萬有文庫
第一集一千種
王雲五主編

三角法
三角函數

林鶴一著
駱師曾譯

商務印書館發行

三角法
三角函數

林鶴一著
駱師曾譯

算學小叢書

王雲五主編

萬有文庫

駱師曾譯

發行兼印刷者　上海寶山路　商務印書館

發行所　上海及各埠　商務印書館

中華民國十九年四月初版

The Complete Library
Edited by
Y. W. WONG

TRIGONOMETRIC FUNCTION
By
HAYASHI
Translated by
LO SHIH TSENG

THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1930

原　　序

三角法爲算學理論之基礎，其應用特於測量術爲不可少，此盡人而知之者也，無此則算學之理論及應用，皆不得發展．且中等教育課之，可爲代數學與幾何學之連鎖，而總括此等之智識，是則三角法所以爲特重課程之一也．又於函數思想之養成上，決不可輕視．唯初學者在未領會其運用之妙以前，終感其極複雜而不甚了了．本篇爲三角法之入門，故亦以此爲患，特注意而敘述之．據此則此法之基本概念，即可十分了解，而此法亦覺談之甚易也．

大正四年十二月

林　　鶴　　一

目　　次

三角法—三角函數

第一章

測角法

1. 三角法. 三角法 (trigonometry) 一語，即由希臘語所謂「測三角形」(trigonon 三角形 + metria 測定) 之意義而來，故測三角形之邊，角及面積等，爲其本來之目的，邇來其應用之範圍擴大，現今凡關於角之數學之部份，皆網羅在內，無純正數學與應用數學之別，而一般爲至高等數學極要用之一分科也.

於平面上論三角形，稱爲**平面三角法**，於球面上論三角形（球面三角形之定義及簡單性質，當於立體幾何學學之），謂之**球面三角法**.

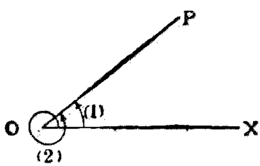
本書專論平面三角法.

2. 量之測定.

某量 A，以與其同種類之他一定量 B 測之，而求 A 與 B 之比，如此者稱 B 爲**單位**，其比謂之 B 爲單位時 A 之**數值**或**測度**，例如某

物長 5 尺，以 1 尺爲單位，則測度爲 5. 若同長之 5 尺，以 50 寸表之，則單位爲 1 寸，測度爲 50 是. 卽單位變更，測度亦隨之而變動也.

3. 角及其測定. 在初等幾何學所謂角者，通例乃依二邊相互之位置而定，以表小於平角唯一之劣角也. 然在三角法所謂角者，可視爲固定其任何一邊(是謂**首線**)，而他邊於其頂點(是謂**極**)之周圍，由首線之位置，依與時計針之迴轉方向相反對之方向(**反時針方向**)迴轉，達於自己之位置而止(此迴轉之邊曰**動徑**)，由此迴轉之量以測定其角.



如左圖，OX, OP 爲由 O 引出之無限半直線，O 爲極，OX 爲首線，OP 爲動徑，而 OX 通例依水平由 O 向右方取之.

今設 $\angle XOP$ 爲幾何學的角，此不過單表如 (1) 之最小角，若如上述迴轉之結果，卽三角法的角，則 $\angle XOP$ 爲 (2)，如下.

1 周角 $+\angle XOP$

又同樣可視爲　　2 周角 $+\angle XOP$

…………………

n 周角 $+\angle XOP$

由是同一幾何學的圖形，可以表無限多之三角法的角，是則三角法的角之大無限制．又依動徑之某位置所表之角，亦可解釋爲經幾周角而達於其位置者也．

測三角法的角，如以直角爲單位，則不便之處頗多，因此以小於直角之角爲單位，甚覺便利．在三角法中，由其所採之單位，通常用下列三種之測角法．

I.　六十分法．

II.　百分法．

III.　弧度法．

4. 六十分法（英國法或實用的測角法）

1 直角之 $\frac{1}{90}$ 曰 1 **度**，1 度之 $\frac{1}{60}$ 曰 1 **分**，1 分之 $\frac{1}{60}$ 曰 1 **秒**，秒以下通例以秒之小數或分數表之，而用此等單位，卽可呼某角，例如 38 度 25 分 30 秒，可表以如下之記法．

$$38^\circ \quad 25^\circ \quad 30''.$$

今用此記法表明度分秒之關係如下

$$1 \text{ 直角} = 90^\circ$$

$$1^\circ = 60'$$

$$1' = 60''.$$

如此各單位皆用六十進法，是謂**六十分法**，亦稱英國法，主於實用上之測角用之．

例 1. 0.254 直角，試以六十分法表之．

解.　0.254 直角

$$\begin{array}{r} 0.254 \\ 90 \\ \hline 22^\circ.86 \\ 60 \\ \hline 51'.6 \\ 60 \\ \hline 36'' \end{array}$$

答　$22^\circ\ 51'\ 36.''$

例 2.　$18^\circ\ 29'\ 57''$，試以直角之小數表之.

解.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 57'' \\ \hline 60 & 29'.95 \\ \hline 90 & 18^\circ.4991\dot{6} \\ \hline & 0.2055\dot{4}629\dot{6} \end{array}$$

$0.2055\dot{4}629\dot{6}$ 直角　　答　$0.2055\dot{4}629\dot{6}$ 直角.

例 3.　$15^\circ\ 3'\ 12''$，試以直角之分數表之.

解.　$15^\circ\ 3'\ 12''=15^\circ\ 3'\frac{12}{60}$

$$=15^\circ\frac{16'}{5}$$

$$=15^\circ\frac{16}{5\times60}$$

$$=\frac{1129}{75\times90}\text{ 直角}$$

$$=\frac{1129}{6750}\text{ 直角.}$$　　答

*5.　百分法(法國法).

1 直角之 $\frac{1}{100}$ 曰 1 **度** (grade)，1 度之 $\frac{1}{100}$ 曰 1 **分**，1 分之 $\frac{1}{100}$ 曰 1 **秒**，而用此等單位卽可呼某角．例如 42 度 68分 82秒，可表以下之記法.

$$42^g\ \ 68^{\grave{}}\ \ 82^{\grave{}\grave{}}.$$

今以此記法表示各單位之相互關係

$$1\text{ 直角}=100^g$$

$$1^g=100^{\grave{}}$$

$$1^{\grave{}}=100^{\grave{}\grave{}}$$

如此各單位皆用百進法，是謂**百分法**，又名**法國法**．因此方法用百進法，故以此單位與他種單位換算頗易．

例如

$$42^g\quad 68^{\grave{}}\quad 82^{\grave{}\grave{}}=42^g\ 68^{\grave{}}.82^{\grave{}\grave{}}$$
$$=42^g.6882$$
$$=0.426882\quad\text{直角}.$$

$$0.02,05,07\ \text{直角}=2^g.05,07$$
$$=2^g\quad 5^{\grave{}}\quad .07$$
$$=2^g\quad 5^{\grave{}}\quad 7^{\grave{}\grave{}}.$$

注意 1. 百分法者，在第十九世紀之初，法蘭西革命之後，始於法國創造，且比六十分法有種種便利，似大有進步也明矣．唯六十分法之創設，其時代既較百分法爲極古，因此而世上用之者甚廣，凡關於角之測法，殆無不以此表之，既如此，欲將書中之六十分法，悉依百分法換算，豈非一大難關乎，故百分法，今惟創造者之法國用之，其餘則依然襲蹈舊慣，遂至於今日．

注意 2. 分，秒之語，有用於六十分法，百分法及時間之三種．因欲防混雜之故，於六十分法，用記號 °，′，″，於百分法，用 g，$\grave{}$，$\grave{}\grave{}$，於時間用 h, m, s．例如 10時 25分 10秒 記爲 $10^h\ 25^m\ 10^s$．時之記號，係 John Herschel 所創用．又度之一語，用於角及溫度，且其記號亦全然相同，此唯於前後之文意識別之，庶可免實際之混雜．

譯註. 以後凡指百分法之度數, 概稱百分度, 若單言度者, 則皆指六十分法之度數.

*6. 六十分法與百分法之關係.

某角依六十分法爲 D 度, 依百分法爲 G 度, 則

$$D^\circ=\frac{D}{90}\text{ 直角},$$

$$G^g=\frac{G}{100}\text{ 直角},$$

由是

$$\frac{D}{90}=\frac{G}{100}. \tag{1}$$

據此卽可互相換算.

例 1. 115°, 試以百分度表之.

解. $G=\frac{100}{90}D=\frac{10}{9}\times115=127\frac{7}{9}.$ 答 $127^g\frac{7}{9}.$

例 2. 228^g, 試以度數表之.

解. $D=\frac{90}{100}G=\frac{9}{10}\times228=205.2.$ 答 $205.^\circ 2.$

次設在六十分法爲 m' 之角, 在百分法爲 μ', 卽 $\frac{m}{60\times90}$ 直角及 $\frac{u}{100\times100}$ 直角, 故

$$\frac{m}{60\times90}=\frac{\mu}{100\times100},$$

或

$$\frac{m}{27}=\frac{\mu}{50}. \tag{2}$$

次設在六十分法為 s'' 之角，在百分法為 $\sigma^{\backprime\backprime}$，則雙方各以直角表之，與上同樣，而得次之關係式.

$$\frac{S}{60\times60\times90}=\frac{\sigma}{100\times100\times100},$$

或
$$\frac{S}{81}=\frac{\sigma}{250}. \tag{3}$$

由以上求得 (1), (2), (3) 之三結果，而得六十分法與百分法相互之換算.

例 1. 試將 $21^\circ\ 36'\ 17''.1$ 換算為百分法.

解. 由 (1), $21^\circ = 23^g.\dot{3} = 23^g\ 33^{\backprime}\ 33^{\backprime\backprime}.\dot{3}$

由 (2), $36' = 66^{\backprime}.\dot{6} = 66^{\backprime}\ 66^{\backprime\backprime}.\dot{6}$

由 (3), $17''.1 = 52^{\backprime\backprime}.\dot{7} = 52^{\backprime\backprime}.\dot{7}$

$\therefore\ 21^\circ\ 36'\ 17''.1 = 24^g\ 52^{\backprime\backprime}.\dot{7}$ 　答.

例 2. 試將 $24^g\ 52^{\backprime\backprime}\frac{7}{9}$ 換算為六十分法.

解. 由 (1), $24^g = 21^\circ.6 = 21^\circ\ 36'$

$52''.\dot{7} = 17''.1$

$\therefore\ 24^g\ 52^{\backprime\backprime}.\dot{7} = 21^\circ\ 36'17''.1$

別法. 六十分法換算為百分法，只須先將六十分法化為直角之單名數，然後將其結果換算為百分法可矣. 百分法換算為六十分法，亦全與此同樣.

例 1. 115°，試以百分度表之.

解. $115^\circ = \frac{115}{90}$ 直角 $=1.27\frac{7}{9}$ 直角 $=127\frac{7^g}{9}$. 　答.

例 2.　$63^\circ\ 14'\ 51''$ 試以百分法表之.

解.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 51'' \\ \hline 60 & 14'.85 \\ \hline 90 & 63^\circ.2475 \\ \hline & 0.70,27,50 \end{array}$$

$0.70,27,50$ 直角 $=70^g\ 27^{\backprime}\ 50^{\backprime\backprime}$.　答.

例 3.　228^g 試以度數表之.

解.　$228^g=2.28$ 直角

$=90^\circ\times 2.28$

$=205.2^\circ$.　答.

例 4.　$94^g\ 23^{\backprime}\ 87^{\backprime\backprime}$ 試以六十分法表之.

解.　$94^g\ 23^{\backprime}\ 87^{\backprime\backprime}=0.942387$ 直角

$$\begin{array}{r} 90 \\ \hline 84^\circ.81483 \\ 60 \\ \hline 48'.8898 \\ 60 \\ \hline 53''.388 \end{array}$$

答　$84^\circ\ 48'\ 53.388''$.

7.　弧度法(理論的測角法).

於一圓內，截一與半徑等長之弧. 立於此弧上之中心角，謂之 1 半徑度 (Radian).

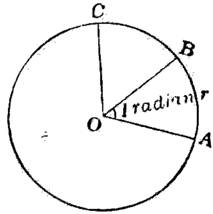
由幾何學，已知圓周與其直徑之比或半圓周與半徑之比，在任何圓皆爲一定不易. 此一定不易之定數，乃一無理數，是謂圓周率，通例以希臘文字 π (派愛) 表之. π 爲歷史的有名之數，今以小數二十位記之如下.

$$\pi=3.14159265358979323846\ldots\ldots$$

設半徑爲 r, 則

$$圓周=2\pi r,\quad 半圓周=\pi r,\quad 圓面積=\pi r^2.$$

今於中心 O, 半徑 r 之圓, 取 $\overset{\frown}{AB}=r$, 則



$$\frac{1\ \text{radian}}{2\ 直角}=\frac{\angle AOB}{2\ 直角}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{半圓周}=\frac{r}{\pi r}=\frac{1}{\pi}.$$

$$\therefore\quad 1\ \text{radian}=\frac{1}{\pi}(2\ 直角).$$

然 π 及 2 直角, 皆爲與半徑 r 無關之定數, 故 1 radian 之大, 在任何圓皆一定不易.

以此一定不易之角爲單位之測角法, 謂之**弧度法**. 六十分法應用於日常實用上. 而此測角法, 則專用於理論上.

π 之略近值, 古來常用之諸數爲

$$\frac{22}{7},\quad 3.1416,\quad \frac{355}{113}$$

等. 此等形狀, 皆甚便於記憶, 故用者甚廣. π 之略近值, 由古來許多數學者計算, 至西曆 1870 年, 英國人 Shanks 求至小數 707 位, 是爲現今最精密之略近值. 又 Lindemann 在 1882 年證明 π 不能爲整係數之代數方程式之根.

8. 弧度法與六十分法之關係.

由 radian 之定義,

$$2\ 直角=180^\circ=\pi\ \text{radian}.$$

但用 π 時, 而取去 radian 之單位名稱, 常可以如次之測度表之.

$$2\text{ 直角}=180°=\pi.$$

從而
$$90°=\frac{\pi}{2}.$$

$$60°=\frac{\pi}{3}.$$

$$45°=\frac{\pi}{4}.$$

$$30°=\frac{\pi}{6}.$$

一般
$$n°=\frac{n}{180}\pi.$$

$$1\text{ radian}=\frac{180°}{\pi}=57°.2957795\ldots$$

$$=57°\,17'\,45''\text{ 弱}=206265''\text{ 弱}.$$

$$1°=\frac{\pi}{180}=0.01745\ldots\ldots\text{radian}.$$

例 1. $25°\,15'$，試以弧度法表之.

解. $25°\,15'=25°.025.$

$$\therefore\quad 25°\,15'=\frac{25.025}{180}\pi$$

$$=\frac{1001}{7200}\pi. \qquad \text{答.}$$

例 2. $\frac{7}{6}\pi$，試以六十分法表之.

解. $\frac{7}{6}\pi=180°\times\frac{7}{6}=210°.$ 答.

問　題　I.

(1)　下列諸角, 試以直角之小數或分數表之.

(1)　$11^\circ\ 15'$.　　(2)　$2^\circ\ 10'\ 12''$.

(3)　$42^\circ\ 25'\ 40''$.　　*(4)　$2^g\ 4^{\backprime}\ 4.5^{\backprime\backprime}$.

*(5)　$26^g\ 46^{\backprime}\ 35.62^{\backprime\backprime}$.

*(2)　下列諸角, 試以百分法表之.

(1)　$35^\circ\ 47'\ 15''$.　　(2)　$11^\circ\ 38.4''$.

(3)　$475^\circ 13'\ 48''$.　　(4)　$\frac{4\pi}{5}$.

(5)　$\frac{7\pi}{6}$.

(3)　下列諸角, 試以六十分法表之.

*(1)　$3^g\ 2^{\backprime}\ 5^{\backprime\backprime}$.　　*(2)　$56^g\ 87^{\backprime}\ 50^{\backprime\backprime}$.

(3)　0.45π.　　(4)　$\frac{4\pi}{3}$.

(5)　8 radians.

(4)　下列諸角, 試以弧度法表之.

(1)　$40^\circ\ 15'\ 36''$.　　*(2)　$40^g\ 15^{\backprime}\ 36^{\backprime\backprime}$.

(3)　395°.　　*(4)　$110^g\ 30^{\backprime}$.

(5)　於 $\triangle$ ABC, 設 $A=31^\circ\ 27'\ 18''$, $B=58^\circ\ 46'\ 27''$, 求 C.

*(6)　表直角三角形一銳角之度數, 適等於表他銳角之百分度數, 試將此二銳角各以六十分法表之.

*(7)　試將 $44^\circ\ 8'$ 分爲二分, 使其一部分以六十分法所表之秒數, 等於他部分以百分法所表之秒數.

*(8)　二角之和爲 80^g, 其差爲 18°, 求此二角之度數.

*(9)　某角之度數與其百分度數之和爲 152, 求此角之度數.

*(10)　設三角形之三角爲等差級數, 且最小角之百分度數與最大角之半徑度數, 其比如 $40:\pi$, 求此三角之度數.

*(11)　於 ABC 三角形, 設 A 角之度數, 等於 B 角之百分度數, 且等於 C 角之度數及百分度數之積, 求各角.

*(12)　設三角形之三角, 順次爲 $\frac{2}{3}x$ 百分度, $\frac{3}{2}x$ 度, 及 $\frac{\pi x}{75}$ 半徑度, 求此三角之度數.

(13)　試依下列時刻, 將時計兩針間之角, 以弧度法, 六十分法, 及百分法表之.

(1)　三時半.

(2)　五時四十分.

(3)　十一時十五分.

(14)　求下之時刻.

(1)　四時與五時之間, 時計之兩針成 78° 之角時.

(2)　七時與八時之間, 成 54° 之角時.

(15)　有二正多角形, 第一形之邊數爲第二形邊數之 2 倍, 第一形之一內角與第二形一內角之比爲 3:2, 求各形各邊數.

(16)　有二正多角形, 其邊數之比如 5:4, 各內角之差爲 90°, 求各邊數.

(17)　五角形之五角有 2:3:4:5:6 之比時, 求各角之度數.

(18)　設以正八角形之一角, 爲測角之單位, 則 70° 之測度幾何.

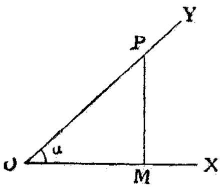
(19) 設以某角爲單位而測 15° 及 0.2 直角，其所得二值之和爲 $0.7\dot{3}$，則此單位之角爲幾度.

(20) 設以三角形之各角爲單位，測得他二角和之測度成等差級數，則此等三角必自成調和級數，試證明之.

(21) 設二正多角形內角之比，等於其邊數之比，試求此二正多角形之邊數.

第二章

銳角之三角函數



9. 設 XOY 爲任意之一銳角，以 α 表之，由此角夾邊之任何方，例如 OY 上之任意一點 P，至他邊 OX 作垂線 PM，其足爲 M，則

$\frac{PM}{OP}$ 卽 $\frac{垂線}{斜邊}$ 曰角 α 之**正弦**，以記號 sin α 表之.

$\frac{OM}{OP}$ 卽 $\frac{底邊}{斜邊}$ 曰角 α 之**餘弦**，以記號 cosα 表之.

$\frac{PM}{OM}$ 卽 $\frac{垂線}{底邊}$ 曰角 α 之**正切**，以記號 tanα 表之.

$\frac{OM}{PM}$ 卽 $\frac{底邊}{垂線}$ 曰角 α 之**餘切**，以記號 cotα 表之.

$\frac{OP}{OM}$ 卽 $\frac{斜邊}{底邊}$ 曰角 α 之**正割**，以記號 secα 表之.

$\frac{OP}{PM}$ 卽 $\frac{斜邊}{垂線}$ 曰角 α 之**餘割**，以記號 cosecα 表之.

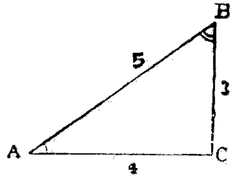
以上所記之六比，稱爲角 α 之**三角比**.

例. 於 △ABC，設 ∠C ＝直角，AB=5，AC=4，BC=3，則

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5},$$

$$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{5},$$

$$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{4},$$



$$\cot A=\frac{AC}{BC}=\frac{4}{3},\qquad \sec A=\frac{AB}{AC}=\frac{5}{4},$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{AB}{BC}=\frac{5}{3}.$$

又 $\sin=B\frac{5}{4},\qquad \cos B=\frac{3}{5},\qquad \tan B=\frac{4}{3},$

$$\cot B=\frac{3}{4},\qquad \sec B=\frac{5}{3},\qquad \operatorname{cosec} B=\frac{4}{5}.$$

注意 1. sin, cos, tan, cot, sec, cosec 各爲 sine, cosine, tangent, cotangent, secant, cosecant 之略, 又 tan 亦可記爲 tg 或 tang, cot 亦可記爲 cotg 或 ctg, cosec 亦可記爲 csc.

注意 2. △POM 謂之 $\angle\alpha$ **之參考三角形, 基礎三角形或補助三角形.**

10. 函數. 某數 x 變時, 他數 y 亦隨之而變, 則 y 曰 x **之函數**, 例如 $y=ax+b$, x 變時, y 亦隨之而變, 故 y 爲 x 之函數. 又於 $C=2\pi r$, 圓周 C 爲半徑 r 之函數.

一般表 y 爲 x 之函數, 通例用

$$y=f(x),\ y=\varphi(x),\ y=F(x)$$

等之記號.

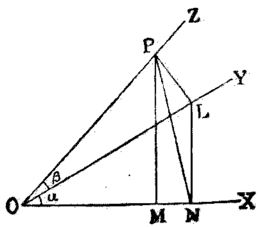
三角比者, 角 (於前節如 α) 變時其值亦隨之而變, 即三角比爲角之函數, 故三角比或稱**三角函數**, 或稱**圓函數**.

三角法者，依三角函數之性質及其應用而研究三角形邊與角之數量的關係之學科也.

注意 1. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ 等，係表各全體之意義，恰如 $\log x$ 非 $\log\times x$ 之意同樣. $\sin\alpha$ 不作 $\sin\times\alpha$. 又 $(\sin\alpha)^n$ 如作為 $\sin\alpha^n$，不免為 $\sin(\alpha^n)$ 之誤解，故用 $\sin^n\alpha$ 之記法. 例如 $(\tan\alpha)^2$ 記 $\tan^2\alpha$. 又如上述 $\sin\alpha$ 非 $\sin$ 與 α 之乘積，故一般

$$\sin\alpha+\sin\beta\neq\sin(\alpha+\beta).$$

今以幾何學的證明之.



如左圖,

$\angle XOY=\alpha$, $\angle YOZ=\beta$,

且 OZ 上任意之一點為 P, 且

$PM\perp OX$, $PL\perp OY$,

$LN\perp OX$.

因 $OL<OP$, 故

$$\sin\alpha=\frac{LN}{OL}>\frac{LN}{OP},\qquad \sin\beta=\frac{PL}{OP},$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{PM}{OP},$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{LN}{OL}+\frac{PL}{OP}>\frac{LN}{OP}+\frac{PL}{OP}>\frac{PN}{OP}$$

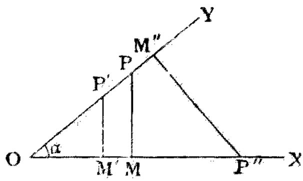
$$>\frac{PM}{OP}=\sin(\alpha+\beta).$$

$$\therefore\quad \sin\alpha+\sin\beta>\sin(\alpha+\beta).$$

注意 2. 因三角函數乃二線分之長之比為不名數，故可施以代數的計算(加，減，乘，除，冪法，開法).

注意 3. 吾人現今考究銳角之三角函數，故單言角者，自本章至第四章，皆可作為銳角觀之(含直角者極少).

11. 一定角之三角函數爲一定.



於銳角 XOY 之任何一邊例如 OY 上之任意一點 P，至他邊 OX 作垂線爲 PM，則

$$\sin\alpha=\frac{PM}{OP}.$$

又由 OY 上他之任意一點 P′，至 OX 作垂線爲 P′M′，由 OX 上任意之一點 P,″ 至 OY 作垂線爲 P″M″，則

$$\triangle POM \backsim \triangle P'OM' \backsim \triangle P''OM''.$$

$$\therefore \quad \frac{PM}{OP}=\frac{P'M'}{OP'}=\frac{P''M''}{OP''}.$$

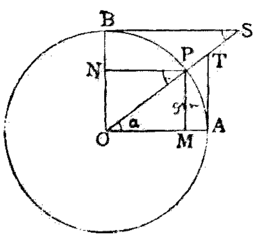
卽垂線無論採於何處，若角 α 爲一定，則正弦必一定不變.

就他之三角函數亦同樣.

卽 $\angle\alpha$ 之三角函數，乃 α 之函數，而非其邊長之函數.

12. 三角函數之幾何學的表示.

今再以幾何學的線分之長，表示某角之三角函數值而述其方法.



以 O 爲中心，單位長爲半徑，畫圓(是謂單位圓)，由 O 點引互相垂直之兩半徑 OA 及 OB，且使 $\angle AOP=\alpha$ 作半徑 OP，由 P 作 OA 及 OB 之垂線 PM 及 PN，又於 A 及 B 各作此圓之切線，與 OP 之交點爲 T 及 S，則

$$\sin\alpha=\frac{PM}{OP}=PM,\ \left(\begin{array}{l}\text{但 PM 爲以此圓之半徑爲單位時}\\ \text{表 PM 之測度, 以下與此同樣.}\end{array}\right)$$

$$\cos\alpha=\frac{OM}{OP}=OM,$$

$$\tan\alpha=\frac{AT}{OA}=AT,$$

$$\cot\alpha=\frac{BS}{OB}=BS,$$

$$\sec\alpha=\frac{OT}{OA}=OT,$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{OS}{OB}=OS.$$

注意. 有時稱 MA 爲 α 之 versed sine (正矢), BN 爲 α 之 co-versed sine (餘矢), 而用下之記號.

$$1-\cos\alpha=\text{vers }\alpha,$$

$$1-\sin\alpha=\text{covers }\alpha.$$

13. 三角函數所取之值之限界.

(1) $\sin\alpha$, 由前節之圖, 明知其恒爲 PM<半徑=1 (但 $\alpha<90°$).

$$\therefore\quad \sin\alpha<1.$$

或於 $\sin\alpha=\frac{PM}{OP}$, 而 PM<OP. $\therefore$ $\sin\alpha<1$, 亦可如是考之.

(2) $\cos\alpha$, 由前節之圖, 明知其恒爲 OM<半徑=1,

$$\therefore\quad \cos\alpha<1.$$

或於 $\cos\alpha=\frac{OM}{OP}$, 而 OM<OP. $\therefore$ $\cos\alpha<1$, 亦可如是考之.

(3) $\tan\alpha$, 於前節之圖為 AT, 此乃由 α 之變化而得如何之長, 由圖易明. 又於 $\tan\alpha=\frac{PM}{OM}$, 其 PM 及 OM 隨 α 之變化而變為相反的之大, 故 $\tan\alpha$ 之值, 可取如何小之值或如何大之值, 即 $\tan\alpha$ 所取之值無限界.

(4) $\cot\alpha$, 於前節之圖為 BS, 亦與 (3) 同樣, 所取之值無限界.

(5) $\sec\alpha$, 於前節之圖為 OT, 明知其 OT>半徑=1,

$$\therefore \quad \sec\alpha>1.$$

又於 $\sec\alpha=\frac{OP}{OM}$, 而 OP>OM. $\therefore$ $\sec\alpha>1$, 亦可如是考之.

(6) $\operatorname{cosec}\alpha$, 於前節之圖為 OS, 明知其 OS>半徑=1.

$$\therefore \quad \operatorname{cosec}\alpha>1.$$

又於 $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{OP}{PM}$, 而 OP>PM. $\therefore$ $\operatorname{cosec}\alpha<1$, 亦可如是考之.

要之

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$ 恆取小於 1 之值.

$\tan\alpha$, $\cot\alpha$ 可取任何之值.

$\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$ 恆取大於 1 之值.

又由前節之圖, PM<TA<OT, OM<BS<OS.

$$\therefore \quad \sin\alpha<\tan\alpha<\sec\alpha.$$

$$\cos\alpha<\cot\alpha<\operatorname{cosec}\alpha.$$

14. 角之變化與其函數值變化之關係.

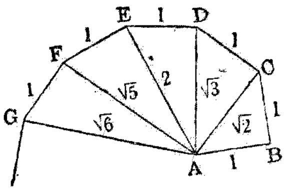
觀第 12 節之圖, α 增大時, PM, AT, OT 增大, 而 OM, BS, OS 減小; 反之, α 減小時, PM, AT, OT 減小, OM, BS, OS 增大, 故

(1) α 增大時, $\sin\alpha$, $\tan\alpha$, $\sec\alpha$ 增大,
$\cos\alpha$, $\cot\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$ 減小.

(2) α 減小時, $\sin\alpha$, $\tan\alpha$, $\sec\alpha$ 減小,
$\cos\alpha$, $\cot\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$ 增大.

例 1. 等於 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$,......之線分, 試作其圖.

解. 取等於 1 之線分 AB, 作 $BC\perp AB$, 且 $BC=1$ 之線分 BC, 則



$$AC=\sqrt{2}.$$

作 $AC\perp CD$, $CD=1$ 之線分 CD, 則

$$AD=\sqrt{3}.$$

作 $AD\perp DE$, $DE=1$ 之線分 DE, 則

$$AE=\sqrt{4}=2.$$

作 $AE\perp EF$, $EF=1$ 之線分 EF, 則

$$AF=\sqrt{5}.$$

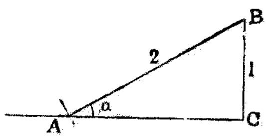
作 $AF\perp FG$, $FG=1$ 之線分 FG, 則

$$AG=\sqrt{6}.$$

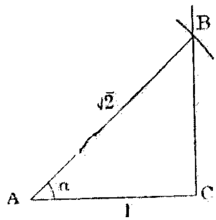
以下與此同樣繼續作圖.

例 2. 設 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, 試作角 α 之圖.

解. 取線分 BC 等於 1, 於 C 作垂直於 BC 之直線 CA, 以 B 爲中心, 2 爲半徑畫圓, 與 CA 之交點爲 A, 則 $\angle BAC$ 卽爲所求之角.



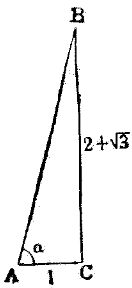
$\because \quad \sin BAC = \frac{1}{2}.$



例 3. 設 $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 試作角 α 之圖.

解. 取線分 AC 等於 1, 於 C 作垂直於 AC 之直線 CB, 以 A 爲中心, $\sqrt{2}$ 爲半徑, 畫圓, 與 CB 之交點爲 B, 則 $\angle BAC$ 卽爲所求之角.

$$\because \quad \cos BAC = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



例 4. 設 $\tan\alpha = 2+\sqrt{3}$, 試作角 α 之圖.

解. 取線分 AC 等於 1, 於 C 作垂直於 AC 之直線 CB, 且使 $CB = 2+\sqrt{3}$ (由例 1 取 2 與 $\sqrt{3}$ 之和), 則 $\angle BAC$ 卽爲所求之角.

$$\because \quad \tan BAC = \frac{2+\sqrt{3}}{1} = 2+\sqrt{3}.$$

問　題　II.

(1) 於直角三角形 ABC, $C=90°$, $AC=3$, $BC=4$ 求角 A 之三角函數.

(2) 於直角三角形 ABC, $C=90°$, $b=2mn$, $c=m^2+n^2$, 求二角 A, B 之三角函數.

(3) 連結正方形 ABCD 之頂點 C 與邊 AD 之中點 E, 試求其所生 $\angle ECD$ 之 sin 及 cos.

(4) 長 l 之線分, 投於他直線上之正射影之長爲 p, 求此二直線所成之角之 tan.

(5) 設 $\triangle$ ABC 之角 C 爲直角, 試證明次式.

$$\tan A+\tan B=\frac{c^2}{ab}.$$

(6) 試作下列角 A 之圖.

(1) $\sin A=\frac{2}{3}$, (2) $\cos A=\frac{3}{5}$,

(3) $\tan A=\frac{5}{4}$, (4) $\cot A=\frac{\sqrt{2}}{3}$,

(5) $\sec A=\frac{4}{\sqrt{3}}$, (6) $\operatorname{cosec} A=\frac{7}{3}$.

(7) 試證明 $\sin A+\cos A>1$.

(8) 於 $\triangle$ABC, 自 C 至對邊之中線, 垂直於 AC, 試證明

$$\tan(180^\circ-\angle ACB)=2\tan A.$$

(9) 三等分線分 AD 之各分點中, 近於 A 者爲 B, 他分點爲 C. 以 BC 爲直徑之圓周上任意一點爲 P, 設 $\angle APB=\theta$, $\angle CPB=\psi$, 則 $\tan\theta\ \tan\psi=\frac{1}{4}$, 試證明之.

15. 同角之三角函數之關係.

I. $\sin A.\operatorname{cosec} A=1.$

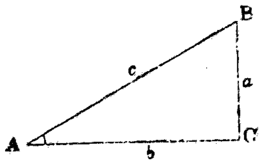
$\cos A.\sec A=1.$

$\tan A.\cot A.=1.$

證明. 於直角三角形 ABC, 設 $\angle C=$直角, 則

$$\sin A=\frac{a}{c},\quad \operatorname{cosec} A=\frac{c}{a},$$

$$\therefore\quad \sin A \operatorname{cosec} A=\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}=1.$$



同樣 $$\cos A\sec A=\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{b}=1.$$

$$\tan A\cot A=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1.$$

或

$$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A},\quad \sec A=\frac{1}{\cos A},\quad \cot A=\frac{1}{\tan A}.$$

注意. 已知六函數中之 $\sin A, \cos A, \tan A$, 則他之三函數各爲其倒數, 故易於求得, 因此 $\sin A, \cos A, \tan A$ 謂之**三角主函數.**

II. $$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}.$$

$$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}.$$

證明. $\tan A=\dfrac{a}{b},\qquad \dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\dfrac{a}{b}.$

$$\therefore\quad \tan A=\frac{\sin A}{\cos A}.$$

同樣 $$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}.$$

III. $\sin^2 A+\cos^2 A=1.$

證明. $\sin^2 A+\cos^2 A=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1.$

或 $\sin^2 A=1-\cos^2 A,\qquad \cos^2 A=1-\sin^2 A.$

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A},\qquad \cos=\sqrt{1-\sin^2 A}.$

注意. 根號當附複符號，但三角函數值之負值，在此無意味(但於後章表其意味)，此後凡平方根皆暫取正根.

IV. $1+\tan^2 A=\sec^2 A.$

$1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A.$

證明. $1+\tan^2 A=1+\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\cos^2 A}=\frac{1}{\cos^2 A}$

$=\sec^2 A.$

同樣 $1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A.$

或 $\sec A=\sqrt{1+\tan^2 A},\quad \operatorname{cosec} A=\sqrt{1+\cot^2 A}.$

注意. 在本節所得之諸公式，皆爲以後之基礎，極爲要用.

例. $\sin A=\frac{3}{5}$, 則 $\operatorname{cosec} A=\frac{5}{3}$. $\cos A=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$.

$\tan A=\frac{3}{4}$, 則 $\sec A=\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{5}{4}$.

16. 以三角函數之一表其他三角函數.

I. 以 sinA 表其他之三角主函數.

$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}.$ (前節 III)

$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}.$

II. 以 cosA 表其他之三角主函數.

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}.\qquad\text{(前節 III)}$$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A}.$$

III. 以 tanA 表其他之三角主函數.

$$\cos A=\frac{1}{\sec A}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}.\qquad\text{(前節 IV)}$$

$$\sin A=\tan A.\cos A=\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}.\qquad\text{(前節 II)}$$

此外以 cotA, secA 或 cosecA 等, 表其他之三角函數, 亦可依同法於求得, 兹略其方法, 而於次頁揭全函數之相互換算表.

例 1. $\cos A=\frac{3}{5}$ 時, 求他之三角函數之值.

解. $$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}.$$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}.$$

$$\cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{3}{4}.$$

$$\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{5}{3}.$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}=\frac{5}{4}.$$

例 2. $\cot\alpha=4$ 時, 求 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ 之值.

解. $$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+4^2}}=\frac{1}{\sqrt{17}}.$$

$$\cos\alpha=\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}=\frac{4}{\sqrt{1+4^2}}=\frac{4}{\sqrt{17}}.$$

	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	$\cot A$	$\sec A$	$\operatorname{cosec} A$
$\sin A=$	$\sin A$	$\sqrt{1-\cos^2 A}$	$\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2 A-1}}{\sec A}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec} A}$
$\cos A=$	$\sqrt{1-\sin^2 A}$	$\cos A$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$	$\frac{\cot A}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$	$\frac{1}{\sec A}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A-1}}{\operatorname{cosec} A}$
$\tan A=$	$\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A}$	$\tan A$	$\frac{1}{\cot A}$	$\sqrt{\sec^2 A-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A-1}}$
$\cot A=$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A}$	$\frac{\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}}$	$\frac{1}{\tan A}$	$\cot A$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2 A-1}}$	$\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A-1}$
$\sec A=$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$	$\frac{1}{\cos A}$	$\sqrt{1+\tan^2 A}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$	$\sec A$	$\frac{\operatorname{cosec} A}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A-1}}$
$\operatorname{cosec} A=$	$\frac{1}{\sin A}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 A}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}$	$\sqrt{1+\cot^2 A}$	$\frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A-1}}$	$\operatorname{cosec} A$

例 3. $\tan\alpha=\sqrt{3}$ 時，求 $\sin\alpha$ 及 $\cos\alpha$ 之值.

解. $$\sin\alpha=\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+3}}=\frac{1}{2}.$$

例 4. $\sec A=\sqrt{2}$ 時，$(\sin A+\cos A)^2$ 及 $\tan A+\cot A$ 孰大.

解. $$\sin A=\frac{\sqrt{\sec^2A-1}}{\sec A}=\frac{\sqrt{2-1}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\cos A=\frac{1}{\sec A}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

∴ $$(\sin A+\cos A)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=2.$$

又 $$\tan A=\sqrt{\sec^2A-1}=\sqrt{2-1}=1.$$

$$\cot A=\frac{1}{\tan A}=1.$$

∴ $$\tan A+\cot A=2.$$

∴ $$(\sin A+\cos A)^2=\tan A+\cot A.$$

例 5. $\sin\alpha=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$ 時，求 $\cos\alpha$ 及 $\tan\alpha$.

但 $m>n>0$.

解. $$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{(m^2+n^2)^2-(m^2-n^2)^2}{(m^2+n^2)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{4m^2n^2}{(m^2+n^2)^2}}=\frac{2mn}{m^2+n^2}.$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}}{\dfrac{2mn}{m^2+n^2}}$$

$$=\frac{m^2-n^2}{2mn}.$$

問 題 III.

(1) $\sin\theta=\frac{12}{13}$ 時，求他之函數.

(2) $\tan A=\frac{8}{15}$ 時，求 $\sin A, \cos A$ 之值.

(3) $\cos A=\frac{2}{\sqrt{5}}$ 時，求 $\sin A$, $\tan A$.

(4) $\sin\alpha=\frac{n}{m}$ 時，求 $\tan\alpha$.

(5) $\sin A=\frac{2a}{1+a^2}$ 時，求 $\tan A$.

(6) $\sin 15°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 時，求 $\cos 15°, \tan 15°$.

(7) $\tan 75°=2+\sqrt{3}$ 時，求 $\sin 75°$, $\cos 75°$.

(8) $\cos\alpha=\frac{m^2+2mn}{m^2+2mn+2n^2}$ 時，求 $\tan\alpha$ 之值.

(9) $\sin\theta=\frac{3m^2+2m}{5m^2+6m+2}$ 時，求 $\tan\theta$ 之值.

(10) $\sec A=\sqrt{2}$ 時，求 $\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}}$ 之值.

(11) $\sin\theta=a$, $\tan\theta=b$ 時，求 $(1-a^2)(1+b^2)$ 之值.

(12) $\sec A=\dfrac{13}{5}$ 時，求 $\dfrac{2\sin A-3\cos A}{4\sin A-9\cos A}$ 之值.

(13) $\tan\theta=\dfrac{2mn}{m^2-n^2}$ 時，求次式之值.

$$2mn\cos^2\theta-(m^2-n^2)\cos\theta\sin\theta.$$

(14) $\tan\theta=\dfrac{a}{b}$ 時，求 $\dfrac{a\sin\theta+b\cos\theta}{a\sin\theta-b\cos\theta}$ 之值.

(15) $\sec^2\theta\operatorname{cosec}^2\theta-\tan^2\theta-\cot^2\theta$, 試簡單之.

(16) $3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)-2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)$, 試簡單之.

(17) $(\sin A-\operatorname{cosec}A)^2-(\tan A-\cot A)^2+(\cos A-\sec A)^2$, 試簡單之.

(18) $(\operatorname{cosec}A-\sin A)(\sec A-\cos A)(\tan A+\cot A$, 試簡單之.

(19) $(\sec x\ \sec y+\tan x\ \tan y)^2-(\tan x\ \sec y+\sec x\ \tan y)^2$, 試簡單之.

(20) $\sin^2A\tan^2A+\cos^2A\cot^2A-\tan^2A-\cot^2A$, 試簡單之.

(21) $\dfrac{1}{1+\sin^2x}+\dfrac{1}{1+\cos^2x}+\dfrac{1}{1+\sec^2x}+\dfrac{1}{1+\operatorname{cosec}^2x}$,

試簡單之.

(22) $\cot^2\theta.\dfrac{\sec\theta-1}{1+\sin\theta}+\sec^2\theta.\dfrac{\sin\theta-1}{1+\sec\theta}$, 試簡單之.

(23) $\tan\theta=0.75$ 時，求 $\sin^6\theta+\cos^6\theta$ 之值.

(24) $\sin A+\cos A=\dfrac{17}{13}$ 時，求 $\sin A$ 及 $\cos A$.

(25) $\tan A+\cot A=\dfrac{13}{6}$ 時，求 $\sin A$ 及 $\cos A$.

(26) $\tan\theta+\sec\theta=1.5$ 時, 求 $\sin\theta$.

(27) $\tan\theta+\sec\theta=2$ 時, 求 $\sin\theta$.

(28) $\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta=5$ 時, 求 $\cos\theta$.

(29) $1+\sin^2\theta=3\cos\theta\sin\theta$ 時, 求 $\tan\theta$.

(30) 由 $\sec^2\theta=2(1+\tan\theta)$, 求 $\tan\theta$.

(31) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{5}{4}$ 時, 求 $\sin^3\theta+\cos^3\theta$ 之值.

(32) $\sin\theta+\sin^2\theta=1$ 時, 試證 $\cos^2\theta+\cos^4\theta=1$.

(33) 直角三角形一銳角之 tan 為 0.75, 其周圍為 12 寸, 求斜邊之長.

(34) $\left(\frac{\tan\alpha}{\sin\theta}-\frac{\tan\beta}{\tan\theta}\right)^2=\tan^2\alpha-\tan^2\beta$ 時, 試證 $\cos\theta=\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$.

(35) $\cos A=\cos x\sin C,\quad \cos B=\sin x\sin C$ 時, 試證

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2.$$

(36) $\sin^2A\operatorname{cosec}^2B+\cos^2A\cos^2C=1$ 時, 試證

$$\sin^2C=\tan^2A\cot^2B.$$

(37) $\sin A+\cos A=a$ 時, 試以 a 表 $\tan A+\cot A$ 之值.

(38) $\sin A\cos A=a$ 時, 試證 $\sin A$ 及 $\cos A$ 為二次方程式 $2x^2-2ax+a^2-1=0$ 之根.

第 三 章

恆 等 式 之 證 明

17. 恆等式之證明，本無一定之方法，須隨機應變而考之．然應用於許多之情形，亦有方法，大別之，可得以下之五種．

I. 由兩邊中之複雜者誘導爲簡單之方法．

例 1. 試證明 $(\sec A-\tan A)(\sec A+\tan A)=1$.

解. $(\sec A-\tan A)(\sec A+\tan A)=\sec^2 A-\tan^2 A$

$$=1.$$

例 2. 試證明 $\dfrac{\tan A+\tan B}{\cot A+\cot B}=\tan A\tan B$.

解.
$$\frac{\tan A+\tan B}{\cot A+\cot B}=\frac{\tan A+\tan B}{\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan B}}$$

$$=\frac{\tan A+\tan B}{\dfrac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B}}$$

$$=\tan A\tan B.$$

注意. 此方法於恆等式之一邊複雜而他邊爲比較的簡單時，用之較便．又以此方法可得而證明者，揭其簡單之問題，但亦不限於此方法，卽依他方法，亦無謬誤．

問題 IV.

試證明次之恆等式.

(1) $\sin A \sec A \cot A = 1.$

(2) $(\sin A + \cos A)^2 + (\sin A - \cos A)^2 = 2.$

(3) $\sin^4 A - \cos^4 A = 2\sin^2 A - 1.$

(4) $(\sec A + \operatorname{cosec} A)^2 - (\tan A + \cot A)^2 = 2\sec A \operatorname{cosec} A.$

(5) $\tan A \sin A + \cos A = \sec A.$

(6) $(1+\sin\theta)^2 + (1+\cos\theta)^2 = 3 + 2(\sin\theta + \cos\theta).$

(7) $\tan A + \cot A = \sec A \operatorname{cosec} A.$

(8) $\sec A - \cos A = \tan A \sin A.$

(9) $\sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A = \sec^2 A \operatorname{cosec}^2 A.$

(10) $\cot^2 A - \cos^2 A = \cot^2 A \cos^2 A.$

(11) $\tan^2 A - \sin^2 A = \tan^2 A \sin^2 A.$

(12) $(1 - \tan^4 A)\cos^2 A + \tan^2 A = 1.$

(13) $\dfrac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta} \cdot \dfrac{1+\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = \tan\theta.$

(14) $\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \cos^2 x - \sin^2 x.$

(15) $(\tan A + \sec A)^2 = \dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}.$

(16) $(\sec A - \tan A)^2 = \dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}.$

(17) $(\operatorname{cosec} A + \cot A)^2 = \dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}.$

(18) $\dfrac{1}{1-\sin A}+\dfrac{1}{1+\sin A}=2\sec^2 A.$

(19) $\operatorname{cosec}^4 x(1-\cos^4 x)-2\cot^2 x=1.$

(20) $\cos^6 A+\sin^6 A+3\sin^2 A\cos^2 A=1.$

II. 兩邊變爲同一式之方法.

例 1. 試證明 $\sin^2\theta\tan\theta+\cos^2\theta\cot\theta+2\sin\theta\cos\theta$
$=\tan\theta+\cot\theta.$

解. $\sin^2\theta\tan\theta+\cos^2\theta\cot\theta+2\sin\theta\cos\theta.$

$$=\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos^3\theta}{\sin\theta}+2\sin\theta\cos\theta$$

$$=\frac{\sin^4\theta+\cos^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$$

$$=\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2}{\cos\theta\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}.$$

$$\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}.$$

$\therefore\quad \sin^2\theta\tan\theta+\cos^2\theta\cot\theta+2\sin\theta\cos\theta=\tan\theta+\cot\theta.$

例 2. 試證明 $(1+\sin A+\cos A)^2=2(1+\sin A)(1+\cos A).$

解. $(1+\sin A+\cos A)^2=1+\sin^2 A+\cos^2 A+2\sin A$
$+2\cos A+2\sin A\cos A$

$=2+2(\sin A+\cos A)+2\sin A\cos A$

$=2(1+\sin A+\cos A+\sin A\cos A)$

$2(1+\sin A)(1+\cos A)=2(1+\sin A+\cos A+\sin A\cos A).$

$\therefore \quad (1+\sin A+\cos A)^2=2(1+\sin A)(1+\cos A).$

注意. 此方法於恆等式之兩邊皆複雜時，用之較便.

問　　題　　V.

試證明次之恆等式.

(1) $\tan A(\cos^2 A-\sin^2 A)=\sin A\cos A(1-\tan^2 A).$

(2) $(1-\tan A)^2+(1-\cot A)^2=(\sec A-\operatorname{cosec} A)^2.$

(3) $\operatorname{cosec}\alpha(\sec\alpha-1)+\sin\alpha=\cot\alpha(1-\cos\alpha)+\tan\alpha.$

(4) $\sin^2 x\tan^2 x+\cos^2 x\cot^2 x=\tan^2 x+\cot^2 x-1.$

(5) $\sin A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)=\sec A+\operatorname{cosec} A.$

(6) $\cot^4 A+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^4 A-\operatorname{cesec}^2 A.$

(7) $\tan^4 A+\tan^2 A=\sec^4 A-\sec^2 A.$

(8) $(\tan A+\cot A)^2=\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A.$

(9) $(\sin+\cos A)(\tan A+\cot A)=\sec A+\operatorname{cosec} A.$

(10) $(2-\cos^2 A)(1+2\cot^2 A)=(2+\cot^2 A)(2-\sin^2 A).$

III. 由兩邊之差為零而證明之方法.

例 1. 試證明 $\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\alpha.$

解. $(\cos^2\alpha-\sin^2\beta)-(\cos^2\beta-\sin^2\alpha)$

$$=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-(\sin\beta^2+\cos^2\beta)$$

$$=1-1$$

$$=0.$$

$\therefore \quad \cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\alpha.$

例 2. 試證明 $\sin^2\theta\cos^2\psi-\cos^2\theta\sin^2\psi=\sin^2\theta-\sin^2\psi$.

解. $(\sin^2\theta\cos\psi-\cos^2\theta\sin^2\psi)-(\sin^2\theta-\sin^2\psi)$

$$=\sin^2\theta(\cos^2\psi-1)-\sin^2\psi(\cos^2\theta-1)$$

$$=-\sin^2\theta\sin^2\psi+\sin^2\psi\sin^2\theta$$

$$=0.$$

$\therefore\quad \sin^2\theta\cos^2\psi-\cos^2\theta\sin^2\psi=\sin^2\theta-\sin^2\psi.$

問 題 VI.

試證明次之恆等式.

(1) $\sec^2A-\operatorname{cosec}^2B=\tan^2A-\cot^2B$.

(2) $2\operatorname{cosec}^2A=1+\operatorname{cosec}^4A-\cot^4A$.

(3) $\sec^4\theta+\tan^4\theta=1+2\sec^2\theta\tan^2\theta$.

(4) $\sin^2\theta\tan\theta+\cos^2\theta\cot\theta=\tan\theta+\cot\theta-2\sin\theta\cos\theta$.

(5) $\sin^3\theta+\cos^3\theta+\sin^2\theta\cos\theta+\sin\theta\cos^2\theta=\sin\theta+\cos\theta$.

IV. 由已知之恆等式而誘導之方法.

例 1. 試證明 $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

解. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

$\therefore\quad (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=1$.

或 $\quad \sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=1$.

$\therefore\quad \sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

例 2. 試證明 $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

解. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

$\therefore \quad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha.$

$\sin^2\alpha = (1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha).$

兩邊各以 $\sin\alpha(1+\cos\alpha)$ 除之.

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

V. 認原題之恆等式爲十分眞確而考究其條件之方法.

例 1. 試證明 $(\sin A+\sec A)^2+(\cos A+\operatorname{cosec}A)^2$

$$=(1+\sec A\operatorname{cosec}A)^2.$$

解. 將所與之等式變形,

$$\sin^2A+2\sin A\sec A+\sec^2A+\cos^2A+2\cos A\operatorname{cosec}A+\operatorname{cosec}^2A$$
$$=1+2\sec A\operatorname{cosec}A+\sec^2A\operatorname{cosec}^2A.$$

或 $$1+2\sin A\sec A+2\cos A\operatorname{cosec}A+\sec^2A+\operatorname{cosec}^2A$$
$$=1+2\sec A\operatorname{cosec}A+\sec^2A\operatorname{cosec}^2A.$$

由兩邊減 1,

$$2\sin A\sec A+2\cos A\operatorname{cosec}A+\sec^2A+\operatorname{cosec}^2A$$
$$=2\sec A\operatorname{cosec}A+\sec^2A\operatorname{cosec}^2A.$$

或 $$\frac{2\sin A}{\cos A}+\frac{2\cos A}{\sin A}+\frac{1}{\cos^2A}+\frac{1}{\sin^2A}$$
$$=\frac{2}{\cos A\sin A}+\frac{1}{\cos^2A\sin^2A}.$$

或
$$\frac{2\sin A}{\cos A}+\frac{2\cos A}{\sin A}+\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\cos^2 A\sin^2 A}$$
$$=\frac{2}{\cos A\sin A}+\frac{1}{\cos^2 A\sin^2 A}.$$

由是因原題之等式成立，而證明次之等式亦成立矣.

$$\frac{2\sin^2 A+2\cos^2 A}{\cos A\sin A}+\frac{1}{\cos^2 A\sin^2 A}=\frac{2}{\cos^2 A\sin A}+\frac{1}{\cos^2 A\sin^2 A}$$

即
$$\frac{2}{\cos A\sin A}+\frac{1}{\cos^2 A\sin^2 A}=\frac{2}{\cos A\sin A}+\frac{1}{\cos^2 A\sin^2 A}$$

是即明知恆等式能成立，故所與之等式亦恆等的能成立.

例 2. 試證明 $\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}+\frac{1+\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}=2\operatorname{cosec}x.$

解. 欲證明所與之等式爲恆等式，只須證明次之等式能成立可矣.

$$(1+\sin x-\cos x)^2+(1+\sin x+\cos x)^2$$
$$=2\operatorname{cosec}x(1+\sin x+\cos x)(1+\sin x-\cos x).$$

即
$$1+\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x-2\cos x-2\sin x\cos x$$
$$+1+\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x+2\cos x+2\sin x\cos x$$
$$=2\operatorname{cosec}x(1+2\sin x+\sin^2 x-\cos^2 x).$$

即
$$4+4\sin x=2\operatorname{cosec}x(1+2\sin x+\sin^2 x-\cos^2 x).$$

即
$$2\sin x(1+\sin x)=1+2\sin x+\sin^2 x-(1-\sin^2 x).$$

即
$$2\sin x(1+\sin x)=2\sin x+2\sin^2 x.$$

即
$$2\sin x(1+\sin x)=2\sin x(1+\sin x).$$

然此等式明明爲恆等的能成立，故所與之等式亦恆等的而能成立.

問題 VII.

試證明次之恆等式.

(1) $\sin A+\tan A=\sin A\tan A(\cot A+\operatorname{cosec} A)$.

(2) $\sin^2 A\cos^2 B(1+\cot^2 A)(1+\tan^2 B)=1$.

(3) $\cos^8\theta-\sin^8\theta=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(1-2\sin^2\theta\cos^2\theta)$.

(4) $(1+\sin A-\cos A)^2+(1+\cos A-\sin A)^2$
$$=4(1-\sin A\cos A).$$

(5) $\cos A(\tan A+2)(2\tan A+1)=2\sec A+5\sin A$.

(6) $(1+\tan A+\tan^2 A)(1-\cot A+\cot^2 A)$
$$=\tan^2 A+\cot^2 A+1.$$

(7) $(1+\cos A-\sin^2 A)^2(1-\cos A)^2$
$$+(1+\sin A-\cos^2 A)(1-\sin A)^2=\sin^2 A\cos^2 A.$$

(8) $\sec^2\theta-\cos^2\theta)(\operatorname{cosec}^2\theta-\sin^2\theta)=2+\sin^2\theta\cos^2\theta$.

(9) $\tan^2\theta+\cot^2\theta=\sec^2\theta\operatorname{cosec}^2\theta-2$.

(10) $2(\sin^6 A+\cos^6 A)-3(\sin^4 A+\cos^4 A)+1=0$.

(11) $(\tan\alpha+\operatorname{cosec}\beta)^2-(\cot\beta-\sec\alpha)^2$
$$=2\tan\alpha\cot\beta(\operatorname{cosec}\alpha+\sec\beta).$$

(12) $\dfrac{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\tan\theta$.

(13) $\dfrac{2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta}{1-\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}=\cot\theta$.

(14) $\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}-\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}=4\cot A\operatorname{cosec} A$.

(15) $(1+\tan A)(1+\cot A)=\dfrac{(\sin A-\cos A)^2}{\sin A\cos A}+4$.

(16) $\dfrac{\tan^3\alpha}{1+\tan^2\alpha}+\dfrac{\cot^3\alpha}{1+\cot^2\alpha}=\dfrac{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}.$

(17) $\dfrac{(\operatorname{cosec}\theta+\sec\theta)^2}{\sec^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta}=1+2\sin\theta\cos\theta.$

(18) $\dfrac{1-\sin^2\theta}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}=\cot^2\theta\sin^2\theta(\operatorname{cosec}^2\theta-\cot^2\theta).$

(19) $\dfrac{\sin^4A-\cos^4A}{1-2\sin A\cos A}\cdot\dfrac{1-\cot A}{\sin A+\cos A}=\operatorname{cosec}A.$

(20) $\dfrac{1-\sec A+\tan A}{1+\sec A-\tan A}=\dfrac{\sec A+\tan A-1}{\sec A+\tan A+1}.$

(21) $\dfrac{2(\cos A-\sin A)}{1+\sin A+\cos A}=\dfrac{\cos A}{1+\sin A}-\dfrac{\sin A}{1+\cos A}.$

(22) $(\sec A-\tan A)\left(\dfrac{1}{1-\sec A+\tan A}+\dfrac{1}{1+\sec A-\tan A}\right)$

$$=(\sec A+\tan A)\left(\frac{1}{\sec A-\tan A-1}-\frac{1}{\sec A+\tan A+1}\right).$$

(23) $\dfrac{\sec^2\theta}{\tan\theta+2}+\dfrac{2\sec^2\theta}{2\tan\theta+1}-\tan\theta=\dfrac{5\cos\theta+2\sec\theta\tan\theta}{2\sec\theta-5\sin\theta}.$

18. 消去法.

由所與一組方程式，其中含某文字，求不含此文字之新方程式，卽係由所與之一組方程式消去此文字，是謂消去法.

例 1. 由次之二式消去 θ.

$$\begin{cases}\sin\theta=a,\\ \cos\theta=b.\end{cases}$$

解. 因 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，故將所與二式之兩邊各自乘且相加，

$$a^2+b^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1.$$

即 $$a^2+b^2=1.$$ **答.**

解 2. 由次之二式消去 θ.

$$\begin{cases} a\sec\theta-c\tan\theta=d, \\ b\sec\theta+d\tan\theta=c. \end{cases}$$ 但 $ad+bc\neq0$

解. 因欲消去 $\tan\theta$，故將第一式之兩邊以 d 乘之，第二式之兩邊以 c 乘之，且兩邊相加.

$$(ad+bc)\sec\theta=d^2+c^2.$$

$$\therefore \quad \sec\theta=\frac{d^2+c^2}{ad+bc}.$$

因欲消去 $\sec\theta$，故將第一式之兩邊以 b 乘之，第二式之兩邊以 a 乘之，且兩邊相減.

$$(ad+bc)\tan\theta=ac-bd.$$

$$\therefore \quad \tan\theta=\frac{ac-bd}{ad+bc}.$$

因 $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$. 故

$$\left(\frac{d^2+c^2}{ad+bc}\right)^2=1+\left(\frac{ac-bd}{ad+bc}\right)^2.$$

或 $$(d^2+c^2)^2=(ad+bc)^2+(ac-bd)^2$$

$$=(a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

$$\therefore \quad c^2+d^2=a^2+b^2.$$

注意. 本節所載，以極簡單之消去法為限.

問 題 VIII.

由次之諸式消去 θ (1−19).

(1) $\begin{cases} \sin\theta=a, \\ \tan\theta=b. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=b\sin\theta. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=a\sec\theta, \\ y=a\tan\theta. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} l\cos\theta=m, \\ l'\sec\theta=m'. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \sin\alpha=m\sin\theta, \\ \tan\alpha=n\tan\theta. \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \cos\theta+\sin\theta=a, \\ \cos\theta-\sin\theta=b. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} \tan\theta+\sin\theta=a, \\ \tan\theta-\sin\theta=b. \end{cases}$

(8) $\begin{cases} 1+\tan\theta=a\sec\theta, \\ 1-\tan\theta=b\sec\theta. \end{cases}$

(9) $\begin{cases} \tan\theta+\cot\theta=p, \\ \tan\theta-\cot\theta=q. \end{cases}$

(10) $\begin{cases} a\sin\theta+b\cos\theta=c, \\ b\sin\theta+a\cos\theta=d. \end{cases}$

(11) $\begin{cases} \cos\theta\sin\theta=m, \\ \cot\theta=n. \end{cases}$

(12) $\begin{cases} \sin\theta\cos^2\theta=a, \\ \cos\theta\sin^2\theta=b. \end{cases}$

(13) $\begin{cases} a\sin\theta+b\cos\theta=c, \\ b\sin\theta+a\cos\theta=d. \end{cases}$

(14) $\begin{cases} \tan\theta+\cos\theta=a, \\ \tan\theta-\cos\theta=b. \end{cases}$

(15) $\begin{cases} a\sec^2\theta-b\cos\theta=2a, \\ b\cos^2\theta-a\sec\theta=2b. \end{cases}$

(16) $\begin{cases} \dfrac{x}{a}=\dfrac{\sec^2\theta-\cos^2\theta}{\sec^2\theta+\cos^2\theta}, \\ \dfrac{2b}{y}=\sec^2\theta+\cos^2\theta. \end{cases}$

(17) $\begin{cases} x=\sec\theta-\cos\theta, \\ y=\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta. \end{cases}$

(18) $\begin{cases} x\sin\theta-y\cos\theta=\sqrt{x^2+y^2}, \\ \dfrac{\cos^2\theta}{a^2}+\dfrac{\sin^2\theta}{b^2}=\dfrac{1}{x^2+y^2}. \end{cases}$

(19) $(x-a\sin\theta)^2+(y-a\cos\theta)^2=(x\cos\theta-y\sin\theta)^2=a^2$.

(20) $\dfrac{\sin A}{\sin B}=p$, $\dfrac{\cos A}{\cos B}=q$ 時, 試證明 $\sin B=\sqrt{\dfrac{1-q^2}{p^2-q^2}}$.

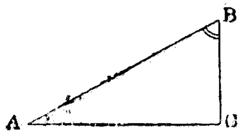
(21) 由次之二式, 消去 x 及 y.

$$\begin{cases}\sin x=a\cos y+b\sin y,\\ \cos x=a\sin y-b\cos y.\end{cases}$$

第　四　章

特別角之三角函數及三角函數之變化

19. 餘角之三角函數.



於C爲直角之直角三角形ABC內,

$$\sin A=\frac{BC}{AB},\quad \cos B=\frac{BC}{AB}.$$

$$\therefore\quad \sin A=\cos B.$$

然 $B=90°-A$.

$$\therefore\quad \sin A=\cos(90°-A).$$

同樣

$$\tan A=\frac{BC}{AC}=\cot B=\cot(90°-A).$$

$$\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{1}{\sin(90°-A)}=\operatorname{cosec}(90°-A).$$

即

$$\mathbf{\sin A=\cos(90°-A).}$$

$$\mathbf{\cos A=\sin(90°-A).}$$

$$\mathbf{\tan A=\cot(90°-A).}$$

$$\mathbf{\cot A=\tan(90°-A).}$$

$$\mathbf{\sec A=\operatorname{cosec}(90°-A).}$$

$$\mathbf{\operatorname{cosec} A=\sec(90°-A).}$$

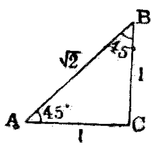
注意. 由以上所得之結果，可知某角 A 之 sine, tangent, secant, 各等於其餘角 $(90°-A)$ 之餘函數 co-sine, co-tangent, co-secant. 卽某角之三角函數，等於其餘角之餘函數. 此所以對於正弦，正切，正割而有餘弦，餘切，餘割之名稱也.

例如 $\sin 45° = \cos(90°-45°) = \cos 45°$.

$\tan 30° = \cot(90°-30°) = \cot 60°$.

$\sec 52°\ 12'\ 30'' = \operatorname{cosec} 37°\ 47'\ 30''$.

20. 45° 之三角函數.



於直角三角形 ABC, $\angle C = 90°$, $AC = BC = 1$, 則

$\angle A = B = 45°$, $AB = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

$\therefore \quad \sin 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45°$.

$\tan 45° = \dfrac{1}{1} = 1 = \cot 45°$.

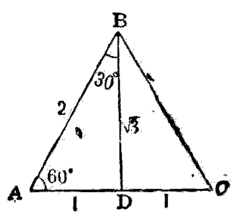
$\sec 45° = \dfrac{1}{\cos 45°} = \sqrt{2} = \operatorname{cosec} 45°$.

21. 30° 及 60° 之三角函數.

於正三角形 ABC, 由頂點 B 至底邊 AC 作垂線 BD, 且設各邊之長爲 2, 則

$\angle BAD = 60°$, $\angle ABD = 30°$,

$AD = DC = 1$,



$$BD=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}.$$

$$\therefore\qquad \sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ.$$

$$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}=\sin 30^\circ.$$

$$\tan 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}=\cot 30^\circ.$$

$$\cot 60^\circ=\frac{1}{\tan 60^\circ}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan 30^\circ.$$

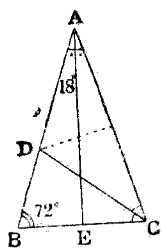
$$\sec 60^\circ=\frac{1}{\cos 60^\circ}=2=\operatorname{cosec} 30^\circ.$$

$$\operatorname{cosec} 60^\circ=\frac{1}{\sin 60^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\sec 30^\circ.$$

注意. $\sin 60 \neq 2\sin 30^\circ$，故一般二倍角之三角函數，不等於原角之三角函數之二倍.

*22. 18°, 36°, 54°, 72°, 之三角函數.

設 $\triangle ABC$ 爲二等邊三角形，其兩底角 B 及 C 皆爲頂角 A 之二倍（此三角形在平面幾何學用於正十角形之作圖題).



然 $\angle ABC=ACB=72^\circ$,

$\angle BAC=36^\circ$,

今由 A 至底邊 BC 引垂線 AE,

則 $\angle BAE=18^\circ$.

次將邊 AB 依

$$AB \cdot BD = \sqrt{\overline{AD}^2}$$

分於 D 點 [此在讀者已於平面幾何學學之，卽所謂黃金分割，外中比分割或中末比分割是也].

然

$$AD = DC = BC.$$

[此亦為讀者所熟知]

今設 AB=1, AD=x, 則由作圖

$$1(1-x) = x^2.$$

$$\therefore \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

然 $x>0$, 故

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

然 $\quad BE = \frac{BC}{2} = \frac{AD}{2} = \frac{x}{2}.$

$$\therefore \quad \cos 72^\circ = \frac{BE}{AB} = \frac{\frac{x}{2}}{1} = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin 18^\circ.$$

從而 $\quad \sin 72^\circ = \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \cos 18^\circ$

由是 $\quad \tan 72^\circ = \frac{\sin 72^\circ}{\cos 72^\circ} = \sqrt{5+2\sqrt{5}} = \cot 18^\circ$

$$\cot 72^\circ = \frac{1}{\tan 72^\circ} = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5} = \tan 18^\circ.$$

$$\sec 72^\circ = \frac{1}{\cos 72^\circ} = \sqrt{5}+1 = \operatorname{cosec} 18^\circ$$

$$\operatorname{cosec} 72^\circ = \frac{1}{\sin 72^\circ} = \frac{\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{5} = \sec 18^\circ.$$

更注意 $\triangle DAC$ 爲二等邊三角形,

$$\cos 36^\circ = \cos DAC = \frac{\frac{AC}{2}}{AD} = \frac{\frac{1}{2}}{x} = \frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \sin 54^\circ.$$

由是 $$\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \cos 54^\circ.$$

$$\tan 36^\circ = \sqrt{5-2\sqrt{5}} = \cot 54^\circ.$$

$$\cot 36^\circ = \frac{1}{\tan 36^\circ} = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} = \tan 54^\circ.$$

$$\sec 36^\circ = \frac{1}{\cos 36^\circ} = \sqrt{5}-1 = \operatorname{cosec} 54^\circ.$$

$$\operatorname{cosec} 36^\circ = \frac{1}{\sin 36^\circ} = \frac{\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{5} = \sec 54^\circ.$$

注意. 本節求 18°, 36°, 54°, 72° 之三角函數, 皆依幾何學的方法叙述, 若用倍角之三角函數, 亦易於求得, (見本叢書二角和差之三角函數篇第 41 節及第 43 節).

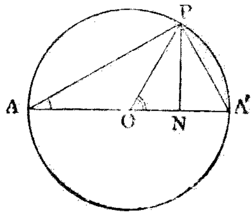
***23.** $A < 45^\circ$ 時,

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A.$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A.$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}.$$

證明. 設 O 爲中心之圓，其直徑爲 AA'，圓周上之一點爲 P，且 $PN \perp AA'$，則



$\angle POA' = 2PAO.$

故今設 $\angle PAO$ 爲 A，則

$\angle POA'$ 爲 2A，故

$$\sin 2A = \frac{PN}{OP}.$$

然 $$PN \cdot AA' = 2\triangle APA' = AP \cdot PA'.$$

$$\therefore \quad PN = \frac{AP \cdot PA'}{AA'}.$$

$$\therefore \quad \sin 2A = \frac{AP \cdot PA'}{OP \cdot AA'} = \frac{(AA'\cos A)(AA'\sin A)}{OP \cdot AA'}$$

$$= \frac{AA'}{OP}\sin A\cos A = 2\sin A\cos A.$$

又 $$\cos 2A = \frac{ON}{OP} = \frac{2AA' \cdot ON}{2AA' \cdot OP} = \frac{(AN+NA')(AN-NA')}{2AA' \cdot OP}$$

$$= \frac{\overline{AN}^2 - \overline{A'N}^2}{2AA' \cdot OP} = \frac{\overline{AP}^2 - \overline{A'P}^2}{AA'^2}$$

$$= \left(\frac{AP}{AA'}\right)^2 - \left(\frac{A'P}{AA'}\right)^2 = \cos^2 A - \sin^2 A.$$

從而 $$\tan 2A = \frac{\sin 2A}{\cos 2A} = \frac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A - \sin^2 A}$$

$$= \frac{\dfrac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A}}{\dfrac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{2-\tan A}{1-\tan^2 A}.$$

注意. 本節所證明之三個恆等式, 今後均極要用, 茲先述幾何學的證明, 俟後篇再依他方法亦易於證明. (見二角和差之三角函數篇第26 節.)

24. 15° 及 75° 之三角函數.

應用前節之結果, 以求 15° 及 75° 之三角函數之值, 亦甚易. 即

$$\begin{aligned}\cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A\\ &= (1-\sin^2 A) - \sin^2 A\\ &= 1 - 2\sin^2 A.\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \cos^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}.$$

又 $$\sin 2A = \cos^2 A - (1-\cos^2 A) = 2\cos^2 A - 1.$$

$$\therefore \qquad \cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}.$$

今設 $A = 15^\circ$, 則

$$\sin^2 15^\circ = \frac{1-\cos 30^\circ}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

$$\therefore \quad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \cos 75^\circ.$$

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \sin 75^\circ.$$

$$\tan 15^\circ=\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{8-4\sqrt{3}}{4}=2-\sqrt{3}=\cot 75^\circ.$$

$$\cot 15^\circ=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}=\tan 75^\circ.$$

$$\sec 15^\circ=\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}=\operatorname{cosec} 75^\circ.$$

$$\operatorname{cosec} 15^\circ=\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}=\sec 75^\circ.$$

問　　題　　IX.

求下列諸式之值 (1－20).

(1) $\sin^2 30^\circ+\sin^2 60^\circ$.

(2) $\sin 30^\circ+\cos^2 45^\circ$.

(3) $\tan 45^\circ+\cot 45^\circ$.

(4) $\cos 45^\circ \sin 45^\circ-\sin^2 30^\circ$.

(5) $3\sin 30^\circ-4\sin^3 30^\circ$.

(6) $\tan^2 60^\circ+2\tan^2 45^\circ$.

(7) $2\sin 30^\circ \cos 30^\circ \cot 60^\circ$.

(8) $\sin^2 45^\circ \cos 30^\circ-\cos 45^\circ \sin 30^\circ$.

(9) $\cot^2 30^\circ \operatorname{cosec}^2 45^\circ-\tan^2 60^\circ$.

(10) $\tan^2 45^\circ \sin 60^\circ \tan 30^\circ \tan^2 60^\circ$.

(11) $\cot 60^\circ \tan 30^\circ+\sec^2 45^\circ$.

(12) $\cos 60^\circ - \tan^2 45^\circ + \frac{3}{4}\tan^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin 30^\circ$.

(13) $\frac{\sec 30^\circ}{\tan 30^\circ} - \frac{\sec 45^\circ}{\cot 30^\circ}$.

(14) $\frac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ} - \tan 60^\circ$.

(15) $\frac{\tan 30^\circ \tan 45^\circ + \tan 45^\circ \tan 60^\circ + \tan 60^\circ \tan 30^\circ}{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ + \tan 60^\circ}$.

(16) $\frac{\sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ}{\sin 45^\circ \cos 60^\circ - \cos 45^\circ \sin 60^\circ}$.

(17) $\frac{\cos 30^\circ \cos 45^\circ + \sin 30^\circ \sin 45^\circ}{\cos 45^\circ \cos 60^\circ + \sin 45^\circ \sin 60^\circ}$

(18) $\frac{\cos 60^\circ + \cos 30^\circ}{\sec 60^\circ + \operatorname{cosec} 60^\circ}$.

(19) $\frac{\operatorname{cosec}^2 A \tan^2 A}{\cot(90^\circ - A)} \cdot \frac{\cot A}{\sec^2 A} - \sec^2(90^\circ - A)$.

(20) $(\sin 30^\circ + \cos 45^\circ)(\tan 60^\circ + \cot 30^\circ)$

$- 4\sec 45^\circ(\operatorname{cosec} 60^\circ - \sec 30^\circ)$.

(21) 求 $\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{\sin 60^\circ - \sin 45^\circ}$ 之值，至小數第二位.

(22) $\sec(90^\circ - A) - \cot A \cos(90^\circ - A)\tan(90^\circ - A)$ 試簡單之.

試證明次之等式.

(23) $\tan(45^\circ + \theta)\tan(45^\circ - \theta) = 1$, 但 $\theta < 45^\circ$.

(24) $\sin^2(45^\circ + \theta) + \sin^2(45^\circ - \theta) = 1$, 但 $\theta < 45^\circ$.

(25) $(1 + \sin 45^\circ + \sin 30^\circ)(1 - \cos 45^\circ + \cos 60^\circ) = \frac{7}{4}$.

(26) $\dfrac{\cot^2 A\sin^2(90°-A)}{\cot A+\cos A}=\tan(90°-A)-\cos A.$

(27) $\dfrac{\cos 45°-\cos 60°}{\sin 45°+\cos 60°}=(\operatorname{cosec} 45°-\cot 45°)^2.$

(28) $\sin\alpha(1+\cot\beta)+\sin\beta(1+\cot\alpha)=\sec\alpha+\sec\beta,$

但 $\alpha+\beta=90.$

25. 無限大及無限小.

某分數之分子一定，分母次第減小，則分數値次第增大，若分母無限減小，則其分數値無限增大. 又分母次第增大，則其分數値次第減小，若分母無限增大，則其分數値無限減小.

某數次第增大，比吾人可得而指定如何大之數尙大，則此數曰**無限大**或**無窮大**，以 ∞ 之記號表之.

又某數次第減小，比吾人可得而指定如何小之數尙小，則此數曰**無限小**或**無窮小**. 卽無限小爲 0.

然則

$$\frac{\text{有限數}}{\text{無限小}}=\infty,\qquad \frac{\text{有限數}}{\text{無限大}}=0.$$

例如 $\frac{1}{0}$ 或 $\frac{1}{\infty}$，此不過爲無意味之記號，今可視作分母次第減小至無限小 (0) 時，又分母次第增大至無限大 (∞) 時，略記爲

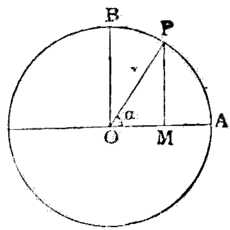
$$\frac{1}{0}=\infty,\qquad \frac{1}{\infty}=0.$$

又無限小 0 可由正數次第減少而至於 0，或由負數次第增大而至於 0，有區別之必要，前者以 $+0$ 表之，後者以 -0 表之.

又無限大 ∞ 可由正數次第增大至無限大, 以 $+\infty$ 表之, 亦可由負數次第減小至無限大, 以 $-\infty$ 之記號表之.

然則 $\dfrac{1}{+0}=+\infty$, $\dfrac{1}{-0}=-\infty$, $\dfrac{1}{+\infty}=+0$, $\dfrac{1}{-\infty}=-0$.

26. 0° 及 90° 之三角函數.



於單位圓 O, 主線為 OA, 銳角 $AOP=\alpha$, 則

$$\sin\alpha=PM,$$
$$\cos\alpha=OM.$$

今 $\alpha=0^\circ$ 時, 動徑 OP 重於主線 OA 之上, P 點與 A 點合, $PM=0$, $OM=OA=1$,

$$\therefore \qquad \sin0^\circ=0,$$
$$\cos0^\circ=1.$$

從而 $$\tan0^\circ=\frac{0}{1}=0,$$

$$\cot0^\circ=\frac{1}{0}=\infty,$$

$$\sec0^\circ=\frac{1}{1}=1,$$

$$\operatorname{cosec}0^\circ=\frac{1}{0}=\infty.$$

次設於 O 垂直於 OA 之半徑為 OB, 則 $\alpha=90^\circ$ 時, OP 與 BO 合, P 點重於 B 點之上, $PM=BO=1$, $OM=0$.

$$\therefore \qquad \sin 90° = 1,$$

$$\cos 90° = 0.$$

從而
$$\tan 90° = \frac{1}{0} = \infty,$$

$$\cot 90° = \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$\sec 90° = \frac{1}{0} = \infty,$$

$$\operatorname{cosec} 90° = \frac{1}{1} = 1.$$

注意．因 0° 及 90° 互爲餘角，故已知一角之三角函數值，卽可依第 19 節之公式而求其他．

27. 三角函數之變化．

表示以上數節所求得特別角之三角函數，列爲一表，插入於下，依表卽可知各函數變化之式如下．

	依角之增大從而	角由 0° 增大至 90° 從而
正弦函數	增　大	由 0 增大至 1
餘弦函數	減　小	由 1 減小至 0
正切函數	增　大	由 0 增大至 ∞
餘切函數	減　小	由 ∞ 減小至 0
正割函數	增　大	由 1 增大至 ∞
餘割函數	減　小	由 ∞ 減小至 1

由以上數節，雖可求特別角之三角函數值，然一般任意角之三角函數，卻不能簡單求得． 但依高等數學，任意角之三角函數值，吾人亦可求得至若何程度之精密．

例如設某角之弧度爲 α，則其正弦及餘弦可由次式求得． 但其證明屬於高等數學，茲故不能敘述．

$$\sin\alpha=\alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\frac{\alpha^7}{7!}+\cdots\cdots$$

$$\cos\alpha=1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\frac{\alpha^6}{6!}+\cdots\cdots$$

由此所得之各函數值，採用小數第五位至第七位以作表，是謂三角函數之眞數表．

本篇凡關於表者，一切不載．

問　題　X.

求下列諸式之數值 (1－9)．

(1)　$\sin^2 90°+\sin^2 60°+\sin^2 45°+\sin^2 30°+\sin^2 0°$.

(2)　$\tan 90°\tan 60°\tan 45°$.

(3)　$\cot 90°\cot 45°+\cos 60°\cos 0°$.

(4)　$\tan 60°\tan 30°-\tan 45°\tan 0°$.

(5)　$\tan^2 60°+\tan^2 45^2+\tan^2 30°$.

(6)　$\sin 90°\cos 45°\operatorname{cosec} 60°$.

(7)　$\cos 0°\sin 45°\cos 60°$

(8) $(\sin 60^\circ - \sin 45^\circ)(\cos 30^\circ + \cos 45^\circ)$.

(9) $(\sin 30^\circ + \sin 90^\circ)(\cos 0^\circ + \cos 60^\circ) - 4\sin 0^\circ(\cos 45^\circ + 1)$.

(10) 設 A 爲銳角，試證明 $\sec A > \operatorname{cosec} A$ 時 $A > 45^\circ$.

(11) 由次式求 x.

$$x \sin 30^\circ \cos^2 45^\circ = \frac{\cot^2 30^\circ \sec 60^\circ \tan 45^\circ}{\operatorname{cosec}^2 45^\circ \operatorname{cosec} 30^\circ}.$$

(12) 有底邊 12 寸，頂角 60° 之三角形，試求其外接圓之半徑.

28. 三角方程式.

含未知角之三角函數之方程式，曰**三角方程式**，求其適於此方程式之角，曰**解之**，求得之角謂之解.

本篇專取以特別角爲根之方程式.

茲依例題說明其解法.

例 1. 解 $3\tan\theta + \cot\theta = 5\operatorname{cosec}\theta$.

解. 將原方程式變形，

$$\frac{3\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{5}{\sin\theta}.$$

移各項於左邊而通分之，

$$\frac{3\sin^2\theta + \cos^2\theta - 5\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 0.$$

$$\frac{3(1-\cos^2\theta) + \cos^2\theta - 5\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 0.$$

$$\frac{2\cos^2\theta+5\cos\theta-3}{\sin\theta\cos\theta}=0.$$

$$\frac{(2\cos\theta-1)(\cos\theta+3)}{\sin\theta\cos\theta}=0.$$

$\therefore$ $2\cos\theta-1=0$, 或 $\cos\theta+3=0$,

由 $2\cos\theta-1=0$, 得 $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\therefore$ $\theta=60°$.

由 $\cos\theta+3=0$, 得 $\cos\theta=-3$, 是不合理. 答 $60°$.

注意. 於本例可知 $\cos\theta=0$, 或 $\sin\theta=0$ 之 θ, 皆不適合於原方程式, 又如 $\cos\theta$ 及 $\sin\theta$ 之分母不爲零時, 於兩邊各乘以分母之最小公倍數, 本亦可去兩邊之分母. 非然者卽不得濫去分母, 恰與代數學中分數方程式之解法同樣.

例 2. 解 $\sqrt{2}\cos\theta=\cot\theta$.

解. 將原方程式變形.

$$\sqrt{2}\cos\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

$$\cos\theta\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sin\theta}\right)=0.$$

$\therefore$ $\cos\theta=0$, 或 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\therefore$ $\theta=90°$, $\theta=45°$ 答

例 3. 解 $\sec^2\theta=3\tan^2\theta-1$.

解. $1+\tan^2\theta=3\tan^2\theta-1$.

$\tan^2\theta=1$. $\therefore$ $\tan\theta=1$.

$\therefore$ $\theta=45°$ 答.

問題 XI.

解次之三角方程式.

(1) $\sin x=\cos 2x$.

(2) $\tan(30°-x)=\tan 4x$.

(3) $\sin x=\cot 4x$.

(4) $\cos 3x=\sin 7x$.

(5) $\tan x=\cot 3x$.

(6) $\cot x=\tan 2x$.

(7) $\sec 5x=\operatorname{cosec} x$.

(8) $\sin 5x=\cos 7x$.

(9) $2\sin^2 x=\sin x$.

(10) $2\sin\theta=\operatorname{cosec}\theta$.

(11) $\tan\theta=3\cot\theta$.

(12) $\sec\theta=4\cos\theta$.

(13) $6\cos^2\theta=1+\cos\theta$.

(14) $4\sin\theta=12\sin^2\theta-1$.

(15) $4\cos\theta=3\sec\theta$.

(16) $2\sin^2\theta=3\cos\theta$.

(17) $\sin^2\theta-2\cos\theta+\frac{1}{4}=0$.

(18) $\sin x+2\cos^2 x=2$.

(19) $\tan\theta=2\sin\theta$.

(20) $\sec^2\theta=2\tan^2\theta$.

(21) $\sec^2\theta+\tan^2\theta=7$.

(22) $2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=1$.

(23) $\cot\theta=2\cos\theta$.

(24) $\tan\theta+\cot\theta=2$.

(25) $\sin\theta+\cos\theta=1$.

(26) $5-4\sin x-4\cos^2 x=0$.

(27) $4\sin^2\theta-2(\sqrt{3}+1)\sin\theta+\sqrt{3}=0$.

(28) $4\cos^2 x-2(\sqrt{3}+1)\cos x+\sqrt{3}=0$.

(29) $\tan^2\theta-(\sqrt{3}+1)\tan\theta+\sqrt{3}=0$.

(30) $\sin^2\theta+\sqrt{3}\cos\theta-\frac{7}{4}=0$.

(31) $4+\sqrt{2}=4\cos^2 x+2(\sqrt{2}+1)\sin x$.

(32) $\operatorname{cosec}^2\theta+\cot^2\theta=3$.

(33) $3\sec^4\theta+8=10\sec^2\theta$.

(34) $2\cos\theta+2\sqrt{2}=3\sec\theta$.

(35) $\cot\theta+\tan\theta=2\sec\theta$.

(36) $6\tan\theta-5\sqrt{3}\sec\theta+12\cot\theta=0$.

(37) $\begin{cases}\sin(x-y)=\dfrac{1}{2},\\ x+y=90^\circ.\end{cases}$

(38) $\begin{cases}\sin(x-y)=\dfrac{1}{2},\\ \cos(x+y)=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

(39) $\begin{cases}\sin(x-y)=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ \cos(x+y)=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

(40) $\begin{cases}\tan(x+y)=\sqrt{3},\\ \tan(x-y)=1.\end{cases}$

(41) $\begin{cases}\tan(x-y)=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\\ \tan(x+y)=\sqrt{3}.\end{cases}$

(42) $\begin{cases}\sin(x+y)=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos(x-y)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$

(43) $\begin{cases}\cos(4x-3y)=1,\\ \tan(7x+6y)=\infty.\end{cases}$

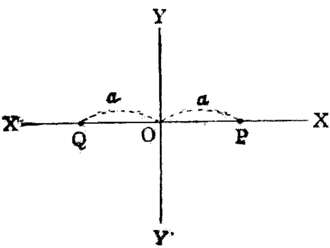
(44) $\begin{cases}\tan x\tan y=1,\\ \tan^2 x+\tan^2 y=\dfrac{10}{3}.\end{cases}$

第五章

一般角之三角函數

29. 直線之正負.

於水平直線 XX' 上, O 爲定點 (是謂原點), P 及 Q 爲其他之二點, 且 OP 及 OQ 之長皆爲 a 時, 卽謂表 P 或 Q 之位置.



如云「於 XX' 上, 自原點 O 起, 在 a 之距離之點」, 則究爲 P 或爲 Q 不明. 故表 P 當云,

「自原點 O 起, 在右邊有 a 之距離之點」.

又表 Q 當云,

「自原點 O 起, 在左邊有 a 之距離之點」.

如此欲決定一直線上某點之位置, 必須自原點起明示其距離, 同時及其方向.

今用代數學中正負之符號, 表明方向如下.

自原點右方所測之長爲正,

自原點左方所測之長爲負.

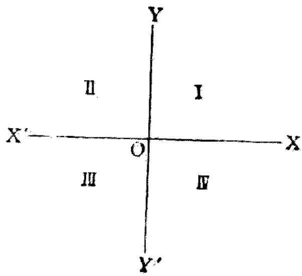
又於鉛垂直線 YY' 上定之如次.

自原點上方所測之長爲正,

自原點下方所測之長爲負.

30. 象限.

於平面上，水平直線 XX′ 及與此正交之直線 YY′，分此平面爲四部分 XOY，YOX′，X′OY′ 及 Y′OX. 此所分之各部分，謂之象限.



象限 XOY 爲第 I 象限，

象限 YOX′ 爲第 II 象限，

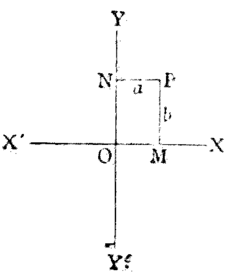
象限 X′OY′ 爲第 III 象限，

象限 Y′OX 爲第 IV 象限.

又某角之動徑例如在第 II 象限時，則此角謂之**第 II 象限之角**.

31. 直線座標.

平面上之點，可由與二定直線 XX′ 及 YY′ 之距離而決定其位置.



例如某點 P 之位置，爲

P 與 XX′ 之距離 MP (是名 P 之**縱座標**).

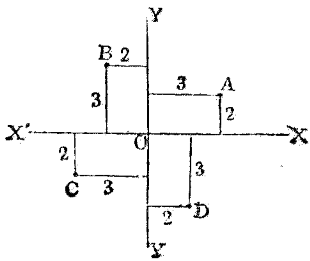
及

P 與 YY′ 之距離 NP 或 OM (是名 P 之**橫座標**)，依此則完全決定矣.

今 $NP=a$, $MP=b$ 時, 表 P 之位置, 常用如次之記號,

$$P(a, b).$$

如此 (a, b) 曰點 P 之座標, XX' 及 YY' 曰座標之軸, XX' 曰 X 軸 (或橫軸), YY' 曰 Y 軸 (或縱軸).



例如左圖之四點 A, B, C, D, 表之如次,

$A(3, 2)$

$B(-2, 3)$

$C(-3, -2)$

$D(2, -3)$

問　　題　　XII.

下列諸點, 在第幾象限.

(1)　$(3, 5)$.　　　　(2)　$(-4, 10)$.

(3)　$(-8, -6)$.　　　　(4)　$(7, -1)$.

(5)　$(3, 0)$.　　　　(6)　$(0, -5)$.

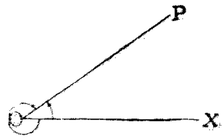
(7)　$(12, -10)$.　　　　(8)　$(-3, 5)$.

試記出下列諸點之座標.

(9)　在 X 軸右方 3, Y 軸上方 4 之點.

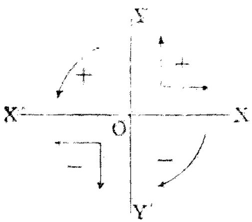
(10)　在 X 軸左方 7, Y 軸下方 6 之點.

32. 角之正負.



如第3節所述, 動徑 OP, 可視爲由首線 OX 之位置, 依反時針方向, 迴轉 n 周角後, 復至於 OP 之位置.

然 OP 又可視爲由首線 OX 之位置, 依時計之針同方向(時針方向), 迴轉 n 周角後復至於 OP 之位置.



依動徑之迴轉方向, 既有此二樣之角, 故欲區別之, 可如下附以正負之符號.

依反時針方向而迴轉所生之角爲正,

依時針方向而迴轉所生之角爲負.

今圖示直線及角之正負如左.

*33. 極座標.

平面上任意之點 P, 又可依與極 O 之距離 ρ 及迴轉角 θ 二者決定其位置, 而用如下之記號表之.

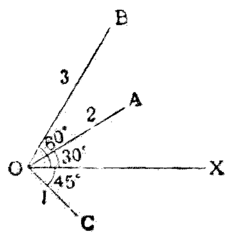
$$P(\rho,\ \theta),$$

例如右圖,

A(2,30°)

B(3,60°)

C(1,−45°)



如此之座標曰極座標.

34. 一般角.

設角 XOP 所表之最小正角(幾何學的角)爲 α, 則角 XOP 所表之角, 可記之如下.

若迴轉方向依反時針方向時, 爲

$$m\cdot360°+\alpha,$$

若依時針方向時, 則爲

$$-m\cdot360°+\alpha,$$

但 m 爲 0 或整數.

今將此等二式合爲一式, 設 n 爲 0, 且爲正或負之整數, 則角 XOP 所表之一般角, 可以

$$n\cdot360°+\alpha$$

記之.

若 $0°<\alpha<90°$ 則 α 爲第 I 象限之角,

若 $90°<\alpha<180°$ 則 α 爲第 II 象限之角,

若 $180°<\alpha<270°$ 則 α 爲第 III 象限之角,

若 $270°<\alpha<360°$ 則 α 爲第 IV 象限之角.

注意. 以後除特別記明外, n, m 皆表 0 或正或負之整數.

例 1. 800° 爲第幾象限之角.

解. $800°=360°\times2+80°$.

故 800° 爲第 I 象限之角.

例 2. $-950°$ 爲第幾象限之角.

解. $-950°=-360°\times3+130°$.

故 $-950°$ 爲第 II 象限之角.

問題 XIII.

下列諸點,在第幾象限.

(1) $(12, 50°)$. (2) $(20, 150°)$.

(3) $(4, -10°)$. (4) $(13, 180°)$.

(5) $(3, -235°)$. (6) $(7, 0°)$.

(7) $(-2, 150°)$. (8) $(-5, 45°)$.

(9) $(-10, -90°)$. (10) $(-2, 180°)$.

下列諸角之動徑,在第幾象限.

(11) $36°$. (12) $125°$.

(13) $250°$. (14) $300°$.

(15) $-100°$. (16) $-242°$.

(17) $530°$. (18) $567°$.

(19) $-185°$. (20) $-440°$.

(21) $835°$. (22) $-870°$.

(23) $1283°$. (24) $-1000°$.

25) $2795°$.

下列諸角之首線與動徑, 其位置之相互關係如何.

(26) $450°$. (27) $630°$.

(28) $900°$. (29) $1080°$.

(30) $-1800°$.

首線指正東, 則下列諸角之動徑, 其方位角如何.

(31) $135°$. (32) $540°$.

(33) $-1080°$. (34) $270°$.

(35) $-1215°$.

試於下列各組, 求其二動徑之幾何學的角之大.

(36) $270°$, $300°$. (37) $60°$, $-220°$.

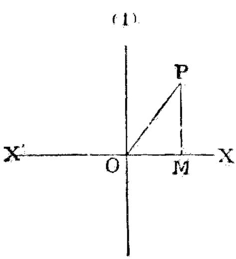
(38) $563°$, $775°$.

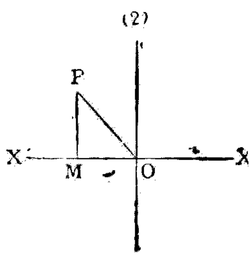
(39) 時計之分針迴轉於 2 時 15 分間, 其角爲幾度.

(40) 北與南西間之角, 向東迴轉與向西迴轉各幾度.

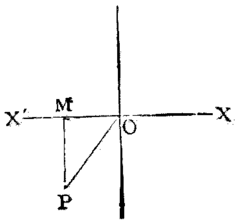
35. 任意角之三角函數.

於首線 OX 之任意角 XOP, 自其動徑 OP 上一點 P, 至 OX

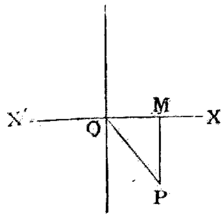




(3)



(4)



或其延長 OX′ 作垂線 PM, 設其任意角爲 θ, 則不關於動徑 OP 迴轉方向之正負, 而角 θ 之三角函數, 有如次之定義.

$$\sin\theta=\frac{MP}{OP}, \qquad \cos\theta=\frac{OM}{OP},$$

$$\tan\theta=\frac{MP}{OM}, \qquad \cot\theta=\frac{OM}{MP},$$

$$\sec\theta=\frac{OP}{OM}, \qquad \operatorname{cosec}\theta=\frac{OP}{MP}.$$

由上之定義, 因共有 OP 卽動徑之角, 亦共有 MP, OM, 故知其三角函數相等. 然角 θ 之動徑與一般角 $n\cdot360°+\theta$ 之動徑, 常在同一之位置, 故

$$\sin(n\cdot360°+\theta)=\sin\theta,$$

$$\cos(n\cdot360°+\theta)=\cos\theta,$$

$$\tan(n\cdot360°+\theta)=\tan\theta,$$

$$\cot(n\cdot360°+\theta)=\cot\theta,$$

$$\sec(n\cdot360°+\theta)=\sec\theta,$$

$$\mathrm{cesec}(n\cdot360°+\theta)=\operatorname{cosec}\theta.$$

注意 1. 表 θ 之三角函數，常用 $f(\theta)$ 之記號，故由上之公式

$$f(n\cdot 360^\circ+\theta)=f(\theta),$$

卽可知於 θ 加減 360° 之 0 或整數倍，其函數値不致變動．此函數曰**週期的函數**，360° 爲其**週期**．卽三角函數者，乃以 360° 爲週期之一週期的函數也．

注意 2. 由上之公式，例如

$$\sin 1470^\circ=\sin(360^\circ\times 4+30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2},$$

$$\sin 1110^\circ=\sin(360^\circ\times 3+30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2},$$

$$\sin\ 750^\circ=\sin(360^\circ\times 2+30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2},$$

$$\sin\ 390^\circ=\sin(360^\circ+30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}.$$

可知以 $\frac{1}{2}$ 爲 sin 之角，多至無限．卽就一般而論，某一定角之三角函數祇有一値，以某一定値爲三角函數之角，多至無限．

36. 三角函數之符號.

於前節之定義，動徑 OP，不關於其方向如何而常爲正．然於第 I 象限爲 (1).

$$MP>0,\quad OM>0.$$

$$\therefore\quad \sin\theta>0,\quad \cos\theta>0,\quad \tan\theta>0.$$

於第 II 象限爲 (2),

$MP>0, \quad OM<0.$

$\therefore \quad \sin>0, \quad \cos\theta<0, \quad \tan<0.$

於第 III 象限爲 (3),

$MP<0, \quad OM<0.$

$\therefore \quad \sin\theta<0, \quad \cos\theta<0, \quad \tan>0.$

於第 IV 象限爲 (4).

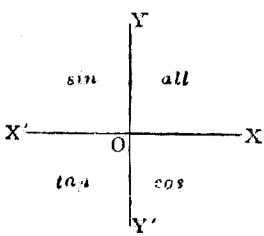
$MP<0, \quad OM>0.$

$\therefore \quad \sin\theta<0, \quad \cos\theta>0, \quad \tan\theta<0.$

表示之如次.

象限 函數	I	II	III	IV	象限 函數
sin	+	+	−	−	cosec
cos	+	−	−	+	sec
tan	+	−	+	−	cot

又別以象限表示其爲正如次,



例. 依圖.

$$\sin 135^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \cos 135^\circ=-\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \tan 135^\circ=-1.$$

$$\sin 240^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \cos 300^\circ=\frac{1}{2},\qquad \tan(-45^\circ)=-1.$$

$$\sin(-30^\circ)=-\frac{1}{2},\qquad \cos(-225^\circ)=-\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \tan(-135^\circ)=1.$$

問 題 XIV.

下列諸角，試求其三角主函數之符號.

(1) 40°.　(2) 100°.

(3) 250°.　(4) 320°.

(5) 835°.　(6) -150°.

(7) -400°.　(8) -75°.

(9) -250°.　(10) -1000°.

下列諸角，試求其三角主函數之值.

(11) 120°.　(12) 135°.

(13) 300°.　(14) 330°.

(15) -30°.　(16) 210°.

(17) 240°.　(18) 315°.

(19) 225°.　(20) -210°.

試求適於下列方程式之諸角中，小於 $180°$ 者之正角.

(21)　$\sin\theta=\frac{1}{2}$.　　(22)　$\cos\theta=\frac{1}{2}$.

(23)　$\tan\theta=1$.　　(24)　$\tan\theta=-\sqrt{3}$.

(25)　$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

試求適於下列方程式之諸角中，小於 $360°$ 者之正角.

(26)　$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$.　　(27)　$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(28)　$\tan\theta=\sqrt{3}$.　　(29)　$\sin\theta=-\frac{1}{2}$.

(30)　$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由次之條件以定角 A.

(31)　$\sin A=\frac{1}{2}$,　　$\cos A=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(32)　$\cos A=-\frac{1}{2}$,　　$\tan A=-\sqrt{3}$.

37. 任意角之三角函數之關係.

由第 35 節所述之一般定義，

$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{OP}{MP}=\frac{1}{\sin\theta},$$

$$\sec\theta=\frac{OP}{OM}=\frac{1}{\cos\theta},$$

$$\cot\theta=\frac{OM}{MP}=\frac{1}{\tan\theta},$$

$$\tan\theta=\frac{MP}{OM}=\frac{MP}{OP}\div\frac{OM}{OP}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\frac{\overline{MP}^2+\overline{OM}^2}{OP^2}=1,$$

$$1+\tan^2\theta=1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta,$$

$$1+\cot^2\theta=1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}=\operatorname{cosec}^2\theta.$$

卽可知銳角之三角函數間所存在之關係式，亦適合於任意角．由是可知自此等公式誘導所得其他之恆等式，不拘角之大小及符號如何而皆爲眞確．

關於平方根之注意． 因銳角之三角函數爲正，故以前凡平方根皆取正根，然角之大者，其三角函數亦可取負值，故今後取平方根之正負兩根．例如

$$\sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta},$$

$$\sec\theta=\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}.$$

如知 θ 之位於何象限，則其正負卽可確定．例如 $75°$ 爲第 I 象限之角，故

$$\cos75°=\sqrt{1-\sin^2 75°},$$

又 $225°$ 爲第 III 象限之角，故

$$\sin225°=-\sqrt{1-\cos^2 225°}.$$

就其他之函數，亦須如此同樣注意．

問題 XV.

(1) $\sin\theta=\frac{3}{5}$ 時，求 $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\mathrm{cosec}\,\theta$ 之值.

(2) $\sin\theta=\frac{3}{5}$ 時，求 $\tan A-\sec A$ 之值.

(3) $\tan 238°=\frac{3}{5}$ 時，求 $\sin 238°$ 之值.

(4) $\tan A=\frac{8}{15}$ 時，求 $\sin A$, $\cos A$ 之值.

(5) $\tan\theta=\frac{4}{3}$ 時，求 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 之值.

(6) $\tan\theta=-\frac{4}{3}$ 時，求 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 之值.

(7) $\tan x=\sqrt{3}$ 時，求 $\sec x$ 之值.

(8) $\sec A=2$ 時，求 $\sin A$, $\tan A$ 之值.

(9) $\tan A=2-\sqrt{3}$ 時，求 $\cos A$ 之值.

(10) $\tan\phi=\dfrac{n\sin\theta}{m+n\cos\theta}$ 時，求 $\sin\phi$ 之值.

(11) $p\cot A=\sqrt{q^2-p^2}$ 時，求 $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$.

(12) $\sec A=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ 時，求 A 之三角函數至小數第二位.

(13) 在第二象限之角之三角函數，試以其角之正切表之.

(14) A 爲三角形之一角，其正切爲 $\frac{4}{3}$，試求 $\sin A$, $\cos A$.

(15) 設 θ 爲第 II 象限之角，試以 $\tan\theta$ 表 $A\cos\theta+B\sin\theta$. 但 A, B 皆爲定數.

試求適於下列方程式之諸角中，小於 180° 者之正角.

(16) $\cos^2\theta-\sin^2\theta=2-5\cos\theta$.

(17) $4\operatorname{cosec}\theta+2\sin\theta=9$.

(18) $2\sin\theta\tan\theta+1=\tan\theta+2\sin\theta$.

(19) $6\tan\theta-5\sqrt{3}\sec\theta+12\cot\theta=0$.

試求適於下列方程式之諸角中，小於 360° 者之正角.

(20) $2\sin^2x+3\cos x-3=0$.　　(21) $\sin x=\cos x$.

(22) $\tan x=3\cot x$.　　(23) $2\cos^2x+3\sin x=3$.

(24) $2\sin^2\theta-5\cos\theta-4=0$.　　(25) $\sec^3\theta-2\tan^2\theta=2$.

(26) $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.　　*(27) $\operatorname{cosec}\theta-4\sin\theta=2$.

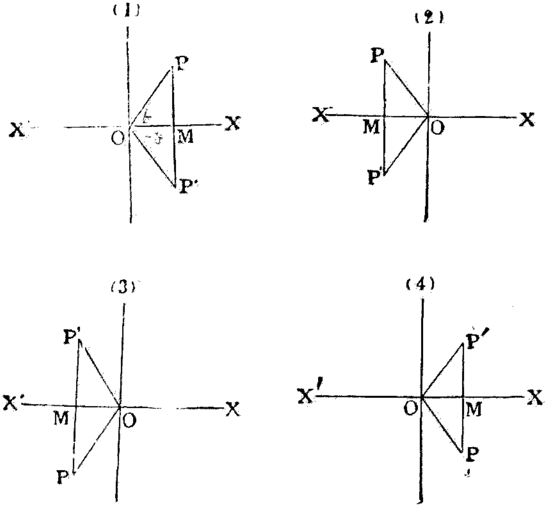
38. 二角 $\theta, -\theta$ 之三角函數之關係.

設關於首線 OX 一點 P 之對稱點爲 P′, PP′ 與 OX 或其延長 OX′ 之交點爲 M, 則 $PP'\perp XX'$, $PM=MP'$.

$\angle XOP=\theta$ 時，$\angle XOP'=-\theta$,

因　　$MP'=-MP$,

故　　$\sin(-\theta)=\dfrac{MP'}{OP}=\dfrac{-MP}{OP}=-\sin\theta$,



$$\cos(-\theta)=\frac{OM}{OP}=\cos\theta,$$

$$\tan(-\theta)=\frac{MP'}{OM}=\frac{-MP}{OM}=-\tan\theta,$$

由是得次之公式.

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta,$$

$$\cos(-\theta)=\cos\theta,$$

$$\tan(-\theta)=-\tan\theta,$$

$$\cot(-\theta)=-\cot\theta,$$

$$\sec(-\theta)=\sec\theta,$$

$$\operatorname{cosec}(-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta.$$

注意. $f(-\theta)=-f(\theta)$ 之函數, 曰**奇函數**.

$f(-\theta)=f(\theta)$ 之函數, 曰**偶函數**.

正弦函數, 正切函數, 餘切函數, 餘割函數為奇函數, 而餘弦函數, 正割函數為偶函數. 又 x^2 為 x 之偶函數, x^3+x 為奇函數, 而 x^3+x^2 為奇函數亦為偶函數.

題　　問　　XVI.

試不依圖而應用本節之公式以求次之值.

(1) $\sin(-30°)$.　　(2) $\cos(-60°)$.

(3) $\tan(-45°)$.　　(4) $\sec(-30°)$.

(5) $\cot(-60°)$.

(6) $\tan 238°=\frac{8}{5}$ 時, 求 $\cos 122°$ 之值.

試求適於下列方程式之諸角中, 在 $-90°$ 與 $90°$ 間之角.

(7) $\operatorname{cosec}^2\theta=4$.　　(8) $4\sin\theta=3\operatorname{cosec}\theta$.

(9) $2\sin^2\theta=3\cos\theta$.

試求適於下列方程式之諸角中, 在 $-180°$ 與 $180°$ 間之角.

(10) $\operatorname{cosec}^2\theta=4\cot^2\theta$.　　(11) $2\cos^2\theta+4\sin^2\theta=3$.

2) $\cos^2\theta=\frac{1}{2}$.

39. 餘角之擴張定義.

二角之和為 $90°$ 時, 其各角曰他角之餘角.

於初等幾何學，互爲餘角之二角皆爲銳角，而於三角法，則和爲 $90°$ 之二角無論爲如何之角，此二角謂之互爲他之餘角.

例如 $120°$ 之餘角爲 $-30°$ $(=90°-120°)$，而 $-200°$ 之餘角爲 $290°$ $[=90°-(-200°)]$. 一般 θ 之餘角爲 $90°-\theta$.

40. 互爲餘角之二角 θ, $90°-\theta$, 其三角函數之關係.

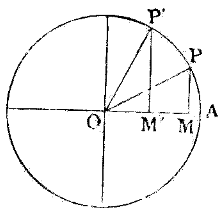
於第 19 節，乃 θ 爲銳角時，求其餘角之三角函數之公式. 於本節，θ 乃表正或負之一般角.

於 O 爲中心之單位圓，使 $\angle AOP=\theta$, $\angle AOP'=90°-\theta$, 由 P 及 P' 至 AA' 所作垂線之足，順次爲 M 及 M'. 然

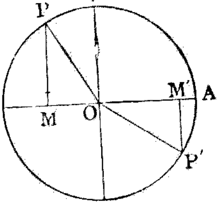
$\triangle OPM \equiv OP'M'$，得

$$MP=OM', \quad OM=M'P'.$$

(1) θ 在第 I 象限之例.

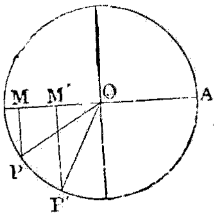


$$\sin(90°-\theta)=\sin AOP'=M'P'=OM$$
$$=\cos AOP=\cos\theta.$$
$$\cos(90°-\theta)=\cos AOP'=OM'=MP$$
$$=\sin AOP=\sin\theta.$$



(2) θ 在第 II 象限之例.

$$\sin(90°-\theta)=\sin AOP'=-P'M'$$
$$=-MO=\cos AOP=\cos\theta.$$
$$\cos(90°-\theta)=\cos AOP'=OM'=MP$$
$$=\sin AOP=\sin\theta.$$



(3) θ 在第 III 象限之例.

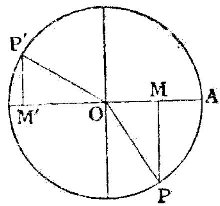
$$\sin(90^\circ-\theta)=\sin AOP'=-P'M'$$

$$=-MO=\cos AOP=\cos\theta.$$

$$\cos(90^\circ-\theta)=\cos AOP'=-M'O$$

$$=-PM=\sin AOP=\sin\theta.$$

(4) θ 在第 IV 象限之例.



$$\sin(90^\circ-\theta)=\sin AOP'=M'P'$$

$$=OM=\cos AOP=\cos\theta.$$

$$\cos(90^\circ-\theta)=\cos AOP'=-M'O$$

$$=-PM=\sin AOP=\sin\theta.$$

卽 θ 無論在何象限，常有

$$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta.$$

$$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta,$$

由是 $$\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta.$$

故得次之公式.

$$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta,$$

$$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta,$$

$$\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta,$$

$$\cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta,$$

$$\sec(90^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\theta,$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)=\sec\theta.$$

41. 二角 θ, $90^\circ+\theta$ 之三角函數之關係.

$$\sin(90^\circ+\theta)=\sin[90^\circ-(-\theta)]$$

$$=\cos(-\theta) \qquad \text{第 40 節}$$

$$=\cos\theta. \qquad \text{第 38 節}$$

$$\cos(90^\circ+\theta)=\cos[90^\circ-(-\theta)]$$

$$=\sin(-\theta) \qquad \text{第 40 節}$$

$$=-\sin\theta. \qquad \text{第 38 節}$$

$$\tan(90^\circ+\theta)=\frac{\sin(90^\circ+\theta)}{\cos(90^\circ+\theta)}=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\cot\theta.$$

依此得次之公式.

$$\sin(90^\circ+\theta)=\cos\theta,$$

$$\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta,$$

$$\tan(90^\circ+\theta)=-\cot\theta,$$

$$\cot(90^\circ+\theta)=-\tan\theta,$$

$$\sec(90^\circ+\theta)=-\operatorname{cosec}\theta,$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ+\theta)=\sec\theta.$$

例. $\sin 120^\circ=\sin(90^\circ+30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$\cos 135^\circ=\cos(90^\circ+45^\circ)=-\sin 45^\circ=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$

$\tan 150^\circ=\tan(90^\circ+60^\circ)=-\cot 60^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$

42. 補角之擴張定義.

二角之和爲 180° 時，其各角曰他角之補角.

於初等幾何學，爲補角之二角，皆小於 1 平角，而於三角法，則和爲 180° 之二角，無論爲如何之角，皆稱互爲他之補角.

例如 300° 之補角爲 $-120^\circ(=180^\circ-300^\circ)$，$-150^\circ$ 之補角爲 $330^\circ[=180^\circ-(-150^\circ)]$. 一般 θ 之補角爲 $180^\circ-\theta$.

43. 互爲補角之二角 θ, $180^\circ-\theta$, 其三角函數之關係.

$$\begin{aligned}
\sin(180^\circ-\theta)&=\sin[90^\circ-(\theta-90^\circ)]\\
&=\cos(\theta-90^\circ) && \text{第 40 節}\\
&=\cos[-(90^\circ-\theta)]\\
&=\cos(90^\circ-\theta) && \text{第 38 節}\\
&=\sin\theta. && \text{第 40 節}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(180^\circ-\theta)&=\cos[90^\circ-(\theta-90^\circ)]\\
&=\sin(\theta-90^\circ) && \text{第 40 節}\\
&=\sin[-(90^\circ-\theta)]\\
&=-\sin(90^\circ-\theta)] && \text{第 38 節}\\
&=-\cos\theta. && \text{第 40 節}
\end{aligned}$$

$$\tan(180^\circ-\theta)=\frac{\sin(180^\circ-\theta)}{\cos(180^\circ-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta.$$

依此得次之公式.

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta,$$

$$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta,$$

$$\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta,$$

$$\cot(180^\circ-\theta)=-\cot\theta,$$

$$\sec(180^\circ-\theta)=-\sec\theta,$$

$$\operatorname{cosec}(180^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\theta.$$

44. 二角 θ, $180^\circ+\theta$ 之三角函數之關係.

$\sin(180^\circ+\theta)=\sin[180^\circ-(-\theta)]$

$=\sin(-\theta)$ 第 43 節

$=-\sin\theta.$ 第 38 節

$\cos(180^\circ+\theta)=\cos[180^\circ-(-\theta)]$

$=-\cos(-\theta)$ 第 43 節

$=-\cos\theta.$ 第 38 節

$$\tan(180^\circ+\theta)=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\tan\theta.$$

依此得次之公式.

$$\sin(180^\circ+\theta)=-\sin\theta,$$

$$\cos(180^\circ+\theta)=-\cos\theta,$$

$$\tan(180^\circ+\theta)=\tan\theta,$$

$$\cot(180°+\theta)=\cot\theta,$$
$$\sec(180°+\theta)=-\sec\theta,$$
$$\operatorname{cosec}(180°+\theta)=-\operatorname{cosec}\theta.$$

例 1. $\sin 150°=\sin(180°-30°)=\sin 30°=\frac{1}{2}.$

$\cos 165°=\cos(180°-15°)=-\cos 15°.$

$\tan 170°=\tan(180°-10°)=-\tan 10°.$

$\cot 210°=\cot(180°+30°)=\cot 30°=\sqrt{3}.$

$\sec 225°=\sec(180°+45°)=-\sec 45°=-\sqrt{2}.$

$\operatorname{cosec} 240°=\operatorname{cosec}(180°+60°)=-\operatorname{cosec} 60°=-\frac{2}{\sqrt{3}}.$

例 2. $\sin(270°-\theta)=\sin[180°+(90°-\theta)]=-\sin(90°-\theta)$
$=-\cos\theta.$

$\cos(270°-\theta)=\cos[180°+(90°-\theta)]=-\cos(90°-\theta)$
$=-\sin\theta.$

$\tan(270°-\theta)=\tan[180°+(90°-\theta)]=-\tan(90°-\theta)$
$=\cot\theta.$

例 3. $\sin(270°+\theta)=\sin[180°+(90°+\theta)]=-\sin(90°+\theta)$
$=-\cos\theta.$

$\cos(270°+\theta)=\cos[180°+(90°+\theta)]=-\cos(90°+\theta)$
$=\sin\theta.$

$\tan(270°+\theta)=\tan[180°+(90°+\theta)]=\tan(90°+\theta)$
$=-\cot\theta.$

45. 二角 θ, $n\cdot 360^\circ \pm \theta$ 之三角函數之關係.

由第 35 節,

$$\sin(n\cdot 360^\circ + \theta) = \sin\theta,$$

$$\cos(n\cdot 360^\circ + \theta) = \cos\theta.$$

今以 $-\theta$ 代 θ,

$$\sin(n\cdot 360^\circ - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin\theta, \qquad \text{第 38 節}$$

$$\cos(n\cdot 360^\circ - \theta) = \cos(-\theta) = \cos\theta. \qquad \text{第 38 節}$$

依此得次之公式.

$$\sin(n\cdot 360^\circ \pm \theta) = \pm\sin\theta,$$

$$\cos(n\cdot 360^\circ \pm \theta) = \cos\theta,$$

$$\tan(n\cdot 360^\circ \pm \theta) = \pm\tan\theta.$$

例. $\sin 800^\circ = \sin(360^\circ \times 2 + 80^\circ) = \sin 80^\circ.$

$\cos 900^\circ = \cos(360^\circ \times 2 + 180^\circ) = \cos 180^\circ.$

$\tan 1000^\circ = \tan(360^\circ \times 3 - 80^\circ) = -\tan 80^\circ.$

46. *二角 θ, $n\cdot 180^\circ \pm \theta$ 之三角函數之關係.

I. $n = 2m$, 即 n 爲偶數之例.

$$\begin{aligned}\sin(n\cdot 180^\circ \pm \theta) &= \sin(2m\cdot 180^\circ \pm \theta)\\ &= \sin(m\cdot 360^\circ \pm \theta)\\ &= \pm\sin\theta. \qquad (1) \quad \text{第 45 節}\end{aligned}$$

$$\cos(n\cdot180^\circ\pm\theta)=\cos(2m\cdot180^\circ\pm\theta)$$
$$=\cos(m\cdot360^\circ\pm\theta)$$
$$=\cos\theta. \qquad (2)$$ 第 45 節

II. $n=2m+1$，卽 n 爲奇數之例.

$$\sin(n\cdot180^\circ\pm\theta)=\sin[(2m+1)180^\circ\pm\theta]$$
$$=\sin[m\cdot360^\circ+180^\circ\pm\theta]$$
$$=\sin(180^\circ\pm\theta)$$ 第 45 節
$$=\mp\sin\theta. \qquad (3)$$ 第 43, 44 節

$$\cos(n\cdot180^\circ\pm\theta)=\cos[(2m+1)180^\circ\pm\theta]$$
$$=\cos[m\cdot360^\circ+180^\circ\pm\theta]$$
$$=\cos(180^\circ\pm\theta)$$ 第 45 節
$$=-\cos\theta. \qquad (4)$$ 第 43, 44 節

將 (1) 式改寫爲 $\sin[\theta\pm2m\cdot180^\circ]=\sin\theta=(-1)^{2m}\sin\theta$.

將 (2) 式改寫爲 $\cos[\theta\pm2m\cdot180^\circ]=\cos\theta=(-1)^{2m}\cos\theta$.

將 (3) 式改寫爲 $\sin[\theta\pm(2m+1)180^\circ]=-\sin\theta=(-1)^{2m+1}\sin\theta$.

將 (4) 式改寫爲 $\cos[\theta\pm(2m+1)180^\circ]=-\cos\theta=(-1)^{2m+1}\cos\theta$.

將此等每二式合爲一式，得次之公式.

$$\sin(\theta\pm n\cdot180^\circ)=(-1)^n\sin\theta,$$
$$\cos(\theta\pm n\cdot180^\circ)=(-1)^n\cos\theta.$$

從而 $$\tan(\theta\pm n\cdot180^\circ)=\tan\theta.$$

47. 角之化法

應用以上數節之公式. 則任何角之三角函數, 皆可化爲小於 45° 之角之三角函數.

卽

I. 大於 360° 之角之三角函數, 依第 45 節, 可化爲小於 360° 之角之三角函數.

II. 大於 180° 之角之三角函數, 依第 44 節, 可化爲小於 180° 之角之三角函數.

III. 大於 90° 之角之三角函數, 依第 41 節, 或第 43 節, 可化爲小於 90° 之角之三角函數.

IV. 大於 45° 之角之三角函數, 依第 40 節, 可化爲小於 45° 之角之三角函數.

例 1. $\sin 1000° = \sin(360° \times 2 + 280°)$

$= \sin 280°$ 第 45 節

$= \sin(180° + 100°)$

$= -\sin 100°$ 第 44 節

$= -\sin(90° + 10°)$

$= -\cos 10°.$ 第 41 節

例 2. $\cos 3575° = \cos(360° \times 10 - 25°)$

$= \cos 25°.$ 第 45 節

例 3. $\tan(-1385^\circ)=-\tan 1385^\circ$ 第 38 節

$=-\tan(360^\circ\times 4-55^\circ)$

$=\tan 55^\circ$ 第 45 節

$=\tan(90^\circ-35^\circ)$

$=\cot 35^\circ$. 第 30 節

問 題 XVII.

下列各式，試簡單之.

(1) $\sin(\alpha-90^\circ)$. (2) $\cos(\alpha-90^\circ)$.

(3) $\sin(\theta-180^\circ)$. (4) $\cos(\theta-180^\circ)$.

(5) $\tan(\theta-180^\circ)$.

(6) $\sin(180^\circ+A)-\cos(90+A)$.

(7) $\sin(90^\circ-x)+\sin(180^\circ-x)+\sin(360^\circ-x)$.

(8) $\cos(90^\circ-\alpha)\sin(180^\circ-\alpha)-\sin(90^\circ-\alpha)\cos(180^\circ-\alpha)$.

(9) $\sin(90^\circ+\alpha)-\tan(180^\circ+\alpha)\sin(-\alpha)-\operatorname{cosec}(90^\circ-\alpha)$.

(10) $\cos(180^\circ+\theta)\sec(90^\circ-\theta)+\sin(90^\circ+\theta)\operatorname{cosec}(180^\circ-\theta)$.

(11) $\sin^2(540^\circ+A)+\sin^2(270^\circ-A)$.

(12) $\cos^2\theta+\cos^2(90^\circ+\theta)+\cos^2(180^\circ+\theta)+\cos^2(270^\circ+\theta)$.

(13) $\sin^2 A+\sin^2(A+90^\circ)+\sin^2(A+180^\circ)+\sin^2(A+270^\circ)$.

(14) $\dfrac{\sin(180^\circ-A)\cos(90^\circ+A)}{\sin(180^\circ+A)}+\dfrac{\cos(90^\circ-A)\sin(90^\circ+A)}{\cos(180^\circ+A)}$.

(15) $\dfrac{\sin(180^\circ-A)}{\tan(180^\circ+A)}\cdot\dfrac{\cot(90^\circ-A)}{\tan(90^\circ+A)}\cdot\dfrac{\cos(360^\circ-A)}{\sin(-A)}$

(16) $\dfrac{(a^2-b^2)\cot(180^\circ-\theta)}{\cot(180^\circ-\theta)}-\dfrac{(a^2+b^2)\tan(90^\circ-\theta)}{\cot(180^\circ-\theta)}$.

(17) $[\sin(\theta-90^\circ)+\cos[\theta-180^\circ)](\cot(\theta-90^\circ)-\tan(\theta-180^\circ)]$

$\times[\sec(\theta-90^\circ)-\operatorname{cosec}(\theta-180^\circ)]$.

下列諸角，試求其三角主函數之值.

(18) 390°.　　(19) 690°.

(20) 750°.　　(21) 945°.

(22) 1080°.　　(23) −45°.

(24) −315°.　　(25) −495°.

(26) −510°.　　(27) −585°.

(28) −675°.　　(29) −780°.

下列各角，試化爲小於 45° 之正角之三角函數.

(30) sin500°.　　(31) sin872°.

(32) cos872°.　　(33) tan872°.

(34) sin1254°.　　(35) cosec1732°.

(36) sin7321°.　　(37) tan7389°.

(38) sin(−342°).　　(39) sin(−693°)

(40) cos(−693°).　　(41) tan(−693°).

(42) tan(−730°).　　(43) tan(−2860°).

(44) cos(−6835°).　　(45) cos(−8146°).

試求下列之各值.

(46) $\sin 480^\circ$.

(47) $\cos 510^\circ$.

(48) $\operatorname{cosec} 1485^\circ$.

(49) $\tan 3465^\circ$.

(50) $\cos 3540^\circ$.

(51) $\cos 4080^\circ$.

(52) $\tan 7320^\circ$.

(53) $\sec 7335^\circ$.

(54) $\tan 8400^\circ$.

(55) $\sec(-1500^\circ)$.

(56) $\cot(-7260^\circ)$.

(57) $2\cos 120^\circ \sin 225^\circ - 3\sin 120^\circ \tan 135^\circ$.

(58) $\dfrac{\sin 150^\circ \operatorname{cosec}(-45^\circ)}{\cos 225^\circ \tan 135^\circ}$.

(59) 設 $A+B+C=180^\circ$, 試求次式之值.

$$\cos(B+C)-\cos\frac{B+C}{2}-\cos(180+A)+\sin\frac{A}{2}.$$

(60) 試求適合於下列方程式 360° 以下之正角.

$$\sin(180^\circ+x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

下列各式, 試簡單之.

(61) $\tan(180^\circ+A)\sin(90^\circ+A)+\cos(180^\circ-A)\cot(180^\circ-A)$.

(62) $\dfrac{\sin(-A)}{\sin(180^\circ+A)}+\dfrac{\tan(90^\circ+A)}{\cot A}+\dfrac{\cos A\cos 0^\circ}{\sin(90^\circ+A)}$.

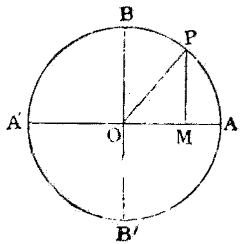
(63) $\dfrac{\sin(180^\circ+\theta)\tan^2(180^\circ-\theta)}{\cos(180^\circ+A)}+\dfrac{\sin(180^\circ-A)\cos(90^\circ+A)}{\sin(180^\circ+A)}$.

(64) $\dfrac{(a+b)\tan(90^\circ-A)}{\cot(180^\circ-A)}+\dfrac{(a-b)\tan(90^\circ+A)}{\cot(180^\circ+A)}$.

第六章

三角函數之變化

48. 於單位圓 O, 設 $\angle AOP=\theta$, θ 爲由 0° 經 $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 以至 360° 而變化者.



θ 由 0° 至 90° 而變化時, 與此相應 θ 之三角函數之變化, 已詳於第 27 節. θ 之三角函數, 於 θ 由 0° 至 360° 而變化之間, 除 0°, 90°, 180°, 270°, 360° 之外, 常爲連續的變化, 故欲知其變化之狀態, 於其中間一見與 θ 之某三四特別角相應之三角函數值, 即可知其變化之狀態矣.

49. 正弦函數之變化.

$$\sin\theta=MP.$$

I. 於第一象限之變化.

$$\sin 0^\circ=0,$$

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2},$$

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin 90° = 1.$$

$\therefore$ θ 由 0° 增大以至 90° 時，$\sin\theta$ 爲正，由 0 增大而至於 1.

II. 於第二象限之變化.

$$\sin 90° = 1.$$

$$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin 150° = \sin(480° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}.$$

θ 漸近於 180°，從而 MP 次第減小，至 $\theta = 180°$ 時，MP$=0$，故

$$\sin 180° = 0.$$

$\therefore$ θ 由 90° 增大而至 180° 時，$\sin\theta$ 爲正，由 1 減小而至於 0.

III. 於第三象限之變化.

$$\sin 180° = 0,$$

$$\sin 210° = \sin(180° + 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2},$$

$$\sin 225° = \sin(180° + 45°) = -\sin 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin 240° = \sin(180° + 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

θ 漸近於 $270°$ 從而 MP 次第漸近於 OB′ 卽 -1, 至 $\theta=270°$ 時, $MP=OB'=-1$, 故

$$\sin 270°=-1.$$

∴ θ 由 $180°$ 增大而至 $270°$ 時, $\sin\theta$ 爲負, 由 0 減小而至於 -1.

IV. 於第四象限之變化.

$$\sin 270°=-1,$$

$$\sin 300°=\sin(360°-60°)=-\sin 60°=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin 315°=\sin(360°-45°)=-\sin 45°=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin 330°=\sin(360°-30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2}.$$

θ 漸近於 $360°$, 從而 MP 次第減小, 至 $\theta=360°$ 時, OP 與 OA 相重, $MP=O$, 故

$$\sin 360°=\sin 0°=0.$$

∴ θ 由 $270°$ 增大而至 $360°$ 時, $\sin\theta$ 爲負, 由 -1 增大而至於 0.

50. 餘弦函數之變化.

$$\cos\theta=OM.$$

I. 於第一象限之變化.

$$\cos 0°=1,$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\cos 90^\circ = 0.$$

∴ θ 由 0° 增大而至 90° 時, $\cos\theta$ 爲正, 由 1 減小而至於 0.

II. 於第二象限之變化.

$$\cos 90^\circ = 0,$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2},$$

$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

θ 漸近於 180°, 從而 OM 次第漸近於 OA′ 卽 -1, 至 $\theta = 180^\circ$ 時, $OM = OA' = -1$, 故

$$\cos 180^\circ = -1.$$

∴ θ 由 90° 增大而至 180° 時, $\cos\theta$ 爲負, 由 0 減小而至於 -1.

III. 於第三象限之變化.

$$\cos 180^\circ = -1,$$

$$\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 225^\circ=\cos(180^\circ+45^\circ)=-\cos 45^\circ=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos 240^\circ=\cos(180^\circ+60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}.$$

θ 漸近於 270° 從而 OM 次第減小，至 $\theta=270^\circ$ 時，OM=0，故

$$\cos 270^\circ=0.$$

∴ θ 由 180° 增大而至 270° 時，$\cos\theta$ 爲負，由 -1 增大而至於 0.

IV. 於第四象限之變化.

$$\cos 270^\circ=0,$$

$$\cos 300^\circ=\cos(360^\circ-60^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2},$$

$$\cos 315^\circ=\cos(360^\circ-45^\circ)=\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos 330^\circ=\cos(360^\circ-30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

θ 漸近於 360°，從而 OM 次第漸近於 OA 卽 1，至 $\theta=360^\circ$ 時，OP 與 OA 相重，OM=OA=1，故

$$\cos 360^\circ=\cos 0^\circ=1.$$

∴ θ 由 270° 增大而至 360° 時，$\cos\theta$ 爲正，由 0 增大而至於 1.

51. 正切函數之變化.

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

I. 於第一象限之變化.

$$\tan 0^\circ = 0,$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\tan 45^\circ = 1,$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3},$$

$$\tan 90^\circ = +\infty.$$

$\therefore$ θ 由 0° 增大而至 90° 時, $\tan\theta$ 爲正, 由 0 增大而至於 $+\infty$.

II. 於第二象限之變化.

於第二象限 $\tan\theta<0$. 今設 ϵ 爲極小之角, 則

$$\sin(90^\circ+\epsilon)>0, \quad \cos(90^\circ+\epsilon)<0.$$

$$\therefore \quad \tan(90^\circ+\epsilon)=\frac{\sin(90^\circ+\epsilon)}{\cos(90^\circ+\epsilon)}>0.$$

而 $\sin(90^\circ+\epsilon)$ 極近於 1, $\cos(90^\circ+\epsilon)$ 爲負極近於 0, 從而 $\tan(90^\circ+\epsilon)$ 爲負, 其絕對值爲極大. 依此今設 ϵ 爲無限近於 0, 則 $\tan(90^\circ+\epsilon)$ 小於任何負數, 卽無限近於$-\infty$. 故於 $\epsilon=0$ 之極限爲

$$\tan 90^\circ = -\infty.$$

卽 $\tan 90^\circ$ 爲 $+\infty$, 同時爲 $-\infty$.

$$\tan 120^\circ = \tan(180^\circ-60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3},$$

$$\tan 135^\circ = \tan(180^\circ-45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1,$$

$$\tan 150^\circ = \tan(180^\circ-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

θ 漸近於 $180°$，從而 $\sin\theta$ 漸近於 0，$\cos\theta$ 漸近於 -1，依此 $\theta=180°$ 時，$\tan 180°=\dfrac{0}{-1}$，即

$$\tan 180°=0.$$

$\therefore$ θ 由 $90°$ 增大而至 $180°$ 時，$\tan\theta$ 爲負，由 $-\infty$ 增大而至於 0.

III. 第三象限之變化.

$$\tan 180°=0,$$

$$\tan 210°=\tan(180°+30°)=\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\tan 225°=\tan(180°+45°)=\tan 45°=1,$$

$$\tan 240°=\tan(180°+60°)=\tan 60°=\sqrt{3}.$$

θ 漸近於 $270°$，從而 $\sin\theta$ 漸近於 -1，$\cos\theta$ 漸近於 -0，故

$$\tan 270°=+\infty.$$

$\therefore$ θ 由 $180°$ 增大而至 $270°$ 時，$\tan\theta$ 爲正，由 0 增大而至於 $+\infty$.

IV. 於第四象限之變化.

於第四象限，$\tan\theta<0$，故與本節 II 之情形同.

$$\tan 270°=-\infty,$$

$$\tan 300°=\tan(360°-60°)=-\tan 60°=-\sqrt{3},$$

$$\tan 315°=\tan(360°-45°)=-\tan 45°=-1,$$

$$\tan 330°=\tan(360°-30°)=-\tan 30°=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

θ 漸近於 $360°$, 從而 $\sin\theta$ 漸近於 -0, $\cos\theta$ 漸近於 1, 依此

$$\tan 360° = \tan 0° = 0.$$

∴ θ 由 $270°$ 增大而至 $360°$ 時, $\tan\theta$ 爲負, 由 $-\infty$ 增大而至於 0.

52. 餘切函數之變化.

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}.$$

I. 於第一象限之變化.

$$\cot 0° = +\infty,$$

$$\cot 30° = \sqrt{3},$$

$$\cot 45° = 1,$$

$$\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cot 90° = 0.$$

∴ θ 由 $0°$ 增大而至 $90°$ 時, $\cot\theta$ 爲正, 由 $+\infty$ 減小而至於 0.

II. 於第二象限之變化.

$$\cot 90° = 0,$$

$$\cot 120° = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cot 135° = \frac{1}{-1} = -1,$$

$$\cot 150° = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\sqrt{3},$$

$$\cot 180° = -\frac{1}{0} = -\infty.$$

∴ θ 由 $90°$ 增大而至 $180°$ 時，$\cot\theta$ 爲負，由 0 減小而至於 $-\infty$.

III. 於第三象限之變化.

$$\cot 180° = +\frac{1}{0} = +\infty,$$

$$\cot 210° = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3},$$

$$\cot 225° = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\cot 240° = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cot 270° = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

∴ θ 由 $180°$ 增大而至 $270°$ 時，$\cot\theta$ 爲正，由 $+\infty$ 減小而至於 0.

IV. 於第四象限之變化.

$$\cot 270° = 0.$$

$$\cot 300° = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cot 315^\circ = \frac{1}{-1} = -1,$$

$$\cot 330^\circ = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\sqrt{3},$$

$$\cot 360^\circ = \cot 0^\circ = -\frac{1}{0} = -\infty.$$

∴　θ 由 270° 增大而至 360° 時，$\cot\theta$ 爲負，由 0 減小而至於 $-\infty$.

53. 正割函數之變化.

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}.$$

I. 於第一象限之變化.

$$\sec 0^\circ = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\sec 30^\circ = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\sec 45^\circ = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$\sec 60^\circ = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2,$$

$$\sec 90^\circ = \frac{1}{0} = +\infty.$$

∴ θ 由 0° 增大而至 90° 時, $\sec\theta$ 爲正, 由 1 增大而至於 $+\infty$.

II. 於第二象限之變化.

$$\sec 90^\circ = -\frac{1}{0} = -\infty,$$

$$\sec 120^\circ = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2,$$

$$\sec 135^\circ = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2},$$

$$\sec 150^\circ = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\sec 180^\circ = \frac{1}{-1} = -1.$$

∴ θ 由 90° 增大而至 180° 時, $\sec\theta$ 爲負, 由 $-\infty$ 增大而至於 -1.

III. 於第三象限之變化.

$$\sec 180^\circ = \frac{1}{-1} = -1,$$

$$\sec 210^\circ = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\sec 225^\circ = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2},$$

$$\sec 240^\circ = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2,$$

$$\sec 270^\circ = -\frac{1}{0} = -\infty.$$

∴ θ 由 180° 增大而至 270° 時, $\sec\theta$ 爲負, 由 -1 減小而至於 $-\infty$.

IV. 於第四象限之變化.

$$\sec 270^\circ = +\frac{1}{0} = +\infty,$$

$$\sec 300^\circ = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2,$$

$$\sec 315^\circ = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2},$$

$$\sec 330^\circ = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\sec 360^\circ = \frac{1}{1} = 1.$$

∴ θ 由 270° 增大而至 360° 時, $\sec\theta$ 爲正, 由 $+\infty$ 減小而至於 1.

54. 餘割函數之變化.

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}.$$

I. 於第一象限之變化.

$$\operatorname{cosec}0^\circ=+\infty,$$

$$\operatorname{cosec}30^\circ=2,$$

$$\operatorname{cosec}45^\circ=\sqrt{2},$$

$$\operatorname{cosec}60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{cosec}90^\circ=1.$$

∴ θ 由 0° 增大而至 90° 時, $\operatorname{cosec}\theta$ 爲正, 由 $+\infty$ 減小而至於 1.

II. 在第二象限之變化.

$$\operatorname{cosec}90^\circ=1,$$

$$\operatorname{cosec}120^\circ=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{cosec}135^\circ=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2},$$

$$\operatorname{cosec}150^\circ=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2,$$

$$\operatorname{cosec}180^\circ=+\frac{1}{0}=+\infty.$$

∴ θ 由 90° 增大而至 180° 時, $\operatorname{cosec}\theta$ 爲正, 由 1 增大而至於 $+\infty$.

III. 於第三象限之變化.

$$\operatorname{cosec}180^\circ=-\frac{1}{0}=-\infty,$$

$$\operatorname{cosec}210^\circ=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=+2,$$

$$\operatorname{cosec}225^\circ=\frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}=-\sqrt{2},$$

$$\operatorname{cosec}240^\circ=\frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{cosec}270^\circ=\frac{1}{-1}=-1.$$

∴　θ 由 180° 增大而至 270° 時, $\operatorname{cosec}\theta$ 爲負, 由 $-\infty$ 增大而至於 -1.

IV.　於第四象限之變化.

$$\operatorname{cosec}270^\circ=-1,$$

$$\operatorname{cosec}300^\circ=\frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{cosec}315^\circ=\frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}=-\sqrt{2}$$

$$\operatorname{cosec}330^\circ=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2,$$

$$\operatorname{cosec}360^\circ=\operatorname{cosec}0^\circ=-\frac{1}{0}=-\infty$$

∴　θ 由 270° 增大而至 360° 時, $\operatorname{cosec}\theta$ 爲負, 由 -1 減小而至於 $-\infty$.

表示以上之諸變化如次頁.

函數 \ θ	0°	第 I 象限	90°	第 II 象限	180°	第 III 象限	270°	第 IV 象限	360°
$\sin\theta$	0	正,增大	1	正,減小	0	負,減小	-1	負,增大	0
$\cos\theta$	1	正,減小	0	負,減小	-1	負,增大	0	正,增大	1
$\tan\theta$	0	正,增大	$+\infty$, $-\infty$	負,增大	0	正,增大	$+\infty$, $-\infty$	負,增大	0
$\cot\theta$	$-\infty$, $+\infty$	正,減小	0	負,減小	$-\infty$, $+\infty$	正,減小	0	負,減小	$-\infty$, $+\infty$
$\sec\theta$	1	正,增大	$+\infty$, $-\infty$	負,增大	-1	負,減小	$-\infty$, $+\infty$	正,減小	1
$\mathrm{cosec}\,\theta$	$-\infty$, $+\infty$	正,減小	1	正,增大	$+\infty$, $-\infty$	負,增大	-1	負,減小	$-\infty$, $+\infty$

注意 1. θ 由 360° 再增大時，及由 0° 減小時，皆不過與上同一之變化循環而已．

注意 2. 由上之諸變化，不關於 θ 之值如何，可知次之事項．

(1) sin，$\cos\theta$ 取不大於 1 不小於 -1 正負之實數值．

即 $|\sin\theta|\leqq 1$，　$|\cos\theta|\leqq 1$．

(2) $\tan\theta$，$\cot\theta$ 取由 $+\infty$ 經 0 而至 $-\infty$ 正負一切之實數值．

(3) $\sec\theta$，$\operatorname{cosec}\theta$ 取由 1 至 $+\infty$，及由 -1 至 $-\infty$ 正負之實數值．即 $|\sec\theta|\geqq 1$，　$|\operatorname{cosec}\theta|\geqq 1$．

問　題　XVIII.

試求次式之值．

(1) $\cos 0^\circ\tan 45^\circ+2\cos 180^\circ\sin 30^\circ+3\cos 360^\circ\cot 30^\circ$.

(2) $\sin 0^\circ\sin 60^\circ\sin 120^\circ-\sin 30^\circ\sin 90^\circ\sin 270^\circ$.

(3) $\tan 150^\circ\cos 0^\circ+3\cos 180^\circ\cot 150^\circ$.

(4) $a^2\cos 0^\circ-b^2\sin 270^\circ-2ab\tan 135^\circ\cot 225^\circ$.

(5) $\cos 180^\circ\tan(-45^\circ)+\sin 150^\circ\sec 210^\circ$.

試求適於下列方程式在 180° 與 -180 間之角．

(6) $2\sin\theta=\tan\theta$.

(7) $\tan\theta-\cot\theta=\operatorname{cosec}\theta$.

(8) $2\cos^2 x - \sin x = 1$.

(9) $2\tan x + 3\cos x = \tan x + \cos x + 2\sec x$.

(10) 試求適合於方程式 $\sin A + \cos A = -1$ 中 A 之值在 $360°$ 以內.

(11) x 爲實數，無適合於等式 $\sin\theta = x + \frac{1}{x}$ 之角 θ，試證明之.

(12) $\sec\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ 之等式，於 x 之如何實數值始能成立.

(13) 欲 $\sec^2\theta = \frac{4xy}{(x+y)^2}$ 之等式能成立，二實數 x 與 y 之間，須有如何之關係. 但 $x \neq 0$, $y \neq 0$.

(14) 於 $0°$ 爲 $360°$ 之間，$2\cos x - 1$ 爲正，求 x 之範圍.

(15) 求 $\cos^4 A - \sin^4 A$ 之最大值.

(16) 求 $\sin\theta\cos\theta$ 之最大值.

(17) 試證明 $a\cos\theta + b\sin\theta \leqq \sqrt{a^2+b^2}$.

第七章

三角函數之曲線圖示

55. 函數之曲線圖示.

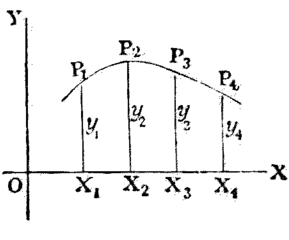
於函數 $y=f(x)$, x 之許多值為

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4,\quad \cdots\cdots$$

對應於此之 y 之諸值, 順次為

$$y_1,\quad y_2,\quad y_3,\quad y_4,\quad \cdots\cdots$$

依第 31 節 x 之諸值, 於 X 軸上取之, y 之諸值, 於 Y 軸上取之, 於平面上, 以此等許多之 x, y 為橫座標, 縱座標, 得次之諸點.



$P_1(x_1,y_1)$,

$P_2(x_2,y_2)$,

$P_3(x_3,y_3)$,

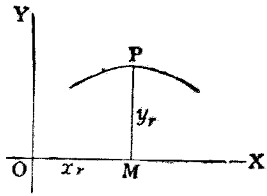
$P_4(x_4,y_4)$,

$\cdots\cdots$

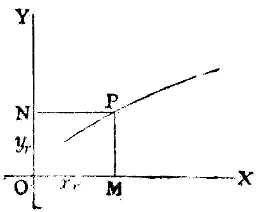
今 x 為連續的變化時, y 亦連續的變化, x 於 X 軸上經 x_1, x_2, $x_3\cdots\cdots$之諸點而連續的變時, $P(x, y)$ 經 P_1, P_2, P_3,$\cdots\cdots$之諸

點而畫某曲線(或直線). 此曲線 $P_1P_2P_3$………曰**函數之曲線**. 換言之, 函數之曲線者, 乃以適合於 $y=f(x)$ 之 x, y 爲座標, 而點 (x, y) 之軌跡也.

依幾何學的, 求與 x 之某值 x_r 相對應之 y 之值 y_r, 可由原點 O 於 X 軸上准 $OM=x_r$. ($x_r>0$ 時, 由 O 而右, $x_r<0$ 時, 由 O 而左) 而取點 M, 於 M 垂直於 x 軸之直線, 與函數曲線之交點爲 P, 則



$$MP=y_r.$$



依幾何學的, 求與 y 之某值 y_r 相對應之 x 之值 x_r, 可由原點 O 於 Y 軸上準 $ON=y_r$ ($y_r>0$ 時, 由 O 而上, $y_r<0$ 時, 由 O 而下) 而取點 N, 於 N 垂直於 Y 軸之直線與函數曲線之交點爲 P, 由 P 至 X 軸之垂線足爲 M, 則

$$NP=OM=x_r.$$

於三角函數, x 乃表角, 函數 f 乃表三角函數, y 乃表其三角函數值. 而依第 49 節至第 54 節, 知對應於 x 之諸值例如

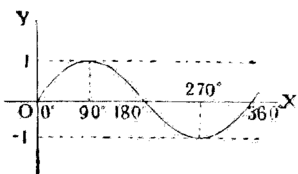
0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°,

210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330°. 360°.

之各三角函數值，故於 x 軸上，以相當於此等諸角之線分爲橫座標而定諸點，以對應於此各點之三角函數值爲縱座標而求諸點，因此等之點，皆在函數之曲線上，故依此可畫函數之曲線.

次圖示各三角函數之曲線．但圖中專示 $0°$ 與 $360°$ 間之曲線．其小於 $0°$ 之負角及大於 $360°$ 之角之三角函數，爲完全與此同一之曲線，祇須於雙方接續之可也．卽於 X 軸之正負兩側，無限擴張而知之.

56. 正弦曲線.



$y=\sin x$

正弦曲線爲連續曲線，

$$y=\sin(n\cdot 360°+90°)=1$$

時，y 爲極大，而

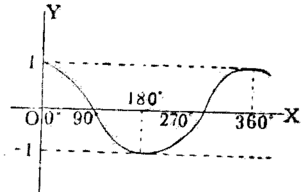
$$y=\sin(n\cdot 360°+270°)$$

$$=\sin(m\cdot 360°-90°)=-1$$

爲極小.

又由此曲線，可知 $\sin x$ 爲在 $x=n\cdot 180°$ 時爲 0，$n\cdot 360°<x<n\cdot 360°+180°$ 時爲正，其他 x 之值皆爲負，且可知 $\sin x$ 由 $+1$ 經 0 而至於 -1，皆取實數值.

57. 餘弦曲線.



$y=\cos x$

餘弦曲線爲連續曲線,

$$y=\cos(n\cdot360^\circ)=1$$

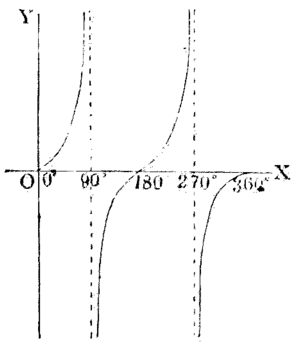
時, y 爲極大, 而

$$y=\cos(n\cdot360^\circ+180^\circ)$$
$$=\cos[(2n+1)180^\circ]=-1$$

爲極小.

又由此曲線, 可知 $\cos x$ 在 $x=n\cdot360^\circ\pm90^\circ$ 時爲 0, $n\cdot360^\circ-90^\circ<x<n\cdot360^\circ+90^\circ$ 時爲正, 其他 x 之值皆爲負, 且可知 $\cos x$ 由 $+1$ 經 0 而至於 -1, 皆取實數值.

58. 正切曲線.



$y=\tan x$

正切曲線爲

$$\tan(n\cdot180^\circ+90^\circ)=\pm\infty,$$

故

$$x=n\cdot180^\circ+90^\circ$$

時爲不連續.

又由此曲線, $\tan x$ 爲

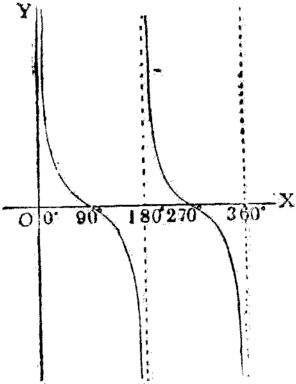
$$x=n\cdot180^\circ$$

時, 其値爲 0, 故可知

$$n\cdot180^\circ<x<n\cdot180^\circ+90$$

時爲正, 其他 x 之値爲負, 且可知 $\tan x$ 取正負一切之實值數. 從而 $\tan x$ 有極大, 極小.

59. 餘切曲線.



$y = \cot x$

餘切曲線爲

$$\cot(n\cdot 180^\circ)=\pm\infty$$

故

$$x=n\cdot 180^\circ$$

時，爲不連續.

又由此曲線可知 $\cot x$ 爲

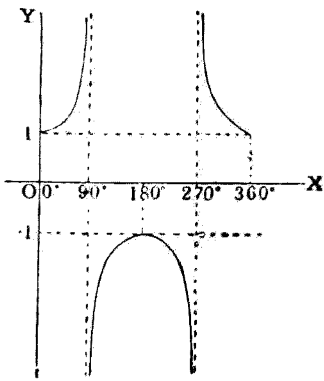
$$x=n\cdot 180^\circ+90^\circ$$

時，其值爲 0.

$$n\cdot 180^\circ<x<n\cdot 180^\circ+90^\circ$$

時爲正，其他之值時爲負，且可知 $\cot x$ 取正負之一切實數值，從而 $\cot x$ 有極大，極小.

60. 正割曲線.



$y = \sec x$

正割曲線爲

$$\sec(n\cdot 180^\circ+90^\circ)=\pm\infty$$

故

$$x=n\cdot 180^\circ+90^\circ$$

時，爲不連續.

又由此曲線，可知 $\sec x$ 爲

$$x=n\cdot 360^\circ$$

時，乃極小(極小值 1).

$$x=(2n+1)180^\circ$$

時，乃極大(極大值 -1)，及

$n\cdot 360^\circ-90^\circ<x<n\cdot 360^\circ+90^\circ$ 時爲正, 其他 x 之值爲負, 且可知 $\sec x$ 取由 $+1$ 至 $+\infty$ 及由 -1 至 $-\infty$ 之實數值.

61. 餘割曲線.

餘割曲線爲

$$\operatorname{cosec}(n\cdot 180^\circ)=\pm\infty$$

故

$$x=n\cdot 180^\circ$$

時, 爲不連續.

又由此曲線可知 cosec 爲

$$x=n\cdot 360^\circ+90^\circ$$

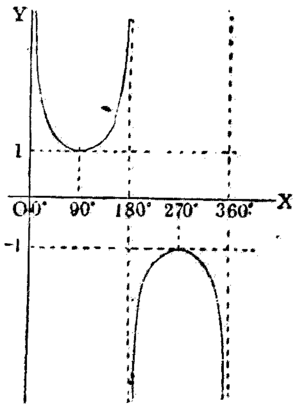
時, 乃極小(極小值 1),

$$x=n\cdot 360^\circ-90^\circ$$

時, 乃極大(極大值 -1), 及

$$n\cdot 360^\circ<x<n\cdot 360^\circ+180^\circ$$

時爲正, 其他 x 之值爲負, 且可知 $\operatorname{cosec} x$ 取由 $+1$ 至 $+\infty$ 及由 -1 至 $-\infty$ 之實數值.



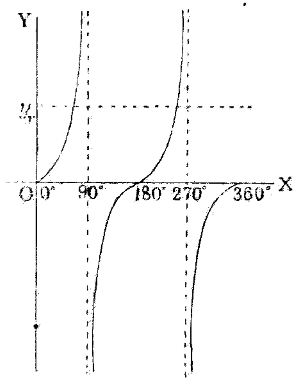
$y=\operatorname{cosec} x$

62. 依以上數節之圖, 對應於角 x 之任意值 x_r, x 之三角函數 y 之值 y_r 僅有一個, 而對應於 y 之某值

$$y_r\left(\begin{array}{l}\text{但於 } y=\sin x,\ y=\cos x,\ |y_r|\leqq 1,\\ \text{於 } y=\sec x,\ y=\operatorname{cosec} x,\ |y_r|\geqq 1\end{array}\right)$$

x 之值 x_r 可多至無數. 然此等無數多之 x_r 之值, 亦非全然任意多至無數, 乃依各各函數各從某一定之法則而見其無數多而已. 此所以三角函數爲週期的函數也.

例如於 $y=\tan x$, 各曲線枝互相平行, 與由 X 軸有 y_r 之距離之一平行直線, 交於無數多之點, 此各交點即對應於 y_r 之 x_r 之許多值, 但此非全然任意爲之者, 乃遵相隣二交點橫座標之差, 常等於 180° 之一定法則, 而見有無數多之排列也. 此 $\tan x$ 乃表以 180° 爲週期之週期的函數者.



例 1. 角 A 由 0° 至 360° 而變時, 試作表以明 $\sin A+\cos A$ 之變化.

解.

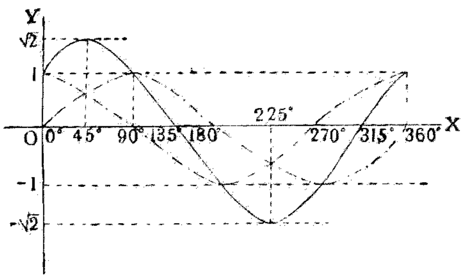
角 A / 函數	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin A+\cos A$	1	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	0	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	-1

角 A / 函數	180°	210°	225°	240°	270	300°	315°	330°	360°
sin A	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos A	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
sin A + cos A	-1	$-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	1

今試圖示之如次, $\sin A+\cos A$ 在

$A=n\cdot180°-45°$ 時, 其值爲 0,

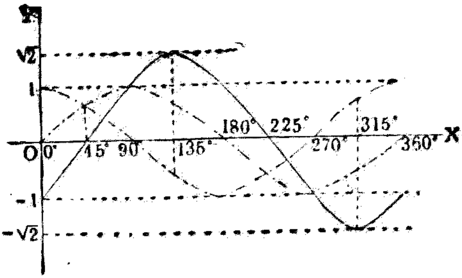
$A=n\cdot360°+45°$ 時爲極大, 其值爲 $\sqrt{2}$.



$A=n\cdot360°+225°$ 時爲極小, 其值爲 $-\sqrt{2}$.

例 2. 試圖示 $\sin A-\cos A$.

解. 與前例題全然同種之曲線.



$A=n\cdot180°+45°$ 時，其值爲 0，

$A=n\cdot360°+135°$ 時爲極大，其值爲 $\sqrt{2}$，

$A=n\cdot360°-45°$ 時爲極小，其值爲 $-\sqrt{2}$.

問　　題　　XIX.

試圖示次之函數．但 $0°\leqq x\leqq360°$.

(1)　$y=1+\sin x$.

(2)　$y=1-\cos x$.

(3)　$y=\sin^2 x$.

答 及 解 法 指 針

問　　題　　I. (11 頁)

1. (1) 0.125.　　(2) $0.024\dot{1}$.

(3) $\dfrac{833}{1620}$.　　(4) 0.0204045.

(5) 0.26463562.

2. (1) $39^g 33^{\backprime} 33.\dot{3}^{\backprime\backprime}$.　　(2) $12^g 23^{\backprime} 40.77^{\backprime\backprime}$.

(3) $528^g 3^{\backprime} 33.\dot{3}^{\backprime\backprime}$.　　(4) 160^g.

(5) $233^g 33^{\backprime} 33.3^{\backprime\backprime}$.

3. (1) $2^\circ 43' 6.4''$.　　(2) $51^\circ 11' 15''$.

(3) 81°.　　(4) 240°.

(5) $458^\circ 21' 58.4''$.

4. (1) $40^g 15' 35'' = 40^\circ.25 = \dfrac{40.25}{180}\pi = \dfrac{671}{3000}\pi$.

(2) $40^g 15^{\backprime} 36^{\backprime\backprime} = 0.401536$ 直角 $= \dfrac{\pi}{2} \times 0.401536$

$= 0.200768\pi$.

(3) $\dfrac{79}{36}\pi$.　　(4) $\dfrac{1103}{2000}\pi$.

5. $89^\circ 46' 15''$.

6. 設一銳角爲 x°, 則他銳角爲 $90^\circ - x^\circ$, 故

$$x = \frac{10}{9}(90 - x).$$

答 $47^\circ\ 22'\ 6\frac{6}{19}''$; $42^\circ\ 37'\ 53\frac{13}{19}''$.

7. $33^\circ 20'$; $10^\circ 48'$. 8. 45°, 27°. 9. 72°.

10. 設三角爲 $(x-y)^\circ$, x°, $(x+y)^\circ$, 則

$$(x-y)+x+(x+y)=180. \qquad \therefore\ x=60.$$

然 $(60-y)^\circ = \frac{10}{9}(60-y)^g$.

$$(60+y)^\circ = \frac{\pi}{180}(60+y)\text{radians}.$$

$\therefore\ \frac{10}{9}(60-y) : \frac{\pi}{180}(60+y) = 40 : \pi.$ 由是 $y=40$.

答 20°, 60°, 100°.

11. 90°, 81°, 9°. 12. 24°, 60°, 96°.

13. (1) $\frac{5}{12}\pi = 75^\circ = 83\frac{1}{3}^g$.

(2) $\frac{7}{18}\pi = 70^\circ = 77\frac{7}{9}^g$.

(3) $\frac{5}{8}\pi = 112\frac{1}{2}^\circ = 125^g$.

14. (1) 4時 $7\frac{7}{11}$分; 4時 36分.

(2) 7時 $28\frac{4}{11}$分; 7時 48分.

15. 設第一形之邊數爲 $2n$，則第二形之邊數爲 n. 而第一形之內角爲 $\frac{4n-4}{2n}=\frac{2n-2}{n}$，第二形之內角爲 $\frac{2n-4}{n}$.

$$\therefore \quad \frac{2(n-1)}{n}:\frac{2(n-2)}{n}=3:2. \qquad \therefore \quad n=4.$$

16. 10, 8.

17. 54°, 81°, 108°, 135°, 162°.

18. $\frac{14}{27}$.

19. 設所求之角爲 $x°$，則 $\frac{15}{x}+\frac{90\times0.2}{x}=\frac{73-7}{90}=\frac{11}{15}$. 答 45°.

20. 設三角形之各角爲 $x°$, $y°$, $z°$，則 $x+y+z=180$,

$$\frac{180-x}{x}+\frac{180-z}{z}=2\left(\frac{180-y}{y}\right),$$

$$\frac{180}{x}-1+\frac{180}{z}-1=\frac{360}{y}-2.$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}. \qquad \therefore \quad x\cdot y\cdot z. \text{ 爲調和級數.}$$

21. 設邊數順次爲 x, y, 則

$$\frac{2x-4}{x}:\frac{2y-4}{y}=x:y,$$

$$\frac{y}{x}(2x-4)=\frac{x}{y}(2y-4).$$

簡之.

$$(x-y)[xy-2(x+y)]=0.$$

$$\therefore \quad x=y \quad \text{或} \quad xy=2(x+y).$$

由 $xy=2(x+y)$，得 $x(y-2)=2y$.

$$\therefore \quad x=\frac{2y}{y-2}=\frac{2y-4+4}{y-2}=2+\frac{4}{y-2}.$$

因 x, y 爲正整數，故 $y-2$ 不可不爲 4 之因數，卽不可不爲下之數種.

$$y-2=4,\ y-2=2,\ y-2=1,$$

卽不出 $\qquad y=6, \quad y=4, \quad y=3$

之外.

而 x 與此對應之値爲

$$x=3, \quad x=4, \quad x=6.$$

而 $x=4$, $y=4$，此不過如上所得 $x=y$ 之特別情形，故此二正多角形爲等邊，又一爲正六角形．一爲正三角形亦合.

問　題　II. (21 頁)

1. $\sin A=\frac{4}{5}, \qquad \cos A=\frac{3}{5}, \qquad \tan A=\frac{4}{3},$

$\operatorname{cosec} A=\frac{5}{4}, \qquad \sec A=\frac{5}{3}, \qquad \cot A=\frac{3}{4}.$

2. $a^2=c^2-b^2=(m^2+n^2)^2-4m^2n^2=(m^2-n^2)^2.$

若 $m>n$，則 $a=m^2-n^2>0$，從而

$$\sin A=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}, \quad \cos A=\frac{2mn}{m^2+n^2}, \quad \tan A=\frac{m^2-n^2}{2mn}.$$

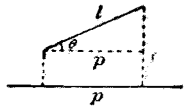
若 $m<n$, 則 $a=n^2-m^2>0$, 從而

$$\sin A=\frac{n^2-m^2}{m^2+n^2},\quad \cos A=\frac{2mn}{m^2+n^2},\quad \tan A=\frac{n^2-m^2}{2mn}.$$

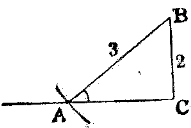
3. $\sin ECD=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos ECD=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

4. 二直線所成之角爲 θ, 則

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{l^2-p^2}}{p}.$$

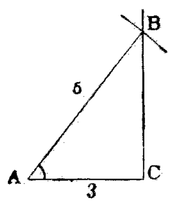


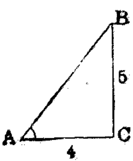
5. $\tan A=\frac{a}{b}$, $\tan B=\frac{b}{a}$. $\therefore$ $\tan A+\tan B=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{c^2}{ab}$.



6. (1) 如右圖, 令 BC=2, AC⊥BC, 以 B 爲中心, 3 爲半徑畫圓, 與 AC 之交點爲 A, 則 ∠BAC 卽所求之角.

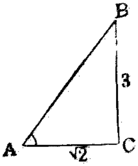
(2) 如右圖, 令 AC=3, BC⊥AC, 以 A 爲中心, 5 爲半徑畫圓, 與 BC 之交點爲 B, 則 ∠BAC 卽所求之角.





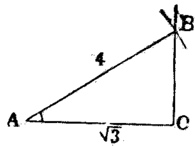
(3) 如右圖, 令 AC=4, BC⊥AC, BC=5, 則

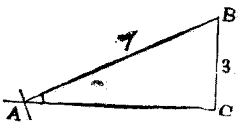
∠BAC 爲所求之角.



(4) 如右圖，令 $AC=\sqrt{2}$，$BC\perp AC$，$BC=3$ 則 $\angle BAC$ 爲所求之角.

(5) 如右圖，令 $AC=\sqrt{3}$，$BC\perp AC$，以 A 爲中心，4 爲半徑畫圓，與 BC 之交點爲 B，則 $\angle BAC$ 爲所求之角.



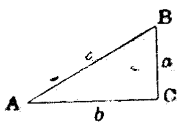


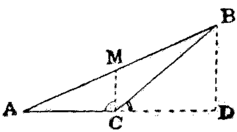
(6) 如右圖，令 $BC=3$，$AC\perp BC$，以 B 爲中心，7 爲半徑畫圓，與 AC 之交點爲 A，則 $\angle BAC$ 爲所求之角.

7. $\sin A+\cos A=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}$

$$=\frac{a+b}{c}>1.$$

$\therefore\ a+b>c.$





8. AB 之中點爲 M，由 B 至 AC 之垂線爲 BD，因

$AM=MB$, $\quad\therefore\quad AC=CD.$

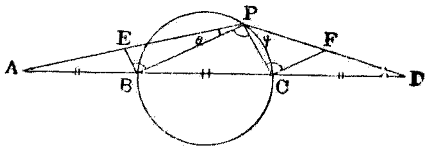
$\therefore\quad BD=2MC.$

$$\tan(180^\circ-ACB)=\tan BCD=\frac{BD}{CD}=\frac{2MC}{AC}=2\tan A.$$

9. 作 $BE \perp BP$, $CF \perp PC$, 則

$$AE = EP, \quad PF = FD.$$

$$\therefore \quad EB = \frac{1}{2}PC, \quad CF = \frac{1}{2}BP.$$



$$\tan\theta. \quad \tan\psi = \frac{BE}{BP} \cdot \frac{FC}{PC} = \frac{\frac{1}{2}PC}{BP} \cdot \frac{\frac{1}{2}BP}{PC} = \frac{1}{4}.$$

問 題 III. (28 頁)

1. $\cos\theta = \frac{5}{13}$, $\tan\theta = \frac{12}{5}$, $\cot\theta = \frac{5}{12}$, $\sec\theta = \frac{13}{5}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{12}$.

2. $\cos A = \frac{15}{17}$, $\sin A = \frac{8}{17}$.

3. $\sin A = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\tan A = \frac{1}{2}$.

4. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{m}$, $\quad\therefore\quad \tan\alpha = \frac{n}{\sqrt{m^2 - n^2}}$.

5. 不關於 a 之值常為 $\frac{2a}{1+a^2} < 1$, 故 $\sin A = \frac{2a}{1+a^2}$ 常能成立.

但 $a > 0$.

若 $a>1$，則 $\cos A=\dfrac{a^2-1}{1+a^2}$ 從而 $\tan A=\dfrac{2a}{a^2-1}$.

若 $a<1$，則 $\cos A=\dfrac{1-a^2}{1+a^2}$，從而 $\tan A=\dfrac{2a}{1-a^2}$.

6. $\cos^2 15^\circ=\dfrac{8+2\sqrt{12}}{16}$. $\therefore\ \cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{8+2\sqrt{12}}}{4}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,

$\tan 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4}=2-\sqrt{3}$.

7. $\sec 75^\circ=\sqrt{1+\tan^2 75^\circ}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

$\therefore\quad \cos 75^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

$\sin 75^\circ=\tan 75^\circ.\ \cos 75^\circ=(2+\sqrt{3})\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

8. $\sin^2\alpha=\dfrac{4n^2(m+n)^2}{(m^2+2mn+2n^2)^2}$, $\quad\sin\alpha=\dfrac{2n(m+n)}{m^2+2mn+2n^2}$.

$\therefore\quad \tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{2n(m+n)}{m(m+2n)}$.

9. $\cos^2\theta=\dfrac{4(2m+1)^2(m+1)^2}{(5m^2+6m+2)^2}$, $\quad\cos\theta=\dfrac{2(2m+1)(m+1)}{5m^2+6m+2}$.

$\therefore\quad \tan\theta=\dfrac{m(3m+2)}{2(2m+1)(m+1)}$.

11. $\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}=\sqrt{\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}}=\sqrt{2}+1$.

11. $(1-a^2)(1+b^2)=(1-\sin^2\theta)(1+\tan^2\theta)=\cos^2\theta\cdot\sec^2\theta=1$.

12. 3.

13. 由 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2mn}{m^2-n^2}$, $\sin\theta=k2mn$, $\cos\theta=k(m^2-n^2$

$$2mn\cos^2\theta-(m^2-n^2)\cos\theta\sin\theta$$

$$=\frac{\sin\theta}{k}\cos^2\theta-\frac{\cos\theta}{k}\cos\theta.\ \sin\theta=0.$$

14. 今設 $\cos\theta=kb$, $\sin\theta=ka$, 則

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{ka}{kb}=\frac{a}{b}.$$

因此 $\tan\theta=\dfrac{a}{b}$, 以 $\cos\theta=kb$, $\sin A=ka$ 代入.

較爲便利, 卽

$$\frac{a\sin\theta+b\cos\theta}{a\sin\theta-b\cos\theta}=\frac{ka^2+kb^2}{ka^2-kb^2}$$

$$=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

15. 原式 $=\dfrac{1}{\cos^2\theta\sin^2\theta}-\left(\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)$

$$=\frac{1-(\sin^4\theta+\cos^4\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1-[(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta]}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1-(1-2\sin^2\theta\cos^2\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$=\frac{2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2}=2.$$

16 原式$=3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)$

$$-2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta)$$

$$=3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)-2(\sin^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta)$$

$$=\sin^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta$$

$$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2=1.$$

17. 原式$=(\sin^2A-2+\operatorname{cosec}^2A)-(\tan^2A-2+\cot^2A)$

$$+(\cos^2A-2+\sec^2A)$$

$$=(\sin^2A+\cos^2A)+(\operatorname{cosec}^2A-\cot^2A)$$

$$+(\sec^2A-\tan^2A)-2$$

$$=3-2=1.$$

18. 原式$=\dfrac{1-\sin^2A}{\sin A}\cdot\dfrac{1-\cos^2A}{\cos A}\cdot\dfrac{1}{\sin A\cos A}$

$$=\frac{\cos^2A\sin^2A}{\sin^2A\cos^2A}=1.$$

19. 原式$=(\sec^2x\sec^2y+2\tan x\sec x\tan y\sec y+\tan^2x\tan^2y)$

$$-(\tan^2x\sec^2y+2\tan x\sec x\tan y\sec y+\sec^2x\tan^2y)$$

$$=\sec^2y(\sec^2x-\tan^2x)-\tan^2y(\sec^2x-\tan^2x)$$

$$=(\sec^2x-\tan^2x)(\sec^2y-\tan^2y)=1.$$

20. 原式$=\tan^2A(\sin^2A-1)+\cot^2A(\cos^2A-1)$

$$=-\sin^2A-\cos^2A$$

$$=-1.$$

21. 原式$=\dfrac{1}{1+\sin^2x}+\dfrac{1}{1+\cos^2\theta}+\dfrac{\cos^2x}{\cos^2x+1}+\dfrac{\sin^2x}{\sin^2x+1}=2.$

22. 原式$=\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cdot\dfrac{\sec\theta-1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{\cos^2\theta}\cdot\dfrac{\sin\theta-1}{1+\sec\theta}$

$$=\frac{\cos\theta(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta(1+\sin\theta)}+\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta(\cos\theta+1)}$$

$$=\frac{\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)+\sin^2\theta(\sin^2\theta-1)}{\sin^2\theta\cos\theta(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)}$$

$$=0.$$

23. $\tan\theta=0.75=\dfrac{3}{4},\ \sin\theta=\dfrac{3}{5},\ \cos\theta=\dfrac{4}{5}.$

$$\begin{aligned}\sin^6\theta\cos^6\theta&=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta)\\&=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-3\sin^2\theta\cos^2\theta\\&=1-3\sin^2\theta\cos^2\theta\\&=\frac{193}{625}.\end{aligned}$$

24. 兩邊各自乘, $1+2\sin A\cos A=\dfrac{289}{169}$. $\therefore\ 2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{120}{169}$.

$\therefore\ (\sin A-\cos A)^2=1-2\sin A\cos A=\dfrac{49}{169}.$

$\therefore\ \sin A-\cos A=\pm\dfrac{7}{13}.$

$$\left.\begin{array}{l}\text{由}\ \left.\begin{array}{l}\sin A+\cos A=\dfrac{17}{13}\\ \sin A-\cos A=\dfrac{7}{13}\end{array}\right\}\ \sin A=\dfrac{12}{13},\quad \cos A=\dfrac{5}{13}\\[3ex] \text{由}\ \left.\begin{array}{l}\sin A+\cos A=\dfrac{17}{13}\\ \sin A-\cos A=-\dfrac{7}{13}\end{array}\right\}\ \sin A=\dfrac{5}{15},\quad \cos A=\dfrac{12}{13}\end{array}\right\}\text{答}$$

25. $\tan A+\cot A=\frac{1}{\sin A\cos A}=\frac{13}{6}$. $\therefore\ \sin A\cos A=\frac{6}{13}$.

$(\sin A+\cos A)^2=1+2\sin A\cos A=\frac{25}{13}$.

$\therefore\ \sin A+\cos A=\frac{5}{\sqrt{13}}$.

由 $\sin A>0$, $\cos A>0$, 故取平方根之正根.

$(\sin A-\cos A)^2=1-2\sin A\cos A=\frac{1}{13}$.

$\therefore\ \sin A-\cos A=\pm\frac{1}{\sqrt{13}}$.

由 $\left.\begin{aligned}\sin A+\cos A&=\frac{5}{\sqrt{13}}\\ \sin A-\cos A&=\frac{1}{\sqrt{13}}\end{aligned}\right\}$, $\sin A=\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos A=\frac{2}{\sqrt{13}}$.

由 $\left.\begin{aligned}\sin A+\cos A&=\frac{5}{\sqrt{13}}\\ \sin A-\cos A&=-\frac{1}{\sqrt{13}}\end{aligned}\right\}$, $\sin A=\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos A=\frac{3}{\sqrt{13}}$.

26. $\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta}=\frac{3}{2}$.

兩邊各自乘, 以 $1-\sin^2\theta$ 表 $\cos^2\theta$ 且簡單之.

$$13\sin^2\theta+8\sin-5=0.$$

$$\sin\theta=\frac{5}{13},\quad \sin\theta=-1.$$

然 $\sin\theta=-1$ 無意義, 故以 $\sin\theta=\frac{5}{18}$ 爲答.

27. $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}=2,\quad \sin\theta+1=2\cos\theta.$

兩邊各自乘，以 $1-\sin^2\theta$ 表 $\cos^2\theta$，則

$5\sin^2\theta+2\sin\theta-3=0.$ 答 $\dfrac{3}{5}$.

28. $26\cos^2\theta+2\cos\theta-24=0.$ 答 $\dfrac{12}{13}$.

29. 兩邊以 $\cos^2\theta$ 除之，

$$\sec^2\theta+\tan^2\theta=3\tan\theta.$$

$$(1+\tan^2\theta)+\tan^2\theta=3\tan\theta.$$

$2\tan^2\theta-3\tan\theta+1=0.$ 答 $\dfrac{1}{2}$, 1.

30. $\tan^2\theta-2\tan\theta-1=0.$

$\tan\theta=1\pm\sqrt{2}$， 答 $1+\sqrt{2}$.

31. $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{5}{4}$ 之兩邊各自乘，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{9}{32}$.

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$$

$$=\frac{5}{4}\left(1-\frac{9}{32}\right)=\frac{115}{128}.$$

32. $\sin\theta+\sin^2\theta=1.\quad \therefore\quad \sin\theta=1-\sin^2\theta=\cos^2\theta.$

$\therefore\quad \cos^2\theta+\cos^4\theta=\sin\theta+\sin^2\theta=1.$

33. $a+b+c=12\qquad (1)$

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{75}{100}=\dfrac{3}{4}\qquad (2)$

$c^2=a^2+b^2\qquad (3)$

由 (1), $c=12-(a+b)$, 以此代入於 (3),

$$144-24a-24b+2ab=0.$$

然由 (2), $a=\frac{3}{4}b$.

$\therefore$ $b^2-28b+96=0$.　　$\therefore$ $b=4$ 或 24.

然由 (1), $b\neq24$,　$\therefore$ $b=4$, 從而 $a=3$,　由 (1), $c=5$.

答　5寸.

34. 由原式,

$$\frac{\tan^2\alpha}{\sin^2\theta}-\frac{2\tan\alpha\tan\beta}{\sin\theta\tan\theta}+\frac{\tan^2\beta}{\tan^2\theta}=\tan^2\alpha-\tan^2\beta,$$

$$\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-1\right)\tan^2\alpha-\frac{2\tan\alpha\tan\beta}{\sin\theta\tan\theta}+\left(\frac{1}{\tan^2\theta}+1\right)\tan^2\beta=0.$$

$$\frac{\tan^2\alpha}{\tan^2\theta}-\frac{2\tan\alpha\tan\beta}{\sin\theta\tan\theta}+\frac{\tan^2\beta}{\sin^2\theta}=0.$$

$$\left(\frac{\tan\alpha}{\tan\theta}-\frac{\tan\beta}{\sin\theta}\right)=0.$$

$$\therefore\qquad \frac{\tan\alpha}{\tan\theta}=\frac{\tan\beta}{\sin\theta}.$$

$$\therefore\qquad \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}=\frac{\sin\theta}{\tan\theta}=\cos\theta.$$

35. $\cos^2A=\cos^2x\sin^2C$.　　$\therefore$ $\sin^2A=1-\cos^2x\sin^2C$.

$\cos^2A=\sin^2x\sin^2C$.　　$\therefore$ $\sin^2B=1-\sin^2x\sin^2C$.

$$\therefore\qquad \sin^2A+\sin^2B=2-\sin^2C(\cos^2x+\sin^2x).$$

$$\therefore\qquad \sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2.$$

36. 由 $\sin^2 A \operatorname{cosec}^2 B + \cos^2 A \cos^2 C = 1$.

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} + \cos^2 A(1-\sin^2 C) = 1.$$

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} + \cos^2 A - 1 = \cos^2 A \sin^2 C.$$

$$\frac{\sin^2 A - \sin^2 A \sin^2 B}{\sin^2 B} = \cos^2 A \sin^2 C.$$

$$\frac{\sin^2 A(1-\sin^2 B)}{\cos^2 A \sin^2 B} = \sin^2 C.$$

$$\therefore \qquad \tan^2 A \cot^2 B = \sin^2 C.$$

37. $\sin A + \cos A = a$ 之兩邊各自乘, $\sin A \cos A = \dfrac{a^2-1}{2}$.

$$\therefore \qquad \tan A + \cot A = \frac{1}{\sin A \cos A} = \frac{2}{a^2-1}.$$

38. $\sin A + \cos A = a$, 由前問 $\sin A \cos A = \dfrac{a^2-1}{2}$.

然 $2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ 之二根之和爲 a, 二根之積爲

$\dfrac{a^2-1}{2}$, 故 $\sin A$, $\cos A$ 爲其二根.

問 題 IV. (32 頁)

1. 左邊 $= \sin A \cdot \dfrac{1}{\cos A} \cdot \dfrac{\cos A}{\sin A} = 1$.

2. 左邊 $= (1 + 2\sin A \cos A) + (1 - 2\sin A \cos A) = 2$.

3. 左邊$=(\sin^2A+\cos^2A)(\sin^2A-\cos^2A)=\sin^2A-\cos^2A$

$=\sin^2A-(1-\sin^2A)=2\sin^2A-1.$

4. 左邊$=(\sec^2A+2\sec A\operatorname{cosec}A+\operatorname{cosec}^2A)$

$-(\tan^2A+2+\cot^2A)$

$=(\sec^2A-\tan^2A)+(\operatorname{cosec}^2A-\cot^2A)$

$+2\sec A\operatorname{cosec}A-2$

$=2\sec A\operatorname{cosec}A.$

5. 左邊$=\dfrac{\sin^2A}{\cos A}+\cos A=\dfrac{1}{\cos A}=\sec A.$

6. 左邊$=(1+2\sin\theta+\sin^2\theta)+(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=3+2(\sin\theta+\cos\theta).$

7. 左邊$=\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\cos A}{\sin A}=\dfrac{1}{\cos A\sin A}=\sec A\operatorname{cosec}A.$

8. 左邊$=\dfrac{1}{\cos A}-\cos A=\dfrac{1-\cos^2A}{\cos A}=\dfrac{\sin^2A}{\cos A}=\tan A\sin A.$

9. 左邊$=\dfrac{1}{\cos^2A}+\dfrac{1}{\sin^2A}=\dfrac{1}{\cos^2A\sin^2A}=\sec^2A\operatorname{cosec}^2A.$

10. 左邊$=\dfrac{\cos^2A}{\sin^2A}-\cos^2A=\dfrac{\cos^2A}{\sin^2A}(1-\sin^2A)=\cot^2A\cos^2A.$

11. 左邊$=\dfrac{\sin^2A}{\cos^2A}-\sin^2A=\dfrac{\sin^2A}{\cos^2A}(1-\cos^2A)=\tan^2A\sin^2A.$

12. 左邊$=\frac{\cos^4A-\sin^4A}{\cos^4A}\cdot\cos^2A+\tan^2A$.

$$=\frac{\cos^2A-\sin^2A}{\cos^2A}+\frac{\sin^2A}{\cos^2A}=1.$$

13. 左邊$=\frac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}\cdot\frac{\frac{\cos\theta+1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta+1}{\sin\theta}}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta.$

14. 左邊$=\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x+\sin^2x}=\cos^2x-\sin^2x.$

15. 左邊$=\frac{(\sin A+1)^2}{\cos^2A}=\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2A}=\frac{1+\sin A}{1-\sin A}.$

16. 左邊$=\frac{(1-\sin A)^2}{\cos^2A}=\frac{(1-\sin A)^2}{1-\sin^2A}=\frac{1-\sin A}{1+\sin A}.$

17. 左邊$=\frac{(1+\cos A)^2}{\sin^2A}=\frac{(1+\cos A)^2}{1-\cos^2A}=\frac{1+\cos A}{1-\cos A}.$

18. 左邊$=\frac{2}{1-\sin^2A}=\frac{2}{\cos^2A}=2\sec^2A.$

19. 左邊$=\frac{(1+\cos^2x)(1-\cos^2x)}{\sin^4x}-2\cot^2x=\frac{1+\cos^2x}{\sin^2x}-\frac{2\cos^2x}{\sin^2x}$

$$=\frac{1-\cos^2x}{\sin^2x}=1.$$

20. 左邊$=(\cos^2A+\sin^2A)(\cos^4A-\cos^2A\sin^2A+\sin^4A)$

$+3\sin^2A\cos^2A$

$=\cos^4A+2\sin^2A\cos^2A+\sin^4A$

$=(\cos^2A+\sin^2A)^2$

$=1.$

問 題 V. (34 頁)

1. 左邊$=\dfrac{\sin A}{\cos A}(\cos^2 A-\sin^2 A).$

右邊$=\sin A\cos A\dfrac{\cos^2 A-\sin A}{\cos^2 A}=\dfrac{\sin A}{\cos A}(\cos^2 A-\sin^2 A).$

2. 左邊$=(1-2\tan A+\tan^2 A)+(1-2\cot A+\cot^2 A)$

$=(1+\tan^2 A)+(1+\cot^2 A)-2(\tan A+\cot A)$

$=\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A-\dfrac{2}{\cos A\sin A}.$

右邊$=\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A-2\sec A\operatorname{cosec} A$

$=\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A-\dfrac{2}{\cos A\sin A}.$

3. 左邊$=\dfrac{1}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}+\sin\alpha=\dfrac{1-\cos\alpha+\sin^2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\dfrac{1-\cos\alpha(1-\sin^2\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos^3\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}.$

右邊$=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}(1-\cos\alpha)+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha-\cos^3\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\dfrac{1-\cos^3\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}.$

4. 左邊$=\dfrac{\sin^4 x}{\cos^2 x}+\dfrac{\cos^4 x}{\sin^2 x}=\dfrac{\sin^6 x+\cos^6 x}{\cos^2 x\sin^2 x}$

$=\dfrac{\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x}{\cos^2 x\sin^2 x}.$

$$右邊=\frac{\sin^2x}{\cos^2x}+\frac{\cos^2x}{\sin^2x}-1=\frac{\sin^4x+\cos^4x-\sin^2x\cos^2x}{\cos^2x\sin^2x}.$$

5. $左邊=\frac{\sin A(\cos A+\sin A)}{\cos A}+\frac{\cos A(\sin A+\cos A)}{\sin A}$

$$=\frac{\sin^2A(\cos A+\sin A)+\cos^2A(\sin A+\cos A)}{\cos A\sin A}$$

$$=\frac{\cos A+\sin A}{\cos A\sin A}.$$

$$右邊=\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\sin A}=\frac{\sin A+\cos A}{\cos A\sin A}.$$

6. $左邊=\cot^2A(\cot^2A+1)=\cot^2A\operatorname{cosec}^2A.$

$右邊=\operatorname{cosec}^2A(\operatorname{cosec}^2A-1)=\operatorname{cosec}^2A\cot^2A.$

7. $左邊=\tan^2A(\tan^2A+1)=\tan^2A\sec^2A.$

$右邊=\sec^2A(\sec^2A-1)=\sec^2A\tan^2A.$

8. $左邊=\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}\right)^2=\frac{1}{\cos^2A\sin^2A},$

$$右邊=\frac{1}{\cos^2A}+\frac{1}{\sin^2A}=\frac{1}{\cos^2A\sin^2A}.$$

9. $左邊=(\sin A+\cos A)\frac{1}{\cos A\sin A}.$

$$右邊=\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\sin A}=\frac{\sin A+\cos A}{\cos A\sin A}.$$

10. 左邊$=(2-\cos^2A)\dfrac{\sin^2A+2\cos^2A}{\sin^2A}=\dfrac{(2-\cos^2A)(1+\cos^2A)}{\sin^2A}$

$$=\frac{(1+\sin^2A)(1+\cos^2A)}{\sin^2A}.$$

右邊$=(2-\sin^2A)\dfrac{2\sin^2A+\cos^2A}{\sin^2A}=\dfrac{(2-\sin^2A)(1+\sin^2A)}{\sin^2A}$

$$=\frac{(1+\cos^2A)(1+\sin^2A)}{\sin^2A}.$$

問　題　VI. (35 頁)

1. 左邊－右邊$=(\sec^2A-\tan^2A)-(\operatorname{cosec}^2B-\cot^2B)$

$$=1-1=0.$$

2. 右邊－左邊

$$=1+(\operatorname{cosec}^2A-\cot^2A)(\operatorname{cosec}^2A+\cot^2A)-2\operatorname{cosec}^2A$$

$$=1+\cot^2A-\operatorname{cosec}^2A=1-1=0.$$

3. 左邊－右邊$=(\sec^2\theta-\tan^2\theta)^2-1=1-1=0.$

4. 右邊－左邊$=\tan\theta(1-\sin^2\theta)+\cot\theta(1-\cos^2\theta)-2\sin\theta\cos\theta$

$$=\tan\theta\cos^2\theta+\cot\theta\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$$

$$=\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta=0.$$

5. 左邊－右邊$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$$+\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)-(\sin\theta+\cos\theta)$$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta-1)=0$$

問 題 VII. (38 頁)

1. 右邊 $=\sin A\tan A\cot A+\sin A\tan A\operatorname{cosec}A=\sin A+\tan A.$

2. 左邊 $=\sin^2 A\cos^2 B\operatorname{cosec}^2 A\sec^2 B=1.$

3. 左邊 $=(\cos^4\theta-\sin^4\theta)(\cos^4\theta+\sin^4\theta)$

$$=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)[(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta]$$

$$=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(1-2\sin^2\theta\cos^2\theta).$$

4. 左邊 $=2+2\sin^2 A+2\cos^2 A-4\sin A\cos A$

$$=4(1-\sin A\cos A).$$

5. 左邊 $=\cos A(2\tan^2 A+5\tan A+2)$

$$=\cos A(2\sec^2 A+5\tan A)$$

$$=2\sec A+5\sin A.$$

6. 去左邊之之括弧，卽得右邊.

7. 左邊 $=(\cos^2 A+\cos A)^2(1-\cos A)^2$

$$+(\sin^2 A+\sin A)^2(1-\sin A)^2$$

$$=\cos^2 A(1-\cos^2 A)^2+\sin^2 A(1-\sin^2 A)^2$$

$$=\cos^2 A\sin^2 A(\sin^2 A+\cos A)$$

$$=\sin^2 A\cos^2 A.$$

8. 左邊$=\dfrac{1-\cos^4\theta}{\cos^2\theta}\cdot\dfrac{1-\sin^4\theta}{\sin^2\theta}=(1+\cos^2\theta)(1+\sin^2\theta).$

$$=2+\sin^2\theta\cos^2\theta.$$

9. 左邊$=\dfrac{\sin^4\theta+\cos^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\dfrac{1-2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\sec^2\theta\operatorname{cosec}^2\theta-2.$

10. 左邊$=2(\sin^4A-\sin^2A\cos^2A+\cos^4A)$

$$-3(\sin^4A+\cos^4A)+1$$

$$=-\sin^4A-2\sin^2A\cos^2A-\cos^4A+1$$

$$=1-(\sin^2A+\cos^2A)^2$$

$$=0.$$

11. 將兩邊各簡單之，皆爲$\dfrac{2}{\sin\alpha\cos\beta}(\sin\alpha+\cos\beta).$

12. 左邊$=\dfrac{\sin\theta(1+2\cos\theta)}{\cos^2\theta+\cos\theta+\cos^2\theta}=\tan\theta.$

13. 與前問同樣.

14. 將左邊通分而簡單之，得$\dfrac{4\cos A}{\sin^2A}=4\cot A\operatorname{cosec}A.$

15. 以 $\sin A$, $\cos A$ 表左邊 且簡單之，得$\dfrac{(\sin A+\cos A^2)}{\sin A\cos A}.$

右邊$=\dfrac{(\sin A-\cos A)^2+4\sin A\cos A}{\sin A\cos A}=\dfrac{(\sin A+\cos A)^2}{\sin A\cos A}.$

16. 左邊$=\dfrac{\tan^3\alpha}{\sec^2\alpha}+\dfrac{\cot^3\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha}=\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$\dfrac{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}.$

17. 左邊$=\dfrac{(\cos\theta+\sin\theta)^2}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta.$

18. 左邊$=\cos^2\theta.$

右邊$=\cot^2\theta\sin^2\theta=\cos^2\theta.$

19. 左邊$=\dfrac{\sin^2A-\cos^2A}{(\sin A-\cos A)^2}\cdot\dfrac{\sin A-\cos A}{\sin A(\sin A+\cos A)}$

$=\dfrac{1}{\sin A}=\operatorname{cosec}A.$

20. $(1-\sec A+\tan A)(\sec A+\tan A+1)=2\tan A,$

$(1+\sec A-\tan A)(\sec A+\tan A-1)=2\tan A.$

$\therefore\quad(1-\sec A+\tan A)(\sec A+\tan A+1)$

$=(1+\sec A-\tan A)(\sec A+\tan A-1).$

$\therefore\quad\dfrac{1-\sec A+\tan A}{1+\sec A-\tan A}=\dfrac{\sec A+\tan A-1}{\sec A+\tan A+1}.$

21. 右邊$=\dfrac{\cos A(1+\cos A)-\sin A(1+\sin A)}{(1+\sin A)(1+\cos A)}$

$=\dfrac{(\cos A-\sin A)(1+\cos A+\sin A)}{(1+\sin A)(1+\cos A)}$

因右邊等於左邊故可得

$2(\cos A-\sin A)(1+\sin A)(1+\cos A)$

$=(1+\sin A+\cos A)^2(\cos A-\sin A).$

即 $2(1+\sin A)(1+\cos A)=(1+\sin A+\cos A)^2$

然知此式依本節 II 之例 2 爲眞.

故本題能成立.

22. 左邊$=\dfrac{2(\sec A-\tan A)}{1-(\sec A-\tan A)^2}=\dfrac{2(\sec A-\tan A)}{2\sec A\tan A-2\tan^2 A}=\dfrac{1}{\tan A}$,

右邊亦同樣爲 $\dfrac{1}{\tan A}$.

23. 將原方程式變形.

$$\frac{\sec\theta}{\sin\theta+2\cos\theta}+\frac{2\sec\theta}{2\sin\theta+\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sec\theta(5\cos^3\theta+2\sin\theta)}{2+5\sin\theta\cos\theta},$$

即 $$\frac{1}{\sin\theta+2\cos\theta}+\frac{2}{2\sin\theta+\cos\theta}-\sin\theta=\frac{5\cos^3\theta+2\sin\theta}{2+5\sin\theta\cos\theta}.$$

因此只須證明次之等式能成立可矣.

$$\frac{2\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta+4\cos\theta}{(\sin\theta+2\cos\theta)(2\sin\theta+\cos\theta)}$$

$$=\frac{5\cos^3\theta+2\sin\theta+2\sin\theta+5\sin^2\theta\cos\theta}{2+5\sin\theta\cos\theta},$$

即 $$\frac{4\sin\theta+5\cos\theta}{2+5\sin\theta\cos\theta}=\frac{5\cos\theta+4\sin\theta}{2+5\sin\theta\cos\theta}.$$

然此式明明能成立，故原等式亦能成立.

問　題　VIII. (41 頁)

1. $\tan^2\theta=\sin^2\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}.$　$\therefore\ b^2=a^2(1+b^2).$

2. $\dfrac{x}{a}=\cos\theta,\ \dfrac{y}{b}=\sin\theta.$　$\therefore\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

3. $\frac{x}{a}=\sec\theta,\ \frac{y}{b}=\tan\theta.$　　$\therefore\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$

4. $\cos\theta=\frac{m}{l},\ \sec\theta=\frac{m'}{l'}.$　　$\therefore\ \frac{m}{l}\cdot\frac{m'}{l'}=1$　即 $ll'=mm'.$

5. $\sin\theta=\frac{\sin\alpha}{m},\ \tan\theta=\frac{\tan\alpha}{n}.$

$\therefore$ 由問題 1, $\frac{\tan^2\alpha}{n^2}=\frac{\sin^2\alpha}{m^2}\left(1+\frac{\tan^2\alpha}{n^2}\right).$

$$\frac{1}{n^2\cos^2\alpha}=\frac{1}{m^2}\cdot\frac{n^2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{n^2\cos^2\alpha}.$$

$\therefore\qquad m^2=n^2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha.$

6. $\cos\theta=\frac{a+b}{2},\ \sin\theta=\frac{a-b}{2}.$

$\therefore\ \left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=1.$　　或　$a^2+b^2=2.$

7. $\tan\theta=\frac{a+b}{2},\ \sin\theta=\frac{a-b}{2},$　$\therefore$　$\cos\theta=\frac{a-b}{a+b}.$

$\therefore\ \left(\frac{a-b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2=1.$　　或　$a^2-b^2=4\sqrt{ab}.$

8. $a^2+b^2=2.$

9. $\tan\theta=\frac{p+q}{2},\ \cot\theta=\frac{p-q}{2}.$　　$\therefore\ p^2-q^2=4.$

10. 兩邊各自乘相加,

$$a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+b^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=c^2+d^2.$$

$\therefore\qquad a^2+b^2=c^2+d^2.$

11. 兩邊各相乘, $\cos^2\theta=mn$.

又 $$\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)=m^2,$$

∴ $$mn(1-mn)=m^2,$$

$$mn^2+m-n=0.$$

12. 兩邊各平方相加, $\sin^2\theta\cos^2\theta=a^2+b^2$.

此兩邊各以原方程式除之.

$$\sin\theta=\frac{a^2+b^2}{a},\quad \cos\theta=\frac{a^2+b^2}{b},$$

由此消去 θ $$(a^2+b^2)^3=a^2b^2.$$

13. 由所與之方程式, $\sin\theta=\dfrac{ac-bd}{a^2-b^2}$, $\cos\theta=\dfrac{ad-bc}{a^2-b^2}$.

∴ $$\left(\frac{ac-bd}{a^2-b^2}\right)^2+\left(\frac{ad-bc}{a^2-b^2}\right)^2=1,$$

$$(ac-bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2-b^2)^2$$

或 $$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(a^2-b^2)^2+4abcd.$$

14. 由所與之方程式,

$\tan\theta=\dfrac{a+b}{2}$, $\cos\theta=\dfrac{a-b}{2}$. ∴ $(a^2-b^2)^2+4(a-b)^2=16$.

15. $\cos\neq0$ 明矣.

故由第一式, $a-b\cos^3\theta=2a\cos^2\theta$ (1)

由第二式, $b\cos^3\theta-a=2b\cos\theta$ (2)

由 (1)+(2), $\cos\theta=-\frac{b}{a}$.

以此代入第一式 $a^2=b^2$.

16. 以第二式代入第一式, $\frac{2bx}{ay}=\sec^2\theta-\cos^2\theta$.

由此式與第二式, 以求 $\sec^2\theta, \cos^2\theta$ 消去 θ

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

17. $x=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$, $y=\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$. $\therefore\quad xy=\sin\theta\cos\theta$.

$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}}\qquad\therefore\quad x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=1$.

兩邊各三乘, $x^2y^2(x^2+y^2+3)=1$.

18. 將第一式之兩邊自乘, 變形爲 $x\cos\theta=-y\sin\theta$.

由是 $\cos^2\theta=\frac{y^2}{x^2+y^2}$, $\sin^2\theta=\frac{x^2}{x^2+y^2}$,

以此等代入第二式, $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$.

19. 由 $(x-a\sin\theta)^2+(y-a\cos\theta)^2=a^2$,

$$x^2+y^2=2a(x\sin\theta+y\cos\theta),$$

$$\therefore\quad (x\sin\theta+y\cos\theta)^2=\left(\frac{x^2+y^2}{2a}\right)^2 \qquad (1)$$

然 $$(x\cos\theta-y\sin\theta)^2=a^2 \qquad (2)$$

(1)+(2) $\qquad x^2+y^2=\left(\frac{x^2+y^2}{2a}\right)^2+a^2,$

$\therefore \qquad x^2+y^2=2a^2.$

20. $\sin A=p\sin B,\ \cos A=q\cos B;$

$\therefore \qquad p^2\sin^2 B+q^2\cos^2 B=1.$

由是 $\qquad \sin B=\sqrt{\frac{1-q^2}{p^2-q^2}}.$

21. 兩邊各自乘而相加, $a^2+b^2=1.$

問 題 IX. (50 頁)

1. 1.

2. 1.

3. 2.

4. $\frac{1}{4}$.

5. 1.

6. 5.

7. $\frac{1}{2}$.

8. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$.

9. 3.

10. $\frac{3}{2}$.

11. $\frac{7}{3}$.

12. 0.

13. $2-\sqrt{\frac{2}{3}}$.

14. 0.

15. 1.

16. $-(2+\sqrt{3})$.

17. 1.

18. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

19. -1.

20. $\sqrt{6}+\sqrt{3}$.

21. $\frac{4}{3-\sqrt{6}}=\frac{4}{3}(3+\sqrt{6})=7.26$.

22. $\sin A$.

23. 因 $45°+\theta$ 與 $45°-\theta$ 之和爲 $90°$, 故互爲餘角.

24. 與前問同樣.

28. $\sin\alpha(1+\cot\beta)+\sin\beta(1+\cot\alpha)$

$$=\sin\alpha(1+\tan\alpha)+\cos\alpha(1+\cot\alpha)$$

$$=\sin\alpha\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}+\cos\alpha\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha$$

$$=\sec\alpha+\sec\beta.$$

問　　題　　X. (55 頁)

1. $\frac{5}{2}$.

2. ∞.

3. $\frac{1}{2}$.

4. 1.

5. $\frac{13}{3}$.　　6. $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

7. $\frac{1}{4}\sqrt{2}$.　　8. $\frac{1}{4}$.

9. $\frac{9}{4}$.

10. $\frac{1}{\cos A} > \frac{1}{\sin A}$.

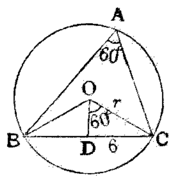
然 $\sin A > 0$ 故為正，以 $\sin A$ 乘兩邊，

$$\tan A > 1. \qquad \therefore \quad A > 45°.$$

11. $x=6$.

12. 如右圖，$\angle BAC = 60° = DOC$, $DC=6$；

今設 $OC=r$，則



$$\sin 60° = \frac{DC}{OC} = \frac{6}{r}.$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{r}.$$

$\therefore \quad r = 4\sqrt{3}$ 寸 $= 6.93$ 寸.

問　題　XI. (58 頁)

1. $x = 90° - 2x \qquad \therefore \quad x = 30°$.

2. $30° - x = 4x \qquad \therefore \quad x = 6°$.

3. $x = 90° - 4x \qquad \therefore \quad x = 18°$.

4. 9°.　　5. $22^\circ 30'$.

6. 30°.　　7. 15°.

8. $7^\circ 30'$.　　9. $0^\circ 30'$.

10. 45°.　　11. 60°.

12. 60°.　　13. 60°.

14. 30°.　　15. 30°.

16. $2\cos^2\theta+3\cos\theta-2=0$,　$\cos\theta=\frac{1}{2}, -2$.

$\cos\theta=-2$ 爲不合理.　$\therefore$　$\theta=60^\circ$.

17. 使爲 $\cos\theta$ 之二次方程式而解之,　$\cos\theta=\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}$.

$\cos\theta=-\frac{5}{2}$ 爲不合理.　$\therefore$　$\theta=60^\circ$.

18. 0°,　30°.

19. $\cos\theta=0$ 非原方程式之根.　$\therefore$　$\cos\theta\neq 0$.

去原方程式之分母,　$\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta$.

由是　$\theta=0^\circ, 60^\circ$.

20. $1+\tan^2\theta=2\tan^2\theta$,　$\tan\theta=1$.　$\therefore$　$\theta=45^\circ$.

21. $1+2\tan^2\theta=7$,　$\tan\theta=\sqrt{3}$.　$\therefore$　$\theta=60^\circ$.

22. $4\sin^2\theta=1$,　$\sin\theta=\frac{1}{2}$.　$\therefore$　$\theta=30^\circ$.

23. $90°, 30°$.

24. $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=2$, 然 $\tan\theta\neq 0$.

$\therefore\ \tan^2\theta-2\tan\theta+1=0$. $\tan\theta=1$. $\therefore\ \theta=45°$.

25. $\sin\theta=1-\cos\theta$, 兩邊各自乘,

$\sin^2\theta=1-2\cos\theta+\cos^2\theta$, $2\cos^2\theta-2\cos\theta=0$.

$\therefore\ \cos\theta=0$, $\cos\theta=1$. $\therefore\ \theta=90°, 0°$.

26. $30°$.

27. $(2\sin\theta-\sqrt{3})(2\sin\theta-1)=0$, $\theta=60°, 30°$.

28. $60°, 30°$.

29. $(\tan\theta-\sqrt{3})(\tan\theta-1)=0$, $\theta=60°, 45°$.

30. 使爲 $\cos\theta$ 之二次方程式而解之, $\theta=30°$.

31. 使爲 $\sin\theta$ 之二次方程式而解之, $\theta=45°, 30°$.

32. $45°$.

33. $\sec\theta=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $\pm\sqrt{2}$.

由 $\sec\theta=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $\theta=30°$;

由 $\sec\theta=\sqrt{2}$, $\theta=45°$.

34. 使爲 $\cos\theta$ 之二次方程式而解之. $\theta=45°$.

35. $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{\cos\theta}$, $\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}-\frac{2}{\cos\theta}=0$.

$\frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}-2\right)=0$, $\frac{1}{\cos\theta}=0$ 爲不能.

$\therefore\ \sin\theta=\frac{1}{2}$, $\theta=30°$.

36. $6\sin^2\theta-5\sqrt{3}\sin\theta+12\cos^2\theta=0$.

$6\sin^2\theta+5\sqrt{3}\sin\theta-12=0$.

由是 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\therefore\ \theta=60°$.

37. 由 $x-y=30°$, $x+y=90°$. $x=60°$, $y=30°$.

38. $x-y=30°$, $x+y=60°$. $\therefore\ x=45°$, $y=15°$.

39. $x-y=45°$, $x+y=60°$. $\therefore\ x=52°.5$, $y=7°.5$.

40. $x+y=60°$, $x-y=45°$. $\therefore\ x=52°.5$, $y=7°.5$.

41. $x=45°$, $y=15°$.

42. $x=52°.5$, $y=7°.5$.

43. $x=6°$, $y=8°$.

44. 於第二式加減第一式之 2 倍, 且開平方,

$\tan x+\tan y=\frac{4}{\sqrt{3}}$, 因 $\tan x>0$, $\tan y>0$. 故不能有負根.

$\tan x-\tan y=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$.

由 $\tan x+\tan y=\frac{4}{\sqrt{3}}$, $\tan x-\tan y=\frac{2}{\sqrt{3}}$,

$$x=60^\circ,\ y=30^\circ.$$

由 $\tan x+\tan y=\frac{4}{\sqrt{3}}$, $\tan x-\tan y=-\frac{2}{\sqrt{3}}$,

$$x=30^\circ,\ y=60^\circ.$$

問　題　XII. (62 頁)

1. I.　　2. II.

3. III.　　4. IV.

5. 於 X 軸上, 自原點起, 在右方 3 之距離之點.

6. 於 Y 軸上, 自原點起, 在下方 5 之距離之點.

7. IV.　　8. II.

9. (3,4).　　10. (−7,−6).

問　題　XIII. (65 頁)

1. I.　　2. II.

3. IV.

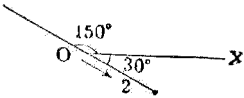
4. 於 OX 上, 在 O 左方 13 之距離之點.

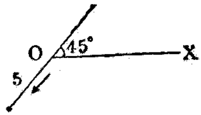
5. II.

6. 於 OX 上, 在 O 右方 7 之距離之點.

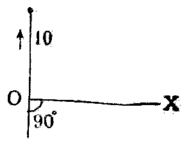
7. IV 與 (2,30°) 同.

8. III 與 (5,225°) 同.

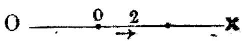




9. 由 O 向上方垂直, (第 I, 第 II 兩象限之界線) 與原點有 10 之距離之點. 與 (10,90°) 同.



10. 於 OX 上, 在 O 右方 2 之距離之點. 與 (2,0°) 同.



11. I.

12. II.

13. III.

14. IV.

15. III.

16. II.

17. II.

18. III.

19. II.

20. IV.

21. II.

22. IV.

23. III.

24. I.

25. IV.

26. 垂直.　　27. 垂直.

28. 互相延長.　　29. 一致.

30 一致.

31. 北西.　　32. 西.

33. 東.　　34. 南.

35. 南西.　　36. 30°.

37. $60^\circ-(-220^\circ)=280^\circ$, $360^\circ-280^\circ=80^\circ$. 答

38. $563^\circ-(-775^\circ)=1338^\circ=360^\circ\times4-102^\circ$. 答 102°.

39. 810°.

40. 向東迴轉 225°, 向西迴轉 135°.

問　題　XIV. (70 頁)

1. $+++$.　　2. $+--$.

3. $--+$.　　4. $-+-$.

5. $+--$.　　6. $--+$.

7. $-+-$.　　8. $-+-$.

9. $+--$.　　10. $+++$.

11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\sqrt{3}$.　12. $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, -1.

13. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\sqrt{3}$.　14. $-\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

15. $-\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.　16. $-\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

17. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$.　18. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, -1.

19. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, 1.　20. $\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

21. $30°$, $150°$.　22. $120°$.

23. $45°$.　24. $120°$.

25. $45°$, $135°$.　26. $60°$, $120°$.

27. $45°$, $315°$.　28. $60°$, $240°$.

29. $210°$, $330°$.　30. $150°$, $210°$.

31. 因 A 爲第 II 象限之角, 故 $A=150°$.

32. 因 A 爲第 II 象限之角, 故 $A=120°$.

問　題　XV. (73 頁)

1. θ 爲第 I 象限或第 II 象限之角.

若 θ 爲第 I 象限之角時, 得 $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{3}$.

,,　II　,,　$-\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{4}$, $\frac{5}{3}$.

2. 若 θ 爲第 I 象限之角時, 得 $-\frac{1}{2}$.

　　„　II　„　$\frac{1}{2}$.

3. θ 爲第 III 象限之角, 故得 $-\frac{8}{\sqrt{89}}$.

4. 若 θ 爲第 I 象限之角時, 得 $\frac{8}{17}$, $\frac{15}{17}$.

　　„　III　„　$-\frac{8}{17}$, $-\frac{15}{17}$.

5. 若 θ 爲第 I 象限之角時, 得 $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$.

　　„　III　„　$-\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{5}$.

6. 若 θ 爲第 II 象限之角時, 得 $\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{5}$.

　　„　IV　„　$-\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$.

7. 若 θ 爲第 I 象限之角時, 得 2.

　　„　III　„　-2.

8. 若 θ 爲第 I 象限之角時, 得 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{3}$.

　　„　IV　„　$-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\sqrt{3}$.

9. $\cos^2 A=\frac{1}{1+(2-\sqrt{3})^2}=\frac{1}{8-4\sqrt{3}}=\frac{4+2\sqrt{3}}{8}$.

$\therefore\quad \cos A=\pm\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

10. $\sin\phi=\pm\frac{\tan\phi}{\sqrt{1+\tan^2\phi}}=\pm\frac{n\sin\theta}{\sqrt{m^2+n^2+2mn\cos\theta}}$.

11. $\pm\frac{p}{q}$, $\pm\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{q}$.

12. $\sec A=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1=2.41$.

$\cos A=\sqrt{2}-1=0.41$.

$\tan A=\pm\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2-1}=\pm 2.19$.

$\cot A=\pm\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2-1}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}=\pm\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-2}{8-4}}$

$=\pm\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}=\pm 0.45$.

$\sin A=\pm\sqrt{1-(\sqrt{2}-1)^2}=\pm 0.91$.

$\operatorname{cosec} A=1.09$.

13. 依第 16 節之表附以適當之符號.

14. A 在第一象限. $\therefore\ \frac{4}{5},\ \frac{3}{5}$.

15. $\sin>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$.

$\therefore\quad \cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}},\quad \sin\theta=-\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$.

$\therefore\quad A\cos\theta+B\sin\theta=-\frac{A+B\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$.

16. $2\cos^2\theta+5\cos\theta-3=0$; $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\cos\theta=-3$.

然 $\cos\theta=-3$ 爲不合理, $\therefore$ 由 $\cos\theta=\frac{1}{2}$, 得 $\theta=60^\circ$.

17. 30°, 150°.

18. 將原方程式以 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 表之.

$$(\sin\theta-\cos\theta)(2\sin)(2\sin\theta-1)=0.$$

由 $\sin\theta=\cos\theta$. 得 $\theta=90^\circ-\theta$, $\therefore$ $\theta=45^\circ$.

由 $\sin\theta=\frac{1}{2}$, 得 $\theta=30^\circ$, 150°.

19. 原方程式爲

$$6\sin^2\theta+5\sqrt{3}\sin\theta-12=0$$

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\theta=-\frac{16\sqrt{3}}{12}.\qquad \theta=60^\circ,\ 120^\circ.$$

20. 0°, 60°, 300°.

21. 45°, 225°.

22. 60°, 120°, 240°, 300°.

23. 30°, 90°, 150°.

24. 120°, 240°.

25. $\sec^3\theta-2\sec^2\theta=0$

$\sec^2\theta=0$ 爲不合理. $\therefore$ 由 $\sec\theta=2$, 得 $\theta=60^\circ$, 300°.

26. 36°, 60°, 210°, 240°.

27. 依 $\sin\theta$ 之二次方程式而解之, $\sin\theta=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$.

$\therefore$ 由 $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\theta=18°, 160°$.

問　題　XVI. (76 頁)

1. $-\frac{1}{2}$.

2. $\frac{1}{2}$.

3. -1.

4. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

5. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

6. $\cos 122°=\cos(360°-238°)=\cos(-238°)=\cos 238°$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 238°}}=-\frac{5}{\sqrt{89}}.$$

7. $\pm 30°$.

8. $\pm 60°$.

9. $\pm 60°$.

10. $\cos\theta=\pm\frac{1}{2}$. $\therefore$ $\theta=60°, 120°, -60°, -120°$.

11. $\sin\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. $\therefore$ $\theta=45°, 135°, -45°, -135°$.

12. $\cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. $\therefore$ $\theta=45°, 135°, -45°, -135°$.

問題 XVII. (86 頁)

1. $\sin(\alpha-90^\circ)=\sin[-(90^\circ-\alpha)]=-\sin(90^\circ-\alpha)=-\cos\alpha.$

2. $\cos(\alpha-90^\circ)=\cos[-(90^\circ-\alpha)]=\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha.$

3. $\sin(\theta-180^\circ)=\sin[-180^\circ-\theta)]=-\sin(180^\circ-\theta)=-\sin\theta,$

4. $-\cos\theta.$

5. $\tan\theta.$

6. 原式$=-\sin A+\sin A=0.$

7. 原式$=\cos x+\sin x-\sin x=\cos x.$

8. 原式$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$

9. 原式$=\cos\alpha+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{1}{\cos\alpha}=0.$

10. 原式$=-\cos\theta\operatorname{cosec}\theta+\cos\theta\operatorname{cosec}\theta=0.$

11. 原式$=\sin^2(180^\circ+A)+\sin^2(270^\circ-A)=\sin^2 A+\cos^2 A=1.$

12. 原式$=\cos^2\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta=2.$

13. 與前問同樣得 2.

14. 原式$=\dfrac{\sin A(-\sin A)}{-\sin A}+\dfrac{\sin A\cdot\cos A}{-\cos A}=0.$

15. 原式$=\dfrac{\sin A}{\tan A}\cdot\dfrac{\tan A}{(-\cot A)}\cdot\dfrac{\cos A}{(-\sin A)}=\dfrac{\cos A}{\cot A}=\sin A.$

16. 原式$=\dfrac{(a^2-b^2)(-\cot\theta)}{\cot\theta}-\dfrac{(a^2+b^2)\cot\theta}{-\cot\theta}$

$=-(a^2-b^2)+(a^2+b^2=2b^2.$

17. 原式$=(-\cos\theta-\cos\theta)(-\tan\theta-\tan\theta)(\operatorname{cosec}\theta+\operatorname{cosec}\theta)$

$=(2\cos\theta)(2\tan\theta)(2\operatorname{cosec}\theta)$

$=8.$

18. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

19. $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

20. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

21. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1.$

22. 0, 1, 0.

23. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -1.$

24. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1.$

25. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1.$

26. $-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

27. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -1.$

28. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1.$

29. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}, -\sqrt{3}.$

30. $\sin 40^\circ.$

31. $\sin 28^\circ.$

32. $-\cos 28^\circ.$

33. $-\tan 28^\circ.$

34. $\sin 6^\circ.$

35. $-\sec 22^\circ.$

36. $\cos 31^\circ.$

37. $\tan 9^\circ.$

38. $\sin 18^\circ.$

39. $\sin 27^\circ.$

40. $\cos 27°$.

41. $\tan 27°$.

42. $-\tan 10°$.

43. $\tan 20°$.

44. $\cos 5°$.

45. $-\sin 44°$.

46. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

47. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

48. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

49. 1.

50. $\frac{1}{2}$.

51. $-\frac{1}{2}$.

52. $-\sqrt{3}$.

53. $-\sqrt{2}$.

54. $-\sqrt{3}$.

55. 2.

56. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

57. $\frac{\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{2}$.

58. -1.

59. 原式$=\cos(180°-A)-\cos\left(90°-\frac{A}{2}\right)+\cos A+\sin\frac{A}{2}$

$$=-\cos A-\sin\frac{A}{2}+\cos A+\sin\frac{A}{2}$$

$$=0.$$

60. 225°, 315°.

61. $\operatorname{cosec} A$.

62. 1.

63. 1.

64. $-2a$.

問　題　XVIII. (104 頁)

1. $3\sqrt{3}$.　　2. $\frac{1}{2}$.

3. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.　　4. $(a+b)^2$.

5. $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$.　　6. $-180°, -60°, 0°, 60°, 180°$.

7. $-180°, -60°, 60°, 180°$.　　8. $30°, 150°, -90°$.

9. $-180°, 0°, 30°, 150°, 180°$.

10. $\cos A=-1-\sin A$, 兩邊各自乘, 化爲 $\sin A$ 之二次方程式,

$\sin^2 A+\sin A=0$.　$\therefore$　$\sin A=0, \sin A=-1$.

然 $A=0°$ 不適合於原方程式, 故 $A=180°, 270°$.

11. 於 $\sin=x+\frac{1}{x}$, $x\neq 0$ 明矣.

故去分母,

$$x^2-x\sin\theta+1=0.$$

$$x=\frac{\sin\theta\pm\sqrt{\sin^2\theta-4}}{2}.$$

因 x 爲實數, 故不得不有 $\sin^2\theta\geqq 4$.

然 $|\sin\theta|\leqq 1$, 故 x 爲實數時無 θ 之值.

12. $\frac{1-x^2}{1+x^2} \geqq 1$, 或 $\frac{1-x^2}{1+x^2} \leqq -1$.

然 x 爲實數, 故 $1+x^2>0$.

$\therefore \quad 1-x^2 \geqq 1+x^2. \quad \therefore \quad 0 \geqq 2x^2.$

或 $\quad 1-x^2 \leqq -(1+x^2). \quad \therefore \quad 2 \leqq 0.$

$\therefore$ 卽原等式能成立, 以 $0=2x^2$, 卽 $x=0$ 時爲限.

13. 因 $x+y=0$ 時, $\sec^2\theta=\infty$, 求適於此之 θ 得 $\sec^2\theta=\infty$. 此 θ 之值, 原等式能成立.

次 $x+y \neq 0$ 時, $4xy \geqq (x+y)^2$ 或 $(x-y)^2 \leqq 0$

故限於 $x-y=0$ 時, 原等式能成立. 依此所求之關係式, 以 $x+y=0$ 或 $x=y$ 爲要.

14. $2\cos x-1>0$, $\cos x>\frac{1}{2}$. $\quad \therefore \quad 0°<x<60°$

及 $300°<x<360°$.

15. $\cos^4 A-\sin^4 A=\cos^2 A-\sin^2 A=1-2\sin^2 A$.

$\therefore$ 原式爲最大, 則 $\sin A$ 須最小, 卽 $A=n\cdot 180°$ 時, 有最大值爲 1.

16. 設 $y=\sin\theta\cos\theta$, 則

$$y^2=\sin^2\theta\cos^2\theta=\sin^2\theta-\sin^4\theta.$$

$$\therefore \quad \sin^4\theta-\sin^2\theta+y^2=0.$$

然 $\sin^2\theta$ 爲實數, 故

$$1-4y^2 \geqq 0.$$

$$(1+2y)(1-2y)\geqq 0.$$

$$(2y+1)(2y-1)\leqq 0.$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{2}\leqq y\leqq \frac{1}{2}.$$

∴ 所求之最大值爲 $\frac{1}{2}$. 而與此相應之 θ 爲 $45°$.

17. 設 $y=a\cos\theta+b\sin\theta$, 則

$$a\cos\theta=y-b\sin\theta.$$

$$a^2\cos^2\theta=y^2-2by\sin\theta+b^2\sin^2\theta.$$

$$(a^2+b^2)\sin^2\theta-2by\sin\theta+y^2-a^2=0.$$

然 $\sin\theta$ 爲實數故

$$by^2-(a^2+b^2)(y^2-a^2)\geqq 0.$$

簡單之.

$$y^2-(a^2+b^2)\leqq 0$$

$$(y+\sqrt{a^2+b^2})(y-\sqrt{a^2+b^2})\leqq 0$$

$$\therefore \quad -\sqrt{a^2+b^2}\leqq y\leqq\sqrt{a^2+b^2}.$$

$$\therefore \quad a\cos\theta+b\sin\theta\leqq\sqrt{a^2+b^2}.$$

問 題 XIX. (114 頁)

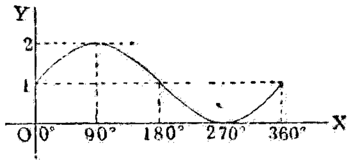
1. $y=0$, x 之值爲 $1+\sin x=0$ 時卽 $x=270°$.

又 $v=0°$, $x=180°$, 及 $x=360°$ 時, $y=1$,

而 y 之極大, 爲 $\sin x$ 之極大時卽 $x=90^\circ$ 時, y 之極大值爲 2.

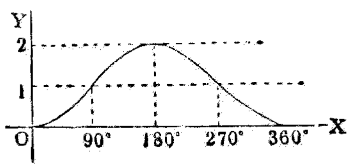
y 之極小, 爲 $\sin x$ 之極小時卽 $x=270^\circ$ 時, y 之極小值爲 0.

依此所求之曲線如次.



2.

	0°	90°	180°	270°	360°
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$1-\cos x$	0	1	2	1	0
	極小		極大		極小



3.

	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\sin^2 x$	0	1	0	1	0
	極小	極大	極小	極大	極小