中等學校用

# 三S平面幾何學

## 習題詳解

上冊

著者　朱文熊

上海中華書局印行

G
31-44

0495

華東區財政經濟委員會
合作社工作指導委員會

書位號數 316.1
832 V.1
登記號碼 普新 495

MG
0123.1-44
3

# 三S平面幾何學習題詳解

## 序

記得十幾歲的時候,南方學校尙少,鄙人又世居鄉鎭上,要上學校念書,一定要到上海,蘇州;先君子味琴公過世很早,兄弟姊妹又多,先慈陸太夫人料理家務,困於經濟,那裏有錢給子女遊學遠方;但是那時風氣漸開,鄙人於國文之外,要想學些英文算學,又沒有人敎,困難極了.到蘇州去買了幾本算學書,回家自己研究,一個一個的把題目演算;什麼華蘅芳學算筆談啦,筆算數學啦,代數備旨啦,形學備旨啦,一步一步的往前走,因爲想一個題目,弄得晚上睡覺都睡不着;有時實在想不出來,寫信給堂兄嘯谷哥——他在蘇州學堂裏當敎習,一把信件給了航船上的人了,回到家來,自己再想一想,倒想出來了,雖然懊悔白費了信錢,借此聯絡兄弟的感情,也是很好的.後來考取了蘇州中西學堂,揚州張劍虹先師敎鄙人數學;不明白時,有先生問了,方便得多多.那時的學校,不比現在一年級有一年級的功課限定,你要能够趕功課,便可以由第三班昇到第二班,由第二班昇到頭班;鄙人心愛數學,兼程而進,不到一年功夫,昇到頭班;高興得了不得,多謝大多數的同學兄弟,都很看得起鄙人;國文先生章式之先生,也循循善誘,竭力勗勉.其時蘇州巡撫端午橋先生選考出洋留學生,鄙人僥倖考取了,派送日本國留學;畢業於日本弘文學院,日本東京高等師範學校理化科.回國當了幾年化學,物理敎習,在北敎

3 2167 7577 9

育部編審處審查了十五年教科書;目下閑住在北平,看看書,做做詩,逛逛公園,做一個世外閑人;年紀也叫大不大,叫小不小,虛度五十歲了,想做些有益社會的事情,也沒有多大能耐.於是回想到少時學算的困難,我想海內貧寒子弟,像我少年時的樣子,心想求學,沒有力量進學校,請家庭教師,更不容易;或者家道並不貧寒,因爲學校功課太多,時間上來不及細細研究;或者已經畢業高中,要考大學,或者已經畢業初中,要考高中;在這入學試驗以前,暑假之中,都要有參考書,才能夠達到考取學校的目的;再有功課很多的中學,師範教員,雖然他們自己也會解釋,並且解釋得比本書還要明白,也在意中;可是以自己的解釋,和本書的解釋,比較比較,或者在教學時也有些好處;所以鄙人決計編這本詳解,以備海內師生之用.空閑人做些空閑事,海內知交,恐怕要笑我多事了! 時在
中華民國二十一年九月三十一日

江蘇崑山朱文熊造五誌於北平闢才頭條二號寓次.

316.1
832 v.1

# 三S平面幾何學習題詳解上册

## 目　錄

# 三S平面幾何學

## 習題詳解

## 上 冊

## 緒 論

### 習 題 一 (教科書第5頁)

1. 一個動點所經過的路是什麼?

答 定方向動點的路徑是直綫;不定方向動點的路徑是曲綫.

2. 移動一綫,常常成爲什麼幾何圖形?移動一面呢?

答 動綫成面,動面成體.

3. 一直綫能不能移動而使他不成爲面呢?

答 能;設一直綫東西向,如仍向東西移動,則直綫還是直綫,不過位置變換罷了;所以一直綫移動,也有不成平面的時候.

4. 石匠怎樣用直尺的邊來決定面的平不平呢?

答 他拿一枝直綫尺來,在石面上縱橫平置,如果處處密着,就知道這石面是平的;如果見有罅隙,就知道石面不是平的.

5. 室中的壁,是那一種面呢?

答 是平面.

6.　煤氣管的外表,是那一種面呢?

**答**　是曲面.

## 習題二 (教科書第9—14頁)

1.　一個直角有若干度?一個平角有若干度?半個直角有若干度?

**答**　一直角90度;一平角180度;半直角45度.

2.　三點鐘時鐘面上兩針所成的是什麼角?六點鐘時如何?兩點鐘時如何?五點鐘時如何?

**答**　三點鐘成直角;六點鐘成平角;兩點鐘成銳角;五點鐘成鈍角.

3.　一點鐘時鐘面上兩針所成的是什麼角?兩點三十分時如何?五點三十分時如何?

**答**　一點鐘時成銳角;兩點三十分時成鈍角;五點三十分時成銳角.

4.　當車輪的輻旋轉 $\frac{1}{4}$ 周的時候,其旋轉的角度是若干度?旋轉 $\frac{1}{6}$ 周時是若干度?旋轉2周時是若干度?

**答**　旋轉 $\frac{1}{4}$ 周時,是90°;旋轉 $\frac{1}{6}$ 周時,是60°;旋轉2周時,是720°.

5.　假使一個餅從中心分作五等分,其每份角度的大小如何?分做六等分呢?

**答**　五等分時72°;六等分時60°.

6.　假使作二直線,一向北而一向東北,他所成的

是什麼角?一向南而一向東南如何?一向西北而一向西南如何?

答 正北同東北,成銳角;正南同東南,也成銳角;西北同西南,成直角.

7. 假使錶面的長針行10分鐘時,其所經的是什麼角?行15分鐘時如何?行30分鐘時如何?行45分鐘時如何?行一點鐘時如何?

答 10分鐘走成銳角;15分鐘走成直角;30分鐘走成平角;45分鐘走成鈍角;1點鐘走成一周角.

8. 在第9題的圖中試用三個字母讀出:
$\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$, $\angle(a+b)$, $\angle(b+c+d)$.

答 $\angle a$讀作AOB角, $\angle b$讀作BOC角,
$\angle c$讀作COD角, $\angle d$讀作DOE角,
$\angle(a+b)$讀作AOC角,
$\angle(b+c+d)$讀作BOE角.

9. 於此處所示的圖形中,求各未知角的數值:

(a)若$\angle a=30^\circ$, $\angle b=40^\circ$, 求$\angle AOC$.

答 $\angle AOC=\angle a+\angle b=30^\circ+40^\circ=70^\circ$.

(b)若$\angle b=35^\circ$, $\angle c=10^\circ$, 求$\angle BOD$.

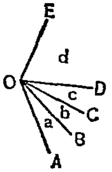
答 $\angle BOD=\angle b+\angle c=35^\circ+10^\circ=45^\circ$.

(c)若$\angle b=40^\circ$, $\angle c=10^\circ$, $d=50^\circ$, 求$\angle BOE$.

答 $\angle BOE=\angle(b+c+d)=40^\circ+10^\circ+50^\circ=100^\circ$.

(d)若$\angle AOC=60^\circ$, $\angle b=40^\circ$, 求$\angle a$.

答 $\angle a=\angle AOC-\angle b=60^\circ-40^\circ=20^\circ$.



(9)

(e) 若$\angle AOD=90^\circ$, $\angle a=35^\circ$, $\angle c=10^\circ$, 求$\angle b$.

**答** $\angle b=\angle AOD-\angle a-\angle c=90^\circ-35^\circ-10^\circ=45^\circ$.

(f) 若$\angle AOE=110^\circ$, $\angle a=20^\circ$, $\angle d=30^\circ$, 求$\angle BOD$.

**答** $\angle BOD=\angle AOE-\angle a-\angle d=110^\circ-20^\circ-30^\circ=60^\circ$

(g) 若$\angle AOC=60^\circ$, $\angle a=\angle b$, 求$\angle a$.

**答** $\angle a=\angle b$, $\therefore \angle a=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}60^\circ=30^\circ$.

(h) 若$\angle AOD=75^\circ$, $\angle a=\angle b=\angle c$, 求$\angle c$.

**答** $\angle c=\frac{1}{3}\angle AOD=\frac{1}{3}75^\circ=25^\circ$.

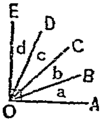
**10.** 在前圖中,何角是$\angle BOC$的隣角?
何角是$\angle COD$的隣角?
何角是$\angle BOD$的隣角?

**答** $\angle AOB$和$\angle COD$是$\angle BOC$的隣角;
$\angle BOC$和$\angle DOE$是$\angle COD$的隣角;
$\angle AOB$和$\angle DOE$是$\angle BOD$的隣角.

**11.** 如所示的圖形,若$\angle O=90^\circ$:

(a) 何角是$\angle a$的餘角?

**答** $\angle BOE$是$\angle a$的餘角.



(11)

(b) 何角是$\angle AOC$的餘角?

**答** $\angle COE$是$\angle AOC$的餘角.

(c) 何角是$\angle BOE$的餘角?

**答** $\angle a$是$\angle BOE$的餘角.

(d) 若$\angle d=20^\circ$, 求$\angle AOD$.

**答** $\angle AOD=\angle O-\angle d=90^\circ-20^\circ=70^\circ$.

(e) 若$\angle b=20^\circ$, $\angle COE=55^\circ$, 求$\angle a$.

答　$\angle a=\angle O-\angle b-\angle COE=90^\circ-20^\circ-55^\circ=15^\circ$

(f) 若$\angle AOC=55^\circ$，$\angle d=15^\circ$，求$\angle c$.

答　$\angle c=\angle O-\angle AOC-\angle d=90^\circ-55^\circ-15^\circ=20^\circ$.

(g) 若$\angle a=\angle b=\angle c=\angle d$，求$\angle a$.

答　$\angle a=\frac{1}{4}\angle O=\frac{1}{4}90^\circ=22.5^\circ$.

**12.** $30^\circ$的餘角是若干度?

答　$30^\circ$的餘角$=90^\circ-30^\circ=60^\circ$.

$35^\circ$的餘角是若干度?

答　$35^\circ$的餘角$=90^\circ-35^\circ=55^\circ$.

$\frac{2}{3}$直角的餘角是若干度?

答　$\frac{2}{3}\text{rt.}\angle$的餘角$=\text{rt.}\angle-\frac{2}{3}\text{rt.}\angle=\frac{1}{3}\text{rt.}\angle=\frac{90^\circ}{3}=30^\circ$.

$n^\circ$的餘角是若干度?

答　$n^\circ$的餘角$=90^\circ-n^\circ$.

$\frac{1}{n}$直角的餘角是若干度?

答　$\frac{1}{n}\text{rt.}\angle$的餘角$=\text{rt.}\angle-\frac{1}{n}\text{rt.}\angle=\frac{n-1}{n}\text{rt.}\angle$，或
$=\frac{(n-1)90^\circ}{n}$.

$(10+x)^\circ$的餘角是若干度?

答　$(10+x)^\circ$的餘角$=90^\circ-(10+x)^\circ=80^\circ-x^\circ$.

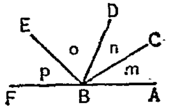
**13.** 一個角是他的餘角的2倍，問這個角是若干度?

答　35節說:兩角的和，等於直角，他們互相爲餘角.倘然分直角爲三等分，本角占兩份，餘角占一份，那

麼本角便兩倍他的餘角了.

所以: 本角$=\frac{2}{3}\text{rt.}\angle=\frac{2}{3}\times 90^\circ=60^\circ$.

**14.** 如附圖若FBA是一直綫:



(14)

(a) 何角是$\angle p$的補角?

答 $\angle ABE$是$\angle p$的補角,

$\because \angle ABE+\angle p=180^\circ$.

(b) 何角是$\angle DBF$的補角?

答 $\angle ABD$, $\because \angle ABD+\angle DBF=180^\circ$.

(c) 何角是$\angle ABE$的補角?

答 $\angle EBF$, $\because \angle EBF+\angle ABE=180^\circ$.

(d) 若$\angle p=40^\circ$, 求$\angle ABE$.

答 $\angle ABE=180^\circ-\angle p=180^\circ-40^\circ=140^\circ$.

(e) 若$\angle m=30^\circ$, $\angle p=35^\circ$, 求$\angle CBE$.

答 $\angle CBE=180^\circ-\angle m-\angle p=180^\circ-30^\circ-35^\circ=115^\circ$

(f) 若$\angle DBF=100^\circ$, $\angle m=\angle n$, 求$\angle m$.

答 $\angle m=\dfrac{180^\circ-\angle DBF}{2}=\dfrac{180^\circ-100^\circ}{2}=40^\circ$.

(g) 若$\angle p=30^\circ$, $\angle m=\angle n=\angle o$, 求$\angle o$.

答 $\angle o=\dfrac{180^\circ-\angle p}{3}=\dfrac{180^\circ-30^\circ}{3}=50^\circ$.

(h) 若$\angle FBC=140^\circ$, $\angle ABD=80^\circ$, 求$\angle n$.

答 $\angle n=\angle ABD-\angle m$,

但 $\angle m=180^\circ-\angle FBC$,

$\therefore \angle n=\angle ABD-(180^\circ-\angle FBC)=80^\circ-(180^\circ-140^\circ)$

$=80^\circ-40^\circ=40^\circ$.

(i) 若$\angle ABD=80^\circ$,$\angle n=35^\circ$,$\angle CBE=85^\circ$,求$\angle p$.

**答**　$\because\ \angle m=\angle ABD-\angle n=80^\circ-35^\circ=45^\circ$,

$\angle o=\angle CBE-\angle n=85^\circ-35^\circ=50^\circ$.

$\therefore\ \angle p=180^\circ-\angle o-\angle n-\angle m$

$=180^\circ-50^\circ-35^\circ-45^\circ=50^\circ$.

**15.**　$20^\circ$的補角是若干度？

**答**　$180^\circ-20^\circ=160^\circ$.

$140^\circ$的補角是若干度？

**答**　$180^\circ-140^\circ=40^\circ$.

$\frac{3}{4}$平角的補角是若干度？

**答**　$180^\circ-\frac{3}{4}\times180^\circ=180^\circ-135^\circ=45^\circ$.

n 度的補角是若干度？

**答**　$180^\circ-n^\circ$.

$(50-3x)^\circ$的補角是若干度？

**答**　$180^\circ-(50-3x)^\circ=130^\circ+3x^\circ$.

**16.**　一個角是他的補角的三倍,這角有若干度？

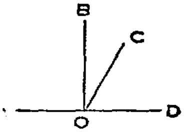
**答**　四分平角,本角占三,補角占一,

所以本角$=\frac{3\times180^\circ}{4}=135^\circ$.

**17.**　何種角比較他的補角小？

**答**　比他補角小的是銳角,

如$\angle COD$.



(17)

何種角等於他的補角？

**答**　那是直角,如$\angle AOB$.

何種角比較他的補角大？

答 那是鈍角,如 $\angle AOC$.

**18.** 用代數記號寫:

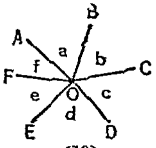
(a) $n^\circ$ 的餘角, (b) $x^\circ$ 的餘角的3倍,

(c) $(2x)^\circ$ 的補角, (d) $n^\circ$ 的補角的6倍.

答 (a) $90^\circ-n^\circ$; (b) $3(90^\circ-x^\circ)$;

(c) $180^\circ-(2x)^\circ$; (d) $6(180^\circ-n^\circ)$.

**19.** 如附圖中求各未知角的數值:



(19)

(a) 若 $\angle a=80^\circ$, $\angle b=50^\circ$, $\angle c=60^\circ$, $\angle d=90^\circ$, $\angle e=50^\circ$, 求 $\angle f$.

答 $\angle f=360^\circ-\angle(a+b+c+d+e)$

$=360^\circ-(80^\circ+50^\circ+60^\circ+90^\circ+50^\circ)$

$=360^\circ-330^\circ=30^\circ$.

(b) 若 $\angle a=\angle b=\angle c=\angle d=\angle e=\angle f$, 求 $\angle f$.

答 $\angle f=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$.

(c) 若 $\angle AOC=130^\circ$, $\angle b=50^\circ$, $\angle BOD=110^\circ$, $\angle DOF=140^\circ$, 求 $\angle f$.

答 $\because$ $\angle f=360^\circ-(\angle AOC+\angle COD+\angle DOF)$,

但 $\angle COD=\angle BOD-\angle b$

$\therefore$ $\angle f=360^\circ-(\angle AOC+\angle BOD-\angle b+\angle DOF)$

$=360^\circ-(130^\circ+110^\circ-50^\circ+140^\circ)$

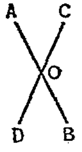
$=360^\circ-330^\circ=30^\circ$.

(d) 若 $\angle d=90^\circ$, $\angle c=\angle b=\angle a=\angle f=\angle e$, 求 $\angle a$.

答 $\angle a=(360^\circ-\angle d)/5=(360^\circ-90^\circ)/5=270^\circ/5=54^\circ$.

**20.** 若二直線AB和CD相交於O,而 AOC$=60^\circ$,試求

其他幾個角的度數.



(20,21)

答　先,從AB直綫的右上邊看,AOB爲一平角,

$\therefore \angle COB=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.

再,從CD直綫的右下邊看,COD也爲一平角,

$\therefore \angle BOD=180^\circ-120^\circ=60^\circ$.

三,從AB直綫的左下邊看,AOB平角上着想,

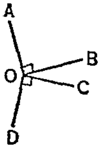
$\therefore \angle AOD=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.

**21.** 若$\angle AOC=m$度,那末$\angle DOB$有若干度?又$\angle BOC$有若干度?

答　同20題計算,就得 $\angle BOC=180^\circ-m^\circ$; $\angle DOB=m^\circ$.

**22.** 若$\angle AOB=\angle COD=90^\circ$,求$\angle AOD$.

(a)若$\angle BOC=60^\circ$, (b)若$\angle BOC=m^\circ$.



(22,23)

答　(a) $\angle AOD=360^\circ-\angle(AOB+BOC+COD)$

$=360^\circ-(90^\circ+60^\circ+90^\circ)$

$=360^\circ-240^\circ=120^\circ$

(b) $\angle AOD=360^\circ-(2\text{rt.}\angle+m^\circ)=180^\circ-m^\circ$.

**23.** BOC角和AOD角有什麼關係?

答　0之四周$=4\text{rt.}\angle$,

$\because \angle AOB=\angle COD=90^\circ$,

$\therefore \angle AOB+\angle COD=2\text{rt.}\angle$,

$\therefore \angle BOC+\angle AOD=2\text{rt.}\angle$,

∴此兩角互爲補角.

**24.** 若AO垂直於CO, BO垂直於DO,求$\angle AOD$.

(a)若∠COB=40°，(b)若∠COB=m°.

**答**　(a)∵ ∠AOB=∠AOC−∠COB

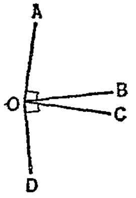
=90°−40°=50°.

∴ ∠AOD=∠AOB+∠BOD

=50°+90°=140°.

(b)同理 ∠AOD=90°−m°+90°

=180°−m°，或 =2rt.∠−m°.



(24—26)

**25.**　∠AOD和∠BOC有什麼關係?

**答**　由上題知 ∠AOD+∠BOC=180°，

故兩角互爲補角.

**26.**　若∠AOC=∠BOD=90°，∠AOD=3∠BOC，求∠BOC.

**答**　以 ∠AOD=3∠BOC 代入 ∠AOD+∠BOC=180°，

即 3∠BOC+∠BOC=180°，

∴ 4∠BOC=180°，

∴ ∠BOC=180°÷4=45°.

**27.**　三直綫相會於O，而成六個角：a, b, c, d, e, 及 f.

(a)若∠a=20°，∠b=60°，求∠c.

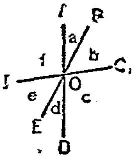
**答**　∠a+∠b=∠AOC，與 ∠COD

(=∠c)相補.

∴ ∠c=180°−∠(a+b)=180°

−(20°+60°)=180°−80°=100°.

(b)若∠a=15°，∠c=95°，求∠e.



(27)

**答**　在AOD平角上求

∠b=180°−(∠a+∠c)=180°−(15°+95°)

=180°−110°=70°.

又在BOE平角上求

$\angle d=180^\circ-\angle(b+c)=180^\circ-(70^\circ+95^\circ)$

$=180^\circ-165^\circ=15^\circ.$

又在COF下方的平角上求

$\angle e=180^\circ-\angle(c+d)=180^\circ-(95^\circ+15^\circ)$

$=180^\circ-110^\circ=70^\circ.$

**注意**: 對頂角相等之說,此處尙未講到,然已爲引出此定理之計算.

(c)若$\angle f=100^\circ$,$\angle d=20^\circ$,求$\angle b$。

答 照(b)的解法由AOD左邊的平角,算出$\angle e=60^\circ$;

已知$\angle e$及$\angle f$,由BOE左上邊的平角內算出$\angle a=20^\circ$;

已知$\angle a$及$\angle f$,由COF上方的平角內算出$\angle b=60^\circ$.

如其要寫成一個式子:——

$\angle b=180^\circ-\angle(f+a)=180^\circ-[\angle f+180^\circ-(\angle f+\angle e)]$

$=\angle e=180^\circ-(\angle f+\angle d)=180^\circ-120^\circ=60^\circ.$

(d)若$\angle AOC=85^\circ$,$\angle BOD=155^\circ$,求$\angle e$.

答 $\angle e=180^\circ-\angle COE=\angle b$,

而$\angle b=\angle AOC-\angle a$.

但$\angle(a+b+c)=180^\circ$, $\angle(b+c)=\angle BOD=155^\circ$,

$\therefore \angle a=180^\circ-155^\circ=25^\circ$,

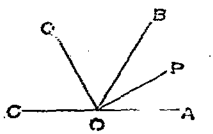
$\therefore \angle e=\angle b=85^\circ-25^\circ=60^\circ$.

**28.** 試求互爲補角的兩個鄰角AOB和BOC的兩個二等分線所成的角:

(a)若$\angle AOB=40^\circ$,

(b)若$\angle AOB=60^\circ$,

(c)若$\angle AOB=m^\circ$.



(28,29)

**設**　PO爲$\angle AOB$的分角綫, QO爲$\angle BOC$的分角綫.

**求證**　$\angle POQ$.

**證**　(a) $\angle POQ=\angle POB+\angle BOQ=\frac{1}{2}\angle AOB+\frac{1}{2}\angle BOC$

$$=\frac{1}{2}(\angle AOB+\angle BOC)=\frac{1}{2}[40^\circ+(180^\circ-40^\circ)]$$

$$=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ.$$

(b) 同理 $\angle POQ=\frac{1}{2}[60^\circ+(180^\circ-60^\circ)]=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ.$

(c) 同理 $\angle POQ=\frac{1}{2}[m^\circ+(180^\circ-m^\circ)]=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ.$

**29.** 互爲補角的任意兩個鄰角的兩個二等分線所成的角是什麼角?

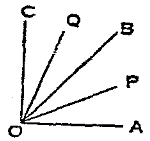
**答**　由28題證,知$\angle AOB$苟與$\angle BOC$相補,則其兩分角綫所成的角,恆爲直角.

**30.** 試求互爲餘角的兩個鄰角AOB和BOC的兩個二等分線所成的角:

(a)若$\angle AOB=20^\circ$,

(b)若$\angle AOB=30^\circ$,

(c)若$\angle AOB=m^\circ$.



(30,31)

**設**　PO平分$\angle AOB$, QO平分$\angle BOC$.

**求證**　$\angle POQ$.

**證**　(a) $\angle POQ=\frac{1}{2}(\angle AOB+\angle BOC)=\frac{1}{2}[20^\circ+(90^\circ-20^\circ)]$

$$=\frac{1}{2}\times 90^\circ=45^\circ.$$

(b) $\angle POQ=\frac{1}{2}(\angle AOB+\angle BOC)=\frac{1}{2}[30^\circ+(90^\circ-30^\circ)]$

$=\frac{1}{2}\times 90^\circ=45^\circ$.

(c) $\angle POQ=\frac{1}{2}(\angle AOB+\angle BOC)=\frac{1}{2}[m^\circ+(90^\circ-m^\circ)]$

$=\frac{1}{2}\times 90^\circ=45^\circ$.

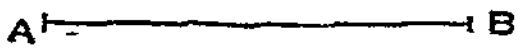
**31.** 互爲餘角的任意兩個鄰角的兩個二等分線所成的角是什麼角?

**答** 由30題證,知∠AOB苟與∠BOC相餘,則其兩分角綫所成的角,恆爲半直角(或45°的銳角).

## 習 題 三 (教科書第16—18頁)

**1.** 畫兩點A和B (用小點或小交叉來表示),過A和B作一直線.

**作法** 把削尖的鉛筆,點兩點在紙上.用直綫尺靠近這兩點,比方A B.用鉛筆靠尺劃一道綫,便成.

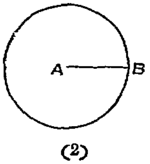


(1)

**注意:** 紙須擱在木質的平面上邊 (或桌面,或板), 左手須緊按直綫尺 (或三角板), 右手持鉛筆靠尺自左斜劃.

**2.** 畫兩點A和B, 以A做中心,用等於A B的長做半徑,作一個圓.

**作法** 擱圓規的針在A點上,展開圓規使筆尖對準B點,依鐘錶的方向旋轉,便成.



(2)

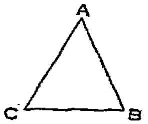
**注意:** 用右手兩指(大拇指,食指)鬆鬆的捏住圓規柄旋轉.

3.　畫三點A,B和C,過每兩點作一直綫.

**設**　先作A, B, C三點.

**求作**　AB, BC, AC三直綫.

**作法**　依題1法,依次作AB, BC, AC三直綫務令三綫相連接,沒有餘多的綫頭在外.



(3)

4.　畫定長的AB和CD二直線,但AB要比較的長一些,作直綫使他等於:

(a) $AB+CD$,

(b) $AB-CD$,

(c) $2(AB)$,

(d) $AB+2(CD)$,

(e) $3(AB)-2(CD)$.

**設**　定長之兩直綫AB, CD如下圖,而$AB>CD$;

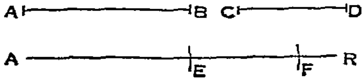
**求作**　(a),…………(e).

**作法**　(a)先作較長的直綫AR,

以A爲中心,AB爲半徑,作短弧截AR於E;

再以E爲中心,CD爲半徑,作短弧,截ER於F

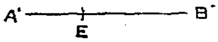
那麼$AF=AB+CD$.



(4,a)

**作法**　(b)先作直綫$A'B'$使等於AB,如下圖

再以$B'$爲中心,CD爲半徑,作短弧,截$A'B'$於E,



(4,b)

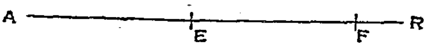
那麼$A'E=AB-CD$,便是所求直綫.

**作法** (c)先作較長之直綫AR,估算大於2(AB).

以A爲中心,AB爲半徑,截AR於E;

又以E爲中心,AB爲半徑,截ER於F;

那麼AF=2(AB).



(4,c)

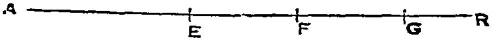
**作法** (d)先作更長之綫AR,

以A爲中心截取AE(=AB)於E,

又以E爲中心截取EF(=CD)於F,

最後以F爲中心,截取FG(=CD)於G,

那麼AG=AB+2(CD).

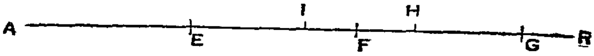


(4,d)

**作法** (e)如上法連取AB之長三次如AE,EF,FG則AG=3(AB).

又以G爲中心,在GA上截取CD之長二次,如GH,HI,則GI=2(CD).

於是AI=AG−GI=3(AB)−2(CD).



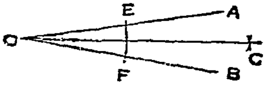
(4,e)

### 5. 畫一個銳角,而把他分做二等分.

**作法** 先作任意銳角AOB,

以O爲中心任意的半徑作弧,交AO於E,BO於F;

再各以E,F爲中心,任意



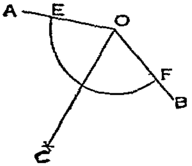
(5)

的同樣半徑作兩小弧相交於C;

聯結CO,那麼CO就是∠AOB的分角綫.

6. 畫一個鈍角,而把他分做二等分.

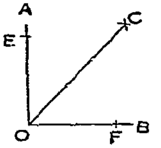
**作法** 同5題,但鈍角比銳角張得開,EC及FC須放大些,否則不能相交.



(6)

7. 作一個直角,而把他分做二等分.

**作法** 也同5題一樣,但這裏EC,FC雖然同OE,OF等長,也能相交於C,和6題不一樣;並且推知5題的EC,FC可以比OE,OF短一些,也是無妨.



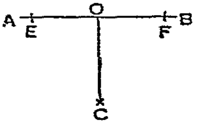
(7)

8. 畫一個平角,而把他分做二等分.

**作法** 設AOB爲平角,

以O爲中心,取任意的半徑,向AB兩端作短弧,交AB於E,F.

再以較長的半徑,各以E,F爲中心,作兩短弧,相交於C(本圖C在AB下方,如在上方也是一樣,或上下方作四小弧都可以).



(8)

連OC,那麼這OC就平分平角AOB.

9. 作兩個角的和.

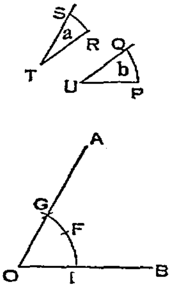
**設** 已知∠a和∠b,

**求作** ∠AOB=∠a+∠b.

**作法** 先作直綫BO,

以任意長爲半徑,各以T, U, O爲中心,作弧如$\overset{\frown}{SR}$, $\overset{\frown}{QP}$, $\overset{\frown}{GE}$; 交$\angle a$兩邊於S, R; $\angle b$兩邊於Q, P; BO於E; 於GE弧內,截取$\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{QP}$,截取$\overset{\frown}{FG}=\overset{\frown}{SR}$.

連OG, 任意引長至A, 那麼$\angle AOB=\angle a+\angle b$.



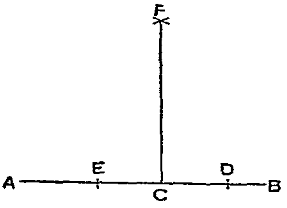
(9)

**10.** 在AB上的一已知點C畫一直線,使垂直於AB.

**作法**　以定點C爲中心,任意之長CD(比BC短些爲方便)爲半徑,截AB於D於E;

又各以D, E爲中心,任意之長爲半徑,作短弧兩個,相交於F;

那麼連FC便是AB的垂綫.



(10)

**11.** 把一個已知角分做四等分.

**設**　已知$\angle AOB$,

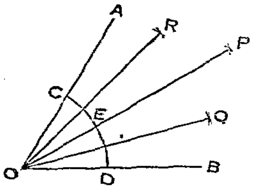
**求**　分$\angle AOB$爲四等分.

**作法**　以O爲中心,任意長OD爲半徑,作$\overset{\frown}{DC}$交AO於C, BO於D;

再以任意長爲半徑,各以C, D爲中心作兩短弧,相交於P,

連PO 則PO平分 ∠AOB (§39例題II).

設PO與$\overset{\frown}{CD}$之交點爲E,



(11)

再依上法作∠AOP之平分綫RO; ∠BOP之平分綫QO;

那麼 $\angle AOR=\angle ROP=\angle POQ=\angle QOB=\frac{1}{4}\angle AOB$.

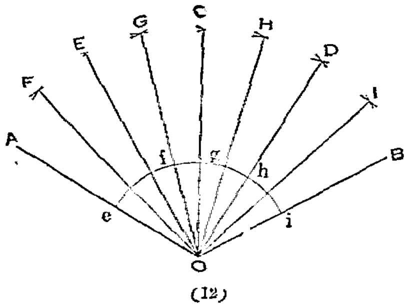
## 12. 把一個已知角分做八等分.

**設**　已知∠AOB,

**求**　分他爲八等分.

**作法**　依§39例題II法作CO二等分∠AOB;
再作EO平分∠AOC,作DO平分∠COB; 又作FO, GO, HO, IO各各平分∠s AOE, EOC, COD, DOB.
那麼 $\angle AOF=\angle FOE=\angle EOG=\angle GOC=\angle COH$

$$=\angle HOD=\angle DOI=\angle IOB=\frac{1}{8}\angle AOB.$$

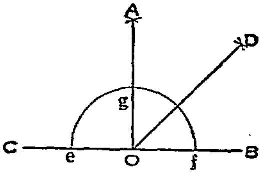


(12)

**13.** 作一個90°的角;作一個45°的角.

**作法**　依習題8平分平角法,作rt. $\angle$AOB;

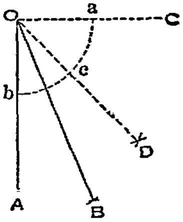
又依習題7平分直角法,作$\angle$AOD=45°.



(13)

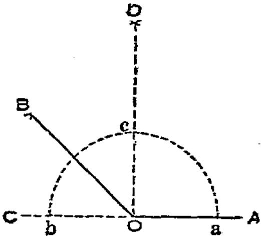
**14.** 作一個22°30′的角;作一個135°的角.

**作法**　(a)$\because 22°30' = \frac{1}{4}$rt. $\angle$,故依習題11法四等分直角AOC得$\angle$AOB=22°30′如右圖.



(14,a)

(b)$\because 135° = \frac{3}{4}$st. $\angle$,依習題7,作直角COD,又平分之於BO;



(14,b)

那麼$\angle AOD = \frac{1}{2}$st. $\angle$,

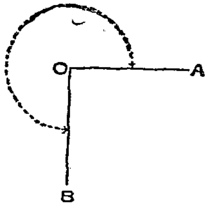
$\angle BOD = \frac{1}{4}$st. $\angle$,

$\therefore \angle AOB = \angle AOD + \angle BOD$

$= \frac{1}{2}$st. $\angle + \frac{1}{4}$st. $\angle = \frac{3}{4}$st. $\angle$

$= 135°$.

**15.** 作一個270°的角;作一個67°30′的角.



(15,a)

**作法** (a)$\because 270^\circ=3\text{rt.}\angle=360^\circ-\text{rt.}\angle$,

故作直角AOB,其反對方向弧綫所示的角,就是270°.

(b)$\because 67^\circ30'=\frac{3}{4}\text{rt.}\angle$,

所以作DO平分rt. $\angle AOC$,

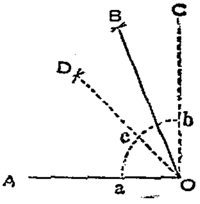
又作BO平分$\angle COD$,

那麼$\angle AOD=45^\circ=\frac{1}{2}\text{rt.}\angle$,

$\angle BOD=22^\circ30'=\frac{1}{4}\text{rt.}\angle$,

$\therefore \angle AOB=\angle AOD+\angle BOD$

$=45^\circ+22^\circ30'=67^\circ30'$.



(15,b)

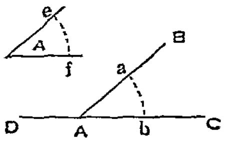
**16.** 作一個已知角A的補角.

**作法** 以A角的頂做中心,任意長爲半徑作$\overset{\frown}{ef}$.

另作直綫AC,以A爲中心,同長半徑作$\overset{\frown}{ab}$交AC於b,截取$\overset{\frown}{ab}$使$=\overset{\frown}{ef}$,

經過a作BA,那麼$\angle BAC=\angle A$;

又引長CA至D,成$\angle BAD$,就是$\angle A$的補角.



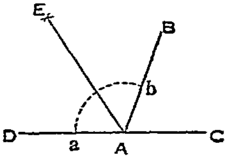
(16)

**17.** 作一個已知角A的補角的半分.

**設** 已知角爲$\angle A$,

**求作** 他補角的一半.

**作法** 依習題16作 $\angle BAC=\angle A$, 引長CA至D作成他的補角$\angle BAD$, 平分他,那麼平分綫同BA DA所成的角,都是$\angle A$的補角的一半.



(17)

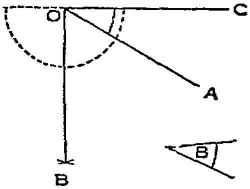
即 $\angle BAE=\angle EAD=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)$.

**18. 作一個已知銳角的餘角.**

**設** $\angle B$爲已知的銳角,

**求作** 他的餘角.

**作法** 先作 $\angle AOC$ 令$=\angle B$, 又在O點作$BO\perp OC$, 那麼$\angle AOB$就是$\angle B$的餘角.



(18)

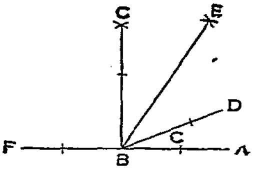
**注意** 在直綫盡頭上作垂綫, 雖然有別樣法子,但引長CO,便可以照習題10的法子做了.

**19. 作一個已知銳角的餘角的半分.**

**設** 已知銳角C,

**求作** $\frac{1}{2}(90^\circ-\angle C)$.

**作法** 先作$\angle DBA=\angle C$, 又作$CB\perp AB$, 平分$\angle CBD$, 那麼$\angle CBE=\angle EBD$ $=\frac{1}{2}(90^\circ-\angle C)$.



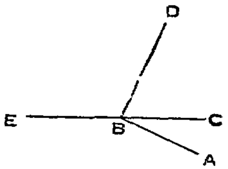
(19)

20. 作一個已知銳角的餘角的補角.

**設** $\angle ABC$爲已知銳角,

**求作** 他的餘角的補角.

**作法** 在B點上,作$DB\perp AB$,
那麽 $\angle DBC=90^\circ-\angle ABC$;
引長CB到E,那麽 $\angle DBE=180^\circ-\angle DBC$,
所以 $\angle DBE$便是已知銳角ABC的餘角的補角.



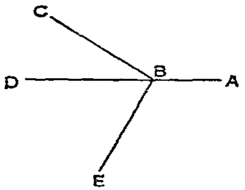
(20)

21. 作一個已知鈍角的補角的餘角.

**設** $\angle ABC$爲已知鈍角,

**求作** 他的補角的餘角

**作法** 引長 $\angle ABC$ 的任何一邊,這裏引長AB到D,那麽
$\angle CBD=180^\circ-\angle ABC$,
在B點上作$BE\perp BC$,那麽
$\angle DBE=90^\circ-\angle CBD$,
所以 $\angle DBE=90^\circ-(180^\circ-\angle ABC)$,就是 $\angle ABC$ 的補角的餘角.



(21)

22. 畫兩個角A及B,A要比較B大一些,再作一個角,使他等於:

(a) $A+B$. (b) $2A$.

(c) $180^\circ-A$. (d) $90^\circ+A$.

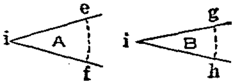
(e) $A-B$. (f) $\frac{A}{2}$.

(g) $\frac{A}{2}+B$. (h) $\frac{A+B}{2}$.

(i)　$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}$.　　(j)　$\frac{A}{2}-\frac{B}{2}$.

(k)　$90^\circ+\frac{B}{2}$.　　(l)　$\frac{B}{4}$的餘角.

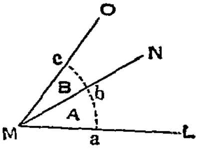
**設**　已知∠A及∠B,而且知道∠A>∠B,像這個圖樣.



(22)

(a)**求作**　A+B.

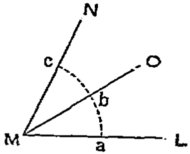
**作法**　在直綫ML的一頭M,以if=ih爲半徑作弧,交ML於a,
在這弧內,截取ab弧(=ef弧)於b.
作NbM直綫,那麼∠NML=A.
又從b截取bc弧(=gh弧)於c.
作OcM直綫,那麼∠OMN=B.
所以∠OML=∠NML+∠OMN=A+B.



(22,a)

(b)**求作**　2A.

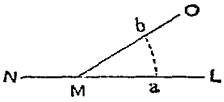
**作法**　以M爲中心,if爲半徑,作弧交ML於a.
截取ef等長的弧ab,再截取同長的弧bc.
作OM經b,NM經c,
那麼∠NMO=∠OML=A,故∠NML=2A.



(22,b)

(c)**求作**　180°−A.

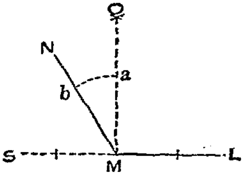
**作法**　先作∠OML=A,
引長LM到N,
就得∠OMN=180°−A.



(22,c)

(d)**求作** $90^\circ+A$.

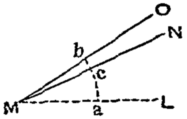
**作法** 先作直角OML, 再在OM的M一頭,作∠NMO令等於A. 那麼 $\angle NML=90^\circ+A$.



(22,d)

(e)**求作** $A-B$.

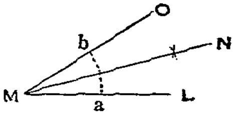
**作法** 先作 $\angle OML=A$, 再在ab弧內截取與gh弧等長的弧ac. 經過c作直綫NM, 即得 $\angle NMO=A-B$.



(22,e)

(f) **求作** $\frac{A}{2}$.

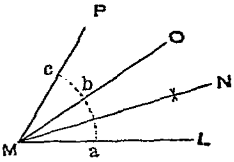
**作法** 先依上法作 ∠OML 令 $=A$, 平分之以NM, 那麼 $\angle NMO=\angle NML=\frac{A}{2}$, 像右圖的樣子.



(22,f)

(g) **求作** $\frac{A}{2}+B$.

**作法** 先作 $\angle OML=A$, 平分之以NM. 再作 $\angle PMO=B$, 即得 $\angle PMN=\frac{A}{2}+B$.



(22,g)

**注意** 在ML下,作 $\angle P'ML=B$,也可以得到同樣的結果.

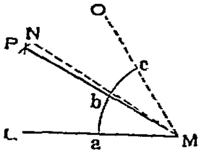
(h) **求作** $\frac{A+B}{2}$.

**作法** 先依本題(a)法作$A+B=\angle OML$,再平分他.

那麼 $\angle PMO=\angle PML=\frac{A+B}{2}$.

如圖 $\angle NML=A$, $\angle OMN=B$, $\angle OML=A+B$,

而 $\angle PMO=\angle PML=\frac{A+B}{2}$.



(22,h)

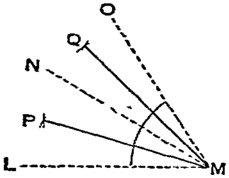
(i) **求作**$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}$.

**作法** 先依本題(a)作$\angle OML=A+B$,其中$\angle NML=A$, $\angle OMN=B$;

再作PM平分$\angle NML$,作QM平分$\angle OMN$;

那麼 $\angle PMN=\frac{A}{2}$, $\angle QMN=\frac{B}{2}$,

$\therefore$ $\angle PMQ=\frac{A}{2}+\frac{B}{2}$.



(22,i)

**注意** $\because \frac{A+B}{2}=\frac{A}{2}+\frac{B}{2}$, (h)實同(i),但作法不同罷了.

(j) **求作**$\frac{A}{2}-\frac{B}{2}$.

**設** 已知角A如下圖,B亦略改前樣(爲明白計).

**求作** $\frac{A}{2}-\frac{B}{2}$.

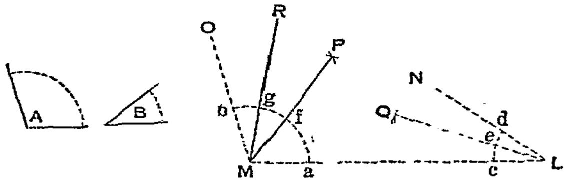
**作法** 先作$\angle OML=A$,作PM平分他;

再作$\angle NLM=B$,作QL平分他;

那麼 $\angle PMO=\frac{A}{2}$, $\angle QLM=\frac{B}{2}$,

取 $\overset{\frown}{ec}$ 的長,在 $\overset{\frown}{ab}$ 內截取 $\overset{\frown}{fg}$(諸弧等半徑).

經過g點,作RM, 那麼 $\angle PMR=\frac{A}{2}-\frac{B}{2}$.



(22,j)

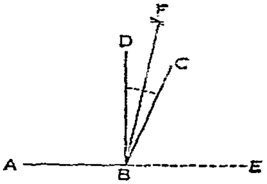
**注意:** 從(a)到(i)的A, B兩角都用原設的角.這裏倘然仍舊,那麼 ∠PMR 太小了.所以放大些,可以看得明白些,因爲A, B本來任意的,只要A>B就是了.

(k)　**求作** $90^\circ+\frac{B}{2}$.

**作法**　作 ∠ABD=rt.∠,再在DB的B端作 ∠DBC=B 如圖.作FB平分 ∠DBC,

那麼 $\angle DBF=\frac{B}{2}$,

$$\angle ABF=90^\circ+\frac{B}{2}.$$

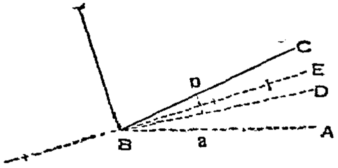


(22,k)

(l)　**求作** $\frac{B}{4}$的餘角.

**作法**　先作 ∠ABC=B(k題的),作DB平分他,再作EB平分 ∠CBD, 那麼 $\angle CBE=\frac{B}{4}$.

又作 FB⊥EB, 那麼 $\angle FBC=90^{\circ}-\frac{B}{4}$.



(22,1)

## 習 題 四 (教科書第21—22頁)

1. 下列敍述試指出其假設和終結:

(a) 鐵熱,則漲.

答 (假設)鐵熱, (終結)則漲.

(b) 三角形的兩個角相等,則其對邊亦相等.

答 (假設)三角形的兩個角相等, (終結)則其對邊亦相等.

(c) 三角形的各邊,各與他三角形的各邊相等,則兩形爲全同.

答 (假設)三角形的各邊,各與他三角形的各邊相等, (終結)則兩形爲全同.

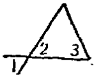
(d) 對頂角相等.

答 (假設)對頂角, (終結)相等.

2. 若$\angle 1=\angle 2$,$\angle 2=\angle 3$,爲什麼$\angle 1=\angle 3$?

答 公理 1 說:等於同量的量相等.

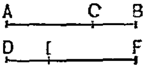
現在 $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3$ 也 $=\angle 2$, 當然 $\angle 1=\angle 3$ 了.



(2)

**3.** 若$AB=DF$, $CB=DE$, 爲什麼$AC=EF$?

**答** 公理3說:等量減等量其餘量必等.

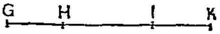


(3)

今$AB=DF$, $CB=DE$各爲等量,

所以$AB-CB=DF-DE$, 卽$AC=EF$.

**4.** 若$GH=IK$, 爲什麼$GI=HK$?



(4,5)

**答** 公理2說:等量加等量,其和必等.

今$GH=IK$,

所以$GH+HI=IK+HI$, 卽$GI=HK$.

**5.** 若$GI=HK$, 爲什麼$GH=IK$?

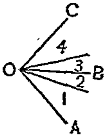
**答** 公理3說:等量減等量,其餘量必等.

今$GI=HK$,

所以$GI-HI=HK-HI$. 卽$GH=IK$.(看4題圖)

**6.** 若$OB$二等分$\angle O$, $\angle 1=\angle 4$, 爲什麼$\angle 2=\angle 3$?

**答** $OB$旣平分$\angle O$, 那麼$\angle AOB=\angle BOC$.



(6,7)

公理3說:等量減等量,其餘量必等.

今$\angle 1=\angle 4$, $\therefore \angle AOB-\angle 1=\angle BOC-\angle 4$;

但$\angle AOB-\angle 1=\angle 2$, $\angle BOC-\angle 4=\angle 3$,

$\therefore \angle 2=\angle 3$.

**7.** 若$\angle 1=\angle 4$, $\angle 3=\angle 2$, 爲什麼$OB$二等分$\angle O$?

**答** 公理2說:等量加等量,其和必等.

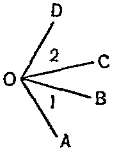
所以$\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4$, 卽$\angle AOB=\angle BOC$.

但$\angle AOB+\angle BOC=\angle O$,

所以$OB$平分$\angle O$.

**8.** 若$\angle 1=\angle 2$, 爲什麼$\angle AOC=\angle BOD$?

**答** 公理 2 說:等量加等量,其和必等.
所以 $\angle 1+\angle BOC=\angle 2+\angle BOC$.
但 $\angle AOC=\angle 1+\angle BOC$,
$\angle BOD=\angle 2+\angle BOC$,
公理 1 說:等於等量的量相等,
$\therefore\ \angle AOC=\angle BOD$.



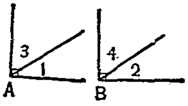
(8,9)

**9.** 若$\angle AOC=\angle BOD$,爲什麼$\angle 1=\angle 2$?

**答** 公理 3 說:等量減等量,其餘量必等.
$\therefore\ \angle AOC-\angle BOC=\angle BOD-\angle BOC$.
但 $\angle AOC-\angle BOC=\angle 1$, $\angle BOD-\angle BOC=\angle 2$,
$\therefore\ \angle 1=\angle 2$.

**10.** 若$\angle A=\angle B$,$\angle 1=\angle 2$,爲什麼$\angle 3=\angle 4$?

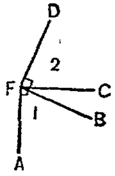
**答** 公理 3 說:等量減等量,其餘量必等.
$\therefore\ \angle A-\angle 1=\angle B-\angle 2$.
但 $\angle A-\angle 1=\angle 3$, $\angle B-\angle 2=\angle 4$,
$\therefore\ \angle 3=\angle 4$.



(10)

**11.** 若$\angle AFC=90^\circ$, $\angle BFD=90^\circ$,爲什麼$\angle 1=\angle 2$?

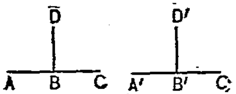
**答** 公理 3 說:等量減等量,其餘量必等.
今 $\angle AFC=90^\circ$, $\angle BFD=90^\circ$,
由公理 1,知道 $\angle AFC=\angle BFD$.
由公理 3,知道 $\angle AFC-\angle BFC=\angle BFD-\angle BFC$.
但 $\angle AFC-\angle BFC=\angle 1$, $\angle BFD-\angle BFC=\angle 2$,
$\therefore\ \angle 1=\angle 2$.



(11)

**12.** 若平角 ABC＝平角 $A'B'C'$,爲什麼直角 DBC＝直角 $D'B'C'$?

答 公理15說:凡平角皆相等.



(12)

平分平角,得二直角, $\angle DBC=\text{rt.}\angle$, $\angle DBA=\text{rt.}\angle$.

同理 $\angle D'B'C'=\text{rt.}\angle$, $\angle D'B'A'=\text{rt.}\angle$.

即 $\text{rt.}\angle DBC=\frac{1}{2}\text{st.}\angle ABC$, $\text{rt.}\angle D'B'C'=\frac{1}{2}\text{st.}\angle A'B'C'$.

但 $\angle ABC=\angle A'B'C'$, $\therefore\ \angle DBC=\angle D'B'C'$

即公理 8 (等量的同分量必等)的緣故.

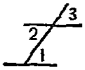
**13.** 若$\angle 1+\angle b+\angle 2=180°$, $\angle 1=\angle a$, $\angle 2=\angle c$, 爲什麼$\angle a+\angle b+\angle c=180°$?

答 把(2)(3)兩式代入(1)式,

就得 $\angle a+\angle b+\angle c=180°$, 就是公理 2 說 (等量加等量,其和必等)的道理.

**14.** 若$\angle 1=\angle 2$, $\angle 2=\angle 3$, 爲什麼$\angle 1=\angle 3$?

答 公理 1 說:等於等量的量相等.



(14)

現在 $\angle 1$也$=\angle 2$, $\angle 3$也$=\angle 2$,

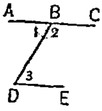
$\therefore\ \angle 1=\angle 3$.

# 第一編

## 直線和直線形

### 習題一（教科書第24—25頁）

1.　若ABC是一直綫,又∠3是∠2的補角,爲什麼∠1=∠3?



(1)

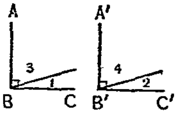
設　∠ABD=∠1, ∠CBD=∠2, ∠BDE=∠3;
而已知∠2+∠3=180°.

求證　∠1=∠3.

證　∵∠1+∠2=180°(§50說:如兩隣角公用一邊,他們是相補),
但∠2+∠3=180°(題設),
∴∠1=∠3(公理1及3).

2.　若AB⊥BC, A′B′⊥B′C′,又∠3=∠4,

求證　∠1=∠2.



(2)

證　∵AB⊥BC, A′B′⊥B′C′,
∴∠ABC=∠A′B′C′=rt.∠(§46說:凡直角都相等).
但∠ABC=∠3+∠1, ∠A′B′C′=∠4+∠2(公理10說:全量等於其各部分的和),
而∠ABC−∠3=∠A′B′C′−∠4(公理3說:等量減等量,其餘量必等,題設∠3=∠4).
∵∠ABC−∠3=∠1,　∠A′B′C′−∠4=∠2,
∴∠1=∠2

**3.** 若 $AB \perp CD$, $\angle 1=\angle 2$,

**求證** $\angle 3=\angle 4$.

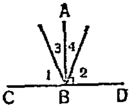
**證** ∵ $AB \perp CD$, ∴ $\angle ABC=\angle ABD=$ rt. $\angle$ (§46 說:直角都是相等的).

但 $\angle ABC=\angle 1+\angle 3$, $\angle ABD=\angle 2+\angle 4$ (公理 10 說:全量等於其各部分的和).

而 $\angle ABC-\angle 1=\angle ABD-\angle 2$ (公理 3 說:等量減等量,其餘量必等,題設 $\angle 1=\angle 2$).

∵ $\angle ABC-\angle 1=\angle 3$, $\angle ABD-\angle 2=\angle 4$,

∴ $\angle 3=\angle 4$.



(3)

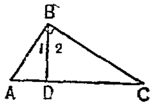
**4.** 若 $\angle ABC$ 是直角,又 $\angle A$ 是 $\angle 1$ 的餘角,

**求證** $\angle A=\angle 2$.

**證** ∵ $\angle A=90°-\angle 1$ (§35 定義說:如兩角的和等於一直角,叫做相餘),

而 $\angle 2=90°-\angle 1$ (公理 10 說:全量等於其各部分的和).

∴ $\angle A=\angle 2$ (公理 1 說:等於同量的量相等).



(4)

**5.** 若 ABC 是平角, $\angle 1=\angle 2$, 又 $\angle 3$ 和 $\angle 4$ 都是直角.

**求證** $\angle 5=\angle 6$.

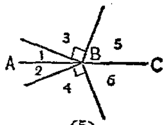
**證** $\angle 1=\angle 2$ (題設),

而 $\angle 3=\angle 4$ (§46 說:凡直角都相等),

∴ $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$ (公理 2 說:等量加等量其和相等).

但題設 ABC 爲平角,

∴ $180°-(\angle 1+\angle 3)=180°-(\angle 2+\angle 4)$ (公理 3 說:等量減等量,其餘量必等),

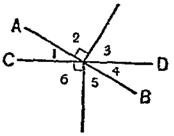


(5)

$\therefore \angle 5=\angle 6$.

6.　若AB和CD是直綫,又$\angle 2$和$\angle 6$是直角,

**求證**　$\angle 3=\angle 5$.



(6)

**證**　$\because \angle 2=\angle 6=\text{rt.}\angle$(題設),

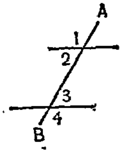
$\therefore \angle 2+\angle 1=\angle 6+\angle 1$ (公理 2 說:等量加等量,其和必等).

故$180^\circ-(\angle 1+\angle 2)=180^\circ-(\angle 6+\angle 1)$ (公理 3 說:等量減等量,其餘量必等).

$\therefore \angle 3=\angle 5$.

7.　若AB是直綫,又$\angle 2=\angle 3$,

**求證**　$\angle 1=\angle 4$.



(7)

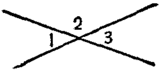
**證**　$\because \angle 1+\angle 2=180^\circ$, $\angle 3+\angle 4=180^\circ$(§50 說:如兩隣角公用一邊,而在一直綫上,他們相補).

$\therefore \angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4$.

但$\angle 2=\angle 3$(題設),

$\therefore \angle 1=\angle 4$(公理 3 ).

8.　若$\angle 1$是$\angle 2$的補角,又$\angle 3$是$\angle 2$的補角,爲什麼$\angle 1=\angle 3$?



(8)

**證**　$\angle 1=180^\circ-\angle 2$, $\angle 3=180^\circ-\angle 2$(題設),

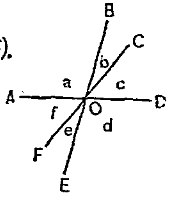
$\therefore \angle 1=\angle 3$(公理 1 說:兩量都等於某量,那麼這兩量必互相等). (§49 說:兩角同爲一角的補角,那麼他們相等)

## 習　題　二 (教科書第26—27頁)

1.　三直綫AD, BE,和CF相遇於O,而成六個角: a,

b, c, d, e 和 f.

(a)若 $\angle b=20^\circ$, 又 $\angle c=60^\circ$,求 $\angle AOE$.



(1,2,3,)

證　$\because \angle b+\angle c=20^\circ+60^\circ=80^\circ=\angle BOD$.

而 $\angle AOE=\angle BOD$(§53說:凡對頂角相等).

所以 $\angle AOE=80^\circ$.

(b)若 $\angle FOB=130^\circ$,又 $\angle c=40^\circ$,求 $\angle a$.

證　$\because \angle a+\angle f=\angle FOB$ (公理10).

即 $\angle a=\angle FOB-\angle f$.

但 $\angle f=\angle c$(對頂角).

$\therefore \angle a=\angle FOB-\angle c=130^\circ-40^\circ=90^\circ$.

(c)若 $\angle FOD=140^\circ$ 又 $\angle b=60^\circ$,求 $\angle a$.

證　$\angle FOD=\angle AOC$(對頂角相等, §53).

但 $\angle AOC=\angle a+\angle b$, 即 $140^\circ=\angle a+60^\circ$,

$\therefore \angle a=140^\circ-60^\circ=80^\circ$.

(d)若 $\angle f=60^\circ$,又 $\angle b=25^\circ$,求 $\angle d$.

證　$\angle e=\angle b=25^\circ$ (因爲對頂角相等 §53).

$\angle f+\angle e=60^\circ+25^\circ=85^\circ=\angle AOE$.

而 $\angle d$ 與 $\angle AOE$ 相補(在AD直綫上),

$$\therefore \angle d=180^\circ-\angle AOE$$
$$=180^\circ-85^\circ$$
$$=95^\circ.$$

(e)若 $\angle b$ 和 $\angle f$ 互爲餘角,求 $\angle d$.

證　在平角FOC上 $\angle a+\angle f+\angle b=180^\circ$ (公理10).

但 $\angle f+\angle b=90^\circ$ (互爲餘角),

$\therefore \angle a+90^\circ=180^\circ$,

$\therefore \angle a=180^\circ-90^\circ=90^\circ$.

而 $\angle d=\angle a$(對頂角),

$\therefore \angle d=90^\circ$.

(f)若 $\angle f=\angle b$, 又 $\angle d=100^\circ$, 求 $\angle b$.

證　$\angle b=\angle e$, $\angle d=\angle a$ (都是對頂角相等, §53).

但在BOE平角上, $\angle AOE$ 同 $\angle a$ 相補(§50).

而 $\angle AOE=\angle f+\angle e=\angle f+\angle b$,

$\therefore \angle f+\angle b=180^\circ-100^\circ=80^\circ$.

但題設 $\angle f=\angle b$,

$\therefore \angle f+\angle b=2\angle b=80^\circ$,

$\therefore \angle b=40^\circ$.

(g)若 $\angle a=2\angle c$, 又 $\angle e=60^\circ$, 求 $\angle c$.

證　$\angle a=\angle d$(因爲對頂角相等, §53).

但在COF平角上 $\angle COE$ 同 $\angle e$ 相補(§50),

而 $\angle COE=\angle c+\angle d=\angle c+\angle a$.

$\therefore \angle COE=3\angle c$,

$\therefore 3\angle c=180^\circ-60^\circ=120^\circ$,

$\therefore \angle c=40^\circ$.

(h)若 $\angle AOC=140^\circ$, 又 $\angle COE=120^\circ$, 求 $\angle BOD$.

證　在COF平角上 $\angle AOC$ 同 $\angle f$ 相補,又其反對方向, $\angle COE$ 同 $\angle e$ 相補(§50). 所以 $\angle f=180^\circ-140^\circ=40^\circ$, $\angle e=180^\circ-120^\circ=60^\circ$.

但 $\angle AOE=\angle f+\angle e=100^\circ$,而 $\angle BOD=\angle AOE$(§53),

$\therefore \angle BOD=100^\circ$.

2.　在前圖中,求證:

(a) $\angle b+\angle c=\angle AOE$.

證　$\angle b=\angle e$, $\angle c=\angle f$ (§53 說:凡對頂角都相等).

$\therefore \angle b+\angle c=\angle e+\angle f$ (公理 2 說:等量加等量,其和必等).

但 $\angle AOE=\angle e+\angle f$ (公理10說:全量等於其各部分的和).

$\therefore \angle b+\angle c=\angle AOE.$

(b) $\angle FOB-\angle c=\angle a.$

**證** $\angle FOB=\angle f+\angle a$ (公理10).

$\therefore \angle FOB-\angle f=\angle a.$

但 $\angle f=\angle c$ (§53).

$\therefore \angle FOB-\angle c=\angle a.$

(c) $\angle FOB-\angle f=\angle d.$

**證** 由(b)證知 $\angle FOB-\angle f=\angle a,$

但 $\angle a=\angle d$(§53).

$\therefore \angle FOB-\angle f=\angle d.$

(d) $\angle f+\angle b+\angle d=180^\circ.$

**證** $\angle b=\angle e$ (§53), $\angle f+\angle e=\angle AOE$ (公理 10),

所以 $\angle f+\angle b=\angle AOE,$

但 $\angle AOE+\angle d=180^\circ$ (§50),

$\therefore \angle f+\angle b+\angle d=180^\circ.$

(e) $\angle AOC+\angle BOD+\angle COE=360^\circ.$

**證** $\because \angle AOC=\angle a+\angle b,\ \angle BOD=\angle b+\angle c,$
$\angle COE=\angle c+\angle d,$ (公理 10).

$\therefore \angle AOC+\angle BOD+\angle COE=\angle a+2\angle b+2\angle c+\angle d.$

但 $\angle b=\angle e,\ \angle c=\angle f$ (§53), 把他們代入上式中一個 $\angle b$ 同一個 $\angle c,$

$\therefore \angle AOC+\angle BOD+\angle COE=\angle a+\angle b+\angle c+\angle e+\angle f$

$+\angle d=360^\circ$(§52說:在平面內的一點周圍各角之和,等於兩平角).

(f) $\angle AOC+\angle COE-\angle EOA=2\angle a$.

證　$\angle AOC=\angle a+\angle b$, $\angle COE=\angle c+\angle d$,

$\angle EOA=\angle e+\angle f$. (公理10).

$\therefore \angle AOC+\angle COE-\angle EOA=\angle a+\angle b+\angle c+\angle d-\angle e-\angle f$.

但由§53知$\angle b=\angle e$, $\angle c=\angle f$,

$\therefore \angle AOC+\angle COE-\angle EOA=\angle a+\angle d=2\angle a$,

因爲同理 $\angle a=\angle d$.

(g) $\angle f=\angle e$,則 $\angle b=\angle c$.

證　由§53知 $\angle b=\angle e$,

題設 $\angle f=\angle e$,由公理1知 $\angle b=\angle f$.

而 $\angle f=\angle c$(§53),

$\therefore \angle b=\angle c$(公理1).

**3.**　在前圖中:

(a)若$\angle AOC=150^\circ$,又$\angle COE=130^\circ$,求$\angle a$.

證　由§50, $\angle AOC$同$\angle c$相補,

$\therefore \angle c=180^\circ-150^\circ=30^\circ$.

但 $\angle COE=\angle c+\angle d$,

$\therefore \angle d=\angle COE-\angle c=130^\circ-30^\circ=100^\circ$

而§53說:對頂角相等,

$\therefore \angle a=\angle d=100^\circ$.

(b)若$\angle FOB=140^\circ$,又$\angle AOC=125^\circ$,求$\angle d$.

證　由§50, $\angle FOB$同$\angle b$相補,

$\therefore \angle b=180^\circ-140^\circ=40^\circ$.

但 $\angle AOC-\angle b=\angle a$,

$\therefore \angle a=125^\circ-40^\circ=85^\circ$.

由§53,知 $\angle d=\angle a$,

$\therefore \angle d=85^\circ$.

(c)若 $\angle AOE+\angle BOC=140^\circ$,又 $\angle c=40^\circ$,求$\angle e$.

**證** $\angle AOE=\angle f+\angle e$,

由§53知 $\angle f=\angle c$,

$\therefore \angle AOE=\angle c+\angle e=40^\circ+\angle e$,

同理 $\angle BOC=\angle e$,

$\therefore \angle AOE+\angle BOC=40^\circ+2\angle e$,

但題設 $\angle AOE+\angle BOC=140^\circ$,

$\therefore 140^\circ=40^\circ+2\angle e$,

$\therefore 2\angle e=100^\circ$,

$\therefore \angle e=50^\circ$.

(d)若 $\angle FOB=\angle FOD$,

**求證** $\angle f=\angle e$.

**證** 由公理10知 $\angle FOB=\angle f+\angle a$, $\angle FOD=\angle e+\angle d$,

題設 $\angle FOB=\angle FOD$,

$\therefore \angle f+\angle a=\angle e+\angle d$,

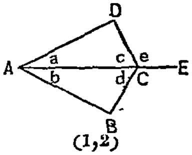
但由§53知 $\angle a=\angle d$.

由公理3兩式相減, $\therefore \angle f=\angle e$.

## 習 題 三 (教科書第32—33頁)

1. **假設** $\angle a=30^\circ$, $\angle b=30^\circ$, $\angle c=60^\circ$, $\angle d=60^\circ$,

**求證** $\triangle ABC\cong\triangle ADC$.



(1,2)

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AC=AC$. | 1. 二△公用. |
| 2. $\angle a=\angle b$. | 2. 題設 $\angle a=30^\circ, \angle b=30^\circ$, 公理 1. |
| 3. $\angle c=\angle d$. | 3. 題設 $\angle c=60^\circ, \angle d=60^\circ$, 公理 1. |
| 4. $\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC$. | 4. a.s.a.=a.s.a.(§66). |

2. **假設**　$\angle a=40^\circ$, $\angle b=40^\circ$, $\angle e=130^\circ$, $\angle d=50^\circ$; 又ACE是一直線.

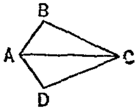
**求證**　$\triangle ABC \cong \triangle ADC$.

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AC=AC$. | 1. 二△公用. |
| 2. $\angle a=\angle b$. | 2. 題設各爲30°,公理 1. |
| 3. $\angle c+\angle e=180^\circ$. | 3. 題設ACE是直線.又(§50). |
| 4. $\angle e=130^\circ$. | 4. 題設. |
| 5. $\therefore \angle c+130^\circ=180^\circ$. | 5. 由 4 代入 3. |
| 6. $\angle c=50^\circ$. | 6. 公理 3. |
| 7. 但 $\angle d=50^\circ$. | 7. 題設. |
| 8. $\therefore \angle c=\angle d$. | 8. 公理 1. |
| 9. $\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC$. | 9. a.s.a.=a.s.a. (§66). |

**3. 假設** 在四邊形ABCD中,AC二等分A角,又二等分C角.

**求證** $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.



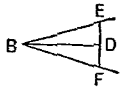
(3)

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle BAC=\angle DAC$. | 1. 題設AC二等分$\angle A$. |
| 2. $\angle ACB=\angle ACD$. | 2. 題設AC二等分$\angle C$. |
| 3. $AC=AC$. | 3. 公用. |
| 4. $\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC$. | 4. a.s.a.=a.s.a. (§66). |

**4. 假設** BD二等分$\angle B$, $EF \perp BD$.

**求證** $\triangle EBD \cong \triangle FBD$.



(4)

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle EBD=\angle FBD$. | 1. 題設BD二等分$\angle B$. |
| 2. $\angle BDE=\angle FDB$. | 2. 凡直角都相等(§46),題設$EF \perp BD$. |
| 3. $BD=BD$. | 3. BD公用. |
| 4. $\therefore \triangle EBD \cong \triangle FBD$. | 4. a.s.a.=a.s.a. (§66). |

**5. 假設** I是GH的中點,$KG \perp GH$, $HL \perp GH$, KL是一直綫.

**求證** $\triangle KGI \cong \triangle HLI$.

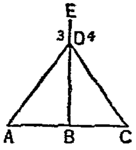
(5)

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. GI=HI. | 1. 題設I是GH的中點. |
| 2. ∠KIG=∠LIH. | 2. 對頂角相等(§53).題設KIL是一直綫. |
| 3. ∠KGI=∠LHI. | 3. 凡直角都相等(§46).題設KG, HL都是GH的垂綫. |
| 4. ∴△KGI≅△HLI. | 4. a.s.a.=a.s.a. |

6. 假設　DB⊥AC, ∠3=∠4, 又BDE是一直綫.

求證　△ABD≅△CBD



(6,7)

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. BDE是直線. | 1. 題設. |
| 2. ∠3=∠4. | 2. 題設. |
| 3. ∴ ∠ADB=∠CDB. | 3. 公理 3. |
| 4. BD⊥AC. | 4. 題設. |
| 5. ∴∠ABD=∠CBD. | 5. 皆爲rt.∠. |
| 6. BD=BD. | 6. 公用. |
| 7. ∴△ABD≅△CBD. | 7. a.s.a.=a.s.a. |

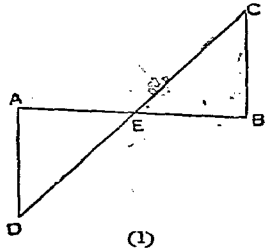
7. 假設　DB⊥AC, ∠ADB是∠4的補角, 又BDE是一直綫.

求證　$\triangle ABD\cong\triangle CBD$.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. PDE是直線. | 1. 題設. |
| 2. $\therefore \angle 4+\angle CDB=180^\circ$. | 2. §50. |
| 3. 但 $\angle 4+\angle ADB=180^\circ$. | 3. 題設兩角相補. |
| 4. $\therefore \angle ADB=\angle CDB$. | 4. 公理1, 3. |
| 5. $\angle ABD=\angle CBD$. | 5. 題設BD⊥AC,各成rt∠. |
| 6. $BD=BD$. | 6. 公用. |
| 7. $\therefore \triangle ABD\cong\triangle CBD$. | 7. a.s.a.=a.s.a. |

## 習　題　四 (教科書第34—39頁)



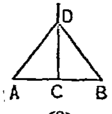
(1)

1. 假設　兩直線AB和CD互相二等分於E,

求證　$\triangle ADE\cong\triangle CEB$.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AE=EB$. | 1. 題設CD平分AB. |
| 2. $CE=ED$. | 2. 題設AB平分CD. |
| 3. $\angle AED=\angle CEB$. | 3. 對頂角相等(§53). |
| 4. $\therefore \triangle ADE\cong\triangle CEB$. | 4. s.a.s.=s.a.s. (§69). |



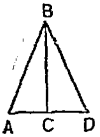
(2)

2. **假設**　DC是AB的垂直二等分綫(就是AC=CB,又DC⊥AB).

**求證**　AD=BD.

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　AC=CB. | 1.　題設DC平分AB. |
| 2.　∠ACD=∠BCD. | 2.　題設DC⊥AB,凡直角都相等(§46). |
| 3.　DC=DC. | 3.　公用. |
| 4.　△ACD≅△BCD. | 4.　s.a.s.=s.a.s.(§69). |
| 5.　∴AD=BD. | 5.　相當邊相等(§70). |



(3)

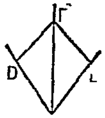
3. 等腰三角形頂角的二等分綫,二等分其底邊.

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　AB=DB. | 1.　題設ABC爲等腰三角形,故兩腰相等(§58). |
| 2.　∠ABC=∠DBC. | 2.　題設BC平分∠B. |
| 3.　BC=BC. | 3.　△ABC同△DBC的公用邊. |
| 4.　△ABC≅△DBC. | 4.　s.a.s.=s.a.s.(§69). |
| 5.　∴AC=CD,就是BC平分AD. | 5.　相當邊相等(§70). |

4. **假設** BF二等分∠DBE, BD=BE.

**求證** ∠FDB=∠FEB.



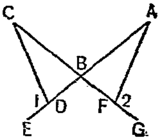
(4)

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 在三角形FDB及FEB內, | |
| 1. BD=BE. | 1. 題設. |
| 2. ∠FBD=∠FBE. | 2. 題設BF平分∠DBE. |
| 3. BF=BF. | 3. 公用邊. |
| 4. △FDB≅△FEB. | 4. s.a.s.=s.a.s. (§69). |
| 5. ∴∠FDB=∠FEB. | 5. 相當角相等(§70). |

5. **假設** BD=BF, BC=BA, 又CG及AE都是直綫.

**求證** CD=AF.



(5 -8)

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 在三角形CBD及ABF內, | |
| 1. BD=BF. | 1. 題設. |
| 2. BC=BA. | 2. 題設. |
| 3. ∠CBD=∠ABF. | 3. 凡對頂角相等(§53). |
| 4. △CBD≅△ABF. | 4. s.a.s.=s.a.s. (§69). |
| 5. ∴CD=AF. | 5. 相當邊相等(§70). |

**6. 假設**　BD=BF, CD⊥EA, AF⊥CG, 又CG及AE都是直綫.

**求證**　$\angle C=\angle A$.

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 在三角形CBD及ABF內, | |
| 1. BD=BF. | 1. 題設. |
| 2. $\angle CDB=\angle AFB$. | 2. 兩直角相等(§46). |
| 3. $\angle CBD=\angle ABF$. | 3. 對頂角相等(§53). |
| 4. $\triangle CBD\cong\triangle ABF$. | 4. a.s.a.=a.s.a.(§66). |
| 5. $\therefore\angle C=\angle A$. | 5. 相當角相等(§70). |

**7. 假設**　BD=BF, $\angle 1=\angle 2$, 又CG及AE都是直綫.

**求證**　CB=AB.

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 在$\triangle CBD$及$\triangle ABF$內, | |
| 1. BD=BF. | 1. 題設. |
| 2. $\angle CBD=\angle ABF$. | 2. 對頂角相等(§53). |
| 3. $\because\angle 1=\angle 2$. | 3. 題設. |
| 4. $\therefore\angle CDB=\angle AFB$. | 4. 等量減等量,其餘量必等(公理3). |
| 5. $\therefore\triangle CBD\cong\triangle ABF$. | 5. a.s.a.=a.s.a.(§66). |
| 6. $\therefore$CB=AB. | 6. 相當邊相等(§70). |

**8. 假設** $BD=BF$, $CF=AD$, 又CG及AE都是直綫.

**求證** $\angle C=\angle A$.

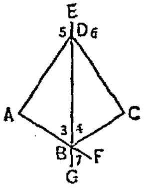
**證**

| 敘 述 | 理 由 |
|---|---|
| 在$\triangle CBD$及$\triangle ABF$內, | |
| **1.** 因$CF-FB=AD-DB$, 即$CB=AB$. | **1.** 等量減等量,其餘量必等(公理3). |
| **2.** $DB=FB$. | **2.** 題設. |
| **3.** $\angle CBD=\angle ABF$. | **3.** 對頂角相等(§53). |
| **4.** $\triangle CBD\cong\triangle ABF$. | **4.** s.a.s.=s.a.s. (§69). |
| **5.** $\therefore \angle C=\angle A$. | **5.** 相當角相等(§70). |

**9. 假設** $AD=DC$, $\angle 5=\angle 6$,

又BE是一直綫.

**求證** $\angle A=\angle C$.



(9 -11)

**證**

| 敘 述 | 理 由 |
|---|---|
| 在$\triangle ABD$及$\triangle CBD$內, | |
| **1.** $AD=DC$. | **1.** 題設. |
| **2.** $DB=DB$. | **2.** 兩三角形公用邊. |
| **3.** $\angle ADB=\angle CDB$. | **3.** 題設$\angle 5=\angle 6$,又公理3 |
| **4.** $\triangle ABD\cong\triangle CBD$. | **4.** s.a.s.=s.a.s. (§69). |
| **5.** $\therefore \angle A=\angle C$. | **5.** 相當角相等(§70). |

10. **假設**　$\angle 3=\angle 4$, $\angle 5=\angle 6$,又 BE 是一直綫.

**求證**　AD=DC.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 在 △ABD 及 △CBD 內, | |
| 1. $\angle 3=\angle 4$. | 1. 題設. |
| 2. $\because \angle 5=\angle 6$. | 2. 題設. |
| 3. $\therefore \angle ADB=\angle CDB$. | 3. 公理 3. |
| 4. BD=BD. | 4. 公用. |
| 5. $\triangle ABD\cong\triangle CBD$. | 5. a.s.a.=a.s.a. |
| 6. $\therefore$AD=DC. | 6. 相當邊相等(§70). |

11. **假設**　AB=BC, $\angle 4=\angle 7$, 又 AF 及 EG 都是直綫.

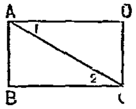
**求證**　AD=DC.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB=BC. | 1. 題設. |
| 2. $\because \angle 4=\angle 7$. | 2. 題設. |
| 3. 而$\angle 3=\angle 7$. | 3. 對頂角. |
| 4. $\therefore \angle 4=\angle 3$. | 4. 公理 1. |
| 5. BD=BD. | 5. 公用. |
| 6. $\triangle ABD\cong\triangle CBD$. | 6. s.a.s.=s.a.s. |
| 7. $\therefore$AD=DC. | 7. 相當邊相等(§70). |

**12.** **假設** $AB \perp AD$, $DC \perp BC$, 又 $\angle 1 = \angle 2$.

**求證** $\angle B = \angle D$.



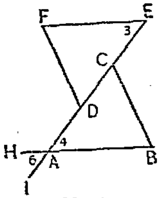
(12)

**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle BAD = \angle DCB$. | 1. 各爲 rt. $\angle$. |
| 2. $\angle 1 = \angle 2$. | 2. 題設. |
| 3. $\angle BAC = \angle DCA$. | 3. 由(1)減(2),公理 3. |
| 4. $AC = AC$. | 4. 公用邊. |
| 5. $\triangle ABC \cong \triangle CDA$. | 5. a.s.a.=a.s.a. |
| 6. $\therefore \angle B = \angle D$. | 6. 相當角相等. |

**13.** **假設** $AD = CE$, $AB = FE$, $\angle 3 = \angle 4$; 又 AE 是一直綫.

**求證** $\angle B = \angle F$.



(13,14)

**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AD + CD = CE + CD$, 即 $AC = ED$. | 1. 題設 $AD = CE$, 又公理 2. |
| 2. $AB = FE$. | 2. 題設. |
| 3. $\angle 3 = \angle 4$. | 3. 題設. |
| 4. $\therefore \triangle ABC \cong \triangle FED$. | 4. s.a.s.=s.a.s. |
| 5. $\therefore \angle B = \angle F$. | 5. 相當角相等 |

14. **假設** $AD=CE$, $AB=FE$, $\angle 3=\angle 6$, 又 $EI$ 及 $HB$ 都是直綫.

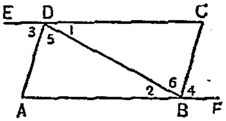
**求證** $BC=FD$.

### 證

| 敘 述 | 理 由 |
|---|---|
| 1. $AD+CD=CE+CD$, 卽 $AC=ED$. | 1. 題設 $AD=CE$,又公理2. |
| 2. $AB=FE$. | 2. 題設. |
| 3. $\angle 3=\angle 6$, $\angle 4=\angle 6$, 故 $\angle 3=\angle 4$. | 3. 題設,對頂角相等(§53), 又公理 1. |
| 4. $\therefore \triangle ABC \cong \triangle FED$. | 4. s.a.s.=s.a.s. |
| 5. $\therefore BC=FD$. | 5. 相當邊相等. |

15. **假設** $\angle EDB=\angle FBD$, $\angle 5=\angle 6$, 又 $CE$ 及 $AF$ 都是直綫.

**求證** $AD=BC$.



(15, 16)

### 證

| 敘 述 | 理 由 |
|---|---|
| 在 $\triangle ABD$ 及 $\triangle CDB$ 內, | |
| 1. $\angle 5=\angle 6$,卽 $\angle ADB=\angle CBD$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle 1=\angle 2$,卽 $\angle CDB=\angle ABD$. | 2. 題設 $\angle EDB=\angle FBD$, 所以他們的補角相等. |
| 3. $DB=DB$. | 3. 公用邊. |
| 4. $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ | 4. a.s.a.=a.s.a. |
| 5. $\therefore AD=BC$. | 5. 相當邊相等. |

**16.** **假設** $\angle 3=\angle 4$, $\angle 5=\angle 6$, 又EC及AF都是直綫.

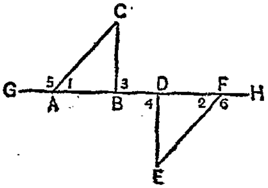
**求證** $AB=DC$.

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 在$\triangle ABD$及$\triangle CDB$內, | |
| 1. $\angle 5=\angle 6$,即$\angle ADB=\angle CBD$. | 1. 題設. |
| 2. 因$180^\circ-(\angle 3+\angle 5)=180^\circ-(\angle 4+\angle 6)$,故$\angle 1=\angle 2$,即$\angle CDB=\angle ABD$. | 2. $\angle 1$同$(\angle 3+\angle 5)$相補,$\angle 2$同$(\angle 4+\angle 6)$相補(§50). |
| 3. $BD=BD$ | 3. 公用邊. |
| 4. $\triangle ABD\cong\triangle CDB$. | 4. a.s.a.=a.s.a. |
| 5. $\therefore AB=DC$. | 5. 相當邊相等. |

**17.** **假設** $AD=BF$, $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$, 又GH是直綫.

**求證** $\angle C=\angle E$.



(17,18)

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 因$AD=BF$,而$AD-BD=BF-BD$,所以$AB=DF$. | 1. 等量減等量其餘量相等(公理3). |
| 2. $\angle 1=\angle 2$,即$\angle CAB=\angle DFE$. | 2. 題設. |

| | |
|---|---|
| 3. 因 $\angle 3=\angle 4$,所以 $180^\circ-\angle 3=180^\circ-\angle 4$,所以 $\angle ABC=\angle EDF$. | 3. 補角相等(§50). |
| 4. $\therefore \triangle ABC \cong \triangle EDF$. | 4. a.s.a.=a.s.a. |
| 5. $\therefore \angle C=\angle E$. | 5. 相當角相等. |

18. 假設　$AD=BF$, $\angle 5=\angle 6$, $AC=FE$, 又 GH 是一直綫.

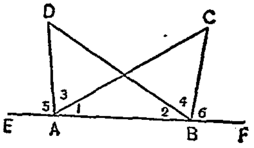
求證　$BC=DE$.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AD=BF$. | 1. 題設. |
| 2. $AD-BD=BF-BD$, 卽 $AB=DF$. | 2. 等量減等量,其餘量必等(公理3). |
| 3. $\angle 5=\angle 6$. | 3. 題設. |
| 4. $180^\circ-\angle 5=180^\circ-\angle 6$, 卽 $\angle 1=\angle 2$. | 4. 公理3. |
| 5. $AC=FE$. | 5. 題設. |
| 6. $\triangle ABC \cong \triangle EDF$. | 6. s.a.s.=s.a.s. |
| 7. $\therefore BC=DE$. | 7. 相當邊相等. |

19. 假設　$AD \perp EF$, $CB \perp EF$, $AD=BC$, 又 EF 是一直綫.

求證　$\angle C=\angle D$.



(19—22)

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 在$\triangle ABD$及$\triangle ABC$內, | |
| 1. $\angle DAB=\angle CBA$. | 1. 題設AD,CB皆垂直EF,又凡直角相等(§46). |
| 2. $AD=BC$. | 2. 題設. |
| 3. $AB=AB$. | 3. 兩三角形公用邊. |
| 4. $\therefore \triangle ABD\cong\triangle ABC$. | 4. s.a.s.=s.a.s.(§69). |
| 5. $\therefore \angle C=\angle D$. | 5. 相當角相等(§70). |

20. **假設** $AD=CB$, $\angle 5=\angle 6$, 又EF是一直線.

**求證** $\angle 1=\angle 2$.

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 在$\triangle ABD$及$\triangle ABC$內, | |
| 1. $AD=CB$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle 5=\angle 6$. | 2. 題設. |
| 3. $180^\circ-\angle 5=180^\circ-\angle 6$,<br>即$\angle DAB=\angle CBA$. | 3. 等量減等量其餘量必等(公理3). |
| 4. $AB=AB$. | 4. 公用邊. |
| 5. $\therefore \triangle ABD\cong\triangle ABC$ | 5. s.a.s.=s.a.s. |
| 6. $\therefore \angle BAC=\angle ABD$,<br>即$\angle 1=\angle 2$. | 6. 相當角相等(§70). |

21. **假設** $\angle 5=\angle 6$, $\angle 1=\angle 2$, 又EF是一直線.

**求證** $AC=DB$.

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 因 $\angle 5=\angle 6$, 故 $\angle DAB=\angle CBA$. | 1. 同20題理由 2 |
| 2. $\angle 1=\angle 2$. | 2. 題設. |
| 3. $AB=AB$. | 3. 公用邊. |
| 4. $\triangle ABD\cong\triangle ABC$. | 4. a.s.a.=a.s.a. |
| 5. $\therefore AC=DB$. | 5. 相當邊相等. |

22. 假設 $\angle 5=\angle 6$, $\angle 3=\angle 4$, 又 EF 是一直綫.

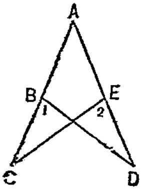
求證 $AD=BC$.

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 因 $\angle 5=\angle 6$,故 $\angle DAB=\angle CBA$. | 1. 同20題理由 2. |
| 2. 因 $\angle 3=\angle 4$,<br>故 $\angle DAB-\angle 3=\angle CBA-\angle 4$.<br>即 $\angle 1=\angle 2$. | 2. 題設,又等量減等量其餘量相等(公理 3). |
| 3. $AB=AB$. | 3. 公用邊. |
| 4. $\therefore \triangle ABD\cong\triangle ABC$. | 4. a.s.a.=a.s.a. |
| 5. $\therefore AD=BC$. | 5. 相當邊相等. |

23. 假設 $AB=AE$, $BC=ED$; 又 AC 及 AD 都是直綫.

求證 $CE=BD$.



(23—25)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AB=AE$. | 1. 題設. |
| 2. $AB+BC=AE+ED$. 卽 $AC=AD$. | 2. 題設$AB=AE$,$BC=ED$,又等量加等量,其和相等(公理2). |
| 3. $\angle A=\angle A$. | 3. $\angle A$公用. |
| 4. $\therefore \triangle ACE\cong\triangle ADB$. | 4. s.a.s.=s.a.s. |
| 5. $\therefore CE=BD$. | 5. 相當邊相等. |

24. 假設　$AB=AE$, $\angle 1=\angle 2$, 又 $AC$ 及 $AD$ 都是直綫.

求證　$CE=BD$.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AB=AE$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle 1=\angle 2$, 故 $\angle ABD=\angle AEC$. | 2. $\angle 1$同$\angle ABD$相補, $\angle 2$同$\angle AEC$相補(§50). |
| 3. $\angle A=\angle A$ | 3. $\angle A$公用. |
| 4. $\therefore \triangle ACE\cong\triangle ADB$. | 4. a.s.a.=a.s.a. |
| 5. $\therefore CE=BD$. | 5. 相當邊相等 |

25. 假設　$AC=AD$, $BC=ED$.

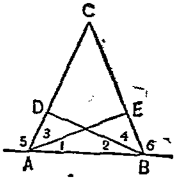
求證　$\angle C=\angle D$.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AC=AD$. | 1. 題設. |
| 2. 因$BC=ED$, 故$AC-BC=AD-ED$,故$AB=AE$. | 2. 等量減等量,其餘量相等(公理3). |

| | |
|---|---|
| 3.　∠A=∠A. | 3.　∠A公用. |
| 4.　∴△ACE≅△ADB. | 4.　s.a.s.=s.a.s. |
| 5.　∴∠C=∠D. | 5.　相當角相等. |

**26.假設**　∠1=∠2,∠3=∠4,



(26—29)

又AE及BD都是直綫.

**求證**　AD=BE.

**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 在△AEB及△ADB內, | |
| 1.　因∠1=∠2,∠3=∠4. | 1.　題設. |
| 2.　故∠1+∠3=∠2+∠4.<br>即∠DAB=∠EBA. | 2.　等量加等量,其和相等<br>(公理2). |
| 3.　AB=AB. | 3.　公用邊. |
| 4.　∴△AEB≅△ADB. | 4.　a.s.a.=a.s.a.(§66). |
| 5.　∴AD=BE. | 5.　相當邊相等(§70). |

**27.假設**　∠DAB=∠EBA,又∠3=∠4.

**求證**　AD=BE.

**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 在△AEB及△ADB內, | |
| 1.　因∠DAB=∠EBA. | 1.　題設. |
| 2.　又∠3=∠4. | 2.　題設. |

| | |
|---|---|
| **3.** 故 $\angle DAB-\angle 3=\angle EBA-\angle 4$.<br>即 $\angle EAB=\angle DBA$. | **3.** 等量減等量其餘量相等(公理3). |
| **4.** $AB=AB$. | **4.** 公用邊. |
| **5.** $\triangle AEB\cong\triangle ADB$. | **5.** a.s.a.=a.s.a. (§66). |
| **6.** $\therefore AD=BE$. | **6.** 相當邊相等(§70). |

**28.** **假設** $\angle 5=\angle 6$, $\angle 1=\angle 2$,又 AE 及 BD 都是直綫.

**求證** $AD=BE$.

### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** 因 $\angle 5=\angle 6$,故 $\angle DAB=\angle EBA$. | **1.** $\angle 5$同$\angle DAB$相補,$\angle 6$同$\angle EBA$相補,又公理3同27題理由2. |
| **2.** $\angle 1=\angle 2$,即 $\angle EAB=\angle DBA$. | **2.** 題設. |
| **3.** $AB=AB$. | **3.** 公用邊. |
| **4.** $\therefore \triangle AEB\cong\triangle ADB$. | **4.** a.s.a.=a.s.a. |
| **5.** $\therefore AD=BE$. | **5.** 相當邊相等. |

**29.** **假設** $\angle 5=\angle 6$, $AD=BE$, 又 AE 及 BD 都是直綫.

**求證** $\angle 1=\angle 2$.

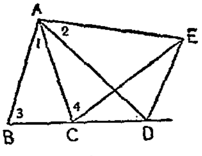
### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** 因 $\angle 5=\angle 6$, 故 $\angle DAB=\angle EBA$. | **1.** $\angle 5$同$\angle DAB$相補,$\angle 6$同$\angle EBA$ 相補,由公理 3 故知兩角相等. |

| | |
|---|---|
| 2.　AD=BE. | 2.　題設. |
| 3.　AB=AB. | 3.　公用邊. |
| 4.　∴△ABD≅△BEA. | 4.　s.a.s.=s.a.s.(§69). |
| 5.　∴∠1=∠2. | 5.　相當角相等(§70). |

**30.** **假設**　BCD是一直綫,AB=AC, AD=AE,又∠1=∠2.

**求證**　BD=CE.



(30,31)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 在△ABD及△ACE內, | |
| 1.　AB=AC. | 1.　題設. |
| 2.　AD=AE. | 2.　題設. |
| 3.　∠1=∠2,故∠1+∠CAD=∠2+∠CAD,<br>即∠BAD=∠CAE. | 3.　等量加等量其和相等(公理2). |
| 4.　∴△ABD≅△ACE. | 4.　s.a.s.=s.a.s.(§69). |
| 5.　∴BD=CE. | 5.　相當邊相等(§70). |

**31.** **假設**　AB=AC, ∠1=∠2, ∠3=∠4,又AD是一直綫.

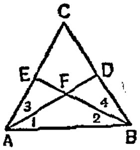
**求證**　AD=AE.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 在$\triangle ABD$及$\triangle ACE$內. | |
| 1. $AB=AC$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle 1=\angle 2$,故$\angle 1+\angle CAD=\angle 2+\angle CAD$.<br>即$\angle BAD=\angle CAE$. | 2. 等量加等量其和相等(公理2). |
| 3. $\angle 3=\angle 4$<br>即$\angle ABD=\angle ACE$. | 3. 題設. |
| 4. $\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACE$. | 4. a.s.a.=a.s.a.(§66). |
| 5. $\therefore AD=AE$. | 5. 相當邊相等(§70). |

**32.假設** $\angle A=\angle B$,又$\angle 3=\angle 4$.

**求證** $AD=BE$.



(32,33)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 在$\triangle ABD$及$\triangle ABE$內. | |
| 1. $\angle A=\angle B$. | 1. 題設. |
| 2. 因$\angle 3=\angle 4$,故$\angle A-\angle 3=\angle B-\angle 4$,即$\angle 1=\angle 2$,<br>即$\angle DAB=\angle EBA$. | 2. 等量減等量,其餘量相等(公理3),也是題設. |
| 3. $AB=AB$. | 3. 公用邊. |
| 4. $\therefore \triangle ABD\cong\triangle ABE$. | 4. a.s.a.=a.s.a.(§66). |
| 5. $\therefore AD=BE$. | 5. 相當邊相等(§70). |

33. 假設 $AC=BC$, 又 $\angle 3=\angle 4$.

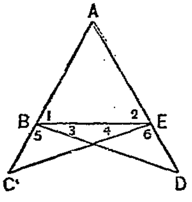
求證 $AD=BE$.

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 在 $\triangle ACD$ 及 $\triangle BCE$ 內, | |
| 1. $AC=BC$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle 3=\angle 4$, 卽 $\angle CAD=\angle CBE$. | 2. 題設. |
| 3. $\angle C=\angle C$, 卽 $\angle ACD=\angle BCE$. | 3. $\angle C$ 爲 $\triangle ACD$ 及 $\triangle BCE$ 公用. |
| 4. $\therefore \triangle ACD\cong\triangle BCF$ | 4. a.s.a.=a.s.a. (§66). |
| 5. $\therefore AD=BE$. | 5. 相當邊相等(§70). |

34. 假設 $\angle 1=\angle 2$, 又 $\angle 3=\angle 4$.

求證 $EC=BD$.



(34—36)

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 在 $\triangle BEC$ 及 $\triangle BED$ 內, | |
| 1. 因 $\angle 1=\angle 2$, 故 $\angle CBE=\angle DEB$. | 1. $\angle 1$ 同 $\angle CBE$, 又 $\angle 2$ 同 $\angle DEB$ 各相補, 故由公理3, 知道他們相等. |

| | |
|---|---|
| 2. ∠3=∠4,卽∠BEC=∠EBD. | 2. 題設. |
| 3. BE=BE. | 3. 公用邊. |
| 4. ∴△BEC≅△BED. | 4. a.s.a.=a.s.a.(§66). |
| 5. ∴EC=BD. | 5. 相當邊相等(§70). |

**35.** **假設** ∠1=∠2, DB⊥AC, 又CE⊥AD,

**求證** ∠C=∠D.

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 在△BEC及△BED內, | |
| 1. 因∠1=∠2, ∠AEC=∠ABD,故∠ABD−∠1=∠AEC−∠2,卽∠3=∠4,卽∠EBD=∠BEC. | 1. 題設,又凡直角都相等(§46).等量減等量,其餘量相等,(公理3). |
| 2. 因∠1=∠2,故其補角∠CBE=∠DEB. | 2. ∠CBE=180°−∠1,∠DEB=180°−∠2(§50). |
| 3. BE=BE. | 3. 公用邊. |
| 4. ∴△BEC≅△BED. | 4. a.s.a.=a.s.a.(§66). |
| 5. ∴∠C=∠D. | 5. 相當角相等(§70). |

**36.** **假設** AB=AE, ∠5=∠6.

**求證** EC=BD.

**證**

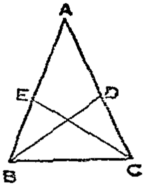
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 在三角形ACE及ADB內, | |

| | |
|---|---|
| 1. 因∠5=∠6,故∠AEC=∠ABD. | 1. ∠5同∠ABD相補,∠6同∠AEC相補(§50).由公理3知他們相等. |
| 2. AB=AE. | 2. 題設. |
| 3. ∠A=∠A,即∠CAE=∠DAB. | 3. 公用角. |
| 4. ∴△ACE≅△ADB. | 4. a.s.a.=a.s.a.(§66). |
| 5. ∴EC=BD. | 5. 相當邊相等(§70). |

37.若三角形的二角相等,那麼相當的兩個角二等分線相等.

設 △ABC的∠ABC=∠ACB,BD是∠ABC的分角綫,CE是∠ACB的分角綫.

求證 BD=CE.

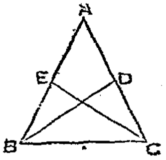


(37)

### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. ∠ABC=∠ACB,即∠EBC=∠DCB. | 1. 題設. |
| 2. ∠DBC=∠ECB. | 2. 等量除等量,其商相等(公理8),即$\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\angle ACB$. |
| 3. BC=BC. | 3. 公用邊. |
| 4. △BCE≅△BCD. | 4. a.s.a.=a.s.a.(§66). |
| 5. ∴BD=CE. | 5. 相當邊相等(§70). |

38.向等腰三角形兩腰所引的兩條中綫相等.



(38)

設 等腰三角形ABC內,AB=AC,又BD,CE爲兩腰上的中綫.

求證 BD=CE.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. ∠B=∠C. | 1. 題設.等腰三角形兩底角相等(§71). |
| 2. BE=CD. | 2. 等腰的一半(公理8). |
| 3. BC=BC. | 3. 公用邊. |
| 4. ∴△BCD≅△BCE. | 4. s.a.s.=s.a.s.(§69). |
| 5. ∴BD=CE. | 5. 相當邊相等(§70). |

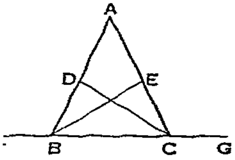
### 又證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 在△ABD及△ACE內, | |
| 1. AB=AC. | 1. 題設. |
| 2. AE=AD. | 2. 各爲等腰的一半. |
| 3. ∠BAD=∠CAE,卽 ∠A ∠A. | 3. 公用角. |
| 4. ∴△ABD≅△ACE. | 4. s.a.s.=s.a.s.(§69). |
| 5. ∴BD=CE. | 5. 相當邊相等(§70). |

**39.** 若三角形的兩個外角相等,那麼兩個相鄰內角的二等分綫相等.

**設**　△ABC中∠B及∠C的外角∠ABF=∠ACG, BE是∠B的分角綫, CD是∠C的分角綫.

**求證**　BE=CD.

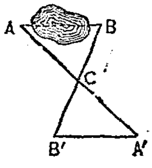


(39)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 在△BEC及△CDB內, | |
| 1.　∠ECB=∠DBC. | 1.　因∠ABF同∠DBC相補,∠ACG同∠ECB相補,而題設∠ABF=∠ACG. |
| 2.　∠EBC=∠DCB. | 2.　等角的一半(公理8). |
| 3.　BC=BC. | 3.　公用邊. |
| 4.　△BEC≅△CDB. | 4.　a.s.a.=a.s.a.(§66). |
| 5.　∴BE=CD. | 5.　相當邊相等(§70). |

**40.** 我們要求小池對徑的距離,在便利的地點C立一個木椿,從A點,望C點,在AC的延長線上求得A′,使CA′=AC. 同樣再延長BC至B′,使CB′=BC. 現在要求AB的長,我們必須測量那一條線?並證明他.



(40)

證

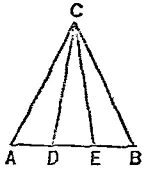
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 在$\triangle ABC$及$\triangle A'B'C$內, | |
| 1. $AC=CA'$. | 1. 題設. |
| 2. $BC=CB'$. | 2. 題設. |
| 3. $\angle ACB=\angle A'CB'$. | 3. 對頂角相等 (§46), 因$ACA'$, $BCB'$都是直綫. |
| 4. $\therefore \triangle ABC\cong\triangle A'B'C$. | 4. s.a.s.=s.a.s. (§69). |
| 5. $\therefore A'B'=AB$. | 5. 相當邊相等(§70). |

答　我們量了$A'B'$的距離,便知道$AB$的距離.

## 習題五 (教科書第41—42頁)

1. 若$AC=BC$, 又$AE=DB$.

則$CD=CE$.



(1,2)

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 在$\triangle AEC$及$\triangle BDC$內, | |
| 1. $AC=BC$. | 1. 題設. |
| 2. $AE=DB$. | 2. 題設. |
| 3. $\angle CAB=\angle CBA$. | 3. 等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| 4. $\therefore \triangle AEC\cong\triangle BDC$. | 4. s.a.s.=s.a.s. (§69). |
| 5. $\therefore CD=CE$. | 5. 相當邊相等(§70). |

**2.** 若 AC=BC, 又∠DCA=∠ECB,

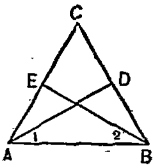
則 CD=CE.

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 在△ADC及△BEC內, | |
| **1.** AC=BC. | **1.** 題設. |
| **2.** ∠DCA=∠ECB. | **2.** 題設. |
| **3.** ∠CAD=∠CBE. | **3.** 等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| **4.** ∴△ADC≅△BEC. | **4.** a.s.a.=a.s.a. (§66). |
| **5.** ∴CD=CE. | **5.** 相當邊相等(§70). |

**3.** 若 AC=BC, 又∠1=∠2,

則 AE=BD.



(3,4)

證

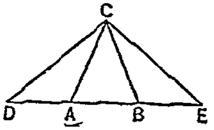
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 在△ADB及△BEA內, | |
| **1.** ∠EAB=∠DBA. | **1.** 等腰三角形的兩底角相等(§71), 因題設 AC=BC. |
| **2.** ∠1=∠2,卽∠EBA=∠DAB. | **2.** 題設. |
| **3.** AB=AB. | **3.** 公用邊. |
| **4.** ∴△ADB≅△BEA. | **4.** a.s.a.=a.s.a. (§66). |
| **5.** ∴AE=BD. | **5.** 相當邊相等(§70). |

4. 若$AC=BC$,又$AD$及$BE$都是角二等分綫,
則$AD=BE$.

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 在$\triangle ADB$及$\triangle BEA$內 | |
| 1. $\angle EAB=\angle DBA$. | 1. 題設等腰,故底角相等(§71). |
| 2. $\frac{1}{2}\angle EAB=\frac{1}{2}\angle DBA$,卽$\angle DAB=\angle EBA$. | 2. 等量除等量,其商相等(公理8). |
| 3. $AB=AB$. | 3. 公用邊. |
| 4. $\triangle ADB\cong\triangle BEA$. | 4. a.s.a.=a.s.a. (§66). |
| 5. $\therefore AD=BE$ | 5. 相當邊相等(§70). |

5. 若$AC=BC$,$AD=BE$,又$DE$是一直綫,
則$DEC$是一個等腰三角形.



(5,6)

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 因$AC=BC$,<br>故$\angle CAB=\angle CBA$,<br>故其外角$\angle CAD=\angle CBE$. | 1. 等腰三角形的底角相等(§71).內角既等,外角亦相等由§50補角及公理3相減之法知之. |
| 2. $AC=BC$. | 2. 題設. |
| 3. $AD=BE$. | 3. 題設. |
| 4. $\therefore\triangle CAD\cong\triangle CBE$. | 4. s.a.s.=s.a.s. (§69). |
| 5. $\therefore CD=CE$, $\triangle DEC$等腰. | 5. 相當邊相等(§70). |

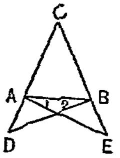
**6.** 若 $AC=BC$, $\angle ACD=\angle BCE$, 又 $DE$ 是一直綫, 則 $DEC$ 是一個等腰三角形.

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $AC=BC$. | **1.** 題設. |
| **2.** 由 1. 知 $\angle CAB=\angle CBA$. 其外角 $\angle CAD=\angle CBE$. | **2.** 由 §71 知底角相等, 由 §50 及公理3知外角相等. |
| **3.** $\angle ACD=\angle BCE$. | **3.** 題設. |
| **4.** $\therefore \triangle CAD\cong\triangle CBE$. | **4.** a.s.a.=a.s.a. (§66). |
| **5.** $\therefore CD=CE$, $\triangle DEC$ 等腰. | **5.** 相當邊相等 (§70). |

**7.** 若 $AC=BC$, $\angle 1=\angle 2$, 又 $CD$ 及 $CE$ 都是直綫,

則 $\angle D=\angle E$.



(7)

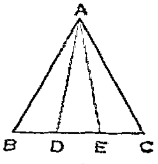
證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 在 $\triangle ABD$ 及 $\triangle BAE$ 內, | |
| **1.** $\angle DAB=\angle EBA$. | **1.** 由 §71 知 $\angle CAB=\angle CBA$, 再由 §50 補角之理及公理3等量相減之理, 知其外角相等. |
| **2.** $\angle 1=\angle 2$, 即 $\angle ABD=\angle BAE$. | **2.** 題設. |
| **3.** $AB=AB$. | **3.** 公用邊. |
| **4.** $\triangle ABD\cong\triangle BAE$. | **4.** a.s.a.=a.s.a. (§66). |
| **5.** $\therefore \angle D=\angle E$. | **5.** 相當角相等 (§70). |

8. 若三等分等腰三角形的底邊,則聯結頂點和兩分點的直綫必相等.

**設** $\triangle ABC$ 爲等腰三角形,即 $AB=AC$,而底邊 $BC$ 被 $D,E$ 兩點三等分,即 $BD=DE=EC$.

**求證** $AD=AE$.

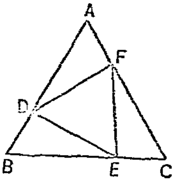


(8)

### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 在 $\triangle ABD$ 及 $\triangle ACE$ 內, | |
| 1. $AB=AC$. | 1. 題設. |
| 2. $BD=EC$. | 2. 題設. |
| 3. $\angle ABD=\angle ACE$. | 3. 等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| 4. $\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACE$. | 4. s.a.s.=s.a.s.(§69). |
| 5. $\therefore AD=AE$. | 5. 相當邊相等(§70). |

9. 若在等邊三角形 $ABC$ 的三邊中取 $D, E,$ 及 $F$,而使 $AD=BE=CF$,則 $\triangle DFE$ 是一個等邊三角形.



(9,11)

### 證

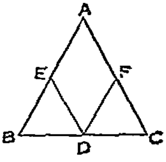
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 在 $\triangle ADF$, $\triangle BED$ 及 $\triangle CFE$ 內, | |
| 1. $AD=BE=CF$. | 1. 題設. |

| | |
|---|---|
| 2.　$AB-AD=BC-BE=AC-CF$,即 $DB=EC=FA$. | 2.　等邊三角形的各邊都等(§58). 又等量減等量,其餘量相等(公理3). |
| 3.　$\angle A=\angle B=\angle C$ | 3.　等邊三角形就是等角三角形(§73). |
| 4.　$\therefore \triangle ADF\cong\triangle BED\cong\triangle CFE$. | 4.　s.a.s.=s.a.s. (§69). 但此處三個三角形全同. |
| 5.　$\therefore FD=DE=FE$,即 $\triangle DFE$ 爲等邊三角形. | 5.　相當邊相等(§70). 又等邊三角形定義(§58). |

10. 從等腰三角形的兩腰的中點,各作直線至底邊的中點,則兩直綫必相等.

設　$\triangle ABC$ 爲等腰,即 $AB=AC$, E, F, D, 爲 AB, AC 及底 BC 的中點.

求證　$ED=FD$.



(10)

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 在 $\triangle EBD$ 及 $\triangle FDC$ 內, | |
| 1.　$BE=FC$. | 1.　等腰的一半相等,因爲題設E, F 爲兩腰的中心. |
| 2.　$BD=DC$. | 2.　題設 D 爲底邊的中心 |
| 3.　$\angle B=\angle C$. | 3.　等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| 4.　$\therefore \triangle EBD\cong\triangle FDC$. | 4.　s.a.s.=s.a.s. (§69). |
| 5.　$\therefore ED=FD$. | 5.　相當邊相等(§70). |

11. 若 $DE=EF=FD$, 又 $\angle AFD=\angle BDE=\angle CEF$, 則 $\triangle ABC$ 是一個等邊三角形.(用 9 題圖)

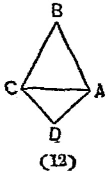
**注意:** 角的相等,有時用命題IV來證明(參看§123).

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 在△ADF, △BED及△CFE內, | |
| 1. FD=DE=EF. | 1. 題設. |
| 2. ∠AFD=∠BDE=∠CEF. | 2. 題設. |
| 3. 因∠FDE=∠DEF=∠EFD,故∠BDF=∠DEC=∠EFA,而其補角∠ADF=∠DEB=∠EFC. | 3. 等量加等量,其和相等(公理2).一直綫上的二鄰角相補(§50).等量減等量,其餘量相等(公理3). |
| 4. ∴△ADF≌△BED≌△CFE. | 4. a.s.a.=a.s.a.(§66). |
| 5. ∴AD=BE=CF, DB=EC=FA. | 5. 相當邊相等(§70). |
| 6. ∴AD+DB=BE+EC=CF+FA. 即AB=BC=CA. | 6. 公理2, 10. |
| 7. ∴△ABC等邊. | 7. 等邊三角形定義(§58). |

12. 若ABC及ADC是在同一AC底上的兩個等腰三角形,

則∠BAD=∠BCD.



(12)

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. ∠BCA=∠BAC. | 1. 等腰三角形的兩底角 |

| | |
|---|---|
| | 相等(§71). |
| 2.　$\angle DCA=\angle DAC$. | 2.　同上. |
| 3.　$\angle BCA+\angle DCA=\angle BAC+\angle DAC$,即$\angle BAD=\angle BCD$. | 3.　等量加等量,其和相等(公理2). |

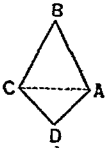
## 又證

1.　作BD直綫.
2.　$BC=BA$
3.　$DC=DA$
4.　$BD=BD$

如此(兩三角形的相當邊全等,則兩形全同),故$\angle BCD=\angle BAD$,但本書尚未講到,故用上證合理理由從略.

**13.** 若在四邊形ABCD中,$AB=BC$,又$AD=DC$,

則$\angle A=\angle C$.



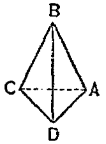
(13)

## 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　作AC綫. | 1.　兩點之間,可以作一直綫(公理13). |
| 2.　$AB=BC$,故$\angle BCA=\angle BAC$. | 2.　等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| 3.　$AD=CD$,故$\angle DCA=\angle DAC$. | 3.　同上. |
| 4.　$\angle BCA+\angle DCA=\angle BAC+\angle DAC$. | 4.　等量加等量,其和相等(公理2). |
| 5.　$\therefore\angle A=\angle C$. | 5.　4的結果. |

14.若BD是兩三角形ABD及DBC的公共邊, AB=BC, 又AD=CD,

則∠A=∠C.



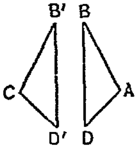
(14)

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作AC綫. | 1. 看13題理由(公理13). |
| 2. BD公用,故B,D兩點公用而成△ABC, △ADC 兩個等腰三角形. | 2. 兩點之間,只能作一直綫(公理13). |
| 3. 因AB=BC,故∠BCA=∠BAC. | 3. §71(看13題理由2). |
| 4. 因AD=CD,故∠DCA=∠DAC. | 4. 同上. |
| 5. ∴∠BCA+∠DCA=∠BAC+∠DAC,即∠A=∠C. | 5. 公理2(同13題理由4). |

15.若在兩個三角形ABD及CB′D′中AD=CD′, AB=CB′, 又BD=B′D′,

則∠A=∠C.



(15)

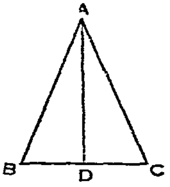
證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 置B′D′於BD上,使B′落 | 1. 題設BD=B′D′, |

| | | |
|---|---|---|
| 於B點上,則D′落於D點上;而成四邊形ABCD,和14題圖相彷. | 又公理19. | |
| 2. 作AC綫. | 2. 公理13. | 俱詳13題理由. |
| 3. 在△ABC內, ∠BCA=∠BAC. | 3. §71. | |
| 4. 在△ADC內, ∠DCA=∠DAC. | 4. 同上. | |
| 5. ∠BCA+∠DCA=∠BAC+∠DAC, 卽∠A=∠C. | 5. 公理2. | |

## 習　題　六 (教科書第44頁)

1. 等腰三角形底的中綫,必二等分其頂角.



(1)

設　△ABC爲等腰三角形, BC爲底邊, AD爲到BC中點的中綫,

求證　AD平分頂角∠A,
卽∠BAD=∠CAD.

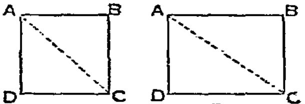
### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB=AC. | 1. 題設. |
| 2. BD=DC. | 2. 題設. |
| 3. AD=AD. | 3. 公用. |
| 4. ∴△ABD≌△ACD. | 4. s.s.s.=s.s.s.(§74). |
| 5 ∴∠BAD=∠CAD. | 5. 相當角相等. |

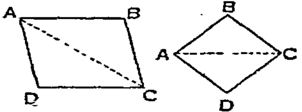
2. 四邊形的對邊各相等，則其對角亦各相等.

設　四邊形ABCD，$AB=CD$，$BC=AD$.

求證　$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$.



正方形　長方形



平行四邊形　菱形

(2)

證

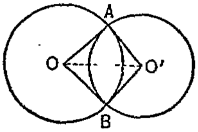
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作AC. | 1. 兩點間可作一直綫. |
| 2. $AB=CD$. | 2. 題設. |
| 3. $BC=AD$. | 3. 題設. |
| 4. $AC=AC$. | 4. 兩三角形公用邊. |
| 5. $\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC$. | 5. s.s.s.=s.s.s.(§74). |
| 6. $\therefore \angle B=\angle D$. | 6. 相當角相等. |
| 7. $\angle BAC=\angle DCA$，$\angle BCA=\angle DAC$. | 7. 相當角相等. |
| 8. $\angle BAC+\angle DAC=\angle DCA+\angle BCA$. | 8. 等量加等量,其和相等(公理2). |
| 9. $\angle A=\angle C$. | 9. 8的結果. |

**注意**：此題有四種四邊形都合.

## 習　題　七（教科書第44—47頁）

1. 若兩圓的中心是 O 及 O′，兩圓相交於 A 及 B，

則 ∠AOO′=∠BOO′.



(1,2)

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作 OO′. | 1. 兩點間可作一直綫(公理 13). |
| 2. AO=BO. | 2. 圓的半徑(公理 18). |
| 3. AO′=BO′. | 3. 同上. |
| 4. OO′=OO′. | 4. 兩三角形公用邊. |
| 5. △AOO′≅△BOO′. | 5. s.s.s.=s.s.s. (§74). |
| 6. ∠AOO′=∠BOO′. | 6. 相當角相等. |

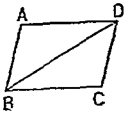
2. 若兩圓的中心是 O 及 O′，兩圓相交於 A 及 B，則 ∠OAO′=∠OBO′.

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作 OO′. | 1. 兩點之間，可作一直綫(公理 13). |
| 2. AO=BO. | 2. 公理 18，即圓半徑都相等. |
| 3. AO′=BO′. | 3. 同上. |
| 4. OO′=OO′. | 4. 兩三角形的公用邊. |
| 5. △AOO′≅△BOO′. | 5. s.s.s.=s.s.s. (§74). |
| 6. ∴∠OAO′=∠OBO′. | 6. 相當角相等. |

3. 若AB=CD, 又BC=DA,

則∠ABD=∠BDC.



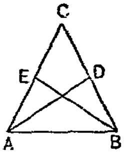
(3)

證

| 敍述 | | 理由 | |
|---|---|---|---|
| 1. | 作BD. | 1. | 同2題理由1. |
| 2. | AB=CD. | 2. | 題設. |
| 3. | BC=DA. | 3. | 題設. |
| 4. | BD=BD. | 4. | 公用邊. |
| 5. | ∴△ABD≅△BDC. | 5. | s.s.s.=s.s.s. |
| 6. | ∴∠ABD=∠BDC. | 6. | 相當角相等. |

4. 若AE=BD, AD=BE, 又AC及BC都是直綫,

則∠CEB=∠CDA.



(4)

證

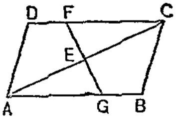
| 敍述 | | 理由 | |
|---|---|---|---|
| 在△ADB及△ABE內, | | | |
| 1. | AE=BD. | 1. | 題設. |
| 2. | AD=BE. | 2. | 題設. |
| 3. | AB=AB. | 3. | 兩三角形公用邊. |
| 4. | ∴△ADB≅△ABE. | 4. | s.s.s.=s.s.s. |
| 5. | ∴∠AEB=∠ADB. | 5. | 相當角相等. |

| | |
|---|---|
| 6. ∴其外角∠CEB=∠CDA. | 6. 一直綫上的相鄰角相補(§50).又等量減等量,其餘量相等(公理3).故兩三角形內角相等時,其外角亦相等. |

5. 若四邊形的各對邊相等,作一直綫使過對角綫的中點,而止於其兩邊,則此直線被對角線所二等分.

設四邊形ABCD內AB=CD, BC=AD,作直綫FG,通過對角綫AC的中點E.

求證　FE=EG.



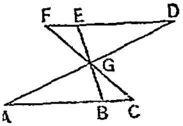
(5)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. △ABC≅△ACD. | 1. s.s.s.=s.s.s.(§74). |
| 2. ∴∠CAB=∠DCA. | 2. 相當角相等. |
| 3. AE=EC. | 3. 題設E是AC的中點. |
| 4. ∠FEC=∠GEA. | 4. 對頂角相等(§53). |
| 5. ∴△FEC≅△GEA. | 5. a.s.a.=a.s.a.(§66). |
| 6. ∴FE=EG. | 6. 相當邊相等. |

6. 若AG=GD, CG=FG, 又所有的線都是直綫,

則BG=GE.



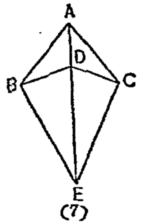
(6)

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\triangle FDG \cong \triangle AGC$. | 1. s.a.s.=s.a.s. (§69). |
| 2. $\therefore \angle FDG = \angle CAG$. | 2. 相當角相等. |
| 3. $AG = GD$. | 3. 題設. |
| 4. $\angle AGB = \angle DGE$. | 4. 對頂角相等(§53). |
| 5. $\therefore \triangle AGB = \triangle DGE$ | 5. a.s.a.=a.s.a. (§66). |
| 6. $\therefore BG = GE$. | 6. 相當邊相等. |

7. 若$AB=AC$, $AE$二等分$\angle BAC$,
又$AE$是一直綫,

則$\angle DBE=\angle DCE$.

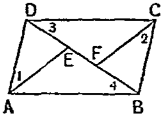


(7)

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\triangle ABD \cong \triangle ACD$. | 1. s.a.s.=s.a.s. |
| 2. $\therefore DB = DC$. | 2. 相當邊相等. |
| 3. $\angle BDE = \angle CDE$. | 3. 相當角$\angle ADB = \angle ADC$的外角相等(§50及公理3). |
| 4. $DE = DE$. | 4. 公用邊. |
| 5. $\therefore \triangle DBE \cong \triangle DCE$. | 5. s.a.s.=s.a.s. |
| 6. $\therefore \angle DBE = \angle DCE$. | 6. 相當角相等. |

8. 若AB=CD, BC=DA, $\angle 1=\angle 2$,
又DB是一直綫,
則AE=CF.



(8,9)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle ADE=\angle CBF$. | 1. △APD及△CBD三邊都等(§74),故其相當角相等(§70). |
| 2. $\angle 1=\angle 2$. | 2. 題設. |
| 3. BC=DA. | 3. 題設. |
| 4. ∴$\triangle ADE\cong\triangle CBF$. | 4. a.s.a.=a.s.a.(§66). |
| 5. ∴AE=CF. | 5. 相當邊相等. |

9. 若AB=CD, $\angle 3=\angle 4$, 又BF=DE,
則$\angle 1=\angle 2$.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 在△ABE及△CDF內, | |
| 1. AB=CD. | 1. 題設. |
| 2. $\angle 3=\angle 4$. | 2. 題設. |
| 3. DE=BF,<br>BD−DE=BD−BF,<br>即BE=DF. | 3. 題設,又等量減等量其餘量相等(公理3). |
| 4. ∴$\triangle ABE\cong\triangle CDF$. | 4. s.a.s.=s.a.s. |
| 5. ∴AE=CF. | 5. 相當邊相等. |

| | |
|---|---|
| **6.** $\angle AEB=\angle CFD$, 故其外角 $\angle AED=\angle CFB$. | **6.** 相當角相等(§70),故其補角相等(§50及公理3). |
| **7.** 在$\triangle AED$及$\triangle CFB$內證之,得 $\triangle AED\cong\triangle CFB$. | **7.** 即由題設 DE=BF 及證5,證6而得 s.a.s.=s.a.s.(§69). |
| **8.** $\therefore\angle 1=\angle 2$. | **8.** 相當角相等. |

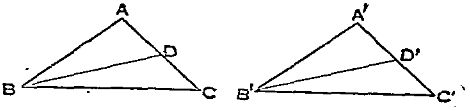
## 又證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** AB=CD. | **1.** 題設. |
| **2.** $\angle 3=\angle 4$. | **2.** 題設. |
| **3.** DB=DB. | **3.** 兩三角形ABD及CBD的公用邊. |
| **4.** $\therefore\triangle ABD\cong\triangle CBD$. | **4.** s.a.s.=s.a.s.(§69). |
| **5.** $\therefore\angle ADB=\angle CBD$, 即 $\angle ADE=\angle CBF$. | **5.** 相當角相等. |
| **6.** AD=CB. | **6.** 相當邊相等. |
| **7.** BF=DE. | **7.** 題設. |
| **8.** $\therefore\triangle ADE\cong\triangle CBF$. | **8.** 同理由 4. |
| **9.** $\therefore\angle 1=\angle 2$. | **9.** 同理由 5. |

**10.** 兩個三角形,各有兩邊及其中一邊的中綫,彼此皆相等,則兩形全同.

**設** 兩三角形ABC及A′B′C′中,AC=A′C′,BC=B′C′,而中線BD=B′D′.

**求證** $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

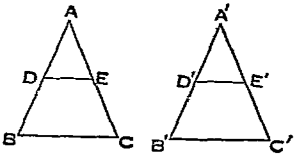


(10)

## 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $BC=B'C'$ | 1. 題設. |
| 2. $DC=D'C'$. | 2. $AC$, $A'C'$的一半.公理8. |
| 3. $BD=B'D'$. | 3. 題設. |
| 4. $\triangle BDC\cong\triangle B'D'C'$. | 4. s.s.s.=s.s.s. (§74). |
| 5. $\therefore \angle DCB=\angle D'C'B'$,<br>即$ACB=\angle A'C'B'$. | 5. 相當角相等. |
| 6. $\because AC=A'C'$. | 6. 題設. |
| 7. $\therefore\triangle ABC\cong A'B'C'$. | 7. s.a.s.=s.a.s. (§69). |

11.兩個等腰三角形,各有一腰,及聯結兩腰中點的一直綫,皆彼此相等,則兩形全同.



(10)

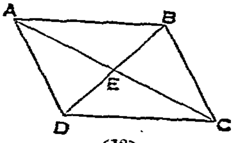
**設**　等腰三角形 $ABC$ 及 $A'B'C'$ 一腰 $AB=A'B'$,而各兩腰中點相連的綫$DE=D'E'$.

**求證**　$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AB=AC$. | 1. 等腰三角形有兩邊相等(§58). |
| 2. $A'B'=A'C'$. | 2. 同上. |
| 3. $AB=A'B'$. | 3. 題設. |
| 4. $\therefore AC=A'C'$. | 4. 公理 1. |
| 5. $\therefore AD=A'D'$. | 5. 題設 AB, A′B′ 的一半. 公理 8. |
| 6. $AE=A'E'$. | 6. AC, A′C′ 的一半.公理8. |
| 7. 而 $DE=D'E'$. | 7. 題設. |
| 8. $\triangle ADE\cong\triangle A'D'E'$. | 8. s.s.s.=s.s.s. (§74). |
| 9. $\angle A=\angle A'$. | 9. 相當角相等. |
| 10. $\therefore\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$. | 10. s.a.s.=s.a.s. (§69). |

12.若四邊形的對邊各相等,則其兩對角綫互相二等分.



(12)

**設** 四邊形 ABCD 中 $AB=CD$, $BC=AD$,而 AC,BD 爲兩對角綫,相交於E.

**求證** $AE=EC$, $BE=ED$.

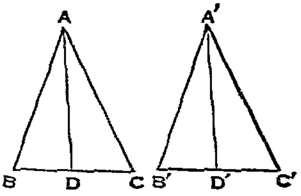
證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\triangle ABC\cong\triangle ADC$. | 1. s.s.s.=s.s.s. (§74). |
| 2. $\therefore\angle BAE=\angle DCE$. | 2. 相當角相等. |

| | |
|---|---|
| 3. △ABD≅△BCD. | 3. 同理由 1 |
| 4. ∴∠ABE=∠CDE. | 4. 同理由 2. |
| 5. ∴△ABE≅△CDE. | 5. a.s.a.=a.s.a. (§66). |
| 6. ∴AE=EC, BE=ED. | 6. 相當邊相等. |

**注意:** 證 1 中含有 AB=CD, BC=AD, AC=AC; 證 3 中易 AC=AC 爲 BD=BD; 證 5 中兼用 AB=CD, 及證 2 證 4.

13. 兩個三角形 ABC 及 A′B′C′ 的 AB=A′B′, ∠A=∠A′, 又角二等分綫 AD=角二等分綫 A′D′, 則兩形全同.



(13)

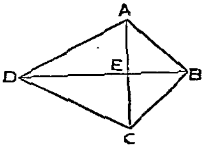
### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB=A′B′. | 1. 題設. |
| 2. AD=A′D′. | 2. 題設. |
| 3. ∠A=∠A′,<br>$\therefore \frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}\angle A'$,<br>即 ∠BAD=∠B′A′D′. | 3. 題設.等量除等量其商相等(公理8). |
| 4. ∴△BAD≅△B′A′D′. | 4. s.a.s.=s.a.s. (§69). |
| 5. ∠ADB=∠A′D′B′.<br>其外角 ∠ADC=∠A′D′C′. | 5. 相當角相等.<br>又一直綫上兩鄰角相補 (§50).<br>等量減等量,餘量相等(公理3). |

| | |
|---|---|
| 6. $\angle CAD=\angle C'A'D'$ $=\frac{1}{2}\angle A$. | 6. 同理由 3. |
| 7. 由 2, 5, 6 得 $\triangle ADC\cong\triangle A'D'C'$. | 7. a.s.a.=a.s.a. (§66). |
| 8. $\therefore AC=A'C'$. | 8. 相當邊相等. |
| 9. 而 $AB=A'B'$, $\angle A=\angle A'$. | 9. 題設. |
| 10. 故 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$. | 10. s.a.s.=s.a.s. |

14.在四邊形ABCD中,若AB=BC, CD=DA, 又對角綫AC與BD,相交於E.

則AE=EC.



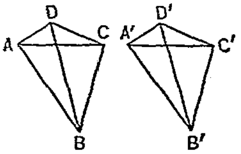
(14)

## 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\triangle ABD\cong\triangle CBD$. | 1. s.s.s.=s.s.s. (§74). |
| 2. $\angle ABD=\angle CBD$. | 2. 相當角相等. |
| 3. $AB=BC$. | 3. 題設. |
| 4. $\triangle ABC$ 爲等腰三角形, 故 $\angle BAE=\angle BCE$. | 4. 等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| 5. $\triangle ABE\cong\triangle CBE$. | 5. a.s.a.=a.s.a. |
| 6. $\therefore AE=EC$. | 6. 相當邊相等. |

**15.** 在四邊形 ABCD 及 $A'B'C'D'$ 中，若 $AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$CD=C'D'$，$DA=D'A'$，又 $AC=A'C'$，

則 $BD=B'D'$



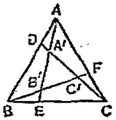
(15)

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $AC=A'C'$. | 1. 題設. |
| 2. $\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. | 2. s.s.s.=s.s.s. (§74). |
| 3. $AD=A'D'$, $CD=C'D'$ $AC=A'C'$. | 3. 題設. |
| 4. $\therefore \triangle ADC \cong \triangle A'D'C'$. | 4. 同理由 2. |
| 5. $\angle ACB=\angle A'C'B'$, $\angle ACD=\angle A'C'D'$. | 5. 2 同 4 的相當角相等. |
| 6. $\angle ACB+\angle ACD=\angle A'C'B'+\angle A'C'D'$,<br>即 $\angle BCD=\angle B'C'D'$ | 6. 等量加等量其和相等(公理2). |
| 7. $\therefore \triangle BCD \cong \triangle B'C'D'$ | 7. s.a.s.=s.a.s. |
| 8. $\therefore BD=B'D'$ | 8. 相當邊相等. |

**16.** 在等邊三角形 ABC 的各邊上，取 D, E, F 諸點，使 $AD=BE=CF$，又使 D,E,F 各與所對的角項點相聯結，

則 $\triangle A'B'C'$ 是一個等邊三角形.

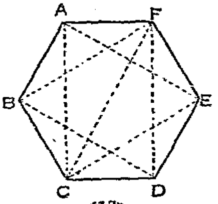


(16)

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $AB=BC=AC$. | **1.** 等邊三角形的三邊都等(§58). |
| **2.** $BE=CF=AD$. | **2.** 題設. |
| **3.** $\angle ABC=\angle ACB=\angle BAC$. | **3.** 等邊三角形是等角三角形(§73系2). |
| **4.** $\therefore \triangle ABE\cong\triangle BCF\cong\triangle CAD$. | **4.** s.a.s.=s.a.s.(§69). |
| **5.** $\angle AEB=\angle BFC=\angle CDA$. | **5.** 相當角相等. |
| **6.** $\angle BAE=\angle CBF=\angle ACD$. | **6.** 同上. |
| **7.** $\therefore \triangle ADA'\cong\triangle BEB'\cong\triangle CFC'$. | **7.** a.s.a.=a.s.a.(§66). |
| **8.** $AE=BF=CD$. | **8.** 相當邊相等,自4. |
| **9.** $AA'=BB'=CC'$. | **9.** 相當邊相等,自7. |
| **10.** $B'E=C'F=A'D$. | **10.** 同上. |
| **11.** $\therefore AE-AA'-B'E=BF-BB'-C'F=CD-CC'-A'D$. | **11.** 等量減等量,其餘量相等(公理3). |
| **12.** 即$A'B'=B'C'=C'A'$. | **12.** 由11. |
| **13.** 故$A'B'C'$爲等邊三角形. | **13.** §58定義. |

**17.**若六邊形的對邊各相等,又有兩個相對的角相等,則所有相對的角都各相等.



(17)

設　六邊形ABCDEF中$AB=DE$, $BC=EF$, $CD=AF$, 而$\angle A=\angle D$.

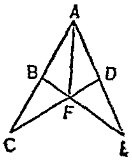
**求證**　$\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle F$.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 連 BF, BD, AC, AE, CE, DF. | 1. 兩點之間,可作一直綫(公理13). |
| 2. 在 $\triangle ABF$ 及 $\triangle DEC$ 內, $\angle A=\angle D$, $AB=DE$, $AF=CD$, $\therefore \triangle ABF\cong\triangle DEC$. | 2. 題設. s.a.s.=s.a.s. (§69). |
| 3. 在 $\triangle BFC$ 及 $\triangle ECF$ 內, $BC=EF$ | 3. 題設. |
| 4. 由2知 $BF=CE$, CF公用, $\therefore \triangle BCF\cong\triangle EFC$. | 4. s.s.s.=s.s.s. (§74). |
| 5. $\angle FBC=\angle FEC$. | 5. 相當角相等. |
| 6. $\angle ABF=\angle DEC$. | 6. 由證 2 得來. |
| 7. $\therefore \angle FBC+\angle ABF$ $=\angle FEC+\angle DEC$. | 7. 等量加等量其和相等(公理2). |
| 8. 即 $\angle B=\angle E$. | 8. 全體等於其各部分的和(公理10). |
| 9. 同理 $\therefore \angle C=\angle F$. | 9. 理由同上. |

18. 若 $AB=AD$, $AC=AE$, 又BE及DC都是直綫,

則 $\angle BAF=\angle DAF$.



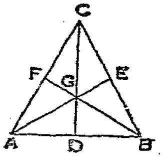
(18)

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 在△ACD及△AEB內, | |
| 1. AC=AE. | 1. 題設 |
| 2. AD=AB. | 2. 同上. |
| 3. ∠CAD=∠EAB. | 3. 公用∠A. |
| 4. ∴△ACD≅△AEB. | 4. s.a.s.=s.a.s. (§69). |
| 5. ∴∠C=∠E. | 5. 相當角相等. |
| 6. ∠ADC=∠ABE. | 6. 同上. |
| 7. 其外角∠CBF=∠EDF. | 7. 一直綫上的兩鄰角相補(§50).等量減等量,其餘量相等(公理3). |
| 8. AC−AB=AE−AD, 卽BC=DE. | 8. 公理 3. |
| 9. ∴△BCF≅△DEF. | 9. a.s.a.=a.s.a. (§66). |
| 10. ∴BF=DF. | 10. 相當邊相等. |
| 11. 在△ABF及△ADF內, AF=AF, AB=AD, BF=DF | 11. AF公用,餘見2及10本證. |
| 12. ∴△ABF≅△ADF. | 12. s.s.s.=s.s.s. (§74). |
| 13. ∴∠BAF=∠DAF. | 13. 相當角相等. |

**19.**若∠A=∠B,又AF=BE,

則AD=DB.

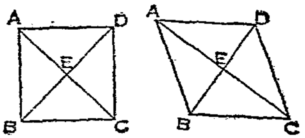


(19)

### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. △AEB≅△BFA. | 1. 題設. s.a.s.=s.a.s. (§69). |
| 2. AE=BF, ∠ABF=∠BAE. | 2. 相當邊相當角相等. |
| 3. ∠A−∠BAE=∠B−∠ABF.<br>卽∠CAE=∠CBF. | 3. 等量減等量,其餘量相等(公理3). |
| 4. ∵∠AFB=∠AEB,<br>∴∠CFB=∠CEA. | 4. 相當角相等.<br>又§50及公理3. |
| 5. ∴△CAE≅△CBF. | 5. a.s.a.=a.s.a. |
| 6. CA=CB. | 6. 相當邊相等. |
| 7. ∠AFG=∠BEG,<br>∠FAG=∠EBG,<br>AF=BE. | 7. 理由見前,<br>又題設. |
| 8. ∴△AFG≅△BEG | 8. a.s.a.=a.s.a. |
| 9. AG=BG | 9. 相當邊相等. |
| 10. CG=CG. | 10. 公用. |
| 11 △CAG≅△CBG. | 11. s.s.s.=s.s.s. |
| 12 ∴∠ACD=∠BCD. | 12. 相當角相等. |
| 13. ∴△ACD≅△BCD. | 13. s.a.s.=s.a.s. |
| 14. ∴AD=DB. | 14. 相當邊相等. |

**20.**—個等邊四邊形的對角綫,必互相垂直.



(20)

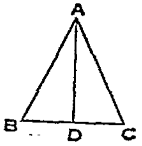
設 等邊四邊形ABCD內AB=BC=CD=DA,兩對角綫的交點爲E.

求證 AC⊥BD.

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 在正方形及菱形ABCD中, | |
| 1. AB=BC, AD=CD, BD公用. | 1. 題設. |
| 2. △ABD≅△CBD. | 2. s.s.s.=s.s.s. (§74). |
| 3. ∠ABD=∠CBD,<br>∠ADB=∠CDB. | 3. 相當角相等. |
| 4. BD平分∠B及∠D, 同理AC平分∠A及∠C. | 4. 全體等於其各部分的和(公理10). 等量除等量,其商相等(公理8). |
| 5. ∴AC⊥BD,BD⊥AC. | 5. 等腰三角形頂角的二等分綫垂直於其底(§72). |

21.一個等腰三角形的底邊的中綫,必垂直於底.



(21)

設 △ABC的AB=AC, AD爲到BC的中綫.

求證 AD⊥BC.

證

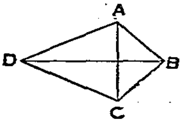
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB=AC. | 1. 題設. |
| 2. BD=DC. | 2. D爲BC的中點. |
| 3. ∠ABD=∠ACD. | 3. 等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| 4. ∴△ABD≅△ACD. | 4. s.a.s.=s.a.s. (§69). |

| | |
|---|---|
| 5.　∴$\angle ADB=\angle ADC$. | 5.　相當角相等. |
| 6.　∴$AD\perp BC$. | 6.　$\angle ADB$及$\angle ADC$相補而又相等,故垂直(§26直角爲平角的一半). |

22.在四邊形ABCD中,若$AB=BC$,

又$CD=DA$,

則$BD\perp AC$.



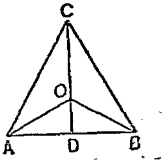
(22)

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　$AB=BC$, $CD=DA$. | 1.　題設. |
| 2.　$BD=BD$. | 2.　兩三角形的公用邊. |
| 3.　$\triangle ABD\cong\triangle CBD$. | 3.　s.s.s.=s.s.s. (§74). |
| 4.　$\angle ABD=\angle DBC$,<br>卽BD平分$\angle B$. | 4.　相當角相等(§70). |
| 5.　$BD\perp AC$. | 5.　等腰三角形頂角的二等分綫垂直於其底邊(§72). |

23.若$AC=BC$,又$AO=BO$,

則$CD\perp AB$.



(23)

證

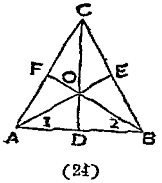
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　$AC=BC$, $AO=BO$. | 1.　題設. |

| | |
|---|---|
| 2. $CO=CO$. | 2. 公用邊. |
| 3. $\triangle AOC \cong \triangle BOC$. | 3. s.s.s.=s.s.s.(§74). |
| 4. $\therefore \angle ACO=\angle BCO$,<br>即 $CD$ 平分 $\angle ACB$. | 4. 相當角相等. |
| 5. $\therefore CD \perp AB$. | 5. 等腰三角形頂角的二等分綫,垂直於其底邊(§72). |

24.若 $AC=BC$, $\angle 1=\angle 2$,

則 $CD \perp AB$.

設 O 爲 AE, BF 的交點, CD 通過 O 點. 又如題云云.



(24)

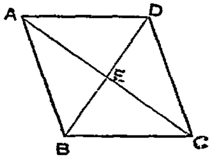
### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle ABE=\angle BAF$. | 1. 題設 $AC=BC$(§71). |
| 2. $\triangle ABE \cong \triangle BAF$. | 2. a.s.a.=a.s.a. |
| 3. $\angle FAO=\angle EBO$. | 3. 公理3. |
| 4. $\triangle AFO \cong \triangle BEO$. | 4. a.s.a.=a.s.a. |
| 5. $AO=BO$. | 5. 相當邊. |
| 6. $\triangle CAO \cong \triangle CBO$. | 6. s.s.s.=s.s.s. |
| 7. $\angle ACD=\angle BCD$. | 7. 相當角. |
| 8. $CD \perp AB$. | 8. §72. |

## 習 題 八 (教科書第48頁)

若一個四邊形的四邊都相等,則其對角綫互相二等分.

**設**　四邊形ABCD的AB=BC=CD=DA, AC, BD爲兩對角綫,相遇於E.



**求證**　AE=EC, BE=ED.

**證**

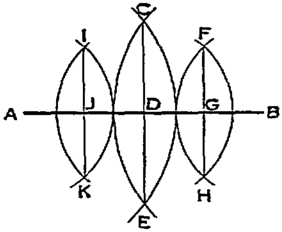
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　A點到B, D等距, C點到B,D等距. | 1.　題設. |
| 2.　AC平分BD. | 2.　兩點都同一直綫的兩端等距,決定這綫的垂直平分綫(§79). |
| 3.　D點同B點到A, C都是等距. | 3.　題設. |
| 4.　BD平分AC. | 4.　同理由2. |
| 5.　∴AE=EC, BE=ED. | 5.　2, 4的結果. |

## 習題九 (教科書第49頁)

1. 分一已知直綫爲四等分.

**設**　AB爲已知直綫,

**求**　將AB分爲四等分.



(1)

**作法**　以A爲中心,大於$\frac{1}{2}$AB的長爲半徑,作弧;又以同半徑,以B爲中心,作弧,使兩弧相交於C於E;

作CE,那麼CE平分AB於D.

同樣以D,B爲中心,大於$\frac{1}{2}$DB的長爲半徑,作兩弧,相交於F,於H,作FH,平分DB於G.

同樣作IK,平分AD於J.

那麼 AJ=JD=DG=GB=$\frac{1}{4}$AB.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. C,E到A,B等距. | 1. 作法. |
| 2. ∴AD=DB. | 2. 兩點都同一直綫的兩端等距,決定這綫的垂直二等分綫(§79). |
| 3. F,H到D,B等距; I,K,到A,D等距. | 3. 作法. |
| 4. ∴AJ=JD, DG=GB. | 4. 同理由2. |
| 5. ∴AJ=JD=DG=GB=$\frac{1}{4}$AB. | 5. 由2及4的結果. |

2. 作一個三角形的三條中綫.

**設** △ABC,

**求作** 中綫AD, BE, CF.

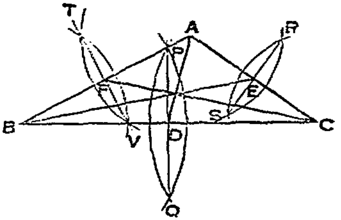
**作法** 1. 以A,B爲中心,大於半AB的長爲半徑,作兩弧相交於T,於V,作TV平分AB於F;

以B,C爲中心,大於半BC爲半徑,作兩弧相交於P,於Q作PQ,平分BC於D;

同理作RS平分AC於E.

2. 作AD, BE, CF. 那麼這三綫是△ABC的三中綫.

證及理由同1題,從略.



(2,3)

3. 作一個三角形三邊的三條垂直二等分綫.

**作法**　如2題所作PQ爲BC的垂直平分綫,TV爲AB的垂直平分綫,RS爲AC的垂直平分綫證同1題,從略.

## 習題十 (教科書第50頁)

1. 分一個已知角爲四等分.

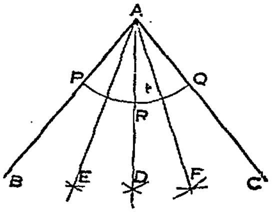
**設**　∠BAC爲已知角,

**求作**　AD,AE,AF,

使$\angle BAE=\angle EAD$

$=\angle DAF=\angle FAC$

$=\frac{1}{4}\angle BAC.$



(1)

**作法**　以A爲中心,任意長爲半徑,作弧,交AB於P,AC於Q,

再以P,Q爲中心,大於$\frac{1}{2}$PQ的長爲半徑,作兩弧,相交於D.

作AD,那麼　∠BAD=∠DAC=$\frac{1}{2}$∠BAC.

又設PQ交AD於R.以P,R爲中心,大於$\frac{1}{2}$PR的長爲半徑,作兩弧相交於E,

作AE,那麼AE平分∠BAD.

同樣作AF,平分∠DAC.

那麼∠BAE=∠EAD=∠DAF=∠FAC=$\frac{1}{4}$∠BAC.

**注意**:　如須證明,比方證∠BAD=∠DAC,只要作DP,及DQ,證明△APD同△AQD全同,那麼他們的相當角相等,容易知道.餘可類推.

**2.** 二等分一個平角.

**設**　AOB爲一個平角,O爲其角頂.

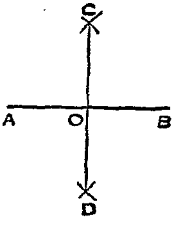
**求作**　一綫CD平分他.

**作法**　1.以O爲心,同半徑截取OA=OB.

2.以A,B爲心,大於AO(或BO)之長爲半徑作弧,相交於C.

3.聯CO,則CO平分∠AOB,即

∠AOC=∠BOC=$\frac{1}{2}$∠AOB.



(2)

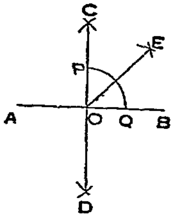
證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 聯結CA,CB. | 1. 兩點間可作一直綫. |
| 2. CA=CB. | 2. 作法. |
| 3. OA=OB. | 3. 作法. |
| 4. CO=CO. | 4. 公用. |
| 5. ∴△AOC≅△BOC. | 5. s.s.s.=s.s.s. |
| 6. ∴∠AOC=∠BOC | 6. 相當角相等. |

即CO平分∠AOB.

注: 同樣方法於AB下方求得D點,
聯DO,則DO亦平分∠AOB.

**3. 作一個90°的角,作一個45°的角.**



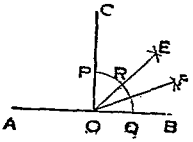
(3)

**作法**　如二等分平角,便得90°的角,又二等分90°的角就得45°的角.

1. ∠COB=90°,二等分平角如習題2.

2. ∠COE=45°,二等分∠COB如§83法就得.

**4. 作一個22°30′的角.**



(4,5)

**作法**　二等分直角得45°的角,再把他二等分便得22°30′的角.

如圖,作∠EOB=45°,

作∠FOB=22°30′.

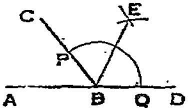
**5. 作一個67°30′的角.**

**作法**　先作直角∠COB,二等分之,得∠COE=45°;

又二等分∠EOB得∠EOF=22°30′;

那麼∠COF=∠COE+∠EOF=45°+22°30′=67°30′.

6. 作一個已知角的補角的半份.



(6)

**設**　已知∠ABC.

**求作**　$\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ABC)$.

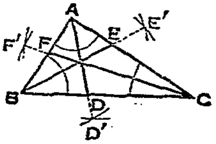
**作法**　引長AB.

則∠CBD=180°−∠ABC.

平分∠CBD,

即得$\angle CBE=\frac{1}{2}\angle CBD=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ABC)$.

7. 作一個三角形的三條角二等分線.



(7)

**設**　已知三角形ABC.

**求作**　角二等分綫AD, BE, CF.

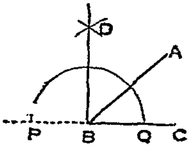
**作法**　二等分∠A,作AD′交BC於D.　得角二等分綫AD.

二等分∠B,作BE′交AC於E.　得角二等分綫BE.

二等分∠C,作CF′交AB於F.　得角二等分綫CF.

## 習題十一 (教科書第51頁)

1. 作一個已知銳角的餘角.



(1)

**設**　∠ABC爲已知銳角,

**求作**　其餘角DBA.

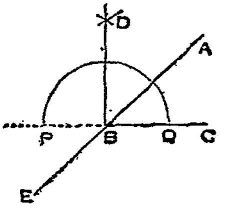
**作法**　引長CB,以B爲中心,任意長BP爲半徑,作半圓周,交CB及其引長綫於Q於P.

以P,Q爲中心,大於BP的長爲半徑,作兩弧,相交於D.

作DB,那麼∠DBA是∠ABC的餘角.

**注意:** 如要證明,連DP, DQ. $PB=BQ$, $DP=DQ$, $DB=DB$. 由§74. s.s.s.=s.s.s. 所以$\triangle DBP\cong\triangle DBQ$. $\therefore \angle DBP=\angle DBQ$(§70). 但由§50知$\angle DBP$同$\angle DBQ$是一直綫上的兩鄰角,相補又相等,故$DB\perp BC$,故$\angle DBA$爲$\angle ABC$的餘角.

**2. 作一個已知銳角的餘角的補角.**



(2)

**設**　$\angle ABC$爲已知銳角.

**求作**　其餘角DBA的補角EBD.

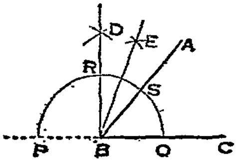
**作法**　引長CB,以B爲中心,任意長BP爲半徑,作半圓周,交CB及其引長綫於Q,於P;

以大於BP的長爲半徑,P, Q爲中心,作兩弧,相交於D;

作DB,那麼$DB\perp BC$, $\angle DBA+\angle ABC=90^\circ$.

又引長AB到E,那麼$\angle EBD+\angle DBA=180^\circ$,就是$\angle EBD$爲$\angle DBA$的補角,$\angle DBA$爲$\angle ABC$的餘角.

**3. 作一個已知銳角的餘角的半分.**



(3)

**設**　$\angle ABC$爲已知銳角.

**求作**　其半餘角EBA.

**作法**　引長CB,以B爲中心,任意長BP爲半徑,作半圓周,交CB及其引長綫於Q,於P;

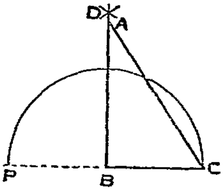
以大於BP的長爲半徑,P, Q爲中心,作兩弧,相交於D;

作DB,那麼DB⊥BC,就是∠DBA同∠ABC相餘;

設前所作的半圓周,同DB相交於R,同AB相交於S,以大於RS一半的長爲半徑,R,S爲中心,作兩弧相交於E,作EB,那麼∠EBA是∠ABC的半餘角.

4. 作一個直角三角形,已知其兩直角邊,各等於1吋及1$\frac{1}{2}$吋.

**作法** 依1題法作DB⊥BC,截取BC=1吋,BA=1$\frac{1}{2}$吋,聯結AC,則△ABC便爲所求的直角三角形



(4)

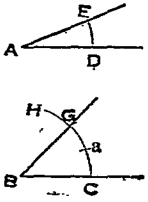
## 習題十二 (教科書第52頁)

1. 作一個角,使他等於已知角的兩倍.

**設** 已知角A.

**求作** ∠B=2∠A.

**作法** 以A爲中心,任意的長爲半徑,作弧,交∠A兩邊於E於D.



(1)

又作BC,以B爲中心,同上AD爲半徑,作較大的弧HC,截BC於C;

以ED爲度,取aC,又取Ga,作GB,

則∠GBC=2∠A.

2. 作一個角,使他等於一個已知角的補角的兩倍

設　已知∠A.

**求作**　他補角FBD的倍角GBD=2(180°−∠A).

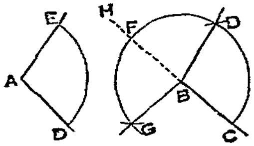
**作法**　先依§86法作∠DBC=∠A.

引長CB至H,則∠HBD是∠DBC的補角.

仍以B爲中心,作適宜的弧DFG,截BD於D,HB於F.

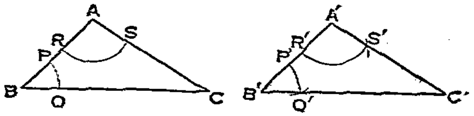
以DF爲度,於此弧內取$\overset{\frown}{FG}$.

作GB, ∴∠GBD=2(180°−∠A).



(2)

3. 已知一個三角形ABC,另作一個三角形A′B′C′,使A′B′=AB, ∠A′=∠A, 又∠B′=∠B; △ABC和△A′B′C′有什麼關係?



(3)

**作法**　以已知△ABC的A頂爲中心,任意長爲半徑,作弧,截兩邊於R,S.

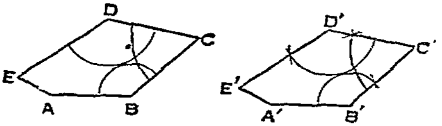
然後作A′B′=AB,以A′爲中心,一樣的長爲半徑,作弧,截A′B′於R′.

以R′爲中心,RS爲半徑,在這弧內取$\overset{\frown}{R'S'}$,作A′S′C′直綫.

又同樣作∠B′=∠B,作直綫B′Q′C′交A′C′於C′.

那麼△A′B′C′同△ABC因a.s.a.=a.s.a.故全同.

4. 已知一個五邊的多邊形(五邊形) ABCDE, 另作一個五邊形,使有四邊各等於 AB, BC, CD, 及 DE, 又使其夾角各等於∠s B, C, D.



(4)

**作法**　先作 $A'B'=AB$.

再依§86法作 $\angle A'B'C'=\angle ABC$, 取 $B'C'=BC$.

又作 $\angle B'C'D'=\angle BCD$, 取 $C'D'=CD$.

又作 $\angle C'D'E'=\angle CDE$, 取 $D'E'=DE$.

末了連 A′E′, 那麼兩個五邊形全同

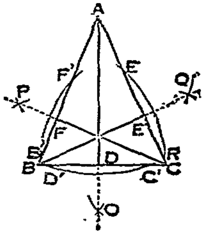
## 習題十三 (教科書第53—54頁)

1. 作一個銳角三角形的三個高.

**設**　△ABC 爲銳角三角形,

**求作**　三個高 AD, BE, CF, 各垂直於 BC, AC, AB.

**作法**　以A爲中心,適宜的長爲半徑,作弧截 BC (或其引長綫) 於 D′, 於 C′.



(1)

以 D′,C′ 爲中心,大於半 D′C′ 的長爲半徑,作兩小弧,相交於 O.

作 AO, 截 BC 於D, 則 $AD \perp BC$.

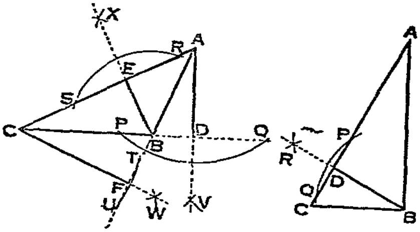
同樣自 B 作 $BE \perp AC$, 自 C 作 $CF \perp AB$.

**注意:** 如須證明,甚是容易,只要連 $AD'$, $AC'$, $D'O$, $C'O$. 則 $AD'=AC'$, $D'O=C'O$, 四邊形 $AD'OC'$ 兩對隣邊相等, AO,$D'C'$ 是對角綫,所以互相垂直而平分(§79).餘可類推.

2. 作一個鈍角三角形的三個高;作一個直角三角形的三個高.

**設**　鈍角三角形ABC,

**求作**　AD, BE, CF 三個高.



(2)

**作法**　以A為中心,適宜之長為半徑,作弧,截 CB 於P, 及其引長綫於Q.

以P, Q為中心,大於半PQ為半徑,作兩弧相交於V.

作 AV, 交 CQ 於 D, 則 AD 是 ∠A 的高.

同樣作 $BE \perp AC$, $CF \perp AB$, 為其他兩角的高.但E在AC內, F在AB的引長綫上.

**設**　直角三角形ABC.

**求作**　高BD.

**作法**　$\angle B = \text{rt.}\angle$,那麼 $AB \perp BC$, $BC \perp AB$. 故其高同邊相

一致.

但以B爲中心,適宜的長爲半徑,作弧,截AC於P,於Q.
以P,Q爲中心,大於半PQ的長爲半徑,作弧相交於R.
作BR,交AC於D,則BD是∠B的高.

**3.** 作了三角形的三個高之後,你對於這三個高有什麼發見?

**答** 高是角頂到對邊的距離.

(1)在銳角三角形,三個高都在形內.

(2)在鈍角三角形,鈍角的高在形內,其他兩高在形外.

(3)在直角三角形,直角的高在形內,其他兩高,同邊相一致.

(4)三個高相交於一點.

**4.** 在一個三角形中,其他有什麼綫同樣有這種情形?

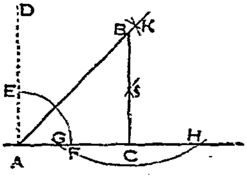
**答** 在一個三角形中,還有三種線和上題的(4)有同樣情形,即:

(1)三條角二等分綫相交於一點.

(2)三條邊的垂直二等分綫相交於一點.

(3)三條中綫相交於一點.

**5.** 已知斜邊和一個45°的角,求作一個直角三角形.



(4)

**設** 已知斜邊爲AB,
∠BAC=45°,∠ACB=90°,

**求作** rt.△ABC.

**作法**　先作AH,依§85作$DA \perp AH$.

又依§83,平分$\angle DAH$,作KA.

在KA內截取AB.

又依§87由B到AH作$BC \perp AH$.

則rt.$\triangle ABC$是所求的三角形.

**注意:**　當用§87法作$BC \perp AH$的時候兩小弧相交點I,在AH的上面,這個和畫在下面一樣.

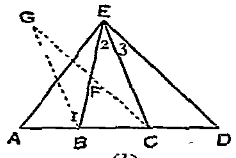
## 習題十四 (教科書55—56頁)

1. 若AD是一直綫,

**求證**　(a)$\angle 1>\angle 2$,

(b)$\angle 1>\angle D$,

(c)$\angle 1>\angle 3$.



(1)

**證** (a)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　取EB中點F,作FC,引長CF至G,使$GF=FC$,作GB. | 1.　一直綫能引長至所要的長(公理17). |
| 2.　在$\triangle EFC$及$\triangle GBF$內,$EF=FB$. | 2.　作圖原取F爲EB的中點. |
| 3.　$GF=FC$. | 3.　作圖. |
| 4.　$\angle GFB=\angle EFC$. | 4.　對頂角相等(§53). |
| 5.　$\therefore \triangle EFC \cong \triangle GBF$. | 5.　s.a.s.=s.a.s.(§69). |
| 6.　$\angle GBF=\angle 2$. | 6.　相當角相等(§70). |
| 7.　但$\angle 1>\angle GBF$. | 7.　全體大於他的任何一部分(公理11). |
| 8.　$\therefore \angle 1>\angle 2$. | 8.　代入. |

證 (b)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** 依(a)證取DC中點,可以證明$\angle ECA > \angle D$. | **1.** 同(a)證. |
| **2.** 依(a)證取BC中點,可以證明$\angle 1 > \angle ECA$. | **2.** 同上. |
| **3.** $\therefore \angle 1 > \angle D$. | **3.** $a > b$, $b > c$, $\therefore a > c$. |

證 (c)

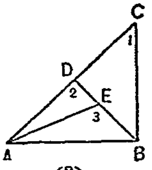
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** 依(a)證取EC中點,可以證明$\angle ECA > \angle 3$. | **1. 2. 3.** 同(b)證. |
| **2.** 依(a)證取BC中點,可以證明$\angle 1 > \angle ECA$. | |
| **3.** $\therefore \angle 1 > \angle 3$. | |

**注意**: 證(b)證(c)都要像證(a)的樣子,逐條寫出,並且要添的虛綫也要繪出.這裏爲節省篇幅起見,所以用同上等字,省去許多字.以下這樣的例很多,不再說明.

2. 若DB是一直綫,

**求證**　(a)$\angle 2 > \angle 1$,

(b)$\angle 3 > \angle 1$.



(2)

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| (a)取DC的中點,連於B, | 完全同1題不另述. |

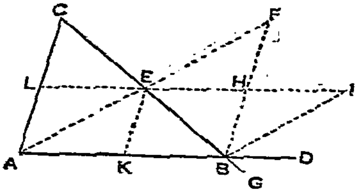
引長之像1題證(a) 1.然後如法證明$\angle 2 > \angle 1$.

(b)先依上法證$\angle 3 > \angle 2$.然後由$\angle 2 > \angle 1$知$\angle 3 > \angle 1$.

3. 在命題XII的圖中,

**求證**　(a) $\angle FBD > \angle F$,　(b) $\angle BEA > \angle ACE$,

(c) $\angle CEA > \angle GBD$,　(d) $\angle CBD > \angle CEF$.



(3)

證(a)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 取FB中點H,作EH,引長EH至I,令HI=EH. | 1. 一量能分爲若干等量(公理12).一直綫能引長至所要的長度(公理17). |
| 2. $\angle EHF = \angle BHI$. | 2. 對頂角相等(§53). |
| 3. $\triangle EHF \cong \triangle BHI$. | 3. s.a.s.=s.a.s.(§69). |
| 4. $\angle F = \angle FBI$. | 4. 相當角相等(§70). |
| 5. 但$\angle FBI < \angle FBD$. | 5. 全體大於他的任何一部分(公理11). |
| 6. $\therefore \angle FBD > \angle F$. | 6. 代入. |

### 證 (b)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作∠BEK=∠ACE. | 1. §86方法在定點上作一角等於已知角. |
| 2. ∠BEA>∠BEK. | 2. 全體大於他的任何一部分(公理11). |
| 3. ∴∠BEA>∠ACE. | 3. 代入. |

### 證 (c)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作∠CEL=∠ABE. | 1. 用§86方法,在E點上作一角等於已知角∠ABE. |
| 2. ∠GBD=∠ABE. | 2. 對頂角相等(§53). |
| 3. 但∠CEA>∠CEL. | 3. 全體大於他的任何一部分(公理11). |
| 4. ∴∠CEA>∠ABE. | 4. 代入. |
| 5. ∴∠CEA>∠GBD. | 5. 同上. |

### 證 (d)

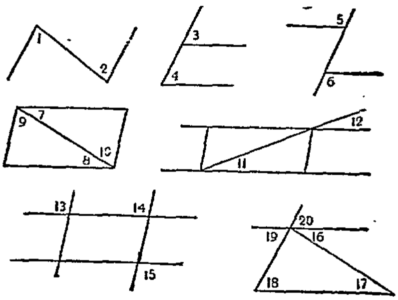
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作∠EBI=∠AEB. | 1. 作圖. |
| 2. ∠CEF=∠AEB. | 2. 對頂角相等(§53). |
| 3. 但∠CBD>∠EBI. | 3. 全體大於他的任何部分(公理11). |
| 4. ∴∠CBD>∠AEB. | 4. 代入. |
| 5. ∴∠CBD>∠CEF. | 5. 代入. |

## 習題十五 (教科書第57—58頁)

**1.** 在上面所設的圖中,說出下列諸角是何種角:

1和2, 3和4, 5和6, 7和8, 9和10, 11和12,
13和14, 14和15, 16和17, 18和19, 18和20.

教科書內所說上邊的圖,這裏畫在下面:



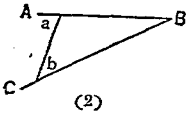
(1)

答
1同2,是內錯角.
3同4,是同位角.
5同6,是外錯角.
7同8,是內錯角.
9同10,是內錯角.
11同12,是同位角

13同14,是同位角
14同15,是外錯角.
16同17,是內錯角.
18同19,是內錯角.
18同20,是同位角.

**2.** 若AB和BC都是直綫,能否

(a) $\angle a=60^\circ$, 而$\angle b=50^\circ$?
(b) $\angle a=60^\circ$, 而$\angle b=70^\circ$?
(c) $\angle a=60^\circ$, 而$\angle b=60^\circ$?



(2)

### 證 (a)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $\angle a>\angle b$. | **1.** 三角形的外角大於不相隣的內角(§88) |
| **2.** $60^\circ>50^\circ$. | **2.** 題設. |
| **3.** ∴$\angle a$可以爲$60^\circ$,$\angle b$可以爲$50^\circ$. | **3.** 結論. |

### 證 (b)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $\angle a>\angle b$. | **1.** 同證(a)理由1. |
| **2.** 但$60^\circ<70^\circ$. | **2.** 題設. |
| **3.** ∴$\angle a$如爲$60^\circ$,$\angle b$不能爲$70^\circ$. | **3.** 結論. |

### 證 (c)

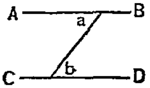
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $\angle a>\angle b$. | **1.** 同證(a)理由1. |
| **2.** ∴如$\angle a=60^\circ$, $\angle b$不能也爲$60^\circ$. | **2.** $\angle a$既$>\angle b$,不能又相等. |

3. AB和CD的延長線(就是向右延長)能否相交,若

(a) $\angle a=60^\circ$, 而$\angle b=50^\circ$?

(b) $\angle a=60^\circ$, 而$\angle b=70^\circ$?

(c) $\angle a=60^\circ$, 而$\angle b=60^\circ$?



(3—5)

### 證 (a)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $\angle a>\angle b$ | **1.** 題設. |

| | |
|---|---|
| **2.** ∴引長AB, CD, 必相遇於右邊. | **2.** AB, CD的右邊相遇成遠離的內角(§88).而$\angle a$是三角形的外角. |

證 (b)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $\angle a<\angle b$. | **1.** 題設. |
| **2.** ∴ 引長BA, DC, 必相遇於左邊. | **2.** BA, DC的左邊相遇成遠離的內角(§88). 而$\angle b$是三角形的外角. |
| **3.** ∴在右邊不能相交. | **3.** 二直線祇能交於一點(公理13推論). |

證 (c)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $\angle a=\angle b$. | **1.** 題設. |
| **2.** ∴引長AB, CD的兩端,永不相遇 | **2.** 歐几里得幾何學的假說,近世幾何學有駁論. |

**4.** BA和DC的延長線(就是向左延長)能否相交,若

(a) $\angle a=60^\circ$, 而$\angle b=70^\circ$?

(b) $\angle a=60^\circ$, 而$\angle b=50^\circ$?

(c) $\angle a=60^\circ$, 而$\angle b=60^\circ$?

**答**　(a)左邊能相遇. (b)右邊能相遇,左邊不能相遇.
(c)左右邊都不相遇.理由同3題.

**5.** 兩直線任意延長,能否相交,若

(a) $\angle a=50^\circ$, 而$\angle b=50^\circ$?

(b) $\angle a=60^\circ$, 而$\angle b=60^\circ$?

**答** §88的(三角形的外角,大於他不相隣的內角)既證明他正確了,則 $\angle a=\angle b$ 時,兩端永不相遇,即不能成三角形.

## 習題十六 (教科書第59—61頁)

**1.** 求證AB與CD平行,若

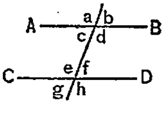
(a) $\angle c=70^\circ$, $\angle f=70^\circ$.

(b) $\angle c=60^\circ$, $\angle e=120^\circ$.

(c) $\angle a=110^\circ$, $\angle f=70^\circ$.

(d) $\angle b=60^\circ$, $\angle f=60^\circ$.

(e) $\angle a=120^\circ$, $\angle g=60^\circ$.



(1—4)

### 證 (a)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** AB//CD 或 AB 不//CD. | **1.** 只許有兩種假說,見§91注. |
| **2.** 如AB同CD不平行,他們相遇於一點G成△. | **2.** 不平行綫的定義. |
| **3.** $\angle c>\angle f$ | **3.** 三角形的外角大於他任何不相隣的內角(§88). |
| **4.** 這是不可能的. | **4.** 因爲題設 $\angle c=\angle f$. |
| **5.** ∴AB//CD. | **5.** 別的假說,已證明不對了. |

### 證 (b)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $\angle c=60^\circ$. | **1.** 題設. |

| | |
|---|---|
| 2. $\angle e=120^\circ$. | 2. 題設. |
| 3. ∴ $\angle f=180^\circ-120^\circ=60^\circ$. | 3. 一直綫上的二隣角相補(§50). |
| 4. ∴ AB∥CD. | 4. 如一截綫截二綫所成的內錯角相等,這二綫是平行(§93). |

### 證 (c)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle a=110^\circ$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle d=110^\circ$. | 2. 對頂角相等(§53). |
| 3. $\angle f=70^\circ$. | 3. 題設. |
| 4. $\angle e=180^\circ-70^\circ=110^\circ$. | 4. 一直綫上的二隣角相補(§50). |
| 5. ∴ $\angle e=\angle d$. | 5. 代替,公理1. |
| 6. ∴AB∥CD. | 6. 如一截綫截二綫所成的內錯角相等,這二綫是平行(§93). |

### 證 (d)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1 $\angle b=60^\circ$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle c=60^\circ$. | 2. 對頂角相等(§53). |
| 3. $\angle f=60^\circ=\angle c$. | 3. 題設. |
| 4. ∴AB∥CD. | 4. 內錯角相等故二綫平行(§93). |

證 (e)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle a=120^\circ$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle c=180^\circ-120^\circ=60^\circ$. | 2. 一直綫上的二鄰角相補(§50). |
| 3. $\angle g=60^\circ$. | 3. 題設. |
| 4. $\angle f=\angle g=60^\circ$. | 4. 對頂角相等(§53). |
| 5. $\angle c=\angle f$. | 5. 代替,公理1 |
| 6. ∴AB//CD. | 6. 內錯角相等,故二綫平行(§93). |

2. 若$\angle b=\angle f$,

**求證** AB//CD.

證同1題(d),不另證.

3. 若$\angle a=\angle h$,

**求證** AB//CD.

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle a=\angle h$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle c=180^\circ-\angle a$. | 2. 一直綫上的二鄰角相補(§50). |
| 3. $\angle f=180^\circ-\angle h$. | 3. 同上 |
| 4. ∴$\angle c=\angle f$. | 4. 代入. |
| 5. ∴AB//CD. | 5. 內錯角相等(§93). |

4. 若$\angle b=\angle g$,

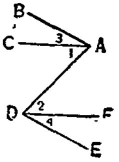
**求證** AB//CD.

**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle b=\angle g$. | 1. 題設. |
| 2. 但 $\angle b=\angle c$, $\angle g=\angle f$. | 2. 對頂角相等(§53). |
| 3. $\therefore \angle c=\angle f$. | 3. 代入. |
| 4. $\therefore AB // CD$. | 4. 內錯角相等故二綫平行(§93). |

5. 若$\angle 1=\angle 2$,又$\angle 3=\angle 4$,

求證 $AB // DE$.



(5—7)

**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$, 卽 $\angle BAD=\angle ADE$. | 2. 等量加等量其和相等(公理2). |
| 3. $\therefore AB // DE$. | 3. 內錯角相等,故二綫平行(§93). |

6. 如$\angle A=\angle D$,又$\angle 3=\angle 4$,
求證 $AC // DF$.

**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle A=\angle D$, $\angle 3=\angle 4$. | 1. 題設. |

| | |
|---|---|
| 2. $\angle A-\angle 3=\angle D-\angle 4$. 即 $\angle 1=\angle 2$. | 2. 等量減等量,其餘量相等(公理3). |
| 3. $\therefore AC // DF$. | 3. 內錯角相等故二綫平行(§93). |

7. 若 $BA \perp AD$, $ED \perp AD$, 又 $\angle 3=\angle 4$,

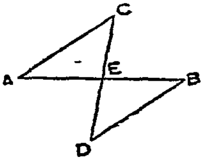
求證 $AC // DF$.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle BAD=\angle EDA$, $\angle 3=\angle 4$. | 1. 題設.又凡直角都相等(§46). |
| 2. $\angle BAD-\angle 3=\angle EDA-\angle 4$, 即 $\angle 1=\angle 2$. | 2. 等量減等量,其餘量相等(公理3). |
| 3. $\therefore AC // DF$. | 3. 內錯角相等故二綫平行(§93). |

8. 若AB與CD互相二等分於E,

求證 $AC // DB$。



(8)

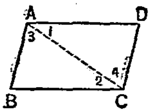
### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AE=EB$, $CE=ED$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle AEC=\angle BED$. | 2. 對頂角相等(§53). |
| 3. $\triangle AEC \cong \triangle BED$. | 3. s.a.s.=s.a.s.(§69). |
| 4. $\angle ACE=\angle EDB$. | 4. 相當角相等(§70). |
| 5. $\therefore AC // DB$. | 5. CD爲一直綫,故4的別 |

義,也是內錯角相等,故 AC,DB 相平行.

9. 若 $AB=DC$, 又 $\angle 3=\angle 4$,

**求證**　$AD \parallel BC$.



(9,10)

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AB=DC$, $\angle 3=\angle 4$. | 1. 題設. |
| 2. $AC=AC$. | 2. 兩三角形公用邊. |
| 3. $\triangle ABC \cong \triangle ADC$. | 3. s.a.s.=s.a.s. (§69). |
| 4. $\therefore \angle 1=\angle 2$. | 4. 相當角相等(§70). |
| 5. $\therefore AD \parallel BC$. | 5. 4 的別義,就是內錯角相等(§93). |

10. 若 $AB=DC$, 又 $AD=BC$,

**求證**　$AB \parallel DC$.

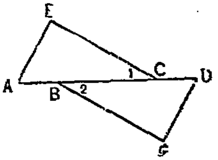
證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AB=DC$, $AD=BC$. | 1. 題設. |
| 2. $AC=AC$ | 2. 公用邊. |
| 3. $\triangle ABC \cong \triangle ADC$. | 3. s.s.s.=s.s.s (§74). |
| 4. $\angle 3=\angle 4$. | 4. 相當角相等(§70).亦即內錯角相等(§93). |
| 5. $\therefore AB \parallel DC$. | 5. 由 4 的結果. |

**11.** 若 AB=CD, EC=BF, ∠1=∠2,

又 AD 是一直綫,

則 AE∥DF.



(11—13)

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB=CD, 故 AB+BC =CD+BC,卽 AC=BD. | 1. 等量加等量其和必等(公理 2). |
| 2. ∠1=∠2, EC=BF. | 2. 題設. |
| 3. △AEC≅△BDF. | 3. s.a.s.=s.a.s. (§69). |
| 4. ∠EAD=∠ADF. | 4. 相當角相等(§70).亦卽內錯角相等(§93) |
| 5. ∴AE∥DF. | 5. 4 的結果. |

**12.** 若 AE=DF, AB=CD, 又 EC=BF,

則 EC∥BF.

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB=CD, 故 AB+BC =CD+BC,卽 AC=BD. | 1. 題設,又等量加等量,其和相等(公理 2). |
| 2. AE=DF, EC=BF. | 2. 題設. |
| 3. △AEC≅△BFD. | 3. s.s.s.=s.s.s. (§74). |
| 4. ∠1=∠2. | 4. 相當角相等(§70).也是內錯角相等(§93). |
| 5. ∴EC∥BF. | 5. 4 的結果. |

13. 若 $AB=CD$, $\angle ABF=\angle DCE$, $EC=BF$, 又 AD 是一直綫,

則 $AE /\!/ DF$.

### 證

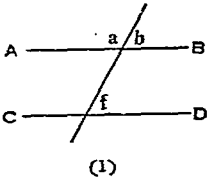
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AB=CD$, 故 $AB+BC=CD+BC$, 即 $AC=BD$. | 1. 題設,又等量加等量,其和相等(公理 2). |
| 2. $\angle ABF=\angle DCE$, 故 $\angle 2=\angle 1$. | 2. 同角或等角的補角相等(§43). |
| 3. $EC=BF$. | 3. 題設. |
| 4. $\triangle AEC\cong\triangle BFD$. | 4. s.a.s.=s.a.s. (§69). |
| 5. ∴ $\angle DAE=\angle ADF$. | 5. 相當角相等(§70). 也是內錯角相等(§93). |
| 6. ∴ $AE /\!/ DF$. | 6. 5 的結果. |

## 習題十七 (教科書第62頁)

1. 在60頁習題 1 的圖中,

若 $\angle a=2\angle b$, 又 $\angle f=60°$,

則 $AB /\!/ CD$.



(1)

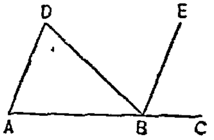
### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle a+\angle b=180°$. 由 $\angle a=2\angle b$, 知 $3\angle b=180°$, 即 $\angle b=60°$. | 1. 一直綫上的二鄰角相補(§50). |

| | |
|---|---|
| 2. $\angle f=60^\circ$. | 2. 題設. |
| 3. $\therefore \angle b=\angle f$. | 3. 代替.又二量同等於一量,那麼二量相等(公理1). |
| 4. $\therefore AB \parallel CD$. | 4. 截綫截二直綫,成二同位角相等,則二綫平行(§95). |

2. 若$\angle A=70^\circ$, $\angle ABD=60^\circ$, $\angle DBE=50^\circ$,又AC是一直綫,

**求證** $AD \parallel BE$.



(2—4)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle A=70^\circ$, $\angle ABD=60^\circ$, $\angle DBE=50^\circ$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle ABE=\angle ABD+\angle DBE=60^\circ+50^\circ=110^\circ$. | 2. 全體等於其各部分的和(公理10). |
| 3. $\angle EBC=180^\circ-\angle ABE=180^\circ-110^\circ=70^\circ$. | 3. 一直綫上的二鄰角相補(§50). |
| 4. $\angle EBC=\angle A$. | 4. 二量都等於某量,則二量相等(公理1) |
| 5. $\therefore AD \parallel BE$. | 5. 截綫截二直綫,成二同位角相等,那二綫平行(§95). |

3. 若BE二等分$\angle DBC$, $\angle ABD=30^\circ$, $\angle A=75^\circ$,又AC是一直綫,

則$AD \parallel BE$.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle ABD=30^\circ$,<br>$\angle DBC=180^\circ-30^\circ=150^\circ$. | 1. 題設.又一直綫上的二鄰角相補(§50). |
| 2. $\angle EBC=\frac{1}{2}\angle DBC=75^\circ$. | 2. 題設BE平分$\angle DBC$,故$\angle EBC$爲他的一半. |
| 3. $\angle A=75^\circ$,<br>$\therefore \angle A=\angle EBC$. | 3. 題設.由2知爲同位角相等. |
| 4. $\therefore AD /\!/ BE$ | 4. 同位角相等,則二直綫平行(§95). |

4. 若$AB=BD$,又$\angle D=\angle EBC$,

則$AD /\!/ BE$.

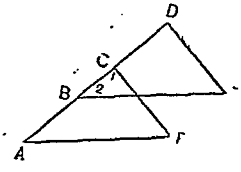
### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AB=BD$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle A=\angle D$. | 2. 等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| 3. 但$\angle D=\angle EBC$,<br>$\therefore \angle A=\angle EBC$. | 3. 題設.又兩量都等於某量,則兩量相等(公理1). |
| 4. $\therefore AD /\!/ BE$. | 4. 同位角相等,則二直綫平行(§95). |

## 習題十八 (教科書第63—64頁)

**1.** 若 $AF=BE$, $AB=CD$, $\angle A=\angle 2$, 又 $AD$ 是一直綫.

求證 $CF \parallel DE$



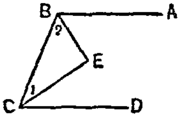
(1)

### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AF=BE$. | 1. 題設. |
| 2. $\because AB=CD$.<br>$\therefore AB+BC=CD+BC$, 卽 $AC=BD$. | 2. 題設.又等量加等量其和相等(公理2). |
| 3. $\angle A=\angle 2$. | 3. 題設. |
| 4. $\triangle ACF \cong \triangle BDE$. | 4. s.a.s.=s.a.s.(§69). |
| 5. $\angle 1=\angle D$. | 5. 相當角相等(§70).卽同位角相等. |
| 6. $\therefore CF \parallel DE$. | 6. 截綫截二直綫,所成的兩同位角相等,則二直綫平行(§95). |

**2.** 若 $BE$ 二等分 $\angle B$, $CE$ 二等分 $\angle C$, 又 $\angle 1+\angle 2=90°$,

則 $BA \parallel CD$.



(2)

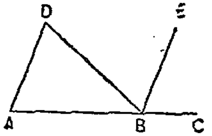
### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle 2=\angle ABE$, $\angle 1=\angle ECD$. | 1. 題設 $BE$ 平分 $\angle B$, $CE$ 平分 $\angle C$. |

| | |
|---|---|
| **2.** $\angle 1+\angle 2=90°$. | **2.** 題設. |
| **3.** $2(\angle 1+\angle 2)=180°$, 卽 $\angle B+\angle C=180°$. | **3.** 等量乘等量,其積相等(公理7).又全體等於其各部分的和(公理10). |
| **4.** $\therefore BA /\!/ CD$. | **4.** 截綫截二直綫成同側兩內角相補(§97). |

**3.** 若 $AB=BD$,又 $\angle D$ 是 $\angle ABE$ 的補角,

則 $AD /\!/ BE$.



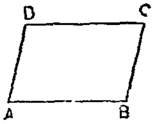
(3)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $AB=BD$, $\therefore \angle A=\angle D$. | **1.** 等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| **2.** $\angle D$ 是 $\angle ABE$ 的補角,故 $\angle A$ 也是他的補角. | **2.** 等角的補角相等(§49). |
| **3.** $\therefore AD /\!/ BE$ | **3.** 截綫截二直綫所成的同側二內角相補時,二直綫平行(§97). |

**4.** 若 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$, $\angle A=\angle C$, 又 $\angle B=\angle D$,

則 $AD /\!/ BC$.



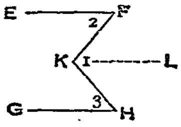
(4)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle A=\angle C$,而$\angle B=\angle D$. | 2. 題設. |
| 3. $2(\angle A+\angle B)=360^\circ$, $\angle A+\angle B=180^\circ$. | 3. 代替,又等量除等量,其商相等(公理8). |
| 4. $\therefore AD//BC$. | 4. 截綫截二直綫所成的同側二內角相補時,二直綫相平行(§97). |

**5.** 若$\angle 1=\angle 2+\angle 3$,

則EF//GH.



(5)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作$\angle FKL=\angle 2$. | 1. 由於假定. |
| 2. $\therefore KL//EF$. | 2. 內錯角相等,則二綫平行(§93). |
| 3. $\angle LKH=\angle 1-\angle FKL=\angle 1-\angle 2=\angle 3$. | 3. 代替. |
| 4. $KL//GH$. | 4. 同理由2. |
| 5. $\therefore EF//GH$. | 5. 兩直綫各平行於第三綫,那麼他們互相平行(§92). |

## 習題十九（教科書第65頁）

1. 用內錯角相等的方法,作一直綫,使過一已知點而平行於一已知直綫.

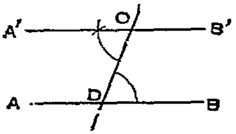
**設**　AB爲已知直綫,O爲AB外已知點;

**求作**　$A'B'$通過O點$\parallel$AB.

**作法**　由O作任意方向的直綫OD,交AB於D.

在O作$\angle A'OD=\angle ODB$(§86).

作直綫$A'OB'$,那麼$A'B'\parallel AB$.



(1)

2. 用60頁第8題的方法,作一直綫,使過一已知點而平行於一已知直綫.

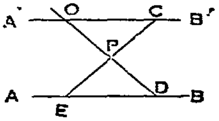
**設**　AB爲定直綫,O爲AB外定點;

**求作**　$A'B'$,通過O點$\parallel$AB.

**作法**　以任意的方向,由O作OD,交AB於D.

平分OD於P(§81).由P以任意的方向作CPE直綫,使$PE=CP$(公理17).

作直綫$A'OCB'$(公理13),則$A'B'\parallel AB$.



(2)

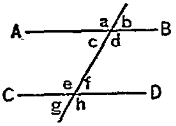
## 習題二十（教科書第68—69頁）

1. 兩平行綫AB和CD被一截綫所截,

(a)若$\angle c=70^\circ$,求$\angle f$;

(b)若$\angle c=80^\circ$,求$\angle e$;

(c)若$\angle c=75^\circ$,求$\angle g$.



(1—3)

證 (a)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB//CD. | 1. 題設. |
| 2. $\therefore \angle c=\angle f$. | 2. 兩平行綫,爲一截綫所截,則他所成的二內錯角相等(§104). |
| 3. 但$\angle c=70^\circ$. | 3. 題設. |
| 4. $\therefore \angle f=70^\circ$. | 4. 兩量都等於某量,則他們相等(公理1). |

證 (b)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB//CD. | 1. 題設. |
| 2. $\therefore \angle c=\angle f$. | 2. 同(a)證理由2. |
| 3. $\angle f=\angle c=80^\circ$. | 3. 題設,又證2的代替. |
| 4. 但$\angle e=180^\circ-\angle f$. | 4. 一直綫上的二鄰角相補(§50). |
| 5. $\therefore \angle e=180^\circ-80^\circ=100^\circ$. | 5. 證3, 4的代替. |

證 (c)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB//CD. | 1. 題設. |
| 2. $\angle c=\angle f$. | 2. 同(a)證理由2. |

| | |
|---|---|
| 3. $\angle g=\angle f$. | 3. 對頂角相等(§53). |
| 4. $\angle c=75^\circ$. | 4. 題設. |
| 5. $\therefore\angle g=75^\circ$. | 5. 公理1 |

2. 若AB∥CD,又

(a) $\angle a=110^\circ$,求$\angle f$;

(b) $\angle b=80^\circ$,求$\angle g$;

(c) $\angle h=100^\circ$;求$\angle b$.

### 證 (a)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB∥CD. | 1. 題設. |
| 2. $\angle c=\angle f$. | 2. 兩∥綫爲一截綫所截,兩內錯角相等(§104). |
| 3. $\angle a+\angle c=180^\circ$. | 3. 一直角上的兩鄰角相補(§50). |
| 4. $\therefore\angle f=180^\circ-110^\circ=70^\circ$. | 4. 證2同3的代替. |

### 證 (b)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB∥CD. | 1. 題設. |
| 2. $\angle b=80^\circ$. | 2. 題設. |
| 3. $\angle c=\angle f$. | 3. 同(a)證理由2. |
| 4. $\angle c=\angle b, \angle g=\angle f$. | 4. 對頂角相等(§53). |
| 5. $\therefore\angle g=\angle c=\angle b=80^\circ$. | 5. 代替,公理1 |

### 證 (c)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB∥CD. | 1. 題設. |

| | |
|---|---|
| 2. $\angle c=\angle f$. | 2. 同(a)證理由2. |
| 3. $\angle b=\angle c=\angle f$. | 3. 對頂角相等(§53). |
| 4. $\angle h$同$\angle f$相補,而$\angle h=100°$. | 4. §50,又題設. |
| 5. $\therefore \angle b=180°-\angle h=80°$. | 5. 代替,公理1. |

3. 若AB∥CD,

**求證**

(a) $\angle a=\angle e$; (b) $\angle b=\angle f$; (c) $\angle a=\angle h$;

(d) $\angle c$是$\angle e$的補角; (e) $\angle g$是$\angle d$的補角.

證(a)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB∥CD. | 1. 題設. |
| 2. $\angle c=\angle f$. | 2. 兩∥綫爲一截綫所截,他所成的二內錯角相等(§104). |
| 3. 但$\angle a$同$\angle c$相補,$\angle e$同$\angle f$相補. | 3. 一直綫上的二鄰角相補(§50). |
| 4. $\therefore \angle a=\angle e$. | 4. 等角的補角相等(§49). |

證(b)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB∥CD. | 1. 題設. |
| 2. $\angle c=\angle f$. | 2. 同(a)證理由2. |
| 3. 但$\angle b=\angle c$. | 3. 對頂角相等(§53). |
| 4. $\therefore \angle b=\angle f$. | 4. 代替,公理1. |

### 證 (c)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB//CD. | 1. 題設. |
| 2. $\angle c=\angle f$. | 2. 同(a)證理由2. |
| 3. 但 $\angle a$, $\angle c$相補,<br>$\angle h$, $\angle f$相補. | 3. 同(a)證理由3. |
| 4. $\angle a=\angle h$. | 4. 同(a)證理由4. |

### 證 (d)

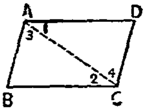
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB//CD. | 1. 題設. |
| 2. $\angle c=\angle f$. | 2. 同(a)證理由2. |
| 3. $\angle f$是$\angle e$的補角. | 3. 同(a)證理由3. |
| 4. $\therefore \angle c$是$\angle e$的補角. | 4. 同(a)證理由4. |

### 證 (e)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB//CD. | 1. 題設. |
| 2. $\angle c=\angle f$. | 2. 同(a)證理由2. |
| 3. $\angle g=\angle f$. | 3. 對頂角相等(§53). |
| 4. $\therefore \angle g=\angle c$. | 4. 代替,公理1. |
| 5. 但$\angle c$是$\angle d$的補角. | 5. 同(a)證理由3. |
| 6. $\therefore \angle g$是$\angle d$的補角. | 6. 同(a)證理由4. |

4. 若 AD=BC, 又AD//BC,

則$\angle 3=\angle 4$.



(4,5)

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AD\parallel BC$. | 1. 題設. |
| 2. $\therefore \angle 1=\angle 2$. | 2. 兩平行綫爲一截綫所截,他所成的兩個內錯角相等(§104). |
| 3. $AD=BC$. | 3. 題設. |
| 4. $AC=AC$. | 4. 公用邊. |
| 5. $\triangle ADC\cong\triangle ABC$. | 5. s.a.s.=s.a.s.(§69). |
| 6. $\therefore \angle 3=\angle 4$. | 6. 相當角相等(§70). |

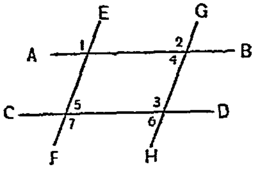
5. 若$AB\parallel CD$,又$AD\parallel BC$,
則$\angle B=\angle D$.

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AB\parallel CD$. | 1. 題設. |
| 2. $\therefore \angle 3=\angle 4$. | 2. 兩平行綫爲一截綫所截,他所成的兩個內錯角相等(§104). |
| 3. $AD\parallel BC$. | 3. 題設. |
| 4. $\therefore \angle 1=\angle 2$. | 4. 同理由 2. |
| 5. $AC=AC$. | 5. 公用邊. |
| 6. $\triangle ADC\cong\triangle ABC$. | 6. a.s.a.=a.s.a.(§66). |
| 7. $\therefore \angle B=\angle D$. | 7. 相當角相等(§70). |

## 習題二十一 (教科書第70—71頁)

**1.** 若 $AB // CD$, 又 $EF // GH$,
求證　(a) $\angle 1 = \angle 3$;
(b) $\angle 4 = \angle 5$;
(c) $\angle 2 = \angle 7$.



(1)

證 (a)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $EF // GH$. | 1. 題設. |
| 2. $\therefore \angle 1 = \angle 2$. | 2. 兩平行綫爲一截綫所截,則他所成的二同位角相等(§106). |
| 3. $AB // CD$. | 3. 題設. |
| 4. $\therefore \angle 2 = \angle 3$. | 4. 同理由2. |
| 5. $\therefore \angle 1 = \angle 3$. | 5. 兩量都等於某量,他們自相等(公理1). |

證 (b)

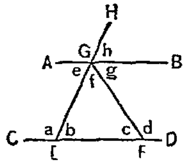
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AB // CD$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle 4 = \angle 6$. | 2. 同位角. |
| 3. $EF // GH$. | 3. 題設. |
| 4. $\angle 6 = \angle 5$. | 4. 內錯角. |
| 5. $\therefore \angle 4 = \angle 5$. | 5. 公理1. |

證 (c)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AB // CD$. | 1. 題設. |

| | |
|---|---|
| 2. ∠2=∠3. | 2. 同位角. |
| 3. EF//GH. | 3. 題設. |
| 4. ∠3=∠7. | 4. 內錯角. |
| 5. ∴∠2=∠7. | 5. 公理1. |

2. 若AB//CD,又EH是一直綫,求下列諸角的數值:



(2,3)

(a) 如∠g=80°,求∠d.

(b) 如∠h=60°,求∠a.

(c) 如∠b=60°,又∠c=70°,求∠FGH.

(d) 如∠FGH=140°,又∠c=80°,求∠b.

(e) 如∠b=65°,又∠c=70°,求∠f.

(f) 如∠f=50°,又∠c=70°,求∠b.

(g) 如∠e=55°,又∠c=75°,求∠HGF.

證 (a)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. ∠g=80°. | 1. 題設. |
| 2. ∠g=∠c. | 2. 兩平行綫間的內錯角相等(§104). |
| 3. ∠c同∠d相補,故∠d同∠g相補. | 3. 一直綫上的二鄰角相補(§50),又等角的補角相等(§49). |
| 4. ∴∠d=180°−∠g=180°−80°=100°. | 4. 代替(證1同證3). |

### 證 (b)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle h=60^\circ$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle b=\angle h=60^\circ$. | 2. 兩平行綫間的同位角相等(§106). |
| 3. 但 $\angle a$ 同 $\angle b$ 相補,故 $\angle a$ 同 $\angle h$ 相補. | 3. 同(a)證理由 3 (§50 及 §49). |
| 4. $\therefore \angle a=180^\circ-\angle h=180^\circ-60^\circ=120^\circ$. | 4. 代替. |

### 證 (c)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle b=\angle h$. | 1. 兩平行綫間的同位角相等(§106). |
| 2. $\angle c=\angle g$. | 2. 兩平行綫間的內錯角相等(§104). |
| 3. $\angle FGH=\angle h+\angle g$,<br>$\therefore \quad =\angle b+\angle c$. | 3. 全體等於各部分的和(公理 10).又代替. |
| 4. 但 $\angle b=60^\circ$, $\angle c=70^\circ$. | 4. 題設. |
| 5. $\therefore \angle FGH=60^\circ+70^\circ=130^\circ$. | 5. 代替. |

### 證 (d)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle c=80^\circ$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle g=\angle c=80^\circ$ | 2. 兩平行綫間的內錯角相等(§104). |

| | |
|---|---|
| 3. $\angle h=\angle FGH-\angle g$,<br>而 $\angle FGH=140°$,<br>$\therefore h=140°-80°=60°$. | 3. 全體等於各部分的和(公理10), 又一量能把他的等量代入(公理12). |
| 4. $\angle b=\angle h$. | 4. 兩平行綫間的同位角相等(§106). |
| 5. $\therefore \angle b=60°$. | 5. 兩量都等於某量,他們自相等(公理1). |

## 證 (e)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle b=65°$, $\angle c=70°$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle b=\angle h$. | 2. 兩平行綫間的同位角相等(§106). |
| 3. $\angle c=\angle g$. | 3. 兩平行綫間的內錯角相等(§104). |
| 4. $\angle FGH=\angle h+\angle g=\angle b+\angle c=65°+70°=135°$. | 4. 全體等於各部分的和(公理10). 又一量能把他的等量代入(公理12). |
| 5. 但$\angle f$同$\angle FGH$相補. | 5. 一直綫上的二鄰角相補(§50). |
| 6. $\therefore \angle f=180°-135°=45°$. | 6. 代替.公理1及公理12. |

## 證 (f)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle c=70°$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle c=\angle g$. | 2. 兩平行綫間的內錯角相等(§104). |
| 3. $\angle g=70°$. | 3. 代替(公理12). |

| | |
|---|---|
| **4.** $\angle f=50^\circ$. | **4.** 題設. |
| **5.** $\angle EGB=\angle f+\angle g=50^\circ+70^\circ=120^\circ$. | **5.** 全體等於各部分的和(公理10). 又代替(公理12). |
| **6.** 但 $\angle h$ 同 $\angle EGB$ 相補. | **6.** 一直綫上的二鄰角相補(§50). |
| **7.** $\angle h=\angle b$. | **7.** 兩平行綫間的同位角相等(§106). |
| **8.** $\therefore \angle b=180^\circ-\angle EGB=180^\circ-120^\circ=60^\circ$. | **8.** 代替(公理12). |

證 (g)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $\angle e=55^\circ$. | **1.** 題設. |
| **2.** $\angle h=\angle e=55^\circ$. | **2.** 對頂角相等(§53). 又代入證1(公理12). |
| **3.** $\angle c=75^\circ$. | **3.** 題設. |
| **4.** $\angle g=\angle c=75^\circ$ | **4.** 兩平行綫間的內錯角相等(§104). 又代入證3(公理12) |
| **5.** $\therefore \angle HGF=\angle h+\angle g=55^\circ+75^\circ=130^\circ$. | **5.** 全體等於各部分的和(公理10). 又代入證2證4(公理12). |

**3.** 若 $AB /\!/ CD$,

**求證** (a) $\angle FGH=\angle b+\angle c$;

(b) $\angle f=180^\circ-\angle b-\angle c$;

(c) $\angle CEH=\angle f+\angle c$;

(d) $\angle b+\angle f+\angle c=180^\circ$.

**證** (a)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle b=\angle h$. | 1. 兩平行綫間的同位角相等(§106). |
| 2. $\angle c=\angle g$. | 2. 兩平行綫間的內錯角相等(§104). |
| 3. $\angle FGH=\angle h+\angle g$. | 3. 全體等於其各部分的和(公理10). |
| 4. $\therefore \angle FGH=\angle b+\angle c$. | 4. 證1, 2代替證3(公理12). |

**證** (b)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle g=\angle c$. | 1. 兩平行綫間的內錯角相等(§104). |
| 2. $h=b$. | 2. 兩平行綫間的同位角相等(§106). |
| 3. $\angle f=180^\circ-\angle FGH$. | 3. 一直綫上的兩鄰角相補(§50). |
| 4. $\angle FGH=\angle h+\angle g=\angle b+\angle c$. | 4. 全體等於其各部的和(公理10). 又代入證1, 2(公理12). |
| 5. $\angle f=180^\circ-\angle FGH=180^\circ-\angle b-\angle c$. | 5. 以證4代入證3(公理12). |

**證** (c)

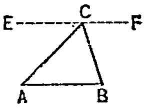
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle c=\angle g$. | 1. 兩平行綫間的內錯角 |

| | |
|---|---|
| | 相等(§104). |
| 2. $\therefore \angle f+\angle g=\angle f+\angle c$. | 2. 代替. |
| 3. 但 $\angle BGE=\angle f+\angle g$. | 3. 全體等於其各部分的和(公理10). |
| 4. $\angle CEH=\angle BGE$. | 4. 同理由1. |
| 5. $\therefore \angle CEH=\angle f+\angle c$. | 5. 以證2證3代入證4(公理12). |

### 證 (d)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle b=\angle h$. | 1. 兩平行綫間的同位角相等(§106). |
| 2. $\angle c=\angle g$. | 2. 兩平行綫間的內錯角相等(§104). |
| 3. $\therefore \angle b+\angle c=\angle h+\angle g$. | 3. 等量加等量,他的和相等(公理2). |
| 4. 但 $\angle f+\angle h+\angle g=180^\circ$. | 4. $\angle h+\angle g$ 可作 $\angle HGF$ 一角看,一直綫上的兩鄰角相補(§50). |
| 5. $\therefore \angle b+\angle f+\angle c=180^\circ$. | 5. 以證1,2代入證4(公理12). |

**4.** 求證△ABC的三個角的和等於180°.



(4)

**設**　△ABC,

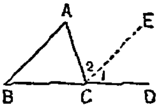
**求證**　$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$.

### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 通過C點作EF//AB. | 1. 通過一定點,作一定直綫的平行綫(§100). |
| 2. $\angle A=\angle ECA$. | 2. 兩平行綫間的內錯角相等(§104). |
| 3. $\angle B=\angle FCB$. | 3. 同上. |
| 4. $\angle ECB=\angle A+\angle C$. | 4. 全體等於各部分的和,(公理10).又以證2代入之. |
| 5. $\angle ECB$同$\angle FCB$相補. | 5. 一直綫上的二鄰角相補(§50). |
| 6. $\therefore \angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$. | 6. 代替. |

5. 若ACD是三角形ABC的一個外角,

則$\angle ACD=\angle A+\angle B$.

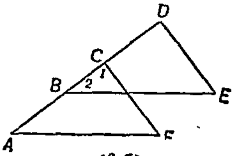


(5)

### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 通過C點作CE//AB. | 1. 通過一定點,作一定直綫的平行綫(§100). |
| 2. $\angle 2=\angle A$. | 2. 兩平行綫間的內錯角相等(§104). |
| 3. $\angle 1=\angle B$. | 3. 兩平行綫間的同位角相等(§106). |
| 4. $\therefore \angle ACD=\angle 2+\angle 1=\angle A+\angle B$. | 4. 全體等於各部分的和(公理10).又代入2,3. |

6. 若 AD 是一直綫, AB=CD, AF//BE, 又 CF//DE, 則 DE=CF.



(6,7)

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB=CD. | 1. 題設. |
| 2. AB+BC=CD+BC, 卽 AC=BD. | 2. 等量加等量,其和相等(公理2). |
| 3. AF//BE. | 3. 題設. |
| 4. ∠2=∠A. | 4. 兩平行綫間的同位角相等(§106). |
| 5. CF//DE. | 5. 題設. |
| 6. ∠1=∠D. | 6. 同理由 4. |
| 7. △ACF≅△BDE. | 7. a.s.a.=a.s.a.(§63). |
| 8. ∴DE=CF. | 8. 相當邊相等(§70). |

7. 若 AB=CD, CF=DE, CF//DE, 又 AD 是一直綫. 則 AF=BE.

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB=CD. | 1. 題設. |
| 2. AB+BC=CD+BC, 卽 AC=BD. | 2. 等量加等量,其和相等. |
| 3. CF=DE. | 3. 題設. |

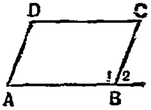
| | |
|---|---|
| 4. $CF//DE$, $\therefore \angle 1=\angle D$. | 4. 題設.又兩平行綫間同位角相等(§106). |
| 5. $\triangle ACF\cong\triangle BDE$. | 5. s.a.s.=s.a.s.(§69). |
| 6. $\therefore AF=BE$. | 6. 相當邊. |

## 習題二十二 (教科書第72—73頁)

1. 若$AB//CD$,又$AD//BC$,

求證 (a) $\angle 2$是$\angle D$的補角;

(b) $\angle A=\angle C$.



(1)

證 (a)

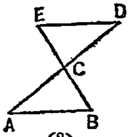
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AB//CD$. | 1. 題設. |
| 2. $\therefore \angle A$是$\angle D$的補角. | 2. 兩平行綫間,同側的內角相補(§107). |
| 3. $AD//BC$. | 3. 題設. |
| 4. $\angle 2=\angle A$. | 4. 兩平行綫間,同位角相等(§106). |
| 5. $\therefore \angle 2$是$\angle D$的補角. | 5. 等角的補角相等(§49). |

證 (b)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AD//BC$. | 1. 題設. |
| 2. $\therefore \angle A=\angle 2$. | 2. 同位角. |
| 3. $AB//CD$. | 3. 題設. |
| 4. $\therefore \angle C=\angle 2$. | 4. 內錯角. |
| 5. $\therefore \angle A=\angle C$. | 5. 公理1. |

2. 若ED//AB, AC=CD,又EB和AD都是直綫,

則△ABC≅△CDE.



(2)

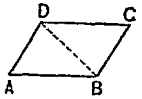
**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. ED//AB. | 1. 題設. |
| 2. ∠D=∠A | 2. 兩平行綫間二內錯角相等(§104). |
| 3. ∠ECD=∠ACB | 3. 對頂角相等(§53). |
| 4. AC=CD. | 4. 題設. |
| 5. ∴△ABC≅△CDE. | 5. a.s.a.=a.s.a.(§66). |

3. 若一個四邊形的對邊各平行,則其對邊亦各相等.

設　四邊形ABCD, AB//CD, AD//BC.

求證　AB=CD, AD=BC.



(3,4)

**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作BD. | 1. 兩點間可作一直綫. |
| 2. AB//CD,<br>∴∠ABD=∠CDB | 2. 題設.又兩平行綫間內錯角相等(§104). |
| 3. AD//BC,<br>∴∠ADB=∠CBD | 3. 同上. |

| | |
|---|---|
| 4. BD=BD. | 4. 公用邊. |
| 5. △ABD≅△CBD. | 5. a.s.a.=a.s.a. (§66). |
| 6. ∴AB=CD, AD=BC. | 6. 相當邊相等(§70). |

4. 若一個四邊形的兩邊相等而平行,則其他兩邊亦必相等而平行.

設　四邊形ABCD, $AB \underline{/\!/} CD$.

求證　$AD \underline{/\!/} BC$.

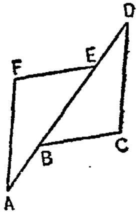
證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作BD. | 1. 公理13,同3題. |
| 2. AB=CD. | 2. 題設. |
| 3. AB//CD,<br>∴∠ABD=∠CDB. | 3. 題設.又兩平行綫間內錯角相等(§104). |
| 4. BD=BD. | 4. 公用邊. |
| 5. ∴△ABD≅△CBD. | 5. s.a.s.=s.a.s. (§69). |
| 6. ∴AD=BC. | 6. 相當邊相等(§70). |
| 7. ∠ADB=∠CBD. | 7. 相當角相等(§70). |
| 8. ∴AD//BC. | 8. 一截綫截兩直綫,他所成的兩內錯角相等,那麼兩綫平行(§93). |

5. 若AB=ED, BC//FE, AF//DC,

又AD是一直綫,

則△AEF必全同於△BCD.



(5,6)

## 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AB=ED$. | 1. 題設. |
| 2. $AB+BE=ED+BE$, 即 $AE=BD$. | 2. 等量加等量,他的和相等(公理2).又公理10. |
| 3. $BC /\!/ FE$, $\therefore \angle FEA=\angle DBC$. | 3. 題設.又兩平行綫間,內錯角相等(§104). |
| 4. $AF /\!/ DC$, $\therefore \angle FAE=\angle CDB$. | 4. 同上. |
| 5. $\triangle AEF \cong \triangle BCD$. | 5. a.s.a.=a.s.a. (§66). |

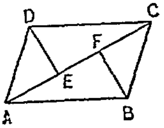
6. 若 $AB=ED$, $BC=FE$, $BC /\!/ FE$, 又 $AD$ 是一直綫, 則 $AF$ 必等於 $CD$.

## 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AB=ED$. | 1. 題設. |
| 2. $AB+BE=ED+BE$, 即 $AE=BD$. | 2. 等量加等量,他的和相等(公理2).又全體等於各部分的和(公理10). |
| 3. $BC=FE$. | 3. 題設. |
| 4. $BC /\!/ FE$, $\therefore \angle DBC=\angle AEF$. | 4. 題設.又兩平行綫間的內錯角相等(§104). |
| 5. $\triangle AEF \cong \triangle BCD$ | 5. s.a.s.=s.a.s. (§69). |
| 6. $\therefore AF=CD$. | 6. 相當邊相等(§70). |

7. 若AB//CD, AD//BC, AE=FC, 又AC是一直綫,

則DE//BF.(用第3題)



(7)

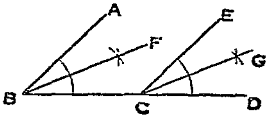
證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB//CD, AD//BC. | 1. 題設. |
| 2. ∴AB=CD. | 2. 四邊形兩對邊平行,他們亦相等(題3). |
| 3. AE=FC, ∴AE+EF=FC+EF, 即AF=EC. | 3. 同題6理由2. |
| 4. ∠FAB=∠ECD. | 4. 兩平行綫間的內錯角相等(§104). |
| 5. △FAB≅△ECD. | 5. s.a.s.=s.a.s.(§69). |
| 6. ∠DEF=∠EFB, ∴DE//BF. | 6. 相當角相等(§70).內錯角相等則兩綫//(§93). |

8. 兩平行綫所成的同位角中,其一對的二等分綫必平行.

設 BCD爲一直綫,而AB//EC,FB平分∠ABC,GC平分∠ECD.

求證 FB//GC.



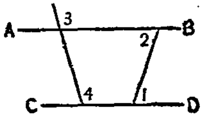
(8)

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB//EC, BCD爲一直綫. | 1. 題設. |

| | |
|---|---|
| 2. $\angle ABC=\angle ECD$. | 2. 同位角相等(§106). |
| 3. $\angle FBC=\angle GCD$. | 3. 等量除等量,他的商相等(公理8).等量的一半相等. |
| 4. FB//GC. | 4. 同位角相等,則二綫相平行(§95). |

9. 在下面(此處在右面)的圖中,若$\angle 1=\angle 2$,則$\angle 3=\angle 4$.



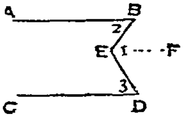
(9)

**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle 1=\angle 2$. | 1. 題設. |
| 2. ∴AB//CD. | 2. 一截綫截二綫所成的內錯角相等,則二綫平行(§93). |
| 3. ∴$\angle 3=\angle 4$. | 3. 一截綫截二平行綫所成的同位角相等(§106). |

10.在下(右)面的圖中,若AB//CD,

求證 $\angle 1=\angle 2+\angle 3$.



(10)

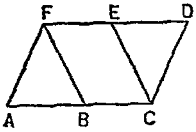
**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作EF//AB | 1. 通過定點,作定直綫的平行綫(§100). |
| 2. ∴$\angle BEF=\angle 2$. | 2. 兩平行綫間的內錯角相等(§104). |

| | |
|---|---|
| 3. 但 AB//CD, 故 EF//CD. | 3. 兩綫都平行於某綫,他們相平行(§92.) |
| 4. ∴$\angle FED=\angle 3$. | 4. 同理由2. |
| 5. ∴$\angle 1=\angle BEF+\angle FED=\angle 2+\angle 3$. | 5. 全體等於各部分的和(公理10).又代入證2,證4. |

**11.** 在附圖中,若 AC//FD, AF//CD, 又 FB//EC,

求證　$\triangle AFB\cong\triangle ECD$.



(11)

### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AC//FD, AF//CD. | 1. 題設. |
| 2. ∴AC=FD, AF=CD. | 2. 四邊形兩對邊相平行,他們也各相等(題3). |
| 3. FE//BC, FB//EC. | 3. FE在FD內,BC在AC內,故相平行.又題設. |
| 4. ∴FE=BC, FB=EC. | 4. 同理由2. |
| 5. FD−FE=AC−BC, 即 ED=AB. | 5. 等量減等量,他的餘量相等(公理3). |
| 6. ∴$\triangle AFB\cong\triangle ECD$. | 6. s.s.s.=s.s.s. (§74). |

## 習題二十三 (教科書第77—78頁)

**1.** 求諸角的值:

(a)若 $\angle B=60^\circ$, 又 $\angle C=50^\circ$, 求 $\angle A$.

(b)若 $\angle A=m^\circ$, 又 $\angle C=n^\circ$, 求 $\angle B$.

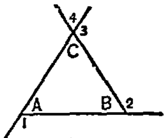
(c)若$\angle A=50^\circ$,又$\angle B=70^\circ$,求$\angle 3$.

(d)若$\angle 2=110^\circ$,又$\angle A=60^\circ$,求$\angle 4$.

(e)若$\angle 4=40^\circ$,又$\angle B=70^\circ$,求$\angle 1$.

(f)若$\angle 2=140^\circ$,又$\angle 1=120^\circ$,求$\angle 3$.

(g)若$\angle C=m^\circ$,求$\angle A+\angle B$.



(1)

### 證 (a)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle B=60^\circ$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle C=50^\circ$. | 2. 題設. |
| 3. $\angle A=180^\circ-\angle B-\angle C$. | 3. 三角形三角的和等於一平角(§110). |
| 4. $\angle A=180^\circ-60^\circ-50^\circ$ $=70^\circ$. | 4. 以證1,證2,代入證3. |

### 證 (b)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle A=m^\circ$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle C=n^\circ$. | 2. 題設. |
| 3. $\angle B=180^\circ-\angle A-\angle C$ | 3. 同(a)證3,§110. |
| 4. $\angle B=180^\circ-m^\circ-n^\circ$. | 4. 以證1,2,代入3. |

### 證 (c)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle A=50^\circ$, $\angle B=70^\circ$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$. | 2. §110. |
| 3. 但$\angle 3+\angle C=180^\circ$. | 3. 互爲補角. |

| | |
|---|---|
| 4. $\therefore \angle 3=\angle A+\angle B$<br>$=50^\circ+70^\circ$<br>$=120^\circ$. | 4. 代入. |

證 (d)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle 2=110^\circ$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle B=180^\circ-110^\circ=70^\circ$. | 2. 一直綫上的二鄰角相補(§50). |
| 3. $\angle A=60^\circ$. | 3. 題設. |
| 4. $\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)$<br>$=180^\circ-130^\circ=50^\circ$. | 4. 同上§110. |
| 5. $\angle 4=\angle C=50^\circ$. | 5. 對頂角相等. |

證 (e)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle 4=40^\circ$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle C=40^\circ$. | 2. 對頂角相等(§53). |
| 3. $\angle B=70^\circ$. | 3. 題設. |
| 4. $\therefore \angle A=180^\circ-(40^\circ+70^\circ)$<br>$=180^\circ-110^\circ$<br>$=70^\circ$. | 4. 三角形三角的和,等於一平角(§110). |
| 5. $\angle 1=180^\circ-\angle A$<br>$=180^\circ-70^\circ$<br>$=110^\circ$. | 5. 一直綫上的二鄰角相補(§50). |

證 (f)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle 2=140$. | 1. 題設. |

| | |
|---|---|
| **2.** $\angle B=40^\circ$. | **2.** $\angle 2$的補角(§50). |
| **3.** $\angle 1=120^\circ$. | **3.** 題設. |
| **4.** $\angle A=60^\circ$. | **4.** $\angle 1$的補角. |
| **5.** $\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)$<br>$=180^\circ-100^\circ$<br>$=80^\circ$. | **5.** §110. |
| **6.** $\therefore\angle 3=180^\circ-80^\circ$<br>$=100^\circ$ | **6.** $\angle C$的補角. |

證 (g)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $\angle C=m^\circ$. | **1.** 題設. |
| **2.** $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$ | **2.** 三角形三角的和,等於一平角(§110). |
| **3.** $\therefore\angle A+\angle B=180^\circ-m^\circ$. | **3.** 以 1 代入 2 所得. |

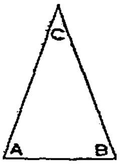
2. 若C是等腰三角形ABC的頂角,

求 (a) $\angle A$,若$\angle C=40^\circ$;

(b) $\angle B$,若$\angle C=m^\circ$;

(c) $\angle C$,若$\angle A=40^\circ$;

(d) $\angle C$,若$\angle B=n^\circ$.



(2)

證 (a)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $\angle C=40^\circ$. | **1.** 題設. |
| **2.** $\angle A=\angle B$. | **2.** 等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| **3.** $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$. | **3.** 同上 1 題(g)的 2. |

| | |
|---|---|
| **4.** $2\angle A+40^\circ=180^\circ$,<br>$2\angle A=140^\circ$ | 4 以1,2,代入3. |
| **5.** $\therefore\angle A=70^\circ$ | **5.** 等量除等量,他的商相等(公理8). |

### 證 (b)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $\angle C=m^\circ$. | **1.** 題設. |
| **2.** $\angle B=\angle A$. | **2.** 同上2(§71). |
| **3.** $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$. | **3.** 同上3(§110). |
| **4.** $2\angle B+m^\circ=180^\circ$,即<br>$2\angle B=180^\circ-m^\circ$. | **4.** 以1,2,代入3. |
| **5.** $\therefore\angle B=90^\circ-\frac{m^\circ}{2}$. | **5.** 公理8. |

### 證 (c)

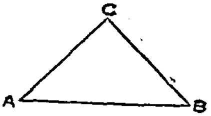
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $\angle A=40^\circ$. | **1.** 題設. |
| **2.** $\angle B=\angle A=40^\circ$. | **2.** 同上2.又代入1. |
| **3.** $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$. | **3.** 同上3. |
| **4.** $\angle C=180^\circ-40^\circ-40^\circ$<br>$=100^\circ$ | **4.** 代入1,2於3,再把他移項. |

### 證 (d)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $\angle B=n^\circ$. | **1.** 題設. |
| **2.** $\angle A=\angle B=n^\circ$. | **2.** 同上a證2.又代入1(§71). |

| | |
|---|---|
| 3. $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$. | 3. §110. |
| 4. $\angle C=180^\circ-\angle A-\angle B$<br>$=180^\circ-2n^\circ$ | 4. 移項又代入 1,2. |

3. 等腰直角三角形的各角,各有多少度?



(3)

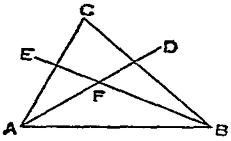
**設**　$\triangle ABC, AC=BC$,而$\angle C=$rt.$\angle$.

**求證**　$\angle A, \angle B, \angle C$.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$. | 1. 三角形三角的和等於一平角(§110). |
| 2. $\angle C=90^\circ$. | 2. 直角三角形者,有一角爲直角(§59).原設$\angle C=$rt.$\angle$. |
| 3. $\angle A=\angle B$. | 3. 等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| 4. $\angle A+\angle B=90^\circ$ | 4. 直角三角形的兩銳角相餘(§112 系 2). |
| $\angle A=45^\circ, \angle B=45^\circ$. | 5. 以 3 代入 4. |

4. 一個三角形的兩個角,是60°和40°,這兩個角的二等分綫所成的角如何



(4)

**設**　$\triangle ABC$的$\angle A=60^\circ, \angle B=40^\circ$, DA平分$\angle A$, EB平分$\angle B$,兩綫相交於F.

**求證**　∠AFB.

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. ∠A=60°, ∠B=40°. | 1. 題設. |
| 2. DA平分∠A,<br>EB平分∠B. | 2. 同上. |
| 3. ∠FAB=30°,<br>∠FBA=20°. | 3. ∠A, ∠B的半角. |
| 4. ∠AFB=180°−30°−20°<br>=130°. | 4. 三角形三角的和,等於一平角(§110). |

5. 已知三角形的兩個角,求作第三個角.

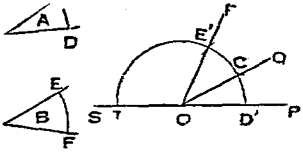
**設**　已知三角形的兩角∠A及∠B.

**求作**　∠C.

**作法**　依§86法,以∠A的頂點爲中心,任意長爲半徑,作$\overset{\frown}{CD}$.

又以∠B的頂點爲中心,同長爲半徑作$\overset{\frown}{EF}$.

再作直綫SP,任意的一點O爲中心,同長爲半徑作D′T半圓.



(5)

以D′爲中心,CD爲度,於半圓內截取$\overset{\frown}{C'D'}$,通過C′作QO.

又以C′爲中心,EF爲度,截取$\overset{\frown}{E'C'}$,通過E′,作RO.

那麼∠QOP=∠A, ∠ROQ=∠B, ∠ROS=∠C.

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle QOP=\angle A$,<br>$\angle ROQ=\angle B$. | 1. 所作. |
| 2. $\angle ROP=\angle A+\angle B$. | 2. 全體等於他各部分的和(公理10). |
| 3. $\angle SOP=180°$. | 3. SP爲直線. |
| 4. $\angle ROS+\angle ROP=180°$. | 4. 一直綫上的兩鄰角相補(§50). |
| 5. $\angle A+\angle B+\angle C=180°$. | 5. 三角形三角的和,等於一平角(§110). |
| 6. $\therefore \angle ROS=\angle C=180°-(\angle A+\angle B)$. | 6. 由2,4,5所得的結果. |

6. 已知等腰三角形的一個底角,求作其頂角.

**設** 已知等腰三角形的底角爲 $\alpha$.

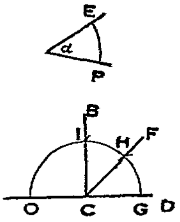
**求作** 其頂角$\angle ACB$.

**作法** 以$\alpha$的頂點爲中心,任意長爲半徑,作$\overset{\frown}{EP}$.

又作直綫AD,其中一點C爲中心,用同半徑,作GHIO半圓.

以EP爲度,截取$\overset{\frown}{HG}$,又截取$\overset{\frown}{IH}$.

作FC通過H,作BC通過I,則$\angle BCF=\angle FCD=\angle\alpha=$等腰三角形的兩底角之一.



(6)

而$\angle ACB$爲他的頂角

證明同5題,從略

**7. 已知等腰三角形的頂角,求作一個底角.**

**設** 已知等腰三角形的頂角$\gamma$.

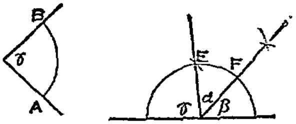
**求作** 其兩底角$\alpha$及$\beta$.

**作法** 作直綫DC,依§86法作$\angle DOE=\gamma$,

又作FO,平分他的補角EOC.

那麼如圖$\angle\alpha=\angle\beta$爲兩底角.

用$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$知$\gamma+\alpha+\beta=180^\circ$ (§110)及(§71),容易證明.

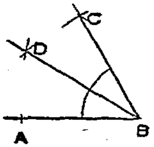


(7)

**8. 作一個60°的角;30°的角;120°的角;75°的角.**

60°角的作法: 作任意長的直綫AB,以A,B爲中心,AB爲半徑,作兩弧相交於C.

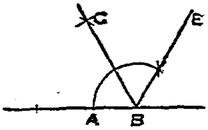
作CB,那麼$\angle ABC=60^\circ$. 證明用"等角三角形的每角爲60°"(§115系5)便可.



(8, 60°,30°)

30°角的作法: 如上先作60°的角,再依§83法平分之,如DB平分$\angle B$,則$\angle ABD=30^\circ$.

120°角的作法: 如上先作60°的角.更依§86法將60°角加倍便成.



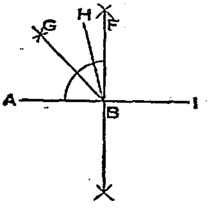
(8, 120°)

75° 角的作法: 依 §81 法作直角,又用 §83 法平分之,得 45° 的角;再依 §86 法加上 30° 的角,便得 75° 的角.30° 的角作法見本題.

如圖 $\angle ABF=90^\circ$.

$\angle ABG=45^\circ$, $\angle GBH=30^\circ$

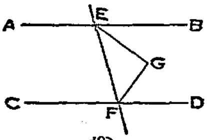
$\angle ABH=75^\circ$.



(8, 75°)

**9.** 兩平行綫爲一截線所截,在同旁的兩個內角的二等分綫,互相垂直.

**設** 截綫 EF 截 AB, CD 兩平行綫於 E, 於 F, 而 $\angle BEF$, $\angle EFD$ 爲所成同側的兩內角; GE 平分 $\angle BEF$, GF 平分 $\angle EFD$.



(9)

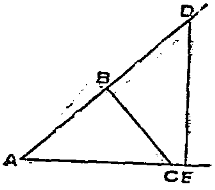
**求證** $GE\perp GF$, $GF\perp GE$.

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $\angle BEF+\angle EFD=180^\circ$. | **1.** 兩平行綫間同側的兩內角相補(§107). |
| **2.** $\angle GEF+\angle GFE=90^\circ$. | **2.** 證 1 的一半.等量的一半相等(公理 8). |
| **3.** $\angle GEF+\angle GFE+\angle G=180^\circ$. | **3.** 三角形三角的和等於一平角(§110). |
| **4.** $\therefore \angle G=90^\circ$,<br>即 $GE\perp GF$, $GF\perp GE$. | **4.** 證 3 減證 2.又公理 3. |

10.若作CB和DE各垂直於角A的兩邊,

**求證** ∠ACB=∠ADE.



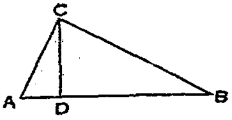
(10)

**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. ∠A=∠A. | 1. △ABC, △ADE 的公用角. |
| 2. ∠ABC=∠AED=90°. | 2. 凡直角都相等(§46). |
| 3. ∠ACB=90°−∠A. | 3. 直角三角形的兩銳角相餘(§112 系2). |
| 4. ∠ADE=90°−∠A. | 4. 同上. |
| 5. ∴∠ACB=∠ADE. | 5. 兩量都等於某量,他們也相等(公理1). |

11.若直角三角形ABC斜邊上的高是CD.

**求證** ∠ACD=∠B.



(11)

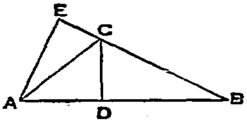
**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. ∠A=∠A. | 1. △ABC 及 △ACD 的公用角. |
| 2. ∠ACB=∠ADC=90°. | 2. 凡直角都相等(§46). |

| | |
|---|---|
| 3.　$\angle ACD=90^\circ-\angle A$. | 3.　直角三角形的兩銳角相餘(§112 系2). |
| 4.　$\angle B=90^\circ-\angle A$. | 4.　同上. |
| 5.　$\therefore\angle ACD=\angle B$. | 5.　兩量都等於某量,他們也相等(公理1). |

12.若三角形ABC的高是CD和AE.

求證　$\angle BCD=\angle BAE$.



(13)

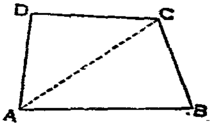
**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　$\angle B=\angle B$. | 1.　△ABE 及 △CBD 的公用角. |
| 2.　$\angle AEB=\angle CDB=90^\circ$. | 2.　凡直角都相等(§46). |
| 3.　$\angle BCD=90^\circ-\angle B$. | 3.　直角三角形的兩銳角相餘(§112 系2). |
| 4.　$\angle BAE=90^\circ-\angle B$. | 4.　同上. |
| 5.　$\therefore\angle BCD=\angle BAE$. | 5.　同11題,公理1. |

13.求四邊形的四個角的和.

設　四邊形ABCD.

求　$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D$=若干度?



(13)

**證**

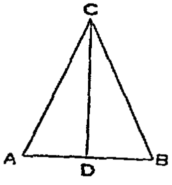
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　作AC,分四邊形ABCD | 1.　兩點之間,可作一直綫 |

| | |
|---|---|
| 爲兩三角形. | (公理13). |
| 2. $\angle D+\angle DAC+\angle DCA=180^\circ$. | 2. 三角形三角之和,等於一平角(§110). |
| 3. $\angle B+\angle BAC+\angle BCA=180^\circ$. | 3. 同上. |
| 4. 但$\angle DAC+\angle BAC=\angle A$,<br>$\angle DCA+\angle BCA=\angle C$. | 4. 全體等於他各部分之和(公理10). |
| 5. $\therefore\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$. | 5. 以4代入2,3,相加. |

14.三角形的兩角相等,則第三角的二等分線,必分全形成兩個全同三角形.

**設** $\triangle ABC$的$\angle A=\angle B$,而CD平分$\angle C$.

**求證** $\triangle ADC\cong\triangle BDC$.



(14)

### 證

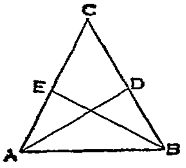
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 在$\triangle ADC$及$\triangle BDC$內,$\angle A=\angle B$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle ACD=\angle BCD$. | 2. 題設CD平分$\angle C$ |
| 3. $\therefore\angle ADC=\angle BDC$. | 3. 由§110推得. |
| 4. 而$CD=CD$. | 4. 公用. |
| 5. $\therefore\triangle ADC\cong\triangle BDC$. | 5. a.s.a.=a.s.a. |

**15.** 等腰三角形兩腰上的高相等.

設　△ABC的AC=BC,

而AD⊥BC, BE⊥AC.

求證　AD=BE.



(15)

證

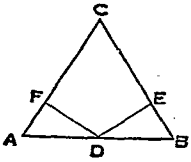
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. ∠A=∠B. | 1. 等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| 2. ∠ADB=∠BEA=rt.∠. | 2. 凡直角都相等(§46). |
| 3. AB=AB. | 3. 兩三角形的公用邊. |
| 4. △ABD≅△BAE. | 4. 兩直角三角形有一銳角及斜邊各相等,這兩形全同(§116). |
| 5. ∴AD=BE. | 5. 相當邊相等(§70). |

**16.** 從等腰三角形底的中點,所引兩腰的垂線必相等.

設　△ABC的AC=BC,

而AD=DB, DE⊥BC, DF⊥AC.

求證　DE=DF.



(16)

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. ∠DBE=∠DAF. | 1. 等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| 2. AD=DB. | 2. 題設. |

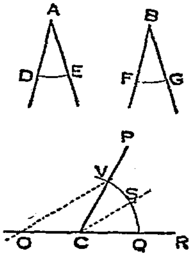
| | |
|---|---|
| 3. △ADF. △BDE 都是直角三角形. | 3. 題設. |
| 4. △ADF≅△BDE. | 4. 兩直角三角形有一銳角及斜邊各相等,這兩形全同(§116). |
| 5. ∴DF=DE. | 5. 相當邊相等(§70). |

## 習題二十四 (教科書第80—81頁)

**1.** 已知三角形的兩個角,求作一個角,使他等於不相鄰的一個外角.

**設** 已知三角形的兩角爲∠A 爲∠B.

**求作** 其不相鄰的角 C 的外角.



(1)

**作法:** 以A,B爲中心,任意的長AD爲半徑,作$\overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{FG}$.

又作直綫 OR, 取其中任意點 C 爲中心, AD 爲半徑,作$\overset{\frown}{QV}$.

在他上面,以DE爲度,取$\overset{\frown}{SQ}$,又以FG爲度,取$\overset{\frown}{VS}$.

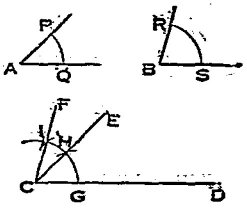
通過V作PC,則∠PCR是∠C的外角.

證明用§120(三角形的一外角,等於不相鄰的兩內角之和). 作SC,又VO//SC,則∠VOC=∠A, ∠OVC=∠B.前者是同位角相等,後者是內錯角相等.

**2.** 已知三角形的一個外角,和一個不相鄰的內角,求作一個角,使他等於其他一個不相鄰的內角.

**設**　已知三角形的一外角 B 及一個不相鄰的內角 A.

**求作**　∠FCE= 其他一個不相鄰的內角.



(2)

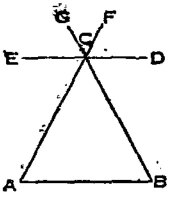
**作法:**　依§86法作 ∠FCD=∠B.

又依同法作 ∠ECD=∠A.

那麼 ∠FCE爲所求之角.

證同 1 題.

**3.** 若三角形有兩個角相等,則其不相鄰的外角的二等分綫,必平行於此三角形的對邊.



(3)

**設**　△ABC的∠A=∠B, ∠FCB 或∠GCA爲他一角C的外角, CD 或 EC爲他分角綫.

**求證**　CD//AB, 或 EC//AB.

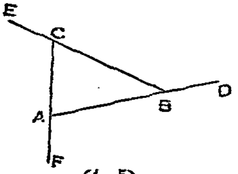
**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　∠FCB=∠A+∠B. | 1.　三角形的一外角,等於他兩內角之和(§120). |
| 2.　∠A=∠B. | 2.　題設. |
| 3.　∠FCB=2∠B. | 3.　以 2 代入 1 所得. |
| 4.　$\angle DCB=\frac{1}{2}\angle FCB$ | 4.　題設. |

| | |
|---|---|
| 5. ∠DCB=∠B. | 5. 以3代入4所得. |
| 6. ∴CD∥AB | 6. 內錯角相等,那麼兩綫平行(§95). |

同理可證EC∥AB,卽ED爲一直綫,ED∥AB.

4. 若在三角形的各頂點畫一個外角,則此三個外角的和等於四直角.



(4, 5)

設 △ABC的三頂上各畫一外角,爲∠FAD, ∠EBD, ∠ECF.

求證 ∠FAD+∠EBD+∠ECF=360°.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. ∠FAD=∠B+∠C,<br>∠EBD=∠A+∠C,<br>∠ECF=∠A+∠P. | 1. 三角形的一外角等於他兩內角之和(§120). |
| 2. ∴∠FAD+∠EBD+∠ECF=2(∠A+∠B+∠C). | 2. 等量加等量,其和相等(公理2). |
| 3. 但∠A+∠B+∠C=180°. | 3. 三角形三內角之和爲一平角(§110). |
| 4. ∴∠FAD+∠EBD+∠ECF=360°. | 4. 以3代入4所得. |

5. 從三角形的兩個外角的和,減去第三內角,等於兩直角.

設 ∠FAD, ∠EBD爲三角形之兩外角,∠C爲第

三內角.

**求證**　$\angle FAD+\angle EBD-\angle C=180^\circ$.

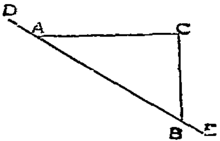
**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle FAD=\angle B+\angle C$,<br>$\angle EBD=\angle A+\angle C$. | 1. 三角形的一外角,等於他兩內角之和(§120). |
| 2. $\angle FAD+\angle EBD=\angle A+\angle B+2\angle C$,即 $\angle FAD+\angle EBD-\angle C=\angle A+\angle B+\angle C$. | 2. 等量加等量,其和相等(公理2).等量減等量,其餘量相等(公理3). |
| 3. 但$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$. | 3. 三角形三內角之和,等於一平角(§110) |
| 4. $\therefore \angle FAD+\angle EBD-\angle C=180^\circ$. | 4. 代替. |

6. 若三角形的兩個外角的和,等於三直角,則此三角形是一個直角三角形.

**設**　$\triangle ABC$的兩外角$\angle CAD+\angle CBE=3\text{rt.}\angle s$.

**求證**　$\angle C=\text{rt}\angle$.



(6)

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle CAD=\angle C+\angle B$,<br>$\angle CBE=\angle A+\angle C$. | 1. 三角形的一外角,等於他兩內角之和(§120). |
| 2. $\therefore \angle CAD+\angle CBE=\angle A+\angle B+2\angle C$. | 2. 等量加等量,其和相等(公理2). |
| 3. $\angle CAD+\angle CBE=3\text{rt.}\angle s$. | 3. 題設. |

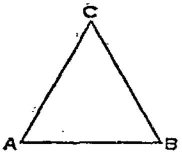
| | |
|---|---|
| 4. ∴$\angle A+\angle B+2\angle C=3$rt.$\angle$s. | 4. 兩量都等於某量,他們也相等(公理1). |
| 5. 但$\angle A+\angle B+\angle C=2$rt.$\angle$s. | 5. 三角形三內角之和,等於一平角(§110). |
| 6. ∴$\angle C=$rt.$\angle$. | 6. 等量減等量其餘量相等(公理3). |

## 習題二十五 (教科書第82頁)

1. 若一個等腰三角形的頂角是60°,則此三角形是等邊三角形.

設 $\triangle ABC$的$AC=BC$,而$\angle C=60^\circ$.

求證 $AC=BC=AB$.

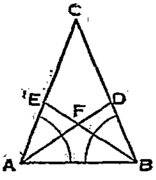


(1)

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$. | 1. 三角形三內角之和等於一平角(§110). |
| 2. $\angle C=60^\circ$. | 2 題設. |
| 3. ∴$\angle A+\angle B=120^\circ$. | 3. 等量減等量,他的餘量相等(公理3). |
| 4. $\angle A=\angle B$. | 4. 底角相等(§71). |
| 5. ∴$\angle A=60^\circ$, $\angle B=60^\circ$. | 5. 等量的一半相等(公理8). |
| 6. ∴$AC=BC=AB$. | 6. 等角三角形亦爲等邊三角形(§122系). |

**2.** 等腰三角形的兩個底角的二等分綫及底邊,亦成一個等腰三角形.



(2)

**設**　等腰三角形ABC,兩底角∠A及∠B的分角綫爲AD及BE,相交於F.

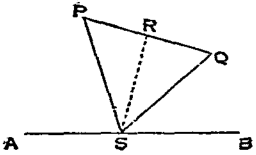
**求證**　AF=BF,卽ABF爲等腰三角形.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** ∠A=∠B. | **1.** 等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| **2.** $\angle FAB=\frac{1}{2}\angle A$,<br>$\angle FBA=\frac{1}{2}\angle B$. | **2.** 題設. |
| **3.** ∴∠FAB=∠FBA. | **3.** 等量的一半相等(公理8). |
| **4.** ∴AF=BF,<br>卽△ABF等腰. | **4.** 三角形的兩角相等,他兩對邊也相等(§121). |

## 習題二十六 (教科書第84頁)

**1.** 在一已知直綫AB上,求一點與已知兩點P和Q等距離.



(1)

**設**　已知直綫AB及兩點P,Q.

**求** AB內的一點S,使PS=QS.

**作法:** 聯PQ,依§81法作垂直二等分綫RS⊥PQ,交AB於S.作PS, QS, 則PS=QS.

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. RS⊥PQ, 又PR=RQ. | 1. 作圖 |
| 2. ∴PS=QS. | 2. 一綫的垂直二等分綫內的任一點,去綫的兩端等距離(§125). |

**注意:** P同Q不在AB之一側時,也一樣可以找出S點.

2. 在一已知圓上,求一點與已知兩點等距離.

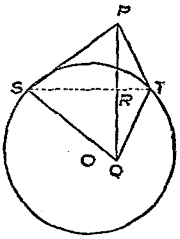
**設** 已知圓O,及兩點P及Q.

**求** 在圓周上的兩點T, S, 使PT=QT, PS=QS.

**作法** 作PQ直綫(兩點之間,可作一直綫).

又作他的垂直平分綫TS(§81),交圓周於T,於S.

作PS, QS, PT, QT, ∴PS=QS, PT=QT (一綫的垂直二等分綫內的任何點,去綫的兩端等距)§125.



(2)

**注意:** 1. P, Q兩點,如都在圓周外時,也可以求到T, S兩點,有時只能求到一點.

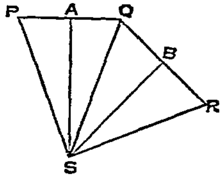
2. P, Q距離過大,或O圓過小時,此圖便不可作.

3. 如P, Q兩點在圓周上,也可以求到T, S兩點,這時的TS恰過中心.

3. 求一點與已知三點等距離.

**設**　已知P, Q, R三點,

**求**　S點,使PS=QS=RS.



(3)

**作法**　作QR, PQ兩直綫,

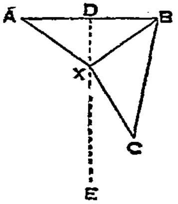
又作PQ的垂直二等分綫AS, QR的垂直二等分綫BS.二綫相交於S.

作PS, QS, RS,那麼PS=QS=RS.

**證**　用§125容易證明.

**注意:**　如P, Q, R三點在一直綫內,此圖不可作.

4. 已知三定點A, B,和C,求作一點X,使AX=BX,又CX=$\frac{1}{2}$吋.



(4)

**作法**　作AB, BC二直綫.

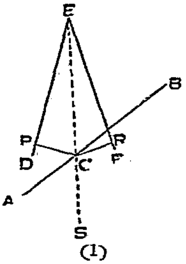
又作AB的垂直二等分綫DE(§81).

然後以C爲中心,$\frac{1}{2}$吋爲度,作弧,交DE於X.

作AX,BX,CX,則AX=BX,而CX=$\frac{1}{2}$吋.

**注意:**　如以$\frac{1}{2}$吋爲度,C爲中心,作弧時,不能與DE相遇,即不能求得X.自C至DE上所作垂綫等於或小於$\frac{1}{2}$吋時,方可求得X.

## 習題二十七 (教科書第86頁)



(1)

1. 在已知直綫AB上,求一點,與已知∠DEF的兩邊等距離.

**設** 已知AB及∠DEF,

**求** C點使與DE, EF 等距(卽CP⊥DE, CR⊥EF時CP=CR).

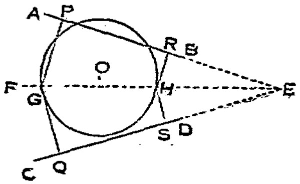
### 作法及證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作∠DEF的分角綫ES交AB於C. | 1. 二等分已知角(§83.) |
| 2. 作CP⊥DE, CR⊥EF. | 2. 從直綫外一點,只可作一垂綫(§47). |
| 3. ∴CP=CR. | 3. 角二等分綫上的任一點,到兩邊都是等距離(§126). |

**注意:** 1. AB//DE或EF,且在角外時,須引長DE及FE,作∠DEF的對頂角,而C在對頂角的二等分綫上.

2. AB//ES時,C在∠DEF的外角的二等分綫上.

3. AB與ES一致時,任何點都與兩邊等距.



(2之I)

2. 在一已知圓上,求一點,與已知兩直綫等距離.

**設** O 爲已知圓, AB, CD爲已知直綫,

**求** 在O圓周上取G,H兩點,使

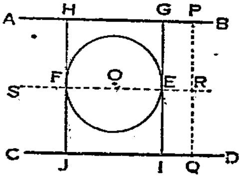
$GP \perp AB$, $GQ \perp CD$ 時 $GP=GQ$;

$HR \perp AB$, $HS \perp CD$ 時 $HR=HS$.

### 作法及證

| 敍　述 | 理　由 |
|---|---|
| **1.**　引長AB及CD使相交於E. | **1.**　凡直綫都可以引長(公理17). |
| **2.**　作FE平分$\angle AEC$,交圓周於G,H. | **2.**　二等分已知角(§83). |
| **3.**　作$GP \perp AB$, $GQ \perp CD$, $HR \perp AB$, $HS \perp CD$. | **3.**　從直綫外一點,只可作一垂綫(§47). |
| **4.**　$\therefore GP=GQ$, $HR=HS$. | **4.**　角二等分線上的任一點,到兩邊都是等距離(§126). |

上題如AB//CD時,別證之如下:



(2之II)

### 作法及證

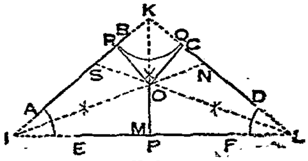
| 敍　述 | 理　由 |
|---|---|
| **1.**　作$PQ \perp AB$亦$\perp CD$. | **1.**　如截綫垂直於兩平行綫之一,也垂直於他綫(§105). |
| **2.**　作PQ的垂直二等分綫SR,交圓周於F,於E. | **2.**　§81作法. |
| **3.**　作$HFJ \perp$兩綫, $GEI \perp$ | **3.**　垂綫作法(§85) |

| | |
|---|---|
| 兩綫. | |
| 4. ∴HF=FJ, GE=EI. | 4. 兩平行綫間的所有垂直綫都相等(參閱習題二十二題4). 等量的一半相等(公理8). |

3. 求一點與已知三直綫等距離(這題也有兩種求法).

(I) 設 已知AB, CD, EF三綫都不平行時.

求 O點,使OP=OQ=OR.



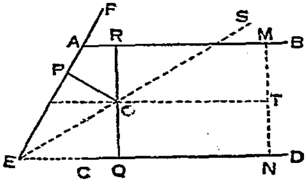
(3之I)

### 作法及證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 引長AB, CD, EF三綫的兩端使各相交於K, L, I. | 1. 凡直綫都可以引長(公理17). 兩直綫只能相交於一點(公理13注a). |
| 2. 作KM等分∠K, LS等分∠L,相交於O. | 2. 二等分已知角(§83). |
| 3. 作OP⊥EF, OQ⊥CD, OR⊥AB. | 3. 從一點到一直綫,可作一垂綫(§47). |
| 4. ∵OP=OQ, OQ=OR. | 4. 角二等分線的任一點,到兩邊都是等距離(§126). |
| 5. ∴OP=OQ=OR. | 5. 兩量都等於某量,則他們也相等(公理1). |

(II)設　AB//CD時,

求　O點,使OP=OQ=OR.



(3之II)

### 作法及證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 引長DC使交EF於E,并作SE平分∠FED. | 1. 公理17及§83作法. |
| 2. 作MN⊥AB及CD. 又作其垂直二等分綫OT與SE相交於O. | 2. §105.同2題理由1.又兩相交的綫不能同平行於一綫(§91). |
| 3. 作OP⊥EF,又作ROQ⊥AB及CD. | 3. 自一點至一直綫只能作一垂綫(§47).又§105. |
| 4. ∴OP=OQ=OR. | 4. §126及RQ=MN.故其半亦相等. |

**注意:** 如已知的三綫都平行時,O點便不能求.

## 習題二十八 (教科書第87頁)

1. 用下列各組線分做邊,能作成三角形否?

(a)　4吋,5吋,10吋.　(b)　8吋,19吋,12吋.

(c)　4呎,12呎,8呎.　(d)　6吋,2吋,5吋.

### 證 (a)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. (4吋+5吋)<10吋. | 1. 題設. |
| 2. ∴不能作成三角形. | 2. 三角形兩邊之和,大於第三邊(§128).但證 1 恰相反,故不可作. |

### 證 (b)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. (8吋+12吋)>19吋. | 1. 題設. |
| 2. 此三角形可作. | 2. 同上合於§128 的條件,故可以作三角形. |

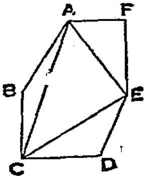
### 證 (c)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. (4呎+8呎)=12 呎, 卽兩邊≯他邊. | 1. 題設. |
| 2. ∴不能作成三角形. | 2. 不合於§128 的條件,故不能作成三角形. |

### 證 (d)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. (2吋+5吋)>6吋. | 1. 題設. |
| 2 ∴此三角形可作. | 2. 合於§128 的條件,故可以作三角形. |

2. 求證多邊形ABCDEF的周圍大於△ACE的周圍.



(2)

設　多邊形ABCDEF,及△ACE.

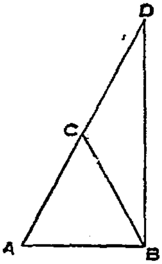
求證　$(AB+BC+CD+DE+EF+FA)>(AC+CE+EA)$.

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AB+BC>AC$. | 1. 三角形兩邊之和,大於第三邊(§128). |
| 2. $CD+DE>CE$. | 2. 3. 同上. |
| 3. $EF+FA>EA$. | |
| 4. ∴$(AB+BC+CD+DE+EF+FA)>(AC+CE+EA)$ | 4. 公理4引伸. |

3. 在△ABC中,$AC=BC$,又AC延長線上的一點D與B聯結,

則$DA>DB$.



(3)

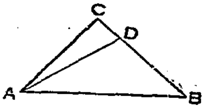
證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AC=BC$. | 1. 題設. |
| 2. $BC+CD>DB$. | 2. △兩邊之和大於第三 |

| | |
|---|---|
| | 邊(§128). |
| 3. $\therefore AC+CD>DB$. | 3. 以1代入2所得. |
| 4. 但$AD=AC+CD$. | 4. 全體等於其各部分之和(公理10). |
| 5. $\therefore AD>DB$. | 5. 以4代入3所得. |

4. 在$\triangle ABC$的BC邊上,取任意點D,

則$AB+BC>AD+DC$.



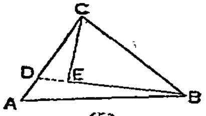
(4)

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AB+BD>AD$. | 1. 三角形兩邊之和大於第三邊(§128). |
| 2. $AB+BD+DC>AD+DC$ | 2. 不等量加等量,其和仍不等,方向不變(公理4). |
| 3. 但$BD+DC=BC$. | 3. 全體等於其各部分之和(公理10). |
| 4. $\therefore AB+BC>AD+DC$. | 4. 以3代入2所得. |

5. 在$\triangle ABC$中的任意點E,畫EB和EC,

則$AB+AC>EB+EC$.



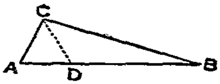
(5)

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 引長BE,交AC於D. | 1. 凡直綫都可以引長(公 |

| | |
|---|---|
| | 理17). |
| **2.** $AB+AD>BD$. | **2.** 三角形兩邊之和,大於第三邊(§128). |
| **3.** 但 $BD=EB+ED$. | **3.** 全體等於其各部分之和(公理10). |
| **4.** $\therefore AB+AD>EB+ED$. | **4.** 以3代入2所得 |
| **5.** $DC+ED>EC$. | **5.** 同理由2. |
| **6.** $\therefore AB+AD+DC+ED>EB+ED+EC$. | **6.** 4,5,相加所得. |
| **7.** $\angle AB+AD+DC>EB+EC$. | $\therefore$ **7.** 不等量減去等量,其餘量不等,大者仍大(公理5). |
| **8.** 但 $AD+DC=AC$. | **8.** 同理由3. |
| **9.** $\therefore AB+AC>EB+EC$. | **9.** 以8代入7所得. |

6. 三角形任何兩邊的差,小於第三邊.



(6)

**設**　$\triangle ABC$,

**求證**　$AB-AC<BC$.

**證**

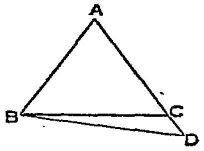
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** 在AB內取 $AD=AC$. | **1.** 在一直線上可以截取一段線分. |
| **2.** $\therefore AB-AC=AB-AD$ $=DB$. | **2.** 1的代替. |
| **3.** 但 $AC+BC>AB$. | **3** 三角形兩邊之和,大於第三邊(§128). |

| | |
|---|---|
| 4. ∴$AC+BC>AD+DB$<br>$>AC+DB$. | 4. 全體等於其各部分之和(公理10).又代入1. |
| 5. ∴$BC>DB$. | 5. 不等量減去等量,其餘量不等,大者仍大(公理5). |
| 6. ∴$BC>AB-AC$. | 6. 以2代入5所得. |

## 習題二十九 (教科書第88頁)

1. 延長等腰三角形ABC的一腰AC至D,

則$\angle ABD>\angle ADB$.



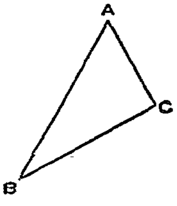
(1)

### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AB=AC$. | 1. 題設. |
| 2. $AD>AC$ | 2. 題設引長AC至D. |
| 3. ∴$AD>AB$. | 3. 以1代入2所得. |
| 4. ∴$\angle ABD>\angle ADB$. | 4. 大邊所對的角大(§129). |

2. 在$\triangle ABC$中,$AB>AC$,又$\angle A=60^\circ$,

那一個角是這三角形的最大角?



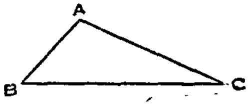
(2)

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$. | 1. 三角形三內角之和等於一平角(§110). |
| 2. $\angle A=60^\circ$.<br>$\therefore \angle B+\angle C=120^\circ$. | 2. 題設.又等量減等量,其餘量相等(公理3). |
| 3. $AB>AC$. | 3. 題設. |
| 4. $\therefore \angle C>\angle B$. | 4. 大邊所對的角大(§129) |
| 5. ∴三角形三內角中$\angle C$頂大. | 5. 因$\angle A=60^\circ$,<br>$\angle C>60^\circ>\angle B$. |

## 習題三十 (教科書第90頁)

1. 直角三角形的那一邊最大?鈍角三角形呢?



(1)

證(直角△)

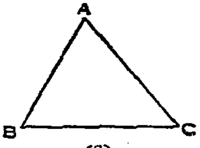
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 直角三角形中,直角的對邊叫斜邊 | 1. §62定義. |
| 2. 但直角在三角中最大. | 2. 三角和爲2 rt.$\angle s$(§110),故直角適爲他二角之和,而爲最大(公理11). |
| 3. ∴斜邊最大. | 3. 大角所對的邊大(§130). |

### 證(鈍角△)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$. | 1. 三角形三內角之和等於一平角(§110). |
| 2. 鈍角 $A>90^\circ$. | 2. 鈍角的定義. |
| 3. $\angle B+\angle C<90^\circ$. | 3. 由1,2得來. |
| 4. ∴鈍角A最大. | 4. 兩銳角的和還比不上鈍角大,所以他最大. |
| 5. ∴BC最大. | 5. 三角形的大角所對的邊大(§130). |

**2.** 若三角形的兩個角各是50°和60°,相對的兩邊那一邊較大?

這三角形的那一邊最大?那一邊最小?



(2)

**設** $\triangle ABC$的$\angle C=50^\circ$, $\angle B=60^\circ$,

(I) **求**AC, AB中那一邊較大.

(II) **求**AB, AC, BC三綫中那一邊頂大.

(III) **求**這三邊中那一邊頂小.

### 證(I)

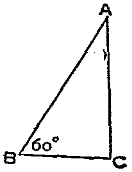
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle C=50^\circ$, $\angle B=60^\circ$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle B>\angle C$. | 2. 由1比較得來. |
| 3. ∴$AC>AB$. | 3. 大角所對的邊大(§130). |

證 (II)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle C=50^\circ$, $B=60^\circ$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$. | 2. 三角形三內角之和,等於一平角(§110). |
| 3. $\therefore\angle A=70^\circ$. | 3. 由 2 減去 1 的兩式所得.又等量減等量,其餘量相等(公理3). |
| 4. $\therefore$ $\angle A$的對邊BC頂大. | 4. 大角所對的邊大(§130).<br>$\angle A>\angle B>\angle C$. |

證(III):由證(II)知$\angle C<\angle B<\angle A$,故知$\angle C$的對邊AB最小,理由同上.

3. 若在$\triangle ABC$中,$AB>AC$,又$\angle B=60^\circ$.這三角形的那一邊最大?那一邊最小?



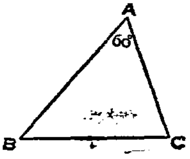
(3)

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AB>AC$. | 1. 題設. |
| 2. $\therefore\angle C>\angle B$. | 2. 大邊所對的角大(§129). |
| 3. 但$\angle B=60^\circ$. | 3. 題設. |
| 4. $\therefore\angle C>60^\circ$,而$\angle A<60^\circ$. | 4. 以 3 代入 2 所得.又三角形三內角之和等於一平角(§110)比較可知. |
| 5. $\therefore$ AB頂大,BC頂小. | 5. 大角所對的邊大(§130). |

4. 若在△ABC中，AB>AC，又∠A=60°，

這三角形的那一邊最大？



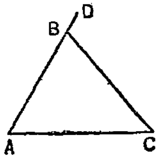
(4)

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB>AC. | 1. 題設. |
| 2. ∴∠C>∠B. | 2. 大邊所對的角大(§129). |
| 3. 但∠A=60°. | 3. 題設. |
| 4. ∴∠C>60°>∠B. | 4. 同上題理由4. |
| 5. ∴AB>BC>AC. | 5. 大角所對的邊大(§130). |

5. 若三角形ABC的∠A等於一直角的三分之二，又外角DBC等於110°，

這三角形的那一邊最大？那一邊最小？



(5)

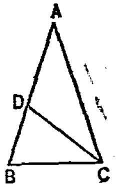
證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle A=\frac{2}{3}\text{rt.}\angle=60°$. | 1. 題設. |
| 2. ∠DBC=110°，∴∠B=70°. | 2. 一直綫上的二鄰角相補(§50). |
| 3. ∴∠C=180°−60°−70°=50°. | 3. 三角形三內角之和等於一平角(§110). |

| | |
|---|---|
| 4. $\therefore \angle B > \angle A > \angle C$. | 4. 由1,2,3比較所得. |
| 5. $\therefore AC > BC > AB$ | 5. 大角所對的邊大(§130). |

6. 在$\triangle ABC$中, $AB=AC$,

求證 $DC>DB$.



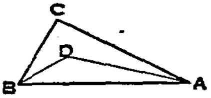
(6)

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $DC+AD>AC$. | 1. 三角形兩邊之和,大於第三邊(§128). |
| 2. $AB=AC$. | 2. 題設. |
| 3. $AB=AD+DB$. | 3. 全體等於其各部分之和(公理10). |
| 4. $\therefore AC=AD+DB$. | 4. 以2代入3之所得. |
| 5. $\therefore DC+AD>AD+DB$. | 5. 以4代入1之所得. |
| 6. $\therefore DC>DB$. | 6. 不等量減去等量,餘量不等,大者仍大(公理5). |

7. 在$\triangle ABC$中, $AC>BC$,若角A和B的二等分綫,相遇於D,

求證 $AD>BD$.



(7)

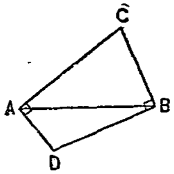
證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AC>BC$. | 1. 題設. |

| | |
|---|---|
| 2. $\therefore \angle B > \angle A$. | 2. 大邊所對的角大(§129). |
| 3. $\frac{1}{2}\angle B > \frac{1}{2}\angle A$.<br>卽 $\angle DBA > \angle DAB$. | 3. 公理8的引伸 |
| 4. $\therefore AD > BD$. | 4. 大角所對的邊大(§130). |

8. $AC > BC$, $AD \perp AC$, 又 $DB \perp BC$,

求證 $BD > AD$.



(8)

### 證

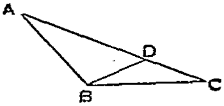
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AC > BC$,<br>故 $\angle ABC > \angle BAC$. | 1. 題設,又大邊所對的角大(§129). |
| 2. $\angle DAC = \angle DBC = rt. \angle$. | 2. ∠s成rt.∠,又凡直角都相等(§46). |
| 3. $\therefore \angle DAC - \angle BAC > \angle DBC - \angle ABC$, 卽 $\angle DAB > \angle ABD$. | 3. 等量中減去不等量,其差不等,方向相反(公理6). |
| 4. $\therefore BD > AD$. | 4. 大角所對的邊大(§130). |

9. 直接證明命題XXXI.

(示意)在 $\angle B$ 作 $\angle CBD = \angle C$.

設 $\triangle ABC$ 的 $\angle B > \angle C$,

求證 $AC > AB$.



(9)

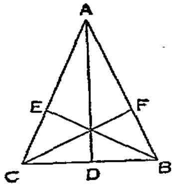
### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作$DB$,使$\angle CBD=\angle C$. | 1. 作圖依§86法. |
| 2. $\therefore DB=DC$. | 2. 三角形的兩角相等,則其兩對邊相等(§121). |
| 3. $AC=AD+DC$<br>$=AD+DB$. | 3. 全體等於其各部分之和(公理10).又代入2. |
| 4. 但$AD+DB>AB$. | 4. 三角形兩邊之和,大於第三邊(§128). |
| 5. $\therefore AC>AB$ | 5. 以3代入4所得. |

**10.**三角形高的和,小於三角形的周圍.

**設**　$\triangle ABC$的三個高為$AD$, $BE$, $CF$.

**求證**　$AD+BE+CF<AB+BC+AC$.



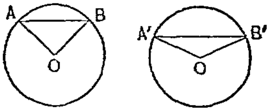
(10)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AD\perp BC$, $BE\perp AC$, $CF\perp AB$. | 1. 三角形的高是從頂點到對邊的垂綫(§64定義). |
| 2. $AD<AB$, $BE<BC$, $CF<AC$. | 2. 自一點到一直綫的綫,以垂綫為最短(§131系). |
| 3. $\therefore AD+BE+CF<AB+BC+AC$. | 3. 證2三式相加之所得(公理4引伸). |

## 習題三十一(教科書第92—93頁)

1. 設兩個等圓O和O′,又$\angle A'O'B' > \angle AOB$,
則$A'B' > AB$.

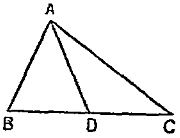


(1)

### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AO = A'O'$, $BO = B'O'$. | 1. 題設.等圓的半徑相等. |
| 2. $\angle A'O'B' > \angle AOB$. | 2. 題設. |
| 3. $\therefore A'B' > AB$ | 3. 三角形的兩邊,等於他三角形的兩邊,而其夾角此大於彼,則這三角形的第三邊,大於彼形的第三邊(§132). |

2. 設$\triangle ACB$的中綫AD所成的$\angle ADB$是鋭角.
求證 (a) $AC > AB$,
(b) $\angle B > \angle C$.



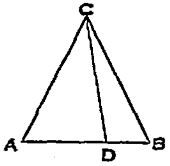
(2)

### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $BD = DC$. | 1. 題設,中綫爲從三角形頂點到對邊中點的綫(§64定義). |
| 2. $AD = AD$. | 2. 本身自等. |

| | |
|---|---|
| 3.　$\angle ADB=$ 銳角. | 3.　題設. |
| 4.　$\therefore \angle ADC=$ 鈍角. | 4.　一直綫上的兩鄰角相補(§50). 彼 $<90^\circ<$ 此. |
| 5.　即 $\angle ADC>\angle ADB$. | 5.　因鈍角 $>$ 銳角(定義, §27 及 §28). |
| 6.　$\therefore AC>AB$ | 6.　兩三角形兩邊相等,夾角大者第三邊大(§132). |
| 7.　$\therefore \angle B>\angle C$. | 7.　大邊所對的角大(§129). |

3. 設在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=\angle B$, 又在 AB 上取一點 D, 使 $\angle ACD>\angle DCB$, 則 $AD>DB$

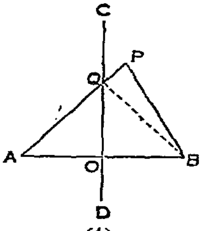


(3)

## 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　$\angle A=\angle B$. | 1.　題設. |
| 2.　$\therefore AC=BC$ | 2.　兩角相等,兩對邊相等(§121). |
| 3.　$CD=CD$. | 3.　$\triangle ACD$ 及 $\triangle DCB$ 的公用邊 |
| 4.　$\angle ACD>\angle DCB$. | 4.　題設. |
| 5.　$\therefore AD>DB$. | 5.　兩三角形的兩邊相等夾角大者第三邊大(§132). |

4. 不在一直綫的垂直二等分綫上的一點,必不與此直線的兩端等距離. (示意)應用命題XXXII.



(4)

設 直綫AB的垂直平分線爲CD,相交於O,P爲不在CD內的一點.

**求證** PA≑PB.

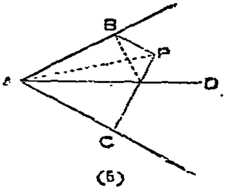
## 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 命PA與CD的交點爲Q,作QB. | 1. 兩點間可作一直綫(公理13). |
| 2. QA=AB. | 2. 垂直二等分綫上任一點到綫的兩端等距離(§125). |
| 3. PA=PQ+QA | 3. 全體等於各部分之和(公理10). |
| 4. ∴PA=PQ+QB. | 4. 代入. |
| 5. 但PQ+QB>PB. | 5. 三角形兩邊的和大於第三邊(§128). |
| 6. ∴PA>PB,卽PA≑PB. | 6. 代入. |

**又證** 若作PO,則因二△POA及POB內,PO公用,OA=OB,而∠POA>∠POB,故PA>PB,卽PA≑PB(應用§132命題XXXII).

5. AD是∠BAC的二等分綫,

又AB=AC.



(5)

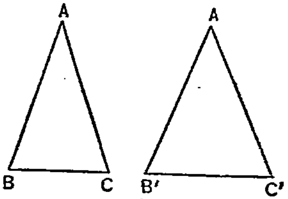
**求證** PC>PB.

### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作PA. | 1. 兩點間可作一直綫(公理13). |
| 2. $\angle BAD=\angle DAC$. | 2. 題設AD平分$\angle BAC$. |
| 3. $\therefore \angle PAC>\angle PAB$. | 3. $\because \angle BAD-\angle PAD<\angle DAC+\angle PAD$. |
| 4. 但$AB=AC$, $AP=AP$. | 4. 題設.又公用邊. |
| 5. $\therefore PC>PB$. | 5. 夾角大,對邊也大(§132). |

6. $\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$是兩個等腰三角形,他們的底是BC和B′C′.

若$AB=A'C'$,又$\angle B>\angle B'$,那一個三角形的底較大?



(6)

### 證

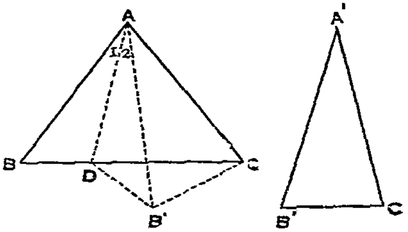
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AB=A'C'$. | 1. 題設. |
| 2. $AB=AC$, $A'B'=A'C'$.<br>$\therefore AB=AC=A'B'=A'C'$. | 2. 題設等腰三角形的兩腰相等(§58).又公理1. |
| 3. $\therefore \angle B=\angle C$, $\angle B'=\angle C'$. | 3. 等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| 4. 但$\angle B>\angle B'$,<br>故$\angle C$亦$>\angle C'$. | 4. 題設.又代替. |
| 5. $\angle A+\angle B+\angle C$ | 5. 三角形三內角之和,等 |

| | |
|---|---|
| $= \angle A' + \angle B' + \angle C'$<br>$= 180°$. | 於一平角(§110). |
| 6.　$\angle A < \angle A'$. | 6.　等量中減去不等量,其差不等,符號相反(公理6). |
| 7.　$\therefore B'C' > BC$. | 7.　夾角大對邊也大(§132). |

7. 試證命題 XXXII, 若點 C′ 落在 △ABC 中.

**設**　△ABC 及 △A′B′C′ 中, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle A > \angle A'$,

**求證**　$BC > B'C'$.



(7)

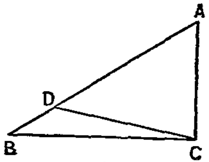
### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　置 △A′B′C′ 於 △ABC 上面,令 A′C′ 落在 AC 上邊. | 1.　由題設 $AC = A'C'$, 又公理 19. |
| 2.　A′B′ 定在 AB 同 AC 之間如 AB′. | 2.　題設 $\angle A > \angle A'$. |
| 3.　作 AD 二等分 ∠BAB′,交 BC 於 D, 而作 DB′. | 3.　二等分一已知角(§83). 又兩點之間可作一直綫. |
| 4.　$AB = A'B' = AB'$. | 4.　題設.又由 2. |
| 5.　$\angle 1 = \angle 2$. | 5.　作圖. |
| 6.　$AD = AD$. | 6.　公用. |
| 7.　$\triangle B'AD \cong \triangle BAD$. | 7.　s.a.s.=s.a.s.(§69). |
| 8.　$DB' = DB$. | 8.　相當邊相等(§70). |

| | |
|---|---|
| 9. $DC+DB'>B'C$. | 9. 三角形的兩邊之和大於第三邊(§128). |
| 10. $DC+DB>B'C$. | 10. 代替. |
| 11. ∴$BC>B'C$ 或 $B'C'$ | 11. 代替. |

8. 在$\triangle BCA$中,$AC\perp BC$,又$AD=BC$.

**求證**　$AB>DC$.



(8)

### 證

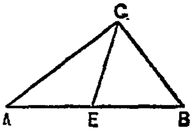
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $DB+BC>DC$. | 1. 三角形兩邊之和大於第三邊(§128). |
| 2. $AD=BC$. | 2. 題設. |
| 3. $AD+DB>DC$. | 3. 以 2 代入 1 所得. |
| 4. ∴$AB>DC$. | 4. 因$AD+DB=AB$. |

## 習題三十二（教科書第95—96頁）

1. 設在$\triangle ABC$中,$AC>BC$,畫中綫CE,則∠AEC是鈍角.

**設**　$AC>BC$, $AE=EB$.

**求證**　$\angle AEC>$rt.∠.



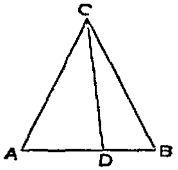
(1)

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AE=EB. | 1. 中綫者自三角形頂點到對邊中點的綫(§64定義). |
| 2. CE=CE. | 2. 公用. |
| 3. AC>BC. | 3. 題設. |
| 4. ∴∠AEC>∠BEC. | 4. 兩三角形兩邊相等,其第三邊大者,所夾角也大(§133). |
| 5. ∠AEC+∠BEC=2rt.∠. | 5. 一直綫上的兩鄰角相補. |
| 6. ∴∠AEC>rt.∠. | 6. 2rt.∠裏減一銳角,餘下的角便是鈍角. |

2. 設△ABC, ∠A=∠B,若在AB上取一點D,而使AD>DB,

則∠ACD>∠DCB



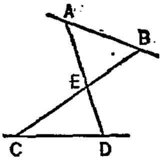
(2)

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. ∠A=∠B,∴AC=BC. | 1. 題設.又三角形內有兩角相等者,他兩對邊相等(§121). |
| 2. CD=CD. | 2. 公用. |
| 3. AD>DB. | 3. 題設. |
| 4. ∴∠ACD>∠DCB. | 4. 兩三角形兩邊相等,其第三邊大者,所夾角也大(§133). |

3. 若 AD 和 BC 相交於 E,

試證 $AD+BC>AB+CD$.



(3)

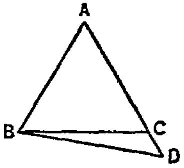
證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AE+EB>AB$,<br>又 $EC+ED>CD$. | 1. △兩邊之和>第三邊(§128). |
| 2. 但 $AE+ED=AD$,<br>$EB+EC=BC$. | 2. 全體等於其各部分之和(公理 10). |
| 3. $\therefore AD+BC>AB+CD$. | 3. 以 1 的二式相加,再代入 2 的二式所得. |

4. 若 AC 是等邊三角形的一邊,

延長之至 D,又聯結 BD,

則 $AD>BD>AB$.



(4)

證

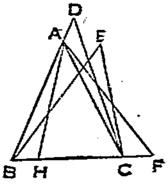
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AB=AC=BC$. | 1. 等邊三角形的三邊都相等(§58). |
| 2. $BC+CD>BD$. | 2. △兩邊之和>第三邊(§128). |

| | |
|---|---|
| **3.**　$AC+CD>BD$ | **3.**　以1的$AC=BC$代入2所得. |
| **4.**　$\therefore AD>BD$. | **4.**　全體等於其各部分之和(公理10) |
| **5.**　在$\triangle ABD$內$\angle ADB<\angle BAD$. | **5.**　三角形一角的外角>他不相鄰的任一內角(§88.因$\angle ACB=\angle BAD$). |
| **6.**　$\therefore BD>AB$. | **6.**　大角所對的邊大(§130). |
| **7.**　$\therefore AD>BD>AB$. | **7.**　由4與6. |

**5.** 若$AB=AC$,

**求證**　(a) $BD>DC$,　(b) $BE>EC$,

(c) $AF>AB$,　(d) $AB>AH$.



(5)

證 (a)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.**　$AC+AD>DC$. | **1.**　三角形兩邊之和,大於第三邊(§128). |
| **2.**　但$AB=AC$. | **2.**　題設. |
| **3.**　$\therefore AB+AD>DC$ | **3.**　以2代入1所得. |
| **4.**　$AB+AD=BD$. | **4.**　全體等於其各部分之和(公理10). |
| **5.**　$\therefore BD>DC$ | **5.**　以4代入3所得. |

### 證 (b)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle DBE+\angle EBC=\angle ABC$. | 1. 全體等於其各部分之和(公理 10). |
| 2. $\therefore\angle EBC<\angle ABC$. | 2. 全體大於其任一部分(公理 11). |
| 3. $\angle ACB+\angle ACE=\angle BCE$. | 3. 同 1. |
| 4. $\therefore\angle ACB<\angle BCE$. | 4. 同 2. |
| 5. 但 $\angle ABC=\angle ACB$. | 5. 等腰三角形的兩底角相等(§71).因題設 $AB=AC$. |
| 6. $\therefore\angle BCE>\angle EBC$. | 6. $\angle BCE$ 較 $\angle ABC$ 大,由 2 知更大於 $\angle EBC$(公理 9). |
| 7. $\therefore BE>EC$. | 7. 大角所對的邊大(§130). |

### 證 (c)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle ACB>\angle AFB$. | 1. 三角形一角的外角,大於任一他內角(§88). |
| 2. $\angle ABC=\angle ACB$. | 2. 同(b)的理由 5. |
| 3. $\therefore\angle ABC>\angle AFB$, 卽 $\angle ABF>\angle AFB$. | 3. 以 2 代入 1 所得. |
| 4. $\therefore AF>AB$. | 4. 大角所對的邊大(§130). |

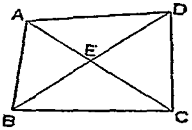
### 證 (d)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle AHB>\angle ACB$. | 1. 三角形一角的外角,大於任一他內角(§88). |

| | |
|---|---|
| **2.** $\angle ABC=\angle ACB$. | **2.** 同(b)的理由5. |
| **3.** $\therefore \angle AHB>\angle ABC$,<br>即$\angle AHB>\angle ABH$. | **3.** 以2代入1所得. |
| **4.** $\therefore AB>AH$. | **4.** 大角所對的邊大(§130). |

**注意:** 1. E點在AC綫外, ∠ABC之間.
2. H在BC綫上, B點同C點之間.
} 題中未明言, 但示之以圖.

6. 任意四邊形的對角綫的和, 必小於其周圍, 但必大於其半周.



(6)

設　四邊形ABCD.

求證　$AC+BD<AB+BC+CD+AD$.

及$AC+BD>\frac{1}{2}(AB+BC+CD+AD)$.

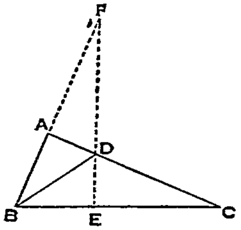
## 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** 命AC同BD的交點爲E. | **1.** 兩直綫只有一交點.由公理13看出的(公理注a). |
| **2.** $AB+AD>BD$,<br>$BC+CD>BD$. | **2.** 三角形兩邊之和大於其第三邊(§128). |
| **3.** $AB+BC>AC$,<br>$AD+CD>AC$. | **3.** 同上. |
| **4.** $\therefore 2(AB+BC+CD+AD)>2(AC+BD)$. | **4.** 2,3四式的合併. |
| **5.** $\therefore (AB+BC+CD+AD)>AC+BD$. | **5.** 不等量的一半仍不等,大者仍大(公理8的引伸). |

| | |
|---|---|
| **6.** $AC=AE+EC$,<br>$BD=BE+ED$. | **6.** 全體等於其各部分之和(公理10). |
| **7.** $AE+ED>AD$,<br>$AE+BE>AB$,<br>$BE+EC>BC$,<br>$EC+ED>DC$. | **7.** 同理由 2. |
| **8.** $\therefore 2[(AE+EC)+(BE+ED)]>AB+BC+CD+AD$. | **8.** 7 的四式的合併. |
| **9.** $\therefore AC+BD>\frac{1}{2}(AB+BC+CD+AD)$. | **9.** 同理由 5. |

**7.** 在 $\triangle ABC$ 中, $AB<BC$, BD 是 B 角的二等分綫,交 AC 於 D,

則 $AD<DC$.



(7)

### 證

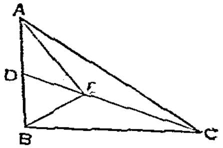
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** 引長 BA 至 F,令 $BF=BC$,作 FD 引長之,交 BC 於 E. | **1.** 凡直綫可以引長(公理17). 又兩點間可作一直綫(公理13). |
| **2.** $\angle FBD=\angle CBD$. | **2.** 題設 BD 平分 $\angle B$. |
| **3.** $BD=BD$. | **3.** 公用. |
| **4.** $\triangle BDF\cong\triangle BDC$. | **4.** s.a.s.=s.a.s. (§69). |

| | |
|---|---|
| **5.** $\therefore FD=DC$. | **5.** 相當邊相等(§70). |
| **6.** 在$\triangle BFE$及$\triangle BCA$內, $\angle F=\angle C$. | **6.** 相當角相等(§70). |
| **7.** $\triangle BFE\cong\triangle BCA$. | **7.** a.s.a.=a.s.a.(§66). |
| **8.** $\therefore FE=AC$. | **8.** 同理由5. |
| **9.** $\therefore FE-FD=AC-DC$, 即$DE=AD$. | **9.** 等量減等量,其餘量相等(公理3). |
| **10.** 但$\angle FEC>\angle F$, 即$\angle DEC>\angle C$. | **10.** 三角形的外角大於任一他內角(§88).而$\angle C=\angle F$. |
| **11.** $\therefore DC>DE$, 即$AD<DC$. | **11.** 大角所對的邊大(§130). |

8. 在$\triangle ABC$中,$AC>BC$,作中綫CD,則CD內的任一點**E**,近B而遠A.

**設** $\triangle ABC$, CD爲C到AB的中綫,E爲CD內的任一點.

**求證** $AE>BE$.



(8)

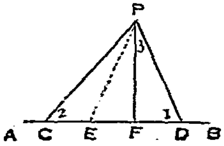
### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $AD=DB$. | **1.** 中綫爲自角頂到對邊中點的直綫(§64定義). |
| **2.** $CD=CD$. | **2.** 公用. |
| **3.** $AC>BC$. | **3.** 題設. |
| **4.** $\therefore\angle ADC>\angle BDC$ 即$\angle ADE>\angle BDE$. | **4.** 兩三角形有兩邊相等,第三邊大者,所對角也大(§133). |
| **5.** $\therefore AE>BE$. | **5.** 兩三角形有兩邊相等,夾角大者,所對邊也大(§132). |

## 習題三十三 (教科書第97頁)

1. 寫出並證明命題XXXIV的逆定理.

自一已知直線的垂線上的一點,作此直線的二斜綫,綫長者,與垂足的距離必較大.



(1)

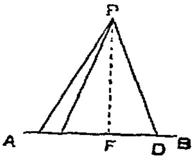
設　$PF\perp AB, PC>PD$.

求證　$CF>FD$.

### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $PC>PD$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle 1>\angle 2$. | 2. 大邊所對的角大(§129). |
| 3. $\angle PFC=\angle PFD=\text{rt.}\angle$. | 3. 題設$PF\perp AB$.凡直角都相等(§46). |
| 4. $\angle CPF>\angle 3$. | 4. 直角三角形的兩銳角相餘(§112系2).彼大則此小. |
| 5. 作PE使$\angle EPF=\angle 3$. | 5. 作角法. |
| 6. 則PE必在$\angle CPF$內,交點E在CF內. | 6. 因$\angle CPF>\angle 3$,<br>卽$\angle CPF>\angle EPF$. |
| 7. $CF>EF$. | 7. 全量大於其一部分 |
| 8. $EF=FD$. | 8. 因rt.$\triangle PFE\cong$rt.$\triangle PFD$.此爲相當邊. |
| 9. $\therefore CF>FD$. | 9. 代入. |

2. 試證自一已知直綫外的一點,祗能作兩條相等的斜綫於此直綫.



(2)

設　已知AB綫,其外的P點,$PC=PD$爲兩斜綫.

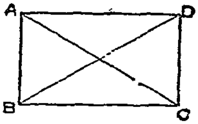
求證　$PE \neq PD$.

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作$PF \perp AB$. | 1. 自一點至一直綫,只能作一垂綫(§47). |
| 2. $PC=PD$. | 2. 題設. |
| 3. $CF=FD$. | 3. 等腰三角形的頂垂綫等分其底邊(§72). |
| 4. $PF=PF$. | 4. 公用. |
| 5. $\therefore \triangle PCF \cong \triangle PFD$. | 5. s.s.s.=s.s.s. (§74.) |
| 6. 如$EF>CF$則$PE>PC$. | 6. 從已知直綫的垂綫上一點作此直線的兩斜綫,其與垂足距離大,則此綫亦長(§135). |
| 7. 如$EF<CF$則$PE<PC$. | 7. 同上. |
| 8. $\therefore PE \neq PC$, 卽$PE \neq PD$. | 8. 6同7的結論. |

## 習題三十四 (教科書第100頁)

1. 矩形的對角綫相等.



(1, 2)

設　矩形ABCD, AC及BD爲兩對角綫.

求證　$AC=BD$.

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AB=DC$. | 1. 矩形者有四直角之平行四邊形 (§137 定義). 又平行四邊形的對邊相等(§139). |
| 2. $BC=BC$. | 2. 公用. |
| 3. $\angle ABC=\angle DCB$. | 3. 凡直角都相等(§46). |
| 4. $\therefore\triangle ABC\cong\triangle DCB$. | 4. s.a.s.=s.a.s. (§69). |
| 5. $\therefore AC=BD$. | 5. 相當邊相等(§70). |

2. 若一個平行四邊形的對角綫相等,則此形是一個矩形.

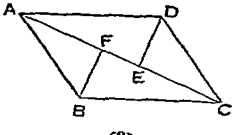
證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AC=BD$. | 1. 題設. |
| 2. $AB=DC$. | 2. 平行四邊形的對邊相等(§139). |
| 3. $BC=BC$. | 3. 公用. |
| 4. $\therefore\triangle ABC\cong\triangle DCB$. | 4. s.s.s.=s.s.s. (§74). |
| 5. $\therefore\angle ABC=\angle DCB$. | 5. 相當角相等(§70). |
| 6. 但 $AB/\!/DC$, 而 $\angle ABC$ 與 $\angle DCB$ 相補. | 6. 平行四邊形的對邊平行(§136). 截綫截平行綫所成的同側兩內角相補(§107). |
| 7. $\therefore\angle B=\angle C=$ rt.$\angle$. | 7. 相等而又相補故各爲直角. |
| 8. 同理可證 $\angle A=\angle D$ | 8. 也是從 1 到 7 那麼證 |

| | |
|---|---|
| =rt.∠. | △ABD及△ACD. |
| **9.** 故ABCD爲矩形. | **9.** 矩形定義(§137). |

**3.** 自平行四邊形相對兩頂點至對角綫的垂綫,必相等.

**設**　▱ABCD, DE⊥AC, BF⊥AC.



(3)

**求證**　DE=BF.

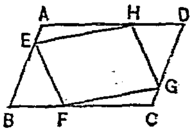
**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** AB=DC. | **1.** 平行四邊形的對邊相等(§139). |
| **2.** DE⊥AC, BF⊥AC, 故∠DEC=∠BFA. | **2.** 凡直角都相等(§46). |
| **3.** ∠DCE=∠BAF. | **3.** 兩錯角相等(§93). |
| **4.** ∴△DCE≅△BAF. | **4.** 兩直角三角形各有一銳角及斜邊相等,則兩形全同(§116系6). |
| **5.** ∴DE=BF. | **5.** 相當邊相等(§70). |

## 習題三十五 (教科書101頁)

**1.** 若ABCD是一個平行四邊形,AE=CG,又BF=DH,

則EFGH是一個平行四邊形.



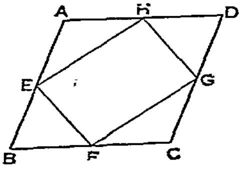
(1)

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AE=CG$. | 1. 題設. |
| 2. $AD=BC$. | 2. 平形四邊形的兩對邊相等(§139). |
| 3. $BF=DH$. | 3. 題設. |
| 4. $AD-DH=BC-BF$, 即 $AH=FC$. | 4. 等量減等量,其餘量相等(公理3). |
| 5. $\angle A=\angle C$. | 5. 平形四邊形的兩對角相等(§139). |
| 6. $\therefore \triangle AEH \cong \triangle CGF$. | 6. s.a.s.=s.a.s.(§69). |
| 7. $\therefore EH=FG$. | 7. 相當邊相等(§70). |
| 8. 同理 $\triangle EBF \cong \triangle GDH$. | 8. 也像1到7那麼證法. |
| 9. $\therefore EF=GH$. | 9. 同上7. |
| 10. $\therefore EFGH$ 是▱ | 10. 四邊形的對邊如各自相等,這形是平行四邊形(§143). |

2. 依次聯結平行四邊形各邊中點的直線,亦成一個平行四邊形.

設　▱ABCD各邊的中點順次爲E, F, G, H.



(2)

求證　四邊形EFGH亦爲▱.

證

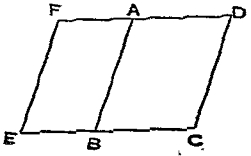
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle A=\angle C$. | 1. ▱兩對角相等. |

| | |
|---|---|
| 2. AH=FC. | 2. AD=BC,H,F 爲中點 |
| 3. AE=GC. | 3. AB=CD,E,G 爲中點. |
| 4. ∴△AEH≅△CGF. | 4. s.a.s.=s.a.s. |
| 5. ∴EH=FG. | 5. 相當邊. |
| 6. 同樣可證 EF=HG. | 6. △BFE≅△DGH. |
| 7. ∴EFGH 爲▱. | 7. 兩組對邊各相等. |

## 習題三十六 (教科書第102頁)

1. 在 AB 的兩旁作 ABCD 和 ABEF 兩個平行四邊形,

則 CDFE 也是一個平行四邊形.

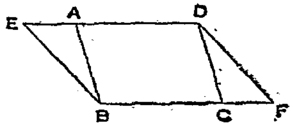


(I)

### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. FE//AB, DC//AB. | 1. 平行四邊形的對邊平行(§136 定義). |
| 2. ∴FE//DC. | 2. 兩綫都平行於某綫,他們也相平行(§92). |
| 3. FE=AB, DC=AB. | 3. 平行四邊形的對邊相等(§139). |
| 4. ∴FE=DC. | 4. 兩量都等於某量,他們也相等(公理1). |
| 5. ∴CDFE爲▱. | 5. 四邊形的兩對邊相等而且平行,則此形爲平行四邊形(§144). |

**2.** 平行四邊形的兩對邊向反對方向相等的延長，各端與其最近的頂點相聯結，則必另成一個平行四邊形。



(2)

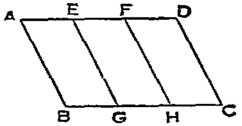
**設**　▱ABCD，引長DA及BC，令AE=CF。

**求證**　EBFD是▱。

## 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.**　∠BAD=∠BCD. | **1.**　平行四邊形的對角相等(§139). |
| **2.**　∴∠EAB=∠DCF. | **2.**　等角的補角相等(§49). |
| **3.**　AB=DC. | **3.**　平行四邊形的對邊相等(§139). |
| **4.**　EA=CF. | **4.**　題設. |
| **5.**　∴△EAB≅△DCF. | **5.**　s.a.s.=s.a.s.(§69). |
| **6.**　∴EB=DF. | **6.**　相當邊相等(§70). |
| **7.**　又ED=EA+AD,<br>BF=BC+CF. | **7.**　全體等於其各部分之和(公理10). |
| **8.**　而AD=BC. | **8.**　同3 |
| **9.**　∴ED=BF. | **9.**　等量加等量，其和相等(公理2.) |
| **10.**　∴EBFD爲▱. | **10.**　四邊形的兩組對邊各相等，此形是平行四邊形(§143). |

**3.** 若三等分平行四邊形的兩對邊,又聯結各分點,則這聯結的兩綫平行.



(3)

**設** □ABCD, AE=EF=FD, BG=GH=HC.

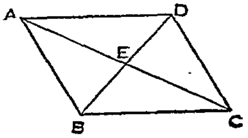
**求證** EG//FH.

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** EF=GH. | **1.** (AD=BC)的$\frac{1}{3}$: 等量除等量.其商相等(公理8). |
| **2.** EF//GH. | **2.** 題設 AD//BC (§90 定義). |
| **3.** ∴EGHF爲□. | **3.** 四邊形的兩對邊相等而且平行,則此形爲平行四邊形(§144). |
| **4.** ∴EG//FH. | **4.** 平行四邊形的對邊平行(§139). |

## 習題三十七(教科書第103—104頁)

**1.** 四邊形的對角綫互相二等分,則此形是平行四邊形(命題38的逆定理).



(1)

**設** 四邊形ABCD的兩對角綫AC,BD相交於E,而AE=EC, BE=ED.

**求證** ABCD是▱.

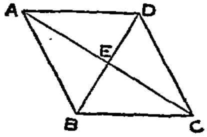
證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AE=EC, BE=ED. | 1. 題設AC, BD互相等分. |
| 2. ∠AED=∠BEC. | 2. 對頂角相等(§53). |
| 3. ∴△AED≅△BEC. | 3. s.a.s.=s.a.s. (§69). |
| 4. ∴AD=BC. | 4. 相當邊相等(§70). |
| 5. 同理△ABE≅△DCE. | 5. 也從1到3那麼證明. |
| 6. ∴AB=DC. | 6. 同4. |
| 7. ∴ABCD是▱. | 7. 四邊形的兩組對邊各相等,此形是平行四邊形(§143). |

2. 菱形的對角綫互相垂直.

**設** 菱形ABCD的兩對角綫爲AC, BD相交於E.

**求證** AC⊥BD, BD⊥AC.



(2, 3)

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB=BC=CD=AD. | 1. 菱形是四邊都等的平行四邊形(§137定義). |
| 2. ∴△ABD和△BCD都爲等腰△. | 2. 三角形有兩邊相等的爲等腰三角形(§58). |
| 3. BE=ED. | 3. 平形四邊形的對角綫互相二等分(§146). |
| 4. ∴AE⊥BD,即AC⊥BD.而BD⊥AC. | 4. 兩點到一直綫的兩頭等距,決定那綫的垂直平分綫(§79). |

(2, 3兩項可略)

3. 平行四邊形的對角綫互相垂直,則此形是菱形.

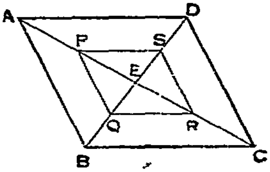
**設** $\square ABCD$ 的 $AC \perp BD$, $BD \perp AC$.

**求證** ABCD是菱形.

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AC \perp BD$, 則 $\angle BEA = \angle DEA = rt. \angle$. | 1. 凡直角都相等(§46). |
| 2. $BE = ED$. | 2. 平行四邊形的兩對角綫,互相平分(§146). |
| 3. $AE = AE$. | 3. 公用. |
| 4. $\triangle AEB \cong \triangle AED$. | 4. s.a.s.=s.a.s.(§69). |
| 5. $\therefore AB = AD$. | 5. 相當邊相等(§70). |
| 6. 但 $AB = DC$, $AD = BC$. | 6. 平行四邊形的兩對邊各自相等(§136定義). |
| 7. $\therefore AB = BC = CD = AD$. | 7. 兩量都等於某量,他們也相等(公理1). |
| 8. $\therefore$ ABCD是菱形. | 8. 菱形是四邊都等的平行四邊形(§137定義). |

4. 二等分平行四邊形各對角綫的半份,而順次聯結其中點,必另成一個平行四邊形.



(4)

**設** $\square ABCD$ 的對角綫AC,BD,他們半分的中點爲P,Q R,S.

**求證**　PQRS是▱.

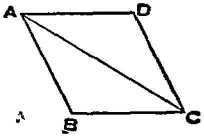
**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　AE=EC, BE=ED. | 1.　平行四邊形的對角綫互相二等分(§146). |
| 2.　$\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}EC$,<br>$\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}ED$. | 2.　等量的一半相等(公理8). |
| 3.　卽PE=ER, QE=ES. | 3.　題設P, Q, R, S是AE, BE EC, ED的中點. |
| 4.　∴PQRS是▱. | 4.　四邊形的對角綫互相等分,則這形是平行四邊形(習題1). |

5. 平行四邊形的一對角綫二等分其一角,則此形是菱形.

**設**　▱ABCD, AC平分$\angle A$.

**求證**　ABCD是菱形.



(5)

**證**

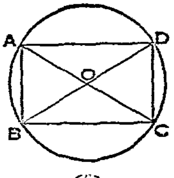
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　$\angle BAC=\angle DAC$. | 1.　題設AC平分$\angle A$. |
| 2.　但$\angle DAC=\angle BCA$. | 2.　內錯角相等. |
| 3.　∴$\angle BAC=\angle BCA$. | 3.　公理1. |
| 4.　∴AB=BC. | 4.　對等角的邊相等. |

| | |
|---|---|
| 5. 但AD=BC, CD=AB. | 5. □對邊相等. |
| 6. ∴AB=BC=CD=AD. | 6. 公理1. |
| 7. ∴ABCD是菱形. | 7. 菱形是等邊的□. |

6. 順次聯結一個圓的兩直徑的各端,則必成一個矩形.

**設** AC, BD爲O圓的兩直徑.

**求證** ABCD是矩形.



(6)

**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. BC=BC. | 1. 公用. |
| 2. AB=DC. | 2. 對頂角相等(§53).圓半徑相等(§37定義). s.a.s.=s.a.s.(§69).即△AOB≌△DOC. |
| 3. AC=BD. | 3. 直徑相等(§37定義). |
| 4. ∴△ABC≌△BDC. | 4. s.s.s.=s.s.s. (§74). |
| 5. ∠ABC=∠BCD. | 5. 相當角相等(§70). |
| 6. 但∠ABC+∠BCD=2rt.∠. | 6. 因∠BAC=∠ACD, 而AB∥CD. |
| 7. ∴∠ABC=∠BCD=rt.∠. | 7. 相補而又相等,故爲直角. |
| 8. 同理∠BAD=∠ADC=rt.∠. | 8. 也從1到7那麼證明. |
| 9. ∴ABCD是矩形. | 9. 矩形是四角都是直角的平行四邊形(§137定義). |

## 習題三十八(敎科書第107頁)

**求分一直綫成三等分,成五等分.**

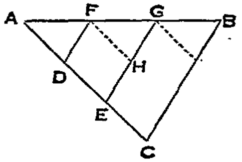
**(I)設　定直綫AB,**

**求　分他爲三等分.**

**作法**　從A點作任意的直綫AC,使其三綫分AD=DE=EC.

聯BC,作DF//BC,EG//BC,交AB於F,G.

那麼AF=FG=GB.



(I)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作FH及GI//AC. | 1. 過定點作定直綫的平行綫(§100). |
| 2. FH=DE, GI=EC. | 2. 平行綫間的平行綫相等(§141系). |
| 3. 但AD=DE=EC. | 3. 作圖. |
| 4. $\therefore AD=FH=GI$. | 4. 兩量都等於某量,他們也相等(公理1). |
| 5. $\angle ADF=\angle FHG=\angle GIB$. | 5. 平行綫間同位角相等(§106). |
| 6. $\angle FAD=\angle GFH=\angle BGI$. | 6. 同上. |
| 7. $\triangle ADF\cong\triangle FHG\cong\triangle GIB$. | 7. a.s.a.=a.s.a.(§66). |
| 8. $\therefore AF=FG=GB$. | 8. 相當邊相等(§70). |

(II)設　定直綫AB,

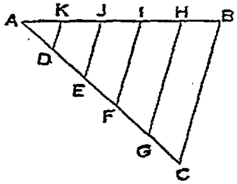
**求**　分他爲五等分.

**作法**　從A點作任意直綫AC, 使其五綫分AD=DE=EF=FG=GC.

聯BC, 作DK, EJ, FI, GH都//BC; 交AB於K, J, I, H.

那麼AK=KJ=JI=IH=HB.

證明同上從略.



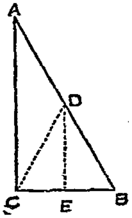
(II)

## 習題三十九 (教科書第108頁)

1. 如三角形的兩角爲30°及60°, 則對30°角的一邊,等於這兩角所夾邊的一半.

設　△ABC的∠A=30°, ∠B=60°.

**求證**　$BC=\frac{1}{2}AB$.



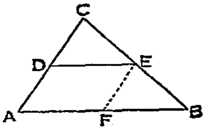
(I)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作∠C的中綫CD, DE⊥BC. | 1. 中綫是從頂角到對邊的中點的綫(§64). 從一點到直綫作⊥(§85). |
| 2. $AD=DB=\frac{1}{2}AB$. | 2. D點是AB的中點. |
| 3. ∠A=30°. ∠B=60°. | 3. 題設. |

| | |
|---|---|
| 4. $\angle C=180^\circ-A-\angle B=180^\circ-30^\circ-60^\circ=90^\circ$. | 4. △三個角的和等於一平角(§110). |
| 5. $\therefore \angle C=\angle DEB=\angle DEC$. | 5. 作圖.又凡直角都相等. |
| 6. $CE=EB, DE=DE$ | 6. DE//AC,數平行綫間如分一截綫爲等分,他截綫也被等分(§148).又公用. |
| 7. $\therefore \triangle DCE \cong \triangle DBE$. | 7. s.a.s.=s.a.s.(§69). |
| 8. $\therefore \angle DCB=\angle B=60^\circ$<br>$=\angle CDB$. | 8. 相當角相等(§70).三角形內角之和=2rt.∠(§110). |
| 9. $\therefore DB=BC$,<br>卽 $BC=\frac{1}{2}AB$. | 9. 等角△等邊(§122).兩量都=某量,他們也相等(公理 1). |

**2.** 在 $\triangle ABC$ 中,如通過AC的中點D作AB的平行綫DE, E在CB上,則DE是AB的一半.



(2)

**設**　$\triangle ABC, AD=DC, DE//AB$.

**求證**　$DE=\frac{1}{2}AB$.

### 證

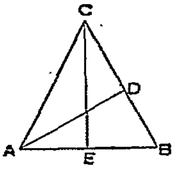
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 通過E點,作EF//AC. | 1. 通過定點,作定直綫的平行綫(§100). |
| 2. $AD=\frac{1}{2}AC$. | 2. 題設D點是AC的中點 |
| 3 $\therefore CE=\frac{1}{2}BC$.<br>$AF=\frac{1}{2}AB$. | 3. 兩平行綫,如等分一截綫,他截綫也被等分(§148). |

| | |
|---|---|
| 4. 但 $DE \parallel AF$ (AB的一部分). | 4. 題設. |
| 5. AFED 爲▱. | 5. 對邊平行(§136定義). |
| 6. $\therefore DE=AF$. | 6. ▱的對邊相等(§139). |
| 7. $\therefore DE=\frac{1}{2}AB$. | 7. 以3代入6所得,公理1. |

3. 等腰三角形的底和一腰上的高所成的角,等於頂角之半.

**設**　ABC是等腰△,AB是底邊,AD是BC腰上的高,∠C是頂角.

**求證**　$\angle DAB=\frac{1}{2}\angle C$.

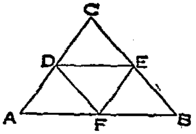


(3)

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作 $CE \perp AB$. | 1. 從定點至定綫作⊥(§87). |
| 2. 在△CEB內,<br>$\angle ECB=90^\circ-\angle B$. | 2. rt.△的兩銳角相餘(§112). |
| 3. 在△ADB內,<br>$\angle DAB=90^\circ-\angle B$. | 3. 同上. |
| 4. $\therefore \angle DAB=\angle ECB$. | 4. 兩量都等於某量,他們也相等(公理1). |
| 5. 但 $\angle ECB=\frac{1}{2}\angle C$. | 5. ∵ rt.△AEC≅rt.△BEC. |
| 6. $\therefore \angle DAB=\frac{1}{2}\angle C$. | 6. 以證5代入證4所得(公理1). |

## 習題四十 (教科書第109—110頁)



(1)

**1.** 若聯結三角形的三邊的中點,則成四個全同三角形.

**設**　$\triangle ABC$ 三邊的中點是 $D, E, F$.

**求證**　$\triangle AFD \cong DFE \cong EFB \cong CDE$.

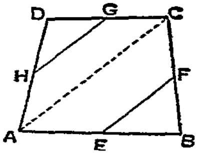
**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　$AD = DC, BE = EC$. | 1.　題設D, E是AC, BC的中點. |
| 2.　$\therefore DE \parallel AB, DE = \frac{1}{2}AB$. | 2.　聯△兩邊中點所成的直綫平行且等於第三邊之半(§153). |
| 3.　同理$EF \parallel AC, EF = \frac{1}{2}AC$.<br>$DF \parallel BC, DF = \frac{1}{2}BC$. | 3.　同上. |
| 4.　$\therefore DE = AF, \because AF = \frac{1}{2}AB$.<br>$EF = AD, \because AD = \frac{1}{2}AC$ | 4.　兩量都等於某量,他們也相等(公理1). |
| 5.　$DF = DF$. | 5.　公用. |
| 6.　$\therefore \triangle DFE \cong \triangle AFD$. | 6.　s.s.s.=s.s.s.(§74). |
| 7.　同理$\triangle DFE \cong \triangle EFB \cong \triangle CDE$. | 7.　也像從1到6那麼證明. |
| 8.　$\therefore \triangle AFD \cong DFE \cong EFB \cong CDE$. | 8.　同4. |

2. 聯結四邊形相鄰兩邊的中點的一直綫,等於且平行於聯結其他兩邊的中點的一直綫.

設　四邊形ABCD, E, F, G, H 爲四邊的中點.

求證　$HG \mathrel{\underline{\parallel}} EF$.



(2)

證

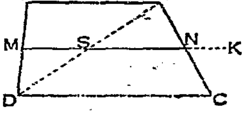
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作AC分ABCD爲兩個三角形. | 1. 兩點之間,可作一直綫(公理13). |
| 2. 在$\triangle ADC$內,$HG=\frac{1}{2}AC$, $HG \parallel AC$. | 2. 聯三角形兩邊中點的直綫平行於第三邊,而等於他的一半(§153). |
| 3. 在$\triangle ABC$內,$EF=\frac{1}{2}AC$, $EF \parallel AC$. | 3. 同上. |
| 4 $\therefore HG \mathrel{\underline{\parallel}} EF$. | 4. 兩量都等於某量,他們相等(公理1).如兩直綫都平行於第三綫,他們互相平行(§92系). |

3. 梯形的中綫平行於底,且等於兩底和之半.

設　梯形ABCD的中綫MN,

求證　$MN \parallel DC \parallel AB$,

$MN=\frac{1}{2}(AB+DC)$.

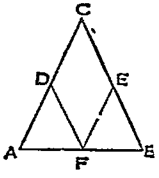


(3)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作MK∥DC.這也∥AB. | 1. 通過定點,作定綫的平行綫(§100).又兩直綫都平行於第三綫,他們互相平行(§92). |
| 2. MK通過N.即MN在MK內而爲其一部分. | 2. 數平行綫分一截綫爲等分,他們也分任意截綫爲等分(§148). |
| 3. ∴MN∥DC也∥AB. | 3. 由於證2. |
| 4. 作對角綫BD. | 4. 兩點之間可作一直綫(公理13). 四邊形的對角綫,是聯兩對角的直綫(§138定義). |
| 5. S是DB的中點. | 5. 一綫平行於三角形的一邊,又平分他邊,便平分第三邊(§149系1). |
| 6. $MS=\frac{1}{2}AB, SN=\frac{1}{2}DC$. | 6. 聯三角形兩邊中點的直綫等於第三邊之半(§153). |
| 7. $MN=\frac{1}{2}(AB+DC)$. | 7. 全體等於各部分之和(公理10). 等量加等量,其和相等(公理2). |

4. 若聯結等腰三角形兩腰的中點於底的中點,則成一個菱形.



(4)

設　等腰△ABC的三邊中點爲D,E,F.

求證　CDFE=◇.

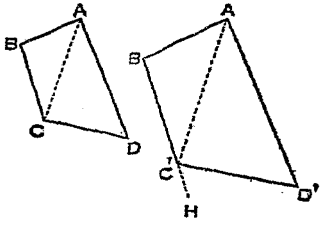
**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AC=BC. | 1. 等腰三角形有兩邊相等(§58). |
| 2. CD=CE. | 2. 題設D爲AC,E爲BC的中點,等量的一半相等(公理8). |
| 3. 但 $DF=\frac{1}{2}BC$,<br>$EF=\frac{1}{2}AC$. | 3. 聯三角形兩邊中點的直綫等於第三邊的一半(§153). |
| 4. $CE=\frac{1}{2}BC$, $CD=\frac{1}{2}AC$. | 4. 見2. |
| 5. ∴DF=CE=EF=CD. | 5. 數量同等於某量,他們都相等(公理1). |
| 6. ∴CDFE=◇. | 6. 菱形是四邊都相等的平行四邊形(§137定義). |

5. 作兩個互等角而不是互等邊的四邊形.

**設** 已知四邊形ABCD,

**求作** 四邊形A′B′C′D′使∠A′=∠A, ∠B′=∠B, ∠C′=∠C, ∠D′=∠D, 而A′B′≠AB, B′C′≠BC, C′D′≠CD, D′A′≠DA.



(5)

**作法** 1. 在ABCD四邊形內作對角綫AC.

2. 作A′B′∥AB,但A′B′≠AB.

3. 作B′H∥BC.

4. 作A′C′∥AC, 截B′H於C′.

5. 作A′D′∥AD.

6. 作$C'D' \parallel CD$與$A'D'$相交於$D'$,即得所求的四邊形.

6. 作兩個互等邊而不是互等角的四邊形.

**設**　$AB, BC, CD, DA$爲四邊形的四邊.

**求作**　兩個四邊形,不是互相等角,如$ABCD$, $A'B'C'D'$. $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $CD=C'D'$. $DA=D'A'$而$\angle A \neq \angle A'$, $\angle B \neq \angle B'$, $\angle C \neq \angle C'$, $\angle D \neq \angle D'$.

**作法**　1. 以$AB, BC$兩邊,作任意角$\angle ABC$.

2. 以$CD$爲度,$C$爲中心,作弧;

3. 以$DA$爲度,$A$爲中心,作弧,兩弧相交於$D$.

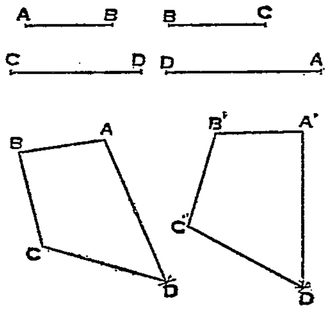
4. 聯$CD, AD$,成四邊形$ABCD$.

5. 以$AB, BC$兩邊,作大於$\angle ABC$之$\angle A'B'C'$(亦可較小).

6. 以$CD$爲度,$C'$爲中心,作弧.

7. 以$DA$爲度,$A'$爲中心,作弧,兩弧相交於$D'$.

8. 聯$C'D'$, $A'D'$,成四邊形$A'B'C'D'$,即所求的四邊形.



(6)

## 習題四十一 (教科書第112頁)

1. 一個多邊形有多少邊,假使他的角的和是1000平角? 200直角? 24直角? 720°?

**設**　多邊形各角$\angle A+\angle B+\angle C+\cdots\cdots=1000\text{st.}\angle s$,

**求**　他的邊數$n$.

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　$n-2=1000$. | 1.　n邊的多邊形各角之和,等於$(n-2)$平角(§156). |
| 2.　$n=1000+2$<br>$=1002$. | 2.　等量加等量,其和相等(公理2). |

**設**　多邊形之各角$\angle A+\angle B+\angle C+\cdots=200$rt.∠s;

**求**　他的邊數n.

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　200rt.∠s=100st.∠s. | 1　直角是平角的一半(§26). |
| 2.　$n-2=100$. | 2.　同上1.(§156). |
| 3.　$\therefore n=102$ | 3.　同上2.(公理2). |

**設**　多邊形各角之和=24rt.∠s,

**求**　他的邊數n.

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　24rt.∠s=12st.∠s. | 1.　同上1.(§26). |
| 2.　$n-2=12$. | 2.　同上2.(§156). |
| 3.　$n=14$. | 3.　同上3.(公理2). |

**設**　多邊形各角之和=720°,

**求**　他的邊數n.

### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $720^\circ=4\text{st.}\angle s$. | 1. 一平角是180°. |
| 2. $n-2=4$ | 2. §156. |
| 3. $\therefore n=6$. | 3. 公理 2. |

2. 一個等角四邊形的每一個角有多少度? 五邊形呢? 六邊形呢? 十邊形呢?

### 證 (等角四邊形)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $n=4$. | 1. 題設. |
| 2. $\frac{n-2}{n}\text{st.}\angle s=\frac{4-2}{4}\times180^\circ$ $=\frac{1}{2}\times180^\circ=90^\circ$. | 2. n 邊等角多邊形的每一角,等於$\frac{n-2}{n}$平角(§157 系). |

### 證 (等角五邊形)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $n=5$, | 1. 2. 同上 1 2. |
| 2. $\frac{n-2}{n}\text{st.}\angle s=\frac{5-2}{5}\times180^\circ$ $=\frac{3}{5}\times180^\circ=108^\circ$. | |

### 證 (等角六邊形)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $n=6$. | 1. 2. 同上. |
| 2. $\frac{n-2}{n}\text{st.}\angle s=\frac{6-2}{6}\times180^\circ$ | |

| | |
|---|---|
| $=\frac{2}{3}\times 180^\circ=120^\circ$. | |

證(等角十邊形)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** n=10. | **1. 2.** 同上. |
| **2.** $\frac{n-2}{n}\text{st.}\underline{\angle s}=\frac{10-2}{10}\times 180^\circ$ $=\frac{8}{10}\times 180^\circ=144^\circ$. | |

## 習題四十二(教科書第113頁)

1.等角十邊形的每一外角是多少度? 九邊形呢? 三十六邊形呢? 七十二邊形呢?

證(等角十邊形的外角)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** 等角n邊形的外角$=\frac{2}{n}\text{st.}\underline{\angle s}$. | **1.** §159系. |
| **2.** n=10. | **2.** 題設. |
| **3.** ∴等角十邊形的外角$=\frac{2}{10}\times 180^\circ=2\times 18^\circ=36^\circ$. | **3.** 代替(公理12) |

證(等角九邊形的外角)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** 等角n邊形的外角$=\frac{2}{n}\text{st.}\underline{\angle s}$. | **1.** §159系. |

| | |
|---|---|
| 2. n=9. | 2. 題設. |
| 3. ∴等角九邊形的外角 $=\frac{2}{9}\times 180^\circ=2\times 20^\circ=40^\circ$. | 3. 代替(公理12). |

證 (等角三十六邊形的外角)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 等角 n 邊形的外角 $=\frac{2}{n}$st.∠s. | 1. §159 系. |
| 2. n=36. | 2. 題設. |
| 3. ∴等角三十六邊形的外角 $=\frac{2}{36}\times 180^\circ=2\times 5^\circ=10^\circ$. | 3. 代替(公理12). |

證 (等角七十二邊形的外角)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 等角 n 邊形的外角 $=\frac{2}{n}$st.∠s. | 1. 2. 3. 都是同上. |
| 2. n=72. | |
| 3. ∴等角七十二邊形的外角 $=\frac{2}{72}\times 180^\circ=\frac{1}{36}\times 180^\circ=5^\circ$. | |

**2.** 一個多邊形的每一個外角是 30°, 這是幾邊形呢? 等於一直角呢? 60° 呢? 45 呢?

**設**　多邊形的各外角爲∠a, ∠b, ∠c……

**求證**　其邊數.

### 證(外角30°的多邊形)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $\angle a+\angle b+\angle c+\cdots\cdots=2\text{st.}\angle s$. | **1.** 如引長多邊形的每一邊,每頂角旁成一外角,這些角之和等於兩平角(§158). |
| **2.** 但 $\angle a=\angle b=\angle c=\cdots\cdots=30^\circ$. | **2.** 題設. |
| **3.** ∴邊數 $=\frac{2}{30^\circ}\times 180^\circ=2\times 6=12$. | **3.** 等量除等量,其商相等(公理8). |

### 證(外角90°的多邊形)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $\angle a+\angle b+\angle c+\cdots\cdots=2\text{st.}\angle s$. | **1. 2. 3.** 都同上. |
| **2.** 但 $\angle a=\angle b=\angle c=\cdots\cdots=90^\circ$. | |
| **3.** ∴邊數 $=\frac{2}{90^\circ}\times 180^\circ=4$. | |

### 證 外角60°的多邊形)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $60^\circ=\frac{2}{n}\times 180^\circ$. | **1.** 一個n邊的等角多邊形的每外角,等於$\frac{2}{n}$平角(§159系). |
| **2.** $1=\frac{2}{n}\times 3$. | **2.** 等量除等量,其商相等(公理8). |

| | |
|---|---|
| 3. n=6 (n爲邊數). | 3. 等量乘等量,其積相等(公理7). |

**證** (外角45°的多邊形)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $45^\circ=\frac{2}{n}\times180^\circ$. | 1. 2. 3. 都同上. |
| 2. $1=\frac{2}{n}\times4$. | |
| 3. $n=8$. | |

**注意:** 上邊四證,三,四不同一,二,是表明 §158 同 §159 都可以應用的意思.

3. 一個多邊形的每一個內角是160°, 這是幾邊形呢? 179° 呢? 135 呢? $\frac{4}{3}$rt.$\angle$s 呢?

**證** (內角160°的多邊形)

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 每一角 $=160^\circ$. | 1. 題設. |
| 2. $160^\circ=\frac{n-2}{n}\times180^\circ$. | 2. n 邊等角多邊形的每一角,等於$\frac{n-2}{n}$平角(§157 系). |
| 3. $160^\circ n=(n-2)\times180^\circ$<br>$=180^\circ n-360^\circ$ | 3. 等量乘等量,其積相等(公理7). |
| 4. 卽 $20^\circ n=360^\circ$. | 4. 等量加減等量,其結果相等(公理2, 3). |
| 5. $\therefore n=18$. | 5. 等量除等量,其商相等(公理8). |

證 (內角$179^\circ$的多邊形)

1. n邊形的每一角$=\frac{n-2}{n}$平角.

2. $179^\circ=\frac{n-2}{n}\times 180^\circ$.

3. $179^\circ n=(n-2)\times 180^\circ$.
   $=180^\circ n-360^\circ$.

4. $1^\circ n=360^\circ$.

5. $n=360$.

證 (內角$135^\circ$的多邊形)

1. n邊形的每一角$=\frac{n-2}{n}$平角.

2. $135^\circ=\frac{n-2}{n}\times 180^\circ$.

3. $135^\circ n=(n-2)180^\circ$.
   $=180^\circ n-360^\circ$

4. $45^\circ n=360^\circ$.

5. $n=8$.

證 (內角$\frac{4}{3}\text{rt.}\angle s$的多邊形)

1. n邊形的每一角$=\frac{n-2}{n}$平角.

2. $\frac{4}{3}\text{rt.}\angle s=\frac{2}{3}\text{st.}\angle s$, $\therefore$ $\frac{2}{3}=\frac{n-2}{n}$

3. $2n=3(n-2)=3n-6$.

4. $n=6$.

**注意:** 下三證同第一證一樣的理由,所以從略.

**4.** 一個等角多邊形的三個外角的和等於 $90^\circ$, 這是幾邊形呢? 等於$\frac{3}{4}$直角呢?

證 (三外角 $=90^\circ$ 的)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** 3外角$=90^\circ$. | **1.** 題設. |
| **2.** 1外角$=30^\circ$. | **2.** 等量除等量,其商相等(公理8). |
| **3.** 但各外角之和 $=2$st.$\angle$s $=360^\circ$. | **3.** 如引長多邊形的每邊一端,每頂角成一外角,這些角的和,等於兩平角(§158). |
| **4.** ∴外角數 $=360^\circ\div30^\circ=12$. | **4.** 等量除等量,其商相等(公理8). |
| **5.** ∴邊數$=12$. | **5.** 有一外角,必有一邊. |

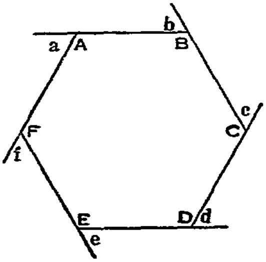
證 (三外角$=\frac{3}{4}$rt.$\angle$s 的)

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** 3外角$=\frac{3}{4}$rt.$\angle$s. | **1. 2. 3. 4. 5.** 都同上證. |
| **2.** 1外角$=\frac{1}{4}$rt.$\angle$s$=\frac{90^\circ}{4}$. | |
| **3.** 但各外角之和$=2$st.$\angle$s $=360^\circ$. | |
| **4.** ∴外角數$=360^\circ\div\frac{90^\circ}{4}$, $=360^\circ\times\frac{4}{90^\circ}=4\times4=16$. | |
| **5.** ∴邊數$=16$. | |

**5.** 一個多邊形的內角之和,等於外角之和的兩倍,這是幾邊形呢?

設　多邊形ABCD……有n邊,內角爲∠A+∠B+∠C+……,外角爲∠a+∠b+∠c+……,而∠A+∠B+∠C+……=2(∠a+∠b+∠c+……).

求　n.



(5)

### 證

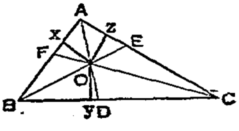
| 敘述 | 理由. |
|---|---|
| 1.　∠A+∠B+∠C+……=(n−2)st.∠s. | 1.　n邊形各角之和等於(n−2)平角(§156). |
| 2.　∠a+∠b+∠c+……=2st.∠s. | 2.　多邊形各外角之和等於2平角(§158). |
| 3.　但∠A+∠B+∠C+……=2(∠a+∠b+∠c+……). | 3.　題設. |
| 4.　∴(n−2)st.∠s=2×2st.∠s. | 4.　代替(公理12). |
| 5.　n−2=2×2=4. | 5.　等量除等量其商相等(公理8). |
| 6.　∴n=4+2=6. | 6.　等量加等量,其和相等(公理2). |

## 習題四十三(教科書第114—115頁)

**1.** 用作圖法,求一點與三角形的三邊等距離.

設　$\triangle ABC$.

求　O點使$OX \perp AB$, $OY \perp BC$, $OZ \perp CA$,而$OX=OY=OZ$.



(1)

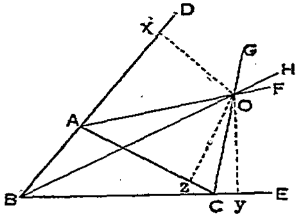
### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作AD平分∠A, BE平分∠B,相交於O.聯CF通過O. | 1. 平分定角(§83).三角形諸角的角二等分綫相交於一點(§160). |
| 2. 作$OX \perp AB$, $OY \perp BC$, $OZ \perp CA$. | 2. 從一直綫外的一點,作那綫的垂綫(§87). |
| 3. $\therefore OX=OY=OZ$. | 3. 三分角綫的相交點離三邊等距(§160). |

2. 求證三角形兩個外角的二等分綫與第三內角的二等分綫,相交於一點.

設　$\triangle ABC$,及GC平分∠ACE, FA平分∠DAC, HB平分∠B.

求證　GC, FA, HB相交於一點O.



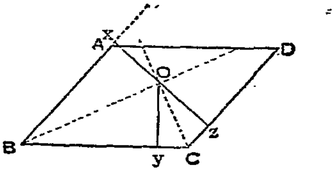
(2)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 因FA同GC不能爲∥,他們相交於一點如O. | 1. 如截綫割兩綫成兩內錯角不等,這兩綫不平行(§101). |

| | |
|---|---|
| 2. 從O作$OX \perp BD$ (BA之引長綫). $OY \perp BE$, $OZ \perp AC$. | 2. 同上題2(§87). |
| 3. $OX=OZ$, $OY=OZ$. | 3. 一角的分角綫內任何點離角的兩邊等距(§126). |
| 4. $OX=OY$. | 4. 兩量都等於某量,他們相等(公理1). |
| 5. O必在於HB上或在其引長綫上. | 5. 與一角的兩邊等距離的點都在這角的二等分綫內(§127). |
| 6. ∴GC, FA, HB相交於O. | 6. 以上的結論. |

**3.** 作一點與平行四邊形ABCD的三邊AB, BC, CD等距離.



(3)

### 作法

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作OC平分∠C, OB平分∠B. | 1. 凡角只有一條分角綫(§24). |
| 2. 因OC同OB不能爲∥, 他們交於O點. | 2. §101, 同上理由1. |
| 3. 作$OX \perp AB$ (之引長綫), $OY \perp BC$, 引長XO交CD於Z. | 3. 從一直綫外的一點作其垂綫(§87). 凡綫可以引長(公理17). |

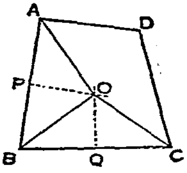
| | |
|---|---|
| 4. 可知 $OZ \perp CD$. | 4. 如截綫⊥兩∥綫之一,則也⊥他∥綫(§105). |
| 5. $\therefore OX=OY, OY=OZ$. | 5. §126. 同上題3. |
| 6. $OX=OZ$. | 6. 公理1. 同上題4. |
| 7. $\therefore OX=OY=OZ$.<br>∴O點到三邊等距. | 7. 5同6的代替(公理12). |

## 習題四十四 (教科書第116頁)

1. 作一點O與四邊形的三個項點等距離.

**設**　四邊形ABCD,

**求作**　O點,使 $AO=BO=CO$.



(1)

### 作法

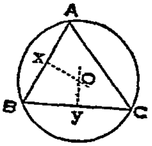
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作AB的垂直平分綫OP, BC的垂直平分綫OQ. | 1. 平分定直綫(§81). |
| 2. 因 $AB \nparallel BC$, 故 $OP \nparallel OQ$, 而相交於O點. | 2. 兩綫各⊥相交的兩綫,他們 $\nparallel$ (§102). |
| 3. 作AO, BO, CO. | 3. 兩點之間只可作一直綫(公理13). |
| 4. $AO=BO$, $CO=BO$. | 4. 一綫的垂直平分綫內的任何點,到綫的兩頭等距離(§125). |
| 5. $AO=CO$. | 5. 兩量都等於某量,他們相等(公理1). |

| | |
|---|---|
| **6.** ∴AO=BO=CO,即O爲A,B,C的等距點. | **6.** 以上的結論 |

**2.** 作一個圓,經過已知三角形的三個頂點.

**設** 已知三角形ABC,

**求作** O圓,通過A,B,C三點.



(2, 3)

### 作法

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** 作OX垂直二等分AB.<br>OY垂直二等分BC. | **1.** 作定直綫的垂直二等分綫(§82). |
| **2.** 因AB,BC相交,故OX╫OY而相交於O點. | **2.** 兩綫各⊥相交的兩綫,他們╫(§102). |
| **3.** AO=BO=CO. | **3.** 三角形三邊的垂直二等分綫,相交於一點,到三頂角等距(§162). |
| **4.** 故以O爲中心,AO爲半徑作圓,一定通過A,B,C三頂點. | **4.** 圓周內各點,離定點等遠(§37). |

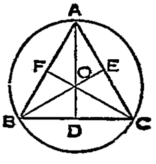
**3.** 求證祗有一個圓,能過三角形的三個頂點.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** 從O點至△ABC的三邊,只能作三根垂綫. | **1.** 從一點至一直綫只能作一垂綫(§118系8). |
| **2.** AO=BO=CO,這O點也唯一的. | **2.** §162.同上題3. |

| | |
|---|---|
| 3. ∴只有以O爲中心AO爲半徑之圓,可以通過 A,B,C三點. | 3. §37.同上題4 |

4. 求證等邊三角形的外接圓的中心,在各角的二等分綫上.



(4)

設　△ABC等邊,及O圓通過A,B,C.

求證　O在分角綫 AD, BE, CF 上.

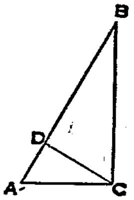
### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作AD, BE, CF 平分 ∠A, ∠B, ∠C. 則 AD⊥BC, BE⊥AC, CF⊥AB. 又各二等分其垂直邊,故相交於一點O. | 1. 等腰三角形頂角的二等分綫垂直又二等分其底邊(§72 系1). |
| 2. AO=BO=CO. | 2. §162.同上2題3. |
| 3. ∴圓中心O,在AD,BE,CF的交點O上 | 3. 以上的結論. |

## 習題四十五(教科書第119頁)

1. 在三角形ABC中, ∠A=60°, ∠B=30°, 又 AB=12 吋,

求　AC的長.



(1, 2)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle A=60^\circ$, $\angle B=30^\circ$. | 1. 題設. |
| 2. $\therefore \angle A=2\angle B$. | 2. 代替(公理12). |
| 3. $\angle C=90^\circ$. | 3. 直角三角形的兩銳角相餘(§112推論2). $\angle A$, $\angle B$ 相餘,故 $\angle C$ 爲直角. |
| 4. $AB=2AC$. | 4. 直角三角形的一銳角爲他銳角的二倍,其斜邊二倍於短的直角邊(§165). |
| 5. $AB=12$ 吋. | 5. 題設. |
| 6. $AC=6$ 吋. | 6. 以5代入4,以2除之(公理12及公理8). |

**2.** 在三角形ABC中, $AB=10$ 吋, $\angle A=60^\circ$, $\angle C=90^\circ$, 又CD是AB上的高,

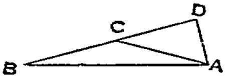
**求** AD的長.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle A=60^\circ$, $\angle C=90^\circ$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle B=30^\circ$. | 2. 直角三角形的兩銳角相餘(§112). |
| 3. $\angle A=2\angle B$. | 3. 代替(公理12). |
| 4. $AB=2AC$. | 4. 直角三角形的一銳角,爲他銳角的二倍,其斜邊二倍於短的直角邊(§165). |

| | |
|---|---|
| **5.** 但 $CD\perp AB$ 故 $\triangle ACD$ 亦爲直角三角形. | **5.** 題設.又直角三角形,有一角是直角(§59). |
| **6.** $\angle A=60^\circ$, $\angle ADC=90^\circ$, $\angle ACD=30^\circ$. | **6.** 同上2. |
| **7.** $AC=2AD$. | **7.** 同上4. |
| **8.** $AB=10$ 吋. | **8.** 題設. |
| **9.** $\therefore AD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{4}AB$ $=2.5$ 吋. | **9.** 以 8 代入 4,再代入 7 所得(公理12). |

**3.** 等腰三角形ABC的底角A和B各等於 15°,又 BC=8 吋.求高 AD 的長.



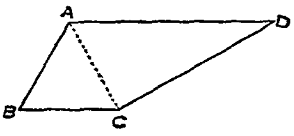
(3)

## 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $\angle A=\angle B=15^\circ$. | **1.** 題設.又等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| **2.** $\angle ACD=\angle A+\angle B$. | **2.** 三角形的一外角,等於其他兩內角之和(§120). |
| **3.** $\angle ACD=30^\circ$. | **3.** 代替(公理12). |
| **4.** $\angle CAD=60^\circ$. | **4.** 直角三角形的兩銳角相餘(§112). |
| **5.** $\angle CAD=2\angle ACD$. | **5.** 代替. |
| **6.** $AC=2AD$. | **6.** 直角三角的一銳角,爲他銳角的二倍,其斜邊二倍於短的直角邊(§165). |
| **7.** $BC=8$ 吋. | **7.** 題設. |

| | |
|---|---|
| **8.** $AC=BC=8$吋. | **8.** 等腰三角形有兩邊相等(§58). |
| **9.** $\therefore AD=\frac{1}{2}BC=4$吋. | **9.** 代替. |

4. 在四邊形ABCD中, $AB=BC=6$吋, $\angle A=120^\circ$, $\angle B=60^\circ$, 又$\angle C=150^\circ$, 求 AD的長.



(4)

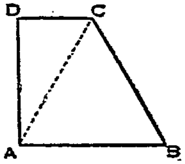
### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $AB=BC=6$吋, $\angle B=60^\circ$. | **1.** 題設. |
| **2.** 作AC,則$\angle BAC=\angle ACB=\frac{180^\circ-\angle B}{2}=\frac{180^\circ-60^\circ}{2}=60^\circ$. | **2.** 兩點之間,只可作一直綫(公理13). 又等腰△的底角相等(§71). 又§110. |
| **3.** $\therefore AC=AB=BC=6$吋. | **3.** 等角△也就是等邊△(§112). |
| **4.** $\angle A=120^\circ$ | **4.** 題設. |
| **5.** $\angle CAD=\angle A-\angle BAC=60^\circ$. | **5.** 全體等於其各部分之和(公理10). 又公理3. |
| **6.** $\angle C=150^\circ$. | **6.** 題設. |
| **7.** $\angle ACD=\angle C-\angle ACB=90^\circ$. | **7.** 同5. |
| **8.** $\therefore \angle ADC=30^\circ$ | **8.** 直角三角形的兩銳角相餘(§112). |
| **9.** $\angle CAD=2\angle ADC$. | **9.** 以8代入5所得(公理12). |

| | |
|---|---|
| **10.**　AD=2AC. | **10.**　直角三角形的一銳角,爲他銳角的兩倍,其斜邊二倍於短的直角邊(§165). |
| **11.**　∴AD=12吋. | **11.**　以3代入10所得(公理12). |

5. 梯形ABCD的上底DC等於14吋,又AB=BC;若∠A=90°,又∠B=60°,

**求**　AB的長.



(5)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.**　AB=BC, ∠B=60° | **1.**　題設. |
| **2.**　作AC. | **2.**　兩點之間,只可作一直綫(公理13). |
| **3.**　∠ACB=∠CAB=60°,<br>∴AC=AB=BC. | **3.**　同前題理由2,3. |
| **4.**　∠A=90°. | **4.**　題設. |
| **5.**　∠D=90° | **5.**　一截綫垂直於兩平行綫中的一平行綫,也垂直於他∥綫(§105). |
| **6.**　∴∠DAC=∠A−∠CAB=30°. | **6.**　全體等於其各部分之和(公理10).又公理3. |
| **7.**　∴∠ACD=60° | **7.**　直角三角形的兩銳角相餘(§112). |

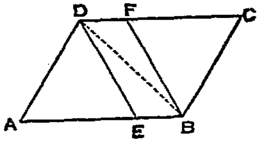
| | |
|---|---|
| 8. $\therefore \angle ACD=2\angle DAC$. | 8. 以6代入7所得(公理12). |
| 9. $AC=2DC$. | 9. 直角三角形的一銳角,爲他銳角的兩倍,其斜邊二倍於短的直角邊(§165). |
| 10. $AB=2DC$. | 10. 以9代入3所得. |
| 11. 但$DC=14$吋. | 11. 題設. |
| 12. $\therefore AB=28$吋. | 12. 以11代入10所得. |

## 習題四十六 (教科書第122頁)

**1.** 用2(b)的方法證明上面這個命題.(題中所謂上面的命題:“斜平行四邊形兩對角的分角綫相平行”.所謂2(b)的方法:“兩對邊平行而又相等”).

**設** DE及BF爲斜平行四邊形ABCD兩角的分角綫.

**求證** DE//BF.



(1, 2)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AD=BC$. | 1. 平行四邊形的對邊相等(§139). |
| 2. $\angle A=\angle C$. | 2. 平行四邊形的對角相等(§139). |
| 3. $\angle ADE=\angle CBF$. | 3. 同上,等量的一半相等(公理8). |

| | |
|---|---|
| **4.** ∴△ADE≅△CBF. | **4.** a.s.a.=a.s.a.(§66). |
| **5.** AE=CF. | **5.** 相當邊相等. |
| **6.** 但AB=CD. | **6.** 同1. |
| **7.** AB−AE=CD−CF<br>卽DF=EB. | **7.** 等量減等量,其餘量相等(公理3). |
| **8.** ∵CD//AB, ∴DF//EB. | **8.** 題設.平行綫是任何地方都平行的(§142系3). |
| **9.** ∴DEBF=▱. | **9.** 如四邊形的兩邊$\underline{/\!/}$,這形是▱(§144). |
| **10.** DE//BF. | **10.** ▱是兩對邊各自平行的四邊形(§136). |

**2.** 用1(b)的方法證明上面這個命題.(所謂1(b)的方法,是證明內錯角相等).同上

求證　DE//BF.

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** 作BD. | **1.** 兩點之間,只可作一直綫(公理13). |
| **2.** ∠FDB=∠EBD. | **2.** 兩平行綫間的內錯角相等(§104). |
| **3.** △ADE≅△CBF. | **3.** 由上證1.2.3.4得來. |
| **4.** ∴∠AED=∠CFB. | **4.** 全同形的相當角相等(§68). |
| **5.** ∴∠DFB=∠BED,<br>DB=DB. | **5.** 等角的補角相等(§49).<br>又公用. |
| **6** ∴△DFB≅△BED. | **6.** s.a.a.=s.a.a.(§114系4). |

| | |
|---|---|
| **7.** $\angle DBF=\angle BDE$. | **7.** 相當角相等(§70). |
| **8.** $\therefore DE//BF$. | **8.** 兩內錯角相等則兩綫平行(§93). |

**3.** 用1(c)的方法證明上面這個命題. (所謂1(c)的法子是證同位角相等便知道DE//BF).

**證**

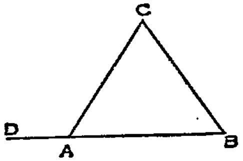
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $AB//CD$. | **1.** 題設. |
| **2.** $\angle AED=\angle CDE$. | **2.** 平行綫間的內錯角相等(§104). |
| **3.** $\because \angle D=\angle B$,<br>$\therefore \angle ABF=\angle CDE$. | **3.** 平行四邊形的對角相等(§139). 等量的一半相等(公理8). 題設DE, BF是∠D, ∠B的分角綫. |
| **4.** $\therefore \angle ABF=\angle AED$. | **4.** 兩量都等於某量,他們相等(公理1). |
| **5.** $\therefore DE//BF$. | **5.** 一截綫截兩綫所成的兩同位角相等則這兩綫平行(§95). |

## 習題四十七 (教科書第124—125頁)

**1.** 等腰三角形底邊延長線所成的一個外角,等於90°加上頂角之半.

**設**　$\triangle ABC$中, $AC=BC$,

**求證**　$\angle DAC=90^\circ+\frac{\angle C}{2}$.



(1)

**證**　設 $\angle C = n^\circ$　$\angle A = m^\circ$.

**則**　因 $AC = BC$, 故 $\angle B = \angle A = m^\circ$.

**而** $\angle A + \angle B + \angle C = m^\circ + m^\circ + n^\circ$

$= 2m^\circ + n^\circ = 180^\circ$.

**故**　$m^\circ = \frac{180^\circ - n^\circ}{2}$.

**但**　$\angle DAC = 180^\circ - m^\circ$

$= 180^\circ - \frac{180^\circ - n^\circ}{2}$.

**即**　$2\angle DAC = 360^\circ - 180^\circ + n^\circ$

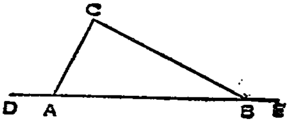
$= 180^\circ + n^\circ$.

**故**　$\angle DAC = \frac{180^\circ + n^\circ}{2} = 90^\circ + \frac{n^\circ}{2} = 90^\circ + \frac{\angle C}{2}$.

**2.** 直角三角形斜邊延長線所成的兩個外角的和等於270°.

**設**　rt.$\triangle ABC$.

**求證**　$\angle DAC + \angle CBE = 270^\circ$.



(2)

**證**　**1.** 命 $\angle CAB = m^\circ$, $\angle CBA = n^\circ$.

**2.** $m^\circ + n^\circ = 90^\circ$ (直角三角形的兩銳角相餘, §112).

**3.** 但 $\angle DAC + \angle CAB = 180^\circ$, $\angle CBE + \angle CBA = 180^\circ$ (一直綫上的兩鄰角相補, §50).

**4.** $\therefore \angle DAC = 180^\circ - m^\circ$, $\angle CBE = 180^\circ - n^\circ$(代替,公理12).

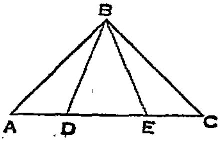
**5.** $\angle DAC + \angle CBE = 360^\circ - (m^\circ + n^\circ)$

$= 360^\circ - 90^\circ$

$= 270^\circ$.

3. 在等腰三角形 ABC 的底邊 AC 上取兩點 D 和 E, 使 $AE=AB$, 又 $CD=BC$,

**求證**　$\angle DBE=\angle A$.



(3)

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　$AB=BC=AE=CD$. | 1.　題設. |
| 2.　命 $\angle A=\angle C=m^\circ$. | 2.　等腰三角形的兩底角相等(§71 又 §169). |
| 3.　$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CBD$. | 3.　s.a.s.=s.a.s. (§69). |
| 4.　$\angle AEB=\angle CDB$ 命 $=n^\circ$. | 4.　相當角相等(§70). |
| 5.　在 $\triangle ABE$ 內<br>$180^\circ=m^\circ+2n^\circ$. | 5.　三角形內角之和等於一平角(§110). |
| 6.　在 $\triangle BDE$ 內<br>$\angle DBE=180^\circ-2n^\circ$. | 6.　同上. |
| 7.　$\therefore \angle DBE=m^\circ+2n^\circ-2n^\circ$<br>$=m^\circ$. | 7.　代替. |
| 8.　$\therefore \angle DBE=\angle A$. | 8.　同上. |

4. 若 $AD=AC=CB$, 又 DB 和 EB 都是直綫,

則　$\angle EAD=3\angle B$.

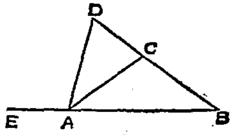
證　命 $\angle B=\angle A=m^\circ$, $\angle ACB=n^\circ$.

那麼 $n^\circ+2m^\circ=180^\circ$.

但 $\angle ACD=\angle ADC=2m^\circ$.

而 $\angle EAD=\angle B+\angle ADC$.

$\therefore \angle EAD=\angle B+2m^\circ$



(4)

$=\angle B+2\angle B.$

$=3\angle B.$

**注意:** 依教科書§169例題不再申述理由.

5. 延長等腰三角形ABC的一腰CA,使AD等於底邊AB,則$\angle C=180^\circ-4\angle D.$

**證**　命$\angle D=m^\circ.$

因$AD=AB$,故$\angle ABD=\angle D=m^\circ.$

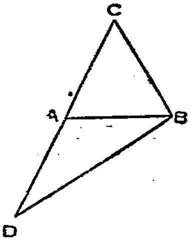
而$\angle CAB=\angle D+\angle ABD=2m^\circ.$

又$\angle CAB=\angle CBA$,故$\angle CBA=2m^\circ.$

$\therefore \angle C=180^\circ-\angle CAB-\angle CBA$

$=180^\circ-4m^\circ$

$=180^\circ-4\angle D.$



(5)

6. 若將等腰三角形ABC的底邊AB延長至D,又畫CD,

則$\angle BCD=\angle A-\angle D.$

**證**　命$\angle A=m^\circ$, $\angle D=n^\circ.$

$\because \angle A=\angle ABC,$

$\therefore \angle ACB=180^\circ-2m^\circ.$

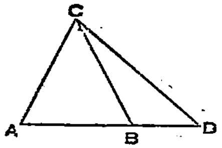
而$\angle ACD=180^\circ-m^\circ-n^\circ.$

但$\angle BCD=\angle ACD-\angle ACB$

$=180^\circ-m^\circ-n^\circ-(180^\circ-2m^\circ)$

$=m^\circ-n^\circ.$

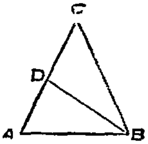
$\therefore \angle BCD=\angle A-\angle D.$



(6)

7. 在等腰三角形ABC中,將底邊AB的一端B與所對腰上的一點D相聯結,

則 $\angle A=\frac{1}{2}(\angle CDB+\angle CBD)$.



(6)

證 命 $\angle A=m^\circ$, $\angle DBA=n^\circ$.

∴ $\angle CDB=m^\circ+n^\circ$.

但 $\angle A=\angle B$, 故 $\angle B=m^\circ$.

∴ $\angle CBD=m^\circ-n^\circ$.

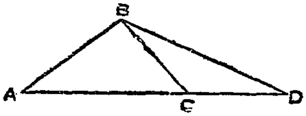
∴ $\angle CDB+\angle CBD=m^\circ+n^\circ+(m^\circ-n^\circ)$

$=2m^\circ$.

∴ $2\angle A=\angle CDB+\angle CBD$.

即 $\angle A=\frac{1}{2}(\angle CDB+\angle CBD)$.

8. 延長三角形ABC的一邊AC至D,而使CD=CB, 則 $\angle ABD=90^\circ+\frac{1}{2}(\angle ABC-\angle A)$.



(8)

證 命 $\angle A=m^\circ$,

$\angle CBD=\angle D=n^\circ$,

∴ $\angle ACB=2n^\circ$

在△ABC內 $\angle ABC=180^\circ-m^\circ-2n^\circ$.

以 $-\angle A=-m^\circ$ 加之,

∴ $\angle ABC-\angle A=180^\circ-2m^\circ-2n^\circ$.

即 $\frac{1}{2}(\angle ABC-\angle A)=90^\circ-m^\circ-n^\circ$.

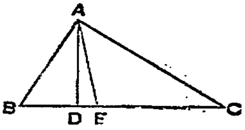
但在△ABD內 $\angle ABD=180^\circ-m^\circ-n^\circ$

$=90^\circ+(90^\circ-m^\circ-n^\circ)$.

∴ $\angle ABD=90^\circ+\frac{1}{2}(\angle ABC-\angle A)$.

9. 在三角形ABC中,BAC角的二等分綫是AE,高是AD,

求證　$\angle DAE=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$.



(9)

證　命 $\angle B=m^\circ$, $C=n^\circ$.

$\therefore \angle A=180^\circ-m^\circ-n^\circ$.

$\angle BAE=\frac{\angle A}{2}=90^\circ-\frac{m^\circ}{2}-\frac{n^\circ}{2}$,

$\angle BAD=90^\circ-m^\circ$.

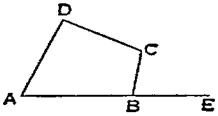
$\angle DAE=\angle BAE-\angle BAD=90^\circ-\frac{m^\circ}{2}-\frac{n^\circ}{2}-(90^\circ-m^\circ)$

$=\frac{m^\circ}{2}-\frac{n^\circ}{2}=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$.

10. 從四邊形三個角的和中,減去第四角的外角,等於一平角.

設　四邊形ABCD,

求證　$\angle A+\angle C+\angle D-\angle CBE$
$=st.\angle$.



(10)

證　命 $\angle A+\angle C+\angle D=m^\circ$.

$\because m^\circ+\angle B=360^\circ$, $\therefore \angle B=360^\circ-m^\circ$.

而 $\angle CBE=180^\circ-\angle B=180^\circ-(360^\circ-m^\circ)=m^\circ-180^\circ$.

$\therefore \angle A+\angle C+D-\angle CBE=m^\circ-(m^\circ-180^\circ)$

$=180^\circ$ (或作 $st.\angle$).

## 雜　題 (教科書第125—131頁)

1. 時鐘在十一點十二分的時候兩針間的角度如

何？ 在六點三十分呢？ 在八點四十五分呢？

答(I) 短針每點鐘走$\frac{1}{12}\times360^\circ=30^\circ$，每分鐘走$\frac{30^\circ}{60}=\frac{1^\circ}{2}$，

12分走$12\times\frac{1^\circ}{2}=6^\circ$；卽離十二點鐘$30^\circ-6^\circ=24^\circ$.

長針每點鐘走$360^\circ$，每分鐘走$\frac{360^\circ}{60}=6^\circ$，12分走

$12\times6^\circ=72^\circ$；卽過十二點鐘$72^\circ$

∴兩針所成之角$=24^\circ+72^\circ=96^\circ$.

(II)上答同理短針30分走$30\times\frac{1^\circ}{2}=15^\circ$，卽過六點鐘

$15^\circ$.

此時長針正在六點鐘上.

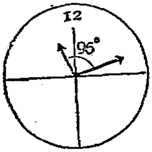
∴兩針所成之角$=15^\circ$.

(III)同理短針45分走$45\times\frac{1^\circ}{2}=22.5^\circ$，卽過八點$22.5^\circ$，

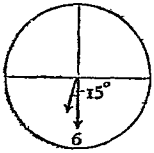
離九點$30^\circ-22.5^\circ=7.5^\circ$.

長針45分走$45\times6^\circ=270^\circ$，卽正在九點鐘上.

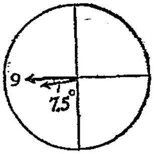
∴兩針所成之角$=7.5^\circ$.



(1之I)



(1之II)



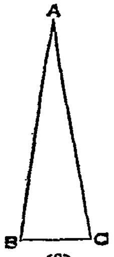
(1之III)

2. 等腰三角形的頂角是 18°44′，每一個底角是多少度？

**設**　△ABC內 AB=AC,

∠A=18°44′

**求**　∠B及∠C.



(2)

**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　∠A+∠B+∠C=180°. | 1.　三角形三內角之和爲一平角(§110). |
| 2.　∠A=18°44′. | 2.　題設. |
| 3.　∠B+∠C=180°−18°44′<br>=161°16′. | 3.　等量減等量,其餘量相等(公理3). |
| 4.　但 ∠B=∠C. | 4.　等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| 5.　∴2∠B=161°16′ | 5.　以4代入3所得(公理12). |
| 6.　∴∠B=80°38′,<br>∠C=80°38′. | 6.　等量除等量,其商相等(公理8). |

3. 一個等角多邊形的一外角,等於一直角的五分之一.

**求**　這多邊形的邊數.

**證**　按§159系一個n邊的等角多邊形的每個外角,等

於$\frac{2}{n}$平角.

今等角多邊形的一外角$=\frac{1}{5}$直角$=\frac{1}{10}$平角.

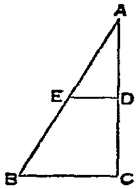
$\therefore \frac{2}{n}=\frac{1}{10}, \quad \therefore n=20.$

即這形有二十條邊.

4. 求證:在直角三角形的任一直角邊中點上的垂綫,必通過斜邊的中點.

**設** rt.△ABC, D為AC的中點, ED⊥AC.

**求證** ED通過AB的中點E.



(4)

證

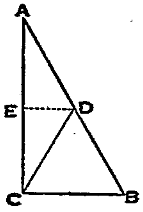
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. ED⊥AC. | 1. 題設. |
| 2. ∠C=rt.∠, 即BC⊥AC. | 2. 兩綫互相垂直,他們交成直角(§30). |
| 3. ED//BC. | 3. 如一截綫截兩綫其同位角相等,這兩綫平行(§95). |
| 4. AD=DC. | 4. 題設. |
| 5. AE=EB, 即E為AB的中點. | 5. 一綫平行於三角形的一邊,又平分第二邊,便平分第三邊(§149). |

5. 求證:在任一直角三角形中,斜邊的中綫,等於斜

邊之半.

設　rt.$\triangle ABC$, $CD$ 爲斜邊 $AB$ 上的中綫,

求證　$CD=\frac{1}{2}AB$.

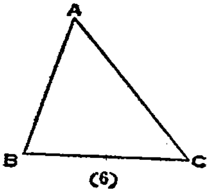


(5)

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作 $DE \parallel BC$. | 1. 通過定點,作定綫的平行綫(§100). |
| 2. $AD=DB\left(=\frac{1}{2}AB\right)$. | 2. 中綫是從角頂到對邊中點的直綫(§64定義). |
| 3. $AE=EC$. | 3. 同4題5. |
| 4. $DE=DE$. | 4 公用. |
| 5. $\triangle ADE \cong \triangle CDE$. | 5. 兩直角三角形的二直角邊相等,這兩形全同 (§69的意思一樣). |
| 6. $\therefore AD=CD$. | 6. 相當邊相等(§70). |
| 7. $\therefore CD=\frac{1}{2}AB$. | 7. 代替(公理12). |

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=60^\circ$, $\angle B>\angle C$, 那一邊最大?



(6)

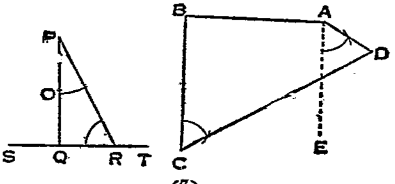
### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$. | 1. 三角形三內角之和等於一平角(§110). |
| 2. $\angle A=60^\circ$. | 2. 題設. |
| 3. $\angle B+\angle C=120^\circ$. | 3. 等量減等量其餘量相等(公理3). |
| 4. $\angle B>\angle C$. | 4. 題設. |
| 5. $\therefore \angle B>60^\circ>\angle C$, 即$\angle B$最大. | 5. 由3,4知之,因爲60°是120°的一半. |
| 6. $\therefore$ AC最大. | 6. 大角所對的邊大(§130). |

7. 作一個四邊形,有三個角是150°, 90°, 和60°.

**作法** 先作$PQ\perp ST$, 在ST內取任意長QR, 以2QR爲度R爲中心作弧截PQ於P,聯PR.

那麼△PQR內$\angle P=30^\circ$, $\angle R=60^\circ$, $\angle Q=90^\circ$ (§165).



(7)

再依§86的方法作$\angle BAE=90^\circ$, $\angle EAD=60^\circ$,

則$\angle BAD=150^\circ$.

作$\angle ABC=90^\circ$, $\angle BCD=60^\circ$,

使CD交AD於D,得四邊形ABCD.

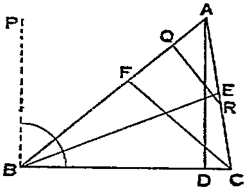
8. 等腰三角形有什麼特性? 等邊三角形呢? 菱形呢? 矩形呢? 正方形呢?

答 等腰三角形………兩邊相等,兩底角相等,頂角的分角綫垂直於底邊,再平分他.

等邊三角形………三邊都等,三角都等,每角=60°,
分角綫就是高,平分底邊,所以也就是中綫.
菱　形……四邊都相等,兩對角綫互相垂直平分.
矩　形………有直角的平行四邊形.
正方形………四邊都相等的矩形.

9. 已知 AB=3 吋, ∠A=60°, ∠B=45°.

**求作**　△ABC, 再作從A至BC的高,從B至AC的中綫,和∠C的二等分綫.



(9)

**作法**　先作任意直綫BC,次於B作PB⊥BC.

依§83法平分直角PBC如AB,

∴∠ABC=45°=∠B.

次取AB=3吋,自A點起取任意長AQ, 作QR⊥AB (在定直綫內定點上作其垂綫§85).

以2AQ爲度, A爲中心,作弧截QR於R.

通過R作AC交BC於C, 那麼由§165知∠BAC=60°

再依§87法作AD⊥BC.

依§81法平分AC於E, 作BE中綫.

依§83法平分∠C作CF二等分綫.

10. 三角形全同的各種證法如何? 角的相等呢? 直綫的相等呢? 直綫的平行呢? 直綫的垂直呢?

I. 證三角形的全同:

(a)要兩角及其一夾邊相等(§66).

(b)要兩邊及其一夾角相等(§69).

(c)要三邊都相等(§74).

(d)要兩角及其一角的對邊相等(§114).

II.證角的相等:

(a)由綫的相等,而證明他. 如等腰三角形的兩底角(§71).等邊三角形的內角(§59)等類.

(b)由綫的平行.而證明他. 如平行綫間的內錯角(§93).平行綫間的同位角(§95).平行四邊形的對角(§139)等類.

(c)由角的加減乘除而證明他. 如公理2的相加,公理3的相減,公理7的相乘,公理8的相除.分角綫的所分(§83). 公理10的全體與各部分之和.等角的餘角(§48).等角的補角(§49).對頂角(§53).三角形內角與平角(§110).在兩三角形內兩角相等時的第三角(§113).三角形的外角與其他內角之和(§120)等類.

(d)由形的全同而證明他. 如全同形的相當角(§68).

(e)類推的證明. 如兩角都等於某角時(公理1).

III.證直綫的相等:

(a)由角的相等,而證明他. 如三角形的兩角相等,決定他們的對邊(§121).由等角三角形知他等邊(§122).一角的分角綫內的任何點,到兩邊的距離(§126)等類.

(b)由綫的平行,而證明他. 如平行四邊形的兩兩對邊(§136及139).矩形的兩對邊(§137).正方形的各邊(§137).菱形的各邊(§137).平行四邊形或梯形的高(§138).平行綫所夾的平行綫(§141).數平行綫分一截綫爲等分時,任何截綫的各綫分(§148).

(c)由綫的加減乘除而證明他. 如公理2的相加.公理3的相減.公理7的相乘.公理8的相除.爲垂直二等

分綫所平分(§81).公理10的全體與各部分之和等類.

(d)由形的全同而證明他.　如全同形的相當邊(§68)

(e)類推的證明.　如兩綫都等於某綫時(公理1).

IV.證直綫的平行:

(a)類推的證明.　如兩直綫都平行於第三綫時(§96).

(b)由角的相等,而證明他.　如內錯角相等時(§93).同位角相等時(§95).同側的兩內角相補時(§97)(附)

(c)由形的性質上證明他.　如梯形的上下底(§136).平行四邊形的兩對邊(§136).矩形的兩對邊(§137).正方形的兩對邊(§137).菱形的兩對邊(§137).聯三角形兩邊中點與第三邊(§153).斜平行四邊形的兩對角分角綫(§167)等類.

V.證直綫的垂直:

(a)兩綫相交成直角時(§30).

(b)從一綫外的一點,到該綫的最短距離(§131).

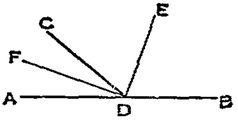
**11.兩直綫不等的證法如何?　兩角的不等呢?**

參照上題II, III可悟,茲從略.

**12.相補的兩個鄰角的二等分綫必互相垂直.**

設　$\angle ADC+\angle BDC=180^\circ$, FD 平分 $\angle ADC$, ED 平分 $\angle BDC$.

求證　$\angle EDF=90^\circ$.



(12, 13)

證　命 $\angle ADC=m^\circ$, $\angle BDC=n^\circ$.

$\therefore m^\circ+n^\circ=180^\circ$.

而 $\angle CDF=\frac{m^\circ}{2}$, $\angle CDE=\frac{n^\circ}{2}$.

又 $\angle EDF=\angle CDF+\angle CDE$.

$$\therefore \angle EDF=\frac{m^\circ}{2}+\frac{n^\circ}{2}=\frac{m^\circ+n^\circ}{2}=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ.$$

**13.**兩個鄰角的二等分綫互相垂直,則此兩角的外邊成一直綫.

設　$ED\perp FD$.

求證　AD, BD爲一直綫.

證　命$\angle CDF=m^\circ$, $\angle CDE=n^\circ$.

$\therefore m^\circ+n^\circ=90^\circ$.

而$\angle FDA=\angle CDF=m^\circ$, $\angle EDB=\angle CDE=n^\circ$

即$\angle ADC=2m^\circ$, $\angle BDC=2n^\circ$.

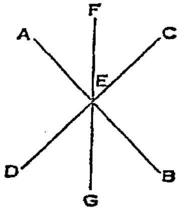
$\therefore \angle ADC+\angle BDC=2m^\circ+2n^\circ=2(m^\circ+n^\circ)=180^\circ$.

故$\angle ADC$與$\angle BDC$相補,而知ADB爲一直綫(§51).

**14.**兩個對頂角的二等分綫,必在一直綫上.

設　$\angle AEC$及$\angle BED$爲對頂角,爲FE及EG所二等分.

求證　FEG爲一直綫.



(14)

證　命$\angle AEC=m^\circ$, $\angle CEB=n^\circ$.

因AEB是一直綫,

$\therefore m^\circ+n^\circ=180^\circ$.

但按§53 $\angle AEC=\angle BED$.

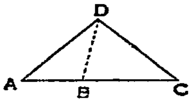
$\therefore \angle BED=m^\circ$.

而$\angle CEG=\angle CEB+\angle BEG=n^\circ+\frac{m^\circ}{2}$, 又$\angle FEC=\frac{m^\circ}{2}$.

$$\therefore \angle FEC+\angle CEG=\frac{m^\circ}{2}+\frac{m^\circ}{2}+n^\circ=m^\circ+n^\circ=180^\circ.$$

按§51知FEG爲一直綫.

15.若$\angle A+\angle C+\angle D=180^\circ$,則ABC成一直綫.



(15)

證　作DB,命$\angle ADB=m^\circ$,

$\angle BDC=n^\circ$.…………§169.

∴$\angle A+m^\circ+\angle ABD=180^\circ$.

$\angle C+n^\circ+\angle DBC=180^\circ$.……§110.

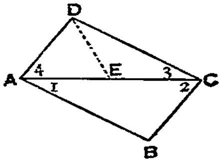
∴$\angle A+\angle C+m^\circ+n^\circ+\angle ABD+\angle DBC=360^\circ$.…………公理2.

但$\angle D=m^\circ+n^\circ$,又題設$\angle A+\angle C+\angle D=180^\circ$.…………公理10.

∴$\angle ABD+\angle DBC=180^\circ$.

∴ABC爲一直綫…………§51.

16.若$\angle 1+\angle 2+\angle B=\angle 3+\angle 4+\angle D$,則AEC成一直綫.



(16)

證　$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$.……n邊的多邊形各角之和等於(n−2)平角(§156);

n=4,　∴n−2=2.

但$\angle A=\angle 1+\angle 4$, $\angle C=\angle 2+\angle 3$.……全體等於各部分之和(公理10).

∴$(\angle 1+\angle 2+\angle B)+(\angle 3+\angle 4+\angle D)=360^\circ$.……代替(公理12).

而$\angle 1+\angle 2+\angle B=\angle 3+\angle 4+\angle D$……題設.

∴$\angle 3+\angle 4+\angle D=180^\circ$.……等量的一半相等(公理8).

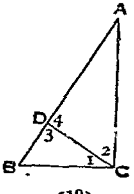
由15題的證明,知AEC是一直綫.

17.直角三角形斜邊上的高,分原形爲兩個互相等角的三角形.

設　rt.$\triangle ABC$,　$CD\perp AB$.

求證　$\angle 1=\angle A$,　$\angle B=\angle 2$,

$\angle 3=\angle 4$.



(19)

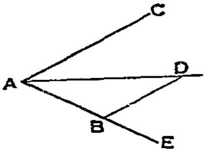
證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　$\angle 3=\angle C=$rt.$\angle$. | 1　凡直角都相等(§46). |
| 2.　∴$\angle 1=A$. | 2.　等角或同角的餘角相等(§48). 在rt.$\triangle BCD$及rt.$\triangle ABC$內$\angle B$公用. |
| 3.　$\angle 4=\angle C=$rt.$\angle$. | 3.　同1. |
| 4.　∴$\angle 3=\angle 4$. | 4.　同1. |
| 5.　∴$\angle 2=\angle B$. | 5.　同2. 在rt.$\triangle ACD$及rt.$\triangle ABC$內, $\angle A$公用. |

18.若過$\angle A$的二等分綫上的任意一點D,作一邊的平行綫遇他一邊於B,則$AB=BD$.

設　AD平分$\angle A$, $DB/\!/AC$.

求證　$AB=BD$.



(18)

證

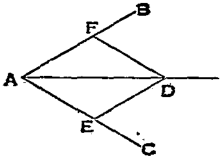
| 敘述. | 理由 |
|---|---|
| 1.　命$\angle A$的兩邊為AC,AE, ∴$\angle CAD=\angle DAE$. | 1.　題設AD是$\angle A$的分角綫. |

| | |
|---|---|
| 2. ∠ADB＝∠CAD. | 2. 平行綫間的內錯角相等(§104). |
| 3. ∠DAE＝∠ADB. | 3. 兩量都等於某量,他們相等(公理1). |
| 4. ∴AB＝BD. | 4. 三角形如兩角相等,其對邊相等(§121). |

19.若從一個角的二等分綫上的一點,作兩直線平行於此角的兩邊,則成一菱形.

**設**　AD平分∠A,　DE//AB, DF//AC.

**求證**　AEDF＝◇.



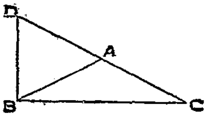
(19)

**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. ∠BAD＝∠CAD. | 1. 題設AD平分∠A. |
| 2. ∠BAD＝∠ADE,<br>∠CAD＝∠ADF. | 2. 平行綫間的內錯角相等(§104). |
| 3. ∴∠BAD＝∠ADF,<br>∠CAD＝∠ADE. | 3. 兩量都等於某量,他們相等(公理1). |
| 4. AF＝DF, AE＝DE. | 4. 三角形有兩角相等,其對邊相等(§121). |
| 5. 但AF//DE, AE//DF,<br>∴AEDF＝▱. | 5. 題設.四邊形的兩對邊平行爲平行四邊形(§136). |
| 6. ∴AF＝DE, AE＝DF. | 6. 平行綫所夾的平行綫相等(§141). |
| 7. ∴AF＝AE＝DF＝DE. | 7. 代替4同6(公理12). |

| | |
|---|---|
| 8. ∴AEDF=◇. | 8. 菱形是四邊相等的平行四邊形(§137). |

**20.**兩個等腰三角形的頂角互爲補角,則其底角互爲餘角.



(20, 22)

**設** △ABC及△ABD爲兩個等腰三角形,$\angle BAC+\angle BAD=180^\circ$

**求證** $\angle ABC+\angle ABD=90^\circ$.

**證** 命 $\angle BAC=m^\circ$, $\angle BAD=n^\circ$

$\therefore m^\circ+n^\circ=180^\circ$.

又命 $\angle ABC=\angle ACB=s^\circ$, $\angle ABD=\angle ADB=l^\circ$.

$\therefore m^\circ=180^\circ-2s^\circ$, $n^\circ=180^\circ-2l^\circ$.

即 $m^\circ+n^\circ=360^\circ-2(l^\circ+s^\circ)$, $180^\circ=360^\circ-2(l^\circ+s^\circ)$.

$2(l^\circ+s^\circ)=180^\circ$, $l^\circ+s^\circ=90^\circ$, $\therefore \angle ABC+\angle ABD=90^\circ$.

**注意:** 此圖爲便利計,使C,A,D在一直綫上,又 AD=AB=AC.但觀上證與邊無涉,可知兩形只要是等腰三角形,邊可以長短,角的關係還是如此.

**21.**若過等腰三角形的頂點,而延長其一腰,使延長部分與此腰相等,則延長綫末端與底邊近端的聯結綫,必垂直於底邊.

**設** 等腰三角形ABC,引長CA到D,使AD=AC.

**求證** DB⊥BC.

**證**

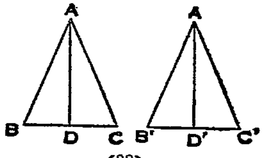
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AC=AB. | 1. 等腰三角形有兩邊相 |

| | |
|---|---|
| | 等(§58). |
| 2.　$AC=AD$. | 2.　題設. |
| 3.　$\therefore AD=AB$. | 3.　公理1. |
| 4.　$\therefore \triangle ABD$ 爲等腰三角形. | 4.　同1. |
| 5.　但 $\angle BAC+\angle BAD=180°$. | 5.　題設 AD 是 CA 的引長綫. |
| 6.　$\therefore \angle ABC+\angle ABD=90°$. | 6.　見上題. |
| 7.　$\therefore \angle DBC=90°$,<br>即 $DB\perp BC$. | 7.　公理10. |

**22.** 兩個全同三角形的相當中綫必相等.

**設**　$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$, AD 同 A′D′ 爲相當中綫.

**求證**　$AD=A'D'$.



(22)

### 證

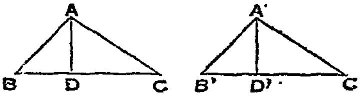
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　$AB=A'B'$. | 1.　題設 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$ 的相當邊(§70). |
| 2.　$BC=B'C'$. 故 $BD=B'D'$. | 2.　同上.又等量的一半相等(公理8). |
| 3.　$\angle B=\angle B'$. | 3.　全同形的相當角相等(§70). |
| 4.　$\therefore\triangle ABD\cong\triangle A'B'D'$ | 4.　s.a.s.=s.a.s. (§69). |
| 5　$\therefore AD=A'D'$. | 5.　相當邊相等(§70). |

**23.** 兩個全同三角形的相當高必相等.

**設** $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$,

AD同A'D'爲相當高.

**求證** $AD = A'D'$.



(23)

**證**

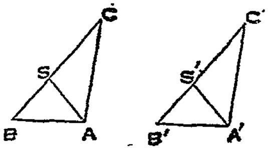
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AD \perp BC$, $A'D' \perp B'C'$, 故 $\angle ADB = \angle A'D'B' = \text{rt.} \angle$. | 1. 凡直角都相等(§46). |
| 2. $AB = A'B'$. | 2. 相當邊相等(§70). |
| 3. $\angle B = \angle B'$. | 3. 相當角相等(§70). |
| 4. $\therefore \triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$. | 4. 兩直角三角形的斜邊及一銳角相等,則此兩形全同(§116). |
| 5. $\therefore AD = A'D'$. | 5. 相當邊相等(§70). |

**24.** 兩個全同三角形的相當角二等分綫必相等.

**設** $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$,

AS同A'S'爲相當分角綫.

**求證** $AS = A'S'$.



(24)

**證**

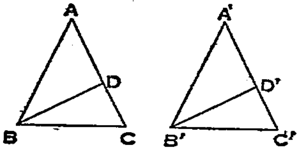
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle A = \angle A'$, 故 $\angle BAS = \angle B'A'S'$. | 1. 相當角相等(§70). 又等量的一半相等(公理8). |
| 2. $\angle B = \angle B'$. | 2. 相當角相等(§70). |

| | |
|---|---|
| 3. $AB=A'B'$. | 3. 相當邊相等(§70). |
| 4. $\therefore \triangle ABS \cong \triangle A'B'S'$. | 4. a.s.a.=a.s.a.(§66). |
| 5. $\therefore AS=A'S'$. | 5. 相當邊相等(§70). |

25.兩個等腰三角形,各有一腰上的高和頂角彼此各各相等,則兩形全同.

設 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 都等腰,而 $\angle A=\angle A'$,高 $BD=$ 高 $B'D'$.

求證 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

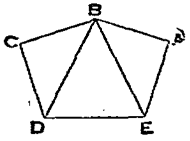


(25)

## 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $BD \perp AC$, $B'D' \perp A'C'$, 故 $\angle ADB=\angle A'D'B'$. | 1. 兩綫互相⊥他們相交成直角(§30).凡直角相等(§46). |
| 2. $\angle A=\angle A'$. | 2. 題設. |
| 3. $BD=B'D'$. | 3. 題設. |
| 4. $\therefore \triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$. | 4. 二直角三角形有一直角邊及一銳角相等,他們全同(§117). |
| 5. $\angle BDC=\angle B'D'C'$. | 5. 同1. |
| 6. $\angle A=180^\circ-2\angle C$,<br>$\angle A'=180^\circ-2\angle C'$.<br>$\therefore \angle C=\angle C'$. | 6. 等腰三角形的兩底角相等(§71).三角形三角之和爲一平角(§110). |
| 7. $\therefore \triangle BDC \cong \triangle B'D'C'$. | 7. 同4. |
| 8. $\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. | 8. s.s.s.=s.s.s.(由證4及證7). |

**26.**若在五邊形ABCDE中，AB=BC, AE=CD, 又∠A=∠C; 則BE=BD, 又∠E=∠D



(26)

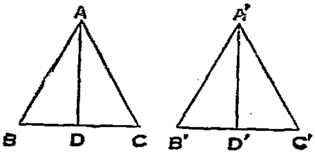
**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB=BC. | 1. 題設. |
| 2. ∠A=∠C. | 2. 題設. |
| 3. AE=CD. | 3. 題設. |
| 4. ∴△ABE≅△CBD. | 4. s.a.s.=s.a.s. (§69). |
| 5. ∴BE=BD. | 5. 相當邊相等(§70). |
| 6. ∠BDC=∠BEA. | 6. 相當角相等(§70). |
| 7. ∠BDE=∠BED. | 7. △BDE 是等腰三角形. 等腰三角形的兩個底角相等(§71). |
| 8. ∠D=∠BDC+∠BDE.<br>∠E=∠BEA+∠BED. | 8. 全體等於其各部分之和(公理10). |
| 9. ∴∠D=∠E. | 9. 等量加等量,其和相等(公理1). |

**27.**兩個等邊三角形的高彼此相等,則兩形全同.

**設** △ABC及△A′B′C′是兩個等邊三角形,兩高AD=A′D′.

**求證** △ABC≅△A′B′C′.

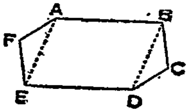


(27)

### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AD \perp BC$, $A'D' \perp B'C'$. | 1. 三角形的高是從頂角到對邊的垂綫(§63). |
| 2. $\angle ADB = \angle A'D'B' = \text{rt.} \angle$. | 2. 凡直角都相等(§46). |
| 3. $\angle B = \angle B'$. | 3. 等邊三角形的各角,都是60°(§115). |
| 4. $AD = A'D'$. | 4. 題設. |
| 5. $\therefore \triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$. | 5. 兩直角三角形的一直角邊及一銳角相等,則兩形全同(§117). |
| 6. 同理 $\triangle ACD \cong \triangle A'C'D'$. | 6. 從1到5那麼樣證明. |
| 7. $\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. | 7. s.s.s.=s.s.s.(由證5及證6). |

**28.** 若六邊形的對邊均平行,又兩對邊相等,則各對邊均相等.



(28)

**設**　ABCDEF 六邊形 $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$, $AB = DE$,

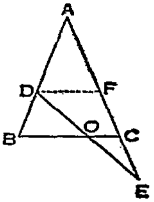
**求證**　$BC = EF$, $CD = FA$.

### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作 AE, BD. | 1. 兩點之間,可作一直綫(公理13). |
| 2. $\because AB \underline{\parallel} DE$. | 2. 題設. |

| | |
|---|---|
| 3.　∴$AE \underline{\parallel} BD$. | 3.　ABDE是□(§144). |
| 4.　在△AFE及△BCD內,<br>AF//CD, EF//BC, $AE \underline{\parallel} BD$. | 4.　題設.又證3. |
| 5.　∴△AFE≅△BCD. | 5.　因兩三角形三邊都平行,故三角皆相等(§108引伸).又有一邊相等,故兩形全同(a.s.a.=a.s.a.). |
| 6.　∴BC=EF, CD=FA. | 6.　相當邊相等(§70). |

29.從等腰三角形ABC底邊BC兩端,在一腰上截取BD,在他一腰的延長線上取CE,若BD=CE,則DE的聯結線被底邊BC所二等分.



(29)

設　等腰三角形ABC, BD=CE.

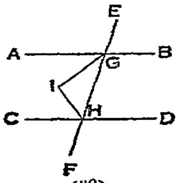
求證　DO=OE.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　作DF//BC. | 1.　通過定點作定直綫的平行綫(§100). |
| 2.　∠ADF=∠B,<br>∠AFD=∠ACB. | 2.　兩平行綫與一截綫所成的同位角相等(§106). |
| 3.　但∠B=∠ACB. | 3.　等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| 4.　∴∠ADF=∠AFD. | 4.　代替(公理12). |
| 5.　AD=AF. | 5.　三角形有兩角相等,其 |

| | |
|---|---|
| | 對邊相等(§121). |
| **6.** AB=AC. | **6.** 等腰三角形有兩邊相等(§58). |
| **7.** ∴BD=CF. | **7.** 等量減等量,其餘量相等(公理 3). |
| **8.** 但 BD=CE. | **8.** 題設. |
| **9.** ∴CF=CE. | **9.** 兩量都等於某量,他們相等(公理 1). |
| **10.** DF//OC. | **10.** 平行綫是任何地方平行的(§142).由 1 而得. |
| **11.** ∴DO=OE. | **11.** 一綫平行於三角形的一邊,又平分他邊,便平分第三邊(§149). |

**30.** 若兩直線爲一截線所截,其同旁內角的二等分綫互相垂直,則此兩直綫平行.



(30)

設　截綫EF,交AB,CD兩綫於G,於H,如兩分角綫GI⊥HI.

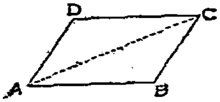
求證　AB//CD.

**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** GI⊥HI. | **1.** 題設. |
| **2.** ∴∠IGH+∠IHG=90°. | **2.** 直角三角形的兩銳角相餘(§112). |
| **3.** 但 $\angle IGH=\frac{1}{2}\angle AGH$, | **3.** 題設 GI 平分 ∠AGH, |

| | |
|---|---|
| $\angle IHG=\frac{1}{2}\angle CHG$. | HI平分$\angle CHG$ |
| 4. $\therefore \angle AGH+\angle CHG=180^\circ$. | 4. 等量的加倍相等(公理7). |
| 5. 但$\angle AGH$及$\angle CHG$爲同側的兩內角:<br>$\therefore AB//CD$. | 5. 如一截綫截兩綫所成同側的兩內角相補,這兩綫平行(§97). |

**31.** 四邊形的各對角相等,則此形是平行四邊形.



(31)

設 四邊形ABCD. $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$.

求證 ABCD是▱.

證 作AC, 命$\angle ACB=m^\circ$, $\angle CAB=n^\circ$, $\angle ACD=s^\circ$, $\angle CAD=l^\circ$.

但$\angle B=180^\circ-m^\circ-n^\circ$, $\angle D=180^\circ-l^\circ-s^\circ$, 而$\angle B=\angle D$.

$\therefore 180^\circ-m^\circ-n^\circ=180^\circ-l^\circ-s^\circ$, 即$m^\circ+n^\circ=l^\circ+s^\circ$ ····(1).

又因$\angle A=l^\circ+n^\circ$, $\angle C=m^\circ+s^\circ$, 而$\angle A=\angle C$.

$\therefore l^\circ+n^\circ=m^\circ+s^\circ$, 或作$l^\circ-s^\circ=m^\circ-n^\circ$ ························(2).

以(1)(2)相加減而以2除之,

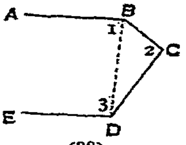
$\therefore m^\circ=l^\circ$, $n^\circ=s^\circ$, 又$AC=AC$,

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle ADC$ (a.s.a.=a.s.a.).

$\therefore AB=CD$, $AD=BC$, 由§143知ABCD是▱.

**32.** 若$AB//ED$,

則$\angle 1+\angle 2+\angle 3=4$rt.$\angle$s.



(32)

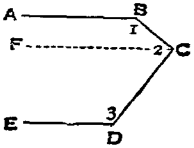
**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作BD. | 1. 兩點之間,可作一直綫(公理13). |
| 2. $\angle ABD+\angle BDE=180°$. | 2. 一截綫與兩平行綫所成同側的兩內角相補(§107). |
| 3. $\angle CBD+\angle CDB+\angle 2=180°$. | 3. 三角形三內角之和等於一平角(§110). |
| 4. 但$\angle 1=\angle ABD+\angle CBD$,<br>$\angle 3=\angle BDE+\angle CDB$. | 4. 全體等於其各部分之和(公理10). |
| 5. $\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 3=360°$ 或$4rt.\angle s$. | 5. 2加3以4代入所得(公理2及12). |

33.敍述並證明前面的一個命題的逆定理.

設　$\angle 1+\angle 2+\angle 3=4rt.\angle s$.

求證　AB//ED.



(33)

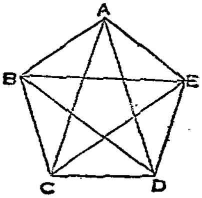
**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作CF//AB. | 1. 過定點作定直綫的平行綫(§100). |
| 2. $\therefore \angle 1+\angle BCF=2rt.\angle s$. | 2. 一截綫與兩平行綫所成同側的兩內角相補(§107). |
| 3. $\angle 1+\angle 2+\angle 3=4rt.\angle s$. | 3. 題設. |
| 4. $\angle 2=\angle BCF+\angle DCF$. | 4. 全體等於其各部分之 |

| | |
|---|---|
| | 和(公理10). |
| **5.** $\therefore 2\text{rt.}\angle\text{s.}+\angle 3+\angle DCF$<br>$=4\text{rt.}\angle\text{s.}$<br>$\angle 3+\angle DCF=2\text{rt.}\angle\text{s.}$ | **5.** 4代入3再以2代入所得(公理12). |
| **6.** ED∥CF. | **6.** 一截綫與兩綫所成同側的兩內角相補,這兩綫平行(§97). |
| **7.** ∴AB∥ED. | **7.** 由1及6, §92. |

**注意:** 作CF也可以證32題.

34.五邊形的對角線有多少? 八邊形? 十邊形? n邊形?



(34)

**答** 按§55對角綫的定義云:(對角綫是聯絡多邊形的不同邊的兩頂角的直綫).五邊形ABCDE有五個頂角,先求每角上有幾根對角綫.除卻本角及同邊的兩個角外所餘之角數,便是對角綫數,所以由$5-3=2$知道每角上有兩根對角綫,五個角有$5\times2=10$根對角綫;但一根對角綫要占兩個角,所以全體的對角綫只有一半,就是$\frac{10}{2}=5$,知道五邊形有5根對角綫.

同理八邊形的對角綫數$=\frac{(8-3)\times8}{2}=\frac{40}{2}=20$根.

十邊形的對角綫數$=\frac{(10-3)\times10}{2}=\frac{70}{2}=35$根.

n邊形的對角綫數$=\frac{(n-3)n}{2}$根.

35.一個多邊形的內角之和,等於外角之和的三倍,這是幾邊形呢?(每一個項點的一個外角).

證　命多邊形的邊數$=n$.

那麼其內角之和$=(n-2)$st.∠s. (§156).

但多邊形外角之和$=2$st.∠s. (§158).

今題設$(n-2)$st.∠s.$=3\times2$st.∠s.

$\therefore$ $n-2=3\times2$, $n=6+2=8$, 故這多邊形有八邊.

36.一個多邊形的內角之和,等於外角之和,這是幾邊形呢?

證　同上題 $n-2=2$, $n=4$, 這多邊形有四邊.

37.一個多邊形內角之和,等於六邊形內角之和的三倍,這是幾邊形呢?

證　六邊形各內角之和$=(6-2)$st.∠s.$=4$st.∠s.

所求多邊形各角之和$=(n-2)$st.∠s.

題設$3\times4$st.∠s.$=(n-2)$st.∠s.

$\therefore(n-2)=3\times4$, $n=12+2=14$. 這是十四邊形.

38.一個等角多邊形的一個外角,等於等邊三角形的一個內角,這是幾邊形呢?

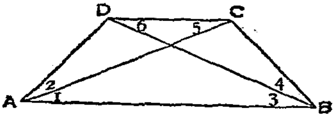
證　等邊三角形的內角$=60°$, 多邊形外角之和$=2$st.∠s.

$\therefore$ n邊形的每外角$=\frac{2}{n}$st.∠s.

題設 $\frac{2}{n}$st.∠s.$=60°$,即$\frac{2}{n}\times3\times60°=60°$.

$\therefore$ $n=2\times3=6$. 這是六邊形.

39.若等腰梯形的上底,等於他的一個腰,則其對角綫必二等分其下底的底角.



(39)

**設** 等腰梯形ABCD, $AD=BC=CD$.

**求證** $\angle 1=\angle 2, \angle 3=\angle 4$.

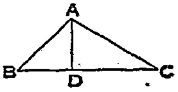
**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AD=CD$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle 2=\angle 5$. | 2. 等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| 3. $\angle 1=\angle 5$. | 3. 平行綫間的內錯角相等(§104). |
| 4. $\therefore \angle 1=\angle 2$. | 4. 兩量都等於某量,他們相等(公理1). |
| 5. 同理由$BC=CD$知$\angle 3=\angle 4$. | 5. 由1到4那麼樣證明. |

40.若從三角形的頂點作底邊的垂綫,則底邊的兩綫分,各比他的鄰邊短.

**設** $\triangle ABC$的$AD\perp BC$.

**求證** $AB>BD, AC>CD$.



(40)

**證**

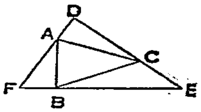
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AD\perp BC$,故 | 1. 凡直角都相等(§46). |

| | |
|---|---|
| ∠ADB=∠ADC=rt.∠. | |
| 2. ∠ADB>∠DAC,<br>∠ADC>∠DAB. | 2. 三角形的一外角,大於任一他內角(§88). |
| 3. ∴∠ADB>∠DAB,<br>∠ADC>∠DAC. | 3. 代替(公理12). |
| 4. ∴AB>BD, AC>CD. | 4. 大角所對的邊大(§130). |

**41.**甲三角形的各項點,落在乙三角形的各邊上,則甲形的周圍,比乙形的周圍小.

**設**　△ABC的三項點,在△DEF的三邊內.

**求證**　AB+BC+CA<DE+EF+FD.



(41)

**證**

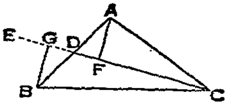
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB<FA+BF,<br>BC<EB+CE,<br>CA<DC+AD. | 1. 三角形兩邊之和大於第三邊(§128). |
| 2. AB+BC+CA<FA+BF+EB+CE+DC+AD. | 2. 大量之和大於小量之和(按此條公理本書缺). |
| 3. 但是DE=DC+CE,<br>EF=EB+BF,<br>FD=FA+AD. | 3. 全體等於其各部分之和(公理10). |
| 4. ∴AB+BC+CA<DE+EF+FD. | 4. 代替(公理12). |

**42.**從三角形的兩項點,作從第三項點所引中線的

垂綫,則此兩垂線相等.

設 $\triangle ABC$, CD爲第三角的中綫, $AF \perp CD$, $BG \perp CE$ (CD的引長).

求證 $AF=BG$.



(42)

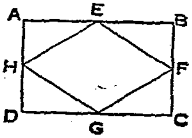
證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AD=BD$. | 1. 中綫是從頂角聯對邊中點的直綫(§64). |
| 2. $\angle ADF=\angle BDG$. | 2. 對頂角相等(§53). |
| 3. $\angle AFD=\angle BGD=$rt.$\angle$. | 3. 凡直角都相等(§46). |
| 4. $\therefore \triangle AFD \cong \triangle BGD$ | 4. 兩直角三角形的斜邊和一銳角相等,兩形全同(§116). |
| 5. $\therefore AF=BG$. | 5. 相當邊相等(§70). |

43.順次聯結矩形的各邊的中點,則諸聯結線成一菱形.

設 矩形ABCD, 四邊的中點爲E, F, G, H.

求證 $EFGH=\Diamond$.



(43)

證

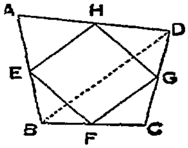
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AE=EB=CG=GD$.<br>$AH=HD=BF=FC$. | 1. 平行四邊形的兩對邊相等(§136). 矩形是有直角的平行四邊形(§137). 等量的一 |

| | |
|---|---|
| | 半相等(公理8). |
| 2. $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\text{rt.}\angle$. | 2. 凡直角都相等(§46). |
| 3. $\triangle AEH\cong\triangle BEF\cong\triangle CGF\cong\triangle DGH$. | 3. 四直角三角形的二直角邊相等(§69. 即 s.a.s.=s.a.s.) |
| 4. EF=FG=GH=HE. | 4. 相當邊相等(§70). |
| 5. EFGH=菱形. | 5. 菱形是四邊相等的平行四邊形(§137). |

**44.** 順次聯結任意四邊形各邊的中點,則諸聯結線成一平行四邊形.

**設** 四邊形ABCD,其各邊中點爲E,F,G,H.

**求證** EFGH是▱.



(44)

### 證

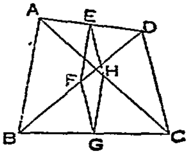
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作對角綫BD | 1. 兩點之間,可作一直綫(公理13). |
| 2. 在△ABD內, AH=HD, AE=EB. | 2. 題設H,E是AD及AB的中點. |
| 3. ∴HE//BD. | 3. 聯三角形兩邊中點的直綫平行於第三邊(§153). |
| 4. 在△BCD內, BF=FC, CG=GD. | 4. 題設F,G是BC及CD的中點. |
| 5. ∴FG//BD. | 5. 同3. |

| | |
|---|---|
| 6. ∴HE//FC | 6. 兩綫都平行於第三綫,他們也平行(§92). |
| 7. 同理作AC可證得EF//HG. | 7. 從1到6那麼證明. |
| 8. ∴EFGH=□. | 8. 四邊形兩對邊相平行,是平行四邊形(§136). |

**45.**四邊形一雙對邊的兩中點,及兩對角綫的兩中點,是一平行四邊形的四項點.

**設** 四邊形ABCD, E,G爲AD及BC的中點, F.H爲BD,AC的中點.

**求證** EFGH是□.



(45)

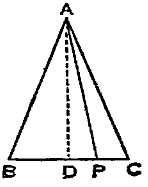
**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 在△ABD內, AE=ED, BF=FD. | 1. 題設. |
| 2. ∴EF//AB. | 2. 聯三角形兩邊中點的綫//第三邊(§153). |
| 3. 在△ABC內, AH=HC, BG=GC. | 3. 同1. |
| 4. ∴GH//AB. | 4. 同2. |
| 5. ∴EF//GH. | 5. 兩綫都//第三綫,他們也//(§92). |
| 6. 同理可證得FG//HE. | 6. 從1到5那麼證明. |
| 7. ∴EFGH是□. | 7. §136定義. |

**46.** 從等腰三角形的頂點至底邊上任意一點的一直綫,必小於其一腰.

**設** 等腰三角形 ABC, P 爲 BC 內任意點.

**求證** $AP<AC$.

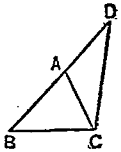


(46)

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作 AD⊥BC. | 1. 從一直綫外的一點,作那綫的垂綫(§87). |
| 2. $DP<DC$. | 2. 全體大於其任何部分(公理 11). |
| 3. ∴ $AP<AC$. | 3. 如從定直綫的垂綫上一點,向此作兩斜綫,其與垂足距離較大的,則這綫較長(§135). |

**47.** 在三角形 ABC 中, $AB>AC$, D 是 BA 延長綫上的一點.則 $DB>DC$.



(49)

**證**

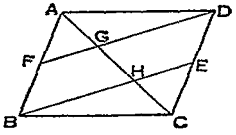
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AB>AC$. | 1. 題設. |
| 2. ∴ $\angle ACB>\angle ABC$. | 2. 大邊所對的角大(§129). |

| | |
|---|---|
| **3.** 但 $\angle BCD=\angle ACB+\angle ACD$. | **3.** 全體等於其各部分之和(公理10). |
| **4.** $\therefore\angle BCD>\angle ACB$. | **4.** 全體大於其任何部分(公理11). |
| **5.** $\therefore\angle BCD>\angle ABC$.<br>即 $\angle BCD>\angle DBC$. | **5.** 如三量的第一量大於第二量,而第二量大於第三量.則第一量大於第三量(公理9). |
| **6.** $\therefore DB>DC$. | **6.** 大角所對的邊大(§130). |

**48.** 平行四邊形兩對邊的中點與一對角綫兩端的聯結線,必分另一對角綫爲三等分.

**設** □ABCD, E, F 是 CD, AB 的中點.

**求證** $AG=GH=HC$.



(48)

### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $AF=FB=CE=ED$. | **1.** 平行四邊形的對邊相等(§139).等量的一半相等(公理8). |
| **2.** $AD=BC$. | **2.** 同上. |
| **3.** $\angle A=\angle C$. | **3.** 平行四邊形的對角相等(§139). |
| **4.** $\therefore\triangle ADF\cong\triangle CBE$. | **4.** s.a.s.=s.a.s. (§69). |
| **5.** $FD=BE$. | **5.** 相當邊相等(§70). |
| **6.** $FD/\!/BE$. | **6.** 四邊形的對邊相等,則 |

| | |
|---|---|
| | 此形是平行四邊形(§143). |
| **7.** $\therefore AG=GH, HC=GH.$ | **7.** 一綫平行於三角形的一邊,又平分他邊,便平分第三邊(§149). |
| **8.** $\therefore AG=GH=HC.$ | **8.** 兩量都等於某量,他們也相等(公理 1). |

### 又證

| 敍　述 | 理　由 |
|---|---|
| **1.** $AB \overset{\parallel}{=} CD.$ | **1.** 平行四邊形的對邊相等(§139). |
| **2.** $FB \overset{\parallel}{=} ED.$ | **2.** 等量的一半相等(公理 8). 又 §142. |
| **3.** $\therefore$FBED 成 ▱ 而 FD∥BE. | **3.** §144. |
| **4.** 卽 FG∥BH, HE∥GD. | **4.** ∥綫是任何地方都∥的(§142). |
| **5.** $\therefore AG=GH, HC=GH.$ | **5.** 一綫 ∥△ 的一邊,又平分他邊,便平分第三邊(§149). |
| **6.** $\therefore AG=GH=HC.$ | **6.** 兩量都等於某量,他們也相等(公理 1). |

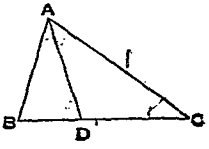
**注意:** 如上二證,第二證途徑較捷,此處但舉一例;以後凡可以有幾種證法的,但列一種證法.

**49.** 在 $\triangle ABC$ 中, BC 邊上的一點 D 與 A 聯結,而 $AC=BC$, $AB=AD=DC$; 則 $\angle C=36^\circ$.

**證**　命 $\angle B=m^\circ$, $\angle C=n^\circ$;

$\because AC=BC$, $\therefore \angle A=\angle B=m^\circ$ (§71);

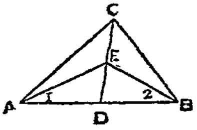
又 $AB=AD$, $\therefore \angle ADB=\angle B=m^\circ$;
$AD=DC$, $\therefore \angle DAC=\angle C=n^\circ$.
在$\triangle ADC$內, $\angle ADC=180^\circ-2n^\circ$ (§110), BDC一直線上$\angle ADC=180^\circ-m^\circ$(§50), $\therefore m^\circ=2n^\circ$.



(49)

但 $\angle A=m^\circ$, $\angle DAC=n^\circ$,
$\therefore \angle BAD=m^\circ-n^\circ=n^\circ$ ($\because m^\circ=2n^\circ$).
在$\triangle ABD$內, $n^\circ+2m^\circ=180^\circ$(§110),卽$5n^\circ=180^\circ$,卽$n^\circ=36^\circ$.
$\therefore \angle C=36^\circ$.

**50.** 若中綫CD上的任一點E,與A及B聯結,而$\angle B>\angle A$,求證$\angle 2>\angle 1$.



(50)

### 證

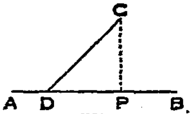
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle B>\angle A$. | 1. 題設. |
| 2. $\therefore AC>BC$. | 2. △的兩角不等,其對邊不等,而較大的角所對的邊較大(§130). |
| 3. $AD=BD$, $CD=CD$. | 3. 題設CD是中綫,故D爲AB的中點(§64).又CD公用. |
| 4. $\therefore \angle ADC>\angle BDC$. | 4. 兩△的兩邊相等,但此第三邊>彼第三邊,則他們所夾的角此>彼(§133). |
| 5. $AE>BE$. | 5. 兩△的兩邊相等,但其 |

| | |
|---|---|
| | 夾角,此>彼,則此第三邊>彼第三邊(§132). |
| 6.　∴∠2>∠1. | 6.　△ABE內AE>BE. |

**51.** 從一直綫外的一已知點作一直綫,與已知直綫成一等於半直角的角.

**設**　定綫AB,定點C,

**求作**　$\angle CDB=\frac{1}{2}$rt.∠.



(51)

**作法**　依§87法,作CP⊥AB.

以P爲心,以PC爲度,作弧截AB於D.

聯CD,則 $\angle CDB=\frac{1}{2}$rt.∠.

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　∠DPC=rt.∠. | 1.　作圖,CP⊥AB. |
| 2.　∠DCP+∠CDP=rt.∠. | 2.　2rt.∠s−∠DPC. |
| 3.　∴$\angle CDP=\frac{1}{2}$rt.∠. | 3.　PC=PD. |

**52.** 從一直綫外的一已知點,作一直綫,與已知直綫成一60°的角,這樣的直綫,可作多少.

**設**　定綫AB,定點C.

**求作**　$\angle CDB=60°$.

**作法**　依§87法,作CP⊥AB.

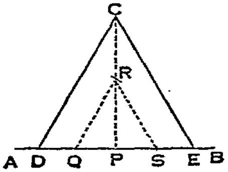
從垂足P在AB內取任意之長PQ,以Q爲中心2PQ爲度,作短弧,截CP於R.

作RQ, 則∠RQB=60° (§165).

又依§100法作CD//RQ, 則∠CDB=60°(§106).

但Q在P的左邊,他右邊也有相當點S, 可作RS.又CE//RS. ∠CEA也=60°.

所以從C到AB, 可以作兩條直綫使和AB相交成60°的角.



(52)

**注意:** 亦可平分60°角,依53題法作之.

**53.** 從一直綫外的一已知點作一直綫,與已知直線成一已知角.

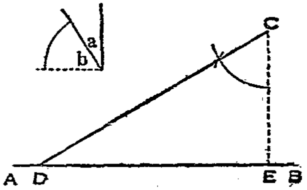
**設**　定綫AB, 定點C, 定角a.

**求作**　∠CDB=∠a.

**作法**　先作∠a一邊之垂綫,得∠a的餘角∠b(§35).

再依§87法作CE⊥AB.

又依§85法作∠DCE=∠b,交AB於D,則∠CDB=∠a.因爲∠CEA=rt.∠.由(§112)直角三角形的兩銳角相餘知道的.



(53)

**54.** 作一直線至一已知角的兩邊上,使這直線等於且平行於一已知直綫.

**設**　∠PQR, 及AB.

**求作**　CD$\overset{\parallel}{=}$AB, 又C,D須在PQ, QR上.

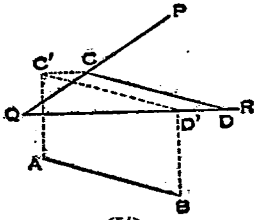
**作法**　作BD′⊥QR(§87), AC′//BD′, D′C′//AB.(§100),

則 ABD′C′爲□. 故 C′D′$\underline{\parallel}$AB.

又作 C′O∥QR, CD∥C′D′,

那麼 C′D′DC 爲 □,故 CD$\underline{\parallel}$C′D′.

∴ CD$\underline{\parallel}$AB (§92 及公理 1).

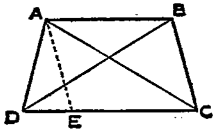


(54)

**55.等腰梯形的對角綫相等.**

設　等腰梯形ABCD.

求證　AC=BD.

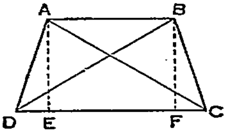


(55)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　作 AE∥BC. | 1.　通過定點,作定綫的平行綫(§100). |
| 2.　ABCE=□ | 2.　梯形是有兩邊平行的四邊形(§136).又作圖. |
| 3.　∠AED=∠BCD. | 3.　同位角相等(§106). |
| 4.　AD=AE. | 4.　因爲 AD=BC, AE=BC, 公理1. |
| 5.　∴∠D=∠AED. | 5.　等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| 6.　∴∠D=∠BCD 或 ∠C. | 6.　公理1. |
| 7.　AD=BC.又 DC=DC. | 7.　題設.又公用. |
| 8.　△ACD≅△BDC. | 8.　s.a.s.=s.a.s.(§69). |
| 9.　∴AC=BD | 9.　相當邊相等(§70). |

56.若梯形的對角線相等,則此形爲等腰梯形.



(56)

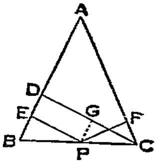
**設**　梯形 ABCD 中 $AC=BD$.

**求證**　$AD=BC$.

**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AC=BD$. | 1. 題設. |
| 2. 作 $AE\perp CD$, $BF\perp CD$. | 2. 從一直綫外的一點,作他的垂綫(§87). |
| 3. $AE=BF$. | 3. 兩平行綫間的垂綫都相等(§141 的特例). |
| 4. $\triangle AEC\cong\triangle BFD$. | 4. 兩直角三角形,其斜邊及一直角邊相等,則兩形全同(§124). |
| 5. $\therefore CE=DF$. | 5. 相當邊相等(§70). |
| 6. $CD-CE=CD-DF$. | 6. 等量減等量,其餘量相等(公理 2). |
| 7. 卽 $DE=CF$. | 7. 6 的餘量. |
| 8. $\therefore\triangle AED\cong\triangle BFC$. | 8. s.a.s.=s.a.s.(§69). |
| 9. $\therefore AD=BC$. | 9. 相當邊相等(§70). |

57.在等腰三角形中,從底邊上任意一點,作兩腰的垂綫,其和等於一腰上的高.



(57)

**設**　等腰 $\triangle ABC$, P 爲底邊 BC

內任意的一點, PE⊥AB, PF⊥AC, CD⊥AB.

**求證**　PE+PF=CD.

**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作PG⊥CD. | 1. 從一直綫外的一點,作他的垂綫(§87). |
| 2. GP//DE, DG//EP. | 2. 兩直綫皆垂直於第三直綫,則此兩直綫平行(§96). |
| 3. DEPG=▭. | 3. §136. 又▭的角都是直角的,叫做矩形. |
| 4. 在△GPC及△FCP內,<br>∠PGC=∠CFP=rt.∠.<br>PC=PC.<br>∵∠B=∠C, ∠B=∠GPC,<br>∴∠GPC=∠C. | 4. 凡直角都相等(§46).PC公用.等腰三角形的兩底角相等(§71).同位角相等(§106).等於同量的量相等(公理 1). |
| 5. ∴△GPC≅△FCP. | 5. 兩直角三角形的斜邊及一銳角相等,他們全同(§116). |
| 6. PF=GC. | 6. 相當邊相等(§70). |
| 7. 但CD=GC+DG. | 7. 全體等於其各部分之和(公理10). |
| 8. DG=EP. | 8. 矩形的對邊相等(§137及§139). |
| 9. ∴EP+PF=CD. | 9. 代替(公理12). |

58.在△ABC中,若AE=BF,又AC//EG//FH.

**求證**　EG+FH=AC.

**證**　1. 作EI//BC, ∴∠AEI=∠FBH (同位角§106), ∠IAE=∠HFB (同上),AE=FB (題設).

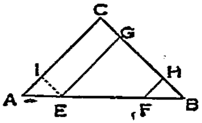
∴△AIE≅△FHB(a.s.a.=a.s.a.).

2. AI=FH(相當邊§70).

3. CI=EG(▱的對邊§139).

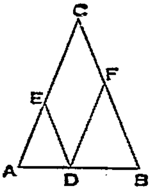
4. ∴EG+FH=CI+AI(等量加等量,其和相等.公理2).

5. ∴EG+FH=AC(代替.公理12).



(58)

**59.** 在等腰三角形ABC中,過底邊AB上的一點D,作兩腰的平行綫,各遇兩腰於E及F,則DF+DE=AC.



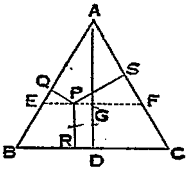
(59)

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. DF//AC, DE//BC. | 1. 題設. |
| 2. DF=CE. | 2. 平行四邊形的對邊相等(§139). |
| 3. ∠A=∠B. | 3. 等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| 4. ∠ADE=∠B | 4. 兩平行綫和截綫所成的同位角相等(§106). |
| 5. ∴∠A=∠ADE. | 5. 代替(公理12). |
| 6. AE=DE. | 6. 三角形有兩角相等,他的對邊相等(§121). |

| | | |
|---|---|---|
| 7. | $AC=AE+CE$. | 7. 全體等於其各部分之和(公理10). |
| 8. | $\therefore DF+DE=AC$. | 8. 代替(公理12). |

60.從等邊三角形中的任意一點,作三邊的垂綫,其和是一定量,且等於這三角形的高.



(60)

**設**　等邊△ABC, P爲其形內任意一點.PQ,PR,PS爲三邊的垂綫,AD爲高.

**求證**　$PQ+PR+PS=AD$.

### 證

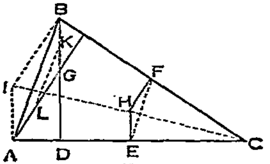
| | 敍述 | 理由 |
|---|---|---|
| 1. | 通過P作EF//BC. | 1. 通過定點作定綫的平行綫(§100). |
| 2. | $PQ+PS=AG$. | 2. 見本節習題57.但AEF爲等邊△,故三高相等. |
| 3. | PG//RD, PR//GD. | 3. 兩者是(一直綫垂直於平行綫中之一,也垂直於他綫)§105. 故PRDG=▭. |
| 4. | $\therefore PR=GD$. | 4. 矩形的對邊相等(§137, §139). |
| 5. | 但$AD=AG+GD$. | 5. 全體等於其各部分之和(公理10). |
| 6. | $\therefore PQ+PR+PS=AD$. | 6. 2,4,5的代替(公理12). |

61.在△ABC中,一高BD與另一高相交於G,又EH及

HF是兩垂直二等分綫,

**求證** BG=2HE,

AG=2HF.



(61)

## 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作 BI⊥BC, AI⊥AC, 交於I. | 1. 在已知直線上的已知點,作此綫的垂線(§85).相交兩直線的垂線必相交(若不相交,則AI//BI, 而AC不得不//BC, (§105, §92)與假設不合). |
| 2. 聯IC,則H爲IC的中點. | 2. 見注. |
| 3. △BCI中,BF=FC,HF//BI,<br>∴BI=2HF,<br>△ACI中,AE=EC,HE//AI,<br>∴AI=2HE. | 3. 題設,F是BC的中點;E是AC的中點.三角形兩邊中點的聯結線,必平行於第三邊.且等於第三邊之半(§153). |
| 4. 但AI//BG, BI//AG,<br>故AGBI=▱. | 4. 兩直綫皆垂直於第三直綫,則此兩直綫平行(§90).又四邊形的對邊平行的,叫做平行四邊形(§136). |
| 5. ∴AI=BG, BI=AG. | 5. 平行四邊形的對邊各各相等(§139). |
| 6. ∴AG=2HF, BG=2HE. | 6. 代替(公理12). |

**注** E是AC中點,EH//AI,∴EH必過IC的中點.

F是BC中點, $FH\parallel BI$, ∴FH必過IC的中點.

但IC的中點只有一個,EH, FH的交點也只有一個,

故H不得不爲IC的中點.

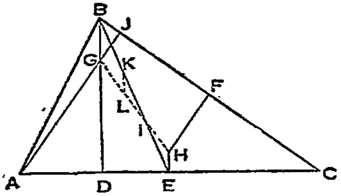
按此題若聯結EF并作AG, BG中點之聯線,途徑較捷.

因 $\triangle EFH\cong\triangle KLG$. $HF=LG=\frac{1}{2}AG$. $HE=KG=\frac{1}{2}BG$.

**62.在三角形中,高的交點,與垂直二等分綫的交點的聯結綫,必截中綫的三分之一.**

設　$\triangle ABC$, 三高相交之點爲G, 三垂直二等分綫相交之點爲H, BE爲相當之中綫.

求證　GH截BE於I, $EI=\frac{1}{3}BE$.



(62, 63)

### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　$EH\parallel BD$. | 1.　截綫與兩綫所成的同位角相等那兩綫平行(§95). |
| 2.　$\angle EHI=\angle BGI$.<br>$\angle IEH=\angle IBG$. | 2.　平行綫爲一截綫所截,其內錯角相等(§104). |
| 3.　在BI上取 $KI=EI$,<br>GI上取 $LI=HI$,<br>又聯結KL. | 3.　§39.<br>§13. |
| 4.　$\angle BIG=\angle EIH$. | 4.　對頂角相等(§53). |
| 5.　$\therefore\triangle KLI\cong\triangle EHI$. | 5.　s.a.s.=s.a.s.(§69). |

| | |
|---|---|
| 6. BG=2EH<br>EH=KL. | 6. 見61題.<br>相當邊相等(§70). |
| 7. ∴BG=2KL,即 KL=$\frac{1}{2}$BG,且KL(//EH)//BG,故K必須爲BI的中點. | 7. 由6代入.又三角形兩邊中點的聯結線,必平行於第三邊,且等於第三邊之半(§153). |
| 8. ∴BK=KI=EI,<br>即EI=$\frac{1}{3}$BE. | 8. 3,7的代替(公理12). |

**63.**三角形的高的交點,中綫的交點,和垂直二等分綫的交點,這三點在一直綫上.

**設** △ABC,三高的相交點爲G,三中綫的相交點爲I,三垂直平分綫的相交點爲H,

**求證** G,H,I在一直綫上,即I在GH上.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 三中綫的相交點I.<br>BI=$\frac{2}{3}$BE,即EI=$\frac{1}{3}$BE | 1. 三角形的三中綫,相交於一點,此點與頂點的距離等於頂點至對邊中點距離的三分之二(§164). |
| 2. GH與BE之交點也使EI=$\frac{1}{3}$BE. | 2. 見上題. |
| 3. ∴GH與中綫BE之交點,即爲三中綫之交點. | 3. 由1,2,之結論. |
| 4. ∴I在GH上.<br>即G,I,H在一直綫上 | 4. 由3. |

# 第二編

# 圓——作圖

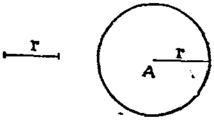
## 習題一（教科書第133—134頁）

1. 以A做中心,作半徑等於r之圓.

**設**　定點A,定半徑r.

**求**　作一圓.

**作法**　以圓規的針,對準r的一頭,張開圓規,使圓規的筆尖,對準r的別一頭.然後不再碰其兩脚.但以兩指捫住其柄,移針輕置A點上,旋轉其筆,描畫一圓,便是所求之圓.



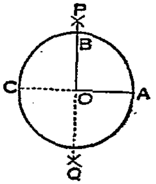
(1)

2. 作90°,60°,45°,30°的中心角.

(a)作90°中心角法:

先作任意的直徑AC.依§81法作垂直平分綫PQ.

那麼AOB角便是90°的中心角.



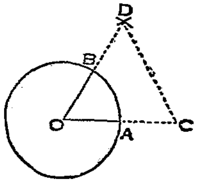
(2, a)

(b)作60°中心角法:

作圓半徑OA,引長之到C,使AC=OA.

以OC爲度,O,C各爲中心,作兩小弧,相交於D.

作OD,交圓周於B,



(2, b)

則 ∠AOB=60° 便是所求的中心角.

如作DC, △DOC是等邊三角形(§115).容易證明.

或以A爲心,以OA爲度,作弧交圓於B,聯BO,

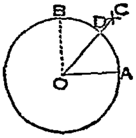
則∠AOB=60°.

(c) 作45°中心角法:

先依(a)法作角∠AOB=90°.

再依§83法平分之.

如此∠AOD=45°.



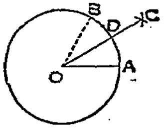
(2, c)

(d) 作30°中心角法:

先依(b)法作∠AOB=60°.

再依§83法平分之,

如此∠AOD=30°.

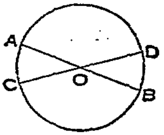


(2, d)

**3.** 求證任意直徑,必分圓爲二等分.

**設** AB, CD爲O圓的任意直徑.

**求證** $\widehat{ADB}=\widehat{ACB}$, 及 $\widehat{CAD}=\widehat{CBD}$.



(3)

**證**

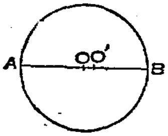
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AOB爲一直綫. | 1. 作圖.直徑是通過圓心,而兩頭爲圓所限的直綫(§174). |
| 2. ∴∠AOD+∠DOB=st.∠. | 2. 一直綫上的兩鄰角相補(§50). |

| | |
|---|---|
| 3. $\angle AOC+\angle COB=\text{st.}\angle$. | 3. 同上. |
| 4. $\therefore \overset{\frown}{ADB}=\overset{\frown}{ACB}$. | 4. 等角的對弧相等(§176定義細註). |
| 5. 同理 $\overset{\frown}{CAD}=\overset{\frown}{CBD}$. | 5. 從1到4那麼證明. |

4. 求證一個圓不能有兩個中心.

設　有O圓,O爲圓心.

求證　O以外不再有圓心.



(4)

### 證

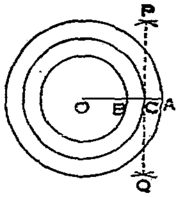
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 設O′爲第二圓心. | 1. 假定. |
| 2. 作OO′. | 2. 兩點之間,可作一直綫(公理13). |
| 3. 引長OO′兩頭,交圓於A於B. | 3. 凡直綫可以引長到所要的長度(公理17). |
| 4. OA, OB皆爲半徑. | 4. 半徑是聯圓與圓心的綫(§174). |
| 5. 但OB>O′B. | 5. 全體大於其各部分(公理11). |
| 6. 故O′非圓心,即唯有O是圓心. | 6. 凡圓半徑相等(§178). OB>O′B,故與此定義違背. |

5. 作兩個同心圓以後,再作一個同心圓,使夾在先前所作的兩個圓的中間.

**作法**　先作OA, OB兩同心圓,都是以O爲中心;再作OA半徑,交小圓於B.

再依§81法平分AB於C,以O爲中心OC爲半徑,作OC圓.

此圓也是同心圓,且介乎原有兩同心圓的中間.



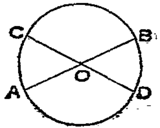
(5)

## 習　題　二（教科書第135—136頁）

1. 若AB和CD是同圓中的兩直徑,則弧AC=弧BD.

**設**　O圓的兩直徑AB,CD.

**求證**　$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

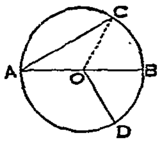


(1)

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 兩直徑相交於圓心O. | 1. 直徑是通過圓心,而兩頭爲圓所限的直綫(§174). |
| 2. ∠AOC=∠BOD. | 2. 對頂角相等(§53). |
| 3. ∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$. | 3. 同圓內等圓心角有等弧(§183). |

2. 若AB是直徑,OD是半徑,AC是弦,又∠BOD=2∠A,則$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{BC}$.

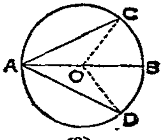


(2)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作OC,他也是半徑. | 1. 兩點之間可作一直綫(公理13). 半徑是聯圓與圓心的綫(§174). |
| 2. $OC=OA$. | 2. 圓半徑相等(§178). |
| 3. $\angle A=\angle C$. | 3. 等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| 4. $\angle BOC=\angle A+\angle C$. | 4. 三角形的一外角,等於他兩內角之和(§120). |
| 5. $\angle BOC=2\angle A$. | 5. 代替(公理12). |
| 6. 但 $\angle BOD=2\angle A$. | 6. 題設. |
| 7. $\therefore \angle BOD=\angle BOC$. | 7. 兩量都等於某量,他們相等(公理1). |
| 8. $\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{BC}$. | 8. 同圓內等圓心角有等弧(§183). |

3. 兩弦AC和AD所成的A角,被直徑AB所二等分,則 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$.



(3)

### 證

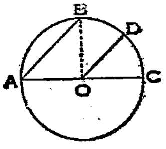
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作OC,OD,他們都是半徑. | 1. 同2題1. |
| 2. $\angle OAC=\angle OAD$. | 2. 題設AB平分$\angle A$. |

| | |
|---|---|
| 3. ∠OAC= ∠OCA.<br>∠OAD= ∠ODA. | 3. 等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| 4. ∠BOC=2 ∠OAC.<br>∠BOD=2 ∠OAD. | 4. 三角形的一外角,等於他兩內角之和(§120).又兩內角相等.故爲一角之二倍. |
| 5. ∠BOC= ∠BOD. | 5. 代替(公理12). |
| 6. ∴$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$. | 6. 同圓內等圓心角有等弧(§183). |

**4.** 若從圓上一點A,作弦AB及直徑AC,則平行於AB的半徑分$\overset{\frown}{BC}$爲二等分.

設　O圓內OD//AB.

求證　$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$.



(4)

### 證

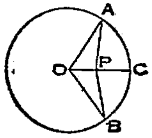
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作BO,他是半徑. | 1. 兩點之間可作一直綫(公理13). 半徑是聯圓與圓心的綫(§174). |
| 2. OB=OA. | 2. 凡圓半徑相等(§178). |
| 3. ∠A= ∠B. | 3. 等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| 4. 但 ∠BOC= ∠A+ ∠B. | 4. 三角形的外角等於他兩內角之和(§120). |
| 5. ∴∠BOC=2 ∠A. | 5. 代替(公理12). |
| 6. 而 ∠COD= ∠A. | 6. 一截綫與兩平行綫所 |

| | |
|---|---|
| | 成之同位角相等(§106). |
| 7. $\therefore \angle COD=\angle BOD$. | 7. 等量的一半相等(公理8). |
| 8. $\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$. | 8. 同圓內等圓心角有等弧(§183). |

5. 若過與圓上兩點等距離的一點,作一半徑,則兩點間的弧,被他二等分.

設　$PA=PB$,

**求證**　$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$.



(5)

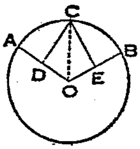
### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 在△AOP及△BOP內, | |
| 1. $AO=BO$. | 1. 同圓半徑. |
| 2. $AP=BP$. | 2. 題設. |
| 3. $OP=OP$. | 3. 公用. |
| 4. $\triangle AOP\cong\triangle BOP$. | 4. s.s.s.=s.s.s. |
| 5. $\therefore \angle AOP=\angle BOP$. | 5. 相當角相等. |
| 6. $\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$. | 6. 等中心角所對的弧等. |

6. 若從圓上一點所作兩半徑的垂綫相等,則此點必二等分兩半徑所截的弧.

設　C爲圓上一點, OA, OB爲兩個半徑. $CD\perp OA$, $CE\perp OB$, 而 $CD=CE$,

**求證**　$\overset{\frown}{CA}=\overset{\frown}{CB}$.



(6)

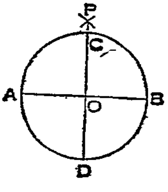
## 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作OC. | 1. 兩點之間可作一直綫(公理13). |
| 2. $CD=CE$. | 2. 題設. |
| 3. $CD\perp OA$, $CE\perp OB$.<br>$\therefore \angle CDO=\angle CEO=$rt.$\angle$. | 3. 題設.<br>凡直角都相等(§46). |
| 4. $OC=OC$. | 4. 公用. |
| 5. $\triangle CDO\cong\triangle CEO$. | 5. 兩直角三角形有斜邊和一直角邊相等,則兩形全同(§124). |
| 6. $\angle COD=\angle COE$.<br>即$\angle COA=\angle COB$(中心角). | 6. 相當角相等(§70). |
| 7. $\therefore \overset{\frown}{CA}=\overset{\frown}{CB}$. | 7. 同圓內中心角相等,有等弧(§183). |

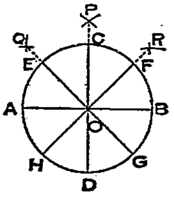
7. 試分一圓成四等分;八等分;六等分.

設　O圓,

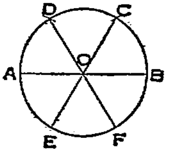
求　分圓爲相等的四弧,八弧,六弧.



(7, a)



(7, b)



(7, c)

(a)分圓爲四等分法:

作直徑AB,以A,B爲中心,大於OA半徑之長爲半徑,作兩小弧,相交於P.

通過O,作PO,交圓於C,引長之,交圓於D.

那麼$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DA}$.

(b)分圓爲八等分法:

先依上法分圓爲四等分,

再依§83法,平分∠AOC及∠COB,引長之,交圓於E,F,G,H.

那麼$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EC}=\overset{\frown}{CF}=\overset{\frown}{FB}=\overset{\frown}{BG}=\overset{\frown}{GD}=\overset{\frown}{DH}=\overset{\frown}{HA}$.

(c)分圓爲六等分法:

作直徑AB,以B,A爲中心,即以圓半徑OA爲度作小弧,割圓於C於D.

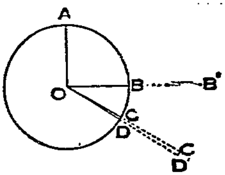
作CO,DO,引長之,交圓於E,於F,

那麼$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{FE}=\overset{\frown}{EA}$.

**證**　如作AD,則△AOD爲等邊三角形,∠AOD=60°,容易證明

**8.** 若中心角是(a) 90°,(b) 30°;(c) 1°.求證各中心角以其所對的弧度之.

**證**　作半徑OA,以半周分角器之中心,對準圓心O,其直綫部分,依靠OA半徑,乃於分角器所記90°處,作小點如B′,以直綫板(或三角板,公尺均可)對準B′O,作OB直綫;



(8)

如此$\overset{\frown}{AB}=90°$,∠AOB也=90°就是直角.

又以同法在30°處,作小點C′,作OC,得$\overset{\frown}{BC}=30^\circ$, ∠BOC也$=30^\circ$.

在1°處作小點D′,作OD,得$\overset{\frown}{CD}=1^\circ$, ∠COD也$=1^\circ$.

**9. 求作(a) 45°的弧;(b) 60°的弧;(c) 150°的弧.**

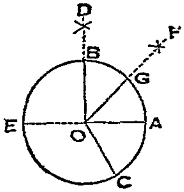
**說明** 若干度弧對若干度的角,所以作圓後作若干度的圓心角,在這圓上便得若干度的弧(§183及§186).

**作法** (a)作圓及AE直徑.依§81法作垂直平分綫DO,交圓於B,則 OA=OE,故O為圓心,∠AOB=90°.

又依§83法平分∠AOB,如FO,交圓於G,則∠AOG=45°,故$\overset{\frown}{AG}=45^\circ$ (§183).

(b)以A為中心OA為半徑作小弧,交圓於C,作OC,則∠AOC=60°(如作AC,知△AOC為等邊三角形),故$\overset{\frown}{AC}=60^\circ$ (§115及183).

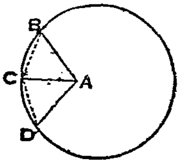
(c)合上邊兩樣作法∠BOC=150°(60°+90°,公理10)故$\overset{\frown}{BAC}=150^\circ$.



(9)

## 習 題 三 (教科書138—139頁)

**1.** 若∠BAC=∠DAC,又AB=AD,則$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$.



(1)

**證**

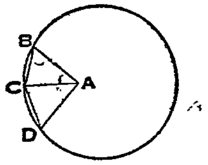
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作BC,CD兩弦 | 1. 兩點之間,可作一直綫 |

| | |
|---|---|
| | (公理13). |
| 2. $\angle BAC=\angle DAC$. | 2. 題設. |
| 3. $AB=AD$. | 3. 題設. |
| 4. $AC=AC$. | 4. 公用. |
| 5. $\triangle ABC\cong\triangle ADC$. | 5. s.a.s.=s.a.s. |
| 6. $BC=CD$. | 6. 相當邊. |
| 7. $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$. | 7. 同圓內等弦有等弧(§187). |

2. 若 $\angle BAC=\angle DAC$,

又 $\angle CBA=\angle CDA$,

則 $\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{CD}$.



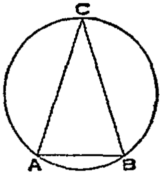
(2)

**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle BAC=\angle DAC$. | 1. 題設. |
| 2. $\angle CBA=\angle CDA$. | 2. 題設. |
| 3. $AC=AC$. | 3. 公用. |
| 4. $\therefore\triangle ABC\cong\triangle ADC$. | 4. 兩三角形有兩角及其一角的對邊相等,則兩形全同(§114). |
| 5. $\therefore CB=CD$. | 5. 相當邊相等. |
| 6. $\therefore\ \overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{CD}$. | 6. 同圓內等弦有等弧(§187). |

3. 若$\triangle ABC$內接於一圓,而$\angle A=\angle B$,

求證$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$.



(3)

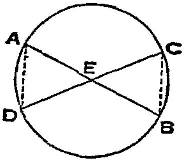
證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle A=\angle B$. | 1. 題設. |
| 2. $AC=BC$. | 2. 如三角形的兩角相等,他們的對邊相等(§121). |
| 3. $\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$. | 3. 同圓內等弦有等弧(§187). |

4. 若兩弦互相二等分,則一雙對頂角所對的弧相等.

設　AB, CD互相二等分.

求證　$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$.



(4)

證

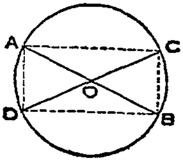
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AE=BE, CE=DE$. | 1. 題設, E爲二等分點. |
| 2. $\angle AED=\angle BEC$. | 2. 對頂角相等(§53). |
| 3. 作AD, BC. | 3. 兩點之間,可作一直綫(公理13). |

| | |
|---|---|
| 4. 則 $\triangle AED \cong \triangle BEC$. | 4. s.a.s.=s.a.s. (§69). |
| 5. ∴ $AD=BC$. | 5. 相當邊相等. |
| 6. ∴ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$. | 6. 同圓內等弦有等弧(§187). |

5. 若兩弦互相二等分,則此兩弦都是直徑.

**設** AB,CD 兩弦互相平分,

**求證** $AB=CD=$直徑.



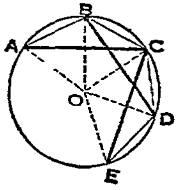
(6)

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AO=BO$, $CO=DO$. | 1. 題設. O爲平分點. |
| 2. $\angle AOD=\angle BOC$,<br>$\angle AOC=\angle BOD$. | 2. 對頂角相等 |
| 3. 作 AC,CB,BD,DA. | 3. 兩點之間,可作一直綫. |
| 4. $\triangle AOD \cong \triangle BOC$,<br>$\triangle AOC \cong \triangle BOD$. | 4. s.a.s.=s.a.s. |
| 5. $AD=BC$, $AC=BD$. | 5. 全同形的相當邊相等(§70). |
| 6. $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CB}$, $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$. | 6. 同圓內等弦有等弧(§187). |
| 7. $\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}+\overset{\frown}{BD}$.<br>即 $\overset{\frown}{DAC}=\overset{\frown}{CBD}$. | 7. 等量加等量其和相等(公理7). |
| 8. 故CD爲直徑 | 8. 凡直徑二等分其圓(§182). |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **9.** | 同理$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{AD}$.<br>即$\overset{\frown}{ACB}=\overset{\frown}{ADB}$. | **9.** | 同上7. |
| **10.** | 故AB亦爲直徑. | **10.** | 同上8. |

**6.** 若諸弦AB, BC, CD, DE相等,則諸弦AC, BD, CE亦相等.

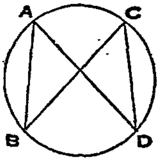


(6)

**證**

| | 敍述 | | 理由 |
|---|---|---|---|
| **1.** | 聯A,B,C,D,E於圓心O. | **1.** | 兩點之間,可作一直綫(公理13). |
| **2.** | $AB=BC=CD=DE$. | **2.** | 題設. |
| **3.** | $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$. | **3.** | 同圓內等弦有等弧(§187). |
| **4.** | $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE$. | **4.** | 同圓內等弧有等圓心角(§183). |
| **5.** | $\angle AOB+\angle BOC=\angle BOC+\angle COD=\angle COD+\angle DOE$. | **5.** | 等量加等量其和相等(公理2). |
| **6.** | 即$\angle AOC=\angle BOD=\angle COE$. | **6.** | 全體等於其各部分之和(公理10). |
| **7.** | $\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CE}$. | **7.** | 同圓內等圓心角有等弧(§183). |
| **8.** | $\therefore AC=BD=CE$. | **8.** | 同圓內等弧有等弦(§187). |

7. 若 AB=CD, 則 BC=AD.



(7, 8)

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB=CD. | 1. 題設. |
| 2. $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$. | 2. 同圓內等弦有等弧(§187). |
| 3. $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AC}$. | 3. 本弧自身相等. |
| 4. $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{AC}$. | 4. 等量加等量,其和相等(公理2). |
| 5. 即 $\overset{\frown}{BAC}=\overset{\frown}{ACD}$ | 5. 全體等於各部分之和(公理10). 又代替(公理12). |
| 6. ∴ BC=AD. | 6. 同圓內等弧有等弦(§187). |

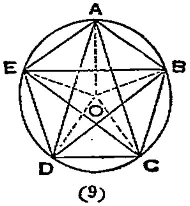
8. 若相交兩弦 AD 和 BC 相等,則 AB=CD.

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AD=BC. | 1. 題設. |
| 2. $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$. | 2. 同圓內等弦有等弧(§187). |
| 3. $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AC}$. | 3. 自身相等. |
| 4. $\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AC}$. | 4. 等量減等量,其差相等. |

| | |
|---|---|
| 5. 卽 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$. | 5. 4 的差. |
| 6. ∴ $AB=CD$. | 6. 同圓內等弧有等弦(§187). |

**9.** 一個內接等邊五邊形的對角線相等.



(9)

**設** 等邊五邊形ABCDE內接於O圓.

**求證** $AC=BD=CE=DA=EB$.

**證**

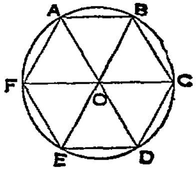
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 聯五角頂於圓心O. | 1. 兩點之間,可作一直綫(公理13). |
| 2. $AB=BC=CD=DE=EA$. | 2. 題設,五等邊形的五邊. |
| 3. $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EA}$. | 3. 同圓內等弦有等弧(§187) |
| 4. $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=\angle EOA$. | 4. 同圓內等弧有等圓心角(§183). |
| 5. $\angle AOB+\angle BOC=\angle BOC+\angle COD=\angle COD+\angle DOE=\angle DOE+\angle EOA=\angle EOA+\angle AOB$. | 5. 等量加等量,其和相等(公理2). |
| 6. 卽 $\angle AOC=\angle BOD=\angle COE=\angle DOA$ | 6. 全體等於其各部分之和(公理10). 又代替(公理12). |

| | |
|---|---|
| $=\angle EOB$. | |
| **7.** ∴$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{DA}=\overset{\frown}{EB}$. | **7.** 同圓內等圓心角有等弧(§183). |
| **8.** ∴$AC=BD=CE=DA=EB$. | **8.** 同圓內等弧有等弦(§187). |

**10.**從一個內接等邊六邊形的各角頂所作的各半徑,分此形成六個全同的等邊三角形.

**設** 圓內接等邊六邊形爲ABCDEF.

**求證** $\triangle ABO\cong\triangle BCO\cong\triangle CDO\cong\triangle DEO\cong\triangle EFO\cong\triangle FAO$而皆爲等邊三角形.



(10)

**證**

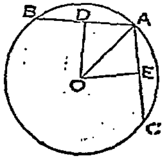
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $AB=BC=CD=DE=EF=FA$. | **1.** 題設.等邊六邊形的六邊. |
| **2.** $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{FA}$. | **2.** 同圓內等弦有等弧(§187). |
| **3.** $\angle s\, AOB=BOC=COD=DOE=EOF=FOA$. | **3.** 同圓內等弧有等中心角(§183). |
| **4.** O點四周的角之和$=2st.\angle$. | **4.** 在平面內一點上所有角之和等於二平角(§52). |
| **5.** 3所記的6角都$=60°$. | **5.** 6除360°得60°. |
| **6.** ∴$\triangle s\, ABO\cong BCO\cong CDO\cong DEO\cong\triangle EFO\cong FAO$皆爲等邊三角形. | **6.** 6個三角形等腰,又頂角$=60°$,餘2角都$=60°$(§71.§110.§115). |

## 習題四 (敎科書140頁)

在O圓中 AB=AC, OD⊥AB,

又 OE⊥AC,

**求證** △ADO≅△AEO.



### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. OD⊥AB, OE⊥AC. | 1. 題設. |
| 2. $AD=\frac{1}{2}AB$.<br>$AE=\frac{1}{2}AC$. | 2. 垂直於弦的直徑(半徑)必二等分此弦(§190). |
| 3. 但 AB=AC. | 3. 題設. |
| 4. ∴AD=AE. | 4. 代替(公理12). 又等量的一半相等(公理8). |
| 5. ∠ODA=∠OEA=rt.∠. | 5. 凡直角相等(§46). |
| 6. AO=AO. | 6. 公用. |
| 7. ∴△ADO≅△AEO. | 7. 兩直角三角形斜邊及一直角邊相等,兩形全同(§124). |

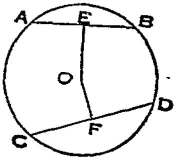
## 習題五 (敎科書141頁)

1. 求一已知圓的中心.

**設** 有定圓ABD,不知圓心何在,

**求** 圓心的所在.

**作法**　作任意的兩弦,如AB,CD,依§81法作兩弦的垂直二等分綫,如OE,OF,相交於O;這O點便是圓心.



(1)

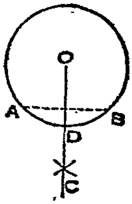
**證**　兩弦的垂直二等分綫的交點,便是公共的圓心.(弦的垂直二等分綫通過圓的中心§191).

2. 二等分一已知弧.

**設**　定弧AB.

**求**　二等分他,使$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}$.

**作法**　作AB弦,依§81平分定直綫的方法,以A,B爲中心,大於半AB之長爲半徑,作兩弧相交於C.



(2)

聯圓心O於C,則OC是AB的垂直二等分綫,又二等分$\overset{\frown}{AB}$(§190).

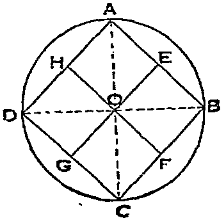
## 習　題　六（教科書142頁）

1. 從中心至內接等邊多邊形各邊的垂綫相等.

**設**　內接等邊多邊形ABCD,

$OE\perp AB$, $OF\perp BC$, $OG\perp CD$, $OH\perp DA$.

**求證**　$OE=OF=OG=OH$

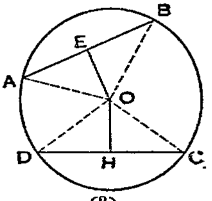


(1)

**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作$OA, OB, OC, OD$. | 1. 兩點之間可作一直綫(公理13). |
| 2. $OE \perp AB$, $OF \perp BC$, $OG \perp CD$, $OH \perp DA$. | 2. 題設. |
| 3. $E, F, G, H$, 是$AB, BC, CD, DA$的中點. | 3. 垂直於弦的直徑(半徑)平分此弦(§190). |
| 4. $\therefore AE = BF = CG = DH$. | 4. 等量的一半相等(公理8).題設等邊. |
| 5. $\angle AEO = \angle BFO = \angle CGO = \angle DHO = \text{rt.} \angle$. | 5. 兩綫互相垂直他們相交成直角(§30). |
| 6. $OA = OB = OC = OD$ | 6. 圓半徑相等(§181). |
| 7. $\therefore \triangle AEO \cong \triangle BFO \cong \triangle CGO \cong \triangle DHO$ | 7. 兩直角三角形斜邊及一直角邊相等,諸形全同(§124). |
| 8. $\therefore OE = OF = OG = OH$. | 8. 相當邊相等. |

2. 試重證命題V,作$AO$和$DO$,而證$\triangle AOB \cong \triangle DOC$.(在同圓或等圓內,等弦去圓心等距.其逆弦與圓心等距者相等.)



(2)

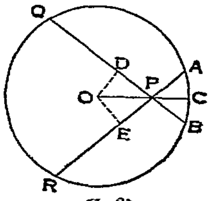
**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作$AO, DO, BO, CO$. | 1. 兩點之間可作一直綫(公理13). |

| | |
|---|---|
| 2. $AB=CD$. | 2. 題設. |
| 3. $AO=DO=BO=CO$ | 3. 同圓的半徑相等(§181). |
| 4. $\triangle AOB \cong \triangle DOC$. | 4. 兩三角形三邊相等,則其形全同(§74). |
| 5. 但 $OE \perp AB$, $OH \perp CD$. | 5. 題設. |
| 6. $\therefore OE=OH$. | 6. 全同形的相當高相等(§170雜題23). |

## 習題七(教科書143—144頁)

1. 若過半徑上的任意一點,作兩弦,與此半徑成等角,則此兩弦相等.



(1,2)

設 P爲半徑OC內的任意點,$\angle APC=\angle BPC$.

求證 $RA=QB$.

### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle APC=\angle BPC$. | 1 題設. |
| 2. $\angle QPO=\angle RPO$. | 2. 對頂角相等(§53). |
| 3. OC爲$\angle QPR$的分角綫. | 3. 凡角只有一條分角綫(§24). |
| 4. 作$OD \perp QB$, $OE \perp RA$. | 4. 從直綫外一點,作這綫的垂綫(§87). |
| 5. $\therefore OD=OE$. | 5. 一角的二等分綫內任一點,離角的兩邊等距離(§126). |

| | |
|---|---|
| 6. ∴RA=QB. | 6. 弦與圓心等距離者相等(§197). |

2. 兩等弦相交於一點,此點與中心的聯結線,必二等分此兩弦所成的角.

**設** RA=QB,相交於P,O爲圓心.

**求證** OP平分∠QPR,卽∠QPO=∠RPO.

**證**

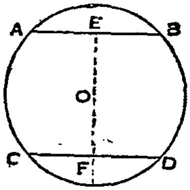
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作OD⊥QB, OE⊥RA. | 1. 從直綫外一點,作這綫的垂綫(§24). |
| 2. OD=OE. | 2. 同圓內等弦去圓心等距離(§177). |
| 3. ∠ODP=∠OEP=rt.∠. | 3. 兩綫互相垂直,他們相交成直角(§30). 凡直角相等(§46). |
| 4. OP=OP. | 4. 公用. |
| 5. ∴△ODP≅△OEP. | 5. 兩直角三角形的斜邊及一直角邊相等,則兩形全同(§124). |
| 6. ∴∠DPO=∠EPO,<br>卽∠QPO=∠RPO. | 6. 相當角相等. |

3. 在一已知圓中,作一弦,使等於且平行於一已知弦.

**設** 定圓O,定弦AB。

**求作** 弦$CD \overset{\parallel}{=} AB$.

**作法** 通過圓心O作EF⊥AB (§87).



(3)

取OF=OE. 作CD⊥EF (§85).

那麼CD與AB距圓心相等.

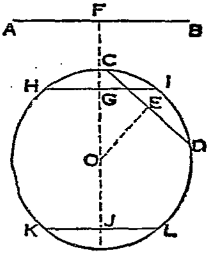
又AB, CD都⊥EF, ∴ CD$\underline{/\!/}$AB.

**4.** 在一已知圓中作一弦,使等於一已知弦,且平行於一已知直線.

**設** 定圓O,定弦CD,定直綫AB.

**求作** HI=CD, HI//AB, 又KL=CD, KL//AB.

**作法** 以O爲AB綫外的一點,依§87法作OF⊥AB, OE⊥CD.



(4)

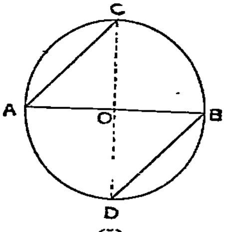
引長FO使達於O的下面圓周上;取OG=OJ=OE.

再依§85法,以G,J爲OF直綫上的定點,作HI⊥OF, KL⊥OF.

那麼因等心距的數弦相等(§197),故HI=KL=CD.

又因一直綫截諸綫,所成的同位角(這裏都是直角)相等,他們平行(§95),∴HI//KL//AB.

**5.** 在直徑兩端作兩弦,使與直徑成等角,求證此兩弦相等.



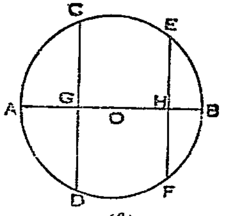
(5)

**設**　$\angle CAO=\angle DBO$.

**求證**　$AC=BD$.

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作OC及OD. | 1. 兩點之間,可作一直綫(公理13). |
| 2. $OA=OB=OC=OD$. | 2. 同圓的半徑相等(§178). |
| 3. $\because \angle CAO=\angle DBO$. | 3. 題設. |
| 4. $\angle CAO=\angle ACO$,<br>$\angle DBO=\angle BDO$. | 4. 等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| 5. $\therefore \angle AOC=\angle BOD$,<br>而$\triangle AOC\cong\triangle BOD$. | 5. 等腰三角形兩底角相等(§71.因爲兩三角形有兩角相等,他第三角也相等(§113)而s.a.s.=s.a.s.故兩形全同(§69). |
| 6. $\therefore AC=BD$. | 6. 相當邊相等. |



(6)

**6.** 一直徑二等分不過中心的兩弦,求證此兩弦平行.

**設**　直徑AB,平分CD,EF兩弦.

**求證**　$CD//EF$.

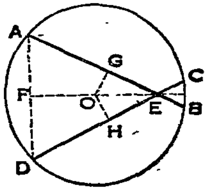
### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　AB平分CD及EF. | 1.　題設. |
| 2.　∴$CD \perp AB$, $EF \perp AB$. | 2.　§190之逆,可聯OC, OD, OE, OF證明之. |
| 3.　$\angle AGC=\angle AHE=$rt.$\angle$. | 3.　兩綫互相垂直,他們相交成直角 (§30). 凡直角相等 (§46). |
| 4.　∴$CD // EF$ | 4.　一截綫截兩綫所成同位角相等,這兩綫平行(§95). |

7. 相交兩弦,各有一部分彼此相等,求證此兩弦相等

設　兩弦AB, CD相交於E, 而$AE=ED$

求證　$AB=CD$



(7)

### 證

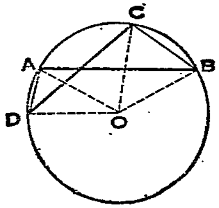
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　作AD, 及$EF \perp AD$. | 1.　兩點之間,可作一直綫(公理13). 從直綫外一點作其垂綫(§87). |
| 2.　$AE=ED$,<br>故△AED爲等腰三角形 | 2.　題設.<br>等腰三角形有兩邊相等 (§58). |
| 3.　$\angle AEF=\angle DEF$,<br>卽EF平分$\angle AED$. | 3.　等角($\angle A=\angle D$)的餘角相等(§112, §48). |

| | |
|---|---|
| 4. AF=FD. | 4. 等腰三角形的頂角二等分綫等分其底(§72). |
| 5. O在EF之上. | 5. 弦的垂直平分綫通過圓心(§191). |
| 6. 作OH⊥CD, OG⊥AB. | 6. 同1. |
| 7. ∴OH=OG. | 7. 角二等分綫上的任一點,到兩邊等距(§126). |
| 8. ∴AB=CD. | 8. 距圓心相等的兩弦相等(§197). |

## 習題八(教科書147頁)

1. 若AB>CD,又$\overset{\frown}{ACB}$和$\overset{\frown}{DAC}$都是劣弧,

求證CB>AD.



(1, 2)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作AO, BO, CO, DO都是半徑. | 1. 兩點之間,可作一直綫(公理13). |
| 2. AO=BO=CO=DO. | 2. 同圓的半徑相等(§178). |
| 3. AB>CD. | 3. 題設 |
| 4. ∠AOB>∠DOC. | 4. 如兩三角形兩邊相等,第三邊大者,所夾的角也較大(§133). |

| | |
|---|---|
| 5. $\angle AOB-\angle AOC>\angle DOC-\angle AOC$. | 5. 從不等量減等量,其餘量不等,方向相同(公理5). |
| 6. 即 $\angle BOC>\angle AOD$ | 6. 代替(公理12). |
| 7. ∴ $CB>AD$. | 7. 如兩三角形兩邊相等,所夾角大者,第三邊也大(§132). |

2. 若$CB>AD$,又$\widehat{DAC}$和$\widehat{ACB}$都是劣弧.

求證$AB>CD$.

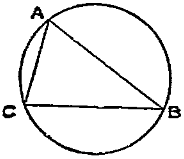
### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作半徑AO, BO, CO, DO. | 1. 兩點之間可作一直綫(公理13). |
| 2. $AO=BO=CO=DO$. | 2. 同圓的半徑相等(§178) |
| 3. $CB>AD$. | 3. 題設. |
| 4. $\angle BOC>\angle AOD$. | 4. 如兩三角形兩邊相等,其第三邊大者,所夾的角也大.(§133). |
| 5. $\angle BOC+\angle AOC>\angle AOD+\angle AOC$. | 5. 以等量加於不等量,其和不等,方向不變(公理4). |
| 6. 但 $\angle BOC+\angle AOC=\angle AOB$.<br>$\angle AOD+\angle AOC=\angle COD$. | 6. 全體等於其各部分之和(公理10). |
| 7. ∴ $\angle AOB>\angle COD$. | 7. 代替(公理12). |
| 8. ∴ $AB>CD$. | 8. 如兩三角形,兩邊相等,其所夾的角大者,第三邊也大(§132). |

## 習題九 (教科書148—149頁)

1. 若ABC是圓內的任意內接三角形,而$\angle A>\angle B$.

則$\overset{\frown}{BC}>AC$.



(1, 2)

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle A>\angle B$. | 1. 題設. |
| 2. $BC>AC$. | 2. 大角所對的邊大(§130). |
| 3. $\therefore \overset{\frown}{BC}>\overset{\frown}{AC}$. | 3. 大弦有大弧(§199). |

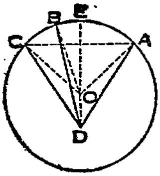
2. 敍述並證明第一題的逆定理.

設 $\overset{\frown}{BC}>\overset{\frown}{AC}$.

求證 $\angle A>\angle B$.

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\overset{\frown}{BC}>\overset{\frown}{AC}$. | 1. 題設. |
| 2. $BC>AC$. | 2. 在同圓或等圓內,兩劣弧之較大者,有大弦(§199). |
| 3. $\therefore \angle A>\angle B$. | 3. 三角形的兩邊不等,其對角亦不等,而較大的角,對較大的邊(§129). |



(3, 4)

3. 若 $AD=DC$, 又 $\angle ADB>\angle BDC$,

則 $\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{BC}$.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作 DOE, AO, BO, CO. | 1. 兩點之間,可作一直綫(公理13). |
| 2. $AD=DC$. | 2. 題設. |
| 3. $AO=CO$. | 3. 同圓的半徑相等(§178). |
| 4. $OD=OD$ | 4. 公用. |
| 5. $\triangle AOD\cong\triangle COD$. | 5. s.s.s.=s.s.s. (§74). |
| 6. $\angle AOD=\angle COD$. | 6. 相當角相等. |
| 7. $\therefore\angle AOE=\angle COE$. | 7. 等角的補角相等(§50, §49). |
| 8. 但 $\angle AOE+\angle BOE$ $=\angle AOB$ | 8. 全體等於其各部分之和(公理10). |
| 9. $\angle AOB>\angle AOE$. | 9. 全體大於其任何部分(公理11). |
| 10. $\angle COE-\angle BOE$ $=\angle BOC$ | 10. 同8 |
| 11. $\angle BOC<\angle COE$<br>$\therefore\angle AOE>\angle BOC$ | 11. 同9.又代替. |
| 12. $\angle AOB>\angle BOC$. | 12. 如三量的第一量,大於第二量,而第二量大於第三量, |

| | |
|---|---|
| | 則第一量大於第三量(公理 |
| **13.** ∴$\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{BC}$. | **13.** 同圓或等圓內,兩中心角的較者夾大弧(§184). |

**注:** 若作AB,BC則因△ABD及△BCD內,AD=DC, BD公用,而$\angle ADB>\angle BDC$,故AB>BC,故$\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{BC}$.如此證法,最爲簡捷.

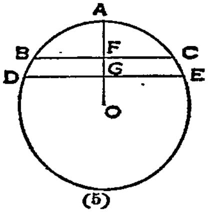
**4.** 若AD=DC,又$\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{BC}$,則$\angle ADB>\angle BDC$.

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** 作AC, AO, BO, CO及DE⊥AC. | **1.** 公理13及§87. |
| **2.** 因△ADC等腰,故DE二等分AC,且通過圓心O. | **2.** 弦的垂直等分綫通過圓心(§191) |
| **3.** $\angle ADE=\angle CDE$. | **3.** 等腰三角形底邊上的中綫二等分其頂角(§74習題1) |
| **4.** AO=CO=EO. | **4.** 同圓的半徑相等(§178). |
| **5.** $\angle AOE=\angle COE$. | **5.** 同3. |
| **6.** $\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{BC}$ | **6.** 題設. |
| **7.** $\angle AOB>\angle BOC$,故B在C,E間. | **7.** 同圓內兩圓心角不等,則較大的弧對較大的圓心角(§184). |
| **8.** $\angle ADE+\angle BDE=\angle ADB$. | **8.** 全體等於其各部分之和(公理10). |
| **9.** $\angle ADB>\angle ADE$<br>∴$\angle ADB>\angle CDE$. | **9.** 全體大於其任一部分(公理11).又代替. |
| **10.** $\angle CDE=\angle BDE+\angle BDC$. | **10.** 同8 |

| | |
|---|---|
| 11. $\angle CDE > \angle BDC$. | 11. 同 9. |
| 12. $\therefore \angle ADB > \angle BDC$.<br>(參照上題附注,另有捷法). | 12. 如三量$a>b$, $b>c$, 則$a>c$(公理9). |

5. 若在半徑上作兩弦垂直於此半徑,則近中心的弦較大.



(5)

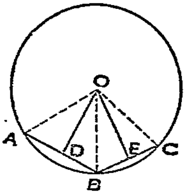
**設** 半徑AO,而$BC \perp AO$, $DE \perp AO$.

**求證** $DE > BC$.

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $BC \perp AO$, $DE \perp AO$. | 1. 題設. |
| 2. 而DE較BC近於圓心O. | 2. 同上. |
| 3. $GO < FO$. | 3. 全體大於其任何部分(公理11). |
| 4. $\therefore DE > BC$. | 4. 在同圓內如兩弦不等,其距圓心近者較大(§201). |

6. 從圓的中心至內接等邊六邊形一邊的垂綫,小於從中心至內接等邊八邊形一邊的垂綫.



(6)

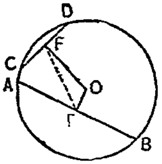
**設** AB爲O圓內接等邊六邊形的一邊, BC 爲其內接等邊八邊形的一邊. $OD \perp AB$, $OE \perp BC$.

**求證** $OD < OE$.

## 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** 作OA, OB, OC. | **1.** 兩點之間,可作一直綫(公理13). |
| **2.** $OA=OB=OC$. | **2.** 同圓的半徑相等(§178). |
| **3.** $\angle AOB=60^\circ$,<br>$\angle BOC=45^\circ$. | **3.** 一圓可分360等分叫做度(§186). $\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$, $\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$. |
| **4.** $\therefore \angle AOB>\angle BOC$. | **4.** 3的比較. |
| **5.** $\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{BC}$. | **5.** 中心角大,所對弧也大. |
| **6.** $AB>BC$. | **6.** 同圓內大弧有大弦. |
| **7.** $OD<OE$. | **7.** 同圓內大弦距圓心較近(§200). |

**7.** 若$EO\perp AB$, $OF\perp CD$, 又$\angle OEF>\angle OFE$, 則$AB>CD$.



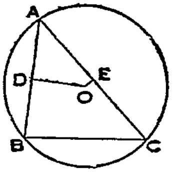
(10)

## 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $OE\perp AB$, $OF\perp CD$. | **1.** 題設. |
| **2.** $\angle OEF>\angle OFE$. | **2.** 同上. |
| **3.** $\therefore OF>OE$. | **3.** 三角形的兩角不等,其對邊不等,而大角所對的邊大(§130). |

| | |
|---|---|
| 4.　$\therefore AB>CD$. | 4.　在同圓內,如兩弦不等,其距圓心近者較大(§201). |

8. 圓內接$\triangle ABC$的$\angle B>\angle C$, 則從中心至$AB$的垂綫大於從中心至$AC$的垂綫.



(8)

**設**　$\triangle ABC$內接於O圓,

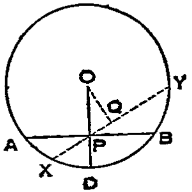
而$\angle B>\angle C$, 又$OD\perp AB$, $OE\perp AC$.

**求證**　$OD>OE$.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　$OD\perp AB$, $OE\perp AC$,<br>故$OD$爲$AB$弦的圓心距離.<br>$OE$爲$AC$弦的圓心距離. | 1.　題設. |
| 2.　$\angle B>\angle C$. | 2.　題設. |
| 3.　$AC>AB$ | 3.　三角形的兩角不等,其對邊不等,大角所對的邊也大(§130). |
| 4.　$\therefore OD>OE$. | 4.　同圓內如兩弦不等,其較大的弦,距圓心較近(§200). |

9. 在圓內過一點的弦,以垂直於過此點的半徑的弦爲最短.



(9)

**設**　圓內一點P, OD爲過P的半徑,又弦$AB\perp OD$,

**求證**　AB是最短的弦.

**證**

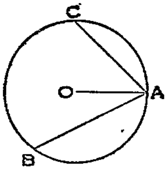
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 過P點作任一弦XY,又作OQ⊥XY. | 1. 公理13. §87. |
| 2. 在直角三角形PQO中,OP>OQ. | 2. 三角形的兩個角不等,其大角所對的邊大(§130). |
| 3. ∴AB<XY. | 3. 在同圓中,若二弦至中心的距離不等,則距離近的弦較大(§201). |

**10.** 從圓周上一點所引的兩弦,與引向此點的半徑所成的角不等,則此兩弦不等.

**設** AB, AC兩弦, OA半徑.

而∠CAO≠∠OAB.

**求證** AC≠AB.



(10)

**證**

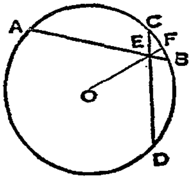
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AC=AB, 或 AC≠AB. | 1. 等與不等,只有兩種假設. |
| 2. 如AC=AB. | 2. 假設. |
| 3. 若聯OB, OC, | 3. 同圓內半徑相等. |
| 則因 OB=OC, | 又 OA公用,又2的假設. |
| OA=OA, | s.s.s.=s.s.s.(§74). |
| AB=AC, | |
| 而 △ABO≅△ACO. | |

| | |
|---|---|
| **4.** $\therefore \angle CAO = \angle OAB$. | **4.** 全同形的相當角相等(§70). |
| **5.** 但此結果與題設正相反. | **5.** 題設 $\angle CAO \neq \angle OAB$. |
| **6.** $\therefore AC \neq AB$. | **6.** 就賸這一項假設是眞的了. |

**11.**過圓內一點的兩弦,與過此點的半徑所成的角不等,則兩弦不等.

設　AB, CD 兩弦通過圓內E點,半徑 OF 亦通過 E 點,如 $\angle AEO \neq \angle DEO$.

求證　$AB \neq CD$.



(11)

**證**

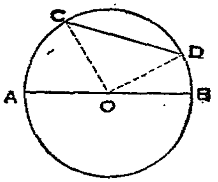
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $AB = CD$ 或 $\neq CD$. | **1.** 等不等,只有兩種假設. |
| **2.** 設如 $AB = CD$. | **2.** 假設. |
| **3.** 則 $\angle AEO = \angle DEO$. | **3.** 兩等弦相交於一點,此點與中心的聯結線,必二等分此兩弦所成的角(§198). |
| **4.** 但此結果不合題設. | **4.** 題設 $\angle AEO \neq \angle DEO$. |
| **5.** $\therefore AB \neq CD$. | **5.** 就賸這一項假設是眞的. |

**12.**直徑大於不過中心的任意一弦.

示意: 弦的兩頭作半徑,其和等於直徑.

**設**　AB爲直徑,CD爲任意不過中心的弦.

**求證**　$AB>CD$.



(12)

**證**

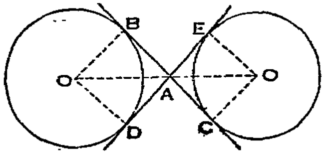
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作半徑OC及OD | 1. 兩點之間,可作一直綫(公理13). |
| 2. $OC+OD=AB$. | 2. 半徑的二倍,就是直徑,參考§174定義. |
| 3. 但$OC+OD>CD$. | 3. 三角形兩邊之和,大於第三邊(§128). |
| 4. $\therefore AB>CD$. | 4. 代替(公理12). |

## 習題十（教科書152頁）

1. 兩圓的內公切綫必相等.

**設**　O, O′兩圓,內公切綫BC及DE,其交點爲A.

**求證**　$BC=DE$.



(1)

**證**

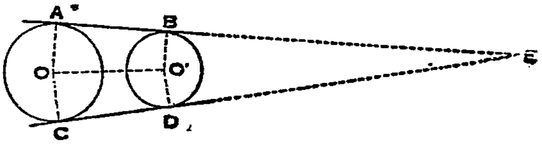
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AB=AD$, $AE=AC$. | 1. 從圓外一點所作之兩 |

| | |
|---|---|
| | 切綫相等(§209). |
| **2.** $AB+AC=AD+AE$. | **2.** 等量加等量,其和相等(公理2). |
| **3.** 但$BC=AB+AC$.<br>$DE=AD+AE$. | **3.** 全體等於其各部分之和(公理10). |
| **4.** $\therefore BC=DE$. | **4.** 代替(公理12). |

**2.** 兩圓的外公切綫必相等.

**設**　$O, O'$兩圓不相等,其外公切綫$AB$及$CD$.

**求證**　$AB=CD$.



(2)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $O\neq O'$, $AB \nparallel CD$. | **1.** 如半徑相等,則兩圓相等(§180);故$O\neq O'$,則$OA\neq O'B$而$AB \nparallel CD$. |
| **2.** 引長$AB$, $CD$,相交於$E$. | **2.** 兩綫不平行,必相交於一點.因爲兩綫在一平面內永不相交是平行綫(§90). |
| **3.** $EA=EC$, $EB=ED$ | **3.** 從圓外一點所作之兩切綫相等(§209). |
| **4.** $EA-EB=EC-ED$. | **4.** 等量減等量,其餘量相等(公理3). |

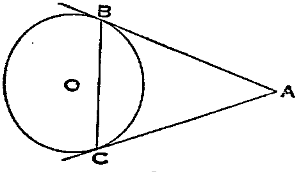
| | |
|---|---|
| 5. EA=EB+AB.<br>EC=ED+CD, | 5. 全體等於其各部分之和(公理10). |
| 6. ∴AB=CD. | 6. 代替(公理12). |

**注意:** 如O=O′則AB, CD爲直角四邊形之對邊而相等.

3. 聯兩切綫的切點的弦,必與此兩切線成等角.

**設** AB. AC兩切綫, BC爲弦.

**求證** ∠B=∠C.



(3)

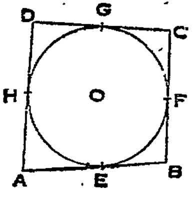
**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB=AC. | 1. 從圓外一點,所作之兩切綫相等(§209). |
| 2. △ABC 是等腰三角形. | 2. 等腰三角形有兩邊相等(§58). |
| 3. ∴∠B=∠C. | 3. 等腰三角形的兩底角相等(§71). |

4. 圓外切四邊形兩對邊的和,必等於其他兩對邊的和.

**設** ABCD爲O圓的外切四邊形.

**求證** AB+CD=BC+DA.



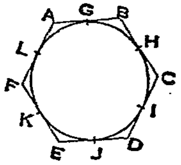
(4)

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AE=AH, BE=BF,<br>CG=CF, DG=DH. | 1. 從圓外一點,所作之兩切綫相等(§209). |
| 2. AE+BE+CG+DG=<br>AH+DH+BF+CF. | 2. 等量加等量,其和相等(公理2). |
| 3. AB=AE+BE,<br>CD=CG+DG,<br>BC=BF+CF,<br>DA=AH+DH. | 3. 全體等於其各部分之和(公理10). |
| 4. AB+CD=BC+DA. | 4. 代替(公理12). |

5. ABCDEF 六邊形外切於一圓;

則AB+CD+EF=BC+DE+FA.



(5)

證

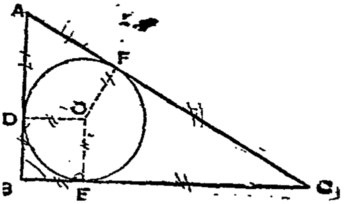
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AG=AL, BG=BH,<br>CI=CH, DI=DJ,<br>EK=EJ, FK=FL. | 1. 切綫相等(§209). |
| 2. (AG+BG)+(CI+DI)+<br>(EK+FK)=(BH+CH)+<br>(DJ+EJ)+(AL+FL). | 2. 等量加等量其和相等(公理2). |
| 3. AB=AG+BG, | 3. 全體等於各部分之和 |

| | |
|---|---|
| $CD=CI+DI$,<br>$EF=EK+FK$,<br>$BC=BH+CH$,<br>$DE=DJ+EJ$,<br>$FA=AL+FL$. | (公理10). |
| 4. $\therefore AB+CD+EF=BC+DE+FA$. | 4. 代替(公理12). |

6. 直角三角形外切於一圓,則兩直角邊的和,等於斜邊加此圓直徑的和.

設 ABC 三角形的內切圓 O. AB, BC 爲兩直角邊, AC 爲斜邊.

求證 $AB+BC=AC+2OD$.



(6)

證

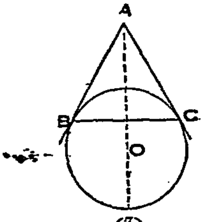
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作 OE, OD. | 1. 公理13. |
| 2. $\angle ODB=\angle OEB=\angle B=rt.\angle$. | 2. 切線垂直於半徑(§203). |
| 3. $OD=OE$. | 3. 同圓的半徑相等(§178). |
| 4. OEBD 爲 □, $\therefore OD=BE=DB$. | 4. §137. |
| 5. $AF=AD$, $CF=CE$. | 5. 從圓外一點作圓的二切線相等(§209). |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6. | (AD+DB)+(CE+BE)=(AF+CF)+2OD. | 6. | 公理2. |
| 7. | ∴AB+BC=AC+2OD. | 7. | 公理10及19 |

7. 若兩切綫成一 60° 之角,則聯結兩切點的弦,等於任一切綫.

設　O圓兩切綫AB, AC; ∠A=60°.

求證　BC=AB=AC.



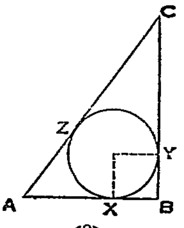
(7)

### 證

| | 敍述 | | 理由 |
|---|---|---|---|
| 1. | AB=AC. | 1. | 從一點到圓的兩切綫相等(§209). |
| 2. | ∠A=60°. | 2. | 題設 |
| 3. | ∠B=∠C. | 3. | 等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| 4. | ∠A+∠B+∠C=180°. | 4. | 三角形三角之和,等於二直角(§110). |
| 5. | ∠B+∠C=120°. | 5. | 從4及2,等量減等量其餘量相等(公理3). |
| 6. | ∠B=∠C=60°. | 6. | (3)同(5)的代替(公理12). |
| 7. | ∴BC=AB=AC. | 7. | 等角三角形就是等邊三角形(§122). |

8. 三角形ABC外切於一圓.此圓與AB, BC, CA邊各切於X, Y, Z, 若AB=3, BC=4, CA=5.

求　AX, BY, CZ的長.



(8)

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $AX=AZ$, $BX=BY$, $CY=CZ$. | 1. 從一點到圓的兩切綫相等(§209). |
| 2. $AX+CY=AZ+CZ$. | 2. 等量加等量,其和相等(公理2). |
| 3. 而$CA=AZ+CZ=5$. | 3. 題設.又全體等於其各部分之和(公理10). |
| 4. $\therefore AX+CY=5$. | 4. 代替(公理12). |
| 5. 而$BC=CY+BY=4$.<br>$AB=AX+BY=3$. | 5. 同3 |
| 6. $\therefore AX+4-BY=5$<br>$AX-BY=1$. | 6. 由5, $CY=4-BY$,代入4.又移項歸併. |
| 7. $\therefore 2AX=4$, $AX=2$. | 7. 由5與6.又等量的一半相等(公理8). |
| 8. $\therefore 2BY=2$, $BY=1$. | 8. 同7. |
| 9. $\therefore CZ=CY=BC-BY=4-1=3$. | 9. §209及公理3 |

## 習題十一 (教科書154—155頁)

**1.** 兩圓中心的距離如下,則其相關的位置如何?

(a)大於兩半徑的和.

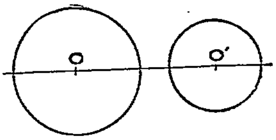
(b)等於兩半徑的和.

(c)小於兩半徑的和,而大於兩半徑的差.

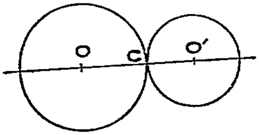
(d)等於兩半徑的差.

(e)小於兩半徑的差.

(f)等於零.



(1, a)



(1, b)

設 O圓半徑r,O′圓半徑r′,聯心綫OO′.

(a) $OO' > r + r'$.

(b) $OO' = r + r'$.

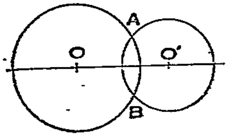
(c) $OO' < r + r'$,而 $> r - r'$.

(d) $OO' = r - r'$.

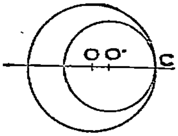
(e) $OO' < r - r'$.

(f) $OO' = 0$.

問 O,O′兩圓位置的關係如何?



(1, c)

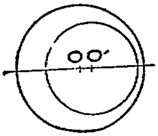


(1, d)

答 (a) $OO' > r + r'$ 時兩圓相離.

(b) $OO' = r + r'$ 時兩圓外切

(c) $r + r' > OO' > r - r'$ 時兩圓相交.

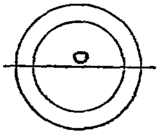


(1, e)

(d) $OO'=r-r'$ 時兩圓內切.

(e) $OO'<r-r'$ 時O′圓在O圓中,不相切.

(f) $OO'=0$ 時,兩圓爲同心圓.

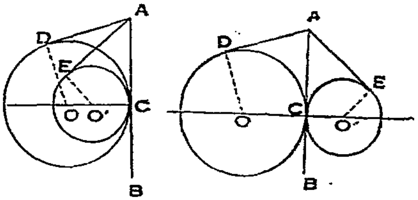


(1, f)

2. 若在上面這命題(XII)的圖中,從A作兩圓O,O′的兩切綫,則此兩切綫必相等.

**設** O,O′兩圓相切於C,其公切綫AB,從A又作兩切綫AD,AE.

**求證** AD=AE.



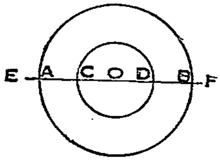
(2)

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AD=AC. | 1. 從圓外一點到圓的兩切綫相等(§209). |
| 2. AE=AC. | 2. 同上. |
| 3. ∴AD=AE. | 3. 兩量都等於某量,他們也相等(公理1). |

3. 若一割綫截二同心圓,則兩圓間所截的綫分相等.

**設**　同心圓AB及CD,割綫EF,割兩圓於A,B,C,D.



(3, I)

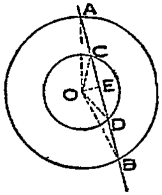
**求證**　AC=BD.

I.　EF通過圓心O時.

**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　大圓半徑OB=OA. | 1.　同圓的半徑相等(§178). |
| 2.　小圓半徑OD=OC. | 2.　同上. |
| 3.　OA−OC=OB−OD. | 3.　等量減等量,其餘量相等(公理3). |
| 4.　∴AC=BD. | 4.　代替. |

II.　割綫不通過圓心O時.



(3, II)

**證**

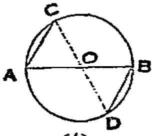
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　作OA, OB, OC, OD, 及OE⊥AB. | 1.　兩點之間,可作一直綫(公理13). 從直綫外一點作他的垂綫(§87). |
| 2.　OA=OB, OD=OC. | 2.　同圓的半徑相等(§178) |
| 3.　AE=BE, CE=DE. | 3.　垂直於弦的直徑(或半 |

| | |
|---|---|
| | 徑),必二等分此弦(§190). |
| 4. $AE-CE=BE-DE$. | 4. 等量減等量,其餘量相等(公理3). |
| 5. 但 $AE=AC+CE$,<br>$BE=BD+DE$. | 5. 全體等於其各部之和(公理10). |
| 6. $\therefore AC=BD$. | 6. 代替(公理12). |

4. 若從直徑的兩端所作的兩弦平行,則此兩弦相等.

**設** O圓直徑 $AB$,兩弦 $AC/\!/BD$.

**求證** $AC=BD$.



(4)

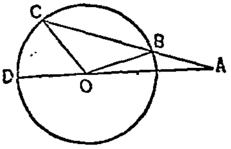
### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作 $OC$, $OD$. | 1. 兩點之間可作一直綫(公理13). |
| 2. $OA=OC$, $OD=OB$. | 2. 同圓的半徑相等(§178). |
| 3. $\therefore \angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$. | 3. 等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| 4. 但 $AC/\!/BD$. | 4. 題設. |
| 5. $\therefore \angle A=\angle B$. | 5. 一截綫截兩平行綫所成的內錯角相等(§104). |
| 6. $\therefore \angle A=\angle B=\angle C=\angle D$. | 6. 3同5的代替,又公理1. |
| 7. $\therefore \angle AOC=\angle BOD$. | 7. 兩三角形有兩角相等其第三角相等(§113). |
| 8. $\triangle AOC\cong\triangle BOD$. | 8. 如兩三角形s.a.s.=s.a.s. |

| | |
|---|---|
| | 則兩形全同(§69). |
| 9.　AC=BD. | 9.　相當邊相等. |

5. 若半徑OB等於AB,

求證$\angle COD=3\angle A$.



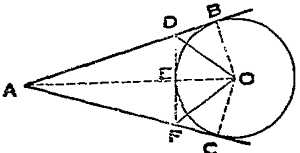
(5)

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　$OB=AB$ | 1.　題設. |
| 2.　$\angle A=\angle BOA$. | 2.　等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| 3.　$OB=OC$. | 3.　同圓的半徑相等(§178). |
| 4.　$\angle OCB=\angle OBC$. | 4.　同2. |
| 5.　但$\angle OBC=\angle A+\angle BOA$<br>$=2\angle A$<br>$\angle COD=\angle OCB+\angle A$<br>$=\angle OBC+\angle A$. | 5.　三角形的外角,等於其他兩內角之和(§120).<br>又代替(公理12). |
| 6.　$\therefore\angle COD=2\angle A+\angle A$<br>$=3\angle A$. | 6.　代替. |

6. 從A作已知圓O的兩切綫AB和AC,又第三切綫與AB和AC相交於D和F,

求證　$AD+DF+AF=2AB$,又$\angle O=\text{rt.}\angle-\frac{\angle A}{2}$.



(6)

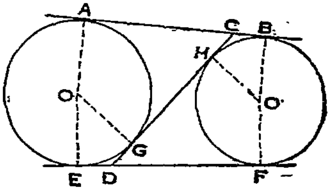
## 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** DF與圓之切點,命爲E. | **1.** 切綫與圓,只切於一點(§207的倒). |
| **2.** $DB=DE, FC=FE.$ | **2.** 從圓外一點所作的兩切綫相等(§209). |
| **3.** $DB+FC=DE+FE.$ | **3.** 等量加等量其和相等(公理2). |
| **4.** $DF=DE+FE.$ | **4.** 全體等於其各部分之和(公理10). |
| **5.** $AB=AC.$ | **5.** 同2. |
| **6.** $AB=AD+DB,$<br>$AC=AF+FC.$ | **6.** 同4. |
| **7.** $AB+AC=AD+(DB+FC)+AF.$ | **7.** 同3. |
| **8.** $\therefore 2AB=AD+DF+AF.$ | **8.** 代替(公理12). |
| **9.** 聯結AO,若AO通過切點E. | **9.** 公理13. |
| **10.** 則$DB=DE=FE=FC.$ | **10.** 自圓外一點,至圓的兩切綫相等(§209). |
| **11.** $\angle OBD=\angle OED=\angle OEF=\angle OCF.$ | **11.** 凡直角相等(§46). |
| **12.** $OB=OE=OC.$ | **12.** 圓半徑相等(§178). |
| **13.** $\therefore \triangle OBD\cong OED\cong OEF\cong OCF.$ | **13.** s.a.s.=s.a.s. |
| **14.** $\angle s\ DOB=DOE=FOE.$ | **14.** 相當角相等 |

| | |
|---|---|
| 15. ∵$\angle AOB=\angle DOB+\angle DOE$,又$=\text{rt.}\angle-\frac{\angle A}{2}$,<br>$\angle DOF=\angle DOE+\angle FOE$<br>$=\angle DOE+\angle DOB$. | 15. 公理10.又從圓外一點至圓所作的兩切綫,與此點至中心的聯線成等角(§210).又代入(公理12). |
| 16. ∴$\angle DOF=\angle AOB$<br>$=\text{rt.}\angle-\frac{\angle A}{2}$. | 16. 代替. |

**注意**　如AO不通過E點時,亦可以同理證的.

7. 兩圓的外公切綫,與一內公切綫相交,則綫分CD等於外公切綫AB.



(7)

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. CA=CG, CB=CH,<br>DF=DH, DE=DG. | 1. 從圓外一點所作的兩切綫相等(§209). |
| 2. CA+CB=CG+CH,<br>DF+DE=DH+DG. | 2. 等量加等量,其和相等(公理2). |
| 3. AB=CA+CB;<br>EF=DF+DE. | 3. 全體等於其各部分之和(公理10). |
| 4. AB=EF. | 4. 兩圓的公共外切綫相等(§212習題2). |
| 5. AB=CG+CH<br>=DH+DG. | 5. 代替(公理12). |

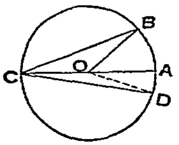
| | |
|---|---|
| 6. $2AB=(CG+DG)+(CH+DH)$. | 6. 等量的倍數相等(公理7). |
| 7. 而 $CD=CG+DG$ $=CH+DH$. | 7. 代替. |
| 8. $\therefore 2AB=2CD$, 即 $CD=AB$. | 8. 公理1及公理8. |

## 習題十二 (敎科書160頁)

1. 若 $\overset{\frown}{AB}=40^\circ$,

問中心角 $\angle AOB$ 是若干度?

又 $\angle ACB$ 是若干度?



(1, 2)

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\overset{\frown}{AB}=40^\circ$ | 1. 題設. |
| 2. $\angle AOB=40^\circ$ | 2. 圓心角以其所夾的弧度量之(§227). |
| 3. $OC=OB$. | 3. 同圓的半徑相等(§178). |
| 4. $\angle ACB=\angle CBO$. | 4. 等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| 5. $\angle AOB=2\angle ACB$. | 5. 三角形的一外角,等於其他兩內角之和(§120).又4的代替(公理12). |
| 6. $\angle ACB=20^\circ$. | 6. 2同5的代替. |

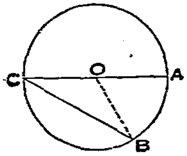
2. 若 $\overset{\frown}{BD}=60^\circ$,問 $\angle C$ 是若干度?

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\overset{\frown}{BD}=60^\circ$. | 1. 題設. |
| 2. 作OD, $\angle BOD$ 是圓心角. | 2. 兩點之間可作一直綫(公理13). 又圓心角,是由二半徑所成之角(§176). |
| 3. $\therefore \angle BOD=60^\circ$. | 3. 圓心角以其所夾的弧度量之(§227) |
| 4. $\angle BOD=\angle AOB+\angle AOD$. | 4. 全體等於其各部分之和(公理10). |
| 5. $\angle AOB=2\angle ACB$.<br>$\angle AOD=2\angle ACD$. | 5. 由上題3至5證得. |
| 6. $\angle ACB+\angle ACD=\angle C$. | 6. 同4. |
| 7. $\therefore \angle C=\frac{1}{2}\angle BOD$. | 7. 代替(公理12). |
| 8. $\therefore \angle C=30^\circ$. | 8. 3同7的代替. |

## 習題十三 (教科書162—164)

1. 在232節的第一圖中,$\angle C=30^\circ$, $\overset{\frown}{CB}$有多少度?



(1,2)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle C=30^\circ$. | 1. 題設. |

| | |
|---|---|
| 2.　作BO. | 2.　兩點之間,可作一直綫(公理13). |
| 3.　$\angle AOB=60°$ | 3.　$\because \angle B=\angle C$, $\angle AOB=\angle C+\angle B$. |
| 4.　$\therefore \angle COB=120°$ | 4.　∠AOB的補鄰角. |
| 5.　$\therefore \overset{\frown}{CB}=120°$ | 5.　圓心角以他所夾的弧度之(§227). |

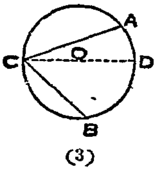
2. 在同一圖形中,$\overset{\frown}{BC}=3\overset{\frown}{AB}$,求∠C.

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　$\overset{\frown}{BC}=3\overset{\frown}{AB}$. | 1.　題設. |
| 2.　$\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AB}=180°$. | 2.　一圓可分爲 360 等分,叫做度(§186). $\overset{\frown}{ABC}$是半圓. |
| 3.　$4\overset{\frown}{AB}=180°$. | 3.　代替(公理12). |
| 4.　$\therefore \overset{\frown}{AB}=45°$. | 4.　等量除等量,其商相等(公理8). |
| 5.　∠C以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$度之. | 5　圓周角以所對弧的一半度量之(§232). |
| 6.　$\therefore \angle C=22.5°$. | 6.　代替(公理12). |

3. 在232節的第二圖中,$\overset{\frown}{AC}$是圓周的$\frac{1}{3}$,$\overset{\frown}{BC}$是圓周的$\frac{1}{4}$,

求∠ACB, ∠ACD.

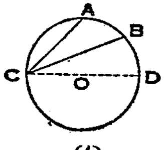


(3)

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\overset{\frown}{AC}=\frac{1}{3}\times360^\circ=120^\circ$. | 1. §186. |
| 2. $\overset{\frown}{BC}=\frac{1}{4}\times360^\circ=90^\circ$. | 2. 同上. |
| 3. $\therefore\overset{\frown}{ADB}=360^\circ-120^\circ-90^\circ=150^\circ$ | 3. 代替(公理12). |
| 4. $\therefore\angle ACB=75^\circ$. | 4. 圓周角以所對弧的一半度量之(§232). |
| 5. 通過O作直徑CD. | 5. 公理13. 又直徑是通過圓心,而兩端止於圓的直綫(§174). |
| 6. $\overset{\frown}{AD}=180^\circ-120^\circ=60^\circ$. | 6. 直徑二等分其圓(§182). 又1的代替. |
| 7. $\therefore\angle ACD=30^\circ$ | 7. 同4. |

4. 在232節的第三圖中,A是$\overset{\frown}{CD}$的中點,而B是$\overset{\frown}{AD}$的中點,∠ACB有多少度?



(4)

設 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BD}$,

求證 ∠ACB.

### 證

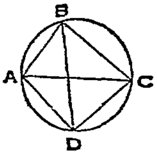
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}=90^\circ$ | 1. 題設A是$\overset{\frown}{CD}$的中點. |
| 2. $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BD}=45^\circ$. | 2. 題設B是$\overset{\frown}{AD}$的中點. |

| | |
|---|---|
| 3. $\therefore \angle ACB=\frac{1}{2}\times 45^\circ$ <br> $=22^\circ 30'$. | 3. 圓周角以其所夾半弧度量之(§232). |

5. 四邊形ABCD內接於圓,作兩對角綫,若 $\overset{\frown}{AB}=80^\circ$, $\overset{\frown}{BC}=110^\circ$, 又 $\overset{\frown}{CD}=90^\circ$, 求圖內各角的度數.

**設** ABCD內接於圓, $\overset{\frown}{AB}=80^\circ$, $\overset{\frown}{BC}=110^\circ$, $CD=90^\circ$, 兩對角綫爲AC,BD.

**求** $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$.



(5. 6)

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\overset{\frown}{BC}=110^\circ$, $\overset{\frown}{CD}=90^\circ$. | 1. 題設. |
| 2. $\overset{\frown}{BCD}=\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}=200^\circ$. | 2. 全體等於其各部分之和(公理10). |
| 3. $\therefore \angle A=100^\circ$. | 3. 圓周角以其所夾半弧度量之(§232). |
| 4. $\overset{\frown}{DA}=360^\circ-80^\circ-110^\circ$ <br> $-90^\circ=80^\circ$. | 4. 全圓爲360° (§186). |
| 5. $\overset{\frown}{CDA}=\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DA}=170^\circ$. | 5. 同2. |
| 6. $\therefore \angle B=85^\circ$. | 6. 同3. |
| 7. $\overset{\frown}{DAB}=\overset{\frown}{DA}+\overset{\frown}{AB}=160^\circ$. | 7. 同2. |
| 8. $\therefore \angle C=80^\circ$. | 8. 同3. |
| 9. $\overset{\frown}{ABC}=\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=190^\circ$. | 9. 同2. |
| 10. $\therefore \angle D=95^\circ$. | 10. 同3. |

如求$\angle BAC$, $\angle CAD$, $\angle ABD$, $\angle DBC$, $\angle ACB$, $\angle ACD$, $\angle BDC$, $\angle BDA$等角.

$$\therefore\begin{cases}\overset{\frown}{AB}=80^\circ.\\ \overset{\frown}{BC}=110^\circ.\\ \overset{\frown}{CD}=90^\circ.\\ \overset{\frown}{DA}=80^\circ.\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}\angle ACB=\angle BDA=40^\circ.\\ \angle BAC=\angle BDC=55^\circ.\\ \angle DBC=\angle CAD=45^\circ.\\ \angle ABD=\angle ACD=40^\circ.\end{cases}$$

理由　在同弓形內諸弓形角相等(§233)又圓周角以其所夾半弧度量之(§232).

6. 在前題的圖內,求四對等角.

答　在CDAB弓形內——$\angle BAC=\angle BDC$.

在DABC弓形內——$\angle CAD=\angle CBD$.

在ABCD弓形內——$\angle ABD=\angle ACD$.

在BCDA弓形內——$\angle ACB=\angle ADB$.

理由　在同弓形內諸弓形角相等(§233).

7. 若$\overset{\frown}{AE}=40^\circ$,求$\angle B+\angle D$.

答　命$\angle B=m^\circ$; $\angle D=n^\circ$.

因§232(圓周角以其所夾半弧度量之).

$\therefore \overset{\frown}{CDEA}=2m^\circ$, $\overset{\frown}{EABC}=2n^\circ$.

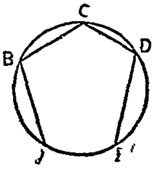
題設$\overset{\frown}{AE}=40^\circ$,

兩大弧相加,$\overset{\frown}{AE}$重複.

$\therefore \overset{\frown}{CDEA}+\overset{\frown}{EABC}=360^\circ+40^\circ=400^\circ$.

$\therefore 2m^\circ+2n^\circ=400^\circ$.

即$m^\circ+n^\circ=200^\circ$, $\therefore \angle B+\angle D=200^\circ$.



(7)

**8.** 若$\widehat{HI}=20°$又$\widehat{FL}=30°$, $\angle G+\angle K$是多少度?

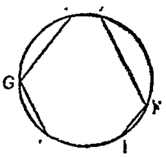
**答** 命$\angle G=m°$, $\angle K=n°$.

$\therefore \widehat{HKF}=2m°$, $\widehat{LGI}=2n°$ (§232).

但HI=20°, FL=30° (題設).

兩大弧相加,$\widehat{HI}$及$\widehat{FL}$重複.

$\therefore \widehat{HKF}+\widehat{LGI}=360°+20°$
$+30°=410°$.



(8)

$\therefore 2m°+2n°=410°$. 即$m°+n°=205°$.

$\therefore \angle G+\angle K=205°$.

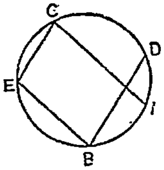
**9.** 若$\widehat{DA}=50°$, $\angle B+\angle C$是多少度?

**答** 命$\angle B=m°$, $\angle C=n°$.

$\therefore \widehat{ECD}=2m°$, $\widehat{ABE}=2n°$.

但$\widehat{ECD}+\widehat{ABE}+\widehat{DA}=360°$
(§186),而$\widehat{DA}=50°$ (題設).

$\therefore 2m°+2n°+50°=360°$,



(9)

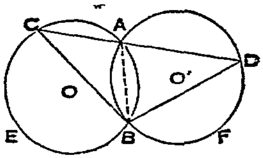
即$2(m°+n°)=310°$, $m°+n°=155°$,

$\therefore \angle B+\angle C=155°$.

**10.** 過兩等圓的交點之一,作一直線,使之與兩圓相遇,則其兩端與另一交點等距離.

**設** O圓=O′圓,相交於A,B, CD通過A點,

**求證** CB=DB.

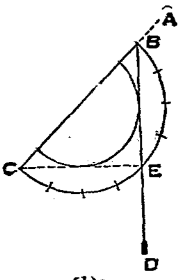


(10)

## 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作AB. | 1. 兩點之間,可作一直綫(公理13). |
| 2. $\angle BAC+\angle BAD=180°$. | 2. 一直綫上之兩鄰角相補(§50). |
| 3. 但$\angle BAC$以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{BEC}$度之,<br>$\angle BAD$以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{BFD}$度之. | 3. 圓周角以其所夾半弧度量之(§232) |
| 4. $\therefore \overset{\frown}{BEC}+\overset{\frown}{BFD}=360°$. | 4. 代替(公理12). |
| 5. $\overset{\frown}{BEC}+\overset{\frown}{BAC}=360°$,<br>$\overset{\frown}{BAD}+\overset{\frown}{BFD}=360°$. | 5. 全體等於其各部分之和(公理10).又一圓可分爲360°(§186). |
| 6. $\therefore \overset{\frown}{BEC}=\overset{\frown}{BAD}$,<br>而$\overset{\frown}{BFD}=\overset{\frown}{BAC}$. | 6. 代替. |
| 7. $\therefore CB=DB$. | 7. 在等圓內等弧有等弦(§187). |

11.若一半圓如右圖放置之,使其直徑CB的延長綫通過A點,又一鉛垂綫BD交半圓於E,則A的仰角以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{BE}$度之.



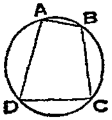
(11)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作CE, 則∠BEC=rt.∠. | 1. 兩點之間可作一直綫(公理13). 又半圓內的弓形角爲直角(§234). |
| 2. ∠BCE卽∠ACE是A的仰角,也是圓周角. | 2. FD垂直於水平,故CE恰爲水平綫. |
| 3. ∴∠ACE以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{BE}$量之. | 3. 圓周角以其所夾半弧度量之(§232). |

**注意** 這題是測量高度的應用.

12.依2:4:4:5的連比把一個圓分做四份,順次連結各分點,求如此所成各圓周角的度數.



(12)

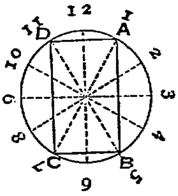
### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 四部分的連比是2:4:4:5. | 1. 題設. |
| 2. ∴全圓分作2+4+4+5=15份. | 2. 全體等於其各部分之和(公理10). |
| 3. 360°÷15=24°=每份度數. | 3. 一圓可分爲360°(§186). |
| 4. ∴第一部分=2×24°=48°=$\overset{\frown}{AB}$. | 4. 四部分的分配(依1的比率). |

| | |
|---|---|
| 第二部分 $=4\times24^\circ$<br>$=96^\circ=\overset{\frown}{BC}$. | |
| 第三部分 $=4\times24^\circ$<br>$=96^\circ=\overset{\frown}{CD}$. | |
| 第四部分 $=5\times24^\circ$<br>$=120^\circ=\overset{\frown}{DA}$. | |
| 5. $\therefore\angle A$以$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD})$度之,<br>卽$\angle A=96^\circ$. | 5. 圓周角以其所夾半弧度量之(§232). |
| $\angle B$以$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DA})$度之,<br>卽$\angle B=108^\circ$, | |
| $\angle C$以$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{DA}+\overset{\frown}{AB})$度之,<br>卽$\angle C=84^\circ$, | |
| $\angle D$以$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC})$度之,<br>卽$\angle D=72^\circ$. | |

13.在鐘面上:自 1 至 5,至 7,至11至 1 作諸直綫,求各圓周角的度數.

**設**　在鐘面作 1 到 5 的綫AB, 5 到 7 的綫BC,7 到11的綫CD,11到 1 的綫DA.



(13)

**求證**　∠A,∠B,∠C,∠D.

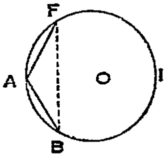
### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** ∠A的對邊DB爲直徑. | **1.** 時鐘分圓爲12等分,1到5和11到1恰是6等分,故△ABD在半圓內. |
| **2.** ∴$\angle A=90^\circ$. | **2.** 半圓內所函之角,是直角(§234). |
| **3.** ∠B的對邊AC亦爲直徑. | **3.** 同1. |
| **4.** ∴$\angle B=90^\circ$. | **4.** 同2. |
| **5.** 同理$\angle C=90^\circ$,<br>$\angle D=90^\circ$. | **5.** 同1,2. |

**14.**—一個正六邊形內接於一圓,這六邊形每一個角有多少度?

**設** ∠A是O圓的內接正六邊形的一角.

**求** ∠A的度數.



(14)

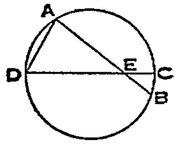
### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** 作FB弦,∠A是弓形角. | **1.** 兩點之間,可作一直綫(公理13). 弓形以弧及弦爲界(§230). |
| **2.** $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AF}=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$. | **2.** 題設正六邊形,各頂點分圓爲六等分. |

| | |
|---|---|
| 3. $\overset{\frown}{BIF}=360°-2\times 60°$ <br> $=240°$. | 3. $\overset{\frown}{BIF}$ 占圓的$\frac{4}{6}$. |
| 4. ∴ $\angle A=120°$. | 4. 圓周角以其所夾半弧度量之(§232). |

## 習題十四 (教科書165頁)

1. 在命題第十五的圖中,設 $\overset{\frown}{AD}=60°$, $\overset{\frown}{BA}=140°$, 又 $\overset{\frown}{CB}=20°$, 求 $\angle AEC$ 和 $\angle DAE$.



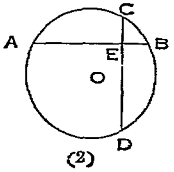
(1)

### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle AEC$ 以$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})$度之. | 1. 兩弦相交於圓內所成之角,以其所夾弧及對頂角所夾弧的半和量之(§236). |
| 2. $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BA}-\overset{\frown}{CB}$. | 2. 全體等於其各部分之和(公理10). 從和中減去一部,便是他部分. |
| 3. $\overset{\frown}{BD}=360°-\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BA}$. | 3. 同上. |
| 4. $\overset{\frown}{AD}=60°$, $\overset{\frown}{BA}=140°$, <br> $\overset{\frown}{CB}=20°$. | 4. 題設. |
| 5. ∴ $\overset{\frown}{AC}=140°-20°=120°$. <br> $\overset{\frown}{BD}=360°-60°-140°$ <br> $=160°$. | 5. 代替(公理12). |

| | |
|---|---|
| 6. ∴ $\angle AEC=\frac{1}{2}(120^\circ+160^\circ)=140^\circ$. | 6. 以5代入1所得. |
| 7. $\angle DAE$卽$\angle DAB$以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$度之,$=80^\circ$. | 7. 圓周角以其所夾半弧度量之(§232). |

2. 設兩弦正交於圓內,則所截相對兩弧的和,等於半圓.



(2)

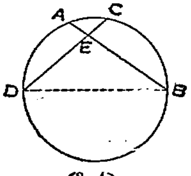
設 $AB\perp CD$.

求證 $\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CB}$=半圓, $\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}$=半圓.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle AED$以$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CB})$度之. $\angle AEC$以$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})$度之. | 1. 兩弦相交於圓內所成之角,以其所夾弧,及對頂角所夾弧的半和量之(§236). |
| 2. 但$AB\perp CD$.<br>∴ $\angle AED=\angle AEC=90^\circ$. | 2. 題設.兩綫互相垂直,他們相交成直角(§30). |
| 3. $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CB})=90^\circ$.<br>$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})=90^\circ$. | 3. 代替(公理12). |
| 4. ∴ $\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CB}=180^\circ$=半圓.<br>∴ $\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=180^\circ$=半圓 | 4. 等量乘等量其積相等.(公理7). |

3. 在命題十五的圖中,$\overset{\frown}{AC}$和$\overset{\frown}{DB}$的和是$210°$,求$\angle CEB$.



(3, 4)

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{DB}=210°$. | 1. 題設. |
| 2. 但$\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CB}+\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{DB}=360°$. | 2. 一圓分爲360° (§186).全體等於其各部分之和(公理10). |
| 3. $\therefore \overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CB}=150°$. | 3. 等量減等量,其餘量相等(公理3). |
| 4. $\angle CEB$以$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CB})$度之. | 4. 兩弦相交於圓內所成之角,以其所夾弧及對頂角所夾弧的半和量之(§236). |
| 5. $\therefore \angle CEB=75°$. | 5. 代替(公理12). |

4. 在命題十五的圖中,$\angle B=40°$,又$\overset{\frown}{BC}=100°$,求$\angle AED$.

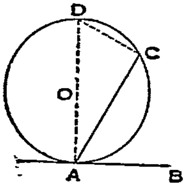
**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle B=40°$. | 1. 題設. |
| 2. $\therefore \overset{\frown}{AD}=80°$. | 2. 圓周角以其所夾半弧度量之(§232). |
| 3. $\overset{\frown}{BC}=100°$. | 3. 題設. |

| | |
|---|---|
| 4. ∠AED以$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC})$度之. | 4. 兩弦相交於圓內所成之角,以其所夾弧及對頂角所夾弧的半和量之(§236). |
| 5. ∴∠AED$=\frac{1}{2}(80^\circ+100^\circ)$<br>$=90^\circ$. | 5. 代替(公理12). |

## 習題十五 (教科書166頁)

1. 在命題十六的圖中,$\overset{\frown}{AC}=2\overset{\frown}{CD}$, 求∠CAB.



(1)

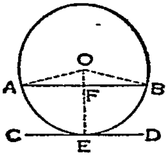
### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\overset{\frown}{AC}=2\overset{\frown}{CD}$. | 1. 題設. |
| 2. $\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CD}=180^\circ$. | 2. DA是直徑,故 $\overset{\frown}{DCA}$ 爲半圓(詳§237證). |
| 3. $3\overset{\frown}{CD}=180^\circ$, $\overset{\frown}{CD}=60^\circ$. | 3. 代替.公理10.又等量除等量,其商相等(公理8). |
| 4. $\overset{\frown}{AC}=120^\circ$. | 4. 代替(公理12). |
| 5. ∴∠CAB以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$度之<br>$=60^\circ$. | 5. 切綫同切點上的弦,所成之角,以其所夾的半弧度量之(§237). |

2. 弦必平行於過其所對弧的中點的切綫.

設 AB弦的弧爲$\overset{\frown}{AEB}$,中點E,切綫CD,切O圓於E.

求證 AB//CD.

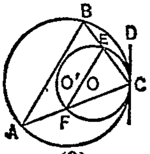


(2)

## 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作OE,交AB於F. | 1. 兩點之間,可作一直綫(公理13). |
| 2. OE⊥CD | 2. 切綫⊥切點上的半徑(§204). |
| 3. 作AO,BO,則∵$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$.<br>∴∠AOE=∠BOE. | 3. 等弧有等中心角(§183). |
| 4. OA=OB, ∠A=∠B. | 4. 等半徑,等底角. |
| 5. △AFO≅△BFO. | 5. a.s.a.=a.s.a. |
| 6. ∠AFO=∠BFO=rt.∠. | 6. 相當角,$\frac{1}{2}$平角. |
| 7. ∴AB⊥OE. | 7. 由6. |
| 8. ∴AB//CD. | 8. 皆垂直於OE. |

3. 兩圓O和O′切DC於C點,求證∠DCB=∠A=∠EFC.

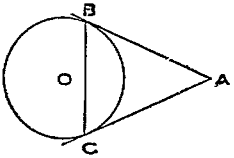


(3)

## 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 在O′圓內$\angle A$以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$度之. | 1. 圓周角以其所夾半弧度量之(§232). |
| 2. 在O圓內$\angle EFC$以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{EC}$度之. | 2. 同上. |
| 3. $\angle DCB$以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$及$\frac{1}{2}\overset{\frown}{EC}$度之. | 3. 圓的切綫與切點上的弦所成之角,以其所夾半弧度量之(§237). |
| 4. $\therefore \angle DCB=\angle A=\angle EFC$. | 4. 數量同等於一量,他們相等(公理1) |

4. 一個圓的兩切綫成 40° 的角,則兩切綫間的劣弧有多少度?



(4)

設　O圓兩切綫AB, AC,而$\angle A=40^\circ$.

求　劣弧$\overset{\frown}{BC}$的度數.

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作BC. | 1. 兩點之間,可作一直綫(公理13). |
| 2. $AB=AC$. | 2. 從圓外一點作圓的兩切綫相等(§209). |
| 3. $\angle ABC=\angle ACB$ | 3. 等腰三角形的兩底角相等(§71). |
| 4. $\angle A=40^\circ$. | 4. 題設. |

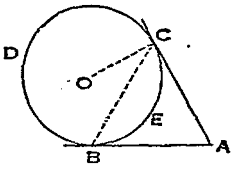
| | |
|---|---|
| 5. $\angle A+2\angle ACB=180^\circ$. | 5. 三角形各角之和等於一平角(§110). |
| 6. $2\angle ACB=140^\circ$. | 6. 等量減等量,其餘量相等(公理 3). |
| 7. $\angle ACB=70^\circ$. | 7. 等量的一半相等(公理 8). |
| 8. $\therefore \overset{\frown}{BC}=140^\circ$. | 8. 切綫與切點上的弦所成之角,以其所夾半弧度量之(§237). |

## 習題十六 (教科書169—170頁)

1. 設兩切綫所成的角是 60°, 則其所截的兩弧各有多少度?

設　$\angle A=60^\circ$.

求　$\overset{\frown}{BEC}$及$\overset{\frown}{BDC}$的度數.



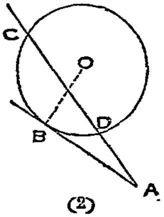
(1)

### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作 BC 弦. | 1. 兩點之間,可作一直綫(公理 13). |
| 2. AC=AB. | 2. 從圓外一點,作圓的兩切綫相等(§209). |
| 3. $\angle B=\angle C$. | 3. 等腰三角形的兩底角相等(§71). |

| | |
|---|---|
| 4. $\angle A=60^\circ$. | 4. 題設. |
| 5. $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$. | 5. 三角形各角之和等於一平角(§110). |
| 6. $\angle B=\angle C=60^\circ$. | 6. 代替.公理10.又等量的一半相等(公理8). |
| 7. $\therefore \overset{\frown}{BEC}=120^\circ$,<br>$\therefore \overset{\frown}{BDC}=240^\circ$. | 7. 切綫與切點上的弦所成之角,以其所夾半弧度量之(§237).又全圓=360°. |

2. 設一割綫與一切線所成之角爲 20°,又其所截的較大弧是90°,則其所截的另一弧是多少度?



(2)

設　O圓割綫AC,切綫AB,

$\angle A=20^\circ, \overset{\frown}{BC}=90^\circ$.

求　$\overset{\frown}{BD}$的度數.

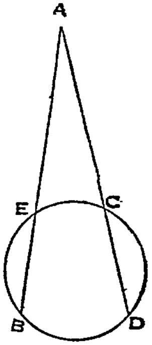
## 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle A$以$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{BD})$度之. | 1. 一割綫與一切綫所成之角,以其所夾兩弧的半差量之(§238). |
| 2. $\angle A=20^\circ, \overset{\frown}{BC}=90^\circ$. | 2. 題設. |
| 3. $\therefore 20^\circ=\frac{1}{2}(90^\circ-\overset{\frown}{BD})$. | 3. 代替(公理12). |
| 4. $40^\circ=90^\circ-\overset{\frown}{BD}$. | 4. 等量的兩倍相等(公理7). |

| | |
|---|---|
| 5.　$\overset{\frown}{BD}=50°$. | 5.　等量加減等量,其結果相等(公理2及3.以$\overset{\frown}{BD}$—40°加兩端). |

3. 如在命題十七的甲圖中,設

$\overset{\frown}{BD}=100°$,又$\angle A=20°$,求$\overset{\frown}{EC}$.



(3, 4)

**證**

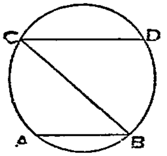
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　$\angle A$以$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{EC})$度之. | 1.　兩割綫所成圓外之角,以其所夾兩弧的半差度量之(§238). |
| 2.　$\angle A=20°$, $\overset{\frown}{BD}=100°$ | 2.　題設. |
| 3.　$20°=\frac{1}{2}(100°-\overset{\frown}{EC})$. | 3.　代替(公理12). |
| 4.　$40°=100°-\overset{\frown}{EC}$ | 4.　等量的兩倍相等(公理7). |
| 5.　$\overset{\frown}{EC}=60°$. | 5.　等量加減等量,其結果相等(公理2及3,以$\overset{\frown}{EC}$—40°加兩端). |

4. 在同一圖中設$\overset{\frown}{EC}=60^\circ$, 又$\overset{\frown}{EB}=\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$, 求∠A.

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\overset{\frown}{EC}=60^\circ$. | 1. 題設. |
| 2. $\overset{\frown}{EC}+\overset{\frown}{EB}+\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{CD}=360^\circ$. | 2. 一圓分爲360°(§186).全體等於其各部分之和(公理10). |
| 3. $\overset{\frown}{EB}+\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{CD}=300^\circ$. | 3. 等量減等量,其餘量相等(公理3). |
| 4. 但$\overset{\frown}{EB}=\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$. | 4. 題設. |
| 5. ∴ $3\overset{\frown}{BD}=300^\circ$. | 5. 代替(公理12). |
| 6. $\overset{\frown}{BD}=100^\circ$. | 6. 等量除等量,其商相等(公理8). |
| 7. ∠A以$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{EC})$度之. | 7. 兩割綫在圓外相交之角,以其所夾兩弧的半差量之(§238). |
| 8. $\angle A=\frac{1}{2}(100^\circ-60^\circ)$. | 8. 代替(公理12). |
| 9. ∴ $\angle A=20^\circ$ | 9. 8的代數的計算(§169). |

5. 在命題十八的圖中,設$\overset{\frown}{AB}=80^\circ$, 又$\overset{\frown}{CD}=120^\circ$, 求∠ABC.



(5)

**設** AB//CD, $\overset{\frown}{AB}=80^\circ$, $\overset{\frown}{CD}=120^\circ$.

**求** ∠ABC的度數.

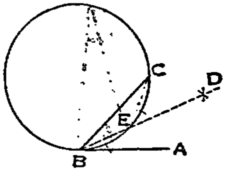
### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\overset{\frown}{AB}=80°, \overset{\frown}{CD}=120°$. | 1. 題設. |
| 2. $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=360°$. | 2. 一圓分爲360°(§186).全體等於其各部分之和(公理10). |
| 3. $\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=160°$. | 3. 等量減等量,其餘量相等(公理2). |
| 4. $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$. | 4. 平行兩割綫,夾等弧於圓(§239). |
| 5. $2\overset{\frown}{AC}=160°, \overset{\frown}{AC}=80°$. | 5. 代替(公理12). 又等量的一半相等(公理8). |
| 6. $\therefore \angle ABC=40°$. | 6. 圓周角以其所夾之半弧度量之(§232). |

6. 一切綫和自切點所引之弦所成的角的二等分綫,必二等分其所截的弧.

設 BD平分$\angle B$.

求證 $\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{EC}$.



(6)

### 證

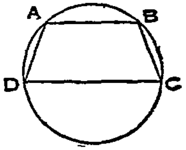
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle B$以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$度之. | 1. 切綫與切點上的弦所成之角,以其所夾半弧度量之(§237). |
| 2. $\angle DBA=\frac{1}{2}\angle B=\angle CBD$ | 2. 題設BD平分$\angle B$. |

| | |
|---|---|
| 3. $\angle DBA$以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{BE}$度之. | 3. 同 1. |
| 4. $\frac{1}{2}\angle B$以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{BE}$度之. | 4. 代替(公理12). |
| 5. $\angle B$以$\overset{\frown}{BE}$度之. | 5. 等量的二倍相等(公理7). |
| 6. $\therefore \overset{\frown}{BE}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$. | 6. 公理 1 (由 1 與 5). |
| 7. 但 $\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{EC}=\overset{\frown}{BC}$. | 7. 全體等於其各部分之和(公理10). |
| 8. $\therefore \overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{EC}$. | 8. 代數計算. |

**7.** 圓內接梯形必是等腰梯形.

設　梯形ABCD內接於圓.

求證　AD=BC.



(7)

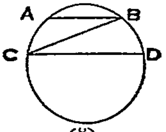
### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. AB//CD. | 1. 梯形是有兩邊平行的四邊形(§136). |
| 2. $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$. | 2. 平行兩割綫夾等弧於圓(§239). |
| 3. ∴AD=BC. | 3. 在同圓內等弧有等弦(§187). |

**8.** 在命題十八的圖中,設 $\overset{\frown}{AB}=80^\circ$, 又 $\overset{\frown}{CD}=200^\circ$, 求$\angle B$.

**設** $AB // CD$, 而 $\overset{\frown}{AB} = 80°$, $\overset{\frown}{CD} = 200°$.

**求** $\angle B$ 的度數.



(8)

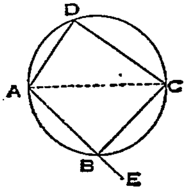
**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\overset{\frown}{AB} = 80°$, $\overset{\frown}{CD} = 200°$. | 1. 題設. |
| 2. $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD} = 360°$. | 2. 一圓可分爲 360° (§186). 又全體等於其各部分之和(公理 10). |
| 3. $\therefore \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD} = 80°$. | 3. 等量減等量,其餘量相等(公理 3). |
| 4. $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$. | 4. 平行的兩割綫所夾的兩弧相等(§239). |
| 5. $\overset{\frown}{AC} = 40°$. | 5. 代替 (公理 12). 等量的一半相等(公理 8). |
| 6. $\therefore \angle B = 20°$. | 6. 圓周角以其所夾的半弧量之(§232). |

**9.** 圓內接四邊形一個角的外角,必等於其內對的角.

**設** 圓的內接四邊形 ABCD 的一外角 CBE.

**求證** $\angle CBE = \angle D$.



(9)

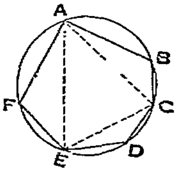
**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作對角綫AC. | 1. 兩點之間,可作一直綫(公理13). |
| 2. $\angle D$以$\frac{1}{2}\widehat{ABC}$度之. | 2. 圓周角以其所夾的半弧量之(§232). |
| 3. $\angle ABC$以$\frac{1}{2}\widehat{ADC}$度之. | 3. 同上. |
| 4. $\therefore \angle D+\angle ABC=180°$. | 4. 等量加等量,其和相等(公理2). $\because \widehat{ABC}+\widehat{ADC}=360°$. |
| 5. 但$\angle CBE+\angle ABC=180°$. | 5. 一直綫上的兩鄰角相補(§50). |
| 6. $\therefore \angle CBE=\angle D$. | 6. 代替(公理12). |

10.求一個圓內接六邊形的相間三個角的和.

**設** 六邊形ABCDEF內接於圓.

**求** $\angle B+\angle D+\angle F$的度數.



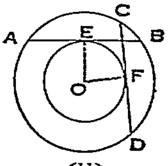
(10)

**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle B$以$\frac{1}{2}(\widehat{AF}+\widehat{FE}+\widehat{ED}+\widehat{DC})$度之. | 1. 圓周角以其所夾弧的一半量之(§232). |

| | |
|---|---|
| $\angle D$以$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{FE}+\overset{\frown}{AF}+\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC})$度之.<br>$\angle F$以$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{DC}+\overset{\frown}{ED})$度之. | |
| **2.** $\angle B+\angle D+\angle F$以$\overset{\frown}{AF}+\overset{\frown}{FE}+\overset{\frown}{ED}+\overset{\frown}{DC}+\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}$度之. | **2.** 等量加等量,其和相等(公理2). |
| **3.** 但$\overset{\frown}{AF}+\overset{\frown}{FE}+\overset{\frown}{ED}+\overset{\frown}{DC}+\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=360°$. | **3.** 一圓可分爲360° (§186).又公理10. |
| **4.** $\therefore \angle B+\angle D+\angle F=360°$ | **4.** 代替(公理12). |

**11.**設在兩個同心圓較大的一個圓中作兩弦,與較小的圓相切,則此兩弦必相等.



(11)

**設** ACB圓及EF圓同心,在大圓ACB內作AB, CD兩弦,切小圓於E,於F.

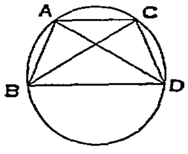
**求證** AB=CD.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** 作OE, OF. | **1.** 兩點之間,可作一直綫(公理13). |
| **2.** $OE\perp AB$, $OF\perp CD$. | **2.** 切綫垂直於切點上所作之半徑(204). |

| | |
|---|---|
| 3.　$OE=OF$. | 3.　同圓的半徑相等(§178). |
| 4.　$AB=CD$. | 4.　兩弦去圓心等距,他們相等(§197). |

12.設兩等弦相交,則順次聯結其各端的直線,成一等腰梯形.



(12)

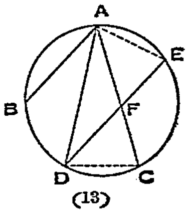
設　$AD=BC$而相交,聯$AC$, $CD$, $AB$, $BD$.

求證　$ACDB$爲等腰梯形.

## 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1.　$\angle BAD=\angle BCD$. | 1.　同弓形內諸弓形角相等(§233). |
| 2.　$AD=BC$. | 2.　題設. |
| 3.　$\angle ABD=\angle CDB$ | 3.　等弦有等弧(§187).等弓形內諸弓形角相等(§233). |
| 4.　$\triangle ABD\cong\triangle CDB$. | 4.　s.a.a.=s.a.a.(§114). |
| 5.　$AB=CD$. | 5.　相當邊相等. |
| 6.　但$\angle ABD$與$\angle ACD$相補. | 6.　內接四邊形的兩對角相補(§235). |
| 7.　$\therefore\angle ACD$與$\angle CDB$相補. | 7.　3與6的代替(公理12) |
| 8.　$\therefore AC\parallel BD$. | 8.　一截綫截兩綫所成同側的兩內角相補,那兩綫平行(§97). |
| 9.　$\therefore ACDB$爲等腰梯形. | 9.　兩底平行,兩腰相等. |

13.延長圓周角的二等分線,使與圓相交,過此交點作一弦平行於角的一邊,則此弦必等於角的另一邊.



(13)

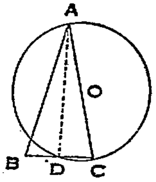
**設**　圓周角 $\angle BAC$, 其分角綫 AD, 而 $DE/\!/AB$, 交 AC 於 F.

**求證**　$DE=AC$

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. $\angle BAD=\angle DAC$. | 1. 題設 AD 是 $\angle BAC$ 的分角綫. |
| 2. $DE/\!/AB$. | 2. 題設. |
| 3. $\angle ADE=\angle BAD$. | 3. 一截綫截兩平行綫所成的內錯角相等(§104). |
| 4. $\angle ADE=\angle DAC$. | 4. 1 同 3 的代替. |
| 5. 作直綫 AE, DC. | 5. 兩點之間,可作一直綫(公理 13). |
| 6. $\angle EDC=\angle CAE$. | 6. 在同弓形內諸弓形角相等(§233). |
| 7. $\therefore \angle EDC+\angle ADE=\angle CAE+\angle DAC$. | 7. 等量加等量,其和相等(公理 2). |
| 8. 卽 $\angle ADC=\angle DAE$. | 8. 全體等於其各部分之和(公理 10). |
| 9. $AD=AD$. | 9. 公用. |
| 10. 由 4. 8. 9 知 $\triangle ADC\cong\triangle DAE$. | 10. a.s.a.=a.s.a. |
| 11. $\therefore DE=AC$. | 11. 相當邊相等. |

**14.**以等腰三角形的一腰爲直徑作一圓,則此圓必二等分其底邊.



(14)

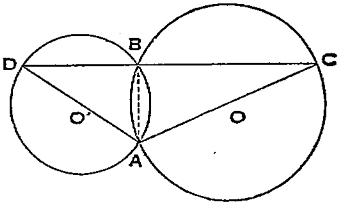
**設**　等腰三角形ABC,以AC爲直徑,作O圓,交底邊於D.

**求證**　BD=CD.

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作AD | 1. 兩點之間,可作一直綫(公理13). |
| 2. ∠ADC=rt.∠<br>=∠ADB. | 2. 半圓內所函之角是直角(§234).題設AC爲直徑. |
| 3. ∴∠BAD=∠CAD,<br>即AD爲∠A的分角綫. | 3. 兩△有兩角相等,第三角亦等(§113). |
| 4. ∴BD=CD. | 4. 等腰三角形頂角的二等分綫,等分其底邊(§72). |

**15.**設兩圓相交於A和B,又AC和AD是兩圓的直徑,則聯結C和D的直綫必通過B點.



(15)

**證**

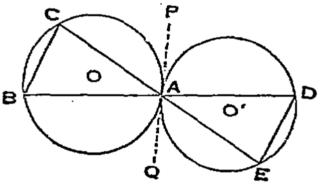
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作AB. | 1. 兩點之間可作一直綫 |

| | |
|---|---|
| | (公理13). |
| 2. ∠ABC=rt.∠. | 2. 半圓內所函之角是直角(§234). |
| 3. ∠ABD=rt.∠. | 3. 同上. |
| 4. ∠ABC與∠ABD相補. | 4. 兩角之和等於一平角,叫做相補(§36). |
| 5. ∴DBC是一直綫,卽直綫CD通過B點. | 5. 兩鄰角相補則他們的外邊成一直綫(§51). |

16.設兩圓相切,過切點作兩直綫,使其各端與兩圓相遇,聯結此兩直線各端的弦,必平行.

設 O, O′兩圓,相切於A, BD, CE都通過A點.聯BC, DE兩弦.

求證 BC//DE.



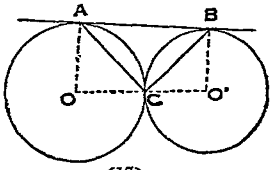
(16)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作公切綫PQ. | 1. 兩圓的公共外切綫(§211). |
| 2. ∠ABC以$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC})$度之. | 2. 圓周角以其所夾半弧量之(§232). |
| 3. ∠PAC以$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC})$度之. | 3. 圓的切綫與切點上的弦所成之角,以其所夾半弧量之(§237). |
| 4. ∠ABC=∠PAC. | 4. 兩量都等於某量,他們 |

| | |
|---|---|
| | 相等(公理1). |
| 5. $\angle ADE$以$\frac{1}{2}(\widehat{AE})$度之. | 5. 同2. |
| 6. $\angle QAE$以$\frac{1}{2}(\widehat{AE})$度之. | 6. 同3. |
| 7. $\angle ADE=\angle QAE$. | 7. 同4. |
| 8. $\angle PAC=\angle QAE$. | 8. 對頂角相等(§53). |
| 9 $\therefore \angle ABC=\angle ADE$. | 9. 4,8,7的代替(公理12). |
| 10. $\therefore BC//DE$. | 10. 截綫與兩綫成等內錯角,兩綫平行(§93). |

17.設兩圓相切於C.又一外公切綫遇兩圓於A和B,則角ACB是一直角.



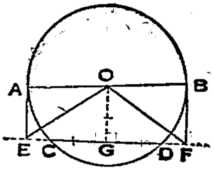
(17)

### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作AO, BO′及OO′. | 1. 兩點之間可作一直綫(公理13). |
| 2. $AO\perp AB$, $BO'\perp AB$. | 2. 切綫垂直於切點上的半徑(§204). |
| 3. $AO//BO'$. | 3. 截綫與兩綫成等同位角,這兩綫平行(§95). |
| 4. OO′通過C點. | 4. 如兩圓相切,則聯圓心綫通過切點(§216). |
| 5. $\angle AOC+\angle BO'C=180°$. | 5. 截綫與兩平行綫所成的同側兩內角相補(§107). |

| | |
|---|---|
| **6.** 但 $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle AOC$.<br>$\angle ABC=\frac{1}{2}\angle BO'C$. | **6.** 圓心角以其所夾的弧度量之(§227). 切綫與切點上的弦所成之角,以其所夾半弧量之(§237). |
| **7.** $\therefore \angle BAC+\angle ABC=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle BO'C)=90°$. | **7.** 由 6 與 5,等量的一半相等(公理 8). |
| **8.** $\therefore \angle ACB=90°$. | **8.** 三角形三角之和等於一平角 (§110). 其他兩角既合爲 90°,此角即爲 90°. |

**18.**設自直徑的兩端作任意一弦(有須引長者)的兩垂綫,則兩垂足必與中心等距離.



(18)

**設**　O 圓的直徑 AB,任意弦 CD, $AE\perp CD$, $BF\perp CD$.

**求證**　$OE=OF$.

**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** 作 $OG\perp CD$. | **1.** 從直綫外一點,作該綫的垂綫(§87). |
| **2.** $AE\perp CD$, $BF\perp CD$. | **2.** 題設. |
| **3.** $\therefore AE\parallel OG\parallel BF$. | **3.** 一截綫與數綫成等同位角,這數綫平行 (§95). |
| **4.** 但 $AO=BO$. | **4.** 同圓的半徑相等(§178). |
| **5.** $\therefore EG=FG$. | **5.** 數平行綫分一截綫,如各綫分相等.他們也分任何他 |

| | |
|---|---|
| | 截綫爲等分(§148). |
| **6.** $\angle OGE = \angle OGF$. | **6.** 凡直角相等(§46). 作圖 $OG \perp CD$. |
| **7.** $OG = OG$. | **7.** 公用. |
| **8.** $\triangle OGE \cong \triangle OGF$. | **8.** s.a.s.=s.a.s. |
| **9.** $\therefore OE = OF$. | **9.** 相當邊相等. |

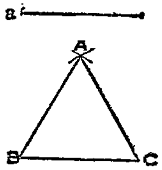
## 習題十七 (教科書第171頁)

**1.** 已知一邊,求作一等邊三角形.

**設**　已知△的一邊a,

**求作**　等邊三角形.

**作法**　作BC=a,
以B爲中心a爲半徑,作小弧,
又以C爲中心,以同半徑作小弧.
兩弧相交於A,作AB, AC,
則ABC是所求的三角形.



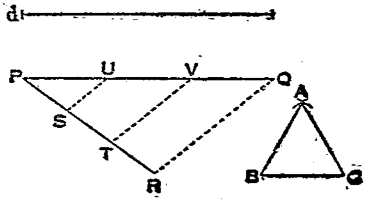
(1)

**2.** 已知等邊三角形的周,求作等邊三角形.

**設**　已知△三邊之和(卽周圍)爲d.

**求作**　等邊三角形.

**作法**　作PQ=d,
由P以任意的方向作
PR,使PS=ST=TR.
聯QR,作SU//TV//QR.
然後作BC=PU.
依1題法作△ABC,便
是所求的等邊三角形.

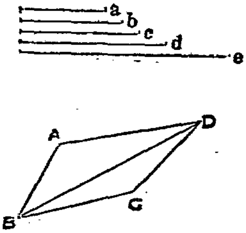


(2)

3. 已知四邊及一對角綫,求作一個四邊形.

**設**　已知a, b, c, d四邊,及對角綫e.

**求作**　四邊形.



(3)

**作法**　先作BD=e,

以D爲中心,d爲半徑,作小弧,

又以B爲中心,a爲半徑,作小弧,

兩弧相交於A,作AB, AD.

同理以B爲中心,c爲半徑,作小弧,D爲中心,b爲半徑,作小弧,兩弧相交於C,作BC, DC,

這ABCD,便是所求的四邊形.

**討論**　如$a+b>e$, $c+d>e$,可另作一形.

$a+c>e$, $b+d>e$,又可作一形.

此題可作三種不同的四邊形.

## 習題十八 (教科書第172頁)

1. 在一已知直角邊上,求作一個等腰直角三角形.

**設**　已知等腰直角三角形的一腰a,

**求作**　其形.

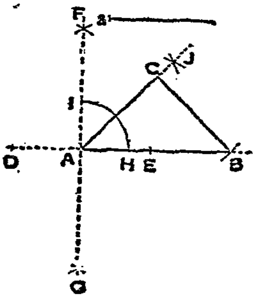
**作法**　作任意的直綫DB.

以適宜之點D爲中心,適宜之長爲半徑,向直綫上下作兩小弧.

再任意於DB內取E爲中心,上下作弧如前,

上兩弧相交於F,下兩弧相交於G.

作FG,則$FG\perp DB$, $\angle FAB=$rt.$\angle$.(A是兩綫的交點).



(1)

以A爲中心,任意長爲半徑,作弧交FG於I, DB於H.

以I, H爲中心,作兩弧相交於J.

作AJ. 那麼$\angle JAB=\frac{1}{2}$rt.$\angle$.

在AJ內取AC=a. 以C爲中心a爲半徑作弧截DB於B.

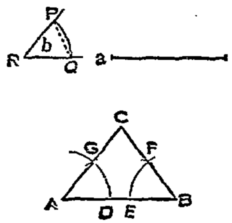
作BC. 這△ABC, 便是所求的等腰直角三角形.

**注意** 這樣作法,雖然麻煩些,但AB作底C角在上邊,樣子好看些.倘然作FG之後便在AF內取a及AB內取a,聯起直綫來,也成一個所求的三角形.就是以一直角邊在下面作底了.

2. 已知底邊和一個底角,求作一個等腰三角形.

設　已知底a及底角b,求作等腰三角形.

**作法**　以b的角頂R爲中心,任意長爲半徑作弧,交兩邊於P於Q.



(2)

然後作AB=a. 以A,B爲中心,PR爲半徑,作DG, EF兩弧,交AB於D和E.

以D,E爲中心,PQ爲半徑,取G,F兩點,通過這兩點,作AC, BC相交於C.

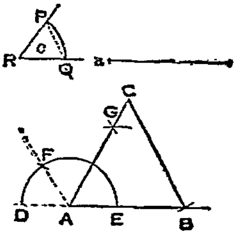
這三角形ABC,便是所求的等腰三角形.

## 習題十九 (敎科書第172頁)

1. 已知一腰和頂角,求作一個等腰三角形.

**設**　已知一腰a,及頂角c.

**求作**　等腰三角形.



(1)

**作法**　作任意長的直綫BD.

以c的角頂R爲中心,任意長PR爲半徑,作弧,交兩邊於P,於Q,作直綫PQ.

以BD中適宜之一點A爲中心,PR爲半徑,作半圓,交BD於D,於E.

以D爲中心,PQ爲半徑,在半圓內取F點.作AF,則∠FAD=∠c.

作AG二等分其補角∠FAB(利用F,E點).

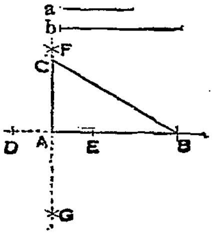
於AG內(或引長綫內)取AC=a.以C爲中心,a爲半徑,作弧截BD於B.

作BC,則AEC是所求的三角形.

**2.** 已知兩直角邊,求作一個直角三角形.

**設**　已知a,b兩直角邊.

**求作**　直角三角形.



(2)

**作法**　作任意的直綫DB.

取適宜之點A,以之爲中心,任意長爲半徑,作兩小弧,截DB於D於E.

以D,E爲中心,向DB上下作四小弧,相交於F,於G.

作FG,則∠FAB=rt.∠.

然後在FA內取AC=a,AB內取AB=b,作BC,

這△ABC是所求的直角三角形.

3. **已知**三邊(AB,BC,和CD),又知末一邊和未知邊所成之角(∠D),又知末一邊和對角綫所成的角(∠DCA),

**求作**　一四邊形(ABCD).

**作法**　先作AC,依§86法作∠DCA.取CD.

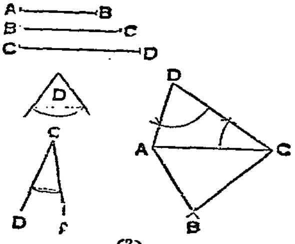
在D點作∠D(§86)交AC於A.

以A爲中心AB爲半徑,作小弧.

又以C爲中心,BC爲半徑,作小弧,相交於B.

作AB, BC.

這四邊形ABCD,卽所求的四邊形.



(3)

4. **已知**五邊 (AB, BC, CD, DE, 和 EA),又知夾其中一邊的兩個角(∠A, ∠B).

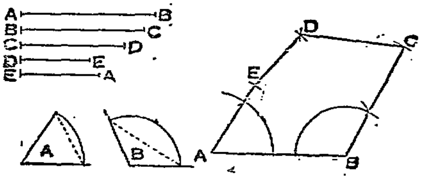
**求作**　一個五邊形(ABCDE).

**作法**　先作AB.依§86法作∠A及∠B.截取AE及BC.

以C爲中心, CD爲半徑,作弧;

又以E爲中心,DE爲半徑,作弧,兩弧相交於D.

作CD, DE,這ABCDE便是所求的五邊形.



(4)

5. **已知**四邊和一角,求作一個四邊形.

**設**　已知四邊a, b, c, d, 及一角A.

**求作**　四邊形ABCD.

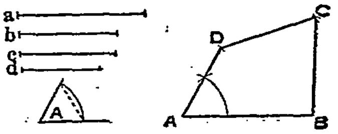
**作法**　先作AB=a, 依§86法作∠A;

以B爲中心, b爲半徑,作弧:

又從DA內截取AD=d,

以D爲中心c爲半徑作弧,兩弧相交於C.

作BC, CD;這ABCD是所求的四邊形.

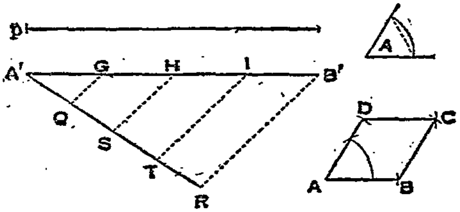


(5)

6. 已知周圍和一個角,求作一菱形.

**設**　已知一角A及周界p.

**求作**　菱形ABCD.



(6)

**作法**　作直綫A′B′=p. 依§151法四等分之.

又依§86法作∠A. 取AB, AD都$=\frac{1}{4}$p(例如A′G).

又以B, D爲中心, $\frac{1}{4}$p爲半徑,作兩弧相交於C.

作BC, CD, 這ABCD便是所求的菱形.

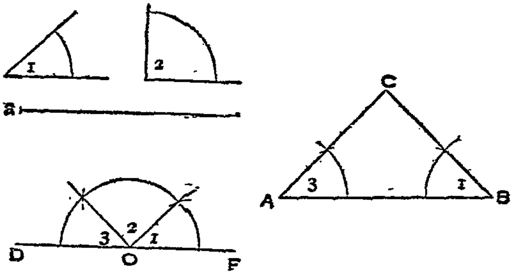
## 習題二十 (教科書第173—174頁)

1. 用命題二十二的方法,作一直角三角形.設已知

斜邊和一銳角.

**設** 已知直角2,及一銳角1,與斜邊a.

**求作** rt.△ABC.



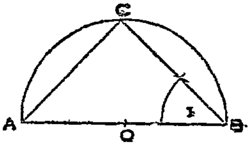
(1)

**作法** 依§86法作∠1,∠2於DE綫上如圖,剩下來的∠3,是直角三角形的他銳角.

然後依§244法(已知a.s.a.)作ABC三角形.

便是所求的直角三角形.

**2.** 前面這個問題,不用第二十二命題的方法.試另尋一個作圖法.



(2)

**作法** 依§81法求AB(=a)的中點O,(此處從略).

以O爲中心,AO爲半徑,作半圓.

又依§86法在B點上作∠1,引長其一邊交半圓於C,作AC.

這△ABC便是所求的直角三角形.

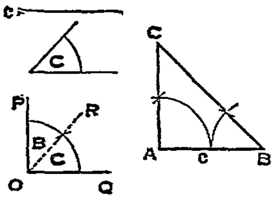
**3.** 求作一個直角三角形,已知其一直角邊及其對角.

**設**　已知一直角邊 c 及對角 C.

**求作**　rt.$\triangle ABC$.

**作法**　先作 $\angle POQ=$rt.$\angle$.

次依§86法作 $\angle ROQ=\angle C$, 那餘角B,是靠已知邊 c 的銳角.然後依§244法(a.s.a.)作$\triangle ABC$.這就是所求的直角三角形.



(3)

4. 求作一個等邊三角形,已知其(a)高,(b)內切圓的半徑,(c)外接圓的半徑.

(a)**設**　已知$\triangle$的高AD.

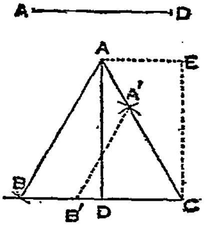
**求作**　等邊$\triangle ABC$.

**作法**　先作任意之等邊三角形$A'B'C$.

次作$EC\perp B'C$,在EC內取$CE=AD$.

作$EA\parallel B'C$交$A'C$(或其引長綫上)於A,

以A爲中心,AC爲半徑截$CB'$(引長綫)於B,作AB.



(4之a)

如此$\triangle ABC$卽爲所求之等邊三角形,而AD爲其高.

(b)**設**　已知$\triangle$的內切圓半徑爲r.

**求作**　等邊三角形.

**作法**　作$\angle ACB=60°$,又作HC平分$\angle C$.

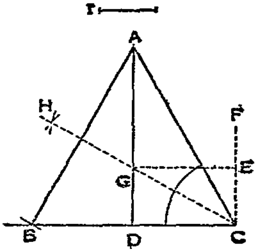
作$FC\perp BC$.在FC內取$CE=r$.

作 EG//BC,交 HC 於 G.

作 DG⊥BC,引長之交 AC 於 A.

以 A 爲中心,AC 爲半徑,作弧截 BC 於 B,作 AB.

如此 ABC 卽爲所求之等邊三角形.



(4之b)

(c) **設** 已知 △ 的外接圓半徑爲 r′

**求作** 等邊三角形.

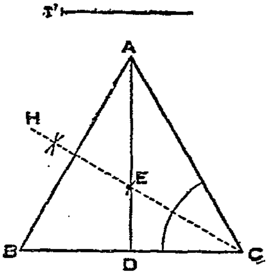
**作法** 作 ∠C=60°,作 HC 平分 ∠C.

在 HC 內取 CE=r′.

作 ED⊥BC,引長之交 AC 於 A.

以 A 爲中心,AC 爲半徑,作弧截 BC 於 B.作 AB.

這 △ABC 便是所求的等邊三角形.



(4之c)

## 習題二十一 (教科書第175頁)

1. 在命題二十三中,若 A 是鈍角,有幾個解的可能?若 A 是直角呢?若 A 是銳角呢? 附第二十三命題:(已知兩邊,及其一邊的對角,求作三角形).

(a) **設** 已知 a, b 兩邊及 a 邊的對角 ∠A>rt.∠

**求作** 三角形.

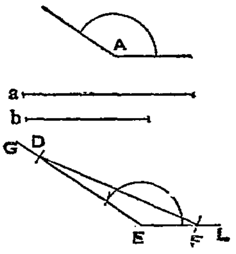
**作法**　作∠GEL=∠A.

在EG內取ED=b.

以D爲中心,a爲半徑,截EL於F.

作DF, △DEF是所求的三角形.

**答**　這題只有一種解法.



(1之a)

(b)**設**　已知a,b兩邊及a邊的對角∠K爲直角,

**求作**　三角形.

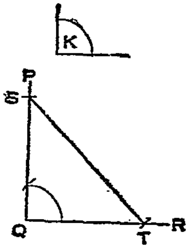
**作法**　作∠PQR=∠K.

在PQ內取QS=b,

以S爲中心,a爲半徑,截QR於T.

作ST. △SQT是所求的三角形.

**答**　這題只有一種解法.



(1之b)

(c)教科書中第二十三命題的∠A是銳角,有兩種解法.所以知道銳角時有兩種解法.但b恰如斜邊,a恰如直角三角形的一腰時,弧恰切於底邊.那時候也只有一種解法(圖從略).

2. 已知斜邊和一個直角邊,求作一個直角三角形.

**設**　a爲rt.△的斜邊,b爲其一直角邊.

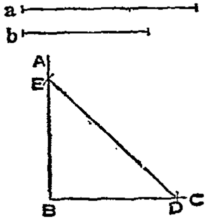
**求作**　rt.△.

**作法** 作直角$\angle ABC$,

在BC內取BD=b,

以D爲中心,a爲半徑,作弧截AB於E.作ED.

△EBD是所求的直角三角形.



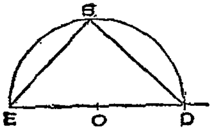
(2)

3. 試先作斜邊以解前面這個問題.

**作法** 作ED=a.平分ED於O,以OE爲半徑,作半圓.

以D爲中心,b爲半徑,作弧交半圓於B.

作BE,BD.這△BED是所求的直角三角形.

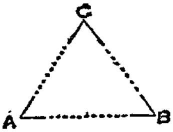


(3)

## 習題二十二(教科書第175頁)

三角形的三個角是不是獨立的部分,若已知三個角,能否作一個三角形?

**答** 三角形的三個角,不是獨立的部分,知道三個角,能作一三角形,可是大小不定.



設既知$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$,而不知道邊的長短,如右圖虛綫的部分,可以長,可以短,有多至無窮數的三角形,都合這三個已知角的條件.如果說:知道了三個角,要作一個三角形,那麼究竟要作那一個三角形呢?不是莫明其妙麼?所以不能成爲獨立的部分.

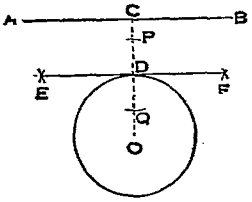
至於不能作圖的理由,更是容易明白.比方先作了∠A,再作∠B,這∠B應該擱在什麼地方?如果擱近了,便成小三角形,擱遠了,便成大三角形,所以大小不一定.

## 習題二十三(教科書第176頁)

1. 作一直綫切於一已知圓,且平行於一已知直綫.

**設**　定圓O及定綫AB,

**求作**　O圓的切綫EF,而EF//AB.



(1)

**作法**　依§87法作OC⊥AB,交圓於D.

以D爲中心適宜的長爲半徑,作兩小弧,截OC於P,於Q.

以P,Q爲中心,大於PD的長爲半徑,作四小弧,相交於E,於F.

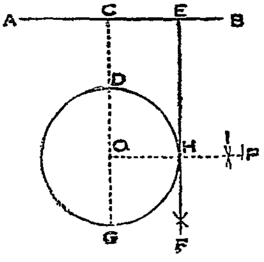
作EF,切O圓於D.

這EF//AB,便是所求的切綫.

2. 作一直綫,切於一已知圓,且垂直於一已知直綫.

**設**　定圓O及定綫AB,

**求作**　切綫EF⊥AB



(2)

**作法**　依§87法作CO⊥AB,交O圓於D,引長CO,交圓於G.

以D及G爲中心,大於圓半徑爲半徑,作兩弧相交於I.作OI,交圓於H.則OH//AB.

以H爲中心,圓半徑(即OH)爲長取HP.

然後以O及P爲中心大於OH的長爲半徑,作兩弧,相交於F.

通過H作EF,則EF⊥AB,切圓於H.

## 習題二十四 (教科書第177頁)

1. 作一個三角形的三個傍切圓.

**設** △ABC.

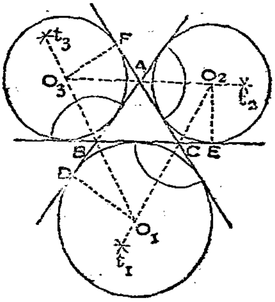
**求作** 三個傍切圓,每圓各切於其一邊,及他兩邊的引長綫.

**作法** 引長AB, BC, CA的各兩端.

依§83法作 $t_1o_2$, $t_2o_3$, $t_3o_1$ 平分 $\angle$sC, A, B的外角,相交於 $O_1$, $O_2$, $O_3$.

作 $O_1D \perp AB$(引長綫), $O_2E \perp BC$(引長綫), $O_3F \perp CA$(引長綫).

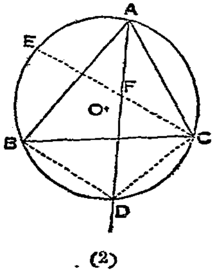
以 $O_1D$, $O_2E$, $O_3F$ 爲半徑,作 $O_1$, $O_2$, $O_3$ 三個傍切圓,即所求的三個圓.



(1)

2. 三角形的一個角的二等分綫,遇外接圓於一點,此點與三角形的其他兩個角頂及內切圓的中心等距離.

**設**　△ABC,∠A的分角綫AD,交外接圓O於D,內切圓的圓心爲F.



(2)

**求證**　BD=CD=FD.

**證**

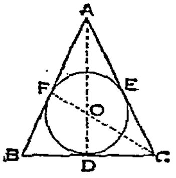
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. ∠BAD=∠CAD. | 1. 題設AD平分∠A. |
| 2. $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$. | 2. 圓周角以其所對的弧之半度之(§232). |
| 3. ∴BD=CD. | 3. 同圓內等弧有等弦(§187). |
| 4. 作∠C的分角綫交AD於F,F是內切圓心. | 4. 三角形諸角的二等分綫,相交於一點,他離三角形的三邊等距(§160). |
| 5. ∠CFD以$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{CD})$度之. | 5. 兩弦在圓內的交角,以其所夾弧及對頂角所夾弧的半和量之(§236). |
| 6. ∠ACE=∠BCE. | 6. 同1.(作圖) |
| 7. $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$. | 7. 同2. |
| 8. ∠CFD以$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{BD})$度之 | 8. 代替(公理12). |
| 9. $\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{ED}$. | 9. 全體等於各部分之和. |

| | |
|---|---|
| **10.** $\angle CFD$以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{ED}$度之. | **10.** 代替(公理12). |
| **11.** 但$\angle ECD$以$\frac{1}{2}\overset{\frown}{ED}$度之. | **11.** 圓周角以其所夾半弧度量之(§232). |
| **12.** $\therefore \angle ECD=\angle CFD$. | **12.** 兩量都等於某量,他們相等(公理1). |
| **13.** $CD=FD$. | **13.** 三角形有兩角相等,其對邊相等(§121). |
| **14.** $\therefore BD=CD=FD$. | **14.** 3同13的代替. |

**3.** 三角形的三邊是9, 8和9,一圓內切於其中,求自切點至各頂點的距離.

**設**　O圓內切於$\triangle ABC$, $AB=9$, $BC=8$, $CA=9$.切點爲D, E, F.

**求證**　AF, AE, BD, CD, BF, CE之長.



(3)

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** $AB=CA=9$, 故$\triangle ABC$爲等腰三角形. | **1.** 題設.又等腰三角形有兩邊相等. |
| **2.** $BD=CD$. | **2.** 等腰三角形頂角的二等分綫垂直而又等分其底. |
| **3.** $BC=8$. | **3.** 題設. |
| **4.** $\therefore BD=CD=4$. | **4.** 等量的一半相等(公理8). |

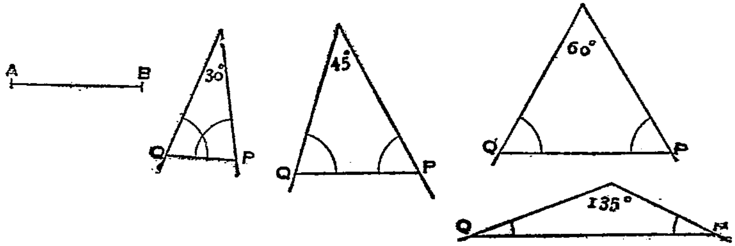
| | |
|---|---|
| 5. 但 AF=AE, BF=BD, CD=CE. | 5. 從圓外到圓的兩切綫相等(§209). |
| 6. ∴BD=BF=CD=CE =4. | 6. 代替(公理12). |
| 7. ∴AF=AE=5. | 7. 等量減等量,其餘量相等(公理2). |

## 習題二十五 (教科書第179頁)

在 2 吋的直綫上,求作弓形,使含 30° 的角; 45° 的角; 60° 的角; 135° 的角.

**設** AB=2 吋(以 2 公釐代)及 30°, 45°, 60°, 135° 等角.

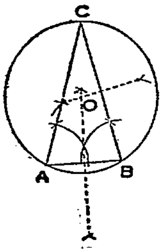
**求作** 四弓形都以 AB 爲弦,而函上列四角於弓形內.



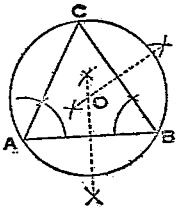
**作法** 在定角 30°, 45°, 60°,135° 的兩邊內,任意取 P, Q 兩點, 作 PQ.

以 AB 爲底,作 △ABC, 使 ∠A=∠Q, ∠B=∠P. 作 △ABC 的外接圓.(圖 I 內 AB, 較原定綫 AB 短,故圓亦較小).

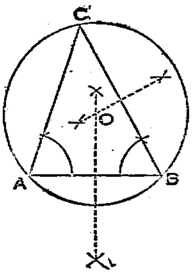
弓形ACB是所求的弓形.



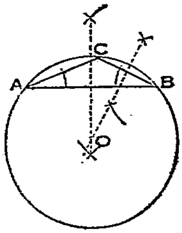
(I)



(II)



(III)



(IV)

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| ∠C=∠30°　(I), | 若兩三角形有兩角相等,其第三角也相等(§113). |
| =∠40°　(II), | |
| =∠60°　(III), | |
| =∠135° (IV). | |

在這些弓形內,任何角都等於30°(I), 45°(II), 60°(III), 135°(IV).(同弓形內的弓形角相等).

## 習題二十六 (教科書第182—183頁)

已知下列各部,求作三角形.

**1.** $a, b, m_b$.

**設**　已知三角形的兩邊$a, b$,及中綫$m_b$,

**求作**　三角形.

**分析**　先任意作一三角形,及一中綫,

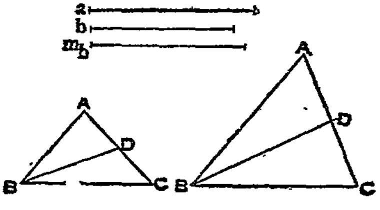
假定 BC=a, AC=b, BD=$m_b$,

則 AD=CD=$\frac{1}{2}$b.

**作法**　在△BDC內已知三邊.

乃作BC=a,

以B爲中心,$m_b$爲半徑作弧;



（假圖）　(1)

以C爲中心,$\frac{1}{2}$b爲半徑作弧,相交於D.作△BDC.

引長CD,令AD=CD.聯AB,則△ABC卽所求之三角形.

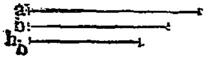
$$如圖\begin{cases}BC=a.\\AC=b.\\BD=m_b.\end{cases}$$

2. a, b, $h_b$.

**設**　已知三角形的兩邊a, b, 及高$h_b$.

**求作**　三角形.

**分析**　先作假圖△ABC,

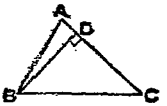


假定　BC=a, AC=b, BD=$h_b$.

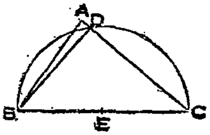
則 ∠BDC=rt.∠.

故可依下法作圖.

**作法**　作BC=a.



（假圖）



(2)

平分之於E.

以E爲中心BE爲半徑,作半圓.

又以B爲中心,$h_b$爲半徑,作弧,截半圓於D.

作 BD, DC, 則 $\angle BDC=\text{rt.}\angle$.

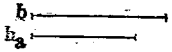
引長 CD 至 A, 令 $AC=b$.

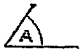
作 AB, 這 $\triangle ABC$ 卽所求的三角形.

**3.** $b, h_a, \angle A$.

**設** 已知三角形的一邊 b, 對於 a 邊的高 $h_a$, 及 $\angle A$.

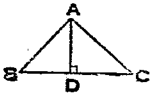
**求作** 三角形.



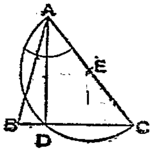


**分析** 先作假圖 $\triangle ABC$, 假定 $AC=b$, $\angle BAC=\angle A$, $AD=h_a$,

則 $\angle ADC=\text{rt.}\angle$ 故可依下法作圖.



(假圖)



(4)

**作法** 作 $\angle BAC=\angle A$.

於一邊內取 $AC=b$, 平分之於 E.

以 E 爲中心, AE 爲半徑,作半圓;

又以 A 爲中心, $h_a$ 爲半徑,作弧截半圓於 D.

作 AD, CD; 引長 CD, 與 $\angle A$ 的他邊相交於 B.

那麼 $\triangle ABC$ 是所求的三角形.

**4.** $b, t_c, \angle A$.

**設** 已知 $\triangle ABC$ 的一邊 b, $\angle C$ 的分角綫 $t_c$ 及 $\angle A$.

**求作** 三角形.

**分析** 先作假圖 $\triangle ABC$,

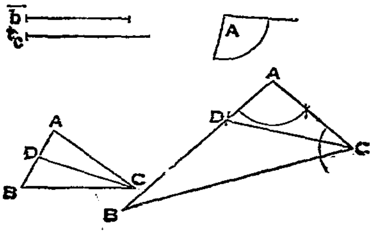
假定 $AC=b, CD=t_c$, $\angle BAC=\angle A$.

則 $\angle ACD=\frac{1}{2}\angle C$.

故可依依下法作圖.

**作法**　先作 $\angle BAC=\angle A$. 於一邊內取 $AC=b$.

以 C 爲中心, $t_o$ 爲半徑,作弧交 $\angle A$ 的他邊於 D, 作 CD.



(4)

然後作 $\angle DCB=\angle ACD$.

那麼 CB 交 $\angle A$ 之他邊於 B, 所成 $\triangle ABC$, 卽所求的三角形.

**5.** $a, h_b, \angle B$.

**設**　已知三角形 ABC 的一邊 a, 對於 $\angle B$ 的高 $h_b$ 及 $\angle B$.

**求作**　三角形.

**分析**　先作 $\triangle ABC$(以後假圖從略).

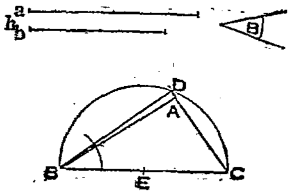
假定 $BC=a$, $BD=h_b$, $\angle ABC=\angle B$.

則 $\angle BDC=$rt.$\angle$. 所以得依下法作圖.

**作法**　作 $BC=a$, 平分之於 E.

以 E 爲中心, BE 爲半徑,作半圓

以 B 爲中心, $h_b$ 爲半徑,作弧交半圓於 D.



(5)

作 BD, CD

作 $\angle ABC=\angle B$, 一邊交 CD(或其引長)於 A.

那麼△ABC是所求之三角形.

**6.** $a, b, h_c$ (此題可作兩個三角形).

**設**　已知三角形ABC的兩邊 $a, b$, 及對於∠C的高 $h_c$.

**求作**　三角形

**分析**　先作△ABC,

假定 $BC=a$, $AC=b$, $CD=h_c$.

因 $CD<AC$, 所以作 $A'C$ 也可以 $=b$

而 ∠BDC=rt.∠. 可以依下法作圖.

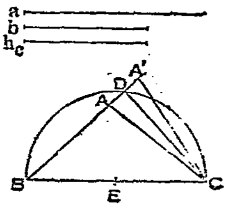
**作法**　作 $BC=a$, 平分之於 E.

以E爲中心, BE爲半徑, 作半圓;

以C爲中心, $h_c$ 爲半徑, 作弧交半圓於D, 作CD, BD, 引長 BD.

又以 C 爲中心, b 爲半徑, 作兩弧, 截 BD 於 A 於 A′. 作 AC, A′C.

則△ABC及△A′BC, 都是所求的三角形.



(6)

**7.** ∠C, $t_c$, b.

**設**　已知三角形 ABC 的一角 ∠C 及分角綫 $t_c$ 與一邊 b.

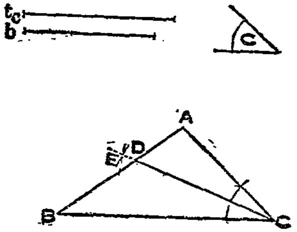
**求作**　三角形.

**分析**　先作△ABC, 及∠C的分角綫CD.

如此 ∠ACD=∠DCB, AC=b.

可得作法如下.

**作法**　作∠ACB=∠C.



(7)

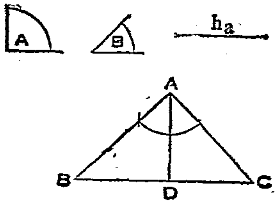
作CE平分∠C.於一邊內截取AC=b. CE內截取CD=$t_c$,作AD引長之,交BC於B.

如此△ABC,是所求的三角形.

8. ∠A, ∠B, $h_a$.

**設**　已知三角形ABC的兩角∠A, ∠B及∠A的高$h_a$.

**求作**　三角形.



(8)

**分析**　先作△ABC及∠A的高AD,如此∠ADB=rt.∠.

∠A, ∠B, AD爲已知.故∠BAD爲∠B的餘角.如此可得作法如下.

**作法**　作直線BC,又作AD⊥BC,令AD=$h_a$.

作∠B的餘角∠BAD,一邊交BC於B.

然後作∠BAC=∠A,一邊交BC於C.

如此△ABC是所求的三角形.

9. a, $h_c$, $m_a$.

**設**　已知△ABC的一邊a及∠C的高$h_c$, ∠A的中綫$m_a$.

**求作**　三角形.

**分析**　先作△ABC及假定的中綫AD, ∠C角的高CH,那麼∠CHB=rt.∠.

如此可得作法如下。

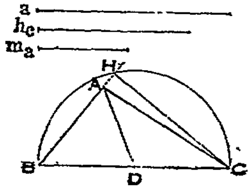
**作法**　作BC=a,平分之於D.

作半圓於BC的上面,以C爲中心,$h_c$爲半徑,作弧截半圓於H,作CH, BH.

又以D爲中心,$m_a$爲半徑,作弧交BH於A,作AD, AC.

那麼AD=$m_a$, CH=$h_c$, BC=a,

而△ABC爲所求的三角形.



(9)

**10.** b, $h_a$, $m_a$.

**設** 已知△ABC的一邊b, ∠A的高$h_a$及其中綫$m_a$.

**求作** 三角形(有兩個三角形).

**分析** 先作草圖△ABC,及中綫AM,高AH.

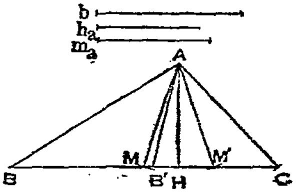
如此BM=CM.可得作法如下.

**作法** 作直綫BC,又AH⊥BC,令AH=$h_a$.

以A爲中心b爲半徑,作弧交BC於C;作AC.

仍以A爲中心$m_a$爲半徑,作兩弧,交BC於M,M′,作AM, AM′;

於BC內,取BM=CM, B′M′=CM′.



(10)

作AB及AB′.如此△ABC及△AB′C都是所求的三角形.

**11.** a, $m_a$, $m_b$.

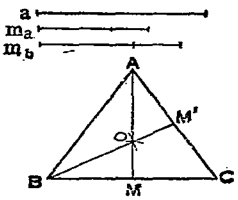
**設** 已知△ABC的一邊a,及其中綫$m_a$與b邊的中綫$m_b$.

**求作** 三角形.

**分析** 先作草圖△ABC,中綫AM及BM,其交點爲O.

因爲 $BO=\frac{2}{3}BM'$, $OM=\frac{1}{3}AM$, 而 $BM=\frac{1}{2}BC$. 所以得作法如下.

**作法**　作直綫 BC=a, 二等分之於 M.



(11)

以 B 爲中心, $\frac{2}{3}m_b$ 爲半徑, 作弧.

又以 M 爲中心, $\frac{1}{3}m_a$ 爲半徑, 作弧.

兩弧相交於 O, 就是兩中綫的交點.

通過 O, 作 AM, BM′,

然後作 AB, 通過 M′ 作 AC, 這 △ABC 是所求的三角形.

**12.** a, $h_b$, $h_c$.

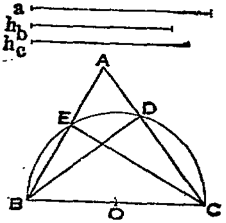
**設**　已知 △ABC 的一邊 a 及 b 邊上的高 $h_b$, C 邊上的高 $h_c$.

**求作**　三角形.

**分析**　先作草圖 △ABC, AC 上的高 BD, AB 上的高 CE; 則 ∠BDC=∠BEC=rt.∠.

又 △BDC 與 △BEC 公用一個底邊 BC, 所以 E, D 兩角頂在一圓周上. 因此得作法.

**作法**　作 BC=a, 平分之於 O, 作半圓於 BC 之上.



(12)

以 B, C 各爲中心, $h_b$, $h_c$ 各爲半徑, 作弧交半圓於 D, 於 E,

作 BD, CE, 又作 BE, CD 而引長之, 使相交於 A.

則BC=a, BD=$h_b$, CE=$h_c$.

而△ABC是所求的三角形.

**13.** a, b, ∠A+∠B.

**設** 三角形ABC中已知a, b兩邊,及兩角之和∠A+∠B.

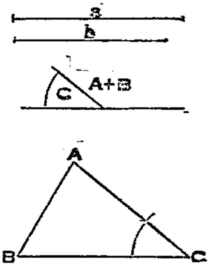
**求作** △ABC.

**分析** 先作草圖△ABC,已知BC, AC,及∠A+∠B.但∠A+∠B+∠C=st.∠.所以因此先求得∠C便可以作圖.

**作法** 作BC=a,

在BC的C端作(∠A+∠B的補角∠C,令AC=b,聯AB,

這△ABC便是所求的三角形.



(13)

**14.** a, ∠B, b+c.

**設** 三角形ABC中已知a邊,∠B,及他兩邊之和b+c.

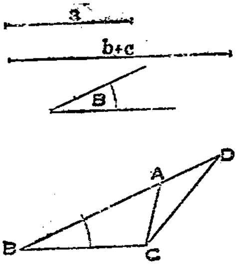
**求作** △ABC.

**分析** 先作草圖△ABC以為已經求得,於是引長BA至D,使AD=AC.作CD,

因為∠ADC=∠ACD,便得作法如下.

**作法** 作BC=a.作∠DBC=∠B.令DB=b+c.

聯DC,作∠DCA=∠CDA,一邊交BD於A.



(14)

這$\triangle ABC$是所求的三角形.

**15.作一個等腰三角形,若已知其底邊和一頂角.**

**設**　已知底邊a,及頂角$\angle A$.

**求作**　等腰三角形ABC.

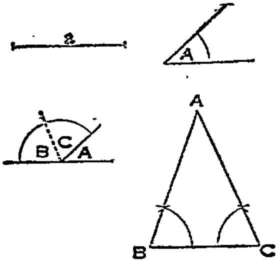
**分析**　先作草圖$\triangle ABC$.假定$\angle A$爲所要之角,因$\angle B=\angle C$.又$\angle A+\angle B+\angle C=st.\angle$.

故知$2\angle B=2\angle C=st.\angle-\angle A$,因此可得作法.

**作法**　作$BC=a$,

在兩端作$\angle B=\angle C=\frac{st.\angle-\angle A}{2}$,各一邊相交於A.

這$\triangle ABC$卽所求的等腰三角形.



(15)

**16.作一個等腰三角形,若已知底邊與一腰的和,和一底角.**

**設**　已知$a+b$及$\angle B$.

**求作**　等腰三角形ABC.

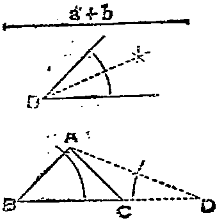
**分析**　先作草圖等腰三角形ABC,

引長BC到D,使$CD=AC$,作AD.

則$\angle ACB=2\angle D$.卽$\angle D=\frac{1}{2}\angle B$.

因此可得作法.

**作法**　作直綫$=a+b$,命之爲BD



(16)

於B端作∠ABD=∠B.

於D端作$\frac{1}{2}$∠B,其一邊交∠B之他邊於A.

以A爲心,AB爲半徑,作弧交BD於C,作AC.

這△ABC是所求之三角形.

**17.作一個三角形,若已知其一角,這角的鄰邊,和他兩邊的差.**

**設**　△ABC中已知∠B及BC,與AC—AB.

**求作**　△ABC.

**分析**　先作一草圖△ABC,假定已求得此形.

引長AB至D,使AD=AC.則BD=AC—AB.

作DC, ∠D=∠ACD.因此可得作法.

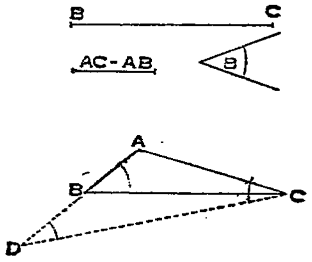
**作法**　作BC及∠B.

引長AB,使BD=AC—AB

作DC.

又作∠ACD=∠ADC.其一邊交AD於A.

這△ABC,是所求的三角形.



(17)

**18.作一個三角形,若已知他的底邊,其他兩邊的差及夾角.**

**設**　已知△ABC的a,及b—c與∠A.

**求作**　△ABC.

**分析**　先作草圖△ABC,使b>c,

於AC(卽b)內取AD=AB,於是DC=b—c而△ABD爲等腰三角形.

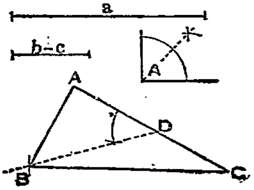
故 $\angle ADB=\angle ABD$, $\angle A+\angle ADB+\angle ABD=180°$.

即 $2\angle ADB=180°-\angle A$, $\angle ADB=90°-\frac{\angle A}{2}$.因此可得作法

**作法**　作直綫 $DC=b-c$.引長CD.作 $\angle ADB=90°-\frac{\angle A}{2}$.

以C爲中心,a爲半徑,作弧,交BD於B.

作 $\angle ABD=90-\frac{\angle A}{2}$,交AC於A.



(18)

如此 $BC=a$, $AC-AB=b-c$, $\angle BAC=\angle A$.

即△ABC是所求的三角形.

作直角三角形,已知:

19.一直角邊和斜邊的高.

**設**　已知直角三角形的 a 及 $h_b$.

**求作**　其形.

**分析**　先作草圖 rt.△ABC, $\angle B=$rt.∠,及其高BD.

知 $\angle BDC=$rt.∠,故△BDC內已知一角及兩邊,圖便易作.

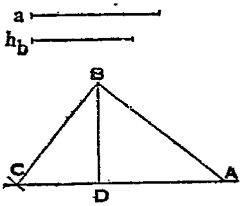
**作法**　作直綫,在他裏頭任意取一點D,作垂綫 $BD=h_b$.

以B爲中心,a爲半徑,作弧,交直綫於C.

作 $AB\perp BC$;引長CD,交AB於A.

如此 $BC=a$, $BD=h_b$.

這△ABC是所求的直角三角形.



19)

20.斜邊及兩直角邊的差.

**設**　已知直角三角形的 c 及 $a-b$.

**求作**　其形.

**分析**　先作草圖rt.△ABC, ∠C=rt.∠.
於BC內取DC=AC, 作DA,
∴ ∠CAD=∠CDA=$\frac{1}{2}$rt.∠. 因此得作法.

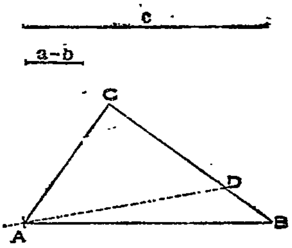
**作法**　作直綫,於一端取BD=a−b, 於D的外方作角=45°.

以B爲中心, c爲半徑,作弧,與所作角的一邊,相交於A, 作AB.

又作AC⊥BD, 交其引長綫於C.

如此AB=c, BD=a−b,

而△ABC是所求的三角形.



(20)

### 21. 斜邊及兩直角邊的和.

**設**　已知直角三角形的c及a+b.

**求作**　其形.

**分析**　先作草圖rt.△ABC, ∠C=rt.∠.
引長BC至D, 使CD=AC. 作AD.

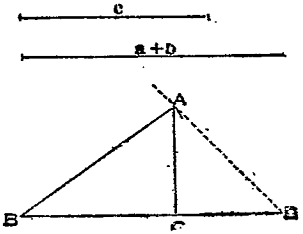
△ACD是直角等腰三角形,所以∠D=$\frac{1}{2}$rt.∠,而BD=a+b

因此可以得作法.

**作法**　作直綫BD=a+b. 在D端作45°的角;

以B爲中心, c爲半徑,作弧交所作角的一邊於A, 由A作AC⊥BD.

如此AB=c, BC+AC=a+b.



(21)

這△ABC是所求的直角三角形.

22.作一個平行四邊形,若已知各邊和一對角綫.

**設**　□ABCD的兩邊AB, BC,及對角綫BD.

**求作**　其形.

**作法**　先作對角綫BD.

以B爲中心,AB爲半徑作弧;

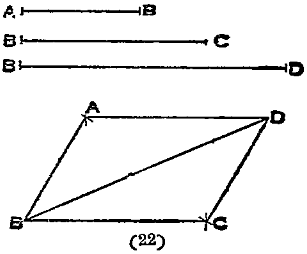
又以D爲中心,BC爲半徑,作弧;兩弧相交於A.

又以B爲中心,BC爲半徑作弧;

以D爲中心,AB爲半徑,作弧,兩弧相交於C.

作AB, BC, CD, DA.

這四邊形ABCD即是所求的□.



(22)

## 習題二十七 (教科書第185頁)

試作下列各題的軌跡,無須證明:

(a)一點距離一已知點$\frac{3}{4}$吋的軌跡.

(b)一點距離一已知直線$\frac{1}{4}$吋的軌跡.

(c)一點與兩平行綫等距離的軌跡.

(d)平行於一已知直綫,而在一已知圓內的弦的中點的軌跡.

(e)平行於三角形底邊而止於其他兩邊的直綫的中點的軌跡.

(f)一點與兩已知直綫等距離的軌跡.

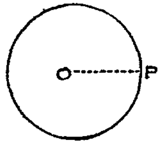
(g)已知圓的切線長$\frac{1}{4}$吋,求其一端的軌跡.

(h)半徑等於$\frac{1}{4}$吋的圓的中心的軌跡,這圓外切於半徑等於1吋的已知圓.

解(a)如無英尺,可以4公分代3吋,$\frac{3}{4}$吋=1公分,以之爲半徑作圓.

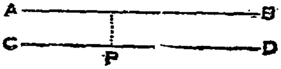
O爲圓心,卽定點.

圓卽一點P的軌跡.



(a)

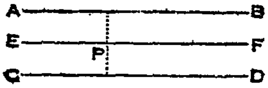
(b)以2公分代1吋,$\frac{1}{4}$吋=5公厘.



(b)

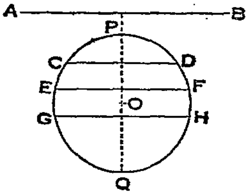
設AB爲定綫,離AB5公厘P點的軌跡,在距離5公厘的平行綫CD內.

(c)設AB//CD.P點距兩綫相等,其軌跡爲一直綫EF//AB//CD.



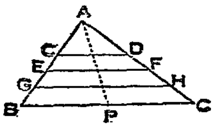
(c)

(d)設AB爲已知綫,O爲已知圓.CD,EF,GH等爲//AB的諸弦.其中點的軌跡爲垂直於已知綫AB而通過圓心的直徑,如PQ.PQ⊥AB.



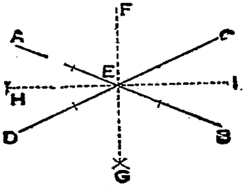
(d)

(e)設△ABC,BC爲底邊,CD,EF,GH等綫都//BC.他們中點的軌跡在∠A的中綫AP上.



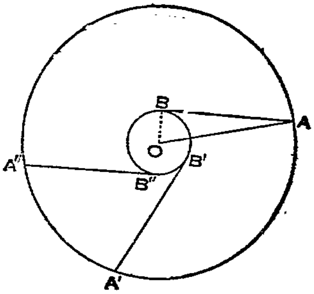
(e)

(f) 設AB, CD兩已知綫相交於E. P點離兩綫等距,故他的軌跡在∠AEC的分角綫上(亦即∠BED的分角綫),如FG. 同理亦在其補鄰角的分角綫HI上.



(f)

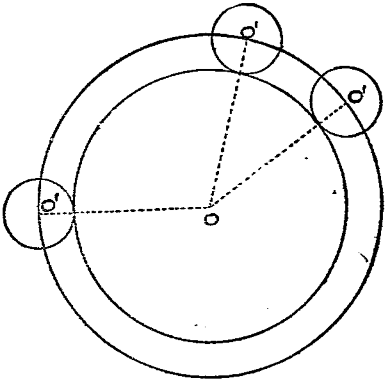
(g)設定圓O,而$\frac{1}{4}$吋代以2公分. AB=2公分,B端切於圓,O圓半徑爲OB; A端的軌跡,在以OA爲半徑而與O圓爲同心圓的圓上,如A′,A″.



(g)

(h)以2公分代1吋.

設定圓O,半徑 =2公分.而以5公厘爲半徑的圓O′切於O圓旋轉,其圓心O′的軌跡,在第三圓上;此第三圓,以OO′爲半徑, OO′=2.5公分,卽兩圓的聯心綫.



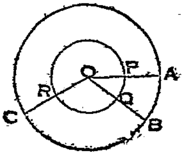
(h)

## 習題二十八(教科書第186—187頁)

1. 求一已知圓的半徑的中點的軌跡.

**設** 已知圓O,半徑OA,OB,OC等等.

**求** 他們中點P,Q,R等等的軌跡.



(1)

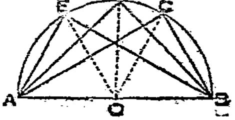
### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. OA=OB=OC=……… | 1. 凡圓半徑相等(§178). |
| 2. $OP=\frac{1}{2}OA$, $OQ=\frac{1}{2}OB$, $OR=\frac{1}{2}OC$,……… | 2. 題設各半徑的中點 |
| 3. ∴OP=OQ=OR=……… | 3. 等量的一半相等(公理8). |
| 4. ∴P,Q,R在一圓上,卽各半徑中點的軌跡,在以OP爲半徑的圓上. | 4. 圓上的任何點,到圓心的距離,等於半徑(§179). |

2. 求一直角的頂點的軌跡,若這直角的二邊過二定點.

**設** 已知點A,B,而rt.△s ABC,ABD,ABE……… 都以AB爲斜邊.

**求** C,D,E………諸頂點的軌跡.



(2)

### 證

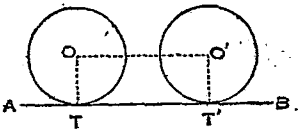
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** 作中綫OC, OD, OE, ······ | **1.** 兩點之間,可作一直綫(公理13). |
| **2.** $OC=\frac{1}{2}AB$, $OD=\frac{1}{2}AB$, $OE=\frac{1}{2}AB$, ······ | **2.** 直角三角形斜邊上的中綫等於斜邊之半. |
| **3.** $\therefore OC=OD=OE=$ ··. | **3.** 諸量都等於某量,他們相等(公理1). |
| **4.** ∴C, D, E, ······都在圓上.即頂點的軌跡,在以中綫爲半徑的圓上. | **4.** 圓上的任何點,到圓心的距離,等於半徑(§179). |

**注意**　上圖但畫AB綫上面,他下面的各rt∠也是一樣.

3. 求一圓的中心的軌跡,若這圓切於一已知直線,且已知其半徑

**設**　O圓切於已知綫AB,其半徑爲OT,切點爲T.

**求**　中心O的軌跡.



(3)

### 證

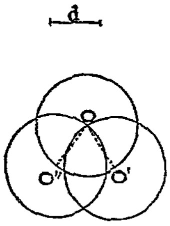
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** 作O′圓=O圓,切AB於T′ | **1.** 半徑相等,則兩圓相等(§180). |
| **2.** 作聯心綫OO′,及半徑OT, O′T′, | **2.** 兩點之間,可作一直綫(公理13). |

| | |
|---|---|
| **3.** $OT=O'T'$, $OT\perp AB$, $O'T'\perp AB$. | **3.** 等圓的半徑相等(§178). 切綫上切點上的半徑(§204). |
| **4.** ∴O點軌跡在$OO'$上. | **4.** 理由參見習題二十七的(b). |
| **5.** $OO'\parallel AB$,距離爲OT. | **5.** 矩形的對邊平行(§137). 從一點到定直綫的垂綫是最短之綫(§131). |

**4.** 求一圓的中心的軌跡,若這圓過一已知點,且已知其半徑.

**設** 已知O′圓的半徑爲d,已知點爲O.

**求** 通過O點的O′圓心軌跡.



(4)

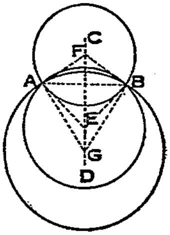
**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** O′圓通過O點,則O在O′圓周上. | **1.** 題設. |
| **2.** 以O爲中心, $d=OO'$爲半徑作圓,則O′在O圓周上. | **2.** 等圓的半徑相等(§178). |
| **3.** 以O圓上任意點O″爲中心, $d=O''O$爲半徑,作圓,則O在O″圓周上,O″圓通過O點. | **3.** 一圓可以任何點當中心,任何長當半徑作之(公理18). 又§178. |
| **4.** ∴所求的軌跡,在以O爲中心d爲半徑的圓上. | **4.** 在已知點有已知距離的點的軌跡,是一個圓,即以點爲圓心,距離爲半徑的圓(§260). |

**5.** 求過二定點的一圓的中心的軌跡.

設　G, E, F 等圓,通過 A, B, 兩點.

求　此等圓心的軌跡.



(5)

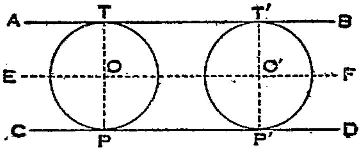
### 證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** 作 AB. | **1.** 兩點間可作一直綫(公理 13). |
| **2.** 作 AB 的垂直平分綫 CD. | **2.** 平分定直綫(§81). |
| **3.** CD 是到 A,B 兩點等距的軌跡. | **3.** 定綫兩端等距點的軌跡,是這綫的垂直平分綫(§261). |
| **4.** 以 CD 內任何點爲中心(例如 G, E, F……),GA, EA, FA,……爲半徑,作諸圓,都通過 A, B 兩點. | **4.** 同圓的半徑相等(§178). GA=GB, EA=EB, FA=FB, 故 G, E, F……等圓,都通過 A,B. |

**6.** 求切於二已知綫的一圓的中心的軌跡.

I. 設　兩已知綫 AB, CD 相平行時.

求　O 圓心 O 的軌跡,但切點爲 T, P.



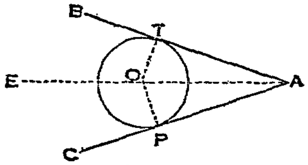
(6 之 I)

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作O′圓=O圓,切兩綫於T′, P′. | 1. 半徑相等,則兩圓相等(§180). |
| 2. 聯OO′. | 2. 公理13. |
| 3. 作OT, OP, O′T′, O′P′. | 3. 同上. |
| 4. OT=OP=O′T′=O′P′. | 4. 同圓及等圓的半徑相等(§178). |
| 5. AB//CD. | 5. 題設. |
| 6. OT⊥AB, OP⊥CD.<br>∴TOP爲一直綫. | 6. 切綫⊥切點上的半徑(§204). 垂直於兩//綫之一邊亦⊥於他邊(§105). |
| 7. 同理T′O′P′爲一直綫. | 7. 同上. |
| 8. TP=T′P′=直徑. | 8. 直徑相等(§181). |
| 9. TP//T′P′. | 9. 一綫上的兩垂綫相//(§93, 95). |
| 10. TT′=PP′=OO′. | 10. ⋕兩綫間的兩綫⋕(§141) |
| 11. ∴O的軌跡在AB, CD.等距的平行綫EF上. | 11. 以上的結論. |

II.設 兩綫AB, AC相交成角,切點T, P.

求 圓心O的軌跡.

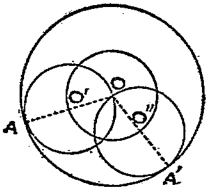


(6之II)

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作$\angle A$的分角綫$AE$. | 1. 凡角都有分角線(§24). |
| 2. $AE$通過$O$ | 2. 分角綫上的任何點與兩邊等距(§126). |
| 3. 作$OT \perp AB$, $OP \perp AC$. | 3. 切綫⊥切點上的半徑(§204). |
| 4. $OT=OP$. | 4. 同圓的半徑相等(§178). |
| 5. $O$的軌跡在$AE$綫上.距兩邊$=OT=OP$. | 5. 以上的結論. |

7. 求一圓的中心的軌跡,若已知這圓的半徑,且切於另一已知圓.



(7)

**設**　$O'$圓半徑$O'A$切已知圓$O$於$A$.

**求**　圓心$O'$的軌跡.

**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作$O''$圓$=O'$圓,切$O$圓於$A'$. | 1. 半徑相等,則兩圓相等(§180). |
| 2. 作$O''A'$,引長之必過$O$,又引長$AO'$亦必過$O$. | 2. 因$A'$,$A$爲切點. |
| 3. $O'A=O''A'$, $OA=OA'$. | 3. 等圓的半徑相等(§178). |
| 4. $OA-O'A=OA'-O''A'$,<br>即$OO'=OO''$. | 4. 等量減等量,其餘量相等(公理3). |
| 5. $O'$, $O''$在一圓周上.故 | 5. 圓周上的任何點,到圓 |

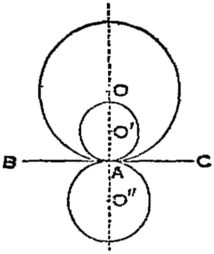
| | |
|---|---|
| O′的軌跡,在以 OO′ 爲半徑的圓上. | 心的距離,等於半徑(§179).又平面內點的軌跡,以所有的點,都在綫內,爲滿足一適確的條件(§257). |

**注意**　O′圓若爲O圓的外切圓,圓中心的軌跡在以 O 爲中心$(r+r')$爲半徑的圓周上,也可以同樣證明.

**8.** 求切於一已知直綫上的一定點的圓的中心的軌跡.

**設**　O,O′,O″ 等圓,都切於直綫BC的A點.

**求**　O,O′,O″ 等中心的軌跡.

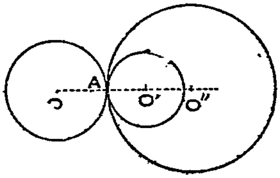


(8)

**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.**　O,O′兩圓切於BC的上方,O″圓切於 BC 的下方,這樣假定. | **1.**　題設. |
| **2.**　三圓都切於BC的A點,故O圓同O′圓內切,O″圓和O,O′圓外切. | **2.**　若兩圓都切於一直線的同一點上,則稱此兩圓相切,視一圓在他圓的裏面或外面,而稱爲內切或外切(§215). |
| **3.**　作聯心線,則O′O″⊥BC. | **3.**　§216.又切線垂直於自切點所作的半徑(§204). |
| **4**　∴垂直於 A 點的OO″是各圓心O,O′,O″的軌跡. | **4.**　一直線上的一點,祇能作一垂線(§85). |

9. 求切於一已知圓上的一定點的圓的中心的軌跡.



(9)

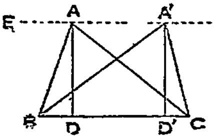
**設** O′,O″ 等圓,切於已知圓O的A點上.

**求** O′,O″等圓圓心的軌跡.

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作O′圓切O圓於A點. | 1. 兩圓同切於綫的一點,便互相切(§215). |
| 2. 作O″圓切O圓於A點. | 2. 同上. |
| 3. OO′ 在一直綫上,過切點A. | 3. 兩圓互相切,他們的聯心綫通過切點(§216). |
| 4. OO″ 在一直綫上,通過切點A. | 4. 同上. |
| 5. ∴OO′O″爲一直綫. | 5. 3, 4 的結論. |
| 6. ∴諸圓心的軌跡在通過圓心O及切點A的一直綫上. | 6. 申說 5. |

10.一個三角形的兩頂點 B 和 C 的位置是固定的,若$h_a$等於一已知直綫,求第三頂點(A)的軌跡.



(10)

**設** △ABC,高AD=$h_a$有定長,B,C兩角頂有定位.

**求** A角頂的軌跡.

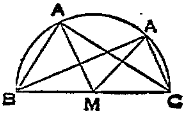
證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作A′D′=AD, A′D′⊥BC | 1. 作已知直綫的垂綫(§87). |
| 2. 聯A′B, A′C;作EF通過A,A′. | 2. 公理13. |
| 3. AD⊥BC. | 3. 題設.三角形的高,是從頂角到對邊的垂綫(§63). |
| 4. ∴A′D′∥AD. | 4. 一直綫上的兩垂綫相平行(§93, §95). |
| 5. ∴AA′D′D爲▱,而AA′∥DD′即∥BC. | 5. 四邊形有兩邊⋕,是▱(§144).又▱的兩對邊⋕. |
| 6. ∴A的軌跡在距BC爲AD的平行綫EF上. | 6. 點的軌跡,在一綫內,以一切點都在綫內爲條件(§275). |

**11.**一個三角形的兩頂點B和C的位置是固定的,若$m_a$等於一已知直綫,求第三頂點(A)的軌跡.

**設** △ABC,中綫AM=$m_a$有定長.B,C兩角頂有定位.

**求** A角頂的軌跡.



(11)

證

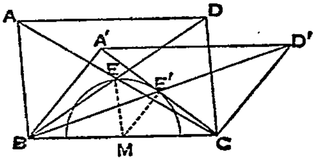
| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作A′M=AM.又聯A′B.A′C. | 1. 題設$m_a$爲已知直綫. |
| 2. B,C一定,故中點M亦 | 2. 中綫是從任一角頂到 |

| | |
|---|---|
| 一定. | 對邊中點的直綫(§64). |
| **3.** ∴A,A′在以M爲中心AM爲半徑的圓上. | **3.** 同圓的半徑相等(§178).又§275.(同上題6). |

**12.**一個平行四邊形的底邊的長和位置是固定的,且其鄰邊等於一已知直線,求兩對角綫的交點的軌跡.

設　▱ABCD,底邊BC有定位定長,鄰邊AB有定長,兩對角綫之交點爲E.

求　E的軌跡.



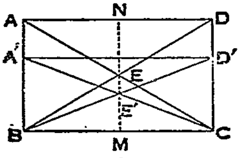
(12)

**證**

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| **1.** 作▱A′BCD′,令A′B=AB. | **1.** 作定直綫的平行綫(§100). |
| **2.** 命▱A′BCD′兩對角綫之交點爲E′.<br>則AE=CE,A′E′=CE′. | **2.** 兩直綫只有一交點(公理13附件).▱的對角綫互相二等分(§146). |
| **3.** 命BC中點爲M,作ME,ME′. | **3.** 兩點間可作一直綫(公理13). |
| **4.** $ME=\frac{1}{2}AB$,<br>$ME'=\frac{1}{2}A'B$. | **4.** 聯△兩邊中點之綫等於他邊之半(§153). |
| **5.** 但AB=A′B. | **5.** 題設. |
| **6.** ∴ME=ME′. | **6.** 等量的一半相等(公理8). |

| | |
|---|---|
| 7. ∴E點的軌跡在以M爲中心, ME爲半徑的圓周上. | 7. 點的軌跡,在一綫內,以一切點都在綫內爲條件(§275). |

13.一矩形的底邊的位置是固定的,求對角綫的交點的軌跡.



(13)

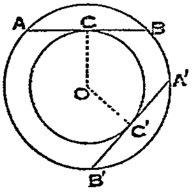
**設**　▭ABCD的底邊BC一定,而對角綫交點爲E.

**求**　E的軌跡.

**證**

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作$A'D' \parallel BC$交AB,DC於$A'$於$D'$. | 1. 作定直綫的平行綫(§100). |
| 2. $A'BCD'$是又一矩形,也以BC爲底. | 2. 作圖, $A'D' \parallel BC$, |
| 3. 作對角綫相交於$E'$. | 3. 兩點之間,可作一直綫(公理13). 兩直綫只能相交於一點(同上附件). |
| 4. 從BC的中點M作垂綫NM. | 4. 從直綫上一點,作其垂綫. |
| 5. ∵ $BE=CE$, $BE'=CE'$. | 5. 平行四邊形的對角綫,互相二等分(§146).矩形的兩對角綫相等. |
| 6. ∴E, $E'$皆在NM上. | 6. 與一直綫兩端等距離的諸點,必在此直綫的垂直二等分綫上(§80). |
| 7. ∴E的軌跡,在BC中點的垂綫上. | 7. 點的軌跡,在一綫內以一切點都在綫內爲條件(§275). |

14.求在一已知圓內等於已知長的弦的中點的軌跡.



(14)

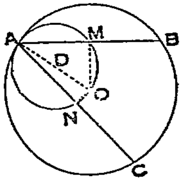
**設** 已知ABA′圓,其弦AB,中點爲C

**求** C的軌跡.

證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作OC. | 1. 公理13. |
| 2. OC⊥AB. | 2. 直徑垂直於弦而平分之(§190). |
| 3. 作A′B′=AB亦爲ABA′圓的弦. | 3. 作等於已知綫的直綫(§39). |
| 4. 作OC′. | 4. 同1. |
| 5. OC′⊥A′B′. | 5. 同2. |
| 6. OC′=OC. | 6. 同圓內的等弦離圓心等距(§197). |
| 7. ∴C的軌跡,在以O爲中心OC爲半徑的圓周上. | 7. 圓周上的任何點到圓心的距離,等於半徑(§179). 又§275(詳上題). |

15.求過圓內一定點的弦的中點的軌跡.



(16)

**設** O圓上的一點A.

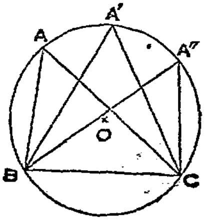
**求** A點上諸弦中點M,N的軌跡.

### 證

| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作OA. | 1. 公理13. |
| 2. 以OA爲直徑作圓交AB, AC於M,N. | 2. 一圓可以任何點爲中心,任何長爲半徑作之(公理18). |
| 3. 作OM, ON, 則∠AMO=∠ANO=rt.∠. | 3. 半圓內所函之角是直角(§234). |
| 4. ∴M, N爲AB. AC的中點. | 4. 垂直於弦的直徑(此處爲直徑的一部分)必二等分此弦(§190). |
| 5. ∴中點M,N的軌跡,在以OA爲直徑的圓周上. | 5. 同上題7. |

**注意:** 上證假設A點在圓周上,如在圓內,則通過A點作直徑及任一弦,與這弦的中心垂線OB. 又作△OAB的外接圓,便是諸弦中點的軌跡.

**16.一個三角形的底邊等於已知長(固定),頂角等於一已知角,則這頂點的軌跡是一個弧.**



(16)

**設** △ABC, A′BC, A″BC同以BC爲底, ∠A=∠A′=∠A″.

**求證** A, A′, A″的軌跡是一個弧.

### 證

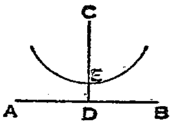
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作$\triangle ABC$的外接圓. | 1. 以定綫爲弦,作一弓形,使所成角爲已知角(§253). |
| 2. $\angle A=\angle A'=A''$. | 2. 題設. |
| 3. $BC=BC=BC$. | 3. 底邊公用. |
| 4. ∴A, A',A''都在圓弧上. | 4. 同弓形內諸弓形角相等(§233). |

**注意:** 在BC下面,也作一弧,與AA'A''弧相同,則以BC爲底的三角形的頂點,又以該弧爲軌跡,故原書云:軌跡是一個弧,譯本作兩相等弧,就是顧到他反對方向了.

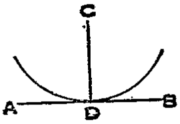
## 習題二十九(教科書188—189頁)

1. 在一已知直線AB上求一點,與一定點C的距離等於所設距離d.

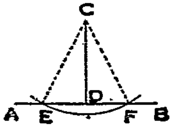
**求法** 作$CD\perp AB$. CD是從C點到AB的垂直距離(§131).



(1, I)



(1, II)



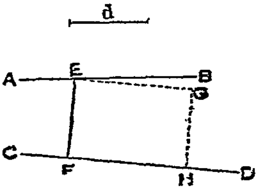
(1, III)

(I)如$d<CD$,例如$d=CE$,以C爲中心CE爲半徑,作圓,不能與AB相交,則此點爲無有.

(II)如$d=CD$.以C爲中心,CD爲半徑,作圓,正切AB於D. D卽爲所求之點(§204).

(III)如$d>CD$.以C爲中心,d爲半徑作圓,交AB於E於F,可得兩點(§195).

**2.** 在一已知直綫AB上求一點,與一已知直線CD的距離,等於所設距離d.



(2)

**設**　已知AB及CD的位置,及距離d的長.

**求**　d的一端在AB內,他端垂直於CD.

**求法**　1. 取CD內任意點H.作GH⊥CD(§85),令GH=d.

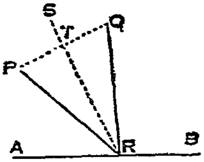
2. 作GE//CD,交AB於E(§100).

3. 從E作EF⊥CD(§87).

4. ∴EF=d(§136).　E卽爲所求之點.

**討論**　如AB//CD而與GE合一,則AB上諸點皆合於所求.如AB//CD而在GE內或外,則此點爲無有.

**3.** 在一已知直綫AB上求一點,與兩定點P和Q等距離.



(3)

**設**　已知AB綫,及P,Q兩點的位置.

**求**　AB內一點R,使PR=QR.

**求法**　1. 作PQ(公理13).

2. 作PQ的垂直平分綫SR,平分PQ於T,交AB於R(§82).

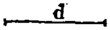
3. 作PR,QR(公理13).

4. ∴PR=QR(§261),(§125).

5. ∴R卽爲所求之點.

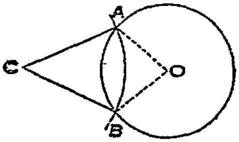
**討論**　如PQ⊥AB,則SR//AB,此點無有.

4. 在一已知圓上求一點,與一定點C的距離等於已知距離d.



**設**　已知圓O外有已知點C.

**求作**　$CA=d$, $CB=d$, 使A,B在圓上.



(4)

**求法**　1. 以C爲中心,d爲半徑作弧交圓於A,於B(§178).

2. 作OA, OB, CA, CB(公理13).

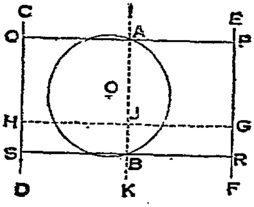
3. $CA=CB=d$(作圖). ∴A,B即爲所求之點.

**討論**　如作CO,而$d=CO-OA$,則僅有一點合於所求. 如$d<CO-OA$,則此點無有.

5. 在一已知圓上求一點,與所設二平行綫CD和EF等距離.

**設**　已知O圓,及$CD//EF$.

**求**　A,B兩點,使$AP=AQ$, $BR=BS$.



(5)

**求法**　1. 任意所在作$GH\perp CD$(§85), ∴$GH\perp EF$(§105).

2. 作GH的垂直二等分綫IK,平分GH於J(§82).

3. IK交O圓於A,於B(195).

4. 通過A作$PQ//GH$, 通過B作$RS//GH$(§100).

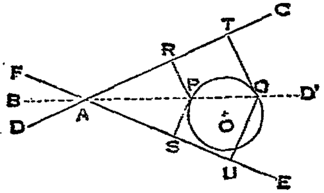
5. $AP=AQ=BR=BS$(§141), (公理8). ∴A,B爲所求之點.

**討論**　如IK不交於O圓(如兩平行綫在圓的一旁),A,B兩點便沒有.

又如圓心O正在IK上,則A,B爲PQ,RS的切點.

如AP大於圓的直徑時,O圓雖在兩平行綫間,如靠一綫太近時,IK亦不交於圓,A,B兩點仍不可求.

**6. 在一已知圓上求一點,與二已知相交直綫CD和EF等距離.**



(6)

**設** 已知CD,EF兩綫相交於A,而O圓在∠EAC間.

**求** PR=PS, QT=QU, 而P,Q須在O圓上.

**求法** 1. 作∠EAC的角二等分綫BD'.(§24)(§83).

2. 交O圓於P,於Q(§195).

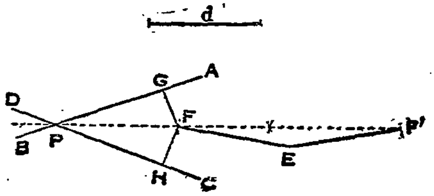
3. 作PR,QT都⊥CD,PS,QU都⊥EF(§87).

4. BD'是到∠EAC兩邊等距的軌跡(§264).

5. ∴PR=PS, QT=QU(§259). 卽P,Q爲所求之點.

**討論** 如BD'爲O圓的切線,則僅有一點合於所求.如BD'不與O圓相遇,則此點無有.

**7. 求一點,與二已知相交直線AB和CD等距離,且與一定點E的距離等於已知距離.**



(7)

**設** AB, CD相交於P.

**求** 點F, F′,到AB, CD等距,而與E的距離爲d.

**求法** 1. 作PF′分角綫,是到兩交綫等距之軌跡(§264).

2. 以E爲中心, d爲半徑,作弧交PF′於F,於F′(§195).

3. 作FG⊥AB, F′G′⊥AB; FH⊥CD, F′H′⊥CD(§87).

4. EF=EF′=d(作圖).

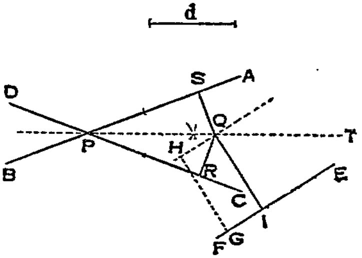
5. FG=FH, F′G′=F′H′(§78). ∴ F, F′爲所求之點.

**討論** 略.

8. 求一點,與二已知相交直線AB和CD等距離,且與另一已知直線EF的距離,等於已知距離.

**設** AB, CD相交於P.

**求** 一點Q,到AB, CD等距,而與EF的距離爲d.



(8)

**求法** 1. 作∠APC的分角綫PT(§83).是到兩交綫等距的軌跡(§264).

2. 在已知綫EF內取任一點G,作HG=d,而⊥EF.(§85).

3. 作HQ//EF,交PT於Q,HQ是離EF等距的軌跡(§262).

4. 作QR⊥CD, QS⊥AB, QI⊥EF(§87).

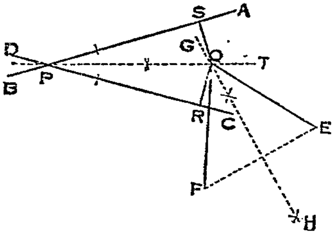
5. QS=QR(§264).

6. QI=HG=d(§136).又(作圖).

7. Q點爲兩軌跡相sixth之點,故能滿足題中所要的條件(§265).

**討論** 略.

**9.** 求一點,與二已知相交直綫AB和CD等距離,且與兩定點E和F等距離.



(9)

**設**　AB, CD兩綫相交於P,已知E, F兩點.

**求**　Q點,使QS=QR, QE=QF.

**求法**　**1.** 作∠APC的角二等分綫PT(§83),是到兩交綫等距之軌跡(§264).

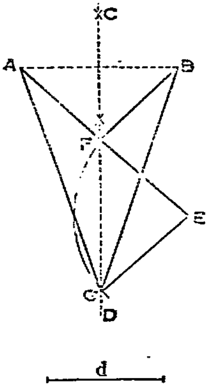
**2.** 作EF(公理13),作GH平分EF(§82). GH是到E,F兩點等距的軌跡(§261).

**3.** GH交PT於Q, Q點是兩軌跡的彙點(§265).

**4.** ∴ QS=QR, QE=QF. (§264), (§261).

**討論**　略.

**10.** 求一點,與二定點等距離,且與一定點E的距離等於已知距離.



(10)

**設**　已知A, B兩點.

**求**　F, G兩點使各與A若B等距,而離定點E之距離爲定長d.

**求法**　**1.** 作AB(公理13).

**2.** 作AB的垂直平分綫CD(§82).

**3.** CD是到A,B兩點等距的軌跡(§261).

**4.** 以E爲中心d爲半徑,作弧交CD於F,於G(公理18).

**5.** $\overset{\frown}{FG}$是到E點等距的軌跡(§260).

**6.** ∴F,G是兩軌跡的彙點(§265).

7. 作 FA, FB, EF, EG, GA, GB. (公理 13).

8. FA=FB, GA=GB (§261), EF=EG=d (§260).

討論　略.

11.求一點,與二定點等距離,且與二已知平行綫EF和GH等距離.

設　已知 A, B 兩點,及 GH//EF.

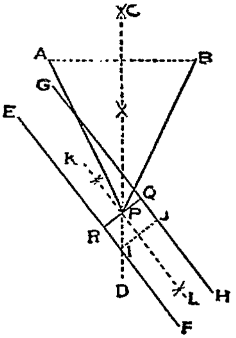
求　一點 P,使 PA=PB, PQ=PR,而 PQ⊥GH,又 PR⊥EF.

求法　1. 作 AB(公理 13).

2. 作 AB 的垂直平分綫 CD (§82).

3. CD 是到 A, B 兩點等距的軌跡 (§261).

4. 作 GH 及 EF 的垂綫 IJ (§85) 又 (§105).



(11)

5. 作 IJ 的垂直平分綫 KL (§82).

6. ∴KL//GH//EF (§92) (§93) (§95).

7. KL 是到 GH, EF 兩平行綫等距之軌跡 (§263).

8. KL 交 CD 於 P. 作 QR 通過 P 而⊥GH 又⊥EF (§87).

9. P 點是兩軌跡的會點 (§265).

10. 作 PA, PB (公理 13).

11. ∴PA=PB (§261), PQ=PR (§263).

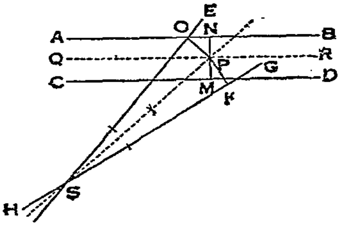
討論　略.

12.求一點,與二所設平行直綫等距離,且與二已知相交直綫EF和GH等距離.

設　已知 AB//CD, EF 交 GH 於 S.

求　一點 P,使 PN=PM, NM⊥AB 又⊥CD. PO=PK,

PO⊥EF, PK⊥GH.



(12)

**求法**　1. 在AB, CD兩綫正中作QR//AB//CD(§100).

2. QR是到兩平行綫等距的軌跡(§263).

3. 又作∠ESG的角二等分綫PS(§83).

4. PS是到兩交綫等距之軌跡(§264).

5. PS交QR於P, P是兩軌跡的彙點(§265).

6. 作PN, PM, PO, PK, 爲AB, CD, EF, GH四綫的垂綫(§87).

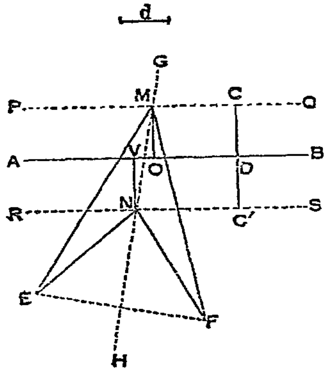
7. ∴ PN=PM, PO=PK.

**討論**　略.

**13.** 求一點,與一已知直線AB的距離等於所設距離d,且與二定點E和F等距離.

**設**　已知直線AB.

**求**　綫外一點,其距離爲d,而又與已知點E, F等距. 如M, N,兩點, MO=NV=d. 而ME=MF, NE=NF.



(13)

**求法**　1. 作CC′⊥AB,取CD=C′D=d(§85).

2. 通過C, C′兩點,作PQ//AB, RS//AB(§100).

3. PQ, RS是離AB綫d距離的軌跡(§262).

**4.** 作EF(公理13).

**5.** 作EF的垂直等分綫GH(§82),交PQ,RS於M,N.

**6.** GH是到E,F兩點等距之軌跡(§261).

**7.** M,N是兩軌跡之集點,都可以滿足兩樣條件(§265).

**8.** 作MO⊥AB, NV⊥AB(§87),又作ME, MF, NE, NF(公理13).

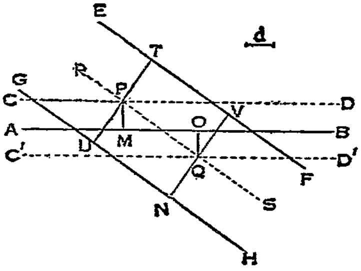
**9.** ∴ MO=NV=d, ME=MF, NE=NF

**討論**　略.

**14.** 求一點,與一已知直綫AB的距離,等於所設距離d,且與二已知平行綫EF和GH等距離.

**設**　AB直綫,及EF//GH.

**求**　P,Q兩點,使PM=QO=d. PM及QO都⊥AB. 而PT=PU, QV=QN. 四綫爲兩平行綫的垂直距離.



(14)

**求法**　**1.** 作CD//AB, C′D′//AB,令他們離AB爲d長(§100).

**2.** 又在EF及GH正中間作RS//EF//GH(§100).

**3.** RS交CD於P,交C′D′於Q(在AB╫EF時).

**4.** CD, C′D′是距AB爲d長的軌跡(§262).

**5.** RS是離EF, GH等距的軌跡(§263)

**6.** P,Q是兩軌跡交集之點.

**7.** 作PM⊥AB, QO⊥AB(§87),　∴PM=QO=d(題設,作圖).

**8.** 作PT, PU, QV, QN,諸垂綫,　∴PT=PU=QV=QN(§263)

**討論**　如EF//GH//AB,則必CD或C′D′與RS一致時,兩

軌跡合爲一軌跡,所有軌跡上諸點,皆離兩平行綫等距離,而離AB爲d遠.若CD或C′D′都不與RS一致,則此點無有.

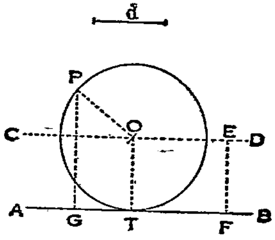
### 求作一圓,已知圓的半徑:(自15題到19題)

**15.** 過一定點,且切於一已知直綫.

**設** 已知圓半徑d,及AB與P點的位置.

**求作** O圓(半徑$OT=d$),切AB於T,而通過P點.

**作法** 1. 作$EF=d$,使$EF\perp AB$ (§85).



(15)

2. 通過E點作$CD/\!/AB$ (§100).

3. CD是離AB爲d遠的軌跡(162).

4. ∴ 以d爲半徑之圓,切於AB綫,其圓心必在CD綫上(§260).

5. 但須通過P點:以P爲中心d爲半徑,作弧交CD於O(§182注意2).

6. 以O爲中心,d爲半徑,作圓,切AB於T,而通過P點(§206).

7. 作PO, OT, 則$PO=TO$ (§178).

**討論** 作$PG\perp AB$,則$PG<2TO$.如$PG=2TO$,則POT爲一直徑.如$PG>2TO$,則不可作圖.

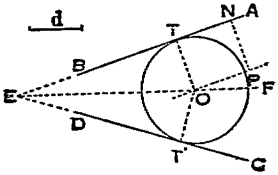
**16.** 切於二已知直綫.

**設** 已知圓半徑d及AB,CD二綫.

**求作** O圓(半徑$OT=d$).切AB於T, CD於T′.

**作法** 1. 引長AB, CD兩綫相交於E(假定不平行,又公理17).

2. 作∠E的角二等分綫EF(§83).



(16)

**3.** EF是到AB,CD等距的軌跡(§264).

**4.** 於AB上任意點N,作NP=d,幷令⊥AB(§85).

**5.** 作PO//AB(§100),PO是離AB有d遠的軌跡(§162).

**6.** PO交EF於O,O是兩軌跡的棻點(§265).

**7.** 作OT⊥AB(87).∴ OT=PN=d(§136).

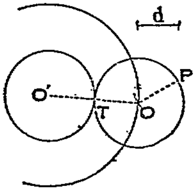
**8.** 以O爲中心d爲半徑作O圓,切AB於T,CD於T′(∵等距),故卽爲所求之圓.

**討論**　略.

### 17.過一定點且切於一已知圓.

**設**　已知O′圓半徑d′,所求圓半徑d,O′外一點P.

**求作**　O圓,通過P點,而切O′圓於T.



(17)

**作法**　**1.** 以O′圓的中心O′爲中心,d′+d(卽O′O)爲半徑,作第三圓(公理18).

**2.** 第三圓是O圓圓心的軌跡(§260).

**3.** 以P爲中心,d爲半徑,作小弧,交第三圓於O.O是離P點有d遠的軌跡(§260)與上述軌跡之交點(§265).

**4.** 以O爲中心,d爲半徑,作圓,必過P而切O′圓於T(§178)

### 18.切於二已知圓.

**設**　已知O′圓半徑d′,O″圓半徑d″,所求圓半徑d,

**求作**　O圓,使切於O′,O″兩圓.

**作法**　1. 以O′圓的中心O′爲中心,d′+d(卽O′O)爲半徑,作第三圓(公理18).

2. 第三圓是切於O′圓的圓心的軌跡.

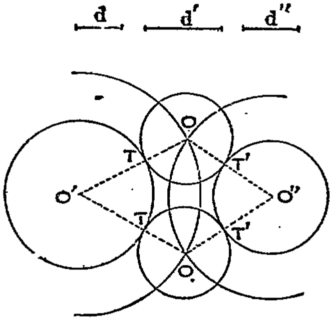
3. 以O″圓的中心O″爲中心,d″+d (卽O″O) 爲半徑,作第四圓.

4. 第四圓也是切於O″圓的圓心的軌跡.

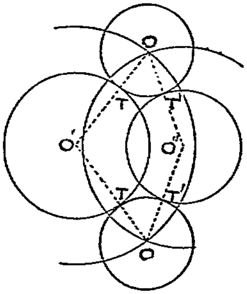
5. 兩軌跡相交於O兩次(§196).

6. 聯O′O, O″O. 交圓O′於T, 圓O″於T′(公理13).

7. 以OT爲半徑,O爲中心,上下各作一圓,同時切於O′, O″兩圓(§178).



(18, 兩圓不相交時的圖)



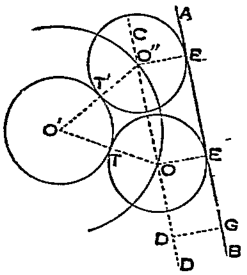
(18, 兩圓相交時的圖)

**19.** 切於一已知圓和一已知直綫.

**設**　已知O′圓的半徑d′,所求圓的半徑d,及AB綫的位置.

**求作**　O圓,其半徑爲d,而切於O′圓,又切於AB綫.

**作法**　1. 作DG⊥AB, DG=d. (§85).



(19)

**2.** 通過D點,作$CD \parallel AB$(§100), CD是離AB有d距離的軌跡(§262).

**3.** 以O′爲中心, $d'+d=O'O$爲半徑,作第三圓(公理18).

**4.** 交CD於O,於O″(§195),聯O′O, O′O″(公理13).交O′圓於T,於T′.作$OE \perp AB$, $O''E' \perp AB$(§87).

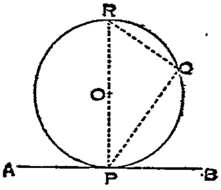
**5.** 以O及O″爲中心, $OT=OE=d$爲半徑,作O, O″兩圓.切O′圓於T於T′,切AB於E於E′(178).

求作一圓:

**20.**過一已知直線外的一點,且切於這已知直線上的一定點.

**設**　AB爲已知直綫,P爲綫內的已知點,Q爲綫外的別一點.

**求作**　一圓如O,切AB於P,而通過Q.



(20)

**作法**　**1.** 作$RP \perp AB$(§85).

**2.** 聯PQ(公理13).

**3.** 作$RQ \perp PQ$(§85)交RP於R.

**4.** 平分RP於O(§81).

**5.** 以O爲中心,OP爲半徑,作圓(公理18).

**6.** O圓切於AB之P點而通過Q點(§234).

**21.**切於一已知圓上一定點,且過圓外的另一定點.

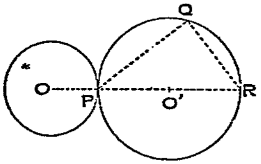
**設**　已知O圓及其上P點,其外Q點.

**求作**　O′圓切O圓於P,而通過Q點.

**作法**　1. 作OP半徑,引長之到R.所求圓的圓心,定在這綫上(§216).

2. 聯PQ (公理13), 作直角三角形PQR(§59).

3. 以PR的中心O′作圓心, O′P作半徑作圓(公理18).



(21)

4. O′圓切於O圓的P,而通過Q點(§234).

22. 切於一已知直綫及一已知圓上的一定點.

**指示:**　從圓上的一定點作一切綫.

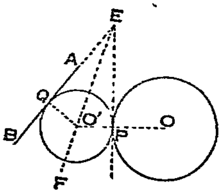
**設**　已知O圓,圓上一點P及AB綫.

**求作**　一圓O′,切於AB,并切O圓於P點.

**作法**　1. 作O圓之切綫於P點,引長BA,使相交於E(§203)(公理17).

2. 作∠E的分角綫EF(§83).這是到兩邊等距的軌跡(§264).

3. 通過P點作OO′,交EF於O′(公理13附件a).



(22)

4. O′P⊥EP (§206),作O′Q⊥AB (§87). ∴ O′P=O′Q(§126).

5. 以O′爲中心,O′P爲半徑,作O′圓,切O圓於P,AB於Q(§178).

23. 已知a, $h_a$, ∠A, 作一三角形.

**設**　已知△ABC的一邊BC=a, 高AD=$h_a$, 及∠A.

**求作**　△ABC.

**作法**　1. 作∠BEC=∠A(§86).

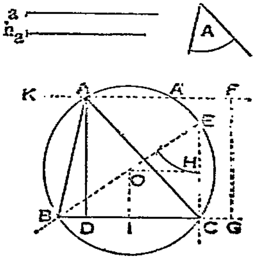
**2.** 以一邊內適宜之點C爲中心,a爲半徑作弧,截他邊於B,作BC.

**3.** 作△EBC的外接圓(§253;又(§192).

**4.** $\overset{\frown}{BEC}$是∠A頂點的軌跡(§264習題16,又§233).

**5.** 爲便利計,引長BC至G.作FG=$h_a$,且FG⊥BG(§85).

**6.** 通過F點作KF∥BC(§100),KF是離BC有$h_a$的軌跡(§262).



(23)

**7.** KF交O圓於A, A′(§135).聯AB,AC(公理13).作AD⊥BC(§87).

**8.** △ABC卽所求的三角形.圖中略去△A′BC.

**24.** 已知a, $m_a$, ∠A, 作一三角形.

**設**　已知△ABC的一邊BC=a, 中綫AM=$m_a$, 及∠A.

**求作**　△ABC.

**作法**　**1.** 作∠BEC=∠A(§86).

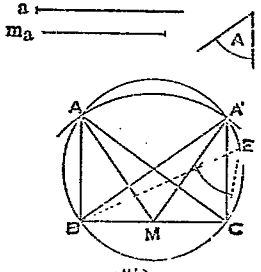
**2.** 以一邊內適宜之點C爲中心a爲半徑作弧,截他邊於B,作BC.

**3.** 作△EBC的外接圓(§253),$\overset{\frown}{BEC}$是∠A的軌跡(習題16,又§233).

**4.** 取BC中點M爲中心,$m_a$爲半徑,作弧,交外接圓於A,於A′(196).

**5.** 聯AB, AC, A′B, A′C(公理13).

**6.** △ABC及△A′BC都是所求之三角形.



(24)

## 雜　題(教科書第190—192頁)

作一等腰三角形(1至4)已知:

1. 底邊及一等腰上邊的高.

**設**　已如等腰三角形ABC的底BC及AB上的高CD.

**求作**　其形.

**分析**　先作草圖△ABC, AB=AC, CD⊥AB.

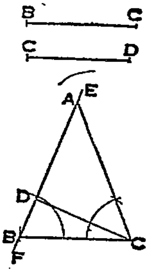
則rt.△CBD,已知兩邊及一直角,可以作圖.

**作法**　1. 作直綫EF.

2. 作CD⊥EF(§85),D爲EF上的任意點.

3. 以C爲中心, BC爲半徑,作弧,截EF於B.

4. 作∠ACB=∠EBC(§86),交EF於A.這△ABC卽所求的三角形.



(1)

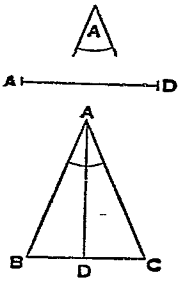
2. 底邊上的高和頂角.

**設**　已知等腰△底邊上的高AD及頂角A.

**求作**　其形.

**分析**　先作草圖△ABC, AB=AC, AD⊥BC. 可知∠BAD=∠CAD=$\frac{1}{2}$∠A.

**作法**　1.作∠A的二等分線,使等於AD.



(2)

2. 於D作BC⊥AD，與$\angle A$二邊相交於B, C.

3. ABC卽爲所求等腰△.

### 3. 頂角，和底邊及一腰的和.

**設**　已知等腰△ABC的頂角$\angle A$及$a+b$.

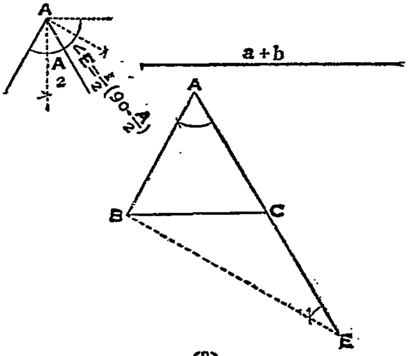
**求作**　其形.

**分析**　先作草圖△ABC, AB=AC.

引長AC(卽b)至E，使CE=BC(卽a)，∴ $AE=a+b$.

但 $\angle ACB=2\angle E$(§120)，又 $\angle ACB=90°-\frac{\angle A}{2}$.

$$\therefore\ \angle E=\frac{90°-\frac{\angle A}{2}}{2},$$ 由此可以作圖.



(3)

**作法**　1. 作半$\angle A$的餘角，平分之(§112及§83). 命其角爲$\angle E$.

2. 作$\angle A$及$\angle E$於$a+b$的兩端，他二邊相交於B(§86).

3. 作半$\angle A$的餘角於B，其一邊交AE($=a+b$)於C(§86).

4. △ABC卽所求之三角形.

**4.** 周圍和兩底角.

**設** 已知等腰$\triangle ABC$的$a+b+c$及底角$\angle B$.

**求作** 其形.

**分析** 先作草圖,假定$\triangle ABC$已作成.

引長AB至F,令$BF=BC=a$,聯CF.

又引長BA至E,令$AE=AC=b$,聯CE.

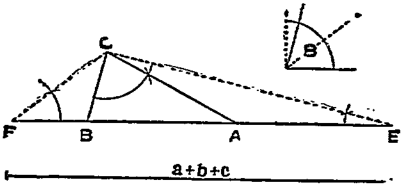
$\therefore EF=a+b+c$.

但$\angle BAC=180°-2\angle B$ (§110).

又$\angle BAC=2\angle E$ (§120).

$\therefore \angle E=90°-\angle B$(代替),知$\angle E$是$\angle B$的餘角. $\therefore \angle ECB=90°$.

又$\angle B=2\angle F$(§120), $\angle F=\frac{1}{2}\angle B$. 由此可得作法.



(4)

**作法** **1.** 作$FE=a+b+c$(公理17).

**2.** 作 $\angle F=\frac{1}{2}\angle B$ (§86) (§83).

**3.** 作 $\angle B$的餘角 $\angle E$(§85習題1),兩邊相交於C(公理13附件a).

**4.** 作$CB\perp CE$(§85),交EF於B.

**5.** 作 $\angle BCA=\angle B$ (§86),一邊交EF於A.

**6.** $\triangle ABC$是所求的三角形.

作一直角三角形(5至7),已知:

5. 一銳角及斜邊上的高.

**設**　已知rt.△ABC一銳角∠A及斜邊AB上之高CD.

**求作**　其形.

**分析**　先作草圖rt.△ABC,及$h_c$=CD.因△ACD亦為直角三角形,已知兩角及一角的對邊.由此可以作圖

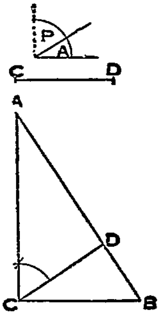
**作法**　1. 作∠A的餘角∠P(§85習題1).

2. 作AB直綫及CD⊥AB(§85).

3. 作∠ACD=∠P(§86),一邊交AB於A(公理13附件a).

4. 作BC⊥AC(§85),交AB於B.

5. rt.△ABC是所求的三角形.



(5)

6. 斜邊上的高,和高把斜邊分成二段中的一段.

**設**　已知rt.△ABC的斜邊上高CD及AD.

**求作**　其形.

**分析**　先作草圖rt.△ABC及CD,知rt.△ACD已知兩邊及其一夾角,由此可以作圖

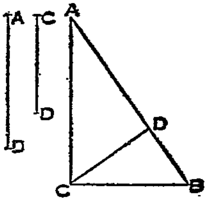
**作法**　1. 作AD⊥CD(§85).

2. 聯AC(公理13).

3. 作BC⊥AC(§85).

4. 引長AD(公理17),交CB於B.

5. rt.△ABC是所求的三角形.



(6)

7. 一銳角及兩直角邊的和.

**設**　已知rt.△ABC的直角邊AB+BC及銳角∠A.

**求作**　其形.

**分析**　先作草圖rt.△ABC.

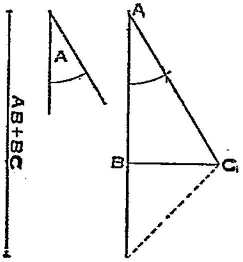
引長AB至D, 令BD=BC, 這△BCD是等腰直角三角形. ∠BDC=$\frac{1}{2}$rt. ∠.由此可以作圖.

**作法**　1. 作AD=AB+BC(公理17).

2. 作∠A(§86)及∠D=$\frac{1}{2}$rt. ∠(同上). 兩邊相交於C.

3. 由C作CB⊥AD(§87).

4. rt. △ABC是所求的三角形.



(7)

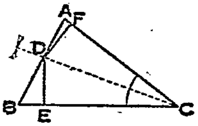
8. 在一三角形的一邊上,求與其他兩邊等距離的一點.

**設**　△ABC.

**求**　在AB上的一點D, 使DE=DF, 但DE⊥BC, DF⊥AC.

**求法**　作∠C的角二等分綫,這角二等分綫是到AC, BC兩邊等距離的軌跡(§264),交AB於D(公理13附件a).

作DE⊥BC, DF⊥AC. ∴ DE=DF.



(8)

9. 已知直角三角形的斜邊,求其直角頂點的軌跡.

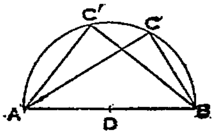
**設**　已知rt.△ABC的斜邊AB,

**求**　直角頂點C的軌跡.

**求法**　平分AB於D(§81).

以D爲中心AD爲半徑,作半圓(公理18).

這半圓是C點的軌跡(§234).



(9)

10.在四邊形的一邊上,求與其對邊兩端等距離的一點.

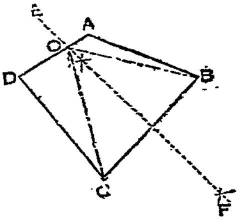
**設**　四邊形ABCD, BC是AD的對邊.

**求**　在AD內一點O, 使OB=OC.

**求法**　作BC的垂直平分綫EF(§82),交AD於O,EF是到B,C兩點等距之軌跡(§261).

O在AD內,又在EF內.

∴OB=OC.



(10)

11.從圓上一點P,作與中心距離等於已知距離的弦.

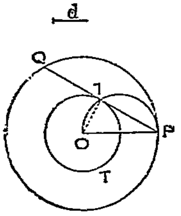
**設**　已知弦的圓心距爲d.

**求**　在其圓的P點上作PQ弦.

**作法**　1.聯P點及圓心,作PO(公理13).

2.以O爲圓心d爲半徑,作一同心圓(§177),這圓是以d爲圓心距的弦的中心的軌跡(§260).

3.作半圓於PO之上,交所作圓於T.這半圓是以PO爲底的直角三角形直角頂的軌跡(本節問題9.又§234).



(11)

4. 通過T點作PQ,作TO. ∴ ∠OTP=rt.∠(§234).

5. PQ的弦心距=TO=d(§178)(又作圖2).

6. PO的下面也可以照樣求得T′,作PQ′.所以本題可作兩弦(圖從略).

12. 在一已知圓內,作與一定點的距離等於已知距離的直徑.

設 O圓,圓上的P點,P到直徑的距離d.

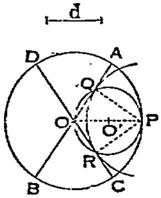
求作 直徑AB, CD.

作法 1. 聯P點及圓心,作PO(公理13).

2. 取PO的中點O′爲圓心,以PO′爲半徑作圓.

3. 以P爲中心, d爲半徑,作圓,交O′圓於Q,於R(§196).

4. 通過Q及O作AB,通過R及O作CD,他們便是所求的直徑.

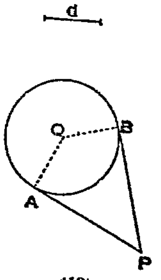


(12)

13. 過一定點,作與另一定點的距離等於已知距離的直線.

設 P爲已知點,d爲已知距離,Q爲別一點.

求作 PA, PB通過P點,令QA⊥PA, QB⊥PB,而QA=QB=d.



(13)

作法 1. 以Q爲中心, d爲半徑,作圓(公理18).

2. 這圓是離Q點有d長的軌跡(§230).

3. 由P作這圓的切線PA, PB(§203).

4. 作QA, QB(公理13).

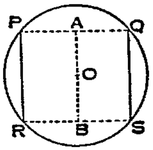
5. ∴ QA=QB=d(§178)(作法1).

**6.** QA⊥PA, QB⊥PB (§203).

**14.** 從一已知圓上二定點,作相等且平行的二弦.

**設**　O圓內已知兩點P, Q.

**求作**　PR$\underline{/\!/}$QS.



(14)

**作法**　**1.** 聯PQ(公理13).

**2.** 作OA⊥PQ(§87).

**3.** 引長AO至B, 使OA=OB (公理17).

**4.** 通過B點作RS//PQ(§100).

**5.** PQ=RS (§197).

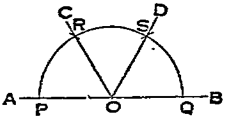
**6.** 作PR, QS(公理13). ∴ PR$\underline{/\!/}$QS (§144)(§136).

**15.** 三等分平角.

**設**　∠AOB=st.∠.

**求作**　CO, DO, 使∠AOC=∠COD=∠DOB.

**作法**　**1.** 以O爲中心,任意長爲半徑,作半圓,交AB於P, 於Q(§195).



(15)

**2.** 以P爲中心PO爲半徑作弧交半圓於R, 以Q爲中心同半徑作弧,交半圓於S.

**3.** 通過R作CO, 通過S作DO (公理13).

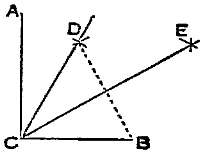
**4.** ∠AOC=∠COD=∠DOB.

**證**　聯PR, QS, 則△PRO,△QSO都是等邊三角形(§115).

**16.** 三等分直角.

**設**　∠ACB爲rt.∠.

**求作**　DC, EC, 使∠ACD=∠DCE=∠ECB.



(16)

**作法**　1. 在直角的一邊 CB 上作等邊三角形BCD(§115).

∴ $\angle DCB=\frac{2}{3}\text{rt.}\angle$.

2. 平分$\angle DCB$, 作EC(§83).

3. ∴ $\angle ACD=\angle DCE=\angle ECB=30^\circ=\frac{1}{3}\text{rt.}\angle$ (§26)又(公理10).

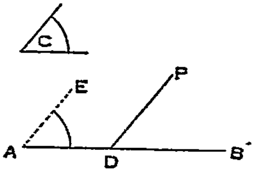
**17.** 三等分一半圓.

參考問題15的詳解,便容易把半圓來三等分.

**18.** 從一已知直線外的一定點,作一直線,使與已知直線成一個角,等於所設的角.

**設**　P爲已知直綫AB外的一點,$\angle C$爲已知角.

**求作**　$\angle PDB=\angle C$.



(18)

**作法**　1. 作$\angle EAB=\angle C$(§86).

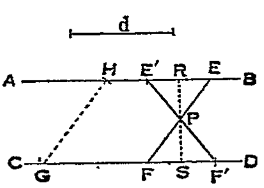
2. 從P點作PD//EA(§100)交AB於D(§91).

3. ∴ $\angle PDB=\angle EAB=\angle C$(§106)又(公理1).

**19.** 從所設二平行線間的一定點,作止於二平行線,等於定長的直線.

**設**　已知點P,已知長d,及AB//CD.

**求作**　EF通過P點使兩端在兩平行綫內,而EF=d.



(19)

**作法**　1. 在平綫中隨便那一條

內,取任意點G爲中心,d爲半徑,作弧交AB於H作HG.

**2.** 通過P點作EF//HG(§100).　∴ EF=HG=d (§136)又(作圖1).

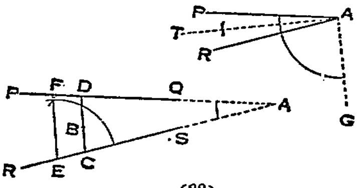
**3.** 通過P點作RS⊥AB及CD(§87)(§105).

**4.** 取RE′=RE, SF′=SF. 聯E′F′(公理13). ∴E′F′=EF=d.

**20.** **過一定點,作一直綫使與所設二直線成等角.**

**設**　已知B點及兩綫PQ, RS.

**求作**　DC通過B點,而使∠QDC=∠SCD, 但假定PQ∦RS.



(20)

**作法**　**1.** 引長PQ, RS, 使相交於A(公理17).

**2.** 平分∠A(§83),∴∠TAR $=\frac{1}{2}$∠A, 作其餘角∠RAG (§112).

**3.** 在RS內任意點E上作∠FEA=∠RAG(§86).
∴∠AFE=∠RAG(§110).

**4.** 通過B點作DC//EF(§100).

**5.** ∴∠QDC=∠SCD(§106).

**又法**　**1.** 引長PQ, RS, 使相交於A(同上).

**2.** 取AE=AF, 作EF

**3.** ∠AFE=∠AEF(§71).

**4.** 通過B點作DC//EF(同上).

**5.** ∴∠QDC=∠SCD(同上).

**21.** **作二直線所成的角的二等分線.不得延長使其相交.**

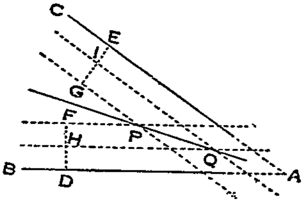
**設**　AB, AC兩綫引長可成∠A.

**求**　不引長二線而作其二等分線

**作法**　1. 取AB內任意之一點D, 作任意長的FD⊥AB(§85).

2. 取AC內任意之一點E, 作GE=FD, 且GE⊥AC.

3. 通過F, G, 作FP//AB, GP//AC(§100). 二綫相交於P(公理13的附件a).



(21)

4. 取FD內的任意點H, 作HQ//AB.

5. 在GE內取IE=HD, 作IQ//AC, 與HQ相交於Q.

6. 通過P Q作直綫(公理13. 那麼PQ是∠A的分角綫(§126).

### 作一三角形:

**22.** 已知a, ∠B, $h_a$.

**設**　△ABC, 已知BC=a, ∠B, 及AD=$h_a$.

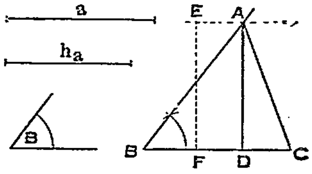
**求作**　其形.

**作法**　1. 作BC=a(§39之1).

2. 作∠ABC=∠B(§86).

3. 在BC內取任意點F, 作EF⊥BC(§85), 使EF=$h_a$.

4. 通過E點作EA//BC(§100), EA是距BC有$h_a$的軌跡(§262).



(22)

5 EA交AB於A(§91), 聯AC(公理13).

6. △ABC卽所求的三角形(∵AD=EF=$h_a$, ∠ABC=∠B,

BC=a).

**23.** a, ∠B, $m_c$.

**設**　△ABC, 已知 BC=a, ∠B, 及 CM=$m_c$

**求作**　其形.

**作法**　**1.** 作 ∠CBA=∠B (§86).

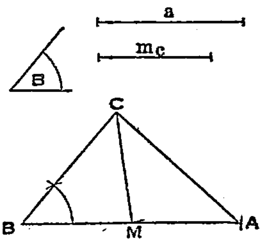
**2.** 截取 BC=a (§39 之 1).

**3.** 以 C 爲中心 $m_c$ 爲半徑作弧, 交 AB 於 M (§178), 作 CM.

**4.** 於 AB 內取 AM=BM (§39)(§64)

**5.** 聯 AC (公理 13).

**6.** △ABC 是所求的三角形 (∵BC=a, ∠CBA=∠B, CM=$m_c$).



(23)

**24.** a, ∠B, $t_c$.

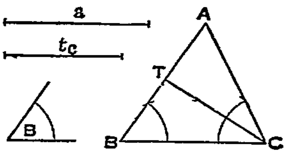
**設**　已知 △ABC 的 BC=a, ∠B, CT=$t_c$.

**求作**　其形.

**作法**　**1.** 作 ∠ABC=∠B(§86). 截取 BC=a (§39之1).

**2.** 以 C 爲中心 $t_c$ 爲半徑, 作弧交 AB 於 T, 作 CT (§178).

**3.** 作 ∠ACT=∠BCT (題設 CT 是角二等分綫). AC 與 AB 相交於 A (公理 13 的附件 a).



(24)

**4.** △ABC 是所求的三角形 (∵BC=a, ∠ABC=∠B, CT=$t_c$).

**25.** ∠A, $h_a$, $t_a$.

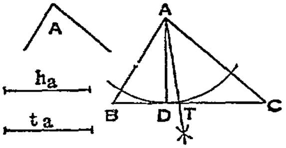
**設**　△ABC 已知 ∠A, AD=$h_a$, AT=$t_a$.

**求作**　其形.

**作法** 1. 作$\angle BAC=\angle A$ (§86).

2. 平分$\angle A$ (§83), 截取 $AT=t_a$ (§39之1).

3. 以A爲中心$h_a$爲半徑作圓(公理18).



(25)

4. 從T到圓作切綫(§175). $\angle ADT=$rt. $\angle$ (§203).

5. 引長DT兩端,交AB於B, AC於C (公理17). $\triangle ABC$是所求的三角形.

**26.** $a+b+c, \angle B, \angle C$.

**設** $\triangle ABC$,已知周圍$=a+b+c$,及$\angle B, \angle C$.

**求作** 其形.

**分析** 先作一草圖,假定所求的$\triangle ABC$已作成.

引長BC兩端使$DB=AB, CE=AC$,聯AD, AE.

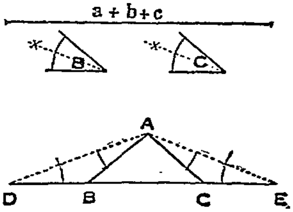
則 $\angle D=\frac{1}{2}\angle B,\quad \angle E=\frac{1}{2}\angle C$. (§120).

由此可以作圖.

**作法** 1. 作$DE=a+b+c$(題設,又§39之1).

2. 作 $\angle D=\frac{1}{2}\angle B,\ \angle E=\frac{1}{2}\angle C$ (§86.又先應用§83).兩邊相交於A.

3. 作$\angle DAB=\angle D, \angle EAC=\angle E$ (§86).兩邊交DE於B於C.



(26)

4. $\triangle ABC$是所求的三角形.

**27.** $a, b, R$.

**設** $\triangle ABC$已知$BC=a, AC=b, OB=R$ (R爲外接

圓的半徑).

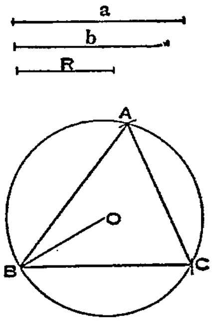
**求作**　其形.

**作法**　1. 以R爲半徑作圓(公理18),如O圓.

2. 在圓上以任意點B爲中心a爲半徑,作弧交圓於C,作BC(公理13).

3. 以C爲中心b爲半徑,作弧,交圓於A,作AC.

4. 聯AB. ∴ △ABC爲所求的三角形.



(27)

**28.** $a$, $h_a$, $R$.

**設**　△ABC, 已知$BC=a$, $AD=h_a$, 其外接圓半徑$=R$.

**求作**　其形.

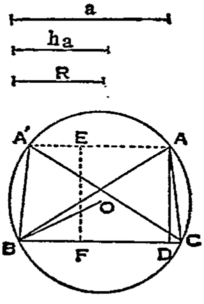
**作法**　1. 以R爲半徑,作O圓(公理18).

2. 以圓內任意點B爲中心, a爲半徑作弧交圓於C(§260),作BC(公理13).

3. 在BC上作$EF \perp BC$(§85),$EF=h_a$.

4. 通過E點,作$AA' /\!/ BC$(§100),這$AA'$是離BC有$h_a$距離的軌跡(§262).

5. $AA'$交O圓於A,於$A'$(§195).



(28)

6. 聯AB,AC,及$A'B$,$A'C$, 所成△ABC及△$A'BC$, 都是所求的三角形.

**29.** $h_a$, $h_b$, $\angle B$.

**設** △ABC, 已知 AD=$h_a$, BE=$h_b$, 及 ∠B.

**求作** 三角形.

**作法** 1. 作直綫BG及HK//BG, 使其距離FG=$h_a$ (§131)

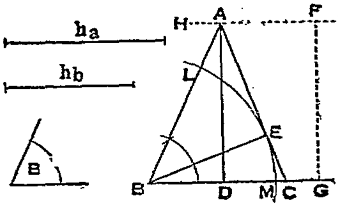
2. HK是∠A高$h_a$的軌跡(§262).

3. 作∠ABG=∠B (§86), 交HK於A (§91), 作AD⊥BG (§87)

4. AD=FG=$h_a$ (§141 又作圖 1.)

5. 以B爲中心, BE=$h_b$爲半徑,作圓(公理18).

6. LEM 圓是離B點有$h_b$距離的軌跡(§260).



(29)

7. 作AC切圓於E, 交BG於C (§203)(§91). 這△ABC是所求的三角形.

30. a, b, $m_c$.

**設** 三角形ABC, 已知BC=a, AC=b, CO=$m_c$.

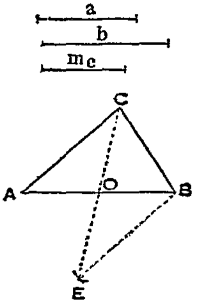
**求作** 其形.

**作法** 1. 作BC=a (§39的1).

2. 以B爲中心, b爲半徑作弧,以C爲中心, $2m_c$爲半徑作弧,兩弧相交於E.

3. 作BE, CE, 取CE的中心O (§81). 聯BO, 引長之至A, 令AO=BO (公理13及17).

4. 作AC, 這△ABC是所求的三角形.

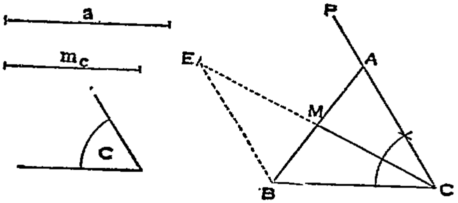


(30)

**31.** $a$, $m_c$, $\angle C$.

**設** △ABC, 已知 $BC=a$, $CM=m_c$ 及 $\angle C$.

**求作** 其形.



(31)

**作法** 1. 作 $BC=a$ (39 的 1).

2. 作 $\angle ECP=\angle C$ (§86).

3. 作 $BE/\!/PC$ (§100).

4. 以 C 爲中心, $2m_c$ 爲半徑作弧,交 BE 於 E, 作 CE (§146).

5. 平分 CE 於 M. 作 BM 公理 13), 引長之交 PC 於 A (公理 17).

6. 這 △ABC 是所求的三角形.

**32.** $m_a$, $m_b$, $h_c$.

**設** △ABC, 已知 $AM=m_a$. $BN=m_b$, $CD=h_c$.

**求作** 其形.

**作法** 1. 作 $BE/\!/FH/\!/GK$ (§100). $EF=FG$, $EG=h_c$, $EG\perp BE$ (§85).

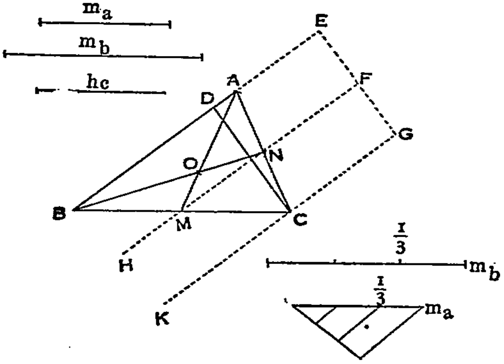
2. FH 是 △ABC 兩邊中點的軌跡 (§148).

3. 以 B 爲中心, $m_b$ 爲半徑,作弧,交 FH 於 N, 作 BN.

$\therefore BN=m_b$.

4. 三等分 BN 得 O, 又三等分 $m_a$, 以 O 爲中心, $\frac{1}{3}m_a$ 爲半

徑,作弧交FH於M,引長MO交BE於A.



(32)

**5.** 聯BM, AN,引長之相交於C, ∴AM=$m_a$

**6.** 作CD⊥AB (§85), ∴CD=$h_c$.

**7.** 這△ABC是所求的三角形.

**33.** $m_a$, $h_b$, $h_c$.

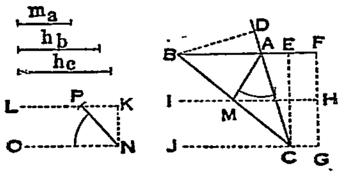
**設** △ABC,已知AM=$m_a$, BD=$h_b$, CE=$h_c$.

**求作** 其形.

**作法** **1.** 作BF//IH//JG (§100),但FH=HG, FG=$h_c$ 且⊥BF (§85).

**2.** IH是△ABC兩邊中點的軌跡(§148).

**3.** 在BF內取A點爲中心,$m_a$爲半徑,作弧,交IH於M,作AM(公理13).



(33)

**4.** 同理另圖作LK//ON, 令其距離 KN=$\frac{1}{2}h_b$. 又從 N 作 PN=$m_a$.

**5.** 作 ∠MAC=∠ONP (§86). AC 交 JG 於 C (§91).

**6.** 作 MC (公理 13), 引長 CM, 交 BF 於 B (公理 17).

**7.** 這△ABC是所求的三角形.

**34.** $m_a$, $m_b$, $m_c$.

**設**　已知 △ABC 的中綫 AM=$m_a$, BN=$m_b$, CL=$m_c$.

**求作**　其形.

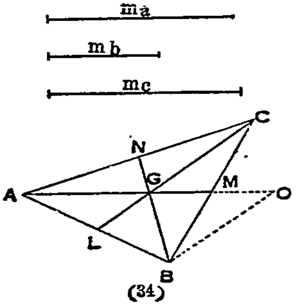
**分析**　先作草圖,假定△ABC已作成.

命三中綫的交點爲G. 則 AG=$\frac{2}{3}m_a$, GM=$\frac{1}{3}m_a$, BG=$\frac{2}{3}m_b$, CG=$\frac{2}{3}m_c$ (§104).

引長 GM 至 O, 令 MO=GM. 聯 BO.

那麽 △GBO 由三中綫的$\frac{2}{3}$所成.

因得作法如下.



(34)

**作法**　**1.** 以$\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$, $\frac{2}{3}m_c$ 爲邊,作△GBO (§249 之 1), 取 GO 中點作BM.

**2.** 引長 BM 至 C,令 MC=BM (公理 17).

**3.** 引長 OG 至 A,令 GA=GO (同上).

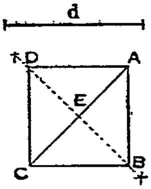
**4.** 聯AB, AC(公理13). 這△ABC是所求的三角形.

作一正方形,已知:

**35.** 對角綫.

**設** □ABCD, 已知對角綫AC=d.

**求作** 其形.



(35)

**作法** **1.** 作AC,並作BD平分之於E(§81).

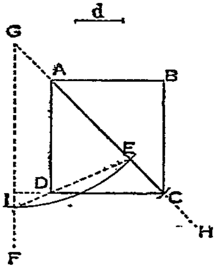
**2.** 於BD內取BE=DE=AE(§39的1).

**3.** 聯ABCD便成正方形(§137).

**36.** 一邊與對角綫的差.

**設** □ABCD已知AC−AB=d.

**求作** 其形.



(36)

**作法** **1.** 作∠FGH=45°(平分rt.∠, §83).

**2.** 以任意的長爲半徑,G爲中心作弧,取GI=GE(§31的1). 作IE.

**3.** 由E取EC=d, 由C向GF作垂綫(§87), 交IE於D.

**4.** 作AD⊥DC, AB⊥AD, BC⊥DC(§85).

**5.** ABCD卽所求的□.

**37.** 一邊與對角綫的和.

**設** □ABCD已知AC+BC=S.

**求作** 其形.

**作法** **1.** 作AE=S(§39的1).

**2.** 作∠FAE=45°, ∠AEB=22.5°(§86). 兩邊相交於B.

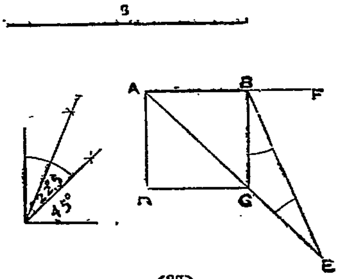
**3.** 作 $CB \perp AF$ (§85),或作 $\angle CBE = \angle AEB$,交 AE 於 C.

**4.** 作 $DC \perp BC$, $AD \perp DC$. 這四邊形 ABCD, 是所求的正方形.

**證**　$\triangle BCE$ 有兩等角, 所以等邊, 即 $BC=CE$.

$AE=AC+CE$ (公理10).

$AE=AC+BC$ (公理12). (§71)



(37)

## 作一矩形,已知:

### 38. 一邊和一對角綫.

**設**　▭ABCD, 已知 AB 及 BD.

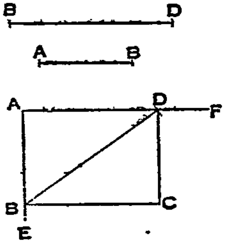
**求作**　其形.

**作法**　**1.** 作直角 $\angle EAF$ (§85).

**2.** 在 AE 內取 AB (§39 的 1).

**3.** 以 B 爲中心 BD 爲半徑,作弧, 交 AF 於 D, 作 BD (公理13).

**4.** 作 $CD \perp AD$, $BC \perp AB$, 相交於 C. ∴ABCD 爲所求的▭.



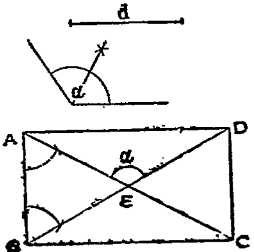
(38)

### 39. 一邊及二對角綫所成的角.

**設**　▭ABCD, 已知 $AB=d$ 及 $\angle AED=\alpha$.

**求作**　其形.

**作法**　**1.** 平分 $\angle\alpha$.



(39)

**2.** 於A作 $\angle BAE=\frac{1}{2}\angle\alpha$

**3.** 於B作 $\angle ABE=\frac{1}{2}\angle\alpha$.

**4** AE,BE相交於E,引長之,使ED=BE=EC.

**5.** 聯結ABCD卽爲所求的矩形

**注意** 若已知角爲∠AEB,則須先求$\angle\alpha=(180^\circ-\angle AEB)$而等分之.

### 40.周圍和對角綫.

**設** ▭ABCD,已知AB+BC+CD+DA=p. BD=d.

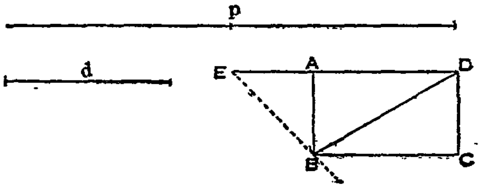
**求作** 其形.

**分析** 設▭ABCD已作成.

引長DA至E,令AE=AB,聯BE.

則△ABE爲直角等腰三角形,其一銳角=45°,$DE=\frac{1}{2}p$.

因得作圖法.



(40)

**作法** **1.** 作$DE=\frac{1}{2}p$(§39的1).

**2.** 作45°角於E(§86).

**3.** 以D爲中心,d爲半徑作弧,交所作角的一邊於B.

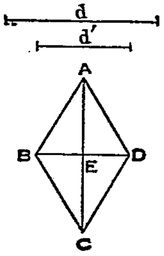
**4.** 作BA⊥DE(§87),及CD$\underline{\parallel}$AB,聯BC. ∴ABCD爲所求▭.

作一菱形,已知:

41.兩對角綫.

**設**　已知AC,BD兩對角綫爲d,d′.

**求作**　菱形ABCD.



(41)

**作法**　1.平分d(§81).

2.作BD=d′

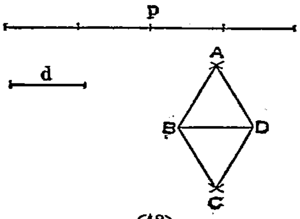
3.作BD的垂直等分綫(§81).取AE=EC $=\frac{1}{2}$d. AC是到BD兩端等距的軌跡(§261).

4.聯A,B,C,D便成菱形(§137).

42.周圍和一對角綫.

**設**　已知菱形ABCD的周界爲p,一對角綫爲d.

**求作**　其形.



(42)

**作法**　1.將d四等分(§81).

2.以$\frac{1}{4}$p爲腰,d爲底,作相背的兩個等腰三角形(§249的1).

3.這ABCD便是所求的菱形(§137).

43.一角和一對角綫.

I.**設**　已知$\angle B$及對角綫BD.

**求作**　菱形ABCD.

**作法**　1.作$\angle ABC=\angle B$(§86).

2.二等分$\angle ABC$(§83)如BE.

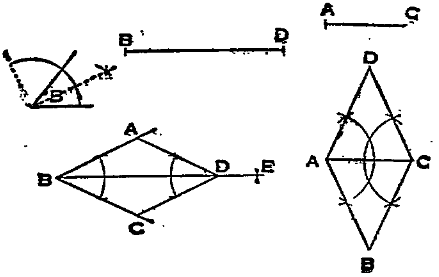
3.在BE內取BD(§39的1).

4. 作∠ADB及∠BDC都 $=\frac{1}{2}$∠B.

5. ABCD爲菱形.

II. 設　已知∠B及對角綫AC.

求作　菱形ABCD.



(43)

作法　1. 作$\frac{1}{2}$∠B的餘角於AC兩端(§249的3).

2. 在下方如法作之.

3. 兩個等腰三角形,合成菱形

### 44. 高和底邊.

設　已知菱形ABCD的底AB=b, 高GB=h.

求作　其形.

作法　1. 作AB=b(§39的1)

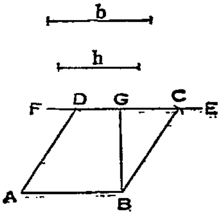
2. 作GB⊥AB(§85)令GB=h.

3. 通過G點作FE//AB(§100).

4. 以B爲中心,b爲半徑,作弧交FE於C(§137),作BC(公理13).

5. 取DC=b(同1),作AD.

6. 這ABCD爲所求的菱形.



(44)

### 45. 高和一角.

設　已知菱形ABCD的高GB=h, ∠A.

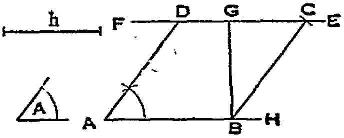
求作　其形.

**作法** 1. 作 EF//AH, 令其距離 GB=h (§100)(§262).

2. 作 ∠DAH=∠A (§86), 一邊交 EF 於 D.

3. 作 BC//AD (§100), 令 AB=AD (§39 的 1).

4. ∴ ABCD 爲所求菱形 (§137).



(45)

## 作一平行四邊形,已知:

### 46. 相鄰二邊和一高.

**設** 已知 AB=a, AD=b, EB=d.

**求作** □ABCD.

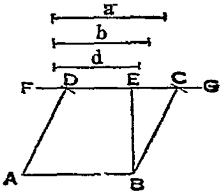
**作法** 1. 作 AB=a (§39 的 1)

2. 作 EB⊥AB (§85) 而令 EB=d. 通過 E 點作 FG//AB (§100).

3. 以 A 爲中心 b 爲半徑, 作弧交 FG 於 D (§260), 作 AD (公理 13).

4. 作 BC//AD, 則 BC=AD (§141).

5. ∴ ABCD 爲所求的□(§136).



(46)

### 47. 相鄰二邊和一角.

**設** 已知 AB=a, AD=b, 及 ∠A.

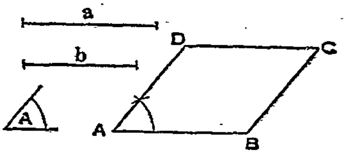
**求作** □ABCD.

**作法** 1. 作 ∠DAB=∠A (§86).

2. 取 AB=a, AD=b (§39 的 1).

3. 作 DC//AB, BC//AD (§100).

4. ∴ ABCD 爲所求的□(§136).



(47)

### 48. 一邊和二對角綫.

**設** 已知 AB=a, AC=d, BD=d′.

**求作** □ABCD.

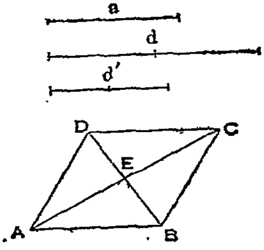
**作法** 1. 平分 d 及 d′(§81).

2. 以 a, $\frac{1}{2}$d, $\frac{1}{2}$d′ 作 △ABE (§249 的 1).

3. 引長 AE 至 C, BE 至 D, 令 EC=AE, ED=BE (公理 17).

4. 聯 AD, BC, CD (公理 13).

5. ∴ABCD 爲所求的□(§146).



(48)

### 49. 一邊,一角和一對角綫.

**設** 已知 AB=a, ∠A, BD=b.

**求作** □ABCD.

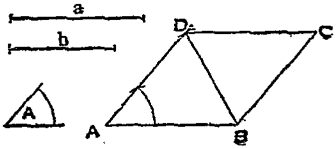
**作法** 1. 作 ∠DAB=∠A (§86).

2. 在 ∠DAB 一邊上取 AB=a (§39 的 1).

3. 以 B 爲中心 b 爲半徑,作弧,交他邊於 D. 作 BD (§260) (公理 13).

4. 通過 D 點作 DC∥AB, 通過 B 點作 BC∥AD (§100).

5. ∴ABCD 爲所求的□(§136).



(49)

**注意** 如已知 AB, ∠A, 及 AC, 可先作 ∠A 的補角 ∠B, 然後依上法作之.

### 50. 兩對角綫和對角線所成之角.

**設** 已知 AC=a, BD=b, AC, BD 相交於 E, 而

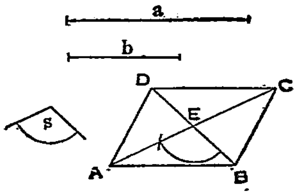
∠AEB=∠S.

**求作** ▱ABCD.

**作法** 1. 平分 a 及 b(§81).

2. 作 ∠AEB=∠S(§86).

3. 引長 AE 至 C, BE 至 D, 使 AE=EC=$\frac{1}{2}$a, BE=ED=$\frac{1}{2}$b (公理 17).



(50)

4. 聯 AB, BC, CD, DA, ∴ ABCD 爲所求的▱(§146).

## 習 題(敎科書第193—194頁)

作一梯形,已知:

1. 四邊.

**設** 已知 AB=a, BC=b, CD=c, DA=d.

**求作** 梯形 ABCD.

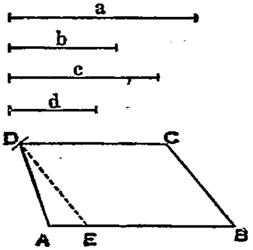
**分析** 先任意作一梯形 ABCD. 作 DE//BC, 知道 DE=BC, AE=AB−CD. 因此可得作法.

**作法** 1. 作 AB=a, 取 BE=c (§39 的 1).

2. 以 d, b, AE (=a−c) 爲三邊, 作 △ADE (§249 的 1).

3. 作 DC=c//AB (100).

4. 聯 BC (公理 13). ∴ ABCD 是所求的梯形(§136).



(1)

2. 二底邊和二下底角.

**設** 已知 AB=a, CD=c, 及 ∠A, ∠B.

**求作**　梯形ABCD.

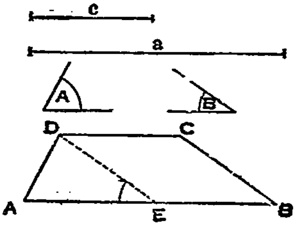
**分析**　先作草圖梯形ABCD,及DE//BC,知道DE=BC, ∠DEA=∠B, AE=AB−CD.因得作法.

**作法**　**1.** 作AB=a,取BE=c.(同上題的1).

**2.** 以∠A,∠B, AE(=a−c)作△ADE(§249的3).

**3.** 作DC//AB(§100)令DC=c.

**4.** 聯BC(公理13). ∴ABCD是所求的梯形(§136).



(2)

**3.** 二底邊,其他一邊,和一底角.

**設**　已知AB=a, CD=c, BC=b, ∠A.

**求作**　梯形ABCD.

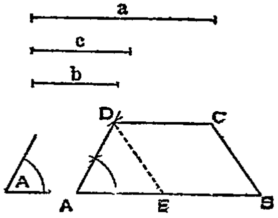
**分析**　先作草圖ABCD,及DE//BC,知道DE=BC, AE=AB−CD.因得作法.

**作法**　**1.** 作AB=a,取BE=c.

**2.** 以∠A, b, AE(=a−c)作△ADE(§249的5).

**3.** 作DC//AB(§100)令DC=c.

**4.** 聯BC. ∴ABCD是所求的梯形(§136).



(3)

**4.** 二底邊,和二對角綫.

**設**　已知AB=a, CD=b, AC=d, BD=d′.

**求作**　梯形ABCD.

**分析**　先作草圖梯形ABCD及兩對角綫AC, BD. 引長AB至E, 令BE=CD.

知道BECD=□. CE=BD. 而△ACE三邊都知道了.

因得作法.

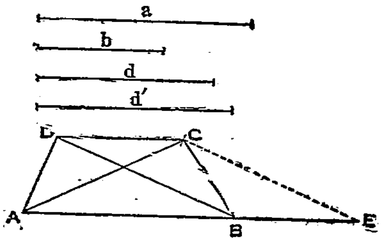
**作法**　1. 作直綫AE=a+b.

2. 以(a+b), d, d'爲三邊作△ACE(§249的1).

3. 通過C點作CD=b且//AB, BD//CE(§100).

4. 聯AD, BC(公理13).

∴ABCD爲所求的梯形(§136).



(4)

5. 一底邊,二對角綫和二對角線所成的角.

**設**　已知AB=a, AC=d, BD=d', AC, BD的交點爲E, 而∠AEB=∠S.

**求作**　梯形ABCD.

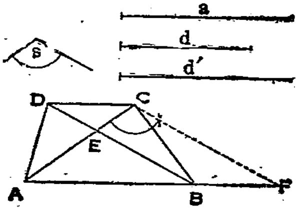
**作法**　1. 作△ACF, 令∠ACF=∠S, AC=d, CF=d'(§249的2).

2. 在AF內取AB=a(§39的1).

3. 作BD$\underline{\parallel}$CF(§100)(§39的1).

4. 聯AD, CD, BC(公理13).

**證**　∠AEB=∠ACF(§100)=∠S(作圖1).



(5)

6. 作二已知圓的外公切綫.

**設**　O, O'兩圓.

**求作**　AB, CD兩外公切綫.

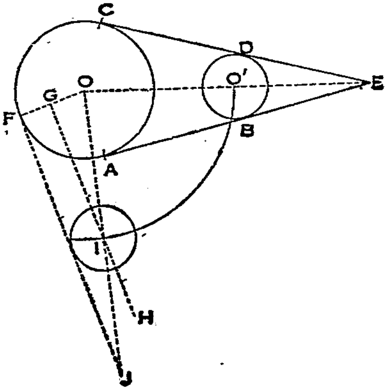
**作法**　**1.** 作O圓任意的半徑OF及F點上切綫FJ(§203).

**2.** 在OF上取GF=O′圓半徑(§39的1).

**3.** 通過G點作GH//FJ(§100).

**4.** 作聯心綫OO′引長之(§213)(公理17).

**5.** 以O爲中心，OO′爲半徑,作圓(公理18)交GH於I.



(6)

**6.** OI=OO′(§260).

**7.** 以I爲中心,O′半徑爲半徑,作圓,切於FJ(§262).

**8.** 引長OI,交FJ於J(公理17).

**9.** 在OO′綫上取OE=OJ(同2).

**10.** 以E爲中心,FJ爲半徑,作弧,交O圓於A,於C(§196).

**11.** 作AE,CE(公理13).切O圓於A,於C,切O′圓於B,於D(作圖10).

**12.** AB,CD是O,O′兩圓的外公切綫.

### 7. 作二已知圓的內公切綫.

**設**　O,O′兩圓.

**求作**　內公切綫AB,CD.

**作法**　**1.** 作O圓任意的半徑OF,及切綫GH切O圓於F點(§203).

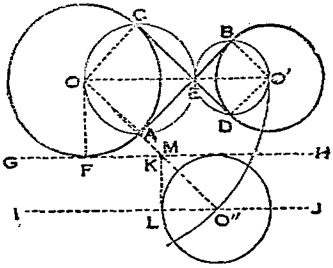
**2.** 以O′圓半徑爲距離,作IJ//GH,如KL=O′B(§262).

**3.** 以O爲中心OO′爲半徑作圓,交IJ於O″(§260).

**4.** 以$O'$圓半徑爲半徑, $O''$爲中心作圓,切於GH (作圖2).

**5.** 作$OO''$(公理13), 交GH於M.

**6.** 在$OO'$上取 $OE=OM$ (§39的1).



(7)

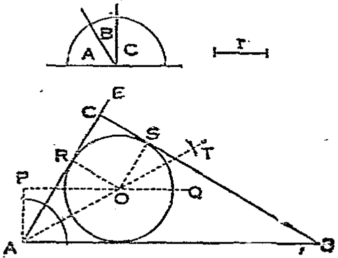
**7.** 作圓於 OE, $EO'$兩綫上(以他們爲直徑),交O圓於A於C, $O'$圓於B,於D (§196).

**8.** 聯AB, CD (公理13),他們便是所求的兩根內公切綫(§203)(§234).

### 8. 已知三個角,作一三角形,使外切於一已知圓.

**設** 已知△的三角A, B, C及O圓半徑r.

**求作** △ABC外切於O圓.



(8)

**作法** **1.** 作∠EAB=∠A (§86), 作AT平分之(§83), AT是到兩邊等距離的軌跡(§264).

**2.** 作PA=r⊥AB(§85),又作PQ//AB (§100),PQ是離AB等距離的軌跡(§262).

**3.** 兩軌跡相交於O, 以O爲中心, r之長爲半徑,作圓切於AE, AB兩邊(§265).

**4.** 作∠POR=∠B (§86), OS⊥OR (§85).

**5.** 作切綫於S, 交AB於B, AE於C (§204).

**6.** △ABC是外切於O圓的三角形(§212).

**9.** 求從一圓外一定點所作割綫的中點的軌跡.

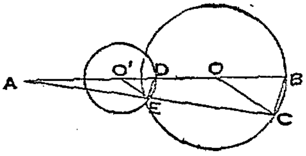
**設** O圓及其外一點A.

**求** AB, AC等割綫中點D, E等點的軌跡.

**求法** 1. 通過圓心O作割綫AB, 又通過A作任意的割綫AC, 他們一端割圓於B, 於C.

2. 聯BC及中點DE(公理13). 聯OC, 作$O'E /\!/ OC$ (§100).

3. $DE=\frac{1}{2}BC$, $O'E=\frac{1}{2}OC$(§153), $AD=BD$, $AE=CE$(題設), $\therefore AO'=O'O$ (§149).



(9)

4. $DO'=AD-AO'$, $BO=AB-AO=2AD-2AO'$, $\therefore DO'=\frac{1}{2}BO$(公理12).

5. 但$BO=CO$ (§178), $\therefore DO'=\frac{1}{2}OC$.

$\therefore DO'=O'E$.

6. D, E在一圓上(§179). ∴通過A點的割綫中點的軌跡,在以O'爲中心$\frac{1}{2}$O圓半徑爲半徑的圓周上.

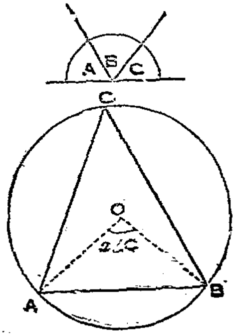
**10.** 已知三角形的三個角,作一三角形內接於一已知圓.

**設** O爲已知圓的心, ∠A, ∠B, ∠C爲三角形的三個角.

**求作** △ABC內接於圓.

**作法** 1. 作任意半徑OA.

2. 作中心角$\angle AOB=2\angle C$, 一邊交圓於B.



(10)

**3.** 聯 AB 弦.

**4.** 作 $\angle BAC=\angle A$. 一邊交圓於C.

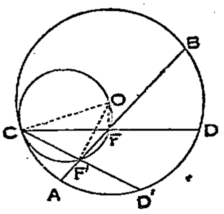
**5.** 聯BC, 則$\triangle ABC$即爲所求.

**11.** 從圓上一定點,作一弦,被一已知弦所二等分.

**設** 已知弦AB及圓內一點C.

**求作** CD及CD′弦交AB於F, F′. 使$CF=DF$, $CF'=D'F'$.

**作法** 1. 如圓心爲O, 聯CO (公理13).



(11)

2. 以CO爲直徑,作圓,交AB於F,F′ (§196).

3. 作CF,CF′,引長他們,交圓於D,於D′(公理13又17).

4. 作OF,OF′, $\therefore \angle CFO=\angle CF'O=$rt.$\angle$ (§234).

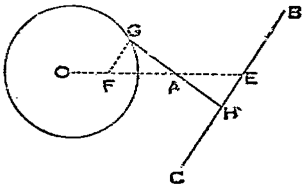
5. $OF\perp CD$, $OF'\perp CD'$, 故F,F′兩點各平分CD, CD′兩弦(§190).

**12.** 過一已知圓和一已知直綫間的一定點A, 作一直綫,止於圓及直綫,而被A所二等分.

**設** A點在O圓及直綫CB間,

**求作** GH通過A點,而令$GA=AH$.

**作法** 1. 聯AO, 引長A端交CB於E(公理13及17).



(12)

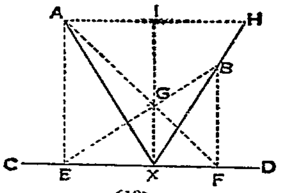
2. 在AO內取$AF=AE$ (§39的1).

3. 作FG//CB (§100) 交圓於G.

4. 作GA (公理13), 引長之交CB於H (公理17).

5. ∴ GA=AH (∵ △GAF≅△HAE, a.s.a=a.s.a.)

**13.** 二定點A和B,在直線CD的一側,求直線CD上一點X, 使∠AXC=∠BXD.



(13)

**作法** 1. 作AE⊥CD, BF⊥CD (§87).

2. 聯AF, BE (公理13), 交於G, 作GX⊥CD (§87).

3. 聯AX, BX (公理13).

4. ∴ ∠AXC=∠BXD.

**證** 引長XB至H,使HX=AX, 聯AH.

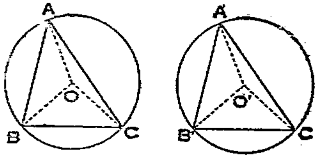
引長XG交AH於I.

△AXH是等腰三角形, XI是他的高.

∴ ∠AXG=∠BXG.

在兩直角內,各減去等角,所以餘角相等,而得(4)的等式.

**14.** 二全同三角形的二外接圓相等.



(14)

**設** △ABC≅△A′B′C′.

**求證** 其外接圓O圓=O′圓.

**證**

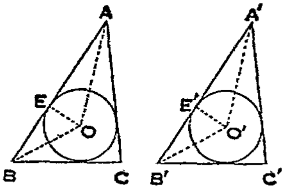
| 敍述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作AO, BO, CO,及A′O′, B′O′, C′O′. | 1. 兩點間可作一直綫(公理13). |

| | |
|---|---|
| 2. $AO=BO, A'O'=B'O'$. | 2. 同圓的半徑相等(§178). |
| 3. $\angle OAB=\angle OBA$,<br>$\angle O'A'B'=\angle O'B'A'$. | 3. 對等邊的角相等(§121). |
| 4. $\angle C=\angle C'$,<br>$\therefore \angle AOB=\angle A'O'B'$. | 4. 相當角.又 §227, §232. |
| 5. $180^\circ-\angle AOB$<br>$=180^\circ-\angle A'O'B'$. | 5. 等量減等量,餘量相等. |
| 6. $\therefore \angle OAB=\angle O'A'B'$<br>$=\angle OBA=\angle O'B'A'$ | 6. 由 3 與 5, 又公理 8. |
| 7. $AB=A'B'$. | 7. 相當邊相等. |
| 8. $\triangle AOB\cong\triangle A'O'B'$. | 8. a.s.a.=a.s.a. |
| 9. $\therefore OA=O'A'$, O圓$=$O′圓. | 9. 同 7. 又 §180. |

**15.** 二全同三角形的二內切圓相等.

設　$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$

求證　其內切圓 $O=O'$.



(15)

證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作 $OA, OB, O'A', O'B'$. | 1. 兩點間可作一直綫(公理13). |
| 2. $\angle OAB=\frac{1}{2}\angle A, \angle OBA=\frac{1}{2}\angle B, \angle O'A'B'=\frac{1}{2}\angle A', \angle O'B'A'=\frac{1}{2}\angle B'$. | 2. 見 §251 作法. |
| 3. 但 $\angle A=\angle A', \angle B=\angle B'$. | 3. §70. |
| 4. $\angle OAB=\angle O'A'B', \angle OBA=\angle O'B'A'$. | 4. 公理 8. |

| | |
|---|---|
| **5.** AB=A′B′. | **5.** §70. |
| **6.** △ABO≅△A′B′O′ | **6.** a.s.a.=a.s.a. |
| **7.** 作 OE, O′E′<br>則 OE⊥AB, O′E′⊥A′B′. | **7.** §204. |
| **8.** ∴ OE=O′E′. | **8.** 全同三角形的相當高相等. |
| **9.** ∴ O 圓=O′ 圓. | **9.** §180. |

**16.** 已知底邊和內切圓的半徑,求作一等腰三角形.

**設** 已知底BC=s, 內切圓半徑OD=r.

**求作** 等腰三角形ABC.

**作法** **1.** 作BC=s(§39的1).

**2.** 作BC的垂直平分綫AD(§82).

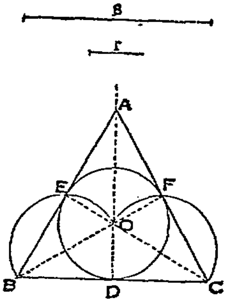
**3.** 在AD內取OD=r(§39的1).

**4.** 以O爲中心, r爲半徑,作圓切BC於D(§203).

**5.** 聯OB, OC(公理13).

**6.** 以OB, OC爲直徑,作半圓於其上,交O圓於E, 於F(§234).

**7.** 作BEA, CFA兩直綫,相交於A, ∴△ABC是所求的等腰三角形(§261).

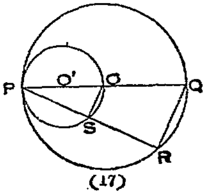


(16)

**17.** 一圓內切於半徑二倍大的圓上一點P,求證在大圓內過P點上諸弦,都被小圓所二等分.

**設** O′圓內切O圓於P, 而OP=2O′P.

**求證** OP=OQ, SP=SR.



(17)

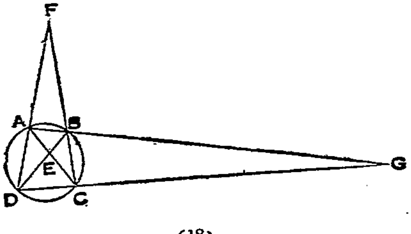
證

| 敘述 | 理由 |
|---|---|
| 1. 作聯心綫 OO′ 引長其兩端,至切點P及大圓的Q點. | 1. §213, §216, 公理17. |
| 2. 又從P點作PR弦,割小圓於S. | 2. §175. |
| 3. 聯OS, QR. | 3 公理13. |
| 4. $\angle PSO=\angle PRQ=$rt.$\angle$. | 4. §234. |
| 5. $\therefore OS/\!/QR$. | 5. §95. |
| 6. $OP=OQ$. | 6. §178. |
| 7. $\therefore SP=SR$. | 7. §149. |

**18.** 圓上四點 A, B, C, D 分圓成 6, 9, 10, 11 之比.求順次聯結四點,所作對角線,及延長二對邊交於圓外所成諸角的度數.

**設**　$\widehat{AB}:\widehat{BC}:\widehat{CD}:\widehat{DA}=6:9:10:11$.

**求**　$\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$, $\angle AEB$, $\angle BEC$, $\angle CED$, $\angle DEA$, $\angle DFC$, $\angle AGD$ 等角度數.



**答**

$$\left.\begin{aligned}
&\angle DAB\left(\text{度以}\frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}\right)=\frac{1}{2}(90^\circ+100^\circ)=95^\circ\\
&\angle ABC\left(\text{度以}\frac{1}{2}\overset{\frown}{ADC}\right)=\frac{1}{2}(100^\circ+110^\circ)=105^\circ\\
&\angle BCD\left(\text{度以}\frac{1}{2}\overset{\frown}{DAB}\right)=\frac{1}{2}(110^\circ+60^\circ)=85^\circ\\
&\angle CDA\left(\text{度以}\frac{1}{2}\overset{\frown}{ABC}\right)=\frac{1}{2}(60^\circ+90^\circ)=75^\circ
\end{aligned}\right\}\text{圓周角以其所夾半弧度量之(§232).}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\angle AEB=\angle CED\left(\text{度以}\frac{1}{2}(\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{AB})\right)=\frac{1}{2}(100^\circ+60^\circ)=80^\circ\\
&\angle BEC=\angle AED\left(\text{度以}\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AD})\right)=\frac{1}{2}(90^\circ+110^\circ)=100^\circ
\end{aligned}\right\}$$

兩弦在圓內相交之角,以所夾兩弧之半和量之(§236).

$$\left.\begin{aligned}
&\angle DFC\left(\text{度以}\frac{1}{2}(\overset{\frown}{DC}-\overset{\frown}{AB})\right)=\frac{1}{2}(100^\circ-60^\circ)=20^\circ\\
&\angle AGD\left(\text{度以}\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BC})\right)=\frac{1}{2}(110^\circ-90^\circ)=10^\circ
\end{aligned}\right\}$$

兩割綫在圓外所成之角,以所夾兩弧之半差量之(§238).

（上冊終）

新課程
標準適用

# 高中代數學

余介石編
一元五角二分

## 教育部審定

**教育部批語**：「……內容充實，理論精密，編制取材，兩均新穎，可供高中教科之用。……」

本書遵照新課程標準編輯，供高級中學第三、四、五學期算學課程敎學之用。全書共分十七章：第一至五章爲第一段，講授代數學的原理和方法；第六至十一章爲第二段，研究各種函數和方程式解法；第十二、十三章爲第三段，注重代數的實際問題、計算方法；末四章則爲高等代數大意。向來代數敎本，每易使學者囿於機械的算法而闇於理解，而於應用方面又往往忽視實際問題。本書力矯此二弊，於證題的步驟，題理的層次，都詳細指示，期使學者由理解而進於計算方法；於應用甚廣之方程式、對數、或然率等，無不說明其實用性，期使學者充分了解抽象算理的具體意義，增加其研究自然和社會現象的興趣與能力。全書所附習題，選擇和分配，亦經再四斟酌，務使已學習之理論和方法，於習題中均有應用之機會，尤爲特色。編者余介石先生爲中央大學算學講師、敎育部中小學課程標準修訂委員。先生不特對高等算學造詣甚深，且爲極留意中等算學敎育之一人。本其學識與經驗編成此書，出版以來，頗得各地高級中學敎師之贊許，誠爲今日高級中學唯一適用之敎本。

另編 **習題解答** 范際平 張伯康 編 一冊 四角四分

**中華書局出版**

中等算學研究會叢書

# 幾何作圖題解法（及其）原理

Juluis Petersen著　余介石譯

[illegible]

新課程標準適用 · 教育部審定

**高中三角學** 余介石編 七角六分

本書參考英、美、法、日各國三角學十餘種，并依據教育部頒布課程標準及江蘇省高中算學進度表編成，曾在南京各中等學校試用多次，結果，成績均極良佳。全書以角、函數、三角形三種基本觀念爲中心，分爲單元編製；材料豐富，而有彈性（有五分之一教材，可酌量省略）；理論精當，且甚明晰，誠爲時下高級中學最適宜之良好課本。

另編 **習題解答**

范際平 李修睦編

一册 二角四分

**高中解析幾何學** 黃泰編 六角四分

本書遵照新課程標準編輯，供高級中學第三學年算學課程教學之用。內容以函數變跡爲主，自一次、二次、高次以至超越函數，就種種變跡詳細討論，說理明白透澈，易教易學。對於形數的基本關係，書中尤充分介紹，以爲進修高等算學的階梯；並與代數、幾何、三角各分科注意聯絡，以期形成一貫的系統。書中所附習題，分配極爲適宜。

另編 **習題解答**

丘侃編

一册 一元二角八分

**中華書局出版**

中1373(全)25,8.

三S平面幾何學習題詳解

朱文熊著

全二冊

㈠一元二角八分　㈡一元七角六分

本書依照教科書體例，用最新之證明法，將本局出版之高級中學用「三S平面幾何學」書中所列習題，一一詳細證明，如有例外或幾種作圖法時，皆彙收並采，使讀者可以融會貫通。習題在某節，必以該節以前之定理證之，且所用定理，均極淺顯明白，凡深奧難解之定理，概不引用，以節省學者腦力，俾便易於領悟。遇習題有二種以上之證明者，並列詳略二法，以備教授時可以任意採用。故凡採用「三S平面幾何學」者，則無論教師或學生均有購備本書之必要。

中華書局出版

中1363(全)25,8.

民國二十四年四月發行
民國二十五年十一月三版

中等學校用
三S平面幾何學習題詳解（全二冊）
◎上冊實價國幣一元二角八分
（郵運匯費另加）

有著作權
不准翻印

著者　朱文熊
發行者　中華書局有限公司　代表人路錫三
印刷者　（上海澳門路）中華書局印刷所
總發行處　（上海福州路）中華書局發行所
分發行處　各埠中華書局

（八六五五）

340

註冊商標