシテ其ノ極限値ハ 2 ナリ.

(ii) $\dfrac{1}{1\cdot2} + \dfrac{1}{2\cdot3} + \dfrac{1}{3\cdot4} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} + \cdots\cdots$

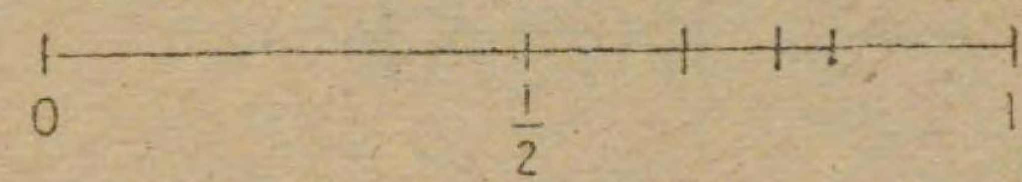
此ノ級數ノ最初ノ n 項ノ和ヲ s_n トスレバ

$$s_n = \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \cdots\cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

故ニ
$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1$$



此ノ級數ハ收斂級數ニシテ其ノ極限値ハ 1 ナリ.

(iii) $1 + x + x^2 + \cdots\cdots + x^n + \cdots\cdots$

此ノ場合ニ於テハ

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots\cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x^n-1}{x-1}$$

$-1 < x < 1$ ナルトキハ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-x}$

$x > 1$ ナルトキハ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$

$x < -1$ ナルトキハ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$ 又ハ $-\infty$

$x = 1$ ナルトキハ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

$x = -1$ ナルトキハ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$ 又ハ 1

此ノ級數ハ $-1 < x < 1$ ナルトキハ收斂級數ニシテ其ノ他ノ場合ニハ發散級數ナリ

注意 無限級數ノ收斂發散ヲ決定セントスルニ當リ上ニ示セルガ如ク直接ニ s_n ノ極限値ヲ索ムルコトハ多クノ場合ニ於テ容易ナラズ，他ノ收斂級數又ハ發散級數ト比較シテ之ヲ決定スルヲ以テ簡單ナリトス，尙次ノ例ヲ見ルベシ.

(iv) $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\underline{|n}}+\cdots\cdots$

此ノ級數ノ最初ノ n 項ノ和ヲ s_n トスレバ

$$s_n=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\underline{|n-1}}$$

然ルニ $\frac{1}{\underline{|2}}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{\underline{|3}}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}<\frac{1}{2^2},\cdots\cdots$

$$\frac{1}{\underline{|n-1}}=\frac{1}{1\cdot2\cdots n-1}<\frac{1}{2^{n-2}},\cdots\cdots$$

故ニ $0<s_n<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}$

(i)ニヨリ

$$0<s_n<3-\frac{1}{2^{n-2}}$$

s_n ハ項數ノ增大スルニ從ヒ其ノ値益增大スレドモ恒ニ3ヨリモ小ナリ。故ニ必ズ3ヨリモ小ナル極限値ヲ有スベシ，從テ此ノ級數ハ收斂級數ナリ。

此ノ極限値ヲ e ニテ表ハセバ

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\underline{|n}}+\cdots\cdots$$

依テ $e>1+\frac{1}{1}+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\underline{|n}}$

又 $\frac{1}{\underline{|n+2}}<\frac{1}{\underline{|n+1}}\ \frac{1}{n+1},\quad \frac{1}{\underline{|n+3}}<\frac{1}{\underline{|n+1}}\ \frac{1}{(n+1)^2},\cdots\cdots$

故ニ $\frac{1}{\underline{|n+1}}+\frac{1}{\underline{|n+2}}+\frac{1}{\underline{|n+3}}+\cdots<\frac{1}{\underline{|n+1}}\left\{1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\right\}$

然ルニ(iii)ニヨリ

$$1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{n+1}{n}$$

從テ $\frac{1}{\underline{|n+1}}+\frac{1}{\underline{|n+2}}+\frac{1}{\underline{|n+3}}+\cdots\cdots<\frac{1}{\underline{|n+1}}\ \frac{n+1}{n}$

依テ $e<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\underline{|n}}+\frac{1}{n\underline{|n}}$

故ニ e ノ近似値トシテ $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{\underline{|2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\underline{|n}}$ ト取ルトキハ其ノ誤差ハ $\frac{1}{n\underline{|n}}$ ヨリモ小ナリ.

實際小數第七位マデ索ムレバ次ノ近似値ヲ得.

$$e=2.7182818$$

e ガ既約分數トシテ表ハシ得ザルコトハ上ノ式ヨリ容易ニ之ヲ證明スルヲ得.

(v) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}\times2=\frac{1}{2}\quad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}\times4=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots\cdots+\frac{1}{16}>\frac{1}{16}\times4=\frac{1}{2},\cdots\cdots$$

依テ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots$

此ノ右側ハ無限大トナル，故ニ左側ノ級數ハ發散級數ナリ.

16. 函數ノ連續

變數 x ガ右方又ハ左方ノ何レヨリ a ニ收斂スルモ $f(x)$ ノ極限値ト $x=a$ ニ於ケル $f(x)$ ノ値トガ相一致スルトキハ $f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ連續ナリトイフ，卽チ $f(x)$ ガ $x=a$ ニ於テ連續ナル爲ニハ

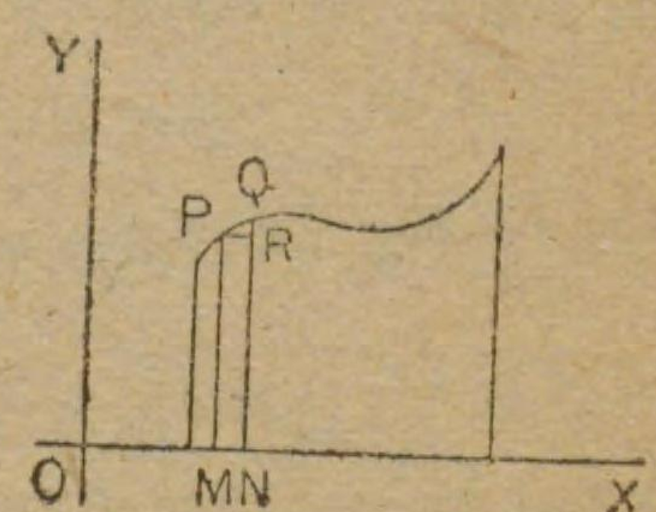
$$\lim_{x\to a\pm 0} f(x)=f(a)$$

或ハ $x=a+h$ ト置クトキハ

$$\lim_{x\to a\pm 0} f(a+h)=f(a)$$

$f(x)$ ガ $x=\alpha$ ヨリ $x=\beta$ ニ至ル間ニ於ケル x ノ總テノ値ニ對シテ上ノ條件ヲ滿足スルトキハ $f(x)$ ハ (α, β) 域ニ於テ連續ナリトイフ．

一定ノ直交軸 OX, OY ニ關シテ $OM=a$, $MN=h$ トシ，M 及ビ N ヨリ横軸ニ垂線 MP, NQ ヲ引キ，$MP=f(a)$, $NQ=f(a+h)$ トシ P ヨリ横軸ニ平行線ヲ引キ NQ トノ交點ヲ R トスルトキハ



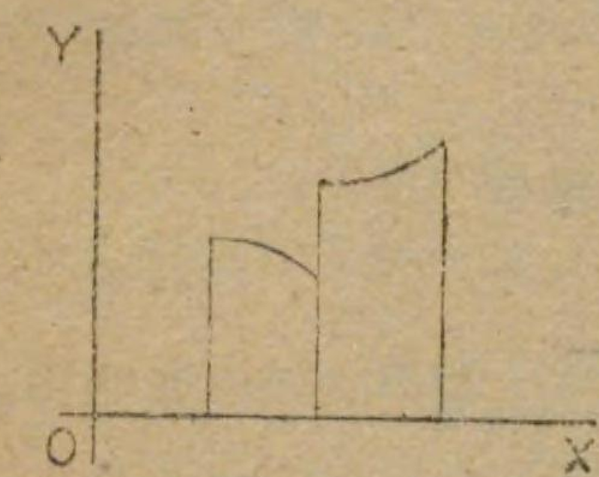
$$RQ=f(a+h)-f(a)$$

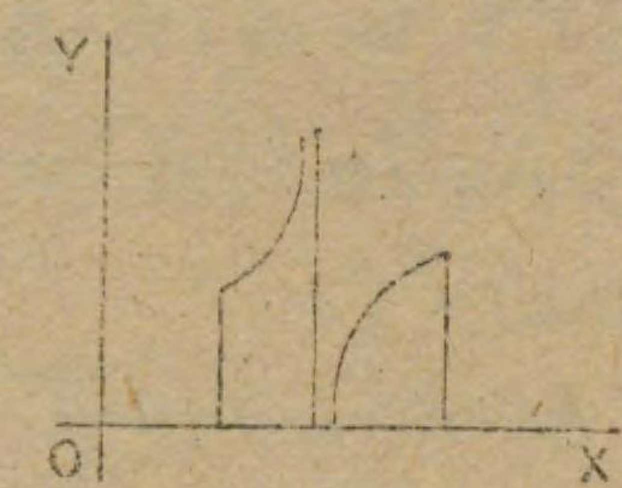
$$PQ=\sqrt{h^2+\{f(a+h)-f(a)\}^2}$$

$f(x)$ ガ $x=a$ ニ於テ連續ナルトキハ h 卽チ MN ヲ小ナラシムルコトニヨリテ PQ ヲ何程ニテモ小ナラシムルコトヲ得．

故ニ $f(x)$ ガ連續ナル場合ニハ $y=f(x)$ ハ一般ニ連續シタル曲線ヲ表ハスモノト考フルコトヲ得．

$f(x)$ ガ $x=a$ ニ於テ上記ノ要件ヲ滿足セザルトキハ $f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ不連續ナリトイフ，卽チ $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ ト $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ ト相一致セザル場合，$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ ト $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ ト相一致スルモ $f(a)$ ト相一致セザル場合，$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ 及ビ $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ ノ何レカ一方又ハ雙方共ニ無限大或ハ不定トナル場合等ニ於テ $f(x)$ ハ何レモ不連續ナリ。





次ニ函數ノ連續ニ關シテ二三ノ例ヲ揭グ．

(i)　$f(x)=x^2$

x ノ一ツノ値ヲ a トスルトキハ

$$f(a+h)-f(a)=(a+h)^2-a^2=(2a+h).$$

故ニ
$$\lim_{h\to\pm 0}\{f(a+h)-f(a)\}=0$$

卽チ
$$\lim_{h\to\pm 0} f(a+h)=f(a)$$

故ニ x^2 ハ x ノ總テノ値ニ對シテ連續ナリ，從テ拋物線 $y=x^2$ ハ一ツノ連續シタル曲線ヲ表ハス．

同樣ニ n ガ正ノ整數ナルトキハ x^n ハ x ノ總テノ値ニ對シテ連續ナルコトヲ證明スルヲ得．

(ii) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$

$$f(a+h)-f(a)=\sqrt{1+(a+h)^2}-\sqrt{1+a^2}$$

$$=\frac{(a+h)^2-a^2}{\sqrt{1+(a+h)^2}+\sqrt{1+a^2}}$$

$$=\frac{(2a+h)h}{\sqrt{1+(a+h)^2}+\sqrt{1+a^2}}$$

故ニ $\lim_{h\to\pm0}\{f(a+h)-f(a)\}=0$

即チ $\lim_{h\to\pm0} f(a+h)=f(a)$

依テ $\sqrt{1+x^2}$ ハ x ノ總テノ値ニ對シテ連續ナリ．

(iii) $f(x)=\sin x$

$$f(a+h)-f(a)=\sin(a+h)-\sin a$$

$$=2\sin\frac{h}{2}\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)$$

故ニ $\lim_{h\to\pm0}\{f(a+h)-f(a)\}=0$

即チ $\lim_{h\to\pm0} f(a+h)=f(a)$

依テ $\sin x$ ハ x ノ總テノ値ニ對シテ連續ナリ．

(iv) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+0} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to-0} f(x)=-\infty$$

故ニ $\dfrac{1}{x}$ ハ $x=0$ ニ於テ不連續ナリ．

第五章　微分法

17. 導來函數

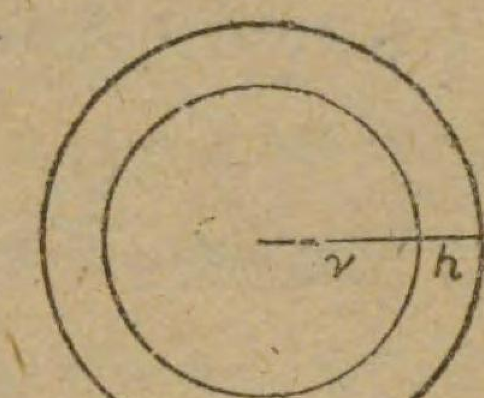
第5節ニ於テ示シタルガ如ク，圓周率ヲπ，圓ノ半徑ノ長サヲr，其ノ面積ヲAトスルトキハ

$$A=\pi r^2$$

今rガ$r+h$ニ變ズルトキAガ$A+k$ニ變ジタリトスレバ

$$k=\pi(r+h)^2-\pi r^2=\pi(2r+h)h$$

hガ次第ニ0ニ近ヅクトキハkモ亦0ニ近ヅキ，結局hガ0ニ收斂スルトキkモ亦0ニ收斂ス．



然ルニ $\dfrac{k}{h}=2\pi r+h$

故ニ $\lim_{h\to0}\dfrac{k}{h}=2\pi r$

一般ニ連續函數 $y=f(x)$ ニ於テ x ガ $x+h$ ニ變ズルトキ $f(x)$ ハ $f(x+h)$ ニ變ズベク，h ガ 0 ニ收斂スルトキ $f(x+h)-f(x)$ モ亦前節ニヨリ0ニ收斂ス．

$$k=f(x+h)-f(x)$$

ト置クトキハ $\dfrac{k}{h}$ ノ値ハ極限ニ於テ有限ナルコトアリ，無限大トナルコトアリ，又全ク不定ナルコトモアルベシ，又hガ右方ヨリ0ニ近ヅクトキノ極限値ト左方ヨリ近ヅクトキノ極限値トハ必ズシモ相等シカラズ．

$h\to\pm0$ ナル極限ニ於テ

$$\frac{k}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ガ唯一ノ確定シタル値ヲ有スルトキハ之ヲ次ノ如ク表ハス

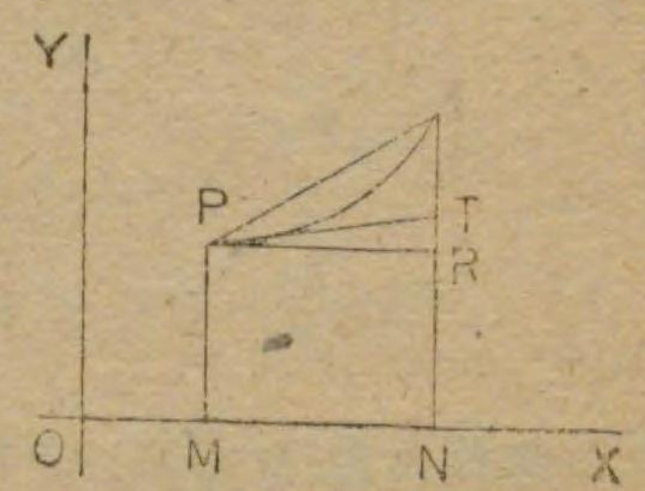
$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to\pm0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

dx, dy ヲ夫々 x, y ノ微分トイヒ，$\frac{dy}{dx}$ ヲ y 卽チ $f(x)$ ノ微分係數トイフ，又此ノ極限値ハ x ノ函數ナルヲ以テ

$$\lim_{h\to\pm0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

ト記シ，$f'(x)$ ヲ $f(x)$ ノ導來函數トイフ.

曲線 $y=f(x)$ ノ上ニ於ケル二點 P, Q ヨリ橫軸ニ引ケル垂線ヲ夫々 PM, QN トシ，P ヨリ QN ニ引ケル垂線ヲ PR トスルトキ



$$OM=x,\quad MN=h$$

ト置ケバ

$$MP=f(x),\quad NQ=f(x+h)$$

卽チ
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{RQ}{PR}=\tan QPR$$

Q ガ限リナク P ニ近ヅクトキハ PR, RQ ハ何レモ 0 ニ收斂シ，PQ ハ P ニ於ケル切線トナル，故ニ P ニ於ケル切線 PT ガ橫軸ノ正方向トナス角ヲ α トスレバ

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\tan\alpha$$

次ニ簡單ナル函數ノ導來函數ヲ求ムル例ヲ揭グ.

(i) $f(x)=x^n$，此ニ n ハ正ノ整數

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^n-h^n$$
$$=\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}\}h$$

從テ
$$\lim_{h\to\pm0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to\pm0}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-1}h+\cdots+h^{n-1}\}$$

故ニ
$$f'(x)=nx^{n-1}$$

(ii) $f(x)=\frac{1}{x}$

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=\frac{-h}{(x+h)x}$$

從テ
$$\lim_{h\to\pm0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to\pm0}\frac{-1}{(x+h)x}$$

故ニ
$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

(iii) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$

$$f(x+h)-f(x)=\sqrt{1+(x+h)^2}-\sqrt{1+x^2}$$
$$=\frac{(x+h)^2-x^2}{\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2}}$$
$$=\frac{2xh+h^2}{\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2}}$$

從テ
$$\lim_{h\to\pm0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to\pm0}\frac{2x+h}{\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2}}$$

故ニ
$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

(iv) $f(x)=\sin x$

$$f(x+h)-f(x)=\sin(x+h)-\sin x$$

$$=2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

從テ $$\lim_{h\to\pm0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to\pm0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

然ルニ第14節ニヨリ

$$\lim_{x\to\pm0}\frac{\sin x}{x}=1$$

故ニ $$f'(x)=\cos x$$

(v) $f(x)=\cos x$

$$f(x+h)-f(x)=\cos(x+h)-\cos x$$

$$=-2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

從テ $$\lim_{h\to\pm0}\frac{(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to\pm0}-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

故ニ $$f'(x)=-\sin x$$

(vi) $f(x)=\tan x$

$$f(x+h)-f(x)=\tan(x+h)-\tan x$$

$$=\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$=\frac{\sin h}{\cos(x+h)\cos x}$$

從テ $$\lim_{h\to\pm0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to\pm0}\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

故ニ $$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$$

18. 函數ノ和，積及ビ商ノ導來函數

二ツノ函數 $f(x)$，$\phi(x)$ ノ導來函數ヲ夫々 $f'(x)$，$\phi'(x)$ トシ，次ノ如ク $f(x)$ 及ビ $\phi(x)$ ノ和，積及ビ商ヲ作ル.

(i) $y=f(x)+\phi(x)$

然ルトキハ

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to\pm0}\frac{\{f(x+h)+\phi(x+h)\}-\{f(x)+\phi(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to\pm0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to\pm0}\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}$$

然ルニ $$\lim_{h\to\pm0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x),\quad \lim_{h\to\pm0}\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}=\phi'(x)$$

故ニ $$\frac{dy}{dx}=f'(x)+\phi'(x)$$

此ノ特別ナル場合トシテ $y=f(x)+c$ ナルトキハ $\frac{dy}{dx}=f'(x)$

(ii) $y=f(x)\phi(x)$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to\pm0}\frac{f(x+h)\phi(x+h)-f(x)\phi(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to\pm0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}\phi(x+h)+\{\phi(x+h)-\phi(x)\}f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to\pm0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\phi(x+h)\right\}+f(x)\lim_{h\to\pm0}\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}$$

故ニ $$\frac{dy}{dx}=f'(x)\phi(x)+f(x)\phi'(x)$$

此ノ特別ナル場合トシテ $y=cf(x)$ ナルトキハ $\frac{dy}{dx}=cf'(x)$

又 $y=ax^2+bx+c$ ナルトキハ $\frac{dy}{dx}=2ax+b$

(iii) $y=\frac{f(x)}{\phi(x)}$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to\pm0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{\phi(x+h)}-\dfrac{f(x)}{\phi(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to\pm0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}\phi(x)-\{\phi(x+h)-\phi(x)\}f(x)}{\phi(x+h)\phi(x)h}$$

$$=\lim_{h\to\pm0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\frac{1}{\phi(x+h)}\right\}$$

$$-f(x)\lim_{h\to\pm0}\left\{\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}\cdot\frac{1}{\phi(x+h)\phi(x)}\right\}$$

故ニ
$$\frac{dy}{dx}=\frac{f'(x)}{\phi(x)}-f(x)\frac{\phi'(x)}{\{\phi(x)\}^2}$$

或ハ
$$\frac{dy}{dx}=\frac{f'(x)\phi(x)-f(x)\phi'(x)}{\{\phi(x)\}^2}$$

此ノ特別ナル場合トシテ $y=\frac{c}{f(x)}$ ナルトキハ $\frac{dy}{dx}=-\frac{cf'(x)}{\{f(x)\}^2}$

此ニ $c=1$, $f(x)=x^n$ ト置キ, n ヲ正ノ整數トスルトキハ第17節ニヨリ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{nx^{n-1}}{(x^n)}=-nx^{-n-1}$$

上式ニ於テ $-n=m$ ト置ケバ

$$y=x^m,\quad \frac{dy}{dx}=mx^{m-1}$$

此ニ m ハ負ノ整數ナリ, 故ニ n ガ整數ナルトキハ其ノ正負ニ關セズ $y=x^n$ ヨリ $\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$ ヲ得.

19. 函數ノ函數ノ導來函數

$z=\phi(y)$ ニシテ $y=f(x)$ ナルトキハ

$$z=\phi\{f(x)\}$$

$$\frac{dz}{dx}=\lim_{h\to\pm0}\frac{\phi\{f(x+h)\}-\phi\{f(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to\pm0}\left[\frac{\phi\{f(x+h)\}-\phi\{f(x)\}}{f(x+h)-f(x)}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$f(x+h)-f(x)=k$ ト置クトキハ

$$\phi\{f(x+h)\}-\phi\{f(x)\}=\phi(y+k)-\phi(y)$$

$\phi(y)$ 及ビ $f(x)$ ガ何レモ連續函數ナルトキハ h ガ 0 ニ收斂スルトキ k モ亦 0 ニ收斂シ, 從テ $\phi(y+k)-\phi(y)$ モ同樣 0 ニ收斂ス.

故ニ

$$\frac{dz}{dx}=\lim_{k\to\pm0}\frac{\phi(y+k)-\phi(y)}{k}\cdot\lim_{h\to\pm0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

尙 $\phi(y)$ 及ビ $f(x)$ ガ夫々導來函數 $\phi'(y)$ 及ビ $f'(x)$ ヲ有ストスルトキハ

$$\lim_{k\to\pm0}\frac{\phi(y+k)-\phi(y)}{k}=\phi'(y)$$

$$\lim_{h\to\pm0}\frac{(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

故ニ
$$\frac{dz}{dx}=\phi'(y)f'(x)$$

或ハ
$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

次ニ二三ノ應用問題ヲ掲グ

(i) $y=x^{\frac{p}{q}}$, 此ニ p, q ハ整數トス.

$z=x^{\frac{1}{q}}$ ト置クトキハ

$$y=z^p, \qquad z^q=x$$

依テ
$$\frac{dy}{dz}=pz^{p-1}, \qquad qz^{q-1}\frac{dz}{dx}=1$$

故ニ
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\,\frac{dz}{dx}=\frac{p}{q}z^{p-q}$$

即チ
$$\frac{dy}{dx}=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$$

第17節及ビ第18節ヲ參照スルトキハ n ガ任意ノ有理數ナルトキ,

$y=x^n$ ヨリ $\dfrac{dy}{dx}=nx^{n-1}$ ヲ得.

(ii) $y=\sqrt{a+bx^2}$

$$y=z^{\frac{1}{2}}, \qquad z=a+bx^2$$

$$\frac{dy}{dz}=\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}-1}, \qquad \frac{dz}{dx}=2bx$$

依テ
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\,\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}2bx$$

即チ
$$\frac{dy}{dx}=\frac{bx}{\sqrt{a+bx^2}}$$

(iii) $y=\sin^3 x$

$$y=z^3, \qquad z=\sin x$$

$$\frac{dy}{dz}=3z^2, \qquad \frac{dz}{dx}=\cos x$$

故ニ
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\,\frac{dz}{dx}=3z^2\cos x$$

即チ
$$\frac{dy}{dx}=3\sin^2 x\cos x$$

20. 高次導來函數

函數 $y=f(x)$ ノ導來函數ヲ $y'=f'(x)$ トスレバ $f'(x)$ ハ x ノ函數ナルガ故ニ同樣ニシテ其ノ導來函數ヲ索ムルコトヲ得ベシ, 之ヲ第二次ノ導來函數トイヒ

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)$$

ト記ス, 之ニ對シテ $f'(x)$ ヲ第一次ノ導來函數トイフ.

$f''(x)$ ヨリ更ニ其ノ導來函數ヲ索メ得ル場合ニハ

$$y'''=\frac{d^3y}{dx^3}=f'''(x)$$

ヲ第三次ノ導來函數トイフ.

一般ニ $y^{(n-1)}=f^{(n-1)}(x)$ ノ導來函數ヲ第 n 次ノ導來函數トイヒ,

$$y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}(x)$$

ト記スモノトス.

尚函數ノ和, 積等ノ高次導來函數ヲ索ムルニハ第18節ニ於テ示シタルコトヲ反復スルニ過ギズ, 例ヘバ

$$y=f(x)+\phi(x)$$
$$y'=f'(x)+\phi'(x)$$

從テ
$$y''=f''(x)+\phi''(x)$$

又
$$y=f(x)\phi(x)$$
$$y'=f'(x)\phi(x)+f(x)\phi'(x)$$
$$y''=f''(x)\phi(x)+2f'(x)\phi'(x)+f(x)\phi''(x)$$

....

尚次ニ高次導來函數ニ關スル例ヲ擧グベシ

(i) $y=x^n$

前節ニヨリ

$$y'=nx^{n-1}$$

從テ

$$y''=n(n-1)x^{n-2}$$

$$y'''=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(k)}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

n ガ正ノ整數ナルトキハ

$$y^{(n)}=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 2.1$$

$$y^{(n+1)}=0,\quad y^{(n+2)}=0,\quad \cdots\cdots\quad y^{(n+r)}=0,\quad \cdots\cdots$$

(ii) $y=\sin x$

第17節ニヨリ

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$$

依テ $y^{(k-1)}=\sin\left(x+\overline{k-1}\frac{\pi}{2}\right)$ ト假定スルトキハ

$$y'''=\cos\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right)$$

故ニ
$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

注意 $y'=\cos x$ ヨリ直接微分スルコトニヨリテ $y''=-\sin x$ ヲ得, 更ニ之ヲ微分スルトキハ複雜ナル形ヲ取ルガ故ニ上ノ如クスルヲ簡單ナリトス。

(iii) $(1+x)^m$ ノ展開, 此ニ m ハ正ノ整數トス.

$(1+x)^m$ ハ x^m ヨリモ高次ノ項ヲ含マザルコト明カナリ, 依テ之ヲ次ノ如ク置ク

$$(1+x)^m=A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots\cdots+A_kx^k+\cdots\cdots+A_{m-1}x^{m-1}+A_mx^m$$

此ニ $A_0, A_1, A_2, \cdots\cdots, A_k, \cdots\cdots, A_{m-1}, A_m$ ハ未定ノ常數トス.

此ノ式ノ左右兩邊ヲ微分スレバ

$$m(1+x)^{m-1}=A_1+2A_2x+\cdots\cdots+kA_kx^{k-1}+\cdots\cdots$$
$$+(m-1)A_{m-1}x^{m-2}+mA_mx^{m-1}$$

$$m(m-1)(1+x)^{m-2}=2A_2+\cdots\cdots+k(k-1)A_kx^{k-2}+\cdots\cdots$$
$$+(m-1)(m-2)A_{m-1}x^{m-3}+m(m-1)A_mx^{m-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m(m-1)(m-2)\cdots\cdots 2(1+x)=(m-1)(m-2)\cdots\cdots 2\cdot 1\cdot A_{m-1}$$
$$+m(m-1)(m-2)\cdots\cdots 2A_mx$$

$$m(m-1)(m-2)\cdots\cdots 2\cdot 1=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots 2.1A_m$$

此ノ各式ニ於テ $x=0$ ト置クトキハ

$$A_0=1,\quad A_1=m,\quad A_2=\frac{m(m-1)}{\underline{|2}}$$

$$A_k=\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-k+1)}{\underline{|k}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{m-1}=m,\quad A_m=1$$

故ニ
$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{\underline{|2}}x^2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-k+1)}{\underline{|k}}x^k+\cdots\cdots+mx^{m-1}+x^m$$

此ノ展開式ヲ二項定理トイフ.

注意 二項定理ニ於テ$x=\dfrac{1}{m}$ト置クトキハ

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+m\left(\frac{1}{m}\right)+\frac{m(m-1)}{|\underline{2}}\left(\frac{1}{m}\right)^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-k+1)}{|\underline{k}}\left(\frac{1}{m}\right)^k+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{|\underline{2}}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{|\underline{3}}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{|\underline{k}}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{|\underline{m}}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)$$

故ニ
$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<a_m$$

此ニ
$$a_m=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{|\underline{2}}+\cdots\cdots\quad+\frac{1}{|\underline{m}}$$

又
$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)>1-\frac{(k-1)k}{2m}$$

故ニ
$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m>1+\frac{1}{1}+\frac{1}{|\underline{2}}\left(1-\frac{1\cdot2}{2m}\right)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{|\underline{m}}\left(1-\frac{m-1.m}{2m}\right)$$

即チ
$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m>a_m-\frac{1}{2m}a_{m-2}>\left(1-\frac{1}{2m}\right)a_m$$

故ニ
$$a_m>\left(1+\frac{1}{m}\right)^m>a_m\left(1-\frac{1}{2m}\right)$$

従テ
$$0<a_m-\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<\frac{1}{2m}a_m$$

第15節ニヨリ

$$\lim_{m\to\infty}a_m=e$$

故ニ
$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e$$

次ニxガ二ツノ正ノ整數n及ビ$n+1$ノ間ニアリトスレバ

$$n<x<n+1$$

従テ
$$1+\frac{1}{n}>1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

即チ
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)>\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}$$

然ルニ
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,\quad\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,\quad\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=1$$

故ニ
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

終ニxヲ負數トシ，$x=-z$ト置クトキハ

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-z}=\left(1+\frac{1}{z-1}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{z-1}\right)^{z-1}\left(1+\frac{1}{z-1}\right)\qquad z>0$$

然ルニ
$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z-1}\right)^{z-1}=e,\quad\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=1$$

従テ
$$\lim_{z\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

故ニ恒ニ次ノ式ヲ得.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

此ノ極限値ヲ得ルトキハ容易ニ次ノ函數ノ導來函數ヲ索ムルコトヲ得.

$y=e^x$ ト置クトキハ y ハ x ノ函數ナレドモ又逆ニ x ヲ y ノ函數ト考ヘ得ルヲ以テ此ノ關係ヲ $x=\log_e y$ ニテ表ハスコトトスレバ $\log_e e=1$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$$

$e^h-1=\frac{1}{z}$ ト置クトキハ　$e^h=1+\frac{1}{z}$, 從テ $h=\log_e\left(1+\frac{1}{z}\right)$

依テ
$$\frac{dy}{dx}=e^x\lim_{z\to\infty}\frac{1}{\log_e\left(1+\frac{1}{z}\right)^z}$$

然ルニ
$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z=e,\quad \log_e e=1$$

故ニ
$$\frac{dy}{dx}=e^x$$

從テ　$y=e^x$, $\frac{dy}{dx}=y$ ヨリ $x=\log_e y$, $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}$ ヲ得　此ノ最後ノ二式ニ於テ x ト y トヲ交換スルトキハ

$$y=\log_e x,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

尙以下 $\log_e x$ ハ單ニ $\log x$ ト書クコトト定ム.

第六章　導來函數ノ應用

21. 函數ノ値ノ變化, 極大及ビ極小

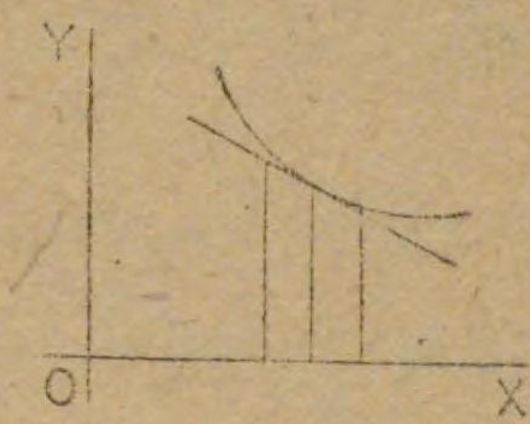
$x=a$ ニ於テ $f(x)$ ノ導來函數ノ値ガ正ナルトキ卽チ $f'(a)>0$ ナルトキ, h ヲ極メテ小ナル正數トスレバ

$$f(a-h)<f(a)<f(a+h)$$

又 $f'(a)<0$ ナルトキハ

$$f(a-h)>f(a)>f(a+h)$$

初ノ場合ニハ $f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ增加ノ狀態ニアリトイヒ, 後ノ場合ニハ減少ノ狀態ニアリトイフ.



$f(x)$ ガ連續函數ニシテ $x=a$ ニ於テ正ヨリ負ニ移リ, 又ハ負ヨリ正ニ移ル場合ニハ $f'(a)=0$ ナラザルベカラズ.

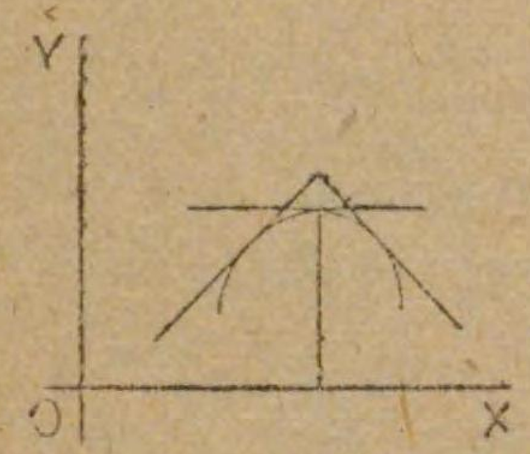
$x=a$ ニ於テ $f'(x)$ ノ値ガ正ヨリ零ヲ經テ負ニ移ルトキ, h ヲ極メテ小ナル正數トスレバ

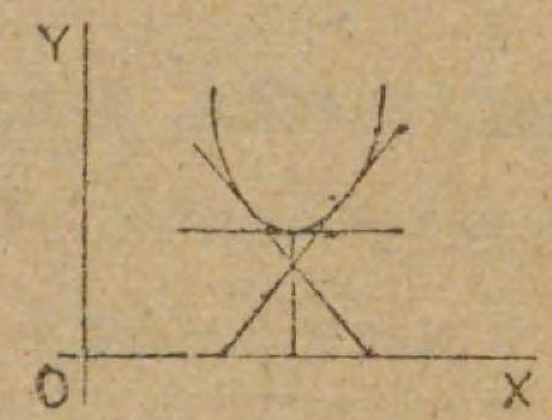
$$f(a-h)<f(a),\quad f(a+h)<f(a)$$

又 $f'(x)$ ノ値ガ負ヨリ零ヲ經テ正ニ移ルトキハ

$$f(a-h)>f(a),\quad f(a+h)>f(a)$$

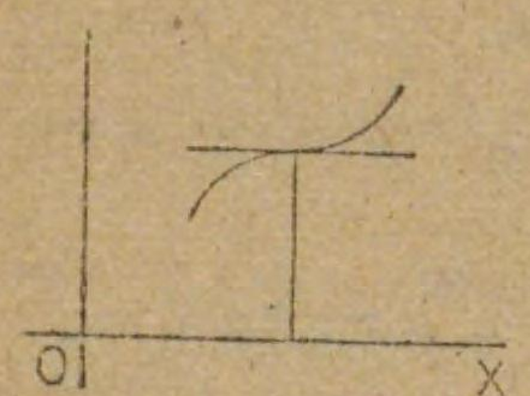
初ノ場合ニハ $f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ**極大**ナリトイヒ，後ノ場合ニハ**極小**ナリトイフ.

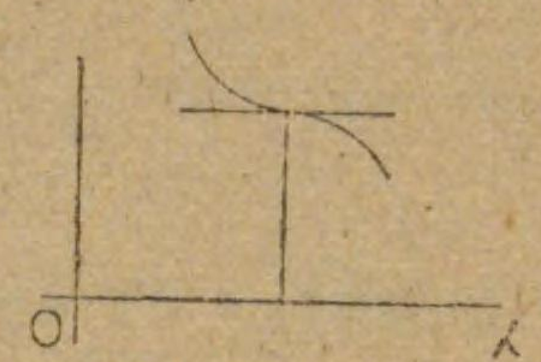




$f(x)$ ノ極大極小ヲ索メントスルトキハ $f'(x)=0$ ト置キ此ノ方程式ノ一ツノ實根ヲ a トシ，極メテ小ナル正數 h ニ對シテ $f'(a-h)>0$ ニシテ且 $f'(a+h)<0$ ナルトキハ $f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ極大ナリ，又 $f'(a-h)<0$ ニシテ且 $f'(a+h)>0$ ナルトキハ極小ナリ.

$f'(a-h)$ ト $f'(a+h)$ トガ同符號ナルトキハ $f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ極大ニモ極小ニモアラズ.

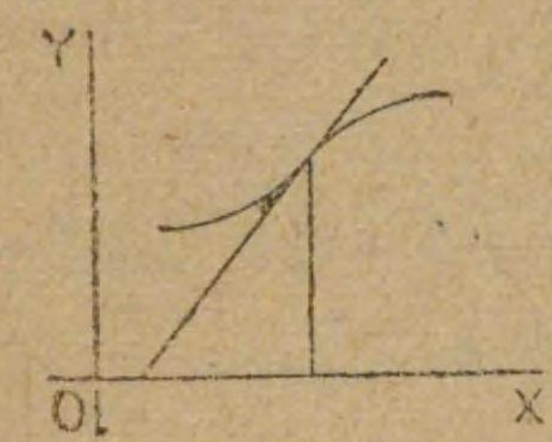


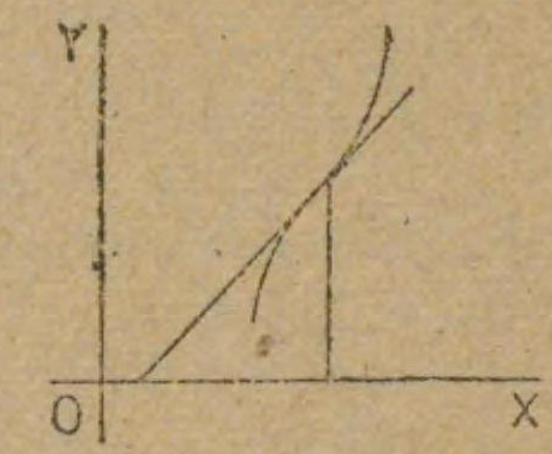


尙 $x=a$ ニ於テ $f''(x)$ ノ値ガ正ナルトキハ $f'(x)$ ハ增加ノ狀態ニアリ，之ニ反シテ負ナルトキハ $f'(x)$ ハ減少ノ狀態ニアリ.

故ニ $f'(a)=0$ ニシテ且 $f''(a)>0$ ナルトキハ $f'(x)$ ノ値ハ $x=a$ ニ於テ負ヨリ正ニ移リ，$f''(a)<0$ ナルトキハ負ヨリ正ニ移ル，從テ初ノ場合ニハ $f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ極小ニシテ後ノ場合ニハ極大ナリ.

次ニ $f''(a)=0$ ナル場合ニハ $f'''(x)$ ヲ考ヘ，$f'''(a)<0$ ナルトキハ $f'(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ極大ニシテ，$f'''(a)>0$ ナルトキハ極小ナリ.

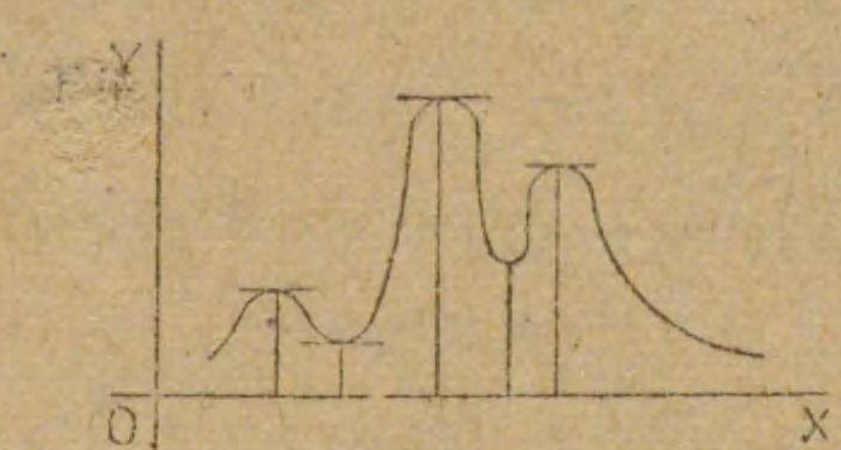




故ニ $f'(a)=0$ ニシテ且 $f''(a)=0$ ナルトキハ $f'''(a)>0$ ニテモ又 $f'''(a)<0$ ニテモ $f'(a)$ ハ $f'(x)$ ノ極大又ハ極小値ナルヲ以テ $f'(x)$ ハ $x=a$ ヲ通過スルトキ其ノ符號ヲ變ズルコトナシ，從テ $f(a)$ ハ $f(x)$ ノ極大値ニモ極小値ニモアラズ.

$f'''(a)=0$ 等ノ場合ニモ同樣ニシテ極大極小ノ有無ヲ確ムルコトヲ得ベシ.

尙又極大及ビ極小値ハ絕對値ノ大小ニハ關係ナシ，故ニ同一ノ函數ニ於テ極大値ガ極小値ヨリモ小ナルコトアルベク又極大極小ノ數ニハ制限ナシ.



注意 $f''(x)=0$ ヲ滿足スル點ニ於テ曲線ハ一般ニ其ノ曲ル方向ヲ變ズ，此ノ點ヲ彎曲點トイフ.

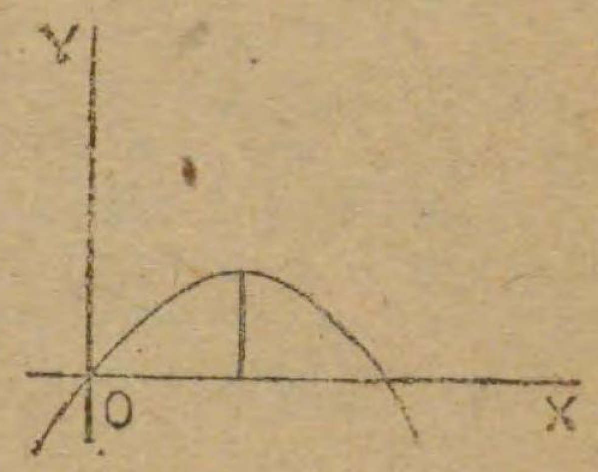
例 1　$f(x)=x(1-x)$

$$f'(x)=1-2x$$

故ニ $f'(x)=0$ ヨリ $x=\frac{1}{2}$ ヲ得, $x<\frac{1}{2}$ ナルトキハ $f'(x)>0$, 又 $x>\frac{1}{2}$ ナルトキハ $f'(x)<0$

依テ x ガ $-\infty$ ヨリ $\frac{1}{2}$ ニ至ル間ニ於テ $f(x)$ ハ常ニ増加ノ狀態ニアリ,

$x=\frac{1}{2}$ ニ於テ極大ニシテ $\frac{1}{4}$ トナリ,



x ガ $\frac{1}{2}$ ヨリ ∞ ニ至ル間ニ於テハ常ニ減少ノ狀態ニアリ.

注意　$f''(x)=-2$, 故ニ $x=\frac{1}{2}$ ニ於テ $f'(x)=0$ ニシテ $f''(x)<0$, 依テ $f(x)$ ハ $x=\frac{1}{2}$ ニ於テ極大ナリ.

例 2.　$f(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2}$,　$a>b>0$　$c>0$

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{-(c-x)}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

$$f''(x)=\frac{a^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{b^2}{\{b^2+(c-x)^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

故ニ $f'(x)=0$ ヨリ

$$x^2\{b^2+(c-x)^2\}=(a^2+x^2)(c-x)^2$$

即チ

$$b^2x^2=a^2(c-x)^2$$

$$\pm bx=a(c-x)$$

故ニ

$$x=\frac{ac}{a+b},\ 又ハ\ x=\frac{ac}{a-b}$$

(i)　$x=\frac{ac}{a+b}$ ナルトキハ $c-x=\frac{bc}{a+b}$

從テ

$$f'\left(\frac{ac}{a+b}\right)=\frac{\frac{ac}{a+b}}{\sqrt{a^2+\left(\frac{ac}{a+b}\right)^2}}-\frac{\frac{bc}{a+b}}{\sqrt{b^2+\left(\frac{bc}{a+b}\right)^2}}=0$$

$$f''\left(\frac{ac}{a+b}\right)>0$$

故ニ $f(x)$ ハ $x=\frac{ac}{a+b}$ ニ於テ極小ニシテ其ノ値ハ

$$f\left(\frac{ac}{a+b}\right)=\sqrt{a^2+\left(\frac{ac}{a+b}\right)^2}+\sqrt{b^2+\left(\frac{bc}{a+b}\right)^2}=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$$

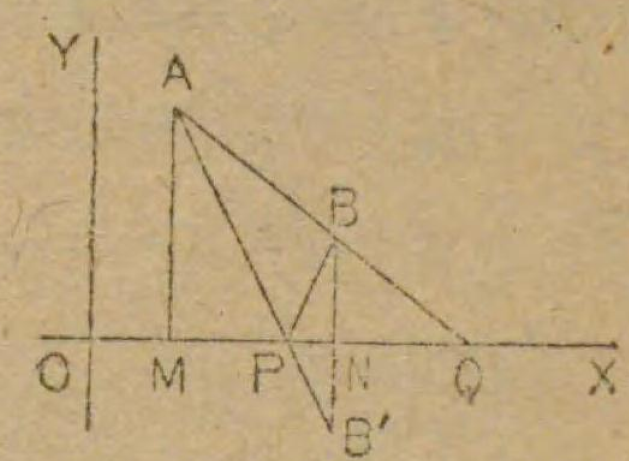
(ii)　$x=\frac{ac}{a-b}$ ナルトキハ $c-x=\frac{-bc}{a-b}$

從テ

$$f'\left(\frac{ac}{a-b}\right)=\frac{\frac{ac}{a-b}}{\sqrt{a^2+\left(\frac{ac}{a-b}\right)^2}}+\frac{\frac{bc}{a-b}}{\sqrt{b^2+\left(\frac{bc}{a-b}\right)^2}}>0$$

故ニ $f'(x)$ ハ $x=\frac{ac}{a-b}$ ニ於テ 0 トナラズ, 從テ $f(x)$ ハ極大ニモ極小ニモアラズ.

定直線ノ一方ニアル二定點 A, B ヨリ此ノ直線ニ垂線 AM, BN ヲ引キ, 直線上ニ一點 P ヲ取リ AM$=a$, BN$=b$, MN$=c$, MP$=x$ トスレバ $f(x)$ ハ AP+BP ヲ表ハス, 從テ B ノ對稱點ヲ B′ トシ, AB′ ト直線トノ交點ヲ P トスレバ



P ハ即チ $x=\frac{ac}{a+b}$ ニ相當ス, 又 AB ト直線トノ交點 Q ハ $x=\frac{ac}{a-b}$ ニ相當ス, 之ハ AP−BP ノ極大ヲ定ムルモノニシテ, $f'(x)=0$ ノ根ヲ求ムルニ當リ二乘シタル爲メニ生ジタルモノトス.

22. 曲線ノ追跡

方程式 $y=f(x)$ ノ表ハス曲線ヲ追跡シテ其ノ形ヲ畫カントスルニ當リ注意スベキ重ナル點大略次ノ如シ.

I. 座標軸, 原點又ハ他ノ定直線, 定點ニ關シテ對稱ノ有無ヲ吟味ス

x ノ代リニ $-x$ ト書キテ方程式變ゼザルトキハ曲線ハ縱軸ニ關シテ對稱ナリ.

y ノ代リニ $-y$ ト書キテ方程式變ゼザルトキハ曲線ハ横軸ニ關シテ對稱ナリ.

x, y ノ代リニ $-x, -y$ ト書キテ方程式變ゼザルトキハ曲線ハ原點ニ關シテ對稱ナリ.

II. 曲線ト座標軸又ハ他ノ特別ナル直線又ハ曲線トノ交點ヲ求ム

$x=0, y=0$ ガ方程式ヲ滿足スルトキハ原點 $(0, 0)$ ハ曲線上ニアリ, $y=0$ ト置キテ x ノ實値 a ヲ得ルトキハ點 $(a, 0)$ ハ曲線上ニアリ, 又 $x=0$ ト置キテ y ノ實値 b ヲ得ルトキハ點 $(0, b)$ ハ曲線上ニアリ.

III. 曲線ノ存在スル區域ヲ定ム

平面ヲ一定ノ直線又ハ曲線ニヨリテ適宜ニ分割シ, 其ノ各區域内ニ於テ方程式ヲ滿足スル x, y ノ實値アルトキハ曲線存在シ, 然ラザルトキハ存在セズ.

IV. y' ヲ求メ其ノ正負ヲ吟味ス

$y'>0$ ナルトキハ y ハ x ト共ニ増大ス

$y'<0$ ナルトキハ y ハ x ノ増大スルニ從テ減少ス

$y'=0$ ナルトキハ一般ニ y ハ極大又ハ極小ナリ

V. y'' ヲ求メ其ノ正負ヲ吟味ス

$y''>0$ ナルトキハ y' ハ x ト共ニ増大ス

$y''<0$ ナルトキハ y' ハ x ノ増大スルニ從ヒ減少ス

$y''=0$ ナルトキハ一般ニ彎曲點存在ス

VI. 原點ヨリ無限ノ距離ニ於ケル曲線ノ形ヲ研究ス

次ニ曲線ノ追跡ニ關シテ一二ノ例ヲ掲グ

(i)　$y=\dfrac{x}{1+x^2}$

I. x, y ノ代リニ $-x, -y$ ト書キテ方程式變ゼザルガ故ニ曲線ハ原點ニ關シテ對稱ナリ.

II. $x=0, y=0$ ハ方程式ヲ滿足ス, 故ニ原點ハ曲線上ニアリ.

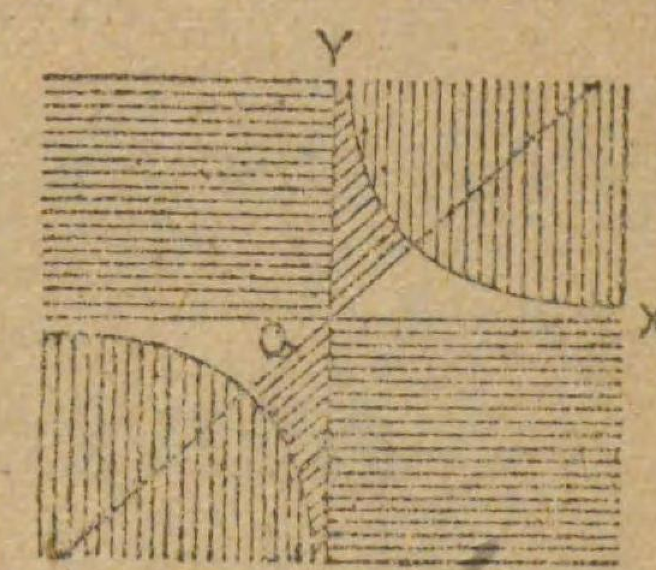
III. $(1+x^2)y=x$ ニ於テ x ト y トハ必ズ同一ノ符號ヲ有セザルベカラズ, 卽チ $x>0$ ナラバ $y>0$, 又 $x<0$ ナラバ $y<0$, 故ニ $x<0$, $y>0$ 及ビ $x>0, y<0$ ノ區域ニハ曲線存在セズ.

$x(xy-1)+y=0$ ト書クトキハ $x>0, y>0$ トシテ $xy-1>0$ ニテハ方程式成立セズ, 故ニ雙曲線 $xy=1$ ノ上方ニハ曲線存在セズ.

同様ニ $x<0, y<0$ ニテハ $xy=1$ ノ下方ニハ曲線存在セズ.

$x^2y+(y-x)=0$ ト書クトキハ $y>0, y-x>0$ ニテハ方程式成立セズ, 故ニ $y>0$ ニテハ直線 $y=x$ ノ上方ニハ曲線存在セズ.

同様ニ $y<0$ ニテハ直線 $y=x$ ノ下方ニハ曲線存在セズ.



右圖ニ於テ影ヲ附シタルハ曲線ノ存在セザル區域ナリ.

IV　$y'=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2}=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

故ニ $x=\pm1$ ニ於テ $y'=0$, 又 $|x|<1$ ナルトキハ $y'>0$, $|x|>1$ ナルトキハ $y'<0$, $x=0$ ニ於テハ $y'=1$

依テ $x<-1$ ナルトキハ y ハ負ニシテ x ノ増大スルニ從ヒ益減少シ $x=-1$ ニ於テ極小トナリ其ノ値ハ $-\dfrac{1}{2}$ ナリ, $-1<x<1$ ナルトキハ y ハ x ト共ニ增大シ, $x=1$ ニ於テ極大トナリ其ノ値ハ $\dfrac{1}{2}$, 又 $x>1$ ナルトキハ y ハ x ノ增大スルニ從テ減少ス.

原點ニ於テハ切線ハ直線 $y=x$ ノ方向ヲ取ル.

V.　$y''=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}+\dfrac{-4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3}=\dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$

故ニ $x=0$ 及ビ $x=\pm\sqrt{3}$ ニ於テ $y''=0$, 又 x ト x^2-3 トガ同符號ナルトキハ $y''>0$ ニシテ異符號ナルトキハ $y''<0$

依テ $x<-\sqrt{3}$ ナルトキハ $y''<0$, $-\sqrt{3}<x<0$ ナルトキハ $y''>0$, 又 $0<x<\sqrt{3}$ ナルトキハ $y''<0$, $x>\sqrt{3}$ ナルトキハ $y''>0$

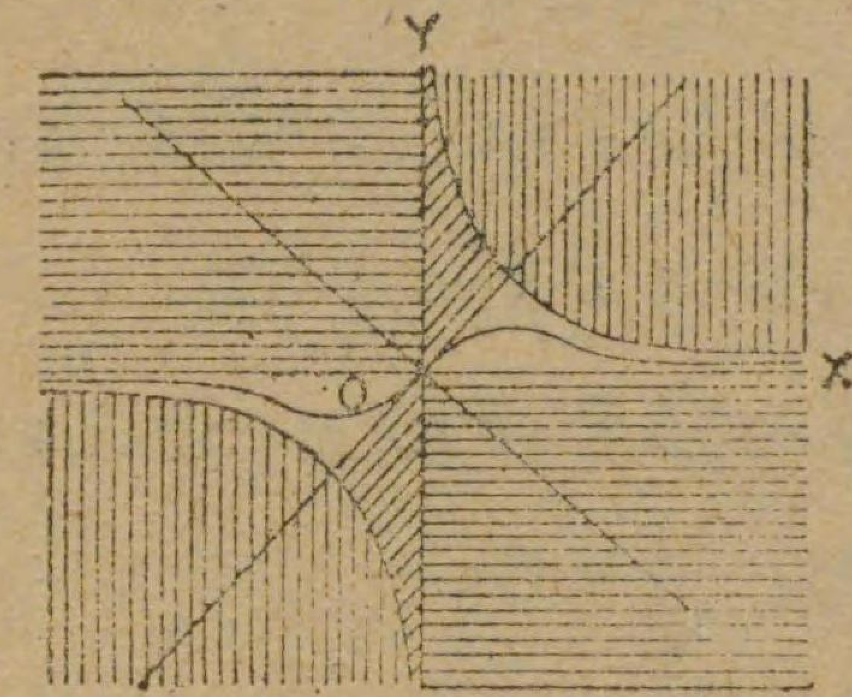
從テ $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$ ハ何レモ彎曲點ナリ.

VI.　$y=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+x}$

故ニ x ノ絕對値ガ增大スルニ從ヒ y ノ絕對値ハ益減少シ終ニ $y=0$ ニ限リナリ近ヅク.

依テ $y=0$ ハ漸近線ニシテ, $x>0$ ニ於テハ曲線ハ其ノ上方ニアリ, 又 $x<0$ ニ於テハ其ノ下方ニアリ.

以上ノ結果ニヨリ曲線ノ形ヲ得ルコト次ノ如シ.



(ii)　$y=x^2(x^2-1)$

I. x ノ代リニ $-x$ ト書キテ方程式變ゼザルガ故ニ曲線ハ縱軸ニ關シテ對稱ナリ.

II. $x=0, y=0$ 及ビ $x=\pm1, y=0$ ハ方程式ヲ滿足ス, 故ニ點 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$ ハ曲線上ニアリ.

III. $y=x^2(x^2-1)$ ニ於テ y ト x^2-1 トハ必ズ同一ノ符號ヲ有セザルベカラズ, 即チ $y>0$ ナルトキハ $x^2>1$, 又 $y<0$ ナルトキハ $x^2<1$ 故ニ $y>0$, $-1<x<1$ ノ區域, $y<0$, $x>1$ ノ區域及ビ $y<0$, $x<-1$ ノ區域ニハ曲線存在セズ.

$y=x^4-x^2$ ト書クトキハ $y<x^4$, 故ニ曲線 $y=x^4$ ノ上方ニハ曲線存在セズ.

$y=\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$ ト書クトキハ $y\geq-\dfrac{1}{4}$, 故ニ直線 $y=-\dfrac{1}{4}$ ノ下方ニハ曲線存在セズ.

IV. $y'=2x(x^2-1)+2x^3=2x(2x^2-1)$

故ニ $x=0$ 及ビ $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ニ於テ $y'=0$, 又 $x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ナルトキハ $y'<0$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<0$ ナルトキハ $y'>0$, $0<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ ナルトキハ $y'<0$, 又 $x>\frac{1}{\sqrt{2}}$ ナルトキハ $y'>0$

依テ $x=0$ ノトキ y ハ極大ニシテ其ノ値ハ 0, 又 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ノトキハ極小ニシテ其ノ値ハ $-\frac{2}{9}$ ナリ.

V. $y''=12x^2-2$

故ニ $x=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ ニ於テ $y''=0$, 又 $|x|<\frac{1}{\sqrt{6}}$ ナルトキハ $y''<0$ ニシテ, $|x|>\frac{1}{\sqrt{6}}$ ナルトキハ $y''>0$

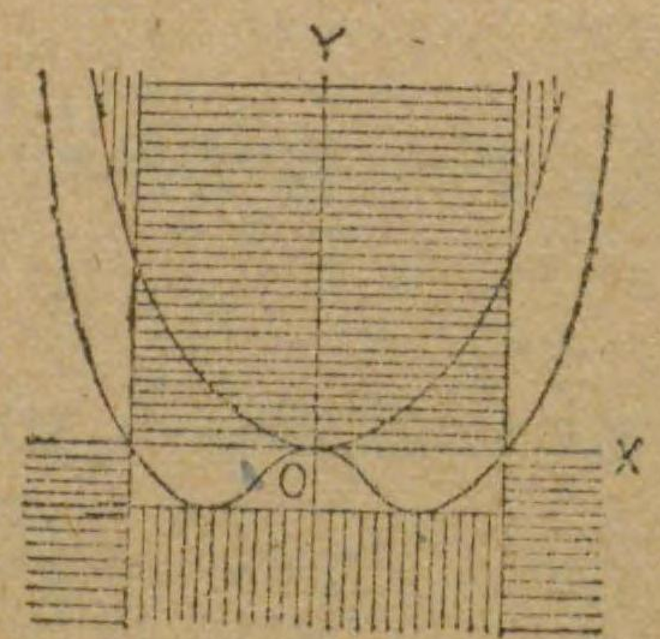
$x=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ ニ於テ $y=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}-1\right)=-\frac{5}{36}$

依テ點 $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{5}{36}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{5}{36}\right)$ ハ彎曲點ナリ.

VI. $y^2=x^4-x^2$

$|x|$ ガ増大スルトキ x^2 ハ x^4 ニ比シテ微小ナリ, 從テ曲線ノ形ハ無限大ニ於テハ盆曲線 $y=x^4$ ニ近ヅク.

上記ノ結果ニヨリ曲線ノ形ヲ得ルコト次ノ如シ.



23. 函數ノ展開

p ガ正ノ整數ナルトキ次ノ式ヲ得

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{p-1}+\frac{x^p}{1-x}$$

$|x|<1$ ナルトキハ p ガ無限大トナル極限ニ於テ $\frac{x^p}{1-x}$ ハ 0 ニ收斂ス

依テ
$$\lim_{p\to\infty}\left\{\frac{1}{1-x}-(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{p-1})\right\}=0$$

即チ
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^k+\cdots\cdots$$

故ニ $(1-x)^{-1}$ ハ $-1<x<1$ ナルトキ無限級數トシテ之ヲ表ハスコトヲ得

同樣ニ $-1<x<1$ ナルトキ

$$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-\cdots\cdots+(-1)^kx^k+\cdots\cdots$$

一般ニ m ガ任意ノ常數ナルトキ

$$(1+x)^m=A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots\cdots+A_kx^k+\cdots\cdots\cdots$$

ト置クトキハ第20節ニ於ケルト全ク同樣ニ此ノ式ノ兩邊ヲ順次ニ微分シテ $x=0$ ト置クコトニヨリ次ノ値ヲ得

$$A_0=1,\quad A_1=m,\quad A_2=\frac{m(m-1)}{1.2}$$

$$A_k=\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{1.2\cdots\cdots k}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故ニ
$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{\underline{|2}}x^2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{\underline{|k}}x^k+\cdots\cdots$$

此ニ $m=-1$ ト置ケバ上ニ擧ゲタル $(1+x)^{-1}$ ノ展開式ヲ得ベク，又 m ヲ正ノ整數トスレバ $k=m+1$ ノトキ A_k ハ 0 トナリ，x^{m+1} 以上ノ項ノ係數ハ悉ク 0 ニシテ第20節ニ於ケル二項定理ヲ得ベシ.

更ニ一般ニ $f(x)$ 及ビ其ノ導來函數ハ何レモ連續ナリトシテ

$$f(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots+A_kx^k+\cdots\cdots$$

ト置クトキハ

$$f'(x)=A_1+2A_2x+3A_3x^2+\cdots\cdots+kA_kx^{k-1}+\cdots\cdots$$

$$f''(x)=2A_2+3.2A_3x+\cdots\cdots+k(k-1)A_kx^{k-2}+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(k)}(x)=k(k-1)\cdots\cdots2.1A_k+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

以上ノ各式ニ於テ $x=0$ ト置クトキハ

$$A_0=f(0),\quad A_1=\frac{f'(0)}{1},\quad A_2=\frac{f''(0)}{1.2},\quad \cdots\cdots$$

$$A_k=\frac{f^{(k)}(0)}{1.2\cdots k},\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故ニ　$f(x)=f(0)+\dfrac{f'(0)}{1}x+\dfrac{f''(0)}{\lfloor\underline{2}}x^2+\cdots\cdots+\dfrac{f^{(k)}(0)}{\lfloor\underline{k}}x^k+\cdots\cdots$

此ノ特別ナル場合トシテ $f(x)=(1+x)^m$ ト置クトキハ

$$f(0)=1,\quad f'(0)=m,\quad f''(0)=m(m-1),\quad \cdots\cdots$$

$$f^{(k)}(0)=m(m-1)\cdots\cdots(m-k+1),\quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

依テ　$(1+x)^m=1+\dfrac{m}{1}x+\dfrac{m(m-1)}{\lfloor\underline{2}}x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{\lfloor\underline{k}}x^k+\cdots\cdots\cdots$$

次ニ　$f(x)=\sin x$ ト置クトキハ第20節ニヨリ

$$f'(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\quad f''(x)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right),\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right),\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故ニ　$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ \cdots\cdots\cdots\cdots$

$$f^{(k)}(0)=\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

k ガ偶數ナルトキハ $k=2m$ ト置ケバ

$$f^{(2m)}(0)=\sin\left(2m\frac{\pi}{2}\right)=\sin m\pi=0$$

k ガ奇數ナルトキハ $k=2m+1$ ト置ケバ

$$f^{(2m+1)}(0)=\sin\left(\overline{2m+1}\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^m$$

依テ　$\sin x=\dfrac{x}{1}-\dfrac{x^3}{\lfloor\underline{3}}+\dfrac{x^5}{\lfloor\underline{5}}-\cdots\cdots+(-1)^m\dfrac{x^{2m+1}}{\lfloor\underline{2m+1}}+\cdots\cdots\cdots$

同様ニ $f(x)=\cos x$ ト置クトキハ次ノ展開式ヲ得

$$\cos x=1-\frac{x^2}{\lfloor\underline{2}}+\frac{x^4}{\lfloor\underline{4}}-\cdots\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{\lfloor\underline{2m}}+\cdots\cdots\cdots$$

注意　上ニ得タル $f(x)$ ノ展開式ハ此ノ函數ヲ x ノ昇冪ヨリ成ル無限級數トシテ表ハシ得ルモノト假定シテ其ノ係數ヲ索メタルニ過ギズ，此ノ展開式ガ果シテ $f(x)$ ヲ表ハスヤ否ハ別ニ之ヲ研究スルヲ要ス

$(1+x)^m$ ニ於テハ $-1<x<1$ ナルトキハ $m=-1$ ナル場合ト同様ニ容易ニ其ノ正シキコトヲ證明スルヲ得. 又 $\sin x$, $\cos x$ ニ於テハ x ノ有限ナル値ニ對シテ常ニ此ノ展開式ヲ用フルコトヲ得

24. 函數ノ近似値

前節ニ於テ得タル展開式ニヨリ函數ノ近似値ヲ索ムルコトヲ得，次ノ例ニヨリテ其ノ應用ヲ見ルベシ.

(i) $(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{\underline{k}}x^k+\cdots$

x ガ微小ナルトキ x^2 以上ノ項ヲ省略スレバ

$$(1+x)^m=1+mx$$

トナリ，x^3 以上ノ項ヲ省略スレバ

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2$$

ヲ得，以下同様ニシテ x ノ値ニヨリテ適當ナル項數ヲ取リテ $(1+x)^m$ ノ近似値ヲ得ベシ，例ヘバ

$$\sqrt{2}=\sqrt{\frac{50}{25}}=\sqrt{\frac{49}{25}\ \frac{50}{49}}=\frac{7}{5}\left(\frac{49}{50}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{7}{5}\left(1-\frac{1}{50}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

上ノ展開式ニ於テ $m=-\frac{1}{2}$, $x=-\frac{1}{50}$ ト置ケバ

$$\sqrt{2}=\frac{7}{5}\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{50}\right)+\frac{\frac{1}{2}\ \frac{3}{2}}{1.2}\left(\frac{1}{50}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{5}{2}}{1.2.3}\left(\frac{1}{50}\right)^3+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\frac{7}{5}\left\{1+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{10}\right)+\frac{3.5}{2.3}\left(\frac{1}{10^4}\right)^6+\cdots\cdots\right\}$$

$$=1.4+0.014+0.00021+\cdots\cdots\cdots$$

$$=1.41421\cdots\cdots\cdots$$

第四項以下ノ總和ヲ r トスレバ

$$0<r<\frac{7}{5}\ \frac{3}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^4\frac{1}{50}\ \frac{1}{1-\frac{1}{50}}=0.00021\times\frac{1}{49}$$

故ニ $\sqrt{2}$ ヲ 1.41421 ト取ルトキノ誤差ハ 0.00001 ヨリモ小ナリ

(ii) $\sqrt{(a+x)(b+x)}-\sqrt{(a-x)(b-x)}$

a 及ビ b ガ x ニ對シテ微小ナリトスレバ $(1+x)^m$ ノ展開式ヨリ

$$\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)}=\left(1+\frac{a+b}{x}+\frac{ab}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=1+\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{x}+\frac{ab}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{a+b}{x}+\frac{ab}{x^2}\right)^2+\cdots\cdots\cdots$$

$$\sqrt{\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(1-\frac{b}{x}\right)}=\left(1-\frac{a+b}{x}+\frac{ab}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{x}-\frac{ab}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{a+b}{x}-\frac{ab}{x^2}\right)+\cdots\cdots\cdots$$

故ニ $\sqrt{(a+x)(b+x)}-\sqrt{(a-x)(b-x)}$

$$=x\left\{\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)}-\sqrt{\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(1-\frac{b}{x}\right)}\right\}$$

$$=x\left\{\frac{a+b}{x}-\frac{(a+b)ab}{2x^3}+\cdots\cdots\cdots\right\}$$

$$=a+b-\frac{(a+b)ab}{2x^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

依テ $\frac{1}{x^3}$ 以上ノ項ヲ省略スルトキハ

$$\sqrt{(a+x)(b+x)}-\sqrt{(a-x)(b-x)}=a+b-\frac{(a+b)ab}{2x^2}$$

トナリ，$\frac{1}{x^2}$ 以上ノ項ヲ省略スルトキハ

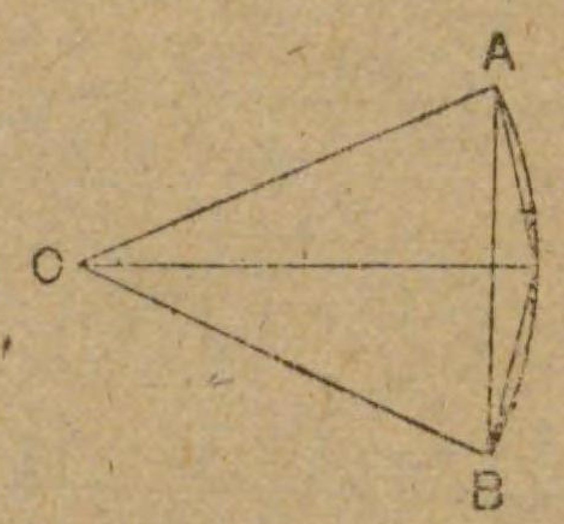
$$\sqrt{(a+x)(b+x)}-\sqrt{(a-x)(b-x)}=a+b$$

ヲ得，又之ニヨリ次ノ極限値ヲ得

$$\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{(a+x)(b+x)}-\sqrt{(a-x)(b-x)}\}=a+b$$

(iii) $\sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^5}{\underline{|5}}-\cdots\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{\underline{|2m+1}}+\cdots\cdots\cdots$

圓ノ中心ヲ O, 半徑ヲ r トシ, 中心角 α ニ對スル弧 AB ノ長サヲ s, 又 $\frac{s}{2}$ 及ビ $\frac{s}{4}$ ニ對應スル弦ノ長サヲ夫々 a 及ビ b トスルトキハ



$$s=r\alpha$$

$$a=2r\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$b=2r\sin\frac{\alpha}{4}$$

故ニ

$$a=2r\left\{\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{1}{\underline{|3}}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3+\frac{1}{\underline{|5}}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^5+\cdots\cdots\cdots\right\}$$

$$b=2r\left\{\left(\frac{\alpha}{4}\right)-\frac{1}{\underline{|3}}\left(\frac{\alpha}{4}\right)^3+\frac{1}{\underline{|5}}\left(\frac{\alpha}{4}\right)^5-\cdots\cdots\cdots\right\}$$

依テ

$$8b-a=3r\alpha+\frac{2}{\underline{|5}}\left(\frac{8}{4^5}-\frac{1}{2^5}\right)r\alpha^5+\cdots\cdots$$

從テ

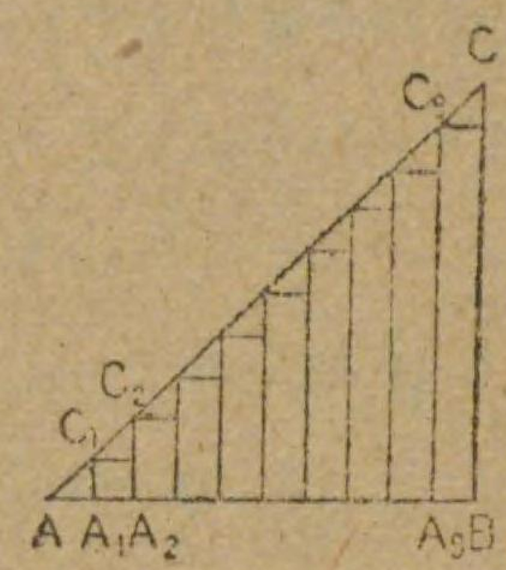
$$s=\frac{8b-a}{3}+\frac{1}{7680}\,\frac{s^5}{r^4}+\cdots\cdots\cdots$$

故ニ s ガ微小ナルトキハ $\frac{1}{7680}\cdot\frac{s^5}{r^4}$ 以上ノ項ヲ省略シ $\frac{8b-a}{3}$ ヲ以テ弧 AB ノ長ナトスルコトヲ得

第七章　積　分　法

25. 積分ノ定義

二等邊直角三角形 ABC ヲ取リ其ノ面積ヲ考フルニ, 此ノ面積ハ AB ヲ一邊トスル正方形ノ面積ノ半ニ等シ, 故ニ



$$AB=10糎$$

トスレバ ABC ノ面積ハ

$$\frac{10\times10}{2}=50平方糎$$

今 AB ヲ 10 等分シテ各分點 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_9$ ヨリ AB ニ垂線ヲ引キ, AC トノ交點 $C_1, C_2, \cdots\cdots, C_9$ ヨリ AB ニ平行線ヲ引キ, ABC ノ內ニ $A_1A_2, A_2A_3, \cdots\cdots, A_9B$ ヲ底トスル 9 個ノ矩形ヲ容ルルトキハ

$$A_1A_2=A_2A_3=\cdots\cdots=A_9B=1 糎$$

$$A_1C_1=1糎,\quad A_2C_2=2糎, \cdots\cdots, A_9C_9=9糎$$

故ニ此ノ矩形ノ面積ノ和ヲ s_1 トスレバ

$$s_1=(1\times1)+(1\times2)+\cdots\cdots+(1\times9)$$

$$s_1=1+2+\cdots\cdots+9$$

$$s_1=9+8+\cdots\cdots+1$$

$$2s_1=10\times9$$

$$s_1=\frac{10\times9}{2}=45平方糎$$

次ニ $AA_1, A_1A_2, \cdots\cdots, A_9B$ ヲ各10等分シ卽チ AB ヲ100等分シテ前同様 ABC 内ニ99個ノ矩形ヲ容レ其面積ノ和ヲ s_2 トスルトキハ

$$s_2=(0.1\times0.1)+(0.1\times0.2)+\cdots\cdots+(0.1\times9.9)$$
$$=(0.1+0.2+\cdots\cdots+9.9)\times0.1$$

故ニ　$s_2=\dfrac{10\times99}{2}\times\dfrac{1}{10}=49.5$ 平方糎

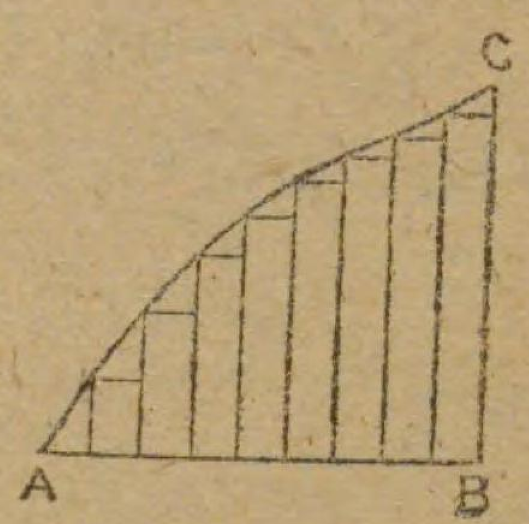
次ニ此ノ各小部分ヲ更ニ10等分シテ前同様ニシテ作リタル矩形ノ面積ノ和ヲ s_3 トスルトキハ

$$s_3=(0.01\times0.01)+(0.01\times0.02)+\cdots\cdots+(0.01\times9.99)$$
$$=(0.01+0.02+\cdots\cdots+9.99)\times0.01$$

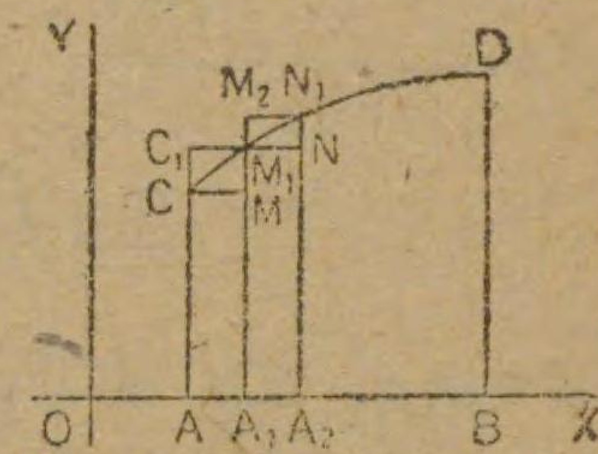
故ニ　$s_3=\dfrac{10\times999}{2}\times\dfrac{1}{100}=49.95$ 平方糎

上ニ示セルガ如ク AB ヲ細ニ等分シテ ABC 内ニ數多ノ矩形ヲ容ルレバ等分數ヲ增加スルニ從ヒ矩形ノ總面積ハ增大シテ前ニ擧ゲタル三角形ノ面積50平方糎ニ近ヅク.

此ノ如ク面積ヲ細ニ分割シテ其ノ各部分ノ和ヲ索ムル方法ハ三角形ニ限ラズ, AC ガ任意ノ曲線ナル場合ニモ之ヲ應用スルコトヲ得ベク, 尚此ノ如クシテ面積ノ大略ノ値ヲ知ルノミニアラズシテ, 曲線 AC ノ方程式ヲ知リ得ル場合ニハ等分點ガ無限ニ多キ極限トシテ曲線 AC 及ビ直線 AB, BC ノ包圍スル面積ノ値ヲ索ムルコトヲ得ベ



今曲線 $y=f(x)$ ト橫軸及ビ二ツノ直線 $x=a, x=b$ トノ間ニアル部分 ACDB ノ面積ヲ s トシ, 簡單ノ爲メニ $f(x)$ ハ連續函數ニシテ常ニ增加ノ狀態ニアリ, 卽チ右方ニ赴クニ從ヒ益橫軸ニ遠ザカルモノトシ, AB ヲ n 等分シテ順次ニ $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}$ ノ値ヲ取リ, 各分點 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_{n-1}$ ヨリ縱軸ニ平行線ヲ引キ, 又曲線トノ交點ヨリ橫軸ニ平行線ヲ引キ, 矩形 $ACMA_1, A_1M_1NA_2, \cdots\cdots$ ノ面積ノ和ヲ s_1 トシ, 矩形 $AC_1M_1A_1, A_1M_2N_1A_2, \cdots\cdots$ ノ面積ノ和ヲ s_2 トスルトキハ



$$s_1<s<s_2$$

又　$x_1-a=x_2-x_1=\cdots\cdots=b-x_{n-1}=h$

ト置クトキハ

$$s_1=\{f(a)+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})\}h$$
$$s_2=\{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(b)\}h$$

從テ　$s_2-s_1=\{f(b)-f(a)\}h$

s_2-s_1 ハ矩形 $CC_1M_1M, M_1M_2N_1N, \cdots\cdots$ ノ面積ノ和ニシテ等分點ノ增加スルニ從ヒ卽チ h ノ減少スルニ從ヒ益其ノ値ヲ減少シ, 結局 $f(a), f(b)$ ガ有限ニシテ h ノ限リナク小ナル極限ニ於テ 0 トナル.

故ニ　$\lim\limits_{h\to0}(s_2-s_1)=0$

卽チ　$\lim\limits_{h\to0}s_1=\lim\limits_{h\to0}s_2$

s_1 ト s_2 トハ明ニ有限ニシテ極限ニ於テ其ノ値相等シ，故ニ其ノ間ニアル s モ亦極限ニ於テ之ト同一ノ値ヲ取ル，依テ此ノ極限値卽チ

$$\lim_{h\to0}\{f(a)+f(x_1)+\cdots\cdots+f(x_{n-1})\}h$$

或ハ

$$\lim_{h\to0}\{f(x_1)+f(x_2)+\cdots\cdots+f(b)\}h$$

ヲ表ハスニ

$$\int_a^b f(x)dx$$

ナル記號ヲ用ヒ，之ヲ $x=a$ 及ビ $x=b$ ノ間ニ於ケル函數 $f(x)$ ノ積分トイヒ，a ヲ其ノ下限，b ヲ其ノ上限トイフ.

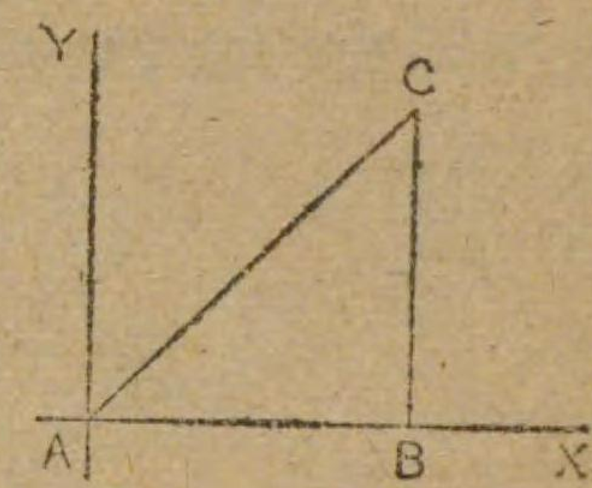
以上ハ $f(x)$ ガ正ニシテ增加ノ狀態ニアルモノトシタレドモ $f(x)$ ガ減少ノ狀態ニアルトキ，又ハ極大極小ヲ有スルトキ，又ハ $f(x)$ ガ負ナルトキ等ニモ全ク同樣ナル結果ヲ得ベシ.

尙又 $f(x)$ ヲ連續ト假定シタレドモ有限ニシテ不連續ナル場合ニハ，其ノ點ニテ區分シテ考フレバ其ノ結果ハ連續ナル場合ト同樣ナリ．例ヘバ圖ノ如ク $f(x)$ ガ $x=c$, $a<c<b$ ニ於テ不連續トナルトキハ

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

最後ニ說明ノ便宜上圖ヲ用ヒテ面積ニ就テ論ジタレドモ，積分ハ必ズシモ面積ヲ索ムル場合ノミニ限ラズ，或ル一ツノ極限値ヲ索ムル手續ニ過ギザルモノトス.

本節ノ初ニ擧ゲタル直角三角形ノ面積ヲ索ムル問題ヲ考フルニ，頂點Aヲ原點トシ，ABヲ横軸ノ上ニ置クトキハ直線ACノ方程式ハ $y=x$ ニシテ，h ハ AB 卽チ 1 ヲ n 等分シタルモノナルガ故ニ $h=\frac{1}{n}$ ニシテ面積 ABC ハ



$$\int_0^1 xdx=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots\cdots+\frac{n-1}{n}\right\}\frac{1}{n}$$

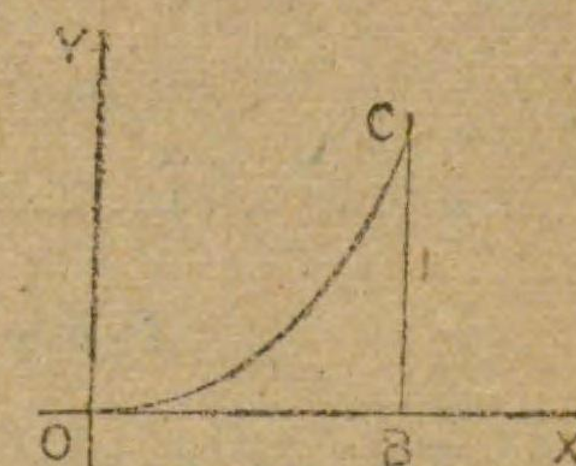
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n-1}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

故ニ　$$\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$$

同樣ニ拋物線 $y=x^2$ ト横軸及ビ直線 $x=1$ トノ間ノ面積ハ



$$\int_0^1 x^2dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}$$

ニテ之ヲ表ハスコトヲ得.

以上ノ如キ手續ヲ取ルトキハ積分ハ常ニ極限値ヲ索ムルコトニ歸着シ，場合ニヨリ複雜ナル計算ヲ行フコトトナルヲ以テ簡單ニ同一ノ結果ニ到着スルガ爲メニ次節ニ於ケルガ如キ方法ヲ取ルコトトス

26 積分ノ計算

函數 $F(x)$ 及ビ其ノ第一次導來函數 $f(x)$ ハ何レモ連續ナリトシ，第17節ニヨリ

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$$

卽チ

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right\}=0$$

依テ h ノ微小ナルトキハ次ノ如ク表ハスコトヲ得.

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)=\varepsilon$$

此ニ ε ハ h ノ 0 トナル極限ニ於テ 0 ニ收斂スルモノトス

依テ $$F(x+h)-F(x)=f(x)h+\varepsilon h$$

$b-a$ ヲ n 等分シテ順次ニ

$$x_1=a+h,\quad x_2=x_1+h,\ \cdots\cdots,\ b=x_{n-1}+h$$

トシ，之ヲ上式ニ代入スルトキハ

$$F(x_1)-F(a)=f(a)h+\varepsilon_1 h$$
$$F(x_2)-F(x_1)=f(x_1)h+\varepsilon_2 h$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F(b)-F(x_{n-1})=f(x_{n-1})h+\varepsilon_n h$$

故ニ

$$F(b)-F(a)=\{f(a)+f(x_1)+\cdots\cdots+f(x_{n-1})\}h+(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots\cdots+\varepsilon_n)h$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2\ \cdots\cdots, \varepsilon_n$ ノ中ニテ絶對値ノ最大ナルモノヲ δ トスレバ

$$|(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots\cdots+\varepsilon_n)h|<|n\delta h|=|nh\delta|=|(b-a)\delta|$$

然ルニ $b-a$ ハ有限ニシテ δ ハ極限ニ於テ 0 トナルヲ以テ

$$\lim_{h\to 0}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots\cdots+\varepsilon_n)h=0$$

故ニ $$F(b)-F(a)=\lim_{h\to 0}\{f(a)+f(x_1)+\cdots\cdots+f(x_{n-1})\}h$$

依テ前節ニヨリ

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

或ハ之ヲ次ノ如ク記ス

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b$$

此ニ $F(x)$ 及ビ $f(x)$ ハ何レモ連續ニシテ $f(x)=F'(x)$ ナル關係アリ，$[F(x)]_a^b$ ハ $F(x)$ ニ於テ $x=b$ ト置キタルモノヨリ $x=a$ ト置キタルモノヲ減ズルコトヲ示ス.

故ニ上ノ條件ヲ滿足スル函數 $F(x)$ ヲ $f(x)$ ヨリ求メ得ルトキハ直チニ積分ノ値ヲ計算スルコトヲ得.

例ヘバ $F(x)=\dfrac{x^2}{2}$ ナルトキハ $f(x)=x$ ナルガ故ニ

$$\int_0^1 xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}$$

一般ニ $F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ ナルトキハ $f(x)=x^n$ ニナルガ故ニ

$$\int_a^b x^n dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b=\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \qquad (1)$$

積分ノ定義ニヨリ x^n 及ビ $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ ハ $x=a$ ヨリ $x=b$ ニ至ル間ニ於テ連續ナルコトヲ要スルガ故ニ $n\gtrless -1$ ナルコトヲ要シ，次ニ $n<0$ ナルトキハ $a>0, b>0$ 又ハ $a<0, b<0$ ナルコトヲ要ス.

$n=-1$ ナルトキハ $f(x)=\frac{1}{x}$ トナル，然ルニ第20節ニヨリ $y=\log x$ ナルトキハ $y'=\frac{1}{x}$ ナルガ故ニ

$$\int_a^b \frac{dx}{x}=\Big[\log x\Big]_a^b=\log b-\log a \qquad (2)$$

$\frac{1}{x}$ ハ $x=0$ ニ於テ無限大トナルガ故ニ上ノ式ニ於テ $a>0, b>0$ 又ハ $a<0, b<0$ ナルコトヲ要ス.

$F(x)=\sin x$ ナルトキハ $f(x)$ ハ $\cos x$ ナルガ故ニ

$$\int_a^b \cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_a^b=\sin b-\sin a \qquad (3)$$

$F(x)=\cos x$ ナルトキハ $f(x)$ ハ $-\sin x$ ナルガ故ニ

$$\int_a^b \sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_a^b=\cos a-\cos b \qquad (4)$$

又第20節ニヨリ $y=e^x$ ナルトキハ $y'=e^x$ ナルガ故ニ

$$\int_a^b e^x dx=\Big[e^x\Big]_a^b=e^b-e^a \qquad (5)$$

注意 $F(x)$ ノ導來函數ガ $f(x)$ ナラバ c ヲ常數トシテ $F(x)+c$ ノ導來函數モ亦 $f(x)$ ナリ，故ニ

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)+c\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

即チ c ノ有無ハ積分ノ値ニハ影響ナシ，依テ之ヲ省略スルヲ普通トス，但シ上限下限ヲ略シタル場合ニハ $F'(x)=f(x)$ ト同様ニ

$$F(x)=\int f(x)\,dx+c$$

ト記ス方適當ナリトス

27. 積分ノ變形

函數ノ積分ノ値ヲ索ムルニ當リテハ適宜ナル方法ヲ施シテ積分ヲ變ジ，前節ニ於テ得タル如キ若干ノ基礎積分ト同一ノ形ヲ取ラシメ其ノ値ヲ知ルヲ以テ捷徑トス，次ニ其ノ最モ有力ナル二三ノ方法ヲ掲グ

(I) 函數ヲ若干ノ函數ノ和ト考ヘ其ノ各部分ノ積分ヲ索ム.

$$F(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots\ldots+f_n(x)$$

依テ
$$\int_a^b F(x)dx=\int_a^b\Big\{f_1(x)+f_2(x)+\ldots\ldots+f_n(x)\Big\}dx$$
$$=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx+\ldots\ldots+\int_a^b f_n(x)dx$$

(II) 函數ヲ二ツノ函數ノ積ト考ヘ其ノ一部分ヲ積分シテ原積分ヲ索ムルコトヲ新ナル積分ヲ索ムルコトニ歸着セシム.

$$\frac{d}{dx}\Big\{f(x)\phi(x)\Big\}=f'(x)\phi(x)+f(x)\phi'(x)$$

依テ
$$\Big[f(x)\phi(x)\Big]_a^b=\int_a^b f'(x)\phi(x)\,dx+\int_a^b f(x)\phi'(x)\,dx$$

故ニ
$$\int_a^b f(x)\phi'(x)\,dx=\Big[f(x)\phi(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)\phi(x)\,dx$$

從テ $f(x)\phi'(x)$ ノ積分ヲ索ムルコトハ $f'(x)\phi(x)$ ノ積分ヲ索ムルコトニ歸着ス，故ニ後ノ積分ノ値ヲ索メ得ルトキハ前ノ積分ノ値ヲ知ルコトヲ得

特ニ $\phi(x)=x$, 從テ $\phi'(x)=1$ ナルトキハ

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[xf(x)\Big]_a^b-\int_a^b xf'(x)\,dx$$

(III) 積分變數ヲ他ノ變數ニ變更シテ積分ノ値ヲ索ム.

變數 x ト t ノ間ニ $x=\phi(t)$ ナル關係アリテ, $\phi(t)$ 及ビ其ノ導來函數 $\phi'(t)$ ハ連續ナリトシ, x ガ a ヨリ b ニ至ル間ニ t ハ α ヨリ β ニ至リ, x ノ一ツノ値ニ對シテ常ニ t ノ一ツノ値アリトスレバ

$$x=\phi(t),\quad \frac{dx}{dt}=\phi'(t)$$

依テ
$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\{\phi(t)\}\phi'(t)dt$$

此ノ右邊ノ積分ノ値ヲ索メ得ルトキハ直チニ左邊ノ積分ノ値ヲ知ルコトヲ得.

以上ノ運用ニ關シテハ次ノ實例ニ就テ見ルベシ.

(i) $\int_0^1 x^3(a+bx)^2dx$

$(a+bx)^2$ ヲ二項定理ニヨリ展開スルトキハ

$$(a+bx)^2=a^2+2abx+b^2x^3$$

故ニ
$$\int^1 x^3(a+bx)^2dx=\int_0^1 x^3(a^2+2abx+b^2x^2)dx$$
$$=\int_0 (a^2x^3+2abx^4+b^2x^5)dx$$
$$=\int_0^1 a^2x^3dx+\int_0^1 2abx^4dx+\int_0^1 b^2x^5dx$$
$$=a^2\int_0^1 x^3dx+2ab\int_0^1 x^4dx+b^2\int_0^1 x^5dx$$
$$=a^2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1+2ab\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1+b^2\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1$$
$$=a^2\left(\frac{1}{4}-0\right)+2ab\left(\frac{1}{5}-0\right)+b^2\left(\frac{1}{6}-0\right)$$
$$=\frac{a^2}{4}+\frac{2ab}{5}+\frac{b^2}{6}$$

(ii) $\int_0^1 (x+a)^n dx$

$x+a=t$ ト置クトキハ $\frac{dx}{dt}=1$ ニシテ x ガ 0 ヨリ 1 ニ至ル間ニ t ハ a ヨリ $a+1$ ニ至ル

故ニ
$$\int_0^1 (x+a)^n dx=\int_a^{a+1} t^n dt=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_a^{a+1}$$
$$=\frac{(a+1)^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}\qquad n\gtrless -1$$

$n=-1$ ナルトキハ
$$\int_0^1 \frac{dx}{x+a}=\int_a^{a+1}\frac{dt}{t}=\Big[\log t\Big]_a^{a+1}=\log\frac{a+1}{a}$$

此ニ $a>0$ 又ハ $a<-1$

(iii) $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2x}$

$$\frac{1}{(x+1)^2x}=\frac{x+1-x}{(x+1)^2x}=\frac{1}{(x+1)x}-\frac{1}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{x+1-x}{(x+1)x}-\frac{1}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}$$

故ニ
$$\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2x}=\int_1^2\frac{dx}{x}-\int_1^2\frac{dx}{x+1}-\int_1^2\frac{dx}{(x+1)^2}$$

例 (ii) ニヨリ

$$\int_1^2\frac{dx}{x}=\Big[\log x\Big]_1^2=\log 2,\quad \int_1^2\frac{dx}{x+1}=\Big[\log(x+1)\Big]_1^2=\log\frac{3}{2}$$
$$\int_1\frac{dx}{(x+1)^2}=\left[-\frac{1}{x+1}\right]_1^2=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

故ニ
$$\int_0^2\frac{dx}{(x+1)^2x}=\log\frac{4}{3}-\frac{1}{6}$$

或ハ $\dfrac{x}{x+1}=y$ ト置クトキハ $x=\dfrac{y}{1-y}$, $x+1=\dfrac{1}{1-y}$, $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{(1-y)^2}$

ニシテ x ガ 1 ヨリ 2 ニ至ル間ニ y ハ $\dfrac{1}{2}$ ヨリ $\dfrac{2}{3}$ ニ至ル

故ニ
$$\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2x}=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}\frac{\left(\frac{1}{1-y}\right)^2}{\left(\frac{1}{1-y}\right)^2\frac{y}{1-y}}dy=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}\frac{1-y}{y}dy$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}\frac{1}{y}dy-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}dy$$
$$=\Big[\log y\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}-\Big[y\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}$$
$$=\log\frac{4}{3}-\frac{1}{6}$$

(iv) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4x\cos x\,dx$

$$2\cos 4x\cos x=\cos 5x+\cos 3x$$

故ニ
$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4x\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 5x+\cos 3x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 5x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 3x\,dx$$

$5x=t$ ト置クトキハ $dx=\dfrac{1}{5}dt$ ニシテ

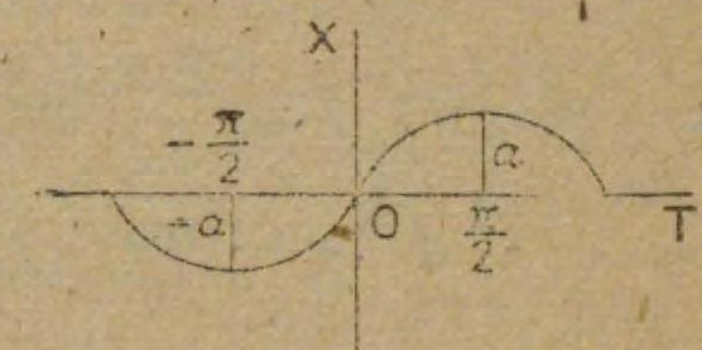
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 5x\,dx=\frac{1}{5}\int_0^{\frac{5\pi}{2}}\cos t\,dt=\frac{1}{5}\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{5\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{2}=\frac{1}{5}$$

同様ニ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 3x\,dx=\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2}=-\frac{1}{3}$

故ニ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{15}$

(v) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$x=a\sin t$ ト置クトキハ x ガ $-a$ ヨリ a ニ至ル間ニ t ハ $-\dfrac{\pi}{2}$ ヨリ $\dfrac{\pi}{2}$ ニ至リ，此ノ間ノ x ノ一ツノ値ニ對シテ常ニ t ノ一ツノ値アリ。



$$\frac{dx}{dt}=a\cos t$$

故ニ
$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^2\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt$$
$$=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt$$
$$=\frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt$$
$$=\frac{a^2}{2}\left\{\Big[t\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\Big[\frac{\sin 2t}{2}\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right\}$$
$$=\frac{\pi a^2}{2}$$

(vi) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$, 此ニ n ハ正ノ整數トス.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\sin x\,dx$$

依テ(II)ニヨリ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\Big[-\sin^{n-1}x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx$$
$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx$$
$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$

依テ $$n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx$$

即チ $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx$$

n ノ代リニ $n-2$ ト置クトキハ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx=\frac{n-3}{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-4}x\,dx$$

故ニ $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\frac{n-1}{n}\,\frac{n-3}{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-4}x\,dx$$

n ガ偶數ナルトキハ $n=2m$ ト置ケバ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\,dx=\frac{2m-1}{2m}\,\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\cdots\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx$$

又 n ガ奇數ナルトキハ $n=2m+1$ ト置ケバ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\,dx=\frac{2m}{2m+1}\,\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\cdots\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$

然ルニ $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=0+1=1$$

依テ次ノ結果ヲ得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\,dx=\frac{1.3.5\cdots\cdots 2m-1}{2.4.6\cdots\cdots 2m}\,\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\,dx=\frac{2.4.6\cdots\cdots 2m}{3.5.7\cdots\cdots 2m+1}$$

上式ニ於テ $\sin x$ ノ代リニ $\cos x$ ト置クモ全ク同一ナリ.

28. 積分ノ定義ノ擴張

前三節ニ於テ積分ノ上限及ビ下限ハ何レモ有限ニシテ $f(x)$ ハ連續函數ナリトシテ之ヲ論ゼリ, 今上限及ビ下限ノ一方又ハ雙方ガ無限大トナル場合, $f(x)$ ガ無限大トナル場合等ニ於テハ有限ナル場合ノ極限トシテ之ヲ考フベク實際如何ニ之ヲ處理スベキカハ次ノ例ニ就テ見ルベシ.

(i) $\int_0^\infty e^{-kx}dx,\quad k>0$

$-kx=y$ ト置クトキハ $dx=-\frac{dy}{k}$

$$\int_0^p e^{-kx}dx=-\frac{1}{k}\int_0^{-kp}e^y dy=-\frac{1}{k}\Big[e^y\Big]_0^{-kp}$$

$$=-\frac{1}{k}(e^{-kp}-1)=\frac{1}{k}(1-e^{-kp})$$

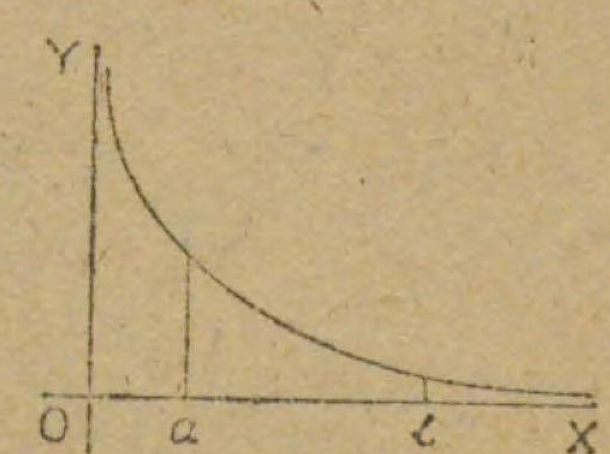
$$\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-kx}dx=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{k}(1-e^{-kp})=\frac{1}{k}$$

故ニ $$\int_0^\infty e^{-kx}dx=\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-kx}dx=\frac{1}{k}$$

(ii) $\int_a^\infty\frac{dx}{x^n},\quad a>0,\ n>0$

$$\int_a^l\frac{dx}{x^n}=\Big[-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\Big]_a^l=\frac{1}{n-1}\Big\{\frac{1}{a^{n-1}}-\frac{1}{l^{n-1}}\Big\}$$

$$\int_a^l\frac{dx}{x}=\Big[\log x\Big]_a^l=\log\frac{l}{a}$$



$n>1$ ナルトキハ $\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l^{n-1}}=0$

$n<1$ ナルトキハ $\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l^{n-1}}=\infty$

故ニ $\int_a^\infty \frac{dx}{x^n} = \lim_{l\to\infty}\int_a^l \frac{dx}{x^n}$ ハ $n>1$ ナルトキ有限ニシテ其ノ値

$\frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$ ニ等シク，其ノ他ノ場合ニハ無限大トナル.

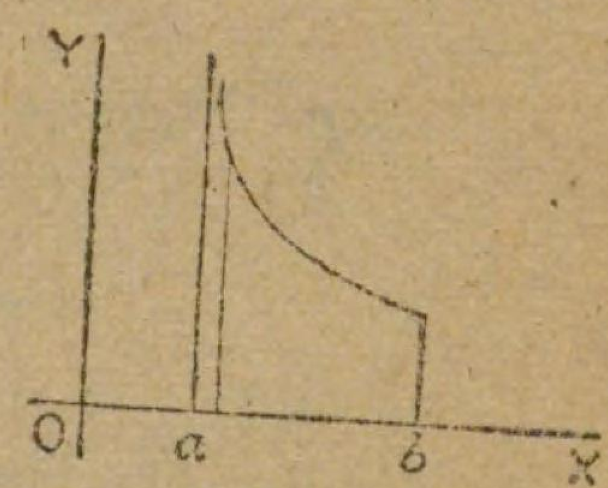
(iii) $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$, $a>0,\ b>0,\ n>0$

$$\int_{a+\epsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^n} = \left[-\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}\right]_{a+\epsilon}^b = \frac{1}{n-1}\left\{\frac{1}{\epsilon^{n-1}} - \frac{1}{(b-a)^{n-1}}\right\}$$

$$\int_{a+\epsilon}^b \frac{dx}{x-a} = \Big[\log(x-a)\Big]_{a+\epsilon}^b = \log(b-a) - \log\epsilon$$

$n<1$ ナルトキハ $\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^{n-1}} = 0$

$n>1$ ナルトキハ $\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^{n-1}} = \infty$



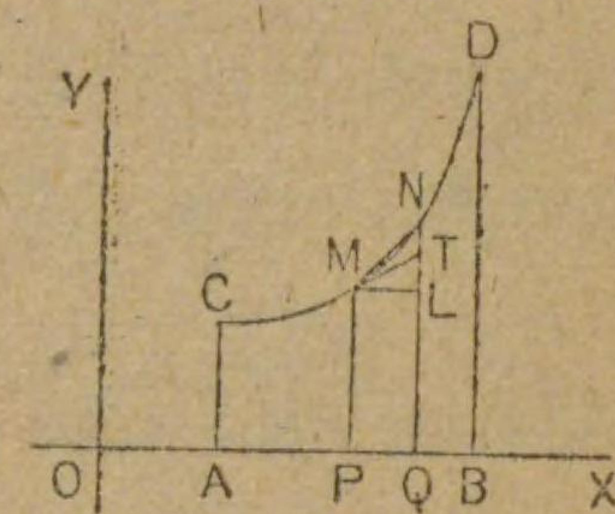
故ニ $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^n}$

ハ $n<1$ ナルトキ有限ニシテ其ノ値 $\frac{1}{(1-n)(b-a)^{n-1}}$ ニ等シク，其ノ他ノ場合ニハ無限大トナル。

第八章 積分ノ應用

29. 曲線ノ弧ノ長サ

直線 $x=a, x=b$ ノ間ニアル曲線 $y=f(x)$ ノ弧 CD ノ長サヲ s トシ，CD ニ對應スル横軸ノ部分 AB ヲ n 等分シテ各分點 P, Q…… ヨリ縦軸ニ平行線ヲ引キ CD トノ交點ヲ夫々 M, N…… トシ，M ヨリ横軸ニ平行線ヲ引キ QN トノ交點ヲ L トシ



$$OP=x,\ PM=y,\ PQ=h$$

$$\angle LMN=\theta$$

ト置クトキハ

$$MN\cos\theta = h$$

θ ハ $h=0$ ナル極限ニ於テハ M ニ於ケル切線 MT ガ横軸ノ正方向トナス角ノ正切トナル，故ニ

$$MN=\left\{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}+\epsilon\right\}h$$

此ニ ϵ ハ h ト共ニ 0 ニ收斂スルモノトス.

依テ順次ニ弧 CD 上ノ點 C, M, N …… D ヲ兩端トスル線分ノ長サノ和ヲ l ニテ表ハストキハ

$$l = \sum\left\{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}+\epsilon\right\}h$$

$$= \sum\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}h + \Sigma\epsilon h$$

ε ノ中ニテ其ノ絕對値ノ最大ナルモノヲ δ トスレバ

$$|\Sigma\varepsilon h|<|n\delta h|=|nh\delta|=|(b-a)\delta|$$

故ニ

$$\lim_{h\to0}\Sigma\varepsilon h=0$$

依テ

$$\lim_{h\to0} l=\lim_{h\to0}\Sigma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,h$$

故ニ $\lim\limits_{h\to0} l$ ヲ以テ弧CDノ長サトスレバ次ノ式ヲ得

$$s=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

次ニ簡單ナル曲線ノ長サヲ索ムル例ヲ掲グ

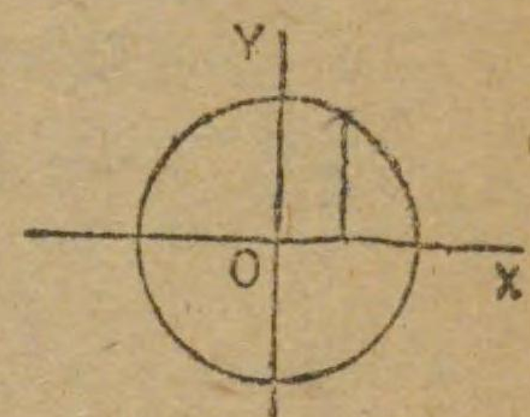
(1) 圓 $x^2+y^2=a^2$ ノ周

$$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$$

圓ハ兩軸ノ何レニ關シテモ對稱ナルガ故ニ $x>0, y>0$ ノ部分ヲ取リ之ヲ4倍スレバ全周ヲ得ベシ.

依テ $\quad y=\sqrt{a^2-x^2}$

從テ $\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$



$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

故ニ圓周ヲ s トスレバ

$$s=4\int_0^a\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$x=a\sin\theta$ ト置ケバ

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos\theta,\quad \frac{dx}{d\theta}=a\cos\theta$$

依テ

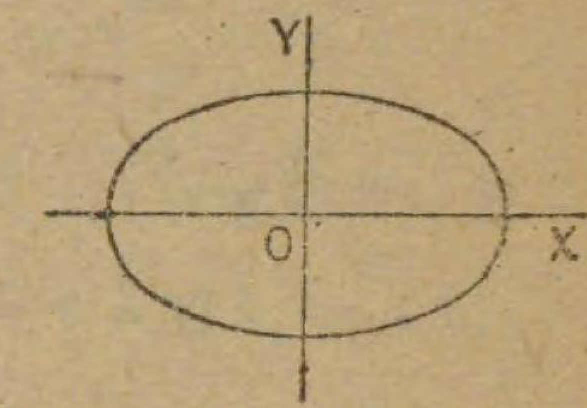
$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\,d\theta=4a\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi a$$

(ii) 橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ノ周

橢圓モ亦兩軸ノ何レニ關シテモ對稱ナルガ故ニ $x>0, y>0$ ノ部分ヲ取リ之ヲ4倍スレバ全周ヲ得.

$$x=a\sin\phi,\quad y=b\cos\phi$$

ト置クトキハ



$$\frac{dx}{d\phi}=a\cos\phi,\quad\frac{dy}{d\phi}=-b\sin\phi$$

從テ

$$\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2=\sqrt{a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi}=\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\phi}$$

然ルニ

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2}d\phi$$

故ニ

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\phi}\,d\phi$$

$\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=e$ トスレバ

$$s=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}\,d\phi$$

即チ

$$s\doteqdot4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{1-\frac{e^2}{2}\sin^2\phi-\frac{e^4}{8}\sin^4\phi-\cdots\right\}d\phi$$

第27節ニヨリ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\phi\,d\phi=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\phi\,d\phi=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2}$$

故ニ

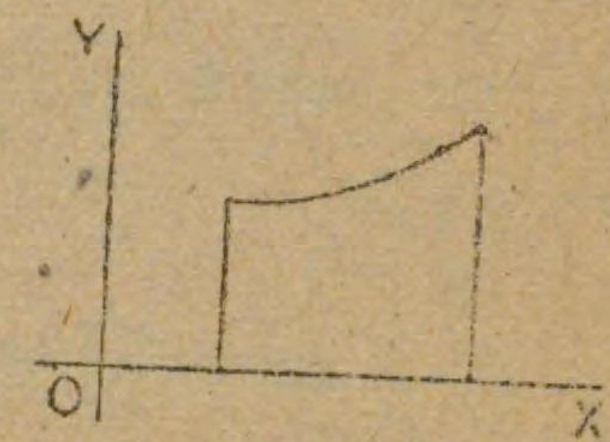
$$s=2\pi a\left\{1-\frac{e^2}{2^2}-\frac{3e^4}{8^2}-\cdots\right\}$$

依テ e ガ微小ナルトキハ $2\pi a\left(1-\dfrac{e^2}{4}\right)$ ヲ以テ橢圓ノ全周ト取ルコトヲ得.

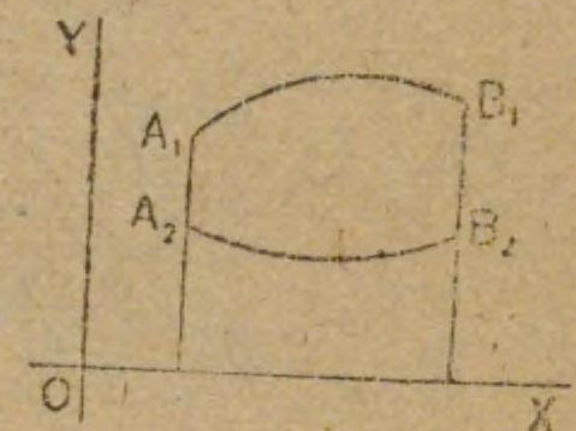
30. 曲線ノ包圍スル面積

曲線 $y=f(x)$ ト横軸及ビ直線 $x=a,\ x=b$ ノ間ニアル面積ヲ A トスルトキハ第25節ニヨリ次ノ式ヲ得

$$A=\int_a^b f(x)\,dx$$



一般ニ曲線 $y=f_1(x),\ y=f_2(x)$ 及ビ直線 $x=a,\ x=b$ ノ間ニアル面積 $A_1B_1B_2A_2$ ハ横軸ト A_1B_1 ノ間ニアル面積ヨリ横軸ト A_2B_2 ノ間ニアル面積ヲ減ジタルモノニ等シ，故ニ



$$A=\int_a^b f_1(x)dx-\int_a^b f_2(x)dx$$

即チ　$A=\int_a^b \{f_1(x)-f_2(x)\}dx$

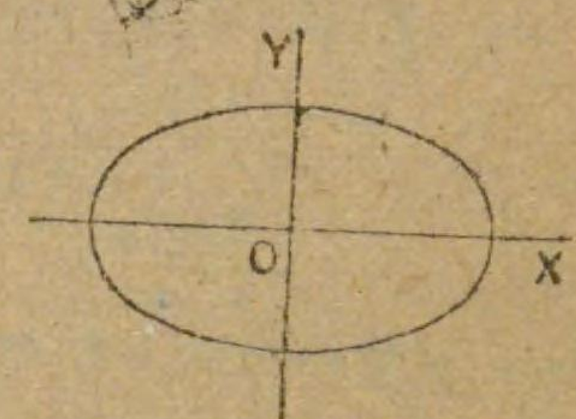
一ツノ曲線ガ包圍スル面積ハ A_1 ト A_2 及ビ B_1 ト B_2 ガ一致シタル場合ト考フベク，其ノ他ノ複雜ナル形ヲ有スル場合ニハ適宜之ヲ分割シ各部分ニ就キテ上ノ方法ヲ施スベシ.

次ニ簡單ナル曲線ノ包圍スル面積ヲ索ムル例ヲ揭グ.

(i)　橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ノ包圍スル全面積

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

橢圓ノ包圍スル全面積ヲ A トスレバ



$$A=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

即チ
$$A=4\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$x=a\sin\theta$ ト置クトキハ

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos\theta,\quad \frac{dx}{d\theta}=a\cos\theta$$

故ニ
$$A=4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2\theta\,d\theta=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta$$

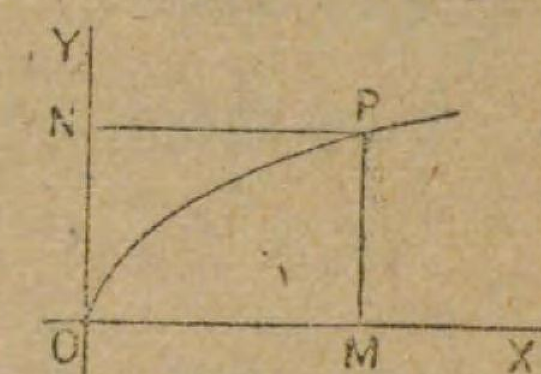
$$=2ab\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2ab\frac{\pi}{2}$$

即チ
$$A=\pi ab$$

(ii)　拋物線 $y^2=4px$ ト横軸及ビ直線 $x=a$ ノ包圍スル面積

$$y=2\sqrt{px}$$

索ムル面積ヲ A トスルトキハ



$$A=\int_0^a 2\sqrt{px}\,dx=2\sqrt{p}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$

即チ
$$A=\frac{4}{3}\sqrt{p}\,a^{\frac{3}{2}}$$

拋物線上ノ一點 P ヨリ兩軸ニ夫々垂線 PM, PN ヲ引キ，$OM=a$，$ON=b$ トスルトキハ

$$b=2\sqrt{pa}$$

故ニ
$$A=\frac{2}{3}ab$$

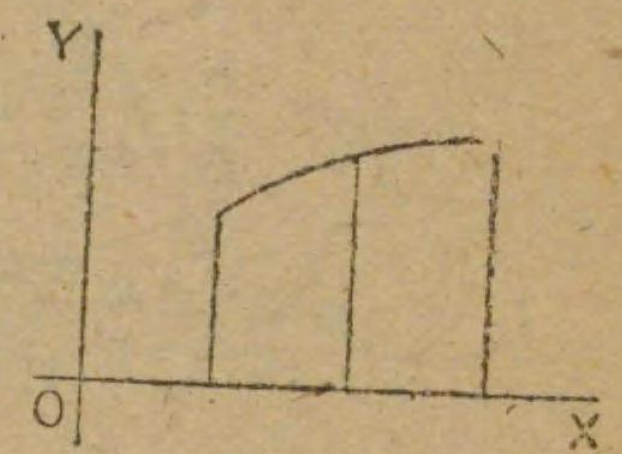
ab ハ矩形 OMPN ノ面積ナルガ故ニ OMP ノ面積ハ其ノ三分ノ二ニ等シク，從テ ONP ノ面積ハ其ノ三分ノ一ニ等シ.

依テ
$$\frac{\text{面積 ONP}}{\text{面積 OMP}}=\frac{1}{2}$$

31. 回轉面ノ包圍スル體積及ビ其ノ表面積

曲線ガ其ノ平面內ニアル一定ノ直線ヲ軸トシテ回轉スルトキ生ズル面ヲ回轉面トイフ．

横軸ヲ回轉ノ軸トシ曲線ノ方程式ヲ $y=f(x)$ トスルトキハ曲線上ノ點 (x, y) ハ y ヲ半徑トスル圓ヲ畫ク，即チ此ノ面ノ横軸ニ垂直ナル截リ口ハ圓ニシテ，其ノ面積ハ πy^2 ニ等シク，其ノ周ハ $2\pi y$ ニ等シ．



今直線 $x=a$, $x=b$ ノ間ニアル横軸ノ部分ヲ n 等分シタルモノヲ h トスルトキハ回轉面ノ包圍スル體積ハ

$$\Sigma \pi y^2 h$$

ニ於テ h ガ 0 ニ等シキ極限ナリ，依テ此ノ回轉面ガ $x=a$, $x=b$ ノ間ニ於テ包圍スル體積ヲ V トスレバ

$$V=\int_a^b \pi y^2 dx$$

同樣ニ h ニ對應スル曲線ノ弧ノ長サヲ k トスルトキハ此ノ回轉面ノ表面積ハ

$$\Sigma 2\pi y k$$

ニ於テ k ガ 0 ニ等シキ極限ナリ，依テ此ノ表面積ヲ S ニテ表ハストキハ

$$S=\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

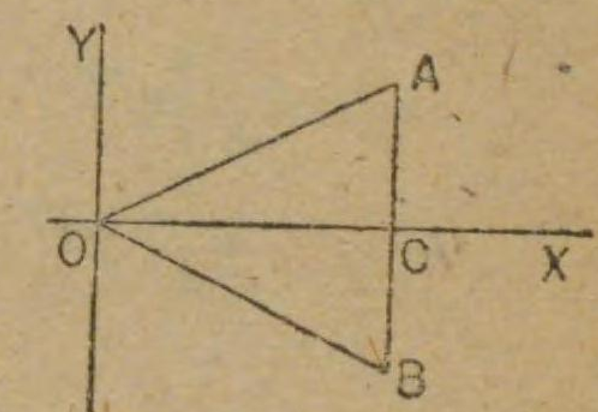
次ニ掲グルハ回轉面ノ體積及ビ表面積ヲ索ムル例ナリ．

(i) 直線 $y=ax$ ガ横軸ヲ軸トシテ回轉シテ生ズル曲面ノ $x=0$ 及ビ $x=h$ ノ間ニアル部分ノ體積及ビ表面積

OC$=h$, CA$=k$ ト置キ，索ムル體積ヲ V トスルトキハ

$$V=\int_0^h \pi y^2 dx=\int_0^h \pi a^2x^2 dx$$

$$=\pi a^2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\pi\frac{a^2h^3}{3}$$



然ルニ $k=ah$

故ニ $V=\frac{1}{3}\pi k^2 h$

又 $y=ax \quad \frac{dy}{dx}=a$

索ムル表面積ヲ S トスルトキハ

$$S=\int_0^h 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^h 2\pi ax\sqrt{1+a^2}\,dx$$

$$=2\pi a\sqrt{1+a^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h=2\pi a\sqrt{1+a^2}\,\frac{h^2}{2}$$

$$=\pi ah^2\sqrt{1+a^2}$$

OA$=l$ ト置クトキハ

$$l^2=h^2+k^2 \quad k=ah$$

故ニ $S=\pi ah^2\sqrt{1+\frac{k^2}{h^2}}=\pi ah\sqrt{h^2+k^2}$

即チ $S=\pi kl$

(ii) 楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ガ座標軸ヲ軸トシテ回轉シテ生ズル曲面ノ包圍スル體積.

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

此ノ楕圓ガ横軸ヲ軸トシテ回轉シテ生ズル曲面ノ包圍スル體積ハ

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2dx$$

$$=2\int_0^a\pi b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

$$=2\pi b^2\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a=2\pi b^2\left(a-\frac{a}{3}\right)$$

即チ
$$V=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

同様ニ楕圓ガ縦軸ヲ軸トシテ回轉シテ生ズル曲面ノ包圍スル體積ハ

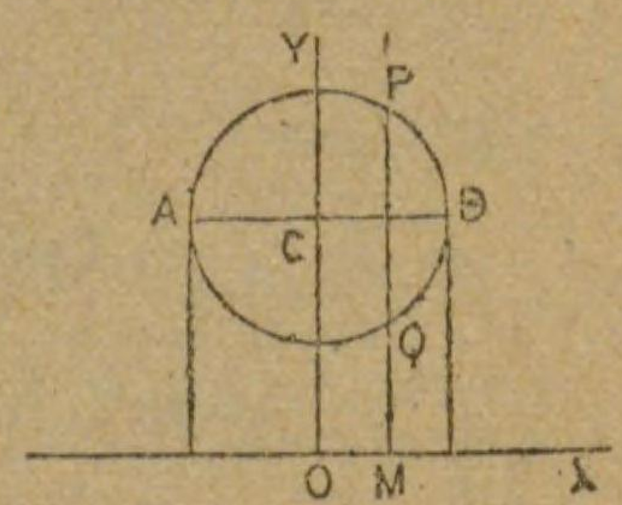
$$V=\frac{4}{3}\pi a^2b$$

$a=b$ ナルトキハ何レモ

$$V=\frac{4}{3}\pi a^3$$

トナリ球ノ體積ヲ得.

(iii) 圓 $x^2+(y-c)^2=a^2\ (c>a)$ ガ横軸ヲ軸トシテ回轉シテ生ズル曲面ノ包圍スル體積及ビ表面積



$$y=c\pm\sqrt{a^2-x^2}$$

$$y_1=c+\sqrt{a^2-x^2},\quad y_2=c-\sqrt{a^2-x^2}$$

ト置クトキハ

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y_1^2dx-\int_{-a}^{a}\pi y_2^2dx$$

即チ
$$V=2\pi\int_0^a(y_1^2-y_2^2)dx$$

然ルニ
$$y_1^2-y_2^2=(c+\sqrt{a^2-x^2})^2-(c-\sqrt{a^2-x^2})^2$$
$$=4c\sqrt{a^2-x^2}$$

依テ
$$V=2\pi\int_0^a4c\sqrt{a^2-x^2}dx$$
$$=8\pi c\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx$$

然ルニ第30節ニヨリ

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{\pi}{4}a^2$$

故ニ
$$V=8\pi c\times\frac{\pi}{4}a^2=2\pi^2a^2c$$

或
$$V=\pi a^2\times2\pi c$$

又求ムル表面積ハ APB ガ回轉シテ生ズル曲面ノ表面積ト AQB ガ回轉シテ生ズル曲面ノ表面積トノ和ニ等シ.

依テ
$$S=\int_{-a}^{a}2\pi y_1\sqrt{1+\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2}dx+\int_{-a}^{a}2\pi y_2\sqrt{1+\left(\frac{dy_2}{dx}\right)^2}dx$$

$$=4\pi\int_0^a(y_1+y_2)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

$$=4\pi\int_0^a2c\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

依テ
$$S=8\pi c.\,a\frac{\pi}{2}$$

故ニ
$$S=4\pi^2ac$$

或ハ
$$S=2\pi a\times2\pi c.$$

32. 積分ノ近似値

第25節ニヨリ

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{h\to 0}\left\{f(a)+f(x_1)+\cdots\cdots+f(x_{n-1})\right\}h$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{f(x_1)+f(x_2)+\cdots\cdots+f(b)\right\}h$$

但シ　$x_1-a=x_2-x_1=\cdots\cdots=b-x_{n-1}=h$

故ニ h ノ十分小ナルトキ積分ノ値ハ大略下ノ式ニテ之ヲ表ハスコトヲ得.

$$s_1=\{f(a)+f(x_1)+\cdots\cdots+f(x_{n-1})\}h$$

又ハ　$s_2=\{f(x_1)+f(x_2)+\cdots\cdots+f(b)\}h$

$f(a)=y_0,\ f(x_1)=y_1,\cdots\ (x_{n-1})=y_{n-1},\ f(b)=y_n$ ト置クトキハ

$$s_1=(y_0+y_1+\cdots\cdots+y_{n-1})h=\sum_{k=0}^{n-1} y_k h \qquad (1)$$

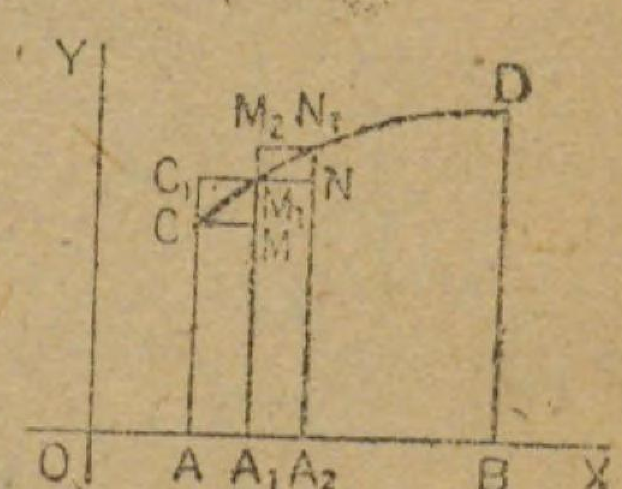
$$s_2=(y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n)h=\sum_{k=1}^{n} y_k h \qquad (2)$$

次ニ　$s_1+s_2=2s_3$ ト置クトキハ

$$s_3=(y_0+2y_1+\cdots\cdots+2y_{n-1}+y_n)\frac{h}{2}$$

或ハ　$$s_3=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{y_k+y_{k+1}}{2}h \qquad (3)$$

圖ニ於テ s_1 ハ矩形 $ACMA_1$ 等ノ面積ノ和, s_2 ハ矩形 $AC_1M_1A_1$ 等ノ面積ノ和, 又 s_3 ハ梯形 ACM_1A_1 等ノ面積ノ和ナリ.



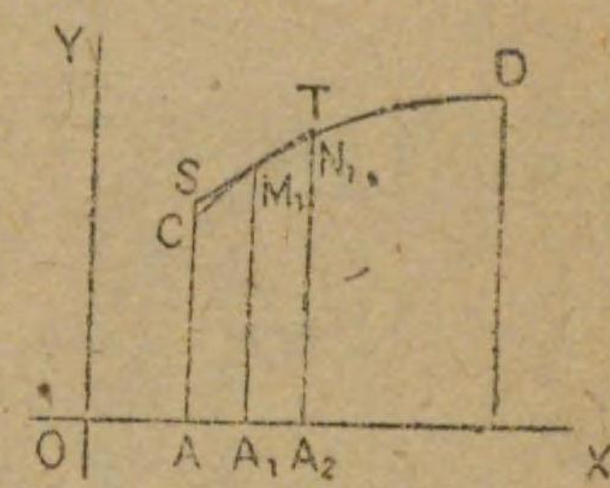
s_3 ニ於テ $n=2m$ ト置クトキハ

$$s_4=(y_0+2y_1+\cdots\cdots+2y_{2m-1}+y_{2m})\frac{h}{2}$$

或ハ　$$s_4=\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{y_k+y_{k+1}}{2}h \qquad (4)$$

s_4 ハ $b-a$ ヲ $2m$ 等分シタルトキ梯形 ACM_1A_1 等ノ面積ノ和ナリ.

次ニ M_1 ニ於テ切線ヲ引キ, 梯形 $ASTA_2$ ヲ作ルトキハ其ノ面積ハ $2y_1h$ ナルガ故ニ



$$s_5=(y_1+y_3+\cdots\cdots+y_{2m-1})2h$$

或ハ　$$s_5=\sum_{k=0}^{m-1}2y_{2k+1}h \qquad (5)$$

s_5 ハ梯形 $ASTA_2$ 等ノ面積ノ和ナリ.

更ニ　$\dfrac{2s_4+s_5}{3}=s_6$ ト置クトキハ

$$s_6=\{y_0+4(y_1+y_3+\cdots\cdots+y_{2m-1})$$

$$+2(y_2+y_4+\cdots\cdots+y_{2m-2})+y_{2m}\}\frac{h}{3}$$

或ハ　$$s_6=\sum_{k=0}^{m-1}(y_{2k}+4y_{2k+1}+y_{2k+2})\frac{h}{3} \qquad (6)$$

s_6 ヲシンプソンノ公式トイヒ, 之ヲ用ヒテ計算スルトキハ圖ヲ見テ推測シ得ル如ク h ノ小ナル値ニ對シテ相當ニ精密ナル積分ノ近似値ヲ求ムルコトヲ得.

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ ノ近似値ヲ索ムルニ當リ s_6 ヲ用ヒ $n=5, h=\frac{1}{10}$ トスルトキハ

$$s_6=\left\{1+4\left(\frac{100}{101}+\frac{100}{109}+\frac{100}{125}+\frac{100}{149}+\frac{100}{181}\right)\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{100}{104}+\frac{100}{116}+\frac{100}{136}+\frac{100}{164}\right)+\frac{1}{2}\right\}\frac{1}{30}$$

即チ
$$s_6=\left\{1+400\left(\frac{1}{101}-\frac{1}{109}+\frac{1}{125}+\frac{1}{149}+\frac{1}{181}\right)\right.$$
$$\left.+200\left(\frac{1}{164}+\frac{1}{116}+\frac{1}{136}+\frac{1}{164}\right)+\frac{1}{2}\right\}\frac{1}{30}$$

此ノ値ヲ小數第八位マデ索ムルトキハ 0.78539815 ヲ得，然ルニ $x=\tan\theta$ ト置クトキハ

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

依テ
$$\frac{\pi}{4}=0.78539815$$

即チ
$$\pi=3.1415926$$

注意 s_0, s_1, s_5 ハ何レモ曲線ガ直線ノ部分ヨリ成ルモノトシテ作リタル式ナレドモ s_6 ハ曲線ガ拋物線ノ部分ヨリ成ルモノトシテ導キ得ベキコトハ容易ニ證明スルヲ得ルモノトス.

高等數學初步

定價 16 圓

昭和6年4月1日 印 刷
昭和6年4月5日 發 行
昭和21年11月20日七版印刷發行

著 者 坂 井 英 太 郎

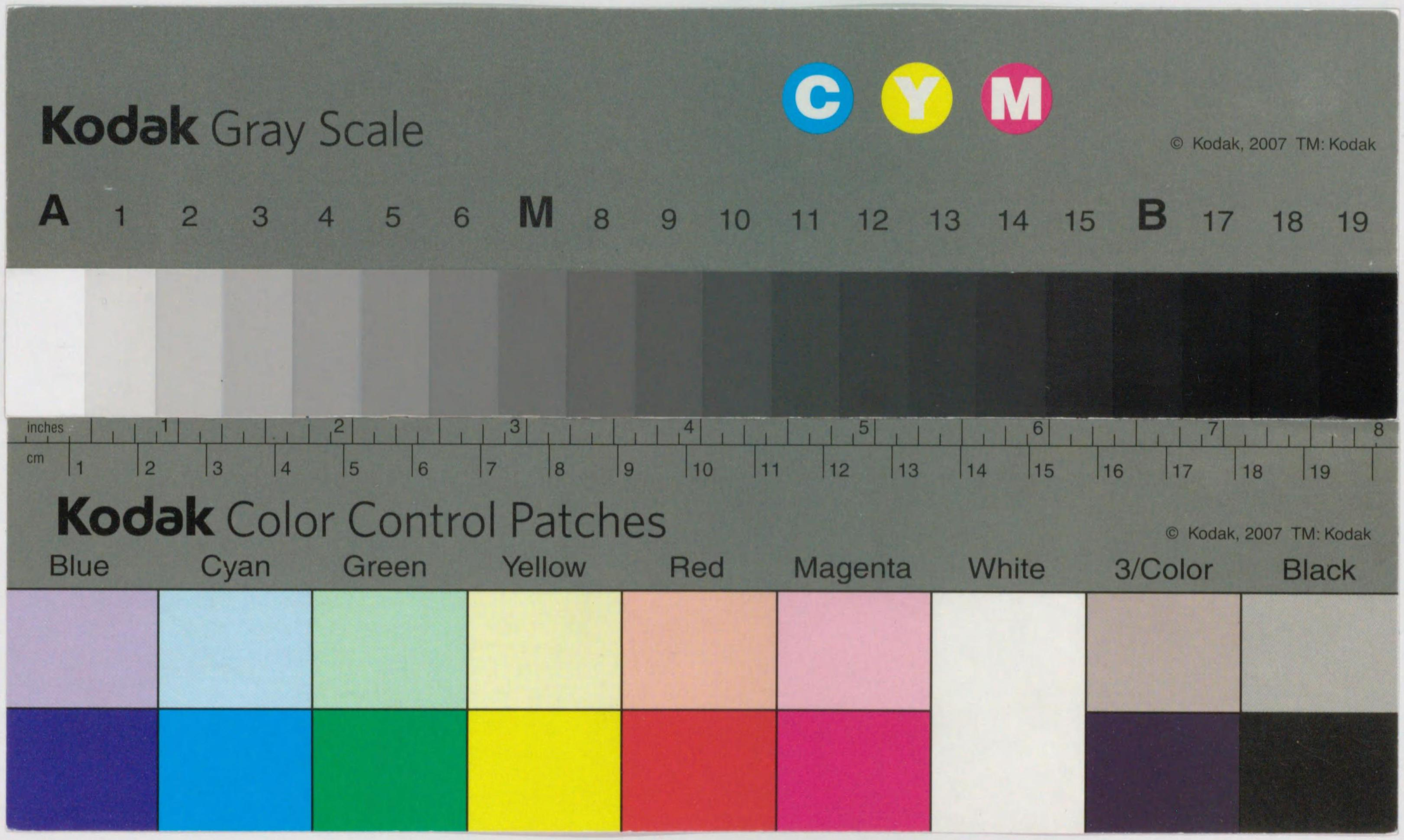
代表者
發行者 南 條 初 五 郎
東京都神田區駿河臺三丁目九番地

印刷者 原 田 憲 次 郎
東京都王子區神谷町一ノ六一ノ一

印刷所 大洋印刷產業株式會社
東京都王子區神谷町一ノ六一ノ一

發行所 東京都神田區駿河臺三丁目九番地 共立出版株式會社
電話 神田 (25) 1518・2624

配給元 東京都神田區淡路町二ノ九 日本出版配給株式會社


Kodak Gray Scale
C Y M
© Kodak, 2007 TM: Kodak
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19
inches 1 2 3 4 5 6 7 8
cm 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
Kodak Color Control Patches
© Kodak, 2007 TM: Kodak
Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black