Maß- und Integrationstheorie

Arbeitsblatt 3

Übungsaufgaben

AUFGABE 3.1. Es sei $W = [0,1[^n$ der halboffene Einheitswürfel im $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ und das zugehörige Gittermaß $\mu_{\frac{1}{k}}$ die Beziehung

$$\mu_{\frac{1}{k}}(W) = 1$$

gilt.

AUFGABE 3.2. Wir betrachten die Menge $T = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, und zu jedem $\epsilon > 0$ das zugehörige Gittermaß μ_ϵ. Zeige, dass

$$\lim_{k \to \infty} \mu_{\frac{1}{k}}(T)$$

existiert, dass aber

$$\lim\nolimits_{\epsilon \to 0} \mu_\epsilon(T)$$

nicht existiert.

AUFGABE 3.3.*

Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $T_i \subseteq M$, $i = 1, \ldots, n$, messbare Teilmengen mit $\mu(T_i) < \infty$. Für eine Teilmenge $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ sei

$$T_J = \bigcap_{i \in J} T_i .$$

Beweise die Formel

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n T_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\sum_{J \subseteq \{1,\ldots,n\},\, \#(J) = k} \mu(T_J) \right).$$

AUFGABE 3.4. Es sei

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine streng wachsende Funktion. Zu $k \in \mathbb{N}_+$ betrachten wir die äquidistante Unterteilung des Einheitsintervalls in k gleichlange Teilintervalle und die zugehörige maximale untere Treppenfunktion s_k von f und die zugehörige minimale obere Treppenfunktion t_k. Es seien S_k bzw. T_k die zugehörigen Subgraphen.

a) Zeige, dass im Allgemeinen S_k, $k \in \mathbb{N}_+$, keine Ausschöpfung und T_k, $k \in \mathbb{N}_+$, keine Schrumpfung ist.

b) Zeige, dass S_{2^n}, $n \in \mathbb{N}_+$, eine Ausschöpfung und T_{2^n}, $n \in \mathbb{N}_+$, eine Schrumpfung ist.

c) Welche Mengen werden in (b) ausgeschöpft bzw. geschrumpft, und wie verhalten sich diese Mengen zum Subgraphen von f?

d) Wogegen konvergieren die zugehörigen Folgen von Treppenintegrale?

Aufgabe 3.5. Man zeige durch ein Beispiel, dass die „Schrumpfungsformel" aus Lemma 3.4 (6) nicht ohne die Endlichkeitsvoraussetzung gilt.

Aufgabe 3.6. Wo geht in den Beweis zu Satz 3.7 die Endlichkeit der M_n ein?

Aufgabe 3.7. Zeige durch ein Beispiel, dass Satz 3.7 ohne die Voraussetzung, dass es eine Ausschöpfung mit endlichem Maß gibt, nicht gilt.

Aufgabe 3.8. Es sei X ein topologischer Raum und $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine Überdeckung aus offenen Mengen, wobei I abzählbar sei. Zeige folgende Aussagen.

a) Eine Teilmenge $T \subseteq X$ ist genau dann eine Borelmenge, wenn $T \cap U_i$ eine Borelmenge ist für jedes $i \in I$.

b) Ein σ-endliches Maß μ ist durch die Einschränkungen $\mu_i = \mu|_{U_i}$ eindeutig bestimmt.

c) Es sei für jedes $i \in I$ ein σ-endliches Maß μ_i auf U_i gegeben. Für jedes Paar $i, j \in I$ sei

$$\mu_i|_{U_i \cap U_j} = \mu_j|_{U_i \cap U_j}.$$

Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes σ-endliches Maß auf X mit $\mu|_{U_i} = \mu_i$.

Aufgabe 3.9. Es sei

$$\beta \colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine Belegungsfunktion mit dem zugehörigen Summationsmaß μ. Es sei

$$T = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \beta(x) > 0\}.$$

Zeige, dass μ genau dann σ-endlich ist, wenn T abzählbar ist.

Aufgabe 3.10. Es sei

$$\beta\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

eine Belegungsfunktion mit dem zugehörigen Summationsmaß μ. Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^k$ sei die Bedingung $\sum_{n=0}^{\infty} \beta(x_n) < \infty$ erfüllt. Zeige, dass μ σ-endlich ist.

Aufgabe 3.11. Zeige, dass das Bildmaß eines Maßes unter einer messbaren Abbildung in der Tat ein Maß ist.

Aufgabe 3.12. Es seien $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ und $(S, \mathcal{C})$ Messräume und

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

und

$$\psi\colon N \longrightarrow S$$

messbare Abbildungen. Es sei μ ein Maß auf M. Zeige, dass für die Bildmaße die Beziehung

$$(\psi \circ \varphi)_* \mu = \psi_*(\varphi_* \mu)$$

gilt.

Aufgabe 3.13. Es seien M und N Messräume und es sei

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

eine messbare Abbildung. Es sei δ_x das im Punkt $x \in M$ konzentrierte Dirac-Maß. Zeige $\varphi_*(\delta_x) = \delta_{\varphi(x)}$.

Aufgabe 3.14. Es seien M und N Messräume und es sei

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

eine messbare Abbildung. Es sei

$$\beta\colon M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

eine Belegungsfunktion mit dem zugehörigen Summationsmaß μ. Zeige, dass das Bildmaß $\varphi_* \mu$ ebenfalls ein Summationsmaß ist und bestimme die zugehörige Belegungsfunktion.

Aufgabe 3.15.*

Es sei
$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1,\, y \geq 0\right\}$$
der obere Einheitshalbkreis und
$$p\colon\, M \longrightarrow [-1,1],\, (x,y) \longmapsto x,$$
die Projektion auf die x-Achse. Zu $n \in \mathbb{N}$ seien $n+1$ Punkte auf M gleichverteilt in dem Sinne, dass $(1,0)$ und $(-1,0)$ dazugehören und dass der Winkel zwischen zwei benachbarten Punkten konstant ist.

a) Skizziere die Situation für $n = 7$ einschließlich der Bildpunkte unter p.

b) Es sei μ_n das Zählmaß auf M, bei dem jeder Punkt der Verteilung den Wert 1 erhält und es sei
$$\nu_n = p_*\mu_n$$
das zugehörige Bildmaß auf $[-1,1]$. Man gebe eine Formel für
$$\nu_n([t,1])$$
($t \in [-1,1]$) mit Hilfe des Arkuskosinus an.

c) Bestimme
$$\lim_{n\to\infty} \nu_n([1-\frac{2}{n},1])\,.$$

Aufgabe 3.16. Es seien X und Y topologische Räume. Zeige, dass die Produkttopologie auf $X \times Y$ die kleinste Topologie ist, bezüglich der die beiden Projektionen $X \times Y \to X$ und $X \times Y \to Y$ stetig sind.

Aufgabe 3.17.*

Es sei X ein Hausdorff-Raum. Zeige, dass die Diagonale
$$\triangle = \{(x,y) \in X \times X \mid x = y\}$$
eine abgeschlossene Teilmenge im Produktraum $X \times X$ ist.

Aufgabe 3.18. Es seien X, Y, Z topologische Räume und
$$f\colon\, X \longrightarrow Y$$
und
$$g\colon\, X \longrightarrow Z$$
stetige Abbildungen. Zeige, dass die Abbildung
$$(f,g)\colon\, X \longrightarrow Y \times Z,\, x \longmapsto (f(x),g(x)),$$
ebenfalls stetig ist.

Es sei M eine Menge. Unter der *diskreten Topologie* auf M versteht man diejenige Topologie, bei der jede Teilmenge $T \subseteq M$ offen ist.

Aufgabe 3.19. Es seien X und Y diskrete topologische Räume. Zeige, dass auch der Produktraum diskret ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 3.20. (2 Punkte)

Bestimme die Belegungsfunktion zum Gittermaß zum Gitterabstand $\epsilon > 0$ im $\mathbb{R}^n$.

Eine *Äquivalenzrelation* auf einer Menge M ist eine Relation $R \subseteq M \times M$, die die folgenden drei Eigenschaften besitzt (für beliebige $x, y, z \in M$).

(1) Es ist $x \sim x$ (*reflexiv*).
(2) Aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$ (*symmetrisch*).
(3) Aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$ (*transitiv*).

Dabei bedeutet $x \sim y$, dass das Paar (x, y) zu R gehört.

Aufgabe 3.21. (3 Punkte)

Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(N, \mathcal{B})$ ein Messraum und C die Menge der messbaren Abbildungen von M nach N. Für $f, g \in C$ sei

$$f \sim g, \text{ falls } \mu(\{x \in M \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

(dabei sei vorausgesetzt, dass diese Mengen messbar seien). Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 3.22. (6 Punkte)

Wir betrachten die abgeschlossene Kreisscheibe

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Zeige, dass

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mu_\epsilon(S) = \pi,$$

wobei μ_ϵ das Gittermaß zu $\epsilon > 0$ bezeichnet.

(Man denke an das Riemann-Integral.)

Aufgabe 3.23. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen σ-endlichen Maßraum $(M, \mathcal{A}, \mu)$ und eine messbare Abbildung

$$\varphi\colon\ M \longrightarrow N$$

in einen Messraum N derart, dass das Bildmaß $\varphi_*\mu$ nicht σ-endlich ist.

Aufgabe 3.24. (4 Punkte)

Es seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume. Zeige, dass auf der Produktmenge $M_1 \times M_2$ durch

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}$$

eine Metrik gegeben ist, und dass die dadurch definierte Topologie mit der Produkttopologie übereinstimmt.

Abbildungsverzeichnis