大學叢書

投資數學

上册

褚鳳儀著

商務印書館發行

大學叢書

投資數學

上册

褚鳳儀著

商務印書館發行

大學叢書

投資數學

上冊

大學叢書委員會

委　員

序

儲蓄爲積聚資金之母,然僅知儲蓄而未諳運用之道,則死藏現金不能利用者有之,用於不健全之企業,因而喪失其資金者有之,不能充分利用複利之作用,以加速其資金之積聚者更比比皆是.故不知儲蓄,無以積聚資金,不知運用儲蓄,亦無以加速資金之積聚,而投資之道尙焉.

近世經濟組織,漸形複雜,投資之範圍,亦迥非昔比.或存款於銀行,或購買債券以生息,或投資於工商業,以圖股利之收益,或投保人壽保險,以防生命之不測.存款於銀行,則須明利息與年金之計算.購買債券,則債券市價之高下,影響於利息之多寡.投資於工商業,則償債方式與折舊方法,俱與公司之理財有關.投保人壽保險,則保險費隨投保者之死亡機率而異.凡此均有賴數理之研究,研究投資之數理,名曰投資數學.

投資數學之名稱甚多,若財政數學,政治數學,會計數學,高等商業數學,均先後爲各國學者所採用.投資數學研究之範圍,若利息,若年金,若債券,若折舊,若人壽保險無一不與利率有關,而利率爲投資之要素,故本書採用投資數學之名.

投資數學爲我國商學院必修科目,而坊間猶無完備之

書,故各校多採用美國敎本,以為之代.夫一國教育,常須借重他國敎本,此種方策,是否合理,姑置不論,然即就坊間得購之外版投資數學而一探其內容,亦尙未見一完備之書.本書之編,未敢謂已盡完備之事,然抛磚引玉,願於短時期內,因此而得更完備之中國投資數學.

本書於重要投資數理,均有論列,而於利息確實年金與債劵三編,討論尤詳.貼現與價值方程式二章,他書論者甚略,學者每多未能深切了解,故本書於第二編(利息)中,將此二章詳加擴充,以求數理之透穿,他書於確實年金一編,均未論及變額年金,然變額年金對於償債之方式與債劵之發行,均有密切之關係,而於儲蓄銀行之零存整付儲蓄存款,尤可有極大之應用,蓋儲蓄當適應存款者之儲蓄能力,而我國銀行,海關,郵政,鹽務等處職員之儲蓄能力,均隨每年加薪而增大,故變額存款更適宜於彼等之儲蓄,此本書之所以詳論變額年金也.他書於債劵之發行,或略而不論,或論而不詳,然債劵發行之方式影響於政府或公司之理財甚大,而於市價與投資利率之推算,亦有密切之關係,故本書論列較詳.

本書於年金與債劵論列較詳,故應用計算表,亦較他書為多,附錄中之倒數表,累積倒數表,等差變額年金終值表與等差變額年金現值表,皆為他書所無者也.

本書之編,參考美德法日四國出版之投資數學十餘種,其書名與著作者,詳列於目次之末,以備學者之參考.書中數

理證明,均甚簡易,其稍複雜者,另置附錄甲,以便教學.

本書蒙同學周君頌康,湯君芝第,蔣君家淼,盛君克中,潘君光潤,陶君嫩珠,與吾妹明馨,或助編計算表或代任抄寫之勞,均使編者心感,特誌數語,以示謝忱.

中華民國二十四年四月八日

褚鳳儀

目　次

本書重要參考書:

W. L. Hart——Mathematics of Investment

E. B. Skinner—— The Mathematical Theory of Investment

H. L. Rietz——Mathematics of Finance

Lovitt and Holtzclaw——The Mathematics of Business

G. Wentworth——Commercial Algebra

A. Barriol——Théorie et Pratique des Opérations Financières

H. Fuzet et Le'Reclus——Précis de Mathématiques Commerciales et Financières

A. Arnaudeau——Tables das Valeurs Intrinsèques

A. P. Violeine——Tables Pour Faciliter les Calculs des Probabités Sur la Vie Humaine

A. Schlimbach——Politische Arithmetik

M. Cantor——Politische Arithmetik

和田喜八——商工實務計算

小林行昌——高等商業數學

朱幼庵——最新國庫券還本付息表

投資數學

第一編 對數

第一章 對數之意義及其性質

同數自乘數次者,在代數學中用指數(Exponent)表之,例如5^3爲三個5連乘之數,a^6爲六個a連乘之數,右上角之3與6卽指數是也.5^3既爲三個5連乘之數,故其數值卽爲125,以算式表之則得:

$$5^3=125$$

上式中共有三數,已知此三數中之任何二數,卽可求第三數,故設x爲所求之第三數,則可得下列三式:

$$5^3=x$$

$$x^3=125$$

$$5^x=125$$

第一式中之x,可將三個5連乘而得,故此係一乘方(Involution)問題.第二式可化爲下式:

$$x=\sqrt[3]{125}$$

式中之x,可將125開立方而得,故此係一開方(Evolution)問題.至於第三式中之x,則與前兩式均異,既非乘方問題,亦

非開方問題,故式中之x,須應用他法求得,對數(Logarithm)法者,即欲探求此未知之指數而創設之方法也.此未知之指數,在對數法中卽名曰對數,而第三式中之5卽名曰底(Base),其右邊之125則名曰眞數(Number)或反對數(Anti-logarithm),對數之符號爲log,卽英文對數一字中前三個字母也.以此符號表示,則第三式可改作下式:

$$\log_5 125 = x$$

上式中之x,卽以5爲底125之對數,或卽3,蓋5之3方等於125故也.同理:

$$\log_2 16 = 4 \qquad \because \quad 16 = 2^4$$

$$\log_3 27 = 3 \qquad \because \quad 27 = 3^3$$

$$\log_6 36 = 2 \qquad \because \quad 36 = 6^2$$

$$\log_{10} 1000 = 3 \qquad \because \quad 1000 = 10^3$$

$$\log_a a^5 = 5 \qquad \because \quad a^5 = a^5$$

對數之意義既明,今請進而討論對數之性質.對數能化乘除爲加減,又能化乘方開方爲乘除,此則對數之特有性質,亦卽對數之效用也茲將對數之性質分述證明於下:

(一) 對數化乘法爲加法.

兩數相乘積之對數,等於兩數對數之和,卽:

$$\log_a AB = \log_a A + \log_a B \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

(證) 設 $x = \log_a A$

$y = \log_a B$

則依對數之定義,得:

$$A=a^x$$

$$B=a^y$$

$$AB=a^x\times a^y=a^{x+y}$$

$$\therefore\quad \log_a AB=\log_a a^{x+y}=x+y$$

卽

$$\log_a AB=\log_a A+\log_a B$$

若乘積由三數四數或 n 個數連乘而得,則其對數亦等於三數四數或 n 個數對數之和,其證明與兩數之乘積相似.

(二) 對數化除法爲減法.

兩數相除,其商數之對數,等於被除數之對數減去除數之對數所餘之數,卽:

$$\log_a\frac{A}{B}=\log_a A-\log_a B \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(證)　設 $x=\log_a A$

$y=\log_a B$

則依對數之定義,得:

$$A=a^x$$

$$B=a^y$$

$$\frac{A}{B}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$$

$$\therefore\quad \log_a\frac{A}{B}=\log_a a^{x-y}=x-y$$

卽

$$\log_a\frac{A}{B}=\log_a A-\log_a B$$

(三) 對數化乘方爲乘法,化開方爲除法

某數n方之對數,等於某數對數之n倍,卽:

$$\log_a A^n = n\log_a A \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(證)　設 $x=\log_a A$

則依對數之定義,得:

$$A = a^x$$

$$A^n = (a^x)^n = a^{xn}$$

$$\therefore\quad \log_a A^n = \log_a a^{xn} = xn$$

卽

$$\log_a A^n = n\log_a A$$

n得爲整數或分數,正數或負數.

第二章 對數之種類

一數之對數隨其底而異.例如以2爲底,則16之對數爲4;以4爲底,則16之對數爲2;以16爲底,則16之對數爲1,故須先決定對數之底,然後能求對數之值.任何數均可爲對數之底,然爲便於計算起見,數學上通用對數之底,祇有兩種,一爲10,一爲e.(e之數値爲2.71828強,參看附錄甲2)前者名曰常用對數(Common logarithm),後者名曰自然對數(Natural logarithm)或納氏對數.(Napierian logarithm)應用數學中通用常用對數,但在高深純正數學中,則以自然對數爲主,本書係應用數學之一種,故除有特別說明外,均指常用對數而言,而常用對數之底,苟無誤解之危險,亦將略而不書,故:

$$\log 10000 = 4$$

$$\log 1000 = 3$$

$$\log 100 = 2$$

$$\log 10 = 1$$

$$\log 1 = 0$$

$$\log 0.1 = -1$$

$$\log 0.01 = -2$$

$$\log 0.001 = -3$$

$$\log 0.0001 = -4$$

常用對數與自然對數可互相換算,即由前者可化為後者,亦可由後者化為前者.兩者之關係及其換算之公式,分述於下:

(一) 10之自然對數與e之常用對數互為倒數,即:

$$\log_{10} e = \frac{1}{\log_e 10} \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

(證) 設 $x = \log_{10} e$

則依對數之定義,得:

$$e = 10^x$$

$$\log_e 10^x = x \log_e 10 = 1$$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{\log_e 10}$$

即 $$\log_{10} e = \frac{1}{\log_e 10}$$

(二) 由常用對數化為自然對數.

以10之自然對數,乘某數之常用對數,即得某數之自然對數,即:

$$\log_e A = \log_e 10 \log_{10} A \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

(證) 設 $x = \log_e A$

則依對數之定義,得:

$$A = e^x$$

$$\log_{10} A = \log_{10} e^x = x \log_{10} e$$

$$\therefore \qquad x=\frac{1}{\log_{10} e}\log_{10} A$$

卽
$$\log_e A=\log_e 10 \log_{10} A$$

(三) 由自然對數**化爲**常用對數.

以 e 之常用對數,乘某數之自然對數,卽得某數之常用對數,卽:

$$\log_{10} A=\log_{10} e \log_e A \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

(證) 由公式(5)得:

$$\log_{10} A=\frac{1}{\log_e 10}\log_e A$$

卽
$$\log_{10} A=\log_{10} e \log_e A$$

第三章　對數表之編製及其應用

第一節　對數表之編製

對數表者,根據某數為底,用以計算各數之對數而編製之計算表也.對數有常用對數與自然對數之分,故對數表亦有常用對數表與自然對數表之別.常用對數與自然對數既有一定之關係,故由常用對數表即可編製自然對數表,由自然對數表即可編製常用對數表,而自然對數表之編製,即可根據下列之關係:

$$\log_e(n+1)=\log_e n+2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\cdots\right]\cdots\cdots(7)$$

(證明參看附錄甲6)

令 $n=1$

$$\text{則}\ \log_e 2=\log_e 1+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 3^3}+\frac{1}{5\times 3^5}+\cdots\cdots\right)$$

$$=0+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 3^3}+\frac{1}{5\times 3^5}+\cdots\cdots\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 3^3}+\frac{1}{5\times 3^5}+\cdots\cdots\right)$$

$$=0.693147$$

$$\begin{array}{r}
0.33333333\\
0.01234568\\
0.00082305\\
0.00006532\\
0.00000565\\
0.00000051\\
0.00000005\\
\hline
0.34657359\\
\times\ \ 2\\
\hline
0.69314718
\end{array}$$

令 $n=2$

則 $\log_e 3=\log_e 2+2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3\times5^3}+\frac{1}{5\times5^5}+\cdots\cdots\right)=1.098612$

$$\begin{array}{r}
0.2\\
0.00266667\\
0.00006400\\
0.00000183\\
0.00000006\\
\hline
0.20273256\\
\times\ \ 2\\
\hline
0.40546512\\
0.69314718\\
\hline
1.09861230
\end{array}$$

令 $n=9$

則 $\log_e 10=\log_e 9+2\left(\frac{1}{19}+\frac{1}{3\times19^3}+\frac{1}{5\times19^5}+\cdots\cdots\right)$

$=\log_e 9+0.10536052$

但 $\log_e 9=2\log_e 3=2.1972246$

$\therefore\ \log_e 10=2.302585$

$$\begin{array}{r}
0.05263158\\
0.00004860\\
0.00000008\\
\hline
0.05268026\\
\times\ \ 2\\
\hline
0.10536052\\
2.19722460\\
\hline
2.30258512
\end{array}$$

10之自然對數,卽爲e之常用對數之倒數,故e之常用對數,卽可自10之自然對數求得如下:

$$\log_{10} e=\frac{1}{2.302585}=0.4342945$$

故以2.302585乘某數之常用對數,卽得某數之自然對數.以0.4342945乘某數之自然對數,卽得某數之常用對數.卽:

$$\log_e A=2.302585\log_{10} A\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

$$\log_{10} A=0.4342945\log_e A\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

應用公式(9)吾人卽可進而編製常用對數表.試就2與3兩數,計算其常用對數於下:

$$\begin{aligned}\log_{10} 2&=0.4342945\times\log_e 2\\&=0.4342945\times0.693147\\&=0.301030\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{10} 3&=0.4342945\times\log_e 3\\&=0.4342945\times1.098612\\&=0.477121\end{aligned}$$

上所述者,爲整數之常用對數.已知整數之常用對數,卽可計算小數之常用對數.蓋任何有限小數,以10之乘方乘之,卽得整數,而10之乘方之常用對數,以其底爲10,故甚易求得也.

第二節　指標與假數

任取一數,例如5846,試將小數點逐漸向左移動,而計算

各數之常用對數,並應用公式(1),則得:

$$
\begin{aligned}
\log 5846 &= \log(1000\times 5.846)=\log 1000+\log 5.846=3+\log 5.846\\
\log 584.6 &= \log(100\times 5.846)=\log 100+\log 5.846=2+\log 5.846\\
\log 58.46 &= \log(10\times 5.846)=\log 10+\log 5.846=1+\log 5.846\\
\log 5.846 &= \log(1\times 5.846)=\log 1+\log 5.846=0+\log 5.846\\
\log 0.5846 &= \log(0.1\times 5.846)=\log 0.1+\log 5.846=-1+\log 5.846\\
\log 0.05846 &= \log(0.01\times 5.846)=\log 0.01+\log 5.846=-2+\log 5.846\\
\log 0.005846 &= \log(0.001\times 5.846)=\log 0.001+\log 5.846=-3+\log 5.846
\end{aligned}
$$

詳察上列諸式,可見各數之對數,有一部完全相同,均爲 $\log 5.846$, 其所不同者,祇有前面之整數,而此整數之變化,亦甚整齊,即小數點向左移上一位,則此整數遞降一單位而成一等差級數

$$3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad -2 \quad -3$$

5.846 介於 1 與 10 之間,查 $\log 1=0$, 而 $\log 10=1$, 故 $\log 5.846$ 亦介於 0 與 1 之間. 介於 0 與 1 之間之數,即爲小數,故一數之對數由二部組成: 一部爲整數,一部爲小數,前者名曰指標,(Characteristic) 後者名曰假數. (Mantissa) 指標有正負之分,而假數則常爲正數.

指標之計算有一定規則可循. 某數之指標,若爲正數,則其數較某數之整數位數少一,故六位整數之指標爲 5, 三位整數之指標爲 2, 一位整數之指標爲 0, 某數之指標若爲負數,則其數即爲第一個有效數字前所有'零'之數,例如 0.3485

中第一個有效數字爲3,其前祇有一個零,故其指標爲 −1,又如0.004865中第一個有效數字爲4,其前共有三個零,故其指標爲 −3.

至於對數中之假數,則不能一視卽得,須查常用對數表,其求法詳述於下節:

第三節 由對數表檢查對數

常用對數表(以後簡稱對數表,本書中若單稱對數表,均指常用對數表而言)中所載對數,限於1與10間之對數,換言之,對數表中祇有假數而無指標,後者須依前節中所述之規則求得

設欲求 log 458.3. 眞數共有三位整數,故對數之指標爲2,其假數須查對數表.先在表之左端查 458,再在表之上方查3,前者所在之橫行與後者所在之縱行相交處之數字,卽爲所求之假數,惟其前面二數字,因係許多假數之公共數字,故對數表中常另列左端,檢查時須一併抄錄.查對數表得0.661150,此卽 log 458.3 之假數,故:

$$\log 458.3 = 2.661150$$

又設欲求 log 0.005624. 眞數第一有效數字前共有三個零,故對數之指標爲 −3. 至其假數,則可先查562,次查4,前者所在之橫行與後者所在之縱行相交處爲0045,惟角上有一"*"號,須加注意,此"*"號表示假數前面二數字在下方而不

在上方,故所求之假數係0.750045而非0.740045.

指標有正負之分,而假數常爲正數,故負指標中之負號不能置於對數之前,但須置於指標之上以示區別,即:

$$\log 0.005624=\bar{3}.750045$$

對數表中之眞數,有一定位數,或四位,或五位,或六位,必有限制.試就四位眞數對數表而言,四位以上眞數之假數,不能一查即得,須用比例計算,方能得其近似值.

(例一) 求 $\log 5456.4$

整數四位,故指標爲3.

次求 $\log 5.4564$.

對數表中無5.4564之對數,然吾人可先求略小於此數之對數與略大於此數之對數,即 $\log 5.456$ 與 $\log 5.457$. 查對數表,得:

$$\log 5.457=0.736954$$

$$\log 5.456=0.736874$$

假定眞數之差額與對數之差額成比例,(實際上略有差異,例如8.537與8.535相差0.002,而8.536與8.535相差0.001,前者適爲後者之倍,但其對數之差額,前者爲0.000101,而後者爲0.000050,前者較大於後者之倍.吾人作此假定者,所以便計算而求其近似值也.)則:

$$(5.457-5.456):(5.4564-5.456)=(\log 5.457-\log 5.456)$$

$$:(\log 5.4564-\log 5.456)$$

設　$$x=\log 5.4564-\log 5.456$$

則 $$0.001 : 0.0004 = 0.000080 : x$$

$$x = 0.000032$$

然實際演算時,x之數值不必如此求得,檢查對數表中之比例部份可也. log 5.457 與 log 5.456 相差 0.000080,故查比例部分 80,又 5.4564 與 5.456 相差 0.0004,故再查 80 一欄中左端之 4,得 32.0 對數表中之假數共有六位小數,故 3 字已在第五位小數,故:

$$x = 0.000032$$

$$\begin{aligned}\log 5.4564 &= \log 5.456 + x \\ &= 0.736874 + 0.000032 \\ &= 0.736906\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \log 5.4564 = 3.736906$$

(例二) 求 log 45.706:

查對數表,得: $\log 4.571 = 0.660011$

$$\begin{array}{r} \log 4.570 = 0.659916 \\ \hline 95 \end{array}$$

查比例部分,得: 57.0

$$\begin{array}{r} 0.659916 \\ 57 \\ \hline 0.659973 \end{array}$$

$$\therefore \quad \log 45.706 = 1.659973$$

(例三) 求 log 0.003854912:

查對數表,得:　$\log 3.855 = 0.586024$

$$\begin{array}{r} \log 3.854 = \underline{0.585912} \\ 112 \end{array}$$

3.854912與3.854相差之數,共有三位數,即912,而比例部分祇有一位數,若欲檢查比例部分,則可捨去其後二位,(四捨五入)故可查比例部分左端之9.若欲詳細計算,則可列成比例求得.

設　$x = \log 3.854912 - \log 3.854$

$$1000 : 912 = 0.000112 : x$$

$$x = 0.000102144$$

$$\log 3.854912 = 0.585912 + 0.000102144$$

$$= 0.586014144$$

$$\therefore \quad \log 0.003854912 = \bar{3}.586014144$$

第四節　由對數表檢查反對數

有時已知某數之對數而欲求某數,即求反對數.反對數之符號為Antilog.設欲求0.562531之反對數,先在對數表之內部求得此數,然後檢查與此同一横行左端之數字及同一縱行上端之數字,得365與2,兩者倂合為一,即得3652,即:

$$\text{antlog } 0.562531 = 3.652$$

通常計算反對數之眞數,不載於表中,故求其反對數時,須檢查略小於此數之反對數與略大於此數之反對數,然後用比例計算.

(例一) 求 antilog 2.552042:

指標爲2,故求得之反對數共有三位整數.

查對數表,得: $\text{antilog}\,0.552060=3.565$

$$\text{antilog}\,0.551938=3.564$$

$$(0.552060-0.551938):(0.552042-0.551938)=(\text{antilog}\,0.552060-\text{antilog}\,0.551938):(\text{antilog}\,0.552042-\text{antilog}\,0.551938)$$

設 $x=\text{antilog}\,0.552042-\text{antilog}\,0.551938$

卽 $0.000122:0.000104=0.001:x$

$$x=0.000852$$

$$\begin{aligned}\text{antilog}\,0.552042&=3.564+0.000852\\&=3.564852\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \text{antilog}\,2.552042=356.4852$$

此題仍亦可應用比例部分.

查對數表,得: $\log 3.565=0.552060$

$$\begin{array}{r}\log 3.564=\underline{0.551938}\\122\end{array}$$

$$\begin{array}{r}0.552042\\\underline{0.551938}\\104\end{array}$$

查比例部分122一欄中,與104相近之數,得109.8其左端爲9,此9字添於3.564之後而成3.5649.

$$\therefore\quad \text{antilog}\,2.552042=356.49$$

(例二) 求 antilog $\bar{3}.8594689$

查對數表,得: $\log 7.236 = 0.859499$

$$\begin{array}{r} \log 7.235 = \underline{0.859439} \\ 60 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.8594689 \\ \underline{0.8594390} \\ 299 \end{array}$$

查比例部分,得5.

$$\therefore \quad \text{antilog}\,\bar{3}.8594689 = 0.0072355$$

第五節　對數表之應用

對數能化乘除爲加減,化乘方開方爲乘除.例如1.045^{100}須將1.045連乘一百次,演算之繁,可以想見.若應用對數表,則此問題卽變爲一極簡易之乘法.又如$\sqrt[5]{13}$非用極複雜之方法,不能求得其根,若應用對數表,則此問題又變爲一極簡易之除法;故對數表實爲一不可缺少之計算工具.玆舉數例於下,以示對數表之應用.

(例一) 求 $x = 3.485 \times 46.28$

應用公式(1),得:

$$\begin{aligned} \log x &= \log 3.485 + \log 46.28 \\ &= 0.542203 + 1.665393 \\ &= 2.207596 \end{aligned}$$

查反對數,得: $\log 1.613 = 0.207634$

$$\begin{array}{r} \log 1.612 = \underline{0.207365} \\ 269 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.207596 \\ \underline{0.207365} \\ 231 \end{array}$$

查比例部分，得 9.

$$\therefore \quad x=161.29$$

（例二）求 $x=\dfrac{4.583}{0.049328}$

應用公式(2)得：

$$\log x=\log 4.583-\log 0.049328$$
$$=0.661150-\bar{2}.693093$$
$$=1.968057$$

查反對數，得：

$$\log 9.291=0.968062$$
$$\log 9.290=\underline{0.968016}$$
$$46$$

$$0.968057$$
$$\underline{0.968016}$$
$$41$$

$$0.001\times\frac{41}{46}=0.00089$$

$$\therefore \quad x=92.9089$$

（例三）求 $x=\dfrac{48.56\times7.3925\times0.04853}{3.164\times0.859\times432.6}$

應用公式(2)，得：

$$\log x=\log(48.56\times7.3925\times0.04853)$$
$$-\log(3.164\times0.859\times432.6)$$

應用公式(1)，得：

$$\log x=(\log 48.56+\log 7.3925+\log 0.04853)$$
$$-(\log 3.164+\log 0.859+\log 432.6)$$

$$\log 48.56 \quad = 1.686279$$

$$\log 7.3925 \quad = 0.868792$$

$$\log 0.04853 = \frac{\bar{2}.686010}{1.241081}$$

$$\log 3.164 \quad = 0.500236$$

$$\log 0.859 \quad = \bar{1}.933993$$

$$\log 432.6 \quad = \frac{2.636087}{3.070316}$$

$$1.241081$$

$$\frac{3.070316}{\bar{2}.170765}$$

查反對數,得:
$$\log 1.482 = 0.170848$$

$$\log 1.481 = \frac{0.170555}{293}$$

$$\begin{array}{r} 0.170765 \\ 0.170555 \\ \hline 210 \end{array}$$

查比例部分,得7.

$$\therefore \quad x = 0.014817$$

(例四) 求 $x = 1.035^{100}$!

應用公式 3) 得:

$$\log x = 100 \log 1.035$$

$$= 100 \times 0.014940$$

$$= 1.4940$$

查反對數,得: $\log 3.119 = 0.494015$

$$\log 3.118 = \underline{0.493876}$$
$$139$$

$$\begin{array}{r} 0.494000 \\ \underline{0.493876} \\ 124 \end{array}$$

查比例部分,得9.

$$\therefore \quad x = 31.189$$

(例五) 求 $x = \sqrt[10]{75.894}$!

應用公式(3),得:

$$\log x = \log 75.894^{\frac{1}{10}} = \frac{1}{10}\log 75.894$$

$$= \frac{1}{10} \times 1.880208$$

$$= 0.1880208$$

查反對數,得:

$$\log 1.542 = 0.1880840$$

$$\log 1.541 = \underline{0.1878030}$$
$$2810$$

$$\begin{array}{r} 0.1880208 \\ \underline{0.1878030} \\ 2178 \end{array}$$

$$0.001 \times \frac{2178}{2810} = 0.000775$$

$$\therefore \quad x = 1.541775$$

(例六) 求 $x = \sqrt[4]{3.869^3}$

$$x=\sqrt[4]{3.869^3}=3.869^{\frac{3}{4}}$$

應用公式(3),得:

$$\log x=\frac{3}{4}\log 3.869$$

$$=\frac{3}{4}\times 0.587599$$

$$=0.44069925$$

查反對數,得:

$$\log 2.759=0.440752$$

$$\log 2.758=\underline{0.440594}$$

$$158$$

$$0.44069925$$

$$\underline{0.440594}$$

$$10525$$

查比例部分,得7.

$$\therefore\quad x=2.7587$$

(例七) 求 $G=\sqrt[5]{65\times59\times58\times62\times57}$!

應用公式(3),得:

$$\log G=\frac{1}{5}\log(65\times59\times58\times62\times57)$$

應用公式(1),得:

$$\log G=\frac{1}{5}(\log 65+\log 59+\log 58+\log 62+\log 57)$$

$$\log 65=1.812913$$

$$\log 59=1.770852$$

$$\log 58 = 1.763428$$

$$\log 62 = 1.792392$$

$$\log 57 = \frac{1.755875}{5)8.895460}$$
$$1.779092$$

查反對數,得:

$$G = 60.13$$

(例八) 解下之方程式:

$$25^{x+3} = 65 \times 6^{x}$$

上式中之指數,係未知數,與普通方程式異,故此方程式,名曰指數方程式 (Exponential equation). 指數方程式,亦須應用對數,蓋若上式之兩邊求其對數,則得:

$$(x+3)\log 25 = \log 65 + x \log 6$$

即 $$1.397940(x+3) = 1.812913 + 0.778151\,x$$

移項得 $$0.619789x = -2.380907$$

令 $$x = -y$$

則 $$y = \frac{2.380907}{0.619789}$$

$$\log y = \log 2.380907 - \log 0.619789$$

$$= 0.376741 - \bar{1}.792245$$

$$= 0.584496$$

求反對數,得: $$y = 3.8415$$

$$\therefore \quad x = -3.8415$$

(例九) 解下之方程式:

$$\log(x-1)-\log(x^2-5x+4)+1=0$$

上式中之對數,係包含未知數各項之對數,與普通方程式異,故此方程式名曰對數方程式(Logarithmic Equation). 解對數方程式,與解指數方程式相反,後者須求兩邊之對數,而前者則須求兩邊之反對數.

$$\log\frac{x-1}{x^2-5x+4}=-1$$

求兩邊之反對數,得:

$$\frac{x-1}{x^2-5x+4}=10^{-1}$$

$$\frac{1}{x-4}=\frac{1}{10}$$

$$x-4=10$$

$$\therefore\quad x=14$$

習題一

1. 已知 $\log 2=0.301030$　$\log 3=0.477121$　$\log 7=0.845098$

求下列各數之對數:

a) 42	*b*) 35	*c*) 343
d) $\sqrt[5]{43218}$	*e*) $\sqrt[3]{294}$	*f*) 625

2. 應用公式(7)求下列各數之自然對數:

a) 5	*b*) 7	*c*) 11
d) 386	*e*) 344	*f*) 1332

3. 應用公式(9)與上題所得之結果求下列各數之常用對數!

a) 5　　*b*) 7　　*c*) 11

d) 386　　*e*) 341　　*f*) 1332

4. 求下列各數之對數!

a) 43.89　　b) 0.003895　　*c*) 0.63453

d) 8693000　　*e* 0.000738649　　*f*) 0.0342864

5. 求下列各數之反對數!

a) 0.60119　　*b*) $\overline{3}.52022$　　*c*) 4.59017

d $\overline{2}.38548$　　*e*) 1.6493568　　*f*) $\overline{2}.4835402$

6. 應用對數表,求:

a) $x=63.45\times 0.05496$

b) $x=\dfrac{385.26}{53.689}$

c) $x=\dfrac{38.54\times 8.3945\times 0.0063984}{1854\times 0.63954\times 38.952}$

d) $x=\dfrac{1.854\times 0.045938\times 0.0038652}{39.84\times 4.3652\times 0.038754}$

e) $x=1.035^{25}$

f) $x=1.0375^{30}$

g) $x=\sqrt[8]{3.594}$

h) $x=\sqrt[10]{3.6534^3}$

i) $G=\sqrt[6]{58\times 62\times 64\times 67\times 54\times 48}$

j) $G=\sqrt[7]{325\times 400\times 385\times 329\times 381\times 401\times 375}$

k) $x=\dfrac{1.0375^{0}-1}{0.0375}$

l) $x=\dfrac{1-1.0375^{-20}}{0.0375}$

7. 解下之指數方程式!

$$356^{x+3}=512\times 284^{x}$$

8. 解下之對數方程式:

$$\log\sqrt{3x+4}+\tfrac{1}{2}\log(5x+1)=1+\log 3$$

本編用公式：

$$\log_a AB = \log_a A + \log_a B \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\log_a A^n = n \log_a A \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\log_{10} e = \frac{1}{\log_e 10} \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\log_e A = \log_e 10 \log_{10} A \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$\log_{10} A = \log_{10} e \log_e A \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$\log_e (n+1) = \log_e n + 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\cdots\right] \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

$$\log_e A = 2.302585 \log_{10} A \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

$$\log_{10} A = 0.4342945 \log_e A \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

第二編 利息

運用他人之資金,而支付之報酬,名曰利息(Interest).銀行以媒介資金與信用(Credit)爲其主要之業務,關於利息之計算,幾無時無之.卽其他一般商業,亦靡不與他人有金錢來往,故咸須計算利息.經營商業者日常所需之流動資本,常借自他人,故每年須支出鉅額之利息.我國各紗廠每年支出之利息,普通大於工人所得工資之總額,故利息實爲計算成本中之重要一項.經營商業者以一時不需之款存入銀行,以備需要時之支用,或於顧客之延期付款者,徵收相當金額,以資補償,故利息之收入,亦幾無日無之.

向人借用之金額,名曰本金(Principal).計算利息所用之百分率,名曰利率(Rate of Interest).使用本金之期間,名曰時期(Time or Term).本金與利息之和,名曰本利合計(Amount).

第一章 單利

計算利息所根據之本金,若在投資期內,假定不變,換言之,卽每期收入之利息,假定不再投資,則投資時期內收入利息之總額,名曰單利息(Simple Interest),而計算單利息之方法,卽名曰單利法.投資期內之本金,旣假定不變,則期內收入

利息之總額,與投資時期成正比例,投資時期愈長,收入之單利息亦愈多,兩者之關係可用下式表示:

$$I = Pin \quad \cdots\cdots (1)$$

I 單利息

P 本金

n 時期

i 利率

上式不特表示單利息與投資時期之關係,且亦表示單利息與本金及利率之關係,蓋單利息亦與本金及利率成正比例也.上式中共有四數,已知其中三數,卽可求得第四數,故公式(1)實表示四數中任何一數與其他三數之關係.

本利合計爲本金與單利息之和,故本利合計與本金,利率,時期亦有一定之關係,其公式如下:

$$S = P(1 + in) \quad \cdots\cdots (2)$$

S 本利合計

P 本金

i 利率

n 時期

本金,單利息,利率,時期,本利合計,爲單利法中之五數,已知此五數中之三數,(但此三數中,至少有一數須爲 i 或 n),卽可求其他二數,學者可根據公式(1)與公式(2),化出各有關公式.

(例一) 本金400元,利率5%,求五年後之單利息!

應用公式(1)得:

$$I=400\times 0.05\times 5=100\text{ 元}$$

(例二) 本金350元,利率$3\frac{1}{2}$%,求八月後之本利合計!

應用公式(2)得:

$$S=350\left(1+0.035\times\frac{8}{12}\right)=350\times 1.023333=358.17\text{ 元}$$

(例三) 本金425元,四年後得單利息102元,求利率!

應用公式(1)得:

$$102=425\times 4\times i$$

$$i=\frac{102}{425\times 4}=\frac{102}{1700}=\frac{6}{100}=6\%$$

(例四) 本金500元,利率7%,問若干年後可得本利合計洋710元?

應用公式(2)得:

$$710=500(1+0.07n)$$

$$1+0.07n=1.42$$

$$0.07n=0.42$$

$$n=\frac{0.42}{0.07}=\frac{42}{7}=6\text{ 年}$$

P, I, i, n, A,爲單利法中之五數,已如上述,此外尙有一數,有時亦爲問題中之一要件.吾人有時欲知本利合計爲本金之二倍,三倍,四倍,……或p倍時所必須經過之時期,此表示倍數

之p即爲單利法中之第六數.p與n之關係,可應用公式(2),依次求得如下:

$$S=P(1+in)$$

$$S=pP$$

即 $$pP=P(1+in)$$

$$p=1+in$$

$$n=\frac{p-1}{i} \quad \cdots\cdots(3)$$

n 時期

i 利率

p 倍數

若 $$p=1$$

則 $$n=0$$

此卽謂本利合計等於本金時,未經過任何時期,換言之,卽爲方投資之時.

(例五) 利率5%,求本利合計爲本金三倍時所必須經過之時期!

應用公式(3)得:

$$n=\frac{3-1}{0.05}=\frac{2}{0.05}=\frac{200}{5}=40\text{ 年}$$

利率有年利率,月利率與日利率之別.以一年爲單位時期而計算利息時所用之利率,名曰年利率.以一月爲單位時期而計算利息時所用之利率,名曰月利率.以一日爲單位時

期而計算利息時所用之利率,名曰日利率.年利率通常用幾分幾釐幾毫表之,年利率一分二釐意即謂12%,年利率七釐五毫意即謂$7\frac{1}{2}$%.月利率通常亦用幾分幾釐幾毫表示,但此之所謂分釐毫,與前迥異,月利率一分二釐,意謂 1.2% 而非12%,學者不可不詳察也.日利率通常用幾毫幾絲表示,所謂幾毫即指萬分之幾而言,故日利率三毫爲 0.03%, 日利率二毫五絲爲 0.025%.

利率若用年利率,則公式中之n爲年數;若用月利率,則n爲月數;若用日利率,則n爲日數.

(例六) 本金300元,日利率三毫五絲,求45日後之單利息!

應用公式(1)得:

$$I = 300 \times 0.00035 \times 45 = 4.73 \text{元}$$

若時期爲日數而利率用年利率,則一年有作爲360日者,有作爲365日或366日(閏年)者.根據360日爲一年而計算之利息,名曰普通利息(Ordinary Interest).根據365日或366日爲一年而計算之利息,名曰準確利息(Exact Interest).德法美等國商業上通用普通利息法,而我國與英日等國則採用準確利息法.

習題二

填寫下列各題中空白之處!

	本金	年利率	時期	單利息	本利合計
1.	\$ 645	$4\frac{1}{2}$%	4年		

2.		5%	2年3月	$112.50	
3.	$400		2年6月	$60	
4.	$550	3½%		$77	
5.		8%	3年3月		$2520
6.	$800	2½%			$1200

求下列各題中之單利息!

	本金	利率	時期
7.	$548	年利率1分2釐	5年
8.	$356	年利率8釐5毫	3年6月
9.	$495	月利率1分	9月
10.	$100	月利率8釐	12月
11.	$100	日利率3毫	360日
12.	$100	日利率3毫	365日

求下列各題中之時期!

	本金	本利合計	年利率
13.	$1000	$2500	5%
14.	$1000	$3000	6%
15.	$1000	$5000	7%

第一節 普通利息

計算日數時,通常以借款日與計息日作爲一日計算,本書中除有特別說明外,均以僅計一日爲標準

普通利息之日數,可自計算年月日,減去借款年月日即得.不論月之大小,一月均以三十日計算.例自民國二十三年九月十一日至民國二十四年十一月二十五日之日數爲434日.其求法如下:

民國　24年11月25日

23年9月11日

1年2月14日

$$1\times 360+2\times 30+14=434\text{日}$$

普通利息可用下之公式求得:

$$I=Pi\times\frac{d}{360}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

I 單利息

P 本金

i 年利率

d 日數

(例一) 本金450元,年利率四釐五毫,求95日之普通利息!

應用公式(4)得:

$$I=450\times 0.045\times\frac{95}{360}=5.34\text{元}$$

計算普通利息,有整除法 (Method of Aliquotation) 與定除數法 (Method of Constant Divisor) 等簡捷法.而整除法又有本金整除法,利率整除法與時期整除法之別.

整除法者,將本金,利率或時期分成數部,使後一部能整除前一部,先求各部利息,然後求其總和之法也.被分之部若爲本金,則爲本金整除法;若爲利率,則爲利率整除法;若爲時期,則爲時期整除法.

令　$P=P_1+P_2+\cdots\cdots+P_m$

則代入公式(1),得:

$$I=Pin=P_1in+P_2in+\cdots\cdots+P_min$$

(例二) 本金 13500 元,年利率六釐,求 120 日之普通利息!

令　$13500=10000+2500+1000$

2500 與 1000 均能整除 10000

$$10000\times0.06\times\frac{120}{360}=200$$

10000 元	200 元
2500 元	50 元
1000 元	20 元
13500 元	270 元

令　$i=i_1+i_2+\cdots\cdots+i_m$

則代入公式(1),得:

$$I=Pin=Pi_1n+Pi_2n+\cdots\cdots+Pi_mn$$

(例三) 本金 4500 元,年利率五釐七毫半,求 100 日之普通利息!

令　$5.75\%=5\%+0.5\%+0.25\%$

0.5% 能整除 5%,而 0.25% 亦能整除 0.5%

$$4500\times0.05\times\frac{100}{360}=6250$$

5%	62.50 元
0.5%	6.25 元
0.25%	3.125 元
5.75%	71.875 元

令
$$n=n_1+n_2+\cdots\cdots+n_m$$

則代入公式(1),得:

$$I=Pin=Pin_1+Pin_2+\cdots\cdots+Pin_m$$

時期整除法又有年法(Year Rule)與一釐法(One Per Cent Method)之別.年法者,先求一年之標準利息,然後依次計算各部利息之法也.一釐法者,先求相當於一釐標準日數之利息,然後依次計算各部利息之法也.

(例四)本金2750元,年利率四釐,求3年4月10日之普通利息!

$$2750\times 0.04=110$$

3年之利息	$330
4月之利息	36.6667
10日之利息	3.0556
3年4月10日之利息	$369.7223

普通利息既以一年作爲360日計算,故年利率若爲六釐,則60日之利息,適爲本金之1%.年利率若爲五釐,則72日之利息,適爲本金之1%.餘可類推.一釐法者,卽應用此原理以求普通利息之一種時期整除法也.其法先製成利息一釐應得之日數表如下:

年利率	利息一釐應得之日數	年利率	利息一釐應得之日數
$1\frac{1}{2}$%	240	3%	120
2%	180	4%	90

$4\frac{1}{2}\%$	08	10%	36
5%	72	12%	30
6%	60	15%	24
8%	45	18%	20
9%	40	20%	18

應用一釐法時,以題中日數,分成數部,其中一部,須爲上表中應得日數,或其倍數.若爲表中應得日數,則將本金之小數點,移上二位,即得此部之利息.若爲應得日數之十倍,則將本金之小數點,移上一位,即得此部之利息.若爲應得日數十分之一,則將本金之小數點,移上三位,即得此部之利息.其他各部之日數,須爲標準日數之分數.其利息即依標準部利息比例計算,將各部之利息相加,即得所求之利息.

(例五)本金 45863 元,年利率四釐五毫,求 124 日之普通利息!

查表得80日

$$124=80+40+4$$

80日之利息	\$458.63
40日之利息	229.315
4日之利息	22.9315
124日之利息	\$710.8765

若題中之利率,爲表中所無,則可兼用利率整除法與時期整除法.例若年利率爲七釐,則可應用一釐法先求六釐之利息,再以其六分之一加之即得.

(例六) 本金45869元,年利率七釐,求66日之普通利息!

	60日之利息	$458.69
	6日之利息	45 869
年利率六釐	66日之利息	$504.559
	+	84.0932
年利率七釐	66日之利息	$588.6522

上題亦可先求年利率八釐之利息,再減去八分之一.

	45日之利息	$458.69
	15日之利息	152 8967
	60日之利息	$611.5867
	6日之利息	61.1587
年利率八釐	66日之利息	$672.7454
	−	84.0932
年利率七釐	66日之利息	$588.6522

上述三種整除法中,本金整除法最少應用,蓋本金常不易分成整除各部也.利率較爲複雜時,應用利率整除法較爲便利.至於時期整除法,則應用甚廣,學者不可不熟諳者也.

若依同一年利率,計算各個本金所生利息之總和,則以應用定除數法計算利息,較爲便利.定除數法者,先就各本金,分別計算其積數,(Interest Figures),而求其總積數,然後由總積數化爲利息之法也.所謂積數,卽本金(以一元爲單位)與日數相乘之積也.設本金爲100元,日數爲45日,則積數爲4500;本金爲250.25元,日數爲40日,則積數爲10010;餘可類推.以一定除數除總積數,卽得所求之利息,此一定除數名曰定

除數 (Fixed or Constant Divisor). 定除數之數值,隨年利率而異,年利率愈高,則定除數之值愈小,年利率愈低,則定除數之值愈大.

設 $P_1, P_2, \cdots\cdots P_n$ 爲各個本金, $d_1, d_2, \cdots\cdots d_n$ 爲各個本金投資日數, $I_1, I_2, \cdots\cdots I_n$ 爲各個本金所生之利息, I 爲各個利息之總和, i 爲公共年利率, 則應用公式(4), 得:

$$I_1 = P_1 i \frac{d_1}{360}$$

$$I_2 = P_2 i \frac{d_2}{360}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$I_n = P_n i \frac{d_n}{360}$$

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + \cdots\cdots + I_n \\ &= P_1 i \frac{d_1}{360} + P_2 i \frac{d_2}{360} + \cdots\cdots + P_n i \frac{d_n}{360} \\ &= \frac{i}{360}(P_1 d_1 + P_2 d_2 + \cdots\cdots + P_n d_n) \\ &= (P_1 d_1 + P_2 d_2 + \cdots\cdots + P_n d_n) \div \frac{360}{i} \end{aligned}$$

上式中 $P_1 d_1, P_2 d_2, \cdots\cdots P_n d_n$ 即爲各個本金之積數, $\frac{360}{i}$ 則爲年利率 i 之定除數, i 爲分數中之分母,分數之數值與分母之數值成反比例,故定除數之數值亦與年利率成反比例,茲將主要年利率之定除數,列表如下:

年利率	定除數	年利率	定除數
二　　釐	18000	七釐五毫	4800
二釐五毫	14400	八　　釐	4500
三　　釐	12000	八釐五毫	4235
三釐五毫	10286	九　　釐	4000
四　　釐	9000	九釐五毫	3789
四釐五毫	8000	一　　分	3600
五　　釐	7200	一分一釐	3273
五釐五毫	6545	一分二釐	3000
六　　釐	6000	一分三釐	2769
六釐五毫	5538	一分四釐	2571
七　　釐	5143	一分五釐	2400

定除數法尤便於活期存款(參看拙著商業算術 99 頁第四編活期存款)之計息,蓋活期存款中之餘額常有變動,計息日數頗不一致,而計算各餘額利息所用之年利率則均相同故也.

(例七) 某銀行活期存款規定年利率三釐,茲據某甲之活期存款賬,得存款餘額與存款日數如下:

存款餘額	存款日數
550 元	48 日
375 元	45 日
525 元	28 日

490元	36日
565元	18日

問某甲應得利息若干元?(一年以360日計算)

$$550\times48=26400$$

$$375\times45=16875$$

$$525\times28=14700$$

$$490\times36=17640$$

$$\frac{565\times18}{\text{總積數}}=\frac{10170}{85785}$$

查定除數表之三釐得12000

$$\frac{85785}{12000}=7.15\text{元}$$

習題三

1. 本金3500元,年利率三釐五毫,求民國十九年三月六日至民國二十一年二月四日間之普通利息!

2. 本金27500元,年利率五釐,應用本金整除法,求72日之普通利息!

3. 應用定除數法,求下表中普通利息之總和(年利率四釐)!

本金	日數
1350元	35
4855元	45
6945元	128
7856元	64
9450元	32
345 50元	16

287.75元	44
5895元	4
1005元	32
2586元	5

4. 應用利率整除法,求下表中之普通利息!

	本金	年利率	日數
(*a*)	3000元	$12\frac{1}{2}\%$	56日
(*b*)	2500元	5.2775%	48日

5. 本金2500元年利率六釐,應用年法,求民國二十年三月四日至民國二十二年六月十六日間之普通利息!

6. 應用一釐法,求下表中之普通利息!

	本金	年利率	日數
(*a*)	4586元	6%	156日
(*b*)	3869元	7%	89日
(*c*)	4857元	$6\frac{1}{2}\%$	75日
(*d*)	8694元	8%	84日
(*e*)	12350元	9%	123日

第二節 準確利息

準確利息,以一年作爲365日或366日.故計算準確利息須以兩時期間,實在經過之日數爲日數.例欲計算五月二十六日至八月十八日之準確利息,須自五月二十六日數至八月十八日,方得準確日數.但爲計算便利起見,可先製成日數推算表(參看拙著商業算術70頁第二節準確利息);計算時,即可由表檢出兩時期之日數,然後相減,而得所求之日數.

(例一) 求自四月十五日至八月五日之準確日數!

15 四月份未經過日數

31 五月

30 六月

31 七月

$\frac{5}{112\text{日}}$ 八月

準確利息,可依下之公式求得:

$$I_1 = Pi \times \frac{d_1}{365} \cdots\cdots (5)$$

$$I_2 = Pi \times \frac{d_2}{366} \cdots\cdots (6)$$

$$I = I_1 + I_2 = Pi\left(\frac{d_1}{365} + \frac{d_2}{366}\right) \cdots\cdots (7)$$

I_1 平年之準確利息

I_2 閏年之準確利息

I 一部平年,一部閏年之準確利息

P 本金

i 年利率

d_1 平年內之日數

d_2 閏年內之日數

(註) 由西歷確定閏年與平年,有一定規則可循.不能以4整除各年,均爲平年,例如西歷1933, 1934, 1935均爲平年.能以4整除而不能以100整除各年,均爲閏年,例如西歷1932, 1936均爲閏年.能以100整除而不能以

400整除各年,均爲平年,例如西歷1700, 1800, 1900均爲平年.能以400整除各年,均爲閏年,例如西歷1600, 2000均爲閏年.

(例二) 本金25000元,年利率五釐,求自1933年十一月五日至1934年三月八日之準確利息!

$$d_1=25+31+31+28+8=123$$

應用公式(5),得:

$$I_1=25000\times0.05\times\frac{123}{365}=421.23\text{元}$$

(例三) 本金3000元,年利率六釐,求自1932年三月五日至同年五月二十日之準確利息!

$$d_2=26+30+20=76$$

應用公式(6),得:

$$I_2=3000\times0.06\times\frac{76}{366}=37.38\text{元}$$

(例四) 本金5000元,年利率八釐,求自1931年八月十八日至1932年四月十二日之準確利息!

(解) 此題計息期間,一部在平年,(1931年八月十八日至同年十二月三十一日)一部在閏年,(1931年十二月三十一日至1932年四月十二日)故計算準確利息,須應用公式(7).

$$d_1=13+30+31+30+31=135$$

$$d_2=31+29+31+12=103$$

$$I = 5000\times 0.08\times\left(\frac{135}{365}+\frac{103}{366}\right)$$

$$=400\times\left(\frac{135}{365}+\frac{103}{366}\right)$$

$$=\frac{54000}{365}+\frac{41200}{366}=260.51\text{ 元}$$

平年計算準確利息,可用除三遞退法 (The Third, Tenth and Tenth Rule, 日人小林行昌譯爲七三法,和田喜八譯爲三分二重一割法) 較爲簡捷.其求法分述如下:

A. $\dfrac{\text{本金}\times\text{年利率}\times\text{日數}\times 2}{1000}$

B. $A\div 3$

C. $B\div 10$(卽 $A\div 30$)

D. $C\div 10$(卽 $A\div 300$)

E. $A+B+C+D$

F. $E-\dfrac{E}{10000}$

(證) $I=Pi\dfrac{d}{365}=\dfrac{2Pid}{730}$

$$\frac{1}{730}=\frac{1370}{730\times 1370}=\frac{137}{100}\times\frac{10}{10001}=\left(1+\frac{37}{100}\right)\times\frac{10}{10001}$$

$$=\left(1+\frac{111}{300}\right)\times\frac{10}{10001}=\left(1+\frac{100}{300}+\frac{10}{300}+\frac{1}{300}\right)$$

$$\times\frac{10}{10001}=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{30}+\frac{1}{300}\right)\times\frac{10}{10001}$$

但 $$\frac{10}{10001}=\frac{10\times9999\times10000000}{10001\times9999\times10000000}=\frac{9999}{10000000}\times\frac{100000000}{99999999}$$

$$=\frac{10000-1}{10000000}\times1.\dot{0}000000\dot{1}$$

$$=\left(\frac{1}{1000}-\frac{1}{10000000}\right)\times1.\dot{0}000000\dot{1}$$

$$\therefore\quad I=2Pid\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{30}+\frac{1}{300}\right)\left(\frac{1}{1000}-\frac{1}{10000000}\right)$$

$$\times1.\dot{0}000000\dot{1}=\frac{2Pid}{1000}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{30}+\frac{1}{300}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{10000}\right)\times1.\dot{0}000000\dot{1}$$

上式中$1.\dot{0}000000\dot{1}$幾與1相等,故求I之近似值時,可略而不計,而I之數值卽可自下式求得:

$$I=\frac{2Pid}{1000}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{30}+\frac{1}{300}\right)\left(1-\frac{1}{10000}\right)$$

$$=A\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{30}+\frac{1}{300}\right)\left(1-\frac{1}{10000}\right)$$

$$=\left(A+\frac{A}{3}+\frac{A}{30}+\frac{A}{300}\right)\left(1-\frac{1}{10000}\right)$$

$$=(A+B+C+D)\left(1-\frac{1}{10000}\right)$$

$$=E\left(1-\frac{1}{10000}\right)$$

$$=E-\frac{E}{10000}$$

(例五) 本金12500元,年利率四釐,求38日之準確利息!

$$12500\times0.04\times38\times2=38000$$

A	38
B	12.6667
C	1.2667
D	0.1267
E	52.0601
	-0.0052
F	52.0549

閏年計算準確利息,年利率若爲六釐,則依法國人壽保險公司會計糜阿蘭(M.Mialin)之經驗,可用下之簡捷法求得:

$$A=\frac{\text{本金}\times\text{日數}}{10000}$$

$$B=A\div2$$

$$C=A\div10$$

$$D=A\div30$$

$$E=A\times0.006$$

$$F=A+B+C+D+E$$

(證) $$I=Pd\times\frac{0.06}{366}=0.00016393\frac{27}{61}Pd$$

$$F=A+B+C+D+E$$

$$=A+\frac{A}{2}+\frac{A}{10}+\frac{A}{30}+0.006\,A$$

$$=\frac{49}{30}A+0.006A=\frac{4918}{3000}A$$

$$=\frac{4918}{3000}\times\frac{Pd}{10000}=0.00016393\frac{1}{3}Pd$$

$0.00016393\frac{27}{61}$ 與 $0.00016393\frac{1}{3}$ 相差不及 0.0000000011, 故以 F 代 I, 錯誤小於 Fd 之 0.0000000011, 若 Fd 小於 9000000, 則錯誤小於 0.0099, 或卽小於百分之一.

(例六) 本金 35000 元, 年利率六釐, 求自 1932 年三月十八日至同年六月一日之準確利息!

1932 年爲閏年

$13+30+31+1=75$ 日

$35000\times75=2625000$

A	262.5
B	131.25
C	26.25
D	8.75
E	1.575
F	430.325

定除數法亦能應用於準確利息之計算, 惟定除數旣以年利率除一年內日數而得, 故準確利息之定除數, 與普通利息之定除數互異, 玆就平年準確利息, 將主要年利率之定除數, 列表如下:

年利率	定除數	年利率	定除數
二　釐	18250	七釐五毫	4867
二釐五毫	14600	八　釐	4563
三　釐	12167	八釐五毫	4294
三釐五毫	10429	九　釐	4056
四　釐	9125	九釐五毫	3842
四釐五毫	8111	一　分	3650
五　釐	7300	一分一釐	3318
五釐五毫	6636	一分二釐	3042
六　釐	6083	一分三釐	2808
六釐五毫	5615	一分四釐	2607
七　釐	5214	一分五釐	2433

(例七) 某銀行活期存款規定年利率三釐,茲據某甲之活期存款帳,得存款餘額與存款日數如下:

存款餘額	存款日數
550元	48日
375元	45日
525元	28日
490元	33日
565元	18日

問某甲應得利息若干元?(一年以365日計算)

$$550 \times 48 = 26400$$

$$375 \times 45 = 16875$$

$$525 \times 28 = 14700$$

$$490 \times 36 = 17640$$

$$565 \times 18 = 10170$$

總積數　85785

查定除數表之三釐得 12167

$$\frac{85785}{12167} = 7.05 \text{ 元}$$

按此題即第一節中之例七，兩者之答數互異，普通利息爲 7.15 元，準確利息爲 7.05 元。計算普通利息與平年準確利息之日數若相等，則兩者之間有一定關係，用公式表之如下：

$$I'' = I' - \frac{I'}{73} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

$$I' = I' + \frac{I''}{72} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

I' 普通利息

I'' 平年準確利息

(證)　設 P 爲本金，i 爲年利率，d 爲日數，則

$$I' = P i \frac{d}{360}$$

$$I'' = P i \frac{d}{365}$$

由第一式得：$Pid = 360\, I'$

由第二式得：$Pid = 365\, I''$

$$\therefore \quad 360\,I' = 365\,I''$$

$$I' = \frac{365}{360}I'' = \left(1+\frac{1}{72}\right)I'' = I' + \frac{I''}{73}$$

$$I'' = \frac{360}{365}I' = \left(1-\frac{1}{73}\right)I' = I' - \frac{I'}{73}$$

試以上題,則得:

$$I' = 7.05 + \frac{7.05}{72} = 7.15$$

$$I'' = 7.15 - \frac{7.15}{73} = 7.05$$

整除數法有時雖亦應用於準確利息之計算,然因不能應用最通行之一釐法,故計算準確利息,鮮有應用整除數法者.

普通利息與準確利息,既有一定關係,故凡普通利息之簡捷法均可間接應用於準確利息,而準確利息之簡捷法,亦均可間接應用於普通利息.

習 題 四

1. 求下列各題中之準確利息!

	本金	年利率	起期 年	月	日	止期 年	月	日	準確利息
(a)	\$ 10000	5%	1931	3	18	1931	8	5	
(b)	4500	6%	1932	1	19	1932	6	8	
(c)	3525	7%	1930	10	9	1931	4	8	
(d)	1875	$6\frac{1}{2}$%	1931	10	9	1932	4	8	
(e)	1525	5%	1933	5	6	1933	9	4	

2. 應用除三遞退法，求下列各題中之準確利息！

	本金	年利率	日數	準確利息
(a)	$25000	6%	123	
(b)	35000	7%	58	
(c)	12500	4%	112	
(d)	38500	5%	64	
(e)	18500	8%	58	

3. 應用定除數法，求下表中利息之總和(年利率五厘)！

(a) 普通利息

(b) 平年準確利息

本金	日數
$385	45
258	65
450	13
7850	12
395	21
685	23
1400	31

4. 計算普通利息與閏年準確利息之日數若相等，則兩者之間有何關係？試求其換算之公式！

5. 本金1000元，年利率6%，求135日之平年準確利息！

(a) 應用除三遞退法.

(b) 應用一釐法先求普通利息，然後化為準確利息.

6. 本金1000元，年利率5%，求86日之普通利息！

(a) 應用一釐法.

(b) 應用除三遞退法先求準確利息，然後化為普通利息.

第二章 複利

複利(Compound Interest)者,每期利息,於每期之末,加入舊本金,而成新本金;再由新本金,計算下期利息之法也,即所謂利上生利是也.債券持票人,盡以其所得利息,購買新債券,以生新利息,此複利法也.銀行存款人,以其應得利息,重行存入,以生新利息,此亦一複利法也.複利法爲投資數學之基礎,蓋一切長期投資,若年金,若債券,若人壽保險,均須應用複利計算故也.

複利法中之本利合計,名曰複利終值(Compound Amount),複利終值與本金之差額,即爲複利息(Compound Interest).單利法中之本金不變,故單利息與本金,利率時期成正比例,複利法則不然,每期之複利息隨本金而漸增,故複利息不能由本金,利率,與時期三者連乘而得.複利終值與複利息,可應用下列二公式求得:

$$S=Pu^{n} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

$$I=S-P=P(u^{n}-1) \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

S 複利終值.

P 本金

i 年利率

n 年數

I 複利息

$u=1+i$

(證)	年初本金	年內利息	年末終值
第一年	P	Pi	$P+Pi=P(1+i)$
第二年	$P(1+i)$	$Pi(1+i)$	$P(1+i)+Pi(1+i)=P(1+i)^2$
第三年	$P(1+i)^2$	$Pi(1+i)^2$	$P(1+i)^2+Pi(1+i)^2=P(1+i)^3$
……	……	……	……
第n年	$P(1+i)^{n-1}$	$Pi(1+i)^{n-1}$	$P(1+i)^{n-1}+Pi(1+i)^{n-1}=P(1+i)^n$

$$\therefore \quad S=P(1+i)^n=Pu^n$$

(例一) 本金一千元,年利率七厘,求三年後之複利終值與複利息!

代入公式(10)得:

$$S=1000\times1.07^3=1225.043\text{ 元}$$

$$I=1225.043-1000=225.043\text{ 元}$$

上題中僅有三年,故尚易計算.若年數增至數十年,則應用公式,須以數十個1.07連乘,非特浪費時間,且一有錯誤,即連累及最後之結果,計算與覆核之煩,實爲事實所不許,複利終值表(表四)者,即所以應此需要而作.表上所載之數,係本金一元依利率i,至n期末之終值也.i與n均詳載表上.試就

上題而論,則可查三期,七釐,而得1.225043,卽本金一元,三年後可得終值1.225043元也.

$$1000\times1.225043=1225.043\text{ 元}$$

有時題中之利率與時期,為複利終值表中所無,則複利終值之計算,須應用對數表.

(例二)本金325元,年利率二釐,求二百年後之複利終值?

代入公式(10),得:

$$S=325\times1.02^{200}$$
$$\log S=\log 325+200\log 1.02$$
$$=2.511883+200\times0.008600$$
$$=4.231883$$
$$\therefore\quad S=17056.24\text{ 元}$$

每年複利次數,隨問題而異.若每年一次,則利息至一年末,始加入本金,以成新本金.若每年二次,則利息至半年末,卽加入本金,以成新本金.債券利息若每年支付一次,則持票人祇能於每年末以其應得利息,購買新債券以生新利息也.反之,若每年支付二次或四次,則持票人於每半年末或每三月末,已能以其應得利息,購買新債券,以生新利息也.前者持票人運用其資金每年祇能複利一次,而後者則能複利至二次或四次.一年內複利之次數愈多,投資者所得之利息愈大.試以本金100元年利率八釐為例,若一年複利一次,則投資者於一年末得複利息洋8元.若一年複利二次,則投資者,於六月末得利息4元,加入舊本金而成新本金104元,更以新

本金按年息八釐生息.於一年末復得利息 4.16 元,故投資者共得複利息 8.16 元.若一年複利四次,則投資者於三月末得利息 2 元,加入舊本金而成新本金 102 元,更以新本金按年息八釐生息,於六月末得利息 2.04 元,更以新本金 104.04 元按年息八釐生息,於九月末得利息 2.0808 元,更以新本金 106.1208 元按年息八釐生息,於一年末得利息 2.122416 元,故投資者共得複利息 8.243216 元.以上三例雖均名爲年利率八釐,然投資者在一年內實際收入之利息,則各各不同.同一本金,同一時期,而實際收入之利息不等,則計算利息之實際利率,亦不一致,故利率有虛利率 (Nominal Rate of Interest) 與實利率 (Effective Rate of Interest) 之別.若每年複利一次,則虛利率與實利率相等;若每年複利不止一次,則實利率大於虛利率,每年複利之次數愈多,兩者之差亦愈甚,其關係可用公式列之如下:

$$i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

$$j=m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1\right] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

i　實利率

j　虛利率

m　每年複利次數

(證) 設 S 爲本金一元一年末之複利終值,則應用公式(10),得:

$$S=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$$

但 $$S=1+i$$

$$\therefore \quad i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1$$

$$1+i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$$

$$1+\frac{j}{m}=(1+i)^{\frac{1}{m}}$$

$$\frac{j}{m}=(1+i)^{\frac{1}{m}}-1$$

$$\therefore \quad j=m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1\right]$$

(例三) 年利率六釐,每年複利四次,求實利率!

代入公式(12),得:

$$i=1.015^4-1=0.06136355$$

(例四) 某銀行規定每年複利二次,存款者欲得年利率六釐之實利率,求虛利率!

代入公式(13),得:

$$j=2(1.06^{\frac{1}{2}}-1)$$

$1.06^{\frac{1}{2}}$ 可查期數不滿一期之複利終值表(表九),得:

$$1.06^{\frac{1}{2}}=1.0295602$$

$$j=2\times 0.02956302=0.05912604$$

由實利率求虛利率,可查實利率化虛利率表(表十)公式(13)中之 m 若代以 p,則得 $j=p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]$,$j$ 之數值隨 p 而異,故可於 j 字之下附以 p 字以區別之,即:

$$j_p = p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]$$

實利率化虛利率表卽根據此式而作，上題中之 $i=6\%$ $p=2$，查表得：

$$j_2 = 0.05912603$$

每年複利次數愈多，實利率亦愈大，然實利率之增加非漫無限制，卽使複利次數連續增加不絕，實利率之數值亦有一定限制，其極大值用公式列之如下：

$$\underset{m\to\infty}{i} = e^j - 1 \qquad (14)$$ (證明參看附錄甲7)

i 實利率

j 虛利率

m 複利次數

e 自然對數之底

(例五) 虛利率六釐，連續複利，求實利率！

代入公式(14)，得：

$$i = e^{0.06} - 1$$

令

$$x = e^{0.06}$$

$$\log_{10} x = 0.06 \log_{10} e$$

$$= 0.06 \times 0.4342945$$

$$= 0.02605767$$

$$x = 1.0618$$

$$\therefore \quad i = 0.0618$$

連續複利之利息，名曰連續複利息，(Continuously Convertible Interest), 而其虛利率, 名曰息力 (Force of Interest), 息力通常用 δ (讀如 Delta) 表示, 其數值可自下之公式求得:

$$\delta = 2.302585 \log_{10} (1+i) \cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

δ 息力

i 實利率

(證) 應用公式 (14), 得:

$$e^{\delta} = 1+i$$

$$\delta \log_{10} e = \log_{10} (1+i)$$

$$\delta = \log_e 10 \log_{10} (1+i)$$

$$= 2.302585 \log_{10} (1+i)$$

(例六) 實利率六釐, 求息力!

代入公式 (15), 得:

$$\delta = 2.302585 \log_{10} 1.06$$

$$= 2.302585 \times 0.025306$$

$$\begin{array}{l} 0.362216 \\ \underline{\bar{2}.403224} \\ \bar{2}.765440 \end{array}$$

$$\delta = \text{Anti} \log \bar{2}.76544 = 0.05827$$

息力與實利率亦可自下列二公式求得:

$$\left.\begin{array}{l} \delta = i - \dfrac{i^2}{2} + \dfrac{i^3}{3} - \dfrac{i^4}{4} + \cdots\cdots (16) \\ i = \delta + \dfrac{\delta^2}{2!} + \dfrac{\delta^3}{3!} + \dfrac{\delta^4}{4!} + \cdots\cdots (17) \end{array}\right\} \text{(證明參看附錄甲 8)}$$

應用公式(16)以解例六,則得:

$$\begin{array}{r} 0.06 \\ +0.000072 \\ \hline 0.060072 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0.0018 \\ +0.00000324 \\ \hline 0.00180324 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0.060072 \\ -0.00180324 \\ \hline 0.05826876 \end{array}$$

應用公式(17)以解例五,則得:

$$\begin{array}{r} 0.06 \\ 0.0018 \\ +0.000036 \\ \hline 0.061836 \end{array}$$

若每年複利不止一次,則公式(10)中之u,可以$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$代入,故複利終值可自下式求得:

$$S=P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm} \cdots\cdots (18)$$

S 複利終值

P 本金

n 年數

m 每年複利次數

j 虛利率

若每年連續複利,則自公式(10)與(14),可化得公式如下:

$$\underset{m\to\infty}{S}=Pe^{n\delta} \cdots\cdots (19)$$

S 複利終值

P 本金

e 自然對數之底

n 年數

δ 息力

(例七) 本金500元,年利率七釐,求十年末之複利終價值!

a) 每年複利一次

b) 每年複利四次

c) 連續複利

a) 代入公式(10),得:

$$S=500\times 1.07^{10}=500\times 1.96715136$$
$$=983.58\text{ 元}$$

b) 代入公式(18),得:

$$S=500\times 1.0175^{40}=500\times 2.00159734$$
$$=1000.80\text{ 元}$$

c) 代入公式(19) 得:

$$S=500\times e^{0.7}$$
$$\log_{10}S=\log_{10}500+0.7\log_{10}e$$
$$=2.698970+0.7\times 0.4342945$$
$$=3.00297615$$
$$\therefore\quad S=1006.88\text{ 元}$$

有時複利終值,爲投資者預定若干年後收到之金額,則此終值爲已知之數,而現當投資之額反猶未知,例如存款者欲於十年後自銀行取得一萬元,則現當存入之額,須經計算求得,由是求得之數,名曰十年後一萬元之現值 (Present Value). 十年後收到之一萬元,與五年後收到之一萬元,雖同爲一萬元,然其現在之價值則迥然不同,蓋五年後收到之一

萬元,再經五年之投資,至十年末之金額,遠在一萬元以上,故同一金額,收到之時期愈早,其現值亦愈大.複利現值公式,可自複利終值公式化得如下:

$$P=Sv^n \cdots\cdots(20)$$

$$P=S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nm} \cdots\cdots(21)$$

$$P=Se^{-n\delta} \cdots\cdots(22)$$

P 複利現值

S 複利終值

n 年數

i 實利率

$v=(1+i)^{-1}$

j 虛利率

δ 息力

m每年複利次數

公式(21)中,若 $m=1$, 則:

$$j=i$$

$$P=S(1+i)^{-n}=Sv^n$$

卽得公式(20).

公式(20)中,若 $S=1$, 則 $P=v^n$, 複利現值表(表五)卽根據此式而作,故複利現值表中所載之現值,乃依年利率 i 投資,在 n 年後收到一元之現值也.

(例八) 某甲欲於十年後積洋一萬元,問現須以若干元存入銀行?

a 年利率八釐,每年複利一次.

b 年利率七釐七毫半,每年複利一次.

c 年利率八釐,每年複利二次

d 年利率八釐,連續複利.

a) 查複利現值表中十年八釐得:

$$v^{10}=0.46319349$$

此爲十年後一元之現值,故十年後一萬元之現值,當爲:

$$P=10000\times 0.46319349=\overset{\text{元}}{4631.93}$$

b) 複利現值表中無年利率 $7\frac{3}{4}\%$, 故須代入公式(20), 然後應用對數表,計算存入金額

$$P=10000\times 1.0775^{-10}$$

$$\log P=4-10\log 1.0775$$

$$=4-0.324180$$

$$=3.675820$$

$$\therefore\quad P=\overset{\text{元}}{4740.46}$$

c) 每年複利不止一次,故須代入公式(21).

$$P=10000\times 1.04^{-20}$$

$$=10000\times 0.45638695$$

$$=\overset{\text{元}}{4563.87}$$

d) 應用公式22,得:

$$P=10000\,e^{-0.8}$$

$$\log_{10}P=4-0.8\log_{10}e$$

$$=4-0.8\times0.4342945$$

$$=3.6525644$$

查反對數,得:

$$P=4493.29\text{ 元}$$

上所述者,爲複利終值與複利現值之計算.若欲求複利時期,則可應用下列三式之一:

$$n=\frac{\log S-\log P}{\log(1+i)}\quad\cdots\cdots(23)$$

$$n=\frac{\log S-\log P}{m\log\left(1+\frac{j}{m}\right)}\quad\cdots\cdots(24)$$

$$n=\frac{2.302585}{\delta}(\log_{10}S-\log_{10}P)\quad\cdots\cdots(25)$$

n 年數

S 複利終值

P 複利現值

i 實利率

j 虛利率

δ 息力

m 每年複利次數

(證)　$S=P(1+i)^n$　(公式10)

$$\log S = \log P + n\log(1+i)$$

$$\log S - \log P = n\log(1+i)$$

$$\therefore \quad n = \frac{\log S - \log P}{\log(1+i)}$$

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm} \qquad \text{(公式 18)}$$

$$\log S = \log P + nm\log\left(1+\frac{j}{m}\right)$$

$$\log S - \log P = nm\log\left(1+\frac{j}{m}\right)$$

$$\therefore \quad n = \frac{\log S - \log P}{m\log\left(1+\frac{j}{m}\right)}$$

$$S = Pe^{n\delta} \qquad \text{(公式 19)}$$

$$\log_{10} S = \log_{10} P + n\,\delta\log_{10} e$$

$$\log_{10} S - \log_{10} P = n\,\delta\log_{10} e$$

$$n = \frac{\log_e 10}{\delta}(\log_{10} S - \log_{10} P)$$

$$\therefore \quad n = \frac{2.302585}{\delta}(\log_{10} S - \log_{10} P)$$

公式 (24) 中, 若 $m=1$, 則:

$$j = i$$

$$n = \frac{\log S - \log P}{\log(1+i)}$$

卽得公式 (23).

若 $\qquad S = pP$

則　$$\log p = \log S - \log P$$

以之代入公式(23),(24)與(25),則得下列三式:

$$n = \frac{\log p}{\log(1+i)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

$$n = \frac{\log p}{m\log\left(1+\frac{j}{m}\right)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

$$n = \frac{2.302585}{\delta}\log p \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

n 年數

p 複利終值與複利現值之比

i 實利率

j 虛利率

δ 息力

m 每年複利次數

$p=2$ 時,卽複利終值為複利現值之二倍時,公式(26)中之複利時期,可自下式求得其近似值:

$$n = \frac{0.693}{i} + 0.35 \cdots\cdots(29)$$ (證明參看附錄甲9)

n 年數

i 實利率

(例九) 本金三千元,依年利率七釐投資,問若干年後可得終值六千元?

a) 每年複利一次

b) 每年複利二次

a) $p=\frac{6000}{3000}=2$

(第一法) 代入公式(26), 得:

$$n=\frac{\log 2}{\log 1.07}=\frac{0.301030}{0.029384}=10\overset{年}{.}245$$

(第二法) 代入公式(29), 得:

$$n=\frac{0.693}{0.07}+0.35=10\overset{年}{.}25$$

b) (第一法) 代入公式(27), 得:

$$n=\frac{\log 2}{2\log 1.035}=\frac{0.301030}{0.029880}=10\overset{年}{.}075$$

(第二法) 化虛利率爲實利率

$$i=1.035^2-1=0.071225$$

代入公式(29), 得:

$$n=\frac{0.693}{0.071225}+0.35=10\overset{年}{.}08$$

實利率與虛利率, 可自下列三公式求得:

$$i=\text{antilog}\ \frac{\log S-\log P}{n}-1 \quad\cdots\cdots(30)$$

$$j=m\left[\text{antilog}\ \frac{\log S-\log P}{n\,m}-1\right] \quad\cdots\cdots(31)$$

$$\delta=\frac{2.302585}{n}(\log_{10} S-\log_{10} P) \quad\cdots\cdots(32)$$

i 實利率

j 虛利率

δ 息力

S 複利終值

P 複利現值

n 年數

m 每年複利次數

(證)
$$S=P(1+i)^n \qquad \text{(公式10)}$$

$$\log S=\log P+n\log(1+i)$$

$$\log(1+i)=\frac{\log S-\log P}{n}$$

$$1+i=\text{antilog}\,\frac{\log S-\log P}{n}$$

$$\therefore\quad i=\text{antilog}\,\frac{\log S-\log P}{n}-1$$

$$S=P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm} \qquad \text{(公式18)}$$

$$\log S=\log P+n\,m\log\left(1+\frac{j}{m}\right)$$

$$\log\left(1+\frac{j}{m}\right)=\frac{\log S-\log P}{n\,m}$$

$$1+\frac{j}{m}=\text{antilog}\,\frac{\log S-\log P}{n\,m}$$

$$\frac{j}{m}=\text{antilog}\,\frac{\log S-\log P}{n\,m}-1$$

$$\therefore\quad j=m\left[\text{antilog}\,\frac{\log S-\log P}{n\,m}-1\right]$$

$$S=Pe^{n\delta} \qquad \text{(公式19)}$$

$$\log_{10} S=\log_{10} P+n\,\delta\log_{10} e$$

$$\log_{10} S-\log_{10} P=n\,\delta\log_{10} e$$

$$\delta=\frac{\log e^{10}}{n}(\log_{10} S-\log_{10} P)$$

$$\therefore\quad \delta=\frac{2.302585}{n}(\log_{10} S-\log_{10} P)$$

公式(31)中,若 $m=1$,則:

$$j=i=\text{antilog}\,\frac{\log S-\log P}{n}-1$$

即公得式(30).

(例十)本金一千元,十年後可得本利合計二千五百元,求年利率!

a) 每年複利一次;

b) 每年複利四次;

c) 連續複利.

a) 代入公式(30),得:

$$i=\text{antilog}\,\frac{\log 2500-\log 1000}{10}-1$$

$$=\text{antilog}\,0.039794-1$$

$$=0.096$$

b) 代入公式(31),得:

$$j=4\left[\text{antilog}\,\frac{\log 2500-\log 1000}{40}-1\right]$$

$$=4(\text{antilog}\ .0099485-1)$$

$$=4\times 0.0232$$

$$=0.0928$$

c) 代入公式(32)，得：

$$\delta=\frac{2.302585}{10}(\log_{10}2500-\log_{10}1000)$$

$$=0.2302585\times 0.397940$$

$$=0.0916$$

習　題　五

1. 求下列各題中之複利終值與複利息！

	本金	年利率	年數	每年複利次數
a)	$450	6%	10	1
b)	500	5%	5	2
c)	550	3%	15	12
d)	600	4%	20	連續複利
e)	650	8%	25	4
f)	700	7%	18	4
g)	750	8%	100	連續複利
h)	800	$4\frac{1}{2}\%$	10	4
i)	850	$4\frac{1}{2}\%$	10	2
j)	900	$4\frac{1}{2}\%$	10	連續複利

2. 化下列各題中之虛利率為實利率！

	虛利率	每年複利次數
a)	6%	2
b)	6%	4

c)	6%	12
d)	6%	365
e)	6%	連續複利

3. 求下列各題中之現值!

	複利終值	年利率	年數	每年複利次數
a)	$1000	6%	10	1
b)	1500	6%	15	2
c)	2000	6%	20	連續複利
d)	2500	$6\frac{3}{4}$%	12	1
e)	3000	$5\frac{1}{2}$%	25	2
f)	3500	7%	30	4
g)	4000	8%	15	1
h)	4500	9%	10	連續複利
i)	5000	10%	5	4
j)	5500	12%	12	1

4. 求下列各題中之時期或利率!

	複利終值	複利現值	每年複利次數	年數	年利率
a)	$4000	$2000	1		8%
b)	4000	2000	2		8%
c)	1500	725	連續複利		7%
d)	2500	1525	4		6%
e)	1000	200	1		8%
f)	3000	2000	1	5	
g)	2000	1500	2	6	
h)	1500	1000	連續複利	7	
i)	4000	3500	4	8	
j)	3500	2500	1	10	

5. 化下列各題中之實利率爲虛利率!

	實利率	每年複利次數
a)	6%	4
b)	6%	連續複利
c)	6%	$\frac{1}{2}$
d)	10%	4
e)	7%	365

6. 上題中(*c*)求得之虛利率,何以大於實利率?試言其故!

7. 同一本金,一用單利5%投資,一用複利$3\frac{1}{2}$%投資,問若干年後,後者之本利合計,超過前者之本利合計?(檢查複利終值表)!

8. 本金1000元,投資三十年,前十年年利率六厘,其後十年年利率五厘,最後十年年利率四厘,求三十年末之複利終值!

9. 同一本金,一用複利5%投資,一用複利3%投資,問若干年後,前者之終值,超過後者終值之二倍?

10. 同一本金,一用單利3%投資,一用複利3%投資,十年後兩者之本利合計相差1097.91元,求最初本金!

11. 某甲以一百萬元,捐於某校,言定此項捐款須依年利率四厘投資,每年收入利息,某校祇能動用半數,其餘一半撥入基金,但基金超過五百萬元時,某校祇須以每年利息四分之一撥入基金,基金超過一千萬元時,某校得動用每年全部利息,問此時距捐款時若干年?

12. 問虛利率六厘,每年複利四次,若改用連續複利,當得息力若干?

第三章 貼現

貼現(Discount)者,定期支付票據之執票人,在未到期前,以票據上所載權利,移讓於人,藉以換取現金之謂也.貼現在商業上之效用甚大,直接能使資金之流轉迅速,間接即所以促進工商業之發展.例如製造商以其出品售於批發商,約定三月後付款,在未到期前,製造商須添購原料,支付工資,均需充分之現金,以資週轉;若製造商得以其對於批發商之權利,轉讓於人,則三月後到期之付款,隨時可變為現金,以維持其繼續不絕之生產,故貼現已成為工商業發展國家流動資金最重要來源之一.美國商業百分之八十五,賴貼現而得流動之資金.

票據貼現既為發展工商業之工具,則欲促進票據之流行,對於票據之執票人,不可不有迅速確實之保障,故各國靡不制定票據法,以利票據之流行.我國票據法,於民國十八年十月三十日公佈施行,而票據法施行法,則於民國十九年七月一日公佈施行.票據法上所載關於票據之種類,各國立法未能一致,德法等國僅以匯票(Bill of Exchange)與本票(Promissory Note)為票據,而我國與英美日等國,則以支票(Check)與

匯票,本票同包含在票據之內.惟支票爲見票卽付票據,故不適於貼現之用.

本票爲債務人約期支付之票據,而匯票則爲債權人命令債務人,於規定時期,付款若干於某人之票據也.故匯票有發票人,受款人與付款人三當事人,而本票祇有發票人與受款人二當事人,蓋本票之發票人卽自爲付款人也.匯票之發票人雖命令付款人定期付款,然付款人苟無承認付款之表示,則匯票到期時付款人無付款之義務,而執票人亦不能強其付款也.故欲使付款人有到期付款之義務,須先使其有承認付款之表示,而此承認付款之表示,卽票據法上所謂承兌(Acceptance)是也,付款人承兌時,以承認到期付款之意,表示於匯票之上.承兌後付款人始負票面金額支付之義務,故爲確定支付義務計,匯票執票人須向付款人提示承兌.

本票或匯票之執票人,以其債權轉讓於人時,除執票人票據(認票不認人)祇須交付卽可流行外,均須簽字於票據之背面,以爲移讓債權之憑證,是謂背書(Indorsement).背書之人,名曰背書人(Indorser),而受讓債權之人,則名曰被背書人(Indorsee).付款人不能支付票據時,背書人亦負支付之責,蓋依票據法之規定,執票人得行使追索權(Right of Recourse)也.所謂追索權,卽匯票遇拒絕付款或拒絕承兌,與本票遇不能付款時,執票人得向發票人,背書人,或票上其他債務人,請求償還票面金額之權也.

票面上所載之金額,名曰面值(Face Value).貼現票據,既未到期,則未到期前之利息,應由貼現人貼補,是謂貼現息(Discount).面值一元在單位時期內支付之貼現息,名曰貼現率(Rate of Discount).自面值內,扣去貼現息,所餘之金額,名曰淨收額(Proceeds,日人譯爲手收金).

發行票據之日,名曰出票日(Date of the Note).到期付款之日,名曰到期日(Date of Maturity).貼現票據之日,名曰貼現日(Date of Discount).自貼現日至到期日之日數,名曰貼現時期(Discount Period).

票據有帶息票據(Interest-Bearing Note)與不帶息票據(Non-Interest-Bearing Note)之別,前者到期時付款人除照付面值外,尙須依票面上規定利率,支付出票日與到期日間之利息,而後者到期時付款人僅照面值付款,而無支付利息之義務也.票據到期時付款人應付之總額,名曰到期值(Maturity Value).帶息票據之到期值大於其面值,而不帶息票據之到期值,則與其面值相等也.貼現票據若爲帶息票據,則貼現率卽爲到期值一元在單位時期內支付之貼現息,而淨收額卽爲到期值與貼現息相差之額.本書中所稱票據,除有特別說明外,均指不帶息票據而言.

請求貼現之票據,通常爲數月期之短期票據,但間亦有數年期之長期票據者.短期票據之貼現,通常應用單利法,而長期票據之貼現,則非應用複利法不可,故貼現又有單貼現

與複貼現之別.

第一節　單貼現

單貼現 (Simple Discount) 者,依單利法計算貼現息之法也.貼現率爲到期值一元在單位時期內支付之貼現息,而淨收額爲到期值與貼現息之差,故單貼現息與淨收額可自下列兩式求得:

$$I=Sdn \cdots\cdots (33)$$

$$P=S-I=S(1-dn) \cdots\cdots (34)$$

I 單貼現息

S 到期值

P 淨收額

d 貼現率

n 年數

貼現人借用之資金,爲淨收額,而非到期值,故貼現人對於借用資金支付之利率,實大於貼現率.利率與貼現率,似同而實異,前者爲計算淨收額 P 在 n 年內之利息所用之百分率,而後者則爲計算到期值 S 在 n 年內之貼現息所用之百分率. I 爲對於到期值 S 之貼現息,亦即爲對於淨收額 P 之利息,故若 i 爲利率,則:

$$I=Pin$$

$$Sdn=Sin(1-dn)$$

$$\therefore\quad i=\frac{d}{1-dn}\quad\cdots\cdots(35)$$

$$d=\frac{i}{1+in}\quad\cdots\cdots(36)$$

上列二式,所以示單利率與單貼現率之關係,據此二式,可作單利率與單貼現率比較對照表如下:

單利率	折合單貼現率			單貼現率	折合單利率		
	一年	六月	三月		一年	六月	三月
%	%	%	%	%	%	%	%
3	2.9126	2.9557	2.9777	3	3.0928	3.0457	3.0227
4	3.8462	3.9216	3.9604	4	4.1667	4.0816	4.0404
5	4.7619	4.8780	4.9383	5	5.2632	5.1282	5.0633
6	5.6604	5.8252	5.9113	6	6.3830	6.1856	6.0914
7	6.5421	6.7633	6.8796	7	7.5269	7.2539	7.1247
8	7.4074	7.6923	7.8431	8	8.6957	8.3333	8.1633
10	9.0909	9.5238	9.7561	10	11.1111	10.5263	10.2564

若依單利率貼現票據,則可應用公式(2)先求淨收額,然後計算貼現息,蓋淨收額卽爲公式(2)中之本金,而到期值卽爲其本利合計也.若依單貼現率貼現票據,則可應用公式(33)先求貼現息,然後計算淨收額.銀行貼現票據,多依單貼現率計算貼現息,蓋以其計算較簡,且於銀行有利也.故後法名曰銀行貼現法,而前法則俗稱確實貼現法.凡計算銀行預收利息之利率,均指貼現率而言.

(例一)某甲以面值一萬元三月後到期之匯票請求貼現,求貼現息與淨收額!

a)依單貼現率6%貼現;

b) 依單利率 6.0914% 貼現.

a) 先求貼現息

應用公式(33),得:

$$I=10000\times\frac{6}{100}\times\frac{1}{4}=150\text{ 元}$$

$$P=10000-150=9850\text{ 元}$$

b) 先求淨收額

應用公式(2)得:

$$10000=P\left(1+\frac{6.0914}{100}\times\frac{1}{4}\right)$$

$$P=10000\div\frac{406.0914}{400}=9850\text{ 元}$$

$$I=10000-9850=150\text{ 元}$$

兩者之答數相同,蓋三月期之單貼現率 6% 與單利率 6.0914% 相等故也.

(例二) 某甲向某乙購貨,共值洋二萬元,除付現金五千元外,餘由某甲開發六月後到期之本票,由乙持向銀行請求貼現,其淨收額應與貨款餘額相等,求面值!

a) 依單利率 7% 貼現;

b) 依單貼現率 6.7633% 貼現.

a) 應用公式(2)得:

$$S=15000\left(1+\frac{7}{100}\times\frac{1}{2}\right)=15525\text{ 元}$$

b) 應用公式(34)得:

$$15000 = S\left(1 - \frac{6.7633}{100} \times \frac{1}{2}\right)$$

$$S = 15000 \div \frac{193.2367}{200} = 15525 \text{ 元}$$

兩者之答數相同,蓋六月期之單利率 7% 與單貼現率 6.7633% 相等故也.

觀此二例,可知淨收額之計算,以根據單貼現率爲較便,而面值之計算,則以根據單利率爲較便.

(例三) 某甲以三月後到期之六釐匯票請求貼現,面值一萬二千元,單貼現率七釐,求貼現息與淨收額!

$$\text{到期值} = 12000 + 12000 \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{4} = 12180 \text{ 元}$$

應用公式(33),得:

$$I = 12180 \times \frac{7}{100} \times \frac{1}{4} = 213.15 \text{ 元}$$

$$P = 12180 - 213.15 = 11966.85 \text{ 元}$$

銀行貼現票據,有以貼現日與到期日,均算入貼現時期之內者,有僅算一日者,本書各題,除有特別說明外,均以後法爲標準.

(例四) 某甲以六月十二日出票三月後到期之匯票,於六月十八日持向銀行請求貼現,面值二萬二千五百元,貼現率六釐,求貼現息與淨收額!(一年作爲365日)

出票日後三月到期,故到期日爲九月十二日.

自貼現日至到期日共有86日.

應用公式(33),得:

$$I=22500\times\frac{6}{100}\times\frac{86}{365}=318.08\text{ 元}$$

$$P=22500-318.08=22181.92\text{ 元}$$

英國票據法上,有所謂恩惠日(Days of Grace 或譯猶豫日)者,卽票據到期後,得猶豫三日,至到期後第三日,始爲法定期日(Legal Due Date),故貼現英國票據時,日數須多算三日.

(例五)七月四日出票,三月後到期之本票,於八月五日在英國貼現,面値 £458.10 S.6 d,貼現率 $2\frac{7}{8}\%$,求貼現息與淨收額!(一年作爲365日)

出票後三月到期,故到期日爲十月四日,而法定期日則爲十月七日.自八月五日至十月七日共有63日.

應用公式(33),得:

$$I=\pounds 458\,{}^{10}/_{6}\times\frac{2\frac{7}{8}}{100}\times\frac{63}{365}=\pounds 2\,{}^{5}/_{6}$$

$$P=\pounds 458\,{}^{10}/_{6}-\pounds 2\,{}^{5}/_{6}=\pounds 456\,{}^{5}/_{-}$$

定理:依單貼現率d貼現之貼現息,與依單利率i貼現之貼現息相差之數,當$d=i$時,卽爲後者在貼現時期依單利率i所生之利息.

(證)設S爲到期值,P爲淨收額,n爲貼現時期,I_1爲依單

貼現率d貼現之貼現息，I_2為依單利率i貼現之貼現息，則：

$$I_1 = Sdn$$

$$I_2 = P\,in = Sin - I_2\,in$$

$$I_1 - I_2 = Sn\,(d-i) + I_2\,in$$

若 $$d = i$$

則 $$Sn(d-i) = 0$$

$$\therefore \quad I_1 - I_2 = I_2 in \cdots\cdots\cdots\cdots(37)$$

（例六）六月後到期之票據，依單貼現率六釐貼現之貼現息，與依單利率六釐貼現之貼現息，相差8.73786元，求面值.

應用公式(37)，得：

$$8.73786 = I_2 \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad I_2 = 8.73786 \times \frac{100}{3} = 291.262$$

但 $$I_2 = Pin = P \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad P = 291.262 \times \frac{100}{3} = 9708.733$$

$$S = P + I_2 = 9708.733 + 291.262 = 10000 \text{ 元}$$

習 題 六

1. 求下列各題中之到期值，貼現息與淨收額！（一年作365日）

	面值	出票日	到期日	貼現日	票據種類	到期值	貼現方法	貼現息	淨收額
a)	\$ 5000	三月十四日	出票後三月	四月十二日	六厘帶息票據		依單貼現率四厘貼現		

b)	5500	四　月 十八日	出票後 六十日	四　月 廿五日	不帶息 票據	依單利率五 厘貼現
c)	6000	五　月 三　日	八　月 十四日	六　月 七　日	不帶息 票據	依單貼現率 六厘貼現
d)	6500	六　月 四　日	九　月 十八日	七　月 八　日	五厘帶 息票據	依單貼現率 七厘貼現
e)	7000	七　月 二　日	十　月 五　日	八　月 一　日	不帶息 票據	依單利率三 厘貼現
f)	8000	七　月 四　日	十　月 五　日	八　月 十八日	不帶息 票據	依單貼現率 四厘貼現

2. 製下列單利率與單貼現率比較對照表!

單利率	折合單貼現率			單貼現率	折合單利率		
	一　月	二　月	三　月		一　月	二　月	三　月
%				%			
3				3			
4				4			
5				5			
6				6			
7				7			
8				8			
9				9			
10				10			

3. 某甲以面值一萬二千五百元六月後到期之匯票請求貼現,求貼現息與淨收額!

a) 依單貼現率 6% 貼現;

b) 依單利率 6.1856% 貼現;

c) 依單利率 6% 貼現;

d) 依單貼現率 5.8252% 貼現.

4. 某甲向某乙購貨,共值洋二萬五千元,除付現金七千五百元外,餘由某甲開發三月後到期之本票,由乙持向銀行請求貼現,其淨收額應與貨款餘額相等,求面值!

a) 依單利率5%貼現;

b) 依單貼現率4.9383%貼現;

c) 依單貼現率5%貼現;

d) 依單利率5.0633%貼現.

5. 六月十五日出票,三月後到期之本票,於七月十二日在英國貼現,面值£396 12/3,貼現率$3\frac{1}{8}$% 求貼現息與淨收額!(一年作爲365日)

6. 某甲向某乙購貨,值洋二萬元,約定三月後付款.設甲欲於半月後付清貨款,問乙可允其減少貨價若干元?(假定某乙能依年利率七厘投資)

7. 某甲向某乙購貨,約定若付現款,僅需洋三萬元,若於六月後付款,則需洋三萬二千元,設甲選擇第一種付款方法,並向銀行借款三萬元,俾得付清貨款,問某甲依最高利率若干付息,方不致受損?

8. 三月後到期之票據,依單貼現率八厘貼現之貼現息,與依單利率八厘貼現之貼現息,相差7.84314元,求面值!

9. 某甲向銀行借款二千五百元,預付半年利息一百五十元,求利率!

10. 某甲向銀行借款一千元,預付半年利息二十五元,設某甲商請銀行到期時付息,借款額仍爲一千元,則到期時某甲須共付本息若干元,銀行方不致受損?

第二節　複貼現

複貼現(Compound Discount)者,依複利法計算貼現息之法也.單貼現之貼淨收額,吾人已知自下式求得:

$$P=S(1-dn)$$

但上式中之n,若等於$\frac{1}{d}$或大於$\frac{1}{d}$,則淨收額爲零或爲負數,兩者均非合理,故長期票據之貼現,不能應用單貼現法.

單貼現中,有依單利率貼現者,亦有依單貼現率貼現者,

複貼現亦然.其依複利率貼現者,貼現票據之淨收額,即爲到期值之現值,故可自複利現值公式求得.其依複貼現率貼現者,則淨收額與貼現息,可自下列二式求得:

$$P=S(1-d)^n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (38)$$

$$I=S-P=S[1-(1-d)^n] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (39)$$

P 淨收額

S 到期值

d 貼現率

n 年數

(證)	年末到期值	貼現息	年初淨收額
到期前一年	S	Sd	$S-Sd=S(1-d)$
到期前二年	$S(1-d)$	$S(1-d)d$	$S(1-d)-S(1-d)d=S(1-d)^2$
到期前三年	$S(1-d)^2$	$S(1-d)^2d$	$S(1-d)^2-S(1-d)^2d=S(1-d)^3$
…………	…………	…………	…………
到期前 n 年	$S(1-d)^{n-1}$	$S(1-d)^{n-1}d$	$S(1-d)^{n-1}-S(1-d)^{n-1}d=S(1-d)^n$

$$\therefore\quad P=S(1-d)^n$$

$$I=S-S(1-d)^n=S[1-(1-d)^n]$$

利率有實利率與虛利率之分,貼現率亦有實貼現率(Effective Rat of Discount)與虛貼現率(Nominal Rate of Discount)之別.設銀行以一萬元連續投資於半年期票據之貼現;另以一萬元連續投資於三月期票據之貼現,則雖依據同一貼現率貼現,銀行對一年後到期值一元實際取得之貼現息則

迥異,換言之,即其實際計算貼現息之貼現率,二者互異.何則?設二者均依貼現率6%貼現,則前者現可貼現到期值 10309.28 元 $\left(\dfrac{10000}{1-\dfrac{3}{100}}=10309.28\right)$ 之票據,至六月後即以收到之 10309.28 元貼現到期值 10628.12 元 $\left(\dfrac{10309.28}{1-\dfrac{3}{100}}=10628.12\right)$ 之票據若是則對於一年後到期值一元,銀行僅得貼現息 $\dfrac{10628.12-10000}{10628.12}$ 即 0.05910 元,故名義上貼現率為6%,實際上貼現率為5.910%,前者名曰虛貼現率,後者名曰實貼現率.若銀行以一萬元連續投資於三月期票據之貼現,則於投資之初,可貼現到期值 10152.28 元 $\left(\dfrac{10000}{1-\dfrac{1.5}{100}}=10152.28\right)$ 之票據,至三月後即以收到之 10152.28 元貼現到期值 10306.88元 $\left(\dfrac{10152.28}{1-\dfrac{1.5}{100}}=10306.88\right)$ 之票據,至六月後即以收到之 10306.88 元貼現到期值 10463.84 元 $\left(\dfrac{11306.88}{1-\dfrac{1.5}{100}}=10463.84\right)$ 之票據,至九月後即以收到之 10463.84 元貼現到期值 10623.19 元 $\left(\dfrac{10463.84}{1-\dfrac{1.5}{100}}=10623.19\right)$ 之票據,若是則對於一年後到期值一元,銀行僅得貼現息 $\dfrac{10623.19-10000}{10623.19}$ 即 0.05866 元,故虛貼現率為6%,而實貼現率僅有5.866%.連續投資於半年期票據之貼現,則資金每年運轉二次;連續投資於三月期票據之貼現,則資金每年運轉四次資金之運轉,若每年一次,則實貼現率與虛貼現率相等;

若每年不止一次,則實貼現率小於虛貼現率,運轉之次數愈多,其相差亦愈甚.實貼現率與虛貼現率之關係如下:

$$d=1-\left(1-\frac{f}{m}\right)^{m} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (40)$$

$$f=m\left[1-(1-d)^{\frac{1}{m}}\right] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (41)$$

d 實貼現率

f 虛貼現率

m 每年運轉次數

(例一) 化虛貼現率8%為實貼現率!

a) 每年運轉二次;

b) 每年運轉四次.

代入公式(40),得:

$$a)\ d=1-\left(1-\frac{4}{100}\right)^{2}=1-\frac{96^{2}}{10000}=1-\frac{9216}{10000}=7.84\%$$

$$b)\ d=1-\left(1-\frac{2}{100}\right)^{4}=1-\frac{98^{4}}{100^{4}}=1-\frac{92236816}{100000000}=7.763184\%$$

(例二) 化實貼現率5%為虛貼現率!

a) 每年運轉二次;

b) 每年運轉四次.

代入公式(41),得:

$$a)\ f=2\left[1-(1-0.05)^{\frac{1}{2}}\right]=2(1-0.97468)=5.064\%$$

$$b)\ f=4\left[1-(1-0.05)^{\frac{1}{4}}\right]=4(1-0.987259)=5.0964\%$$

每年運轉次數愈多,實貼現率愈小,但亦非漫無限制,連續運轉之實貼現率,可自下之公式求得:

$$\underset{m\to\infty}{d}=1-e^{-f}\cdots\cdots\cdots\cdots(42)$$ (證明參看附錄甲10)

d 實貼現率

f 虛貼現率

m 每年運轉次數

e 自然對數之底

運轉不停之虛貼現率,名曰貼現力 (Force of Discount), 通常以δ'表之.

應用公式(42),得:

$$d=1-e^{-\delta'}$$

$$e^{-\delta'}=1-d$$

$$-\delta'=\log_e(1-d)$$

$$\delta'=-\log_e 10\log_{10}(1-d)$$

$$\therefore\quad \delta'=-2.302585\log_{10}(1-d)\cdots\cdots\cdots\cdots(43)$$

貼現力與實貼現率亦可自下列二式求得:

$$\delta'=d+\frac{d^2}{2}+\frac{d^3}{3}+\frac{d^4}{4}+\cdots\cdots(44$$ (證明參看附錄甲11)

$$d=\delta'-\frac{\delta'^2}{2!}+\frac{\delta'^3}{3!}-\frac{\delta'^4}{4!}+\cdots\cdots(45)$$ (證明參看附錄甲11)

δ' 貼現力

d 實貼現率

以上兩式中,若僅欲求其近似數,則可截取前二項.

(例三) 實貼現率5%,求貼現力!

(第一法) 應用公式(43),得:

$$\delta' = -2.302585 \log_{10} 0.95 = -2.302585 \times \bar{1}.977724$$

$$= 2.302585 \times 0.022276 = 0.05129238346$$

(第二法) 應用公式(44),得:

$$\delta' = 0.05 + \frac{0.05^2}{2} + \frac{0.05^3}{3} + \frac{0.05^4}{4} + \cdots\cdots$$

$$\begin{array}{l} 0.05 \\ 0.00125 \\ 0.000041667 \\ 0.0000015625 \\ \underline{0.0000000625} \\ 0.0512932920 \end{array}$$

若僅求其近似數,則得:

$$0.05 + 0.00125 = 0.05125$$

(例四) 貼現力5%,求實貼現率!

(第一法) 應用公式(42),得:

$$d = 1 - e^{-0.05}$$

令 $$x = e^{-0.05}$$

$$\log_{10} x = -0.05 \times 0.4342945$$

$$\log_{10} x = \bar{1}.978285275$$

$$x = 0.9512295$$

$$\therefore \quad d = 1 - 0.9512295 = 0.0487705$$

(第二法) 應用公式(45),得:

$$d=0.05-\frac{0.05^2}{2!}+\frac{0.05^3}{3!}-\frac{0.05^4}{4!}+\cdots\cdots$$

+	−
0.5	0.00125
0.000020833	0.000000260
0.050020833	0.001250260

$$\begin{array}{r} -0.001250260 \\ \hline 0.048770573 \end{array}$$

若僅求其近似數,則得:

$$0.05-0.00125=0.04875$$

若每年運轉不止一次,則公式(38)中之$(1-d)$,可以$\left(1-\frac{f}{m}\right)^m$或$e^{-\delta'}$代入,故複貼現淨收額可自下式求得:

$$P=S\left(1-\frac{f}{m}\right)^{nm} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (46)$$

$$P=Se^{-n\delta'} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (47)$$

P 淨收額

S 到期值

n 年數

m 每年運轉次數

f 虛貼現率

δ' 貼現力

e 自然對數之底

單利率與單貼現率有一定之關係,複利率與複貼現率亦然,其關係用公式表之如下:

$$\delta=\delta' \quad \cdots\cdots (48)$$

$$j=\frac{mf}{m-f} \quad \cdots\cdots (49)$$

$$f=\frac{mj}{m+j} \quad \cdots\cdots (50)$$

$$i=\frac{d}{1-d} \quad \cdots\cdots (51)$$

$$d=\frac{i}{1+i} \quad \cdots\cdots (52)$$

δ 息力

δ' 貼現力

j 虛利率

i 實利率

f 虛貼現率

d 實貼現率

m 每年複利次數或轉運次數

(證)　$$Se^{-n\delta}=Se^{-n\delta'} \qquad \text{(公式 22 與 47)}$$

$$-n\delta=-n\delta'$$

$$\therefore\quad \delta=\delta'$$

$$S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nm}=S\left(1-\frac{f}{m}\right)^{nm} \qquad \text{(公式 21 與 46)}$$

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nm}=\left(1-\frac{f}{m}\right)^{nm}$$

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-1}=1-\frac{f}{m}$$

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)\left(1-\frac{f}{m}\right)=1$$

$$1+\frac{j}{m}-\frac{f}{m}-\frac{jf}{m^2}=1$$

$$mj-mf-jf=0$$

$$\therefore \quad j=\frac{mf}{m-f}$$

$$f=\frac{mj}{m+j}$$

若 $$m=1$$

則 $$j=i$$

$$f=d$$

$$i=\frac{d}{1-d}$$

$$d=\frac{i}{1+i}$$

(例五) 某甲以票面值一千元三年後到期之票據請求貼現,求淨收額與貼現息!

a) 依複貼現率6%貼現;

b) 依複利率6.383%貼現.

a) 應用公式(38),得:

$$P=1000\times 0.94^3 \quad =830.58\text{ 元}$$

$$I=1000-830.58=169.42\text{ 元}$$

b) 應用公式(20),得:

$$P=1000\times 1.06383^{-3}$$

$$\log P=3-3\times 0.02687247=2.91938259$$

$$P=830.58\text{ 元}$$

$$I=1000-830.58=169.42\text{ 元}$$

兩者之結果相同,蓋複貼現率6%與複利率6.383%相等故也.

(例六) 某甲以面值一千五百元五年後到期之票據請求貼現,求淨收額與貼現息!

a) 依複貼現率8%貼現,每年運轉四次;

b) 依複利率8.1633%貼現,每年複利四次.

a) 應用公式(46),得:

$$P=1500\times 0.98^{20}$$

$$\log P=3.176091+20\times\bar{1}.991226=3.000611$$

$$\therefore\quad P=1001.41\text{ 元}$$

$$I=1500-1001.41=498.59\text{ 元}$$

b) 應用公式(18),得:

$$P=1500\times 1.02040825^{-20}$$

$$\log P=3.176091-20\times 0.0087739145=3.00061271$$

$$P=1001.41\text{ 元}$$

$$I=1500-1001.41=498.59\text{ 元}$$

兩者之結果相同,蓋複貼現率8%與複利率8.1633%相等故也.

(例七) 某甲以面值五百元三年後到期之票據請求貼現,求淨收額與貼現息!

a) 依貼現力6%貼現;

b) 依息力6%貼現.

$$\left.\begin{array}{l} a) \text{ 應用公式 } (47) \\ b) \text{ 應用公式 } (22) \end{array}\right\} \text{得:}$$

$$P=500\,e^{-0.18}$$

$$\log_{10} P=2.698970-0.18\times 0.4342945$$

$$=2.62079699$$

$$\therefore\quad P=417.64 \text{ 元}$$

$$I=500-417.64=82.36 \text{ 元}$$

習 題 七

1. 化下列各題中之虛貼現率爲實貼現率!

	虛貼現率	每年運轉次數	實貼現率
a)	6%	二次	
b)	6%	四次	
c)	6%	連續運轉	
d)	5%	二次	
e)	4%	十二次	

2. 化下列各題中之實貼現率爲虛貼現率!

	實貼現率	每年運轉次數	虛貼現率
a)	6%	二次	
b)	6%	四次	
c)	6%	連續運轉	
d)	5%	二次	
e)	4%	十二次	

3. 化下列各題中之複利率爲複貼現率!

	複利率	每年複利次數或運轉次數	複貼現率
a)	6%	二次	

b)	6%	四次
c)	6%	一次
d)	5%	二次
e)	4%	十二次

4. 化下列各題中之複貼現率爲複利率!

	複貼現率	每年複利次數或運轉次數複利率
a)	6%	二次
b)	6%	四次
c)	6%	一次
d)	5%	二次
e)	4%	十二次

5. 某甲以面值七百五十元三年後到期之票據請求貼現,求淨收額與貼現息!

a) 依複貼現率7%貼現;

b) 依複利率7.5269%貼現;

c) 依複利率7%貼現;

d) 依複貼現率6.5421%貼現.

6. 某甲以面值六百五十元四年後到期之票據請求貼現,求淨收額與貼現息!

a) 依複貼現率6%貼現,每年運轉二次;

b) 依複利率6.1856%貼現,每年運轉二次;

c) 依複利率6%貼現 每年運轉二次;

d) 依複貼現率5.8252%貼現,每年運轉二次.

7. 某甲以面值八百五十元五年後到期之票據請求貼現,求淨收額與貼現息;

a) 依單貼現率8%貼現;

b) 依複貼現率8%貼現;

c) 依複貼現率8%貼現,每年運轉二次;

d) 依複貼現率 8% 貼現, 每年運轉二次;

e) 依複貼現率 8% 貼現, 每年連續運轉.

8. 實貼現率 6%, 求貼現力!

a) 應用公式 (43);

b) 應用公式 (44).

第四章 價值方程式

兩票據在同一時日,依同一利率或同一貼現率貼現,若得同一淨收額,則在此時日,此兩票據名曰等值票據(Equivalent Notes),而此時日,名曰兩票據等值日 (Date of Equivalence of two Notes). 到期值 S_1 在 n_1 年後到期之票據,若與到期值 S_2 在 n_2 年後到期之票據等值,則在貼現時兩者之淨收額相等,以方程式表之,卽得:

$S_1(1-dn_1)=S_2(1-dn_2)$(若依單貼現率 d 貼現)

$\frac{S_1}{1+in_1}=\frac{S_2}{1+in_2}$(若依單利率 i 貼現)

$S_1(1-d)^{n_1}=S_2(1-d)^{n_2}$(若依複貼現率 d 貼現)

$S_1(1+i)^{-n_1}=S_2(1+i)^{-n_2}$(若依複利率 i 貼現)

以上諸方程式,均所以表示兩票據等值之關係,故此方程式,名曰價值方程式,(Fquation of Value). 價值方程式不以表示兩票據之等值爲限,方程式所表示等值之票據,可多至數張或數十張者,若 l 張票據之總淨收額與 k 張票據之總淨收額相等,則價值方程式卽可用以表示 l 張票據與 k 張票據之等值. 欲以 l 張票據掉換 k 張票據,祇須使其在貼現時之淨收額相等,換言之,祇須將兩者之淨收額列成價值方程式,

由此方程式即可求票據掉換中之未知一項.貼現有單貼現與複貼現之分,故列成價值方程式,亦有單貼現法與複貼現法之別.

第一節 單貼現法

定理二: 到期值不等且未到期之兩票據,在同一時日,依兩種不同之單貼現法貼現,(一依單貼現率 r 貼現,一依單利率 r 貼現)不能均爲等值.

(證) 設 S_1 爲 n_1 年後到期票據之到期值,S_2 爲 n_2 年後到期票據之到期值.

$$S_1 \neq S_2$$

$$n_1 > 0$$

$$n_2 > 0$$

若依單貼現率 r 貼現而其淨收額相等,則得價值方程式如下:

$$S_1(1-rn_1)=S_2(1-rn_2)$$

即
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{1-rn_2}{1-rn_1}$$

若依單利率 r 貼現而其淨收額亦等,則得價值方程式如下:

$$\frac{S_1}{1+rn_1}=\frac{S_2}{1+rn_2}$$

即
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{1+rn_1}{1+rn_2}$$

$$\therefore \quad \frac{1-rn_2}{1-rn_1}=\frac{1+rn_1}{1+rn_2}$$

$$1-r^2n_2{}^2=1-r^2n_1{}^2$$

$$n_2{}^2=n_1{}^2$$

$$n_2=\pm n_1$$

若 $$n_2=n_1$$

則 $$S_1=S_2$$

但 $S_1 \neq S_2$, 故此結果為不合理.

若 $n_2=-n_1$

則兩者之一為負數, 故與未到期之假定亦抵觸. 故兩票據不能依兩種不同之單貼現法貼現而均為等值.

例如到期值7900元在六月後到期之票據, 與到期值7800元在三月後到期之票據, 若依單貼現率5%貼現則為等值, 但若依單利率5%貼現則為不等值. 又如到期值4100元在六月後到期之票據, 與到期值4050元在三月後到期之票據, 若依單利率5%貼現則為等值, 但若依單貼現率5%貼現則為不等值.

定理三: 到期值不等之兩票據, 若現依單貼現法貼現而為等值, 則在等值日前後不能更為等值.

(證) 設 S_1 為 n_1 年後到期票據之到期值, S_2 為 n_2 年後到期票據之到期值.

$$S_1 \neq S_2$$

a) 若現依單貼現率 d 貼現而其淨收額相等, 則得價值方

程式如下:

$$S_1(1-dn_1)=S_2(1-dn_2)$$

即
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{1-dn_2}{1-dn_1}$$

若在p(p或正或負)年後依單貼現率d貼現而其淨收額亦相等,則得價值方程式如下:

$$S_1[1-d(n_1-p)]=S_2[1-d(n_2-p)]$$

即
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{1-d(n_2-p)}{1-d(n_1-p)}$$

$$\therefore \quad \frac{1-dn_2}{1-dn_1}=\frac{1-d(n_2-p)}{1-d(n_1-p)}$$

$$(1-dn_2)(1-dn_1+dp)=(1-dn_1)(1-dn_2+dp)$$

$$1-dn_1+dp-dn_2+d^2n_1n_2-d^2n_2p$$

$$=1-dn_2+dp-dn_1+d^2n_1n_2-d^2n_1p$$

$$d^2n_2p=d^2n_1p$$

即
$$n_2=n_1$$

以之代入價值方程式,則得:

$$S_1=S_2$$

但
$$S_1\neq S_2$$

故此結果爲不合理,即兩票據在等值日前後不能更爲等值.

例如到期值7900元在六月後到期之票據,與到期值7800元在三月後到期之票據,若現依單貼現率5%貼現則爲等

值，但若在一月後或一月前依單貼現率 5% 貼現則爲不等值.

b) 若現依單利率 i 貼現而其淨收額相等，則得價值方程式如下:

$$\frac{S_1}{1+in_1}=\frac{S_2}{1+in_2}$$

即
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{1+in_1}{1+in_2}$$

若在 p (p 或正或負) 年後依單利率 i 貼現而其淨收額亦相等，則得價值方程式如下:

$$\frac{S_1}{1+i(n_1-p)}=\frac{S_2}{1+i(n_2-p)}$$

即
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{1+i(n_1-p)}{1+i(n_2-p)}$$

$$\therefore\quad \frac{1+in_1}{1+in_2}=\frac{1+i(n_1-p)}{1+i(n_2-p)}$$

$$(1+in_1)(1+in_2-ip)=(1+in_2)(1+in_1-ip)$$

$$1+in_2-ip+in_1+i^2n_1n_2-i^2n_1p$$

$$=1+in_1-ip+in_2+i^2n_1n_2-i^2n_2p$$

$$i^2n_1p=i^2n_2p$$

$$n_1=n_2$$

以之代入價值方程式，則得:

$$S_1=S_2$$

但
$$S_1\neq S_2$$

故此結果爲不合理,即兩票據在等值日前後不能更爲等值.

例如到期值4100元在六月後到期之票據,與到期值4050元在三月後到期之票據,若現依單利率5%貼現則爲等值,但若在一月後或一月前依單利率5%貼現則爲不等值.

關於兩票據之等值,吾人可設下列三問:

1. 以甲票掉換乙票,甲票之到期值當爲幾何?

2. 以甲票掉換乙票,甲票應在何時到期?

3. 甲乙兩票應在何日等值?

吾人將應用價值方程式,依次求其公式於下.

1. 求新票之到期值

a) 依單貼現率貼現:

$$S'=\frac{S(1-dn)}{1-dn'} \cdots\cdots\cdots (53)$$

b) 依單利率貼現:

$$S'=\frac{S(1+in')}{1+in} \cdots\cdots\cdots (54)$$

S' 新票之到期值

S 舊票之到期值

n' 新票之貼現時期

n 舊票之貼現時期

d 單貼現率

i 單利率

上列兩式自價值方程式化出學者可自證之.

(例一) 到期值5800元於六十日後到期之票據,其付款人欲更換一張七十日後到期之票據,求新票之到期值!(一年作爲360日)

a) 依單貼現率 4% 貼現;

b) 依單利率 4% 貼現.

a) 代入公式(53),得:

$$S'=\frac{5800\left(1-\frac{4}{100}\times\frac{60}{360}\right)}{1-\frac{4}{100}\times\frac{70}{360}}=\frac{5800(9000-60)}{9000-70}$$

$$=\frac{5800\times 8940}{8930}=5806.49\text{ 元}$$

b) 應用公式(54),得:

$$S'=\frac{5800\left(1+\frac{4}{100}\times\frac{70}{360}\right)}{1+\frac{4}{100}\times\frac{60}{360}}=\frac{5800(9000+70)}{9000+60}$$

$$=\frac{5800\times 9070}{9060}=5806.40\text{ 元}$$

2. 求新票之貼現時期

a) 依單貼現率貼現:

$$n'=\frac{S'-S(1-dn)}{dS'}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(55)$$

b) 依單利率貼現:

$$n'=\frac{S(1+in)-S'}{iS}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(56)$$

n' 新票之貼現時期

n 舊票之貼現時期

S' 新票之到期值

S 舊票之到期值

d 單貼現率

i 單利率

(證) a) $S'(1-dn')=S(1-dn)$

$$1-dn'=\frac{S(1-dn)}{S'}$$

$$dn'=\frac{S'-S(1-dn)}{S'}$$

$$\therefore\quad n'=\frac{S'-S(1-dn)}{dS'}$$

b) $$\frac{S'}{1+in'}=\frac{S}{1+in}$$

$$1+in'=\frac{S'(1+in)}{S}$$

$$in'=\frac{S'(1+in)-S}{S}$$

$$\therefore\quad n'=\frac{S'(1+in)-S}{iS}$$

(例二) 到期值1060元於八十五日後到期之票據,其付款人欲更換一張到期值1050元之票據,問新票應在若干日後到期? (一年作爲360日)

a) 依單貼現率6%貼現;

b) 依單利率6%貼現.

a) 應用公式(55),得:

$$n'=\frac{1050-1060\left(1-\frac{6}{100}\times\frac{85}{360}\right)}{\frac{6}{100}\times 1050}=\frac{1050\times 6000-1060(6000-85)}{360\times 1050}$$

$$=\frac{6300000-1060\times 5915}{360\times 1050}=\frac{30100}{360\times 1050}\text{年}=\frac{30100}{1050}\text{日}$$

$$=28\frac{2}{3}\text{日}$$

b) 應用公式(56),得:

$$n'=\frac{1050\left(1+\frac{6}{100}\times\frac{85}{360}\right)-1060}{\frac{6}{100}\times 1060}=\frac{1050(6000+85)-1060\times 6000}{360\times 1060}$$

$$=\frac{1050\times 6085-6360000}{360\times 1060}=\frac{29250}{360\times 1060}\text{年}=\frac{29250}{1060}\text{日}$$

$$=27\frac{63}{106}\text{日}$$

3.　求甲乙兩票之等值時期

a) 依單貼現率貼現:

$$x=\frac{S_1n_1-S_2n_2}{S_1-S_2}-\frac{1}{d}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(57)$$

b) 依單利率貼現:

$$x=\frac{S_1n_2-S_2n_1}{S_1-S_2}+\frac{1}{i}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(58$$

x　甲乙兩票等值時距今之年數

S_1　甲票之到期值

S_2　乙票之到期值

n_1 甲票到期時距今之年數

n_2 乙票到期時距今之年數

d 單貼現率

i 單利率

(證) a) $S_1[1-d(n_1-x)]=S_2[1-d(n_2-x)]$

$$S_1-S_1d(n_1-x)=S_2-S_2d(n_2-x)$$

$$S_1-S_1dn_1+S_1dx=S_2-S_2dn_2+S_2dx$$

$$(S_1-S_2)dx=d(S_1n_1-S_2n_2)+S_2-S_1$$

$$\therefore \quad x=\frac{S_1n_1-S_2n_2}{S_1-S_2}-\frac{1}{d}$$

b) $\dfrac{S_1}{1+i(n_1-x)}=\dfrac{S_2}{1+i(n_2-x)}$

$$S_1+S_1i(n_2-x)=S_2+S_2i(n_1-x)$$

$$S_1+S_1in_2-S_1ix=S_2+S_2in_1-S_2ix$$

$$(S_2-S_1)ix=i(S_2n_1-S_1n_2)+S_2-S_1$$

$$\therefore \quad x=\frac{S_1n_2-S_2n_1}{S_1-S_2}+\frac{1}{i}$$

(例三) 到期值7900元於七月後到期之票據,與到期值7800元於四月後到期之票據,在何時等值?

a) 依單貼現率5%貼現;

b) 依單利率5%貼現.

a) 應用公式(57),得:

$$x=\frac{7900\times\frac{7}{12}-7800\times\frac{4}{12}}{7900-7800}-\frac{1}{0.05}$$

$$=\frac{55300-31200}{1200}-20=\frac{1}{12}\text{年}=1\text{月}$$

即甲乙兩票在一月後等值.

b) 應用公式(58),得:

$$x=\frac{7900\times\frac{4}{12}-7800\times\frac{7}{12}}{7900-7800}+\frac{1}{0.05}$$

$$=\frac{31600-54600}{1200}+20=\frac{10}{12}\text{年}=10\text{月}$$

即甲乙兩票在十月後等值,但甲乙兩票至十月後均已過期,故此問題爲不可能.

(例四) 到期值 4100 元於五月後到期之票據,與到期值 4050 元於二月後到期之票據,在何時等值?

a) 依單利率 5% 貼現;

b) 依單貼現率 5% 貼現.

a) 應用公式(58),得:

$$x=\frac{4100\times\frac{2}{12}-4050\times\frac{5}{12}}{4100-4050}+\frac{1}{0.05}$$

$$=\frac{8200-20250}{600}+20=-\frac{1}{12}\text{年}=-1\text{月}$$

即甲乙兩票在一月前等值.

b) 應用公式(57),得:

$$x=\frac{4100\times\frac{5}{12}-4050\times\frac{2}{12}}{4100-4050}-\frac{1}{0.05}$$

$$=\frac{20500-8100}{600}-20=\frac{8}{12}\text{年}=8\text{月}$$

即甲乙兩票在八月後等值,但甲乙兩票至八月後均已過期,故此問題爲不可能.

若以一新票更換無數舊票,則此新票之到期值或其到期日,須應用價值方程式求得.新票之到期值,或與各舊票到期值之總額相等,或不相等.新票之到期日,名曰共同期日(Common Due Date).若新票之到期值與各舊票到期值之總額相等,則此共同期日名曰平均期日(Average Due Date),故平均期日爲共同期日之特別情形.

新票之到期值,可自下列公式求得:

a) 依單貼現率貼現:

$$S'=\frac{\sum S_1-d\sum(S_1 n_1)}{1-dn'} \quad \text{(59)}$$

b) 依單利率貼現:

$$S'=(1+in')\sum\frac{S_1}{1+in_1} \quad \text{(60)}$$

S' 新票之到期值

S_1 舊票之到期值

n' 新票之貼現時期

n_1 舊票之貼現時期

d 單貼現率

i 單利率

Σ (讀如 sigma) 總和之記號(ΣS_1 表示各舊票到期值之總額)

(證) 設 $S_1, S_2, S_3, \cdots\cdots S_p$ 爲 p 張舊票之到期值, $n_1, n_2, n_3, \cdots\cdots n_p$ 爲其貼現時期.

a) $$S'(1-dn')=S_1(1-dn_1)+S_2(1-dn_2)+S_3(1-dn_3)+\cdots\cdots+S_p(1-dn_p)$$
$$=(S_1+S_2+S_3+\cdots\cdots+S_p)-d(S_1n_1+S_2n_2+S_3n_3+\cdots\cdots+S_pn_p)$$
$$=\sum S_1-d\sum(S_1n_1)$$
$$\therefore\quad S'=\frac{\sum S_1-d\sum(S_1n_1)}{1-dn'}$$

b) $$\frac{S'}{1+in'}=\frac{S_1}{1+in_1}+\frac{S_2}{1+in_2}+\frac{S_3}{1+in_3}+\cdots\cdots+\frac{S_p}{1+in_p}$$
$$=\sum\frac{S_1}{1+in_1}$$
$$\therefore\quad S'=(1+in')\sum\frac{S_1}{1+in_1}$$

(例五) 某甲欲以五十日後到期之本票更換下列三票:

甲票二十日後到期,到期值900元;

乙票三十日後到期,到期值870元;

丙票四十二日後到期,到期值1200元;

求新票之到期值! (一年作爲360日)

a) 依單貼現率4%貼現;

b) 依單利率4%貼現.

a) 應用公式(59),得:

$$S'=\frac{(900+870+1200)-\frac{4}{100}\left(900\times\frac{20}{360}+870\times\frac{30}{360}+1200\times\frac{42}{360}\right)}{1-\frac{4}{100}\times\frac{50}{360}}$$

$$=\frac{2970\times360-\frac{4}{100}(18000+26100+50400)}{360-2}=\frac{1065420}{358}$$

$$=2976.03\text{ 元}$$

b) 應用公式(60),得:

$$S'=\left(1+\frac{4}{100}\times\frac{50}{360}\right)\left(\frac{900}{1+\frac{4}{100}\times\frac{20}{360}}+\frac{870}{1+\frac{4}{100}\times\frac{30}{360}}+\frac{1200}{1+\frac{4}{100}\times\frac{42}{360}}\right)$$

$$=\frac{181}{180}\left(\frac{810000}{902}+\frac{261000}{301}+\frac{3600000}{3014}\right)$$

$$=\frac{1629000}{1804}+\frac{524900}{602}+\frac{3620000}{3014}$$

$$=902.993+871.927+1201.062=2975.98\text{ 元}$$

新票之共同期日與平均期日,可自下列諸公式求得:

a) 依單貼現率貼現:

$$n_e=\frac{d\sum(S_1n_1)-\sum S_1}{dS'}+\frac{1}{d}\quad\cdots\cdots\cdots(61)$$

$$n_a=\frac{\sum(S_1n_1)}{\sum S_1}\quad\cdots\cdots\cdots(62)$$

b) 依單利率貼現:

$$n_e=\frac{S'}{i\sum\frac{S_1}{1+in_1}}-\frac{1}{i}\quad\cdots\cdots\cdots(63)$$

$$n_a=\frac{\sum\frac{S_1n_1}{1+in_1}}{\sum\frac{S_1}{1+in_1}}\quad\cdots\cdots(64)$$

n_e　共同期日距今之年數

n_a　平均期日距今之年數

S'　新票之到期值

S　舊票之到期值

n　舊票到期日距今之年數

d　單貼現率

i　單利率

$\sum$　總和之記號

(證) a) $S'(1-dn_e)=\sum[S_1(1-dn_1)]=\sum(S_1-S_1dn_1)$

$$=\sum S_1-d\sum(S_1n_1)$$

$$1-dn_e=\frac{\sum S_1-d\sum(S_1n_1)}{S'}$$

$$dn_e=\frac{d\sum(S_1n_1)-\sum S_1}{S'}+1$$

$$\therefore\quad n_e=\frac{d\sum(S_1n_1)-\sum S_1}{dS'}+\frac{1}{d}$$

若　$S'=\sum S_1$

則

$$n_e=n_a=\frac{d\sum(S_1n_1)-\sum S_1}{d\sum S_1}+\frac{1}{d}$$

$$=\frac{\sum(S_1n_1)}{\sum S_1}-\frac{1}{d}+\frac{1}{d}$$

$$\therefore \quad n_a=\frac{\sum (S_1 n_1)}{\sum S_1}$$

上式中無d,故n_a之數值與單貼現率無關.題中貼現時期若爲日數,則不必化爲年數,即以之代入公式中之n可也.由是求得之n_a亦爲日數.

若
$$S_1=S_2=S_3=\cdots\cdots=S_p$$

則
$$\sum S_1=pS_1$$

$$\sum (S_1 n_1)=S_1\sum n_1$$

$$n_a=\frac{\sum n_1}{p}$$

b)
$$\frac{S'}{1+in_e}=\sum\frac{S_1}{1+in_1}$$

$$\frac{1+in_e}{S'}=\frac{1}{\sum\frac{S_1}{1+in_1}}$$

$$in_e=\frac{S'}{\sum\frac{S_1}{1+in_1}}-1$$

$$\therefore \quad n_e=\frac{S'}{i\sum\frac{S_1}{1+in_1}}-\frac{1}{i}$$

若
$$S'=\sum S_1$$

則
$$n_e=n_a=\frac{\sum S_1-\sum\frac{S_1}{1+in_1}}{i\sum\frac{S_1}{1+in_1}}$$

$$=\frac{\sum\left(S_1-\frac{S_1}{1+in_1}\right)}{i\sum\frac{S_1}{1+in_1}}=\frac{\sum\frac{S_1 in_1}{1+in_1}}{i\sum\frac{S_1}{1+in_1}}$$

$$\therefore\quad n_a=\frac{\sum\frac{S_1 n_1}{1+in_1}}{\sum\frac{S_1}{1+in_1}}$$

若 $S_1=S_2=S_3=\cdots\cdots=S_p$

則
$$n_a=\frac{S_1\sum\frac{n_1}{1+in_1}}{S_1\sum\frac{1}{1+in_1}}=\frac{\sum\frac{n_1}{1+in_1}}{\sum\frac{1}{1+in_1}}$$

(例六) 某甲欲以到期值2920元之本票更換下列三票:

甲票八十日後到期,到期值1500元;

乙票九十日後到期,到期值 600元;

丙票七十日後到期,到期值 840元;

求新票之到期日!(一年作為360日)

a) 依單貼現率6%貼現;

b) 依單利率6%貼現.

a) 應用公式(61),得:

$$n_e=\frac{\frac{6}{100}\left(1500\times\frac{80}{360}+600\times\frac{90}{360}+840\times\frac{70}{360}\right)-(1500+600+840)}{\frac{6}{100}\times 2920}+\frac{100}{6}$$

$$=\frac{20+9+9.8-2940}{175.2}+\frac{100}{6}=\frac{18.8}{175.2}\text{ 年}$$

$$=38\frac{46}{73}\text{ 日}$$

b) 應用公式(63),得:

$$n_e=\frac{2920}{\frac{6}{100}\left(\frac{1500}{1+\frac{6}{100}\times\frac{80}{360}}+\frac{600}{1+\frac{6}{100}\times\frac{90}{360}}+\frac{840}{1+\frac{6}{100}\times\frac{70}{360}}\right)}-\frac{100}{6}$$

$$=\frac{2920}{\frac{6}{100}\left(\frac{1500\times600}{600+8}+\frac{600\times600}{600+9}+\frac{840\times600}{600+7}\right)}-\frac{100}{6}$$

$$=\frac{2920}{6\left(\frac{9000}{608}+\frac{3600}{609}+\frac{5040}{607}\right)}-\frac{100}{6}$$

$$=\frac{2920}{6\,(14.803+5.911+8.303)}-\frac{100}{6}$$

$$=\frac{2920-2901.7}{6\times29.017}=\frac{18.3}{6\times29.017}\text{年}=\frac{18.3\times60}{29.017}\text{日}$$

$$=37.8\text{ 日}$$

(例七) 上題中新票之到期值若改為2940元,則新票應在何日到期?

$$1500+600+840=2940$$

新票之到期值,與各舊票到期值之總額相等,故可應用公式(62)與(64).

a) 應用公式(62),得:

$$\begin{aligned}1500\times80&=120000\\600\times90&=\ \ 54000\\840\times70&=\ \ 58800\\\hline&\ \ \ 232800\end{aligned}$$

$$n_a=\frac{232800}{2940}=79\frac{9}{49}\text{ 日}$$

b) 應用公式(64),得:

$$n_a=\frac{\dfrac{1500\times\dfrac{80}{360}}{1+\dfrac{6}{100}\times\dfrac{80}{360}}+\dfrac{600\times\dfrac{90}{360}}{1+\dfrac{6}{100}\times\dfrac{90}{360}}+\dfrac{840\times\dfrac{70}{360}}{1+\dfrac{6}{100}\times\dfrac{70}{360}}}{\dfrac{1500}{1+\dfrac{6}{100}\times\dfrac{80}{360}}+\dfrac{600}{1+\dfrac{6}{100}\times\dfrac{90}{360}}+\dfrac{840}{1+\dfrac{6}{100}\times\dfrac{70}{360}}}$$

$$=\frac{\dfrac{1500\times800}{3648}+\dfrac{600\times900}{3654}+\dfrac{840\times700}{3642}}{\dfrac{1500\times3600}{3648}+\dfrac{600\times3600}{3654}+\dfrac{840\times3600}{3642}}$$

$$=\frac{328.947+147.783+161.450}{1480.263+591.133+830.313}=\frac{638.180}{2901.709}\text{ 年 }=79.2\text{ 日}$$

習　題　八

1. 求下列各題中新票之到期值或其到期日!(一年作爲360日)

	舊票之到期值	舊票之到期日	貼現方法	新票之到期值	新票之到期日
a)	$ 4500	九十日後	單貼現率6%		八十日後
b)	3600	七十日後	單利率3%	$ 3650	
c)	5500	五十日後	單利率5%		六十日後
d)	4200	四十日後	單貼現率4%	4190	
e)	6000	九十日後	單貼現率5%	6020	
f)	6000	九十日後	單利率5%	6020	
g)	5000	六十日後	單貼現率4%		八十日後
h)	5000	六十日後	單利率4%		八十日後

2. 某甲欲以一張新票更換下列三張舊票:

甲票三十日後到期,到期值1200元;

乙票五十日後到期,到期值800元;

丙票七十日後到期,到期值1400元;

求下列各種更換方法中之到期值或其到期日!(一年作爲360日)

	新票之到期值	新票之到期日	貼現方法
a)		八十日後	單貼現率4%
b)		八十日後	單利率4%
c)		二十日後	單貼現率4%
d)		二十日後	單利率4%
e)		六十日後	單貼現率4%
f)		六十日後	單利率4%
g)	$ 3420		單貼現率5%
h)	3420		單利率5%
i)	3380		單貼現率5%
j)	3380		單利率5%
k)	3400		單貼現率5%
l)	3400		單利率5%

3. 八月後到期,到期值3850元之票據,與十一月後到期,到期值3900元之票據,在何時等值?

a) 依單貼現率5%貼現;

b) 依單利率5%貼現.

4. 五月後到期,到期值2020元之票據,與八月後到期,到期值2030元之票據,在何時等值?

a) 依單貼現率2%貼現;

b) 依單利率2%貼現.

5. 某商欠貨款1250元,十二月十五日期,於八月五日付現款800元,同日發出不帶息本票二張,其面值相等,一張於十月十五日到期,一張於十一月二十日到期,單貼現率6%,一年作爲365日,求面值!

第二節　複貼現法

定理四: 到期值不等之兩票據,在同一時日,依兩種不同之複貼現法貼現,(一依複貼現率 r 貼現,一依複利率 r 貼現)不能均爲等值.(與定理二相似)

(證) 設 S_1 爲 n_1 年後到期票據之到期值, S_2 爲 n_2 年後到期票據之到期值.

$$S_1 \neq S_2$$

若依複貼現率 r 貼現而其淨收額相等,則得價值方程式如下:

$$S_1(1-r)^{n_1}=S_2(1-r)^{n_2}$$

卽
$$\frac{S_1}{S_2}=(1-r)^{n_2-n_1}$$

若依複利率 r 貼現而其淨收額相等,則得價值方程式如下:

$$S_1(1+r)^{-n_1}=S_2(1+r)^{-n_2}$$

卽
$$\frac{S_1}{S_2}=(1+r)^{n_1-n_2}$$

$$\therefore\quad (1-r)^{n_2-n_1}=(1+r)^{n_1-n_2}$$

$$1-r=(1+r)^{-1}$$

$$(1-r)(1+r)=1$$

$$1-r^2=1$$

$$r=0$$

以之代入價值方程式,則得:

$$S_1 = S_2$$

但$S_1 \neq S_2$,故此結果爲不合理.

例如三年後到期,到期值1000元之票據,與二年後到期,到期值950元之票據,若依複貼現率5%貼現則爲等值,但若依複利率5%貼現則爲不等值,又如三年後到期,到期值1050元之票據,與二年後到期,到期值1000元之票據,若依複利率5%貼現則爲等值,但若依複貼現率5%貼現,則爲不等值.

定理五: 若兩票據現依複貼現法貼現而爲等值,則在等值日前後無論何時,亦均爲等值.(適與定理三相反)

(證) 設S_1爲n_1年後到期票據之到期值,S_2爲n_2年後到期票據之到期值.

a) 若現依複貼現率d貼現而其淨收額相等,則得價值方程式如下:

$$S_1(1-d)^{n_1} = S_2(1-d)^{n_2}$$

若在p(p或正或負)年後依複貼現率d貼現而其淨收額不相等,設兩者之差爲k,則得價值方程式如下:

$$S_1(1-d)^{n_1-p} = S_2(1-d)^{n_2-p} + k$$

$$S_1(1-d)^{n_1} = S_2(1-d)^{n_2} + k(1-d)^p$$

但
$$S_1(1-d)^{n_1} = S_2(1-d)^{n_2}$$

$$\therefore \quad k(1-d)^p = 0$$

$$\because \quad 1-d \neq 0$$

$$\therefore \quad k = 0$$

卽兩票在p年後亦爲等值.

例如三年後到期,到期值1000元之票據,與二年後到期,到期值950元之票據,若依複貼現率5%貼現,無論何時均爲等值.

b) 若現依複利率i貼現而其淨收額相等,則得價值方程式如下:

$$S_1(1+i)^{-n_1}=S_2(1+i)^{-n_2}$$

若在p(p或正或負)年後依複利率i貼現而其淨收額不相等,設兩者之差爲k,則得價值方程式如下:

$$S_1(1+i)^{-(n_1-p)}=S_2(1+i)^{-(n_2-p)}+k$$

$$S_1(1+i)^{-n_1}=S_2(1+i)^{-n_2}+k(1+i)^{-p}$$

但 $$S_1(1+i)^{-n_1}=S_2(1+i)^{-n_2}$$

$$\therefore \quad k(1+i)^{-p}=0$$

$$\because \quad (1+i)^{-p}\neq 0$$

$$\therefore \quad k=0$$

卽兩票在p年後亦爲等值.

例如三年後到期,到期值1050元之票據,與二年後到期,到期值1000元之票據,若依複利率5%貼現,無論何時均爲等值.

甲乙兩票依複貼現法貼現,在等值日前後亦爲等值,故在單貼現法中,吾人有時欲知兩票應在何日等值,而在複貼現法中則否.在複貼現法中,吾人所欲知者,以新票掉換舊

票,新票之到期值當爲幾何?或新票之到期日應爲何時?新票之到期值或其到期日,可應用價值方程式求得如下:

a) 依複貼現率 d 貼現:

$$S' = S(1-d)^{n-n'} \cdots\cdots\cdots\cdots (65)$$

$$n' = n + \frac{\log S - \log S'}{\log(1-d)} \cdots\cdots\cdots\cdots (66)$$

b) 依複利率 i 貼現:

$$S' = S(1+i)^{n'-n} \cdots\cdots\cdots\cdots (67)$$

$$n' = n + \frac{\log S' - \log S}{\log(1+i)} \cdots\cdots\cdots\cdots (68)$$

S' 新票之到期值

S 舊票之到期值

n' 新票之貼現時期

n 舊票之貼現時期

d 複貼現率

i 複利率

(證) *a*) $S'(1-d)^{n'} = S(1-d)^n$

$$S' = \frac{S(1-d)^n}{(1-d)^{n'}}$$

$$\therefore \quad S' = S(1-d)^{n-n'}$$

$$\log S' = \log S + (n-n')\log(1-d)$$

$$\frac{\log S' - \log S}{\log(1-d)} = n - n'$$

$$\therefore \quad n' = n + \frac{\log S - \log S'}{\log(1-d)}$$

b) $S'(1+i)^{-n'}=S(1+i)^{-n}$

$$S'=\frac{S(1+i)^{-n}}{(1+i)^{-n'}}$$

$$\therefore\quad S'=S(1+i)^{n'-n}$$

$$\log S'=\log S+(n'-n)\log(1+i)$$

$$\frac{\log S'-\log S}{\log(1+i)}=n'-n$$

$$\therefore\quad n'=n+\frac{\log S'-\log S}{\log(1+i)}$$

(例一)三年後到期,到期值4500元之付款人,欲更換一張二年後到期之票據,求新票之到期值!

a) 依複貼現率6%貼現;

b) 依複利率6%貼現.

a 應用公式(65)得:

$$S'=4500\times\left(1-\frac{6}{100}\right)^{3-2}=4500\times\frac{94}{100}=4230\text{ 元}$$

b) 應用公式(67),得:

$$S'=4500\times1.06^{2-3}=4500\times1.06^{-1}=4500$$
$$\times0.94339623=4245.28\text{ 元}$$

(例二)三年後到期,到期值4500元之付款人,欲更換一張到期值5000元之票據,求新票之到期日!

a) 依複貼現率6%貼現;

b) 依複利率6%貼現.

a) 應用公式(66),得:

$$n' = 3 + \frac{\log 4500 - \log 5000}{\log 0.94} = 3 + \frac{-0.045757}{-0.026872}$$

$$= 4.70 \text{ 年}$$

b) 應用公式(68),得:

$$n' = 3 + \frac{\log 5000 - \log 4500}{\log 1.06} = 3 + \frac{0.045757}{0.025306}$$

$$= 4.81 \text{ 年}$$

舊票若不止一張,則新票之到期值及其到期日,可自下列諸公式求得.

a) 依複貼現率 d 貼現:

$$S' = \sum [S_1(1-d)^{n_1-n'}] \quad \cdots\cdots(69)$$

$$n' = \frac{\log \sum [S_1(1-d)^{n_1}] - \log S'}{\log(1-d)} \quad \cdots\cdots(70)$$

b) 依複利率 i 貼現:

$$S' = \sum (S_1 v^{n_1-n'}) \quad \cdots\cdots(71)$$

$$n' = \frac{\log S' - \log \sum (S_1 v^{n_1})}{\log(1+i)} \quad \cdots\cdots(72)$$

S' 新票之到期值

S' 舊票之到期值

n' 新票之貼現時期

n_1 舊票之貼現時期

d 複貼現率

i 複利率

$v = \frac{1}{1+i}$

Σ 總和之記號

（證）設 $S_1, S_2, S_3, \cdots\cdots S_p$ 爲 p 張舊票之到期值，$n_1, n_2, n_3, \cdots\cdots n_p$ 爲其貼現時期.

a) $S'(1-d)^{n'} = S_1(1-d)^{n_1} + S_2(1-d)^{n_2} + S_3(1-d)^{n_3} + \cdots\cdots +$

$S_p(1-d)^{n_p}$

$$S' = S_1(1-d)^{n_1-n'} + S_2(1-d)^{n_2-n'} + S_3(1-d)^{n_3-n'} + \cdots\cdots + S_p(1-d)^{n_p-n'}$$

$$\therefore \quad S' = \sum [S_1(1-d)^{n_1-n'}]$$

$$S'(1-d)^{n'} = \sum [S_1(1-d)^{n_1}]$$

$$\log S' + n' \log(1-d) = \log \sum [S_1(1-d)^{n_1}]$$

$$\therefore \quad n' = \frac{\log \sum [S_1(1-d)^{n_1}] - \log S'}{\log(1-d)}$$

b) $S'v^{n'} = S_1 v^{n_1} + S_2 v^{n_2} + S_3 v^{n_3} + \cdots\cdots + S_p v^{n_p}$

$$S' = S_1 v^{n_1-n'} + S_2 v^{n_2-n'} + S_3 v^{n_3-n'} + \cdots\cdots + S_p v^{n_p-n'}$$

$$\therefore \quad S' = \sum (S_1 v^{n_1-n'})$$

$$S'v^{n'} = \sum (S_1 v^{n_1})$$

$$\log S' + n' \log v = \log \sum (S_1 v^{n_1})$$

$$n' = \frac{\log \sum (S_1 v^{n_1}) - \log S'}{\log v}$$

但 $\qquad \log v = -\log(1+i)$

$$\therefore \quad n' = \frac{\log S' - \log \sum (S_1 v^{n_1})}{\log(1+i)}$$

(例三) 某甲欲以四年後到期之本票更換下列三票:

甲票二年後到期,到期值 1000 元;

乙票三年後到期,到期值 1200 元;

丙票五年後到期,到期值 1400 元;

求新票之到期值!

a) 依複貼現率 5% 貼現;

b) 依複利率 5% 貼現.

a) 應用公式 (69), 得:

$$S' = 1000\left(1-\frac{5}{100}\right)^{-2} + 1200\left(1-\frac{5}{100}\right)^{-1} + 1400\left(1-\frac{5}{100}\right)^{1}$$

$$= \frac{1000}{\left(\frac{95}{100}\right)^2} + \frac{1200}{\frac{95}{100}} + 1400 \times \frac{95}{100} = \frac{10000000}{9025} + \frac{120000}{95}$$

$$+ 1330 = 3701.19 \text{ 元}$$

b) 應用公式 (71), 得:

$$S' = 1000\, v^{-2} + 1200\, v^{-1} + 1400\, v^{1}$$

$$v^{-2} = (1+i)^2 = 1.1025$$

$$v^{-1} = 1+i = 1.05$$

$$v^{1} \quad = 0.95238095$$

$$S' = 1102.5 + 1260 + 1333.33 = 3695.83 \text{ 元}$$

(例四) 某甲欲發一新票,更換下列三舊票:

甲票二年後到期,到期值 1000 元;

乙票三年後到期,到期值 1200 元;

丙票五年後到期,到期值 1400 元;

求新票之到期日!

a) 新票之到期值 3701.19 元,依複貼現率 5% 貼現;

b) 新票之到期值 3695.83 元,依複利率 5% 貼現.

a) 應用公式 (70),得:

$$n'=\frac{\log(1000\times0.95^2+1200\times0.95^3+1400\times0.95^5)-\log 3701.19}{\log 0.95}$$

$$=\frac{\log 0.95^2+\log(1000+1200\times0.95+1400\times0.95^3)-\log 3701.19}{\log 0.95}$$

$$=2+\frac{\log 3340.325-\log 3701.19}{\bar{1}.977724}=2+\frac{3.523788-3.568341}{-0.022276}$$

$$=2+\frac{0.044553}{0.022276}=4\text{ 年}$$

b) 應用公式 (72),得:

$$n'=\frac{\log 3695.83-\log(1000\,v^2+1200\,v^3+1400\,v^5)}{\log 1.05}$$

$$=\frac{\log 3695.83-\log v^5-\log[1000(1+i)^3+1200(1+i)^2+1400]}{\log 1.05}$$

$$=\frac{\log 3695.83+5\log 1.05-\log(1157.625+1323+1400)}{\log 1.05}$$

$$=5+\frac{\log 3695.83-\log 3880.625}{\log 1.05}=5+\frac{3.567712-3.588902}{0.021189}$$

$$=5-\frac{0.021190}{0.021189}=4\text{ 年}$$

習題九

1. 求下列各題中新票之到期值!

	舊票之到期值	舊票之到期日	新票之到期日	貼現方法	新票之到期值
a)	$ 4500	三年後	二年後	複貼現率4%	
b)	4500	三年後	二年後	複利率4%	
c)	4500	三年後	二年後	單貼現率4%	
d)	4500	三年後	二年後	單利率4%	
e)	5000	五年後	六年後	複利率5%	
f)	5000	五年後	四年後	複利率5%	
g)	5500	二年後	一年後	複貼現率6%	
h)	5500	二年後	三年後	複貼現率6%	

2. 求下列各題中新票之到期日!

	舊票之到期值	舊票之到期日	新票之到期值	貼現方法	新票之到期日
a)	$ 5200	四年後	$ 5300	複利率4%	
b)	5200	四年後	5300	複貼現率4%	
c)	5200	四年後	5300	單貼現率4%	
d)	5200	四年後	5300	單利率4%	
e)	6800	五年後	6900	複利率5%	
f)	6800	五年後	6700	複利率5%	
g)	3500	二年後	3600	複貼現率5%	
h)	3500	二年後	3400	複貼現率5%	

3. 某甲欲以一張新票更換下列三張舊票:

甲票三年後到期,到期值2500元;

乙票五年後到期,到期值3000元;

丙票六年後到期,到期值3500元.

求下列各種更換方法中之到期值或其到期日!

	新票之到期值	新票之到期日	貼現方法
a)		二年後	複貼現率 4%
b)		四年後	複貼現率 4%
c)		七年後	複貼現率 4%
d)		二年後	複利率 4%
e)		四年後	複利率 4%
f)		七年後	複利率 4%
g)	\$ 8500		複貼現率 5%
h)	9000		複貼現率 5%
i)	9500		複貼現率 5%
j)	8500		複利率 5%
k)	9000		複利率 5%
l)	9500		複利率 5%

4. 某甲新購一屋,約定於下列兩種付款方法中,某甲得任選一種:

第一種: 付款一千元,以後四年內每年付一千元;

第二種: 付現款六百五十元,以後四年內每年付一千一百元;
問何種付款方法利於某甲?(複利率 5%)

5. 某甲於民國二十年底負債二千元,二年後到期,又負債一千元,三年半後到期,二十一年底某甲以現款一千五百元支付於其債權者,並約定於二十二年六月底與二十三年底支付相等金額,以清償其債,求此相等金額!(複利率 5%,每年複利二次)

本編應用公式

$$I=Pin \quad \cdots\cdots(1)$$

$$S=P(1+in) \quad \cdots\cdots(2)$$

$$n=\frac{p-1}{i} \quad \cdots\cdots(3)$$

$$I=Pi\times\frac{d}{360} \quad \cdots\cdots(4)$$

$$I_1=Pi\times\frac{d_1}{365} \quad \cdots\cdots(5)$$

$$I_2 = Pi \times \frac{d_2}{366} \quad \cdots\cdots(6)$$

$$I = I_1 + I_2 = Pi\left(\frac{d_1}{365} + \frac{d_2}{366}\right) \quad \cdots\cdots(7)$$

$$I'' = I' - \frac{I'}{73} \quad \cdots\cdots(8)$$

$$I' = I'' + \frac{I''}{72} \quad \cdots\cdots(9)$$

$$S = Pu^n \quad \cdots\cdots(10)$$

$$I = S - P = P(u^n - 1) \quad \cdots\cdots(11)$$

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1 \quad \cdots\cdots(12)$$

$$j = m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right] \quad \cdots\cdots(13)$$

$$\underset{m\to\infty}{i} = e^j - 1 \quad \cdots\cdots(14)$$

$$\delta = 2.302585 \log_{10}(1+i) \quad \cdots\cdots(15)$$

$$\delta = \left(i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \frac{i^4}{4} + \cdots\cdots\right) \quad \cdots\cdots(16)$$

$$i = \left(\delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} + \cdots\cdots\right) \quad \cdots\cdots(17)$$

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} \quad \cdots\cdots(18)$$

$$S = Pe^{n\delta} \quad \cdots\cdots(19)$$

$$P = Sv^n \quad \cdots\cdots(20)$$

$$P = S\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-nm} \quad \cdots\cdots(21)$$

$$P = Se^{-n\delta} \quad \cdots\cdots(22)$$

$$n = \frac{\log S - \log P}{\log(1+i)} \quad \cdots\cdots(23)$$

$$n = \frac{\log S - \log P}{m \log\left(1 + \frac{j}{m}\right)} \quad \cdots\cdots(24)$$

$$n = \frac{2.302585}{\delta}(\log_{10} S - \log_{10} P) \quad \cdots\cdots(25)$$

$$n=\frac{\log p}{\log(1+i)} \quad \cdots\cdots (26)$$

$$n=\frac{\log p}{m\log\left(1+\frac{j}{m}\right)} \quad \cdots\cdots (27)$$

$$n=\frac{2.302585}{\delta}\log p \quad \cdots\cdots (28)$$

$$n=\frac{0.693}{i}+0.35 \quad \cdots\cdots (29)$$

$$i=\text{anti}\log\frac{\log S-\log P}{n}-1 \quad \cdots\cdots (30)$$

$$j=m\left[\text{anti}\log\frac{\log S-\log P}{nm}-1\right] \quad \cdots\cdots (31)$$

$$\delta=\frac{2.302585}{n}(\log_{10}S-\log_{10}P) \quad \cdots\cdots (32)$$

$$I=Sdn \quad \cdots\cdots (33)$$

$$P=S-I=S(1-dn) \quad \cdots\cdots (34)$$

$$i=\frac{d}{1-dn} \quad \cdots\cdots (35)$$

$$d=\frac{i}{1+in} \quad \cdots\cdots (36)$$

$$I_1-I_2=I_2\,in \quad \cdots\cdots (37)$$

$$P=S(1-d)^n \quad \cdots\cdots (38)$$

$$I=S-P=S[1-(1-d)^n] \quad \cdots\cdots (39)$$

$$d=1-\left(1-\frac{f}{m}\right)^m \quad \cdots\cdots (40)$$

$$f=m\left[1-(1-d)^{\frac{1}{m}}\right] \quad \cdots\cdots (41)$$

$$d\underset{m\to\infty}{=}1-e^{-f} \quad \cdots\cdots (42)$$

$$\delta'=-2.302585\log_{10}(1-d) \quad \cdots\cdots (43)$$

$$\delta'=\left(d+\frac{d^2}{2}+\frac{d^3}{3}+\frac{d^4}{4}+\cdots\cdots\right) \quad \cdots\cdots (44)$$

$$d=\left(\delta'-\frac{\delta'^2}{2!}+\frac{\delta'^3}{3!}-\frac{\delta'^4}{4!}+\cdots\cdots\right) \quad \cdots\cdots (45)$$

$$P = S\left(1-\frac{f}{m}\right)^{nm} \quad \text{(46)}$$

$$P = Se^{-n\delta'} \quad \text{(47)}$$

$$\delta = \delta' \quad \text{(48)}$$

$$j = \frac{mf}{m-f} \quad \text{(49)}$$

$$f = \frac{mj}{m+j} \quad \text{(50)}$$

$$i = \frac{d}{1-d} \quad \text{(51)}$$

$$d = \frac{i}{1+i} \quad \text{(52)}$$

$$S' = \frac{S(1-dn)}{1-dn'} \quad \text{(53)}$$

$$S' = \frac{S(1+in')}{1+in} \quad \text{(54)}$$

$$n' = \frac{S'-S(1-dn)}{dS'} \quad \text{(55)}$$

$$n' = \frac{S'(1+in)-S}{iS} \quad \text{(56)}$$

$$x = \frac{S_1 n_1 - S_2 n_2}{S_1 - S_2} - \frac{1}{d} \quad \text{(57)}$$

$$x = \frac{S_1 n_2 - S_2 n_1}{S_1 - S_2} + \frac{1}{i} \quad \text{(58)}$$

$$S' = \frac{\Sigma S_1 - d\,\Sigma\, S_1 n_1}{1-dn'} \quad \text{(59)}$$

$$S' = (1+in')\Sigma\frac{S_1}{1+in_1} \quad \text{(60)}$$

$$n_c = \frac{d\,\Sigma\,(S_1 n_1) - \Sigma\, S_1}{dS'} + \frac{1}{d} \quad \text{(61)}$$

$$n_a = \frac{\Sigma\,(S_1 n_1)}{\Sigma\, S_1} \quad \text{(62)}$$

$$n_c = \frac{S'}{i\,\Sigma\frac{S_1}{1+in_1}} - \frac{1}{i} \quad \text{(63)}$$

$$n_a=\frac{\sum\frac{S_1 n_1}{1+in_1}}{\sum\frac{S_1}{1+in_1}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(64)$$

$$S'=S(1-d)^{n-n'} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(65)$$

$$n'=n+\frac{\log S-\log S'}{\log(1-d)} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(66)$$

$$S'=S(1+i)^{n'-n} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(67)$$

$$n'=n+\frac{\log S'-\log S}{\log(1+i)} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(68)$$

$$S'=\sum\left[S_1(1-d)^{n_1-n'}\right] \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(69)$$

$$n'=\frac{\log\sum\left[S_1(1-d)^{n_1}\right]-\log S'}{\log(1-d)} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(70)$$

$$S'=\sum(S_1 v^{n_1-n'}) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(71)$$

$$n'=\frac{\log S'-\log\sum(S_1 v^{n_1})}{\log(1+i)} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(72)$$

第三編　級數

凡有若干項數字連續,而其前後項有一定之關係,得以一公式表示其各項之數值者,均名曰級數. (Progression or Series)

例如:	4	7	10	13	16	19
	3	6	12	24	48	96
	1	4	9	16	25	36
	1	8	27	64	125	216
	10	33	92	205	390	665

均級數也;第一級數中,前後兩項相差之數均相等.第二級數中,以前項除後項,其商均相等.至於第三級數,第一項爲一之平方,第二項爲二之平方,第三項爲三之平方,第四項爲四之平方,第五項爲五之平方,第六項爲六之平方.第四級數則第一項爲一之立方,第二項爲二之立方,第三項爲三之立方,第四項爲四之立方,第五項爲五之立方,第六項爲六之立方.第五級數則以一,二,三,四,五,六,依次代入下式

$$3x^3+2x+5$$

卽得第一,二,三,四,五,六項.

級數之種類甚多,玆舉其較重要者,分別詳述於下列各章.

第一章 等差級數

第一級數前後項之差相等,故曰等差級數,或算術級數(Arithmetic Progression). 其相等之差,名曰公差(Common Difference). 公差得爲正數或負數,前者名曰昇級數(Increasing Progression)後者名曰降級數(Decreasing Progression). 第一級數爲昇級數,其公差爲3,下列級數則爲降級數,其公差爲-2

$$11 \quad 9 \quad 7 \quad 5 \quad 3 \quad 1 \quad -1 \quad -3$$

設首項爲a,末項爲l,公差爲d,項數爲n,則:

第一項 $=a$

第二項 $=a+d=a+(2-1)d$

第三項 $=a+2d=a+(3-1)d$

第四項 $=a+3d=a+(4-1)d$

故第n項卽末項l,當爲:

$$l=a+(n-1)d \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

已知等差級數之首項,項數,與公差,卽可應用上式,以求其末項.

求首項,公差,或項數之公式,可自公式(1)化出,學者可自化之.

又設S爲等差級數之和,則:

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-2d)+(l-d)+l$$

若以等式之右邊,前後倒置,則得:

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+2d)+(a+d)+a$$

若將以上兩式之左右兩邊,各自相加,則左邊爲$2S$,右邊之第一項,爲

$$a+l,$$

其第二項爲

$$(a+d)+(l-d)=a+l,$$

其第三項爲

$$(a+2d)+(l-2d)=a+l,$$

故右邊之各項,均爲$a+l$,即:

$$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)$$

但右邊共有n項,故:

$$2S=n(a+l)$$

即
$$S=\frac{n(a+l)}{2} \tag{2}$$

已知等差級數之首項,項數,與末項,可應用公式(2),以求其和.

(例一)已知等差級數之首項爲3,公差爲2,項數爲10,求末項與級數之和!

應用公式(1),得:

$$l=3+(10-1)\times 2=21$$

應用公式(2),得:

$$S=\frac{10(3+21)}{2}=\frac{10\times 24}{2}=120$$

a, l, n, d, S, 爲等差級數中之五數,已知其中三數,即可求其他二數.

(例二) 已知:

$$S=80$$

$$a=3$$

$$d=2$$

求 l 與 n!

應用公式(1),得:

$$l=3+2(n-1)=2n+1$$

應用公式(2),得:

$$80=\frac{n}{2}(3+l)$$

以 l 之值代入上式,得:

$$160=n(2n+4)$$

$$n^2+2n-80=0$$

$$(n+10)(n-8)=0$$

$$n+10\neq 0$$

$$\therefore \quad n=8$$

$$l=16+1=17$$

(例三) 已知:

$$S=80$$

$$l=17$$

$$d=2$$

求 a 與 n!

應用公式(1),得:

$$17=a+2(n-1)$$

$$a=19-2n$$

應用公式(2),得:

$$80=\frac{n}{2}(a+17)$$

以 a 之值代入上式,得:

$$160=n(36-2n)$$

$$n^2-18n+80=0$$

$$(n-8)(n-10)=0$$

若　$n-8=0$

則　$n=8$

$$a=19-16=3$$

卽　3　5　7　9　11　13　15　17

若　$n-10=0$

則　$n=10$

$$a=19-20=-1$$

卽　-1　1　3　5　7　9　11　13　15　17

(例四) 已知:　$n=8$

$$d=2$$

$$S=80$$

求 a 與 l!

應用公式(1),得:

$$l=a+14$$

應用公式(2),得:

$$80=4(a+l)$$

以l之值代入上式,得:

$$20=a+a+14$$

$$2a=6$$

$$\therefore\quad a=3$$

$$l=3+14=17$$

上述之五級數中,第三,第四與第五級數,其前後項之差雖不相等,然若將前後項相減而成一新級數,再將此新級數之前後項相減而又成一新級數,如此依次相減,均能化爲各項相等之新級數.

第三級數:

$$\begin{array}{ccccccccccc}1 && 4 && 9 && 16 && 25 && 36\\ & 3 && 5 && 7 && 9 && 11 & \\ && 2 && 2 && 2 && 2 && \end{array}$$

第四級數:

$$\begin{array}{ccccccccccc}1 && 8 && 27 && 64 && 125 && 216\\ & 7 && 19 && 37 && 61 && 91 & \\ && 12 && 18 && 24 && 30 && \\ &&& 6 && 6 && 6 &&& \end{array}$$

第三級數:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 10 & & 33 & & 92 & & 205 & & 390 & & 665 \\ & 23 & & 59 & & 113 & & 185 & & 275 & \\ & & 36 & & 54 & & 72 & & 90 & & \\ & & & 18 & & 18 & & 18 & & & \end{array}$$

以上三級數中,至最後一列,各項均相等.第二列各項爲第一列中前後項之差,而第三列各項爲第二列中前後項之差,故第二列爲第一列之一次差(First Order of Differences),第三列爲第一列之二次差(Second Order of Differences).第三級數之二次差,其各項均相等,至於第四與第五級數,則其三次差之各項均相等,此種級數名曰高次等差級數(Arithmetic Progression of Higher Order).第三級數爲二次等差級數,而第四與第五級數則爲三次等差級數.至於普通等差級數,其一次差之各項均相等,故可名曰一次等差級數.

高次等差級數之末項及其總和,可自下列二公式求得:

$$l=a_1+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}d_2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(n-1)\cdots(n-r)}{1\cdot 2\cdots\cdots r}d_r \qquad (3)\ (\text{證明參看附錄甲12})$$

$$S=na_1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}d_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}d_2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-r)}{1\cdot 2\cdot\cdots(r+1)}d_r\cdots\cdots(4)\ (\text{證明參看附錄甲13})$$

l 末項

s 總和

n 項數

a_1 首項

d_1 一次差之首項

d_2 二次差之首項

……………………

d_r r 次差之首項

(例五) 求下列高次等差級數之第十項及其前十項之和!

1 32 243 1024 3125 7776 16807……第十項

(解) 1 32 243 1024 3125 7776 16807

31 211 781 2101 4651 9031

180 570 1320 2550 4380

390 750 1230 1830

360 480 600

120 120

此爲五次等差級數.

$$n = 10$$

$$a_1 = 1$$

$$d_1 = 31$$

$$d_2 = 180$$

$$d_3 = 390$$

$$d_4 = 360$$

$$d_5 = 120$$

代入公式(3),得:

$$l=1+9\times31+\frac{9\times8}{1\times2}\times180+\frac{9\times8\times7}{1\times2\times3}\times390+\frac{9\times8\times7\times6}{1\times2\times3\times4}\times360$$

$$+\frac{9\times8\times7\times6\times5}{1\times2\times3\times4\times5}\times120=1+279+6480+32760$$

$$+45360+15120=100000$$

代入公式(4),得:

$$S=10\times1+\frac{10\times9}{1\times2}\times31+\frac{10\times9\times8}{1\times2\times3}\times180+\frac{10\times9\times8\times7}{1\times2\times3\times4}\times390$$

$$+\frac{10\times9\times8\times7\times6}{1\times2\times3\times4\times5}\times360+\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5}{1\times2\times3\times4\times5\times6}\times120$$

$$=10+1395+21600+81900+90720+25200=220825$$

習　題　十

1. 填寫下表中空白之處!

	首項	公差	項數	末項	等差級數之和
a)	5	4	14		
b)	35		10	17	
c)	1	3		31	
d)		2	15	35	
e)	19	−2	20		

2. 等差級數之第一項爲3,第二項爲5,第三項爲7,其和爲48,求項數!

3. 求證:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2$$

4 已知:

$$S=69$$
$$l=19$$
$$d=3$$

求 a 與 n!

5. 已知:

$$S=126$$

$$d=5$$

$$n=7$$

求 a 與 l!

6. 求下列各級數前二十項之和!

a) 1·2　2·3　3·4　4·5　5·6……第二十項

b) 1·2·3　2·3·4　3·4·5　4·5·6　5·6·7……第二十項

7. 求下列各級數之第二十項及前二十項之和!

a) 1　16　81　256　625　1296……第二十項

b) 5　11　19　29　41　55……第二十項

c) 4　11　22　37　56　79……第二十項

第二章 等比級數

上述五級數中之第二級數,其前後項之比相等,故曰等比級數,或幾何級數 (Geometric Progression). 其相等之比,名曰公比 (Common Ratio).

設首項爲a,末項爲l,公比爲r,項數爲n,則:

第一項 $=a$

第二項 $=ar=ar^{2-1}$

第三項 $=ar^2=ar^{3-1}$

第四項 $=ar^3=ar^{4-1}$

故第n項卽末項l,當爲:

$$l=ar^{n-1} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

已知等比級數之首項,公比與項數,可應用公式(5),以求末項.

求首項,公比,或項數之公式,可自公式(5)化出,學者可自化之.

又設S爲等比級數之和,則:

$$S=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}$$

若以r乘上式之兩邊,則得:

$$rS=ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^n$$

第一式之右邊,除首項外,俱與第二式之右邊(末項除外)相等,故自上式減去下式,則得:

$$S-rS=a-ar^n$$

即 $$(1-r)S=a(1-r^n)$$

$$\therefore \quad S=\frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

以 l 代 ar^{n-1},則得:

$$S=\frac{a-rl}{1-r}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

已知等比級數之首項,公比,與項數(或末項),可應用公式(6)(或公式7),以求其和.

(例一)已知等比級數之首項爲4,公比爲3,求第十項與前十項之和!

應用公式(5),得:

$$l=4\times 3^{10-1}=4\times 3^9=4\times 19683=78732$$

應用公式(6),得:

$$S=\frac{4(1-3^{10})}{1-3}=2\times 59048=118096$$

a, l, n, r, S, 爲等比級數中之五數,已知其中三數,即可求其他二數.

(例二)已知: $S=189$

$$l=96$$

$$r=2$$

求 n 與 a!

應用公式(5),得:

$$189=192-a$$

$$\therefore\quad a=3$$

應用公式(3),得:

$$96=3\times2^{n-1}$$

$$32=2^{n-1}$$

$$\log 32=(n-1)\log 2$$

$$1.50515=0.301030(n-1)$$

$$n-1=\frac{1.50515}{0.30103}=5$$

$$\therefore\quad n=6$$

(例三) 已知:

$$S=189$$

$$a=3$$

$$n=6$$

求 l 與 r!

應用公式(3),得:

$$l=3r^5$$

應用公式(5),得:

$$189=\frac{3-rl}{1-r}$$

以 l 之值代入,得:

$$189=3\times\frac{1-r^6}{1-r}$$

$$63=1+r+r^2+r^3+r^4+r^5$$

上式係一高次方程式,通常不易解答,惟本題中之r,用代入測驗法,即可求得

$$r=2$$

$$l=3\times 2^5=96$$

習 題 十 一

1. 填寫下表中空白之處!

	首項	公比	項數	末項	等比級數之和
a)	2		5	162	
b)	2	3		486	
c)	2			162	242
d)	2	3	7		
e)	2		6		728
f)	2	3			242
g)		3	6	486	
h)			4	54	80
i)		3		162	242
j)		3	7		2186

2. 求下列各級數之和!

a) $S=(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+(1+i)^{n-3}+\cdots\cdots+(1+i)+1$

b) $S=(1+i)^n+(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+\cdots\cdots+(1+i)^2+(1+i)$

c) $S=(1+i)^{-1}+(1-i)^{-2}+(1+i)^{-3}+\cdots\cdots+(1+i)^{1-n}+(1+i)^{-n}$

d) $S=1+(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+\cdots\cdots+(1+i)^{2-n}+(1+i)^{1-n}$

3. 設上題中$n=10$, $i=6\%$, 求各級數之和!

a) 應用上題中求得之公式;

b) 應用複利終值表與複利現值表.

第三章 無盡級數

級數之項數多至無窮盡者曰無盡級數 (Infinite Series). 表示級數變化規律之項,名曰一般項 (General Term). 自然數組成一等差級數,但其項數無窮盡,故此等差級數爲一無盡級數,而其一般項爲n.

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4\cdots\cdots$$

任取一竹竿,就其中端折而爲二,取此二竿之一更就其中端折而爲二,復取此二小竿之一更就其中端折而爲二,如是依次折斷,永無止境,未折各竿組成一等比級數,但是項數無窮盡,故此等比級數爲一無盡級數,而其一般項爲$\frac{1}{2^n}$.

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8}\cdots\cdots$$

上述二級數,雖均爲無盡級數,然一則其和無限,一則有限.蓋第一級數之和爲:

$$S=\frac{n(1+n)}{2}$$

若n大至無窮大,則S亦大至無窮大,故無一定限制.第二級數之和則不然,應用公式(6),得:

$$S=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$$

若n大至無窮大,則$\frac{1}{2^n}$小至無窮小,故S之極限爲1.

無盡級數之和若有一定限制,則名曰收斂級數(Convergent Series),反之則名曰發散級數(Divergent Series).故第一級數爲發散級數,而第二級數爲收斂級數,有時無盡級數之和.雖不至大至無窮大,然變化不定,無確定之極限,例如下之無盡級數:

$$1+1-1-1+1+1-1-1+\cdots\cdots$$

其和游移於1, 2, 1, 0, 之間,無一定之限制,是曰不定級數(Oscillating Series).

通常吾人祇能應用收斂級數,故無盡級數之能收斂與否,吾人須知鑒別之.惟無一鑒別方法能適用於一切級數,其最有用者,爲直接比較法(Direct-Comparison Test)與比例測驗法(Test-Ratio Test).

(一)直接比較法: 若第一級數之各項,自某項起,常小於或至多等於第二級數之相當各項,若已知第二級數爲收斂級數,則第一級數亦爲收斂級數.若第一級數之各項,自某項起,常等於或大於第二級數之相當各項,若已知第二級數爲發散級數,則第一級數亦爲發散級數.用作比較收斂級數,通常取公比之絕對值小於1之等比級數與級數e,用作比較發散級數,則取倒數級數(Harmonic Series).蓋等比級數之和爲:

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}$$

若 r 之絕對值小於1, 則 n 大至無窮大時, $\frac{ar^n}{1-r}$ 小至無窮小, 故 S 之極限爲 $\frac{a}{1-r}$, 而此等比級數爲一收斂級數. 級數

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots$$

之極限爲 e, 故級數 e 亦爲一收斂級數. 至於倒數級數

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$$

吾人可書作如下:

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{\text{二項}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{\text{四項}}$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots\right)}_{\text{八項}}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}$$

$$>\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$$

若再將十六項相加, 三十二項相加, ……其和靡不大於 $\frac{1}{2}$, 故此級數之和增加無限, 換言之, 倒數級數爲一發散級數.

(例一) 鑒別下列無盡級數之性質!

a) $$\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\cdots\cdots$$

b) $$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$$

a) $$\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\cdots\cdots$$

此級數之各項,小於下列等比級數之相當各項,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots$$

但吾人已知公比絕對値小於一之等比級數爲收斂級數,故此級數亦爲一收斂級數.

b) $$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$$

此級數之各項,以$\frac{1}{2}$除之,即與倒數級數之相當各項相等,但吾人已知倒數級數爲發散級數,故此級數亦爲發散級數.

(二) 比例測驗法: 設

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$$

爲一無盡級數,又設

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=t$$

若$|t|<1$,則此級數爲收斂級數;

若$|t|>1$,則此級數爲發散級數;

若$|t|=1$, 則此級數之性質尙不能確定.

* lim 爲極限之記號, ∞ 爲無窮大之記號.

(例二) 鑒別下列無盡級數之性質!

a) $$\frac{1}{1}+\frac{1\cdot2}{1\cdot3}+\frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot3\cdot5}+\cdots\cdots$$

b) $$\frac{2}{1}+\frac{2\cdot5}{1\cdot3}+\frac{2\cdot5\cdot8}{1\cdot3\cdot5}+\cdots\cdots$$

a) $$u_n=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n}{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}$$

$$u_{n+1}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n(n+1)}{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)(2n+1)}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}<1$, 故此級數爲收斂級數.

b) $$u_n=\frac{2\cdot5\cdot8\cdots\cdots(3n-1)}{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}$$

$$u_{n+1}=\frac{2\cdot5\cdot8\cdots\cdots(3n-1)(3n+2)}{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)(2n+1)}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3n+2}{2n+1}=\frac{3+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3}{2}$$

$\frac{3}{2}>1$, 故此級數爲發散級數.

級數之各項若正負相間而互相更迭者曰更迭級數(Alternating Series). 更迭級數各項之絕對值若均小於其前一項,而其一般項又以零爲極限,則爲收斂級數.例如下之更迭級數.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdots\cdots$$

爲收斂級數,蓋各項之絕對值小於其前一項,而

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0$$

應用數學中最重要之級數爲包含一未知數之級數,而尤以冪級數(Power series)爲更重要,其形式如下:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$$

上式中a_0, a_1, a_2, a_3⋯⋯爲已知數,而未知數之指數爲一正整數

冪級數之性質,隨未知數之數值而異,未知數之數值在一定界限之內者爲收斂級數,其在界限之外者則爲發散級數,故吾人須確定冪級數爲收斂級數時未知數之界限,確定界限之方法,以比例測驗法爲最有效.

冪級數便於函數(註)數值之計算,故應用至廣,在投資數學中最有用之冪級數,有二項級數(Binomial Series),指數級數(Exponential Series)與對數級數(Logarithmic Series)三種,茲分別述之於後.

二項式$(a+x)^n$展開,若n爲一正整數,則得:

(註) 若甲變量隨乙變量而變,則甲變量爲乙變量之函數(Function).

$$(a+x)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}x^2$$
$$+\cdots\cdots+x^n \qquad \text{(參看附錄甲 1)}$$

此爲一冪級數,其項數有盡,各項之係數爲

$$a^n \quad \frac{n}{1}a^{n-1} \quad \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2} \quad \cdots\cdots 1$$

其一般項則爲

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(r-1)r}a^{n-r}x^r$$

若 n 爲負數或分數,則級數之項數多至無窮盡,故爲一無盡級數.

$$(a+\ )^n=a^n+n\,a^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}x^2+\cdots\cdots \tag{8}$$

若 n 爲一正整數,則上式右邊第 $n+1)$ 項以後各項之係數均等於零,換言之,卽其項數有窮盡之時,故 n 爲正整數時,公式 (8) 亦能成立. 公式 (8) 右邊由二項式展開而得,故此級數名曰二項級數.

$$\frac{\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(r-1)r}a^{n-r}x^r}{\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(r-1)}a^{n-r+1}x^{r-1}}$$

$$=\frac{n-r+1}{r}\ \frac{x}{a}$$

$$t=\lim_{r\to\infty}\frac{n-r+1}{r}\ \frac{x}{a}=\frac{x}{a}\lim_{r\to\infty}\frac{n-r+1}{r}$$

$$=\frac{x}{a}\lim_{r\to\infty}\frac{\dfrac{n+1}{r}-1}{1}=-\frac{x}{a}$$

二項級數若爲收斂級數,則須滿足下列條件:

$$\left|-\frac{x}{a}\right|<1$$

$$|x|<|a|$$

公式(8)右邊之級數若爲一收斂級數,則求$(a+x)^n$,卽可先展開成級數而後求其和.

(例三) 求$\sqrt{99}$!(至小數七位爲止)

$$\sqrt{99}=(100-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$|-1|<|100|$$

$$\therefore\quad \sqrt{99}=100^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\times 100^{-\frac{1}{2}}(-1)+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot 2}100^{-\frac{2}{3}}(-1)^2$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}100^{-\frac{5}{2}}(-1)^3+\cdots\cdots$$

$$=10-\frac{1}{20}-\frac{1}{8000}-\frac{1}{1600000}-\cdots\cdots$$

截取前四項,得:

$$\sqrt{99}=10-\frac{1}{20}-\frac{1}{8000}-\frac{1}{1600000}$$

$$=10-0.05-0.000125-0.000000625$$

$$=10-0.050125625=9.949874375=9.9498744$$

(例四) 求$1.05^{\frac{1}{12}}$!(至小數七位爲止)

$$1.05^{\frac{1}{12}}=(1+0.05)^{\frac{1}{12}}$$

$$0.05<1$$

$$\therefore \quad 1.05^{\frac{1}{12}}=1+\frac{1}{12}\times 0.05+\frac{\frac{1}{12}\left(-\frac{11}{12}\right)}{1\cdot 2}\times 0.05^2$$

$$+\frac{\frac{1}{12}\left(-\frac{11}{12}\right)\left(-\frac{23}{12}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\times 0.05^3+\frac{\frac{1}{12}\left(-\frac{11}{12}\right)\left(-\frac{23}{12}\right)\left(-\frac{35}{12}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$\times 0.05^4+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{5}{1200}-\frac{11\times 5^2}{12^2\times 20000}+\frac{11\times 23\times 5^3}{12^3\times 6000000}$$

$$-\frac{11\times 23\times 35\times 5^4}{12^4\times 2400000000}+\cdots\cdots$$

截取前五項,得:

$$1.05^{\frac{1}{12}}=1+\frac{5}{1200}-\frac{11\times 5^2}{12^2\times 20000}+\frac{11\times 23\times 5^3}{12^3\times 6000000}$$

$$-\frac{11\times 23\times 35\times 5^4}{12^4\times 2400000000}=1+0.004166667$$

$$-0.000095486+0.000003050-0.000000111$$

$$=1.00407412=1.0040741$$

指數級數亦爲投資數學中常見之冪級數,其形式如下:

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots$$

其一般項爲

$$\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n\,(n+1)}\;\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n}{x^n}=\frac{x}{n+1}$$

$$t=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n+1}=x\lim_{n\to\infty}\frac{0}{n+1}=x\cdot 0$$

若 x 爲有限數,則 t 等於零,故 x 爲有限數時,指數級數爲一收斂級數,其和之極限爲 e^x (參看附錄甲3).

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots(9)$$

若 $x=1$, 則得:

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots(10)$$

(例五) 求 e^{-1}! (至小數四位爲止)

$$e^{-1}=1-\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\cdots\cdots$$

截取前八項,得:

$$e^{-1}=1-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}+\frac{1}{720}-\frac{1}{5040}$$

$$=1-1+0.5-0.166667+0.041667$$

$$-0.008333+0.001389-0.000198$$

$$=0.367858=0.3679$$

第三種冪級數爲對數級數,其形式如下:

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots$$

其一般項爲

$$-(-1)^n\frac{x^n}{n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=-\frac{x^{n+1}}{n+1}\,\frac{n}{x^n}=-\frac{n}{n+1}x$$

$$t=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}-\frac{n}{n+1}x$$

$$=-x\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=-x$$

若 $|x|$ 小於1, 則此級數爲收斂級數; 若 $x=1$, 則此級數爲一更迭級數, 吾人已知其爲收斂級數; x 爲 -1 或其絕對値大於1時, 此級數爲發散級數. 對數級數爲收斂級數時, 其和之極限爲 $\log_e(1+x)$, (參看附錄甲6) 對數級數之名卽以此故

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

(例六) 求 $\log_e 1.1$! (至小數四位爲止)

$$\log 1.1=\log_e(1+0.1)=0.1-\frac{0.01}{2}+\frac{0.001}{3}$$

$$-\frac{0.0001}{4}+\frac{0.00001}{5}-\cdots\cdots$$

截取前四項得:

$$\log_e 1.1=0.1-0.005+0.000333-0.000025$$

$$=0.095308=0.09\ 3$$

習題十二

1. 確定下列各級數之性質.

a) $0.06+\frac{0.06^2}{2}+\frac{0.06^3}{3}+\frac{0.06^4}{4}+\cdots\cdots$

b) $0.05-\frac{0.05^2}{2!}+\frac{0.05^3}{3!}-\frac{0.05^4}{4!}+\cdots\cdots$

c) $0.04+\frac{0.04^2}{2^2}+\frac{0.04^3}{2^3}+\frac{0.04^4}{2^4}+\cdots\cdots$

d) $2+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.5}+\cdots\cdots$

2. 確定下列各冪級數為收斂級數時 x 之數值.

a) $\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3(2x+1)^3}+\frac{1}{5(2x+1)^5}+\cdots\cdots$

b) $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots\cdots$

c) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{x}{2\cdot3}+\frac{x^2}{3\cdot4}+\frac{x^3}{4\cdot5}+\cdots\cdots$

d) $1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots$

3. 求下列各數!(至小數七位為止)

a) $\sqrt{101}$　　b) $\sqrt[3]{999}$　　c) $1.05^{\frac{1}{2}}$

d) $1.05^{\frac{1}{3}}$　　e) $1.05^{\frac{1}{4}}$　　f) $1.05^{\frac{1}{3}}$

4. 求下列各數!(至小數四位為止)

a) $e^{\frac{1}{2}}$　　b) $e^{-\frac{1}{2}}$　　c) e^2

5. 求 $\log_e 1.2$!(至小數四位為止)

a) 應用公式(11)

b) 應用第一編公式(7)

本編應用公式

$$l=a+(n-1)d \quad\cdots\cdots(1)$$

$$S=\frac{n(a+\ )}{2} \quad\cdots\cdots(2)$$

$$l=a_1+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot2}d_2+\cdots+\frac{(n-1)\cdots(n-r)}{1\cdot2\cdots\cdots r}d_r \quad\cdots\cdots(3)$$

$$S=na_1+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}d_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}d_2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-r)}{1\cdot2\cdot3\cdots(r+1)}d_r \quad\cdots\cdots(4)$$

$$l=ar^{n-1} \quad\cdots\cdots(5)$$

$$S=\frac{a(1-r)^n}{1-r} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$S=\frac{a-rl}{1-r} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

$$(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^2+\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 8)$$

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

第四編 確實年金

第一章 年金之意義及其種類

依一定契約,按期收受或支付一定之金額,是曰年金(Annuity).每月初支付之房金,每季或每年初支付之保險費,每月末收受之養老金,每半年或每年末收受之債券利息,是皆年金也.年金之收支,在每期之末者,曰期末付年金,(或稱普通年金 Ordinary Annuity),其在每期之初者,曰期初付年金(或稱到期年金 Annuity Due) 本書中所稱年金,除有特別說明外,均指期末付年金而言.

年金又可分爲確實年金與生命年金二種.年金之收支,在規定期限間,不受任何事故之影響者,曰確實年金(Annuity Certain).年金之收支,因一人或數人之死亡而終止者,曰生命年金 (Life Annuity).生命年金與人之壽命有關,故須先明機率(第九編)之原理,然後能計算生命年金(第十編),本編請先論確實年金.

確實年金有定額年金與變額年金之別.每期收支之年金在規定期限間,其定額永無變動者,曰定額年金 (Constant Annuity);其在規定期限間,任意變動或依一定規律而變動

者,曰變額年金(Varying Annuity).通常年金均屬定額年金,本書中所稱年金,除有特別規定外,均指定額年金而言.

確實年金又可分為有限年金,延期有限年金,永續年金,與延期永續年金四種.約定年金之支付,以若干期為限者,曰有限年金(Temporary Annuity).約定最初若干期不付年金,以後若干期繼續支付年金者,曰延期有限年金(Deferred Annuity).約定年金之支付,永遠繼續而無終止之期者.曰永續年金(Perpetuity).約定最初若干期不付年金,以後永遠繼續支付者,曰延期永續年金(Deferred Perpetuity).

每期支付之年金,在規定期限末之總值,名曰年金終值(Final Value or Amount of the Annuity);其在訂約時之總值,名曰年金現值(Present Value of the Annuity).前後兩支付年金時日間之時期,名曰支付期間(Payment Interval).自最初支付期間之始,至最後支付期間之末,中間相隔之時期,名曰年金時期(Term of the Annuity).每一支付期間支付之金額,名曰每期年金額(Annuity).每年支付年金總額,名曰每年年金總額(Annual Rent).例如每月末支付年金一百元,約定繼續支付六十期,則支付期間為一月,年金時期為五年,每期年金額為一百元,每年年金總額為一千二百元.又如每兩年末支付年金一千元,約定繼續支付十期,則支付期間為二年,年金時期為二十年,每期年金額為一千元,每年年金總額為五百元.

第二章 定額年金

年金之支付,有一年一次者,亦有一年數次或數年一次者,前者計算較簡,而後者稍繁,故前者可名曰簡單年金,而後者可名曰複雜年金.玆分別論之於以下兩節.

第一節 簡單年金

簡單年金一元繼續支付n年之終值.通常以$S_{\overline{n|}}$表之,其數值可自下之公式來得:

$$S_{\overline{n|}}=\frac{u^n-1}{i} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$S_{\overline{n|}}$ 簡單年金一元繼續支付n年之終值.

i 實利率

n 年金時期

$u=1+i$

(證)

年金支付期	與最後支付期間之末相隔之年數	年金一元在最後支付期間末之終值
第一年末	$n-1$	$(1+i)^{n-1}$
第二年末	$n-2$	$(1+i)^{n-2}$
第三年末	$n-3$	$(1+i)^{n-3}$
…………	……	…………
第$(n-2)$年末	2	$(1+i)^2$

第$(n-1)$年末	1	$1+i$
第n年末	0	1

年金終值即爲每期年金額終值之總和,故

$$S_{\overline{n|}}=1+(1+i)+(1+i)^2+\cdots\cdots(1+i)^{n-3}+(1+i)^{n-2}+(1+i)^{n-1}$$

上式之右邊爲一等比級數,其首項爲1,公比爲$1+i$,項數爲n,應用第三編公式(6),得:

$$S_{\overline{n|}}=\frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)}=\frac{(1+i)^n-1}{i}=\frac{u^n-1}{i}$$

$S_{\overline{n|}}$爲年金一元之終值,若年金額爲R元,則以R乘$S_{\overline{n|}}$,即得年金R元之年金終值.

$$K=R\,S_{\overline{n|}}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

R 年金額.

K 年金額R元之終值.

$S_{\overline{n|}}$ 簡單年金一元繼續支付n年之終值.

若每年複利不止一次,則公式(1)中之實利率,可易以虛利率,而得公式如下:

$$S_{\overline{n|}}=\frac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{nm}-1}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m}-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$S_{\overline{n|}}$ 簡單年金一元繼續支付n年之終值.

n 年金時期.

j 虛利率.

m 每年複利次數.

但
$$S_{\overline{nm}|}@\frac{j}{m}=\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm}-1}{\frac{j}{m}}$$

$$S_{\overline{m}|}@\frac{j}{m}=\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}{\frac{j}{m}}$$

故$S_{\overline{n}|}$亦可自下式求得:

$$S_{\overline{n}|}@j=\frac{S_{\overline{nm}|}@\frac{j}{m}}{S_{\overline{m}|}@\frac{j}{m}}\cdots\cdots(4)$$

$S_{\overline{n}|}@j$ 簡單年金一元繼續支付n年依虛利率j投資之終值.

$S_{\overline{nm}|}@\frac{j}{m}$ 簡單年金一元繼續支付nm年依實利率$\frac{j}{m}$投資之終值.

$S_{\overline{m}|}@\frac{j}{m}$ 簡單年金一元繼續支付m年依實利率$\frac{j}{m}$投資之終值.

依公式(1)可製年金終值表(表六),故實利率若爲普通利率,則可應用年金終值表,檢查年金一元之終值.

(例一) 年金300元,求十年末之年金終值!

a) 實利率六釐;

b) 虛利率六釐;每年複利二次;

c) 實利率五釐二毫半.

a) 應用年金終值表,得:

$$S_{\overline{10}|}@6\%=13.18079494$$

$$K=300\,S_{\overline{10}|}=3954.24\text{ 元}$$

b) 應用公式(3),得:

$$S_{\overline{10}|} = \frac{1.03^{20}-1}{1.03^{2}-1}$$

查複利終值表,得:

$$1.03^{20} = 1.80611123$$

$$1.03^{2} = 1.0609$$

代入上式,得:

$$S_{\overline{10}|} = \frac{0.80611123}{0.0609}$$

$$K = 300\, S_{\overline{10}|} = \frac{2418333.69}{609} = 3970.99 \text{ 元}$$

此題亦可應用公式(4)求得.

$$S_{\overline{10}|} @ 6\% = \frac{S_{\overline{20}|} @ 3\%}{S_{\overline{2}|} @ 3\%} = \frac{26.87037449}{2.03}$$

$$K = 300\, S_{\overline{10}|} = \frac{8061.112347}{2.03} = 3970.99 \text{ 元}$$

c)應用公式(1),得:

$$S_{\overline{10}|} = \frac{1.0525^{10}-1}{0.0525}$$

令 $$x = 1.0525^{10}$$

$$\log x = 10 \log 1.0525$$

$$= 0.222220$$

$$x = 1.6680923$$

$$S_{\overline{10}|} = \frac{0.6680923}{0.0525}$$

$$K=300\,S_{\overline{10|}}=\frac{2004276.9}{525}=3817.67\text{ 元}$$

簡單年金一元繼續支付 n 年之現值,通常以 $a_{\overline{n|}}$ 表之.年金現值爲各期年金在年金時期初之總值,而年金終值乃其在年金時期末之總值,故設年金時期爲 n 年,投資利率爲 i,則以 $(1+i)^{-n}$ 乘年金終值,即得年金現值,即:

$$a_{\overline{n|}}=(1+i)^{-n}\,S_{\overline{n|}}=(1+i)^{-n}\,\frac{(1+i)^n-1}{i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\therefore\quad a_{\overline{n|}}=\frac{1-v^n}{i}\quad\cdots\cdots\cdots(5)$$

$a_{\overline{n|}}$　簡單年金一元繼續支付 n 年之現值.

i　實利率.

n　年金時期.

$v=\frac{1}{1+i}$.

$a_{\overline{n|}}$ 爲年金一元之現值,若年金額爲 R 元,則以 R 乘 $a_{\overline{n|}}$,即得年金 R 元之年金現值

$$A=R\,a_{\overline{n|}}\cdots\cdots\cdots(6)$$

R　年金額.

A　年金額 R 元之年金現值.

$a_{\overline{n|}}$　簡單年金一元繼續支付 n 年之現值.

若每年複利不止一次,則公式(5)中之實利率,可易以虛利率,而得公式如下:

$$a_{\overline{n|}}=\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}\quad\cdots\cdots\cdots(7)$$

$a_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付n年之現值.

n 年金時期.

j 虛利率.

m 每年複利次數.

但

$$a_{\overline{nm}|} @ \frac{j}{m} = \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nm}}{\frac{j}{m}}$$

$$S_{\overline{m}|} @ \frac{j}{m} = \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}{\frac{j}{m}}$$

故$a_{\overline{n}|}$亦可自下式求得:

$$a_{\overline{n}|} @ j = \frac{a_{\overline{nm}|} @ \frac{j}{m}}{S_{\overline{m}|} @ \frac{j}{m}} \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

$a_{\overline{n}|} @ j$ 簡單年金一元繼續支付n年依虛利率j投資之現值.

$a_{\overline{nm}|} @ \frac{j}{m}$ 簡單年金一元繼續支付nm年依實利率$\frac{j}{m}$投資之現值.

$S_{\overline{m}|} @ \frac{j}{m}$ 簡單年金一元繼續支付m年依實利率$\frac{j}{m}$投資之終值.

依公式(5)可製年金現值表(表七),故實利率若爲普通利率,則可應用年金現值表,檢查年金一元之現值.

(例二) 年金五百元,年金時期十年,求年金現值!

a) 實利率五釐;

b) 虛利率五釐,每年複利四次;

c) 實利率五釐二毫

a) 查年金現值表,得:

$$a_{\overline{10}|} @ 5\% = 7.72173493$$

$$A = 500\, a_{\overline{10}|} = 3860.87 \text{ 元}$$

b) 應用公式(7),得:

$$a_{\overline{10}|} = \frac{1-1.0125^{-40}}{1.0125^4 - 1}$$

查複利現值表與複利終值表,得:

$$1.0125^{-40} = 0.60841334$$

$$1.0125^4 = 1.05094534$$

代入上式,得:

$$a_{\overline{10}|} = \frac{0.39158666}{0.05094534}$$

$$A = 500\, a_{\overline{10}|} = \frac{19579333000}{5094534} = 3843.20 \text{ 元}$$

此題亦可應用公式(8)求得.

$$a_{\overline{10}|} @ 5\% = \frac{a_{\overline{40}|} @ 1\frac{1}{4}\%}{S_{\overline{4}|} @ 1\frac{1}{4}\%} = \frac{31.32693316}{4.07562695}$$

$$A = 500\, a_{\overline{10}|} = \frac{15663.46658}{4.07562695} = 3843.20 \text{ 元}$$

c) 應用公式(5),得:

$$a_{\overline{10}|} = \frac{1-1.052^{-10}}{0.052}$$

令　$x = 1.052^{-10}$

$$\log x = -10\log 1.052 = -10\times 0.022016$$

$$=\bar{1}.77984$$

$$x = 0.6023375$$

$$a_{\overline{10}|} = \frac{0.3976625}{0.052}$$

$$A = 500\,a_{\overline{10}|} = \frac{198831.25}{52} = 3823.68\text{ 元}$$

若年金之支付,不在每年之末而在每年之初,則每年初支付之年金一元,至年末已爲 $(1+i)$ 元(i 爲實利率),故期初付年金一元實與期末付年金 $(1+i)$ 元相等.期初付年金之終值與現值,可自下列各公式求得:

(甲)每年複利一次

$$S'_{\overline{n}|} = S_{\overline{n+1}|} - 1 \quad\cdots\cdots\cdots (9)$$

$$a'_{\overline{n}|} = a_{\overline{n-1}|} + 1 \quad\cdots\cdots\cdots (10)$$

(乙)每年複利 m 次

$$S'_{\overline{n}|}@j = \frac{S_{\overline{m(n+1)}|}@\frac{j}{m}}{S_{\overline{m}|}@\frac{j}{m}} - 1 \quad\cdots\cdots\cdots (11)$$

$$a'_{\overline{n}|}@j = \frac{a_{\overline{m(n-1)}|}@\frac{j}{m}}{S_{\overline{m}|}@\frac{j}{m}} + 1 \quad\cdots\cdots\cdots (12)$$

$S'_{\overline{n}|}$ 期初付簡單年金一元繼續支付 n 年之終值.

$S_{\overline{n+1}|}$ 期末付簡單年金一元繼續支付 $n+1$ 年之終值.

$a'_{\overline{n}\vert}$	期初付簡單年金一元繼續支付n年之終值.
$a_{\overline{n-1}\vert}$	期末付簡單年金一元繼續支付$n-1$年之現值.
$S'_{\overline{n}\vert}@j$	期初付簡單年金一元繼續支付n年依虛利率j投資之終值.
$S_{\overline{m(n+1)}\vert}@\frac{j}{m}$	期末付簡單年金一元繼續支付$m(n+1)$年依實利率$\frac{j}{m}$投資之終值.
$S_{\overline{m}\vert}@\frac{j}{m}$	期末付簡單年金一元繼續支付m年依實利率$\frac{j}{m}$投資之終值.
$a'_{\overline{n}\vert}@j$	期初付簡單年金一元繼續支付n年依虛利率j投資之現值.
$a_{\overline{m(n-1)}\vert}@\frac{j}{m}$	期末付簡單年金一元繼續支付$m(n-1)$年依實利率$\frac{j}{m}$投資之現值.

(證)　$$S'_{\overline{n}\vert}=(1+i)\,S_{\overline{n}\vert}=(1+i)\,\frac{(1+i)^n-1}{i}=\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-\frac{i}{i}$$

$$\therefore\quad S'_{\overline{n}\vert}=S_{\overline{n+1}\vert}-1$$

$$a'_{\overline{n}\vert}=(1+i)\,a_{\overline{n}\vert}=(1+i)\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}+\frac{i}{i}$$

$$\therefore\quad a'_{\overline{n}\vert}=a_{\overline{n-1}\vert}+1$$

若每年複利不止一次,則:

$$S'_{\overline{n}\vert}=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m S_{\overline{n}\vert}=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m(n+1)}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1}-\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1}$$

$$\therefore \quad S'_{\overline{n}|} @ j = \frac{S_{\overline{m(n+1)}|} @ \frac{j}{m}}{S_{\overline{m}|} @ \frac{j}{m}} - 1$$

$$a'_{\overline{n}|} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^m a_{\overline{n}|} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^m \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^m - 1}$$

$$= \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m(n-1)}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^m - 1} + \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^m - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^m - 1}$$

$$\therefore \quad a'_{\overline{n}|} @ j = \frac{a_{\overline{m(n-1)}|} @ \frac{j}{m}}{S_{\overline{m}|} @ \frac{j}{m}} + 1$$

(例三) 期初付年金一百元,年金時期十五年,求年金終值與年金現值!

a) 實利率四釐;

b) 虛利率四釐,每年複利二次.

a) 應用公式(9),得:

$$S'_{\overline{15}|} = S_{\overline{16}|} - 1 = 21.8\,453114 - 1 = 20.82453114$$

$$K = 100\, S'_{\overline{15}|} = 2082.45 \text{ 元}$$

應用公式(10),得:

$$a'_{\overline{15}|} = a_{\overline{14}|} + 1 = 10.56312293 + 1 = 11.56312293$$

$$A = 100\, a'_{\overline{15}|} = 1156.31 \text{ 元}$$

b) 應用公式(11),得:

$$S'_{\overline{15}|} @ 4\% = \frac{S_{\overline{32}|} @ 2\%}{S_{\overline{2}|} @ 2\%} - 1 = \frac{44.22702961}{2.02} - 1$$

$$= \frac{42.20702961}{2.02}$$

$$K = 100\, S'_{\overline{15}|} = \frac{4220.702961}{2.02} = 2089.46 \text{ 元}$$

應用公式(12),得:

$$a'_{\overline{15}|} @ 4\% = \frac{a_{\overline{28}|} @ 2\%}{S_{\overline{2}|} @ 2\%} + 1$$

$$= \frac{21.28127236}{2.02} + 1 = \frac{23.30127236}{2.02}$$

$$A = 100\, a'_{\overline{15}|} = \frac{2330.127236}{2.02} = 1153.53 \text{ 元}$$

簡單年金一元,延期 m 年,以後繼續支付 n 年之終值與現值,通常以 $m|S_{\overline{n}|}$ 與 $m|a_{\overline{n}|}$ 表之.延期有限年金之終值,與延期無關,故與普通有限年金之終值相同,至其現值則不然,其數值之大小,隨延期之久暫而異,延期年數愈長,則年金現值愈小,延期年數愈短,則年金現值愈大,設在延期內亦按期支付年金,則在此延期內所支付年金之現值,與延期有限年金之現值相加,即得普通有限年金$(m+n)$年之現值,故

$$m|a_{\overline{n}|} + a_{\overline{m}|} = a_{\overline{m+n}|}$$

$$\therefore \quad m|a_{\overline{n}|} = a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

$m|a_{\overline{n}|}$　簡單年金一元延期 m 年以後繼續支付 n 年之現值.

$a_{\overline{m+n}|}$　簡單年金一元繼續支付 $m+n$ 年之現值.

$a_{\overline{m}|}$　簡單年金一元繼續支付 m 年之現值.

永續年金之支付,無終止之期,故不能計算終值,至其現值則可求得其極限.永續年金一元之現值通常以$a\infty$表之,其數值可自下式求得:

$$a\infty = \frac{1}{i} \cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

$a\infty$　永續年金一元之現值.

i　實利率.

(證)
$$a\infty = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-v^n}{i}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i} = \frac{1}{i}$$

延期m年,永續年金一元之現值,通常以$m|a\infty$表之,其數值可自下式求得:

$$m|a\infty = \frac{v^m}{i} \cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

$m|a\infty$ 延期m年永續年金一元之現值.

m　延期年數.

i　實利率.

$v = \frac{1}{1+i}$

(證)
$$m|a\infty = v^m a\infty$$

但
$$a\infty = \frac{1}{i}$$

$$\therefore\ m|a\infty = \frac{v^m}{i}$$

(例四) 年金二百元,實利率五釐,求年金現值!

a) 延期十年,以後繼續支付二十年;

b) 延期十年,以後永遠繼續支付;

c) 永遠繼續支付.

a) 應用公式(13),得:

$$10|a_{\overline{20}|}=a_{\overline{30}|}-a_{\overline{10}|}=15.37245103$$

$$-7.72173493=7.6507161$$

$$A=200\times 10|a_{\overline{20}|}=200\times 7.6507161$$

$$=1530.14\text{ 元}$$

b) 應用公式(15),得:

$$10|a\infty=\frac{v^{10}}{0.05}=20\times 0.61391325=12.278265$$

$$A=200\times 10|a\infty=200\times 12.278265-2455.65\text{ 元}$$

c) 應用公式(14),得:

$$a\infty=\frac{1}{0.05}=20$$

$$A=200\times a\infty=200\times 20=4000\text{ 元}$$

若已知年金額,年金終值,與利率,則年金時期可自下列公式之一求得:

$$n=\frac{\log(Ki+R)-\log R}{\log(1+i)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

$$n=\frac{\log\left[K\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-K+R\right]-\log R}{m\log\left(1+\frac{j}{m}\right)}\quad\cdots\cdots(17)$$

n 年金時期.

K 年金終值.

R 年金額.

i 實利率.

j 虛利率.

m 每年複利次數.

(證)
$$K=R\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$\frac{Ki}{R}=(1+i)^n-1$$

$$\frac{Ki+R}{R}=(1+i)^n$$

$$\log(Ki+R)-\log R=n\log(1+i)$$

$$\therefore\quad n=\frac{\log(Ki+R)-\log R}{\log(1+i)}$$

以虛利率代實利率,則得:

$$n=\frac{\log\left[K\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-K+R\right]-\log R}{m\log\left(1+\frac{j}{m}\right)}$$

(例五) 年金五百元,問至少若干年後,方可得一萬元以上之終值?

a) 實利率七釐;

b) 虛利率七釐,每年複利二次.

a) 應用公式(16),得:

$$n=\frac{\log(700+500)-\log 500}{\log 1.07}=\frac{3.079181-2.698970}{0.029384}$$

$$=\frac{0.380211}{0.029384}=12.94\text{ 年}$$

b) 應用公式 (17), 得:

$$n=\frac{\log(10000\times 1.035^2-10000+500)-\log 500}{2\log 1.035}$$

$$=\frac{\log 1212.25-\log 500}{2\log 1.035}=\frac{\log 2.4245}{2\log 1.035}$$

$$=\frac{0.3846225}{0.029880}=12.87\text{ 年}$$

若已知年金額, 年金現值, 與利率, 則年金時期可自下列公式之一求得:

$$n=\frac{\log R-\log(R-Ai)}{\log(1+i)} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots 18)$$

$$n=\frac{\log R-\log\left[R+A-A\left(1+\frac{j}{m}\right)^m\right]}{m\log\left(1+\frac{j}{m}\right)} \cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

n　年金時期.

R　年金額.

A　年金現值.

i　實利率.

j　虛利率.

m　每年複利次數.

(證)　$$A=R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\frac{Ai}{R}=1-(1+i)^{-n}$$

$$(1+i)^{-n}=\frac{R-Ai}{R}-n\log(1+i)$$

$$=\log(R-Ai)-\log R$$

$$\therefore\quad n=\frac{\log R-\log(R-Ai)}{\log(1+i)}$$

以虛利率代實利率,則得:

$$n=\frac{\log R-\log\left[R+A-A\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}\right]}{m\log\left(1+\frac{j}{m}\right)}$$

(例六) 年金額一千元,年金現值一萬元 求年金時期!

a) 實利率六釐,

b) 虛利率六釐,每年複利二次.

a) 應用公式 (18),得:

$$n=\frac{\log 1000-\log(1000-600)}{\log 1.06}=\frac{3-2.60206}{0.025306}$$

$$=\frac{0.39794}{0.025306}=15.73\text{ 年}$$

b) 應用公式 (19),得:

$$n=\frac{\log 1000-\log(1000+10000-10000\times 1.03^{2})}{2\log 1.03}$$

$$=\frac{3-\log 391}{2\log 1.03}=\frac{3-2.592177}{2\times 0.012837}$$

$$=\frac{0.407823}{0.025674}=15.88\text{ 年}$$

若欲求年金額,則可應用公式(2)或公式(6).

(例七) 某甲欲於十年末積洋一萬元,問每年末須存洋若干元於銀行?(銀行規定年利率七釐,每年複利一次)

應用公式(2),得:

$$10000=RS_{\overline{10}|}$$

$$R=\frac{10000}{S_{\overline{10}|}}=\frac{10000}{13.81644796}=723.78\text{ 元}$$

(例八) 某甲以洋一萬元存入銀行,欲於以後十年間,每年末自銀行取得年金,求此年金額!(銀行規定年利率七釐,每年複利一次)

應用公式(6),得:

$$10000=Ra_{\overline{10}|}$$

$$R=\frac{10000}{a_{\overline{10}|}}=\frac{10000}{7.02358154}=1423.78\text{ 元}$$

以上兩題中$S_{\overline{n}|}$與$a_{\overline{n}|}$均在分母,故計算稍繁,欲便計算,可先製就$\frac{1}{a_{\overline{n}|}}$表與$\frac{1}{S_{\overline{n}|}}$表,則除法可變爲乘法,前者名曰年賦金表(表七)(其名稱之來源參看第五編),後者則亦可自年賦金表化出,不必另製一表,蓋$\frac{1}{a_{\overline{n}|}}$與$\frac{1}{S_{\overline{n}|}}$有下列之關係:

$$\frac{1}{S_{\overline{n}|}}=\frac{1}{a_{\overline{n}|}}-i\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

$a_{\overline{n}|}$　簡單年金一元繼續支付n年之現值.

$S_{\overline{n}|}$　簡單年金一元繼續支付n年之終值.

i　實利率.

(證)
$$\frac{1}{a_{\overline{n|}}}-\frac{1}{S_{\overline{n|}}}=\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}-\frac{i}{(1+i)^n-1}$$

$$=\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}-\frac{i}{(1+i)^n-1}=i\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n-1}$$

即
$$\frac{1}{a_{\overline{n|}}}-\frac{1}{S_{\overline{n|}}}=i$$

$$\therefore\quad \frac{1}{S_{\overline{n|}}}=\frac{1}{a_{\overline{n|}}}-i$$

若應用年賦金表,則以上兩題可解答如下:

(例七) $R=10000\frac{1}{S_{\overline{10|}}}=10000\left(\frac{1}{a_{\overline{10|}}}-0.07\right)$

$$=10000\times(0.14237750-0.07)=723.78\text{ 元}$$

(例八) $R=10000\frac{1}{a_{\overline{10|}}}=10000\times0.1423775=1423.78$ 元

若以一定現值,依一定投資利率,購買一定年金額,則由公式計算而得之年金時期不能適爲整數,故通常有一次年金額,須小於其他各次之年金額,此較小之年金額,或於最後一期支付,或於最初一期支付,其數值可自下列二公式求得:

$$L=Au^n-R(S_{\overline{n|}}-1) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

$$F=Au-Ra_{\overline{n-1|}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (22)$$

L　最後一年支付之零星年金額.

F　最初一年支付之零星年金額.

R　每年年金額.

A　年金現值.

$S_{\overline{n}|}$　簡單年金一元繼續支付n年之終值.

$a_{\overline{n-1}|}$　簡單年金一元繼續支付$n-1$年之現值.

n　年金時期.

i　實利率.

$u=1+i$

(證)
$$Au^n = Ru\,S_{\overline{n-1}|} + L$$
$$Au^n = R(S_{\overline{n}|} - 1) + L$$
$$\therefore \quad L = Au^n - R(S_{\overline{n}|} - 1)$$
$$A = F\frac{1}{u} + Ra_{\overline{n-1}|}\frac{1}{u}$$
$$Au = F + Ra_{\overline{n-1}|}$$
$$\therefore \quad F = Au - Ra_{\overline{n-1}|}$$

(例九) 某甲以洋一萬元,購買年金若干年,年金額1000元,投資利率六釐,求零星年金額!

a) 零星年金額於最初一年收受;

b) 零星年金額於最後一年收受.

$$A = Ra_{\overline{n}|}$$
$$a_{\overline{n}|} = \frac{A}{R} = \frac{10000}{1000} = 10$$

查年金現值表得:

$$n = 16$$

a) 應用公式(22),得:

$$F = 10000 \times 1.06 - 1000\,a_{\overline{15}|}$$
$$= 10600 - 9712.25 = 887.75 \text{ 元}$$

b) 應用公式(21),得:

$$L=10000\times1.06^{16}-1000(S_{\overline{16|}}-1)$$

$$=25403.5168-24672.5281$$

$$=730.99\text{ 元}$$

F與L有一定之關係,故其演算可用下式稽核之:

$$R-L=u^{n-1}(R-F)$$

代以本題中數字,則得:

$$R-L=1000-730.99=269.01$$

$$u^{n-1}(R-F)=1.06^{15}\times112.25$$

$$=2.39655819\times112.25=269.01$$

年金問題中關於利率之計算,通常須應用插補法,將詳述於第六編;但若已知年金終值,年金現值與年金額,則應用公式(20),卽可計算利率.

(例十) 已知年金終值爲12577.89元,年金現值爲7721.73元,年金額1000元,求實利率!

$$12577.89=1000\,S_{\overline{n|}}$$

$$\frac{1}{S_{\overline{n|}}}=\frac{1000}{12577.89}=0.0795047$$

$$7721.73=1000\,a_{\overline{n|}}$$

$$\frac{1}{a_{\overline{n|}}}=\frac{1000}{7721.73}=0.1295047$$

代入公式(20),則得

$$i=0.1295047-0.0795047=0.05$$

習題十三

1. 求下列各題中之年金終值!

	年金額	期初付或期末付	年金時期	年利率	每年複利次數	年金終值
a)	$ 200	期末付	10年	6 %	1次	
b)	200	期末付	10年	6 %	2次	
c)	200	期末付	10年	6 %	12次	
d)	200	期末付	10年	5.4%	1次	
e)	400	期初付	15年	5 %	1次	
f)	400	期初付	15年	5 %	2次	
g)	380	期末付	20年	3 %	2次	
h)	450	期末付	25年	$4\frac{1}{2}$%	1次	
i)	560	期末付	30年	5 %	4次	
j)	640	期末付	35年	12 %	1次	

2. 求下列各題中之年金現值!

	年金額	期初付或期末付	延期年數	年金時期	年利率	每年複利次數	年金現值
a)	$ 300	期末付	0年	15年	5 %	1次	
b)	300	期末付	0年	15年	5.4%	1次	
c)	300	期末付	0年	15年	5 %	4次	
d)	300	期末付	0年	15年	5 %	12次	
e)	500	期初付	0年	20年	7 %	1次	
f)	500	期初付	0年	20年	7 %	4次	
g)	600	期末付	5年	25年	8 %	1次	
h)	600	期末付	5年	25年	8 %	2次	
i)	1000	期末付	0年	永續	4 %	1次	
j)	1000	期末付	10年	永續	4 %	1次	

3. 填寫下表中空白之處!

	年金額	年金時期	年利率	每年複利次數	年金終值	年金現值
a)		10年	5%	1次	$ 10000	
b)		20年	6%	2次		$ 5000
c)		30年	8%	2次	40000	
d)		15年	4%	2次	15000	
e)		10年	5%	1次		8000
f)		25年	7%	1次		7500
g)		18年	3%	1次	20000	

4. 求證:

$$a'\infty = \frac{1}{d}$$

$a'\infty$ 期初付永續年金一元之現值.

d 貼現率.

5. 某甲新購一屋,言定先付現洋五千元,以後十年間,每年末付洋一千元,求此屋之購價!

a) 實利率七釐;

b) 虛利率七釐,每年複利二次.

6. 某甲預計其子滿足二十三歲時,將赴外國留學,出國川資及服裝費共需洋一千元,返國川資需洋五百元,留學期限四年,每年學費三千元,於每年初匯出,問某甲於其子生後,每年末須存洋若干元於銀行,以爲其子留學外國之準備?(某甲存款至第二十三次終止,以後祇支不存,銀行規定年利率七釐,每年複利一次)

7. 某甲新購一地,價值25000元,約定先付現洋5000元,以後每年末付洋3000元,不及3000元之數,於最後一期付清,故某甲最後一期付款額,較以前各期爲少,求此最後一期付款額!

a) 實利率七釐;

b) 虛利率七釐,每年複利二次,

8. 某鑛估計開掘五年後始能生產,以後二十年間每年可得純益二

萬五千元，設吾人不計五年內開鑛費用與生產停止後廢鑛之價值，則此鑛現當共值幾何？（投資利率六釐）

9. 某城一畝田每年田主可得純益七元五角，問某城一畝田當值幾何？

a) 實利率八釐；

b) 實利率一分；

c) 虛利率一分，每年複利二次.

10. 某屋售價原定 10000 元，若售主允許購主先付現洋 4000 元，以後六年間，每年末付洋 1000 元，不必另付利息，問售主共讓去售價若干元？

a) 投資利率 6%；

b) 投資利率 8%.

11. 甲乙兩人每年末各以 500 元存入儲蓄銀行，甲之銀行規定年利率七釐，每年複利一次，乙之銀行規定年利率七釐，每年複利二次，問二十年後兩人在兩銀行存款額相差若干元？

12. 某甲以年金額 500 元，二十年有限年金，遺給其子，設其子欲改年金時期爲十五年，則每年末可支取年金額若干元？（投資利率六釐）

13. 以年金額 500 元之永續年金，改換繼續支付二十年之期初付年金，求新年金額（投資利率六釐）！

14. 某富翁以年金額 2000 元之永續年金，平分贈給甲乙二醫院，規定甲醫院得先支用年金額之全部，俟甲醫院支盡其應得之部後，乙醫院始得支用永續年金，問乙醫院得獨自支用年金額 2000 元時，距某富翁給與遺產時若干年？（投資利率六釐）

15. 甲乙二人各以 100 元投資，甲於十五年間，每年得純益 6 元，以後盡喪其本金，乙則於最初十五年間，一無盈餘，但於其後五年間，每年得純益 6 元，並於第二十年末，以其投資事業轉讓於人，得洋 110 元，問甲乙兩人投資之結果孰優？（市場利率六釐）

16. 求證：

$$m|a_{\overline{n}|} = v^m a_{\overline{n}|}$$

$m|a_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元延期 m 年以後繼續支付 n 年之現值.

$a_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付n年之現值.

i 實利率.

$v=\dfrac{1}{1+i}$

17. 求簡單年金一元繼續支付n年在$n+m$年末之終值!

18. 第一年至第十年每年年金額為300元,第十一年至第二十年每年年金額為350元,第二十一年至第三十年每年年金額為400元,求第一年初之年金現值與第三十年末之年金終值!(投資利率六釐)

19. 第一年至第十年每年年金額為300元,第十一年至第十五年不付年金,第十六年至第二十五年每年年金額為350元,第二十六年至第三十年不付年金,第三十一年至第四十年每年年金額為400元,求第一年初之年金現值與第四十年末之年金終值!(投資利率六釐)

20. 某甲以洋三萬元,購買年金若干年,年金額2000元,投資利率五釐,求零星年金額!

a)零星年金額於最初一年收受;

b)零星年金額於最後一年收受.

21. 已知年金現值為1359.03元,年金終值為2977.81元,年金額為100元,求實利率!

22. 某甲以洋一萬元,購買年金十五年,後十年每年年金額較前五年每年年金額少100元,投資利率六釐,求前五年每年年金額!

23. 某甲以洋11862.62元,購買年金三十年,第二期(第十一年至第二十年)每年年金額為第一期(第一年至第十年)每年年金額四分之三,第三期(第二十一年至第三十年)每年年金額為第一期每年年金額二分之一,投資利率$3\frac{1}{2}\%$,求第一期每年年金額!

24. 某森林之收益估計如下:

第十六年至第二十年每年可得淨利4700元.

第三十一年至第三十五年每年可得淨利4700元.

第四十六年至第五十年每年可得淨利4700元.

第六十一年至第六十五年每年可得淨利4700元.

第七十六年至第八十年每年可得淨利4700元.

設投資者欲得實利率四釐之收益,則須以若干元購買此森林?

25. 前題中若森林之收益估計改作如下:

第十六年至第二十年每年可得淨利4700元.

第三十一年至第三十五年每年可得淨利4800元.

第四十六年至第五十年每年可得淨利4900元.

第六十一年至第六十五年每年可得淨利5000元.

第七十六年至第八十年每年可得淨利5100元.

則森林之購價當為幾何?

第二節　複雜年金

每年年金總額一元,分p次支付,繼續支付n年之終值,通常以$S_{\overline{n}|}^{(p)}$表之,其數值可自下之公式求得:

$$S_{\overline{n}|}^{(p)}=\frac{u^n-1}{p\left(u^{\frac{1}{p}}-1\right)} \qquad \cdots\cdots(23)$$

$S_{\overline{n}|}^{(p)}$　每年年金總額一元分p次支付繼續支付n年之終值.

n　年金時期.

p　每年支付年金次數.

$u=1+i$

i　實利率.

(證) 每年年金總額一元,分p次支付,則每次僅付$\frac{1}{p}$元.

年金支付期	與最後支付期間之末相隔之年數	每期年金額$\frac{1}{p}$元至最後支付期間末之終值
第$\frac{1}{p}$年末	$n-\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p}(1+i)^{n-\frac{1}{p}}$
第$\frac{2}{p}$年末	$n-\frac{2}{p}$	$\frac{1}{p}(1+i)^{n-\frac{2}{p}}$

第$\frac{3}{p}$年末	$n-\frac{3}{p}$	$\frac{1}{p}(1+i)^{n-\frac{3}{p}}$
…………	………	…………
第$\left(n-\frac{2}{p}\right)$年末	$\frac{2}{p}$	$\frac{1}{p}(1+i)^{\frac{2}{p}}$
第$\left(n-\frac{1}{p}\right)$年末	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p}(1+i)^{\frac{1}{p}}$
第n年末	0	$\frac{1}{p}$

年金終值即爲每期年金額終值之總和,故

$$S_{\overline{n}|}^{(p)}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p}(1+i)^{\frac{1}{p}}+\frac{1}{p}(1+i)^{\frac{2}{p}}+\cdots\cdots+\frac{1}{p}(1+i)^{n-\frac{3}{p}}$$

$$+\frac{1}{p}(1+i)^{n-\frac{2}{p}}+\frac{1}{p}(1+i)^{n-\frac{1}{p}}$$

上式之右邊爲一等比級數,其首項爲$\frac{1}{p}$,公比爲$(1+i)^{\frac{1}{p}}$,項數爲np,應用第三編公式(6),得:

$$S_{\overline{n}|}^{(p)}=\frac{\frac{1}{p}[(1+i)^n-1]}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}$$

$$\therefore\quad S_{\overline{n}|}^{(p)}=\frac{u^n-1}{p(u^{\frac{1}{p}}-1)}$$

令 $$j_{(p)}=p(u^{\frac{1}{p}}-1)$$

則 $$S_{\overline{n}|}^{(p)}=\frac{u^n-1}{j_{(p)}}=\frac{i}{j_{(p)}}\cdot\frac{u^n-1}{i}$$

$$\therefore\quad S_{\overline{n}|}^{(p)}=\frac{i}{j_{(p)}}S_{\overline{n}|}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

$S_{\overline{n|}}^{(p)}$　每年年金總額一元分p次支付繼續支付n年之終值.

$S_{\overline{n|}}$　簡單年金一元繼續支付n年之終值.

i　實利率.

$j_{(p)}=p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]$

p　每年支付年金次數.

$S_{\overline{n|}}$可查年金終值表,$\frac{i}{j_{(p)}}$亦可專製一表(表十一),以備檢查之用.

在公式(23)中,若$n=1$,則

$$S_{1}^{(p)}=\frac{1+i-1}{j_{(p)}}=\frac{i}{j_{(p)}}$$

故$\frac{i}{j_{(p)}}$卽爲每年年金總額一元,分p次支付,在一年末之終值.

$S_{\overline{n|}}^{(p)}$爲每年年金總額一元之終值,若每年年金總額爲R元,則以R乘$S_{\overline{n}}^{(p)}$,卽得每年年金總額R元之年金終值.卽

$$K=RS_{\overline{n}}^{(p)}\quad\cdots\cdots(25)$$

R　每年年金總額.

K　每年年金總額R元之年金終值.

$S_{\overline{n|}}^{(p)}$　每年年金總額一元分p次支付繼續支付n年之終值.

若每年複利不止一次,則公式(23)中之實利率,可易以虛利率,而得公式如下:

$$S_{\overline{n}}^{(p)}=\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm}-1}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]}\quad\cdots\cdots(26)$$

$S_{\overline{n}|}^{(p)}$ 每年年金總額一元分p次支付繼續支付n年之終值.

p 每年支付年金次數.

j 虛利率.

m 每年複利次數.

但 $$S_{\overline{nm}|}@\frac{j}{m}=\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm}-1}{\frac{j}{m}}$$

$$\frac{\frac{j}{m}}{j_{\left(\frac{p}{m}\right)}@\frac{j}{m}}=\frac{\frac{j}{m}}{\frac{p}{m}\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]}$$

$$\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm}-1}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]}=\frac{1}{m}\frac{\frac{j}{m}}{\frac{p}{m}\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]}\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm}-1}{\frac{j}{m}}$$

$$\therefore\quad S_{\overline{n}|}^{(p)}@j=\frac{1}{m}\frac{\frac{j}{m}}{j_{\left(\frac{p}{m}\right)}@\frac{j}{m}}\left(S_{\overline{nm}|}@\frac{j}{m}\right)\cdots\cdots\cdots(27)$$

$S_{\overline{n}|}^{(p)}@j$ 每年年金總額一元分p次支付繼續支付n年依虛利率j投資之終值.

$S_{\overline{nm}|}@\frac{j}{m}$ 簡單年金一元繼續支付nm年依實利率$\frac{j}{m}$投資之終值.

j 虛利率.

m 每年複利次數.

$j_{\left(\frac{p}{m}\right)}@\frac{j}{m}=\frac{p}{m}\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]$

p 每年支付年金次數.

若$m=p$, 則

$$S_{\overline{n}|}^{(p)}@j=\frac{S_{\overline{nm}|}@\frac{j}{m}}{p\dfrac{\frac{j}{m}}{j(1)@\frac{j}{m}}}=\frac{S_{\overline{nm}|}@\frac{j}{m}}{p\dfrac{\frac{j}{m}}{\frac{j}{m}}}$$

$$\therefore\quad S_{\overline{n}|}^{(p)}@j=\frac{1}{p}S_{\overline{nm}|}@\frac{j}{m}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

$S_{\overline{n}|}^{(p)}@j$　每年年金總額一元分p次支付繼續支付n年依虛利率j投資之終值.

p　每年支付年金次數.

$S_{\overline{nm}|}@\frac{j}{m}$　簡單年金一元繼續支付nm年依實利率$\frac{j}{m}$投資之終值.

故若每年支付年金次數與複利次數相等,則複雜年金可化爲簡單年金.

(例一)每年年金總額500元,求十年末之年金終值!

a) 實利率四釐,每年支付年金二次;

b) 實利率四釐,每年支付年金二十四次;

c) 虛利率四釐,每年支付年金四次,複利四次;

d) 虛利率四釐,每年支付年金二次,複利四次;

e) 虛利率四釐,每年支付年金四次,複利二次.

a) 應用公式(24),得:

$$S_{\overline{10}|}^{(2)}=\frac{0.04}{j_{(2)}}S_{\overline{10}|}=1.00990195\times12.00610712$$

$$K=500\,S_{\overline{10}|}^{(2)}=500\times1.00990195\times12.00610712$$

$$=504.950975\times12.00610712=6062.50\text{ 元}$$

b) 應用公式 (23), 得:

$$S_{\overline{10|}}^{(24)}=\frac{1.04^{10}-1}{24(1.04^{\frac{1}{24}}-1)}$$

查複利終值表, 得:

$$1.04^{10}=1.48024428$$

令 $$x=1.04^{\frac{1}{24}}$$

$$\log x=\frac{1}{24}\log 1.04=\frac{1}{24}\times 0.017033=0.000709708$$

$$x=1.0016353$$

$$K=500\,S_{\overline{10|}}^{(2)}=500\times\frac{0.48024428}{24\times 0.0016353}=\frac{240.12214}{0.0392472}$$

$$=6118.20\text{ 元}$$

c) 應用公式 (28), 得:

$$S_{\overline{10|}}^{(4)}@4\%=\frac{1}{4}S_{\overline{40|}}@1\%$$

查年金終值表, 得:

$$S_{\overline{40|}}@1\%=48.88637336$$

$$K=500\,S_{\overline{10|}}^{(4)}=\frac{500}{4}\times 48.88637336$$

$$=6110.80\text{ 元}$$

d) 應用公式 (27), 得:

$$S_{\overline{10|}}^{(2)}@4\%=\frac{1}{4}\cdot\frac{0.01}{j_{(\frac{1}{2})}@1\%}(S_{\overline{40|}}@1\%)$$

$$=\frac{1}{4}\times 0.99502488\times 48.88637336$$

$$K=500\ S_{\overline{10}|}^{(2)}=\frac{500}{4}\times 0.99502488\times 48.88637336$$

$$=0.99502488\times 6110.79667=6080.39\text{ 元}$$

e) 應用公式(27),得:

$$S_{\overline{10}|}^{(4)}@\,4\,\%=\frac{1}{2}\cdot\frac{0.02}{j_{(2)}@\,2\,\%}(S_{\overline{20}|}@\,2\,\%)$$

$$=\frac{1}{2}\times 1.00497525\times 24.2973698$$

$$K=500\ S_{\overline{10}|}^{(4)}=\frac{500}{2}\times 1.00497525\times 24.2973698$$

$$=1.00497525\times 6074.34245=6104.56\text{ 元}$$

每年年金總額一元,分p次支付,繼續支付n年之現值通常以$a_{\overline{n}|}^{(p)}$表之.年金現值爲各期年金在年金時期初之總值而年金終值乃其在年金時期末之總值,故設年金時期爲n年,投資利率爲i,則以$(1+i)^{-n}$乘年金終值,卽得年金現值,卽:

$$a_{\overline{n}|}^{(p)}=(1+i)^{-n}S_{\overline{n}|}^{(p)}=(1+i)^{-n}\frac{(1+i)^n-1}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]}$$

$$\therefore\quad a_{\overline{n}|}^{(p)}=\frac{1-v^n}{p(u^{\frac{1}{p}}-1)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots 29)$$

或卽

$$a_{\overline{n}|}^{(p)}=\frac{i}{j_{(p)}}a_{\overline{n}|}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

$a_{\overline{n}|}^{(p)}$ 每年年金總額一元,分p次支付,繼續支付n年之現值.

$a_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元,繼續支付n年之現值.

n 年金時期.

p 每年支付年金次數.

$u=1+i$

$v=\frac{1}{1+i}$

i 實利率.

$i_{(p)}=p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]$

$a_{\overline{n}|}^{(p)}$ 爲每年年金總額一元之現值,若每年年金總額爲 R 元,則以 R 乘 $a_{\overline{n}|}^{(p)}$,即得每年年金總額 R 元之年金現值,即

$$A=R\,a_{\overline{n}|}^{(p)} \quad\cdots\cdots\cdots(31)$$

R 每年年金總額.

A 每年年金總額 R 元之年金現值.

$a_{\overline{n}|}^{(p)}$ 每年年金總額一元,分 p 次支付,繼續支付 n 年之現值.

若每年複利不止一次,則公式(29)中之實利率,可易以虛利率,而得公式如下:

$$a_{\overline{n}|}^{(p)}=\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nm}}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]} \quad\cdots\cdots\cdots(32)$$

$a_{\overline{n}|}^{(p)}$ 每年年金總額一元,分 p 次支付,繼續支付 n 年之現值.

n 年金時期.

j 虛利率.

m 每年複利次數.

p 每年支付年金次數.

但 $$a_{\overline{nm}|}@\frac{j}{m}=\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nm}}{\frac{j}{m}}$$

$$\frac{\frac{j}{m}}{j_{\left(\frac{p}{m}\right)}@\frac{j}{m}}=\frac{\frac{j}{m}}{\frac{p}{m}\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]}$$

$$\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nm}}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]}=\frac{1}{m}\frac{\frac{j}{m}}{\frac{p}{m}\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]}\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nm}}{\frac{j}{m}}$$

$$\therefore\quad a_{\overline{n|}}^{(p)}@j=\frac{1}{m}\cdot\frac{\frac{j}{m}}{j_{\left(\frac{p}{m}\right)}@\frac{j}{m}}\left(a_{\overline{nm|}}@\frac{j}{m}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

$a_{\overline{n|}}^{(p)}@j$　每年年金總額一元,分 p 次支付,繼續支付 n 年,依虛利率 j 投資之現值.

$a_{\overline{nm|}}@\frac{j}{m}$　簡單年金一元,繼續支付 nm 年,依實利率 $\frac{j}{m}$ 投資之現值.

j　虛利率.

m　每年複利次數.

p　每年支付年金次數.

$$j_{\left(\frac{p}{m}\right)}@\frac{j}{m}=\frac{p}{m}\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]$$

若 $m=p$, 則:

$$a_{\overline{n|}}^{(p)}@j=\frac{1}{p}\frac{\frac{j}{m}}{j_{(1)}@\frac{j}{m}}\left(a_{\overline{nm|}}@\frac{j}{m}\right)=\frac{1}{p}\frac{\frac{j}{m}}{\frac{j}{m}}\left(a_{\overline{nm|}}@\frac{j}{m}\right)$$

$$\therefore\quad a_{\overline{n|}}^{(p)}@j=\frac{1}{p}a_{\overline{nm|}}@\frac{j}{m}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

$a_{\overline{n|}}^{(p)}@j$　每年年金總額一元,分 p 次支付,繼續支付 n 年,依虛利率 j 投資之現值.

p 每年支付年金次數.

$a_{\overline{nm}|} @ \frac{j}{m}$ 簡單年金一元,繼續支付 n 年,依實利率 $\frac{j}{m}$ 投資之現值.

故若每年支付年金次數與複利次數相等,則複雜年金可化爲簡單年金.

(例二) 每年年金總額 600 元,年金時期十五年,求年金現值.

a) 實利率五釐,每年支付年金四次;

b) 實利率五釐,每年支付年金二十四次;

c) 虛利率五釐,每年支付年金四次,複利四次;

d 虛利率五釐,每年支付年金二次,複利四次;

e) 虛利率五釐,每年支付年金四次,複利二次

a) 應用公式(30),得:

$$a_{\overline{15}|}^{(4)} = \frac{0.05}{j_{(4)}} a_{\overline{15}|} = 1\ 01855942 \times 10.37965804$$

$$A = 600\ a_{\overline{15}|}^{(4)} = 600 \times 1\ 01855942 \times 10.37965804$$

$$= 611.135652 \times 10.37965804 = 6343.38 \text{ 元}$$

b) 應用公式(29),得:

$$a_{\overline{15}|}^{(24)} = \frac{1 - 1.05^{-15}}{24(1.05^{\frac{1}{24}} - 1)}$$

查複利現值表,得:

$$1.05^{-15} = 0.4810171$$

令 $$x = 1.05^{\frac{1}{24}}$$

$$\log x = \frac{1}{24}\log 1.05 = \frac{1}{24}\times 0.021189 = 0.000882875$$

$$x = 1.00203435$$

$$A = 600\, a_{\overline{15}|}^{(4)} = \frac{600}{24}\times\frac{0.5189829}{0.00203435} = \frac{12.9745725}{0.00203435}$$

$$= 6377.75 \text{ 元}$$

c) 應用公式 (34), 得:

$$a_{\overline{15}|}^{(4)} @ 5\,\% = \frac{1}{4}\, a_{\overline{60}|} @ 1\frac{1}{4}\% = \frac{1}{4}\times 42.03459179$$

$$A = 600\, a_{\overline{15}|}^{(4)} = \frac{600}{4}\times 42.03459179 = 6305.19 \text{ 元}$$

d) 應用公式 (33), 得:

$$a_{\overline{15}|}^{(2)} @ 5\,\% = \frac{1}{4}\,\frac{0.0125}{j_{(\frac{1}{2})} @ 1\frac{1}{4}\,\%}\left(a_{\overline{60}|} @ 1\frac{1}{4}\%\right)$$

$$= \frac{1}{4}\times 0.99378882\times 42.03459179$$

$$A = 600\, a_{\overline{15}|}^{(2)} = \frac{600}{4}\times 0.99378882\times 42.03459179$$

$$= 149.068323\times 42.03459179 = 6266.03 \text{ 元}$$

e) 應用公式 (33), 得:

$$a_{\overline{15}|}^{(4)} @ 5\,\% = \frac{1}{2}\,\frac{0.025}{j_{(2)} @ 2\frac{1}{2}\%}\left(a_{\overline{30}|} @ 2\frac{1}{2}\%\right)$$

$$= \frac{1}{2}\times 1.00621142\times 20.93029259$$

$$A = 600\, a_{\overline{15}|}^{(4)} = \frac{600}{2}\times 1.00621142\times 20.93029259$$

$$= 1.00621142\times 6279.087777 = 6318.09 \text{ 元}$$

期末付年金每年支付之次數愈多,其終值與現值亦愈大,然年金終值與年金現值之增加非漫無限制,即使每年支付年金次數連續增加不絕,年金終值與年金現值亦有限制.連續支付之年金,名曰連續年金(Continuous Annuity).每年年金總額一元繼續支付n年,連續年金之終值與現值,通常以$\bar{S}_{\overline{n}|}$與$\bar{a}_{\overline{n}|}$表之,其數值可自下列公式求得:

$$\bar{S}_{\overline{n}|}=\frac{i}{\delta}S_{\overline{n}|} \cdots\cdots\cdots\cdots (35)$$ (證明參看附錄甲14)

$$\bar{a}_{\overline{n}|}=\frac{i}{\delta}a_{\overline{n}|} \cdots\cdots\cdots\cdots (36)$$ (證明參看附錄甲14)

$\bar{S}_{\overline{n}|}$ 每年年金總額一元繼續支付n年連續年金之終值.

$\bar{a}_{\overline{n}|}$ 每年年金總額一元繼續支付n年連續年金之現值.

$S_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付n年之終值.

$a_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付n年之現值.

i 實利率.

δ 息力.

事實上雖無連續年金之例,然若每年支付年金次數稍多,則欲求年金終值與年金現值之近似值,可應用公式(35)與(36),蓋公式中之$\frac{i}{\delta}$可預製一表,故計算較便,茲就通用利率製$\frac{i}{\delta}$表於下,以便連續年金之計算.

i	δ	$\frac{i}{\delta}$
0.025	0.0246926	1.01245
0.03	0.0295588	1.01493

0.035	0.0344014	1.01740
0.04	0.0392207	1.01987
0.045	0.0440169	1.02233
0.05	0.0487902	1.02480
0.06	0.0582689	1.02971
0.07	0.0676587	1.03460
0.08	0.0769611	1.03949

(例三) 每年年金總額1000元,年金時期五年,實利率四釐,求連續年金之現值!

應用公式(36),得:

$$\bar{a}_{\overline{5}|}=1.01987\times4.45182233$$

$$A=1000\,\bar{a}_{\overline{5}|}=1019.87\times4.45182233=4540.28\text{ 元}$$

若年金之支付,不在每期之末而在每期之初,則每期初支付之年金 $\frac{1}{p}$ 元,至期末已爲 $\frac{1}{p}(1+i)^{\frac{1}{p}}$ 元 (i 爲實利率),故每年年金總額,若改爲期末付,當爲 $(1+i)^{\frac{1}{p}}$ 元,換言之,期初付每年年金總額一元,當與期末付每年年金總額 $(1+i)^{\frac{1}{p}}$ 元相等.期初付年金終值與現值,可自下列各公式求得:

$$S_{\overline{n}|}^{(p)'}=S_{\overline{n+\frac{1}{p}}|}^{(p)}-\frac{1}{p}\cdots\cdots(37)$$

$$a_{\overline{n}|}^{(p)'}=a_{\overline{n-\frac{1}{p}}|}^{(p)}+\frac{1}{p}\cdots\cdots(38)$$

$$S_{\overline{n}|}^{(p)'}=(1+i)^{\frac{1}{p}}S_{\overline{n}|}\frac{i}{j_{(p)}}\cdots\cdots(39)$$

$$a_{\overline{n}|}^{(p)'}=(1+i)^{\frac{1}{p}}a_{\overline{n}|}\frac{i}{j_{(p)}}\cdots\cdots(40)$$

$S_{\overline{n}|}^{(p)'}$ 期初付年金每年總額一元分p次支付繼續支付n年之終值.

$a_{\overline{n}|}^{(p)'}$ 期初付年金每年總額一元分p次支付繼續支付n年之現值.

$S_{\overline{n+\frac{1}{p}}|}^{(p)}$ 期末付年金每年總額一元分p次支付繼續支付$\left(n+\frac{1}{p}\right)$年之終值.

$a_{\overline{n-\frac{1}{p}}|}^{(p)}$ 期末付年金每年總額一元分p次支付繼續支付$\left(n-\frac{1}{p}\right)$年之現值.

$S_{\overline{n}|}$ 期末付簡單年金一元繼續支付n年之終值.

$a_{\overline{n}|}$ 期末付簡單年金一元繼續支付n年之現值.

p 每年支付年金次數.

i 實利率.

$j_{(p)}=p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]$

(證) $$S_{\overline{n}|}^{(p)'}=(1+i)^{\frac{1}{p}}S_{\overline{n}|}^{(p)}=(1+i)^{\frac{1}{p}}\frac{(1+i)^n-1}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]}$$

$$=\frac{(1+i)^{n+\frac{1}{p}}-1}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]}-\frac{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]}$$

$$\therefore\quad S_{\overline{n}|}^{(p)'}=S_{\overline{n+\frac{1}{p}}|}^{(p)}-\frac{1}{p}$$

$$a_{\overline{n}|}^{(p)'}=(1+i)^{\frac{1}{p}}a_{\overline{n}|}^{(p)}=(1+i)^{\frac{1}{p}}\frac{1-(1+i)^{-n}}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]}$$

$$=\frac{1-(1+i)^{-(n-\frac{1}{p})}}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]}+\frac{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]}$$

$$\therefore\quad a_{\overline{n}|}^{(p)'}=a_{\overline{n-\frac{1}{p}}|}^{(p)}+\frac{1}{p}$$

$$S_{\overline{n}|}^{(p)'}=(1+i)^{\frac{1}{p}}\ S_{\overline{n}|}^{(p)}=(1+i)^{\frac{1}{p}}\ S_{\overline{n}|}\frac{i}{j_{(p)}}$$

$$a_{\overline{n}|}^{(p)'}=(1+i)^{\frac{1}{p}}\ a_{\overline{n}|}^{(p)}=(1+i)^{\frac{1}{p}}\ a_{\overline{n}|}\frac{i}{j_{(p)}}$$

若每年複利不止一次,則以上各公式中之實利率,依$1+i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$之關係,可易以虛利率.

(例四)每月初支付年金100元,年金時期五年,投資利率4%,求年金終值與年金現值!

$$R=100\times 12=1200$$

應用公式39),得:

$$S_{\overline{5}|}^{(12)'}=1.04^{\frac{1}{12}}\times S_{\overline{5}|}\times\frac{0.04}{j_{(12)}}=1.00327374$$
$$\times 5.41632256\times 1.01820351$$

$$K=1200\ S_{\overline{5}|}^{(12)'}=1200\times 1.00327374\times 5.41632256$$
$$\times 1.01820351=6639.57\text{ 元}$$

應用公式(40),得:

$$a_{\overline{5}|}^{(12)'}=1.04^{\frac{1}{12}}\times a_{\overline{5}|}\times\frac{0.04}{j_{(12)}}=1.00327374\times 4.45182233$$
$$\times 1.01820351$$

$$A = 1200\, a_{\overline{5|}}^{(12)'} = 1200 \times 1.00327374 \times 4.45182233$$

$$\times 1.01820351 = 5457.24\text{元}$$

每年年金總額一元,分 p 次支付,最初延期 m 年,以後繼續支付 n 年之現值,通常以 $m|a_{\overline{n|}}^{(p)}$ 表之,其數值可自下之公式求得:

$$m|a_{\overline{n|}}^{(p)} = (a_{\overline{m+n|}} - a_{\overline{m|}})\ \frac{i}{j_{(p)}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

$m\|a_{\overline{n\|}}^{(p)}$	每年年金總額一元,分 p 次支付,最初延期 m 年,以後繼續支付 n 年之現值.
$a_{\overline{m+n\|}}$	簡單年金一元繼續支付 $m+n$ 年之現值.
$a_{\overline{m\|}}$	簡單年金一元繼續支付 m 年之現值.
i	實利率.
p	每年支付年金次數.

$j_{(p)} = p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]$

(證)

$$m|a_{\overline{n|}}^{(p)} = a_{\overline{n+m|}}^{(p)} - a_{\overline{m|}}^{(p)} = a_{\overline{n+m|}}\ \frac{i}{j_{(p)}} - a_{\overline{m|}}\frac{i}{j_{(p)}}$$

$$= (a_{\overline{n+m|}} - a_{\overline{m|}})\ \frac{i}{j_{(p)}}$$

(例五) 某甲現年三十五歲,欲於五十歲至七十歲間,每月末自銀行取得年金一百元,問現須以若干元存入銀行?(銀行規定實利率七釐)

應用公式(41),得:

$$15|a_{\overline{20|}}^{(12)} = (a_{\overline{35|}} - a_{\overline{15|}})\frac{0.07}{j_{(12)}} = (12.94767230$$

$$-9.10791401) \times 1.03169143$$

$$A=1200\left(15|a_{\overline{20}|}^{(12)}\right)=1200\times3.83975829\times1.03169143$$

$$=4753.73\text{元}$$

若已知每年年金總額,每年支付年金次數,年金終值,與利率,則年金時期可自下列公式之一求得:

$$n=\frac{\log\left[\frac{K}{R}j_{(p)}+1\right]}{\log(1+i)}\cdots\cdots(42)$$

$$n=\frac{\log\left[R+Kp\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-Kp\right]-\log R}{m\log\left(1+\frac{j}{m}\right)}\cdots\cdots(43)$$

n 年金時期.

R 每年年金總額.

K 年金終值,

i 實利率.

j 虛利率.

m 每年複利次數.

p 每年支付年金次數.

$j_{(p)}=p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]$

(證) $$K=R\frac{(1+i)^n-1}{j_{(p)}}$$

$$\frac{K}{R}j_{(p)}=(1+i)^n-1$$

$$(1+i)^n=\frac{K}{R}j_{(p)}+1$$

$$n\log(1+i)=\log\left[\frac{K}{R}j_{(p)}+1\right]$$

$$\therefore \quad n=\frac{\log\left[\frac{K}{R}j_{(p)}+1\right]}{\log(1+i)}$$

以虛利率易實利率,則得:

$$n=\frac{\log\frac{Kj_{(p)}+R}{R}}{\log(1+i)}=\frac{\log\left[R+Kp\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-Kp\right]-\log R}{m\log\left(1+\frac{j}{m}\right)}$$

(例六) 每年年金總額500元,分四次支付,問至少若干年後,方得一萬元以上之終值?

a) 實利率七釐;

b) 虛利率七釐;每年複利二次.

a) 應用公式(42),得:

$$n=\frac{\log\left[\frac{10000}{500}j_{(4)}+1\right]}{\log 1.07}=\frac{\log(20\times 0.0682341+1)}{\log 1.07}$$

$$=\frac{\log 2.364682}{\log 1.07}=\frac{0.373772}{0.029384}=12.72\text{ 年}$$

b) 應用公式(43) 得:

$$n=\frac{\log(500+40000\times 1.035^{\frac{1}{2}}-40000)-\log 500}{2\log 1.035}$$

$$=\frac{\log(500+40000\times 0.0173495)-\log 500}{2\log 1.035}$$

$$=\frac{\log 1193.98-\log 500}{2\log 1.035}=\frac{3.076997-2.698970}{2\times 0.014940}$$

$$=\frac{0.378027}{0.02988}=12.65\text{ 年}$$

若已知每年年金總額,每年支付年金次數,年金現值,與利率,則年金時期可自下列公式之一求得:

$$n=\frac{\log R-\log\left[R-A\,j_{(p)}\right]}{\log(1+i)}\cdots\cdots(44)$$

$$n=\frac{\log R-\log\left[R-A\,p\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}+A\,p\right]}{m\log\left(1+\frac{j}{m}\right)}\cdots\cdots(45)$$

n　年金時期.

R　每年年金總額.

A　年金現值.

i　實利率.

j　虛利率.

m　每年複利次數.

p　每年支付年金次數.

$j_{(p)}=p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]$

(證)
$$A=R\frac{1-v^n}{j_{(p)}}$$

$$\frac{A}{R}j_{(p)}=1-v^n$$

$$v^n=\frac{R-A\,j_{(p)}}{R}$$

$$(1+i)^n=\frac{R}{R-A\,j_{(p)}}$$

$$n\log(1+i)=\log R-\log\left[R-A\,j_{(p)}\right]$$

$$\therefore\quad n=\frac{\log R-\log\left[R-\quad j_{(p)}\right]}{\log(1+i)}$$

以虛利率易實利率,則得:

$$n=\frac{\log R-\log\left[R-A\,p\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}+A\,p\right]}{m\log\left(1+\frac{j}{m}\right)}$$

(例七) 每年年金總額1000元,分四次支付,年金現值10000元,求年金時期!

a) 實利率六釐;

b) 虛利率六釐;每年複利二次.

a) 應用公式(44),得:

$$n=\frac{\log 1000-\log[1000-10000\,j_{(4)}]}{\log 1.06}$$

$$=\frac{3-\log(1000-10000\times 0.05869538)}{0.025306}$$

$$=\frac{3-\log 413.0462}{0.025306}=\frac{3-2.6159985}{0.025306}=\frac{0.3840015}{0.025306}$$

$=15.17$ 年

b) 應用公式(45),得:

$$n=\frac{\log 1000-\log(1000-40000\times 1.03^{\frac{1}{2}}+40000)}{2\log 1.03}$$

$$=\frac{3-\log(1000-40000\times 0.01488916)}{2\times 0.012837}$$

$$=\frac{3-\log 404.4336}{0.025674}=\frac{3-2.606847}{0.025674}$$

$=\dfrac{0.393153}{0.025674}=15.31$ 年

$\dfrac{1}{a_{\overline{n|}}^{(p)}}$ 與 $\dfrac{1}{S_{\overline{n|}}^{(p)}}$ 有一定之關係,以公式表之如下:

$$\frac{1}{S_{\overline{n|}}^{(p)}}=\frac{1}{a_{\overline{n|}}^{(p)}}-j_{(p)} \quad\cdots\cdots\cdots(46)$$

$S_{\overline{n|}}^{(p)}$　每年年金總額一元分 p 次支付繼續支付 n 年之終値.

$a_{\overline{n|}}^{(p)}$　每年年金總額一元分 p 次支付繼續支付 n 年之現値.

i　實利率.

p　每年支付年金次數.

$j_{(p)}=p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]$

(證)

$$\frac{1}{a_{\overline{n|}}^{(p)}}-\frac{1}{S_{\overline{n|}}^{(p)}}=\frac{j_{(p)}}{i}\frac{1}{a_{\overline{n|}}}-\frac{j_{(p)}}{i}\frac{1}{S_{\overline{n|}}}$$

$$=\frac{j_{(p)}}{i}\left(\frac{1}{a_{\overline{n|}}}-\frac{1}{S_{\overline{n|}}}\right)=\frac{j_{(p)}}{i}\times i=j_{(p)}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{S_{\overline{n|}}^{(p)}}=\frac{1}{a_{\overline{n|}}^{(p)}}-j_{(p)}$$

若欲求每年年金總額,則自公式 (24) (25) (30) (31) (39) 與 (40) 卽可化得下列四公式.

(甲) 期末付年金

$$R=K\frac{j_{(p)}}{i}\frac{1}{S_{\overline{n|}}} \quad\cdots\cdots\cdots(47)$$

$$R=A\frac{j_{(p)}}{i}\frac{1}{a_{\overline{n|}}} \quad\cdots\cdots\cdots(48)$$

(乙) 期初付年金

$$R'=K(1+i)^{-\frac{1}{p}}\frac{j_{(p)}}{i}\frac{1}{S_{\overline{n|}}} \quad\cdots\cdots\cdots(49)$$

$$R'=A(1+i)^{-\frac{1}{p}}\frac{j_{(p)}}{i}\frac{1}{a_{\overline{n|}}} \quad\cdots\cdots\cdots(50)$$

R 期末付每年年金總額.

R' 期初付每年年金總額.

K 年金終值.

A 年金現值.

$S_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付n年之終值.

$a_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付n年之現值.

i 實利率.

p 每年支付年金次數.

$j_{(p)}=p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]$

(例八)某銀行欲創辦零存整付與整存零付兩種儲蓄存款,均規定年限十年,實利率七釐,零存整付存款人,須於每月初存入一定金額,至十年末得支取一萬元,整存零付存款人,現須一次存入洋一萬元,以後每月末得支取一定金額,求每月零存額與每月零付額!

(甲)零存整付儲蓄存款 此爲期初付年金,整付額一萬元乃年金終值,故須應用公式(49).

$$R'=10000\times1.07^{-\frac{1}{12}}\times\frac{j_{(12)}}{0.07}\times\frac{1}{S_{\overline{10}|}}$$

$$=\frac{10000}{1.00565415}\times\frac{0.06784974}{0.07}\times0.0723775=697.598$$

$697.598\div12=58.13$ 元　　每月零存額

(乙)整存零付儲蓄存款 此爲期末付年金,整存額一萬元乃年金現值,故須應用公式(48).

$$R=10000\times\frac{j_{(12)}}{0.07}\times\frac{1}{a_{\overline{10}|}}$$

$$=10000\times\frac{0.06784974}{0.07}\times 0.1423775=1380.039$$

$1380.039\div 12=115.00$ 元　　　　每月零付額

有時年金之支付,非一年數次而爲數年一次者,例如造一新橋,估計每二十年須重建一新橋,則此新橋之建築費,每二十年支付一次,是卽數年一次年金之例也.關於數年一次年金,吾人所欲知者,乃其年金現値,蓋苟能預置重建新橋之基金,則以後重建新橋之費卽可無虞.每 k 年支付年金一元,繼續支付 nk 年之現値,通常以 $a_{nk\cdot k}$ 表之,若年金之支付永遠繼續,則以 $a_{\infty\cdot k}$ 表示其現値.$a_{nk\cdot k}$ 與 $a_{\infty\cdot k}$ 可自下列二公式求得:

$$a_{nk\cdot k}=\frac{a_{\overline{nk}|}}{S_{\overline{k}|}}\cdots\cdots(51)$$

$$a_{\infty\cdot k}=\frac{1}{i}\,\frac{1}{S_{\overline{k}|}}\cdots\cdots(52)$$

$a_{nk\cdot k}$　每 k 年支付年金一元繼續支付 nk 年之現値.

$a_{\infty\cdot k}$　每 k 年支付年金一元永遠繼續支付之現値.

$S_{\overline{k}|}$　簡單年金一元繼續支付 k 年之終値.

$a_{\overline{nk}|}$　簡單年金一元繼續支付 nk 年之現値.

i　實利率.

(證)　令　$v=\dfrac{1}{1+i}$

年金支付期	與最初支付期間之始相隔之年數	年金一元在最初支付期間之始之現値
第 k 年末	k	v^k
第 $2k$ 年末	$2k$	v^{2k}

第 $3k$ 年末	$3k$	v^{3k}
…………………	……………	……………
第 $(n-2)k$ 年末	$(n-2)k$	$v^{(n-2)k}$
第 $(n-1)k$ 年末	$(n-1)k$	$v^{(n-1)k}$
第 nk 年末	nk	v^{nk}

年金現值卽爲每期年金額現值之總和,故:

$$a_{nk\cdot k}=v^k+v^{2k}+v^{3k}+\cdots\cdots+v^{(n-2)k}+v^{(n-1)k}+v^{nk}$$

上式之右邊爲一等比級數,其首項爲 v^k, 公比爲 v^k, 項數爲 n, 應用第三編公式 (6), 得:

$$a_{nk\cdot k}=\frac{v^k(1-v^{nk})}{1-v^k}=\frac{1-v^{nk}}{(1+i)^k-1}$$

$$=\frac{\dfrac{1-v^{nk}}{i}}{\dfrac{(1+i)^k-1}{i}}$$

$$\therefore\quad a_{nk\cdot k}=\frac{a_{\overline{nk}|}}{S_{\overline{k}|}}$$

$$a_{\infty\cdot k}=\lim_{n\to\infty}a_{nk\cdot k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{i}-\dfrac{v^{nk}}{i}}{S_{\overline{k}|}}$$

但
$$\lim_{n\to\infty}v^{nk}=0$$

$$\therefore\quad a_{\infty\cdot k}=\frac{1}{i}\,\frac{1}{S_{\overline{k}|}}$$

(別證) 每 k 年末支付之年金額一元,若改於每年末支付,則爲 $\dfrac{1}{S_{\overline{k}|}}$ 元,故

$$a_{nk\cdot k}=\frac{1}{S_{\overline{k|}}}a_{\overline{nk|}}$$

$$a_{\infty\cdot k}=\frac{1}{S_{\overline{k|}}}a_{\infty}=\frac{1}{S_{\overline{k|}}}\frac{1}{i}$$

(例九) 某城建築一橋,建築費三萬元,估計每三十年須重建一次,假定每次建築費均為三萬元,設某城欲於第一次新橋建築以後,預留一項重建新橋基金,以備重建時建築費之需,問某城須預留基金若干元?(投資利率六釐)

應用公式(52),得:

$$a_{\infty\cdot 30}=\frac{1}{0.06}\frac{1}{S_{\overline{30|}}}=\frac{0.01264891}{0.06}$$

$$30000\times\frac{0.01264891}{0.06}=6324.46\text{ 元}$$

習題十四

1. 每年年金總額500元,年金時期二十年,虛利率六釐,填寫下表中空白之處!

終值與現值 / 每年複利次數 / 每年支付年金次數	年金終值			年金現值		
	每年複利一次	每年複利二次	每年複利四次	每年複利一次	每年複利二次	每年複利四次
每年支付年金一次						
每年支付年金二次						
每年支付年金四次						

2. 某銀行創辦零存整付儲蓄存款,分五年期,十年期與二十年期三種,支付方法分按月支付與按季支付兩種,實利率八釐,到期整付額均以一千元為標準,填寫下表中空白之處!

年金時期 \ 支付方法	每月零存額	每季零存額
五年期		
十年期		
二十年期		

3. 某銀行創辦整存零付儲蓄存款,分五年期,十年期與二十年期三種,付款方法分按月與按季兩種,實利率八釐,整存額均以一千元爲標準,填寫下表中空白之處!

年金時期 \ 付款方法	每月零付額	每季零付額
五年期		
十年期		
二十年期		

4. 某甲購得某種債券票面金額十萬元,債券利息年利率七釐,每年付息二次,某甲以債券收入利息存入銀行,問十年後某甲在銀行共有存款若干元?(銀行規定年利率六釐,每年復利二次)

5. 某甲新購一汽車,言定先付現洋二百元,以後三年間,每月末付洋三十元,求此汽車之購價!

a) 實利率六釐;

b) 虛利率六釐,每年複利二次.

6. 某城建築一積穀倉,建築費五千元,估計每五十年須重建一次,假定每次建築費均爲五千元,設某城欲於第一次積穀倉建築以後,預留一項重建新倉基金,以備重建時建築費之需,問某城須預留基金若干元?(投資利率六釐)

7. 每年初或每年末支付之100元,若改爲每月末支付,當爲幾何?(投資利率六釐)

8. 甲乙兩人每年各以500元存入儲蓄銀行(銀行規定實利率七釐),甲於每年之末存入500元,乙則於每半年末存入250元,問二十年後兩人在銀行存款額相差若干元?

9. 某甲現年三十五歲,欲於四十五歲至六十五歲間,每月末自銀行得洋一百元,問自三十五歲至四十五歲間,某甲須於每月末存洋若干元於銀行?(銀行規定實利率八釐)

10. 某甲現年三十五歲,欲於五十歲至七十歲間,每月末自銀行得洋一百元,問現須一次存入若干元於銀行?(銀行規定實利率八釐)

11. 某校於十週紀念時,籌設百週紀念基金一千萬元,設某校常有學生四百人,則每月末每生須捐助若干元於學校,俾於百週紀念時得積存基金一千萬元?(基金依實利率六釐投資

12. 每年年金總額500元,年金時期十年,實利率七釐,求年金現值!

a)每年支付一次

b)每年支付四次

c)每年支付十二次

d)每年支付五十二次

e)每年連續支付

13. 每年年金總額300元,分十二次支付,問至少若干年後,方得5000元以上之終值?

a)實利率六釐;

b)虛利率六釐,每年複利四次.

14. 每年年金總額300元,分四次支付,年金現值5000元,求年金時期!

a)實利率五釐;

b)虛利率五釐,每年複利二次.

第三章 變額年金

每期支付之年金額,通常相等,然亦有例外者,年金額不相等之年金,名曰變額年金.每期年金額之變更,若不依據一定規律,則須分別計算各期年金之終值及其現值,然後計算其總和,故不能求得一般公式.若每期年金額之變更,有一定規律可循,則年金終值與年金現值之計算,仍可應用一定公式.

(例一)第一年末付160元,第二年末付210元,第三年末付130元,第四年末付180元,第五年末付220元,求年金終值與年金現值!(實利率六釐)

$$
\begin{aligned}
160\times1.06^4 &= 160\times1.26247696 &&= 201.9963\\
210\times1.06^3 &= 210\times1.191016 &&= 250.1134\\
130\times1.06^2 &= 130\times1.1236 &&= 146.0680\\
180\times1.06 & &&= 190.8000\\
220 & &&= 220.0000\\
\hline
& && \quad 1008.9777
\end{aligned}
$$

即求得年金終值爲1008.98元

$$160v\ =160\times0.94339623=150.9434$$

$$210v^2=210\times0.88999644=186.8993$$

$$130v^3=130\times0.83961928=109.1505$$

$$180v^4=180\times0.79209366=142.5769$$

$$220v^5=220\times0.74725817=164.3968$$

$$753.9669$$

卽求得年金現值爲753.97元.

若每年末支付之年金額,成一等差級數,則年金終值與年金現值,可自下列二公式求得:

$$(A_s)_{\overline{n|}}=fS_{\overline{n|}}+\frac{d}{i}(S_{\overline{n|}}-n)\quad\cdots\cdots(53)$$

$$(A_a)_{\overline{n|}}=fa_{\overline{n|}}+\frac{d}{i}(a_{\overline{n|}}-nv^n)\quad\cdots\cdots(54)$$

$(A_s)_{\overline{n|}}$　n年等差變額年金之終值

$(A_a)_{\overline{n|}}$　n年等差變額年金之現值

$S_{\overline{n|}}$　簡單年金一元繼續支付n年之終值

$a_{\overline{n|}}$　簡單年金一元繼續支付n年之現值

f　第一期年金額

d　每期增加年金額

n　年金時期

i　實利率

$v=\dfrac{1}{1+i}$

(證) $(A_s)_{\overline{n|}}=f(1+i)^{n-1}+(f+d)(1+i)^{n-2}+(f+2d)(1+i)^{n-3}$

$$+\cdots\cdots+(f+\overline{n-2}\,d)(1+i)+(f+\overline{n-1}\,d)$$

以$(1+i)$乘上式之兩邊,得:

$$(1+i)(A_s)_{\overline{n|}}=f(1+i)^n+(f+d)(1+i)^{n-1}+(f+2d)(1+i)^{n-2}$$
$$+\cdots\cdots+(f+\overline{n-2}\,d)(1+i)^2+(f+\overline{n-1}\,d)(1+i)$$

自第二式減第一式,得:

$$i(A_s)_{\overline{n|}}=f(1+i)^n+d(1+i)^{n-1}+d(1+i)^{n-2}+d(1+i)^{n-3}$$
$$+\cdots\cdots+d(1+i)^2+d(1+i)-(f+\overline{n-1}\,d)$$

即 $$(A_s)_{\overline{n|}}=\frac{f}{i}(1+i)^n+\frac{d}{i}[(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+(1+i)^{n-3}$$
$$+\cdots\cdots+(1+i)]-\frac{f}{i}-\frac{nd}{i}+\frac{d}{i}$$
$$=\frac{f}{i}[(1+i)^n-1]+\frac{d}{i}[(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}$$
$$+(1+i)^{n-3}+\cdots\cdots+(1+i)+1]-\frac{nd}{i}$$
$$=fS_{\overline{n|}}+\frac{d}{i}S_{\overline{n|}}-\frac{nd}{i}$$
$$\therefore\quad (A_s)_{\overline{n|}}=fS_{\overline{n|}}+\frac{d}{i}(S_{\overline{n|}}-n)$$
$$(A_a)_{\overline{n|}}=v^n(A_s)_{\overline{n|}}=fv^nS_{\overline{n|}}+\frac{d}{i}(v^nS_{\overline{n|}}-nv^n)$$
$$\therefore\quad (A_a)_{\overline{n|}}=fa_{\overline{n|}}+\frac{d}{i}(a_{\overline{n|}}-nv^n)$$

(例二) 第一年年金額500元,以後每年減少10元,年金時期爲十年,投資利率爲六釐,求年金終值與年金現值!

a) 求年金終值:

應用公式(53),得:

$$(A_s)_{\overline{10}|}=500\,S_{\overline{10}|}+\frac{-10}{0.06}(S_{\overline{10}|}-10)$$

$$=500\times13.18079494-\frac{10}{0.06}\times3.18079494$$

$$=6590.39747-530.13249=6060.26\text{ 元}$$

b) 求年金現値:

$$(A_a)_{\overline{n}|}=500\,a_{\overline{10}|}+\frac{-10}{0.06}(a_{\overline{10}|}-10\,v^{10})$$

$$=500\times7.36008705-\frac{10}{0.06}(7.36008705-5.5839478)$$

$$=3680.043525-\frac{1000}{6}\times1.77613925=3680.043525$$

$$-296.023208=3384.02\text{ 元}$$

若第一期年金額與每期增加年金額相等,則年金終値可自下列公式求得:

$$(A_s)_{\overline{n}|}=f\sum S_{\overline{n}|}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(55)$$

$(A_s)_{\overline{n}|}$　n年等差變額年金之終値

$S_{\overline{n}|}$　簡單年金一元繼續支付n年之終値

f　第一期年金額

Σ　總和之記號

(證) $\sum S_{\overline{n}|}=S_{\overline{1}|}+S_{\overline{2}|}+S_{\overline{3}|}+\cdots\cdots+S_{\overline{n}|}$

$$=\frac{(1+i)-1}{i}+\frac{(1+i)^2-1}{i}+\frac{(1+i)^3-1}{i}+\cdots+\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$=\frac{1}{i}\left[\sum(1+i)^n-n\right]$$

但 $\sum(1+i)^n$ 爲期初付年金額一元在 n 年末之終值，故：

$$\sum S_{\overline{n|}}=\frac{1}{i}\left[(1+i)\,S_{\overline{n|}}-n\right]$$

應用公式(53)，得：

$$(A_s)_{\overline{n|}}=f\,S_{\overline{n|}}+\frac{f}{i}(S_{\overline{n|}}-n)$$

$$=\frac{f}{i}\left[(1+i)\,S_{\overline{n|}}-n\right]$$

$$\therefore\quad (A_s)_{\overline{n|}}=f\sum S_{\overline{n|}}$$

$\sum S_{\overline{n|}}$ 爲 $S_{\overline{n|}}$ 之累積，故可將年金終值表中各期數字依次相加，而成一表，此表名曰等差變額年金終值表.(表十二)

(例三) 第一年年金額100元，以後每年增加100元，年金時期爲五年，投資利率爲六釐，求年金終值!

(第一法) 應用公式(53)，得：

$$(A_s)_{\overline{5|}}=100\,S_{\overline{5|}}+\frac{100}{0.06}(S_{\overline{5|}}-5)$$

$$=563.709+\frac{10000}{6}\times 0.63709296$$

$$=563.709+1061.822=1625.53\text{ 元}$$

(第二法) 查等差變額年金終值表，得：

$$\sum S_{\overline{5|}}=16.25531$$

$$\therefore\quad (A_s)_{\overline{5|}}=100\sum S_{\overline{5|}}=1625.53\text{ 元}$$

兩法之結果相等，但後法較前法更爲簡捷.

若第一期年金額與每期增加年金額不相等,則不能應用公式(55)以求年金終值,但仍能應用等差變額年金終值表,其公式如下:

$$(A_s)_{\overline{n|}}=d\sum S_{\overline{n|}}+(f-d)S_{\overline{n|}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(56)$$

$(A_s)_{\overline{n|}}$　n年等差變額年金之終值

$S_{\overline{n|}}$　簡單年金一元繼續支付n年之終值

f　第一期年金額

d　每期增加年金額

Σ　總和之記號

(證) 應用公式(53),得:

$$(A_s)_{\overline{n|}}=fS_{\overline{n|}}+\frac{d}{i}(S_{\overline{n|}}-n)$$

$$=fS_{\overline{n|}}-dS_{\overline{n|}}+dS_{\overline{n|}}+\frac{d}{i}(S_{\overline{n|}}-n)$$

$$=(f-d)S_{\overline{n|}}+\frac{d}{i}[(1+i)S_{\overline{n|}}-n]$$

但 $\sum S_{\overline{n|}}=\frac{1}{i}[(1+i)S_{\overline{n|}}-n]$

$$\therefore\quad (A_s)_{\overline{n|}}=d\sum S_{\overline{n|}}+(f-d)S_{\overline{n|}}$$

(例四) 第一年年金額500元,以後每年減少10元,年金時期十年,投資利率爲六釐,求年金終值!

代入公式(56),得:

$$(A_s)_{\overline{10|}}=-10\sum S_{\overline{10|}}+510\,S_{\overline{10|}}$$

$$=-10\times 66.194044+510\times 13.18079494$$

$$= -661.94044 + 6722.2054194$$

$$= 6060.26 \text{ 元}$$

與例二求得之結果相同.

若最後一期年金額與每期減少年金額相等,則年金現值可自下列公式求得:

$$(A_a)_{\overline{n}|} = l \sum a_{\overline{n}|} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(57)$$

$(A_a)_{\overline{n}|}$ n年等差變額年金之現值

$a_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付n年之現值

l 最後一期年金額

Σ 總和之記號

(證) $\sum a_{\overline{n}|} = a_{\overline{1}|} + a_{\overline{2}|} + a_{\overline{3}|} + \cdots\cdots + a_{\overline{n}|}$

$$= \frac{1-v}{i} + \frac{1-v^2}{i} + \frac{1-v^3}{i} + \cdots\cdots + \frac{1-v^n}{i}$$

$$= \frac{1}{i}(n - \sum v^n)$$

但 $\sum v^n$ 爲期末付年金額一元之現值,故:

$$\sum a_{\overline{n}|} = \frac{1}{i}(n - a_{\overline{n}|})$$

應用公式(54),得:

$$(A_a)_{\overline{n}|} = f a_{\overline{n}|} + \frac{d}{i}(a_{\overline{n}|} - n v^n)$$

但 $$d = -l$$

$$f = nl$$

以之代入上式,則得:

$$(A_a)_{\overline{n}|}=nla_{\overline{n}|}-\frac{l}{i}(a_{\overline{n}|}-nv^n)$$

$$=\frac{l}{i}(nia_{\overline{n}|}-a_{\overline{n}|}+nv^n)$$

$$=\frac{l}{i}(n-nv^n-a_{\overline{n}|}+nv^n)$$

$$=\frac{l}{i}(n-a_{\overline{n}|})$$

$$\therefore\quad (A_a)_{\overline{n}|}=l\sum a_{\overline{n}|}$$

$\sum a_{\overline{n}|}$ 爲 $a_{\overline{n}|}$ 之累積,故可將年金現值表中各期數字依次相加,而成一表,此表名曰等差變額年金現值表(表十三).

(例五) 第一年年金額500元,以後每年減少100元,年金時期爲五年,投資利率爲六釐,求年金現值!

(第一法) 應用公式(54),得:

$$(A_a)_{\overline{5}|}=500\,a_{\overline{5}|}-\frac{100}{0.06}(a_{\overline{5}|}-5v^5)$$

$$=500\times4.21236379-\frac{10000}{6}(4.21236379$$

$$-5\times0.74725817)$$

$$=2106.181895-\frac{4760.7294}{6}$$

$$=2106.181895-793.4549$$

$$=1312.73\text{ 元}$$

(第二法) $l=500-4\times100=100$

查等差變額年金現值表,得:

$$\sum a_{\overline{5|}} = 13.12727$$

$$\therefore \quad (A_a)_{\overline{5|}} = 100 \sum a_{\overline{5|}} = 1312.73 \text{ 元}$$

兩法求得之結果相同,但後法較前法更為簡捷.

若最後一期年金額與每期減少年金額不相等,則不能應用公式(57)以求年金現值,但仍能應用等差變額年金現值表,其公式如下:

$$(A_a)_{\overline{n|}} = (l+d)\, a_{\overline{n|}} - d \sum a_{\overline{n|}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (58)$$

$(A_a)_{\overline{n|}}$ n年等差變額年金之現值

$a_{\overline{n|}}$ 簡單年金一元繼續支付n年之現值

l 最後一期年金額

d 等差變額年金之公差

Σ 總和之記號

(證) 應用公式(54),得

$$(A_a)_{\overline{n|}} = f a_{\overline{n|}} + \frac{d}{i}(a_{\overline{n|}} - nv^n)$$

但 $f = l-(n-1)d = l+d-nd$

以之代入上式,則得:

$$(A_a)_{\overline{n|}} = (l+d)a_{\overline{n|}} - nda_{\overline{n|}} + \frac{d}{i}(a_{\overline{n|}} - nv^n)$$

$$= (l+d)a_{\overline{n|}} + \frac{d}{i}(-nia_{\overline{n|}} + a_{\overline{n|}} - nv^n)$$

$$= (l+d)a_{\overline{n|}} + \frac{d}{i}(nv^n - n + a_{\overline{n|}} - nv^n)$$

$$= (l+d)a_{\overline{n|}} - \frac{d}{i}(n - a_{\overline{n|}})$$

但
$$\sum a_{\overline{n}|} = \frac{1}{i}\,(n - a_{\overline{n}|})$$

$$\therefore\quad (A_a)_n = (l+d)a_{\overline{n}|} - d\sum a_{\overline{n}|}$$

(例六) 第一年年金額 500 元, 以後每年減少 10 元, 年金時期爲十年, 投資利率爲六釐, 求年金現值!

$$d = -10$$

$$l = 500 - 10 \times 9 = 410$$

代入公式(58), 得:

$$\begin{aligned}(A_a)_{10} &= 400\,a_{\overline{10}|} + 10\sum a_{\overline{10}|}\\ &= 400 \times 7.36008705 + 10 \times 43.998549\\ &= 2944.03482 + 439.98549\\ &= 3384.02 \text{ 元}\end{aligned}$$

與例二求得之結果相同.

等差變額年金在債券上之應用甚大, 但債券之償本付息, 未必每年一次, 故等差變額年金之支付, 亦有每年數次者, 是曰複雜等差變額年金. 關於複雜等差變額年金, 吾人所欲知者, 通常爲其年金現值, 故本書祇舉其年金現值公式. 複雜等差變額年金現值, 可以 $(A_a)_n^{(p)}$ 表之, 其公式如下:

$$(A_a)_n^{(p)} = p\frac{i}{j_{(p)}}\left[a_{\overline{n}|}\left(f + \frac{dp}{j_{(p)}}\right) - \frac{npdv^n}{i}\right] \cdots\cdots\cdots\cdots (59)$$

$(A_a)_n^{(p)}$　每年支付 p 次繼續支付 n 年複雜等差變額年金之現值

$a_{\overline{n}|}$　簡單年金一元繼續支付 n 年之現值

f　第一次年金額

d 每次年金增加額

p 每年支付年金次數

n 年金時期

i 實利率

$v=\frac{1}{1+i}$

$j_{(p)}=p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]$

(證)

支付年金時日	每次年金額	在第一年初之現值
第 $\frac{1}{p}$ 年末	f	$fv^{\frac{1}{p}}$
第 $\frac{2}{p}$ 年末	$f+d$	$(f+d)v^{\frac{2}{p}}$
第 $\frac{3}{p}$ 年末	$f+2d$	$(f+2d)v^{\frac{3}{p}}$
…………………………	………………	………………………………
第 $n-\frac{2}{p}$ 年末	$f+(np-3)d$	$[f+(np-3)d]v^{n-\frac{2}{p}}$
第 $n-\frac{1}{p}$ 年末	$f+(np-2)d$	$[f+(np-2)d]v^{n-\frac{1}{p}}$
第 n 年末	$f+(np-1)d$	$[f+(np-1)d]v^{n}$

$$(A_a)^{(p)}_{\overline{n|}}=fv^{\frac{1}{p}}+(f+d)v^{\frac{2}{p}}+(f+2d)v^{\frac{3}{p}}+\cdots+[f+(np-3)d]v^{n-\frac{2}{p}}$$

$$+[f+(np-2)d]v^{n-\frac{1}{p}}+[f+(np-1)d]v^{n}$$

以 $v^{\frac{1}{p}}$ 乘上式之兩邊,則得:

$$v^{\frac{1}{p}}(A_a)^{(p)}_{\overline{n|}}=fv^{\frac{2}{p}}+(f+d)v^{\frac{3}{p}}+(f+2d)v^{\frac{4}{p}}+\cdots+[f+(np-3)d]v^{n-\frac{1}{p}}$$

$$+[f+(np-2)d]v^{n}+[f+(np-1)d]v^{n+\frac{1}{p}}$$

自第一式減第二式,得:

$$(1-v^{\frac{1}{p}})(A_a)_{\overline{n}|}^{(p)}=fv^{\frac{1}{p}}+d(v^{\frac{2}{p}}+v^{\frac{3}{p}}+v^{\frac{4}{p}}+\cdots+v^{n-\frac{2}{p}}+v^{n-\frac{1}{p}}+v^n)$$
$$-[f+(np-1)d]v^{n+\frac{1}{p}}$$

以 $(1+i)^{\frac{1}{p}}$ 乘上式之兩邊,得:

$$[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]\,(A_a)_{\overline{n}|}^{(p)}=d(v^{\frac{1}{p}}+v^{\frac{2}{p}}+v^{\frac{3}{p}}+\cdots+v^{n-\frac{3}{p}}+v^{n-\frac{2}{p}}+v^{n-\frac{1}{p}})$$
$$+dv^n+f-fv^n-npdv^n$$

但
$$(1+i)^{\frac{1}{p}}-1=\frac{j_{(p)}}{p}$$

$$d(v^{\frac{1}{p}}+v^{\frac{2}{p}}+v^{\frac{3}{p}}+\cdots+v^{n-\frac{3}{p}}+v^{n-\frac{2}{p}}+v^{n-\frac{1}{p}})+dv^n$$
$$=dpa_{\overline{n}|}^{(p)}=dpa_{\overline{n}|}\frac{i}{j_{(p)}}$$
$$f-fv^n=f(1-v^n)=fia_{\overline{n}|}$$
$$\therefore\quad (A_a)_{\overline{n}|}^{(p)}=\frac{p}{j_{(p)}}[dpa_{\overline{n}|}\frac{i}{j_{(p)}}+fia_{\overline{n}|}-npdv^n]$$
$$=p\frac{i}{j_{(p)}}\left[a_{\overline{n}|}\left(f+\frac{dp}{j_{(p)}}\right)-\frac{npdv^n}{i}\right]$$

(例七) 第一次年金額三元,以後每次增加三元,每年支付二次,繼續支付4年,求年金現值!(實利率六釐)

$$n=4$$
$$p=2$$
$$f=3$$
$$d=3$$
$$i=6\%$$

代入公式(59),得:

$$(A_a)_{\overline{4|}}^{(2)}=2\times1.01478151[3.46510561(3+\frac{6}{0.06}\times1.01478151)$$

$$-\frac{24}{0.06}\times0.79209366]$$

$$=2.02956302(3.46510561\times104.478151-316.837464)$$

$$=2.02956302(362.02782715-316.837464)$$

$$=2.02956302\times45.19036315$$

$$=91.72\text{ 元}$$

若等差變額年金之支付,永續不絕,則年金現值可自下列公式求得:

$$(A_a)\infty=\frac{f}{i}+\frac{d}{i^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(60)$$

$(A_a)\infty$　等差變額永續年金之現值

f　第一期年金額

d　每期增加年金額

i　實利率

(證) $(A_a)\infty=\lim\limits_{n\to\infty}(A_a)_{\overline{n|}}=\lim\limits_{n\to\infty}[fa_{\overline{n|}}+\frac{d}{i}(a_{\overline{n|}}-nv^n)]$

$$=\lim_{n\to\infty}(fa_{\overline{n|}})+\lim_{n\to\infty}\frac{da_{\overline{n|}}}{i}-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{dnv^n}{i}\right)$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{\overline{n|}}=\frac{1}{i}$　(參看公式14)

$\lim\limits_{n\to\infty}(nv^n)=0$　(證明參看附錄甲15)

$$\therefore\quad(A_a)\infty=\frac{f}{i}+\frac{d}{i^2}$$

(例八) 第一年年金額500元,以後每年增加100元投資利率爲五釐,求等差變額永續年金之現值!

應用公式(60),得:

$$(A_a)\infty=\frac{500}{0.05}+\frac{100}{0.05^2}=10000+40000=50000\text{ 元}$$

若每年末支付之年金額,成一等比級數,則年金終值與年金現值,可自下列公式求得:

(甲) r不等於$1+i$時

$$(G_s)_{\overline{n|}}=f\frac{(1+i)^n-r^n}{1+i-r}\quad\cdots\cdots\cdots(61)$$

$$(G_a)_{\overline{n|}}=f\frac{1-r^nv^n}{1+i-r}\quad\cdots\cdots\cdots(62)$$

(乙) r等於$1+i$時

$$(G_s)_{\overline{n|}}=nfr^{n-1}\quad\cdots\cdots\cdots(63)$$

$$(G_a)_{\overline{n|}}=\frac{nf}{r}\quad\cdots\cdots\cdots(64)$$

$(G_s)_{\overline{n|}}$　n年等比變額年金之終值

$(G_a)_{\overline{n|}}$　n年等比變額年金之現值

f　第一期年金額

r　公比

n　年金時期

i　實利率

$v=\dfrac{1}{1+i}$

(證) (甲) $r\neq 1+i$

$$(G_s)_{\overline{n|}}=f(1+i)^{n-1}+fr(1+i)^{n-2}+fr^2(1+i)^{n-3}$$

$$+\cdots\cdots+fr^{n-3}(1+i)^2+fr^{n-2}(1+i)+fr^{n-1}$$

$$=f(1+i)^{n-1}\frac{1-r^nv^n}{1-rv}$$

$$\therefore\quad (G_s)_{\overline{n|}}=f\frac{(1+i)^n-r^n}{1+i-r}$$

$$(G_a)_{\overline{n|}}=v^n(G_s)_{\overline{n|}}=v^nf\frac{(1+i)^n-r^n}{1+i-r}$$

$$\therefore\quad (G_a)_{\overline{n|}}=f\frac{1-r^nv^n}{1+i-r}$$

(乙) $r=1+i$

$$(G_s)_{\overline{n|}}=f(1+i)^{n-1}+fr(1+i)^{n-2}+fr^2(1+i)^{n-3}$$

$$+\cdots\cdots+fr^{n-3}(1+i)^2+fr^{n-2}(1+i)+fr^{n-1}$$

$$=fr^{n-1}+fr^{n-1}+fr^{n-1}+\cdots\cdots+fr^{n-1}+fr^{n-1}+fr^{n-1}$$

$$\therefore\quad (G_s)_{\overline{n|}}=nfr^{n-1}$$

$$(G_a)_{\overline{n|}}=v^n(G_s)_{\overline{n|}}=v^n\,nfr^{n-1}=\frac{nfr^{n-1}}{r^n}$$

$$\therefore\quad (G_a)_{\overline{n|}}=\frac{nf}{r}$$

(例九) 第一年年金額100元,以後每年年金額較上年增加百分之八,年金時期爲十年,投資利率爲五釐,求年金終值與年金現值!

a) 求年金終值:

應用公式(61),得:

$$(G_s)_{\overline{10|}}=100\cdot\frac{1.05^{10}-1.08^{10}}{1.05-1.08}=100\cdot\frac{2.15892500-1.62889463}{0.03}$$

$$=\frac{53.003037}{0.03}=1766.77\text{ 元}$$

b) 求年金現值:

應用公式(62),得:

$$(G_a)_{\overline{10|}}=100\cdot\frac{1-1.08^{10}\cdot1.05^{-10}}{1.05-1.08}=\frac{100}{0.03}$$

$$(2.158925\times0.61391325-1)=\frac{32.53927}{0.03}$$

$$=1084.64\text{元}$$

(例十) 第一年年金額100元,以後每年年金額較上年增加百分之五,年金時期爲十年,投資利率爲五釐,求年金終值與年金現值!

a) 求年金終值:

應用公式(63),得:

$$(G_s)_{\overline{10|}}=10\times100\times1.05^{9}=1551.33\text{元}$$

b) 求年金現值:

應用公式(64),得:

$$(G_a)_{\overline{10|}}=\frac{10\times100}{1.05}=1000\times0.95238095=952.38\text{元}$$

若等比變額年金之支付,永續不絕,則年金現值之有無極限,須視 r 與 $1+i$ 之關係而定.若 $1+i$ 小於 r 或等於 r,則年金現值將大至無窮大;反之,若 $1+i$ 大於 r,則年金現值之極限,可自下列公式求得.

$$(G_a)\infty=\frac{f}{1+i-r}\quad\cdots\cdots(65)$$

$(G_a)_\infty$　等比變額永續年金之現值

f　　第一期年金額

r　　公比

i　　實利率

(證) $(G_a)\infty=\lim\limits_{n\to\infty}\left[f\dfrac{1-\left(\dfrac{r}{1+i}\right)^n}{1+i-r}\right]$

若　　$1+i>r$

則　　$\dfrac{r}{1+i}<1$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{1+i}\right)^n=0$$

$$\therefore\quad (G_a)\infty=\frac{f}{1+i-r}$$

(例十一)第一年年金額100元,以後每年年金額較上年增加百分之四,投資利率爲五釐,求永續年金之現值!

應用公式(65),得:

$$(G_a)\infty=\frac{100}{1.05-1.04}=\frac{100}{0.01}=10000\text{元}$$

習題十五

1. 年金時期十五年,投資利率五釐,求年金終值與年金現值!
   a) 每年年金額均爲300元;
   b) 第一年年金額300元,以後每年增加10元;
   c) 第一年年金額300元,以後每年減少10元;
   d) 第一年年金額300元,以後每年增加百分之六;
   e) 第一年年金額300元,以後每年增加百分之五.
2. 第一年年金額1000元,以後每年增加100元,投資利率六釐,求等差

變額永續年金之現值!

3. 第一年年金額200元,以後每年年金額較上年增加百分之四,求永續年金之現值!

a) 投資利率三釐;

b) 投資利率四釐;

c) 投資利率五釐;

d) 投資利率八釐;

e) 投資利率一分.

4. 第一年年金額1000元,以後每年增加100元,投資利率五釐,年金時期十五年,求年金終值!

a) 應用公式(53);

b) 應用公式(56).

5. 第一年年金額1000元,以後每年減少100元,投資利率五釐,年金時期十年,求年金終值!

a) 應用公式(53);

b) 應用公式(56).

6. 第一年年金額100元以後每年增加100元,投資利率五釐,年金時期十年,求年金終值!

a) 應用公式(53);

b) 應用公式(55).

7. 第一年年金額1000元,以後每年減少50元,投資利率五釐,年金時期二十年,求年金現值!

a) 應用公式(54);

b) 應用公式(57).

8 第一年年金額1000元,以後每年減少50元,投資利率五釐,年金時期十五年,求年金現值!

a) 應用公式(54);

b) 應用公式(58).

9. 第一年年金額100元,以後每年增加20元,投資利率五釐,年金時期十年,求年金現值!

a) 應用公式(54);

b) 應用公式(58).

10. 第一次年金額100元,以後每次減少5元,每年支付4次,繼續支付5年,實利率5%,求年金現值!

本編應用公式

$$S_{\overline{n}|}=\frac{u^n-1}{i} \quad\cdots\cdots(1)$$

$$K=RS_{\overline{n}|} \quad\cdots\cdots(2)$$

$$S_{\overline{n}|}=\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1} \quad\cdots\cdots(3)$$

$$S_{\overline{n}|}\ @\ j=\frac{S_{\overline{nm}|}\ @\ \frac{j}{m}}{S_{\overline{m}|}\ @\ \frac{j}{m}} \quad\cdots\cdots(4)$$

$$a_{\overline{n}|}=\frac{1-v^n}{i} \quad\cdots\cdots(5)$$

$$A=R\,a_{\overline{n}|} \quad\cdots\cdots(6)$$

$$a_{\overline{n}|}=\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1} \quad\cdots\cdots(7)$$

$$a_{\overline{n}|}\ @\ j=\frac{a_{\overline{nm}|}\ @\ \frac{j}{m}}{S_{\overline{m}|}\ @\ \frac{j}{m}} \quad\cdots\cdots(8)$$

$$S'_{\overline{n}|}=S_{\overline{n+1}|}-1 \quad\cdots\cdots(9)$$

$$a'_{\overline{n}|}=a_{\overline{n-1}|}+1 \quad\cdots\cdots(10)$$

$$S'_{\overline{n}|}\ @\ j=\frac{S_{\overline{m(n+1)}|}\ @\ \frac{j}{m}}{S_{\overline{m}|}\ @\ \frac{j}{m}}-1 \quad\cdots\cdots(11)$$

$$a'_{\overline{n}|} @ j = \frac{a_{\overline{m(n-1)}|} @ \frac{j}{m}}{S_{\overline{m}|} @ \frac{j}{m}} + 1 \quad \cdots\cdots (12)$$

$$m|a_{\overline{n}|} = a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|} \quad \cdots\cdots (13)$$

$$a\infty = \frac{1}{i} \quad \cdots\cdots (14)$$

$$m|a\infty = \frac{v^m}{i} \quad \cdots\cdots (15)$$

$$n = \frac{\log(Ki+R) - \log R}{\log(1+i)} \quad \cdots\cdots (16)$$

$$n = \frac{\log\left[K\left(1+\frac{j}{m}\right)^m - K + R\right] - \log R}{m\log\left(1+\frac{j}{m}\right)} \quad \cdots\cdots (17)$$

$$n = \frac{\log R - \log(R - Ai)}{\log(1+i)} \quad \cdots\cdots (18)$$

$$n = \frac{\log R - \log\left[R + A - A\left(1+\frac{j}{m}\right)^m\right]}{m\log\left(1+\frac{j}{m}\right)} \quad \cdots\cdots (19)$$

$$\frac{1}{S_{\overline{n}|}} = \frac{1}{a_{\overline{n}|}} - i \quad \cdots\cdots (20)$$

$$L = Au^n - R(S_{\overline{n}|} - 1) \quad \cdots\cdots (21)$$

$$F = Au - Ra_{\overline{n-1}|} \quad \cdots\cdots (22)$$

$$S_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{u^n - 1}{p\left(u^{\frac{1}{p}} - 1\right)} \quad \cdots\cdots (23)$$

$$S_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{i}{j_{(p)}} S_{\overline{n}|} \quad \cdots\cdots (24)$$

$$K = RS_{\overline{n}|}^{(p)} \quad \cdots\cdots (25)$$

$$S_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm} - 1}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{p}{m}} - 1\right]} \quad \cdots\cdots (26)$$

$$S_{\overline{n}|}^{(p)} @ j = \frac{1}{m} \frac{\frac{j}{m}}{j_{\left(\frac{p}{m}\right)} @ \frac{j}{m}} \left(S_{\overline{nm}|} @ \frac{j}{m} \right) \cdots\cdots (27)$$

$$S_{\overline{n}|}^{(p)} @ j = \frac{1}{p} S_{\overline{nm}|} @ \frac{j}{m} \cdots\cdots (28)$$

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{1-v^n}{p\left(u^{\frac{1}{p}}-1\right)} \cdots\cdots (29)$$

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{i}{j_{(p)}} a_{\overline{n}|} \cdots\cdots (30)$$

$$A = Ra_{\overline{n}|}^{(p)} \cdots\cdots (31)$$

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nm}}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]} \cdots\cdots (32)$$

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} @ j = \frac{1}{m} \cdot \frac{\frac{j}{m}}{j_{\left(\frac{p}{m}\right)} @ \frac{j}{m}} \left(a_{\overline{nm}|} @ \frac{j}{m} \right) \cdots\cdots (33)$$

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} @ j = \frac{1}{p} a_{\overline{nm}|} @ \frac{j}{m} \cdots\cdots (34)$$

$$\bar{S}_{\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} S_{\overline{n}|} \cdots\cdots (35)$$

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} a_{\overline{n}|} \cdots\cdots (36)$$

$$S_{\overline{n}|}^{(p)\prime} = S_{\overline{n+\frac{1}{p}}|}^{(p)} - \frac{1}{p} \cdots\cdots (37)$$

$$a_{\overline{n}|}^{(p)\prime} = a_{\overline{n-\frac{1}{p}}|}^{(p)} + \frac{1}{p} \cdots\cdots (38)$$

$$S_{\overline{n}|}^{(p)\prime} = (1+i)^{\frac{1}{p}} S_{\overline{n}|} \frac{i}{j_{(p)}} \cdots\cdots (39)$$

$$a_{\overline{n}|}^{(p)\prime} = (1+i)^{\frac{1}{p}} a_{\overline{n}|} \frac{i}{j_{(p)}} \cdots\cdots (40)$$

$$m|a_{\overline{n}|}^{(p)} = \left(a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|}\right) \frac{i}{j_{(p)}} \cdots\cdots (41)$$

$$n=\frac{\log\left[\frac{K}{R}j_{(p)}+1\right]}{\log(1+i)}\cdots\cdots(42)$$

$$n=\frac{\log\left[R+Kp\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-Kp\right]-\log R}{m\log\left(1+\frac{j}{m}\right)}\cdots\cdots(43)$$

$$n=\frac{\log R-\log\left[R-Aj_{(p)}\right]}{\log(1+i)}\cdots\cdots(44)$$

$$n=\frac{\log R-\log\left[R-Ap\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}+Ap\right]}{m\log\left(1+\frac{j}{m}\right)}\cdots\cdots(45)$$

$$\frac{1}{S_{\overline{n|}}^{(p)}}=\frac{1}{a_{\overline{n|}}^{(p)}}-j_{(p)}\cdots\cdots(46)$$

$$R=K\frac{j_{(p)}}{i}\frac{1}{S_{\overline{n|}}}\cdots\cdots(47)$$

$$R=A\frac{j_{(p)}}{i}\frac{1}{a_{\overline{n|}}}\cdots\cdots(48)$$

$$R'=K(1+i)^{-\frac{1}{p}}\frac{j_{(p)}}{i}\frac{1}{S_{\overline{n|}}}\cdots\cdots(49)$$

$$R'=A(1+i)^{-\frac{1}{p}}\frac{j_{(p)}}{i}\frac{1}{a_{\overline{n|}}}\cdots\cdots(50)$$

$$a_{nk\cdot k}=\frac{a_{\overline{nk|}}}{S_{\overline{k|}}}\cdots\cdots(51)$$

$$a_{\infty\cdot k}=\frac{1}{i}\frac{1}{S_{\overline{k|}}}\cdots\cdots(52)$$

$$(A_s)_{\overline{n|}}=fS_{\overline{n|}}+\frac{d}{i}(S_{\overline{n|}}-n)\cdots\cdots(53)$$

$$(A_a)_{\overline{n|}}=fa_{\overline{n|}}+\frac{d}{i}(a_{\overline{n|}}-nv^n)\cdots\cdots(54)$$

$$(A_s)_{\overline{n|}}=f\,\Sigma\,S_{\overline{n|}}\cdots\cdots(55)$$

$$(A_s)_{\overline{n|}}=d\,\Sigma\,S_{\overline{n|}}+(f-d)\,S_{\overline{n|}}\cdots\cdots(56)$$

$$(A_a)_{\overline{n}|} = l\,\Sigma\, a_{\overline{n}|} \quad \text{(57)}$$

$$(A_a)_{\overline{n}|} = (l+d)\,a_{\overline{n}|} - d\,\Sigma\, a_{\overline{n}|} \quad \text{(58)}$$

$$(A_a)^{(p)}_{\overline{n}|} = p\frac{i}{j_{(p)}}\left[a_{\overline{n}|}\left(f+\frac{dp}{j_{(p)}}\right)-\frac{npdv^n}{i}\right] \quad \text{(59)}$$

$$(A_a)\infty = \frac{f}{i}+\frac{d}{i^2} \quad \text{(60)}$$

$$(G_s)_{\overline{n}|} = f\frac{(1+i)^n - r^n}{1+i-r} \quad \text{(61)}(r \neq 1+i)$$

$$(G_a)_{\overline{n}|} = f\frac{1-r^n v^n}{1+i-r} \quad \text{(62)}(r \neq 1+i)$$

$$(G_s)_{\overline{n}|} = nfr^{n-1} \quad \text{(63)}(r=1+i)$$

$$(G_a)_{\overline{n}|} = \frac{nf}{r} \quad \text{(64)}(r=1+i)$$

$$(G_a)\infty = \frac{f}{1+i-r} \quad \text{(65)}$$

第五編　年賦償還

第一章　年賦償還之意義及其種類

償還方法有一次償還與分期償還之別,前者債務人於一定時日淸償負債之全部,後者債務人每年,或每半年,或按其他任何預定期間,支付一定金額,漸次淸償其債務,故此法名曰年賦償還(Annual Instalment).年賦償還對於債務人甚爲便利,蓋債務人所借資金,常不能於短期內與其所經營之事業脫離,若借款期限僅有一二年,則借款到期時,債務人仍無償還之能力;反之,若借款期限延長至一二十年,則債務人得直接或間接利用年賦償還法,漸次淸償其借款,而此年賦償還額卽可取之於其所經營事業之每年純益.

年賦償還有均等分償與變額年金分償之別,前者債務人於一定時期內,按一定期間,支付均等金額,漸次淸償其債務,後者則債務人以變額年金,爲其年賦償還之額也.

均等分償又可分爲全均等分償與本金均等分償二種.每期支付均等金額,以漸次淸償本利之前部,是曰全均等分償;若每期支付之均等金額,僅爲淸償全部本金之用,則名曰本金均等分償.有時本金之全部,雖規定一次償還,然債務人

仍得間接應用年賦償還法,每期提出一定金額運用於極穩健之投資,以積成與本金相等之金額,是曰償本基金.

變額年金分償亦可分爲等差變額年金分償與等比變額年金分償兩種.年賦償還之額若可列成等差級數,則爲等差變額年金分償,若可列成等比級數,則爲等比變額年金分償.

年賦償還中每期支付之額名曰每期年賦金額 (Periodic Instalment), 每年中支付年賦金額之總數,名曰年賦金總額 (Annual Installment).

第二章 均等分償

第一節 本金均等分償

本金均等分償,細別之,又可分爲下列三法:

(甲) 全部利息於最後一期支付,此一次支付之利息,可自下列公式求得:

$$I=P\left(u^{n}-\frac{1}{n}S_{\overline{n|}}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

I = 一次支付之利息

P = 負債額

i = 實利率

n = 償債時期

u = $1+i$

(乙) 每期支付未償債額之利息,第m年末支付之年賦金額,可自下列公式求得:

$$R_{m}=\frac{P}{n}\left[1+(n-m+1)i\right]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

R_m = 第m年末支付之年賦金額

P = 負債額

n = 償債時期

i = 實利率

(丙) 每期累積利息,按未經過各期平均分償,第m年末支

付之年賦金額,可自下列公式求得:

$$R_m=\frac{P}{n}u^m \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

R_m= 第 m 年末支付之年賦金額

P = 負債額

n = 償債時期

i = 實利率

u = $1+i$

(證)(甲)每年末償還負債額之 $\frac{1}{n}$,即 $\frac{P}{n}$,故每年初之負債餘額,當為 $P, \frac{n-1}{n}P, \frac{n-2}{n}P \cdots\cdots \frac{3}{n}P, \frac{2}{n}P, \frac{1}{n}P$,而每年末應償利息,當為 $Pi, \frac{n-1}{n}Pi, \frac{n-2}{n}Pi, \cdots\cdots \frac{3Pi}{n}, \frac{2Pi}{n}, \frac{Pi}{n}$,若每年末祇償本金而不付利息,則此遲延不付之利息,至 n 年末之終值,當為 $Pi(1+i)^{n-1}, \frac{n-1}{n}Pi(1+i)^{n-2}, \frac{n-2}{n}Pi(1+i)^{n-3} \cdots\cdots, \frac{3}{n}Pi(1+i)^2, \frac{2}{n}Pi(1+i), \frac{Pi}{n}$,故得:

$$I=Pi(1+i)^{n-1}+\frac{n-1}{n}Pi(1+i)^{n-2}+\frac{n-2}{n}Pi(1+i)^{n-3}$$

$$+\cdots\cdots+\frac{3}{n}Pi(1+i)^2+\frac{2}{n}Pi(1+i)+\frac{1}{n}Pi$$

$$I=\frac{Pi}{n}[n(1+i)^{n-1}+(n-1)(1+i)^{n-2}+(n-2)(1+i)^{n-3}$$

$$+\cdots\cdots+3(1+i)^2+2(1+i)+1]$$

上式之兩邊,若以 $(1+i)-1$ 乘之,則右邊大括弧內之數,將依次乘得如下:

$$
\begin{array}{r}
n(1+i)^n+(n-1)(1+i)^{n-1}+(n-2)(1+i)^{n-2}\cdots+3(1+i)^3+2(1+i)^2+(1+i) \\
-n(1+i)^{n-1}-(n-1)(1+i)^{n-2}\cdots-4(1+i)^3-3(1+i)^2-2(1+i)-1 \\
\hline
n(1+i)^n-(1+i)^{n-1}-(1+i)^{n-2}\cdots-(1+i)^3-(1+i)^2-(1+i)-1
\end{array}
$$

即
$$Ii=\frac{Pi}{n}n(1+i)^n-\frac{Pi}{n}[(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+\cdots\cdots$$

$$+(1+i)^3+(1+i)^2+(1+i)+1]$$

$$Ii=Pi(1+i)^n-\frac{Pi}{n}S_{\overline{n}|}$$

$$\therefore\quad I=P(u^n-\frac{1}{n}S_{\overline{n}|})$$

(別證) 若於n年間本息均未支付,則負債額P至n年末積成終值Pu^n,但債務人於每年末償還本金$\frac{P}{n}$,而此年賦金額$\frac{P}{n}$至n年末之終值爲$\frac{P}{n}S_{\overline{n}|}$,故至第$n$年末債務人尙須支付

$$I=Pu^n-\frac{P}{n}S_{\overline{n}|}=P(u^n-\frac{1}{n}S_{\overline{n}|})$$

(乙) 每年末償還負債額之$\frac{1}{n}$,即$\frac{P}{n}$,故第m年初之負債餘額,當爲$\frac{n-m+1}{n}P$,而第m年末應付之利息當爲$\frac{n-m+1}{n}Pi$,故得:

$$R_m=\frac{P}{n}+\frac{n-m+1}{n}Pi=\frac{P}{n}[1+(n-m+1)i]$$

(丙) 每期累積利息,按未經過各期平均分償,而每期償本之額相等,故每期末年賦金額,即將每期累積利息與負債餘額之總數按未經過各期平均分配而得;即:

$$R_1=\frac{P(1+i)}{n}$$

$$R_2=\frac{P(1+i)\left(1-\frac{1}{n}\right)(1+i)}{n-1}=\frac{P}{n}(1+i)^2$$

$$R_3=\frac{P(1+i)\left(1-\frac{1}{n}\right)(1+i)\left(1-\frac{1}{n-1}\right)(1+i)}{n-2}=\frac{P}{n}(1+i)^3$$

同理

$$R_m=\frac{P}{n}(1+i)^m$$

$$\therefore\quad R_m=\frac{P}{n}u^m$$

第二法中每年末支付之年賦金額,成一等差級數,其公差爲$-\frac{Pi}{n}$,故債務人前期之負擔較重於後期;第三法中每年末支付之年賦金額,成一等比級數,其公比爲$1+i$,故債務人後期之負擔較重於前期;至於第一法中之利息,則盡歸最後一期負擔,故最後一期之負擔獨重.

(例一)某甲負債一萬元,言定本金分五年均等償還,全部利息於五年末一次支付,實利率六釐,問某甲於五年末應共付本息若干元?

應用公式(1),得:

$$I=10000\left(1.06^5-\frac{1}{5}S_{\overline{5|}}\right)=10000(1.33822558$$

$$-\frac{1}{5}\times5.63709296)=10000(133822558$$

$$-1.12741859)=2108.07\text{ 元}$$

$$\frac{10000}{5}+2108.07=4108.07\text{ 元}$$

(例二) 某甲負債一萬元,言定本金分十年均等償還,實利率六釐,求第五年末之年賦金額!

a) 每年支付未償債額之利息;

b) 每年累積利息按未經過各年平均分償.

a) 應用公式(2),得:

$$R_5=\frac{10000}{10}[1+(10-5+1)\times 0.06]=1000\times 1.36=1360\text{ 元}$$

b) 應用公式(3),得:

$$R_5=\frac{10000}{10}\times 1.06^5=1338\ 23\text{ 元}$$

某甲可預製一年賦償還表,以明每年負債餘額與償本付息之狀況.

年賦償還表

(每年支付未償債額之利息)

年次	年初負債額	償本額	付息額	年賦金額
第一年	$ 10,000	$ 1,000	$ 600	$ 1,600
第二年	9,000	1,000	540	1,540
第三年	8,000	1,000	480	1,480
第四年	7,000	1,000	420	1,420
第五年	6,000	1,000	360	1,360
第六年	5,000	1,000	300	1,300
第七年	4,000	1,000	240	1,240
第八年	3,000	1,000	180	1,180
第九年	2 000	1,000	120	1,120
第十年	1,000	1,000	60	1,060
合計	55,000	10,000	3,300	13,300

年賦償還表

(每年累積利息按末經過各年平均分償)

年 次	年初本金餘額	年末償本額	年末累積利息	年末支付利息	年賦金額
第一年	$ 10,000	$ 1,000	$ 600.00	$ 60.00	$ 1,060.00
第二年	9 000	1,000	1,112.40	123.60	1,123.60
第三年	8,000	1,000	1,528.13	191.02	1,191.02
第四年	7,000	1,000	1,837.34	262.48	1,262.48
第五年	6,000	1,000	2,029.35	338.23	1,338.23
第六年	5,000	1,000	2,092.59	418.52	1,418.52
第七年	4,000	1,000	2,014,51	503.63	1,503.63
第八年	3,000	1,000	1,781.53	593.84	1,593.84
第九年	2,000	1,000	1,378.95	689.48	1,689.48
第十年	1,000	1,000	790.84	790.84	1,790.84
合 計		10,000		3,971.64	13,971.64

第二節 全均等分償

全均等分償中每期支付均等金額,而此均等金額即組成一定額年金,故年賦償還中之年賦金額即爲年金中之年金額,而最初之負債額即與年金現值相等,故年賦金額可自下之公式求得:

$$R=P\frac{1}{a_{\overline{n|}}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

R 年賦金額

P 負債額

$a_{\overline{n|}}$ 簡單年金一元繼續支付n年之現值

$\frac{1}{a_n}$爲負債額一元分n年均等償還之年賦金額,故$\frac{1}{a_{\overline{n|}}}$表名曰年賦金表.

每期支付之年賦金額可分爲二部,一部爲對於負債餘額應付之利息,一部所以償債,每年付息額隨負債餘額而漸次減少,故每年償債額得漸次增加,第m年末負債餘額與年賦金額R之中,包含付息與償債之部,可自下列三公式求得:

$$L_m = Ra_{\overline{n-m|}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

$$P_m = Rv^{n-m+1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6$$

$$I_m = R(\ -v^{n-m+1}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

R　年賦金額

L_m　第m年末負債餘額

P_m　第m年末償本額

I_m　第m年末付息額

$a_{\overline{n-m|}}$　簡單年金一元繼續支付$(n-m)$年之現值

i　實利率

$v = \dfrac{1}{1+i}$

(證)第m年末尙有$n-m$次年賦金未付,故第m年末負債餘額,即爲$n-m$次年賦金額R元之現值,即:

$$L_m = Ra_{\overline{n-m|}}$$

而第$m-1$年末之負債餘額當爲:

$$L_{m-1} = Ra_{\overline{n-m+1|}}$$

故第m年末應支付利息

$$I_m = iRa_{\overline{n-m+1|}} = Ri\,\frac{1-v^{n-m+1}}{i}$$

$$= R\ 1-v^{n-m+1})$$

但第m年末債務人共付年賦金額R元,除去應付利息之外,即爲償還本金之部,故得:

$$P_m = R - R(1 - v^{n-m+1}) = Rv^{n-m+1}$$

(例三) 某甲負債一萬元,實利率六釐,約定於十年間全均等分償,求:

a) 年賦金額;

b) 第四年末負債餘額;

c) 第六年末償本額;

d) 第八年末付息額.

a) 應用公式(4)得:

$$R = 10000\frac{1}{a_{\overline{10}|}} = 1358.68 \text{ 元}$$

b) 應用公式(5),得:

$$L_4 = 1358.68\, a_{\overline{6}|} = 1358.68 \times 4.91732433$$

$$= 6681.07 \text{ 元}$$

c) 應用公式(6),得:

$$P_6 = 1358.68\, v^5 = 1358.68 \times 0\ 74725817$$

$$= 1015\ 28 \text{ 元}$$

d) 應用公式(7),得:

$$I_8 = 1358.68(1 - v^3) = 1358.68 \times 0.16038072$$

$$= 217.91 \text{ 元}$$

茲據各年負債餘額,償本額,與付息額,製年賦償還表於下.

年賦償還表

(年賦金額1,358.68元)

年次	年初負債額	年末付息額	年末償本額
第一年	$ 10,000.00	$ 600.00	$ 758.68
第二年	9,241.32	554.4?	804.20
第三年	8,437.12	506.23	852.45
第四年	7,584.67	455.03	903.60
第五年	6,681.07	400.86	957.82
第六年	5,723.25	343.40	1,015.28
第七年	4,707.97	282.48	1,076.20
第八年	3,631.77	217.91	1,140.77
第九年	2,491.00	149.46	1,209.22
第十年	1,281.78	76.91	1,281.77
	59,779.95	3,586.81	9,999.99

若年賦金延期m年始支付,即最初m年不付年賦金,至第$m+1$年末開始支付年賦金,則年賦金額之計算,隨延期中每年利息是否照付而異.若延期中每年照付利息,則年賦金額之計算,與前無異.若延期中併此利息而亦延期,則最初負債額P至第m年末將變爲$P(1+i)^m$,故在應用公式(4)以前,須以$P(1+i)^m$代公式中之P.

(例四)某甲負債一萬元,實利率六釐,約定於第六年至第十五年全均等分償,延期中利息亦延遲支付,求年賦金額,並製年賦償還表!

$$R=10,000\times1.06^5\times\frac{1}{a_{\overline{10}|}}\quad=13382.2558$$

$$\times0.13586796=1,818.22\text{ 元}$$

年賦償還表

(第六年至第十五年年賦金額1,818.22元)

年　次	年初負債額	年末應付利息額	年末償本額
第一年	$ 10,000.00	$ 600.00	0
第二年	10,600.00	636.00	0
第三年	11,236.00	674.16	0
第四年	11,910.16	714.61	0
第五年	12,624.77	757.49	0
第六年	13,382.26	802.94	$ 1,015.28
第七年	12,366.98	742.02	1,076.20
第八年	11,290.78	677.45	1,140.77
第九年	10,150.01	609.00	1,209.22
第十年	8,940.79	536.45	1,281.77
第十一年	7,659.02	459.54	1,358.68
第十二年	6,300.34	378.02	1,440.20
第十三年	4,860.14	291.61	1,526.61
第十四年	3,333.53	200.01	1,618.21
第十五年	1,715.32	102.92	1,715.30
	136,370.10	8,182.22	13,382.24

第三節　償本基金

償本基金(Sinking Fund)者,債務人於每期提出一定金額,運用於極穩健之投資,以積成與最初負債額相等之金額,以備借款到期時償本之需,故償務人除按期付息外,並須支出一定金額,提撥償本基金,而此每期支出之一定金額,通常相等,故組成一種定額年金.基金投資利率未必等於借款利率,兩者相等時,債務人每期支出總額,即爲全均等分償中之年賦金額,若投資利率小於借款利率,則債務人每期支出總額,

大於全均等分償中之年賦金額,反之,則小於全均等分償中之年賦金額.凡按期支付一定金額,欲於若干年後積成相當金額者,均可適用償本基金法.償本基金法簡稱曰基金法.

到期償本之額,即爲每期提撥基金額之年金終值,故若於每年末提出相等金額 R,撥充償本基金,而能依實利率 i' 投資,以備於 n 年末淸償全部本金 P,則 P 即等於 $(R\,S_{\overline{n|}}\ @\ i')$,故得:

$$R=P\left(\frac{1}{S_{\overline{n|}}}@\ i'\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

P　負債額

R　每年末提撥基金額

$S_{\overline{n|}}$　簡單年金額一元繼續支付 n 年之終值

i'　基金投資利率

設 T 爲債務人每年支出總額 i 爲借款利率,則:

$$T=P\,i+P\left(\frac{1}{S_{\overline{n|}}}@\,i'\right)$$

但
$$\frac{1}{S_{\overline{n|}}}@\ i'=\left(\frac{1}{a_{\overline{n|}}}@\,i'\right)-i'$$

$$\therefore\quad T=P(i-i')+P\left(\frac{1}{a_{\overline{n|}}}@\ i'\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

P　負債額

T　每年末債務人支出總額

i　借款利率

i'　基金投資利率

$a_{\overline{n|}}$　簡單年金額一元繼續支付 n 年之現值

試以公式(9)與公式(4)比較:

若$i=i'$,則$T=P\left(\frac{1}{a_{\overline{n}|}} @ i\right)$,與公式(4)中之$R$相等;

若$i>i'$,則$\frac{1}{S_{\overline{n}|}} @ i' > \frac{1}{S_{\overline{n}|}} @ i$,

$$Pi+P\left(\frac{1}{S_{\overline{n}|}} @ i'\right) > Pi+P\left(\frac{1}{S_{\overline{n}|}} @ i\right),$$

故T大於公式(4中之R;

若$i<i'$,則$\frac{1}{S_{\overline{n}|}} @ i' < \frac{1}{S_{\overline{n}|}} @ i$,

$$Pi+P\left(\frac{1}{S_{\overline{n}|}} @ i'\right) < Pi+P\left(\frac{1}{S_{\overline{n}|}} @ i\right),$$

故T小於公式(4)中之R.

第m年末基金總額,爲m年間年金R元之終值,故得:

$$S_m = P\frac{S_{\overline{m}|}}{S_{\overline{n}|}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

P 負債額

S_m 第m年末基金總額

$S_{\overline{m}|}$ 簡單年金額一元繼續支付m年之終值

$S_{\overline{n}|}$ 簡單年金額一元繼續支付n年之終值

(例五) 某甲負債一萬元,實利率六釐,期限十年,問每年末某甲須共支付若干元?

a) 全均等分償

b) 償本基金法,基金投資利率六釐;

c) 償本基金法,基金投資利率五釐;

d) 償本基金法,基金投資利率七釐.

a) 應用公式(4),得:

$$R=10,000\frac{1}{a_{\overline{10|}}}=1358.68\text{ 元}$$

b) 應用公式(8),得:

$$R=10,000\frac{1}{S_{\overline{10|}}}=10,000\times 0.075868=758.68\text{ 元}$$

$$T=10,000\times 0.06+758.68=1358.68\text{ 元}$$

c) 應用公式(9),得:

$$T=10,000\times 0.01+10,000\left(\frac{1}{a_{\overline{10|}}}\ @\ 5\%\right)=1395.05\text{ 元}$$

d) 應用公式(9),得:

$$T=10,000(-0.01)+10,000\left(\frac{1}{a_{\overline{10|}}}\ @\ 7\%\right)=1323.78\text{ 元}$$

(例六) 某甲負債一萬元,實利率六釐,期限二十年,用基金法預備償本,基金投資利率五釐,問第五年末共有基金若干元?

應用公式(10),得:

$$S_5=10,000\frac{S_{\overline{5|}}}{S_{\overline{20|}}}=55,256.3125\times 0.03024259=1671.09\text{ 元}$$

習題十六

1. 某甲負債二萬元,言定本金分十五年均等償還,實利率五釐,求第十年末之年賦金額,並製年賦償還表!

a) 每年支付未償債額之利息;

b) 每年累積利息按未經過各年平均分償.

2. 某乙負債二萬五千元,言定本金分五年均等償還,全部利息於五年末一次支付,實利率七釐,問某乙於五年末應共付本息若干元?

3. 某丙負債三萬元,實利率六釐,約定於二十年間全均等分償,求:

a) 年賦金額;

b) 第五年末負債餘額;

c) 第十年末償本額;

d) 第十五年末付息額.

4. 某丁負債二萬元,實利率五釐,約定於十年間全均等分償,求年賦金額,並製年賦償還表.

5. 某戊負債一萬元,實利率六釐,約定於第六年至第十年全均等分償,延期中利息亦延遲支付,求年賦金額,並製年賦償還表!

6. 某己負債一萬元,實利率五釐,期限十五年,問每年末某己須共支付若干元?

a) 全均等分償;

b) 償本基金法,基金投資利率五釐;

c) 償本基金法,基金投資利率四釐;

d) 償本基金法,基金投資利率六釐.

7. 某庚負債二萬元,期限十年,用基金法預備償本,基金投資利率六釐,問第八年末共有基金若干元.

8. 負債額一萬元,實利率六釐,約定於二十年間全均等分償,設債務人於最初三年未能履行契約,問第四年末債務人須共支付若干元,方與契約規定相合?

9. 某屋價值五萬元,購主與售主約定,得先付現洋一萬元,餘額於以後十年間每三月末支付相等金額,虛利率六釐,每年複利二次,設債務人於第十次支付年賦金後,欲以現洋付清餘額,問尚共須付洋若干元?

10. 某屋價值二萬元,購主與售主約定分期付款,實利率六釐,購主先付現洋五千元,於三年末再付洋三千元,自第四年至第八年每年末付洋 R 元,求 R!

11. 負債額十萬元,約定於十年間全均等分償,前五年實利率五釐,後五年實利率六釐,求年賦金額,並製年賦償還表!

12. 負債額二萬元,每年付息一次,本金於八年末一次償還,債務人於每年末提存基金,依實利率五釐投資,設每年末支付利息與提存基金之總額爲四千三百五十元,求借款利率!

13. 某城負債五十萬元,擬於下列兩法選擇一種:

a) 用全均等分償法,實利率$6\frac{1}{4}\%$,分二十年償淸;

b) 每年依實利率六釐付息,本金於二十年末一次償還,另設償本基金,以備到期償本之需,基金依4%投資;

問何者有利於某城?

14. 求證:

$L_m=P(1+i)^m-RS_{\overline{m}|}$

P　負債額

L_m　第m年末負債餘額

R　全均等分償中之年賦金額

i　借款利率

$S_{\overline{m}|}$　簡單年金額一元繼續支付m年之終值

15. 某公司規定每年末提出相等金額,依實利率六釐投資,欲於十年末積成基金五萬元,試作一表,以示各年基金之累積!

第三章 變額年金分償

變額年金分償有等差變額年金分償與等比變額年金分償之別,吾人在第四編中已論及等差變額年金與等比變額年金之演算,借款本金爲各變額年金之現值,故計算第一年年賦金之公式,可自第四編中之年金現值公式化出.

應用第四編公式(54),得:

$$(A_a)_{\overline{n|}} = fa_{\overline{n|}} + \frac{d}{i}(a_{\overline{n|}} - nv^n)$$

$$fa_{\overline{n|}} = (A_a)_{\overline{n|}} - \frac{d}{i}(a_{\overline{n|}} - nv^n)$$

$$f = \frac{(A_a)_{\overline{n|}}}{a_{\overline{n|}}} - \frac{d}{i} + \frac{dnv^n}{ia_{\overline{n|}}}$$

但 $$(A_a)_{\overline{n|}} = P$$

$$\frac{v^n}{a_{\overline{n|}}} = \frac{1}{(1+i)^n a_{\overline{n|}}} = \frac{1}{S_{\overline{n|}}}$$

$$\therefore \quad f = \frac{P}{a_{\overline{n|}}} - \frac{d}{i}\left(1 - \frac{n}{S_{\overline{n|}}}\right) \cdots\cdots\cdots (11)$$

P 負債額

f 第一年年賦金額

d 公差

i　實利率

n　借款時期

$a_{\overline{n}|}$　簡單年金額一元繼續支付n年之現值

$S_{\overline{n}|}$　簡單年金額一元繼續支付n年之終值

(例一)負債額一萬元,實利率五釐,約定於十年間用等差變額年金分償法償還,每年年賦金額遞減二十元,求第一年年賦金額,並製年賦償還表!

應用公式(11),得:

$$f=\frac{10,000}{a_{\overline{10}|}}+\frac{20}{0.05}\left(1-\frac{10}{S_{\overline{10}|}}\right)$$

$$=10,000\times 0.12950458+400(1-10\times 0.07950458)$$

$$=1295.0458+400\times 0.2049542=1,377.03\text{ 元}$$

年　賦　償　還　表

(每年遞減二十元)

年　次	年初負債餘額	年末年賦金額	年末付息額	年末償本額
第一年	$ 10,000.00	$ 1,377.03	$ 500.00	$ 877.03
第二年	9,122.97	1,357.03	456.15	900.88
第三年	8,222.09	1,337.03	411.10	925.93
第四年	7,296.16	1,317.03	364.81	952.22
第五年	6,343.94	1,297.03	317.20	979.83
第六年	5,364.11	1,277.03	268.21	1,008.82
第七年	4,355.29	1,257.03	217.76	1,039.27
第八年	3,316.02	1,237.03	165.80	1,071.23
第九年	2,244.79	1,217.03	112.24	1,104.79
第十年	1,140.00	1,197.03	57.00	1,140.03
	57,405.37	12,870.30	2,870.27	10,000.03

(例二)前題中每年年賦金額,若改爲遞增二十元,求第一

年年賦金額並製年賦償還表!

應用公式(11),得:

$$f=\frac{10000}{a_{\overline{10|}}}-\frac{20}{0.05}\left(1-\frac{10}{S_{\overline{10|}}}\right)$$

$$=1295.0458-400\times 0.2049542$$

$$=1,213.06\text{元}$$

年　賦　償　還　表

(每年遞增二十元)

年　次	年初負債額	年末年賦金額	年末付息額	年末償本額
第一年	$ 10,000.00	$ 1,213.06	$ 500.00	$ 713.06
第二年	9,286.94	1,233.06	464.35	768.71
第三年	8,518.23	1,253.06	425.91	827.15
第四年	7,691.08	1,273.06	384.55	888.51
第五年	6,802.57	1,293.06	340.13	952.93
第六年	5,849.64	1,313.06	292.48	1,020.58
第七年	4,829.06	1,333.06	241.45	1,091.61
第八年	3,737.45	1,353.06	186.87	1,166.19
第九年	2,571.26	1,373.06	128.56	1,244.50
第十年	1,326.76	1,393.06	66.34	1,326.72
	60,612.99	13,030.60	3,030.64	9,999.96

應用第四編公式(62)與(64),而以P代$(G_a)_{\overline{n|}}$,得:

$$f=\frac{Pu^n(1+i-r)}{u^n-r^n}\cdots\cdots\cdots\cdots(12)\ (r\fallingdotseq 1+i)$$

$$f=\frac{Ir}{n}\cdots\cdots\cdots\cdots(13)\ (r=1+i)$$

P　負債額

f　第一年年賦金額

n　借款時期

r 公比

i 實利率

$u=1+i$

(例三) 負債額一萬元,約定於五年間用等比變額年金分償法償還,公比1.05,求第一年年賦金額,並製年賦償還表!

a) 實利率四釐;

b) 實利率五釐.

a) 應用公式(12),得:

$$f=\frac{10,000\times1.04^5(1.04-1.05)}{1.04^5-1.05^5}=\frac{100\times1.2166529}{1.27628156-1.2166529}$$

$$=\frac{121.66529}{0.05962866}=2,040.38\text{元}$$

b) 應用公式(13),得:

$$f=\frac{10,000\times1.05}{5}=2,100\text{元}$$

年賦償還表

(實利率四釐)

年次	年初負債餘額	年末年賦金額	年末付息額	年末償本額
第一年	$ 10,000.00	$ 2,040.38	$ 400.00	$ 1,640.38
第二年	8,359.62	2,142.40	334.38	1,808.02
第三年	6,551.60	2,249.52	262.06	1,987.46
第四年	4,564.14	2,362.00	182.57	2,179.43
第五年	2,384.71	2,480.10	95.39	2,384.71
	31,860.07	11,274.40	1,274.40	10,000.00

年賦償還表

（實利率五釐）

年次	年初負債餘額	年末年賦金額	年末付息額	年末償本額
第一年	$ 10,000.00	$ 2,100.00	$ 500.00	$ 1,600.00
第二年	8,400.00	2,205.00	420.00	1,785.00
第三年	6,615.00	2,315.25	330.75	1,984.50
第四年	4,630.50	2,431.01	231.53	2,199.48
第五年	2,431.02	2,552.56	121.55	2,431.01
	32,076.52	11,603.82	1,603.83	9,999.99

習題十七

1. 負債額二萬元,實利率六釐,約定於五年間用等差變額年金分償法償還,每年年賦金額遞增一百元,求第一年年賦金額,並製年賦償還表!

2. 負債額五千元,實利率七釐,約定於十年間用等差變額年金分償法償還,每年年賦金額遞減三十元,求第一年年賦金額,並製年賦償還表!

3. 負債額二萬五千元,約定於五年間用等比變額年金分償法償還,公比 1.04,求第一年年賦金額,並製年賦償還表!

　a) 實利率四釐;

　b) 實利率五釐.

4. 求證:
$$L_m=P\left(u^m-\frac{S_{\overline{m}|}}{a_{\overline{n}|}}\right)+\frac{d}{i}\left(m-\frac{nS_{\overline{m}|}}{S_{\overline{n}|}}\right)$$

P　最初負債額

L_m　第 m 年末支付年賦金後之負債餘額

i　實利率

d　等差變額年金分償中之公差

$S_{\overline{m}|}$ 簡單年金額一元繼續支付m年之終值

$S_{\overline{n}|}$ 簡單年金額一元繼續支付n年之終值

$a_{\overline{n}|}$ 簡單年金額一元繼續支付n年之現值

$u=1+i$

5. 負債額一萬元,實利率六釐,約定於十年間用等差變額年金分償法償還,每年年賦金額遞增二十元,求第一年年賦金額與第六年初之負債餘額!

本編應用公式

$$I = P\left(n^n - \frac{1}{n}S_{\overline{n}|}\right) \cdots\cdots (1)$$

$$R_m = \frac{P}{n}[1+(n-m+1)i] \cdots\cdots (2)$$

$$R_m = \frac{P}{n}u^m \cdots\cdots (3)$$

$$R = P\frac{1}{a_{\overline{n}|}} \cdots\cdots (4)$$

$$L_m = Ra_{\overline{n-m}|} \cdots\cdots (5)$$

$$P_m = Rv^{n-m+1} \cdots\cdots (6)$$

$$I_m = R(1-v^{n-m+1}) \cdots\cdots (7)$$

$$R = P\left(\frac{1}{S_{\overline{n}|}} @ i'\right) \cdots\cdots (8)$$

$$T = P(i-i') + P\left(\frac{1}{a_{\overline{n}|}} @ i'\right) \cdots\cdots (9)$$

$$S_m = P\frac{S_{\overline{m}|}}{S_{\overline{n}|}} \cdots\cdots (10)$$

$$f = \frac{P}{a_{\overline{n}|}} - \frac{d}{i}\left(1-\frac{n}{S_{\overline{n}|}}\right) \cdots\cdots (11)$$

$$f = \frac{Pu^n(1+i-r)}{u^n-r^n} \cdots\cdots (12)(r \neq 1+i)$$

$$f = \frac{Pr}{n} \cdots\cdots (13)(r=1+i)$$