3

三角學

(2)

朱鳳豪 編著

龍門聯合書局發行

中央人民政府出版總署 徵集圖書樣本表格	圖書分類： 1950年　月　日收到(註1)		
書　　名	三角学		
原書名(註2)			
作　　者		譯　　者	
編　　者	朱凤豪 余源庆		叢書第　種
出版者(註3)	龍门联合书局　上海广东北路340弄3号		
印刷者(註4)	中国科学公司		
發行者(註5)	龍门联合书局　上海河南路210号		

本書連封面共 190 面 32 開本．印 2,000 冊

1949年 8 月初版(初版於19　年　月在　出版)(註6)

基本定價： 7 元　(另有　裝本定價　元)

1950年 2 月 10 日繳送

繳送者(簽名) 龍門

註1. 此處不必填寫. 註2. 譯書須填外文原書名.
註3.4.5. 填寫機關名及所在地. 註6. 重版書須填寫此項.

三角學

余源慶
朱鳳豪 編著
余源熙

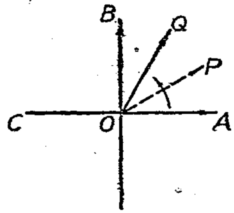
龍門聯合書局

目　　錄

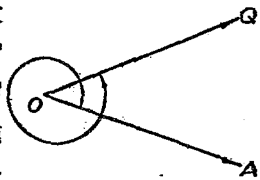
第　一　章

角之意義及量法

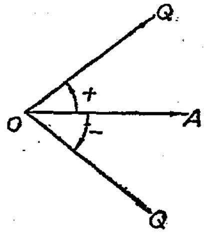
1. 角之意義　關於角及直角等之意義在初等幾何學中均已講過。惟幾何學中所論之角祇限於小於 360° 者，在三角學中須加以推廣。茲定角之意義如下：



設直線 OA 之位置一定，今有另一直線 OP，當初與 OA 相合，今繞 O 點，反鐘針方向旋轉至一定位置 OQ，則成角 AOQ。OA 為初線，OP 為母線，OQ 為終線。角之量視 OP 旋轉之多少程度而定。設 OP 旋轉至與 OA 垂直之位置 OB 時，則角 AOB 為一直角。設 OP 旋轉至與 OA 之方向相反之位置 OC 時，則角 AOC 為兩直角。設 OP 旋轉一全周至與 OA 之位置相合時，則此角為一周角(即四直角)。如 OP 經過一周後再繼續旋轉時，則 $\angle AOQ$ 之量可大於四直角而為任何之值。



習慣上，母線反鐘針方向旋轉所生之角取正值(如 $\angle AOQ$)，母線循鐘針方向旋轉所生之角取負值(如 $\angle AOQ'$)。負角



註：通常所稱之角除特別聲明者外俱指小於 360° 之正角而言。

之絕對值亦可大於四直角而爲任何之值.

2. 角之量法 量角之單位有三種制度,今分述於下:

I. 六十分制 分一直角爲 90 等分,每等分爲一度. 分一度爲 60 等分,每等分爲一分. 分一分爲 60 等分,每等分爲一秒. 如一角之量爲 98 度 14 分 32 秒,記爲 $98°14'32''$.

$$1\text{直角}=90°$$
$$1°=60'$$
$$1'=60''$$

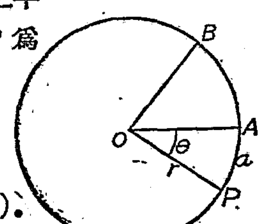
六十分制爲通常所用量角之法,故亦稱實用制.

II. 百分制 分一直角爲 100 等分,每等分爲一個百分度. 分一個百分度爲 100 等分,每等分爲一個百分分. 分一個百分分爲 100 等分,每等分爲一個百分秒. 如一角之量爲 71 百分度 86 百分分 49 百分秒,記爲 $71^g86^{\backprime}49^{\backprime\backprime}$.

$$1\text{直角}=100^g$$
$$1^g=100^{\backprime}$$
$$1^{\backprime}=100^{\backprime\backprime}$$

百分制創自法國,實際上用者甚少.

III. 弧度制 如圖 O 爲圓心, $\angle AOB$ 爲圓心角, $\widehat{AB}$ 爲此角所截之弧. 設 $\widehat{AB}$ 之長等於此圓之半徑,則 $\angle AOB$ 稱爲一弧度. 今設 $\angle AOP$ 爲 θ 弧度, $\widehat{AP}$ 之長爲 a, 又半徑 $OA=r$,



則 $$\frac{\theta}{\angle AOB}=\frac{\widehat{AP}}{\widehat{AB}}$$

(同圓中圓心角之比等於其所對弧之比).

但 $\angle AOB=1$, $\widehat{AB}=r$,

$$\theta=\frac{a}{r} \qquad \text{(公式一)}$$

一周角所對之弧爲全圓周，卽 $2\pi r$。

故　　$1\text{ 周角}=\frac{2\pi r}{r}=2\pi$ 弧度。

弧度制在高等數學中用之，故亦稱理論制。

如用直角爲標準，三種制度之關係可以下式表明之：

$$90^\circ=100^g=\frac{\pi}{2}\text{弧度}$$

卽　　$180^\circ=200^g=\pi$ 弧度。　　(1)

設有一角，其量以六十分制表之爲 D（度），百分制表之爲 G（百分度），弧度制表之爲 R（弧度），則

$$D^\circ=G^g=R\text{ 弧度} \qquad (2)$$

$\frac{(2)}{(1)}$，　$$\frac{D}{180}=\frac{G}{200}=\frac{R}{\pi} \qquad \text{(公式二)}$$

上之公式爲三種制度之關係式，卽爲 D, R, G 互求之根據。從公式二，推得

$$D=\frac{180}{\pi}\cdot R, \qquad R=\frac{\pi}{180}\cdot D$$

此爲由弧度制化六十分制及由六十分制化弧度制之簡式。

註：1. $\pi=3.1415926535\cdots\cdots$ 爲一無盡之不循環小數，通常只用四位小數 3.1416，或用分數 $\frac{22}{7}$ (3.14) 及 $\frac{355}{113}$ (3.14159) 代之。

2. 習慣上以 π 表弧度時，π 之値常不代入。如 2π（弧度）不寫 6.2832（弧度）。

3. 用 π 弧度爲記角之單位時，弧度兩字通常可略去不寫，如一角爲 $\frac{\pi}{4}$ 弧度，通常卽簡寫爲 $\frac{\pi}{4}$。

幾個重要角之D與R相當值列表於下：

D	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
R	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

又關於D, G, R之重要相當值為：

D	1°	0.9°	$\frac{180°}{\pi}=$ 57°.2957795 (57°17′44″.8)
G	$1^g.111111$	1^g	$63^g.661972$
R	$\frac{\pi}{180}=0.017453$ 弧度	0.015708 弧度	1 弧度

例一： 變$\frac{\pi}{12}$弧度及1.76弧度為六十分制（設$\pi=\frac{22}{7}$）。

【解】 從 $\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}$，　得 $D=\frac{180}{\pi}\cdot R$，

1.　令　$R=\frac{\pi}{12}$，　$\therefore\ D=\frac{180}{\pi}\times\frac{\pi}{12}=15°$

2.　令　$R=1.76$，　$\therefore\ D=\frac{180}{\pi}\times 1.76$

$$=\frac{7\times180}{22}\times1.76$$

$$=100°.8$$

$$=100°48'.$$

例二： $-945°$ 及 $64°11'33''$ 相當幾弧度？（設$\pi=3.1416$）

【解】 從 $\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}$，　得 $R=\frac{\pi}{180}\cdot D$

1. 令 $D=-945$, $\therefore\ R=\frac{\pi}{180}(-945)=-\frac{21}{4}\pi$.

2. 令 $D=64°11'33''=64+\frac{11}{60}+\frac{33}{3600}$度$=64°.1925$,

$$\therefore\ R=\frac{\pi}{180}\times 64.1925=\frac{3.1416}{180}\times 64.1925$$
$$=1.1204\text{ 弧度}.$$

例三: $50^g50^{\backprime}50^{\backprime\backprime}$相當幾度?又幾弧度?

【解】 $50^g50^{\backprime}50^{\backprime\backprime}=50+\frac{50}{100}+\frac{50}{10000}$百分度

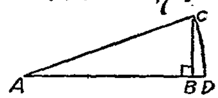
$=50.505$百分度.

從 $\frac{D}{180}=\frac{G}{200}=\frac{R}{\pi}$,得

1. $D=\frac{180}{200}G=\frac{9}{10}\times 50.505=45°.4545=45°27'16''.2$,

2. $R=\frac{\pi}{200}G=\frac{\pi}{200}\times 50.505=0.7933$ 弧度.

例四: 從平地一點 A 測得遠處一人所張之角爲 $1°30'$, 設此人身高五尺五寸, 問此人離 A 處若干尺 (設 $\pi=\frac{22}{7}$)?



【解】 設 BC 表遠處一人之身高, 今以 A 爲中心, AC 爲半徑作弧交 AB 之延長線於 D, 因 $\angle CAD=1°30'$ 之量甚小, 故 D, B 幾可合一. 所以 BC 可視作以 A 爲中心之一弧, 從公式一得

$$\theta=\frac{BC}{AB}$$

$$\therefore\qquad AB=\frac{BC}{\theta}\qquad(\theta\text{之單位爲弧度})$$

令 $BC=5$尺5寸$=5.5$尺,

$$\theta=1°30'=\frac{3}{2}\text{度}=\frac{3}{2}\times\frac{\pi}{180}\text{弧度}$$

$$=\frac{3}{2}\times\frac{22}{180\times7}\text{弧度}=\frac{11}{420}\text{弧度}.$$

$\therefore\quad AB=5.5\div\frac{11}{420}=210$

答 此人離 A 處約 210 尺.

習 題 一

1. 填滿下表:

D	$210°$	$225°$		$270°$		$315°$	
R	$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{4}{3}\pi$		$\frac{5}{3}\pi$		$\frac{1}{6}\pi$.

2. 下列諸角試以六十分制表之.

(a) $32^g32^{\backprime}32^{\backprime\backprime}$ (b) $1^g2^{\backprime}3^{\backprime\backprime}$

(c) 10π 弧度 (d) -1.5 弧度

3. 下列諸角,試以弧度制表之.

(a) $1000°$ (b) $128°35'42''$

(c) $32^g32^{\backprime}32^{\backprime\backprime}$ (d) $1^g2^{\backprime}3^{\backprime\backprime}$

4. 一螺旋槳每秒旋轉 20 次,則轉過 $10°$ 需時若干? 又轉過 10 弧度需時若干?

5. 二角之和為 $100°$, 差為 100^g, 問此二角以弧度制量之各為若干?

6. 四邊形之一角為 $120°$,一角為 120^g,一角為 $\frac{\pi}{120}$. 問第四角為若干度?

7. 已知三角形之三角成等差級數, 且最小角之度數與最大角弧度數之比為 $60:\pi$, 求各角之度數.

提示：設三角之度數爲 $x-y, x, x+y$.

8. 求正五邊形及正十二邊形每一內角之弧度數.

提示：正 n 邊形每一內角 $=\frac{n-2}{n}180°$.

9. 兩正多邊形邊數之比爲 5:4，每一內角之差爲 $\frac{\pi}{20}$，求兩多邊形之邊數.

10. 時鐘長短兩針在 12 點 1 刻時所成之角爲幾度? 合幾弧度?

提示：長針走 15 分格時，短針走 $\frac{5}{4}$ 分格.

11. 一圓之半徑爲 1 尺，則此圓中長 1 尺之弦所對之弧長若干?

12. 一扇形之半徑爲 9 寸，中心角爲 35°，求扇形之周長.$(\pi=\frac{22}{7})$.

13. 一扇形周圍之長等於同半徑半圓周之長，則此扇形之角爲幾度幾分幾秒?

提示：設此扇形之中心角爲 θ 弧度，又其半徑爲 r.

14. 一鐵道之轉彎處恰成一圓弧，半徑爲 1 里，一列車以每時 40 里之速度行駛其上，問在 10 秒間轉過幾度?

15. 塔高 110 尺，塔對於觀察者之眼所張之角爲 9′，求觀察者與塔之近似距離.

16. 離樹 420 尺處一點測得樹所張之角爲 45′，求樹高.$(\pi=\frac{22}{7})$.

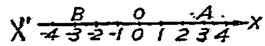
17. 太陽離地球 92000000 哩，其直徑對於地球所張之角爲 32′，試證太陽之直徑爲 856700 哩.

18. 月亮離地球 240000 哩，其直徑爲 2165 哩，試證月亮直徑對於地球所張之角爲 31′.

第 二 章

垂 直 座 標 系

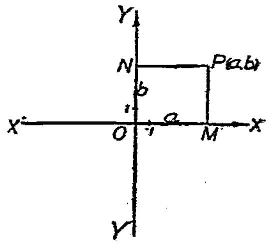
3. 有向量線　一直線$X'X$，其方向爲從左至右如下圖箭頭所表示者．在線上取一點O,稱爲原點，再取一線段爲長之單位．規定從O起向右量者爲正，向左量者爲負．



此$X'X$線稱爲有向量線．在此線上，所有正或負之實數俱可用點表現出之．如上圖中，A點表$(+3)$，B點表(-3)，O點表(0)．

B，A兩點間之距離爲6．BA之方向與$X'X$之方向相同，故記$BA=+6$（簡記爲6），又AB之方向與$X'X$之方向相反，則記$AB=-6$．

4. 垂直座標　設兩有向量線$X'X$，$Y'Y$互相直交，又設其交點O爲兩線之共同原點，如右圖所表示者，稱爲垂直座標系．O點稱爲此座標系之原點．$X'X$稱爲橫軸（或X軸），其方向爲自左至右，$Y'Y$稱爲縱軸（或Y軸），其方向爲自下至上．



$X'X$，$Y'Y$分一平面爲四部分，稱爲四個象限．在XOY內者爲第一象限，在$X'OY$內者爲第二象限，在$X'OY'$內者

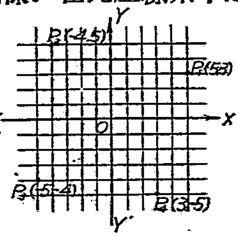
註：1．垂直座標又稱直角坐標．

2．兩軸上所取之單位，通常用相等之長度．

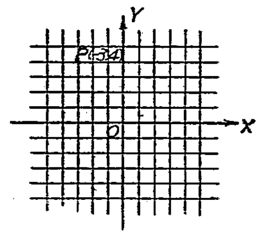
3．圖上X'，Y'兩字，可以略去不寫．

爲第三象限,在 XOY' 內者爲第四象限.

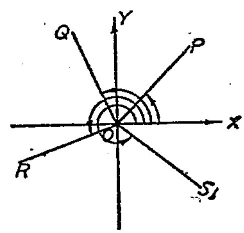
在此座標系中設有一點 P,作 MP 平行於 Y 軸,又作 NP 平行於 X 軸. P 與 Y 軸之距離,在 X 軸上量之,今爲 OM。向右量者爲正,向左量者爲負。P 與 X 軸之距離在 Y 軸上量之,今爲 ON. 向上量者爲正,向下量者爲負. 設 OM 之長爲 x, ON 之長爲 y,則記此點爲 $P(x, y)$。x 稱爲 P 點之橫標, y 稱爲 P 點之縱標, (x, y) 稱爲 P 點之座標. 在此座標系中之任意一點可以代表一對實數.



一點座標之符號在第一象限內者爲(+,+),第二象限內者爲(−,+),第三象限內者爲(−,−),第四象限內者爲(+,−)。如右圖中之 $P_1(5, 3)$, $P_2(-4, 5)$, $P_3(-5, -4)$, $P_4(3, -5)$ 諸點。



一點之位置可如下之法決定之:設求點$(-3, 4)$,先在 X 軸上向左第三格處(因 $x=-3$)作一線平行於 Y 軸,再在 Y 軸上向上第四格處(因 $y=+4$)作一線平行於 X 軸. 兩線之交點 P,即爲所求之點. 故任意一對實數,作爲橫,縱兩座標時,在此種座標系中,可以決定一點.



5. 象限角　設一角之頂在原點,初線合於 OX,終線在第一象限內者,如 $\angle XOP$,稱爲第一象限角,終線在第二象限內者,如 $\angle XOQ$,稱爲第二象限

角，終線在第三象限內者，如 $\angle XOR$，稱爲第三象限角，終線在第四象限內者，如 $\angle XOS$，稱爲第四象限角．若母線旋轉之方向爲循鐘針方向時，亦視終線在何象限內，而稱爲此象限之角。如負角 XOS，爲第四象限角等等．

在第一象限內一角之大小爲從 $0°$ 至 $90°$，或 $360°$ 至 $450°$，……或 $-270°$ 至 $-360°$，……等等．

茲將各象限內角之大小，列表於下以便查考：

象限	I	II	III	IV
角之大小	0°——90°	90°——180°	180°——270°	270°——360°
	360°——450°	450°——540°	540°——630°	630°——720°
	………………	………………	………………	………………
	-270°——-360°	-180°——-270°	-90°——-180°	0°——-90°
	………………	………………	………………	………………

習題二

1. 作出下列各點：$(2,1)$；$(2,-1)$；$(-2,1)$；$(-2,-1)$．
2. 作出下列各點：$(-1,0)$；$(\sqrt{2},-\sqrt{3})$；$(\pi,\frac{1}{2}\pi)$．

   提示：作圖時無理數可取近似值，如 $\sqrt{2}=1.4$ $\pi=3.1$ 等等．
3. 設 P 之座標爲 (x,y)，OP 之長爲 r，試證 $r^2=x^2+y^2$．
4. 在第二題中求各點與原點之距離．
5. 試定下列諸角終線所在象限：—

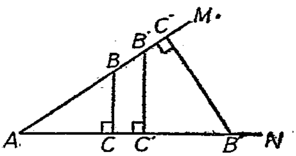
   (a) $1000°$　　(b) $-400°$　　(c) $\frac{4}{3}\pi$

   (d) $\frac{14}{3}\pi$　　(e) $-\frac{3}{4}\pi$　　(f) $-1234°$

第三章

角之函數

6. 角之八函數 在定角 MAN 之一邊 AM 上取一點 B，作 BC 垂直於他邊 AN 上。今稱 CB 爲 A 角之對線，AC 爲 A 角之鄰線，AB 爲 A 角之斜線。



今設在 AM 上另取一點 B'，作 $B'C'$ 垂直於 AN，則 rt. $\triangle AC'B'$，ACB 中一銳角共有，故兩形相似；

$$C'B'/AC'=CB/AC\ (\text{對線/斜線}).$$

再設在 AN 上取任一點 B''，作 $B''C''\perp AM$，

則 $$\text{rt. } \triangle AC''B'',\ ACB \text{ 亦相似}.$$

$$\therefore\quad C''B''/AC''=CB/AC\ (\text{對線/斜線}).$$

故知若 A 角之量一定，則 $\dfrac{\text{對線}}{\text{斜線}}$ 之比值始終不變。

從對線，鄰線，斜線三者之中，任取兩者爲比，共可得六種比值。設角 A 之量一定時，同理可推得其餘五種比值亦均隨之不變。爲便利起見，定此六種比值之名稱如下：

$\dfrac{\text{對線}}{\text{斜線}}$ 爲 A 角之正弦(Sine)，簡寫爲 $\sin A$。

$\dfrac{\text{鄰線}}{\text{斜線}}$ 爲 A 角之餘弦(Cosine)，簡寫爲 $\cos A$。

$\dfrac{\text{對線}}{\text{鄰線}}$ 爲 A 角之正切(Tangent)，簡寫爲 $\tan A$ (或 $\operatorname{tg} A$)。

$\dfrac{\text{鄰線}}{\text{對線}}$為 A 角之**餘切** (Cotangent)，簡寫為 cot A.

$\dfrac{\text{斜線}}{\text{鄰線}}$為 A 角之**正割** (Secant)，簡寫為 sec A.

$\dfrac{\text{斜線}}{\text{對線}}$為 A 角之**餘割**(Cosecant)，簡寫為csc A(或 cosec A).

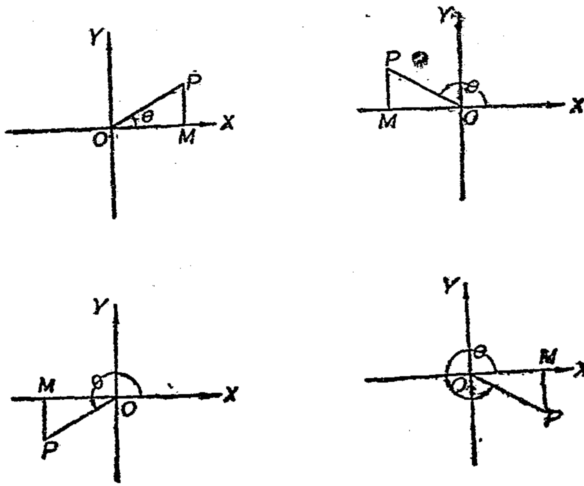
除上面六種名稱外，尙有不常用之兩種如下：

$1-\cos A$ 為 A 角之**正矢**(versed sine)，簡寫為 vers A.

$1-\sin A$ 為 A 角之**餘矢**(coversed sine)，簡寫為 covers A.

上面八值通常稱為角 A 之八函數.

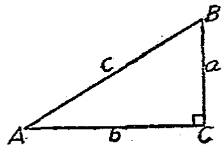
7. 廣義之三角函數　今以角 O 之角頂置於垂直座標系之原點，幷令此角之初線合於 OX. 又在終線上取一點 P, 作 MP 垂直於 X 軸，則 P 之縱標 MP 為角 O 之對線；P 點之橫標 OM 為角 O 之鄰線；OP 為斜線.



故
$$\sin\theta=\frac{MP}{OP}=\frac{P\text{點之縱標}}{\text{斜線}}=\frac{y}{r},$$
$$\cos\theta=\frac{OM}{OP}=\frac{P\text{點之橫標}}{\text{斜線}}=\frac{x}{r},$$
$$\tan\theta=\frac{MP}{OM}=\frac{P\text{點之縱標}}{P\text{點之橫標}}=\frac{y}{x},$$
$$\cot\theta=\frac{OM}{MP}=\frac{P\text{點之橫標}}{P\text{點之縱標}}=\frac{x}{y},$$
$$\sec\theta=\frac{OP}{OM}=\frac{\text{斜線}}{P\text{點之橫標}}=\frac{r}{x},$$
$$\csc\theta=\frac{OP}{MP}=\frac{\text{斜線}}{P\text{點之縱標}}=\frac{r}{y}.$$

今角 θ 之終線在第一象限內時，P 點之橫標，縱標均爲正。在第二象限內時 P 點之橫標爲負，縱標爲正。在第三象限內時 P 點之橫標，縱標均爲負。在第四象限內時 P 點之橫標爲正，縱標爲負。但 OP 不論其所在之象限，其值恆視爲正。視角 θ 之終線所在象限之不同，其六函數之値，或爲正，或爲負。在第一象限內，六函數之値全爲正。在第二象限內，祇有正弦餘割爲正，其他均爲負。在第三象限內，祇有正切，餘切爲正，其他均爲負。在第四象限內，祇有餘弦，正割爲正，其他均爲負。爲便於記憶起見列表於下：

符號 象限 / 函數	I	II	III	IV
正弦（及餘割）	+	+	−	−
餘弦（及正割）	+	−	−	+
正切（及餘切）	+	−	+	−



8. 銳角之三角函數 在直角三角形 ABC 中,設 C 爲直角,又設對角頂 A,B,C 之邊各爲 a,b,c, 則因 $CB\perp AC$, 故得銳角 A 之函數爲

$$\sin A=\frac{a}{c},\qquad \csc A=\frac{c}{a},$$
$$\cos A=\frac{b}{c},\qquad \sec A=\frac{c}{b},$$
$$\tan A=\frac{a}{b},\qquad \cot A=\frac{b}{a}.$$

又銳角 B 之函數爲

$$\sin B=\frac{b}{c},\qquad \csc B=\frac{c}{b},$$
$$\cos B=\frac{a}{c},\qquad \sec B=\frac{c}{a},$$
$$\tan B=\frac{b}{a},\qquad \cot B=\frac{a}{b}.$$

例一: 設在直角三角形 ABC 中 $a=3$, $c=5$, 求角 A 之六函數.

【解】 令 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$,

$$\therefore\quad \sin A=\frac{a}{c}=\frac{3}{5},\qquad \csc A=\frac{c}{a}=\frac{5}{3},$$
$$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{4}{5},\qquad \sec A=\frac{c}{b}=\frac{5}{4},$$
$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{3}{4},\qquad \cot A=\frac{b}{a}=\frac{4}{3}.$$

註: 1. 通例,直角頂寫 C. 對此角之邊寫 c, 對 A 角之邊寫 a, 對 B 角之邊寫 b,

2. 非必要時,無理數不必寫成小數.但必須化爲最簡根數.

例二： 設在直角三角形 ABC 中，$a=3, b=\sqrt{7}$，求 B 角之六函數。

【解】 今　$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+7}=\sqrt{16}=4$,

$$\therefore\quad \sin B=\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{7}}{4},\qquad \csc B=\frac{c}{b}=\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{4}{7}\sqrt{7},$$

$$\cos B=\frac{a}{c}=\frac{3}{4},\qquad \sec B=\frac{c}{a}=\frac{4}{3},$$

$$\tan B=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{7}}{3},\qquad \cot B=\frac{a}{b}=\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{3}{7}\sqrt{7}.$$

例三： 在直角三角形 ABC 中，設 $a=\sqrt{m^2+nm}$，$b=\sqrt{n^2+mn}$，求 A 角之六函數。

【解】 今 $c^2=a^2+b^2=m^2+nm+n^2+mn=(m+n)^2$,

$$\therefore\qquad c=m+n$$

故　$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{m^2+nm}}{m+n},\ \cos A=\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{n^2+mn}}{m+n},$$

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{m^2+nm}}{\sqrt{n^2+mn}}=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{n}\sqrt{mn},$$

$$\cot A=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{n^2+mn}}{\sqrt{m^2+nm}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}=\frac{1}{m}\sqrt{mn},$$

$$\sec A=\frac{c}{b}=\frac{m+n}{\sqrt{n^2+mn}}=\frac{m+n}{n(m+n)}\sqrt{n^2+mn}$$

$$=\frac{1}{n}\sqrt{n^2+mn},$$

$$\csc A=\frac{c}{a}=\frac{m+n}{\sqrt{m^2+mn}}=\frac{m+n}{m(m+n)}\sqrt{m^2+mn}$$

$$=\frac{1}{m}\sqrt{m^2+mn}.$$

例四: 在直角三角形 ABC 中,設 $c=2a$, 求 B 角六函數之值。

【解】 今 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{4a^2-a^2}=a\sqrt{3}$,

$$\therefore\quad \sin B=\frac{b}{c}=\frac{a\sqrt{3}}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos B=\frac{a}{c}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2},$$

$$\tan B=\frac{b}{a}=\frac{a\sqrt{3}}{a}=\sqrt{3},$$

$$\cot B=\frac{a}{b}=\frac{a}{a\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{3},$$

$$\sec B=\frac{c}{a}=\frac{2a}{a}=2,$$

$$\csc B=\frac{c}{b}=\frac{2a}{a\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

***例五:** 在直角三角形 ABC 中,設 $a-b=\frac{1}{4}c$, 求 $\sin A$ $\tan A$ 及 $\sec A$ 之值.

【解】 今 $a-b=\frac{1}{4}c$ ……………………(1)

又 $a^2+b^2=c^2$ ……………………(2)

$(2)-(1)^2$, $2ab=\frac{15}{16}c^2$ ……………………(3)

$(2)+(3)$, $(a+b)^2=\frac{31}{16}c^2$

$\therefore$ $a+b=\frac{\sqrt{31}}{4}c$ ……………(4) (負值不合)

從(4),(1)得， $a=\frac{1}{8}(\sqrt{31}+1)c \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

$$b=\frac{1}{8}(\sqrt{31}-1)c \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

從(5)， $\sin A=\frac{a}{c}=\frac{1}{8}(\sqrt{31}+1)$.

(5)÷(6)， $\tan A=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{31}+1}{\sqrt{31}-1}=\frac{32+2\sqrt{31}}{30}$

$$=\frac{1}{15}(16+\sqrt{31}).$$

從(6)， $\sec A=\frac{c}{b}=\frac{1}{\frac{1}{8}(\sqrt{31}-1)}=\frac{8(\sqrt{31}+1)}{30}$

$$=\frac{4}{15}(\sqrt{31}+1).$$

習題三

1. 在下表中試填出各角終邊所在之象限，並定各函數值之正負：

角	$\frac{1}{3}\pi$	1000°	$-\frac{2}{3}\pi$	-705°	$\frac{3}{4}\pi$
終邊所在象限	I				
正弦	+				
餘弦	+				
正切	+				

2. 在直角三角形 ABC 中：

(a) 已知 $a=5$, $b=12$, 求 $\angle A$ 之六函數。

(b) 已知 $a=9$, $c=41$, 求 $\angle B$ 之六函數。

(c) 已知 $a=2$, $c=\sqrt{13}$, 求 $\angle A$ 之六函數。

(d) 已知 $b=m^2-n^2$, $c=m^2+n^2$, 求 $\angle A$ 之六函數。

(e) 已知 $a=3$, $b=4$, 求 $\sin^2 A+\cos^2 A$ 之值。

(f) 已知 $a=m$, $b=n$, 求 $\sin^2 B+\cos^2 B$ 之值。

(g) 已知 $a=8$, $c=17$, 求 $\dfrac{\sin B}{\cos B}$ 及 $\tan B$ 之值。

(h) 已知 $a=m$, $b=n$, 求 $\dfrac{\sin A}{\cos A}$ 及 $\tan A$ 之值。

(i) 已知 $b=16$, $c=65$, 求 $\sin A$ 及 $\cos B$ 之值。

(j) 已知 $b=m$, $c=n$, 求 $\sin A$ 及 $\cos B$ 之值。

(k) 已知 $a=2b$, 求 $\angle A$ 之六函數。

*(l) 已知 $a+b=\dfrac{5}{4}c$, 求 $\sin A$, $\tan A$ 及 $\sec A$ 之值。

3. 連接正方形 $ABCD$ 之頂點 A 與邊 BC 之中點 E, 試求 $\angle EAB$ 之六函數。

4. 在四邊形 $ABCD$ 內, 對角線 AC 與 AB 及 CD 均垂直。已知 $AB=15$, $AC=36$, $AD=85$, 求 $\sin ABC$, $\sec ACB$, $\cos CDA$ 及 $\csc DAC$ 之值。

5. 設直角三角形 ABC 中, 斜邊 AB 長 4 寸, 又 AC 長 $(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ 寸, 求 $\sin A$ 及 $\tan B$ 之值。

6. 設直角三角形中一銳角之正切爲 $\dfrac{3}{4}$, 周長爲 24 寸, 求斜邊之長。

提示: $\tan A=\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{4}$。 令 $a=3k$, $b=4k$。

9. 餘角函數 在直角三角形 ABC 中，A，B 互為餘角，

即 $$A+B=90^\circ \qquad \therefore \quad B=90^\circ-A.$$

今 $$\sin A=\frac{a}{c}=\cos B=\cos(90^\circ-A),$$

$$\cos A=\frac{b}{c}=\sin B=\sin(90^\circ-A),$$

$$\tan A=\frac{a}{b}=\cot B=\cot(90^\circ-A),$$

$$\cot A=\frac{b}{a}=\tan B=\tan(90^\circ-A),$$

$$\sec A=\frac{c}{b}=\csc B=\csc(90^\circ-A),$$

$$\csc A=\frac{c}{a}=\sec B=\sec(90^\circ-A).$$

故一角之正弦，餘弦互為正餘函數，今設 $\sin A$ 代以 $\mathrm{Fun}\ A$，則其餘函數 $\cos A$ 可以 co-Fun A 代之，又設 $\cos A$ 代以 $\mathrm{Fun}\ A$，則其餘函數 $\sin A$ 亦可以 Co-Fun A 代之。同理 $\tan A$，$\cot A$ 互為正餘函數，$\sec A$，$\csc A$ 亦互為正餘函數．故上面六個公式可以一式代之如下：

$$\mathbf{Fun}\ A=\mathbf{co\text{-}Fun}(90^\circ-A). \qquad \text{(公式三 } A\text{)}$$

如用弧度作角之單位，則上式為

$$\mathbf{Fun}\ A=\mathbf{co\text{-}Fun}\left(\frac{\pi}{2}-A\right). \qquad \text{(公式三 } B\text{)}$$

即一角之正函數，等於其餘角之餘函數．利用上面之公式，凡大於 45° 角之函數，均可化為小於 45° 之角函數．

如 $$\sin 60^\circ=\cos(90^\circ-60^\circ)=\cos 30^\circ,$$

$$\cos\frac{5}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{12}.$$

例: 設 A 爲比 45° 小之銳角，$\cos(A+45^\circ)=\sin 2A$，求A之值。

【解】 $\because \quad \sin 2A=\cos(90^\circ-2A)$,

$\therefore \quad \cos(A+45^\circ)=\cos(90^\circ-2A)$,

$\therefore \quad A+45^\circ=90^\circ-2A$,

$\therefore \quad 3A=45^\circ, \quad \therefore \quad A=15^\circ$.

習題四

1. 化下列各角爲小於 45° 角之函數:

(a) $\sin 57^\circ$, (b) $\cos 75^\circ$,

(c) $\tan 58^\circ 58'$, (d) $\cot 89^\circ 59'$,

(e) $\sec 66^\circ 6' 6''$, (f) $\csc 45^\circ 1''$,

(g) $\sin\frac{1}{3}\pi$, (h) $\cos\frac{2}{5}\pi$.

2. 求下各式中 A 之值(設各角均爲銳角)。

(a) $\sin A=\cos 30^\circ$. (b) $\tan A=\cot\frac{\pi}{4}$.

(c) $\sec A=\csc A$. (d) $\cos A=\sin 2A$.

(e) $\cot 3A=\tan\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right)$.

(f) $\sec(A+1^\circ)=\csc(A+2^\circ)$.

(g) $\sin mA=\cos nA$.

3. 化簡 $\tan(45^\circ+A)-\cot(45^\circ-A)$.

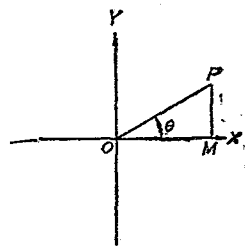
4. 化簡 $\sin 18^\circ-\tan 28^\circ-\cos 72^\circ+\cot 62^\circ$.

註：當所有之角均爲銳角時若二角之同名函數相等，則此二角必相等。

第 四 章

六函數之關係式

10. 六函數之關係式 設角θ之初線爲OX，終線爲OP，作$PM\perp X'X$，則不論θ之值若何，可得



$$\sin\theta=\frac{MP}{OP},\qquad \cos\theta=\frac{OM}{OP},$$

$$\tan\theta=\frac{MP}{OM},\qquad \cot\theta=\frac{OM}{MP},$$

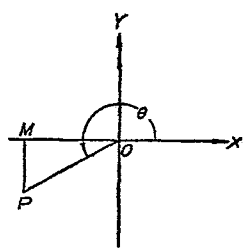
$$\sec\theta=\frac{OP}{OM},\qquad \csc\theta=\frac{OP}{MP}.$$

又 $\overline{OP}^2=\overline{MP}^2+\overline{OM}^2$.

今 $$\sin\theta\csc\theta=\frac{MP}{OP}\cdot\frac{OP}{MP}=1,$$

$$\cos\theta\sec\theta=\frac{OM}{OP}\cdot\frac{OP}{OM}=1,$$

$$\tan\theta\cot\theta=\frac{MP}{OM}\cdot\frac{OM}{MP}=1.$$



故得倒數關係式如下：

$$\left.\begin{array}{l}\sin\theta\csc\theta=1\\ \cos\theta\sec\theta=1\\ \tan\theta\cot\theta=1\end{array}\right\}\qquad\text{(公式四)}$$

又 $\tan\theta=\frac{MP}{OM}=\frac{MP}{OP}\Big/\frac{OM}{OP}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$,

$$\cot\theta=\frac{OM}{MP}=\frac{OM}{OP}\Big/\frac{MP}{OP}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$

故得商數關係式如下:

$$\left.\begin{aligned}\tan\theta&=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\\ \cot\theta&=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\end{aligned}\right\}\qquad\text{(公式五)}$$

再 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\frac{MP}{OP}\right)^2+\left(\frac{OM}{OP}\right)^2=\frac{\overline{MP}^2+\overline{OM}^2}{\overline{OP}^2}$

$$=\frac{\overline{OP}^2}{\overline{OP}^2}=1,$$

$$1+\tan^2\theta=1+\left(\frac{MP}{OM}\right)^2=\frac{\overline{OM}^2+\overline{MP}^2}{\overline{OM}^2}=\frac{\overline{OP}^2}{\overline{OM}^2}$$

$$=\sec^2\theta,$$

$$1+\cot^2\theta=1+\left(\frac{OM}{MP}\right)^2=\frac{\overline{MP}^2+\overline{OM}^2}{\overline{MP}^2}=\frac{\overline{OP}^2}{\overline{MP}^2}$$

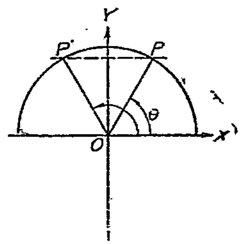
$$=\csc^2\theta,$$

故得平方關係式如下:

$$\left.\begin{aligned}\sin^2\theta+\cos^2\theta&=1\\ \sec^2\theta-\tan^2\theta&=1\\ \csc^2\theta-\cot^2\theta&=1\end{aligned}\right\}\qquad\text{(公式六)}$$

此爲六函數間之關係公式，任知六函數中之一，卽可由以上公式推得其他五個之值。

例一：已知 $\sin\theta=\frac{4}{5}$，求其他五函數之值，並作出 θ 角。



【解】 $\because\quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，

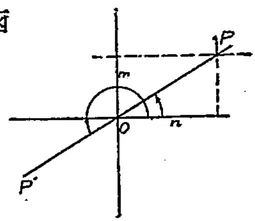
$$\therefore\quad \cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}=\pm\frac{3}{5},$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{4}{5}}{\pm\frac{3}{5}}=\pm\frac{4}{3},\quad \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\pm\frac{3}{4},$$

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\pm\frac{5}{3},\qquad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{5}{4}.$$

在 0° 與 360° 之間，θ 有兩值：一爲 XOP，其終線在第一象限；一爲 XOP'，其終線在第二象限。

例二：已知 $\tan\theta=\frac{m}{n}$，求其他五函數之值，並作出 θ 角。



【解】 今 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{m}{n}$

$$\therefore\quad \frac{\sin\theta}{m}=\frac{\cos\theta}{n}=k,$$

卽 $\quad \sin\theta=km,\qquad \cos\theta=kn,$

故 $\quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=k^2(m^2+n^2)=1,$

$$\therefore \quad k=\pm\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

故 $$\sin\theta=\pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}=\pm\frac{m}{m^2+n^2}\sqrt{m^2+n^2},$$

$$\cos\theta=\pm\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}=\pm\frac{n}{m^2+n^2}\sqrt{m^2+n^2},$$

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{n}{m},$$

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\pm\frac{1}{n}\sqrt{m^2+n^2},$$

$$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\pm\frac{1}{m}\sqrt{m^2+n^2}.$$

在 $0°$ 與 $360°$ 之間，θ 有兩值：設 m, n 同號，則一角在第一象限，一角在第三象限(如上圖)；又設 m, n 異號，則一角在第二象限，一角在第四象限。

例三：設 $\sec\theta=-1$，求其他五函數之值。

【解】 今 $$\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}=\frac{1}{-1}=-1,$$

$$\sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}=\pm\sqrt{1-(-1)^2}=0,$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{0}{-1}=0,$$

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{0}=\infty,$$

$$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{0}=\infty.$$

例四： 設 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，又 $\tan\theta$ 之值爲負．求 $\sin\theta$ 及 $\cot\theta$ 之值．

【解】 今 $\cos\theta$ 之值爲正，$\tan\theta$ 之值爲負，故 θ 爲第四象限角，$\sin\theta$ 應取負值．

$$\therefore\quad \sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\frac{1}{4}}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{2}\Big/-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

習題五

1. 已知 $\sin A=\frac{3}{5}$，求其他五函數之值並作出 A 角．

2. 已知 $\cos A=\frac{12}{13}$，求其他五函數之值並作出 A 角．

3. 已知 $\tan A=-\sqrt{3}$，求其他五函數之值並作出 A 角．

4. 已知 $25\sin A=7$，求 $\tan A$ 及 $\sec A$ 之值．

5. 已知 $\cot\theta=\frac{8}{15}$，又 $\sin\theta$ 爲負值，求其他五函數之值．

6. 已知 $\sec A=\sqrt{2}$，又角 A 之終線在第四象限，求 $\csc A$ 之值．

7. 已知 $\tan\theta=\frac{2x+1}{2x(x+1)}$，求 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ 之值．

8. 已知 $\tan x=0$，求其他五函數之值．

9. 設 $\sin A=s$，求其他五函數之值．

10. 設 $\cos A=c$，求其他五函數之值．

11. 設 $\tan A=t$，求其他五函數之值。

12. 設 $\sin A-\cos A=0$，求 $\tan A$ 之值。

提示：以 $\cos A$ 除兩邊。

13. 設 $\sin A+\cos A=0$，求 $\sec A$ 之值。

14. 已知 $\sin A=\frac{8}{17}$，求 $\frac{\sec A-\tan A}{\sec A+\tan A}$ 之值。

提示：先將 $\tan A$, $\sec A$ 化為正弦及餘弦函數。

15. 已知 $\sec A=\frac{13}{5}$，求 $\frac{\csc A-\cot A}{\csc A+\cot A}$ 之值。

16. 已知 $\tan\theta=\frac{m}{n}$，求 $\frac{m\cos\theta-n\sin\theta}{m\cos\theta+n\sin\theta}$ 之值。

提示：分子，分母各除以 $\cos\theta$。

17. 已知 $\cot\theta=2$，求 $\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$ 之值。

18. 設 $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{7}}$，求 $\frac{\csc^2\theta-\sec^2\theta}{\csc^2\theta+\sec^2\theta}$ 之值。

19. 設 $\sec A=\sqrt{2}$，求 $\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}}$ 之值。

20. 設 $a=\sin\theta$, $b=\tan\theta$，求 $(1-a^2)(1+b^2)$ 之值。

21. 化簡 $\sec^2\theta+\csc^2\theta-\tan^2\theta-\cot^2\theta$。

*22. 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{5}{4}$，求 $\sin^3\theta+\cos^3\theta$ 之值。

提示：先平方已知等式求出 $\sin\theta\cos\theta$ 之值再分括後一式之因式。

*23. 在上題中求 $\tan\theta+\cot\theta$ 之值。

11. 三角恆等式 設有兩式 A 及 B, 能用數學中之運算律[a] 由 A 式推至 B 式,則稱 A 恆等於 B, 寫作

$$A\equiv B^{*}$$

上式稱爲恆等式.當一恆等式中含有三角函數時,則稱爲三角恆等式. 欲證明一三角恆等式 $A\equiv B$, 可根據三角公式,用代數學中之運算律,從 A 式逐漸推演以至 B 式.

又從恆等式之特性:

(i) 設 $A\equiv B$, 則 $B\equiv A$.

(ii) 設 $A\equiv C$, $B\equiv C$, 則 $A\equiv B$.

故在證 $A\equiv B$ 時,亦可由 B 逐漸推演至 A, 或分別將 A,B 推演至同一式 C.

以上所述之三種方法,爲普通所常用者,列表如下:

求證 $A=B$		
第一方式	第二方式	第三方式
證: $\because A=D$	證: $\because B=C$	證: $\because A=D,\ B=D'$,
$=E$	$=F$	$=E,\ =E'$,
$=F$	$=E$	$=F,\ =F'$,
$=C$	$=D$	$=C,\ =C$,
$=B$.	$=A$.	
$\therefore A=B$.	$\therefore A=B$.	$\therefore A=B$.

由繁推至簡容易,由簡推至繁較難.故若左邊之式較繁則採用第一法;如右邊之式較繁則用第二法;若兩邊之式均屬繁複,則用第三法. 分別由兩邊推起,化到相同之一式.

註: [a]即加法,乘法之交換律,組合律,乘法之分配律,及指數定律等等.

*通常寫爲 $A=B$.

例一： 求證 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$。

【證】 左邊 $=1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$

$$=\frac{1}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta\cdot$$

$$\therefore\quad 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta.$$

例二： 求證 $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$。

【證】 左邊 $=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}\cdot\dfrac{1+\cos x}{1+\cos x}$

$$=\frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)}=\frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$$

$$=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\text{右邊}.$$

註：本題所用之方法爲分子，分母同乘以一適宜之式.

例三： 求證 $(\sec\theta-\csc\theta)^2=(1-\tan\theta)^2+(1-\cot\theta)^2$。

【證】 右邊 $=1+\tan^2\theta-2\tan\theta+1+\cot^2\theta-2\cot\theta$

$$=\sec^2\theta-2(\tan\theta+\cot\theta)+\csc^2\theta$$

$$=\sec^2\theta-2\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)+\csc^2\theta$$

$$=\sec^2\theta-2\cdot\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}+\csc^2\theta$$

$$=\sec^2\theta-\frac{2}{\cos\theta\sin\theta}+\csc^2\theta$$

$$=\sec^2\theta-2\sec\theta\csc\theta+\csc^2\theta$$

$$=(\sec\theta-\csc\theta)^2=\text{左邊}.$$

例四： 求證 $\sqrt{1-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\dfrac{\tan\frac{\theta}{2}-1}{\sec\frac{\theta}{2}}$

【證】 左邊 $=\sqrt{\left(\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}\right)-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$

$$=\sqrt{\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}=\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}$$

右邊 $=\dfrac{\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}-1}{\dfrac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}}=\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}$

∴ 左邊＝右邊.

例五： 設 $x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta,$

求證 $x^2+y^2=x'^2+y'^2$.

【證】 $x^2=x'^2\cos^2\theta-2x'y'\cos\theta\sin\theta+y'^2\sin^2\theta,$

$y^2=x'^2\sin^2\theta+2x'y'\cos\theta\sin\theta+y'^2\cos^2\theta,$

∴ $x^2+y^2=x'^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+y'^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta).$

∴ $x^2+y^2=x'^2+y'^2.$

習題六

證明下列各恆等式：(1—39)

1. $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta.$
2. $(1-\cos^2 A)(1+\tan^2 A)=\tan^2 A.$
3. $\tan^2 A-\sin^2 A=\tan^2 A\sin^2 A.$

4. $\tan^2 A-\cot^2 A=\sec^2 A-\csc^2 A$.

5. $\sec^2 A+\csc^2 A=\sec^2 A\csc^2 A$.

6. $\sec A-\cos A=\sin A\tan A$.

7. $\dfrac{1}{1+\tan^2 A}+\dfrac{1}{1+\cot^2 A}=1$.

8. $\dfrac{\sec A}{\cos A}-\dfrac{\tan A}{\cot A}=1$.

9. $\dfrac{1}{1-\sin A}+\dfrac{1}{1+\sin A}=2\sec^2 A$.

10. $(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2=2$.

11. $\sin^4 x-\cos^4 x=1-2\cos^2 x$.

12. $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$.

提示：左邊$=\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x$.

13. $\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)$.

14. $\cos^6 x+\sin^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$.

15. $1+\sec^4 A-\tan^4 A=2\sec^2 A$.

16. $\csc^4 A+\cot^4 A=1+2\csc^2 A\cot^2 A$.

17. $\cot^4 A+\cot^2 A=\csc^4 A-\csc^2 A$.

18. $(\sin A+\cos A)(\tan A+\cot A)=\sec A+\csc A$.

19. $\sin A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)=\sec A+\csc A$.

20. $\dfrac{1-\sin A}{\cos A}=\dfrac{\cos A}{1+\sin A}$.

提示：參考例二.

21. $\dfrac{\tan x}{\sec x+1}=\dfrac{\sec x-1}{\tan x}$.

22. $\dfrac{\sec x-\tan x}{\csc x-\cot x}=\dfrac{\csc x+\cot x}{\sec x+\tan x}$.

23. $\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}=(\sec A-\tan A)^2$.

提示：左邊$=\dfrac{(1-\sin A)^2}{1-\sin^2 A}$.

24. $\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}=(\cot A+\csc A)^2$.

25. $\tan A\cdot\dfrac{1-\sin A}{1+\cos A}=\cot A\cdot\dfrac{1-\cos A}{1+\sin A}$.

26. $\sqrt{\sec^2 A+\csc^2 A}=\tan A+\cot A$.

27. $\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}}=\sec A-\tan A$.

28. $(\sin A+\sec A)^2+(\cos A+\csc A)^2=(1+\sec A\csc A)^2$.

29. $(\tan^2 x+\tan x+1)(\cot^2 x-\cot x+1)$

$=\tan^2 x+\cot^2 x+1$.

30 $\dfrac{\csc A}{\csc A-1}+\dfrac{\csc A}{\csc A+1}=2\sec^2 A$.

31. $\dfrac{1-2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{1+2\sin x\cos x}$.

32. $\dfrac{\tan\alpha-\cot\beta}{\tan\beta-\cot\alpha}=\tan\alpha\cot\beta$.

33. $\sec^2\alpha\tan^2\beta-\tan^2\alpha\sec^2\beta=\tan^2\beta-\tan^2\alpha$.

34. $(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2+(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)^2$

$=1$

35 $(\cos A-\cos^3 A)^2+(\sin A-\sin^3 A)^2=\sin^2 A\cos^2 A$.

*36. $\dfrac{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\dfrac{1-\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta}$

*37. $\dfrac{\sin^4 A-\cos^4 A}{1-2\sin A\cos A}\cdot\dfrac{1-\cot A}{\sin A+\cos A}=\csc A.$

*38. $\dfrac{2(\cos A-\sin A)}{1+\sin A+\cos A}=\dfrac{\cos A}{1+\sin A}-\dfrac{\sin A}{1+\cos A}.$

*39. $\dfrac{1-\sec A+\tan A}{1+\sec A-\tan A}=\dfrac{\sec A+\tan A-1}{\sec A+\tan A+1}.$

提示：應用 $\dfrac{1}{\sec A-\tan A}=\dfrac{\sec A+\tan A}{1}$

40. 設 $x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta,$

求證 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

41. 設 $x=a+r\cos\theta,\quad y=b+r\sin\theta,$

求證 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$

42. 設 $x=a\sec\theta+h,\quad y=b\tan\theta+k,$

求證 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1.$

43. 設 $x\cos\theta=a,\quad y\cot\theta=b,$

求證 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

44. 設 $x\tan\theta=a,\quad y\cot\theta=b,$

求證 $xy=ab.$

45. 設 $x=\sin\theta+\cos\theta,\quad y=\sin\theta-\cos\theta,$

求證 $x^2+y^2=2.$

46. 設 $x\sec\theta=x'-y'\tan\theta,\quad y\sec\theta=x'\tan\theta+y',$

求證 $x^2+y^2=x'^2+y'^2.$

*47. 設 $a\cos\theta+b\sin\theta+c=0,\quad a'\cos\theta+b'\sin\theta+c'=0,$

求證 $(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2=(ab-a'b)^2$.

*48. 設 $r\sin\theta\sin\phi=x$, $r\sin\theta\cos\phi=y$, $r\cos\theta=z$,

求證 $x^2+y^2+z^2=r^2$.

*49 設 $a\cos\theta\cos\phi=x$, $b\cos\theta\sin\phi=y$, $c\sin\theta=z$,

求證 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

*50. 設 $\sin\theta+\sin^2\theta=1$,

求證 $\cos^2\theta+\cos^4\theta=1$.

提示：從 $\sin\theta=1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$ 仍代入第一式.

*51. 設 $\left(\frac{\tan\alpha}{\sin\theta}-\frac{\tan\beta}{\tan\theta}\right)^2=\tan^2\alpha-\tan^2\beta$,

求證 $\cos\theta=\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$.

提示：先化成 $\tan^2\beta\cos\theta-2\tan\alpha\tan\beta\cos\theta+\tan^2\beta=0$.

*52. 設 $\cos A=\cos D\sin C$, $\cos B=\sin D\sin C$,

求證 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2$.

*53. 設 $\sin^2A\csc^2B+\cos^2A\cos^2C=1$.

求證 $\sin^2C=\tan^2A\cot^2B$.

提示：用 $\sin^2A+\cos^2A$ 代右邊之 1，再移項分別括出 $\sin^2A$, $\cos^2A$.

*54. 設 $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$,

求證 $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\theta$.

提示： $\cos\theta=(\sqrt{2}+1)\sin\theta=\frac{1}{(\sqrt{2}-1)}\sin\theta$.

*55. 設 $\tan x+\sin x=m$, $\tan x-\sin x=n$,

求證 $\cos x=\frac{m-n}{m+n}$.

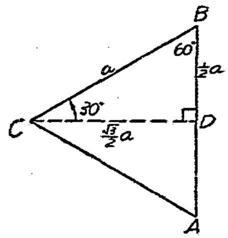
第　五　章

特 別 角 之 函 數

12. 30°, 45°, 60° 角之函數　在等邊三角形 ABC 中作 $CD\perp AB$，從幾何定理知：

$$\angle A=\angle B=\angle ACB=60^\circ.$$

$$AD=DB=\frac{1}{2}AB.$$



又　$\angle ACD=\angle BCD=30^\circ.$

設　$AB=BC=AC=a.$

則　$AD=DB=\frac{1}{2}a.$

$$CD=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}}=\sqrt{\frac{3}{2}}a.$$

今　$\sin 30^\circ=\frac{DB}{CB}=\frac{1}{2}a/a=\frac{1}{2}.$

$$\cos 30^\circ=\frac{CD}{CB}=\sqrt{\frac{3}{2}}a/a=\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$\tan 30^\circ=\frac{DB}{CD}=\frac{1}{2}a/\sqrt{\frac{3}{2}}a=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

$$\cot 30^\circ=1/\tan 30^\circ=1/\frac{1}{3}\sqrt{3}=\sqrt{3}.$$

$$\sec 30^\circ=1/\cos 30^\circ=1/\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

$$\csc 30^\circ=1/\sin 30^\circ=1/\frac{1}{2}=2.$$

又 $\sin 60^\circ=\cos(90^\circ-60^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

$\cos 60^\circ=\sin(90^\circ-60^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$.

$\tan 60^\circ=\cot(90^\circ-60^\circ)=\cot 30^\circ=\sqrt{3}$.

$\cot 60^\circ=\tan(90^\circ-60^\circ)=\tan 30^\circ=\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

$\sec 60^\circ=\csc(90^\circ-60^\circ)=\csc 30^\circ=2$.

$\csc 60^\circ=\sec(90^\circ-60^\circ)=\sec 30^\circ=\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

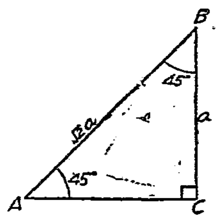
再作直角三角形 ACB，設 C 爲直角令 $AC=CB=a$，則 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2=2a^2$ ∴ $AB=\sqrt{2}\,a$.

令 $\sin 45^\circ=\frac{CB}{AB}=a/\sqrt{2}\,a=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

故 $\cos 45^\circ=\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$\tan 45^\circ=\cot 45^\circ=1$.

$\sec 45^\circ=\csc 45^\circ=\sqrt{2}$.



關於 30°，45°，60° 角之正弦，餘弦及正切各値茲列表於下以便查考：

函數 \ 角度	$30^\circ\left(\frac{1}{6}\pi\right)$	$45^\circ\left(\frac{1}{4}\pi\right)$	$60^\circ\left(\frac{1}{3}\pi\right)$	$\frac{1}{2}$ 卽 $\frac{1}{2}\sqrt{1}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}=1.4142$ $\sqrt{3}=1.7321$
cos	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}=0.7071$
tan	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}=0.8660$

例一: 化簡 $\sin^2 30^\circ - \cos^2 45^\circ + \frac{1}{2}\tan 45^\circ \sec 60^\circ$.

【解】 原式$=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{4}.$$

例二: 求 $\dfrac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}}$ 之值,準至小數兩位.

【解】 原式$=\dfrac{\sqrt{3}-\frac{1}{3}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

$$=\frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{4(3+\sqrt{6})}{3}$$

$$=\frac{4}{3}(3+2.4495)=\frac{4}{3}\times 5.4495=7.266.$$

例三: 求適合 $4\sin x-2\tan x+\sec x=2$ 之 x 值.(假定 x 為銳角.)

【解】 令 $4\sin x-2\tan x+\sec x-2=0.$

即 $4\sin x-2\sin x/\cos x+1/\cos x-2=0.$

即 $4\sin x\cos x-2\sin x+1-2\cos x=0.$

即 $(2\sin x-1)(2\cos x-1)=0.$

故 1. $2\sin x-1=0,\ \sin x=\frac{1}{2},\quad \therefore\ x=30^\circ.$

2. $2\cos x-1=0,\ \cos x=\frac{1}{2},\quad \therefore\ x=60^\circ.$

習題七

1. 塡充下表:

函數＼角	$30°\left(\frac{1}{6}\pi\right)$	$45°\left(\frac{1}{4}\pi\right)$	$60°\left(\frac{1}{3}\pi\right)$
cot			
sec			
csc			

2. 在直角三角形 ABC 中:

(a) 已知 $c=2$, $A=30°$; 求 a.

(b) 已知 $c=\sqrt{2}$, $A=45°$; 求 b.

(c) 已知 $a=\sqrt{3}$, $A=60°$; 求 c.

(d) 已知 $a=\sqrt{3}+1$, $A=30°$; 求 b.

(e) 已知 $a=1$, $b=\sqrt{3}$; 求 A.

(f) 已知 $b=5$, $c=10$; 求 A.

3. 求下列各題之比值;(結果應化成最簡式):

(a) $\sin 45°:\ \sin 60°$.　　(d) $\cot 45°:\ \cot 30°$.

(b) $\cos 30°:\ \cos 45°$.　　(e) $\sec 60°:\ \sec 30°$.

(c) $\tan 30°:\ \tan 60°$.　　(f) $\csc 60°:\ \csc 45°$.

4. 化簡下列各式:

(a) $\sin 60° \cot 30° \tan 45° \sec 60°$.

(b) $\sin\frac{1}{3}\pi\ \cos\frac{1}{4}\pi\ \tan\frac{1}{6}\pi$.

(c) $(1+\sin 45°+\sin 30°)(1-\cos 45°+\cos 60°)$.

(d) $\dfrac{\sin 60^\circ-\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ-\sin 30^\circ}$.

5. 計算 $\dfrac{1}{\sin 45^\circ \sin 60^\circ-\cos 45^\circ \cos 60^\circ}$ 之值，準至小數兩位.

6. 試證下列各式:

(a) $\sin 60^\circ=2\sin 30^\circ \cos 30^\circ$.

(b) $\cos 60^\circ=\cos^2 30^\circ-\sin^2 30^\circ=2\cos^2 30^\circ-1$.

$=1-2\sin^2 30^\circ$.

(c) $\tan 60^\circ=\dfrac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}$.

7. 求證 $\cot^2\dfrac{\pi}{6}-\tan^2\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sin^2\dfrac{\pi}{3}-\cos^2\dfrac{\pi}{3}}{\cos^2\dfrac{\pi}{3}\cos^2\dfrac{\pi}{6}}$.

8. 設 $\tan^2 45^\circ-\cos^2 60^\circ=x\sin 45^\circ \cos 45^\circ \tan 60^\circ$ 求 x.

9. 解聯立方程式 $\begin{cases} x\sin 30^\circ+y\sin 45^\circ=\sin 60^\circ \\ x\cos 30^\circ-y\cos 45^\circ=\cos 60^\circ \end{cases}$

10. 求適合下列各式中之 x 值.(設 x 為銳角):

(a) $2\sin x=1$. (b) $3\tan x-\sqrt{3}=0$.

(c) $\sqrt{2}\cos x=1$. (d) $\sin x=\cos x$.

(e) $(\sec x-\sqrt{2})(\csc x-2)=0$.

(f) $4\cos^2 x+4\sin x-5=0$.

提示: 一律化成正弦做.

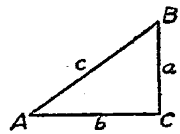
(g) $\sec^2 x=2\tan x$.

*(h) $2\sin x-2\cos x-\tan x+1=0$.

第　六　章

直角三角形之解法*

13. 直角三角形之解法　在右圖之直角三角形中，C為直角，A, B兩銳角互為餘角，即 $A+B=90°$，又直角邊a, b與斜邊c間有關係$a^2+b^2=c^2$.



今於 A, B, a, b, c 中，任知其中兩件（至少一件為邊），在幾何中可將此三角形作出，在三角中則可將其餘三件之數量求得.

從直角三角形中已知之兩件，推求其餘三件之方法稱為解直角三角形.解直角三角形之問題，共有下列四種：

(i)　已知斜邊及一銳角.(見下例一)

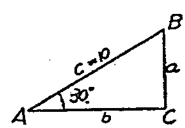
(ii)　已知一直角邊及一銳角.(見下例二)

(iii)　已知兩直角邊.(見下例三)

(iv)　已知斜邊及一直角邊.(見下例四)

已知邊之長度為簡單數字，或已知角為 30°, 45°, 60° 等之特別角時，可不用對數計算.（如下例一至例四）但已知之數，比較繁複時，則宜用對數計算.(如下例五，例六).

例一：在直角三角形 ABC 中，已知 $c=10$, $A=30°$. 求 B, a, b.



【解】 1.　$B=90°-A=90°-30°$
$=60°$.

註：在讀本章之前，應先學習附錄中之查表法.

2. $\frac{a}{c}=\sin A$, $a=c\sin A$,

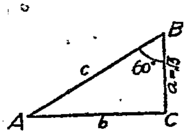
$\therefore$ $a=10\sin 30°=10\times\frac{1}{2}=5.$

3 $\frac{b}{c}=\cos A$, $b=c\cos A$,

$\therefore$ $b=10\cos 30°=10\times\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$=5\times 1.7321=8.6605.$

例二：在直角三角形 ABC 中，已知 $a=\sqrt{3}$，$B=60°$，求 A, b, c.



【解】 1. $A=90°-B=90°-60°=30°.$

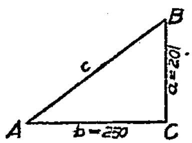
2. $\frac{b}{a}=\cot A$, $b=a\cot A$,

$\therefore$ $b=\sqrt{3}\cot 30°=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3.$

3. $\frac{a}{c}=\sin A$, $c=\frac{a}{\sin A}$,

$\therefore$ $c=\frac{\sqrt{3}}{\sin 30°}=\sqrt{3}\Big/\frac{1}{2}=2\sqrt{3}.$

例三：在直角三角形 ABC 中，已知 $a=201$，$b=250$，求 A, B, c.



【解】 1. $\tan A=\frac{a}{b}=\frac{201}{250}=0.8040.$

$\therefore$ $A=38°48'.$

2. $B=90°-A=90°-38°48'=51°12'.$

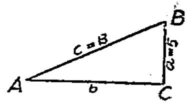
3. $\frac{a}{c}=\sin A$, $c=\frac{a}{\sin A}$,

$$\therefore\quad c=\frac{201}{\sin 38^\circ 48}=\frac{201}{0.6266}=321.$$

例四：在直角三角形 ABC 中，已知 $a=5$，$c=13$，求 A，B，b。

【解】 1. $a^2+b^2=c^2$， $b=\sqrt{c^2-a^2}$，

$$\therefore\quad b=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12.$$

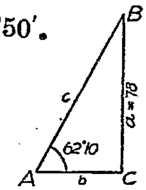


2. $\sin A=\frac{a}{c}=\frac{5}{13}=0.3846$，

$$\therefore\quad A=22^\circ 37'.$$

3. $B=90^\circ-A=90^\circ-22^\circ 37'=67^\circ 23'.$

例五：在直角三角形 ABC 中，已知 $A=62^\circ 10'$，$a=78$，求 B，b，c。



【解】 1. $B=90^\circ-A=90^\circ-62^\circ 10'=27^\circ 50'.$

2. $\frac{b}{a}=\cot A$， $\therefore\ b=a\cot A.$

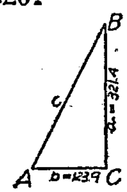
3. $\frac{a}{c}=\sin A$， $\therefore\ c=\frac{a}{\sin A}.$

$$\begin{array}{rl}
\log a &= 1.8921\\
\log\cot A &= 9.7236-10\\
\hline
\log b &= 1.6147\\
\therefore\quad b &= 41.19.
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
\log a &= 1.8921\\
\operatorname{colog}\sin A &= 0.0534\\
\hline
\log c &= 1.9455\\
\therefore\quad c &= 88.20.
\end{array}$$

例六：在直角三角形 ABC 中，已知

$a=321.4$ 公尺， $b=123.9$ 公尺，

求 A,B,C 及面積 S。



【解】 1. $\tan A=\frac{a}{b}.$

2. $B=90°-A$。

3. $\frac{a}{c}=\sin A$, $c=\frac{a}{\sin A}$.

4. $S=\frac{1}{2}ab$。

$$\begin{array}{rl} \log a & =2.5070 \\ \operatorname{colog} b & =7.9070-10 \\ \hline \log \tan A & =0.4140 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log a & =2.5070 \\ \operatorname{colog} \sin A & =0.0301 \\ \hline \log c & =2.5371 \end{array}$$

$\therefore\quad A=68°55'$ $\qquad\therefore\quad c=344.4$ 公尺

$\therefore\quad B=21°5'$

$$\begin{array}{ll} \log\frac{1}{2}a=\log 160.7 & =2.2059 \\ \log b & =2.0930 \\ \hline \log S & =4.2989 \end{array}$$

$\therefore\quad S=19900$ 方公尺

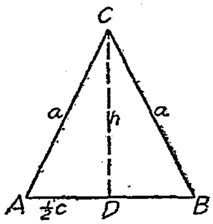
14. 等腰三角形解法 在右圖之等腰三角形 ABC 中，設頂角爲 C，底邊爲 c，又兩腰 $AC=BC=a$，

則 $A=B$, $C=180°-2A$.

作 $CD\perp AB$，則從幾何學可知：

$$\angle ACD=\angle BCD=\frac{1}{2}C,$$

$$AD=BD=\frac{1}{2}c.$$



設高 CD 爲 h，今在 A, C, a, c, h 五件中，任知其兩件(至少一件爲邊或高)，則用解直角三角形之方法可將其他之三件求出。

例如已知等腰三角形之一腰 a 及底邊 c，則底角 A，頂角 C 及高 h，可用下法求出：

1. 從 $\cos A=\dfrac{\frac{1}{2}c}{a}=\dfrac{c}{2a}$，可求得 A。
2. 因 $C+2A=180°$ $\quad\therefore\ C=180°-2A$。
3. h 可用下法中之任一法求得之。

(i) $h^2+\frac{1}{4}c^2=a^2$，$\quad\therefore\ h=\sqrt{a^2-\frac{1}{4}c^2}$

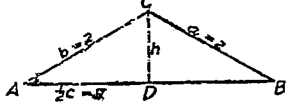
$$=\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}c\right)\left(a-\frac{1}{2}c\right)}.$$

(ii) $\dfrac{h}{a}=\sin A$，$\quad\therefore\ h=a\sin A$。

(iii) $\dfrac{h}{\frac{1}{2}c}=\tan A$，$\quad\therefore\ h=\frac{1}{2}c\tan A$。

例： 等腰三角形之腰長2寸，底邊長 $2\sqrt{3}$ 寸。求此三角形各角之度數，又高及面積。

【解】 令 $a=2$ 寸，$c=2\sqrt{3}$ 寸。



(i) $\cos A=\dfrac{\frac{1}{2}c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

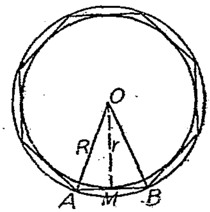
$\therefore\ A=30°$。

(ii) $B=A=30°$。

(iii) $C=180°-2A=120°$。

(iv) $h=a\sin A=2\sin 30°=2\times\frac{1}{2}=1$ 寸。

(v) $S=\frac{1}{2}hc=\frac{1}{2}\times1\times2\sqrt{3}=\sqrt{3}$方寸.



15. 正多邊形解法 在右圖中,設 AB 爲正 n 邊形之一邊,其長爲 a,又此正 n 邊形外接圓之半徑爲 R,邊心距(卽內切圓之半徑)爲 r,中心爲 O,則 $\triangle OAB$ 爲一等腰三角形,其頂角 AOB 爲 $\frac{360^\circ}{n}$.故若在 a, R, r, n 四件中任知其二件,卽可用解等腰三角形方法,求出其餘兩件.

例如已知正多邊形之邊數爲 n,邊長 a,則周界 p,外接圓半徑 R,及邊心距 r,可用下法求之:

1. $p=na$.

2. $\dfrac{\frac{1}{2}a}{R}=\sin\dfrac{180^\circ}{n}$, $\therefore\ R=\frac{1}{2}a\Big/\sin\dfrac{180^\circ}{n}$.

3. $\dfrac{r}{\frac{1}{2}a}=\cot\dfrac{180^\circ}{n}$, $\therefore\ r=\frac{1}{2}a\cdot\cot\dfrac{180^\circ}{n}$.

4. $S=\frac{1}{2}rp=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\cot\dfrac{180^\circ}{n}\cdot na$

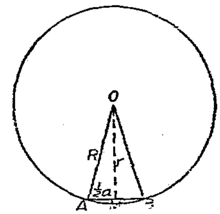
$$=\frac{1}{4}na^2\cot\frac{180^\circ}{n}.$$

例: 正十二邊形之邊長爲2尺,求此正多邊形周長,外接圓半徑,內切圓半徑及面積.

【解】 今 $n=12$, $a=2$尺.

$$\angle AOM=\frac{180^\circ}{12}=15^\circ$$

$\therefore$ (i) $p=na=24$ 尺,



(ii) $R=\dfrac{\frac{1}{2}a}{\sin AOM}=\dfrac{1}{\sin 15^\circ}$

$=\dfrac{1}{0.2588}=3.86$ 尺,

(iii) $r=\dfrac{a}{2}\cot AOM=1\times\cot 15^\circ=3.73$ 尺,

(iv) $S=\dfrac{1}{2}rp=\dfrac{3.73\times 24}{2}=44.76$ 方尺.

習 題 八

1. 解下列直角三角形(不得查表):

a. $A=45^\circ$, $c=25$, 求 B, a, b.

b. $B=30^\circ$, $a=7$, 求 A, b, c.

c. $a=10$, $b=10$, 求 A, B, c.

d. $b=\sqrt{3}$, $c=2$, 求 A, B, a.

2. 解下列直角三角形(用附錄表二):

a. $A=72^\circ$, $b=4$, 求 B, a, c.

b. $B=15^\circ$, $c=15$, 求 A, a, b.

c. $a=5$, $b=2$, 求 A, B, c.

d. $a=60$, $c=100$, 求 A, B, b.

3. 解下列直角三角形(用對數):

a. $A=33^\circ 22'$, $c=29.9$, 求 B, a, b.

b. $B=52^\circ 55'$, $c=127.2$, 求 A, a, b.

c. $A=74^\circ 43'$, $a=27.32$, 求 B, b, c.

d. $A=81°13'$, $b=1.731$, 求 B, a, c.

e. $a=15.19$, $b=17.32$, 求 A, B, c.

f. $b=122.2$, $c=236.3$, 求 A, B, a.

3. 在等腰三角形 ABC 中設 C 爲頂角, A 爲一底角, c 爲底邊, a 爲一腰, h 爲高, S 爲面積, 試解下列各題:

a. 已知 $a=8$, $h=4$, 求 A, C, c, S.

b. 已知 $a=6$, $C=120°$, 求 A, c, h, S.

c. 已知 $c=123$, $A=45°6'$, 求 C, a, h, S.

d. 已知 c, C, 試寫出求 A, a, h 之公式.

4. 在正多邊形中, 設 n 爲邊數, a 爲每邊之長, p 爲周界, R 爲外接圓之半徑, r 爲邊心距(即內切圓半徑), S 爲面積, 試解下列各題:

a. 已知 $n=6$, $R=2$, 求 a, r, S.

b. 已知 $n=8$, $r=1$ 寸, 求 a, R, S.

c. 已知 $n=5$, $a=10$ 公分, 求 p, R, r, S.

d. 已知 $a=R$, 求 n.

5. 設直角三角形之斜邊爲一直角邊之三倍, 求兩銳角.

6. 設直角三角形之兩銳角之比爲 5:7, 其斜邊長 3 寸, 求兩直角邊.

7. 一長方形之長爲 82 寸, 闊爲 75 寸, 求對角線之長及對角線與兩邊所夾之角.

8. 設圓之半徑爲 8 寸, 中心角爲 1 弧度, 求所對弧之長.

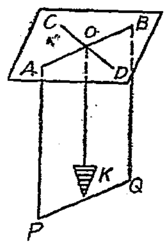
9. 設一正三角形與一正六邊形有相等之周界, 試證其面積之比爲 2:3.

10. 試證正六邊形之內切圓與外接圓面積之比爲 3:4.

第七章

簡易測量題

16. 簡易測量題解法　從直角三角形之解法推廣之，可以解決簡單之測量問題，在測量問題中，下面幾個名詞，必須明瞭其意義：

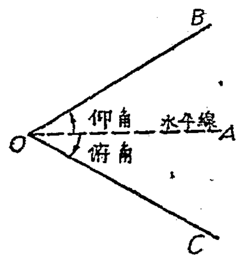


(i) **鉛垂線**　於繩之一端繫一重物，繩之他端固定於一定點，繩在空中自然靜止之位置，稱爲過此點之鉛垂線，如圖中 OK 爲過 O 點之鉛垂線．

(ii) **水平線**　過某點垂直於過此點之鉛垂線之直線，稱爲過此點之水平線．如直線 AB, CD 等爲過 O 點之水平線．

(iii) **水平面**　過某點垂直於過此點之鉛垂線之平面，稱爲過此點之水平面，如平面 $ADBC$ 爲過 O 點之水平面，(過此點之水平線均在此平面內)．

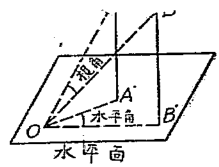
(iv) **鉛垂面**　含一鉛垂線之平面，稱爲含此線之鉛垂面，如平面 $APQB$ 爲含 OK 之鉛垂面．



(v) **仰角及俯角**　假定目的物與觀測點在同一鉛垂面內，從測點聯至目的物之直線與此鉛垂面上水平線夾成一角；當目的物在此水平線之上時，稱此爲仰角，如 $\angle AOB$；當目的物在

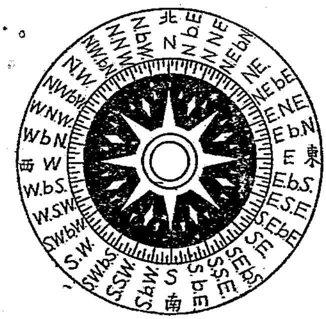
此水平線之下時，稱此爲俯角，如 $\angle AOC$。仰角亦稱傾角。

(vi) **視角** 設從測點向兩目的物聯線 OA，OB 其在 O 點所張之角 AOB，稱爲 O 點對 A，B 之視角。

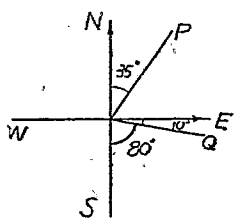


(vii) **水平角** (vi) 中之 OA，OB 在過 O 點之水平面上兩正射影 OA'，OB' 所成之角 $A'OB'$，稱爲 A，B 對於 O 點之水平角。

(viii) **羅盤方位** 航海家所用羅盤，分一圓周成32等分。每等分爲 $360 \div 32 = 11°15'$，如右圖所示。圖中 N 指正北，S 指正南，E 指正東，W 指正西。$N.E.$ 之方向爲北東。$N.N.E.$ 之方向稱爲北北東。$E.N.E.$ 之方向稱爲東北東。NbE. 之方向稱爲北微東。$NEbN$ 之方向稱爲北東微北。餘照此類推。



如右圖中 OP 之方向爲北偏東35°，簡寫爲 $N\,35°\,E$，又 OQ 之方向爲南偏東 80°，簡寫爲 $S\,80°\,E$。今 $\angle EOQ$ 等於 10°，比 45° 小，故 OQ 之方向有時亦可稱爲東偏南 10°，簡寫爲 $E\,10°\,S$。



例一：於離塔 100 尺之一點，測得塔頂之仰角爲 35°16′，設測點離地 5 尺，求塔高。

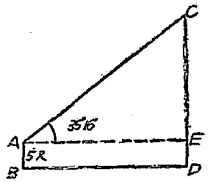
【解】 如圖設塔爲 DC，測點爲 A，$BA = 5$ 尺。

作 $AE // BD$，交 DC 於 E，

則　$DE = BA = 5$ 尺

$AE = BD = 100$ 尺

$\angle EAC = 35°16'$.



在 $rt.\triangle ACE$ 中，$\dfrac{EC}{AE} = \tan CAE$，

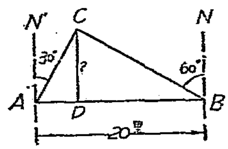
$\therefore\quad EC = AE \tan CAE$

$= 100 \tan 35°16' = 100 \times 0.7072 = 70.72$.

故　$DC = DE + EC = 5 + 70.72 = 75.72$.

故知塔約高 75.7 尺.

例二：灣內有 A, B, C 三燈船，今於 A 點測得 B 在 A 之正東，C 在 A 之北偏東 30°，又由 B 點測得 C 之方向爲北偏西 60°，設 AB 長 20 里，求 AB 至 C 之距離.



【解】今 $\angle N'AC = 30°$,

$\angle NBC = 60°$.

$\therefore\quad \angle CAB = 60°,\qquad \angle CBA = 30°$,

故　$\angle ACB$ 爲直角.

在 $rt.\triangle ABC$ 中，$\dfrac{AC}{AB} = \cos CAB$.

$\therefore\quad AC = AB \cos CAB = 20 \cos 60° = 20 \times \dfrac{1}{2} = 10$.

作　$CD \perp AB$，則 CD 之長即爲 AB 至 C 之距離.

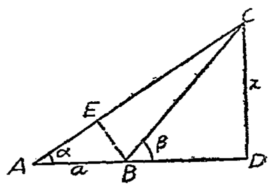
在 $rt.\triangle ADC$ 中，$\dfrac{CD}{AC} = \sin CAB$.

$$\therefore \quad CD=AC\sin CAB=10\sin 60^\circ=10\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=5\times 1.732=8.66.$$

故 AB 至 C 之距離約爲 8.7 里.

例三: 平地一建築物 DC, 今於地面一點 A, 測得其頂 C 之仰角爲 α, 又向此建築物走近 a 尺至 B 點, 測得 C 之仰角爲 β, 求此建築物之高.



【解一】設建築物之高爲 x 尺,

則 $AD=x\cot\alpha$, $BD=x\cot\beta$.

今 $AD-BD=AB=a$.

$$\therefore \quad x\cot\alpha-x\cot\beta=a.$$

$$\therefore \quad x=\frac{a}{\cot\alpha-\cot\beta} \qquad \text{(A)}$$

【解二】作 $BE\perp AC$, 則 $BE=a\sin\alpha$.

今在 $rt.\triangle BCE$ 中, $\angle ECB=\beta-\alpha$;

$$\therefore \quad BC=\frac{BE}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{a\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

又在 $rt.\triangle BDC$ 中, $x=BC\sin\beta$.

$$\therefore \quad x=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} \qquad \text{(B)}$$

設 α,β 爲 30°, 45° 或 60° 等特別角時以用 A 式爲便, 因計算時可以不必查表, 但若 α,β 爲其他之角時則以用 B 式爲便, 因可以利用對數計算也.

在本題中設

(a) $\alpha=30^\circ$, $\beta=45^\circ$, $a=40$, 求建築物之高.

【解】 從 A 式

$$x=\frac{40}{\cot 30^\circ-\cot 45^\circ}=\frac{40}{\sqrt{3}-1}=\frac{40(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$=20(\sqrt{3}+1)=20\times(1.732+1)=20\times 2.732=54.64.$$

故知建築物之高約爲 54.6 尺

(b). $\alpha=21^\circ 32'$, $\beta=34^\circ 12'$, $a=29.73$, 求建築物之高。

【解】 從 B 式

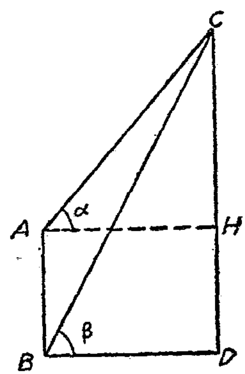
$$x=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$=\frac{29.73\sin 21^\circ 32'\sin 34^\circ 12'}{\sin 12^\circ 40'}$$

$\log 29.73 = 1.4732$
$\log\sin 21^\circ 32' = 9.5647-10$
$\log\sin 34^\circ 12' = 9.7498-10$
$\text{colog}\sin 12^\circ 40' = 0.6590$
$\log x = 1.4467$
$x=27.97$

故建築物之高約爲 28 尺。

例四：一人於塔 BA 之底 B 處，測得對面一山頂之仰角爲 β，又此人在塔頂 A 處，再測之得仰角爲 α。設 BA 之長爲 a 尺，求山高。



【解】 設 $DC=x$ 尺表山高，C 爲峯頂。

作 $AH \parallel BD$，交 CD 於 H，則 $ABDH$ 爲矩形。

$\therefore\ DH=BA=a,\quad BD=AH,$

又 $HC=DC-HC=x-a.$

在 $rt.\triangle BDC$ 中，

$$\frac{BD}{DC}=\cot CBD.$$

$\therefore\ BD=DC\cot CBD=x\cot\beta.$

在 $rt.\triangle AHC$ 中，$\dfrac{AH}{HC}=\cot CAH.$

$\therefore\quad AH=HC\cot CAH=(\ \ -a)\cot\alpha.$

但 $\qquad BD=AH.$

$\therefore\qquad x\cot\beta=(x-a)\cot\alpha.$

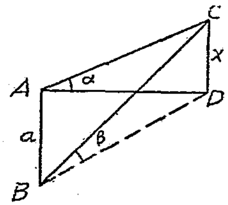
即 $\quad x(\cot\alpha-\cot\beta)=a\cot\alpha.$

$$\therefore\quad x=\frac{a\cot\alpha}{\cot\alpha-\cot\beta}\qquad(\text{尺})$$

註：本題尚有其他解法可以利用對數計算見習題中 23 題.

例一：一人於塔 DC 之正西一點 A，測得塔頂 C 之仰角為 α，此人向南行 a 尺，再測之得 C 之仰角為 β，求塔高.

【解】 設塔 DC 之高為 x 尺，則



在 $rt.\triangle ACD$ 中，$AD=x\cot\alpha.$

在 $rt.\triangle BCD$ 中，$BD=x\cot\beta.$

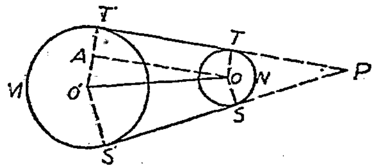
今在 $rt.\triangle ABD$ 中，

$$\overline{BD}^2-\overline{AD}^2=\overline{AB}^2=a^2$$

$$\therefore\quad x^2(\cot^2\beta-\cot^2\alpha)=a^2$$

$$\therefore\quad x=\frac{a}{\sqrt{\cot^2\beta-\cot^2\alpha}}.\qquad(\text{尺})$$

例六：兩輪之半徑各為 10 寸及 70 寸，又兩輪中心相距 120 寸，今以皮帶緊聯之，求皮帶之長.



【解】 設兩輪之中心各為 及 O'，又設 TT'，SS' 為其兩外公切線之長，則皮帶之長為

$$\widehat{TNS}+\widehat{T'MS'}+TT'+SS'$$

但從幾何學知 $TT'=SS'$，故皮帶之長爲

$$\widehat{TNS}+\widehat{T'MS'}+2TT'.$$

連 OO'，OT，$O'T'$，再作 $OA /\!/ TT'$ 交 $O'T'$ 於 A，

則 $$OT=AT'.$$

故 $$O'A=O'T'-AT'=O'T'-OT=70-10=60.$$

今在 rt. $\triangle OO'A$ 中，$OO'=120$.

$$\therefore \quad \sin AOO'=\frac{O'A}{OO'}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \quad \angle AOO'=30°, \qquad \angle AO'O=60°.$$

$$\therefore \quad \angle TOS=\angle T'O'S'=2\angle AO'O=120°.$$

故 $$\widehat{TNS}=\frac{120}{360}\cdot 2\pi\cdot 10=\frac{20}{3}\pi.$$

$$\widehat{T'MS'}=\frac{240}{360}\cdot 2\pi\cdot 70=\frac{280}{3}\pi.$$

又 $$TT'=OA=OO'\cos AOO'=120\cos 30°$$

$$=120\times\frac{\sqrt{3}}{2}=60\sqrt{3}.$$

$$\text{故皮帶之長}=\frac{20}{3}\pi+\frac{280}{3}\pi+2\cdot 60\sqrt{3}$$

$$=100\pi+120\sqrt{3}$$

$$=100\times 3.1416+120\times 1.7321$$

$$=314.16+207.85$$

$$=522.01 \quad \text{約 } 522 \text{ 寸}.$$

習題九

1. 在距塔 120 尺之平地上，測得塔頂之仰角爲 $60°30'$，求塔高.

2. 自 1000 尺高之山上測得海中一船之俯角爲 $77°35'$，求船與山頂間之距離.

3. 設一塔之高爲 200 尺，而其頂之仰角測得爲 $3°30'$，求測點至塔之水平距離.

4. 地面一點離一峭壁之底爲 1325 尺，今在此點測得峭壁頂之仰角爲 $14°30'$，設測點離地面 5 尺，求峭壁之高.

5. 沿河岸測得 A, B 兩點間之距離爲 96 尺，今在對岸有一樹 C，在 A 點測之其方向爲正北，在 B 點測之爲北偏東 $21°14'$，求河闊(設河道爲東西方向).

6. 甲乙兩船同時在正午離埠，甲向南偏東 $35°$ 駛行，每時速 10 浬；乙向北偏東 $55°$ 駛行，每時速 $10\frac{1}{2}$ 浬；問在下午二時正，甲乙兩船距離若干?

7. 樹影長 30 尺，其時太陽之高度爲 $30°$，問樹高幾何?
(天象之仰角稱爲高度.)

8. 高 120 尺塔之影長 70 尺，求太陽之高度.

9. 繩長 39 尺一端繫於旗桿之頂，一端繫於地面上之一木樁，今知木樁離桿足 5 尺，求旗桿之高及繩與旗桿所成之角.

10. 40 尺長之梯置於街中，梯端適與 33 尺高之窗齊，若梯腳不動，將梯轉倚對面牆上，則梯端適與 21 尺高之窗齊，求街闊.

11. 一屋闊 30 尺，椽子長 $15\sqrt{2}$ 尺，求屋頂傾斜度及屋脊距屋簷之高。

12. 自平地上一點測得砲台之仰角爲 $30°$，再自此點走近砲台 100 尺測之得仰角爲 $45°$，求砲台之高。

13. 有人自河邊測得對岸之一柳樹梢之仰角爲 $60°$，由是面向樹木退後 30 尺，再測之得仰角爲 $45°$，求河闊。

14. 一氣球在 A, B 兩點之間，且與 A, B 在同一鉛直面內，今自 A 點測得氣球之仰角爲 α，又在 B 點測得氣球之仰角爲 β，設 A, B 兩點相距 a 尺，試證氣球離地之高爲

$$\frac{a}{\cot\alpha+\cot\beta}\text{尺。}$$

15. 在上題中設 $a=2000$, $\alpha=30°$, $\beta=60°$，求氣球之高。

16. 自 a 尺高之山頂測得地面上正東兩點之俯角各爲 α 及 β，求證此兩點之距離爲 $\dfrac{a(\tan\beta-\tan\alpha)}{\tan\alpha\ \tan\beta}$ 尺。

17. 在上題中設 $a=300$, $\alpha=30°$, $\beta=45°$，求此兩點之間距離。

18. 塔頂有直立之旗竿，今在離塔脚 a 尺之處，測得旗竿頂之仰角爲 α，塔頂之仰角爲 β，試證旗竿之高爲

$$a(\tan\alpha-\tan\beta)\text{尺}$$

19. 在上題中設 $a=180$, $\alpha=52°$, $\beta=32°$，求旗竿之長。

20. 高 25 尺之旗竿豎立於一屋頂上，今在地面上一點測得旗竿頂及屋頂之仰角各爲 $60°$ 及 $45°$，求屋高。

21. 試證例四中之山高亦可爲 $\dfrac{a\tan\beta}{\tan\beta-\tan\alpha}$ 尺。

22. 在上題中設 $a=50$, $\alpha=30°$, $\beta=45°$，求山高。

23. 試證例四中之山高亦可爲 $\frac{a\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$ 尺.

提示: 延長 CA 自 B 作 CA 之垂線,仿例三之解二法做.

24. 在上題中,設 $a=132.5$ 尺, $\alpha=32°15'$, $\beta=43°30'$, 求山高.

25. 在塔底測得一高樓之仰角爲 60°, 在塔頂測得其仰角爲 30°, 今已知樓高 75 尺,求塔高.

26. 在高 a 尺之山頂, 測得平地一塔頂之俯角爲 α, 塔脚之俯角爲 β, 求塔高.

27. 一人站在離一塔 a 尺之屋頂, 測得塔頂仰角爲 α, 塔底俯角爲 β, 求證塔高爲 $a(\tan\alpha+\tan\beta)$ 尺.

28. 一桿豎立於一土堆上, 今於平地上一點,測得桿頂及桿底之仰角各爲 60° 及 30°, 試證桿長爲土堆高之二倍.

29. 自航空母艦之瞭望台測空中飛機得仰角 α, 及其倒影之俯角 β, 瞭望台距海面高 h 尺,問飛機距海面幾尺?

30 從一點 A, 測得塔頂上旗竿之底及端之仰角各爲 30° 及 45°, 再走遠 300 尺至 B 點, 測得旗竿之仰角爲 20°, 求旗竿之高.

***31.** 在例五中設 $a=100$, $\alpha=45°$, $\beta=30°$, 求塔高.

***32.** 甲乙兩地相距 1000 尺,在甲測得某山之仰角爲 30°, 在乙測得此山之仰角爲 45°. 今甲在山之正東, 乙在山之正北,求山高.

***33.** 每小時速率 100 公里之飛機, 在空中直向對方逃走, 在距離 1500 公尺時, 測得其仰角爲 60°, 立卽開砲射擊之, 2 秒鐘後,恰命中此機,求炮發射之仰角.

*34. 我方一巡洋艦在一敵港之 $S\,10°W$，相距 10 浬，發見一敵國商船由港出發，向港之 $S\,80°\,E$ 方向駛行，測得其速率為每時 9 浬．問此巡洋艦須循何方向及何速率，始能經過 1 時 30 分之時間捕獲此船？

*35. 在船上測得海邊兩石與船適在一直線上，其方向為 $N15°E$，經 30 分鐘後再測之，則第一石在船之正東，第二石在船之北東，設船係循北西方向駛行，其速率為每時 10 浬，求兩石間之距離．

提示：從解兩個等腰三角形着手．

*36. 兩輪之半徑各為 5 尺及 1 尺，中心相距 8 尺．今以皮帶緊聯之，求皮帶之長．

*37. 兩輪之半徑各為 2 尺及 1 尺，中心相距 6 尺，今以皮帶交叉緊聯之，求皮帶之長．

提示：皮帶之直線部分為兩圓（卽兩輪周）之內公切線．

*38. 半徑 r 尺之氣球飛騰於空中，人立地面測得球體之兩視線所夾之角為 α，球之中心之仰角為 β，設人目比地高 h 尺，求證球之中心離地面為 $h+r\csc\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta$ 尺．

註：兩視線（卽測點至球之兩切線）與中心至測點之聯線在同一鉛垂面內．

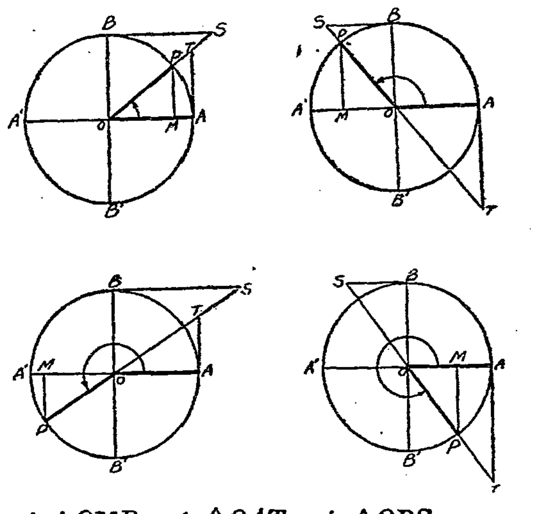
*39. 設兩圓互相外切，大圓之半徑為 R，小圓之半徑為 r，兩圓外公切線所夾之角為 2θ，求證 $\sin\theta=\frac{R-r}{R+r}$．

*40 設 r 為 $\triangle ABC$ 內切圓半徑，又 a 為對角 A 之邊，s 為三邊和之半，求證 $\tan\frac{1}{2}A=\frac{r}{s-a}$．

第　八　章

任意角函數值之變化

17. 三角函數之線值　在單位圓中，作互相垂直之兩直徑 $A'A$, $B'B$；命其交點爲 O. 在圓周上任取一點 P，聯 OP，命 $\angle AOP$ 之量爲 θ。作 $PM \perp OA$, $PN \perp OB$. 再在 A 及 B 各作圓之切線，交 OP 之延長線於 T 及 S，則



$$rt.\ \triangle OMP \sim rt.\ \triangle OAT \sim rt.\ \triangle OBS.$$

$$\therefore\quad MP/OM = AT/OA,\qquad OM/MP = BS/OB,$$

$$OP/OM = OT/OA,\qquad OP/MP = OS/OB.$$

令 $OA=OB=OP=1$。

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{MP}{OP}=MP,$$

$$\cos\theta=\frac{OM}{OP}=OM,$$

$$\tan\theta=\frac{MP}{OM}=\frac{AT}{OA}=AT,$$

$$\cot\theta=\frac{OM}{MP}=\frac{BS}{OB}=BS,$$

$$\sec\theta=\frac{OP}{OM}=\frac{OT}{OA}=OT,$$

$$\csc\theta=\frac{OP}{MP}=\frac{OS}{OB}=OS,$$

$$\operatorname{vers}\theta=1-\cos\theta=OA-OM=MA,$$

$$\operatorname{covers}\theta=1-\sin\theta=OB-MP=OB-ON=NB.$$

故在一單位圓中,一圓心角 θ 之八函數之數值,可用八條線段之長短(簡稱線值)表示.我國古時稱三角學爲八線法卽由於此也.

從上頁各圖可見:*

(i) 在第一象限中,角 θ 之所有函數均爲正值;

(ii) 在第二象限中,角 θ 之函數,只有正弦餘割爲正值;

(iii) 在第三象限中,角 θ 之函數,只有正切餘切爲正值;

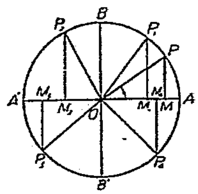
(iv) 在第四象限中,角 θ 之函數,只有餘弦正割爲正值.

(參考第7節).

*MP, AT 之方向,以向上者爲正,向下者爲負. OM, BS 之方向以自左至右者爲正,自右至左者爲負, OS, OT 之方向視 OP 之方向而定,與 OP 同向者爲正,與 OP 異向者爲負.

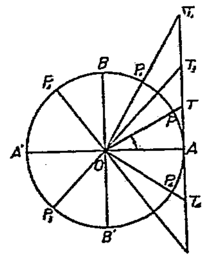
18. 函數之變跡 上節所述之圓心角θ，自$0°$逐漸增大至$360°$時，各函數值之變化情形，可由其代表線值之變化，考察得之。

(a) **正弦** 從右圖可見正弦MP之值在第一象限中爲正，自0逐漸增大至1；在第二象限中，仍爲正，但自1逐漸減小至0；在第三象限中則爲負，自0逐漸減小至-1；在第四象限中仍爲負，但自-1逐漸增大至0。



(b) **餘弦** 仍從上圖考察餘弦OM之值，在第一象限中爲正，自1逐漸減小至0；在第二限中則爲負，自0逐漸減小至-1；在第三象限中仍爲負，但自-1逐漸增大至0；在第四象限中又爲正，自0逐漸增大至1。

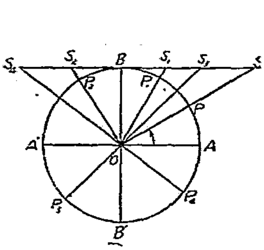
(c) **正切** 從右圖可見正切AT之值，在第一象限中爲正，自0逐漸增大至∞；在第二象限中則爲負，自$-\infty$逐漸增大至0；在第三象限中又爲正，自0逐漸增大至$+\infty$；在第四象限中又爲負，自$-\infty$逐漸增大至0。



(d) **正割** 仍從上圖考察，正割OT之值，在第一象限中爲正，自1逐漸增大至$+\infty$；在第二象限中則爲負，自$-\infty$逐漸增大至1；在第三象限中則爲負，但自1逐漸減小至$-\infty$；在第四象限中又爲正，但自$+\infty$逐漸減小至1。

(e) **餘切** 由下圖可見餘切BS之值，在第一象限中爲

正,自 $+\infty$ 逐漸減小至 0; 在第二象限中則爲負, 自 0 逐漸減小至 $-\infty$; 在第三象限又爲正, 自 $+\infty$ 逐漸減小至 0; 在第四象限中又爲負, 自 0 逐漸減小至 $-\infty$.



(f) 餘割 從上圖考察,餘割 OS 之值, 在第一象限中爲正, 自 $+\infty$ 逐漸減小至 1; 在第二象限中仍爲正, 但自 1 逐漸增大至 $+\infty$; 在第三象限中則爲負, 自 $-\infty$ 逐漸增大至 -1; 在第四象限中又爲負, 但自 -1 逐漸減小至 $-\infty$.

由上面各項所述, 顯然可知:

正弦及餘弦之絕對值, 不能大於 1;

正切及餘切之絕對值, 不能小於 1;

正切及餘切之絕對值, 並無限制(即可爲任何之正負值).

歸納以上結果, 角 θ 在 $0°$ 與 $360°$ 間之變化如下表:

函數＼角度	0°	I	90°	II	180°	III	270°	IV	360°
Sin	0	↗	1	↘	0	↘	−1	↗	0
Cos	1	↘	0	↘	−1	↗	0	↗	1
Tan	0	↗	±∞	↗	0	↗	±∞	↗	0
Cot	+∞	↘	0	↘	∓∞	↘	0	↘	−∞
Sec	1	↗	±∞	↗	−1	↘	∓∞	↘	1
Csc	+∞	↘	1	↗	±∞	↗	−1	↘	−∞

註: 如時間許可, 可參攷附錄中之函數圖解.

當角 θ 之值增加或減小 360° 之整倍數時，其終線之位置並不變更，故其函數值與角 θ 函數值完全相同，故

$$\sin(n\cdot 360^\circ+\theta)=\sin\theta,$$
$$\cos(n\cdot 360^\circ+\theta)=\cos\theta,$$
$$\tan(n\cdot 360^\circ+\theta)=\tan\theta,$$
$$\cot(n\cdot 360^\circ+\theta)=\cot\theta,$$
$$\sec(n\cdot 360^\circ+\theta)=\sec\theta,$$
$$\csc(n\cdot 360^\circ+\theta)=\csc\theta.$$

上之六式可用一個公式代表之如下：

$$\mathbf{Fun}(n\cdot 360^\circ+\theta)=\mathbf{Fun}\,\theta,$$

式中之 n 可爲任何之整數。

設用弧度作角之單位時，則上式應寫爲：

$$\mathbf{Fun}(2n\pi+\theta)=\mathbf{Fun}\,\theta.$$

例一：化下各函數爲小於 360° 之正角函數：

(a) $\sin 2220^\circ$,　(b) $\cos(-320^\circ)$.　(c) $\tan\frac{15}{4}\pi$.

【解】 (a) $\sin 2220^\circ=\sin(6\cdot 360^\circ+60^\circ)=\sin 60^\circ$.

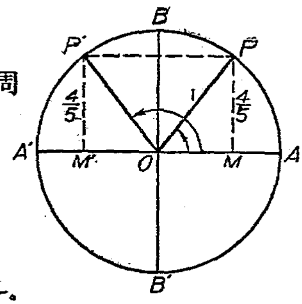
(b) $\cos(-320^\circ)=\cos[(-1)\cdot 360^\circ+40^\circ]$
$=\cos 40^\circ$.

(c) $\tan\frac{15}{4}\pi=\tan\left(2\pi+\frac{7}{4}\pi\right)=\tan\frac{7}{4}\pi$.

例二：求 $(a-b)^2\sin 90^\circ+(a+b)^2\cos 180^\circ+a\tan 360^\circ$ 之值。

【解】 原式 $=(a-b)^2\cdot(+1)+(a+b)^2\cdot(-1)+a\cdot 0$
$=a^2-2ab+b^2-(a^2+2ab+b^2)=-4ab.$

例三： 設 $\sin x=\frac{4}{5}$，試利用單位圓作出 x。



【解】 在 OB 上取 $ON=\frac{4}{5}$，

過 N 作 $A'A$ 平行線 $P'P$ 交圓周於 P' 及 P。聯 OP 及 OP'。

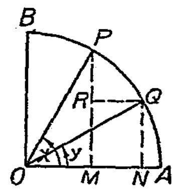
作 $PM\perp A'A$，$P'M'\perp A'A$，

則 $\sin AOP=MP=ON=\frac{4}{5}$，

又 $\sin AOP'=M'P'=ON=\frac{4}{5}$。

故 $\angle AOP,\angle AOP'$ 均爲所求之 x 角。

例四： 已知一銳角 x，求作角 y，使 $\sin y=\frac{1}{2}\sin x$。



【解】 在單位圓 O 內，作半徑 OP 使 $\angle AOP=x$。

作 $PM\perp OA$，取 MP 之中點 R。

作 RQ 平行於 OA，交圓周於 Q。

聯接 OQ，則 $\angle NOQ$ 即爲所求之 y 角。

因若作 $QN\perp OA$，則

$$\sin MOQ=NQ=MR=\frac{1}{2}MP=\frac{1}{2}\sin x.$$

習 題 十

1. 化下列各函數爲小於 360° 之正角函數：

(a) $\sin 396^\circ$ (b) $\cos 777^\circ 7' 7''$

(c) $\tan 1234^\circ$ (d) $\cot(-1035^\circ)$

(e) $\sec(-345^\circ 6')$ (f) $\csc(-765^\circ)$

2. 化下列各函數為小於 2π 之正角函數:

(a) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ (b) $\cos(-3\pi)$

(c) $\tan\left(-\frac{19}{5}\pi\right)$ (d) $\cot\frac{14}{3}\pi$

(e) $\sec 7\pi$ (f) $\csc\frac{22}{7}\pi$

3. 求下各式之值:

(a) $(a\sin 90^\circ+b\cos 180^\circ)(a\cos 0^\circ-b\sin 270^\circ)$.

(b) $(a\tan 180^\circ+b\cot 270^\circ)(a\sec 0^\circ+b\csc 90^\circ)$.

4. 求證 $(a^2+b^2)\cos 2\pi+(a^2-b^2)\sin 2\pi-2ab\sin(3\pi/2)$
$=(a+b)^2$.

*5. 已知 x 在 0° 與 360° 之間,求作角 x, 使 $\cos x=\frac{2}{3}$.

*6. 已知 x 在 0° 與 180° 之間,求作角 x, 使 $\tan x=-\frac{1}{2}$.

*7. 試由函數之線值,用幾何方法,證明:

(a) 當 $0^\circ<\theta<90^\circ$ 時, $\sin\theta<1$.

(b) 當 $0^\circ<\theta<45^\circ$ 時, $2\sin\theta>\sin 2\theta$.

(c) 當 $0^\circ<\theta<45^\circ$ 時, $\sin\theta<\cos\theta$.

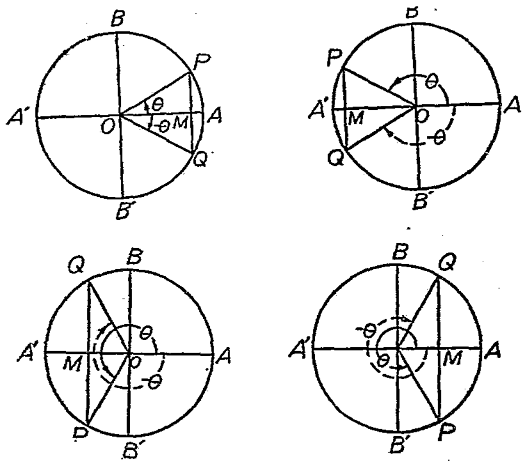
(d) 當 $45^\circ<\theta<90^\circ$ 時, $\sin\theta>\cos\theta$.

*8. 設 x 為銳角,求作角 y, 使

(a) $2\cos y=\cos x$. (b) $\sin y=\cos x$.

(d) $\tan y=3\tan x$. (d) $\tan y=2\sin x$.

19. 負角之函數 在單位圓 O 內，作兩半徑 OP, OQ，令 $\angle AOP$ 之量爲 θ，而 $\angle AOQ$ 之量爲 $-\theta$. 聯 PQ 交 $A'A$ 於 M，則 $A'A \perp PQ$.



在任一圖中，均有 $\angle POM = \angle QOM$，

故 $\quad rt.\triangle OPM \cong rt.\triangle OQM$，

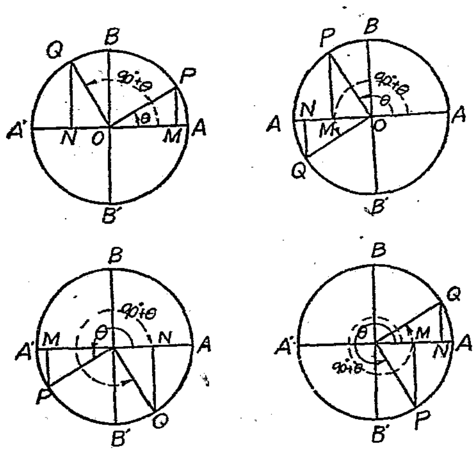
故其相當邊 MP, MQ 之長相等，但因其方向相反，

$$\therefore \quad MQ = -MP$$

故

$$\left.\begin{aligned}
&\sin(-\theta) = MQ = -MP = -\sin\theta,\\
&\cos(-\theta) = OM = \cos\theta,\\
&\tan(-\theta) = -\tan\theta,\\
&\cot(-\theta) = -\cot\theta,\\
&\sec(-\theta) = \sec\theta,\\
&\csc(-\theta) = -\csc\theta.
\end{aligned}\right\}(\text{甲})$$

20. $90+\theta$ 角之函數　在單位圓 O 內，作互相垂直之兩半徑 OP, OQ, 令 $\angle AOP$ 之量爲 θ, 則 $\angle AOQ$ 之量爲 $90^\circ+\theta$. 自 P,Q 作 $A'A$ 之垂線 PM,QN.



在任一圖中，均有 $\angle POM=\angle QON$,

$$\therefore \quad rt.\ \triangle OPM \cong rt.\ \triangle OQN,$$

故其相當邊之長相等，但因兩者方向相反，

$$\therefore \quad MP=-ON, \qquad NQ=OM,$$

故
$$\left.\begin{aligned}
&\sin(90^\circ+\theta)=NQ=OM=\cos\theta,\\
&\cos(90^\circ+\theta)=ON=-MP=-\sin\theta,\\
&\tan(90^\circ+\theta)=-\cot\theta,\\
&\cot(90^\circ+\theta)=-\tan\theta,\\
&\sec(90^\circ+\theta)=-\csc\theta,\\
&\csc(90^\circ+\theta)=\sec\theta.
\end{aligned}\right\}(乙)$$

21. n 90°±θ 角之函數　在第19節及第20節所證得之公式,不論 θ 之值爲何,均能適合.應用公式甲及乙,又能推得其他類似之公式如下:

(丙) $\sin(90°-\theta)=\cos\theta,\quad \cos(90°-\theta)=\sin\theta,$

$\tan(90°-\theta)=\cot\theta,\quad \cot(90°-\theta)=\tan\theta.$

(丁) $\sin(180°-\theta)=\sin\theta,\quad \cos(180°-\theta)=-\cos\theta,$

$\tan(180°-\theta)=-\tan\theta,\quad \cot(180°-\theta)=-\cot\theta.$

(戊) $\sin(180°+\theta)=-\sin\theta,\quad \cos(180°+\theta)=-\cos\theta,$

$\tan(180°+\theta)=\tan\theta,\quad \cot(180°+\theta)=\cot\theta.$

(巳) $\sin(270°-\theta)=-\cos\theta,\quad \cos(270°-\theta)=-\sin\theta,$

$\tan(270°-\theta)=\cot\theta,\quad \cot(270°-\theta)=\tan\theta.$

(庚) $\sin(270°+\theta)=-\cos\theta,\quad \cos(270°+\theta)=\sin\theta,$

$\tan(270°+\theta)=-\cot\theta,\quad \cot(270°+\theta)=-\tan\theta.$

(辛) $\sin(360°-\theta)=-\sin\theta,\quad \cos(360°-\theta)=\cos\theta,$

$\tan(360°-\theta)=-\tan\theta,\quad \cot(360°-\theta)=-\cot\theta.$

例如　$\sin(90°-\theta)=\sin[90°+(-\theta)]=\cos(-\theta)=\cos\theta.$

$\cos(90°-\theta)=\cos[90°+(-\theta)]=-\sin(-\theta)=\sin\theta.$

$\sin(180°-\theta)=\sin[90°+(90°-\theta)]=\cos(90°-\theta)=\cos\theta.$

$\cos(180°-\theta)=\cos[90°+(90°-\theta)]=-\sin(90°-\theta)=-\sin\theta.$

$\sin(180°+\theta)=\sin[90°+(90°+\theta)]=\cos(90°+\theta)=-\sin\theta.$

$\cos(180°+\theta)=\cos[90°+(90°+\theta)]=-\sin(90°+\theta)=-\cos\theta.$

其他亦可仿此推得.

註: 因 $\sec\theta=1/\cos\theta$, $\csc\theta=1/\sin\theta$, 故 $n\,90°\pm\theta$ 角之正割及餘割函數之變化,與餘弦及正弦之變化,完全相似,且其應用不廣,故關於正割及餘割函數之變化公式,本書概行略去.

今試考察上面所舉之公式甲至辛，得

1. 凡左邊爲 $90°$ 之偶數倍數 $\pm\theta$ 之函數，化至結果，仍爲 θ 之原名函數.

2. 凡左邊爲 $90°$ 之奇數倍數 $\pm\theta$ 之函數，化至結果，則爲 θ 之餘名函數.

或以式表之如下（式中之 n 爲任意整數）：

$$\mathbf{Fun}[2\mathrm{n}\cdot 90°\pm\theta]=\square\,\mathbf{Fun}\,\theta. \qquad (公式七\ A)$$

$$\mathbf{Fun}[(2\mathrm{n}+1)90°\pm\theta]=\square\,\mathrm{co}\text{-}\mathbf{Fun}\,\theta. \qquad (公式八\ A)$$

設用弧度作角之單位，則公式七 A，八 A，應寫爲：

$$\mathbf{Fun}\left[2\mathrm{n}\cdot\frac{\pi}{2}\pm\theta\right]=\square\,\mathbf{Fun}\,\theta. \qquad (公式七\ B)$$

$$\mathbf{Fun}\left[(2\mathrm{n}+1)\frac{\pi}{2}\pm\theta\right]=\square\,\mathrm{co}\text{-}\mathbf{Fun}\,\theta \qquad (公式八\ B)$$

公式七，公式八中其右邊之"符號"，可由下表決定之：

符號 角 函數	$90°-\theta$ $n\,360°+\theta$	$90°+\theta$ $180°-\theta$	$180°+\theta$ $270°-\theta$	$270°+\theta$ $360°-\theta$ $-\theta$
sin(csc)	+	+	−	−
cos(sec)	+	−	−	+
tan(cot)	+	−	+	−

應用公式七，八，則凡負角之函數，均可化爲正角之函數，大於 $360°$ 角之函數，均可化爲銳角之函數，並可化爲小於 $45°$ 角之函數.

例一： 求 $\sin 450°$，$\tan(-5\pi/3)$，$\sec(-225°)$ 之值.

【解】 $\sin 450°=\sin(360°+90°)=\sin 90°=1.$

$$\tan\left(-\frac{5}{3}\pi\right)=-\tan\frac{5}{3}\pi=-\tan\left(2\pi-\frac{1}{3}\pi\right)$$
$$=\tan\pi/3=\sqrt{3}.$$
$$\sec(-225^\circ)=\sec 225^\circ=\sec(180^\circ+45^\circ)$$
$$=-\sec 45^\circ=-\sqrt{2}.$$

例二: 應用三角函數表，求 $\sin 165^\circ 12'$ 及 $\tan 143^\circ 34'$ 之值.

【解】 $\sin 165^\circ 12'=\sin(180^\circ-14^\circ 48')$
$$=\sin 14^\circ 48'=0.2544.$$
$$\tan 143^\circ 34'=\tan(180^\circ-36^\circ 26')$$
$$=-\tan 36^\circ 26'=-0.7382.$$

例三: 化簡 $[\sin(x-90^\circ)+\cos(x-180^\circ)]\cdot[\sec(-x)+\csc(x-270^\circ)]$

【解】 原式$=[-\sin(90^\circ-x)+\cos(180^\circ-x)]\cdot[\sec x-\cos(270^\circ-x)]$
$$=[-\cos x-\cos x]\cdot[\sec x+\sec x]$$
$$=[-2\cos x][2\sec x]=-4.$$

例四: 求適合下各式之 x. (x 爲比 360° 小之正角):

(a) $\tan x+1=0$.　　(b) $\cos x=-\sqrt{3}/2$

【解】 (a) $\tan x=-1=-\tan 45^\circ$
$$=\tan(180^\circ-45^\circ)=\tan 135^\circ$$
$$=\tan(360^\circ-45^\circ)=\tan 315^\circ.$$
$\therefore$　$x=135^\circ$　或　315°.

(b) 今 $\cos x=-\frac{1}{2}\sqrt{3}=-\cos 30^\circ$
$$=\cos(180^\circ-30^\circ)=\cos 150^\circ$$

$$=\cos(180°+30°)=\cos 210°.$$

$$\therefore\quad x=150° \text{ 或 } 210°.$$

習題十一

1. 填滿下表:

	30°	60°	120°	150°	210°	240°	300°	330°
正　弦								
餘　弦								
正　切								
餘　切								

2. 填滿下表:

	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
正　弦									
餘　弦									
正　切									
餘　切									

3. 試求下列諸角之正弦,餘弦,及正切之值:

(a) $7\pi/6$　(b) $-5\pi/3$　(c) $660°$　(d) $-225°$

4. 試從三角函數表查出下列各函數之值:

(a) $\sin 123°45'$　　(b) $\cos(-99°9')$

(c) $\tan 111°11'$　　(d) $\cot(-33°33')$

5. 化簡下列各式:

(a) $\sin(y-270°)$,　(b) $\tan(x-2\pi)$,

(c) $\cos(x-810°)$, (d) $\cot(x-5\pi/2)$.

6. 求適合下各式之 x, (x 爲比 360° 小之正角):

(a) $2\sin x=\sqrt{3}$. (b) $2\cos x=-1$.

(c) $\cot x=-1$. (d) $\tan x=\sqrt{3}$.

7. 求適合下各式之 x, (x 爲比 360° 小之正角):

(a) $2\sin x=1$. 但 $\tan x<0$.

(b) $\tan x=-\sqrt{3}$, 但 $\cos x>0$.

(c) $\sec x=-\sqrt{2}$, 但 $\sin x<0$.

(d) $\csc x=-2$, 但 $\sec x>0$.

8. 化簡下列各式:

(a) $\sec(90°-x)[\sin(180°-x)+\sin(x-360°)]$.

(b) $\dfrac{[\sin(\theta-90°)+\cos(\theta-180°)]\cdot[\sec(\theta-90°)-\csc(\theta-180°)]}{\tan(\theta-90°)-\cot(\theta-180°)}$.

9. 求證:

(a) $\cot A+\tan(180°+A)+\tan(270°+A)$
$+\tan(360°-A)=0$.

(b) $\dfrac{(a-b)\tan\left(\frac{1}{2}\pi-A\right)}{\cot(\pi-A)}+\dfrac{(b-a)\tan\left(\frac{1}{2}\pi+A\right)}{\cot(\pi+A)}=0$.

10. 在 $\triangle ABC$ 中試證:

(a) $\sin A=\sin(B+C)$.

(b) $\tan A=-\tan(B+C)$.

(c) $\cos\frac{1}{2}(B+C)=\sin\frac{1}{2}A$.

(d) $\cot\frac{1}{2}(B+C)=\tan\frac{1}{2}A$.

第　九　章

複　角　函　數

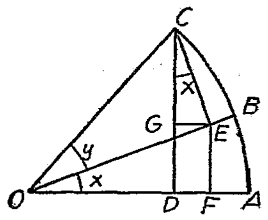
22. 兩角和及差之函數　兩角 x,y 和及差之函數，可用此二角之各函數表示，其基本公式為：

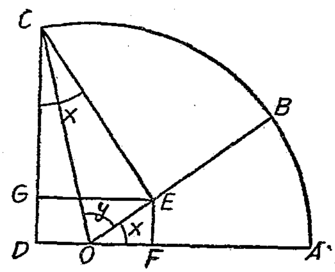
$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y \qquad (公式九)$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y \qquad (公式十)$$

此二公式不論 x,y 之值為何，均能適合，今為證明便利計，先設 x 及 y 均為小於 $90°$ 之正角。在單位圓中，作

$$\angle AOB=x,\quad \angle BOC=y,\qquad 則\quad \angle AOC=x+y.$$





在左圖中，$x+y<90°$，作 $CD\perp OA$ 交 OA 於 D，$CE\perp OB$，$EF\perp OA$，$EG\perp CD$。

則 $OD=OF-DF$
$=OF-GE$.

在右圖中，$x+y>90°$，作 $CD\perp OA$ 交 AO 之延長線於 D，$CE\perp OB$，$EF\perp OA$，$EG\perp CD$。

則 $OD=-DO=-(DF-OF)$
$=OF-DF=OF-GE$.

故在任一圖內，均有 $OD=OF-GE$.

又 $$DC=DG+GC.$$

$$\angle ECG=90^\circ-\angle CEG=\angle GEO=\angle AOB=x.$$

今 $OA=OB=OC=1$ （因均為單位圓內之半徑）

$$\therefore\quad \sin(x+y)=DC=DG+GC=FE+GC \qquad (1)$$

$$\cos(x+y)=OD=OF-DF=OF-GE \qquad (2)$$

今 $$FE=\frac{FE}{OC}=\frac{FE}{OE}\cdot\frac{OE}{OC}=\sin x\cos y,$$

$$GC=\frac{GC}{OC}=\frac{GC}{CE}\cdot\frac{CE}{OC}=\cos x\sin y,$$

$$OF=\frac{OF}{OC}=\frac{OF}{OE}\cdot\frac{OE}{OC}=\cos x\cos y,$$

$$GE=\frac{GE}{OC}=\frac{GE}{CE}\cdot\frac{CE}{OC}=\sin x\sin y,$$

代入(1)，(2)卽得

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y.$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y.$$

若 x,y 中有一角爲鈍角，假定 x 爲鈍角，則可令 $x=90^\circ+x'$，今 x' 卽爲銳角，則

$$\sin(x+y)=\sin(90+x'+y)=\cos(x'+y)=\cos x'\cos y-\sin x'\sin y$$

但 $$\cos x'=\cos(x-90^\circ)=\cos(90^\circ-x)=\sin x,$$

$$\sin x'=\sin(x-90^\circ)=-\sin(90^\circ-x)=-\cos x,$$

$$\therefore\quad \sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y.$$

同樣 $$\cos(x+y)=\cos(90^\circ+x'+y)=-\sin(x'+y)$$

$$=-\sin x'\cos y-\cos x'\sin y=\cos x\cos y-\sin x\sin y.$$

故在公式九及公式十內，設有一角爲鈍角時，亦能適合．用類似之法，可證不論 x,y 之值爲何，公式九，十均可成立，而由此所推得之其他公式，亦可適用於任何之角．

今 $\tan(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}$

$$=\frac{\dfrac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\cos x\cos y-\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}.$$

$$\cot(x+y)=\frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)}=\frac{\cos x\cos y-\sin x\sin y}{\sin x\cos y+\cos x\sin y}$$

$$=\frac{\dfrac{\cos x\cos y-\sin x\sin y}{\sin x\sin y}}{\dfrac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\sin x\sin y}}=\frac{\cot y\cot x-1}{\cot y+\cot x}.$$

因得 $\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$ (公式十一)

$\cot(x+y)=\frac{\cot y\cot x-1}{\cot y+\cot x}$ (公式十二)

在公式九至十二中，設以 $-y$ 代 y 卽得兩角差之公式爲：

$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$ (公式十三)

$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$ (公式十四)

$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$ (公式十五)

$\cot(x-y)=\frac{\cot y\cot x+1}{\cot y-\cot x}$ (公式十六)

例如在公式九中以 $-y$ 代 y，卽得

$\sin(x-y)=\sin x\cos(-y)+\cos x\sin(-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y.$

在公式十中，以 $-y$ 代 y，卽得

$\cos(x-y)=\cos x\cos(-y)-\sin x\sin(-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y.$

註：複角 $x\pm y$ 之正割餘割函數，可先化爲餘弦正弦推求，故不另立公式。

例一: 求 $\sin 15^\circ$ 及 $\tan 15^\circ$ 之值.

【解】 $\sin 15^\circ=\sin(60^\circ-45^\circ)$

$$=\sin 60^\circ\cos 45^\circ-\cos 60^\circ\sin 45^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$\tan 15^\circ=\tan(60^\circ-45^\circ)=\frac{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 60^\circ\tan 45^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}.$$

例二: 設 $\sin x=\frac{3}{5}$, $\sin y=\frac{5}{13}$, 且 x 爲銳角, y 爲鈍角, 求 $\sin(x+y)$ 之值.

【解】 今 x 爲銳角, 故 $\cos x>0$,

$$\therefore\quad \cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}.$$

又 y 爲鈍角, 則 $\cos y<0$

$$\therefore\quad \cos y=-\sqrt{1-\sin^2 y}=-\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}$$

$$=-\frac{12}{13}.$$

$$\therefore\quad \sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

$$=\frac{3}{5}\left(-\frac{12}{13}\right)+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=-\frac{16}{65}.$$

例三: 求證 $\sin^2 x-\sin^2 y=\sin(x+y)\sin(x-y)$.

【證】 今右邊之式為

$$(\sin x\cos y+\cos x\sin y)(\sin x\cos y-\cos x\sin y)$$
$$=\sin^2 x\cos^2 y-\cos^2 x\sin^2 y$$
$$=\sin^2 x(1-\sin^2 y)-(1-\sin^2 x)\sin^2 y$$
$$=\sin^2 x-\sin^2 y=\text{左邊}.$$

∴ 左邊=右邊.

例四: 求證 $\sin(A+B+C)=\sin A\cos B\cos C$
$+\sin B\cos C\cos A+\sin C\cos A\cos B$
$-\sin A\sin B\sin C$.

【證】 左邊 $=\sin(A+B)\cos C+\cos(A+B)\sin C$
$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\cos C$
$+(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\sin C=$右邊.

習題十二

1. 求 $\sin 75°$, $\cos 75°$, $\tan 75°$ 之值.
2. 求 $\cos 15°$, $\cot 15°$, $\csc 15°$ 之值.
3. 設 A, B 均為銳角, 又 $\cos A=\dfrac{40}{41}$, $\cos B=\dfrac{63}{65}$, 求 $\cos(A+B)$ 及 $\sin(A-B)$ 之值.
4. 設 $\cos x=\dfrac{4}{5}$, $\cos y=\dfrac{3}{4}$, 求 $\cos(x+y)$ 之值.

   提示: 有四種情形, 應分別求之.
5. 設 $\tan A=\dfrac{1}{3}$, $\tan B=-2$, 求 $\tan(A-B)$ 之值.
6. 設 A 為鈍角, B 為銳角, 又 $\sin A=\dfrac{3}{5}$, $\cos B=\dfrac{5}{13}$, 求 $\cot(A+B)$ 之值.

求證下列各恆等式 (7—16):

7. $\dfrac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}+\dfrac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\dfrac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}=0$。

8. $\dfrac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\dfrac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}$。

9. $\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}=\dfrac{1}{\cot\alpha-\cot\beta}$。

10. $\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$。

11. $\sqrt{3}\cos A+\sin A=2\cos(A-30^\circ)$。

12. $\cos(x+y)\cos(x-y)=\cos^2 x-\sin^2 y$。

13. $\cos(x-y)-\sin(x+y)=(\cos x-\sin x)(\cos y-\sin y)$。

14. $\dfrac{\cos 2x}{\csc x}+\dfrac{\sin 2x}{\sec x}=\dfrac{1}{\csc 3x}$。

15. $\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C$
$-\cos B\sin C\sin A-\cos C\sin A\sin B$。

16. $\tan(A+B+C)=\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}$。

17. 設 $\tan A=\dfrac{1}{3}$, $\tan B=\dfrac{1}{5}$, $\tan C=\dfrac{1}{7}$, $\tan D=\dfrac{1}{8}$,
求 $\tan(A+B+C+D)$ 之值。

提示: 先求 $\tan(A+B)$ 及 $\tan(C+D)$ 之值。

18. 設 $i^2=-1$, 求證
$(\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)=\cos(x+y)+i\sin(x+y)$。

19. 設 $x+y=45^\circ$, 求證
$(1+\tan x)(1+\tan y)=2$。

提示: 從 $\tan(x+y)=\tan 45^\circ$ 着手。

23. 倍角函數 在公式九至十一中，令 $y=x$，則得

$$\sin(x+x)=\sin x\cos x+\cos x\sin x=2\sin x\cos x.$$

$$\begin{aligned}\cos(x+x)&=\cos x\cos x-\sin x\sin x=\cos^2 x-\sin^2 x\\&=\cos^2 x-(1-\cos^2 x)=2\cos x^2-1\\&=(1-\sin^2 x)-\sin^2 x=1-2\sin^2 x.\end{aligned}$$

$$\tan(x+x)=\frac{\tan x+\tan x}{1-\tan x\tan x}=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.$$

因得下列各個關於二倍角之公式：

$$\sin 2x=2\sin x\cos x \qquad (\text{公式十七})$$

$$\begin{aligned}\cos 2x&=\cos^2 x-\sin^2 x\\&=2\cos^2 x-1\\&=1-2\sin^2 x \qquad (\text{公式十八})\end{aligned}$$

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \qquad (\text{公式十九})$$

例一： 求證 $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$.

【證】 $$\begin{aligned}\cos 3x=\cos(x+2x)&=\cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x\\&=\cos x(2\cos^2 x-1)-2\sin^2 x\cos^2 x\\&=2\cos^2 x-\cos x-2\cos x(1-\cos^2 x)\\&=4\cos^3 x-3\cos x.\end{aligned}$$

例二： 求證 $\sin 2x=\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$.

【證】 右邊 $=\dfrac{2\sin x/\cos x}{1+\sin^2 x/\cos^2 x}=\dfrac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x+\sin^2 x}$

$=\sin 2x=$ 左邊.

$\therefore$ 左邊 $=$ 右邊.

例三：求證 $\cos^6 x+\sin^6 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$。

【證】 左邊$=(\cos^2x+\sin^2x)(\cos^4x-\cos^2x\sin^2x+\sin^4x)$

$=(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$

$=1-\frac{3}{4}(2\sin x\cos x)^2=$右邊。

*例四：求證 $\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$。

【證】 令 $18^\circ=x$，　則　$5x=90^\circ$，

∴　$2x=90^\circ-3x$，

∴　$\sin 2x=\sin(90^\circ-3x)=\cos 3x$，

即　$2\sin x\cos x=4\cos^3 x-3\cos x$。

今　$\cos x=\cos 18^\circ\neq 0$，

∴　$2\sin x=4\cos^2 x-3$，

即　$2\sin x=4(1-\sin^2 x)-3$，

即　$4\sin^2 x+2\sin x-1=0$，

∴　$\sin x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$。

今　$\sin 18^\circ>0$，　故負值不合。

∴　$\sin 18^\circ=(\sqrt{5}-1)/4$

習題十三

1. 已知 $\cos A=\frac{3}{5}$，求 $\cos 2A$ 及 $\cos 3A$ 之值。

2. 已知 $\sin A=\frac{1}{3}$，求 $\cos 2A$ 及 $\sin 2A$ 之值。

3. 已知 $\tan A=\sqrt{2}$，求 $\tan 2A$ 及 $\cot 2A$ 之值。

4. 設 $\tan x=2$，$\tan y=\frac{1}{3}$，求 $\tan(2x+y)$ 之值。

求證下列各恆等式(5—16)：

5. $\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A$.

6. $\cos 2A=\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$.

7. $\cot x-\tan x=2\cot 2x$.

8. $\tan(45^\circ+x)-\tan(45^\circ-x)=2\tan 2x$.

9. $\cot A+\tan A=2\csc 2A$.

10. $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$.

11. $\tan 3x=\dfrac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$.

12. $\sin 4x=4\sin x\cos x-8\sin^3 x\cos x$.

13. $\cos 5x=5\cos x-20\cos^3 x+16\cos^5 x$.

14. $\cos^6 A+\sin^6 A=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4A$.

15. $\cos^6 A-\sin^6 A=\cos 2A\left(1-\frac{1}{4}\sin^2 2A\right)$.

提示：$\sin(3x-x)=\sin(4x-2x)$.

16. $\sin 3x\cos x+\sin 2x\cos 4x=\sin 4x\cos 2x+\sin x\cos 3x$.

*17. 已知 $\sin 2x=\frac{2}{3}$，求 $\cos^4 x+\sin^4 x$ 之值。

提示：$\cos^4 x+\sin^4 x=(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$.

*18. 從 $\sin 18^\circ$ 之值，推求 $\cos 18^\circ$ 及 $\cos 36^\circ$ 之值。

24. 半角函數 在公式十八中,設以 $\frac{x}{2}$ 代 x, 則得

$$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=1-2\sin^2\frac{x}{2}.$$

$$\therefore\quad \sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\qquad\text{(公式二十)}$$

$$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\qquad\text{(公式二十一)}$$

相除得 $$\tan\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\qquad\text{(公式二十二 A)}$$

以上各式稱半角函數公式,式中之符號,須視 $\frac{x}{2}$ 之值而定.

今 $$\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

又 $$\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

故公式二十二 A 又可寫成

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x}{1+\cos x}\qquad\text{(公式二十二B)}$$

註: 半角函數公式,除在計算問題,當 $\frac{x}{2}$ 之值已知時,偶一用之外,平常都避免不用,因符號之爲正爲負,不易決定也.

例一： 求 $\cos 22°\frac{1}{2}$ 及 $\tan 22°\frac{1}{2}$ 之值。

【解】 $\cos 22°\frac{1}{2}=\cos\frac{45°}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}}$

$$=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}/2}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

$$\tan 22°\frac{1}{2}=\tan\frac{45°}{2}=\frac{1-\cos 45°}{\sin 45°}=\frac{1-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1.$$

例二： 求 $\cos 112°\frac{1}{2}$ 之值.

【解】 $\cos 112°\frac{1}{2}=\cos\frac{225°}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos 225°}{2}}$

$$=-\sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}}=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

例三： 已知 $\cos x=-\frac{1}{8}$，x 在 $450°$ 與 $540°$ 之間，求 $\sin\frac{x}{2}$ 之值。

【解】 x 在 $450°$ 與 $540°$ 之間，則 $\frac{x}{2}$ 在 $225°$ 與 $270°$ 之

間，故 $\sin\frac{x}{2}<0$。

$$\therefore\quad \sin\frac{x}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}=-\sqrt{\frac{9}{16}}=-\frac{3}{4}.$$

*例四：設 x 爲銳角，求證

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}).$$

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}).$$

【證】 今 $\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=1 \qquad (1)$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sin x \qquad (2)$$

(1)+(2)，$\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2=1+\sin x$

今 x 爲銳角，$\sin\frac{x}{2}>0$，$\cos\frac{x}{2}>0$，$\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}>0$

$$\therefore\quad \sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=\sqrt{1+\sin x} \qquad (3)$$

(1)−(2)，$\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2=1-\sin x$

今 x 爲銳角，$\frac{x}{2}<45°$，$\sin\frac{x}{2}<\cos\frac{x}{2}$

$$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=-\sqrt{1-\sin x} \qquad (4)$$

$\frac{(3)+(4)}{2}$，$\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x})$.

$\frac{(3)-(4)}{}$，$\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})$.

習題十四

1. 已知 $\cos A=\frac{1}{2}$，求 $\sin\frac{A}{2}$，$\cos\frac{A}{2}$，$\tan\frac{A}{2}$ 之値。

2. 已知 $\cos A=-\frac{7}{25}$，且 A 在 $540°$ 與 $630°$ 之間，求 $\sin\frac{A}{2}$，$\cos\frac{A}{2}$ 及 $\tan\frac{A}{2}$ 之値。

3. 已知 $\sin A=\frac{1}{3}$，且 A 之終線在第二象限內，求 $\cot\frac{A}{2}$ 之値。

4. 求 $\sin 67°30'$，$\cos 67°30'$ 及 $\tan 67°30'$ 之値。

5. 已知 $\tan\frac{A}{2}=t$，求 $\tan A$ 之値，並證

$$\sin A=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos A=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

提示：$\sin A=\frac{\sin A}{1}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}}$.

6. 求 $\cos^4 22°\frac{1}{2}+\cos^4 67°\frac{1}{2}$ 之値。

*7. 求證 $\tan 7°\frac{1}{2}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$.

*8. 設 x 爲鈍角，求證

(a) $\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})$.

(b) $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x})$.

25. 和差化積及積化和差 從公式九及公式十三，

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$

相加得 $$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y \quad (1)$$

相減得 $$\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y \quad (2)$$

又從公式十及公式十四，

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

相加得 $$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y \quad (3)$$

相減得 $$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y \quad (4)$$

令 $x+y=A,\qquad x-y=B,$

則 $$x=\frac{1}{2}(A+B),\quad y=\frac{1}{2}(A-B).$$

代入(1)，(2)，(3)，(4)即得

$$\left.\begin{aligned}
\sin A+\sin B&=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)\\
\sin A-\sin B&=2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)\\
\cos A+\cos B&=2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)\\
\cos A-\cos B&=-2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)
\end{aligned}\right\}\text{(公式二十三)}$$

此組公式稱爲正弦，餘弦之和差化積公式。

又(1)，(2)，(3)，(4)可寫爲

$$\left.\begin{aligned}\sin x\cos y&=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]\\ \cos x\sin y&=\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]\\ \cos x\cos y&=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]\\ \sin x\sin y&=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]\end{aligned}\right\}(\text{公式二十四})$$

此組公式稱爲正弦餘弦之積化和差公式.

公式二十三及公式二十四在三角學中應用甚廣，學者必須熟記.

例一：應用和差化積及積化和差公式化簡下列各式：

(a) $\cos 160°-\cos 40°$　　(b) $\sin 70°-\cos 80°$

(c) $\sin 75°\sin 15°$

(d) $\cos\left(\frac{1}{4}\pi+\theta\right)\cos\left(\frac{1}{4}\pi-\theta\right)$.

【解】 (a) 原式$=-2\sin 100°\sin 60°$

$=-\sqrt{3}\sin 100°=-\sqrt{3}\sin 80°$.

(b) 原式$=\sin 70°-\sin 10°=2\cos 40°\sin 30°$

$=\cos 40°$.

(c) 原式$=\frac{1}{2}[\cos 60°-\cos 90°]$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{4}$.

(d) 原式$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{2}\pi+\cos 2\theta\right)=\frac{1}{2}\cos 2\theta$.

例二：求證 $\dfrac{\sin A+\sin 3A+\sin 5A}{\cos A+\cos 3A+\cos 5A}=\tan 3A$.

【解】 左邊$=\dfrac{(\sin 5A+\sin A)+\sin 3A}{(\cos 5A+\cos A)+\cos 3A}$

$=\dfrac{2\sin 3A\cos 2A+\sin 3A}{2\cos 3A\cos 2A+\cos 3A}$

$=\dfrac{\sin 3A(2\cos 2A+1)}{\cos 3A(2\cos 2A+1)}=\dfrac{\sin 3A}{\cos 3A}$

$=\tan 3A=$右邊.

例三：求證 $\cos 40^\circ+\cos 80^\circ+\cos 160^\circ=0$

【證】 左邊$=(\cos 80^\circ+\cos 40^\circ)-\cos 160^\circ$

$=2\cos 60^\circ\cos 20^\circ-\cos 20^\circ$

$=\cos 20^\circ-\cos 20^\circ=0$.

*例四：求 $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ$ 之値.

【證】 原式$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 80^\circ\sin 40^\circ\sin 20^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 80^\circ\left[\dfrac{1}{2}\left(\cos 20^\circ-\cos 60^\circ\right)\right]$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{8}\sin 80^\circ+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 80^\circ\cos 20^\circ$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{8}\sin 80^\circ+\dfrac{\sqrt{3}}{8}(\sin 100^\circ+\sin 60^\circ)$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{8}\sin 80^\circ+\dfrac{\sqrt{3}}{8}\sin 80^\circ+\dfrac{\sqrt{3}}{8}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{3}{16}$.

習題十五

1. 試將下列各式變形為積：

(a) $\sin 6x+\sin 4x$. (b) $\cos 6x-\cos 4x$.

(c) $\cos\frac{1}{2}x+\cos\frac{1}{3}x$. (d) $\cos 10^\circ-\sin 40^\circ$.

(b) $\sin\left(\frac{1}{6}\pi+x\right)-\sin\left(\frac{1}{6}\pi-x\right)$.

2 試將下列各式變形為和差式：

(a) $2\sin 3x\cos 2x$。

(b) $\sin(x-3y)\sin(y-3x)$.

(c) $\cos\frac{1}{2}x\sin\frac{1}{3}x$.

(d) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

求證下列各恆等式(3—20)：

3. $\dfrac{\cos x+\cos y}{\cos y-\cos x}=\cot\frac{1}{2}(x+y)\cot\frac{1}{2}(x-y)$.

4. $\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{\sin 2x+\sin 3x}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$.

5. $\dfrac{\cos B-\cos A}{\sin(A+B)}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}$.

6. $\dfrac{\cos 7x-\cos 5x+\cos 3x-\cos x}{\sin 7x-\sin 5x-\sin 3x+\sin x}=\cot 2x$.

7. $\dfrac{\cos A+\cos 5A+\cos 9A}{\sin A+\sin 5A+\sin 9A}=\cot 5A$.

8. $\cos x+\cos(x+120^\circ)+\cos(x+240^\circ)=0.$

9. $\cos 20^\circ+\cos 60^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ=\dfrac{1}{2}.$

10. $\sin(B+C-A)+\sin(C+A-B)+\sin(A+B-C)$
$$=\sin(A+B+C)+4\sin A\sin B\sin C.$$

11. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)$
$$=4\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

12. $\cos 5A=5\cos A-20\cos^3 A+16\cos^5 A.$

提示：證明 $\cos 5A+\cos A=6\cos A-20\cos^3 A+16\cos^5 A.$

13. $\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)$
$$+\cos(\alpha+\beta-\gamma)=4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

14. $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ=\dfrac{1}{16}.$

*15. $\tan 20^\circ\tan 40^\circ\tan 80^\circ=\sqrt{3}.$

*16. $\cos^2 A+\cos^2(60^\circ+A)+\cos^2(60^\circ-A)=\dfrac{3}{2}.$

提示：利用 $2\cos^2 A=1+\cos 2A.$

*17. $\dfrac{\sin x\sin 2x+\sin 3x\sin 6x+\sin 4x\sin 13x}{\sin x\cos 2x+\sin 3x\cos 6x+\sin 4x\cos 13x}=\tan 9x.$

提示：先將積化為和差，再由和差化為積式.

*18 $\cos\dfrac{3}{7}\pi-\cos\dfrac{2}{7}\pi+\cos\dfrac{1}{7}\pi=\dfrac{1}{2}.$

提示：左邊 $=\cos\frac{1}{7}\pi+\cos\frac{3}{7}\pi+\cos\frac{5}{7}\pi$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{1}{7}\pi}\left(2\cos\frac{1}{7}\pi\sin\frac{1}{7}\pi+2\cos\frac{3}{7}\pi\sin\frac{1}{7}\pi+\cdots\right).$$

26. 複角和爲定值之恒等式 在三角恆等式中，常有三角之和爲定值者，最常遇見之關係爲 $A+B+C=180°$. 對於此種問題應先注意下列各種變化。

$$\sin(B+C)=\sin A,\qquad \sin A=\sin(B+C);$$
$$\cos(B+C)=-\cos A,\qquad \cos A=-\cos(A+C);$$
$$\tan(B+C)=-\tan A,\qquad \tan A=-\tan(B+C);$$
$$\cot(B+C)=-\cot A,\qquad \cot A=-\cot(B+C).$$

又若 $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90°$，則有

$$\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{A}{2},\qquad \sin\frac{A}{2}=\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right);$$
$$\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\sin\frac{A}{2},\qquad \cos\frac{A}{2}=\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right);$$
$$\tan\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\cot\frac{A}{2},\qquad \tan\frac{A}{2}=\cot\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right);$$
$$\cot\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\tan\frac{A}{2},\qquad \cot\frac{A}{2}=\tan\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right).$$

三個或三個以上角之和爲其他定值時，亦有類似之關係。

例一：設 $A+B+C=180°$，求證

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C.$$

【證】 左邊 $=\sin A+(\sin B+\sin C)$

$$=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C).$$

今 $A+B+C=180°$, $\quad\therefore\ \frac{1}{2}(B+C)=90°-\frac{1}{2}A.$

$\therefore\ \cos\frac{1}{2}A=\sin\frac{1}{2}(B+C),\quad \sin\frac{1}{2}A=\cos\frac{1}{2}(B+C),$

卽 $\text{左邊}=2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{A}{2}+2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$

$$=2\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

例二: 設 $A+B+C=\pi$，求證

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$$

【證】 令 $A+B+C=\pi$, $\therefore\ A+B=\pi-C$.

$$\therefore\ \tan(A+B)=\tan(\pi-C)$$

卽 $\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$

$$\therefore\ \tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\tan B\tan C$$

$$\therefore\ \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$$

例三: 設 $A+B+C=\pi$，求證

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}.$$

【證】 $\text{右邊}=2\cos\frac{\pi-A}{4}\cdot 2\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$

$$=2\cos\frac{\pi-A}{4}\left[\cos\frac{2\pi-(B+C)}{4}+\cos\frac{B-C}{4}\right]$$

$$=2\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi+A}{4}+2\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{B-C}{4}$$

$$=\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=\text{左邊}.$$

$\therefore$ 左邊=右邊.

例四 設 $A+B+C=90^\circ$，求證

$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=2+2\sin A\sin B\sin C$。

【證】 左邊 $=1-\sin^2 A+\dfrac{1+\cos 2B}{2}+\dfrac{1+\cos 2C}{2}$

$=2-\sin^2 A+\dfrac{1}{2}(\cos 2B+\cos 2C)$

$=2-\sin^2 A+\cos(B+C)\cos(B-C)$

今 $A+B+C=90^\circ$，$\therefore$ $B+C=90^\circ-A$

$\therefore$ $\cos(B+C)=\sin A$，$\sin A=\cos(B+C)$，

故 左邊 $=2-\sin A\cos(B+C)+\sin A\cos(B-C)$

$=2-\sin A[\cos(B+C)-\cos(B-C)]$

$=2+2\sin A\sin B\sin C=$ 右邊。

習題十六

設 $A+B+C=180^\circ$，求證下列各恆等式(1—10)：

1. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$。
2. $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C$。
3. $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C$.
4. $\sin^2\frac{1}{2}A+\sin^2\frac{1}{2}B+\sin^2\frac{1}{2}C$

   $=1-2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C$。
5. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$。
6. $\sin\frac{1}{2}A+\sin\frac{1}{2}B+\sin\frac{1}{2}C-1$

   $=4\sin\dfrac{\pi-A}{4}\sin\dfrac{\pi-B}{4}\sin\dfrac{\pi-C}{4}$。

7. $\sin 4A+\sin 4B-\sin 4C=-\cos 2A\cos 2B\sin 2C$。

8. $(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)(\cot A+\cot B)$
$$=\csc A\csc B\csc C。$$

9. $\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1$。

10. $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$。

設 $A+B+C+D=2\pi$，求證下列各恆等式(11—13)：

11. $\sin A+\sin B+\sin C+\sin D$
$$=4\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}\sin\frac{A+B}{2}.$$

提示：左邊$=\sin A+\sin B+\sin C-\sin(A+B+C)=\cdots\cdots$

12. $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}$.

提示：$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=\pi-\left(\frac{C}{2}+\frac{D}{2}\right)$.

13. $\tan A+\tan B+\tan C+\tan D$
$$=\tan B\tan C\tan D+\tan C\tan D\tan A$$
$$+\tan D\tan A\tan B+\tan A\tan B\tan C。$$

提示：用 $A+B=2\pi-(C+D)$，再兩邊取正切法做。

設 $A+B+C=\frac{1}{2}\pi$，求證下列各恆等式(14—16)：

14. $\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C}=\cot A\cot B$。

15. $\cot A+\cot B+\cot C=\cot A\cot B\cot C$。

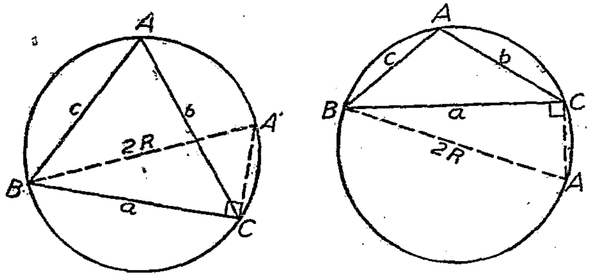
*16. $\tan A+\tan B+\tan C$
$$=\tan A\tan B\tan C+\sec A\sec B\sec C。$$

提示：$\sin(A+B+C)=\sin\frac{1}{2}\pi=1$.

第 十 章

任意三角形邊角之關係

27. 正弦定律 在任意三角形中，設對角頂 A,B,C 之邊各爲 a,b,c，又其外接圓半徑爲 R. 作直徑 BA'，連 $A'C$，則在



上左圖中，A 爲銳角，$A'=A$，$\sin A'=\sin A$，在上右圖中，A 爲鈍角，$A'=180°-A$，$\sin A'=\sin(180°-A)=\sin A$.

今 $\angle A'CB = rt.\angle$， $BA'=2R$，

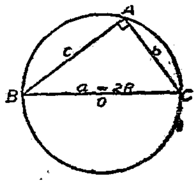
$$\therefore\ \frac{a}{2R}=\sin A'=\sin A. \qquad \therefore\ \frac{a}{\sin A}=2R.$$

同理 $$\frac{b}{\sin B}=2R, \qquad \frac{c}{\sin C}=2R.$$

$$\therefore\ \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \qquad \text{(公式二十五)}$$

此關係式稱爲三角形之正弦定律.

在公式(二十五)中當 A 爲直角時,亦能適合.因此時 A' 與 C 重合, $a=2R$.



$$\therefore \quad \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=a=2R.$$

又 $$\frac{a}{\sin A}=\frac{a}{\sin 90^\circ}=\frac{a}{1}=2R.$$

即 $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

例一: 在 $\triangle ABC$ 中, $A=70^\circ$, $B=80^\circ$, $C=3$ 寸, 求外接圓之直徑.

【解】 $C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-150^\circ=30^\circ$.

$$\therefore \quad 2R=\frac{c}{\sin C}=\frac{3}{\sin 30^\circ}=6 \text{ 寸}.$$

例二: 在任意三角形中,求證

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-C)}{\sin\frac{1}{2}C}.$$

【解】 令 $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$.

$$\therefore \quad \frac{a+b}{c}=\frac{2R(\sin A+\sin B)}{2R\sin C}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}C\cdot\cos\frac{1}{2}C}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}.$$

例三: 設在 $\triangle ABC$ 中, $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$, 求證 $\triangle ABC$ 爲直角三角形.

【解】令 $\sin A=\dfrac{a}{2R}$，　$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，　$\sin C=\dfrac{c}{2R}$，

代入，$\dfrac{a^2}{4R^2}+\dfrac{b^2}{4R^2}=\dfrac{c^2}{4R^2}$，　$\therefore$ $a^2+b^2=c^2$。

故 $\triangle ABC$ 爲直角三角形。

習題十七

1. 設在$\triangle ABC$中，$a=9.18$寸，$A=12°8'$．求外接圓直徑。

2. 設在 $\triangle ABC$ 中，$A=12°$，$B=33°$，$c=44$，求外接圓半徑。

3. 設在 $\triangle ABC$ 中，$a=\sqrt{3}-1$，　$b=\sqrt{2}$，　$A=15°$，求 B 之值。

注意：此題有兩解。

在任意三角形中，求證(4—8)：

4. $\dfrac{3\sin A+4\sin B}{3a+4b}=\dfrac{\sin C}{c}$。

5. $(b-c)\sin A+(c-a)\sin B+(a-b)\sin C=0$。

6. $a^2\sin 2B+b^2\sin 2A=2ab\sin C$。

7. $b\sin B-c\sin C=a\sin(B-C)$。

8. $b(\cot A+\cot B)=c\csc A$。

9. 設一三角形中三個角之比爲 1：2：3，試證其三邊之比爲 $1:\sqrt{3}:2$。

提示：先求出三個角之度數。

*10. 試用 28 節之圖證 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$。

28. 射影定律 由正弦定律

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

$\therefore\quad a=2R\sin A=2R\sin(B+C)$

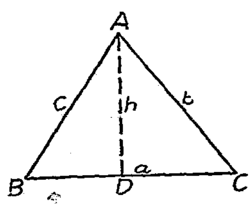
$\qquad=2R\sin B\cos C+2R\cos B\sin C$

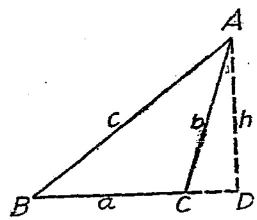
$\qquad=b\cos C+c\cos B.$

$$\left.\begin{aligned}&\text{即}\quad \boldsymbol{a=b\cos C+c\cos B.}\\&\text{同理}\quad \boldsymbol{b=c\cos A+a\cos C.}\\&\qquad\quad \boldsymbol{c=a\cos B+b\cos A.}\end{aligned}\right\}\qquad\text{(公式二十六)}$$

上面三關係式稱爲三角形之射影定律.

公式(二十六)亦可直接證明如下:





在上左圖中, $C<90°$.

作 $AD\perp BC$, 交 BC 於 D, 則

$a=BD+DC$

$\quad=c\cos B+b\cos C$

在上右圖中, $C>90°$.

作 $AD\perp BC$, 交 BC 之延長線於 D, 則

$a=BD-CD$

$\quad=c\cos B-b\cos(180°-C)$

$\quad=c\cos B+b\cos C.$

又當 $C=90°$ 時, $b\cos C+c\cos B=c\cos B=a.$

故不論 C 爲銳角, 直角或鈍角均有

$$a=b\cos C+c\cos B.$$

同理 $$b=c\cos A+a\ c\ \ s\ C.$$

$$c=a\cos B+b\cos A.$$

29. 餘弦定律 由射影定律

$$a=b\cos C+c\cos B \qquad (1)$$
$$b=c\cos A+a\cos C \qquad (2)$$
$$c=a\cos B+b\cos A \qquad (3)$$

$a(1)-b(2)-c(3)$ 得 $\quad a^2-b^2-c^2=-2bc\cos A$

$b(2)-c(3)-a(1)$ 得 $\quad b^2-c^2-a^2=-2ca\cos B$

$c(3)-a(1)-b(2)$ 得 $\quad c^2-a^2-b^2=-2ab\cos C$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned} a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2&=c^2+a^2-2ca\cos B\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\end{aligned}\right\} \qquad \text{(公式二十七 A)}$$

上面之三關係式，稱爲三角形之餘弦定律．上之公式亦可以寫爲：

$$\left.\begin{aligned} \cos A&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ \cos B&=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\\ \cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\end{aligned}\right\} \qquad \text{(公式二十七 B)}$$

例一： 在 $\triangle ABC$ 中，$a=2$，$b=\sqrt{6}$，$c=\sqrt{3}-1$，求 $\cos B$ 之值．

【解】 $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2+2^2-(\sqrt{6})^2}{2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot 2}$

$$=\frac{3-2\sqrt{3}+1+4-6}{4(\sqrt{3}-1)}=\frac{2(1-\sqrt{3})}{4(\sqrt{3}-1)}$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

例二：在$\triangle ABC$中，$a=3$，$b=4$，$C=120°$，求c。

【解】 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cdot\cos 120°$

$$=9+16-24\left(-\frac{1}{2}\right)=37.$$

$\therefore\ c=\sqrt{37}$.

例三：在任意三角形中，求證

$$a^3+b^3+c^3=bc(b+c)\cos A+ca(c+a)\cos B+ab(a+b)\cos C.$$

【解】 由射影定律 $a=b\cos C+c\cos B$ (1)

$b=c\cos A+a\cos C$ (2)

$c=a\cos B+b\cos A$ (3)

$a^2(1)+b^2(2)+c^2(3)$，得

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3&=a^2b\cos C+a^2c\cos B+b^2c\cos A\\&\quad+b^2a\cos C+c^2a\cos B+c^2b\cos A\\&=bc(b+c)\cos A+ca(c+a)\cos B+ab(a+b)\cos C.\end{aligned}$$

***例四**：在任意三角形中，求證

$$(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0.$$

【解】 令 $(b^2-c^2)\cot A=(b^2-c^2)\dfrac{\cos A}{\sin A}$

$$=(b^2-c^2)\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\Big/\frac{a}{2R}$$

$$=\frac{R}{abc}(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2).$$

同理 $(c^2-a^2)\cot B=\dfrac{R}{abc}(c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)$.

註：邊上之方次爲偶數時，用公式（二十七 B）尚不太繁，但若邊爲奇次時均以用公式(二十六)較便。參考例三，例四證法。

$$(a^2-b^2)\cot C=\frac{R}{abc}(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2).$$

$$\therefore\quad 左邊=\frac{R}{abc}[(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)+\cdots\cdots+\cdots\cdots]$$
$$=0.$$

習題十八

1. $\triangle ABC$ 中，$a=8$，$b=5$，$C=60°$，求 c 及 $\cos A$.

2. 今在平行四邊形 $ABCD$ 中，$AB=4$ 寸，$AD=5$ 寸，$A=102°$，求兩對角線之長.

3. $\triangle ABC$ 中，$(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，求證 $A=60°$.

4. $\triangle ABC$ 中，$a:b:c=2:3:4$，求 C 之值.

提示：令 $a=2k$，$b=3k$，$c=4k$.

在任意三角形中，求證(5—9)：

5. $a+b+c=(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C$.

註：上題試用射影定律及餘弦定律，分別證明，並比較二種方法之難易.

6. $a(b^2+c^2)\cos A+b(c^2+a^2)\cos B+c(a^2+b^2)\cos C=3abc$.

7. $\dfrac{b^2\cos A}{a}+\dfrac{c^2\cos B}{b}+\dfrac{a^2\cos C}{c}=\dfrac{a^4+b^4+c^4}{2abc}$.

***8.** $\dfrac{a\sin C}{b-a\cos C}=\tan A$.　　提示：$b=c\cos A+a\cos C$.

***9.** $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{\cos A+\cos B}{1-\cos C}$.

***10.** 設在一三角形中，$\cos B=\dfrac{\sin A}{2\sin C}$，求證此三角形之二邊相等.

***11.** 試用第 28 節之圖，直接證明餘弦定律.

***12.** 試用公式(二十七 B)，證明　$a=b\cos C+c\cos B$.

30 正切定律 由正弦定律得

$b=2R\sin B,\qquad c=2R\sin C.$

$\therefore\quad b-c=2R(\sin B-\sin C)$

$$=4R\cos\frac{1}{2}(B+C)\sin\frac{1}{2}(B-C),$$

$b+c=2R(\sin B+\sin C)$

$$=4R\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C).$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{相除得}\quad \frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(B-C)}{\tan\frac{1}{2}(B+C)}\\
&\text{同理}\quad \frac{c-a}{c+a}=\frac{\tan\frac{1}{2}(C-A)}{\tan\frac{1}{2}(C+A)}\\
&\qquad\quad \frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(公式二十八)}$$

以上三關係式,稱爲三角形之正切定律.

31. 半角定律 由公式(二十七B)

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

$$\therefore\quad 1-\cos A=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{a^2+(b-c)^2}{2bc}$$

$$=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}.$$

$$1+\cos A=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$
$$=\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc}.$$

令 $a+b+c=2s$, 則 $-a+b+c=2(s-a)$,

$a-b+c=2(s-b)$, $a+b-c=2(s-c)$,

$$\therefore\ 1-\cos A=\frac{2(s-b)\cdot 2(s-c)}{2bc}=\frac{2(s-b)(s-c)}{bc}.$$

$$1+\cos A=\frac{2s\cdot 2(s-a)}{2bc}=\frac{2s(s-a)}{bc}.$$

今 $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$

因得
$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\\ \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\end{aligned}\right\}\quad\text{(公式二十九 A)}$$
(第二式前：同理)

又 $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\end{aligned}\right\}\quad\text{(公式二十九 B)}$$

又 $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$, 令 $\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$.

$$\left.\begin{aligned}
&\text{代入卽得}\quad \tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\frac{r}{s-a}\\
&\text{同理}\qquad\quad \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}=\frac{r}{s-b}\\
&\qquad\qquad\quad\ \ \tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}=\frac{r}{s-c}
\end{aligned}\right\}\text{（公式二十九C）}$$

以上三組公式，稱爲三角形之半角定律.

例一： $\triangle ABC$ 中，$a=6$, $b=8$, $c=10$, 求 $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$, $\tan\frac{C}{2}$ 之值，並由此證 $\triangle ABC$ 爲一直角三角形.

【解】 令 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)=12$.

$\therefore\quad s-a=6,\qquad s-b=4,\qquad s-c=2.$

$$\therefore\quad \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}=\sqrt{\frac{2\cdot4}{8\cdot10}}=\sqrt{\frac{1}{19}}$$

$$=\frac{1}{10}\sqrt{10}.$$

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}=\sqrt{\frac{12\cdot4}{10\cdot6}}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}.$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}=\sqrt{\frac{6\cdot4}{12\cdot2}}=1.$$

又　$\tan\frac{C}{2}=1=\tan 45°$,　　$\therefore\ \frac{C}{2}=45°$.

$\therefore\ C=90°$,　　$\therefore\ \triangle ABC$ 爲直角三角形.

註：r 爲 $\triangle ABC$ 之內切圓半徑，其證明見下第 39 節.

例二： 求證 $\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

【證】 $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

$$=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

例三： 在任意三角形中，求證

$$1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{2c}{a+b+c}.$$

【證】 左邊$=1-\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\cdot\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$

$$=1-\frac{s-c}{s}=\frac{c}{s}=\frac{2c}{2s}=\frac{2c}{a+b+c}.$$

***例四：** 在任意三角形中，設 $a+b=2c$,

求證 $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}=2\cot\frac{C}{2}$.

【解】 令 $\cot\frac{A}{2}=\frac{s-a}{r}$,　$\cot\frac{B}{2}=\frac{s-b}{r}$,　$\cot\frac{C}{2}=\frac{s-c}{r}$.

$\therefore$　$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}=\frac{s-a}{r}+\frac{s-b}{r}=\frac{2s-(a+b)}{r}$

$$=\frac{2s-2c}{r}=\frac{2(s-c)}{r}=2\cot\frac{C}{2}.$$

習 題 十 九

1　在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=13$, $b=14$, $c=15$, 求 $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$, 及 $\tan\frac{C}{2}$ 之值.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=18$, $b=24$, $c=30$, 求 $\sin A$, $\sin B$, 及 $\sin C$ 之值。

3. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=5$, $b=6$, $c=7$, 求 $\tan\frac{A}{2}$ 及 $\tan A$ 之值。

在任意三角形中，求證(4—9)：

4. $\tan\frac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$.

5. $c^2=(a+b)^2\sin^2\frac{1}{2}C+(a-b)^2\cos^2\frac{1}{2}C$.

6. $(b-c)\cot\frac{A}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}+(a-b)\cot\frac{C}{2}=0$.

7. $s^2=bc\cos^2\frac{A}{2}+ca\cos^2\frac{B}{2}+ab\cos^2\frac{C}{2}$.

8. $s=c\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sec\frac{1}{2}(A+B)$.

9. $(b+c-a)\tan\frac{A}{2}=(c+a-b)\tan\frac{B}{2}=(a+b-c)\tan\frac{C}{2}$.

在任意三角形內，試由半角定律證明(10—12)：

10. $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

11. $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$.

12. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

*13. 設一三角形中，$(s-b)\cot\frac{C}{2}=s\tan\frac{B}{2}$, 求證此三角形必等腰。

*14. 在任意三角形中，設 $a+c=2b$, 求證

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=2\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}.$$

第 十 一 章

任意三角形解法

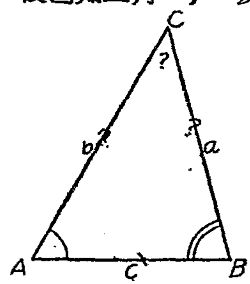
32. 任三角形解法總論 一個三角形中有六個元素，即三個角 A, B, C 及三條邊 a, b, c。當三角形中已知三個元素(其中至少有一個元素爲邊，因三個角有 $A+B+C=180°$ 之關係，只知三個角，三角形之大小，不能決定)，在平面幾何學中可將此三角形作出，在三角學中則可將其他三個元素求出．此種方法稱爲解三角形，本章就一般三角形之解法加以討論．

關於解任意三角形之問題，視所給條件之不同，可分爲四類，即

1. 已知一邊及二角 $a.s.a.$ 或 $a.a.s.$
2. 已知三邊 $s.s.s.$
3. 已知二邊及其夾角 $s.a.s.$
4. 已知二邊及一對角 $s.s.a.$

今依次分別討論及舉例於下．

33. 已知一邊及二角解三角形 設已知二角 A, B 及一邊 c，欲求其他二邊 a, b，及第三角 C，可用正弦定律解出．



1. $C=180°-(A+B)$.

2. 因 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

$\therefore\quad a=\dfrac{c\sin A}{\sin C},\ b=\dfrac{c\sin B}{\sin C}$.

註：平常除已知角爲特別角外均宜用對數計算．

例一：在$\triangle ABC$中，設$A=60°$，$B=75°$，$c=4$，解此三角形。[已知$\sin 75°=(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$]。

【解】 1. $C=180°-(A+B)=180°-(60°+75°)$

$=180°-135°=45°$。

2. 由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，

$$\therefore\quad a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{4\sin 60°}{\sin 45°}=\frac{4\cdot\sqrt{3}/2}{\sqrt{2}/2}=2\sqrt{6}.$$

$$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{4\sin 75°}{\sin 45°}=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4}{\sqrt{2}/2}$$

$$=2(\sqrt{3}+1).$$

例二：在$\triangle ABC$中，設$b=48.21$，$A=56°$，$B=64°$，解此三角形。

【解】 1. $C=180°-(A+B)=180°-120°=60°$。

2. 由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

$\therefore\quad a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}$.

$\log b=1.6356$

$\log\sin A=9.9186-10$

$\operatorname{colog}\sin B=0.0463$

$\log a=1.6005$

$\therefore\quad a=39.85$。

$\therefore\quad c=\dfrac{b\sin C}{\sin B}$.

$\log b=1.6356$

$\log\sin C=9.9375-10$

$\operatorname{colog}\sin B=0.0463$

$\log c=1.6194$

$\therefore\quad c=41.63$。

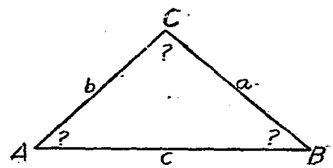
註：1. 例一中75°爲特別角之一種，故不必查表．倘題中未將sin 75°之值説出，可用二角和公式自行算出．

2. 四位對數表只準至四位，故答數中第五位之值，應依四捨五入法併入上一位．

34. 已知三邊解三角形　設已知三邊爲 a, b, c, 欲求三個角 A,B,C, 有二種方法:

(a) 若已知之三邊爲簡單整數或根式, 不需用對數計算者,可用餘弦定律(公式二十七 B)直接求出.

(b) 若已知三邊之數字比較複雜,需用對數計算者,可用半角定律 (公式二十九 C), 先求出 $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$.



不論用何種方法,平常三個角均以同時直接求出爲原則.

例一: 在 $\triangle ABC$ 中,設 $a=1075$, $b=1021$, $c=1572$, 解此三角形.

【解】 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)=1834$

$s-a=759$

$s-b=813$

$s-c=262$

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$\log(s-a)=2.8802$
$\log(s-b)=2.9101$
$\log(s-c)=2.4183$ (+

8.2086

$\log s=3.2634$ (−

$2\,|\,4.9452$

$\therefore\ \log r=2.4726$

今 $\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a}$

$\log r=2.4726$
$\log(s-a)=2.8802$

$\log\tan\frac{A}{2}=\bar{1}.5924$

$\therefore\ \frac{A}{2}=21^\circ 22'$

$\therefore\ A=42^\circ 44'$.

$\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{s-b}$

$\log r=2.4726$
$\log(s-b)-2.9101$

$\log\tan\frac{B}{2}=\bar{1}.5625$

$\therefore\ \frac{B}{2}=20^\circ 4'$

$\therefore\ B=40^\circ 8'$.

$\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{s-c}$

$\log r=2.4726$
$\log(s-c)=2.4183$

$\log\tan\frac{C}{2}=0.0543$

$\therefore\ \frac{C}{2}=48^\circ 34'$

$\therefore\ C=97^\circ 8'$.

例二：在 $\triangle ABC$ 中設 $a=4$，$b=5$，$c=8$，求 A,B,C。

【解】 $$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5^2+8^2-4^2}{2\cdot5\cdot8}=\frac{73}{80}=0.9125.$$

$$\therefore\quad A=24^\circ 9'.$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{8^2+4^2-5^2}{2\cdot8\cdot4}=\frac{55}{64}=0.8594.$$

$$\therefore\quad B=30^\circ 45'.$$

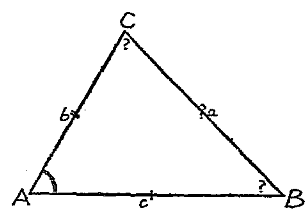
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4^2+5^2-8^2}{2\cdot4\cdot5}=-\frac{23}{40}=-0.5750.$$

$$\therefore\quad \cos(180^\circ-C)=0.5750,$$

$$180^\circ-C=54^\circ 54',\quad \therefore\quad C=125^\circ 6'.$$

35. 已知二邊及其夾角解三角形 設已知二邊 b，c 及其夾角 A，欲求其他二角 B,C 及第三邊 a，亦有兩種方法。

(a) 若已知邊為簡單之整數或根式，又角為特別角，不需用對數計算者，可用餘弦定律解出：



1. $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$.

2. $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$，

由此求出 B。

3. $C=180^\circ-(A+B)$

(b) 若已知二邊為較複雜數字，需用對數計算時，則可用正切定律解出：

1. 因 $$\frac{1}{2}(B+C)=\frac{1}{2}(180^\circ-A)=90^\circ-A. \qquad (1)$$

及 $$\tan\frac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}\tan\frac{1}{2}(B+C). \qquad (2)$$

在 (1) 中求出 $\frac{1}{2}(B+C)$，(2) 中求出 $\frac{1}{2}(B-C)$，相加卽得 B，相減卽得 C.

2. 由正弦定律得 $a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}$.

例一：在 $\triangle ABC$ 中，設 $b=2$，$c=\sqrt{3}+1$，$A=60^\circ$，解此三角形.

【解】 1. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$$
\begin{aligned}
&=2^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\cdot 2(\sqrt{3}+1)\cos 60^\circ\\
&=4+4+2\sqrt{3}-2(3+\sqrt{3})=2.
\end{aligned}
$$

$\therefore\ a=\sqrt{2}$. (負値不合).

2. $$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{2}}$$

$$=\frac{4+2\sqrt{3}+2-4}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\therefore\ B=45^\circ$.

3. $C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-(60^\circ+45^\circ)=75^\circ$.

例二：在 $\triangle ABC$ 中，$b=215$，$c=105$，$A=74^\circ24'$，解此三角形.

【解】 $\frac{1}{2}(B+C)=\frac{1}{2}(180^\circ-A)=52^\circ48'$

$$\tan\tfrac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}\tan\tfrac{1}{2}(B+C)$$

$\therefore\ \frac{1}{2}(B-C)=24^\circ22'$

$\therefore\ B=77^\circ10'$.

$C=28^\circ26'$.

又 $a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}$

$\therefore\ a=212.4$.

$$
\begin{aligned}
\log(b-c)&=1.0414\\
\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B+C)&=10.1197-10\\
\underline{\operatorname{colog}(b+c)}&=\underline{8.4949}\\
\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B-C)&=9.6560-10
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log b&=2.3324\\
\log\sin A&=9.9837-10\\
\underline{\operatorname{colog}\sin B}&=\underline{0.0110}\\
\log a&=2.3271
\end{aligned}
$$

習題二十

1. 解下列各三角形：($a.a.s.$)

(a) 已知 $a=2$,　$A=45°$, $B=60°$; 求 C, b, c.

(b) 已知 $b=\sqrt{3}$, $A=75°$, $C=30°$; 求 B, a, c.

(c) 已知 $b=20$,　$A=104°$, $B=19°$; 求 C, a, c.

(d) 已知 $c=54.27, B=43°17', C=84°37'$; 求 A, a, b.

2. 解下列各三角形：($s.s.s.$)

(a) 已知 $a=1$, $b=\sqrt{2}$, $c=\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$; 求 A, B, C.

(b) 已知 $a=15$,　$b=22$,　$c=9$;　求 $A.B.C$.

(c) 已知 $a=2000$, $b=1050$, $c=1150$; 求 $A.B.C$.

(d) 已知 $a=30.19$, $b=67\ 31$, $c=42.28$; 求 $A.B.C$.

3. 解下列各三角形：($s.a.s.$)

(a) 已知 $a=5$,　$b=8$,　$C=60°$; 求 c, A, B.

(b) 已知 $b=\sqrt{3}+1, c=\sqrt{6}, A=45°$; 求 a, B, C.

(c) 已知 $a=372.5, c=395.6, B=37°15$; 求 b, A, C.

(d) 已知 $a=25.32$, $b=42.9$, $C=52°14'$; 求 c, A, B.

4. 設一三角形之三邊為 60.4, 100.8, 129.6, 求自最大角之角頂至對邊所作垂線之長.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 設 $B-C=20°28$, $b=18.42$, $c=16.35$, 求 A, B, C.

6. 四邊形 $ABCD$ 中, 已知 $AC=3.6$ 寸, $AD=4$ 寸, $BC=2.4$ 寸, $\angle ACB=29°40'$, $\angle CAD=71°20'$, 求其他二邊之長, 及四角之度數.

36. 已知二邊及一對角解三角形　設已知二邊a,b及a邊之對角A,欲求第三邊c及其他二角B,C,可用正弦定律解出.

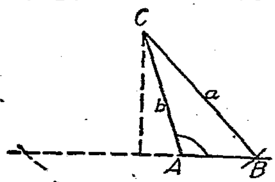
1. 由　$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$　中求出B.

2. $C=180°-(A+B)$

3. $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$

但$\sin B$之值不能大於1,故在(1)中$b\sin A<a$時,B不能求得,則本題無解.

又當$\sin B<1$時,在$0°$與$180°$之間,適合此式之B可能有二個數值(一個為銳角一個為鈍角),故本題有時可有兩解.



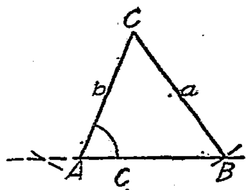
視a,b,A間之數值關係,本題可有一解或兩解或無解,情形比較複雜,今分別討論於下:

I. $a>b$。(此時$B<A$)

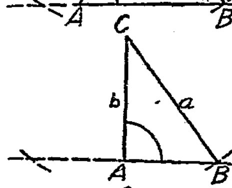
(1) $A>90°$　　有一解

(2) $A=90°$　　有一解

(3) $A<90°$　　有一解



因此時$\sin B<1$,但B必須為銳角,故必能求得一個值適合.



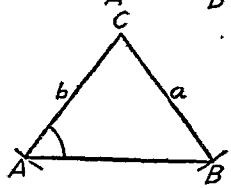
II. $a=b$。(此時$B=A$)

(1) $A>90°$　　無　解

(2) $A=90°$　　無　解

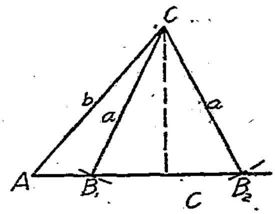
因在一個三角形中不能有二個直角或鈍角.

(3) $A<90°$　　有一解



因此時$\sin B<1$,但B必須為銳角,故必能求得一個值適合.

III. $a<b$.　(此時 $B>A$)



(1) $A>90°$　　無　解

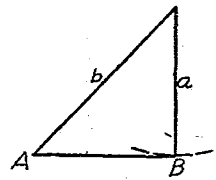
(2) $A=90°$　　無　解

因在一個三角形中不能有二個直角或鈍角.

(3) $A<90°$ 可分三種情形

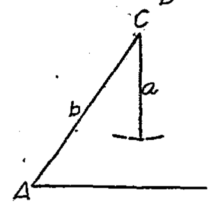
(i) $b>a>b\sin A$　有兩解

因此時 $\sin B<1$，B 可爲銳角或鈍角，故 B 可有二值.



(ii) $a=b\sin A$　　有一解

因此時 $\sin B=1$，B 爲直角.



(iii) $a<b\sin A$　　無　解

因此時 $\sin B>1$，B 不能求得.

歸納以上所述,可得結論如下:

1. 若 A 爲銳角，　$b>a>b\sin A$ 時,有兩解.

2. 若 A 爲銳角,且 $a<b\sin A$; 或 A 爲鈍角, $a<b$, 或 $a=b$ 時,則無解.

3. 其他各種情形,均有一解.

以上各種情形,平常均可由視察決定。但在數字較繁,不易求出時,可利用對數,先求 $\log\sin B$, 當

1. $\log\sin B>0$,　　則無解.
2. $\log\sin B=0$,　　則有一解 ($B=90°$).
3. $\log\sin B>0$,
   - (i) $a>b$,　　則有一解.
   - (ii) $a<b$,　　則有兩解.

今舉例如下:

例一： 在下列各題中，試決定其解之組數：

(a) $a=2345$, $b=1234$, $A=34^\circ 56$.

(b) $a=1234$, $b=2345$, $A=98^\circ 7$.

(c) $a=1234$, $b=2345$, $A=34^\circ 56'$.

【解】 (a) $a>b$, $A<90^\circ$, 故本題有一解.

(b) $a<b$, $A>90^\circ$, 故本題無解.

(c) $a<b$, $A<90^\circ$,

$$\log\sin B=\log\frac{b\sin A}{a}=3.3701+\overline{1}.7579-3.0913$$

$$=0.0368>0.$$ 故本題無解

例二： 在 $\triangle ABC$ 中，設 $a=127.3$, $c=59.21$, $C=27^\circ 22'$，解此三角形。

【解】 $\sin A=\dfrac{a\sin C}{c}$

$$=\frac{127.3\sin 27^\circ 22'}{59.21}$$

$\log a=2.1048$

$\log\sin C=9.6625-10$

$\mathrm{colog}\, c=8.2276-10$

$\log\sin A=9.9949-10$

$\therefore\ A_1=81^\circ 12'$,

$B_1=180^\circ-(A_1+C)$

$=71^\circ 26'$

$$b_1=\frac{c\sin B_1}{\sin C}$$

$\log c=1.7724$

$\log\sin B_1=9.9768-10$

$\mathrm{colog}\sin C=0.3375$

$\log b_1=2.0867$

$\therefore\ b_1=122.1$

$\therefore\ A_2=108^\circ-A_1=98^\circ 48'$

$B_2=180^\circ-(A_2+C)$

$=53^\circ 50'$

$$b_2=\frac{c\sin B_2}{\sin C}$$

$\log c=1.7724$

$\log\sin B_2=9.9071-10$

$\mathrm{colog}\sin C=0.3375$

$\log b_2=2.0170$

$\therefore\ b_2=104.0$

$$答\begin{cases}A_1=81^\circ 12',\ B_1=71^\circ 26',\ b_1=122.1;\\ A_2=98^\circ 48',\ B_2=53^\circ 50',\ b_2=104.0.\end{cases}$$

習題二十一

1. 在下列各題中，試決定解之組數：

(a) $a=50$,　$b=50$,　$A=50°$.

(b) $a=50$,　$b=50$,　$A=100°$.

(c) $b=80$,　$c=100$,　$B=60°$.

(d) $b=80$,　$c=100$,　$C=60°$.

(e) $a=70$,　$c=75$,　$A=105°$.

(f) $a=70$,　$c=75$,　$C=105°$.

(g) $b=25.9$,　$c=72.5$,　$C=54°15'$.

(h) $a=192.5$,　$b=210.2$,　$A=33°15'$.

(i) $a=89.2$,　$b=82.5$,　$B=29°13'$.

(j) $b=306$,　$c=491$,　$B=38°$.

2. 解下列各三角形：　($s.s.a.$)

(a) 已知 $a=120$,　$b=80$,　$A=60°$；　求 B, C, c.

(b) 已知 $b=3\sqrt{2}$, $c=2\sqrt{3}$, $B=60°$；　求 A, C, a.

(c) 已知 $b=18$,　$c=19$,　$B=15°49'$；求 A, C, a.

(d) 已知 $a=123.9$, $c=172.4$, $C=59°37'$；求 A, B, b.

3. 在平行四邊形 $ABCD$ 中，已知 $AD=3$ 寸，$BD=2.5$ 寸，$A=21°36'$，求 AB 之長.

4. 有一三角形地，已知其二邊之長為 140.5 尺及 170.6 尺，並知前一邊之對角為 $40°$，求此三角形地周圍之長.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，設 $B=30°$, $c=150$, $b=50\sqrt{3}$，求證適合此等條件之三角形有二個，一為等腰三角形，一為直角三角形.

37. 測量問題 許多測量問題，常可利用解任意三角形之方法解決。其方法與第七章所述利用解直角三角形解簡易測量題相同；即應先明瞭測量上專用名詞，再根據題意，作一適當圖形，考察其間關係，立出適當之式，以求一適合題意之解。除此以外，現在更須注意下列數點：

1. 現在所作之圖形，不必限於直角三角形。

2. 凡遇圖形非直角三角形時，應注意邊角公式之應用，尤宜注意正弦定律及餘弦定律之應用。

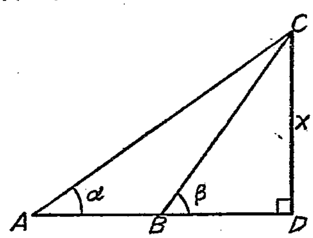
3. 比較繁複之問題，可應用幾何學上之定理，幫助解決。

4. 所有問題之結果，應儘量化為積或商之形式，以便利用對數計算。

茲舉數例於下，以見解法之一般。

例一： 平地一建築物 DC，今於地面一點 A，測得其頂 C 之仰角為 α，向此建築物走近 a 尺至 B 點，測得 C 之仰角為 β，求證此建築物之高為

$$\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}\text{尺}.$$



【解】 設建築物之高為 x 尺，

$$\angle CAD=\alpha,\quad \angle CBD=\beta,\quad \angle ADC=90^\circ,$$

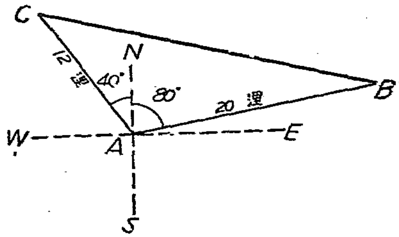
則 $\angle BCA=\angle CBD-\angle CAD=\beta-\alpha.$

令 $$\frac{x}{a}=\frac{CD}{AB}=\frac{CD}{BC}\cdot\frac{BC}{AB}=\frac{\sin\beta}{\sin 90^\circ}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$\therefore\qquad x=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}\text{(尺)}.$$

例二：兩船同時由港口出發，甲船以每小時 20 里之速度向港之北 80° 東之方向進行，乙船以每小時 12 里之速度向港之北40°西之方向進行．問一小時後，兩船相距幾里？



【解】 設 $AB=20$ 里，$AC=12$ 里．

$\angle CAB=80^\circ+40^\circ$

$=120^\circ$．

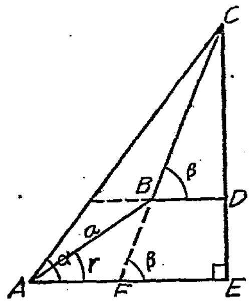
今在 $\triangle ABC$ 中，

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos 120^\circ$$

$$=20^2+12^2-2\cdot 20\cdot 12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=784.$$

$\therefore$ $BC=\sqrt{784}=28$ 里．（即兩船一小時後之相距數）．

例三：山上一塔，今在山脚下一點 A 測到塔頂 C 之仰角爲 α，自 A 向塔在斜度爲 γ 之斜坡上走近 a 尺至 B，測得塔頂 C 之仰角爲 β，求塔頂離平地之高度．



【解】 如圖設 CE 表示塔頂離平地之高度，今 $\angle EAC=\alpha$，$\angle BAE=\gamma$，

$\angle DBC=\angle EFC=\beta$，

$\angle ACB=\angle EFC-\angle EAC=\beta-\alpha$，

$\angle ABC=180^\circ-\angle ABF$

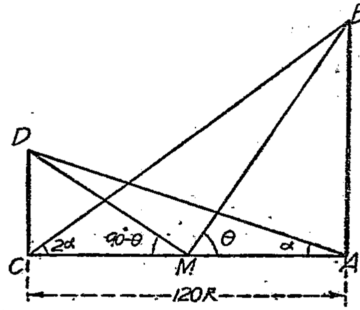
$=180^\circ-(\beta-\gamma)$．

今 $$\frac{CE}{AB}=\frac{CE}{AC}\cdot\frac{AC}{AB}=\frac{\sin EAC}{\sin AEC}\cdot\frac{\sin ABC}{\sin ACB}$$

$$=\frac{\sin\alpha\sin[180-(\beta-\gamma)]}{\sin 90^\circ\sin(\beta-\alpha)}=\frac{\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

$$\therefore \quad CE=\frac{a\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\beta-\alpha)}\text{尺}.$$

例四：甲乙兩塔相距120尺，在甲塔底測得乙塔之仰角爲α，在乙塔底測得甲塔之仰角爲2α，又在兩塔中央一點M測得兩塔之仰角互爲餘角，求兩塔之高。



【解】 如圖AB爲甲塔之高，CD爲乙塔之高。

今 $CD=120$尺

$CM=MA=60$尺，

$\angle DAC=\alpha$,

$\angle BCA=2\alpha$,

令 $\angle BMA=\theta$, 則 $\angle DMC=90^\circ-\theta$.

今 $AB=CA\tan 2\alpha=MA\tan\theta$.

$\therefore \quad 2\tan 2\alpha=\tan\theta \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

又 $CD=AC\tan\alpha=MC\tan(90^\circ-\theta)=MC\cot\theta$

$\therefore \quad 2\tan\alpha=\cot\theta \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

(1)·(2)， $4\tan 2\alpha\tan\alpha=1$

卽 $$\frac{8\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}=1$$

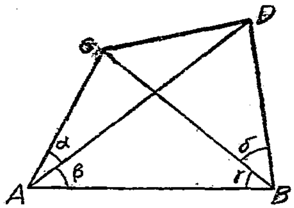
卽 $9\tan^2\alpha=1$, $\therefore \tan\alpha=\frac{1}{3}$. (負值不合)

$$\therefore \quad \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{3}{4}.$$

$\therefore \quad AB=120\cdot\frac{3}{4}=90$, $CD=120\cdot\frac{1}{3}=40$.

故甲塔高90尺，乙塔高40尺。

例五：平地上兩點 C, D，可見而不可近，試設法求出此兩點間之距離。



【解】 在同平面上取可以測量之兩點 A, B，量得 $AB=a$，

又測得 $\angle CAD=\alpha$, $\angle DAB=\beta$,

$\angle CBA=\gamma$, $\angle CBD=\delta$.

則 $\angle ACB=180^\circ-(\alpha+\beta+\gamma)$, $\angle ADB=180^\circ-(\beta+\gamma+\delta)$.

今在 $\triangle ABC$ 中， $\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{\sin CAB}{\sin ACB}$,

$$\therefore\quad BC=\frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\sin[180^\circ-(\alpha+\beta+\gamma)]}=\frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

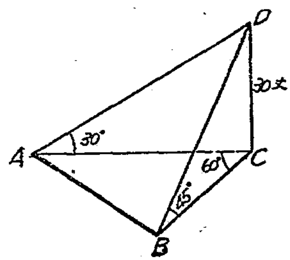
再在 $\triangle ABD$ 中， $\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{\sin BAD}{\sin ADB}$,

$$\therefore\quad BD=\frac{a\sin\beta}{\sin[180^\circ-(\beta+\gamma+\delta)]}=\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma+\delta)}.$$

又在 $\triangle BCD$ 中， $\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{BD}^2-2\overline{BC}\cdot\overline{BD}\cos\delta$.

今 BC, BD, $\cos\delta$ 均爲已知之量，故 CD 卽能求得。

*例六：海岸有一砲台 CD，高爲 30 丈，海面上有 A, B 兩艦，今在砲台之頂 D 測得 A 之俯角爲 30°，B 之俯角爲 45°，又兩艦與台底聯線所成之角 ACB 爲 60°。求兩艦間之距離。



【解】 因自 D 望 A, B 之俯角等於自 A, B 望 D 之仰角，故

$\angle CAD=30^\circ$, $\angle CBD=45^\circ$.

今在 $rt\triangle ADC$ 中，

$AC=CD\cot 30^\circ=30\sqrt{3}$,

再在 $rt\triangle BDC$ 中，$BC=CD\cot 45^\circ=30$，

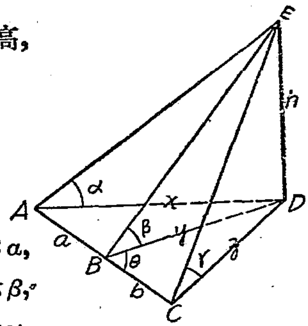
又在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cos 60^\circ$

$$=2700+900-2\times 30\sqrt{3}\times 30\times\frac{1}{2}$$

$$=3600-900\sqrt{3}=900(4-\sqrt{3}).$$

$\therefore\ AB=30\sqrt{4-\sqrt{3}}$ 丈。（即爲所求兩艦之距離）

*例七：在同一直線上之 A, B, C 三點（設 B 在 A, C 之間），同時測得一氣球之仰角各爲 α, β, γ，今量得 $AB=a$ 尺，$BC=b$ 尺，求氣球離地面之高。



【解】如圖設 DE 表示氣球之高，

令 $DE=h$，$AD=x$，

$BD=y$，$CD=z$。

又 $\angle DBC=\theta$，

則 $\angle ABD=180^\circ-\theta$。

今在 $rt\triangle AED$ 中，$x=h\cot\alpha$，

在 $rt\triangle BED$ 中，$y=h\cot\beta$，

在 $rt\triangle CED$ 中，$z=h\cot\gamma$，

在 $\triangle BCD$ 中，$z^2=b^2+y^2-2by\cos\theta \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

在 $\triangle ABD$ 中，$x^2=a^2+y^2-2ay\cos(180^\circ-\theta)$.

即 $x^2=a^2+y^2+2ay\cos\theta \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$(1)\cdot a+(2)\cdot b$；$az^2+bx^2=ab^2+ay^2+a^2b+by^2$

$$=(a+b)y^2+ab(a+b)$$

$\therefore\ az^2+bx^2-(a+b)y^2=ab(a+b)$.

將 x, y, z 之值代入上式，即得

$$h^2[a\cot^2\gamma+b\cot^2\alpha-(a+b)\cot^2\beta]=ab(a+b).$$

$$\therefore\ h=\sqrt{\frac{ab(a+b)}{a\cot^2\gamma+b\cot^2\alpha-(a+b)\cot^2\beta}}\text{ 尺}.$$

習題二十二

1. 自岸上 A, B 兩點皆可望見 S 船，今量得 $AB=800$ 尺，$\angle SAB=67°43'$，$\angle SBA=74°21$，求自船至 A 之距離。

2. 山上有一建築物與斜面所成之角爲 $113°12'$，今在山脚下一點測得建築物之視角爲 $23°27'$，又此點離建築物底之距離爲 89 尺，求建築物之高。

3. 兩列車同時自同一車站開行，其一速度爲每小時 30 里，他一速度爲每小時 40 里，若所行皆爲直道，而兩軌道之交角爲 $30°$，求半小時後兩列車間之距離。

4. A, B, C 三兵站間之距離爲 $BC=13$ 里，$CA=14$ 里，$AB=15$ 里，今自 A 測得 B 適在正東，問由 A 測 C 方向爲何？

5. 兵艦 S 在港北西 10 浬處，望見一船自該港向北 $75°$ 東之方向依每時 12 浬之速度航行，此艦如欲在 30 分鐘內追及此船，問須向何方向依何速度進行？

6. 甲乙二人在相距 1800 尺之兩地，同時望見一氣球，氣球適在二人之間，今甲測得氣球之仰角爲 $44°20'$，乙測得氣球之仰角爲 $63°30'$，求氣球離地面之高。

7. 塔與電桿同立於地面，自塔頂測得桿頂之俯角爲 α，自塔底測得桿頂之仰角爲 β，若塔高爲 h，求證電桿之高爲

$$\frac{h\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

8. 有向西傾斜之塔，與地面所成之傾角爲 $80°$，塔身之長爲 60 尺。今在塔頂測得正東兩點之俯角各爲 $70°$ 及 $50°$，求此兩點間之距離。

9. 在高 h 尺之塔頂測得平地上正西兩點之俯角各爲 $45°-\alpha$ 及 $45°+\alpha$, 求證此兩點間之距離爲 $2h\tan 2\alpha$ 尺.

10 在平面上一點對於一塔所張之角爲 α, 又對於塔上一直立旗桿所張之角爲 β。今知旗桿高 h 尺, 求證塔高爲

$$h\sin\alpha\csc\beta\cos(\alpha+\beta)\text{ 尺.}$$

11. 山上一塔, 自平地上一點 A 測得塔頂 E 及山頂 D 之仰角各爲 α 及 β. 今向山在平地上行 d 尺至 B, 再測塔頂 E, 得仰角爲 γ, 求證山 CD 之高爲

$$\frac{d\sin\gamma\cos\alpha\tan\beta}{\sin(\gamma-\alpha)}\text{ 尺.}$$

提示: $\frac{CD}{AB}=\frac{CD}{AC}\cdot\frac{AC}{AE}\cdot\frac{AE}{AB}$.

12. 山上有一塔, 今在山脚 A 測得塔頂 C 之仰角爲 $45°$, 自 A 向塔在斜度爲 $15°$ 之坡上走近 25 尺至 B, 測得塔頂 C 之仰角爲 $75°$, 求塔頂 C 離平地之高度.

提示: 仿例三直接解出.

13. 斜坡上有一與水平面垂直之建築物 DC (頂爲 C), 今在斜坡上一點 A 測得 AC 與坡面所成之角爲 $15°$, 又在斜坡上向建築物走近 48.5 尺至 B 點, 測得 BC 與坡面所成之角爲 $30°$, 求建築物之高.

14. 一向北傾斜之塔, 與地面所成之傾角爲 θ, 塔之正南有 A, B 二點, 與塔足之距離各爲 a 及 b, 又在兩點測得塔頂之仰角各爲 α,β, 試證 $\cot\theta=\frac{b\cot\alpha-a\cot\beta}{b-a}$.

又塔頂離地面之高爲 $\frac{b-a}{\cot\beta-\cot\alpha}$.

15. 距山麓 a 尺處有一屋，一人在山坡上適能見此屋之他方一井，已知井與屋之距離爲 b，山坡之斜度爲 α，人與山麓之距離爲 c，設屋高爲 h，試證

$$h=\frac{bc\sin\alpha}{a+b+c\cos\alpha}.$$

16. 平地上兩塔，其高各爲 180 尺及 80 尺，今在兩塔底互測他塔頂之仰角，其一仰角等於他一仰角之二倍。求二塔間之距離。

17. 有高 a 尺之旗桿立於塔頂上，在離塔底 b 尺之處望之，見旗桿所張之角爲 α，求證塔高爲

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+4ab\cot\alpha-4b^2}-a\right)\text{尺}.$$

18. 平地上一土堆 BC，上立一塔 CD，塔頂 D 立有一旗桿 DE，今於地面上一點 A 測得 BC，DE 所張之角相等。若已知 $BC=9$ 尺，$CD=72$ 尺，$DE=36$ 尺，求 AB 之距離。

提示：令 $\angle CAD=\beta$。

19. 50 尺之旗桿立於 49 尺高之塔上，在地面上一點仰視之，得旗桿之視角與塔頂之仰角相等，試求觀測點至塔足間之距離。

20. 在地上一點測得塔頂之仰角爲 θ，由此點向塔行 30 尺，再測之得塔頂之仰角爲 2θ，更向塔行 $10\sqrt{3}$ 尺，則測得塔頂之仰角爲 4θ，求最初所測得之仰角。

21. 有人在某處測得一山頂之仰角爲 θ，向山前進 a 尺，測得山頂之仰角爲 $90°-\theta$，再前進 b 尺，又測得山頂之仰角爲 2θ，求證山高爲 $\sqrt{(a+b)^2-\frac{1}{4}a^2}$ 尺。

22. 在相距 1 里之兩地 A, B 測量遠處兩砲壘 P, Q 之位置. 量得 $\angle QAB=45°$, $\angle QAP=45°$, $\angle QBA=120°$, $\angle ABP=45°$, 試求 P, Q 間之距離. (設 A 近 P)

*23. 從直對城門大道上一點 A 測得城樓 ED 之仰角爲 α, 城上一旗桿 DC 之張角爲 β, 對城門走近 a 尺, 測得旗桿之張角仍爲 β, 試證此旗桿之高當爲 $\dfrac{a\sin\beta}{\cos(2\alpha+\beta)}$ 尺.

提示: A, B, D, C 四點共圓.

*24. 空中一氣球, 在其北 A 處仰觀此氣球之仰角爲 α, 同時在 A 之東 B 處測得氣球之仰角爲 β, 設 h 爲氣球之高, a 爲 A, B 間之距離, 試證

$$h=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}.$$

*25. 於相距 1000 尺之甲乙兩地, 測得一山之仰角爲 30° 及 45°, 今甲地在山之正東, 乙地在山之南東方向, 求證山高爲 $100\sqrt{40+10\sqrt{6}}$ 尺.

*26. 在高 h 尺之山頂, 測得平地上兩點 A, B 之俯角各爲 α 及 β. 又 A, B 間之水平角爲 γ. 試證此兩點間之距離爲

$$h\sqrt{\cot^2\alpha+\cot^2\beta-2\cot\alpha\cot\beta\cos\gamma}\text{ 尺.}$$

提示: 參考例六.

*27. 在同平面上有 A, B 兩點, 相距 a 尺, 今在 A 測得遠處一塔頂 C 之仰角爲 α, 又 $\angle CAB=\beta$, $\angle CBA=\gamma$, 求證塔高爲

$$\frac{a\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}\text{ 尺.}$$

*28. 在同一直線上之 A, B, C 三點, 同時測得一氣球之仰角各爲 30°, 45° 及 60°, 設 $AB=BC=600$ 尺, 求氣球之高.

第十二章

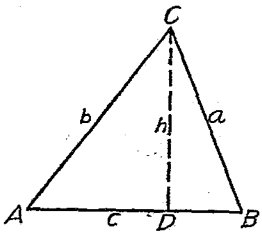
三角形之性質

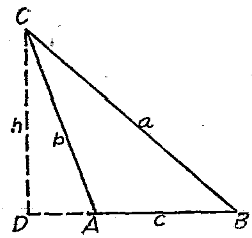
38. 三角形之面積 在一個三角形中，已知下列各條件之一，其面積 $\triangle$ 卽可求得:

1. 兩邊及其夾角， 2. 兩角及一邊， 3. 三邊。

今分別討論如下:

(一)已知兩邊及其夾角:





如圖，作 $CD\perp AB$，令 $CD=h$，則 $\triangle=\dfrac{1}{2}ch$。

今在左圖中: $A<90°$，$h=b\sin A$。

又在右圖中: $A>90°$，$h=b\sin(180°-A)=b\sin A$。

故不論 A 爲銳角或鈍角，均有 $h=b\sin A$。

$$\left.\begin{aligned}\therefore\qquad &\triangle=\tfrac{1}{2}bc\sin A.\\ \text{同理}\qquad &\triangle=\tfrac{1}{2}ca\sin B.\\ &\triangle=\tfrac{1}{2}ab\sin C.\end{aligned}\right\}\qquad\text{(公式三十)}$$

註: 上面公式當 $A=90°$ 時亦能適合，因此時 $\sin A=\sin 90°=1$，故

$$\triangle=\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

(二)已知兩角及一邊：

從正弦定律，得 $b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}$，

$$\therefore\quad \triangle=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}.$$

今 $\sin A=\sin[180^\circ-(B+C)]=\sin(B+C)$，

$$\left.\begin{aligned}&\therefore\quad \triangle=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}.\\ &\text{同理}\quad \triangle=\frac{b^2\sin C\sin A}{2\sin(C+A)}.\\ &\qquad\quad \triangle=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin(A+B)}.\end{aligned}\right\}\qquad\text{(公式三十一)}$$

(三)已知三邊：

$$\text{今}\quad \sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$\therefore\quad \triangle=\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

即 $\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. (公式三十二)

例一： 已知三角形之三邊爲 24，30，18，求其面積.

【解】 命 $a=24$， $b=30$， $c=18$，

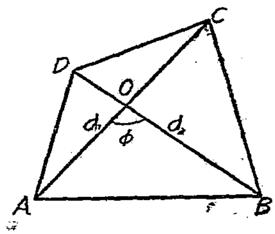
則 $s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)=36$，

$s-a=12$， $s-b=6$， $s-c=18$，

$$\therefore\ \triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{36\cdot12\cdot6\cdot8}$$
$$=144.$$

例二：設四邊形 $ABCD$ 中，對角線 AC，BD 相交於 O，今知 $AC=d_1$，$BD=d_2$，$\angle AOB=\phi$，求證此四邊形之面積為

$$S=\tfrac{1}{2}d_1d_2\sin\phi.$$



【證】 令 $\angle AOB=\angle COD=\phi$，

則 $\angle BOC=\angle AOD$

$=180°-\phi.$

$\therefore$ $S=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCD+\triangle ODA$

$=\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\phi+\frac{1}{2}OB\cdot OC\sin(180°-\phi)+\frac{1}{2}OC\cdot OD\sin\phi+\frac{1}{2}OD\cdot OA\sin(180°-\phi)$

$=\frac{1}{2}[OA\cdot OB+OB\cdot OC+OC\cdot OD+OD\cdot OA]\sin\phi$

$=\frac{1}{2}[OA(OB+OD)+OC(OB+OD)]\sin\phi$

$=\frac{1}{2}(OA+OC)(OB+OD)\sin\phi$

$=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\phi=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\phi.$

例三：在任意三角形中，求證

$$\triangle=s^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}.$$

【證】 右邊 $=s^2\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}\cdot\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}\cdot\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=$ 左邊.

$\therefore$ 左邊 $=$ 右邊.

習題二十三

1. 求 $\triangle ABC$ 之面積，設已知：

(a) $a=3$，$b=4$，$C=30°$.

(b) $b=127.8$, $c=168.5$, $A=72°43'$.

(c) $a=10$ 寸, $B=15°$, $C=45°$.

(d) $b=527.4$, $A=73°42'$, $C=63°37'$.

(e) $a=1.3$ 寸, $b=1.4$ 寸, $c=1.5$ 寸.

(f) $a=p^2x^2+q^2y^2$, $b=p^2y^2+q^2x^2$,
$c=(p^2-q^2)(x^2+y^2)$.

2. 平行四邊形 $ABCD$ 中,若已知 $AB=4$ 寸, $BC=5$ 寸, $\angle A=120°$, 求其面積.

3. 菱形每邊長 4 寸, 一對角線長 6 寸, 求其面積及另一對角線之長.

4. 平行四邊形兩對角線之長各為 7 寸及 5 寸,又此兩對角線所夾之角為 150°, 求其面積.

在任意三角形中,求證(5—10):

5. $\triangle=\dfrac{abc}{s}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$.

6. $\triangle^2=abc\,s\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

*7. $\triangle=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4\tan\frac{1}{2}(A+B-C)}$.

提示: $\tan\frac{1}{2}(A+B-C)=\tan\frac{1}{2}(180°-2C)=\cot C$.

*8. $\triangle=\dfrac{2s^2\sin A\sin B\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}$.

提示: 右邊之分式中之分子分母同以 $4R^2$ 乘之.

*9. $abc(a\cos A+b\cos B+c\cos C)=8\triangle^2$.

提示: 先證 $a\cos A+b\cos B+c\cos C=2a\sin B\sin C$.

*10. $\triangle=\dfrac{1}{4}(a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C)$.

***39. 三角形之外接圓,內切圓及傍切圓半徑** 設 R 表三角形 ABC 之外接圓半徑,r 表內切圓半徑,r_1, r_2, r_3 各表 A, B, C 角內之傍切圓半徑,則 R, r, r_1, r_2, r_3 均可用 $\triangle ABC$ 之邊角表示之,今分別討論於下:

(i) **外接圓半徑** 由正弦定律.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$$

$$\therefore \quad R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}. \qquad \text{(公式三十三)}$$

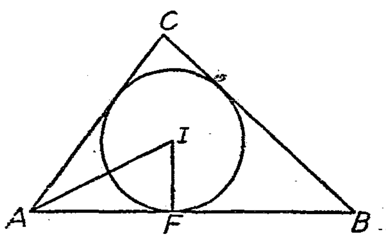
又 $$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{abc}{4\cdot\frac{1}{2}bc\sin A},$$

$$\therefore \quad R=\frac{abc}{4\triangle}. \qquad \text{(公式三十四)}$$

(ii) **內切圓半徑** 在左圖中,設 I 為 $\triangle ABC$ 內切圓之中心,作 $IF\perp AB$,聯 AI,

則 $IF=r$, $AF=s-a$,

$\angle IAF=\frac{1}{2}A$,



$$\therefore \quad \tan\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a},$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore \quad & r=(s-a)\tan\frac{A}{2} \\ \text{同理,} \quad & r=(s-b)\tan\frac{B}{2} \\ & r=(s-c)\tan\frac{C}{2} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(公式三十五)}$$

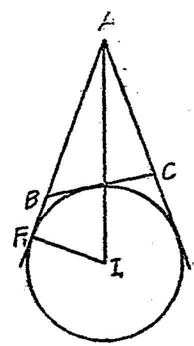
註: $AF=s-a$ 可由平面幾何學中之定理算出.

又 $(s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

$$=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}=\frac{\triangle}{s},$$

$\therefore$ $$r=\frac{\triangle}{s}.\qquad\text{(公式三十六)}$$

(iii) **傍切圓半徑** 在左圖中，設I_1為角 A 內傍切圓之圓心，作 $I_1F_1\perp AB$，聯 AI_1，則



$I_1F_1=r_1$, $AF_1=s$, $\angle I_1AF_1=\frac{1}{2}A$,

$\therefore$ $\tan\frac{A}{2}=\frac{r_1}{s}$,

$$\left.\begin{aligned}\therefore\qquad r_1&=s\tan\frac{1}{2}A\\ \text{同理，}\quad r_2&=s\tan\frac{1}{2}B\\ r_3&=s\tan\frac{1}{2}C\end{aligned}\right\}\qquad\text{(公式三十七)}$$

又 $s\tan\frac{A}{2}=s\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s-a}$

$$=\frac{\triangle}{s-a}$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\qquad r_1&=\frac{\triangle}{s-a}\\ \text{同理，}\quad r_2&=\frac{\triangle}{s-b}\\ r_3&=\frac{\triangle}{s-c}\end{aligned}\right\}\qquad\text{(公式三十八)}$$

例一：試證 $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

【證】 右邊可化為

$$4\cdot\frac{abc}{4\triangle}\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

$$=\frac{1}{\triangle}(s-a)(s-b)(s-c)$$

$$=\frac{1}{\triangle}\cdot\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s}=\frac{\triangle}{s}=r.$$

∴ 左邊=右邊.

例二：試證 $r_1+r_2+r_3=4R+r$.

【證】 $r_1+r_2+r_3-r=\frac{\triangle}{s-a}+\frac{\triangle}{s-b}+\frac{\triangle}{s-c}-\frac{\triangle}{s}$

$$=\frac{\triangle(2s-a-b)}{(s-a)(s-b)}+\frac{\triangle[s-(s-c)]}{s(s-c)}$$

$$=\frac{c\triangle}{(s-a)(s-b)}+\frac{c\triangle}{s(s-c)}$$

$$=\frac{c\triangle(s^2-cs+s^2-as-bs+ab)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\frac{c\triangle[2s^2-(a+b+c)s+ab]}{\triangle^2}$$

$$=\frac{abc}{\triangle}=4R.$$

∴ $r_1+r_2+r_3=4R+r$.

例三：試證 $\triangle=2R^2\sin A\sin B\sin C$.

【證】 今 $\triangle=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$.

$\therefore\quad \sin A=\frac{2\triangle}{bc},\ \sin B=\frac{2\triangle}{ca},\ \sin C=\frac{2\triangle}{ab},$

$\therefore\quad 2R^2\sin A\sin B\sin C=2\left(\frac{abc}{4\triangle}\right)^2\cdot\frac{8\triangle^3}{a^2b^2c^2}=\triangle,$

$\therefore\quad \triangle=2R^2\sin A\sin B\sin C.$

*習題二十四

1. 在$\triangle ABC$中，$a=18$寸，$b=24$寸，$c=30$寸，求R，r，r_1，r_2，r_3。

2. 在$\triangle ABC$中，$b=13$，$c=4$，$\cos A=-\frac{5}{13}$，求R，r，r_1，r_2，r_3。

求證下列各恆等式(3—19)：

3. $r=a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sec\frac{A}{2}.$

4. $r_1=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$

5. $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r}.$

6. $r_2r_3+r_3r_1+r_1r_2=s^2.$

7. $a(rr_1+r_2r_3)=b(rr_2+r_3r_1)=c(rr_3+r_1r_2).$

8. $\triangle=\sqrt{rr_1r_2r_3}.$

9. $\triangle=\frac{r_1r_2r_3}{\sqrt{r_2r_3+r_3r_1+r_1r_2}}.$

10. $\frac{r}{R}=4\left(\frac{s}{a}-1\right)\left(\frac{s}{b}-1\right)\left(\frac{s}{c}-1\right).$

11. $r_1+r_2=c\cot\frac{C}{2}$.

12. $r(\sin A+\sin B+\sin C)=2R\sin A\sin B\sin C$.

提示：用 $\sin A=\frac{a}{2R}$ 自左邊化至右邊.

13 $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$.

提示：左邊 $=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

14. $a\cot A+b\cot B+c\cot C=2(R+r)$.

提示：左邊 $=2R(\cos A+\cos B+\cos C)$.

15. $a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C$.

16. $\frac{1}{a\sin B}+\frac{1}{b\sin C}+\frac{1}{c\sin A}=\frac{1}{r}$.

17. $4\triangle(\cot A+\cot B+\cot C)=a^2+b^2+c^2$.

提示：$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{R}{abc}(b^2+c^2-a^2)$.

18. $r_1(\cos B-\cos C)+r_2(\cos C-\cos A)$
$$+r_3(\cos A-\cos B)=0.$$

19. $(r_2+r_3)(r_3+r_1)(r_1+r_2)=4R(r_2r_3+r_3r_1+r_1r_2)$.

20. 試在等邊 $\triangle ABC$ 中，證 $R=2r$.

提示：令 $a=b=c=2k$，則 $\triangle=\sqrt{3}k^2$.

21. 在 $\triangle ABC$ 中，設 $r_1=2r_2=2r_3$，試證 $\triangle ABC$ 必爲等腰，且 $3a=4b$.

22. 在 $\triangle ABC$ 中，設 $a-b=b-c$，試證

$$\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}=\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}.$$

提示：證 $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{2}{r_2}$.

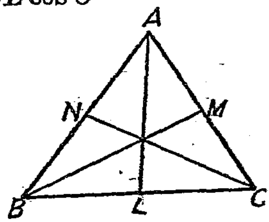
***40. 三角形中之線段** 關於三角形中之各種線段，常可應用三角公式以邊及角表示出之，玆舉數例於下，以見一般：

例一： 已知三角形之三邊 a, b, c，求中線之長.

【解】 設 $\triangle ABC$ 各邊上之中線爲 AL, BM, CN.

則 $\overline{AL}^2=\overline{AC}^2+\overline{CL}^2-2\overline{AC}\cdot\overline{CL}\cos C$

$$=b^2+\frac{1}{4}a^2-ab\cos C$$



但 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

$\therefore\quad 2\overline{AL}^2-c^2=b^2-\frac{1}{2}a^2$.

$\therefore\quad AL=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$.

同理，$BM=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}$.

又 $CN=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$.

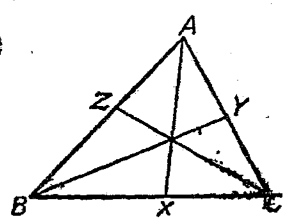
例二： 在任意三角形中，求內角平分線之長.

【解】 設 $\triangle ABC$ 之各內角平分線爲 AX, BY, CZ. 又設 $AX=t$。

今 $\triangle ABX+\triangle ACX=\triangle ABC$,

而 $\triangle ABX=\frac{1}{2}ct\sin\frac{1}{2}A$,

$\triangle ACX=\frac{1}{2}bt\sin\frac{1}{2}A$,



但 $\triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin\frac{1}{2}A$,

$\therefore\quad \frac{1}{2}t(b+c)\sin\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}bc\sin A$

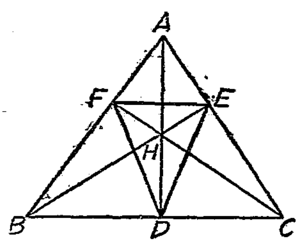
$\therefore\quad t=\frac{bc\sin A}{(b+c)\sin\frac{1}{2}A}=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$

即 $AX=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$.

同理, $BY=\frac{2ca}{c+a}\cos\frac{B}{2}$.

$CZ=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}$.

例三: 設 $\triangle ABC$ 中各邊上之高爲 AD, BE, CF, 又 H 爲垂心, 求證:



(i) $AH=2R\cos A$,
$BH=2R\cos B$,
$CH=2R\cos C$.

(ii) $HD=2R\cos B\cos C$,
$HE=2R\cos C\cos A$,
$HF=2R\cos A\cos B$.

(iii) $EF=a\cos A$,
$FD=b\cos B$,
$DE=c\cos C$.

【證】 (i) $AH=AE\sec \widehat{HAE}=c\cos A\sec(90°-C)$
$=c\cos A\csc C=c\cos A/\sin C$
$=2R\cos A$.

同理, $BH=2R\cos B$, $CH=2R\cos C$.

註: $\triangle DEF$ 稱爲 $\triangle ABC$ 之垂足三角形.

(ii) $HD=BD\tan HBD=c\cos B\tan(90°-C)$

$=c\cos B\cot C=c\cos B\cos C/\sin C$

$=2R\cos B\cos C.$

同理，$HE=2R\cos C\cos A$，　$HF=2R\cos A\cos B$.

(iii) $\triangle AEF$ 中，$\dfrac{EF}{\sin A}=\dfrac{AE}{\sin AFE}$.

今　$AE=c\cos A$，$\angle AFE=C$，($\because B, C, E, F$ 共圓)。

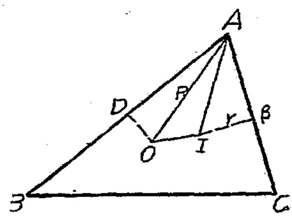
$\therefore$　$\dfrac{EF}{\sin A}=\dfrac{c\cos A}{\sin C}=2R\cos A.$

$\therefore$　$EF=2R\sin A\cos A=a\cos A.$

同理，$FD=b\cos B$，　$DE=c\cos C$。

例四：設 $\triangle ABC$ 之外心爲 O，內心爲 I，求證

$\overline{OI}^2=R^2-2Rr.$



【證】 作 $OD\perp AB$，$I\beta\perp CA$，

則 $\angle IAD=\dfrac{1}{2}A$。

$\angle OAD=90°-\angle AOD=90°-C.$

$\angle IAO=\dfrac{A}{2}-(90°-C)$

$=\dfrac{A-(A+B+C)+2C}{2}=\dfrac{1}{2}(C-B).$

又　$AO=R$，

$AI=\dfrac{I\beta}{\sin IAC}=\dfrac{r}{\sin\dfrac{1}{2}A}=4R\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$。

$\therefore$　$\overline{OI}^2=\overline{AO}^2+\overline{AI}^2-2\overline{AO}\cdot\overline{AI}\cos IAO$

$$=R^2+16R^2\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}-8R^2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C-B}{2}$$

$$=R^2+8R^2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$=R^2-8R^2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$

$$=R^2-8R^2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=R^2-2Rr.$$

註：$r=4R\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C$.（見39節例一）

習題二十五

1. 設$\triangle ABC$中，$a=13$，$b=14$，$c=15$，求高AD，中線AL，及內角平分線AX之長.

2. 設$\triangle ABC$中，三個中線之長各為m_a，m_b m_c，試證：

(a) $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$,

(b) $m_a^4+m_b^4+m_c^4=\frac{9}{16}(a^4+b^4+c^4)$.

3. 設$\triangle ABC$中，$b>c$，試證角A之外角平分線之長為

$$\frac{2bc}{b-c}\sin\frac{1}{2}A.$$

提示：仿例二，$\triangle ABC=\triangle ACX+\triangle ABX$.

4. $\triangle ABC$中，h_a，h_b，h_c表各邊上之高，試證

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}.$$

提示：$\Delta=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$.

5. 在$\triangle ABC$中，設AL為BC邊上之中線，AL與AB，

BC, CA 之交角各爲 α, β, θ, 試證:

$$\sin\alpha = a\sin B/\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

$$\sin\beta = a\sin C/\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

$$\cot\theta = (c^2-b^2)/4\triangle.$$

6. $\triangle ABC$ 中, t_a, t_b, t_c 表各角內角平分線之長,試證:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}A}{t_a}+\frac{\cos\frac{1}{2}B}{t_b}+\frac{\cos\frac{1}{2}C}{t_c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

7. 設 $\triangle DEF$ 爲 $\triangle ABC$ 之垂足三角形,試證:

(a) $EF+FD+DE=4R\sin A\sin B\sin C$.

(b) $\triangle DEF=\frac{1}{2}R^2\sin 2A\sin 2B\sin 2C$.

(c) $\triangle DEF$ 之外接圓半徑爲 $\frac{1}{2}R$.

(d) $\triangle DFE$ 之內切圓半徑爲 $2R\cos A\cos B\cos C$.

8. 設 I_1, I_2, I_3 爲 $\triangle ABC$ 之三個傍心,試證傍心三角形

(a) 各邊順次爲 $4R\cos\frac{1}{2}A$, $4R\cos\frac{1}{2}B$, $4R\cos\frac{1}{2}C$.

(b) 面積爲 $R^2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C$.

(c) 外接圓半徑爲 $2R$.

9. 設 $\triangle ABC$ 之外心爲 O, 垂心爲 H, 內心爲 I, 傍心爲 I_1, I_2, I_3 試證:

(a) $\overline{OI_1}^2=R^2+2Rr_1$.

提示: 參考例四.

(b) $\overline{OH}^2=R^2(1-8\cos A\cos B\cos C)$.

(c) $\overline{IH}^2=2r^2-4R^2\cos A\cos B\cos C$.

第 十 三 章

反 三 角 函 數

41. 反三角函數之意義 從三角函數之定義知三角函數之值,隨角之大小而變;反之,角之大小亦必隨三角函數之值而變.故角亦可以其一個函數之值表之,例如若

$$y=\sin x,$$

假定 y 爲已知,則可書爲, $x=\sin^{-1}y$.(或 $x=\operatorname{arc}\sin y$).

同理若 $y=\cos x$, 則 $x=\cos^{-1}y$ (或 $x=\operatorname{arc}\cos y$),

$y=\tan x$, 則 $x=\tan^{-1}y$ (或 $x=\operatorname{arc}\tan y$),

等等. $\sin^{-1}y$, $\cos^{-1}y$, $\tan^{-1}y$……分別稱爲反正弦函數,反餘弦函數,反正切函數……,統稱爲反三角函數.

42. 反三角函數之主值 當一角爲已知時,此角之任一三角函數爲一個定值;但當任一三角函數爲已知時,適合此函數之值,則可有無限個.

例如:設 $\sin x=\frac{1}{2}$, 則適合此式之 x, 可爲

$30°$, $150°$, $390°$, $510°$……

或 $-210°$, $-330°$, $-570°$, $-690°$……

註: 1. $\sin^{-1}y$ 表示一角,其正弦之値等於 y,與 $\frac{1}{\sin y}$ 表 $\sin y$ 之倒數不同.後者如用負指數表示時,應寫成 $(\sin y)^{-1}$ 以示區别.餘類推.

2. $\sin^{-1}y$, $\cos^{-1}y$ 中 y 之絕對值不能大於 1 (因 $\sin x$, $\cos x$ 之絕對值不能大於 1). $\sec^{-1}y$, $\csc^{-1}y$ 中 y 之絕對值不能小於 1 (因 $\sec x$, $\csc x$ 之絕對值不能小於 1). 但 $\tan^{-1}y$, $\cot^{-1}y$ 中之 y 可爲任何實數.(因 $\tan x$, $\cot x$ 之值並無限制).

通常在每一反三角函數所表示之諸角中，常取其絕對值最小之角稱爲主值．若絕對值最小之角有兩個時（如反餘弦函數或反正割函數）則取其最小之正角．

例如：

$\sin^{-1}\frac{1}{2}$ 之主值爲 $30^\circ\left(或\ \frac{\pi}{6}\right)$； $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 之主值爲 $-30^\circ\left(或 -\frac{\pi}{6}\right)$；

$\cos^{-1}\frac{1}{2}$ 之主值爲 $60^\circ\left(或\ \frac{\pi}{3}\right)$； $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 之主值爲 $120^\circ\left(或\ \frac{2\pi}{3}\right)$；

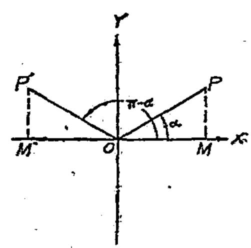
$\tan^{-1}1$ 之主值爲 $45^\circ\left(或\ \frac{\pi}{4}\right)$； $\tan^{-1}(-1)$ 之主值爲 $-45^\circ\left(或 -\frac{\pi}{4}\right)$．

43. 反三角函數之普遍值 當反三角函數所表角之主值 a 弧度（或 A°）爲已知時，則其普遍值可用下列各公式表示之．

$$\left.\begin{aligned}
\sin^{-1}y &= n\pi+(-1)^n a\\
\cos^{-1}y &= 2n\pi\pm a\\
\tan^{-1}y &= n\pi+a\\
\cot^{-1}y &= n\pi+a\\
\sec^{-1}y &= 2n\pi\pm a\\
\csc^{-1}y &= n\pi+(-1)^n a
\end{aligned}\right\}\text{(公式三十九A)}
\qquad
\left.\begin{aligned}
\sin^{-1}y &= n\,180^\circ+(-1)^n A^\circ\\
\cos^{-1}y &= n\,360^\circ\pm A^\circ\\
\tan^{-1}y &= n\,180^\circ+A^\circ\\
\cot^{-1}y &= n\,180^\circ+A^\circ\\
\sec^{-1}y &= n\,360^\circ\pm A^\circ\\
\csc^{-1}y &= n\,180^\circ+(-1)^n A^\circ
\end{aligned}\right\}\text{(公式三十九B)}$$

式中之 n 可爲任何整數．

今分別討論於下：



（一）$\sin^{-1}y$ 及 $\csc^{-1}y$ 之普遍值．

令 $\sin^{-1}y=x$，則 $\sin x=y$．

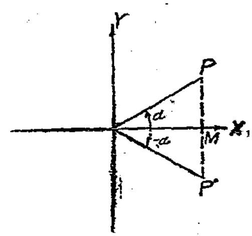
設 x 之主值爲 a 弧度，

則 $\sin a=y$．

但 $\sin(2k\pi+a)=\sin a=y$，

$\sin[2k\pi+(\pi-a)]=\sin(\pi-a)=\sin a=y$．

故 $2k\pi+\alpha$, 及 $(2k+1)\pi-\alpha$ 爲 x 之一般值.



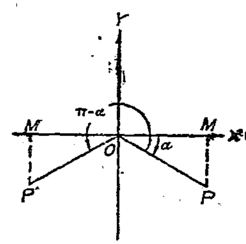
反之凡適合 $\sin x=y$ 之 x 均可用上二式表示, 又上兩式亦可併合爲一式, 即 $n\pi+(-1)^n\alpha$.

故得 $$\sin^{-1}y=n\pi+(-1)^n\alpha.$$

因 $\csc x$ 爲 $\sin x$ 之倒數, 故得

$$\sec^{-1}y=n\pi+(-1)^n\alpha.$$

(二) $\cos^{-1}y$ 及 $\sec^{-1}y$ 之普遍值.



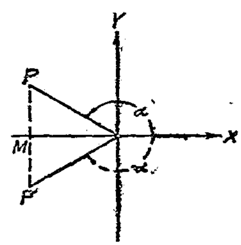
令 $\cos^{-1}y=x$, 則 $\cos x=y$.

設 x 之主值爲 α 弧度, 則

$$\cos\alpha=y,$$

但 $$\cos(2n\pi+\alpha)=\cos\alpha=y,$$

$$\cos(2n\pi-\alpha)=\cos(-\alpha)$$
$$=\cos\alpha=y.$$



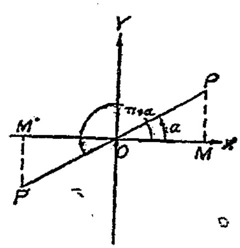
故 $2n\pi\pm\alpha$ 爲 x 之一般值, 反之凡適合 $\cos x=y$ 之 x 均可用 $2n\pi\pm\alpha$ 表示, 故得

$$\cos^{-1}y=2n\pi\pm\alpha.$$

因 $\sec x$ 爲 $\cos x$ 之倒數, 故得

$$\sec^{-1}y=2n\pi\pm\alpha.$$

(三) $\tan^{-1}y$ 及 $\cot^{-1}y$ 之普遍值.



令 $\tan^{-1}y=x$, 則 $\tan x=y$.

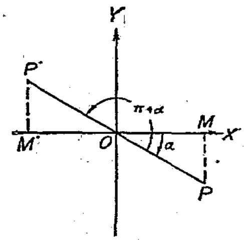
設 x 之主值爲 α 弧度, 則

$$\tan\alpha=y.$$

但　$\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha=y$,

$\tan[2k\pi+(\pi+\alpha)]$

$=\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha=y$.



故得 $2k\pi+\alpha$, $(2k+1)\pi+\alpha$ 爲 x 之一般值.反之凡適合 $\tan^{-1}x=y$ 之 x 均可用上兩式表示。

今 $2k$ 表偶數, $2k+1$ 表奇數,併合之卽表整數之全部,可換以 n 代表,故得

$$\tan^{-1}y=n\pi+\alpha.$$

因 $\cot x$ 爲 $\tan x$ 之倒數,故得

$$\cot^{-1}y=n\pi+\alpha.$$

若主角用六十分制表示時,(卽若 α 弧度 $=A°$)則因 π 弧度 $=180°$, 故反三角函數之普遍值可寫成公式 B 之形式.

例一: 寫出下列各反三角函數之主值及普遍值.

(a) $\sin^{-1}\sqrt{3}/2$,　　(b) $\cos^{-1}(-1/2)$,

(c) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$,　　(d) $\cot^{-1}0$.

【解】(a)　令 $\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=x$, 則 $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60°$

$\therefore$　x 之主值爲 $60°$, 普遍值爲 $n180°+(-1)^n60°$.

(b)　令 $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=x$, 則 $\cos x=-\dfrac{1}{2}=\cos 120°$,

$\therefore$　x 之主值爲 $120°$, 普遍值爲 $n360°\pm120°$.

(c)　令 $\tan^{-1}(-\sqrt{3})=x$,

則 $\tan x=-\sqrt{3}=\tan(-60°)$,

$\therefore$　x 之主值爲 $-60°$, 普遍值爲 $n180°-60°$.

(d) 令 $\cot^{-1}0=x$, 則 $\cot y=0=\cot 90^\circ$,

$\therefore$ x 之主值爲 90°, 普遍值爲 $n180^\circ+90^\circ$.

例二: 求適合下列各式 x 之普遍值及小於 2π 之正角.

(a) $\tan 2x=1$, (b) $\cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$.

【解】(a) 令 $\tan 2x=1=\tan\frac{\pi}{4}$,

$$\therefore \quad 2x=n\pi+\frac{\pi}{4},$$

$$\therefore \quad x=n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}=\frac{1}{8}(4n+1)\pi.$$

比 2π 小之正角爲 $\frac{1}{8}\pi$, $\frac{5}{8}\pi$, $\frac{9}{8}\pi$, $\frac{13}{8}\pi$.

(b) $\cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}=\cos\frac{2}{3}\pi$,

$$\therefore \quad \frac{x}{2}=2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi,$$

$$\therefore \quad x=4n\pi\pm\frac{4}{3}\pi=\frac{4}{3}(3n\pm1)\pi.$$

比 2π 小之正角爲 $\frac{4}{3}\pi$.

例三: 設 $2\sin^2 x=1$, 求 x 之普遍值及比 2π 小之正角

【解】 令 $\sin^2 x=\frac{1}{2}$, $\sin x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)$,

$$\therefore \quad x=n\pi+(-1)^n\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$$

$$=(4n\pm1)\frac{\pi}{4}=(2m+1)\frac{\pi}{4}.$$

比 2π 小之正角爲 $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$.

註: $4n\pm1$ 表奇數之全部, 故可用 $2m+1$ 代之.

習題二十六

1. 寫出下列各反三角函數之主值及普遍值(用六十分制表示):

(a) $\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$, (b) $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

(c) $\cos^{-1}\frac{1}{2}$, (d) $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

(e) $\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}$, (f) $\tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,

(g) $\cot^{-1}1$, (h) $\sec^{-1}(-2)$,

(i) $\csc^{-1}\sqrt{2}$, (j) $\tan^{-1}0$,

(k) $\sin^{-1}(-1)$, (l) $\cos^{-1}(-1)$.

2. 求適合下列各式 x 之普遍值,並寫出比 2π 小之正角:

(a) $\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, (b) $\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(c) $\tan 3x=-1$, (d) $\cot\frac{2}{3}x=0$,

(e) $\sin^2 x=1$, (f) $\cos^2 x=1$.

3. 設 $\sin^2 x=\sin^2 a$, 求證 $x=n\pi\pm a$.

4. 設 $\cos^2 x=\cos^2 a$, 求證 $x=n\pi\pm a$.

5. 設 $\tan^2 x=\tan^2 a$, 求證 $x=n\pi\pm a$.

6. 設 $\cos(2x+a)=0$, 求證 $x=\frac{1}{4}(2n+1)\pi-\frac{a}{2}$.

7. 設 $\tan 3x=\tan 2x$, 求證 $x=n\pi$.

註: 1. $(-1)(\pm a)$ 即 $\pm a$.

2. $2n\pi\pm a$, $(2n+1)\pi\pm a$ 可合併爲 $n\pi\pm a$.

44. 反三角函數恆等式 三角函數間之關係，若用反三角函數之符號表出，卽成一反三角函數恆等式。根據反三角函數之定義，顯然可知

$$\left.\begin{array}{ll}\sin(\sin^{-1}y)=y, & \cot(\cot^{-1}y)=y,\\ \cos(\cos^{-1}y)=y, & \sec(\sec^{-1}y)=y,\\ \tan(\tan^{-1}y)=y, & \csc(\csc^{-1}y)=y.\end{array}\right\}\quad\text{(公式四十)}$$

又若所有之角，限取主値時，則有

$$\left.\begin{array}{ll}\sin^{-1}(\sin x)=x, & \cot^{-1}(\cot x)=x,\\ \cos^{-1}(\cos x)=x, & \sec^{-1}(\sec x)=x,\\ \tan^{-1}(\tan x)=x, & \csc^{-1}(\csc x)=x.\end{array}\right\}\quad\text{(公式四十一)}$$

例如：令 $\sin^{-1}(\sin x)=a$，則從公式四十得 $\sin x=\sin a$，
今 x, a 均爲主値，故 $x=a$，卽 $\sin^{-1}(\sin x)=x$。
其餘各式可用同樣方法推得。

又若反三角函數所表之角，均取主値，且 y 爲正値時，則有

$$\left.\begin{array}{l}\sin^{-1}y+\cos^{-1}y=\frac{1}{2}\pi,\\ \tan^{-1}y+\cot^{-1}y=\frac{1}{2}\pi,\\ \sec^{-1}y+\csc^{-1}y=\frac{1}{2}\pi.\end{array}\right\}\quad\text{(公式四十二)}$$

例如：令 $\sin^{-1}y=a$，$\cos^{-1}y=\beta$，則 $\sin a=y$，$\cos\beta=y$。

$\therefore\quad \sin a=\cos\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$.

$\therefore\quad a=\frac{\pi}{2}-\beta,\qquad a+\beta=\frac{\pi}{2}$.

卽 $\sin^{-1}y+\cos^{-1}y=\frac{\pi}{2}$.

註：1. 公式四十一中，若反三角函數所表之角，不限取主値，則應寫成 $\sin^{-1}(\sin x)=n\pi+(-1)^n x$，等等。

2. 公式四十二中之第一，第三兩式，在 $y<0$ 時亦能適合，但第二式當 $y<0$ 時，則應改爲 $\tan^{-1}y+\cot^{-1}y=-\frac{1}{2}\pi$.

反三角函數除上面三組基本公式外，通常不再另立公式，處置反三角函數之問題，祇須先變其爲正三角函數，然後再行演算。

又一個反三角函數，可表示有同函數值諸角之普遍值中任一個，故反三角函數恆等式，乃表明在反三角函數所表普遍值之諸角中，可選擇適當之角使等式關係成立。此選出之角，並不限於主值，但平常證題時，遇文字之問題，爲便利計，均假定其可用主值表示。

例一： 求 $\sin\cos^{-1}\left(-\frac{12}{13}\right)$ 之值。

【解】 令 $\cos^{-1}\left(-\frac{12}{13}\right)=\alpha$，　則 $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$。

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{5}{13},$$

$$\therefore\quad \sin\cos^{-1}\left(-\frac{12}{13}\right)=\frac{5}{13}.$$

例二： 求 $\sin 2\sin^{-1}x$ 之值。

【解】 令 $\sin^{-1}x=\alpha$，　則 $\sin\alpha=x$，

$$\therefore\quad \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-x^2},$$

$$\therefore\quad \sin 2\sin^{-1}x=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$=2x\sqrt{1-x^2}.$$

例三： 求證　$\cos^{-1}\frac{16}{65}-\cos^{-1}\frac{12}{13}=\sin^{-1}\frac{4}{5}$.

【證】 令 $\cos^{-1}\frac{16}{65}=\alpha$，　$\cos^{-1}\frac{12}{13}=\beta$，

則　$$\cos\alpha=\frac{16}{65},\quad \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{63}{65},$$

$$\cos\beta=\frac{12}{13},\quad \sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{5}{13},$$

$\therefore \quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{63}{65}\cdot\frac{12}{13}-\frac{16}{65}\cdot\frac{5}{13}=\frac{4}{5}.$$

$\therefore \quad \alpha-\beta=\sin^{-1}\frac{4}{5},$

即 $\quad \cos^{-1}\frac{16}{65}-\cos^{-1}\frac{12}{13}=\sin^{-1}\frac{4}{5}.$

例四: 求證 $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}.$

【證】 令 $\sin^{-1}\frac{4}{5}=\alpha,\quad \sin^{-1}\frac{5}{13}=\beta,\quad \sin^{-1}\frac{16}{65}=\gamma,$

則 $\quad \sin\alpha=\frac{4}{5},\quad \sin\beta=\frac{5}{13},\quad \sin\gamma=\frac{16}{65},$

$\therefore \quad \cos\alpha=\frac{3}{5},\quad \cos\beta=\frac{12}{13}.$

今 $\quad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}-\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{16}{65}.$$

又 $\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\sin\gamma=\frac{16}{65},$

$\therefore \quad \cos(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right),$

$\therefore \quad \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\gamma,$

又 $\quad \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2},$

即 $\quad \sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}.$

例五： 求證 $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$.

【證】 令 $\tan^{-1}x=\alpha$, $\tan^{-1}y=\beta$,

則 $\tan\alpha=x$, $\tan\beta=y$.

$$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{x+y}{1-xy}.$$

$$\therefore \quad \alpha+\beta=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}.$$

即 $$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}.$$

註： 本題之恆等式甚爲重要，通常可當作公式用.

習題二十七

1. 求下列各式之值.

(a) $\cos\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$. (b) $\cos\left(2\cos^{-1}\frac{5}{13}\right)$.

(c) $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)$.

(d) $\tan(2\tan^{-1}2)$.

(e) $\cot\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{5}}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$.

(f) $\sin\cos^{-1}\tan\cot^{-1}3$.

求證下列各恆等式：(2—12)

2. $2\cos^{-1}x=\cos^{-1}(2x^2-1)$.

3. $3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3)$.

4. $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{8}{17}=\sin^{-1}\frac{77}{85}$.

5. $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}=\tan^{-1}\frac{63}{16}$.

6. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

7. $\tan^{-1}1+\tan^{-1}2+\tan^{-1}3=\pi$.

8. $\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}+\tan^{-1}\frac{y-z}{1+yz}+\tan^{-1}\frac{z-x}{1+zx}=0$.

提示：用例五之公式.

9. $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{8}{17}+\sin^{-1}\frac{36}{85}=\frac{\pi}{2}$.

10. $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

提示：設四角順次爲 α, β, γ, δ. 先求出 $\tan(\alpha+\beta)$, $\tan(\gamma+\delta)$, 再求 $\tan(\overline{\alpha+\beta}+\overline{\gamma+\delta})$.

*11. $\sec[\tan^{-1}(2+\sqrt{3})-\tan^{-1}(2-\sqrt{3})]=2$.

提示：設兩角爲 α,β, 先求 $\tan(\alpha-\beta)$ 之值.

*12. $2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+2\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

提示：先證明 $2\left(\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}\right)=\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}\frac{1}{7}$.

*13. 設 $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$,

求證 $x+y+z=xyz$.

*14. 設 $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$,

求證 $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$.

*15. 設 $u=\cot^{-1}\sqrt{\cos\theta}-\tan^{-1}\sqrt{\cos\theta}$,

求證 $\sin u=\tan^2\frac{\theta}{2}$.

45. 反三角函數方程式 方程式中之未知量用反三角函數表示者，稱爲反三角函數方程式．解此類方程式，祇須將各反三角函數所表示之角，分別代以 α, β……等，然後兩邊取同一三角函數，使變成一個代數方程式．惟究應用何種三角函數，在事前須先加考慮，總以容易化出及能化成次數最低之代數方程式爲原則．今舉數例於下：

例一：解 $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=\frac{\pi}{4}$.

解】 令 $\tan^{-1}2x=\alpha$, $\tan^{-1}3x=\beta$,

則 $\tan\alpha=2x$, $\tan\beta=3x$,

今 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$,

$\therefore$ $\tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{\pi}{4}$,

卽 $$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1,$$

卽 $$\frac{2x+3x}{1-6x^2}=1,$$

卽 $6x^2+5x-1=0$,

卽 $(x+1)(6x-1)=0$.

$\therefore$ $x=-1$. 或 $\frac{1}{6}$.

註：照理，反三角函數方程式中所得之解，亦應代入原式，逐一驗算．如在本題，若所有之角，均限取主值，則 $x=-1$，顯爲不合．惟習慣上凡在反三角函數恆等式或反三角函數方程式中，祗須反三角函數所表之諸角能選出一適當之角使之適合，卽承認相等．故平常爲避免計算麻煩起見，關於反三角函數方程式解法中之驗算部分，均行略去．

例二：解 $\sin^{-1}x+\sin^{-1}(1-x)=\cos^{-1}x$.

【解】 令 $\sin^{-1}x=\alpha$, $\sin^{-1}(1-x)=\beta$, $\cos^{-1}x=\gamma$,

則 $\sin\alpha=x$, $\sin\beta=1-x$, $\cos\gamma=x$,

$\therefore$ $\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$ $\sin\gamma=\sqrt{1-x^2}$.

今 $\alpha+\beta=\gamma$, $\therefore$ $\alpha-\gamma=-\beta$.

$\therefore$ $\sin(\alpha-\gamma)=\sin(-\beta)$,

卽 $\sin\alpha\cos\gamma-\cos\alpha\sin\gamma=-\sin\beta$,

卽 $x^2-(1-x^2)=-(1-x)$.

卽 $2x^2-x=0$,

卽 $x(2x-1)=0$,

$\therefore$ $x=0$ 或 $\frac{1}{2}$.

例三：解 $\sin^{-1}2x+3\cos^{-1}2x=\frac{5}{6}\pi$.

【解】 由公式 $\sin^{-1}2x+\cos^{-1}2x=\frac{1}{2}\pi$,

相減得 $2\cos^{-1}2x=\frac{1}{3}\pi$,

$\therefore$ $\cos^{-1}2x=\frac{1}{6}\pi$, $\therefore$ $2x=\cos\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{2}\sqrt{3}$,

$\therefore$ $x=\frac{1}{4}\sqrt{3}$.

習題二十八

解下列各反三角函數方程式:

1. $\sin^{-1}x=\cos^{-1}x$.

2. $\cos^{-1}x+\cot^{-1}2x=\frac{3}{4}\pi$.

3. $\sin^{-1}\dfrac{5}{x}+\sin^{-1}\dfrac{12}{x}=\dfrac{1}{2}\pi$。

4. $\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x-2}+\tan^{-1}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{1}{4}\pi$。

5. $\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1)=\tan^{-1}2x$.

6. $\sin^{-1}2x-\sin^{-1}\sqrt{3}\,x=\sin^{-1}x$.

7. $\sin^{-1}x+3\cos^{-1}x=210^\circ$.

8. $3\sin^{-1}x-2\cos^{-1}x=\dfrac{2}{3}\pi$.

9. $\tan^{-1}x+\dfrac{1}{2}\sec^{-1}x=\dfrac{1}{4}\pi$.

*10. $\sin^{-1}x-\cos^{-1}x=\sin^{-1}\ 3x-2)$.

*11. $\mathrm{vers}^{-1}x-\mathrm{vers}^{-1}ax=\mathrm{vers}^{-1}(1-a)$.

提示: 令 $\mathrm{vers}^{-1}x=\alpha$, 則 $x=\mathrm{vers}\,\alpha=1-\cos\alpha$.

*12. $\sin\{2\cos^{-1}[\cot(2\tan^{-1}x)]\}=0$.

提示: 令 $\tan^{-1}x=\alpha$, 算出 $\cot 2\alpha$ 之值, 再令 $\cos^{-1}\cot 2\alpha=\beta$, 逐步化去.

*13. $\sin\left(\cot^{-1}\dfrac{1}{2}\right)=\tan(\cos^{-1}\sqrt{x})$。

*14. $\sec^{-1}\dfrac{x}{a}-\sec^{-1}\dfrac{x}{b}=\sec^{-1}b-\sec^{-1}a$.

提示: 移項後再做.

*15. $\cos^{-1}\dfrac{1-a^2}{1+a^2}-\cos^{-1}\dfrac{1-b^2}{1+b^2}=2\tan^{-1}x$.

提示: 令第一角爲 α, 第二角爲 β, 求出 $\tan\alpha$, $\tan\beta$. 再二邊取正切做.

第十四章

三角方程式

46. 三角方程式 方程式中，含有未知角之三角函數者，稱為三角方程式．求適合一個三角方程式諸未知角之值，稱為解三角方程式．所得之結果，稱為三角方程式之解．解三角方程式無一定之方法可循，**其原則為設法將方程式變形為 $\mathrm{Fun}\,x=k$ 之形式**．在解題時對於下列各點，應加注意．

（i）多應用函數和差公式．

（ii）利用代數學上之因式分解法．

（iii）竭力避免引入根式方程式，或兩邊乘同次方．（萬一不克避免，則所得之解須逐一代入原式加以檢驗，不合者應指明棄去）．

解數字三角方程式時，對於適合方程式之解，應以角之普遍公式表示，習慣上並應將小於 $360°$（或 2π）之正角依次寫出．又解文字三角方程式時，則可將適合方程式之角用反三角函數表出．此反三角函數所表之角，習慣上認為代表其普遍值．

今先舉含一個未知角之三角方程式（卽一元三角方程式）之數例於下：

註：在數字方程式中，求適合未知角之解，均須用三角函數表查出主值．如無三角函數表時，方可用反三角函數表出．

例一：解 $\sin x+\cos x=0$。

【解】 令 $\sin x=-\cos x$,

$\therefore\quad \tan x=-1=\tan(-45^\circ)$,

$\therefore\quad x=n\,180^\circ-45^\circ$.

比 360° 小之正角爲 135° 及 315°。

例二：解 $4\sin x-9\cot x=6-6\cos x$。

【解】 令 $4\sin x-9\dfrac{\cos x}{\sin x}=6-6\cos x$,

卽 $4\sin^2 x-9\cos x=6\sin x-6\cos x\sin x$

卽 $4\sin^2 x-6\sin x+6\cos x\sin x-9\cos x=0$.

卽 $2\sin x(2\sin x-3)+3\cos x(2\sin x-3)=0$,

卽 $(2\sin x-3)(2\sin x+3\cos x)=0$,

$\therefore$ (i) $2\sin x-3=0$, $\sin x=\dfrac{3}{2}$,

但 $|\sin x|\leqq 1$, 故此解爲不可能。

(ii) $2\sin x+3\cos x=0$,

卽 $\tan x=-\dfrac{3}{2}=\tan(-56^\circ 19')$,

$\therefore\quad x=n\,180^\circ-56^\circ 19'$.

比 360° 小之正角爲 $123^\circ 51'$ 及 $303^\circ 51'$。

註：本題若用反三角函數表示時，則爲 $x=\tan^{-1}\left(-\dfrac{3}{2}\right)$.

例二：解 $\sin 3x+\cos 2x-\sin x=0$。

【解】 令 $(\sin 3x-\sin x)+\cos 2x=0$,

卽 $2\cos 2x\sin x+\cos 2x=0$,

卽 $\cos 2x(2\sin x+1)=0$,

$\therefore$ (i) $\cos 2x=0=\cos 90^\circ$.

$$2x=n\,360^\circ\pm 90^\circ,\quad x=n\,180^\circ\pm 45^\circ.$$

(ii) $2\sin x+1=0,\quad \sin x=-\frac{1}{2}=\sin(-30^\circ)$.

$$x=n\,180^\circ-(-1)^n 30^\circ.$$

$\therefore$ 原式之解爲$\begin{cases}x=n\,180^\circ\pm 45^\circ.\\ x=n\,180^\circ-(-1)^n 30^\circ.\end{cases}$

比 360° 小之正角爲 $45^\circ, 135^\circ, 210^\circ, 225^\circ, 315^\circ, 330^\circ$.

例四：解 $\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{2}$.

【解】 以 $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}$ 除兩邊，卽得

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

卽 $\cos 30^\circ\cos x+\sin 30^\circ\sin x=\cos 45^\circ$,

卽 $\cos(x-30^\circ)=\cos 45^\circ$,

$\therefore$ $x-30^\circ=n\,360^\circ\pm 45^\circ$,

$\therefore$ $x=n\,360^\circ+75^\circ$ 或 $n\,360^\circ-15^\circ$.

比 360° 小之正角爲 75° 及 345°

註：凡遇方程式爲 $a\sin x+b\cos x=c$ 之形式者，均應仿照本題之方法以 $\sqrt{a^2+b^2}$ 除兩邊．再令 $\sin\alpha=a/\sqrt{a^2+b^2}$，則 $\cos\alpha=b/\sqrt{a^2+b^2}$，後化原方程式成 $\cos(x-\alpha)=k$ 之形式，如此可避去兩邊乘方．

例五：解 $\tan x+\tan 2x+\tan 3x=\tan x\tan 2x\tan 3x$.

【解】 令 $\tan 2x+\tan 3x=-\tan x(1-\tan 2x\tan 3x)$.

卽 $$\frac{\tan 2x+\tan 3x}{1-\tan 2x\tan 3x}=-\tan x,$$

卽 $$\tan 5x=\tan(-x).$$

$\therefore \quad 5x=n\pi-x, \qquad 6x=n\pi,$

$\therefore \quad x=\frac{n}{6}\pi.$

比2π小之正角爲$0, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi.$

*例五：解$\sin x\cos x+\sin 4x\cos 2x=\frac{1}{2(1+a^2)}.$

【解】 即　$2\sin x\cos x+2\sin 4x\cos 2x=\frac{1}{1+a^2},$

即　$\sin 2x+\sin 6x-\sin 2x=\frac{1}{1+a^2},$

即　$\sin 6x=\frac{1}{1+a^2},$

$\therefore \quad 6x=\sin^{-1}\frac{1}{1+a^2},$　　即　$x=\frac{1}{6}\sin^{-1}\frac{1}{1+a^2}.$

習題二十九

解下列各方程式：

1. $\sin x+\cos x=0.$　　2. $\tan x+\cot x=0.$
3. $4\sin^2 x-3=0.$　　4. $\sin 2x-\sin x=0.$
5. $1+\cos x=2\sin^2 x.$　　6. $\tan^2 x+\sec x=1.$
7. $3\tan x+\cot x=5\csc x.$
8. $\cos x+3\sin x\tan x=3\tan x.$
9. $2\cos 2x+2(\sqrt{3}+1)\sin x-(\sqrt{3}+2)=0.$

   提示：將$\cos 2x$化成x角之函數，再用因式分解法。
10. $\cot x\tan 2x-\sec 2x=0.$

11. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$.

12. $\sin 5x+\sin x+\sin 3x=0$.

13. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$.

14. $\sin 9x+\sin 5x+2\sin^2 x=1$.

提示：用 $1-2\sin^2 x=\cos 2x$.

15. $\cos x\cos 3x-\cos 5x\cos 7x=0$.

提示：先將積化成和差，再用和差化積公式.

16. $\sin 11x\sin 4x+\sin 5x\sin 2x=0$.

17. $\sin 3x=\sin x\cos 2x$.

18. $\sqrt{3}\cos 3x-\cos x=\cos 5x$.

19. $\cos x+\sin x=1$.

20. $\cos x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{2}$.

21. $3\cos x+4\sin x=2$.

22. $\sec x-\csc x=\sqrt{2}$.

23. $\sin 3x=8\sin^3 x$.

24. $\sec x+\tan x=\sqrt{3}$.

25. $\sec(x+60^\circ)+\sec(x-60^\circ)=2\sec x$.

26. $\cot(45^\circ-x)=3\cot(45^\circ+x)$.

27. $\tan x+\tan(45^\circ-x)=0$.

28. $\tan x+\tan 2x+\tan 3x=0$.

29. $\tan x+\tan 3x=2\tan 2x$.

提示：$\tan 3x-\tan 2x=\tan 2x-\tan x$，再化成正弦餘弦函數.

30. $\tan x+\tan 2x+\sqrt{3}\tan x\tan 2x=\sqrt{3}$.

提示：移項 $\tan x+\tan 2x=\sqrt{3}(1-\tan x\tan 2x)$.

31. $a\sin^2 x-b\cos^2 x=c$.

32. $a\cos x+b\sin x=c$.

*47. **聯立三角方程式** 含有二個或二個以上未知量之三角方程式,稱爲聯立三角方程式;其解法與代數學中解聯立方程式之方法相同,但計算較困難,方法比較複雜,茲舉較爲簡易之數例於下:

例一: 設 ρ 爲正值,且 θ 在 0 與 π 之間,解

$$\begin{cases}\rho\cos\theta=1 & (1)\\ \rho\sin\theta=\sqrt{3} & (2)\end{cases}$$

【解】 $(1)^2+(2)^2$, $\rho^2=4$, $\therefore\ \rho=2.$

$\dfrac{(2)}{(1)}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$ $\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{3}$ } 答.

例二: 解 $\begin{cases}x+y=90^\circ & (1)\\ \sin x+\cos y=1 & (2)\end{cases}$

【解】 由(1) $y=90-x$

$\therefore$ $\cos y=\sin(90^\circ-x)=\sin x.$

代入(2), $2\sin x=1,$

$$\sin x=\frac{1}{2}=\sin 30^\circ,$$

$\therefore$ $x=n\,180^\circ+(-1)^n\,30^\circ.$

又 $\cos y=1-\sin x=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}=\cos 60^\circ,$

$\therefore$ $y=m\,360^\circ\pm 60^\circ.$

故 $\begin{cases}x=n\,180^\circ+(-1)^n\,30^\circ.\\ y=m\,360^\circ\pm 60^\circ.\end{cases}$

在 0° 與 360° 間之正角爲 $x=30^\circ$, $y=60^\circ$.

註: 在聯立三角方程式中,欲求普遍解非常麻煩,且求得之解須一組一組分別清楚,逐一代入方程式驗算,不合者棄去. 故通常凡遇數字係數之方程式,只要求得一組適合之解便可不必求其普遍值.

例三：解 $\begin{cases}\sin x+\sin y=a & (1)\\ \cos x+\cos y=b & (2)\end{cases}$

【解】 由(1)得 $$2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)=a \qquad (3)$$

由(2)得 $$2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)=b \qquad (4)$$

$\frac{(3)}{(4)}$，得 $$\tan\frac{1}{2}(x+y)=\frac{a}{b}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}(x+y)=\tan^{-1}\frac{a}{b} \qquad (5)$$

$(3)^2+(4)^2$， $$4\cos^2\frac{1}{2}(x-y)=a^2+b^2$$

$$\therefore\quad \cos\frac{1}{2}(x-y)=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}(x-y)=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right) \qquad (6)$$

由(5)及(6)，得 $$\begin{cases}x=\tan^{-1}\dfrac{a}{b}+\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)\\ y=\tan^{-1}\dfrac{a}{b}-\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)\end{cases}$$

註：1. 本題若從 $(1)^2+(2)^2$ 及 $(1)\cdot(2)$ 着手，亦可求得

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\left(\sin^{-1}\dfrac{2ab}{a^2+b^2}+\cos^{-1}\dfrac{1}{2}(a^2+b^2-2)\right)\\ y=\dfrac{1}{2}\left(\sin^{-1}\dfrac{2ab}{a^2+b^2}-\cos^{-1}\dfrac{1}{2}(a^2+b^2-2)\right)\end{cases}$$

此二種解法所得之結果，表法雖各異，但其值則相同。

2. 在係數爲文字之三角方程式中，文字所表之數值應加以限制，例如本題之 a 及 b 之絕對值，均不能大於2，但通常除規定應加討論或顯然不合者(如 $x=\sin^{-1}2$ 等等)外，均可不加討論。

習題三十

解下列各聯立三角方程式(x,y,θ,ρ 等爲未知量):

1. $\begin{cases}\rho\sin\theta=3\\ \rho\cos\theta=\sqrt{3}\end{cases}$

2. $\begin{cases}\rho\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)=\sqrt{3}\\ \rho\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=1\end{cases}$

3. $\begin{cases}x+y=\pi\\ \tan x+\cot y=1\end{cases}$

4. $\begin{cases}\sin x+\sin y=1\\ \sin x-\sin y=1\end{cases}$

5. $\begin{cases}\tan(x+y)=\sqrt{3}\\ \tan(x-y)=1\end{cases}$

6. $\begin{cases}2\cos(2x+3y)=1\\ 2\cos(3x+2y)=\sqrt{3}\end{cases}$

7. $\begin{cases}\tan x+\tan y=1\\ 2\cos x\cos y=\sqrt{2}\end{cases}$

8. $\begin{cases}\sin x+\cos y=0\\ 2\cos x\sin y=-1\end{cases}$

9. $\begin{cases}\rho\cos(\theta-\alpha)=a\\ \rho\sin(\theta+\beta)=b\end{cases}$

10. $\begin{cases}\sin x+\cos y=a\\ \sin y+\cos x=b\end{cases}$

11. $\begin{cases}x+y=a\\ \cos x+\cos y=a\end{cases}$

提示：第二式用和差化積公式，求出 $(x+y)$ 之值。

12. $\begin{cases}x+y=a\\ \cot x\cot y=a\end{cases}$

提示：從第二式中求出 $\cos(x-y)=\dfrac{a+1}{a-1}\cos a$.

13. $\begin{cases}\cos x+\cos y=a\\ \cos 2x+\cos y=b\end{cases}$

提示：第二式變爲 x,y 之函數，再設法求出 $\cos x-\cos y$ 之值。

14. $\begin{cases}\rho\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)=\sqrt{3}\\ \rho\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)=1\end{cases}$

提示：兩式相除，消去 ρ，即能求得 x。

第十五章

消　去　法

*48. **消去法**　在含n個未知量之一組$n+1$個方程式中，若有一共同之解，則其常數間，必有一定之關係存在．從一組方程式中消去諸未知量，即可求得此關係，此法稱爲消去法，所得之結果稱爲**消去式**．

三角消去法之原理與代數相同，惟其變化更較繁複，普通所常用之方法爲：

(i) 應用三角學中固有之恆等式——最常用者爲

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\quad \sec^2\theta-\tan^2\theta=1,\quad \csc^2\theta-\cot^2\theta=1$$

等公式．(見下例一，例二等)．

(ii) 應用代入消去法，比較消去法，及加減消去法，(見下例三，例四，例五等)．

又在消去法中，所求得之結果，必須化至極簡或化成最整齊之形式，非僅消去未知量即算了事．今舉數例於下：

例一：消去下式中之θ：

$$\begin{cases}x=a\cos\theta+h & (1)\\ y=b\sin\theta+k & (2)\end{cases}$$

【解】 由(1)得 $\qquad \dfrac{x-h}{a}=\cos\theta \qquad (3)$

由(2)得 $\qquad \dfrac{y-k}{b}=\sin\theta \qquad (4)$

$(3)^2+(4)^2,\qquad \dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1.$

例二： 消去下式中之 θ：

$$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta & (1) \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta & (2) \end{cases}$$

【解】 $(1)^2$，$x^2=x'^2\cos^2\theta-2x'y'\sin\theta\cos\theta+y'^2\cos^2\theta \quad (3)$

$(2)^2$，$y^2=x'^2\sin^2\theta+2x'y'\sin\theta\cos\theta+y'^2\cos^2\theta \quad (4)$

$(3)+(4)$，$\qquad x^2+y^2=x'^2+y'^2.$

例三： 消去下式中之 θ：

$$\begin{cases} \cos 3\theta+\sin 3\theta=a & (1) \\ \cos\theta-\sin\theta=b & (2) \end{cases}$$

【解】 $(2)^2$，$\cos^2\theta-2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta=b^2$

$\therefore\quad \sin\theta\cos\theta=(1-b^2)/2$

由(1)，
$$\begin{aligned} a&=4\cos^3\theta-3\cos\theta+3\sin\theta-4\sin^3\theta \\ &=4(\cos^3\theta-\sin^3\theta)-3(\cos\theta-\sin\theta) \\ &=4(\cos\theta-\sin\theta)(1+\sin\theta\cos\theta) \\ &\qquad -3(\cos\theta-\sin\theta) \\ &=4b\left(1+\frac{1-b^2}{2}\right)-3b=3b-2b^3 \end{aligned}$$

$\therefore\qquad a=3b-2b^3.$

例四： 消去下式中之 θ：

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) & (1) \\ y=a(1-\cos\theta) & (2) \end{cases}$$

【解】 由(2)，$\cos\theta=(y-a)/a$

$$\therefore\quad \theta=\cos^{-1}\frac{y-a}{a},\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{2ay-y^2}}{a},$$

代入(1)，即得 $\quad x=a\cos^{-1}\dfrac{y-a}{a}\mp\sqrt{2ay-y^2}.$

例五：消去下式中之 θ 及 ϕ：

$$\begin{cases}\tan\theta+\tan\phi=a & (1)\\ \tan\theta\tan\phi=b & (2)\\ \theta+\phi=\alpha & (3)\end{cases}$$

【解】 由(3)， $\tan\alpha=\tan(\theta+\phi)=\dfrac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi}$，

$\therefore$ $\tan\alpha=\dfrac{a}{1-b}$.

習題三十一

消去下列各式之 θ：

1. $\begin{cases}x=\rho\sec\theta\\ y=\rho\tan\theta\end{cases}$

2. $\begin{cases}x=a\csc\theta+h\\ y=b\tan\theta+k\end{cases}$

3. $\begin{cases}x=\cos\theta+\sin\theta\\ y=\cos\theta-\sin\theta\end{cases}$

4. $\begin{cases}x=a\tan^2\theta\\ y=2a\cot\theta\end{cases}$

5. $\begin{cases}x=a\sec\theta-x\tan\theta\\ y=b\sec\theta+y\tan\theta\end{cases}$

6. $\begin{cases}x=\tan\theta+\sin\theta\\ y=\tan\theta-\sin\theta\end{cases}$

7. $\begin{cases}\cos\theta+\sin\theta=a\\ \cos\theta=b\end{cases}$

8. $\begin{cases}\sin\theta-\cos\theta=a\\ \sin 2\theta=b\end{cases}$

9. $\begin{cases}\cot\theta+\cos\theta=a\\ \cot\theta-\cos\theta=b\end{cases}$

10. $\begin{cases}\csc\theta-\sin\theta=a^3\\ \sec\theta-\cos\theta=b^3\end{cases}$

11. $\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=a\\ \tan\theta+\cot\theta=b\end{cases}$

12. $\begin{cases}a\sin\theta+b\cos\theta=c\\ a'\sin\theta+b'\cos\theta=c'\end{cases}$

13. $\begin{cases}\dfrac{x}{a}\cos\theta+\dfrac{y}{b}\sin\theta=1\\ \dfrac{x}{a}\sin\theta-\dfrac{y}{b}\cos\theta=1\end{cases}$

14. $\begin{cases}\sin(a+\theta)=m\\ \sin(a-\theta)=n\end{cases}$

提示：二式相加，和差化積.

15. $\begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=b\sin^3\theta \end{cases}$

16. $\begin{cases} x=\frac{3}{4}\cos\theta+\frac{1}{4}\cos 3\theta \\ y=\frac{3}{4}\sin\theta-\frac{1}{4}\sin 3\theta \end{cases}$

*17. $\begin{cases} x=a\cos\theta+a\cos(120^\circ-\theta) \\ y=a\sin(120^\circ-\theta) \end{cases}$

*18. $\begin{cases} x=a\theta-b\sin\theta \\ y=a-b\cos\theta \end{cases}$

消去下列各式中之 θ 及 ϕ：

19. $\begin{cases} x=a\sin\phi\cos\theta \\ y=b\sin\phi\sin\theta \\ z=c\cos\phi \end{cases}$

20. $\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\phi+c \\ y=r\sin\theta\sin\phi+b \\ z=r\cos\theta+c \end{cases}$

21. $\begin{cases} \sin\theta+\sin\phi=a \\ \cos\theta+\cos\phi=b \\ \cos(\theta+\phi)=c \end{cases}$

22. $\begin{cases} \cot\theta-\cot\phi=a \\ \cot\theta\cot\phi=b \\ \theta-\phi=c \end{cases}$

*23. $\tan\theta+\tan\phi=a,\quad \cot\theta+\cot\phi=b,\quad \theta+\phi=\alpha.$

提示：由二式求出 $\tan\theta\tan\phi$ 之值，再代入 $\tan(\theta+\phi)=\tan\phi$.

*24. $\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1,\quad \frac{x}{a}\cos\phi+\frac{y}{b}\sin\phi=1,$

$\theta-\phi=2\alpha.$

*25. $a\sin\theta-b\sin\phi=0,\quad c\cos\theta-d\cos\phi=0,$

$\theta-2\phi=0.$

提示：以 $\theta=2\phi$ 代入前兩式.

*26. $a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=x,\quad b\sin^2\phi+a\cos^2\phi=y,$

$a\tan\theta=b\tan\phi.$

提示：以 $x(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$ 代第一式中之 x，求出 $\tan^2\theta$，用同法求出 $\tan^2\phi$，再代入 $a^2\tan^2\theta=b^2\tan^2\phi$ 中.

附　錄　一

表　之　用　法

I. 對數表(表一)

1. 對數之意義　設 $b^x=N$, 則稱 x 爲對於以 b 爲底之 N 之對數, 以算式表示之爲

$$x=\log_b N,$$

上式中, b 稱爲**對數底**, N 稱爲**眞數**.

除 0 及 1 以外之正數均可用作對數底, 通常在數字計算上所用之對數, 均以 10 爲底, "10" 稱爲**常用對數底**, 所成之對數系, 稱爲**常用對數系**. (本書所論者, 亦以常用對數爲主, 在此對數系中, 底 10 可省去不寫, 例如 $\log_{10}N$ 卽寫作 $\log N$). 但在理論上所用之對數, 則以 e 爲底. e 爲一無理數, 可用無限級數表示之, 如

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\cdots$$

其値約爲 2.718, 此種對數系, 稱爲**自然對數系**.

因一個正數之乘方, 仍爲正數, 故負數不能有對數, 卽 N 必須爲正數. 幾個特殊數之對數如下: (設 $b<1$).

$$\begin{array}{llll}
\because & b^{\infty}=\infty. & \therefore & \log_b\infty=\infty. \\
& b^1=b. & \therefore & \log_b b=1. \\
& b^0=1. & \therefore & \log_b 1=0. \\
& b^{-\infty}=0. & \therefore & \log_b 0=-\infty.
\end{array}$$

同一個眞數 N 因所取對數底之不同，其對數值亦不同。例如：

$$2^4=16, \qquad \therefore \quad \log_2 16=4.$$

$$4^2=16, \qquad \therefore \quad \log_4 16=2,$$

$$8^{\frac{4}{3}}=16, \qquad \therefore \quad \log_8 16=\frac{4}{3}=1.3333.$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16, \qquad \therefore \quad \log_{\frac{1}{2}} 16=-4.$$

2. 對數之性質 對數有下列之性質：

(i) $\log_b MN=\log_b M+\log_b N.$

(ii) $\log_b M/N=\log_b M-\log_b N.$

(iii) $\log_b M^p=p\log_b M.$

(iv) $\log_b \sqrt[r]{M}=\frac{1}{r}\log_b M.$

證：令 $\log_b M=x, \qquad \log_b N=y,$

則 $b^x=M, \qquad b^y=N.$

今 (i) $MN=b^x\cdot b^y=b^{x+y}.$

$\therefore \quad \log_b MN=x+y=\log_b M+\log_b N.$

(ii) $M/N=b^x/b^y=b^{x-y},$

$\therefore \quad \log_b M/N=x-y=\log_b M-\log_b N.$

(iii) $M^p=(b^x)^p=b^{px},$

$\therefore \quad \log_b M^p=px=p\log_b M.$

(iv) $\sqrt[r]{M}=(b^x)^{\frac{1}{r}}=b^{\frac{x}{r}},$

$\therefore \quad \log_b \sqrt[r]{M}=\frac{x}{r}=\frac{1}{r}\log_b M.$

應用以上之性質，則

(i) 計算兩數（或若干數）之積時，可以用求和之方法解决之。

(ii) 計算兩數之商時，可以用求差之方法解决之。

(iii) 計算一數之乘方時，可以用乘法解决之。

(iv) 計算一數之方根時，可以用除法解决之。

故對數爲簡算法之一種，三角學中之計算題，往往均甚繁複，應儘量採用對數計算，以求簡捷。

例一：求 $\log 10$ 及 $\log 0.1$ 之值。

【解】 $\because\ 10^1=10,\qquad \therefore\ \log 10=1.$

$10^{-1}=0.1,\qquad \therefore\ \log 0.1=-1.$

例二：設 $\log 2=0.3010$，$\log 3=0.4771$，求

(a) $\log 18$.　　(b) $\log 3/25$.

【解】 (a) $\log 18=\log 2\cdot 3^2=\log 2+2\log 3$

$=0.3010+2\times 0.4771=1.2552.$

(b) $\log\frac{3}{25}=\log\frac{12}{100}=\log 3.2^2-\log 10^2$

$=\log 3+2\log 2-2\log 10$

$=0.4771+2\times 0.3010-2$

$=-0.9209.$ （或 $9.0791-10$）

習　題　I

1. 變下列各式爲對數式：

(a) $2^{-4}=\frac{1}{16}$.　　(b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$.

(c) $27^{\frac{2}{3}}=9$.　　(d) $a=a$.

2. 變下列各式爲指數式:

(a) $\log_3 81=4$. (b) $\log_{\sqrt{2}} 4=4$.

(c) $\log_{10} e=0.4343$. (d) $\log_b 1=0$.

3. 在下列各對數式中,求對數底 b 之值:

(a) $\log_b 64=2$. (b) $\log_b 0.001=3$.

(c) $\log_b \frac{1}{81}=4$. (d) $\log_b \frac{1}{81}=-4$.

4. 求下列各式之值:

(a) $\log 1000+\log 100+\log 10+\log 1$.

(b) $\log\frac{1}{10}+\log\frac{1}{100}-\log\frac{1}{100}$.

(c) $\log(0.1)^4-\log\sqrt[3]{0.001}+\log 10^{\frac{3}{2}}$.

(d) $\log\sqrt{\frac{1}{10}}+\log\frac{1}{\sqrt{10}}-\log\sqrt{10}$.

5. 設 $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$, $\log 7=0.8451$, 求下各式之值:

(a) $\log 6$. (b) $\log 5$.

(c) $\log 6.125$. (d) $\log 1.8$.

(e) $\log\frac{21}{20}$. (f) $\log\frac{8}{\sqrt{3}}$.

6. 證明下列各式:

(a) $2\log_a a+2\log_a\frac{1}{a}+\log_a 1=0$.

(b) $3\log_{27} 3-\frac{1}{3}\log_3 27+\log_9 3=\frac{1}{2}$.

(c) $a^{\log a}=x$. (d) $\log_a a^x=x$.

3. 常用對數系　以10爲底之對數系稱爲常用對數系(見附錄第1節),在此對數系中,每一眞數之對數,均可視爲由二部份合成,一部份爲整數,稱爲**定位部**,一部份爲小數,稱爲**定値部**,例如在 $\log 7.14=0.8537$ 中,定位部爲0,而定値部爲8537.

$$\log 7140=\log 1000\times 7.14=\log 1000+\log 7.14$$
$$=3+0.8537=3.8537.$$
$$\log 0.0714=\log 0.01\times 7.14=\log 0.01+\log 7.14$$
$$=-2+0.8537=\overline{2}.8537\ (\text{或 } 8.8537-10).$$

$\log 7140$ 之定位部爲3, $\log 0.0714$ 之定位部爲 -2. 故定位部可爲正,或爲0,或爲負,但定値部則常使其爲正値.

在7.14, 7140, 0.0714等數中,稱"714"爲**有效數字**,由上所舉之例,可見當眞數之有效數字相同時,其定値部均相同,所不同者只爲其定位部份.

4. 定位部之決定法　在常用對數系中,眞數如爲10之乘冪,其對數値甚易推得,如

$$10^3=1000,\qquad \therefore\quad \log 1000=3.$$
$$10^2=100,\qquad \therefore\quad \log 100=2.$$
$$10^1=10,\qquad \therefore\quad \log 10=1.$$
$$10^0=1,\qquad \therefore\quad \log 1=0.$$
$$10^{-1}=0.1,\qquad \therefore\quad \log 0.1=-1.$$
$$10^{-2}=0.01,\qquad \therefore\quad \log 0.01=-2.$$
$$10^{-3}=0.001,\qquad \therefore\quad \log 0.001=-3.$$

註: $\overline{2}.8537$ 卽 $-2+.8537$ 之簡寫,乃表示只有定位部爲負,其定値部爲正.爲計算上便利起見.亦可寫爲 $8.8537-10$, $18.8538-20$ 等等.

由此可見眞數愈大，則其對數值亦愈大。今設 N 表眞數，則

$100<N<1000$ 時，　$2<\log N<3$，　即 $\log N=3+$小數。

$10<N<100$ 時，　$1<\log N<2$，　即 $\log N=2+$小數。

$1<N<10$ 時，　$0<\log N<1$，　即 $\log N=0+$小數。

$0.1<N<1$ 時，　$-1<\log N<0$，　即 $\log N=-1+$小數。

$0.01<N<0.1$ 時，　$-2<\log N<-1$，即 $\log N=-2+$小數。

$0.001<N<0.01$ 時，　$-3<\log N<-2$，即 $\log N=-3+$小數。

故定位部之決定，可用視察法，其規則如下：

(i) **當眞數大於 1 時，其對數之定位部爲正數或 0。定位部之值，比眞數之整數位數少 1.**

(ii) **當眞數小於 1 時，其對數之定位部爲負數．定位部之絕對值比小數點後第一位有效數字前之"0"之個數多 1.**

例如：

眞　　數	714	71.4	7.14	0.714	0.0714
對數之定位部	2	1	0	−1	−2

習 題 II

1. 試用視察法決定下列各數之對數定位部：

   4567.8,　45678000,　0.000092,　0.01003,
   1.0130,　100.3,　0.8008,　800.8.

2. 設 $\log 3.06=0.4857$，求下列各數之對數．

   30.6,　0.306,　30600,　0.00306,
   3.06×10^{16},　$3.06/10^{15}$,　1/306,　1/0.0306.

3. 設 $\log 1.704=0.2315$，寫出下列各對數之眞數．

   2.2315,　$\bar{2}.2315$,　7.2315—10,　−2.7685.

5. **已知眞數求對數法**　一數之對數之定位部，可依上節所述之規則，由視察法先行決定．但其定值部則必須查對數表方能求得．本書所附對數表（附表一）定值部有四位，凡眞數有三個有效數字之對數定值部，均可直接查得．若有效數字超過三個時，則其對數之定值部，須利用比例方法求得．平常爲便利計，亦可根據其第四個有效數字．直接從 p. p. 行中查到其差數．但眞數有五個有效數字，則第五位應用四捨五入法升入上一位計算．

今舉例說明如下：

例一：求 log 714.

【解】（i）714 有三位整數，故定位部爲 2.

（ii）在 N 列內檢得前二個有效數字 "71"，在此橫行內查得列首寫"4"之一數爲 8537.

$\therefore \qquad \log 714 = 2.8537.$

No	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*p.p.* 123	456	789
......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	112	234	456
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	112	234	455
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	112	234	455

例二：求 log 0.07 及 log 7200.

【解】（a）log 0.07 之定位部爲 -2. 其定值部與 "700" 之定值部相同，今在表中查得爲 8451，故得

$$\log 0.07 = \bar{2}.8451.$$

（b）log 7200 之定位部爲 3，其定值部與"720"之

定值部相同，今在表中查得爲 8573，故得

$$\log 7200 = 3.8573.$$

例三：求 log 70.63.

【解】 今定位部爲 1. 但眞數有四個有效數字，在表中不能直接查得其定值部. 今檢得

$$\begin{array}{r} \log 70.70 = 1.8494 \\ \log 70.60 = 1.8488 \\ \hline \text{眞數相差 10 之對數表差} = 0.0006 \end{array}$$

因 70.63 介於 70.70 及 70.60 之間，比 70.60 實差爲 0.03. 故知 log 70.63 必在 1.8494 及 1.8488 之間，假定

$$\log 70.63 = 1.8488 + x/10{,}000,$$

x 之近似值可從下之比列式求得，

$$0.10 : 0.0003 = 0.0006 : x/10{,}000$$

即 $\qquad 10 : 3 = 6 : x, \qquad x = 1.8 = 2$

故 $\qquad \log 70.63 = 1.8488 + 0.0002 = 1.8490.$

例四：求 log 70.16 及 log 70.167.

【解】 (a) 先查得 log 70.1 = 1.8457. 再在"70"之橫行 *p.p.* 列內查得頁首標明"6"之一數爲 4,

$$\therefore \quad \log 70.16 = 1.8461.$$

(b) 先查得 log 70.1 = 1.8457，今 70.167 = 70.17，在 *p.p.* 列內查得差數仍爲 4.

$$\therefore \quad \log 70.167 = 1.8461.$$

註： 1. 例三所用之方法稱爲補插法. 在此法中嘗假定對數之增加與眞數之增加成正比例. 此原理並非絕對正確，故所求出之對數值，只爲近似值.

2. 四位對數表只準至四位，故例三中所求得之 x，只須用整數表示.

3. 若以 d 代表眞數相差 10 之對數表差，D 代表眞數之實差，則實差 D 之對數表差 x，可用公式表示之，如 $x = Dd/10$.

6. 已知對數求眞數　先由已知對數之定値部，從表上查得眞數之有效數字，再就其定位部決定眞數之整數位數或小數點之地位。定位部爲正或 0，則眞數大於 1，定位部爲負，則眞數小於 1. 其決定之方法如下：

（i）**設定位部爲"$+n$"，則眞數有$(n+1)$位整數.**

（ii）**設定位部爲"$-n$"，則眞數之最前一位有效數字與小數點間有$(n-1)$個"0"。**

又若定値部之地位在表上不能直接查到時，可查其較最接近二數之地位，再用比例方法求其近似値。或先查出比其較小之一數之地位，再決定眞數之前三位有效數字，又在 $p.p.$ 行中直接查出第四位有效數字之近似値。

今舉例說明如下：

例一： 在下二式中求 x 之値：

(a) $\log x=3.8615$,

(b) $\log x=2.590$.

【解】 (a) 在表上查得定値部 8615 之地位，在其同行查得 N. 列內所標之數爲"72"，（卽眞數之前二位有效數字）。同列內檢得頁首所標之數爲"7"（卽眞數第三位有效數字）。故知眞數之有效數字爲"727"。

今定位部爲 3，故知眞數有四位整數.

$$\therefore\quad x=7270.$$

(b) 仿上法檢得眞數之有效數字爲"323"。

今定位部爲 -2，故知眞數之第一位有效數字與小數點間有 1 個"0"。

$$\therefore\quad x=0.0323.$$

例二：設 $\log x=0.8559$ 求 x.

【解】 定值部 8559 之地位，在表上不能查得，今先查其最接近(一大一小)兩數 8555，8561 之有效數字為

$$\begin{array}{c} 0.8561=\log 7.18 \\ 0.8555=\log 7.17 \\ \hline \text{表差 } 0.01006 \text{ 之眞差}=.01. \end{array}$$

今 $0.8559-0.8555=0.0004$.

設 0.8559 之眞數為 $7.17+0.00y$，則得比例式

$$0.0006:0.0004=0.01:0.00y$$

或

$$6:4=10:y$$

$$\therefore\quad y=\frac{40}{6}=7.$$

故得

$$x=7.17+0.006=7.177.$$

例三：設 $\log x=1.8613$，求 x.

【解】 (i) 先查得 $\log 0.726=\bar{1}.8609$.

(ii) 今 $8613-8609=4$，在"72"橫行之 $p.p.$ 列內查得表差為 4 之一數，其列首所標之數為"6"或"7"，

$$\therefore\quad x=0.7266 \text{ 或 } 0.7267.$$

註：1. 在例二中，設以 d 表示眞數相差 0.01 之表差，D 表示實差，則眞數第四位有效數字 y，可用公式表示之如下

$$y=\frac{10D}{d}.$$

2. 四位對數表中所查到之眞數，亦只能準確至四位有效數字，故用比例方法求到之 y，不必求出小數．而例三中兩種結果可任意選用一個．

習　題　III

求下列各對數之值(1—20)：

1. $\log 13000$
2. $\log 0.759$
3. $\log 0.008$
4. $\log 998$
5. $\log 0.00049$
6. $\log 5.26$
7. $\log 0.0528$
8. $\log 9.06$
9. $\log 9503$
10. $\log 1.014$
11. $\log 8799000$
12. $\log 0.8665$
13. $\log 50.59$
14. $\log 700.7$
15. $\log 0.05631$
16. $\log 2.718$
17. $\log 0.4343$
18. $\log 3.1416$
19. $\log 13756000$
20. $\log 0.85678$

在下列各式中求 x (21—40)：

21. $\log x=0.5705$
22. $\log x=2.8704$
23. $\log x=3.6766$
24. $\log x=1.9133$
25. $\log x=5.3118$
26. $\log x=4.9494$
27. $\log x=\overline{1}.9009$
28. $\log x=\overline{3}.9600$
29. $\log x=\overline{2}.0969$
30 $\log x=\overline{4}.7774$
31. $\log x=1.9000$
32. $\log x=7.0707$
33. $\log x=2.7070$
34. $\log x=0.9178$
35. $\log x=1.4850$
36. $\log x=2.2959$
37. $\log x=\overline{3}.5757$
38 $\log x=\overline{4}.6666$
39. $\log x=9.3311-10$
40. $\log x=8.8777-10$

7. 餘對數　一數 N 之倒數之對數，稱爲 N 之餘對數，記作 colog N. 應用餘對數，則在對數之計算中，可避免減法列式之麻煩.

今　$\operatorname{colog} N=\log 1/N=\log N^{-1}=-\log N$

$$=(10-\log N)-10\ [\text{或}(20-\log N)-20\cdots]$$

故餘對數之求法，可如下例所示.

例： 求 colog 714 及 log 1/0.00714.

【解】 (a) $\operatorname{colog} 714=-\log 714$

$$=(10-2.8537)-10$$

$$=7.1463-10.$$

$$\begin{array}{r} {}^{*}9.99910-10 \\ 2.8537 \quad (- \\ \hline 7.1463-10 \end{array}$$

(b) $\log\dfrac{1}{0.00714}=\operatorname{colog} 0.00714$

$$=1.1463.$$

$$\begin{array}{r} 9.99910-10 \\ 8.8537-10 \ (- \\ \hline 1.1463 \end{array}$$

8. 對數在計算上之應用　純數值之計算，利用對數之性質(附錄第 2 節)可使之化爲簡單，今舉數例於下：

例一： 求 $\sqrt{\dfrac{23^3\times 14.76}{(0.7)^3}}$ 之值.

【解】 設所求之值爲 x，則

$$\log x=\frac{1}{2}(3\log 23+\log 14.76+5\operatorname{colog} 0.7)$$

$$\begin{array}{rr} 3\log 23=3(1.3617) & =4.0851 \\ \log 14.76 & =1.1691 \\ 5\operatorname{colog} 0.7=5(0.1549) & =0.7745 \\ \hline & 2)6.0287 \\ \hline \log x & =3.0144 \\ \therefore\ x & =1034. \end{array}$$

註：在實際應用時，算式不必寫出，應一面查表一面由心算直接寫出 colog 之值.

例二：求 0.00081 之七次根.

【解】令 $x=\sqrt[7]{0.00081}$,

則　$\log x=\frac{1}{7}\log 0.00081=\frac{1}{7}(66.9101-70)$

$=9.5586-10.$

$\therefore$　$x=0.3619.$

例三：求 $(9097\times5.409)/(-225\times0.8665)$ 之值.

【解】令原式 $=-x$,

則　$x=\dfrac{9097\times5.409}{225\times0.8665}$

$=258.2$

$\therefore$　原式 $=-258.2.$

$\log 9097=3.9589$
$\log 5.409=0.7421$
$\operatorname{colog} 225=7.678-10$
$\operatorname{colog} 0.8665=0.0622$

$\therefore$　$\log x=2.4120$
$x=258.2$

習　題　IV

應用對數求下列各式之值:

1. $7.7\times81.3.$
2. $22.87\times0.0582.$
3. $0.053\times0.0472\div0.063.$
4. $5280\times(-63.42)\times(-7)^2.$
5. $(3.1416)^3.$
6. $\sqrt[7]{0.03687}.$
7. $\dfrac{8094\times\sqrt[5]{0.031}}{5408\times\sqrt[3]{0.17}}.$
8. $\sqrt{\dfrac{(348.7)^2\times(0.82)^3}{\sqrt{2.678}}}.$
9. 設 $a=66.6$, $b=33.4$, $c=55.5$, $a+b+c=2s$,
   求 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 之值.
10. 在上題中求 $\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ 之值.

*9. **對數底之變換** 同一眞數若所取之底不同，則其所得之對數亦相異(附錄第1節).茲求其關係如下:

設 $\log_a N=x,\qquad \log_b N=y,$

則 $a^x=N,\qquad b^y=N,$

∴ $a^x=b^y.$

∴ $x\log_b a=y=\log_b N$

∴ $x=\log_b N/\log_b a.$

卽 $\log_a N=\log_b N/\log_b a.$ (公式甲)

上式爲從以 b 爲底之對數系化爲以 a 爲底之對數系之公式.

公式甲中，令 $a=e,\ b=10$，則得

$$\log_e N=\log_{10} N/\log_{10} e. \qquad \text{(公式乙)}$$

此式爲由以10爲底之對數系化成以 e 爲底對數系之公式.

公式甲中，令 $a=10,\ b=e$，則得

$$\log_{10} N=\log_e N/\log_e 10. \qquad \text{(公式丙)}$$

此爲由 e 爲底之對數化成10爲底對數之公式. 式中 $1/\log_e 10$ 之近似值係爲0.4343，稱爲對數之模數.

例一: 求 $\log_7 0.586$.

【解】 $\log_7 0.586=\dfrac{\log 0.586}{\log 7}=\dfrac{9.9769-10}{0.8481}$

$$=-\frac{2321}{8451}=-0.2746.$$

例二: 已知 $\log_e 2=0.6931$，求 $\log 2$.

【解】 $\log 2=\dfrac{\log_e 2}{\log_e 10}=0.6931\times 0.4343=0.3010.$

*10. **對數表之造法** 當 x 小於1時, $1+x$ 對於以 e 爲底之對數,可用無限級數表示之如下:

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots \qquad (1)$$

此式稱爲對數級數.

在上式中用 $-x$ 代 x,可得

$$\log_e(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots \qquad (2)$$

$$\therefore \quad \log_e\frac{1+x}{1-x}=\log_e(1+x)-\log_e(1-x)$$

$$=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right) \qquad (3)$$

令 $x=\dfrac{1}{2N+1}$, 則 $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{N+1}{N}$, 代入(3)得

$$\log_e\frac{N+1}{N}=2\left[\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3(2N+1)^3}+\frac{1}{5(2N+1)^5}+\cdots\right]$$

但 $\log_e\dfrac{N+1}{N}=\log_e(N+1)-\log_e N,$

$$\therefore \quad \log_e(N+1)=$$

$$\log_e N+2\left[\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3(2N+1)^3}+\frac{1}{5(2N+1)^5}+\cdots\cdots\right]$$

上式中 N 可爲任意之正值,如以

$$N=1,2,3,4\cdots\cdots$$

分別代入卽可求得一個以 e 爲底之對數表.再由

$$\log_{10}N=\log_e N/\log_e 10$$

之關係,卽可求得一個以10爲底之對數表.

註: (1)之證明須用極限理論及無限級數之性質,越出本書範圍,茲從略.

II. 三角函數之眞數表(表二)

11. 表之說明

(i) 本書所附三角函數表只列正弦,餘弦,正切三種,因

$$\cot x=\frac{1}{\tan x},\quad \sec x=\frac{1}{\cos x},\quad \csc x=\frac{1}{\sin x},$$

故餘切,正割,餘割之函數,均可化爲正切,餘弦,正割之函數再行計算.

(ii) 凡 90° 以上角之函數及各負角之函數,均可化爲銳角之函數,故表上只列從 0° 起至 90° 止各角函數之值.

(iii) 一角從 0° 增加至 90° 時,正弦及正切之值隨之逐漸增大,但餘弦之值,則反逐漸減小.故

$\sin 27^\circ 28'$ 比 $\sin 27^\circ 24'$ 爲大,而比 $\sin 27^\circ 30'$ 爲小.

但 $\cos 27^\circ 28'$ 則比 $\cos 27^\circ 24'$ 爲小,而比 $\cos 27^\circ 30'$ 爲大.

(iv) 表中之角每隔"六分"爲一階段,凡"分"數爲6之倍數者如 $27^\circ 0'$, $27^\circ 6'$, $27^\circ 12'$, $27^\circ 18'$, $27^\circ 24'$ 等之函數,均可在表上直接查得,至如 $27^\circ 28'$ 之函數值,則可用比例法求其近似值.

例如: $\sin 27^\circ 28'=\sin 27^\circ 24'+$(正小數)

$\cos 27^\circ 28'=\cos 27^\circ 24'-$(正小數),

(v) 四位函數表函數之值只準至四位,故從上節比例所得之值至小數點後五位之數,均須用四捨五入法升入上一位.又所用到之角,只須準至分,如遇秒時,亦用四捨五入法進入分,求其近似角.

(vi) 銳角之正弦餘弦函數之值均小於1,即均爲小數,表中爲簡省起見,所有小數點,概行略去,如 $\sin 27^\circ 24'$ 之值爲 0.0462,但表中只寫 0462.

(vii) 正切之値，當角比 45° 小時，亦爲小數，表中亦將小數點略去，但當角比 45° 大時，則其值大於1，表中將其整數部份及小數點在 $0'$ 列中記出，在此同行內之各數値前，均須冠以此整數，但數値上有橫線者，則其整數部份應依照下一行 $0'$ 列中之整數．

12. 已知一角查其函數法．

(i) 查正弦用表二A，查餘弦用表二B，查正切用表二C．

(ii) 在左邊一列中查度數，頁首橫行中檢分數．

(iii) 表上不能直接查得之角，可查與此角最接近之角(一大一小)，然後用比例方法求其差數(或查比此角較小之角再在旁邊之 $M.D.$ 欄內直接查出差數)．如爲

(a) 正弦正切，則加此差數；

(b) 餘弦，則減此差數．

今舉例說明於下：

例一：查 $\sin 27^\circ 24'$ 之値及 $\cos 27^\circ 24'$ 之値．

【解】 (a) 在附表二 A 中左邊一列內查得 27°，於此橫行內檢得頁首標明 $24'$ 者爲 4602，因得 $\sin 27^\circ 24' = 0.4602$．

(b) 在附表二 B 中左邊一列內查得 27°，於此橫行內檢得頁首標明 $24'$ 者爲 8878，因得 $\cos 27^\circ 24 = 0.8878$．

例二：查 $\tan 71^\circ 30'$ 之値及 $\tan 71^\circ 36$ 之値．

【解】 (a) 在附表二 C 中左邊一列內查得 71°，於此橫行內檢得頁首標明 30 者爲 9887，因此橫行 $0'$ 列中之數，有整數 2，故得 $\tan 71^\circ 30' = 2.9887$．

(b) 用同法查得 71° 之橫行 1 頁首標明 $36'$ 之數爲 0061，又從 72° 之橫行 0 列內查得整數爲 3．故得

$$\tan 71°36' = 3.0061.$$

例三：求 $\sin 27°28'$ 之值。

【解】 今在表二 A 中查得

$$\begin{array}{l} \sin 27°30' = 0.4617 \\ \underline{\sin 27°24' = 0.4602} \\ 6' \text{ 之差} \quad = 0.0015 \end{array}$$

當角數相差甚小時，其正弦值之增加可視爲與角度之增加成比例，今 $27°28'$ 與 $27°24'$ 之實差爲 $4'$，因得比例式

$$6' : 4' = 0.0015 : x/10000$$

或 $\qquad 6 : 4 = 15 : x \qquad \therefore \quad x = 10$

故得 $\sin 27°28' = 0.4617 + 0.0010 = 0.4627.$

例四：求 $\cos 27°28'$ 之值。

【解】 今 $\qquad \cos 27°24' = 0.8878$

$$\underline{4' \text{ 之表差} = 0.0005 \quad (-}$$

$\therefore \qquad \cos 27°18' = 0.8873.$

例六：求 $\cot 64°.75$ 之值。

【解】 $\qquad \cot 64°.75 = \tan(90 - 64.75) = \tan 25°.25$

$$= \tan 25°15'.$$

今 $\qquad \tan 25°12' = 0.4706$

$$\underline{3' \text{ 之表差} = 0.0011 \quad (+}$$

$\therefore \qquad \cot 64°.75 = 0.4717.$

註：例三中 x 之近似值亦可直接從表上查得，即在 $27°$ 之橫行同一橫行 *M.D.*（相差）列中查得頁首爲 $4'$ 之數爲 10，加於 $\sin 27°24'$ 之值 0.4617 之最後兩位小數上，即得

$$\sin 27°28' = 0.4627.$$

13. 已知函數之値查角法.

（i）已知正弦之値用表二 A，餘弦之値用表二 B，正切之値用表二 C。

（ii）函數之値在表中能查得時，先查得其所在地位，再在左邊一列中定度數，頁首定分數.

(iii) 函數之値不能在表中查得時，可查與此接近之値之二個角度，再用比例求其差數（分），（或查比此較小之値所表示之角度，再在 $M.D.$ 中查出差數），如爲

(a) 正弦，正切，加此差數，

(b) 餘弦，減此差數.

（iv）如已知餘切，正割，餘割函數之値，可先化爲正切，餘弦，正弦，再行求出角度.

今舉例說明於下：

例一：已知 $\sin x=0.9114$，求 x.

【解】 在表二 A 中，檢得 9114 之地位，在左邊之一列中檢得此數所在之橫行爲 65°，又在頁首中檢得此數所在之列爲 42′，故知

$$x=65°42'.$$

例二：設 $\tan x=2.0486$，求 x.

【解】 在表二 C 中，查得與2.0486最接近之二數爲2.0503及2.0413.

今
$$\begin{array}{r} 2.0503=\tan 64° \\ \underline{2.0413=\tan 63°54'} \\ 0.0090=6' \text{ 之表差} \end{array}$$

今 2.0486 與 2.0413 實差爲 9.0073，設所求之角與 63°54′ 相差 y 分，則由假定可得比例式

$$0.0090 : 0.0074 = 6 : y$$

即 $90 : 73 = 6 : y$ $\therefore$ $y = 5$。

以5分加於 $63°54'$ 即得 $x = 63°59'$.

例三: 設 $\cos x = 0.6670$, 求 x.

【解】 在表二 B 中,查得 $0.6665 = \cos 48°12'$.

在 $M.\ D.$ 欄內查得差4(與5最近之數)頁首標明 $2'$,

故得 $x = 48°12' - 2' = 48°10'$.

例四: 設 $\cot x = 0.4617$, 求 x.

【解】 今 $\cot x = \tan(90° - x) = 0.4617 = \tan 62°30'$,

故得 $90° - x = 62°30'$. $x = 27°30'$.

習 題 V

1. 求下列各函數之值。

(a) $\sin 80°$ (b) $\cos 28°6'$ (c) $\tan 30°30'$

(d) $\sin 53°42'$ (e) $\cos 8°15'$ (f) $\tan 46°18'$

(g) $\sin 73°.24$ (h) $\cos 81°.18$ (i) $\tan 75°.85$

(j) $\cot 19°42'$ (k) $\cot 8°13'$ (l) $\cot 18°.65$

2. 求下列各式中之 x: (x 爲銳角).

(a) $\sin x = 0.8587$ (b) $\cos x = 0.3393$

(c) $\tan x = 0.3607$ (d) $\sin x = 0.3003$

(e) $\cos x = 0.7700$ (f) $\tan x = 2.0233$

(g) $\tan x = 2.0332$ (h) $\cot x = 2.7451$

註: 例二 y 之近似值,亦可從表上直接查出,即在此同一橫行之 $M.\ D.$ 列內查得"73"(最近74之數)之列首所示爲 $5'$. 故得

$$x = 63°54' + 5' = 63°59'.$$

***14. 隣近 0° 及 90° 之銳角函數求法** 在前二節中曾假定當二角相差甚小時，其函數値之差與對應角之差成比例，此種假定本非絕對眞確，惟角度不甚近於 0° 或 90° 時，則在實用上已足準確，倘角度隣近 0° 或 90° 時，欲求較準確之結果，可用下述之規則：

（i）求隣近 0° 諸銳角函數之規則：

$\sin x = x$ 之弧度量.

$\cos x$ 仍用普通方法在表中檢查.

$\tan x = x$ 之弧度量.

$\cot x = 1/x$ 之弧度量.

（ii）求隣近 90° 諸銳角函數之規則：

$\sin x$ 仍用普通方法在表中檢查.

$\cos x = x$ 之餘角之弧度量.

$\tan x = 1/x$ 之餘角之弧度量.

$\cot x = x$ 之餘角之弧度量.

例一： 求 42′ 之正弦，正切及餘切.

【解】 $42' = 42 \times 0.0002909$ 弧度 $= 0.01222$ 弧度.

$$\therefore \quad \sin 42' = 0.01222$$

$$\tan 42' = 0.01222$$

$$\cot 42' = 1/0.01222 = 81.83.$$

例二： 求 89°34′.6 之餘弦，餘切及正切.

【解】 其餘角 $= 90° - 89°34'.6 = 25'.4 = 0.00739$ 弧度.

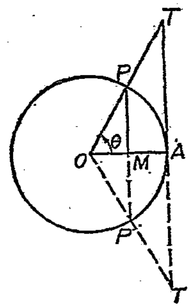
$$\therefore \quad \cos 89°34'.6 = 0.00739.$$

$$\cot 89°34'.6 = 0.00739.$$

$$\tan 89°34'.6 = 1/0.00739 = 135.3.$$

註：1. 以上所述之規則，係根據下面之定理。

設 θ 表一角之弧度量，則當 θ 趨近於 0 時，$\sin\theta/\theta$ 及 $\tan\theta/\theta$ 二比值趨近於 1.



今證明之如下：

在單位圓中，令中心角 AOP 之量爲 θ 弧度，則

$$\overset{\frown}{AP}=\theta,\quad \sin\theta=MP,\quad \tan\theta=AT.$$

延長 PM 交圓周於 P'，聯 OP' 交 TA 之延長線于 T'，則

$$P'P=2\,MP=2\sin\theta;$$

$$\overset{\frown}{P'AP}=2\theta,$$

$$T'T=2\,AT=2\tan\theta.$$

今 $$P'P<\overset{\frown}{P'P}<T'T,$$

故 $$2\sin\theta<2\theta<2\tan\theta,$$

即 $$\sin\theta<\theta<\tan\theta. \tag{1}$$

以 $\sin\theta$ 除(1)，得

$$1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta},$$

$$\therefore\quad 1>\frac{\sin\theta}{\theta}>\cos\theta. \tag{2}$$

以 $\tan\theta$ 除(1)，得

$$\cos\theta<\frac{\theta}{\tan\theta}<1,$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\cos\theta}>\frac{\tan\theta}{\theta}>1. \tag{3}$$

今當 θ 趨近於 0 時，$\cos\theta$ 及 $\dfrac{1}{\cos\theta}$ 均趨近於 1，故 $\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ 及 $\dfrac{\tan\theta}{\theta}$ 亦趨近於 1.

由此定理可得結論：

設 θ 爲極小角之弧度量，則在近似計算中，可以 θ 代 $\sin\theta$ 及 $\tan\theta$.

2. 需要將分化度或弧度時，可應用附表四.

*15. **三角函數表之造法**　三角函數均可用無限級數表出，其式如下：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} - \frac{x^7}{\underline{|7}} + \cdots\cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^4}{\underline{|4}} - \frac{x^6}{\underline{|6}} + \cdots\cdots$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots\cdots\cdots$$

以上各式中之 x 均以弧度爲單位。由以上各級數，將 x 之值分別依次代入，計算最前之若干項，即可求得正弦，餘弦，正切之近似值，造成三角函數眞數表。

三角函數表亦可用 Simpson 造表法求出。其法如下：

在公式　$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y$,

及　　　$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y$

中，令 $y=1'$，而將左邊第二項移至右邊，即得

$$\sin(x+1')=2\sin x\cos 1'-\sin(x-1').$$

$$\cos(x+1')=2\cos x\cos 1'-\cos(x-1').$$

在此兩式中，依次令 $x=1', 2', 3'\cdots\cdots$，即可求得正弦函數及餘弦函數之值。例如

$\sin 1'=0.000291$,

$\sin 2'=2\cos 1'\sin 1'-\sin 0'=0.000582$,

$\sin 3'=2\cos 1'\sin 2'-\sin 2'=0.000873$,

………………………………………………

$\cos 1'=0.999999$,

$\cos 2'=2\cos 1'\cos 1'-\cos 0'=0.999999$,

………………………………………………

註：1. 三角級數之證明，越出本書範圍，茲從略。

2. $\underline{|2}=1\cdot 2$,　$\underline{|3}=1\cdot 2\cdot 3$,　$\underline{|4}=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots$

III. 三角函數之對數表(表三)

16. 表之說明

(i) 本書所附三角函數對數表只列正弦，餘弦，正切三種，因

$$\log\cot A=\operatorname{colog}\tan A,$$
$$\log\sec A=\operatorname{colog}\cos A,$$
$$\log\csc A=\operatorname{colog}\sin A,$$

故餘切，正割，餘割之對數值，可由正切，餘弦，正弦之函數表中求得.

(ii) 表上列從 $0°$ 起至 $90°$ 止之角之函數.

(iii) 一角從 $0°$ 增加至 $90°$ 時，正弦正切之值，隨之逐漸增大. 但餘弦之值反逐漸減小，故

$\log\sin 27°28'$ 比 $\log\sin 27°24'$ 爲大而比 $\log\sin 27°30'$ 爲小，但 $\log\cos 27°28'$ 比 $\log\cos 27°24'$ 爲小而比 $\log\sin 27°30'$ 爲大.

(iv) 表中之角每隔"六分"爲一階段，凡分數能以 6 整除之角如 $27°6'$，$27°12'$，$27°18'$，$27°24'$……之各函數之對數，可以在表上直接查得，至如 $27°28'$ 角之函數之對數值，則須用比例法求其近似值.

例如： $\log\sin 27°28'=\log\sin 27°24'+$(正小數)

又 $\log\cos 27°28'=\log\cos 27°24'-$(正小數)

或 $=\log\cos 27°30'+$(正小數)

(v) 四位函數表只準至四位，故從上節比例所得在小數點後五位之數均須用四捨五入法升入上一位. 又所用到之角度，只須準至分，如遇到秒時，亦用四捨五入法，求其近似角.

(vi) A 爲銳角時，$\sin A$，$\cos A$ 均小於 1，故 $\log\sin A$，$\log\cos A$ 均爲負數，例如

$$\log\sin 27°24' = \log 0.4602 = -0.3371$$
$$= 9.6629 - 10.\ (\text{定值部必須爲正})$$

但表上只寫 6629，省去小數點，且以整數 9 公用（只在"分"列中寫出），又後面之"-10"亦已省去。通常稱 9.6629 爲正弦函數對數表值，簡寫爲 $\mathrm{L}\sin 27°24'$，故

$$\log\sin A = \mathrm{L}\sin A - 10$$

一般可寫爲　$\log\mathrm{Fun}\, A = \mathrm{L}\,\mathrm{Fun}\, A - 10.$

又 A 大於 45° 時，$\tan A > 1$，故 $\log\tan A$ 爲正數。

如　$\log\tan 84°48' = 1.0409 = 11.0409 - 10.$

但表上只寫 0409，而在"0′"一列中寫出其整數部份 10。

註：在表三 C 中凡數字上有一橫線者，其對數之整數部份須從下一行之整數。

17. 已知一角查其函數之對數法　用三角函數對數表（見附表三 $A. B. C$），其檢查方法與表二相同。今舉例說明於下：

例一：查 $\log\sin 27°24'$ 之值。

【解】　在表三 A 內左邊查 27°，頁首檢 24′，得 $\mathrm{L}\sin 27°24' = 9.6929$，故得 $\log\sin 27°24' = 9.6929 - 10.$

例二：查 $\log\cos 27°24'$ 之值。

【解】　在表三 B 內，左邊查 27°，首頁檢 24′ 得 $\mathrm{L}\cos 27°24' = 9.9483$，故得 $\log\cos 27°24' = 9.9483 - 10.$

例三：查 $\log\tan 84°48'$ 之值。

【解】　在表三 C 內查得 $\mathrm{L}\tan 84°48' = 11.0409.$

故得 $\log\tan 84°48' = 1.0409.$

例四： 查 $\log\sin 27°28'$ 之值。

【解】 今先查得 $\log\sin 27°24'=9.6629-10$

在表差($M.D.$)行內查得實差4′之比例數爲10(即0.0010)

故得 $\log\sin 27°28'=\log\sin 27°24'+0.0010$

$$=9.6639-10.$$

例五： 查 $\log\cos 84°50'$ 之值。

【解】 今先查得 $\log\cos 84°48'=9.9573-10$

實差2′之比例數$=0.0052$ (−

∴ $\log\cos 84°50'=9.9521-10.$

例六： 求 $\log\cot 35°3'$ 之值。

【解】 $\log\cot 35°3'=\log\tan 54°57'$

今 $\log\tan 54°54'=10.1532-10$

實差3′之比例數$=0.0008$ (+

∴ $\log\tan 54°57'=10.1540-10$

故得 $\log\cot 35°3'=0.1540.$

18. 已知函數之對數值求角度 用三角函數對數表(即表三 $A.B.C$)，其檢查法與表二大致相同，惟須先將對數值化爲"表值"，如 9.9555−10 在表上應查 9.9555；1.0366 在表上應查 11.0366 等。今舉例說明於下：

例一： 設 $\log\sin A=9.9555-10$，求 A。

【解】 在表三 B 中查得 $9.9555=\mathrm{L}\sin 64°30'$.

∴ $A=64°30'.$

例二： 設 $\log\tan A=1.0356$，求 A。

【解】 在表三 C 中，查得

$$11.0326=\mathrm{L}\tan 84°42'.$$

——在 84° 橫行之 $M.\ D.$ 中，查得與 30 最近之一數"26"頁首標明 $2'$.

故得　　$11.0356 = \mathrm{L}\tan 84^\circ 44'$.

$\therefore$　　$A = 84^\circ 44'$.

例三：設　$\log\cos A = 9.9253 - 10$，求 A.

【解】 在表二 B 中，查得

$$9.9251 = \mathrm{L}\cos 32^\circ 42'$$

表差"2"之實數＝　　$3'$ (－

$$\therefore\quad 9.9253 = \mathrm{L}\cos 32^\circ 39'$$

$$\therefore\quad A = 32^\circ 39'.$$

習　題　VI

1. 查下列各對數之值：

$\log\sin 62^\circ 36'$,　$\log\cos 9\pi/20$,　$\log\tan 5^\circ 50'$,

$\log\cot 31^\circ 4'$,　$\log\sec 84^\circ 8'$,　$\log\sin 42^\circ 6' 27''$.

2. 在下列各題中求角 A 之值(假定 A 爲銳角).

(a) $\log\sin A = 9.9226 - 10$

(b) $\log\cos A = 8.9226 - 10$

(c) $\log\tan A = 0.0111$

(d) $\log\cot A = 1.1155$

(e) $\log\sin A = 9.8267 - 10$

(f) $\log\cos A = 9.8574 - 10$

3. 在 $b = \dfrac{a\sin B}{\sin A}$ 中，設 $B = 41^\circ 14'$, $A = 60^\circ 48'$, $a = 14.2$, 求 b.

***19. 隣近 0° 與 90° 之角之函數對數值求法** 若角以度，分表示者，先化分爲度之小數(用附表四)，再按照下述之規則計算.

(i) 求隣近 0° 諸角函數對數值之規則:

$$\log\sin x^\circ=\bar{2}.2419+\log x.$$

$$\log\tan x^\circ=\bar{2}.2419+\log x.$$

$$\log\cot x^\circ=1.7581-\log x.$$

$\log\cos x^\circ$ 仍用通常方法在表中查得.

(ii) 求隣近 90° 諸角函數對數值之規則:

$$\log\cos x^\circ=\bar{2}.2419+\log(90-x).$$

$$\log\cot x^\circ=\bar{2}.2419+\log(90-x).$$

$$\log\tan x^\circ=1.7581-\log(90-x).$$

$\log\sin x^\circ$ 仍用通常方法在表中查得.

例: 求 $\log\tan 3'$ 及 $\log\tan 89^\circ.935$.

【解】 (a) $\log\tan 3'=\log\tan 0.05^\circ=\bar{2}.2419+\log 0.05$

$\therefore$ $\qquad=\bar{2}.2419+\bar{2}.69904=\bar{4}.9409.$

(b) $\log\tan 89^\circ.935=1.7581-\log(90-89.935)$

$\qquad=1.7581-\bar{2}.8129=2.9452.$

註: 上面所述之規則，可說明如下:

因 $\quad 1^\circ=0.017453$ 弧度, $\quad\therefore\ x^\circ=0.017453\times x$ 弧度

由附錄第 14 節之結果, $\sin x^\circ=0.017453\,x$

$\therefore\ \log\sin x^\circ=\log 0.017453\,x=\log 0.017453+\log x$

$\qquad=\bar{2}.2419+\log x.$

又 $\quad\cot x^\circ=1/0.017453\,x.$

$\therefore\ \log\cot x^\circ=-\log 0.017453\,x=-\log 0.017453-\log x$

$\qquad=1.7581-\log x.$

附 錄 二

三角函數之圖解

20. 三角函數之圖解 設 $y=\text{Fun}\,x$，當 x 有一定值 x_1 時，y 即有一對應值 y_1，如取 (x_1, y_1) 作一點 P 之座標（以 x_1 爲橫標，y_1 爲縱標），即能在垂直座標系中作出一點 $P_1(x_1, y_1)$。今由小至大，給 x 以適當之值（以弧度爲單位）$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_r$，同時求出 y 之對應值 $y_1, y_2, y_3 \cdots\cdots y_r$. 在垂直座標系中將各點 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3), \cdots\cdots P_r(x_r, y_r)$ 作出，依次平滑聯結各點，即得一曲線，此曲線稱爲 $\text{Fun}\,x$ 之圖解。

利用三角函數之圖解方法，則函數之變化情形，可以一目了然。今將各種三角函數之圖解，分別討論於下·

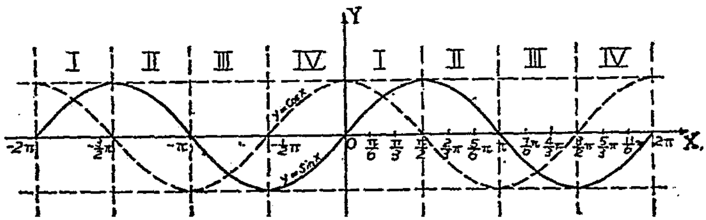
21. 正弦曲線

(i) 令 $y=\sin x$。

(ii) 求出 x, y 之相當各值，列表如下：

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi\cdots$
y	0	.50	.87	1	.87	.50	0	−.50	−.87	−1	−.87	−.50	1···

(iii) 作出各點 (x, y)，並順序聯結如下圖。



上面圖形稱爲**正弦曲線**，此爲一波狀曲線，兩端均可伸展至無窮.

今考察上圖，容易看出正弦之性質如下:

(i) $\sin x$ 之值(即 y 之值)最大爲 1，最小爲 -1.

(ii) $\sin x$ 之值，在第一象限內自 0 增大至 1；在第二象限內自 1 減小至 0；在第三象限內自 0 減小至 -1；在第四象限內自 -1 增大至 0.

(iii) 因 $\sin(2k\pi+\theta)=\sin\theta$，$x$ 之值每隔 2π，y 即得相同之值，故正弦曲線每隔 2π 即週而復始. 此種性質稱爲函數之**週期性**. 2π 稱爲 $\sin x$ 之**週期**.

22. 餘弦曲線　令 $y=\cos x$，則仿照上節所述之方法，可求得餘弦曲線如圖中虛線所表示者. 從此曲線可看出以下各性質.

(i) $\cos x$ 之值，最大爲 1，最小爲 -1.

(ii) $\cos x$ 之值，在第一象限內自 1 減小至 0；在第二象限內自 0 減小至 -1；在第三象限內自 -1 增至 0；在第四象限內自 0 增至 1.

(iii) $\cos x$ 之週期爲 2π.

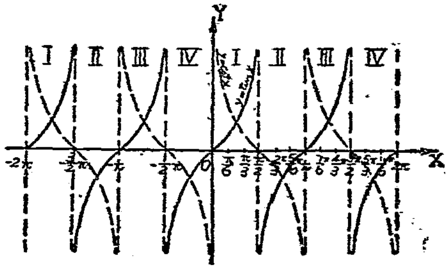
23. 正切曲線.

(i) 令 $y=\tan x$.

(ii) 求出 x, y 之相當各值，列表如下:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi\cdots$
y	0	.58	1.73	$\pm\infty$	-1.73	$-.58$	0	.58	1.73	$\pm\infty$	-1.73	$-.58$	$0\cdots$

(iii) 作出各點 (x, y)，並順序聯結得正切曲線如下圖.



從上圖中,容易看出以下各性質.

(i) $\tan x$之值並無限制.

(ii) $\tan x$之值,在第一象限內自0增至∞;在第二象限內自$-\infty$增至0;在第三象限內自0增至∞;在第四象限自$-\infty$增至0.

(iii) 因$\tan(k\pi+\theta)=\tan\theta$, x之值每隔π,y即得相同之值.正切曲線每隔π即週而從始.故$\tan x$之週期為π.

24. 餘切曲線　仿上節所述之方法,可得餘切曲線如圖中虛線所示.從此曲線可看出以下各性質:

(i) $\cot x$之值並無限制.

(ii) $\cot x$之值,在第一象限內自∞減小至0;在第二象限內自0減小至$-\infty$;在第三象限內自∞減小至0;在第四象限內自0減小至$-\infty$.

(iii) $\cot x$之週期為2π.

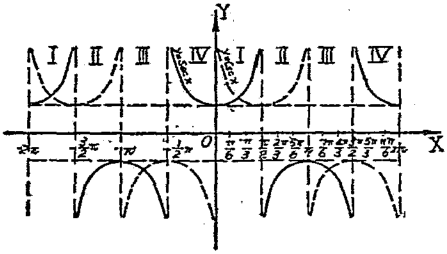
25. 正割曲線.

(i) 令$y=\sec x$.

(ii) 求出x, y之相當各值列表如下:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi\cdots$
y	1	1.15	2	$\pm\infty$	-2	-1.15	-1	-1.15	-2	$\mp\infty$	2	1.15	$1\cdots$

(iii) 作出各點(x, y)並順序聯結,得正割曲線如下圖.



從此圖中,可看出以下各性質.

(i) $\sec x$之絕對值不能小於1.

(ii) $\sec x$之值,在第一象限內自∞減小至1;在第二象限內自1增至∞;在第三象限內自$-\infty$增至-1;在第四象限內自-1減小至$-\infty$.

(iii) $\sec x$之週期為2π.

26. 餘割曲線 仿上節方法,可得餘割線曲如圖中虛線所表示者.由此圖中可看出以下各性質:

(i) $\csc x$之絕對值不能小於1.

(ii) $\csc x$之值,在第一象限內自1增至∞;在第二象限內自$-\infty$增至-1;在第三象限內自-1減小至$-\infty$;在第四象限內自-1增至∞.

(iii) $\csc x$之週期為2π.

附 錄 三

公 式 彙 錄

公式		頁數
19.	$\tan 2x=2\tan x/(1-\tan^2 x)$	78
20	$\sin x/2=\pm\sqrt{(1-\cos x)/2}$	81
22.	$\cos x/2=\pm\sqrt{(1+\cos x)/2}$	81
22. A.	$\tan x/2=\pm\sqrt{(1-\cos x)/(1+\cos x)}$	81
22. B	$\tan x/2=(1-\cos x)/\sin x=\sin x/(1+\cos x)$	81
23.	$\begin{cases}\sin A+\sin B=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)\\ \sin A-\sin B=2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)\\ \cos A+\cos B=2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)\\ \cos A-\cos B=-2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)\end{cases}$	85
24.	$\begin{cases}\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]\\ \cos x\sin y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]\\ \cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]\\ \sin x\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]\end{cases}$	86
25.	$a/\sin A=b/\sin B=c/\sin C=2R$	94
26.	$\begin{cases}a=b\cos C+c\cos B\\ b=c\cos A+a\cos C\\ c=a\cos B+b\cos A\end{cases}$	97
27. A.	$\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\end{cases}$	98

公式　　　　頁數

27. B. $$\begin{cases}\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\end{cases}$$ 98

28. $$\begin{cases}(b-c)/(b+c)=\tan\frac{1}{2}(B-C)/\tan\frac{1}{2}(B+C)\\ (c-a)/(c+a)=\tan\frac{1}{2}(C-A)/\tan\frac{1}{2}(C+A)\\ (a-b)/(a+b)=\tan\frac{1}{2}(A-B)/\tan\frac{1}{2}(A+B)\end{cases}$$ 101

29. A. $$\begin{cases}\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{(s-b)(s-c)/bc}\\ \sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{(s-c)(s-a)/ca}\\ \sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{(s-a)(s-b)/ab}\end{cases}$$ 102

29. B. $$\begin{cases}\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{s(s-a)/bc}\\ \cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{s(s-b)/ca}\\ \cos\dfrac{C}{2}=\sqrt{s(s-c)/ab}\end{cases}$$ 102

29. C. $$\begin{cases}\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{(s-b)(s-c)/s(s-a)}=r/(s-a)\\ \tan\dfrac{B}{2}=\sqrt{(s-c)(s-a)/s\ s-b)}=r/(s-b)\\ \tan\dfrac{C}{2}=\sqrt{\ s-a)(s-b)/s(s-a)}=r/(s-a)\end{cases}$$ 103

公式 頁數

30. $\triangle=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$ 126

31. $\triangle=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}=\frac{b^2\sin C\sin A}{2\sin(C+A)}=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin(A+B)}$ 126

32. $\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 129

33. $R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}$ 129

34. $R=\frac{abc}{4\triangle}$ 129

35. $r=(s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-b)\tan\frac{B}{2}=(s-c)\tan\frac{C}{2}$ 129

36. $r=\frac{\triangle}{s}$ 130

37. $r_1=s\tan\frac{A}{2},\ r_2=s\tan\frac{B}{2},\ r_3=s\tan\frac{C}{2}$ 130

38. $r_1=\frac{\triangle}{s-a},\ r_2=\frac{\triangle}{s-b},\ r_3=\frac{\triangle}{s-c}$ 130

39. A, B $\begin{cases}\sin^{-1}y=n\pi+(-1)^n a=n\,180^\circ+(-1)^n A^\circ\\ \cos^{-1}y=2n\pi\pm a=n\,360^\circ\pm A^\circ\\ \tan^{-1}y=n\pi+a=n\,180^\circ+A^\circ\end{cases}$ 140

附　表

一. 對數表

二. 三角函數眞數表

三. 三角函數對數表

四. 角之轉換表

對數表 （表一）

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

對數表　(表一)

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

正弦函數眞數表 （表二A）

度	0′	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	（表尾差） 1′	2′	3′	4′	5′
0	0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	3	6	9	12	15
3	0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	3	6	9	12	15
4	0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	3	6	9	12	14
5	0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	3	6	9	12	14
6	1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	3	6	9	12	14
7	1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	3	6	9	12	14
8	1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	3	6	9	12	14
9	1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	3	6	9	12	14
10	1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	3	6	9	11	14
11	1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	3	6	9	11	14
12	2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	3	6	9	11	14
13	2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	3	6	8	11	14
14	2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	3	6	8	11	14
15	2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	3	6	8	11	14
16	2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	3	6	8	11	14
17	2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3	6	8	11	14
18	3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3	6	8	11	14
19	3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	3	5	8	11	14
20	3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3	5	8	11	14
21	3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3	5	8	11	14
22	3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3	5	8	11	14
23	3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	3	5	8	11	14
24	4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	3	5	8	11	13
25	4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	3	5	8	11	13
26	4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	3	5	8	10	13
27	4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	3	5	8	10	13
28	4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	3	5	8	10	13
29	4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	3	5	8	10	13
30	5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	3	5	8	10	13
31	5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	3	5	7	10	12
32	5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	2	5	7	10	12
33	5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	2	5	7	10	12
34	5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	2	5	7	10	12
35	5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	2	5	7	9	12
36	5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	2	5	7	9	12
37	6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	2	5	7	9	12
38	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	2	5	7	9	11
39	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	2	4	7	9	11
40	6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	2	4	7	9	11
41	6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	2	4	7	9	11
42	6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	2	4	6	9	11
43	6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	2	4	6	8	11
44	6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	2	4	6	8	10

度	0'	6' 0°·1	12' 0°·2	18' 0°·3	24' 0°·4	30' 0°·5	36' 0°·6	42' 0°·7	48' 0°·8	54' 0°·9	(表尾差) 1'	2'	3'	4'	5'
45	7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	2	4	6	8	10
46	7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	2	4	6	8	10
47	7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	2	4	6	8	10
48	7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	2	4	6	8	10
49	7547	7558	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	2	4	6	8	9
50	7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	2	4	6	7	9
51	7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	2	4	5	7	9
52	7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	2	4	5	7	9
53	7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	2	3	5	7	8
54	8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	2	3	5	7	8
55	8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	2	3	5	7	8
56	8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	2	3	5	6	8
57	8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	2	3	5	6	8
58	8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	2	3	5	6	8
59	8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	1	3	4	6	7
60	8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	1	3	4	6	7
61	8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	1	3	4	6	7
62	8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	1	3	4	5	7
63	8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	1	3	4	5	6
64	8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	1	3	4	5	6
65	9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	1	2	4	5	6
66	9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	1	2	3	5	6
67	9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	1	2	3	4	6
68	9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	1	2	3	4	5
69	9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	1	2	3	4	5
70	9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	1	2	3	4	5
71	9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	1	2	3	4	5
72	9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	1	2	3	4	4
73	9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	1	2	2	3	4
74	9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	1	2	2	3	4
75	9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	1	1	2	3	4
76	9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	1	1	2	3	3
77	9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	1	1	2	3	3
78	9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	1	1	2	2	3
79	9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	1	1	2	2	3
80	9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	0	1	1	2	2
81	9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	0	1	1	2	2
82	9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	0	1	1	2	2
83	9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	0	1	1	1	2
84	9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	0	1	1	1	2
85	9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	0	0	1	1	1
86	9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	0	0	1	1	1
87	9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	0	0	0	1	1
88	9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	0	0	0	0	0
89	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	0	0	0	0	0

餘弦函數眞數表 （表二B）

度	0′	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	（表尾差） 1′	2′	3′	4′	5′
0	1·000	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	0	0	0	0	0
1	9998	9998	9998	9997	9997	9997	9996	9996	9995	9995	0	0	0	0	0
2	9994	9993	9993	9992	9991	9990	9990	9989	9988	9987	0	0	0	1	1
3	9986	9985	9984	9983	9982	9981	9980	9979	9978	9977	0	0	1	1	1
4	9976	9974	9973	9972	9971	9969	9968	9966	9965	9963	0	0	1	1	1
5	9962	9960	9959	9957	9956	9954	9952	9951	9949	9947	0	1	1	1	2
6	9945	9943	9942	9940	9938	9936	9934	9932	9930	9928	0	1	1	1	2
7	9925	9923	9921	9919	9917	9914	9912	9910	9907	9905	0	1	1	2	2
8	9903	9900	9898	9895	9893	9890	9888	9885	9882	9880	0	1	1	2	2
9	9877	9874	9871	9869	9866	9863	9860	9857	9854	9851	0	1	1	2	2
10	9848	9845	9842	9839	9836	9833	9829	9826	9823	9820	1	1	2	2	3
11	9816	9813	9810	9806	9803	9799	9796	9792	9789	9785	1	1	2	2	3
12	9781	9778	9774	9770	9767	9763	9759	9755	9751	9748	1	1	2	3	3
13	9744	9740	9736	9732	9728	9724	9720	9715	9711	9707	1	1	2	3	3
14	9703	9699	9694	9690	9686	9681	9677	9673	9668	9664	1	1	2	3	4
15	9659	9655	9650	9646	9641	9636	9632	9627	9622	9617	1	2	2	3	4
16	9613	9608	9603	9598	9593	9588	9583	9578	9573	9568	1	2	2	3	4
17	9563	9558	9553	9548	9542	9537	9532	9527	9521	9516	1	2	3	3	5
18	9511	9505	9500	9494	9489	9483	9478	9472	9466	9461	1	2	3	4	5
19	9455	9449	9444	9438	9432	9426	9421	9415	9409	9403	1	2	3	4	5
20	9397	9391	9385	9379	9373	9367	9361	9354	9348	9342	1	2	3	4	5
21	9336	9330	9323	9317	9311	9304	9298	9291	9285	9278	1	2	3	4	5
22	9272	9265	9259	9252	9245	9239	9232	9225	9219	9212	1	2	3	4	6
23	9205	9198	9191	9184	9178	9171	9164	9157	9150	9143	1	2	3	5	6
24	9135	9128	9121	9114	9107	9100	9092	9085	9078	9070	1	2	4	5	6
25	9063	9056	9048	9041	9033	9026	9018	9011	9003	8996	1	3	4	5	6
26	8988	8980	8973	8965	8957	8949	8942	8934	8926	8918	1	3	4	5	6
27	8910	8902	8894	8886	8878	8870	8862	8854	8846	8838	1	3	4	5	7
28	8829	8821	8813	8805	8796	8788	8780	8771	8763	8755	1	3	4	6	7
29	8746	8738	8729	8721	8712	8704	8695	8686	8678	8669	1	3	4	6	7
30	8660	8652	8643	8634	8625	8616	8607	8599	8590	8581	1	3	4	6	7
31	8572	8563	8554	8545	8536	8526	8517	8508	8499	8490	2	3	5	6	8
32	8480	8471	8462	8453	8443	8434	8425	8415	8406	8396	2	3	5	6	8
33	8387	8377	8368	8358	8348	8339	8329	8320	8310	8300	2	3	5	6	8
34	8290	8281	8271	8261	8251	8241	8231	8221	8211	8202	2	3	5	7	8
35	8192	8181	8171	8161	8151	8141	8131	8121	8111	8100	2	3	5	7	9
36	8090	8080	8070	8059	8049	8039	8028	8018	8007	7997	2	3	5	7	9
37	7986	7976	7965	7955	7944	7934	7923	7912	7902	7891	2	4	5	7	9
38	7880	7869	7859	7848	7837	7826	7815	7804	7793	7782	2	4	5	7	9
39	7771	7760	7749	7738	7727	7716	7705	7694	7683	7672	2	4	6	7	9
40	7660	7649	7638	7627	7615	7604	7593	7581	7570	7559	2	4	6	8	9
41	7547	7536	7524	7513	7501	7490	7478	7466	7455	7443	2	4	6	8	10
42	7431	7420	7408	7396	7385	7373	7361	7349	7337	7325	2	4	6	8	10
43	7314	7302	7290	7278	7266	7254	7242	7230	7218	7206	2	4	6	8	10
44	7193	7181	7169	7157	7145	7133	7120	7108	7096	7083	2	4	6	8	10

度	0′	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	(表尾差) 1′	2′	3′	4′	5′
45	7071	7059	7046	7034	7022	7009	6997	6984	6972	6959	2	4	6	8	10
46	6947	6934	6921	6909	6896	6884	6871	6858	6845	6833	2	4	6	8	11
47	6820	6807	6794	6782	6769	6756	6743	6730	6717	6704	2	4	6	9	11
48	6691	6678	6665	6652	6639	6626	6613	6600	6587	6574	2	4	7	9	11
49	6561	6547	6534	6521	6508	6494	6481	6468	6455	6441	2	4	7	9	11
50	6428	6414	6401	6388	6374	6361	6347	6334	6320	6307	2	4	7	9	11
51	6293	6280	6266	6252	6239	6225	6211	6198	6184	6170	2	5	7	9	11
52	6157	6143	6129	6115	6101	6088	6074	6060	6046	6032	2	5	7	9	12
53	6018	6004	5990	5976	5962	5948	5934	5920	5906	5892	2	5	7	9	12
54	5878	5864	5850	5835	5821	5807	5793	5779	5764	5750	2	5	7	9	12
55	5736	5721	5707	5693	5678	5664	5650	5635	5621	5606	2	5	7	10	12
56	5592	5577	5563	5548	5534	5519	5505	5490	5476	5461	2	5	7	10	12
57	5446	5432	5417	5402	5388	5373	5358	5344	5329	5314	2	5	7	10	12
58	5299	5284	5270	5255	5240	5225	5210	5195	5180	5165	2	5	7	10	12
59	5150	5135	5120	5105	5090	5075	5060	5045	5030	5015	3	5	8	10	13
60	5000	4985	4970	4955	4939	4924	4909	4894	4879	4863	3	5	8	10	13
61	4848	4833	4818	4802	4787	4772	4756	4741	4726	4710	3	5	8	10	13
62	4695	4679	4664	4648	4633	4617	4602	4586	4571	4555	3	5	8	10	13
63	4540	4524	4509	4493	4478	4462	4446	4431	4415	4399	3	5	8	10	13
64	4384	4368	4352	4337	4321	4305	4289	4274	4258	4242	3	5	8	11	13
65	4226	4210	4195	4179	4163	4147	4131	4115	4099	4083	3	5	8	11	13
66	4067	4051	4035	4019	4003	3987	3971	3955	3939	3923	3	5	8	11	14
67	3907	3891	3875	3859	3843	3827	3811	3795	3778	3762	3	5	8	11	14
68	3746	3730	3714	3697	3681	3665	3649	3633	3616	3600	3	5	8	11	14
69	3584	3567	3551	3535	3518	3502	3486	3469	3453	3437	3	5	8	11	14
70	3420	3404	3387	3371	3355	3338	3322	3305	3289	3272	3	5	8	11	14
71	3256	3239	3223	3206	3190	3173	3156	3140	3123	3107	3	6	8	11	14
72	3090	3074	3057	3040	3024	3007	2990	2974	2957	2940	3	6	8	11	14
73	2924	2907	2890	2874	2857	2840	2823	2807	2790	2773	3	6	8	11	14
74	2756	2740	2723	2706	2689	2672	2656	2639	2622	2605	3	6	8	11	14
75	2588	2571	2554	2538	2521	2504	2487	2470	2453	2436	3	6	8	11	14
76	2419	2402	2385	2368	2351	2334	2317	2300	2284	2267	3	6	8	11	14
77	2250	2233	2215	2198	2181	2164	2147	2130	2113	2096	3	6	9	11	14
78	2079	2062	2045	2028	2011	1994	1977	1959	1942	1925	3	6	9	11	14
79	1908	1891	1874	1857	1840	1822	1805	1788	1771	1754	3	6	9	11	14
80	1736	1719	1702	1685	1668	1650	1633	1616	1599	1582	3	6	9	12	14
81	1564	1547	1530	1513	1495	1478	1461	1444	1426	1409	3	6	9	12	14
82	1392	1374	1357	1340	1323	1305	1288	1271	1253	1236	3	6	9	12	14
83	1219	1201	1184	1167	1149	1132	1115	1097	1080	1063	3	6	9	12	14
84	1045	1028	1011	0993	0976	0958	0941	0924	0906	0889	3	6	9	12	14
85	0872	0854	0837	0819	0802	0785	0767	0750	0732	0715	3	6	9	12	15
86	0698	0680	0663	0645	0628	0610	0593	0576	0558	0541	3	6	9	12	15
87	0523	0506	0488	0471	0454	0436	0419	0401	0384	0366	3	6	9	12	15
88	0349	0332	0314	0297	0279	0262	0244	0227	0209	0192	3	6	9	12	15
89	0175	0157	0140	0122	0105	0087	0070	0052	0035	0017	3	6	9	12	15

正切函數眞數表 (表二C)

度	0'	6' 0°·1	12' 0°·2	18' 0°·3	24' 0°·4	30' 0°·5	36' 0°·6	42' 0°·7	48' 0°·8	54' 0°·9	(表尾差) 1'	2'	3'	4'	5'
0	0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	3	6	9	12	15
3	0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	3	6	9	12	15
4	0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	3	6	9	12	15
5	0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	3	6	9	12	15
6	1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	3	6	9	12	15
7	1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	3	6	9	12	15
8	1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	3	6	9	12	15
9	1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	3	6	9	12	15
10	1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	3	6	9	12	15
11	1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	3	6	9	12	15
12	2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	3	6	9	12	15
13	2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	3	6	9	12	15
14	2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	3	6	9	12	16
15	2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	3	6	9	13	16
16	2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3	6	9	13	16
17	3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3	6	10	13	16
18	3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3	6	10	13	16
19	3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3	6	10	13	16
20	3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3	7	10	13	17
21	3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	3	7	10	13	17
22	4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	3	7	10	14	17
23	4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	3	7	10	14	17
24	4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4	7	11	14	18
25	4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4	7	11	14	18
26	4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	4	7	11	15	18
27	5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	4	7	11	15	18
28	5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	4	8	11	15	19
29	5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	4	8	12	15	19
30	5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	4	8	12	16	20
31	6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	4	8	12	16	20
32	6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	4	8	12	16	20
33	6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	4	8	13	17	21
34	6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	4	9	13	17	21
35	7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	4	9	13	18	22
36	7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	5	9	14	18	23
37	7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	5	9	14	18	23
38	7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	5	9	14	19	24
39	8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	5	10	15	20	24
40	8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	5	10	15	20	25
41	8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	5	10	16	21	26
42	9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	5	11	16	21	27
43	9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	6	11	17	22	28
44	9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	6	11	17	23	29

度	0′	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	(表尾差) 1′	2′	3′	4′	5′
45	1·0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	6	12	18	24	30
46	1·0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	6	12	18	25	31
47	1·0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067	6	13	19	25	32
48	1·1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	7	13	20	27	33
49	1·1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	7	14	21	28	34
50	1·1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	7	14	22	29	36
51	1·2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753	8	15	23	30	38
52	1·2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	8	16	24	31	39
53	1·3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	8	16	25	33	41
54	1·3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	9	17	26	34	43
55	1·4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	9	18	27	36	45
56	1·4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	10	19	29	38	48
57	1·5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	10	20	30	40	50
58	1·6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577	11	21	32	43	53
59	1·6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	11	23	34	45	56
60	1·7321	7391	7461	7532	7603	7675	7747	7820	7893	7966	12	24	36	48	60
61	1·8040	8115	8190	8265	8341	8418	8495	8572	8650	8728	13	26	38	51	64
62	1·8807	8887	8967	9047	9128	9210	9292	9375	9458	9542	14	27	41	55	68
63	1·9626	9711	9797	9883	9970	$\overline{0057}$	$\overline{0145}$	$\overline{0233}$	$\overline{0323}$	$\overline{0413}$	15	29	44	58	73
64	2·0503	0594	0686	0778	0872	0965	1060	1155	1251	1348	16	31	47	63	78
65	2·1445	1543	1642	1742	1842	1943	2045	2148	2251	2355	17	34	51	68	85
66	2·2460	2566	2673	2781	2889	2998	3109	3220	3332	3445					
67	2·3559	3673	3789	3906	4023	4142	4262	4383	4504	4627					
68	2·4751	4876	5002	5129	5257	5386	5517	5649	5782	5916					
69	2·6051	6187	6325	6464	6605	6746	6889	7034	7179	7326					
70	2·7475	7625	7776	7929	8083	8239	8397	8556	8716	8878					
71	2·9042	9208	9375	9544	9714	9887	$\overline{0061}$	$\overline{0237}$	$\overline{0415}$	$\overline{0595}$					
72	3·0777	0961	1146	1334	1524	1716	1910	2106	2305	2506					
73	3·2709	2914	3122	3332	3544	3759	3977	4197	4420	4646					
74	3·4874	5105	5339	5576	5816	6059	6305	6554	6806	7062					
75	3·7321	7583	7848	8118	8391	8667	8947	9232	9520	9812					
76	4·0108	0408	0713	1022	1335	1653	1976	2303	2635	2972					
77	4·3315	3662	4015	4374	4737	5107	5483	5864	6252	6646					
78	4·7046	7453	7867	8288	8716	9152	9594	$\overline{0045}$	$\overline{0504}$	$\overline{0970}$					
79	5·1446	1929	2422	2924	3435	3955	4486	5026	5578	6140					
80	5·6713	7297	7894	8502	9124	9758	$\overline{0405}$	$\overline{1066}$	$\overline{1742}$	$\overline{2432}$					
81	6·3138	3859	4596	5350	6122	6912	7720	8548	9395	$\overline{0264}$					
82	7·1154	2066	3002	3962	4947	5958	6996	8062	9158	$\overline{0285}$					
83	8·1443	2636	3863	5126	6427	7769	9152	$\overline{0579}$	$\overline{2052}$	$\overline{3572}$					
84	9·5144	9·677	9·845	10·02	10·20	10·39	10·58	10·78	10·99	11·20					
85	11·43	11·66	11·91	12·16	12·43	12·71	13·00	13·30	13·62	13·95					
86	14·30	14·67	15·06	15·46	15·89	16·35	16·83	17·34	17·89	18·46					
87	19·08	19·74	20·45	21·20	22·02	22·90	23·86	24·90	26·03	27·27					
88	28·64	30·14	31·82	33·69	35·80	38·19	40·92	44·07	47·74	52·08					
89	57·29	63·66	71·62	81·85	95·49	114·6	143·2	191·0	286·5	573·0					

此處表尾差未列，因角度增大時，正切之變動極速，表尾差不夠正確也。此處以用比例部分爲宜。

正弦函數對數表 （表三 A）

度	0′	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	（表尾差） 1′	2′	3′	4′	5′
0		7·2419	5429	7190	8439	9408	$\overline{0200}$	$\overline{0870}$	$\overline{1450}$	$\overline{1961}$					
1	8·2419	2832	3210	3558	3880	4179	4459	4723	4971	5206					
2	8·5428	5640	5842	6035	6220	6397	6567	6731	6889	7041					
3	8·7188	7330	7468	7602	7731	7857	7979	8098	8213	8326	21	42	62	84	104
4	8·8436	8543	8647	8749	8849	8946	9042	9135	9226	9315	16	32	48	64	80
5	8·9403	9489	9573	9655	9736	9816	9894	9970	$\overline{0046}$	$\overline{0120}$	13	26	39	52	65
6	9·0192	0264	0334	0403	0472	0539	0605	0670	0734	0797	11	22	33	44	55
7	9·0859	0920	0981	1040	1099	1157	1214	1271	1326	1381	10	19	29	38	48
8	9·1436	1489	1542	1594	1646	1697	1747	1797	1847	1895	8	17	25	34	42
9	9·1943	1991	2038	2085	2131	2176	2221	2266	2310	2353	8	15	23	30	38
10	9·2397	2439	2482	2524	2565	2606	2647	2687	2727	2767	7	14	20	27	34
11	9·2806	2845	2883	2921	2959	2997	3034	3070	3107	3143	6	12	19	25	31
12	9·3179	3214	3250	3284	3319	3353	3387	3421	3455	3488	6	11	17	23	28
13	9·3521	3554	3586	3618	3650	3682	3713	3745	3775	3806	5	11	16	21	26
14	9·3837	3867	3897	3927	3957	3986	4015	4044	4073	4102	5	10	15	20	24
15	9·4130	4158	4186	4214	4242	4269	4296	4323	4350	4377	5	9	14	18	23
16	9·4403	4430	4456	4482	4508	4533	4559	4584	4609	4634	4	9	13	17	21
17	9·4659	4684	4709	4733	4757	4781	4805	4829	4853	4876	4	8	12	16	20
18	9·4900	4923	4946	4969	4992	5015	5037	5060	5082	5104	4	8	11	15	19
19	9·5126	5148	5170	5192	5213	5235	5256	5278	5299	5320	4	7	11	14	18
20	9·5341	5361	5382	5402	5423	5443	5463	5484	5504	5523	3	7	10	14	17
21	9·5543	5563	5583	5602	5621	5641	5660	5679	5698	5717	3	6	10	13	16
22	9·5736	5754	5773	5792	5810	5828	5847	5865	5883	5901	3	6	9	12	15
23	9·5919	5937	5954	5972	5990	6007	6024	6042	6059	6076	3	6	9	12	15
24	9·6093	6110	6127	6144	6161	6177	6194	6210	6227	6243	3	6	8	11	14
25	9·6259	6276	6292	6308	6324	6340	6356	6371	6387	6403	3	5	8	11	13
26	9·6418	6434	6449	6465	6480	6495	6510	6526	6541	6556	3	5	8	10	13
27	9·6570	6585	6600	6615	6629	6644	6659	6673	6687	6702	2	5	7	10	12
28	9·6716	6730	6744	6759	6773	6787	6801	6814	6828	6842	2	5	7	9	12
29	9·6856	6869	6883	6896	6910	6923	6937	6950	6963	6977	2	4	7	9	11
30	9·6990	7003	7016	7029	7042	7055	7068	7080	7093	7106	2	4	6	9	11
31	9·7118	7131	7144	7156	7168	7181	7193	7205	7218	7230	2	4	6	8	10
32	9·7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	7326	7338	7349	2	4	6	8	10
33	9·7361	7373	7384	7396	7407	7419	7430	7442	7453	7464	2	4	6	8	10
34	9·7476	7487	7498	7509	7520	7531	7542	7553	7564	7575	2	4	6	7	9
35	9·7586	7597	7607	7618	7629	7640	7650	7661	7671	7682	2	4	5	7	9
36	9·7692	7703	7713	7723	7734	7744	7754	7764	7774	7785	2	3	5	7	9
37	9·7795	7805	7815	7825	7835	7844	7854	7864	7874	7884	2	3	5	7	8
38	9·7893	7903	7913	7922	7932	7941	7951	7960	7970	7979	2	3	5	6	8
39	9·7989	7998	8007	8017	8026	8035	8044	8053	8063	8072	2	3	5	6	8
40	9·8081	8090	8099	8108	8117	8125	8134	8143	8152	8161	1	3	4	6	7
41	9·8169	8178	8187	8195	8204	8213	8221	8230	8238	8247	1	3	4	6	7
42	9·8255	8264	8272	8280	8289	8297	8305	8313	8322	8330	1	3	4	6	7
43	9·8338	8346	8354	8362	8370	8378	8386	8394	8402	8410	1	3	4	5	7
44	9·8418	8426	8433	8441	8449	8457	8464	8472	8480	8487	1	3	4	5	6

度	0′	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	(表尾差) 1′	2′	3′	4′	5′
45	9·8495	8502	8510	8517	8525	8532	8540	8547	8555	8562	1	2	4	5	6
46	9·8569	8577	8584	8591	8599	8606	8613	8620	8627	8634	1	2	4	5	6
47	9·8641	8648	8655	8662	8669	8676	8683	8690	8697	8704	1	2	3	5	6
48	9·8711	8718	8724	8731	8738	8745	8751	8758	8765	8771	1	2	3	4	6
49	9·8778	8784	8791	8797	8804	8810	8817	8823	8830	8836	1	2	3	4	5
50	9·8843	8849	8855	8862	8868	8874	8880	8887	8893	8899	1	2	3	4	5
51	9·8905	8911	8917	8923	8929	8935	8941	8947	8953	8959	1	2	3	4	5
52	9·8965	8971	8977	8983	8989	8995	9000	9006	9012	9018	1	2	3	4	5
53	9·9023	9029	9035	9041	9046	9052	9057	9063	9069	9074	1	2	3	4	5
54	9·9080	9085	9091	9096	9101	9107	9112	9118	9123	9128	1	2	3	4	5
55	9·9134	9139	9144	9149	9155	9160	9165	9170	9175	9181	1	2	3	3	4
56	9·9186	9191	9196	9201	9206	9211	9216	9221	9226	9231	1	2	3	3	4
57	9·9236	9241	9246	9251	9255	9260	9265	9270	9275	9279	1	2	2	3	4
58	9·9284	9289	9294	9298	9303	9308	9312	9317	9322	9326	1	2	2	3	4
59	9·9331	9335	9340	9344	9349	9353	9358	9362	9367	9371	1	1	2	3	4
60	9·9375	9380	9384	9388	9393	9397	9401	9406	9410	9414	1	1	2	3	4
61	9·9418	9422	9427	9431	9435	9439	9443	9447	9451	9455	1	1	2	3	3
62	9·9459	9463	9467	9471	9475	9479	9483	9487	9491	9495	1	1	2	3	3
63	9·9499	9503	9507	9510	9514	9518	9522	9525	9529	9533	1	1	2	3	3
64	9·9537	9540	9544	9548	9551	9555	9558	9562	9566	9569	1	1	2	2	3
65	9·9573	9576	9580	9583	9587	9590	9594	9597	9601	9604	1	1	2	2	3
66	9·9607	9611	9614	9617	9621	9624	9627	9631	9634	9637	1	1	2	2	3
67	9·9640	9643	9647	9650	9653	9656	9659	9662	9666	9669	1	1	2	2	3
68	9·9672	9675	9678	9681	9684	9687	9690	9693	9696	9699	0	1	1	2	2
69	9·9702	9704	9707	9710	9713	9716	9719	9722	9724	9727	0	1	1	2	2
70	9·9730	9733	9735	9738	9741	9743	9746	9749	9751	9754	0	1	1	2	2
71	9·9757	9759	9762	9764	9767	9770	9772	9775	9777	9780	0	1	1	2	2
72	9·9782	9785	9787	9789	9792	9794	9797	9799	9801	9804	0	1	1	2	2
73	9·9806	9808	9811	9813	9815	9817	9820	9822	9824	9826	0	1	1	2	2
74	9·9828	9831	9833	9835	9837	9839	9841	9843	9845	9847	0	1	1	1	2
75	9·9849	9851	9853	9855	9857	9859	9861	9863	9865	9867	0	1	1	1	2
76	9·9869	9871	9873	9875	9876	9878	9880	9882	9884	9885	0	1	1	1	2
77	9·9887	9889	9891	9892	9894	9896	9897	9899	9901	9902	0	1	1	1	1
78	9·9904	9906	9907	9909	9910	9912	9913	9915	9916	9918	0	1	1	1	1
79	9·9919	9921	9922	9924	9925	9927	9928	9929	9931	9932	0	0	1	1	1
80	9·9934	9935	9936	9937	9939	9940	9941	9943	9944	9945	0	0	1	1	1
81	9·9946	9947	9949	9950	9951	9952	9953	9954	9955	9956	0	0	1	1	1
82	9·9958	9959	9960	9961	9962	9963	9964	9965	9966	9967	0	0	1	1	1
83	9·9968	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974	9975	9975	0	0	0	1	1
84	9·9976	9977	9978	9978	9979	9980	9981	9981	9982	9983	0	0	0	0	1
85	9·9983	9984	9985	9985	9986	9987	9987	9988	9988	9989	0	0	0	0	0
86	9·9989	9990	9990	9991	9991	9992	9992	9993	9993	9994	0	0	0	0	0
87	9·9994	9994	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9997	9997	0	0	0	0	0
88	9·9997	9998	9998	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	0	0	0	0	0
89	9·9999	9999	$\overline{0000}$	$\overline{0000}$	0000	$\overline{0000}$	$\overline{0000}$	0000	$\overline{0000}$	$\overline{0000}$	0	0	0	0	0

餘弦函數對數表 (表三B)

度	0′	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	(表尾差) 1′	2′	3′	4′	5′
0	10·0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	9·9999	0	0	0	0	0
1	9·9999	9999	9999	9999	9999	9999	9998	9998	9998	9998	0	0	0	0	0
2	9·9997	9997	9997	9996	9996	9996	9996	9995	9995	9994	0	0	0	0	0
3	9·9994	9994	9993	9993	9992	9992	9991	9991	9990	9990	0	0	0	0	0
4	9·9989	9989	9988	9988	9987	9987	9986	9985	9985	9984	0	0	0	0	0
5	9·9983	9983	9982	9981	9981	9980	9979	9978	9978	9977	0	0	0	0	1
6	9·9976	9975	9975	9974	9973	9972	9971	9970	9969	9968	0	0	0	1	1
7	9·9968	9967	9966	9965	9964	9963	9962	9961	9960	9959	0	0	1	1	1
8	9·9958	9956	9955	9954	9953	9952	9951	9950	9949	9947	0	0	1	1	1
9	9·9946	9945	9944	9943	9941	9940	9939	9937	9936	9935	0	0	1	1	1
10	9·9934	9932	9931	9929	9928	9927	9925	9924	9922	9921	0	0	1	1	1
11	9·9919	9918	9916	9915	9913	9912	9910	9909	9907	9906	0	1	1	1	1
12	9·9904	9902	9901	9899	9897	9896	9894	9892	9891	9889	0	1	1	1	1
13	9·9887	9885	9884	9882	9880	9878	9876	9875	9873	9871	0	1	1	1	2
14	9·9869	9867	9865	9863	9861	9859	9857	9855	9853	9851	0	1	1	1	2
15	9·9849	9847	9845	9843	9841	9839	9837	9835	9833	9831	0	1	1	1	2
16	9·9828	9826	9824	9822	9820	9817	9815	9813	9811	9808	0	1	1	2	2
17	9·9806	9804	9801	9799	9797	9794	9792	9789	9787	9785	0	1	1	2	2
18	9·9782	9780	9777	9775	9772	9770	9767	9764	9762	9759	0	1	1	2	2
19	9·9757	9754	9751	9749	9746	9743	9741	9738	9735	9733	0	1	1	2	2
20	9·9730	9727	9724	9722	9719	9716	9713	9710	9707	9704	0	1	1	2	2
21	9·9702	9699	9696	9693	9690	9687	9684	9681	9678	9675	0	1	1	2	2
22	9·9672	9669	9666	9662	9659	9656	9653	9650	9647	9643	1	1	2	2	3
23	9·9640	9637	9634	9631	9627	9624	9621	9617	9614	9611	1	1	2	2	3
24	9·9607	9604	9601	9597	9594	9590	9587	9583	9580	9576	1	1	2	2	3
25	9·9573	9569	9566	9562	9558	9555	9551	9548	9544	9540	1	1	2	2	3
26	9·9537	9533	9529	9525	9522	9518	9514	9510	9507	9503	1	1	2	3	3
27	9·9499	9495	9491	9487	9483	9479	9475	9471	9467	9463	1	1	2	3	3
28	9·9459	9455	9451	9447	9443	9439	9435	9431	9427	9422	1	1	2	3	3
29	9·9418	9414	9410	9406	9401	9397	9393	9388	9384	9380	1	1	2	3	4
30	9·9375	9371	9367	9362	9358	9353	9349	9344	9340	9335	1	1	2	3	4
31	9·9331	9326	9322	9317	9312	9308	9303	9298	9294	9289	1	2	2	3	4
32	9·9284	9279	9275	9270	9265	9260	9255	9251	9246	9241	1	2	2	3	4
33	9·9236	9231	9226	9221	9216	9211	9206	9201	9196	9191	1	2	3	3	4
34	9·9186	9181	9175	9170	9165	9160	9155	9149	9144	9139	1	2	3	3	4
35	9·9134	9128	9123	9118	9112	9107	9101	9096	9091	9085	1	2	3	4	5
36	9·9080	9074	9069	9063	9057	9052	9046	9041	9035	9029	1	2	3	4	5
37	9·9023	9018	9012	9006	9000	8995	8989	8983	8977	8971	1	2	3	4	5
38	9·8965	8959	8953	8947	8941	8935	8929	8923	8917	8911	1	2	3	4	5
39	9·8905	8899	8893	8887	8880	8874	8868	8862	8855	8849	1	2	3	4	5
40	9·8843	8836	8830	8823	8817	8810	8804	8797	8791	8784	1	2	3	4	5
41	9·8778	8771	8765	8758	8751	8745	8738	8731	8724	8718	1	2	3	5	6
42	9·8711	8704	8697	8690	8683	8676	8669	8662	8655	8648	1	2	3	5	6
43	9·8641	8634	8627	8620	8613	8606	8598	8591	8584	8577	1	2	4	5	6
44	9·8569	8562	8555	8547	8540	8532	8525	8517	8510	8502	1	2	4	5	6

度	0′	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	(表尾差) 1′	2′	3′	4′	5′
45	9·8495	8487	8480	8472	8464	8457	8449	8441	8433	8426	1	3	4	5	6
46	9·8418	8410	8402	8394	8386	8378	8370	8362	8354	8346	1	3	4	5	7
47	9·8338	8330	8322	8313	8305	8297	8289	8280	8272	8264	1	3	4	6	7
48	9·8255	8247	8238	8230	8221	8213	8204	8195	8187	8178	1	3	4	6	7
49	9·8169	8161	8152	8143	8134	8125	8117	8108	8099	8090	1	3	4	6	7
50	9·8081	8072	8063	8053	8044	8035	8026	8017	8007	7998	2	3	5	6	8
51	9·7989	7979	7970	7960	7951	7941	7932	7922	7913	7903	2	3	5	6	8
52	9·7893	7884	7874	7864	7854	7844	7835	7825	7815	7805	2	3	5	7	8
53	9·7795	7785	7774	7764	7754	7744	7734	7723	7713	7703	2	3	5	7	9
54	9·7692	7682	7671	7661	7650	7640	7629	7618	7607	7597	2	4	5	7	9
55	9·7586	7575	7564	7553	7542	7531	7520	7509	7498	7487	2	4	6	7	9
56	9·7476	7464	7453	7442	7430	7419	7407	7396	7384	7373	2	4	6	8	10
57	9·7361	7349	7338	7326	7314	7302	7290	7278	7266	7254	2	4	6	8	10
58	9·7242	7230	7218	7205	7193	7181	7168	7156	7144	7131	2	4	6	8	10
59	9·7118	7106	7093	7080	7068	7055	7042	7029	7016	7003	2	4	6	9	11
60	9·6990	6977	6963	6950	6937	6923	6910	6896	6883	6869	2	4	7	9	11
61	9·6856	6842	6828	6814	6801	6787	6773	6759	6744	6730	2	5	7	9	12
62	9·6716	6702	6687	6673	6659	6644	6629	6615	6600	6585	2	5	7	10	12
63	9·6570	6556	6541	6526	6510	6495	6480	6465	6449	6434	3	5	8	10	13
64	9·6418	6403	6387	6371	6356	6340	6324	6308	6292	6276	3	5	8	11	13
65	9·6259	6243	6227	6210	6194	6177	6161	6144	6127	6110	3	6	8	11	14
66	9·6093	6076	6059	6042	6024	6007	5990	5972	5954	5937	3	6	9	12	15
67	9·5919	5901	5883	5865	5847	5828	5810	5792	5773	5754	3	6	9	12	15
68	9·5736	5717	5698	5679	5660	5641	5621	5602	5583	5563	3	6	10	13	16
69	9·5543	5523	5504	5484	5463	5443	5423	5402	5382	5361	3	7	10	14	17
70	9·5341	5320	5299	5278	5256	5235	5213	5192	5170	5148	4	7	11	14	18
71	9·5126	5104	5082	5060	5037	5015	4992	4969	4946	4923	4	8	11	15	19
72	9·4900	4876	4853	4829	4805	4781	4757	4733	4709	4684	4	8	12	16	20
73	9·4659	4634	4609	4584	4559	4533	4508	4482	4456	4430	4	9	13	17	21
74	9·4403	4377	4350	4323	4296	4269	4242	4214	4186	4158	5	9	14	18	23
75	9·4130	4102	4073	4044	4015	3986	3957	3927	3897	3867	5	10	15	20	24
76	9·3837	3806	3775	3745	3713	3682	3650	3618	3586	3554	5	11	16	21	26
77	9·3521	3488	3455	3421	3387	3353	3319	3284	3250	3214	6	11	17	23	28
78	9·3179	3143	3107	3070	3034	2997	2959	2921	2883	2845	6	12	19	25	31
79	9·2806	2767	2727	2687	2647	2606	2565	2524	2482	2439	7	14	20	27	31
80	9·2397	2353	2310	2266	2221	2176	2131	2085	2038	1991	8	15	23	30	38
81	9·1943	1895	1847	1797	1747	1697	1646	1594	1542	1489	8	17	25	34	42
82	9·1436	1381	1326	1271	1214	1157	1099	1040	0981	0920	10	19	29	38	48
83	9·0859	0797	0734	0670	0605	0539	0472	0403	0334	0264	11	22	33	44	55
84	9·0192	0120	0046	8·9970	9894	9816	9736	9655	9573	9489	13	26	39	52	65
85	8·9403	9315	9226	9135	9042	8946	8849	8749	8647	8543	16	32	48	64	80
86	8·8436	8326	8213	8098	7979	7857	7731	7602	7468	7330	21	42	62	84	104
87	8·7188	7041	6889	6731	6567	6397	6220	6035	5842	5640					
88	8·5428	5206	4971	4723	4459	4179	3880	3558	3210	2832					
89	8·2419	1961	1450	0870	0200	7·9408	8439	7190	5429	2419					

餘弦函數對數表

度	0′	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	(表尾差) 1′	2′	3′	4′	5′
0		7·2419	5429	7190	8439	9409	$\overline{0200}$	$\overline{0870}$	$\overline{1450}$	$\overline{1962}$					
1	8·2419	2833	3211	3559	3881	4181	4461	4725	4973	5208					
2	8·5131	5643	5845	6038	6223	6401	6571	6736	6894	7046					
3	8·7194	7337	7475	7609	7739	7865	7988	8107	8223	8336	21	42	62	84	104
4	8·8436	8554	8659	8762	8862	8960	9056	9150	9241	9331	16	32	48	64	81
5	8·9420	9506	9591	9674	9756	9836	9915	9992	$\overline{0068}$	$\overline{0143}$	13	26	40	53	66
6	9·0216	0289	0360	0430	0499	0567	0633	0699	0764	0828	11	22	34	45	56
7	9·0891	0954	1015	1076	1135	1194	1252	1310	1367	1423	10	20	29	39	49
8	9·1478	1533	1587	1640	1693	1745	1797	1848	1898	1948	9	17	26	35	43
9	9·1997	2046	2094	2142	2189	2236	2282	2328	2374	2419	8	16	23	31	39
10	9·2463	2507	2551	2594	2637	2680	2722	2764	2805	2846	7	14	21	28	35
11	9·2887	2927	2967	3006	3046	3085	3123	3162	3200	3237	6	13	19	26	32
12	9·3275	3312	3349	3385	3422	3458	3493	3529	3564	3599	6	12	18	24	30
13	9·3634	3668	3702	3736	3770	3804	3837	3870	3903	3935	6	11	17	22	28
14	9·3968	4000	4032	4064	4095	4127	4158	4189	4220	4250	5	10	16	21	26
15	9·4281	4311	4341	4371	4400	4430	4459	4488	4517	4546	5	10	15	20	25
16	9·4575	4603	4632	4660	4688	4716	4744	4771	4799	4826	5	9	14	19	23
17	9·4853	4880	4907	4934	4961	4987	5014	5040	5066	5092	4	9	13	18	22
18	9·5118	5143	5169	5195	5220	5245	5270	5295	5320	5345	4	8	13	17	21
19	9·5370	5394	5419	5443	5467	5491	5516	5539	5563	5587	4	8	12	16	20
20	9·5611	5634	5658	5681	5704	5727	5750	5773	5796	5819	4	8	12	15	19
21	9·5842	5864	5887	5909	5932	5954	5976	5998	6020	6042	4	7	11	15	19
22	9·6064	6086	6108	6129	6151	6172	6194	6215	6236	6257	4	7	11	14	18
23	9·6279	6300	6321	6341	6362	6383	6404	6424	6445	6465	3	7	10	14	17
24	9·6486	6506	6527	6547	6567	6587	6607	6627	6647	6667	3	7	10	13	17
25	9·6687	6706	6726	6746	6765	6785	6804	6824	6843	6863	3	7	10	13	16
26	9·6882	6901	6920	6939	6958	6977	6996	7015	7034	7053	3	6	9	13	16
27	9·7072	7090	7109	7128	7146	7165	7183	7202	7220	7238	3	6	9	12	15
28	9·7257	7275	7293	7311	7330	7348	7366	7384	7402	7420	3	6	9	12	15
29	9·7438	7455	7473	7491	7509	7526	7544	7562	7579	7597	3	6	9	12	15
30	9·7614	7632	7649	7667	7684	7701	7719	7736	7753	7771	3	6	9	12	14
31	9·7788	7805	7822	7839	7856	7873	7890	7907	7924	7941	3	6	9	11	14
32	9·7959	7975	7992	8008	8025	8042	8059	8075	8092	8109	3	6	8	11	14
33	9·8125	8142	8158	8175	8191	8208	8224	8241	8257	8274	3	5	8	11	14
34	9·8290	8306	8323	8339	8355	8371	8388	8404	8420	8436	3	5	8	11	14
35	9·8452	8468	8484	8501	8517	8533	8549	8565	8581	8597	3	5	8	11	13
36	9·8613	8629	8644	8660	8676	8692	8708	8724	8740	8755	3	5	8	11	13
37	9·8771	8787	8803	8818	8834	8850	8865	8881	8897	8912	3	5	8	10	13
38	9·8928	8944	8959	8975	8990	9006	9022	9037	9053	9068	3	5	8	10	13
39	9·9084	9099	9115	9130	9146	9161	9176	9192	9207	9223	3	5	8	10	13
40	9·9238	9254	9269	9284	9300	9315	9330	9346	9361	9376	3	5	8	10	13
41	9·9392	9407	9422	9438	9453	9468	9483	9499	9514	9529	3	5	8	10	13
42	9·9544	9560	9575	9590	9605	9621	9636	9651	9666	9681	3	5	8	10	13
43	9·9697	9712	9727	9742	9757	9773	9788	9803	9818	9833	3	5	8	10	13
44	9·9848	9864	9879	9894	9909	9924	9939	9955	9970	9985	3	5	8	10	13

度	0'	6' 0°·1	12' 0°·2	18' 0°·3	24' 0°·4	30' 0°·5	36' 0°·6	42' 0°·7	48' 0°·8	54' 0°·9	(表尾差) 1'	2'	3'	4'	5'
45	10·0000	0015	0030	0045	0061	0076	0091	0106	0121	0136	3	5	8	10	13
46	10·0152	0167	0182	0197	0212	0228	0243	0258	0273	0288	3	5	8	10	13
47	10·0303	0319	0334	0349	0364	0379	0395	0410	0425	0440	3	5	8	10	13
48	10·0456	0471	0486	0501	0517	0532	0547	0562	0578	0593	3	5	8	10	13
49	10·0608	0624	0639	0654	0670	0685	0700	0716	0731	0746	3	5	8	10	13
50	10·0762	0777	0793	0808	0824	0839	0854	0870	0885	0901	3	5	8	10	13
51	10·0916	0932	0947	0963	0978	0994	1010	1025	1041	1056	3	5	8	10	13
52	10·1072	1088	1103	1119	1135	1150	1166	1182	1197	1213	3	5	8	10	13
53	10·1229	1245	1260	1276	1292	1308	1324	1340	1356	1371	3	5	8	11	13
54	10·1387	1403	1419	1435	1451	1467	1483	1499	1516	1532	3	5	8	11	13
55	10·1548	1564	1580	1596	1612	1629	1645	1661	1677	1694	3	5	8	11	14
56	10·1710	1726	1743	1759	1776	1792	1809	1825	1842	1858	3	5	8	11	14
57	10·1875	1891	1908	1925	1941	1958	1975	1992	2008	2025	3	6	8	11	14
58	10·2042	2059	2076	2093	2110	2127	2144	2161	2178	2195	3	6	9	11	14
59	10·2212	2229	2247	2264	2281	2299	2316	2333	2351	2368	3	6	9	12	14
60	10·2386	2403	2421	2438	2456	2474	2491	2509	2527	2545	3	6	9	12	15
61	10·2562	2580	2598	2616	2634	2652	2670	2689	2707	2725	3	6	9	12	15
62	10·2743	2762	2780	2798	2817	2835	2854	2872	2891	2910	3	6	9	12	16
63	10·2928	2947	2966	2985	3004	3023	3042	3061	3080	3099	3	6	9	13	16
64	10·3118	3137	3157	3176	3196	3215	3235	3254	3274	3294	3	6	10	13	16
65	10·3313	3333	3353	3373	3393	3413	3433	3453	3473	3494	3	7	10	13	17
66	10·3514	3535	3555	3576	3596	3617	3638	3659	3679	3700	3	7	10	14	17
67	10·3721	3743	3764	3785	3806	3828	3849	3871	3892	3914	4	7	11	14	18
68	10·3936	3958	3980	4002	4024	4046	4068	4091	4113	4136	4	7	11	15	19
69	10·4158	4181	4204	4227	4250	4273	4296	4319	4342	4366	4	8	12	15	19
70	10·4389	4413	4437	4461	4484	4509	4533	4557	4581	4606	4	8	12	16	20
71	10·4630	4655	4680	4705	4730	4755	4780	4805	4831	4857	4	8	13	17	21
72	10·4882	4908	4934	4960	4986	5013	5039	5066	5093	5120	4	9	13	18	22
73	10·5147	5174	5201	5229	5256	5284	5312	5340	5368	5397	5	9	14	19	23
74	10·5425	5454	5483	5512	5541	5570	5600	5629	5659	5689	5	10	15	20	25
75	10·5719	5750	5780	5811	5842	5873	5905	5936	5968	6000	5	10	16	21	26
76	10·6032	6065	6097	6130	6163	6196	6230	6264	6298	6332	6	11	17	22	28
77	10·6366	6401	6436	6471	6507	6542	6578	6615	6651	6688	6	12	18	24	30
78	10·6725	6763	6800	6838	6877	6915	6954	6994	7033	7073	6	13	19	26	32
79	10·7113	7154	7195	7236	7278	7320	7363	7406	7449	7493	7	14	21	28	35
80	10·7537	7581	7626	7672	7718	7764	7811	7858	7906	7954	8	16	23	31	39
81	10·8003	8052	8102	8152	8203	8255	8307	8360	8413	8467	9	17	26	35	43
82	10·8522	8577	8633	8690	8748	8806	8865	8924	8985	9046	10	20	29	39	49
83	10·9109	9172	9236	9301	9367	9433	9501	9570	9640	9714	11	22	34	45	56
84	10·9784	9857	9932	$\overline{0008}$	$\overline{0085}$	$\overline{0164}$	$\overline{0244}$	$\overline{0326}$	$\overline{0409}$	$\overline{0494}$	13	26	40	53	66
85	11·0580	0669	0759	0850	0944	1040	1138	1238	1341	1446	16	32	48	64	81
86	11·1554	1664	1777	1893	2012	2135	2261	2391	2525	2663	20	42	62	84	104
87	11·2806	2954	3106	3264	3429	3599	3777	3962	4155	4357					
88	11·4569	4792	5027	5275	5539	5819	6119	6441	6789	7167					
89	11·7581	8038	8550	9130	9800	$\overline{0591}$	$\overline{1561}$	$\overline{2810}$	$\overline{4571}$	$\overline{7581}$					

HKET.

化分與秒爲度之小數式弧度

化秒數	化分數	化度數爲弧度
1″=0.00028°=0.0000048 Rad.	1′=0.017°=0.00029 Rad.	1°=0.01745 Rad.
2″=0.00056°=0.0000097 "	2′=0.033°=0.00058 "	2°=0.03491 "
3″=0.00083°=0.0000145 "	3′=0.050°=0.00087 "	3°=0.05236 "
4″=0.00111°=0.0000194 "	4′=0.067°=0.00116 "	4°=0.06981 "
5″=0.00139°=0.0000242 "	5′=0.083°=0.00145 "	5°=0.08727 "
6″=0.00167°=0.0000291 "	6′=0.100°=0.00175 "	6°=0.10472 "
7″=0.00194°=0.0000339 "	7′=0.117°=0.00204 "	7°=0.12217 "
8″=0.00222°=0.0000388 "	8′=0.133°=0.00233 "	8°=0.13963 "
9″=0.00250°=0.0000436 "	9′=0.150°=0.00262 "	9°=0.15708 "
10″=0.00278°=0.0000485 "	10′=0.167°=0.00291 "	10°=0.17453 "
20″=0.00556°=0.0000970 "	20′=0.333°=0.00582 "	20°=0.34907 "
30″=0.00833°=0.0001454 "	30′=0.500°=0.00873 "	30°=0.52360 "
40″=0.01111°=0.0001939 "	40′=0.667°=0.01164 "	40°=0.69813 "
50″=0.01389°=0.0002424 "	50′=0.833°=0.01454 "	50°=0.87266 "

化度之小數爲分與秒

0.0000° = 0.000′ = 0″	0.20° = 12.0′ = 12′	0.60° = 36.0′ = 36′
0.0001° = 0.006′ = 0.36″	0.21° = 12.6′ = 12′ 36″	0.61° = 36.6′ = 36′ 36″
0.0002° = 0.012′ = 0.72″	0.22° = 13.2′ = 13′ 12″	0.62° = 37.2′ = 37′ 12″
0.0003° = 0.018′ = 1.08″	0.23° = 13.8′ = 13′ 48″	0.63° = 37.8′ = 37′ 48″
0.0004° = 0.024′ = 1.44″	0.24° = 14.4′ = 14′ 24″	0.64° = 38.4′ = 38′ 24″
0.0005° = 0.030′ = 1.80″	0.25° = 15.0′ = 15′	0.65° = 39.0′ = 39′
0.0006° = 0.036′ = 2.16″	0.26° = 15.6′ = 15′ 36″	0.66° = 39.6′ = 39′ 36″
0.0007° = 0.042′ = 2.52″	0.27° = 16.2′ = 16′ 12″	0.67° = 40.2′ = 40′ 12″
0.0008° = 0.048′ = 2.88″	0.28° = 16.8′ = 16′ 48″	0.68° = 40.8′ = 40′ 48″
0.0009° = 0.054′ = 3.24″	0.29° = 17.4′ = 17′ 24″	0.69° = 41.4′ = 41′ 24″
0.0010° = 0.060′ = 3.60″	0.30° = 18.0′ = 18′	0.70° = 42.0′ = 42′
0.001° = 0.06′ = 3.6″	0.31° = 18.6′ = 18′ 36″	0.71° = 42.6′ = 42′ 36″
0.002° = 0.12′ = 7.2″	0.32° = 19.2′ = 19′ 12″	0.72° = 43.2′ = 43′ 12″
0.003° = 0.18′ = 10.8″	0.33° = 19.8′ = 19′ 48″	0.73° = 43.8′ = 43′ 48″
0.004° = 0.24′ = 14.4″	0.34° = 20.4′ = 20′ 24″	0.74° = 44.4′ = 44′ 24″
0.005° = 0.30′ = 18.0″	0.35° = 21.0′ = 21′	0.75° = 45.0′ = 45′
0.006° = 0.36′ = 21.6″	0.36° = 21.6′ = 21′ 36″	0.76° = 45.6′ = 45′ 36″
0.007° = 0.42′ = 25.2″	0.37° = 22.2′ = 22′ 12″	0.77° = 46.2′ = 46′ 12″
0.008° = 0.48′ = 28.8″	0.38° = 22.8′ = 22′ 48″	0.78° = 46.8′ = 46′ 48″
0.009° = 0.54′ = 32.4″	0.39° = 23.4′ = 23′ 24″	0.79° = 47.4′ = 47′ 24″
0.010° = 0.60′ = 36.0″	0.40° = 24.0′ = 24′	0.80° = 48.0′ = 48′
0.01° = 0.6′ = 36″	0.41° = 24.6′ = 24′ 36″	0.81° = 48.6′ = 48′ 36″
0.02° = 1.2′ = 1′ 12″	0.42° = 25.2′ = 25′ 12″	0.82° = 49.2′ = 49′ 12″
0.03° = 1.8′ = 1′ 48″	0.43° = 25.8′ = 25′ 48″	0.83° = 49.8′ = 49′ 48″
0.04° = 2.4′ = 2′ 24″	0.44° = 26.4′ = 26′ 24″	0.84° = 50.4′ = 50′ 24″
0.05° = 3.0′ = 3′	0.45° = 27.0′ = 27′	0.85° = 51.0′ = 51′
0.06° = 3.6′ = 3′ 36″	0.46° = 27.6′ = 27′ 36″	0.86° = 51.6′ = 51′ 36″
0.07° = 4.2′ = 4′ 12″	0.47° = 28.2′ = 28′ 12″	0.87° = 52.2′ = 52′ 12″
0.08° = 4.8′ = 4′ 48″	0.48° = 28.8′ = 28′ 48″	0.88° = 52.8′ = 52′ 48″
0.09° = 5.4′ = 5′ 24″	0.49° = 29.4′ = 29′ 24″	0.89° = 53.4′ = 53′ 24″
0.10° = 6.0′ = 6′	0.50° = 30.0′ = 30′	0.90° = 54.0′ = 54′
0.11° = 6.6′ = 6′ 36″	0.51° = 30.6′ = 30′ 36″	0.91° = 54.6′ = 54′ 36″
0.12° = 7.2′ = 7′ 12″	0.52° = 31.2′ = 31′ 12″	0.92° = 55.2′ = 55′ 12″
0.13° = 7.8′ = 7′ 48″	0.53° = 31.8′ = 31′ 48″	0.93° = 55.8′ = 55′ 48″
0.14° = 8.4′ = 8′ 24″	0.54° = 32.4′ = 32′ 24″	0.94° = 56.4′ = 56′ 24″
0.15° = 9.0′ = 9′	0.55° = 33.0′ = 33′	0.95° = 57.0′ = 57′
0.16° = 9.6′ = 9′ 36″	0.56° = 33.6′ = 33′ 36″	0.96° = 57.6 = 57′ 36″
0.17° = 10.2′ = 10′ 12″	0.57° = 34.2′ = 34′ 12″	0.97° = 58.2′ = 58′ 12″
0.18° = 10.8′ = 10′ 48″	0.58° = 34.8′ = 34′ 48″	0.98° = 58.8′ = 58′ 48″
0.19° = 11.4′ = 11′ 24″	0.59° = 35.4′ = 35′ 24″	0.99° = 59.4′ = 59′ 24″
0.20° = 12.0′ = 12′	0.60° = 36.0′ = 36′	1.00° = 60.0′ = 60′

三角學

編　著	余源慶　余源熙 朱　鳳　豪
出版者	嚴　幼　芝 上海茂名北路三〇〇弄三號 電話　三〇二七七
發行者	龍門聯合書局 上海河南中路二一〇號 電話　一七六七四
分售處	龍門聯合書局各地分局 南　京　太平路太平商場 北　平　琉璃廠一〇二號 重　慶　中山一路三一八號 廣　州　漢民北路二〇四號 漢　口　江漢一路三號 杭　州　東坡路五七號 長　沙　府正街三三號 台　北　衡陽路十二號 瀋　陽　中山路一三一號

基本定價柒元　　外埠酌加郵運費

中華民國三十八年八月初版