

Lineare Algebra

Arbeitsblatt 19

Die Pausenaufgabe

AUFGABE 19.1. Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K . Wie lautet das Ergebnis der Division mit Rest, wenn man ein Polynom P durch X^m teilt?

Übungsaufgaben

AUFGABE 19.2. Berechne das Polynom

$(3X^2 - 5X + 4) \cdot (X^3 - 6X^2 + 1) - (4X^3 + 2X^2 - 2X + 3) \cdot (-2X^2 - 5X)$
im Polynomring $\mathbb{Q}[X]$.

AUFGABE 19.3. Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt

$$((4 + i)X^2 - 3X + 9i) \cdot ((-3 + 7i)X^2 + (2 + 2i)X - 1 + 6i).$$

AUFGABE 19.4.*

Zeige, dass der Polynomring $K[X]$ über einem Körper K ein kommutativer Ring ist.

AUFGABE 19.5.*

Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K . Zeige, dass der Grad folgende Eigenschaften erfüllt.

$$(1) \quad \text{grad}(P + Q) \leq \max\{\text{grad}(P), \text{grad}(Q)\},$$

$$(2) \quad \text{grad}(P \cdot Q) = \text{grad}(P) + \text{grad}(Q).$$

AUFGABE 19.6. Zeige, dass in einem Polynomring über einem Körper K gilt: Wenn $P, Q \in K[X]$ beide ungleich 0 sind, so ist auch $PQ \neq 0$.

2

AUFGABE 19.7. Berechne das Ergebnis, wenn man im Polynom

$$2X^3 - 5X^2 - 4X + 7$$

die Variable X durch die komplexe Zahl $2 - 5i$ ersetzt.

AUFGABE 19.8.*

Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K . Es sei $a \in K$. Zeige, dass die Einsetzungsabbildung, also die Zuordnung

$$\psi: K[X] \longrightarrow K, P \longmapsto P(a),$$

folgende Eigenschaften erfüllt (dabei seien $P, Q \in K[X]$).

- (1) $(P + Q)(a) = P(a) + Q(a)$.
- (2) $(P \cdot Q)(a) = P(a) \cdot Q(a)$.
- (3) $1(a) = 1$.

AUFGABE 19.9. Schreibe das Polynom

$$X^3 + 2X^2 - 3X + 4$$

in der neuen Variablen $U = X + 2$.

AUFGABE 19.10.*

Es seien die beiden komplexen Polynome

$$P = X^3 - 2iX^2 + 4X - 1 \text{ und } Q = iX - 3 + 2i$$

gegeben. Berechne $P(Q)$ (es soll also Q in P eingesetzt werden).

AUFGABE 19.11. Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „ P durch T “ für die beiden Polynome $P = 3X^4 + 7X^2 - 2X + 5$ und $T = 2X^2 + 3X - 1$ durch.

Der Körper $\mathbb{Z}/(7)$ wurde in Beispiel 3.9 vorgestellt.

AUFGABE 19.12. Führe in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ die Division mit Rest „ P durch T “ für die beiden Polynome $P = 5X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 3X + 6$ und $T = 3X^2 + 6X + 4$ durch.

In den folgenden Aufgaben geht es um die Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

AUFGABE 19.13. Löse die quadratische Gleichung $3x^2 - 6x + 2 = 0$ über \mathbb{R} .

AUFGABE 19.14. Löse die reelle quadratische Gleichung $\frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{7}x - \frac{4}{5} = 0$ durch quadratisches Ergänzen.

AUFGABE 19.15.*

Beweise die Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

AUFGABE 19.16.*

Von einem Rechteck sind der Umfang U und die Fläche A bekannt. Bestimme die Längen der Seiten des Rechtecks.

AUFGABE 19.17.*

Bestimme den minimalen Wert der reellen Funktion

$$f(x) = x^2 - 3x + \frac{4}{3}.$$

Analytische Konzepte wie die Ableitung sollen nicht verwendet werden.

AUFGABE 19.18. Löse die biquadratische Gleichung $x^4 + 7x^2 - 11 = 0$ über \mathbb{R} .

AUFGABE 19.19.*

Bestimme die x -Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der beiden reellen Polynome

$$P = X^3 + 4X^2 - 7X + 1$$

und

$$Q = X^3 - 2X^2 + 5X + 3.$$

AUFGABE 19.20. Beweise die Formel

$$X^n - 1 = (X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + X^{n-3} + \cdots + X^2 + X + 1).$$

AUFGABE 19.21.*

Man bestimme sämtliche komplexen Nullstellen des Polynoms

$$X^3 - 1$$

und man gebe die Primfaktorzerlegung von diesem Polynom in $\mathbb{R}[X]$ und in $\mathbb{C}[X]$ an.

AUFGABE 19.22. Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und sei $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von P . Zeige, dass dann auch die konjugiert-komplexe Zahl \bar{z} eine Nullstelle von P ist.

AUFGABE 19.23. Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K . Zeige, dass jedes Polynom $P \in K[X]$, $P \neq 0$, eine Produktzerlegung

$$P = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k} \cdot Q$$

mit $\mu_j \geq 1$ und einem nullstellenfreien Polynom Q besitzt, wobei die auftretenden verschiedenen Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ und die zugehörigen Exponenten μ_1, \dots, μ_k bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind.

AUFGABE 19.24.*

Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K . Es sei $P = X^n \in K[X]$ mit $n \geq 1$. Zeige, dass sämtliche normierten Teiler von P die Form X^k , $1 \leq k \leq n$, besitzen.

AUFGABE 19.25.*

Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K und sei $P \in K[X]$ ein Polynom, das eine Zerlegung in Linearfaktoren besitze. Es sei T ein Teiler von P . Zeige, dass T ebenfalls eine Zerlegung in Linearfaktoren besitzt, wobei die Vielfachheit eines Linearfaktors $X - a$ in T durch seine Vielfachheit in P beschränkt ist.

AUFGABE 19.26. Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom vom Grad $d \geq 1$, $P \neq X$. Zeige, dass P maximal d Fixpunkte besitzt.

AUFGABE 19.27.*

Es seien P und Q verschiedene normierte Polynome vom Grad d über einem Körper K . Wie viele Schnittpunkte besitzen die beiden Graphen maximal?

AUFGABE 19.28.*

Zeige, dass es zu ganzen Zahlen d, n mit $d > 0$ eindeutig bestimmte ganze Zahlen q, r mit $0 \leq r < d$ und mit

$$n = dq + r$$

gibt.

AUFGABE 19.29. Es sei $F \in \mathbb{C}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass F in Linearfaktoren zerfällt.

AUFGABE 19.30.*

Es sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto P(z),$$

surjektiv ist.

AUFGABE 19.31. Es sei $K[X]$ der Polynomring über einem Körper K . Zeige, dass die Menge

$$\left\{ \frac{P}{Q} \mid P, Q \in K[X], Q \neq 0 \right\},$$

wobei zwei Brüche $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P'}{Q'}$ genau dann als gleich gelten, wenn $PQ' = P'Q$ ist, mit einer geeigneten Addition und Multiplikation ein Körper ist.

AUFGABE 19.32. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung von zwei rationalen Funktionen wieder rational ist.

AUFGABE 19.33. Berechne die Hintereinanderschaltungen $f \circ g$ und $g \circ f$ der beiden rationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 3}{x - 2} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 4}.$$

AUFGABE 19.34.*

Es seien

$$f, g, h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen.

a) Zeige die Gleichheit

$$(h \cdot g) \circ f = (h \circ f) \cdot (g \circ f).$$

b) Zeige durch ein Beispiel, dass die Gleichheit

$$(h \circ g) \cdot f = (h \cdot f) \circ (g \cdot f)$$

nicht gelten muss.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 19.35. (3 Punkte)

Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt

$$((4 + i)X^3 - iX^2 + 2X + 3 + 2i) \cdot ((2 - i)X^3 + (3 - 5i)X^2 + (2 + i)X + 1 + 5i).$$

AUFGABE 19.36. (4 Punkte)

Führe in $\mathbb{C}[X]$ die Division mit Rest „ P durch T “ für die beiden Polynome $P = (5 + i)X^4 + iX^2 + (3 - 2i)X - 1$ und $T = X^2 + iX + 3 - i$ durch.

AUFGABE 19.37. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ die Division mit Rest „ P durch T “ für die beiden Polynome $P = 6X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2X + 5$ und $T = 5X^2 + 3X + 2$ durch.

AUFGABE 19.38. (2 Punkte)

Beweise die Formel

$$X^u + 1 = (X + 1)(X^{u-1} - X^{u-2} + X^{u-3} - \dots + X^2 - X + 1)$$

für u ungerade.

AUFGABE 19.39. (3 Punkte)

Bestimme die x -Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der beiden reellen Polynome

$$P = X^3 + 8X^2 - 8X + 3$$

und

$$Q = X^3 - 5X^2 + 4X + 7.$$

AUFGABE 19.40. (4 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeige, dass man P als ein Produkt von reellen Polynomen vom Grad 1 oder 2 schreiben kann.

Die Aufgabe zum Aufgeben

AUFGABE 19.41. Zwei Personen A und B spielen Polynome-Erraten. Dabei denkt sich A ein Polynom $P(x)$ aus, wobei alle Koeffizienten aus \mathbb{N} sein müssen. Person B darf fragen, was der Wert $P(n_1), P(n_2), \dots, P(n_r)$ zu gewissen natürlichen Zahlen n_1, n_2, \dots, n_r ist. Dabei darf B diese Zahlen beliebig wählen und dabei auch vorhergehende Antworten berücksichtigen. Ziel ist es, das Polynom zu erschließen. Entwickle eine Fragestrategie für B , die immer zur Lösung führt und bei der die Anzahl der Fragen (unabhängig vom Polynom) beschränkt ist.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 9
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9