

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 3

Die Pausenaufgabe

AUFGABE 3.1. Formuliere die *binomischen Formeln* für zwei reelle Zahlen und beweise die Formeln mit Hilfe des Distributivgesetzes.

Übungsaufgaben

AUFGABE 3.2. Betrachte die ganzen Zahlen \mathbb{Z} mit der Differenz als Verknüpfung, also die Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, (a, b) \longmapsto a - b.$$

Besitzt diese Verknüpfung ein neutrales Element? Ist diese Verknüpfung assoziativ, kommutativ, gibt es zu jedem Element ein inverses Element?

AUFGABE 3.3.*

Wir betrachten auf der Menge

$$M = \{a, b, c, d\}$$

die durch die Tabelle

★	a	b	c	d
a	b	a	c	a
b	d	a	b	b
c	a	b	c	c
d	b	d	d	d

gegebene Verknüpfung \star .

(1) Berechne

$$b \star (a \star (d \star a)).$$

(2) Besitzt die Verknüpfung \star ein neutrales Element?

AUFGABE 3.4. Zeige, dass das Potenzieren auf den positiven natürlichen Zahlen, also die Zuordnung

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, (a, b) \longmapsto a^b,$$

weder kommutativ noch assoziativ ist. Besitzt diese Verknüpfung ein neutrales Element?

AUFGABE 3.5. Zeige, dass die Verknüpfung auf einer Geraden, die zwei Punkten ihren Mittelpunkt zuordnet, kommutativ, aber nicht assoziativ ist. Gibt es ein neutrales Element?

AUFGABE 3.6. Man untersuche die Verknüpfung

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, (x, y) \longmapsto \min(x, y),$$

auf Assoziativität, Kommutativität, die Existenz von einem neutralen Element und die Existenz von inversen Elementen.

AUFGABE 3.7. Wir betrachten die Menge

$$M = \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q < 1\}$$

Zeige, dass auf M durch

$$a \oplus b := \begin{cases} a + b, & \text{falls } a + b < 1, \\ a + b - 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

eine wohldefinierte Verknüpfung gegeben ist.

AUFGABE 3.8. Zeige, dass die Menge

$$M = \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q < 1\}$$

mit der in Aufgabe 3.7 definierten Verknüpfung eine kommutative Gruppe ist.

AUFGABE 3.9. Es sei M eine Menge mit einer Verknüpfung darauf, die wir als Produkt schreiben.

- (1) Wie viele sinnvollen Klammerungen gibt es für die Verknüpfung von vier Elementen?
- (2) Die Verknüpfung sei nun assoziativ. Zeige, dass das Produkt von vier Elementen nicht von irgendeiner Klammerung abhängt.

AUFGABE 3.10. Es sei M eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung darauf, die wir als \star schreiben. Zeige, dass

$$(a \star b) \star (c \star (d \star e)) = a \star ((b \star (c \star d)) \star e)$$

für beliebige $a, b, c, d, e \in M$ gilt.

AUFGABE 3.11. Es sei G eine Menge und $M = \mathfrak{P}(G)$ die zugehörige Potenzmenge. Betrachte den Durchschnitt von Teilmengen von G als eine Verknüpfung auf M . Ist diese Verknüpfung kommutativ, assoziativ, besitzt sie ein neutrales Element?

AUFGABE 3.12. Sei M die Menge der Abbildungen einer zweielementigen Menge in sich selbst, also

$$M = \{F : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\} \mid F \text{ Abbildung}\}.$$

Benenne die Elemente aus M und lege eine Wertetabelle für die Verknüpfung auf M an, die durch die Hintereinanderschaltung von Abbildungen definiert ist.

AUFGABE 3.13. Es sei S eine Menge und

$$G = \{F : S \rightarrow S \mid F \text{ bijektiv}\}.$$

Zeige, dass G mit der Hintereinanderschaltung von Abbildungen eine Gruppe ist.

AUFGABE 3.14.*

Sei G eine Gruppe. Zeige, dass

$$(x^{-1})^{-1} = x$$

für alle $x \in G$ ist.

AUFGABE 3.15. Sei G eine Gruppe und $x, y \in G$. Drücke das Inverse von xy durch die Inversen von x und y aus.

AUFGABE 3.16. Man konstruiere eine Gruppe mit drei Elementen.

AUFGABE 3.17. Sei R ein Ring und seien \spadesuit, \heartsuit und \clubsuit Elemente in R . Berechne das Produkt

$$(\spadesuit^2 - 3\heartsuit\clubsuit\heartsuit - 2\clubsuit\heartsuit^2 + 4\spadesuit\heartsuit^2) (2\spadesuit\heartsuit^3\spadesuit - \clubsuit^2\spadesuit\heartsuit\spadesuit) (1 - 3\clubsuit\heartsuit\spadesuit\clubsuit^2\heartsuit).$$

Wie lautet das Ergebnis, wenn der Ring kommutativ ist?

AUFGABE 3.18. Es sei R ein kommutativer Ring und $f, a_i, b_j \in R$. Zeige die folgenden Gleichungen:

$$\sum_{i=0}^n a_i f^i + \sum_{j=0}^m b_j f^j = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) f^k$$

und

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i f^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^m b_j f^j \right) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k f^k \text{ mit } c_k = \sum_{r=0}^k a_r b_{k-r}.$$

AUFGABE 3.19. Skizziere den Graphen der reellen Addition

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x + y,$$

und den Graphen der reellen Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x \cdot y.$$

Die folgende Aufgabe beweist man durch Induktion. Dies ist ein Beweisverfahren, das üblicherweise in der Analysis eingeführt wird. Siehe auch den Anhang zum Kurs.

AUFGABE 3.20.*

Beweise die allgemeine binomische Formel, also die Formel

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und beliebige Elemente $a, b \in K$ in einem Körper K .

AUFGABE 3.21.*

Berechne

$$(x + iy)^n.$$

AUFGABE 3.22. Es seien x, y, z, w Elemente in einem Körper, wobei z und w nicht null seien. Beweise die folgenden Bruchrechenregeln.

(1)

$$\frac{x}{1} = x,$$

(2)

$$\frac{1}{x} = x^{-1},$$

(3)

$$\frac{1}{-1} = -1,$$

$$(4) \quad \frac{0}{z} = 0,$$

$$(5) \quad \frac{z}{z} = 1,$$

$$(6) \quad \frac{x}{z} = \frac{xw}{zw},$$

$$(7) \quad \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw},$$

$$(8) \quad \frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{xw + yz}{zw}.$$

Gilt die zu (8) analoge Formel, die entsteht, wenn man die Addition mit der Multiplikation vertauscht, also

$$(x - z) \cdot (y - w) = (x + w)(y + z) - (z + w)?$$

Zeige, dass die „beliebte Formel“

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{x + y}{z + w}$$

nicht gilt.

AUFGABE 3.23. Zeige, dass in einem Körper das „umgekehrte Distributivgesetz“, also

$$a + (bc) = (a + b) \cdot (a + c),$$

nicht gilt.

AUFGABE 3.24. Beschreibe und beweise Regeln für die Addition und die Multiplikation von geraden und ungeraden ganzen Zahlen. Man definiere auf der zweielementigen Menge

$$\{G, U\}$$

eine „Addition“ und eine „Multiplikation“, die diese Regeln „repräsentieren“.

AUFGABE 3.25. Zeige, dass die einelementige Menge $\{0\}$ alle Körperaxiome erfüllt mit der einzigen Ausnahme, dass $0 = 1$ ist.

AUFGABE 3.26. Es sei K ein Körper. Zeige, dass man jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Körperelement n_K zuordnen kann, so dass 0_K das Nullelement in K und 1_K das Einselement in K ist und so dass

$$(n + 1)_K = n_K + 1_K$$

gilt. Zeige, dass diese Zuordnung die Eigenschaften

$$(n + m)_K = n_K + m_K \text{ und } (nm)_K = n_K \cdot m_K$$

besitzt.

Erweitere diese Zuordnung auf die ganzen Zahlen \mathbb{Z} und zeige, dass die angeführten strukturellen Eigenschaften ebenfalls gelten.

AUFGABE 3.27. Es sei K ein Körper mit $2 \neq 0$. Zeige, dass für $f, g \in K$ die Beziehung

$$fg = \frac{1}{4} ((f + g)^2 - (f - g)^2)$$

gilt.

AUFGABE 3.28. Sei R ein Ring und M eine Menge. Definiere auf der Abbildungsmenge

$$A = \{f : M \rightarrow R \mid f \text{ Abbildung}\}$$

eine Ringstruktur.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 3.29. (2 Punkte)

Man untersuche die Verknüpfung

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, (x, y) \longmapsto \max(x, y),$$

auf Assoziativität, Kommutativität, die Existenz von einem neutralen Element und die Existenz von inversen Elementen.

AUFGABE 3.30. (3 Punkte)

Sei M eine Menge. Zeige, dass die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ mit dem Durchschnitt \cap als Multiplikation und der symmetrischen Differenz

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

als Addition (mit welchen neutralen Elementen?) ein kommutativer Ring ist.

AUFGABE 3.31. (2 Punkte)

Zeige für einen Körper K die folgenden Eigenschaften.

(1) Für jedes $a \in K$ ist die Abbildung

$$\alpha_a: K \longrightarrow K, x \longmapsto x + a,$$

bijektiv.

(2) Für jedes $b \in K, b \neq 0$, ist die Abbildung

$$\mu_b: K \longrightarrow K, x \longmapsto bx,$$

bijektiv.

AUFGABE 3.32. (3 Punkte)

Zeige, dass die „Rechenregel“

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

bei $a, c \in \mathbb{N}_+$ (und $b, d, b+d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) niemals gilt. Man gebe ein Beispiel mit $a, b, c, d, b+d \neq 0$, wo diese Regel gilt.

AUFGABE 3.33. (6 Punkte)

Beweise das allgemeine Distributivgesetz für einen Körper.

AUFGABE 3.34. (4 Punkte)

Wir betrachten die Menge

$$K = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

mit den beiden ausgezeichneten Elementen

$$0 = (0, 0) \text{ und } 1 = (1, 0),$$

der Addition

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

und der Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Zeige, dass K mit diesen Operationen ein Körper ist.