# 14 Frazioni algebriche

## 14.1 Definizione di frazione algebrica

Diamo la seguente definizione:

**Definizione 14.1.** Si definisce *frazione algebrica* un'espressione del tipo $\frac{A}{B}$ dove $A$ e $B$ sono polinomi.

Osserviamo che un'espressione di questo tipo si ottiene talvolta quando ci si propone di ottenere il quoziente di due monomi.

---

**Esempio 14.1.** Determinare il quoziente tra $m_1 = 5a^3b^2c^5$ e $m_2 = -3a^2bc^5$.

Questa operazione si esegue applicando, sulla parte letterale, le proprietà delle potenze e sul coefficiente la divisione tra numeri razionali: $q = 5a^3b^2c^5 : \left(-3a^2bc^5\right) = -\frac{5}{3}ab$. Il quoziente è quindi un monomio.

**Esempio 14.2.** Determinare il quoziente tra $m_1 = 5a^3b^2c^5$ e $m_2 = -3a^7bc^5$.

In questo caso l'esponente della $a$ nel dividendo è minore dell'esponente della stessa variabile nel divisore quindi si ottiene $q_1 = 5a^3b^2c^5 : \left(-3a^7bc^5\right) = -\frac{5}{3}a^{-4}b$.

Questo non è un monomio per la presenza dell'esponente negativo alla variabile $a$ (sezione 3.8.2 a pagina 67). Quindi: $q_1 = 5a^3b^2c^5 : \left(-3a^7bc^5\right) = \frac{5b}{3a^4}$. Il quoziente è una frazione algebrica.

---

Quando vogliamo determinare il quoziente di una divisione tra un monomio e un polinomio o tra due polinomi, si presentano diversi casi.

**Caso I** Monomio diviso un polinomio.

➡ Determinare il quoziente tra: $D = 2a^3b$ e $d = a^2 + b$.

Il dividendo è un monomio e il divisore un polinomio. Questa operazione non ha come risultato un polinomio ma una frazione. $q = 2a^3b : \left(a^2 + b\right) = \frac{2a^3b}{a^2 + b}$.

**Caso II** Un polinomio diviso un monomio.

- Determinare il quoziente tra: $D = 2a^3b + a^5b^3 - 3ab^2$ e $d = \frac{1}{2}ab$.

$q = \left(2a^3b + a^5b^3 - 3ab^2\right) : \left(\frac{1}{2}ab\right) = 4a^2 + 2a^4b^2 - 6b$. Il quoziente è un polinomio.

- Determinare il quoziente tra: $D = 2a^3b + a^5b^3 - 3ab^2$ e $d = \frac{1}{2}a^5b$.

Dividiamo ciascun termine del polinomio per il monomio assegnato: il quoziente sarà $q = \left(2a^3b + a^5b^3 - 3ab^2\right) : \left(\frac{1}{2}a^5b\right) = \frac{4}{a^2} + 2b^2 - \frac{6b}{a^4}$. Il quoziente è una somma di frazioni algebriche.

**Caso III** Un polinomio diviso un altro polinomio.

- Determinare il quoziente tra: $D = x - 3$ e $d = x^2 + 1$.

La divisione tra polinomi in una sola variabile è possibile, quando il grado del dividendo è maggiore o uguale al grado del divisore; questa condizione non si verifica nel caso proposto. Il quoziente è la frazione algebrica $q = \frac{x-3}{x^2+1}$.

**Conclusione** Una frazione algebrica può essere considerata come il quoziente indicato tra due polinomi. Ogni frazione algebrica è dunque un'espressione letterale fratta o frazionaria.

## 14.2 Condizioni di esistenza per una frazione algebrica

Per *discussione* di una frazione algebrica intendiamo la ricerca dei valori che attribuiti alle variabili non la rendano priva di significato. Poiché non è possibile dividere per 0, una frazione algebrica perde di significato per quei valori che attribuiti alle variabili rendono il denominatore uguale a zero. Quando abbiamo una frazione algebrica tipo $\frac{A}{B}$ poniamo sempre la condizione di esistenza (abbreviato con C. E.): $B \neq 0$.

La determinazione della condizione di esistenza richiede una conoscenza dei metodi per risolvere le equazioni, argomento che verrà sviluppato nei prossimi capitoli.

---

**Esempio 14.3.** Determinare le condizioni di esistenza di $\frac{1+x}{x}$.

Questa frazione perde di significato quando il denominatore si annulla: C. E. $x \neq 0$.

**Esempio 14.4.** Determinare le condizioni di esistenza di $\frac{x}{x+3}$.

Questa frazione perde di significato quando il denominatore si annulla: C. E. $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$.

**Esempio 14.5.** Determinare le condizioni di esistenza di $\frac{3a+5b-7}{ab}$.

C. E. $ab \neq 0$. Sappiamo che un prodotto è nullo quando almeno uno dei suoi fattori è nullo, dunque affinché il denominatore non si annulli non si deve annullare né $a$ né $b$, quindi $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Concludendo, C. E. $a \neq 0 \wedge b \neq 0$.

**Esempio 14.6.** Determinare le condizioni di esistenza di $\frac{-6}{2x+5}$.

C. E. $2x+5 \neq 0$, per risolvere questa disuguaglianza si procede come per le usuali equazioni: $2x+5 \neq 0 \Rightarrow 2x \neq -5 \Rightarrow x \neq -\frac{5}{2}$ si può concludere C. E. $x \neq -\frac{5}{2}$.

**Esempio 14.7.** Determinare le condizioni di esistenza di $\frac{-x^3-8x}{x^2+2}$.

C. E. $x^2+2 \neq 0$, il binomio è sempre maggiore di 0 perché somma di due grandezze positive. Pertanto la condizione $x^2+2 \neq 0$ è sempre verificata e la frazione esiste sempre. Scriveremo C. E. $\forall x \in \mathbb{R}$ (si legge "per ogni $x$ appartenente a $\mathbb{R}$" o "qualunque $x$ appartenente a $\mathbb{R}$").

**Esempio 14.8.** Determinare le condizioni di esistenza di $\frac{2x}{x^2-4}$.

C. E. $x^2-4 \neq 0$; per rendere nullo il denominatore si dovrebbe avere $x^2 = 4$ e questo si verifica se $x = +2$ oppure se $x = -2$; possiamo anche osservare che il denominatore è una differenza di quadrati e che quindi la condizione di esistenza si può scrivere come C. E. $(x-2)(x+2) \neq 0$, essendo un prodotto possiamo scrivere C. E. $x-2 \neq 0 \wedge x+2 \neq 0$ e concludere: C. E. $x \neq 2 \wedge x \neq -2$.

---

**Procedura 14.1.** *Determinare la condizione di esistenza di una frazione algebrica:*

*a ) porre il denominatore della frazione diverso da zero;*
*b ) scomporre in fattori il denominatore;*
*c ) porre ciascun fattore del denominatore diverso da zero;*
*d ) escludere i valori che annullano il denominatore.*

✍ *Esercizio proposto:* 14.1

## 14.3 Semplificazione di una frazione algebrica

*Semplificare* una frazione algebrica significa dividere numeratore e denominatore per uno stesso fattore diverso da zero. In questo modo, infatti, la proprietà invariantiva della divisione garantisce che la frazione ottenuta è equivalente a quella data. Quando semplifichiamo una frazione numerica dividiamo il numeratore e il denominatore per il loro MCD che è sempre un numero diverso da zero, ottenendo così una frazione ridotta ai minimi termini equivalente a quella assegnata. Quando ci poniamo lo stesso problema su una frazione algebrica, dobbiamo porre attenzione a escludere quei valori che, attribuiti alle variabili, rendono nullo il MCD.

---

**Esempio 14.9.** Semplificare $\frac{16x^3y^2z}{10xy^2}$.

C. E. $xy^2 \neq 0 \rightarrow x \neq 0 \wedge y \neq 0$. Puoi semplificare la parte numerica. Per semplificare la parte letterale applica la proprietà delle potenze relativa al quoziente di potenze con la stessa base: $x^3 : x = x^{3-1} = x^2$ e $y^2 : y^2 = 1$. Quindi:

$$\frac{16x^3y^2z}{10xy^2} = \frac{8x^2z}{5} = \frac{8}{5}x^2z.$$

**Esempio 14.10.** Ridurre ai minimi termini la frazione: $\dfrac{a^2-6a+9}{a^4-81}$.

- Scomponiamo in fattori
  - il numeratore: $a^2-6a+9=(a-3)^2$;
  - il denominatore: $a^4-81=\left(a^2-9\right)\left(a^2+9\right)=(a-3)(a+3)\left(a^2+9\right)$;
- riscriviamo la frazione $\dfrac{(a-3)^2}{(a-3)\cdot(a+3)\cdot\left(a^2+9\right)}$;
- C. E.$(a-3)\cdot(a+3)\cdot\left(a^2+9\right)\neq 0$ da cui C. E. $a\neq +3$ e $a\neq -3$, il terzo fattore non si annulla mai perché somma di un numero positivo e un quadrato;
- semplifichiamo: $\dfrac{(a-3)^{\cancel{2}}}{\cancel{(a-3)}\cdot(a+3)\cdot\left(a^2+9\right)}=\dfrac{a-3}{(a+3)(a^2+9)}$.

**Esempio 14.11.** Ridurre ai minimi termini la frazione in due variabili: $\dfrac{x^4+x^2y^2-x^3y-xy^3}{x^4-x^2y^2+x^3y-xy^3}$.

- Scomponiamo in fattori
  - $x^4+x^2y^2-x^3y-xy^3=x^2\left(x^2+y^2\right)-xy\left(x^2+y^2\right)=x\left(x^2+y^2\right)(x-y)$;
  - $x^4-x^2y^2+x^3y-xy^3=x^2\left(x^2-y^2\right)+xy\left(x^2-y^2\right)=x(x+y)^2(x-y)$;
- la frazione diventa: $\dfrac{x^4+x^2y^2-x^3y-xy^3}{x^4-x^2y^2+x^3y-xy^3}=\dfrac{x\left(x^2+y^2\right)(x-y)}{x(x+y)^2(x-y)}$;
- C. E. $x\cdot(x+y)^2\cdot(x^2+y^2)\neq 0$ cioè C. E. $x\neq 0\wedge x\neq -y$;
- semplifichiamo i fattori uguali: $\dfrac{\cancel{x}\left(x^2+y^2\right)\cancel{(x-y)}}{\cancel{x}(x+y)^2\cancel{(x-y)}}=\dfrac{x^2+y^2}{(x+y)^2}$.

---

Le seguenti semplificazioni sono errate.

- $\dfrac{\cancel{a}+b}{\cancel{a}}$ questa semplificazione è errata perché $a$ e $b$ sono addendi, non sono fattori;
- $\dfrac{\cancel{x^2}+x+4}{\cancel{x^2}+2}$ questa semplificazione è errata perché $x^2$ è un addendo, non un fattore;
- $\dfrac{x^{\cancel{2}}+y^{\cancel{2}}}{(x+y)^{\cancel{2}}}=1$, $\dfrac{\cancel{3a}(a-2)}{\cancel{3a}x-7}=\dfrac{a-2}{x-7}$, $\dfrac{\cancel{(x-y^2)}\cancel{(a-b)}}{\cancel{(y^2-x)}\cancel{(a-b)}}=1$;
- $\dfrac{\cancel{(2x-3y)}}{(3y-2x)^{\cancel{2}}}=\dfrac{1}{3y-2x}$, $\dfrac{a^2+ab}{a^3}=\dfrac{\cancel{a}(a+b)}{a^{\cancel{3}2}}=\dfrac{\cancel{a}+b}{a^{\cancel{2}}}=\dfrac{1+b}{a}$.

✍ *Esercizi proposti:* 14.2, 14.3, 14.4, 14.5, 14.6, 14.7, 14.8, 14.9, 14.10, 14.11

## 14.4 Moltiplicazione di frazioni algebriche

Il *prodotto* di due frazioni è una frazione avente per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

Si vuole determinare il prodotto $p=\frac{7}{15}\cdot\frac{20}{21}$; possiamo scrivere prima il risultato dei prodotti dei numeratori e dei denominatori e poi ridurre ai minimi termini la frazione ottenuta: $p=\frac{7}{15}\cdot\frac{20}{21}=\frac{\cancel{140}^4}{\cancel{315}^9}=\frac{4}{9}$, oppure prima semplificare i termini delle frazioni e poi moltiplicare: $p=\frac{7}{15}\cdot\frac{20}{21}=\frac{\cancel{7}^1}{\cancel{15}^3}\cdot\frac{\cancel{20}^4}{\cancel{21}^3}=\frac{4}{9}$.

**Esempio 14.12.** Prodotto delle frazioni algebriche $f_1 = -\frac{3a^2}{10b^3c^4}$ e $f_2 = \frac{25ab^2c^7}{ab}$.

Poniamo le C. E. per ciascuna frazione assegnata ricordando che tutti i fattori letterali dei denominatori devono essere diversi da zero, quindi C. E. $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0$. Il prodotto è la frazione $f = -\frac{3a^2}{10b^3c^4} \cdot \frac{25ab^2c^7}{ab} = -\frac{15a^2c^3}{2b^2}$.

**Esempio 14.13.** Prodotto delle frazioni algebriche $f_1 = -d\frac{3a}{2b+1}$ e $f_2 = \frac{10b}{a-3}$.

L'espressione è in due variabili, i denominatori sono polinomi di primo grado irriducibili; poniamo le condizioni di esistenza: C. E. $2b+1 \neq 0 \wedge a-3 \neq 0$ dunque C. E. $b \neq -\frac{1}{2} \wedge a \neq 3$. Il prodotto è la frazione $f = -\frac{3a}{2b+1} \cdot \frac{10b}{a-3} = -\frac{30ab}{(2b+1)(a-3)}$ in cui non è possibile alcuna semplificazione.

❑ **Osservazione** $f = -\frac{3\cancel{a}}{2\cancel{b}+1} \cdot \frac{10\cancel{b}}{\cancel{a}-3}$. Questa semplificazione contiene errori in quanto la variabile $a$ è un fattore del numeratore ma è un addendo nel denominatore; analogamente la variabile $b$.

**Esempio 14.14.** Prodotto delle frazioni algebriche in cui numeratori e denominatori sono polinomi $f_1 = \frac{2x^2-x}{x^2-3x+2}$ e $f_2 = \frac{5x-5}{x-4x^2+4x^3}$.

- Scomponiamo in fattori tutti i denominatori (servirà per la determinazione delle C. E.) e tutti i numeratori (servirà per le eventuali semplificazioni)
  - $f_1 = \frac{2x^2-x}{x^2-3x+2} = \frac{x\cdot(2x-1)}{(x-1)\cdot(x-2)}$,
  - $f_2 = \frac{5x-5}{x-4x^2+4x^3} = \frac{5\cdot(x-1)}{x\cdot(2x-1)^2}$;
- poniamo le C. E. ricordando che tutti i fattori dei denominatori devono essere diversi da zero: C. E. $x-1 \neq 0 \wedge x-2 \neq 0 \wedge x \neq 0 \wedge\ 2x-1 \neq 0$ da cui C. E. $x \neq 1 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq \frac{1}{2}$;
- determiniamo la frazione prodotto, effettuando le eventuali semplificazioni:
  - $f = \frac{\cancel{x}\cdot\cancel{(2x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cdot(x-2)} \cdot \frac{5\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{x}\cdot(2x-1)^{\cancel{2}}} = \frac{5}{(x-2)(2x-1)}$.

✍ *Esercizi proposti:* 14.12, 14.13, 14.14, 14.15, 14.16

## 14.5 Potenza di una frazione algebrica

La *potenza* di esponente $n$, naturale diverso da zero, della frazione algebrica $\frac{A}{B}$ con $B \neq 0$ (C. E.) è la frazione avente per numeratore la potenza di esponente $n$ del numeratore e per denominatore la potenza di esponente $n$ del denominatore: $\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$.

---

**Esempio 14.15.** Calcoliamo $\left(\frac{x-2}{x^2-1}\right)^3$.

Innanzi tutto determiniamo le C. E. per la frazione assegnata

$$\frac{x-2}{x^2-1} = \frac{x-2}{(x-1)\cdot(x+1)} \quad \Rightarrow \quad (x-1)\cdot(x+1) \neq 0,$$

da cui C. E. $x \neq 1 \wedge x \neq -1$. Dunque si ha

$$\left(\frac{x-2}{x^2-1}\right)^3 = \frac{(x-2)^3}{(x-1)^3\cdot(x+1)^3}.$$

---

### 14.5.1 Casi particolari dell'esponente

Se $n = 0$ sappiamo che qualsiasi numero diverso da zero elevato a zero è uguale a 1; lo stesso si può dire se la base è una frazione algebrica, purché essa non sia nulla. $\left(\frac{A}{B}\right)^0 = 1$ con $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

---

**Esempio 14.16.** Quali condizioni deve rispettare la variabile $a$ per avere $\left(\frac{3a-2}{5a^2+10a}\right)^0 = 1$?

- Scomponiamo in fattori numeratore e denominatore della frazione: $\left(\frac{3a-2}{5a\cdot(a+2)}\right)^0$;
- determiniamo le C. E. del denominatore: $a \neq 0 \wedge a+2 \neq 0$ da cui, C. E. $a \neq 0 \wedge a \neq -2$. Poniamo poi la condizione, affinché la frazione non sia nulla, che anche il numeratore sia diverso da zero. Indichiamo con $C_0$ questa condizione, dunque $C_0$: $3a-2 \neq 0$, da cui $a \neq \frac{2}{3}$;
- le condizioni di esistenza sono allora $a \neq -2 \wedge a \neq 0 \wedge a \neq \frac{2}{3}$.

---

Se $n$ è intero negativo la potenza con base diversa da zero è uguale alla potenza che ha per base l'inverso della base e per esponente l'opposto dell'esponente. $\left(\frac{A}{B}\right)^{-n} = \left(\frac{B}{A}\right)^{+n}$ con $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

---

**Esempio 14.17.** Determinare $\left(\frac{x^2+5x+6}{x^3+x}\right)^{-2}$.

- Scomponiamo in fattori numeratore e denominatore: $\left(\frac{(x+2)\cdot(x+3)}{x\cdot(x^2+1)}\right)^{-2}$;

- C. E. del denominatore $x \neq 0$ e $x^2+1 \neq 0$ da cui C. E. $x \neq 0$ essendo l'altro fattore sempre diverso da 0. Per poter determinare la frazione inversa dobbiamo porre le condizioni perché la frazione non sia nulla e cioè che anche il numeratore sia diverso da zero, quindi si deve avere $C_0 : (x+2) \cdot (x+3) \neq 0$ da cui $C_0 : x \neq -2$ e $x \neq -3$;
- quindi se $x \neq 0$, $x \neq -2$ e $x \neq -3$ si ha $\left(\dfrac{(x+2)\cdot(x+3)}{x\cdot(x^2+1)}\right)^{-2} = \dfrac{x^2\cdot\left(x^2+1\right)^2}{(x+2)^2\cdot(x+3)^2}$.

---

*Esercizio proposto:* 14.17

## 14.6 Divisione di frazioni algebriche

Il *quoziente* di due frazioni è la frazione che si ottiene moltiplicando la prima con l'inverso della seconda. Lo schema di calcolo può essere illustrato nel modo seguente, come del resto abbiamo visto nell'insieme dei numeri razionali:

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{m \cdot q}{n \cdot p}.$$

Si vuole determinare il quoziente $q = \frac{5}{12} : \frac{7}{4}$. L'inverso di $\frac{7}{4}$ è la frazione $\frac{4}{7}$, dunque

$$q = \frac{5}{12} : \frac{7}{4} = \frac{5}{\cancel{12}^{3}} \cdot \frac{\cancel{4}^{1}}{7} = \frac{5}{21}.$$

---

**Esempio 14.18.** Determinare il quoziente delle frazioni algebriche $f_1 = \dfrac{3a-3b}{2a^2b}$ e $f_2 = \dfrac{a^2-ab}{b^2}$.

- Scomponiamo in fattori le due frazioni algebriche:

$$f_1 = \frac{3a-3b}{2a^2b} = \frac{3\cdot(a-b)}{2a^2b} \quad \text{e} \quad f_2 = \frac{a^2-ab}{b^2} = \frac{a\cdot(a-b)}{b^2};$$

- poniamo le condizioni di esistenza dei denominatori: $2a^2b \neq 0 \wedge b^2 \neq 0$ da cui C. E. $a \neq 0 \wedge b \neq 0$;
- determiniamo la frazione inversa di $f_2$. Per poter determinare l'inverso dobbiamo porre le condizioni perché la frazione non sia nulla. Poniamo il numeratore diverso da zero, $C_0 : a \neq 0 \wedge a-b \neq 0$ da cui $C_0 : a \neq 0 \wedge a \neq b$;
- aggiorniamo le condizioni C. E. $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq b$;
- cambiamo la divisione in moltiplicazione e semplifichiamo:

$$\frac{3\cdot(a-b)}{2a^2b} : \frac{a\cdot(a-b)}{b^2} = \frac{3\cdot\cancel{(a-b)}}{2a^2\cancel{b}} \cdot \frac{b^{\cancel{2}}}{a\cdot\cancel{(a-b)}} = \frac{3b}{2a^3}.$$

---

*Esercizi proposti:* 14.18, 14.19, 14.20

## 14.7 Addizione di frazioni algebriche

### 14.7.1 Proprietà della addizione tra frazioni algebriche

Nell'insieme delle frazioni algebriche la somma:

- è commutativa: $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$;
- è associativa: $(f_1 + f_2) + f_3 = f_1 + (f_2 + f_3) = f_1 + f_2 + f_3$;
- possiede l'elemento neutro, cioè esiste una frazione $F^0$ tale che per qualunque frazione f si abbia $F^0 + f = f + F^0 = f$ cioè $F^0 = 0$;
- per ogni frazione algebrica f esiste la *frazione opposta* $(-f)$ tale che

$$(-f) + f = f + (-f) = F^0 = 0.$$

Quest'ultima proprietà ci permette di trattare contemporaneamente l'operazione di addizione e di sottrazione con la somma algebrica, come abbiamo fatto tra numeri relativi; $(+1) + (-2)$ omettendo il segno di addizione "+" e togliendo le parentesi diventa $1 - 2$; $(+1) - (-2)$ omettendo il segno di sottrazione "−" e togliendo le parentesi diventa $1 + 2$. Come per i numeri relativi, quando si parlerà di somma di frazioni si intenderà "somma algebrica".

---

**Esempio 14.19.** Le frazioni $\frac{2x - 3y}{x + y} + \frac{x + 2y}{x + y}$ hanno lo stesso denominatore.

Poniamo le C. E. $x + y \neq 0$ da cui C. E. $x \neq -y$, quindi

$$\frac{2x - 3y}{x + y} + \frac{x + 2y}{x + y} = \frac{(2x - 3y) + (x + 2y)}{x + y} = \frac{3x - y}{x + y}.$$

❑ **Osservazione** A questo caso ci si può sempre ricondurre trasformando le frazioni in maniera che abbiamo lo stesso denominatore. Si potrebbe scegliere un qualunque denominatore comune, ad esempio il prodotto di tutti i denominatori ma per semplificare i calcoli scegliamo il mcm dei denominatori delle frazioni addendi.

**Esempio 14.20.** $\frac{x + y}{3x^2y} - \frac{2y - x}{2xy^3}$.

Dobbiamo trasformare le frazioni in modo che abbiano lo stesso denominatore:

- calcoliamo il $\text{mcm}(3x^2y, 2xy^3) = 6x^2y^3$;
- poniamo le C. E. $6x^2y^3 \neq 0$ da cui C. E. $x \neq 0$ e $y \neq 0$;
- dividiamo il mcm per ciascun denominatore e moltiplichiamo il quoziente ottenuto per il relativo numeratore:

$$\frac{2y^2 \cdot (x + y)}{6x^2y^3} - \frac{3x \cdot (2y - x)}{6x^2y^3};$$

- la frazione somma ha come denominatore lo stesso denominatore e come numeratore la somma dei numeratori:

$$\frac{2y^2 \cdot (x + y)}{6x^2y^3} - \frac{3x \cdot (2y - x)}{6x^2y^3} = \frac{2xy^2 + 2y^3 + 2x^2y - 6xy + 3x^2}{6x^2y^3}.$$

**Esempio 14.21.** $\dfrac{x+2}{x^2-2x}-\dfrac{x-2}{2x+x^2}+\dfrac{-4x}{x^2-4}$.

- Scomponiamo in fattori i denominatori:

$$\frac{x+2}{x(x-2)}-\frac{x-2}{x(2+x)}+\frac{-4x}{(x+2)(x-2)},$$

il mcm è $x\cdot(x+2)\cdot(x-2)$;
- poniamo le C. E. $x(x+2)(x-2)\neq 0$ da cui C. E. $x\neq 0$, $x\neq 2$ e $x\neq -2$;
- dividiamo il mcm per ciascun denominatore e moltiplichiamo il quoziente ottenuto per il relativo numeratore:

$$\frac{(x+2)^2-(x-2)^2-4x^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)};$$

- eseguiamo le operazioni al numeratore:

$$\frac{x^2+4x+4-x^2+4x-4-4x^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)}=\frac{8x-4x^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)};$$

- semplifichiamo la frazione ottenuta, dopo aver scomposto il numeratore:

$$\frac{-4\cancel{x}\cdot\cancel{(x-2)}}{\cancel{x}\cdot(x+2)\cdot\cancel{(x-2)}}=\frac{-4}{x+2}.$$

**Esempio 14.22.** $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{2x}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{5x^2-7}{x^3-2x^2+2-x}$.

- Scomponiamo in fattori $x^3-2x^2+2-x$, essendo gli altri denominatori irriducibili: $x^3-2x^2+2-x=x^2(x-2)-1(x-2)=(x-2)\left(x^2-1\right)=(x-2)(x+1)(x-1)$ che è anche il mcm dei denominatori;
- poniamo le C. E. $(x-2)(x+1)(x-1)\neq 0$ da cui C. E. $x\neq 2$, $x\neq -1$ e $x\neq 1$;
- dividiamo il mcm per ciascun denominatore e moltiplichiamo il quoziente ottenuto per il relativo numeratore:

$$\frac{x(x+1)(x-1)-2x(x-2)(x-1)+x(x-2)(x+1)-(5x^2-7)}{(x-2)(x+1)(x-1)};$$

- eseguiamo le operazioni al numeratore:

$$\frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{(x-2)(x+1)(x-1)};$$

- semplifichiamo la frazione ottenuta, dopo aver scomposto il numeratore. La frazione somma è:

$$-\frac{7}{(x-2)(x+1)}.$$

---

✍ *Esercizi proposti:* 14.21, 14.22, 14.23, 14.24, 14.25, 14.26, 14.27, 14.28, 14.29, 14.30