

Analysis III**Arbeitsblatt 66****Aufwärmaufgaben**

AUFGABE 66.1. Es seien $[a, b[$ und $[c, d[$ zwei halboffene Intervalle (mit $a \leq b$ und $c \leq d$). Beschreibe den Durchschnitt $[a, b[\cap [c, d[$ als eine disjunkte Vereinigung von halboffenen Intervallen.

AUFGABE 66.2. Es sei \mathcal{M} das Mengensystem, das aus allen endlichen disjunkten Vereinigungen von offenen, abgeschlossenen, einseitig halboffenen, leeren, beschränkten oder unbeschränkten reellen Intervallen besteht. Zeige, dass \mathcal{M} eine Mengenalgebra ist.

AUFGABE 66.3. Man gebe ein Beispiel für eine beschränkte Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}$, die man als eine abzählbare disjunkte Vereinigung von rechtsseitig halboffenen Intervallen schreiben kann, aber nicht als eine endliche Vereinigung.

AUFGABE 66.4. Zeige, dass unter einer polynomialen Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad $\neq 1$ das Urbild eines rechtsseitig offenen Intervalls nicht rechtsseitig offen sein muss.

AUFGABE 66.5. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine messbare beschränkte Teilmenge. Zeige, dass $\lambda^n(T) < \infty$ ist.

AUFGABE 66.6. Es seien endlich viele linear unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ gegeben und es sei

$$P = \{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \mid a_i \in [0, 1]\}$$

das dadurch erzeugte Parallelotop. Zeige, dass P beschränkt ist.

AUFGABE 66.7. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, eine nichtleere offene Teilmenge. Zeige, dass $\lambda^n(U) > 0$ ist. Zeige ebenso, dass dies für abgeschlossene Mengen nicht gelten muss.

AUFGABE 66.8. Man gebe ein Beispiel für ein σ -endliches Maß μ auf \mathbb{R} an, das auf allen Intervallen mit positiver Länge den Wert ∞ besitzt.

AUFGABE 66.9. Es seien V und W reelle Vektorräume und

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine injektive lineare Abbildung. Zeige, dass das Bild eines Parallelotops wieder ein Parallelotop ist.

AUFGABE 66.10. Zeige, dass das Zählmaß auf den \mathbb{R}^n translationsinvariant, aber auf dem Einheitswürfel nicht beschränkt ist.

AUFGABE 66.11. Zeige, dass das Gittermaß zum Gitterabstand $\epsilon > 0$ auf den \mathbb{R}^n nicht translationsinvariant, aber auf dem Einheitswürfel beschränkt ist.

AUFGABE 66.12.*

Die Grundfläche eines Kochtopfes sei eine Kreisscheibe mit Radius 13 cm, der Topf sei 10 cm hoch und auf die Höhe von 7,7 cm mit Wasser gefüllt. Eine Kartoffel wird in den Topf geworfen und taucht voll unter, wobei das Wasser auf eine Höhe von 8,8 cm ansteigt.

- a) Berechne das Volumen der Kartoffel (rechne mit $\pi = 3,14$; Einheit nicht vergessen)!
- b) Welche maßtheoretischen Gesetzmäßigkeiten wurden bei der Berechnung von a) verwendet?
- c) Handelt es sich um eine große oder um eine kleine Kartoffel?

AUFGABE 66.13.*

Eine Bratpfanne hat einen Durchmesser von 30 cm und wird mit Öl und mit 25 kreisrunden Bratkartoffeln überschneidungsfrei bedeckt, die alle einen Durchmesser von 4 cm und eine Höhe von 0,5 cm haben. Das Öl bildet unterhalb der Bratkartoffeln einen dünnen Ölfilm von 0,1 mm Höhe und erreicht in den Zwischenräumen eine Höhe von 1 mm.

- a) Wie viel Öl befindet sich in der Pfanne (rechne mit $\pi = 3,14$; Einheit nicht vergessen)?
- b) Welche maßtheoretischen Gesetzmäßigkeiten wurden bei der Berechnung von a) verwendet?

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 66.14. (4 Punkte)

Zeige, dass sich eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}$ genau dann als eine endliche Vereinigung von rechtsseitig halboffenen Intervallen schreiben lässt, wenn dies mit endlich vielen disjunkten rechtsseitig halboffenen Intervallen möglich ist.

AUFGABE 66.15. (6 Punkte)

Es sei \mathcal{V} der Mengen-Präring aller Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}$, die sich als eine endliche Vereinigung von (rechtsseitig) halboffenen Intervallen $[a, b[$ schreiben lassen. Beweise folgende Aussagen.

- (1) Die zu V über eine Zerlegung in disjunkte halboffene Intervalle

$$V = [a_1, b_1[\uplus \dots \uplus [a_n, b_n[$$

definierte Zahl

$$\mu(V) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

ist wohldefiniert.

- (2) Durch die Zuordnung $V \mapsto \mu(V)$ wird ein Prämaß auf diesem Präring definiert.



Die Cantor-Menge ist das Endprodukt des in dieser Skizze angedeuteten Ausdünnungsprozesses.

AUFGABE 66.16. (5 (1+2+2) Punkte)

Die *Cantor-Menge* ist definiert durch

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} z_i 3^{-i} \mid z_i \in \{0, 2\} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_+ \right\}.$$

- a) Zeige, dass C überabzählbar ist.
 b) Zeige, dass C eine Borel-Menge ist.
 c) Zeige $\lambda^1(C) = 0$.

AUFGABE 66.17. (6 Punkte)

Es sei v_1, \dots, v_n eine Basis des \mathbb{R}^n . Zeige, dass das von diesen Vektoren erzeugte Parallelotop einen achsenparallelen Würfel (mit positiver Länge) enthält.

AUFGABE 66.18. (12 Punkte)

Es sei μ ein Maß auf dem \mathbb{R}^n , das für alle offenen Bällen $U(P, r)$ mit dem Borel-Lebesgue-Maß übereinstimmt. Zeige $\mu = \lambda^n$.

(Für den zweidimensionalen Fall gibt es 10 Punkte.)

AUFGABE 66.19. (6 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine offene Menge $U \subseteq [0, 1]$, deren Abschluss das Einheitsintervall ist, deren Borel-Lebesgue-Maß aber kleiner als 1 ist.