②

*0046386000*

0046386-000

特２２３－８４５

# 高等平面三角法問題詳解

山名真直・著

池田岩平

昭和３

AHF

この著作物は、著作権者不明のため、著作権法
第６７条の規定に基づき、平成１２年３月２３日
付けで文化庁長官の裁定を受け使用するものです。

318
783

受驗參考

# 高等平面三角法

問題詳解

1990

山名眞直著

（昭和三年）

特223
845

受驗參考

# 高等平面三角法

問題詳解

山名眞直著

昭和三・一・〇・三・〇・四・

# 受驗參考
# 高等平面三角法問題詳解

## 目次


第一編　三角函數 …… 頁

第一章　正弦ニ關スル定理 …… 1
　　問題例解 …… 1

第二章　餘弦ニ關スル定理 …… 3
　　問題例解 …… 4

第三章　正割．餘割ニ關スル定理 …… 6
　　問題例解 …… 6

第四章　三角函數間ノ關係公式 …… 7
　　問題例解 …… 10

第五章　相等シキ正弦ヲ有スル角ノ關係 …… 14
　　問題例解 …… 15

第六章　三角函數ノ一ツヲ以テ
　　他ヲ表ハスコト …… 22
　　問題例解 …… 23

第二編　和角．差角．倍角．
　　分角ノ三角函數

第七章　正弦餘弦ノ加法減法定理 …… 42
　　正切餘切ノ加法減法定理 …… 42

問題例解 ……43

第八章 三ツノ角ノ和ノ三角函数……49

第九章 角ノ乗法公式（其一）……49

問題例解……50

第十章 角ノ乗法公式（其二）……57

問題例解……58

第十一章 正弦餘弦ノ積ヲ和ニ

和ヲ積ニ変ズル公式……63

問題例解……64

第十二章 等差級数ヲナス角ノ

正弦餘弦ノ和ノ公式……78

問題例解……74

第十三章 角ノ除法公式……83

問題例解……88

第十四章 逆三角函数ノ関係公式……94

問題例解……95

雑題……103

附録 試験問題集……137


# 高等平面三角法

## 第一編

## 三角函数

### 1. 定理

正弦ハ+1ヨリ大ナルコトナク又-1ヨリ小ナルコトナシ即正弦ノ絶對値ハ1ヨリ大ナルコトナシ.

$-1 \leqq \sin x \leqq +1$，即 $\sin^2 x \leqq 1$

系.

一ツノ数ガ角ノ正弦トナリ得ルタメニ必要ニシテ且十分ナル要件ハ其絶對値ガ1ヨリ大ナラザルコトナリ.

### 問題

(1) $\sin\alpha = x + \frac{1}{x}$ ハ成立タズ

原式ノ両辺ヲ平方シテ

$\sin^2\alpha = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$

然ルニ定理ニヨリテ $\sin^2\alpha \equiv 1$

右辺 $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ ハ $x$ ノ値ニ拘ラズ恒ニ2ヨリ大，即 $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} > 2$

故ニ等式ハ成立タズ.

(2). $\frac{2\sin\theta + 1}{2\sin\theta - 1}$ ハ3ト $\frac{1}{3}$ トノ間ノ値ヲ採ル能ハズ

原式ヲ $x$ ニ等シト置キテ $\sin\theta$ ノ値ヲ求ムレバ

(39年)、

$$\frac{2\sin\theta+1}{2\sin\theta-1} = x$$

$$2\sin\theta+1 = 2x\sin\theta - x$$

$$2(1-x)\sin\theta = -(x+1)$$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{x+1}{2(x-1)}$$

コノ式ノ右辺ガ正弦ノ値トナリ得ルタメニハ系ニヨリテ其絶対値ガ1ヨリ大ナラザルコトナリ

即

$$\left\{\frac{x+1}{2(x-1)}\right\}^2 \leqq 1$$

$$(x+1)^2 \leqq 4(x-1)^2$$

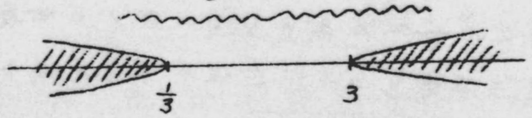
$$x^2+2x+1 \leqq 4x^2-8x+4$$

$3x^2-10x+3 \geqq 0$ ナルコトヲ要ス.

$$(3x-1)(x-3) \geqq 0$$

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-3) \geqq 0$$ 次ハ二根ノ外ニアリ.

$x \leqq \frac{1}{3}$ 或 $3 \leqq x$




注意(1). 二次三項式ノ性質ニヨリ $x^2$ ノ係数ト式ノ値トガ同符号ナルヲ以テ $x$ ハ二次三項式 $3x^2-10x+3$ ヲ0ニ等シト置キテ得ベキ二次方程式ノ二根3及$\frac{1}{3}$ノ外ニ在リ即換言スレバ $x$ ハ3ト$\frac{1}{3}$トノ間ノ値ヲ採ル能ハズ.

注意(2). 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ガ相異ナル実根



ヲ有スルトキ即根ノ判別式 $D=b^2-4ac>0$ ナルトキ左辺ノ二次三項式 $ax^2+bx+c$ ガ $x^2$ ノ係数 $a$ ト同符号ノ値ヲ有スルトキハ $x$ ハ此方程式ノ二根 $x'$, $x''$ ノ小ナル方ヨリモ小ナルカ或ハ其大ナル方ヨリモ大ナリ, 即 $x$ ハ二根ノ外ニ在リ.

而シテ式ノ値 $ax^2+bx+c$ ガ $a$ 即 $x^2$ ノ係数ト異符号ナルトキハ $x$ ハ此方程式ノ二根ノ間ニアリ.

注意(2)ハ二次三項式ノ性質ニ関スル定理ニシテ此等ニ関スル詳細ナル事項ハ林鶴一著方程式第壹64頁(二次式ノ値ニ就テ)以下ヲ参照スベシ.

## 2. 定理.

余弦ニモ其値ニツキテ正弦ト同一ノ制限アリ即

$$\boxed{-1 \leqq \cos x \leqq +1}$$

系.

一ツノ数ガ角ノ余弦トナリ得ルタメニ必要ニシテ且十分ナル要件ハ其絶対値ガ1ヨリ大ナラザルコトナリ. $\boxed{\cos^2 x \leqq 1}$

要項

角 $x$ ガ $0°$ ヨリ $\frac{\pi}{2}$ マデ増セバ $\cos x$ ハ1ヨリ減ジテ0ニ達ス, $x$ ガ $\frac{\pi}{2}$ ヨリ $\pi$ マデ増セバ $\cos x$ ハ0ヨリ$-1$マデ減少ス. $x$ ガ $\pi$ ヨリ $\frac{3\pi}{2}$ マデ増セバ $\cos x$ ハ$-1$ヨリ0マデ増シ, $x$ ガ $\frac{3\pi}{2}$ ヨリ $2\pi$ マデ増

セバ $\cos x$ ハ 0 ヨリ 1 マデ増ス、故ニ鋭弦ハ角ノ増加ニツレテ第一、第二象限デハ減少シ第三、第四象限デハ増加ス。

## 問　題

(1). $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ナルコトヲ知リテ $0^\circ$ ト $360^\circ$ トノ間ニテ $2\cos\theta - 1$ ガ負トナル様ニ $\theta$ ノ範囲ヲ定メヨ。

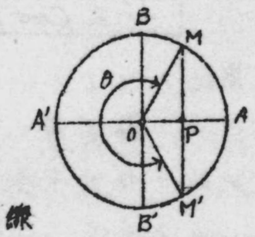
要ヘラレタ式ヲ負ト置イテ $\theta$ ノ範囲ヲ求ムレバ

$$2\cos\theta - 1 < 0$$

$$\therefore \quad \cos\theta < \frac{1}{2}$$

此式ニ適スル $\theta$ ノ範囲ヲ探スニ $\theta$ ガ $60^\circ$ ナル時ニ $\cos\theta = \frac{1}{2}$ トナリ $\theta$ ガ $60^\circ$ ヨリ増セバ要項ニヨリテ $\cos\theta$ ノ値ハ $\frac{1}{2}$ ヨリ減少シ、$\theta$ ガ $300^\circ$ ナル時 $\cos\theta = \frac{1}{2}$ トナリ、$\theta$ ガ $300^\circ$ ヨリ増セバ $\cos\theta$ ノ値ハ $\frac{1}{2}$ ヨリ大トナル、故ニ上式ニ適スル $\theta$ ノ範囲ハ従テ所要ノ答ハ

$$60^\circ < \theta < 300^\circ$$




注意. 図ニ於テ $\overline{OA} = 1$

$\overline{OA}$ ノ中点 P ニ於テ $\overline{OA}$ ニ垂線 $\overline{MM'}$ ヲ作レバ、$\overline{OP} = \frac{1}{2}$、従テ動径 $\overline{OM}$ ハ $60^\circ$ ヲ表ハシ $\overline{OM'}$ ハ $300^\circ$ ヲ表ハス

故ニ所要 $\theta$ ノ値ハ矢ニテ示セリ範囲ナリ。

(2) $\frac{2m}{1+m^2}$ ガ角ノ鋭弦トナリ得ルタメニ $m$ ニ如何ナル範囲ノ値ヲ与フベキカ。



茲ニヨリテ $\left(\frac{2m}{m^2+1}\right)^2 \leqq 1$ ナルコトヲ要ス。

$$4m^2 \leqq m^2 + 2m + 1$$

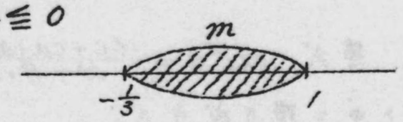
$$3m^2 - 2m - 1 \leqq 0$$

二次三項式、性質ニヨリ $m^2$ 係数ヲト式ノ値トガ異符号ナルヲ以テ前題注意(2)ニヨリテ $m$ ハ二根ノ間ニアリ。

$$(3m+1)(m-1) \leqq 0$$

$$\left\{m-\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}\{m-1\} \leqq 0$$

$$-\frac{1}{3} \leqq m \leqq 1$$




## 類　題

(1). $\frac{2\cos\theta+1}{2\cos\theta-1}$ ハ 3 ト $\frac{1}{3}$ トノ間ノ値ヲ有セザルコトヲ證セヨ。

1 頁(2)ト同様ニシテ證セヨ。

(2). $\sec\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ ナル等式ハ $x$ ノ如何ナル値ニ於テ成立スルカ。

$\sec\theta$ ノ絶対値ハ恒ニ 1 ヨリ大ナリ、然ルニ $2x^2 > 1-1$、即 $1+x^2 > 1-x^2$ ニシテ $1+x^2$ ハ恒ニ正ナル故 $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ ノ絶対値ハ $x=0$ ナルトキノ外ハ 1 ヨリ小ナリ。故ニ所題ノ等式ハ $x=0$ ナル時ニノミ成立ス。

(3). $\sec^2\theta = \frac{4xy}{(x+y)^2}$ ハ唯 $x=y$ ナル時ニノミ成立ス。

$$\sec^2\theta = \frac{4xy}{(x+y)^2} = \frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x+y)^2},$$

然ルニ $\sec^2\theta \geqq 1$ ニシテ $\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x+y)^2}$ ハ $x-y=0$

ナルトキノ外ハノヨリ小ニシテ $x-y=0$ ナル内ハノニ等シ、故ニ題言ノ如シ。

3. 定理.

正割及餘割ハ+1ト-1トノ間ニアル値ヲ採ル能ハズ即其絶対値ハ1ヨリモ小ナル能ハズ.

$\sec^2\theta \geqq 1$　　$\operatorname{cosec}^2\theta \geqq 1$

問題

(1). 等式 $\sec^2\theta = \frac{bc+ca+ab}{a^2+b^2+c^2}$ ハ $a=b=c$ ナルトキニ限リ成立ス.

原式ノ右辺ヨリ1ヲ減ジテ

$$\frac{bc+ca+ab}{a^2+b^2+c} - 1 = \frac{bc+ca+ab-a^2-b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

分母子ヲ2倍シテ整頓スレバ

$$= \frac{-(b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2+a^2-2ab+b^2)}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

$$= \frac{-[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2]}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

此式ハ $a=b=c$ ナルニ従テ分子ガ0ナルトキノ外ハ負トナル、故ニ

$\frac{bc+ca+ab}{a^2+b^2+c^2} - 1 < 0$　即 $\frac{bc+ca+ab}{a^2+b^2+c^2} < 1$.

トナリテ成立セズ.

又 $a=b=c$ ナルトキ此式ハ0トナリ従テ

$\frac{bc+ca+ab}{a^2+b^2+c^2} - 1 = 0$　即 $\frac{bc+ca+ab}{a^2+b^2+c^2} = 1$

故ニ定理ニヨリテ原式ハ

$$a=b=c$$

ナルトキニ限リ成立ス.



(2). $\frac{4ab}{(a+b)^2} = \operatorname{cosec}^2\theta$ ガ成立スルタメノ要件ヲ求ム.

所要ノ要件ハ原式ガ成立スルト假定シテ得タル終結式ナリ.

$\therefore \frac{4ab}{(a+b)^2} \geqq 1$

$\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a+b)^2} \geqq 1$

此式ガ成立スルタメニハ $(a-b)^2=0$ 即 $a=b$,

$a \neq b$ ナラバ

$\frac{4ab}{(a+b)^2} < 1$　トナリテ成立セズ.

逆ニ　$a=b$ ナラバ

$\frac{4a^2}{(2a)^2} = \frac{4a^2}{4a^2} = 1 = \operatorname{cosec}^2\theta$

トナリテ原式ハ満足サルベシ、故ニ所要ノ要件ハ

$$\underline{a=b}$$

4. 三角函数間ノ関係公式

$\sin^2x + \cos^2x = 1$

$\sin^2x = 1-\cos^2x$　$\therefore \sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2x}$.

$\cos^2x = 1-\sin^2x$　$\therefore \cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2x}$.

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$　$\therefore \cos x \cdot \sec x = 1$.

$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$　$\therefore \sin x \cdot \operatorname{cosec} x = 1$.

$\tan x \cdot \cot x = 1$　$\therefore \tan x = \frac{1}{\cot x}$

$1+tg^2x=\sec^2x \qquad \therefore \sec x=\pm\sqrt{1+tg^2x}$

$1+\cot^2x=\operatorname{cosec}^2x \qquad \therefore \operatorname{cosec} x=\pm\sqrt{1+\cot^2x}$

差が$2\pi$ノ整数倍ニ等シキ二角ノ三角函数ノ公式.

$\sin(2n\pi+x)=\sin x.$

$\cos(2n\pi+x)=\cos x.$

$tg(2n\pi+x)=tg\,x.$

絶対値相等シク符号ヲ異ニスル二角ノ三角函数ノ公式.

$\sin(-x)=-\sin x$

$\cos(-x)=\cos x.$

$tg(-x)=-tg\,x.$

$\cot(-x)=-\cot x.$

$\sec(-x)=\sec x.$

$\operatorname{Cosec}(-x)=-\operatorname{Cosec} x.$

差が$\frac{\pi}{2}$ニ等シキ二角ノ三角函数ノ公式.

$\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos x.$

$\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x.$

$tg(\frac{\pi}{2}+x)=-\cot x.$

$\cot(\frac{\pi}{2}+x)=-tg\,x.$

互ニ余角ヲナス二角ノ三角函数ノ公式



$\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x.$

$\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x.$

$tg(\frac{\pi}{2}-x)=\cot x.$

$\cot(\frac{\pi}{2}-x)=tg\,x.$

$\sin x$ヲ餘弦ニ直シ, $\cos x$ヲ正弦ニ直ス公式.

$\sin x=\cos(\frac{\pi}{2}-x)=-\cos(\frac{\pi}{2}+x).$

$\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(\frac{\pi}{2}+x).$

互ニ補角ヲナス二角ノ三角函数ノ公式.

$\sin(\pi-x)=\sin x.$

$\cos(\pi-x)=-\cos x.$

$tg(\pi-x)=-tg\,x.$

$\cot(\pi-x)=-\cot x.$

差が$\pi$ニ等シキ二角ノ三角函数ノ公式.

$\sin(\pi+x)=-\sin x.$

$\cos(\pi+x)=-\cos x.$

$tg(\pi+x)=tg\,x.$

$\cot(\pi+x)=\cot x.$

## 問題

(1). $\alpha-\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}+\alpha$, $\frac{3\pi}{2}-\alpha$. ノ三角函数ヲ$\alpha$ノ三角函数ニテ表ハセ.

(1). $\alpha - \frac{\pi}{2}$.

$\sin(\alpha-\frac{\pi}{2}) = \sin\{-(\frac{\pi}{2}-\alpha)\} = -\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \underline{-\cos\alpha}$

$\cos(\alpha-\frac{\pi}{2}) = \cos\{-(\frac{\pi}{2}-\alpha)\} = \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \underline{\sin\alpha}$

$\tan(\alpha-\frac{\pi}{2}) = \tan\{-(\frac{\pi}{2}-\alpha)\} = -\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \underline{-\cot\alpha}$

$\cot(\alpha-\frac{\pi}{2}) = \cot\{-(\frac{\pi}{2}-\alpha)\} = -\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \underline{-\tan\alpha}$

(ロ). $\frac{3\pi}{2}+\alpha$

一角 $=2\pi$，整数倍ヲ増減スルモ三角函数ニハ変化ナシ.

$\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha) = \sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha-2\pi) = \sin\{-(\frac{\pi}{2}-\alpha)\} = -\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$
$= \underline{-\cos\alpha}$

$\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha) = \cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha-2\pi) = \cos\{-(\frac{\pi}{2}-\alpha)\} = \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$
$= \underline{\sin\alpha}$

$\tan(\frac{3\pi}{2}+\alpha) = \tan(\frac{3\pi}{2}+\alpha-2\pi) = \tan\{-(\frac{\pi}{2}-\alpha)\} = -\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)$
$= \underline{-\cot\alpha}$

$\cot(\frac{3\pi}{2}+\alpha) = \cot(\frac{3\pi}{2}+\alpha-2\pi) = \cot\{-(\frac{\pi}{2}-\alpha)\} = -\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)$
$= \underline{-\tan\alpha}$

別解. $\frac{3\pi}{2}+\alpha = \pi+\frac{\pi}{2}+\alpha$ トスルモヨシ.

$\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha) = \sin(\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \underline{-\cos\alpha}$

$\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha) = \cos(\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \underline{\sin\alpha}$

$\tan(\frac{3\pi}{2}+\alpha) = \tan(\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha) = \tan(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \underline{-\cot\alpha}$

$\cot(\frac{3\pi}{2}+\alpha) = \cot(\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha) = \cot(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \underline{-\tan\alpha}$

(ハ). $\frac{3\pi}{2}-\alpha$.

$\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha) = \sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha-2\pi) = \sin\{-(\frac{\pi}{2}+\alpha)\}$
$= -\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \underline{-\cos\alpha}$



$\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha) = \cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha-2\pi) = \cos\{-(\frac{\pi}{2}+\alpha)\}$
$= \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \underline{-\sin\alpha}$

$\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha) = \tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha-2\pi) = \tan\{-(\frac{\pi}{2}+\alpha)\}$
$= -\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -(-\cot\alpha) = \underline{\cot\alpha}$

$\cot(\frac{3\pi}{2}-\alpha) = \cot(\frac{3\pi}{2}-\alpha-2\pi) = \cot\{-(\frac{\pi}{2}+\alpha)\}$
$= -\cot(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -(-\tan\alpha) = \underline{\tan\alpha}$

$\frac{3\pi}{2}-\alpha = \pi+\frac{\pi}{2}-\alpha$ トスレバ

$\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha) = \sin(\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha) = -\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \underline{-\cos\alpha}$

其他モ同ジ.

(2) 次式ノ値ヲ求メヨ.

(i) $\cos A + \sin(\frac{3\pi}{2}+A) + \sin(A-\frac{3\pi}{2}) + \cos(\pi+A)$.

$\sin(\frac{3\pi}{2}+A) = \underline{-\cos A}$

$\sin(A-\frac{3\pi}{2}) = \sin(A-\frac{3\pi}{2}+2\pi) = \sin(\frac{\pi}{2}+A)$
$= \underline{\cos A}$

$\cos(\pi+A) = \underline{-\cos A}$

∴ 原式 $= \cos A + (-\cos A) + \cos A + (-\cos A)$.
$= \cos A - \cos A + \cos A - \cos A$.
$= \underline{0}$.

(ii) $\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+A)\cdot\cos(\frac{\pi}{2}-A)}{\cos(\pi+A)} + \frac{\sin(\pi-A)\cdot\cos(\frac{\pi}{2}+A)}{\sin(\pi+A)}$

$\sin(\frac{\pi}{2}+A) = \cos A$. $\cos(\frac{\pi}{2}-A) = \sin A$, $\cos(\pi+A) = -\cos A$.

$\sin(\pi-A) = \sin A$. $\cos(\frac{\pi}{2}+A) = -\sin A$, $\sin(\pi+A) = -\sin A$.

∴ 原式 $= \frac{\cos A\cdot\sin A}{-\cos A} + \frac{\sin A(-\sin A)}{-\sin A}$.
$= -\sin A + \sin A = \underline{0}$

(3). 次ノ等式ヲ證明セヨ.

(i). $\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(2n\pi+x)\right\}=\sin x$.

$(2n\pi+x)=A$ ト見レバ

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\sin A$ ナル故

左辺 $=\sin(2n\pi+x)$

$=\underline{\sin x}$

(ii). $\tan\left\{\pi+(4n+3)\frac{\pi}{2}-x\right\}=\cot x$.

左辺 $=\tan\left\{(4n+4)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-x\right\}$

$=\tan\left\{4(n+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-x\right\}$

$=\tan\left\{2(n+1)\pi+\frac{\pi}{2}-x\right\}$

$=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$=\underline{\cot x}$

別解. $(4n+3)\frac{\pi}{2}-x=A$ ト見レバ

左辺 $=\tan\{\pi+A\}=\tan A$

$\therefore \tan\left\{\pi+(4n+3)\frac{\pi}{2}-x\right\}=\tan\left\{(4n+3)\frac{\pi}{2}-x\right\}$

$=\tan\left\{2n\pi+\frac{3\pi}{2}-x\right\}$

$=\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$

$=\tan\left\{\pi-\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right\}$

$=-\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

$=-(-\cot x)$

$=\underline{\cot x}$

差ガ $\frac{3\pi}{2}$ ニ等シキ二角ノ三角函数ノ公式.

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x$.



$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin x$.

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cot x$.

$\cot\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\tan x$.

二角ノ和ガ $\frac{3\pi}{2}$ ニ等シキ二角ノ三角函数公式.

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x$.

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin x$.

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\cot x$.

$\cot\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\tan x$.

## 問題

(1). 次ノ三角函数ヲ0°ト90°トノ間ニアル角ノ三角函数ニテ表ハセ.

(i). $\sin 2125°$

$\sin 2125°=\sin(2125°-360°\times 6)=\sin(-35°)$

$=\underline{-\sin 35°}$

(ii). $\tan(-1550°)$

$\tan(-1550°)=\tan(-1550°+180°\times 9)=\underline{\tan 70°}$

(2). 次ノ三角函数ヲ正ノ鋭角ノ同名ノ三角函数ニテ表ハセ.

(i). $\sin(-1900°)$

$\sin(-1900°)=\sin(-1900°+360°\times 5)=\sin(-100°)$

$=-\sin 100°$

$\sin(-100°)=-\sin 100°=-\sin(180°-80°)=\underline{-\sin 80°}$

(iii). $\cos 2572^\circ$.

$\cos 2572^\circ = \cos(2572^\circ - 360^\circ \times 7) = \underline{\cos 52^\circ}$

(iii). $\tan 515^\circ$

$\tan 515^\circ = \tan(515^\circ - 180^\circ \times 3) = \tan(-25^\circ) = \underline{-\tan 25^\circ}$.

(iv). $\cot(-373^\circ)$

$\cot(-373^\circ) = \cot(-373^\circ + 360^\circ) = \cot(-13^\circ)$

$= \underline{-\cot 13^\circ}$

## 5. 定理.

二角 $x, x'$ が同じ正弦ヲ有スルタメニ必要ニシテ且十分ナル要件ハ次ノ二ツノ等式ノ何レカバ成立ツコトナリ.

$$\begin{cases} x' = 2n\pi + x. \\ x' = (2n+1)\pi - x. \end{cases}$$

二式ヲ一括シテ

$$\boxed{x' = n\pi + (-1)^n x\pi - x}$$

定理

二角 $x, x'$ ガ同一ノ餘弦ヲ有スルタメニ必要ニシテ且十分ナル要件ハ

$$\begin{cases} x' = 2n\pi + x. \\ x' = 2n\pi - x. \end{cases}$$

二式ヲ一括シテ

$$\boxed{x' = 2n\pi \pm x.}$$

定理.

二角 $x, x'$ ガ同一ノ正切ヲ有スルタメニ必要ニ



シテ且十分ナル要件ハ

$$\boxed{x' = n\pi + x.}$$

即其差ガ $\pi$ ノ整数倍ナルコトナリ.

## 問題

(1). $x$ ト相等シキ正弦ヲ有スル總テノ角ハ $(2n+\frac{1}{2})\pi \pm (\frac{\pi}{2} - x)$ ニヨリテ表ハサル.

$(2n+\frac{1}{2})\pi \pm (\frac{\pi}{2} - x)$ ハ

符号(+)ヲ取レバ

$= 2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - x = \underline{(2n+1)\pi - x}$

符号(−)ヲ取レバ

$= 2n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + x = \underline{2n\pi + x}$

別解.

$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

$= \cos\{2n\pi \pm (\frac{\pi}{2} - x)\}$

$2n\pi \pm (\frac{\pi}{2} - x) = A$ ト見レバ

$\cos A = \sin(\frac{\pi}{2} + A)$ ナルヲ以テ

$= \sin\{\frac{\pi}{2} + 2n\pi \pm (\frac{\pi}{2} - x)\}$

$= \underline{\sin\{(2n+\frac{1}{2})\pi \pm (\frac{\pi}{2} - x)\}}$.

(2). $\theta$ ト同ジ餘弦ヲ有スル總テノ角ハ $(n+\frac{1}{2})\pi + (-1)^n(\theta - \frac{\pi}{2})$ ニヨリテ表ハサル.

$(n+\frac{1}{2})\pi + (-1)^n(\theta - \frac{\pi}{2})$ ハ

$n$ ガ偶数ナレバ $\underline{2n\pi + \theta}$ トナリ

$n$ ガ奇数ナレバ　$2n\pi-\theta$　トナル

別　解、

$$\cos\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=-\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=-\sin\left\{n\pi+(-1)^n\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$n\pi+(-1)^n\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=A$ トスレバ

$-\sin A=\cos\left(\frac{\pi}{2}+A\right)$ ナルヲ以テ

$$=\cos\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi+(-1)^n\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$=\cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+(-1)^n\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

(3). $\sin(A+B+C+D)=0$ ナルトキハ

$$\sin(A+C)\sin(A+D)=\sin(B+C)\cdot\sin(B+D)$$

$\sin(A+B+C+D)=0$　ヨリ　$A+B+C+D=n\pi$.

$$A+C=n\pi-(B+D)$$
$$A+D=n\pi-(B+C)$$

$n$ ガ偶数ノトキ

$$\sin(A+C)=\sin\{n\pi-(B+D)\}=-\sin(B+D)$$

$\because\ \sin(2n\pi-A)=-\sin A$

$$\sin(A+D)=\sin\{n\pi-(B+C)\}=-\sin(B+C)$$

$$\therefore\ \sin(A+C)\sin(A+D)=\{-\sin(B+D)\}\{-\sin(B+C)\}$$
$$=\sin(B+D)\cdot\sin(B+C)$$

$n$ ガ奇数ノトキ

$$\sin(A+C)=\sin\{n\pi-(B+D)\}=\sin(B+D)$$

$\because\ \sin(\pi-A)=\sin A$

$$\sin(A+D)=\sin\{n\pi-(B+C)\}=\sin(B+C)$$



$$\therefore\ \sin(A+C)\sin(A+D)=\sin(B+D)\sin(B+C).$$

## 問　題

(1). $\sec\theta=2$ ナルトキ $\theta$ ノ他ノ函数ノ値ヲ求メヨ、

解.
$$\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}=\frac{1}{2}$$
$$\sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{3}$$
$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\pm\sqrt{3}}$$
$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

(2). $A$ ガ第三象限ノ角ニシテ $\tan A=\frac{8}{15}$ ナルトキ $\sin A$, $\cos A$ ヲ求メヨ、

解.
$$\sin^2A+\cos^2A=1 \qquad (1)$$
$$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{8}{15} \qquad (2)$$

(2) ヨリ
$$\sin A=\frac{8}{15}\cos A \qquad (3)$$

(3) ヲ (1) ニ代入シテ

$$\frac{64}{225}\cos^2A+\cos^2A=1$$
$$\frac{289}{225}\cos^2A=1$$
$$\cos^2A=\frac{225}{289}$$

第三象限ノ角ノ餘弦ハ負ナル故

$$\cos A=-\frac{15}{17}$$

$\therefore \sin A = \frac{8}{15}\left(-\frac{15}{17}\right) = -\frac{8}{17}$

(3). $\cot A = \frac{m}{n}$ ナルトキ $\frac{n\sin A - m\cos A}{n\sin A + m\cos A}$ ノ値ヲ求ム.

解. $\cot A$ ノ値ヲ知ル故其式ヲ $\cot A =$ ヲ表ハスタメ分母子ヲ $\sin A =$ ヲ除シ

$$\frac{n\sin A - m\cos A}{n\sin A + m\cos A} = \frac{n - m\cot A}{n + m\cot A} = \frac{n - m\cdot\frac{m}{n}}{n + m\cdot\frac{m}{n}} = \frac{n^2 - m^2}{n^2 + m^2}$$

(4). $\tan\theta = \frac{3}{4}$ ナルトキ $\sin^6\theta + \cos^6\theta$ ノ値ヲ求ム.

解. $\sin^6\theta + \cos^6\theta = (\sin^2\theta)^3 + (\cos^2\theta)^3$

$$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\left\{\sin^4\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta + \cos^4\theta\right\}$$

$$= \sin^4\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta + \cos^4\theta$$

$$= \cos^4\theta\left(\frac{\sin^4\theta}{\cos^4\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{\sec^4\theta}(\tan^4\theta - \tan^2\theta + 1)$$

$$= \frac{\tan^4\theta - \tan^2\theta + 1}{(1+\tan^2\theta)^2}$$

$\tan\theta = \frac{3}{4}$ ヲ代入シテ

$$= \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^4 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1}{\left\{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}^2} = \frac{193}{625}$$

(5). $\sec\theta = \frac{m^2+1}{2m}$ ナルトキ $\sin\theta, \cos\theta$ ヲ求メヨ.

解. $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{2m}{m^2+1}$

$$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{2m}{m^2+1}\right)^2} = \pm\frac{m^2-1}{m^2+1}$$

(6). $\cos A = \frac{2n+1}{2n^2+2n+1}$ ナルトキ $\sin A, \tan A$ ヲ求ム.

解. $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$

$$= 1 - \left(\frac{2n+1}{2n^2+2n+1}\right)^2 = \frac{4n^4+8n^3+4n^2}{(2n^2+2n+1)^2} = \left(\frac{2n^2+2n}{2n^2+2n+1}\right)^2$$

$\therefore \sin A = \pm\frac{2n(n+1)}{2n^2+2n+1}$



$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\pm\frac{2n(n+1)}{2n^2+2n+1}}{\frac{2n+1}{2n^2+2n+1}} = \pm\frac{2n(n+1)}{2n+1}$$

(7). $\tan\alpha = \frac{m^2+2mn}{2mn+2n^2}$ ナルトキ $\sin\alpha, \cos\alpha$ ヲ求ム.

解. $\cos^2\alpha = \frac{1}{\sec^2\alpha} = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\left(\frac{m^2+2mn}{2mn+2n^2}\right)^2}$

分母 $= \frac{(2mn+2n^2)^2+(m^2+2mn)^2}{(2mn+2n^2)^2}$

$$= \frac{4n^2(m+n)^2+m^4-4m^3n+4\cdot m^2n^2}{(2mn+2n^2)^2}$$

$$= \frac{m^4+4m^2n(m+n)+4n^2(m+n)^2}{(2mn+2n^2)^2}$$

$$= \frac{\{m^2+2n(m+n)\}^2}{(2mn+2n^2)^2}$$

$$= \frac{(m^2+2mn+2n^2)^2}{(2mn+2n^2)^2}$$

$\therefore \cos^2\alpha = \frac{1}{\frac{m^2+2mn+2n^2}{(2mn+2n^2)^2}} = \frac{(2mn+2n^2)^2}{(m^2+2mn+2n^2)^2}$

$\therefore \cos\alpha = \pm\frac{2mn+2n^2}{m^2+2mn+2n^2}$

$\sin\alpha = \tan\alpha\cdot\cos\alpha$

$$= \frac{m^2+2mn}{2mn+2n^2} \times \pm\frac{2mn+2n^2}{m^2+2mn+2n^2}$$

$$= \pm\frac{m^2+2mn}{m^2+2mn+2n^2}$$

(8). $A$ ハ正, 鋭角ニシテ, $\tan A = \frac{2m(m+1)}{2m+1}$ ナレバ $\sin A, \cos A$ ノ値如何

解. $\cos^2 A = \frac{1}{\sec^2 A} = \frac{1}{1+\tan^2 A} = \frac{1}{1+\left(\frac{2m(m+1)}{2m+1}\right)^2}$

分母 $= \frac{(2m+1)^2+\{2m(m+1)\}^2}{(2m+1)^2}$

$$= \frac{4m^2(m+1)^2+4m(m+1)+1}{(2m+1)^2}$$

$$= \frac{\{2m(m+1)+1\}^2}{(2m+1)^2}$$

$$\therefore \cos^2 A = \frac{1}{\frac{(2m^2+2m+1)^2}{(2m+1)^2}} = \frac{(2m+1)^2}{(2m^2+2m+1)}$$

A ハ正ノ鋭角ナルヲ以テ $\cos A$ ハ正

$$\therefore \cos A = \frac{2m+1}{2m^2+2m+1}$$

$$\sin A = \tan A \cdot \cos A$$
$$= \frac{2m(m+1)}{2m+1} \times \frac{2m+1}{2m^2+2m+1} = \frac{2m(2m+1)}{2m^2+2m+1}$$

(9). $\sin A = p$, $\tan A = q$ ナルトキ
$$q^2 = p^2(1+q^2)$$

解. $p^2(1+q^2) = \sin^2 A\,(1+\tan^2 A)$
$$= \sin^2 A \cdot \sec^2 A$$
$$= \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \tan^2 A = q^2$$

(10). $\tan A + \sin A = p$, $\tan A - \sin A = q$ ナルトキ
$$(p^2-q^2)^2 = 16pq$$

解. $\tan A + \sin A = p$ (1)

$\tan A - \sin A = q$ (2)

(1)+(2) $\tan A = \frac{p+q}{2}$ (3)

(1)−(2) $\sin A = \frac{p-q}{2}$ (4)

前問題ヨリ $\tan^2 A = \sin^2 A(1+\tan^2 A)$

コノ式ニ(3),(4)ヲ代入シテ
$$\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 = \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 \left\{1+\left(\frac{p+q}{2}\right)^2\right\}$$
$$\frac{(p+q)^2}{4} = \frac{(p-q)^2}{4} + \frac{(p^2-q^2)^2}{16}$$



$$\therefore \frac{(p^2-q^2)^2}{16} = \frac{(p+q)^2}{4} - \frac{(p-q)^2}{4} = \frac{4pq}{4} = pq.$$

$$\therefore (p^2-q^2)^2 = 16pq$$

別解.
$$(p^2-q^2)^2 = \{(\tan A+\sin A)^2 - (\tan A-\sin A)^2\}^2$$
$$= (4\tan A \sin A)^2$$
$$= 16\tan^2 A \cdot \sin^2 A$$
$$= 16 \cdot \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} \cdot \sin^2 A$$
$$= 16 \cdot \frac{\sin^2 A(1-\cos^2 A)}{\cos^2 A}$$
$$= 16 \cdot \left(\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} - \sin^2 A\right)$$
$$= 16 \cdot (\tan^2 A - \sin^2 A)$$
$$= 16 \cdot (\tan A+\sin A)(\tan A-\sin A)$$
$$= 16 \cdot pq$$

(11) A ハ正ノ鋭角，$m, n$ ハ正数ナルトキ $\tan^2 A = \frac{m}{n}$ ナレバ
$$m\,\mathrm{cosec}\,A + n\sec A = (m^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

解. $\tan^2 A = \frac{m}{n}$ ヨリ $\tan^2 A = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}}$
$$\sec^2 A = 1+\tan^2 A = 1+\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{m^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}}$$
$$\therefore n^2 \sec^2 A = \frac{n^2(m^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{2}{3}})}{n^{\frac{2}{3}}} = n^{\frac{4}{3}}(m^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{2}{3}})$$
$$\therefore n \cdot \sec A = n^{\frac{2}{3}}(m^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$$

同様ニシテ
$$m \cdot \mathrm{cosec}\,A = m^{\frac{2}{3}}(m^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore m \cdot \mathrm{cosec}\,A + n\sec A = m^{\frac{2}{3}}(m^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{2}{3}}(m^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$$

$$=(m^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}(m^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{2}{3}})=(m^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

別　解. $\tan^2 A=\frac{m}{n}$ ヨリ $\tan^2 A=(\frac{m}{n})^{\frac{2}{3}}$　$\tan A=(\frac{m}{n})^{\frac{1}{3}}$

$\sec A=\sqrt{1+\tan^2 A}$

$\operatorname{Cosec} A=\sqrt{1+\cot^2 A}=\frac{\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}$

A ハ正ノ鋭角ナル故 $\sec A$ 及 $\operatorname{Cosec} A$ 共ニ正ナリ.

$\therefore\ m\cdot\operatorname{Cosec} A+n\sec A$

$=m\cdot\frac{\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}+n\cdot\sqrt{1+\tan^2 A}$

$=\sqrt{1+\tan^2 A}\left\{\frac{m}{\tan A}+n\right\}$

$=\sqrt{1+\frac{m^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}}}\left\{\frac{m}{\frac{m^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{3}}}}+n\right\}$

$=\sqrt{\frac{n^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}}}\cdot n^{\frac{1}{3}}(m^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{2}{3}})$　　$\sqrt{n^{\frac{2}{3}}}=n^{\frac{1}{3}}$

$=\sqrt{(m^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{2}{3}})}\cdot(m^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{2}{3}})$

$=\sqrt{(m^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{2}{3}})^3}$

$=(m^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

6. 三角函数ノ一ツヲ以テ他ヲ表ハスコト.

$\sin x$ ヲ以テ $x$ ノ他ノ三角函数ヲ表ス公式.

$\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$.

$\tan x=\pm\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$

$\cot x=\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$

$\sec x=\pm\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$

$\operatorname{Cosec} x=\frac{1}{\sin x}$



$\cos x$ ヲ以テ $\sin x$, $\tan x$ ヲ表ス公式.

$\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$.

$\tan x=\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$.

$\tan x$ ヲ以テ $\sin x$, $\cos x$ ヲ表ス公式

$\sin x=\pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

$\cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$.

## 問　題

次ノ等式ヲ證明セヨ.　(1－14)

(1). $(1+\sin A-\cos A)^2+(1+\cos A-\sin A)^2=4(1-\sin A\cdot\cos A)$

解. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ ヲ用ヒテ

左辺ヲ展開シテ $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ ニ注意スレバ

左辺$=1+\sin^2 A+\cos^2 A+2\sin A-2\cos A-2\sin A\cos A$

$+1+\cos^2 A+\sin^2 A+2\cos A+2\sin A-2\sin A\cos A$

$=1+1-2\sin A\cos A+1+1-2\sin A\cos A.$

$=4-4\sin A\cos A$

$=4(1-\sin A\cos A)$

(2). $1+2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)=3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)$

解　$\sin^6\theta+\cos^6\theta=(\sin^2\theta)^3+(\cos^2\theta)^3$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\{\sin^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta\}$

$=\sin^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-3\sin^2\theta\cos^2\theta$

$= 1-3\sin^2\theta\cos^2\theta$

$\sin^4\theta+\cos^4\theta = (\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$= 1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

∴ 左辺 $= 1+2(1-3\sin^2\theta\cos^2\theta)$

$= 1+2-6\sin^2\theta\cos^2\theta$

$= 3-6\sin^2\theta\cos^2\theta$

右辺 $= 3(1-2\sin^2\theta\cos^2\theta)$

$= 3-6\sin^2\theta\cos^2\theta$

∴ 左辺 = 右辺

注意　$\sin^6\theta+\cos^6\theta = 1-3\sin^2\theta\cos^2\theta$ 及 $\sin^4\theta+\cos^4\theta$
$= 1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$ ハ公式トシテ記憶セヨ.
式ノ変形、問題解法上大ナル効果アリ.

(13). $(2-\cos^2A)(1+2\cot^2A) = (2+\cot^2A)(2-\sin^2A)$

解　$1-\cos^2A = \sin^2A$,　$1+\cot^2A = \operatorname{cosec}^2A$ = 注意スレバ

左辺 $= (1+\sin^2A)(\operatorname{cosec}^2A+\cot^2A)$

$= \operatorname{cosec}^2A+\cot^2A+1+\cos^2A$

$= 1+\cot^2A+\cot^2A+\sin^2A+\cos^2A+\cos^2A$

$= 1+2\cot^2A+1-\cos^2A+1-\sin^2A+1-\sin^2A$

$= 4+2\cot^2A-2\sin^2A-\cos^2A$

$= (2+\cot^2A)(2-\sin^2A)$

注意.　上ノ解法ニ於テ 1 ノ代リニ $\sin^2A+\cos^2A$ ヲ
用ヒタリ. 此レハ $\sin^2A+\cos^2A = 1$ ナル基
本公式ヲ應用セルモノニシテカヽル技巧
ハ屢行ハル所ノモノナリ.



別解、左辺 $= (1+\sin^2A)(1+2\cdot\frac{\cos^2A}{\sin^2A})$

$= 1+2\cdot\frac{\cos^2A}{\sin^2A}+\sin^2A+2\cos^2A$

$= 1+2\cdot\frac{\cos^2A}{\sin^2A}+\sin^2A+\cos^2A+\cos^2A$

$= 1+2\frac{\cos^2A}{\sin^2A}+1+\cos^2A$

$= 2+2\frac{\cos^2A}{\sin^2A}+\cos^2A$

右辺 $= (2+\frac{\cos^2A}{\sin^2A})(2-\sin^2A)$

$= 4+2\frac{\cos^2A}{\sin^2A}-2\sin^2A-\cos^2A$

$= 4+2\frac{\cos^2A}{\sin^2A}-2(1-\cos^2A)-\cos^2A$

$= 4+2\frac{\cos^2A}{\sin^2A}-2+2\cos^2A-\cos^2A$

$= 2+2\frac{\cos^2A}{\sin^2A}+\cos^2A.$

(14). $\operatorname{ty}^2A\cdot\sec^2A+\cot^2A\cdot\operatorname{cosec}^2A = \sec^4A\operatorname{cosec}^4A-3\sec^2A\cdot\operatorname{cosec}^2A.$

解　右辺ハ $\sec A\cdot\operatorname{cosec}A$ ノ項ノミヨリ成ルヲ以
テ左辺ノ $\operatorname{ty}A$ ヲ $\cot A$, $\operatorname{cosec}A$ ニ変形スルコト
ニ注意スレバ

左辺 $= (\sec^2A-1)\sec^2A+(\operatorname{cosec}^2A-1)\operatorname{cosec}^2A$

$= \sec^4A-\sec^2A+\operatorname{cosec}^4A\cdot\operatorname{cosec}^2A$

$= \sec^4A+\operatorname{cosec}^4A-(\sec^2A+\operatorname{cosec}^2A)$

然ル $= \sec^2A+\operatorname{cosec}^2A = \frac{1}{\cos^2A}+\frac{1}{\sin^2A}$

$= \frac{\sin^2A+\cos^2A}{\cos^2A\cdot\sin^2A}$

$= \frac{1}{\cot A\cdot\sin^2A}$

$= \frac{1}{\cos^2A}\cdot\frac{1}{\sin^2A}$

$= \sec^2A\cdot\operatorname{cosec}^2A$

∴ $= \sec^4A+\operatorname{cosec}^4A-\sec^2A\cdot\operatorname{cosec}^2A$

$= (\sec^2A+\operatorname{cosec}^2A)^2 - 2\sec^2A\operatorname{cosec}^2A - \sec^2A\operatorname{cosec}^2A.$

$= (\sec^2A\cdot\operatorname{cosec}^2A)^2 - 3\sec^2A\cdot\operatorname{cosec}^2A$

$= \sec^4A\cdot\operatorname{cosec}^4A - 3\sec^2A\cdot\operatorname{cosec}^2A$

注意 $1+\tan^2A = \sec^2A$ ヨリ $\tan^2A = \sec^2A-1$

$1+\cot^2A = \operatorname{cosec}^2A$ ヨリ $\cot^2A = \operatorname{cosec}^2A-1$

及 $\sec^2A+\operatorname{cosec}^2A = \sec^2A\cdot\operatorname{cosec}^2A$

此等ハ公式トシテ記憶スベシ.

(5). $\sin^3\theta+\cos^3\theta+\sec^3\theta+\operatorname{cosec}^3\theta$

$= (\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)(1+\sec^3\theta\cdot\operatorname{cosec}^3\theta).$

解. 左辺 $= (\sin^3\theta+\cos^3\theta)+\left(\frac{1}{\cos^3\theta}+\frac{1}{\sin^3\theta}\right)$

$= (\sin^3\theta+\cos^3\theta)+\left(\frac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{\cos^3\theta\sin^3\theta}\right)$

$= (\sin^3\theta+\cos^3\theta)\left\{1+\frac{1}{\cos^3\theta\sin^3\theta}\right\}$

$= (\sin^3\theta+\cos^3\theta)(1+\sec^3\theta\cdot\operatorname{cosec}^3\theta)$

$= (\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$
$(1+\sec^3\theta\cdot\operatorname{cosec}^3\theta).$

$= (\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)(1+\sec^3\theta\operatorname{cosec}^3\theta)$

(6). $(1+\sin A+\cos A)^2 = 2(1+\sin A)(1+\cos A)$

解. 左辺 $= 1+\sin^2A+\cos^2A+2\sin A+2\cos A+2\sin A\cos A.$

$= 1+1+2\sin A+2\cos A+2\sin A\cdot\cos A$

$= 2(1+\sin A+\cos A+\sin A\cos A)$

$= 2(1+\sin A)(1+\cos A)$

(7). $\left(\frac{1}{\sec^2A-\cos^2A}+\frac{1}{\operatorname{cosec}^2A-\sin^2A}\right)\sin^2A\cdot\cos^2A = \frac{1-\cos^2A\cdot\sin^2A}{2+\cos^2A\sin^2A}$

解. 左辺 $= \left(\frac{1}{\frac{1}{\cos^2A}-\cos^2A}+\frac{1}{\frac{1}{\sin^2A}-\sin^2A}\right)\sin^2A\cos^2A.$



$= \left(\frac{\cos^2A}{1-\cos^4A}+\frac{\sin^2A}{1-\sin^4A}\right)\sin^2A\cdot\cos^2A.$

$= \left\{\frac{\cos^2A}{(1+\cos^2A)(1-\cos^2A)}+\frac{\sin^2A}{(1+\sin^2A)(1-\sin^2A)}\right\}$
$\sin^2A\cdot\cos^2A.$

$= \left\{\frac{\cos^2A}{(1+\cos^2A)\sin^2A}+\frac{\sin^2A}{(1+\sin^2A)\cos^2A}\right\}\sin^2A\cos^2A.$

$= \frac{\cos^4A}{1+\cos^2A}+\frac{\sin^4A}{1+\sin^2A}$

$= \frac{\cos^4A(1+\sin^2A)+\sin^4A(1+\cos^2A)}{(1+\cos^2A)(1+\sin^2A)}$

$= \frac{\cos^4A+\sin^4A+\cos^2A\sin^2A(\sin^2A+\cos^2A)}{2+\cos^2A\sin^2A}$

公式 $\cos^4A+\sin^4A = 1-2\sin^2A\cos^2A$ 及 $\sin^2A+\cos^2A=1$

$\therefore = \frac{1-2\sin^2A\cos^2A+\cos^2A\sin^2A}{2+\cos^2A\sin^2A}$

$= \frac{1-\cos^2A\sin^2A}{2+\cos^2A\sin^2A}$

(8). $(\operatorname{cosec}A+\cot A)(1-\sin A)-(\sec A+\tan A)(1-\cos A)$

$= (\operatorname{cosec}A-\sec A)\{2-(1-\cos A)(1-\sin A)\}$

解. 左辺 $= \operatorname{cosec}A-1+\cot A-\cos A-\sec A+1-\tan A+\sin A$

$= (\operatorname{cosec}A-\sec A)+(\cot A-\tan A)-\cos A+\sin A$

$= (\operatorname{cosec}A-\sec A)+\left(\frac{\cos^2A-\sin^2A}{\sin A\cos A}\right)-(\cos A-\sin A)$

$= (\operatorname{cosec}A-\sec A)+\frac{\cos A-\sin A}{\sin A\cos A}\left\{\cos A+\sin A-\sin A\cos A\right\}$

$= (\operatorname{cosec}A-\sec A)+(\operatorname{cosec}A-\sec A)\left\{1-(1-\sin A)\right.$
$\left.(1-\cos A)\right\}$

$= (\operatorname{cosec}A-\sec A)\left\{1+1-(1-\sin A)(1-\cos A)\right\}$

$= (\operatorname{cosec}A-\sec A)\left\{2-(1-\cos A)(1-\sin A)\right\}$

(9). $\frac{\cot^2\theta\cdot\sin^2(90-\theta)}{\cot\theta+\cos\theta} = \tan(90^\circ-\theta)-\cos\theta.$

解. 左辺 $= \frac{\cot^2\theta\cdot\cos^3\theta}{\cot\theta+\cos\theta} = \frac{(\operatorname{cosec}^2\theta-1)\cos^3\theta}{\cot\theta+\cos\theta}$

$= \frac{\cot^2\theta-\cos^2\theta}{\cot\theta+\cos\theta} = \frac{(\cot\theta+\cos\theta)(\cot\theta-\cos\theta)}{(\cot\theta+\cos\theta)}$

$= \cot\theta-\cos\theta = \underline{\tan(90^\circ-\theta)-\cos\theta}$

或ハ左辺 $= \frac{\cot^2\theta\cdot\cos^3\theta}{\cot\theta(1+\sin\theta)} = \frac{\cot^2\theta(1-\sin^2\theta)}{\cot\theta(1+\sin\theta)}$

$= \cot\theta(1-\sin\theta) = \cot\theta-\cos\theta = \underline{\tan(90^\circ-\theta)-\cos\theta}$

(10) $\{\sec(90^\circ-\theta)-\sec\theta\}\{\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)-\operatorname{cosec}\theta\}+(1-\tan\theta)^2+(1-\cot\theta)$

$=0$

解. 左辺 $= (\operatorname{cosec}\theta-\sec\theta)(\sec\theta-\operatorname{cosec}\theta)+1-2\tan\theta+\tan^2\theta$

$+1-2\cot\theta+\cot^2\theta$

$= -\operatorname{cosec}^2\theta+2\operatorname{cosec}\theta\sec\theta-\sec^2\theta+(1+\tan^2\theta)$

$+(1+\cot^2\theta)-2(\tan\theta+\cot\theta)$

然ル $= \tan\theta+\cot\theta = \sec\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta$

$\therefore = -\operatorname{cosec}^2\theta+2\operatorname{cosec}\theta\sec\theta-\sec^2\theta+\sec^2\theta$

$+\operatorname{cosec}^2\theta-2\operatorname{cosec}\theta\sec\theta$

$= 0$

注意. $\tan\theta+\cot\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$

$= \frac{1}{\cos\theta\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta} = \underline{\sec\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta}$

式ノ変形ニ要スル形ナレバ結果ヲ記憶スベシ.

(11). $\frac{2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta}{1-\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta} = \cot\theta$

解. $1-\cos^2\theta = \sin^2\theta$ ノ分母ニ適用シテ

左辺 $= \frac{\cos\theta(2\sin\theta-1)}{2\sin^2\theta-\sin\theta} = \frac{\cos\theta(2\sin\theta-1)}{\sin\theta(2\sin\theta-1)} = \underline{\cot\theta}$



(12) $\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}\cdot\frac{\operatorname{cosec}\theta+1}{\sec\theta+1} = \cot^3\theta$

解 左辺 $= \frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}\cdot\frac{\frac{1}{\sin\theta}+1}{\frac{1}{\cos\theta}+1}$

$= \frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}\cdot\frac{(1+\sin\theta)\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$

$= \frac{(1-\sin^2\theta)\cos\theta}{(1-\cos^2\theta)\sin\theta} = \frac{\cos^2\theta\cdot\cos\theta}{\sin^2\theta\cdot\sin\theta} = \frac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta}$

$= \underline{\cot^3\theta}$

(13) $\frac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

解. 左辺ノ $\tan\theta, \sec\theta$ ヲ夫々 $\sin\theta, \cos\theta$ ニテ表ハシテ $\frac{\sin\theta+1-\cos\theta}{\sin\theta-1+\cos\theta}$ 分母子ニ $\cos\theta$ ヲ乗ジテ

$\frac{\cos\theta(1+\sin\theta)-\cos^2\theta}{\cos\theta(\sin\theta-1+\cos\theta)} = \frac{\cos\theta(1+\sin\theta)-(1-\sin^2\theta)}{\cos\theta(\sin\theta-1+\cos\theta)}$

$= \frac{(1+\sin\theta)(\cos\theta-1+\sin\theta)}{\cos\theta(\sin\theta-1+\cos\theta)} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

(14). $\cos^{12}A+4\cos^{10}A\sin^2A+5\cos^8A\sin^4A-5\cos^4A\sin^8A$

$-4\cos^2A\sin^{10}A-\sin^{12}A = \cos^2A-\sin^2A.$

解. $\cos^4A+2\cos^2A\sin^2A+\sin^4A = (\cos^2A+\sin^2A)^2 = 1$ ヲ用ヒテ左辺ヲ変形スレバ

左辺 $= \cos^{12}A+2\cos^{10}A\sin^2A+\cos^8A\sin^4A$

$+2\cos^{10}A\sin^2A+4\cos^8A\sin^4A+2\cos^6A\sin^6A$

$-2\cos^6A\sin^6A-4\cos^4A\sin^8A-2\cos^2A\sin^{10}A.$

$-\cos^4A\sin^8A-2\cos^2A\sin^{10}A-\sin^{12}A.$

$= \cos^8A(\cos^4A+2\cos^2A\sin^2A+\sin^4A)$

$+2\cos^4A\sin^2A(\cos^4A+2\cos^2A\sin^2A+\sin^4A).$

$-2\cos^2A\sin^4A(\cos^4A+2\cos^2A\sin^2A+\sin^4A).$

$$- \sin^8 A(\cos^4 A + 2\cos^2 A \sin^2 A + \sin^4 A).$$

$$= (\cos^4 A + 2\cos^2 A \sin^2 A + \sin^4 A)(\cos^8 A + 2\cos^6 A \sin^2 A - 2\cos^2 A \sin^6 A - \sin^8 A).$$

$$= (\cos^8 A + 2\cos^6 A \sin^2 A - 2\cos^2 A \sin^6 A - \sin^8 A).$$

$$= \cos^8 A + 2\cos^6 A \sin^2 A + \cos^4 A \sin^4 A - \cos^4 A \sin^4 A - 2\cos^2 A \sin^6 A - \sin^8 A.$$

$$= \cos^4 A(\cos^4 A + 2\cos^2 A \sin^2 A + \sin^4 A) - \sin^4 A(\cos^4 A + 2\cos^2 A \sin^2 A + \sin^4 A).$$

$$= \cos^4 A - \sin^4 A.$$

$$= (\cos^2 A + \sin^2 A)(\cos^2 A - \sin^2 A)$$

$$= \underline{\cos^2 A - \sin^2 A}.$$

別解. $\cos A = C$, $\sin A = S$ ト置ケバ

$$C^2 + S^2 = 1, \quad C^4 + 2C^2S^2 + S^4 = (C^2+S^2)^2 = 1,$$

$$C^4 + S^4 = 1 - 2C^2S^2, \quad C^8 - S^4 = C^2 - S^2.$$

左辺 $= C^{12} + 4C^{10}S^2 + 5C^8S^4 - 5C^4S^8 - 4C^2S^{10} - S^{12}.$

$$= (C^{12} - S^{12}) + 4C^2S^2(C^8 - S^8) + 5C^4S^4(C^4 - S^4).$$

$C^{12} - S^{12} = (C^4)^3 - (S^4)^3$

$= (C^4 - S^4)\{C^8 + C^4S^4 + S^8\}$ = 注意スレバ

$$= (C^4 - S^4)\{C^8 + C^4S^4 + S^8 + 4C^2S^2(C^4 + S^4) + 5C^4S^4\}$$

$$= (C^2 - S^2)\{(C^4 + C^2S^2 + S^4)(C^4 - C^2S^2 + S^4) + 4C^2S^2(1 - 2C^2S^2) + 5C^4S^4\}.$$

$$= (C^2 - S^2)\{(1 - C^2S^2)(1 - 3C^2S^2) + 4C^2S^2 - 8C^4S^4 + 5C^4S^4\}.$$

$$= (C^2 - S^2)\{1 - 4C^2S^2 + 3C^4S^4 + 4C^2S^2 - 3C^4S^4\}$$

$$= \underline{C^2 - S^2}$$



次ノ各式ヲ簡単ニセヨ. (15, 16)

(15). $(\tan A + \tan B)(\cot A - \cot B) + (\tan A - \tan B)(\cot A + \cot B)$

解. 原式 $= 1 + \tan B \cot A - \tan A \cot B - 1 + 1 - \tan B \cot A + \tan A \cot B - 1.$

$$= \underline{0}.$$

(16). $(\sec x \cdot \sec y + \tan x \cdot \tan y)^2 - (\tan x \cdot \sec y + \sec x \cdot \tan y)^2.$

解. 原式 $= \sec^2 x \cdot \sec^2 y + 2\sec x \cdot \sec y \cdot \tan x \cdot \tan y + \tan^2 x \cdot \tan^2 y - \tan^2 x \cdot \sec^2 y - 2\tan x \cdot \sec y \cdot \sec x \cdot \tan y - \sec^2 x \cdot \tan^2 y.$

$$= \sec^2 x(\sec^2 y - \tan^2 y) - \tan^2 x(\sec^2 y - \tan^2 y).$$

$$= (\sec^2 y - \tan^2 y)(\sec^2 x - \tan^2 x).$$

$$= 1 \times 1 = \underline{1}.$$

注意. $\sec^2 A - \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1$

(17). $\sin x + \cos x = a$ ナルトキ $\tan x + \cot x$ ヲ求メヨ.

解. $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$ (1)

仮定式ヲ平方シテ

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = a^2$$

$$1 + 2\sin x \cos x = a^2$$

$$\therefore \sin x \cos x = \frac{a^2 - 1}{2} \quad (2)$$

(2)ヲ(1)ニ代入シテ

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\frac{a^2-1}{2}} = \underline{\frac{2}{a^2 - 1}}$$

(18). $\frac{\sin^8 x}{8} - \frac{\cos^8 x}{8} - \frac{\sin^6 x}{3} + \frac{\cos^6 x}{6} + \frac{\sin^4 x}{4}$ ハ $x$ ニ関セズ一定ナル値ヲ有スルコトヲ証明セヨ.

解. 原式 $= \frac{1}{24}\{3\sin^6x - 3\cos^6x - 8\sin^6x + 4\cos^6x + 6\sin^4x\}$.

$= \frac{1}{24}\{3(\sin^2x+\cos^2x)(\sin^2x-\cos^2x)(\sin^4x+\cos^4x)$
$- 8\sin^6x + 4\cos^6x + 6\sin^4x(\sin^2x+\cos^2x)\}$.

$= \frac{1}{24}\{3(\sin^6x - \sin^4x\cos^2x + \sin^2x\cos^4x - \cos^6x)$
$- 8\sin^6x + 4\cos^6x + 6\sin^4x(\sin^2x+\cos^2x)\}$

$= \frac{1}{24}\{3\sin^6x - 3\sin^4x\cos^2x + 3\sin^2x\cos^4x$
$- 3\cos^6x - 8\sin^6x + 4\cos^6x + 6\sin^6x + 6\sin^4x\cdot\cos^2x\}$

$= \frac{1}{24}\{\sin^6x + \cos^6x + 3\sin^4x\cos^2x + 3\sin^2x\cos^4x\}$.

$= \frac{1}{24}\{1 - 3\sin^2x\cos^2x + 3\sin^2x\cos^2x(\sin^2x+\cos^2x)\}$.

$= \frac{1}{24}\{1 - 3\sin^2x\cos^2x + 3\sin^2x\cos^2x\}$.

$= \frac{1}{24}$.

注意. $\sin^6x + \cos^6x = 1 - 3\sin^2x\cos^2x$.
計算ノ途中ニ於テ $1 = \sin^2A + \cos^2A$ ヲ乗ジタリ.

(19). $\sin^2x + \sin x = 1$ ナルトキハ $\cos^2x + \cos^4x = 1$ ナリ.

解. 仮定式ヨリ $\sin x = 1 - \sin^2x = \cos^2x$ (1)

$\therefore \sin^2x = \cos^4x$ (2)

(1)(2)ヲ證明スベキ式ノ左辺ニ代入シテ
$\cos^2x + \cos^4x = \sin x + \sin^2x = 1$.

(20) $\cos A = \cos x \cdot \sin C$, $\cos B = \sin x \cdot \sin C$ ナル時ハ
$\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = 2$ ナリ.



解. 證明スベキ式ハ $\sin x$, $\cos x$ ヲ含マズ故ニ仮定式ヨリ $\sin x$, $\cos x$ ヲ消去シテ
仮定式ヲ各平方シテ相加フレバ
$\cos^2A + \cos^2B = (\cos^2x + \sin^2x)\sin^2C$
$\therefore \cos^2A + \cos^2B = \sin^2C$
$\therefore (1-\sin^2A) + (1-\sin^2B) = \sin^2C$
$\therefore \sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = 2$.

(21). $\cos A = n\sin B$, $\cot A = \frac{\sin B}{\tan C}$ ナルトキハ
$\cos^2C = \frac{n^2}{1+n^2\cos^2B}$.

解. $\cos A = n\sin B$ (1)

$\cot A = \frac{\sin B}{\tan C}$ (2)

(1)ヲ(2)ニテ除スレバ

$\sin A = n\tan C$ (3)

$(1)^2 + (3)^2$ $\quad 1 = n^2\sin^2B + n^2\tan^2C$
$= n^2(1-\cos^2B) + n^2\tan^2C$
$= n^2 - n^2\cos^2B + n^2\tan^2C$
$= n^2(1+\tan^2C) - n^2\cos^2B$
$= n^2\sec^2C - n^2\cos^2B$

$\therefore n^2\sec^2C = 1 + n^2\cos^2B$

$\therefore n^2 = (1+n^2\cos^2B)\cos^2C$

$\therefore \cos^2C = \frac{n^2}{1+n^2\cos^2B}$

(22). $a\sin x + b\cos x = m$, $b\tan x - n\sec x = a$ ナル時ハ
$a^2 + b^2 = m^2 + n^2$

解. 仮定式ヲ(1),(2)トシテ(2)ニ $\cos x$ ヲ乗ズレバ

$$b\sin x - n = a\cos x$$

$$\therefore \quad a\cos x - b\sin x = -n \qquad (3)$$

$(1)^2+(3)^2$ $\quad a^2+b^2 = m^2+n^2$

注意. 證明スベキ式ハ $\sin x, \cos x$ 等ヲ含マズ故ニ假定式ヲ変形シテ此等ヲ消去スルニアリ. カ、ル消去スル場合ニハ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ヲ活用スルコトニヨリテ成功スルコト多シ.

(23). $\operatorname{tg} x = \sin y \operatorname{tg} A$, $\operatorname{tg} y = \sin x \operatorname{tg} B$ ナル式ハ $\sin^2 A \cos^2 y = \cos^2 B$ ナルコトヲ證セヨ. (36年)

解. $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$

此式ノ右辺ニ於ケル $\sin^2 x$ ニ第二ノ方程式ヨリ得ベキ $\dfrac{\operatorname{tg}^2 y}{\operatorname{tg}^2 B}$ ヲ代入シ且左辺ニ第一ノ方程式ヨリ得ベキ $\sin^2 y \operatorname{tg}^2 A$ ヲ代入スレバ

$$\sin^2 y \operatorname{tg}^2 A = \frac{\operatorname{tg}^2 y}{\operatorname{tg}^2 B - \operatorname{tg}^2 y}$$

而シテコノ右辺ノ正切ヲ正弦ト餘弦トノ比ニテ表シ且通例ノ分数ノ形ニ改ムレバ

$$\frac{\sin^2 y \cos^2 B}{\cos^2 y \sin^2 B - \sin^2 y \cos^2 B}$$

尚分母ニ $\cos^2 y(1-\cos^2 B)-(1-\cos^2 y)\cos^2 B = \cos^2 y - \cos^2 B$ ナルヲ以テ之ヲ代入シ且因数ヲ省ケバ

$$\operatorname{tg}^2 A = \frac{\cos^2 B}{\cos^2 y - \cos^2 B}$$

是ニ於テ左辺ノ $\operatorname{tg}^2 A$ ヲ $\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$ ト置キ分母ヲ掃ヘバ

$$\sin^2 A \cos^2 y - \sin^2 A \cos^2 B = \cos^2 A \cos^2 B$$

故ニ

$$\sin^2 A \cos^2 y = \cos^2 B(\sin^2 A + \cos^2 A)$$

$$\therefore \quad \sin^2 A \cdot \cos^2 y = \cos^2 B$$



注意. 證明スベキ式ハ文ノ三角函数ヲ含マズ故ニ假定式ヨリ之等ヲ消去スルニアリ.

(24). $a \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{tg} \beta$, $a^2x^2 = a^2 - b^2$ ナルトキハ $(1-x^2\sin^2\beta)(1-x^2\cos^2\alpha) = 1-x^2$.

解. 本題ハ假定式ヨリ $a, b$ ヲ消去スルニアリ.

假定式ヲ(1), (2)トスレバ

$(1)^2$ $\quad \dfrac{a^2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{b^2\sin^2\beta}{\cos^2\beta}$

$$\therefore \quad a^2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta = b^2 \cdot \sin^2\beta \cdot \cos^2\alpha$$

$$\therefore \quad \sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta = \frac{b^2}{a^2}\sin^2\beta \cdot \cos^2\alpha \qquad (3)$$

(2)ヨリ $\quad x^2 = \dfrac{a^2-b^2}{a^2} = 1 - \dfrac{b^2}{a^2}$

$$\therefore \quad \frac{b^2}{a^2} = 1 - x^2 \qquad (4)$$

(4)ヲ(3)ニ代入シテ $a, b$ ヲ消去シ簡單ニスレバ

$$\sin^2\alpha \cos^2\beta = (1-x^2)\sin^2\beta \cos^2\alpha.$$

$$(1-\cos^2\alpha)(1-\sin^2\beta) = \sin^2\beta\cos^2\alpha - x^2\sin^2\beta \cdot \cos^2\alpha.$$

$$1 - \cos^2\alpha - \sin^2\beta + x^2\sin^2\beta\cos^2\alpha = 0$$

両辺ニ $x^2$ ヲ乘ジテ

$$x^2 - x^2\cos^2\alpha - x^2\sin^2\beta + x^4\sin^2\beta\cos^2\alpha = 0$$

$1$ ヲ加減シテ

$$x^2 + (1 + x^2\cos^2\alpha - x^2\sin^2\beta + x^4\sin^2\beta\cos^2\alpha) - 1 = 0$$

$$x^2 + (1-x^2\sin^2\beta)(1-x^2\cos^2\alpha) - 1 = 0$$

$$\therefore \quad (1-x^2\sin^2\beta)(1-x^2\cos^2\alpha) = 1-x^2$$

(25) $\quad \cot^2 A = \dfrac{\cos^2 B}{\operatorname{tg}^2 C} + \dfrac{\sin^2 B}{\operatorname{tg}^2 D}$ ナルトキハ

$$\operatorname{cosec}^2 A = \frac{\cos^2 B}{\sin^2 C} + \frac{\sin^2 B}{\sin^2 D}$$

解. $\mathrm{cosec}^2A = 1 + \cot^2A$.

此式ノ右辺ノ $1 = \sin^2B + \cos^2B$, $\cot^2A$ ノ代リニ仮定式ヲ用ヒテ

$$= \sin^2B + \cos^2B + \frac{\cos^2B}{\tan^2C} + \frac{\sin^2B}{\tan^2D}$$

$$= \frac{\sin^2B}{\tan^2D} + \sin^2B + \frac{\cos^2B}{\tan^2C} + \cos^2B$$

$$= \sin^2B(\cot^2D+1) + \cos^2B(\cot^2C+1)$$

$$= \sin^2B \cdot \mathrm{cosec}^2D + \cos^2B \cdot \mathrm{cosec}^2C$$

$$= \frac{\sin^2B}{\sin^2D} + \frac{\cos^2B}{\sin^2C}$$

(26). $a, b, c$ ノ中少クモ一ツガ零ニ等シカラサルトキ

$$a = b\cos C + c\cos B$$

$$b = c\cos A + a\cos C$$

$$c = a\cos B + b\cos A \quad \text{ナレバ}$$

$$\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C + 2\cos A\cos B\cos C - 1 = 0 \quad (34年)$$

解. 仮定式ヲ(1),(2),(3)トシ $a \neq 0$ トス.

$a$ ニテ(1),(2),(3)ヲ夫々除スレバ

$$1 = \frac{b}{a}\cos C + \frac{c}{a}\cos B \qquad (1)'$$

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{a}\cos A + \cos C \qquad (2)'$$

$$\frac{c}{a} = \cos B + \frac{b}{a}\cos A \qquad (3)'$$

$(3)' \times \cos A + (2)'$

$$\frac{b}{a} = \cos C + \cos A\cos B + \frac{b}{a}\cos^2A$$

$$\therefore (1-\cos^2A)\frac{b}{a} = \cos C + \cos A\cos B$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{\cos C + \cos A\cos B}{1-\cos^2A} \qquad (4)$$

(4)ヲ(3)'ニ代入シテ簡単ニスレバ



$$\frac{c}{a} = \frac{\cos B + \cos C\cdot\cos A}{1-\cos^2A} \qquad (5)$$

(4),(5)ヲ(1)'ニ代入シテ

$$1 = \frac{\cos C + \cos A\cos B}{1-\cos^2A}\cdot\cos C + \frac{\cos B + \cos C\cdot\cos A}{1-\cos^2A}\cdot\cos B$$

$$\therefore 1-\cos^2A = \cos^2C + 2\cos A\cos B\cos C + \cos^2B$$

$$\therefore \cos^2A + \cos^2B + \cos^2C + 2\cos A\cos B\cos C - 1 = 0$$

別解. 仮定式ヲ(1),(2),(3)トシ

(1)ニ $\cos C$ ヲ乗ジテ(2)ヲ加ヘ簡単ニスレバ

$$b\sin^2C = c(\cos A + \cos B\cos C) \qquad (4)$$

(1)ニ $\cos B$ ヲ乗ジテ(3)ヲ加ヘ簡単ニスレバ

$$c\sin^2B = b(\cos A + \cos B\cos C) \qquad (5)$$

(4)ト(5)トヲ辺々相乗ジテ共通因数 $bc$ ヲ省ケバ

$$\sin^2C\cdot\sin^2B = (\cos A + \cos B\cos C)^2$$

此式ヲ変形シテ

$$(1-\cos^2C)(1-\cos^2B) = \cos^2A + 2\cos A\cos B\cos C + \cos^2B\cos^2C.$$

$$1-\cos^2B-\cos^2C = \cos^2A + 2\cos A\cos B\cos C$$

$$\therefore \cos^2A + \cos^2B + \cos^2C + 2\cos A\cos B\cos C - 1 = 0$$

(27) $\frac{\cos^4A}{\cos^2B} + \frac{\sin^4A}{\sin^2B} = 1$ ナルトキハ $\frac{\cos^4B}{\cos^2A} + \frac{\sin^4B}{\sin^2A} = 1$ ナリ.

解. 仮定式ノ右辺ノ $1$ ノ代リニ $\sin^2A + \cos^2A$ ヲ用フレバ

$$\frac{\cos^2A}{\cos^2B}(\cos^2A - \cos^2B) + \frac{\sin^2A}{\sin^2B}(\sin^2A - \sin^2B) = 0$$

$\cos^2B\cdot\sin^2B \neq 0$ トシテ $\frac{\cos^2A}{\cos^2B}\cdot\frac{\sin^2A}{\sin^2B}$ ニテ上式ヲ除シテ変形シテ

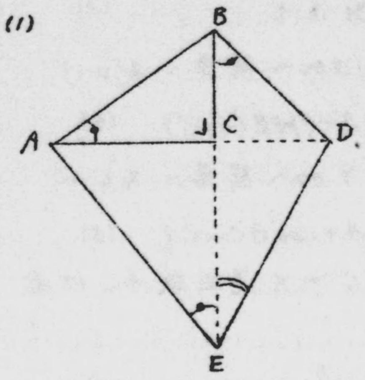
$$\frac{\sin^2B}{\sin^2A}(1-\sin^2A-1+\sin^2B)+\frac{\cos^2B}{\cos^2A}(1-\cos^2A-1+\cos^2B)=0$$

$$-\sin^2B+\frac{\sin^4B}{\sin^2A}-\cos^2B+\frac{\cos^4B}{\cos^2A}=0$$

$$\therefore \frac{\sin^4B}{\sin^2A}+\frac{\cos^4B}{\cos^2A}=1$$

## 問　　題

(1)




解. 幾何学ノ定理ニヨリ

$$B\hat{A}C=C\hat{B}D=A\hat{E}C$$

$$\therefore \operatorname{ty}B\hat{A}C=\operatorname{ty}C\hat{B}D=\operatorname{ty}A\hat{E}C$$

$$\operatorname{ty}BAC=\frac{BC}{AC}$$

$$\operatorname{ty}CBD=\frac{CD}{BC}$$

$$\operatorname{ty}AEC=\frac{AC}{CE}$$

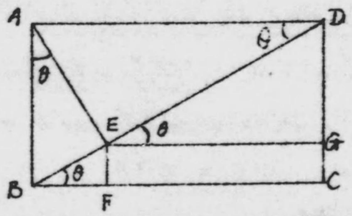
故ニ $\operatorname{ty}^3BAC=\operatorname{ty}BAC\cdot\operatorname{ty}CBD\cdot\operatorname{ty}AEC$

$$=\frac{BC}{AC}\cdot\frac{CD}{BC}\cdot\frac{AC}{CE}$$

$$=\frac{CD}{CE}$$

$$=\operatorname{ty}CED$$

(2)




解. $EF=a$, $EG=b$, $BD=c$.

幾何学ノ定理ニヨリテ

$$B\hat{A}E=E\hat{B}F=D\hat{E}G=E\hat{D}A=\theta$$ トス.

直角三角形 BEF ヨリ $\sin\theta=\frac{EF}{BE}=\frac{a}{BE}$

〃 ABE ヨリ $\sin\theta=\frac{BE}{AB}$



直角三角形 DBA ヨリ $\sin\theta=\frac{AB}{DB}=\frac{AB}{c}$

$$\therefore \sin^3\theta=\frac{a}{BE}\cdot\frac{BE}{AB}\cdot\frac{AB}{c}=\frac{a}{c} \quad (1)$$

又直角三角形 EDG ヨリ $\cos\theta=\frac{EG}{ED}=\frac{b}{ED}$

〃 DAE ヨリ $\cos\theta=\frac{ED}{AD}$

〃 DBA ヨリ $\cos\theta=\frac{AD}{BD}=\frac{AD}{c}$

$$\therefore \cos^3\theta=\frac{b}{ED}\cdot\frac{ED}{AD}\cdot\frac{AD}{c}=\frac{b}{c} \quad (2)$$

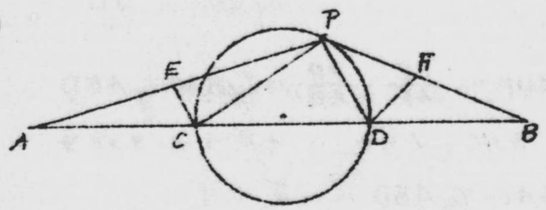
(1) 及(2) ヨリ

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

即 $\frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}}=1$

$$\therefore a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}$$

(3)




解. P ト A,C,D,B ヲ結ビ C 及 D ヨリ PD, PC ニ平行ニ引ケル線分ヲ CE, DF トスレバ $C\hat{P}D$ ハ半円上ノ角デ直角ナルヲ以テ $P\hat{C}E$ 及 $P\hat{D}F$ ハ夫々直角ナリ.

C ハ AD ノ中点ナレバ $PD=2CE$

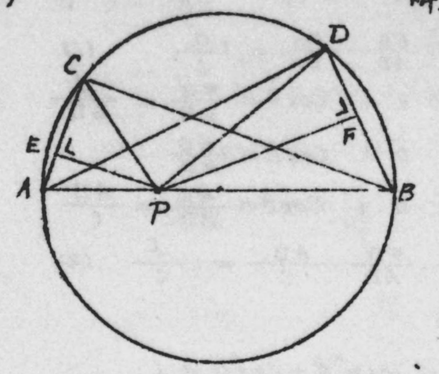
D ハ BC ノ中点ナレバ $PC=2DF$

$$\operatorname{ty}APC=\frac{CE}{PC}=\frac{CE}{2DF}$$

$$\operatorname{ty}BPD=\frac{AD}{PD}=\frac{AD}{2CE}$$

$$\therefore \operatorname{ty}APC\cdot\operatorname{ty}BPD=\frac{CE}{2DF}\cdot\frac{FD}{2CE}=\frac{1}{4}$$

(4)




解. P点ヨリ AC, BD ヘ垂線 PE, PF ヲ下セバ

$$\mathrm{ty}ACP = \frac{PE}{CE}$$

$$\mathrm{ty}BDP = \frac{PF}{DF}$$

$$\therefore \mathrm{ty}ACP \cdot \mathrm{ty}BDP = \frac{PE}{CE}\cdot\frac{PF}{DF} \qquad (1)$$

然ルニ $A\hat{C}B = A\hat{D}B = \hat{R}$

$\therefore$ PE // BC, PF // AD.

$\triangle ABC$ 及 $\triangle ABD$ ヨリ

$$\frac{CE}{AE} = \frac{BP}{AP} = \frac{BF}{DF}$$

$$\therefore \quad CE\cdot DF = AE\cdot BF \qquad (2)$$

(1), (2) ヨリ

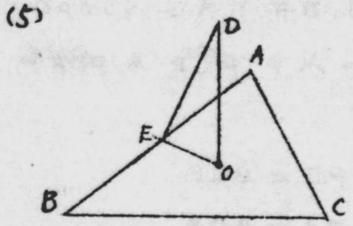
$$\mathrm{ty}ACP\cdot\mathrm{ty}BDP = \frac{PE}{AE}\cdot\frac{PF}{BF} = \mathrm{ty}BAC\cdot\mathrm{ty}ABD$$

然ルニ $B\hat{A}C$, $A\hat{B}D$ ハ一定ナルヲ以テ

$\mathrm{ty}BAC\cdot\mathrm{ty}ABD$ ハ一定ナリ.

従テ左辺 $\mathrm{ty}ACP\,\mathrm{ty}BDP = $ 一定

(5)




解. AB=1 トスレバ

$$CE = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$OC = OA = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$EO = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$ED = \sqrt{EO^2 + OD^2} = \frac{\sqrt{39}}{6}$$

$$\therefore \quad \cos DEO = \frac{EO}{ED} = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{6}{\sqrt{39}} = \sqrt{\frac{1}{13}}$$



## 問題

次ノ等式ヲ證明セヨ.

(1) $(1+\sin 45° + \sin 30°)(1-\cos 45° + \cos 60°) = \frac{7}{4}$

解. 左辺 $= (1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2})$

$= \{(1+\frac{1}{2})+\frac{1}{\sqrt{2}}\}\{(1+\frac{1}{2})-\frac{1}{\sqrt{2}}\}$

$= (1+1+\frac{1}{4}) - \frac{1}{2}$

$= \frac{7}{4}$

(2). $\sin^2 72° - \sin^2 60° = \frac{\sqrt{5}-1}{8}$

解. $\sin^2 72° = \cos 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

左辺 $= \left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= \frac{10+2\sqrt{5}}{16} - \frac{3}{4}$

$= \frac{-2+2\sqrt{5}}{16}$

$= \frac{\sqrt{5}-1}{8}$

## 問題

(1). a, x ガ同号ノ数ナレバ $\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+a}} = \mathrm{arcty}\sqrt{\frac{x}{a}}$.

解. $\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+a}} = k$ トオケバ $\sin k = \sqrt{\frac{x}{x+a}}$.

之ヨリ $\sin^2 k = \frac{x}{x+a}$, 故ニ $\cos^2 k = 1 - \sin^2 k$

ヨリ $\cos^2 k = 1 - \frac{x}{x+a} = \frac{a}{x+a}$.

$\therefore \mathrm{ty}^2 k = \frac{\sin^2 k}{\cos^2 k} = \frac{x}{a}$ トナル.

$\therefore \mathrm{ty}\, k = \sqrt{\frac{x}{a}}$

$\therefore \quad k = \mathrm{arc\,ty}\sqrt{\frac{x}{a}}$ 故ニ題言ノ如シ.

# 第 二 編

## 和角,差角,倍角,分角, 三角函数

### 7. 二角, 和及差, 正弦,餘弦, 公式

$$\sin(x+y) = \sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y.$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cdot\cos y - \cos x\cdot\sin y.$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y.$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cdot\cos y + \sin x\cdot\sin y.$$

二角, 和及差, 正切,餘切, 公式.

$$\operatorname{ty}(x+y) = \frac{\operatorname{ty}x+\operatorname{ty}y}{1-\operatorname{ty}x\cdot\operatorname{ty}y}.$$
$$\operatorname{ty}(x-y) = \frac{\operatorname{ty}x-\operatorname{ty}y}{1+\operatorname{ty}x\cdot\operatorname{ty}y},$$
$$\cot(x+y) = \frac{\cot x\cot y-1}{\cot x+\cot y},$$
$$\cot(x-y) = \frac{\cot x\cdot\cot y+1}{\cot y-\cot x}.$$

注意(1).

$$\operatorname{ty}x \pm \operatorname{ty}y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cdot\cos y}.$$
$$\cot x \pm \cot y = \frac{\sin(y\pm x)}{\sin x\cdot\sin y},$$

注意(2).

$$\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2x-\sin^2y = \cos^2y-\cos^2x.$$
$$\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2x-\sin^2y = \cos^2y-\sin^2x.$$

注意(3).

$$\operatorname{ty}x+\cot y = \frac{\cos(x-y)}{\cos x\cdot\sin y},$$
$$\cot x\pm\operatorname{ty}y = \frac{\cos(x\mp y)}{\sin x\cdot\cos y}.$$

### 問 題

(1). $\sin A = \frac{15}{17}$, $\cos B = \frac{4}{5}$ ナルトキ $\sin(A+B)$, $\cos(A+B)$ 及 $\operatorname{ty}(A+B)$ ヲ求メヨ.

解(1). $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$.



$$\sin B = \pm\sqrt{1-\cos^2B}$$
$$= \pm\sqrt{1-(\tfrac{4}{5})^2} = \pm\frac{3}{5}$$
$$\cos A = \pm\sqrt{1-\sin^2A}$$
$$= \pm\sqrt{1-(\tfrac{15}{17})^2} = \pm\frac{8}{17}$$
$$\therefore \sin(A+B) = \frac{15}{17}\cdot\frac{4}{5} + (\pm\tfrac{8}{17})(\pm\tfrac{3}{5})$$
$$= \frac{12}{17} \pm \frac{24}{85}$$
$$= \underbrace{\frac{84}{85}} \text{ 或ハ } \underbrace{\frac{36}{85}}$$

(ロ). $\cos(A+B) = \cos A\cdot\cos B - \sin A\cdot\sin B$.

$$= (\pm\tfrac{8}{17})\cdot\tfrac{4}{5} - \tfrac{15}{17}(\pm\tfrac{3}{5})$$
$$= \pm\frac{32}{85} \mp \frac{45}{85}$$
$$= \pm\left(\frac{32}{85} \pm \frac{45}{85}\right)$$
$$= \pm\underbrace{\frac{77}{85}} \text{ 或 } \pm\underbrace{\frac{13}{85}}$$

(ハ). $\operatorname{ty}(A+B) = \frac{\operatorname{ty}A+\operatorname{ty}B}{1-\operatorname{ty}A\operatorname{ty}B}$,

$$\operatorname{ty}A = \frac{\sin A}{\cos A} = \pm\frac{15}{8}$$
$$\operatorname{ty}B = \pm\frac{3}{4}$$
$$\therefore \operatorname{ty}(A+B) = \frac{\pm\frac{15}{8}\pm\frac{3}{4}}{1-(\pm\frac{15}{8})(\pm\frac{3}{4})}$$
$$= \pm\underbrace{\frac{84}{13}} \text{ 或 } \pm\underbrace{\frac{36}{77}}$$

(2). $\operatorname{ty}A = \frac{1}{2}$, $\operatorname{ty}B = \frac{2}{3}$ ナルトキ $\sin(A-B)$, $\cos(A-B)$ 及 $\operatorname{ty}(A-B)$ ヲ求メヨ.

解.(1). $\operatorname{ty}(A-B) = \frac{\operatorname{ty}A-\operatorname{ty}B}{1+\operatorname{ty}A\cdot\operatorname{ty}B}$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} = -\frac{1}{8}$$

(ロ). $\sin(A-B)$

公式 $\sin x = \dfrac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$

$\therefore \quad \sin(A-B) = \dfrac{\tan(A-B)}{\pm\sqrt{1+\tan^2(A-B)}}$

$$= \frac{-\frac{1}{8}}{\pm\sqrt{1+(-\frac{1}{8})^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{65}}$$

(ハ). $\cos(A-B) = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2(A-B)}}$

$$= \frac{1}{\pm\sqrt{1+(-\frac{1}{8})^2}} = \pm\frac{8}{\sqrt{65}}$$

注意 $\tan(A-B)$ ノ値ヲ容易ニ知ルヲ以テ公式

$$\sin x = \frac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}, \quad \cos x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

ヲ活用シタリ.

(3). $\frac{\pi}{15} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{10}$ ナルコトヨリ $\sin\frac{\pi}{15}$ ヲ求メヨ.

解. $\sin\frac{\pi}{15} = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{10}\right)$

$$= \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{10} - \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{10}.$$

然ル= $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

$\therefore$ $$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8} - \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}}{8}$$



次ノ等式ヲ證明セヨ.

(4). $1 + \tan(A+B)\tan(A-B) = \dfrac{1-2\sin^2 B}{\cos^2 A - \sin^2 B}$

解. 左辺 $= 1 + \dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}\cdot\dfrac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}$ 注意(2)ニヨリ

$$= 1 + \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A - \sin^2 B}$$

$$= \frac{1-2\sin^2 B}{\cos^2 A - \sin^2 B}$$

(5). $\cos^2 A + \cos^2(A+B) - 2\cos A\cos B\cos(A+B) = \sin^2 B.$

解. 左辺 $= \cos^2 A + \cos(A+B)\{\cos(A+B) - 2\cos A\cos B\}.$

$$= \cos^2 A + \cos(A+B)\{-\cos(A-B)\}$$

$$= \cos^2 A - \cos(A+B)\cdot\cos(A-B)$$

$$= \cos^2 A - \cos^2 A + \sin^2 B$$

$$= \sin^2 B$$

注意 (2) ニヨリ $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B$

此等ノ公式ハ式ノ変形及問題解法上重要ナルモノナリ.

(6). $(\cos\theta+\sin\theta)(\cos 2\theta+\sin 2\theta) = \cos\theta + \sin 3\theta.$

解. 左辺 $= \cos\theta\cdot\cos 2\theta + \cos\theta\sin 2\theta + \sin\theta\cos 2\theta$

$$+ \sin\theta\sin 2\theta.$$

$$= \cos(2\theta-\theta) + \sin(\theta+2\theta)$$

$$= \cos\theta + \sin 3\theta$$

別解 右辺 $= \cos(2\theta-\theta) + \sin(\theta+2\theta)$

$$= \cos 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta\sin\theta$$

$$+ \sin\theta\cdot\cos 2\theta + \cos\theta\cdot\sin 2\theta.$$

$$= \cos 2\theta(\cos\theta+\sin\theta)+\sin 2\theta(\cos\theta+\sin\theta)$$

$$= (\sin\theta+\cos\theta)(\sin 2\theta+\cos 2\theta)$$

(7). $\tan\beta = \dfrac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1-n\sin^2\alpha}$ ナルトキハ $\tan(\alpha-\beta)=(1-n)\tan\alpha$.

解. 公式 $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ ノ右辺ヲ求ケル

$\tan\beta$ ヲ仮定式ヲ代入シテ

$$\tan(\alpha-\beta) = \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1-n\sin^2\alpha}\right) \Big/ \left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1-n\sin^2\alpha}\right)$$

$$= \frac{\sin\alpha(1-n\sin^2\alpha)-n\sin\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1-n\sin^2\alpha)+n\sin^2\alpha\cos\alpha}$$

$$= (\sin\alpha - n\sin\alpha)/\cos\alpha$$

$$= \frac{(1-n)\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= (1-n)\tan\alpha$$

注意. 問題(1)(2)ニ於テ A.B ヲ正ノ鋭角トスレバ複符号(±)ハ正(+)ノミヲ取ルベシ.

類題(1). A,B ヲ正ノ鋭角トシ $\sin A=\frac{12}{13}$, $\cos B=\frac{4}{5}$ ヲ知リテ $\sin(A-B)$ ヲ求ム.

解. $\cos A = \pm\sqrt{1-\sin^2 A} = \pm\frac{5}{13}$

$\sin B = \pm\frac{3}{5}$

然ルニ A,B 共ニ正ノ鋭角ナルヲ以テ複符号ハ何レモ正ヲ取リ $\cos A=\frac{15}{13}$, $\sin B=\frac{3}{5}$.

$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$.

$$= \frac{12}{13}\cdot\frac{4}{5} - \frac{5}{13}\cdot\frac{3}{5}$$



$$= \frac{33}{65}$$

類題(2). $\tan B = \dfrac{2\sin A\sin C}{\sin(A+C)}$ ナレバ $\cot A, \cot B, \cot C$ ガ等差級数ヲナスコトヲ證セヨ.

解. 假定式ヨリ

$$\tan B = \frac{2\sin A\sin C}{\sin A\cos C+\cos A\sin C}$$

右辺ノ分母ヲ $\sin A\sin C$ ニテ除シ

$$\tan B = \frac{2}{\cot C+\cot A}$$

$\therefore \cot C+\cot A = 2\cot B$

依リテ $\cot A, \cot B, \cot C$ ハ等差級数ヲナス.

類題(3) $\sec\alpha$ 及 $\sec\beta$ ヲ知リテ $\sec(\alpha+\beta)$ ヲ求ム.

解. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sqrt{(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)}$$

$$= \frac{1}{\sec\alpha\cdot\sec\beta} - \frac{\sqrt{(\sec^2\alpha-1)(\sec^2\beta-1)}}{\sec\alpha\cdot\sec\beta}$$

故ニ $\sec(\alpha+\beta) = \dfrac{1}{\cos(\alpha+\beta)}$

類題(4). 正切ガ夫々 $\sqrt{7}+\sqrt{6}$, $\sqrt{7}-\sqrt{6}$ ナル二ツノ鋭角ノ和ヲ求ム.

解. $\tan A=\sqrt{7}+\sqrt{6}$, $\tan B=\sqrt{7}-\sqrt{6}$ トスレバ

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

$$= \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{6})+(\sqrt{7}-\sqrt{6})}{1-(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})}$$

$$= \frac{2\sqrt{7}}{0}$$

$$= \infty$$

而シテ A, B 共ニ鋭角ナルヲ以テ其和 (A+B) ハ 180° ヨリ小ナルベク而シテ其正切ガ ∞ トナルヲ以テ

$$\underline{A+B=90^\circ}$$

類題(5). $tg\beta,\ tg2\beta,\ tg\alpha$ ガ等差級数ヲナストキハ

$$tg(\alpha-\beta) = \sin 2\beta.$$

解. 假定ヨリ $2tg2\beta = tg\alpha + tg\beta.$

之ヨリ $tg\alpha = \frac{tg\beta(3+tg^2\beta)}{1-tg^2\beta}$

依リテ $tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$ ニ代入スレバ

$$tg(\alpha-\beta) = tg\beta\left(\frac{3+tg^2\beta}{1-tg^2\beta}-1\right)\Big/\left\{1+\left[tg^2\beta(3+tg^2\beta)\div(1-tg^2\beta)\right]\right\}$$

$$= \frac{2tg\beta}{\sec^2\beta}$$

$$= \underline{\sin 2\beta}$$

8. 三ツノ角ノ和ノ三角函数

$$\sin(x+y+z) = \sin x\cdot\cos y\cdot\cos z + \sin y\cos x\cdot\cos z + \sin z\cdot\cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y\sin z.$$



$$\cos(x+y+z) = \cos x\cdot\cos y\cdot\cos z - \cos x\cdot\sin y\sin z - \cos y\cdot\sin x\cdot\sin z - \cos z\sin x\cdot\sin y.$$

$$tg(x+y+z) = \frac{tgx+tgy+tgz-tgx\cdot tgy\cdot tgz}{1-tgy\cdot tgz-tgz\cdot tgx-tgx\cdot tgy}$$

9. 角ノ乗法公式 (其一).

倍角ノ三角函数

$$\sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x.$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}.$$

$$\sin 4x = 2\sin 2x\cdot\cos 2x.$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

$$tg2x = \frac{2tgx}{1-tg^2 x}.$$

$$\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}.$$

$2x$ ノ正弦餘弦ヲ $tgx$ ニテ表スコト.

$$\sin 2x = \frac{2tgx}{1+tg^2 x}.$$

$$\cos 2x = \frac{1-tg^2 x}{1+tg^2 x}.$$

$x$ ノ正弦餘弦及正切ヲ $tg\frac{x}{2}$ ニテ表スコト.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}.$$

$$\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}.$$

$$tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}.$$

## 問　題

(1). $tg\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$ ナルトキ $\sin A, \cos A$ 及ヒ $tgA$ ヲ求ム.

解. 公式ニヨリ

$$\sin A=\frac{2tg\frac{A}{2}}{1+tg^2\frac{A}{2}}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1+(\frac{1}{2})^2}=\frac{4}{5}$$

$$\cos A=\frac{1-tg^2\frac{A}{2}}{1+tg^2\frac{A}{2}}=\frac{1-(\frac{1}{2})^2}{1+(\frac{1}{2})^2}=\frac{3}{5}$$

$$tgA=\frac{2tg\frac{A}{2}}{1-tg^2\frac{A}{2}}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-(\frac{1}{2})^2}=\frac{4}{3}$$

(2). $tg\alpha=\frac{m}{n}$ ナルトキ $m\cos 2\alpha+n\sin 2\alpha$ ノ値ヲ求ム.

解. $\sin 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$, $\cos 2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$$m\cos 2\alpha+n\sin 2\alpha$$

$$=m\cdot\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}+n\cdot\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{m(1-tg^2\alpha)+2ntg\alpha}{1+tg^2\alpha}.$$

コノ式ニ $tg\alpha=\frac{m}{n}$ ヲ代入シテ

$$=\frac{m(1-\frac{m^2}{n^2})+2n\frac{m}{n}}{1+\frac{m^2}{n^2}}$$

$$=\frac{m(3n^2-m^2)}{m^2+n^2}$$

次ノ等式ヲ證明セヨ. (3—8)

(3). $tgA=\cot A-2\cot 2A$.

解　右辺 $=\frac{1}{tgA}-\frac{2}{tg2A}$

$$=\frac{1}{tgA}-\frac{1-tg^2A}{tgA}=\frac{1-1+tg^2A}{tgA}=tgA$$



(4). $\cos^5A-\sin^5A=\cos 2A(1-\frac{1}{2}\sin^2 2A)$.

解. 左辺 $=(\cos^4A+\sin^4A)(\cos^4A-\sin^4A)$

$=(\cos^4A+\sin^4A)(\cos^2A+\sin^2A)(\cos^2A-\sin^2A)$.

$\sin^2A+\cos^2A=1$, $\cos^2A-\sin^2A=\cos 2A$

$=(\cos^4A+\sin^4A)\cos 2A$.

$=\{(\cos^2A+\sin^2A)-2\cos^2A\sin^2A\}\cos 2A$.

$=\{1-2\cos^2A\sin^2A\}\cos 2A$.

$=\{1-\frac{1}{2}(2\sin A\cos A)^2\}\cos 2A$.

$=\{1-\frac{1}{2}\sin^2 2A\}\cos 2A$.

注意. $\sin 2A=2\sin A\cos A$.

$\therefore \sin^2 2A=4\sin^2A\cos^2A$.

(5). $(\cos A+\cos B)^2+(\sin A+\sin B)^2=4\cos^2\frac{A-B}{2}$.

解. 左辺 $=\cos^2A+2\cos A\cos B+\cos^2B+\sin^2A$

$+2\sin A\sin B+\sin^2B$.

$=(\sin^2A+\cos^2A)+(\sin^2B+\cos^2B)+2(\cos A\cos B$

$+\sin A\sin B)$.

$=1+1+2\cos(A-B)$

$=2+2\cos(A-B)$

$=2\{1+\cos(A-B)\}$

$1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$

$\therefore =2\{2\cos^2\frac{A-B}{2}\}=4\cos^2\frac{A-B}{2}$

(6). $\sin 4A\cdot tg^4A+4tg^3A+2\sin 4A\,tg^2A-4tgA+\sin 4A=0$.

解. 左辺 $= \sin 4A(\tan^4 A + 2\tan^2 A + 1) + 4\tan^3 A - 4\tan A$.

$= \sin 4A(\tan^2 A + 1)^2 + 4\tan^3 A - 4\tan A$.

$= 2\cdot \sin 2A \cdot \cos 2A \cdot (\tan^2 A + 1)^2 + 4\tan^3 A - 4\tan A$.

$= 2\cdot \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A} \cdot \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} \cdot (\tan^2 A + 1)^2 + 4\tan^3 A - 4\tan A$.

$= 2\cdot 2\tan A(1-\tan^2 A) + 4\tan^3 A - 4\tan A$.

$= 4\tan A - 4\tan^3 A + 4\tan^3 A - 4\tan A$.

$= 0$

別解. 左辺 $= \sin 4A(\tan^4 A + 2\tan^2 A + 1) + 4\tan A(\tan^2 A - 1)$.

$= \sin 4A(\tan^2 A + 1)^2 + 4\tan A\left(\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} - 1\right)$.

$= \sin 4A \sec^4 A + 4\tan A\left(\frac{\sin^2 A - \cos^2 A}{\cos^2 A}\right)$.

$= 2\cdot \sin 2A \cos 2A \sec^4 A - 4\tan A \cos 2A \sec^2 A$.

$= 2\cdot \cos 2A \sec^2 A(\sin 2A \sec^2 A - 2\tan A)$.

$= 2\cos 2A \cdot \sec^2 A(2\sin A \cos A \sec^2 A - 2\tan A)$.

$= 2\cos 2A \sec^2 A(2\tan A - 2\tan A)$

$= 0$

(7). $(2\cos\theta - 1)(2\cos 2\theta - 1)(2\cos 2^2\theta - 1) \cdots\cdots (2\cos 2^{n-1}\theta - 1)$

$= \frac{2\cos 2^n\theta + 1}{2\cos\theta + 1}$

解. $2\cos\theta - 1 = \frac{4\cos^2\theta - 1}{2\cos\theta + 1} = \frac{2(2\cos^2\theta - 1) + 1}{2\cos\theta + 1} = \frac{2\cos 2\theta + 1}{2\cos\theta + 1}$

同様ニシテ

$2\cos 2\theta - 1 = \frac{2\cos 4\theta + 1}{2\cos 2\theta + 1}$.

$2\cos 2^2\theta - 1 = \frac{2\cos 2^3\theta + 1}{2\cos 2^2\theta + 1}$.



此理ヲ推シテ

$2\cos 2^{n-1}\theta - 1 = \frac{2\cos 2^n\theta + 1}{2\cos 2^{n-1}\theta + 1}$

故ニ此等ノ等式ヲ辺々相乗ジテ

左辺 $= \frac{2\cos 2\theta + 1}{2\cos\theta + 1} \cdot \frac{2\cos 2^2\theta + 1}{2\cos 2\theta + 1} \cdot \frac{2\cos 2^3\theta + 1}{2\cos 2^2\theta + 1} \cdots\cdots$

$\cdots\cdots \cdot \frac{2\cos 2^n\theta + 1}{2\cos 2^{n-1}\theta + 1}$.

$= \frac{2\cos 2^n\theta + 1}{2\cos\theta + 1}$

別解. $2\cos 2^{n-1}\theta - 1 = \frac{4\cos^2 2^{n-1}\theta - 1}{2\cos 2^{n-1}\theta + 1}$

$= \frac{2(2\cos^2 2^{n-1}\theta - 1) + 1}{2\cos 2^{n-1}\theta + 1}$

$= \frac{2\cos 2^n\theta + 1}{2\cos 2^{n-2}\theta + 1}$

$= \frac{2\cos 2^n\theta + 1}{2\cos 2^{n-1}\theta + 1}$

依リテ所題ノ式ノ左辺ハ

$= \frac{2\cos 2\theta + 1}{2\cos\theta + 1} \cdot \frac{2\cos 2^2\theta + 1}{2\cos 2\theta + 1} \cdot \frac{2\cos 2^3\theta + 1}{2\cos 2^2\theta + 1} \cdot \cdots\cdots$

$\cdots\cdots \frac{2\cos 2^n\theta + 1}{2\cos 2^{n-1}\theta + 1}$.

$= \frac{2\cos 2^n\theta + 1}{2\cos\theta + 1}$

注意. $2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$

$\therefore 2\cos^2 2^{n-1}\theta - 1 = \cos 2^n\theta$

$(2^{n-1}\theta) = x$

$\therefore\ 2x = 2(2^{n-1}\theta) = 2^n\theta.$

(8). $(1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)(1+\sec 2^3\theta)\cdots\cdots(1+\sec 2^n\theta)$

$= \dfrac{\tan 2^n\theta}{\tan\theta}.$

解. $1+\sec 2\theta = 1+\dfrac{1}{\cos 2\theta}$

$= \dfrac{1+\cos 2\theta}{\cos 2\theta}$

$= \dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}\cdot\dfrac{1+\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

$= \tan 2\theta\cdot\cot\theta$

$= \dfrac{\tan 2\theta}{\tan\theta}$

同様ニシテ $1+\sec 2^2\theta = \dfrac{\tan 2^2\theta}{\tan 2\theta}$ 此理ヲ推シテ

$1+\sec 2^n\theta = \dfrac{\tan 2^n\theta}{\tan 2^{n-1}\theta}$

$\therefore$ 左辺 $= \dfrac{\tan 2\theta}{\tan\theta}\cdot\dfrac{\tan 2^2\theta}{\tan 2\theta}\cdot\dfrac{\tan 2^3\theta}{\tan 2^2\theta}\cdots\cdots\dfrac{\tan 2^n\theta}{\tan 2^{n-1}\theta}$

$= \dfrac{\tan 2^n\theta}{\tan\theta}$

別解.

$1+\sec 2^n\theta = \dfrac{\cos 2^n\theta+1}{\cos 2^n\theta}$

$= \dfrac{2\cos^2(2^{n-1}\theta)}{\cos 2^n\theta}$

$= \dfrac{\sin 2^n\theta}{\cos 2^n\theta}\cdot\dfrac{2\cos^2(2^{n-1}\theta)}{\sin 2^n\theta}$

$= \dfrac{\tan 2^n\theta}{\tan 2^{n-1}\theta}$

故ニ此等ノ等式ヲ相乗ズレバ



所題ノ式ノ左辺 $= \dfrac{\tan 2^n\theta}{\tan\theta}$

注意 $1+\sec 2\theta = 1+\dfrac{1}{\cos 2\theta} = \dfrac{\cos 2\theta+1}{\cos 2\theta}$

然ルニ $\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ ヲ代入シテ

$= \dfrac{\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}+1}{\frac{1+\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}} = \dfrac{2}{1-\tan^2\theta}$

$= \dfrac{2\tan\theta}{(1-\tan^2\theta)\tan\theta}$

$= \dfrac{\tan 2\theta}{\tan\theta}$

(9). $2\tan A = 3\tan B$ ナレバ $\tan(A-B) = \dfrac{\tan B}{2+3\tan^2 B} = \dfrac{\sin 2B}{5-\cos 2B}$

解. $\tan A = \dfrac{3}{2}\tan B$

$\tan(A-B) = \dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\cdot\tan B}$

$= \left(\dfrac{3}{2}\tan B-\tan B\right)\Big/\left(1+\dfrac{3}{2}\tan^2 B\right)$

$= \dfrac{\tan B}{2+3\tan^2 B}$

コノ式ノ分母子ニ $\cos^2 B$ ヲ乗ジテ

$= \dfrac{\sin B\cos B}{2\cos^2 B+3\sin^2 B}$ 分母子ニ2ヲ乗ジテ

$= \dfrac{2\sin B\cos B}{2(1+\cos 2B)+3(1-\cos 2B)}$

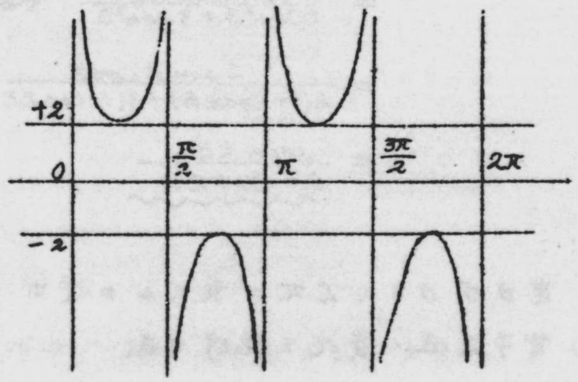
$= \dfrac{\sin 2B}{5-\cos 2B}$

(10). 角 $\theta$ ガ $0$ ヨリ $2\pi$ ニ変ズル ニ従ヒ $\tan\theta+\cot\theta$ ノ符号及値ノ変化ヲ説明セヨ。

解. $tg\theta+\cot\theta=tg\theta+\frac{1}{tg\theta}$.

$\theta$ヲ0ヨリ$\frac{\pi}{2}$=変ゼシムレバ$tg\theta$ハ零ヨリ$\infty$=変ズ、故=$tg\theta+\frac{1}{tg\theta}$ハ恒=正ニシテ$\theta=\frac{\pi}{4}$ナルトキ最小値ヲ有ス、何トナレバ$(tg\theta+\frac{1}{tg\theta})^2=(tg\theta-\frac{1}{tg\theta})^2+4$, 是=依リテ$(tg\theta+\frac{1}{tg\theta})^2$ハ$tg\theta-\frac{1}{tg\theta}$ガ零ナルトキハ最小値4ヲ有ス、即$tg^2\theta=1$ナルトキ最小値4ヲ有ツベシ. 是=依リテ$tg\theta+\cot\theta$ハ$\theta$ノ零ヨリ$\frac{\pi}{4}$=変ズル=従ヒ$\infty$ヨリ2=減ジ而シテ$\theta$ノ$\frac{\pi}{4}$ヨリ$\frac{\pi}{2}$=変ズル=従ヒ2ヨリ$\infty$=増スベシ、$\theta$ヲ$\frac{\pi}{2}$ヨリ$\pi$=変ゼシムレバ$tg\theta+\cot\theta$ハ$\theta$ノ零ヨリ$\frac{\pi}{2}$=変ズルトキ得タルモノト同数値, 異符号ニシテ且反対ノ順序ノモノヲ得ベシ.

$\theta$ヲ$\pi$ヨリ$2\pi$=変ゼシムレバ$tg\theta+\cot\theta$ハ$\theta$ノ零ヨリ$\pi$=変ズルトキ得タルモノト同値ノモノヲ得ベシ.






10. 角ノ乗法公式 (其二)

$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$.

$$\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}.$$

$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$.

$$\cos^3 x=\frac{3\cos x+\cos 3x}{4}.$$

$$tg\,3x=\frac{3tg\,x-tg^3 x}{1-3tg^2 x}.$$

$$\cot 3x=\frac{\cot^3 x-3\cot x}{3\cot^2 x-1}.$$

注意、一ツノ角ノ餘弦ハ其前ノ角ノ餘弦=$2\cos x$ヲ乗ジタルモノヨリ其又前ノ角ノ餘弦ヲ減ジタルモノニ等シ、

$\cos nx=2\cos(n-1)x\cdot\cos x-\cos(n-2)x$.

又正弦モ同様ナリ.

$\sin nx=2\sin(n-1)x\cdot\cos x-\sin(n-2)x$.

4x, 5x, 6x, 7xノ正弦, 餘弦ハ次ノ如シ.

$\sin 4x=(4\sin x-8\sin^3 x)\cos x$.

$\cos 4x=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$.

$\sin 5x=16\sin^5 x-20\sin^3 x+5\sin x$.

$\cos 5x=16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x$.

$\sin 6x=(6\sin x-32\sin^3 x+32\sin^5 x)\cos x$.

$\cos 6x=-(1-18\cos^2 x+48\cos^4 x-32\cos^6 x)$.

$\sin 7x=7\sin x-56\sin^3 x+112\sin^5 x-64\sin^7 x$.

$\cos 7x=-7\cos x+56\cos^3 x-112\cos^5 x+64\sin^7 x$.

## 問　題

次，等式ヲ證明セヨ.

(1). $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\sin 3y}{\sin y} = 4\sin(y+x)\sin(y-x)$.

解. 左辺 $= \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x} - \frac{3\sin y - 4\sin^3 y}{\sin y}$

$= 3 - 4\sin^2 x - 3 + 4\sin^2 y$

$= 4(\sin^2 y - \sin^2 x)$

$= 4\sin(y+x)\sin(y-x)$

注意. $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$.

(2). $4\sin\theta\cdot\sin(60°+\theta)\sin(60°-\theta) = \sin 3\theta$.

解. 前題注意ニヨリテ左辺ヲ変形スレバ

左辺 $= 4\sin\theta(\sin^2 60° - \sin^2\theta)$

$= 4\sin\theta\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sin^2\theta\right\}$

$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$= \sin 3\theta$

(3). $4\cos\theta\cdot\cos(60°-\theta)\cos(60°+\theta) = \cos 3\theta$.

解. 左辺 $= 4\cos\theta\{\cos^2 60° - \sin^2\theta\}$

$= 4\cos\theta\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \sin^2\theta\right\}$

$= 4\cos\theta\left\{\frac{1}{4} - (1-\cos^2\theta)\right\}$

$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$= \cos 3\theta$

(4). $\tan\theta\cdot\tan(60°+\theta)\tan(60°-\theta) = \tan 3\theta$.

解. 左辺 $= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin(60°+\theta)\sin(60°-\theta)}{\cos(60°+\theta)\cos(60°-\theta)}$



$= \frac{\sin\theta(\sin^2 60° - \sin^2\theta)}{\cos\theta(\cos^2 60° - \sin^2\theta)} = \frac{\sin\theta\{\frac{3}{4} - \sin^2\theta\}}{\cos\theta\{\frac{1}{4} - (1-\cos^2\theta)\}}$

$= \frac{\sin\theta(\frac{3}{4} - \sin^2\theta)}{\cos\theta(\frac{1}{4} - 1 + \cos^2\theta)}$　分母子ニ4ヲ乗ジテ

$= \frac{3\sin\theta - 4\sin^3\theta}{4\cos^3\theta - 3\cos\theta}$

$= \frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta}$

$= \tan 3\theta$

(5). $4(\cos^3 20° + \cos^3 40°) = 3(\cos 20° + \cos 40°)$.

解. 公式 $\cos^3\theta = \frac{3\cos\theta + \cos 3\theta}{4}$.

左辺 $= 4\left(\frac{3\cos 20° + \cos 60°}{4} + \frac{3\cos 40° + \cos 120°}{4}\right)$

$= 3\cos 20° + \cos 60° + 3\cos 40° + \cos 120°$.

然ル $= \cos 60° + \cos 120° = \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) = 0$.

∴ $= 3(\cos 20° + \cos 40°)$

(6). $\cos^3\alpha + \cos^3(120°+\alpha) + \cos^3(120°-\alpha) = \frac{3}{4}\cos 3\alpha$.

解. 公式 $\cos^3\theta = \frac{1}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta)$ ヲ用ヒテ左辺ヲ変形スレバ

左辺 $= \frac{1}{4}(3\cos\alpha + \cos 3\alpha) + \frac{1}{4}\{3\cos(120°+\alpha) + \cos 3(120°+\alpha)\}$

$+ \frac{1}{4}\{3\cos(120°-\alpha) + \cos 3(120°-\alpha)\}$.

$= \frac{3}{4}\{\cos\alpha + \cos(120°+\alpha) + \cos(120°-\alpha)\}$.

$+ \frac{1}{4}\{\cos 3\alpha + \cos 3(120°+\alpha) + \cos 3(120°-\alpha)\}$.

$= \frac{3}{4}\{\cos\alpha + \cos(120°+\alpha) + \cos(120°-\alpha)\}$

$+ \frac{1}{4}\{\cos 3\alpha + \cos(360°+3\alpha) + \cos(360°-3\alpha)\}$.

$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cdot\cos y$

及 $\cos(2n\pi \pm \alpha) = \cos\alpha$　ニ注意スレバ

$$= \frac{3}{4}\{\cos\alpha + 2\cos 120^\circ \cos\alpha\} + \frac{1}{4}\{\cos 3\alpha + \cos 3\alpha + \cos(-3\alpha)\}.$$

$$= \frac{3}{4}\{\cos\alpha + 2(-\tfrac{1}{2})\cos\alpha\} + \frac{1}{4}\{\cos 3\alpha + \cos 3\alpha + \cos 3\alpha\}.$$

$$= \frac{3}{4}(\cos\alpha - \cos\alpha) + \frac{1}{4}(3\cos 3\alpha)$$

$$= \underline{\frac{3}{4}\cos 3\alpha}$$

(7) $\operatorname{ty} 3x + \operatorname{ty} 2x + \operatorname{ty} x = 0$ ヨリ $\operatorname{ty} x$ ヲ求メヨ.

解. 左辺 $= \frac{3\operatorname{ty} x - \operatorname{ty}^3 x}{1 - 3\operatorname{ty}^2 x} + \frac{2\operatorname{ty} x}{1 - \operatorname{ty}^2 x} + \operatorname{ty} x$

$$= \frac{(1-\operatorname{ty}^2 x)(3\operatorname{ty} x - \operatorname{ty}^3 x) + 2\operatorname{ty} x(1 - 3\operatorname{ty}^2 x) + \operatorname{ty} x(1-\operatorname{ty}^2 x)}{(1-3\operatorname{ty}^2 x)(1-\operatorname{ty}^2 x)}.$$

$$\underline{(1-3\operatorname{ty}^2 x)}$$

$$= \frac{4\operatorname{ty}^5 x - 14\operatorname{ty}^3 x + 6\operatorname{ty} x}{(1-3\operatorname{ty}^2 x)(1-\operatorname{ty}^2 x)}$$

$$= \frac{2\operatorname{ty} x(2\operatorname{ty}^4 x - 7\operatorname{ty}^2 x + 3)}{''}$$

故 $= \operatorname{ty} x(\operatorname{ty}^2 x - 3)(2\operatorname{ty}^2 x - 1) = 0.$

$\therefore \underline{\operatorname{ty} x = 0}$

$\operatorname{ty}^2 x - 3 = 0$ ヨリ $\underline{\operatorname{ty} x = \pm\sqrt{3}}$

$2\operatorname{ty}^2 x - 1 = 0$ ヨリ $\underline{\operatorname{ty} x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$

(8). $5x, 6x, 7x$ ノ正弦,餘弦ヲ $x$ ノ正弦.餘弦ニテ表ハセ.

解. 本章注意ニヨリ次ノ公式ヲ用ヒヨ.

$$\sin nx = 2\sin(n-1)x\cdot\cos x - \sin(n-2)x.$$

$$\cos nx = 2\cos(n-1)x\cdot\cos x - \cos(n-2)x.$$



コノ式ニ於テ $n$ ノ代リニ 5. 6. 7 ヲ次々代入スレバ所要ノ答ヲ得.

答ハ本章注意ノ所ヲ見ヨ.

類題(1). $\sin 4A = 4\sin A\cos^3 A - 4\cos A\sin^3 A$ ヲ證セヨ.

解. 右辺 $= 4\sin A\cos A(\cos^2 A - \sin^2 A)$

然ルニ $2\sin A\cos A = \sin 2A$, $\cos^2 A - \sin^2 A = \cos 2A$.

$\therefore = 2\cdot 2\sin A\cos A\cdot(\cos 2A)$

$= 2\cdot\sin 2A\cdot\cos 2A.$

$= \underline{\sin 4A}$

類題(2). $\operatorname{ty}\frac{x}{2} = \sqrt{2} - 1$ ヲ知リテ $x$ ノ総テノ三角函数ヲ計算スルコト.

解. $\sin x = \frac{2\operatorname{ty}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{ty}^2\frac{x}{2}}$

$$= \frac{2(\sqrt{2}-1)}{1 + (\sqrt{2}-1)^2}$$

$$= \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

之ヨリ他ノ三角函数ヲ計算シ得.

$\underline{\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}}$, $\underline{\operatorname{ty} x = 1}$, $\underline{\operatorname{Cosec} x = \sqrt{2}}$, $\underline{\sec x = \sqrt{2}}$, $\underline{\cot x = \sqrt{2}}$.

類題(3). $\operatorname{ty} 4A = \frac{4\operatorname{ty} A - 4\operatorname{ty}^3 A}{1 - 6\operatorname{ty}^2 A + \operatorname{ty}^4 A}$ ヲ証明セヨ.

解. 公式 $\operatorname{ty} 2x = \frac{2\operatorname{ty} x}{1 - \operatorname{ty}^2 x}$ ヲ用フ.

公式ノ $x$ ノ代リニ $2A$ ヲ置ケバ

$$\operatorname{ty} 4A = \frac{2\operatorname{ty} 2A}{1 - \operatorname{ty}^2 2A}$$

$$= 2\cdot\frac{2\operatorname{ty} A}{1 - \operatorname{ty}^2 2A} \Big/ \left\{1 - \left(\frac{2\operatorname{ty} A}{1 - \operatorname{ty}^2 A}\right)^2\right\}$$

$$= \underline{\frac{4\operatorname{ty} A - 4\operatorname{ty}^3 A}{1 - 6\operatorname{ty}^2 A + \operatorname{ty}^4 A}}$$

類題(4) $\sin 8A = 8\sin A\cos A\cos 2A\cos 4A$ ヲ証セヨ.

解. $\sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x$ ナルヲ以テ

$$\sin 8A = 2(\sin 4A)\cos 4A$$
$$= 2(2\sin 2A\cos 2A)\cos 4A$$
$$= 4(\sin 2A)\cos 2A\cdot\cos 4A$$
$$= 4(2\sin A\cos A)\cos 2A\cdot\cos 4A$$
$$= \underline{8\sin A\cdot\cos A\cdot\cos 2A\cdot\cos 4A}.$$

類題(5) $\cot 3A = \dfrac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}$ ヲ證明セヨ.

解. 公式ヨリ

$$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

然ルニ $\tan x = \dfrac{1}{\cot x}$ ナルヲ以テ

$$\cot 3A = \frac{1 - 3\tan^2 A}{3\tan A - \tan^3 A}$$

此式ノ右辺ノ分母子ニ $\cot^3 A$ ヲ乗ジテ

$$\cot 3A = \underline{\frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}}$$

類題(6) $\cos^3 A\cdot\dfrac{\sin 3A}{3} + \sin^3 A\cdot\dfrac{\cos 3A}{3} = \dfrac{\sin 4A}{4}$ ヲ証セヨ.

解. 左辺 $= \dfrac{1}{12}(3\cos A + \cos 3A)\sin 3A + \dfrac{1}{12}(3\sin A - \sin 3A)\cos 3A.$

$$= \frac{1}{4}(\sin 3A\cos A + \cos 3A\sin A)$$
$$= \frac{1}{4}[\sin(3A + A)]$$
$$= \underline{\frac{1}{4}\sin 4A}$$



11. 正弦餘弦ノ積ヲ和ノ形ニ変ズル公式.

$$2\sin x\cdot\cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y).$$
$$2\cos x\cdot\sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y).$$
$$2\cos x\cdot\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y).$$
$$2\sin x\cdot\sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y).$$

正弦餘弦ノ和ヲ積ノ形ニ変ズル公式.

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}.$$
$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$$
$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}.$$
$$\cos B - \cos A = 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$$

注意(1) $\sin x + \cos x$ ヲ積ノ形ニ変ズルコト.

$$= \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$
$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cos\frac{\pi}{4}$$
$$= \underline{\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}$$

注意(2) $\dfrac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y}$ ヲ對数計算ニ適スル式ニスルコト.

$$= \frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}.$$
$$= \underline{\frac{\tan\frac{x+y}{2}}{\tan\frac{x-y}{2}}}$$

附言. 本章ノ公式ハ平面三角法ハ勿論解析幾何学或微分積分学従テ数学一般ニ廣ク用ヒラレ特ニ重要ナルモノナレバ良ク記憶スベシ.

## 問題.

(1) 次ノ各式ヲ和ニ変ゼヨ.

(i) $4\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$

$=2\left(2\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\right)\sin\frac{c}{2}$.

$=2\left(\sin\frac{a+b}{2}-\sin\frac{a-b}{2}\right)\sin\frac{c}{2}$.

$=2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{c}{2}-2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{c}{2}$

$=\cos\frac{a+b-c}{2}-\cos\frac{a+b+c}{2}-\cos\frac{a-b-c}{2}+\cos\frac{a-b+c}{2}$.

(ii) $4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$

$=2\left(2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\right)\sin\frac{c}{2}$.

$=2\left(\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{a+b}{2}\right)\sin\frac{c}{2}$.

$=2\cos\frac{a-b}{2}\cdot\sin\frac{c}{2}-2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{c}{2}$.

$=\sin\frac{a-b+c}{2}-\sin\frac{a-b-c}{2}-\sin\frac{a+b+c}{2}+\sin\frac{a+b-c}{2}$.

(iii) $4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$.

$=2\left(2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\right)\cos\frac{c}{2}$

$=2\left(\sin\frac{a+b}{2}+\sin\frac{a-b}{2}\right)\cos\frac{c}{2}$.

$=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{c}{2}+2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{c}{2}$.

$=\sin\frac{a+b+c}{2}+\sin\frac{a+b-c}{2}+\sin\frac{a-b+c}{2}+\sin\frac{a-b-c}{2}$

(iv) $4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$

$=2\left(\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{a-b}{2}\right)\cos\frac{c}{2}$

$=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{c}{2}+2\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{c}{2}$

$=\cos\frac{a+b+c}{2}+\cos\frac{a+b-c}{2}+\cos\frac{a-b+c}{2}+\cos\frac{a-b-c}{2}$.



(2) $2\sin 10^\circ\sin(-160^\circ)+2\cos 200^\circ\cos(-280^\circ)$ ヲ簡単ニセヨ.

解. $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$.

$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$.

∴ 原式 $=\cos 260^\circ-\cos(-60^\circ)+\cos(-80^\circ)+\cos 480^\circ$.

$=\cos 260^\circ-\cos 60^\circ+\cos 80^\circ+\cos 480^\circ$.

$\cos 260^\circ=\cos(180^\circ+80^\circ)=-\cos 80^\circ$

$\cos 480^\circ=\cos(360^\circ+120^\circ)=\cos 120^\circ$

∴ $=-\cos 80^\circ-\cos 60^\circ+\cos 80^\circ+\cos 120^\circ$

$=-\cos 60^\circ+\cos 120^\circ$

$=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=-1$

次ノ等式ヲ簡単ニセヨ.

(3) $\cos a\cdot\sin(b-c)+\cos b\cdot\sin(c-a)+\cos c\cdot\sin(a-b)=0$.

解. $2\cos x\sin y=\sin(x+y)-\sin(x-y)$.

左辺 $=\frac{1}{2}\{\sin(a+b-c)-\sin(a-b+c)+\sin(b+c-a)$

$-\sin(b-c+a)+\sin(c+a-b)-\sin(c-a+b)\}$

$=0$

(4) $\sin(a-b)\sin(c-d)=\cos(a-c)\cos(b-d)-\cos(a-d)\cos(b-c)$.

解. 右辺 $=\frac{1}{2}\{\cos(a-c+b-d)+\cos(a-c-b+d)$

$-\cos(a-d+b-c)-\cos(a-d-b+c)\}$

$=\frac{1}{2}\{\cos(a-b-c+d)-\cos(a-b+c-d)\}$

$=\frac{1}{2}\{2\cdot\sin(a-b)\sin(c-d)\}$.

$=\sin(a-b)\sin(c-d)$.

(5) $\sin a\cdot\sin b+\sin c\cdot\sin(a+b+c)=\sin(a+c)\sin(b+c)$.

解. 左辺 $=\frac{1}{2}\{\cos(a-b)-\cos(a+b)+\cos(a+b)-\cos(a+b+2c)\}$.

$=\frac{1}{2}\{\cos(a-b)-\cos(a+b+2c)\}$.

$=\frac{1}{2}\{2\cdot\sin(a+c)\sin(b+c)\}$.

$=\underline{\sin(a+c)\sin(b+c)}$

(6) $\dfrac{\sin^2A-\sin^2B}{\sin A\cos A-\sin B\cos B}=\operatorname{tg}(A+B)$

解. $\sin^2A-\sin^2B=\sin(A+B)\sin(A-B)$.

$2\sin A\cos A=\sin 2A$

左辺 $=\dfrac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\frac{1}{2}(\sin 2A-\sin 2B)}$ 分母ヲ積ニ変形シテ

$=\dfrac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\left\{\frac{1}{2}(2\cos(A+B)\sin(A-B)\right\}}$

$=\dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$

$=\underline{\operatorname{tg}(A+B)}$

## 問　　題

次ノ各式ヲ積，商ノミヲ含ム式ニ直セ。(1-4)

(1). $1+\sin x$　　(20年)

解. $\sin\frac{\pi}{2}=1$　トルヲ以テ

原式 $=\sin\frac{\pi}{2}+\sin x$

$=\underline{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}$



別解. 原式 $=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$=1+2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-1$

$=\underline{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}$

(2). $\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$　　(26年)

解. 原式 $=\dfrac{\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$

$=\dfrac{-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\frac{\pi}{4}}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\frac{\pi}{4}}$

$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}$　トルヲ以テ

$=\underline{-\cot\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$

別解. 原式 $=\dfrac{\sin x-\sin(90^\circ-x)}{\sin x+\sin(90^\circ-x)}$

$=\dfrac{2\sin(x-45^\circ)\cos 45^\circ}{2\sin 45^\circ\cos(x-45^\circ)}$

然ル $=\sin 45^\circ=\cos 45^\circ$

$\therefore=\dfrac{\sin(x-45^\circ)}{\cos(x-45^\circ)}$

$=\underline{\operatorname{tg}(x-45^\circ)}$

或ハ又次ノ如クシテモヨシ.

$\cos x\neq 0$ トシ［若 $\cos x=0$ ナルトキハ原式ハ1トナリテ極メテ簡単ニシテ論ズルノ必要ナシ］

原式ノ分母子ヲ $\cos x$ ニテ除スレハ $\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{\operatorname{tg}x+1}$ トナル然ル $=\operatorname{tg}45^\circ=1$ ナルヲ以テ此式ハ $\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}45^\circ}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}45^\circ}$

ト書クコトヲ得. 依リテ

原式 $= ty(x-45°)$ トナル.

(3) $\sin(b-c)+\sin(c-a)+\sin(a-b)$ (29年)

解. 原式 $= 2\sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{b-c}{2}+2\sin\frac{c-b}{2}\cos\frac{c-2a+b}{2}$.

$= 4\sin\frac{b-c}{2}\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2}$

注意. $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

(4) $ty(b-c)+ty(c-a)+ty(a-b)$

解. $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$

$\therefore ty\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}=0$

$\therefore \frac{\Sigma ty(b-c)-ty(b-c)ty(c-a)ty(a-b)}{1-ty(b-c)ty(c-a)-ty(c-a)ty(a-b)-ty(a-b)ty(b-c)}$

$= 0.$

$\therefore \Sigma ty(b-c)-ty(b-c)ty(c-a)ty(a-b)=0$

$\therefore \Sigma ty(b-c) = ty(b-c)ty(c-a)ty(a-b)$

但 $\Sigma ty(b-c)=ty(b-c)+ty(c-a)+ty(a-b)$

注意. $ty(x+y+z)=\frac{tyx+tyy+tyz-tyx\,tyy\,tyz}{1-tyy\,tyz-tyz\,tyx-tyx\cdot tyy}$

(5) Aガ 0°ヨリ 360°マデ変化スルトキ $\sin A+\cos A$ ハ如何ニ変化スルカ

解. $\sin A+\cos A=\sin A+\sin(90°-A)$

$=\sqrt{2}\cos(A-45°)$

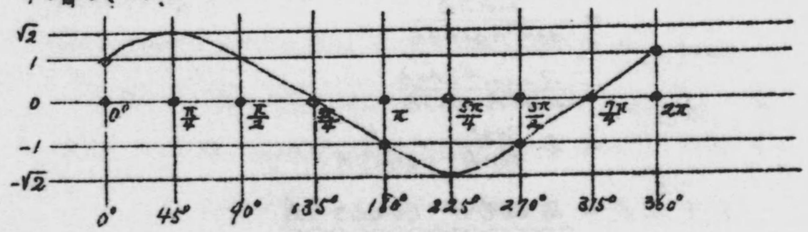
トナル故 $A=0°$ ナルトキハ



$\sin A+\cos A=\sqrt{2}\cos(-45°)=1$ ニシテ Aガ増大シテ 45°ニ至ル間ハ $A-45°$ ハ負ニシテ絶對値ハ減少スル故 $\cos(A-45°)$ ハ増大シ $A=45°$ トナルトキ $\cos(A-45°)$ ハ 1トナル故 $\sin A+\cos A=\sqrt{2}$ トナル. 次ニ Aガ 45°ヨリ 135°マデ増大スレバ $A-45°$ ハ 0°ヨリ 90°マデ変化スル故 $\cos(A-45°)$ ハ 1ヨリ 0マデ減少ス. 依リテ $\sin A+\cos A$ ハ $\sqrt{2}$ ヨリ 0マデ減少ス.

次ニ Aガ 135°ヨリ 225°マデ変化スルトキ $A-45°$ ハ 90°ヨリ 180°マデ変化スル故 $\cos(A-45°)$ ハ 0ヨリ $-1$ マデ減少ス. 故ニ $\sin A+\cos A$ モ亦 0ヨリ $-\sqrt{2}$ マデ減少ス. Aガ 225°ヨリ 315°マデ変化スレバ $A-45°$ ハ 180°ヨリ 270°マデ変化スル故 $\cos(A-45°)$ ハ $-1$ ヨリ 0マデ増大ス. 從ヒテ $\sin A+\cos A$ モ亦 $-\sqrt{2}$ ヨリ 0マデ増大ス.

次ニ Aガ 315°ヨリ 360°マデ増大スレバ $A-45°$ ハ 270°ヨリ 315°マデ変化スル故 $\cos(A-45°)$ ハ 0ヨリ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ マデ増大ス. 故ニ $\sin A+\cos A$ モ亦 0ヨリ 1マデ増大ス.



次ノ等式ヲ證明セヨ (6.7)

(6). $\{\sin(A-B)+\sin(A+3B)\}\sec 2B = (\cos 2B - \cos 2A)\operatorname{Cosec}(A-B)$.

解. 左辺 $= 2\sin(A+B)\cos 2B \sec 2B$

$= \underline{2\sin(A+B)}$.

右辺 $= 2\sin(A+B)\sin(A-B)\cdot\operatorname{Cosec}(A-B)$

$= \underline{2\sin(A+B)}$.

∴ 左辺 = 右辺

注意 $\sin x \cdot \operatorname{Cosec} x = 1$. $\cos x \cdot \sec x = 1$

(7) $\operatorname{Cosec} A \operatorname{Cosec} 2A + \operatorname{Cosec} 2A \operatorname{Cosec} 3A = \operatorname{Cosec} A(\cot A - \cot 3A)$.

解 左辺 $= \dfrac{1}{\sin A \sin 2A} + \dfrac{1}{\sin 2A \sin 3A}$

$= \dfrac{\sin 3A + \sin A}{\sin A \sin 2A \sin 3A}$

$= \dfrac{2\sin 2A \cos A}{\sin A \sin 2A \sin 3A}$

$= 2\cdot\dfrac{\cos A}{\sin A}\cdot\dfrac{1}{\sin 3A}$

$= \underline{2\cot A \cdot \operatorname{Cosec} 3A}$

右辺 $= \dfrac{1}{\sin A}\left\{\dfrac{\sin(3A-A)}{\sin A \sin 3A}\right\}$

$= \dfrac{\sin 2A}{\sin^2 A \sin 3A}$

$= \dfrac{2\sin A \cos A}{\sin^2 A \sin 3A}$

$= 2\cdot\dfrac{\cos A}{\sin A}\cdot\dfrac{1}{\sin 3A}$

$= \underline{2\cdot\cot A\cdot \operatorname{Cosec} 3A}$



(8) $A+B+C=\pi$ ナルトキ次ノ等式ヲ證明セヨ.

(i) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

左辺 $= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

然ルニ $A+B+C=\pi$ ナルヲ以テ $\frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{2}$

故ニ $\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}$, $\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A+B}{2}$

∴ $= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right\}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$

$= \underline{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$

注意 原等式ハ公式トシテ用ヒラル故ニ記憶スベシ.

(ii) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$ (21年)

左辺 $= 2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cdot\cos C$.

$A+B+C=\pi$ ナルヲ以テ

$\sin(A+B) = \sin C$, $\cos C = -\cos(A+B)$.

∴ $= 2\sin C\cos(A-B) - 2\sin C\cos(A+B)$.

$= 2\sin C\left\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\right\}$

$= 2\sin C\cdot 2\sin A\cdot\sin B$.

$= \underline{4\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}$

注意 原等式ハ公式トシテ用ヒラル.

(iii) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

左辺 $= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$

即 $\cos C = 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$

$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A+B}{2} + 1$.

即 $\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A+B}{2}$

$\therefore\ =2\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right\}+1.$

$=2\sin\frac{C}{2}\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}+1.$

$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1.$

注意 原等式ハ公式トシテ用ヒラル.

(iv). $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$

左辺 $=2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C-1.$

$=-2\cos C\cdot\cos(A-B)-2\cos C\cdot\cos(A+B)-1.$

$=-2\cos C\left\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\right\}-1.$

$=-2\cos C\cdot 2\cos A\cdot\cos B-1$

$=-1-4\cos A\cos B\cos C.$

注意. $\cos 2C=2\cos^2 C-1,\ \cos C=-\cos(A+B)$

原等式ハ公式トシテ用ヒラル.

(v). $\mathrm{ty}A+\mathrm{ty}B+\mathrm{ty}C=\mathrm{ty}A\cdot\mathrm{ty}B\,\mathrm{ty}C.$ (20年)

$A+B+C=\pi$ ナル故 $\mathrm{ty}(A+B)=-\mathrm{ty}C$

$\therefore\ \mathrm{ty}(A+B)=\frac{\mathrm{ty}A+\mathrm{ty}B}{1-\mathrm{ty}A\,\mathrm{ty}B}=-\mathrm{ty}C$ 分母ヲ払ヒ

$\mathrm{ty}A+\mathrm{ty}B=-\mathrm{ty}C+\mathrm{ty}A\,\mathrm{ty}B\,\mathrm{ty}C$

$\therefore\ \mathrm{ty}A+\mathrm{ty}B+\mathrm{ty}C=\mathrm{ty}A\cdot\mathrm{ty}B\cdot\mathrm{ty}C$

別解. $A+B+C=\pi$

$\therefore\ \mathrm{ty}(A+B+C)=\frac{\mathrm{ty}A+\mathrm{ty}B+\mathrm{ty}C-\mathrm{ty}A\,\mathrm{ty}B\,\mathrm{ty}C}{1-\mathrm{ty}B\,\mathrm{ty}C-\mathrm{ty}C\,\mathrm{ty}A-\mathrm{ty}A\,\mathrm{ty}B}=0$

$\therefore\ \mathrm{ty}A+\mathrm{ty}B+\mathrm{ty}C-\mathrm{ty}A\cdot\mathrm{ty}B\cdot\mathrm{ty}C=0.$

$\therefore\ \mathrm{ty}A+\mathrm{ty}B+\mathrm{ty}C=\mathrm{ty}A\cdot\mathrm{ty}B\cdot\mathrm{ty}C$



注意. 原等式ハ公式トシテ用ヒラル.

(vi). $\mathrm{ty}2A+\mathrm{ty}2B+\mathrm{ty}2C=\mathrm{ty}2A\cdot\mathrm{ty}2B\cdot\mathrm{ty}2C.$

$A+B+C=\pi.$

$2A+2B+2C=2\pi.$

$\mathrm{ty}(2\pi-A)=-\mathrm{ty}A.$

$\mathrm{ty}(2A+2B)=\frac{\mathrm{ty}2A+\mathrm{ty}2B}{1-\mathrm{ty}2A\cdot\mathrm{ty}2B}=-\mathrm{ty}2C$

$\therefore\ \mathrm{ty}2A+\mathrm{ty}2B=-\mathrm{ty}2C+\mathrm{ty}2A\,\mathrm{ty}2B\,\mathrm{ty}2C$

$\therefore\ \mathrm{ty}2A+\mathrm{ty}2B+\mathrm{ty}2C=\mathrm{ty}2A\cdot\mathrm{ty}2B\cdot\mathrm{ty}2C$

別解. $\mathrm{ty}(2A+2B+2C)=0$

$\frac{\mathrm{ty}2A+\mathrm{ty}2B+\mathrm{ty}2C-\mathrm{ty}2A\cdot\mathrm{ty}2B\,\mathrm{ty}2C}{1-\mathrm{ty}2B\,\mathrm{ty}2C-\mathrm{ty}2C\,\mathrm{ty}2A-\mathrm{ty}2A\,\mathrm{ty}2B}=0$

$\therefore$ 分子$=0$ トナル.

$\therefore$ 題言ノ如シ.

(vii) $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=1+4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}.$

$A+B+C=\pi$

$\therefore\ \frac{A+B+C}{2}=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \frac{B+C}{2}+\frac{C+A}{2}+\frac{A+B}{2}=\pi$

問題(iii)ヲ公式トシテ用ヒテ

$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$\therefore\ \cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{C+A}{2}+\cos\frac{A+B}{2}=1+4\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}\sin\frac{A+B}{4}.$

$\cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2}$ 他モ亦同ジ

$\therefore\ \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=1+4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}$

(viii) $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{2}\cos\frac{\pi-C}{4}$.

左辺 $=\sin\frac{B+C}{2}+\sin\frac{C+A}{2}+\sin\frac{A+B}{2}$

$=4\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{C+A}{4}\cos\frac{A+B}{4}$

即問題(i)ヲ公式ニ用ヒタリ.

$=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$

(ix) $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$

$\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\cot\frac{C}{2}=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$

分母ヲ拂ッテ

$\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{B}{2}=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$

$\therefore\ \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$

(x) $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2+2\cos A\cos B\cos C$.

$\sin^2x=\frac{1-\cos2x}{2}$ ヲ用ヒテ

左辺 $=\frac{1-\cos2A}{2}+\frac{1-\cos2B}{2}+\frac{1-\cos2C}{2}$

$=\frac{1}{2}\{3-(\cos2A+\cos2B+\cos2C)\}$

然ルニ $\cos2A+\cos2B+\cos2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$.

$\therefore\ =\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(-1-4\cos A\cos B\cos C)$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+2\cos A\cos B\cos C$.

$=2+2\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$.

(xi) $\sin^3A+\sin^3B+\sin^3C$

$=3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}$



$\sin^3A=\frac{3\sin A-\sin3A}{4}$ ヲ用ヒテ

左辺 $=\frac{3\sin A-\sin3A}{4}+\frac{3\sin B-\sin3B}{4}+\frac{3\sin C-\sin3C}{4}$

$=\frac{3}{4}(\sin A+\sin B+\sin C)-\frac{1}{4}(\sin3A+\sin3B+\sin3C)$.

$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

$\sin3A+\sin3B+\sin3C$.

$=2\sin\frac{3A+3B}{2}\cos\frac{3A-3B}{2}+2\sin\frac{3C}{2}\cos\frac{3C}{2}$.

$A+B+C=\pi$

$\frac{3A+3B+3C}{2}=\frac{3\pi}{2}$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=-\cos\frac{A}{2}$.

即 $\sin(270°-x)=-\cos x$

$\therefore\ =2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{3C}{2}\right)\cos\frac{3A-3B}{2}+2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{3A+3B}{2}\right)\cos\frac{3C}{2}$.

$=-2\cos\frac{3C}{2}\cos\frac{3A-3B}{2}-2\cos\frac{3A+3B}{2}\cos\frac{3C}{2}$

$=-2\cos\frac{3C}{2}\left\{\cos\frac{3A-3B}{2}+\cos\frac{3A+3B}{2}\right\}$

$=-4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}$

此等ノ結果ヲ上式ニ代入シテ

$=\frac{3}{4}\left(4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(-4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}\right)$

$=3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cdot\cos\frac{3C}{2}$.

(9). $A+B+C+D=2\pi$ ナルトキ次ノ等式ヲ証明セヨ.

$\sin A+\sin B+\sin C+\sin D=4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{A+D}{2}$.

解. 左辺 $=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

$A+B+C+D=2\pi$

$\therefore\ \frac{A+B+C+D}{2}=\pi$

$\therefore \quad \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$

$\therefore \quad \sin\frac{C+D}{2}=\sin\frac{A+B}{2}$

$\therefore \quad = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

$= 2\sin\frac{A+B}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{C-D}{2}\right\}$

$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cdot 2\cos\frac{A+C-B-D}{4}\cos\frac{A+D-B-C}{4}$

$\frac{A+B+C+D}{4}=\frac{\pi}{2}$

餘角關係ヨリ

$\cos\frac{A+C-B-D}{4}=\sin\frac{2B+2D}{4}=\sin\frac{B+D}{2}$

$\cos\frac{A+D-B-C}{4}=\sin\frac{2B+2C}{4}=\sin\frac{B+C}{2}$

然ルニ補角關係ヨリ

$\sin\frac{B+D}{2}=\sin\frac{A+C}{2}$

$\sin\frac{B+D}{2}=\sin\frac{A+D}{2}$

$\therefore = 2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot 2\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{A+D}{2}$

$= 4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{A+D}{2}$

注意　本題ノ結果ヲ次ノ如ク書クコトヲ得.

$4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}$

(10). $A+B+C=2\pi$ ナルトキ次ノ等式ヲ證明セヨ (18年).

$\sin B(1+2\cos C)+\sin C(1+2\cos A)+\sin A(1+2\cos B)$

$=-4\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

解　左辺ヲ括弧ヲ解イテ整頓スレバ

左辺 $=\sin A+\sin B+\sin C+2\sin A\cos B+2\sin B\cos B$

$+2\sin C\cos A.$



$=\sin A+\sin B+\sin C+\sin(A-B)+\sin(A-B)$.

$+\sin(B+C)+\sin(B-C)+\sin(C+A)+\sin(C-A)$.

然ルニ　$A+B+C=2\pi$　ナルヲ以テ

$\sin(A+B)=-\sin C$

$\sin(B+C)=-\sin A$

$\sin(C+A)=-\sin B$.

即　$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$ ナレバナリ.

$\therefore \quad =\sin A+\sin B+\sin C-\sin C+\sin(A-B)-\sin A$

$+\sin(B-C)-\sin B+\sin(C-A)$.

$=\sin(A-B)+\sin(B-C)+\sin(C-A)$

$=2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{B-A}{2}\cos\frac{B+A-2C}{2}$

$=2\sin\frac{A-B}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{B+A-2C}{2}\right\}$

$=2\sin\frac{A-B}{2}\cdot 2\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{B-C}{2}$

$=-4\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}$

注意　問題(8)ノ(I)—(IV)ハ公式トシテ記憶セヨ.

（公　式）

$A+B+C=\pi$（或三角形 ABC ニ於テ）ナル片

$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$.

$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$.

$\mathrm{tg}\,A+\mathrm{tg}\,B+\mathrm{tg}\,C=\mathrm{tg}\,A\cdot\mathrm{tg}\,B\cdot\mathrm{tg}\,C$.

12. 等差級数ヲナス角ノ正弦餘弦ノ和ノ公式.

等差級数ヲナスn個ノ角.

$a,\ a+d,\ a+2d,\ \cdots\cdots,\ a+(n-1)d.$

ノ正弦及餘弦ノ和ヲSトスレバ

$$S=\sin a+\sin(a+d)+\sin(a+2d)+\cdots+\sin(a+\overline{n-1}d)$$

$$\boxed{S=\frac{\sin(a+\frac{n-1}{2}d)\sin\frac{n}{2}d}{\sin\frac{1}{2}d}}$$

$$S=\cos a+\cos(a+d)+\cos(a+2d)+\cdots+\cos(a+\overline{n-1}d)$$

$$\boxed{S=\frac{\cos(a+\frac{n-1}{2}d)\sin\frac{n}{2}d}{\sin\frac{1}{2}d}}$$

但 $\sin\frac{1}{2}d\neq 0$ 即 $d\neq 2k\pi$ (kハ任意ノ整数トス) 特ニ $d=2k\pi$ ナルトキハ

$$\sin a+\sin(a+d)+\sin(a+2d)+\cdots+\sin(a+\overline{n-1}d)$$
$$=n\cdot\sin a.$$

$$\cos a+\cos(a+d)+\cos(a+2d)+\cdots+\cos(a+\overline{n-1}d)$$
$$=n\cdot\cos a.$$



## 問　題

次ノ各式ヲ簡単ニセヨ (1−6)

(1). $\sin a+\sin 2a+\sin 3a+\cdots\cdots+\sin(2n-1)a.$

解. 初角 $a$, 公差 $a$, 項数 $(2n-1)$.

公式 $S=\dfrac{\sin(a+\frac{n-1}{2}d)\sin\frac{n}{2}d}{\sin\frac{1}{2}d}$.

所要ノ和ヲSトスレバ

$$S=\frac{\sin(a+\frac{2n-1-1}{2}a)\sin\frac{2n-1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a}$$
$$=\frac{\sin(a+\overline{n-1}\cdot a)\sin\frac{2n-1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a}$$
$$=\frac{\sin na\cdot\sin\frac{2n-1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a}$$

(2). $\cos a+\cos 2a+\cos 3a+\cdots\cdots+\cos(2n-1)a.$

解. 初角 $a$, 公差 $a$, 項数 $(2n-1)$

公式 $S=\dfrac{\cos(a+\frac{n-1}{2}d)\sin\frac{n}{2}d}{\sin\frac{1}{2}d}$

所要ノ和ヲSトスレバ

$$S=\frac{\cos(a+\frac{2n-1-1}{2}a)\sin\frac{2n-1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a}$$
$$=\frac{\cos(a+\overline{n-1}\cdot a)\sin\frac{2n-1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a}$$
$$=\frac{\cos na\cdot\sin\frac{2n-1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a}$$

(3). $\sin\alpha-\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\sin(\alpha+\overline{n-1}\beta)$

解. 初角 $\alpha$, 公差 $\beta$. 項数 $n$.

今 $\beta=\beta'+\pi$ トスレバ

原式 $=\sin\alpha-\sin(\alpha+\beta'+\pi)+\sin(\alpha+2\beta'+2\pi)$

$-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\sin\{\alpha+(n-1)\beta'+(n-1)\pi\}$

然ル $=$ $\sin(\pi+x)=-\sin x$.

$\sin(2n\pi+x)=\sin x$.

故ニ最後ノ項 $+(-1)^{n-1}\sin\{\alpha+(n-1)\beta'+(n-1)\pi\}$ ハ

$n$ ガ奇数ノトキハ $n-1$ ハ偶数トナリ従テ $(-1)^{n-1}$

ハ正. 又 $(n-1)\pi=2k\pi$ トナル故上ノ公式ニヨリ

$\sin(2k\pi+x)=\sin x$.

ノナリテ従テ正トナリ.

$n$ ガ偶数ノトキハ $n-1$ ハ奇数トナリ従テ

$(-1)^{n-1}$ ハ負. 又 $(n-1)\pi=k\pi$ トナル故上ノ

公式ニヨリテ

$\sin(k\pi+x)=-\sin x$.

トナルヲ以テ従テ正トナル.

$\therefore$ $=\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots+\sin(\alpha+\overline{n-1}\beta)$.

$$S=\frac{\sin(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta)\sin\frac{n}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}$$

$\beta=\beta'-\pi$ トシテ書直セバ

$$S=\frac{\sin\{\alpha+\frac{n-1}{2}(\beta-\pi)\}\sin\frac{n}{2}(\beta-\pi)}{\sin\frac{1}{2}(\beta-\pi)}.$$



(4). $\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)-\cdots\cdots+(-)^{n-1}\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}$.

解. 今 $\beta=\beta'+\pi$ トオケバ

原式 $=\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta'+\pi)+\cos(\alpha+2\beta'+2\pi)$

$-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\cos\{\alpha+(n-1)\beta'+(n-1)\pi\}$.

然ル $=$ $\cos(\pi+x)=-\cos x$.

$\cos(2n\pi+x)=\cos x$.

ナルヲ以テ $n$ ガ奇数、偶数ニ拘ラズ原式ハ次ノ

如クナル.

$=\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta')+\cos(\alpha+2\beta')+\cdots\cdots+\cos(\alpha+\overline{n-1}\beta')$

$$S=\frac{\cos(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta')\sin\frac{n}{2}\beta'}{\sin\frac{1}{2}\beta'}$$

$\beta'=\beta-\pi$

$$\therefore\quad S=\frac{\cos\{\alpha+\frac{n-1}{2}(\beta-\pi)\}\sin\frac{n}{2}(\beta-\pi)}{\sin\frac{1}{2}(\beta-\pi)}$$

(5). $\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\sin^2 3\alpha+\cdots\cdots+\sin^2 n\alpha$. (27集)

解. 公式 $\sin^2 A=\frac{1-\cos 2A}{2}$ ヲ用フ.

原式 $=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1-\cos 4\alpha}{2}+\frac{1-\cos 6\alpha}{2}+\cdots\cdots+\frac{1-\cos 2n\alpha}{2}$.

$=\frac{1}{2}\{n-(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha+\cdots\cdots+\cos 2n\alpha)\}$.

$S=\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha+\cdots\cdots+\cos 2n\alpha$ トオケバ

$$S=\frac{\cos\{2\alpha+\frac{n-1}{2}2\alpha\}\sin\frac{n}{2}2\alpha}{\sin\frac{1}{2}2\alpha}.$$

$$=\frac{\cos(n+1)\alpha\sin n\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\therefore \quad 原式 = \frac{1}{2}\left\{n - \frac{\cos(n+1)\alpha \sin n\alpha}{\sin\alpha}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{n - \frac{\sin(2n+1)\alpha - \sin\alpha}{2\sin\alpha}\right\}$$

$$= \frac{(2n+1)\sin\alpha - \sin(2n+1)\alpha}{4\sin\alpha}$$

(6). $\cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \cos^2 3\alpha + \cdots + \cos^2 n\alpha$.

解 $\cos^2 A = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$$原式 = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} + \frac{1+\cos 4\alpha}{2} + \frac{1+\cos 6\alpha}{2} + \cdots + \frac{1+\cos 2n\alpha}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{n + (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha + \cdots + \cos 2n\alpha)\right\}$$

$\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha + \cdots + \cos 2n\alpha = S$ トオケバ

$$S = \frac{\cos\left\{2\alpha + \frac{n-1}{2}2\alpha\right\}\sin\frac{n}{2}2\alpha}{\sin\frac{1}{2}2\alpha}$$

$$= \frac{\cos(n+1)\alpha \cdot \sin n\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\therefore \quad = \frac{1}{2}\left\{n + \frac{\cos(n+1)\alpha \cdot \sin n\alpha}{\sin\alpha}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{n + \frac{\sin(2n+1) - \sin\alpha}{2\sin\alpha}\right\}$$

$$= \frac{(2n-1)\sin\alpha + \sin(2n+1)\alpha}{4\sin\alpha}$$



## 13. 角ノ除法公式.

(i). $\cos x$ ヲ以テ $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, $ty\frac{x}{2}$ ヲ表スコト.

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}. \qquad (1)$$

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}. \qquad (2)$$

$$ty\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \qquad (3)$$

(1).(2).(3) = 於ケル複号ノ中ニツハ任意ニ組合セ第三ハ $ty\frac{x}{2}$、$\cos\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2}$ = 適スルガ如ク定ムベシ.

(ii). $\sin x$ ヲ以テ $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, $ty\frac{x}{2}$ ヲ表ハスコト.

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{1+\sin x} \pm \sqrt{1-\sin x}\right\} \qquad (1)$$

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{1+\sin x} \mp \sqrt{1-\sin x}\right\} \qquad (2)$$

$$ty\frac{x}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x} \qquad (3)$$

注意(1)

若シ唯 $\sin A$ ノミヲ知リテ其他 $A$ ニ就キテ更ニ既知スルコトナケレバ公式ニ現ハレル所ノ複符号ヲ判別スル能ハズ. 然レドモ若シ $A$ ヲ知ルカ又ハ唯其ノ第何象限ニアリト云フコトヲ知レバ適當ナル符号ヲ決定スルコトヲ得ベシ. 特別ノ場合ニ於テハ次ノ如クナスベシ. 即

$$\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{1+\sin A} \qquad (1)$$

$$\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{1-\sin A} \qquad (2)$$

例ヘバ今 $A$ ハ $0°$ ト $90°$ トノ間ニアリトスレバ $\frac{A}{2}$ ハ

0°ト45°トノ間ニアリ. 故ニ $\cos\frac{A}{2}$ 及 $\sin\frac{A}{2}$ ハ倶ニ正ニシテ $\cos\frac{A}{2}>\sin\frac{A}{2}$ ナリ. 故ニ(1)ノ左辺ハ正量ナルヲ以テ(1)ニハ正符号ヲ取ルベシ. 而シテ(2)ノ左辺ハ負量ナルヲ以テ(2)ニハ負符号ヲ取ルベシ. 故ニ若シAガ0°ト90°トノ間ニアルトキハ

$$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=+\sqrt{1+\sin A},$$
$$\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=-\sqrt{1-\sin A}.$$

故ニ
$$\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A}\right\},$$
$$\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A}\right\}.$$

又Aヲ270°ト360°トノ間ニアリトスレバ $\frac{A}{2}$ ハ135°ト180°トノ間ニアリ. 故ニ $\cos\frac{A}{2}$ ハ負ニシテ $\sin\frac{A}{2}$ ハ正ナリ, 而シテ $\cos\frac{A}{2}$ ハ絶対値ニ於テ $\sin\frac{A}{2}$ ヨリ大ナリ. 故ニ(1)ノ左辺ハ負量ナルヲ以テ(1)ニハ負符号ヲ取ルベシ, 而シテ(2)ノ左辺ハ正量ナルヲ以テ(2)ニハ正符号ヲ取ルベシ. 故ニAガ270°ト360°トノ間ニアルトキハ次ノ如シ.

$$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}=-\sqrt{1+\sin A}$$
$$\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=+\sqrt{1-\sin A}$$

故ニ
$$\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left\{-\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A}\right\},$$
$$\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left\{-\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A}\right\}.$$

注意. 本章公式及注意(1)ハ重要ナルモノニシテ初学者ノ理解スルニ最モ困難トスル所ノモノナレバ次ニ例題ヲ用ヒテ説明セン.



例. $\sin 730°$ ヲ以テ $\sin 365°$, $\cos 365°$, $\tan 365°$ ヲ表スコト.

解. 365°ハ第一象限ノ角ナルヲ以テ

$\sin 365°$, $\cos 365°$, $\tan 365°$ 倶ニ正ナリ.

而シテ $\cos 365°>\sin 365°$ ナリ.

故ニ公式

$$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=+\sqrt{1+\sin A} \quad (1)$$
$$\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=-\sqrt{1-\sin A} \quad (2)$$

ニ於テ $\frac{A}{2}=365°$ トオケバ

$$\sin 365°+\cos 365°=+\sqrt{1+\sin 730°} \quad (1)$$
$$\sin 365°-\cos 365°=-\sqrt{1-\sin 730°} \quad (2)$$

故ニ次ノ如シ.

$$\sin 365°=\frac{1}{2}\left\{+\sqrt{1+\sin 730°}-\sqrt{1-\sin 730°}\right\}$$
$$\cos 365°=\frac{1}{2}\left\{+\sqrt{1+\sin 730°}+\sqrt{1-\sin 730°}\right\}$$
$$\tan 365°=\frac{1-\sqrt{1-\sin^2 730°}}{\sin 730°}.$$

注意(2).

$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}$, 及 $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}$ ノ符号ヲ決定スルコト.

解. $$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{A}{2}\right)$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

故ニ $\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ ハ $\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ ガ $2n\pi$ 及 $(2n+1)\pi$ ノ間ニアルトキハ正ニシテ $\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ ガ $2n\pi$ 及 $(2n+2)\pi$ ノ間ニアルトキハ負ナリ. 但シハ零或ハ任意ノ整数(正又ハ負)トス.

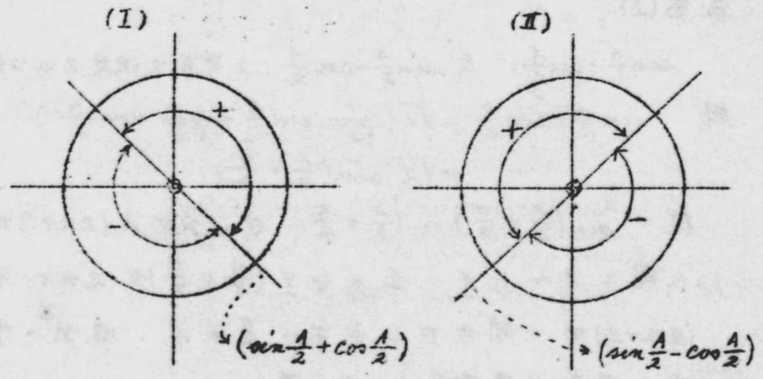
故ニ $\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}$ ハ若シ $\frac{A}{2}$ ガ $2n\pi-\frac{\pi}{4}$ 及 $2n\pi+\frac{3\pi}{4}$ ノ間ニアルトキハ正ニシテ，若 $\frac{A}{2}$ ガ $2n\pi+\frac{3\pi}{4}$ 及 $2n\pi+\frac{7\pi}{4}$ ノ間ニアルトキハ負ナリ．同理ニヨリテ $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$．故ニ $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}$ ハ若シ $\frac{A}{2}$ ガ $2m\pi+\frac{\pi}{4}$ ト $2m\pi+\frac{5\pi}{4}$ トノ間ニアルトキハ正ニシテ若シ $\frac{A}{2}$ ガ $2m\pi+\frac{5\pi}{4}$ 及 $2m\pi+\frac{9\pi}{4}$ ノ間ニアルトキハ負ナリ．但 $m$ ハ $n$ ト同ジ性質ノモノトス．

以上ヲ一括シテ図ニテ示セバ次ノ如シ．

(I) $\begin{cases}\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}>0 & \cdots\cdots\left(2n\pi-\frac{\pi}{4}\right)<\frac{A}{2}<\left(2n\pi+\frac{3\pi}{4}\right)\\ \sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}<0 & \cdots\cdots\left(2n\pi+\frac{3\pi}{4}\right)<\frac{A}{2}<\left(2n\pi+\frac{7\pi}{4}\right)\end{cases}$

(II) $\begin{cases}\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}>0 & \cdots\cdots\left(2m\pi+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{A}{2}<\left(2m\pi+\frac{5\pi}{4}\right)\\ \sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}<0 & \cdots\cdots\left(2m\pi+\frac{5\pi}{4}\right)<\frac{A}{2}<\left(2m\pi+\frac{9\pi}{4}\right)\end{cases}$

但 $m$，$n$ ハ零又ハ任意ノ整数（正又ハ負）ナリ．






例．$2\sin\frac{A}{2}=-\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A}$ ナルトキ $\frac{A}{2}$ ノアル所ノ限界ヲ求メヨ．

解．此ノ結果ヲ得ンニハ注意(1)ノ公式(1)，(2)ニ於テ宜シク次ノ符号ヲ取ラザルベカラズ．

$$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=-\sqrt{1+\sin A} \qquad (1)$$

$$\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=-\sqrt{1-\sin A} \qquad (2)$$

故ニ上式(1)及注意(2)ニヨリテ $\frac{A}{2}$ ハ必ラズ次ノ限界ニアルベシ．

$$2n\pi+\frac{3\pi}{4}<\frac{A}{2}<2n\pi+\frac{7\pi}{4} \qquad (3)$$

又上式(2)ヨリ $\frac{A}{2}$ ノ限界ハ

$$2m\pi+\frac{5\pi}{4}<\frac{A}{2}<2m\pi+\frac{9\pi}{4} \qquad (4)$$

故ニ(3)(4)ヲ合一シテ $\frac{A}{2}$ ノ所要ノ限界ハ

$$2k\pi+\frac{5\pi}{4}<\frac{A}{2}<2k\pi+\frac{7\pi}{4}$$

(iii) $\operatorname{tg}x$ ヲ以テ $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ヲ表スコト．

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}{\operatorname{tg}x}$$

(iv) $\cot x$ ヲ以テ $\cot\frac{x}{2}$ ヲ表スコト．

$$\cot\frac{x}{2}=\cot x\pm\sqrt{\cot^2x+1}.$$

(v) $\sin x$，$\cos x$ ヲ以テ $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ヲ表スコト．

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

(vi) $\cot\frac{x}{2}=\operatorname{cosec}x+\cot x.$

(vii) $\operatorname{cosec}x=\cot\frac{x}{2}-\cot x.$

## 問　題

(1). $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ ナルトキ $\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\cos\frac{1}{2}\alpha$ ヲ求メヨ.

解　公式　$\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$.

$$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}=\pm\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

四ツ次ノ四組ノ値アリ.

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\Big)\ \frac{1}{2}\Big)\ -\frac{1}{2}\Big)\ -\frac{1}{2}\Big)$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\ \frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$$

(2). $\cos4\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ナルトキ $\cos2\alpha$, $\cos\alpha$ ヲ求メヨ.

解.　公式 $\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$.

$$\cos2\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos4\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{2}}$$
$$=\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}=\pm\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}}$$
$$=\pm\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

(1)　$\cos2\alpha$ ノ正値ヲ用フレバ

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos2\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}+1}{4}}{2}}$$
$$=\pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}=\pm\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}$$
$$=\pm\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$



(ロ)　$\cos2\alpha$ ノ値ヲ用フレバ

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos2\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{5}+1}{4}}{2}}=\pm\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

(3)　$\sin9^\circ$ ヲ計算セヨ.

解.　$\sin18^\circ=\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$A=18^\circ$, $\frac{A}{2}=9^\circ$ トオケバ

$\frac{1}{2}=9^\circ$ ハ第一象限ノ角ナルヲ以テ

$\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$ ハ倶ニ正ナリ.

而シテ $\cos\frac{A}{2}>\sin\frac{A}{2}$.

故ニ公式

$$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=+\sqrt{1+\sin A}\qquad(1)$$

$$\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=-\sqrt{1-\sin A}\qquad(2)$$

$$\therefore\ \sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A}\right\}\qquad(3)$$

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A}\right\}\qquad(4)$$

(3) ニ於テ $\frac{A}{2}=9^\circ$, $A=18^\circ$ トオケバ

$$\sin9^\circ=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{1+\sin18^\circ}-\sqrt{1-\sin18^\circ}\right\}.$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}}-\sqrt{1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}}\right\}.$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{8}}-\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{8}}\right\}.$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right\}.$$
$$=\frac{1}{8}\left\{\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{5-\sqrt{5}}\right\}$$

(4). $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ ナルトキ $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ ヲ求メヨ.

解. 本章公式(ii)ニヨリ

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{1+\frac{1}{2}}\pm\sqrt{1-\frac{1}{2}}\right\}=\frac{1}{2}\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{1+\frac{1}{2}}\mp\sqrt{1-\frac{1}{2}}\right\}=\frac{1}{2}\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

詳言スレバ

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\quad\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\quad\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\quad\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\quad\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\quad\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\quad\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

(5). $\sin 3923^\circ$ 及 $\cos 3923^\circ$ ヲ $\sin 7846^\circ$ ヲ以テ表ハセ.

解. $\frac{7846^\circ}{2}=3923^\circ=360^\circ\times 11-37^\circ$

$3923^\circ$ ハ第四象限ノ角ナルヲ以テ

$\sin 3923^\circ$ ハ負, $\cos 3923^\circ$ ハ正ナリ.

而シテ其絶對値ニ於テ $\cos 3923^\circ$ ガ $\sin 3923^\circ$ ヨリ大ナリ.

$$\therefore\quad \sin 3923^\circ+\cos 3923^\circ=+\sqrt{1+\sin 7846^\circ}\qquad(1)$$

$$\sin 3923^\circ-\cos 3923^\circ=-\sqrt{1-\sin 7846^\circ}\qquad(2)$$

故ニ所要ノ答ハ次ノ如シ.

$$\sin 3923^\circ=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{1+\sin 7846^\circ}-\sqrt{1-\sin 7846^\circ}\right\}.$$

$$\cos 3923^\circ=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{1+\sin 7846^\circ}+\sqrt{1-\sin 7846^\circ}\right\}$$

(6). $\sin x=-\frac{24}{25}$, $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ ナルトキ

$\sin\frac{x}{2}$ 及 $\cos\frac{x}{2}$ ヲ求メヨ.

解. 仮定ヨリ $\frac{3\pi}{4}<\frac{x}{2}<\pi$



故ニ $\sin\frac{x}{2}$ ハ正ニシテ $\cos\frac{x}{2}$ ハ負ナリ而シテ

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right|<\left|\cos\frac{x}{2}\right|$$

故ニ公式ノ符号ハ次ノ如クナルベシ.

$$\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=-\sqrt{1+\sin x}.\qquad(1)$$

$$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=+\sqrt{1-\sin x}.\qquad(2)$$

$$\therefore\quad \sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{1-\sin x}-\sqrt{1+\sin x}\right\}.\qquad(3)$$

$$\cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}\left\{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right\}.\qquad(4)$$

今 $\sin x=-\frac{24}{25}$ ヲ(3),(4)ニ代入スレバ所要ノ答トシテ次ノ値ヲ得.

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{3}{5},\quad \cos\frac{x}{2}=-\frac{4}{5}$$

(7). $2\cos\alpha=-\sqrt{1+\sin 2\alpha}-\sqrt{1-\sin 2\alpha}$ ナレバ $\alpha$ ハ第何象限ノ角ナリヤ.

解. 此結果ヲ得ルタメニハ注意(2)ニヨリテ

$$\sin\alpha+\cos\alpha=-\sqrt{1+\sin 2\alpha}\qquad(1)$$

$$\sin\alpha-\cos\alpha=+\sqrt{1-\sin 2\alpha}\qquad(2)$$

ナラザルベカラズ. 依(1)ガ成立スルタメニハ

$$(2n\pi+\tfrac{3\pi}{4})<\alpha<(2n\pi+\tfrac{7\pi}{4})\qquad(3)$$

又(2)ガ成立スルタメニハ

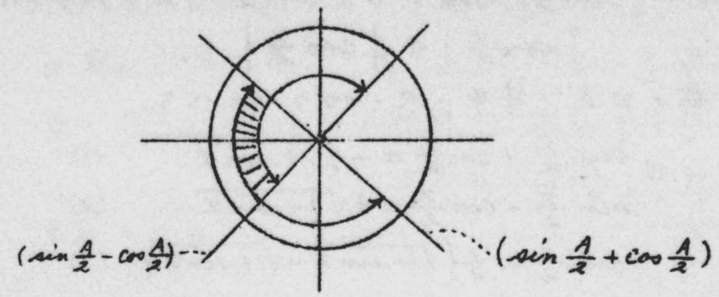
$$(2n\pi+\tfrac{\pi}{4})<\alpha<(2n\pi+\tfrac{5\pi}{4})\qquad(4)$$

(3)及(4)ヲ合一シテ

$$(2n\pi+\tfrac{3\pi}{4})<\alpha<(2n\pi+\tfrac{5\pi}{4})$$

即 $\alpha$ ハ第二,第三象限ニ於ケル角ナリ.

注意. $\alpha$ ノ限界ヲ圖ニテ示セバ次ノ如シ.




(8) $\operatorname{tg}2\theta=-\frac{24}{7}$ ナルトキ $\sin\theta,\cos\theta,\operatorname{tg}\theta$ ヲ求メヨ.

解. 公式 $\operatorname{tg}\theta=\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\theta}}{\operatorname{tg}2\theta}$

故ニ $\operatorname{tg}\theta=\frac{-1\pm\sqrt{1+(-\frac{24}{7})^2}}{-\frac{24}{7}}=-\frac{3}{4}$ 又ハ $\frac{4}{3}$

(イ) $\operatorname{tg}\theta=-\frac{3}{4}$ ナルトキ

$$\sin\theta=\pm\frac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}=\pm\frac{-\frac{3}{4}}{\sqrt{1+(-\frac{3}{4})^2}}=\mp\frac{3}{5}$$

$$\cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+(-\frac{3}{4})^2}}=\pm\frac{4}{5}$$

(ロ) $\operatorname{tg}\theta=\frac{4}{3}$ ナルトキ

$$\sin\theta=\pm\frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{1+(\frac{4}{3})^2}}=\pm\frac{4}{5}$$

$$\cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{4}{3})^2}}=\pm\frac{3}{5}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sin\theta=-\frac{3}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{4}{5}$ | $-\frac{4}{5}$ |
| $\cos\theta=\frac{4}{5}$ | $-\frac{4}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $-\frac{3}{5}$ |
| $\operatorname{tg}\theta=-\frac{3}{4}$ | $-\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{3}$ |

.



(9). $\cos\theta=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cdot\cos\beta}$ ナルトキハ $\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$.

解. $\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}=\sin^2\frac{\theta}{2}/\cos^2\frac{\theta}{2}$, デアルカラ與ヘラレタル式トノ關係上 $\cos^2\frac{\theta}{2}$, $\sin^2\frac{\theta}{2}$ ヲ求メテ後 $\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}$ ヲ計算スベシ.

公式ヨリ $2\cos^2\frac{\theta}{2}=1+\cos\theta$ ノ右辺ニ仮定式ヲ代入シテ

$$=1+\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$=\frac{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)}{1+\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

又 $2\sin^2\frac{\theta}{2}=1-\cos\theta$

$$=1-\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$=\frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{1+\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$\therefore \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}=\sin^2\frac{\theta}{2}/\cos^2\frac{\theta}{2}$ ナルヲ以テ

$$=\frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{1+\cos\alpha\cdot\cos\beta}\Big/\frac{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)}{1+\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$=\frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)}$$

$$=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin^2\frac{\beta}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos^2\frac{\beta}{2}}$$

$$=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$$

(10). $\cos\theta=\frac{\cos\alpha-\ell}{1-\ell\cos\alpha}$ ナルトキハ

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\ell}{1-\ell}}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

解. 公式 $ty\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ コレ=仮定ヲ代入シテ

$$=\pm\sqrt{\left\{1-\frac{\cos\alpha-e}{1-e\cos\alpha}\right\}\Big/\left\{1+\frac{\cos\alpha-e}{1-e\cos\alpha}\right\}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{(1+e)(1-\cos\alpha)}{(1-e)(1+\cos\alpha)}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cdot ty\frac{\alpha}{2}$$

## 14. 逆三角函数ノ関係公式

$$Arc\,ty\,x+Arc\,ty\,y=Arc\,ty\frac{x+y}{1-xy}\qquad(1)$$

$$Arc\,ty\,x-Arc\,ty\,y=Arc\,ty\frac{x-y}{1+xy}\qquad(2)$$

$$2Arc\,ty\,x=Arc\,ty\frac{2x}{1-x^2}\qquad(3)$$

或ハ次ノ如ク書クコトヲ得.

$$Tan^{-1}x+Tan^{-1}y=Tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}\qquad(1)$$

$$Tan^{-1}x-Tan^{-1}y=Tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}\qquad(2)$$

$$2Tan^{-1}x=Tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\qquad(3)$$



## 問題

次ノ各等式ヲ證明セヨ.

(1) $arc\,ty\frac{1}{2}+arc\,ty\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

解. 公式(1)ニヨリテ

左辺$=arc\,ty\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}$

$=arc\,ty\,1$

$=\frac{\pi}{4}$

(2). $arc\,ty\frac{1}{7}+2arc\,ty\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$ (28年)

解. 公式(3)ニヨリテ

$$2arc\,ty\frac{1}{3}=arc\,ty\frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-(\frac{1}{3})^2}=arc\,ty\frac{3}{4}$$

∴ 左辺$=arc\,ty\frac{1}{7}+arc\,ty\frac{3}{4}$

$$=arc\,ty\frac{\frac{1}{7}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{4}}$$

$=arc\,ty\,1$

$=\frac{\pi}{4}$

(3) $4arc\,ty\frac{1}{5}-arc\,ty\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$

解. 公式(3)ヲ二度用ヒテ

$4arc\,ty\frac{1}{5}=2(2)arc\,ty\frac{1}{5}$

$=(2)arc\,ty\frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1-(\frac{1}{5})^2}=(2)arc\,ty\frac{5}{12}$

$$2\arctan\frac{5}{12} = \arctan\frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-(\frac{5}{12})^2}$$

$$= \arctan\frac{120}{119}$$

左辺 $= \arctan\frac{120}{119} - \arctan\frac{1}{239}$

$$= \arctan\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}}$$

$$= \arctan 1$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

(4). $\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{4}{5} = \frac{\pi}{2}$

解. $\arcsin a$ ヲ $\arctan a$ ニ直シテ解ケバ

$\arcsin a = \arctan\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ トナルヲ以テ

$$\arcsin\frac{3}{5} = \arctan\frac{+\frac{3}{5}}{\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}} = \arctan\frac{3}{4}$$

$$\arcsin\frac{4}{5} = \arctan\frac{4}{3}$$

故 = 左辺 $= \arctan\frac{3}{4} + \arctan\frac{4}{3}$

$$= \arctan\frac{\frac{3}{4}+\frac{4}{3}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}}$$

$$= \arctan\infty$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

注意. $\arcsin x$ ヲ $\arctan x$ ニ直ス法.



$\sin x = a$ トオケバ $x = \arcsin a$ トナル.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$$

故 = $x = \arctan\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

故 = $\arcsin a = \arctan\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

別解 公式 $\arcsin a + \arcsin b = \arcsin\{a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\}$ ヲ用フレバ

左辺 $= \arcsin\left\{\frac{3}{5}\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} + \frac{4}{5}\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}\right\}$

$$= \arcsin 1$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

注意. 次ニ屢用ヒラル公式ヲ示サン.

$$\sin^{-1}a \pm \sin^{-1}b = \sin^{-1}\{a\sqrt{1-b^2} \pm b\sqrt{1-a^2}\}$$

$$\sin^{-1}a \pm \cos^{-1}b = \cos^{-1}\{b\sqrt{1-a^2} \mp a\sqrt{1-b^2}\}$$

$$\cos^{-1}a \pm \cos^{-1}b = \cos^{-1}[ab \mp \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}]$$

$$2\sin^{-1}a = \sin^{-1}2a\sqrt{1-a^2}$$

$$2\cos^{-1}a = \cos^{-1}(2a^2-1)$$

$$\cot^{-1}a \pm \cot^{-1}b = \cot^{-1}\frac{ab\mp 1}{b\pm a}$$

$$2\cot^{-1}a = \cot^{-1}\frac{a^2-1}{2a}$$

(5). $\operatorname{arc\,cot}\frac{3}{4} + \operatorname{arc\,cot}\frac{1}{7} = \frac{3\pi}{4}$

解. 公式ヲ用ヒテ解ケバ

$$\text{arc cot } a + \text{arc cot } b = \text{arc cot } \frac{ab-1}{b+a}$$

左辺 $= \text{arc cot } \dfrac{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}-1}{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}$

$= \text{arc cot } -1$

$= \dfrac{3\pi}{4}$

別解、 arc cot a ヲ arc tg a ニ直シテ解ケバ

arc cot $a$ = arc tg $\frac{1}{a}$.

故ニ arc cot $\frac{3}{4}$ = arc tg $\frac{4}{3}$.

arc cot $\frac{1}{7}$ = arc tg 7.

故ニ 左辺 = arc tg $\frac{4}{3}$ + arc tg 7

$= \text{arc tg } \dfrac{\frac{4}{3}+7}{1-\frac{4}{3}\cdot 7}$

$= \text{arc tg } -1$

$= \dfrac{3\pi}{4}$

注意 arc cot a ヲ arc tg a ニ直ス法.

解 arc cot $a = x$ トオケバ

$a = \cot x$

$\text{tg } x = \dfrac{1}{\cot x} = \dfrac{1}{a}$

故ニ $x = \text{arc tg } \dfrac{1}{a}$

故ニ arc cot $a$ = arc tg $\frac{1}{a}$



類題(1). $\sin\theta = x$ ナルトキハ $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$,

依リテ

$\theta = \sin^{-1}x$, 及 $\theta = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$. 然レ共

一般ノ値ニ於テ $\sin^{-1}x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ トスル

能ハザル理由ヲ説明セヨ.

解. 此ハ正弦及餘弦ノ一般ナル値ノ公式(1)及(2)ハ相一致セザルが故ナリ.

即共ヘラレタル正弦ヲ持ツ總テノ角ヲ表ス公式

$n\pi + (-1)^n\alpha$ (1)

共ヘラレタル餘弦ヲモツ總テノ角ヲ表ス公式

$2n\pi \pm \alpha$ (2)

但共ヘラレタル正弦及餘弦ヲ持ツ最小正角ヲ$\alpha$トス.

注意(1).

此ハ数ノ例ヨリ一層明ラカニスルコトヲ得ベシ. 即若シ $x = \frac{1}{2}$ ナルトキハ $\sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 然ニ $\sin^{-1}x$ ハ 30°, 150°, 390°, 510°, ----- ナル角ノ任意ノ一ツナルコトヲ得. 又 $\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ ハ 30°, 330°, 390°, 690°, ------ ナル角ノ任意ノ一ツナルコトヲ得. 故ニ恒ニ

$\sin^{-1}\frac{1}{2} = \cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$

ナラザルコト明ラカナリ.

注意.(2)

本題ニ於ケル如ク逆三角函数ノ相等ハ一般ノ

角ニ於テハ適合セザルコト多キ故別ニ断リナケレバ通例 $\sin^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, $\cot^{-1}x$, $\operatorname{cosec}^{-1}x$, ハ $-\frac{\pi}{2}$ 及 $+\frac{\pi}{2}$ ノ間ノ角; $\cos^{-1}x$, $\sec^{-1}x$ ハ 0 及 $\pi$ ノ間ノ角ナリト知ルベシ. 是等ノ範囲内ニ取リタル角ヲ角ノ主値ト云フ.

類題(2) 次ノ式ヲ證明セヨ.

$$\sin^{-1}a \pm \sin^{-1}b = \sin^{-1}\left\{a\sqrt{1-b^2} \pm b\sqrt{1-a^2}\right\}$$

解. $\sin^{-1}a = A$

$\sin^{-1}b = B$ トオケバ

$a = \sin A$, $b = \sin B$. 従テ

$\sqrt{1-a^2} = \cos A$, $\sqrt{1-b^2} = \cos B$. 然ルニ

$\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A \sin B$. 依リテ

$A \pm B = \sin^{-1}(\sin A\cos B \pm \sin B\cos A)$

之レニ上ノ値ヲ代入シテ

$$\sin^{-1}a \pm \sin^{-1}b = \sin^{-1}\left\{a\sqrt{1-b^2} \pm b\sqrt{1-a^2}\right\}$$

類題(3) $\sin^{-1}\frac{1}{2} + \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = 90^\circ$ ヲ證セヨ.

解. $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ トシテ公式ニ代入スレバ

左辺 $= \sin^{-1}1$.

$= \underline{\frac{\pi}{2}}$

類題(4) $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = 45^\circ$ ヲ證セヨ.

解. 公式 $\tan^{-1}a + \tan^{-1}b = \tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}$



$$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{5} = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{7}{9}$$

故ニ左辺 $= \tan^{-1}\frac{7}{9} + \tan^{-1}\frac{1}{8}$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{8}}$$

$$= \tan^{-1}1$$

$$= \underline{45^\circ}$$

類題(5) $\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$ ヲ證セヨ.

解. 公式 $\tan^{-1}a + \tan^{-1}b = \tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}$

$$\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{5} = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}\frac{1}{5}} = \tan^{-1}\frac{4}{7}$$

$$\tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}\frac{1}{8}} = \tan^{-1}\frac{3}{11}$$

左辺 $= \tan^{-1}\frac{4}{7} + \tan^{-1}\frac{3}{11}$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{4}{7}+\frac{3}{11}}{1-\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{11}} = \tan^{-1}1 = \underline{\frac{\pi}{4}}$$

類題(6) $4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{70} + \tan^{-1}\frac{1}{99} = 45^\circ$ ヲ證セヨ.

解. 公式 $2\tan^{-1}a = \tan^{-1}\frac{2a}{1-a^2}$ ヲ二度用ヒテ

$$4\tan^{-1}\frac{1}{5} = \tan^{-1}\frac{120}{119}$$

又 $\tan^{-1}\frac{1}{99} - \tan^{-1}\frac{1}{70} = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{99}+\frac{1}{70}}{1+\frac{1}{99}\cdot\frac{1}{70}} = \tan^{-1}\frac{-29}{6931}$

左辺 $= \tan^{-1}\frac{120}{119} - \tan^{-1}\frac{29}{6931} = \tan^{-1}1 = \underline{45^\circ}$

類題(7) $\frac{\pi}{4} = 5\tan^{-1}\frac{1}{7} + 2\tan^{-1}\frac{3}{79}$ ヲ證セヨ.

解. 公式 $2\tan^{-1}a = \tan^{-1}\frac{2a}{1-a^2}$ ヲ用ヒテ

$$2\tan^{-1}\frac{3}{79} = \tan^{-1}\left\{2\cdot\frac{3}{79}\Big/\left(1-\frac{3^2}{79^2}\right)\right\} = \tan^{-1}\frac{237}{3116}$$

$$5\tan^{-1}\frac{1}{7} = 4\tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$$

$$2\tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{2\cdot\frac{1}{7}}{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2} = \tan^{-1}\frac{7}{24}.$$

$$4\tan^{-1}\frac{1}{7} = 2\cdot\tan^{-1}\frac{7}{24}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\cdot\frac{7}{24}}{1-\left(\frac{7}{24}\right)^2}$$

$$= \tan^{-1}\frac{336}{527}$$

故 $= 5\tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{336}{527} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{336}{527}+\frac{1}{7}}{1-\frac{336}{527}\cdot\frac{1}{7}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2879}{3353}$$

故 = 右辺ハ

$$\tan^{-1}\frac{2879}{3353} + \tan^{-1}\frac{237}{3116}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{2879}{3353}+\frac{237}{3116}}{1-\frac{2879}{3353}\cdot\frac{237}{3116}}$$

$$= \tan^{-1}1$$

$$= \frac{\pi}{4}$$



注意. 本題ハ途中ヨリ次ノ如クスルヲ宜トス.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\frac{2879}{3353}\right) = \frac{1-\frac{2879}{3353}}{1+\frac{2879}{3353}} = \frac{237}{3116}$$

故 $= \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\frac{2879}{3353} = \tan^{-1}\frac{237}{3116}$

依リテ所題ノ等式ハ成立ス.

## 雜　題

次ノ等式ヲ證明セヨ. (1—10)

(1). $\cos^3\alpha\cdot\sin 3\alpha + \sin^3\alpha\cos 3\alpha = \frac{3}{4}\sin 4\alpha$.

解. 公式 $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

左辺 $= \cos^3\alpha(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha) + \sin^3\alpha(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)$.

$= 3\sin\alpha\cdot\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$.

$= 3\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha$.

$= \frac{1}{2}(6\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha)$.

$= \frac{3}{2}\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha$.

$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 4\alpha$.

$= \frac{3}{4}\sin 4\alpha$.

(2). $\sin^3\alpha\sin 3\alpha + \cos^3\alpha\cdot\cos 3\alpha = \cos^3 2\alpha$.

解. 左辺 $= \sin^3\alpha(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha) + \cos^3\alpha(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)$

$= 3(\sin^4\alpha - \cos^4\alpha) - 4\sin^6\alpha + 4\cos^6\alpha$.

$\sin^2A+\cos^2A=1$ ヲ乗ジテ $\sin^6\alpha$, $\cos^6\alpha$ ヲ消去ス.

$=3(\sin^4\alpha-\cos^4\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-4\sin^6\alpha+4\cos^6\alpha.$

$=3\sin^6\alpha+3\sin^4\alpha\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha\cos^4\alpha-3\cos^6\alpha$

$\quad -4\sin^6\alpha+4\cos^6\alpha.$

$=\cos^6\alpha-3\cos^4\alpha\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha\sin^4\alpha-\sin^6\alpha.$

$(a^2-b^2)^3=a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6$

$\therefore\ =(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)^3$

$=(\cos 2\alpha)^3$

$=\cos^3 2\alpha$

(3). $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2(A+B)=2\sin A\sin B\sin(A+B)\left\{\cot A\cot B-\cot(A+B)\right\}$

解. 右辺 $=2\sin A\sin B\sin(A+B)\left\{\dfrac{\cos A}{\sin A}+\dfrac{\cos B}{\sin B}-\dfrac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}\right\}$

$=2\cos A\sin B\sin(A+B)+2\sin A\cos B\sin(A+B)$

$\quad -2\sin A\sin B\cos(A+B).$

$=2\sin(A+B)\left\{\cos A\sin B+\sin A\cos B\right\}-2\sin A$

$\quad \sin B\cos(A+B).$

$=2\sin^2(A+B)-2\sin A\sin B\cos(A+B).$

$=\sin^2(A+B)+\sin^2(A+B)-2\sin A\sin B\cos(A+B).$

$=\sin^2(A+B)+\sin^2A\cos^2B+2\sin A\cos B\cos A\sin B$

$\quad +\cos^2A\sin^2B-2\sin A\sin B\cos A\cos B+2\sin^2A\sin^2B.$

$=\sin^2(A+B)+\sin^2A(1-\sin^2B)+(1-\sin^2A)\sin^2B$

$\quad +2\sin^2A\sin^2B.$

$=\sin^2(A+B)+\sin^2A+\sin^2B.$



(4) $\dfrac{(\sec\theta\sec\varphi+\tan\theta\tan\varphi)^2-(\tan\theta\sec\varphi+\sec\theta\tan\varphi)^2}{2(1+\tan^2\theta\tan^2\varphi)-\sec^2\theta\sec^2\varphi}$

$=\dfrac{\sec 2\theta\sec 2\varphi}{\sec^2\theta\sec^2\varphi}$

解. 分子 $=\left(\dfrac{1}{\cos\theta\cos\varphi}+\dfrac{\sin\theta\sin\varphi}{\cos\theta\cos\varphi}\right)^2-\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta\cos\varphi}+\dfrac{\sin\varphi}{\cos\theta\cos\varphi}\right)^2$

$=\dfrac{1+2\sin\theta\sin\varphi+\sin^2\theta\sin^2\varphi}{\cos^2\theta\cos^2\varphi}$

$\quad -\dfrac{\sin^2\theta+2\sin\theta\sin\varphi+\sin^2\varphi}{\cos^2\theta\cos^2\varphi}$

$=\dfrac{1-\sin^2\theta-\sin^2\varphi+\sin^2\theta\sin^2\varphi}{\cos^2\theta\cos^2\varphi}$

分母 $=2\left(1+\dfrac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{\cos^2\theta\cos^2\varphi}\right)-\dfrac{1}{\cos^2\theta\cos^2\varphi}$

$=\dfrac{2\cos^2\theta\cos^2\varphi+2\sin^2\theta\sin^2\varphi-1}{\cos^2\theta\cos^2\varphi}$

故 = 左辺 $=\dfrac{1-\sin^2\theta-\sin^2\varphi+\sin^2\theta\sin^2\varphi}{2\cos^2\theta\cos^2\varphi+2\sin^2\theta\sin^2\varphi-1}$

$=\dfrac{(1-\sin^2\theta)(1-\sin^2\varphi)}{2\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}\cdot\frac{1+\cos 2\varphi}{2}+2\frac{1-\cos 2\theta}{2}\cdot\frac{1-\cos 2\varphi}{2}-1}$

$=\dfrac{\cos^2\theta\cdot\cos^2\varphi}{\cos 2\theta\cdot\cos 2\varphi}$

$=\dfrac{\sec 2\theta\cdot\sec 2\varphi}{\sec^2\theta\cdot\sec^2\varphi}$

(5). $\cos 11A+3\cos 9A+3\cos 7A+\cos 5A$

$=16\cos^3A\cos\left(4A+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(4A-\frac{\pi}{4}\right)$ (42年).

解. 公式 $\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$.

$\cos 11A+\cos 5A=2\cos 8A\cos 3A.$

$$3\cos 9A+\cos 7A=6\cos 8A\cos A.$$

故 = 左辺 $= 2\cos 8A\cos 3A+6\cos 8A\cos A.$

$= 2\cos 8A(\cos 3A+3\cos A).$

$= 2\cos 8A(4\cos^3 A-3\cos A+3\cos A).$

$= 8\cos 8A\cos^3 A.$

然ル = $\cos 2A = 2\cos^2 A-1$ 故 = $\cos 8A = 2\cos^2 4A-1.$

$= 8\cos^3 A(2\cos^2 4A-1)$

$= 16\cos^3 A\cos^2 4A-8\cos^3 A.$

$= 16\cos^3 A(\cos^2 4A-\frac{1}{2})$

右辺ノ形ヲ作ル目的ニテ $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ トルヲ以テ $\frac{1}{2}$ ヲ $\sin^2\frac{\pi}{4}$ ト書クコトニ注意スレバ

$= 16\cos^3 A(\cos^2 4A-\sin^2\frac{\pi}{4})$

公式 $\cos^2 A-\sin^2 B=\cos(A+B)\cos(A-B)$ ニヨリ

$= 16\cos^3 A\cos(4A+\frac{\pi}{4})\cos(4A-\frac{\pi}{4})$

(6). $\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$

解. $\frac{\pi}{5}=36°,\ \frac{2\pi}{5}=72°.$

$\cos 36°=\sin 54°=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

$\cos 72°=\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

左辺 $=\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{1}{2}$

(7). $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$

解. $\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ ヲ用ヒヨ.



左辺 $= 2\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}.$

$=\cos\frac{3\pi}{7}(2\cos\frac{2\pi}{7}+1).$ $\cos 2A=1-2\sin^2 A.$

$=\cos\frac{3\pi}{7}[2(1-2\sin^2\frac{\pi}{7})+1].$

$=\cos\frac{3\pi}{7}[3-4\sin^2\frac{\pi}{7}].$ $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A.$

$=\cos\frac{3\pi}{7}\{(3\sin\frac{\pi}{7}-4\sin^3\frac{\pi}{7})/\sin\frac{\pi}{7}\}.$

$=\cos\frac{3\pi}{7}\{\sin\frac{3\pi}{7}/\sin\frac{\pi}{7}\}$

$=\cos\frac{3\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}/\sin\frac{\pi}{7}.$

分母子ヲ2倍シテ $2\sin A\cos A=\sin 2A$ ヲ用フレバ

$=2\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}/2\sin\frac{\pi}{7}$

$=\frac{\sin\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$

$=\frac{\sin(\pi-\frac{\pi}{7})}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{2}$

別解 左辺ハ等差級数ヲナス角ノ餘弦ノ和ナルヲ以テ

公式 $S=\frac{\cos(a+\frac{n-1}{2}d)\sin\frac{n}{2}d}{\sin\frac{1}{2}d}$ ヲ用ヒテ解ケバ

$S=\frac{\cos(\frac{\pi}{7}+\frac{3-1}{2}\frac{2\pi}{7})\sin\frac{3}{2}\cdot\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{7}}$

$=\frac{\cos\frac{3\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}$ 分母子ヲ2倍シテ變形ス

$=\frac{\sin\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$

$=\frac{\sin(\pi-\frac{\pi}{7})}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{2}$

(8). $\cos\frac{2\pi}{15}+\cos\frac{4\pi}{15}+\cos\frac{8\pi}{15}+\cos\frac{14\pi}{15}=\frac{1}{2}$ (4点)

解. $\cos\frac{2\pi}{15}+\cos\frac{14\pi}{15}=2\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}$

$\cos\frac{4\pi}{15}+\cos\frac{8\pi}{15}=2\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}$

左辺 $=2\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}+2\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}$.

$=2\cos\frac{6\pi}{15}\left(\cos\frac{8\pi}{15}+\cos\frac{2\pi}{15}\right)$.

$=4\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}$

然ル $=$ $\cos\frac{3\pi}{15}=\cos\frac{\pi}{5}=\cos 36^\circ=\sin 54^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

$\cos\frac{5\pi}{15}=\cos\frac{\pi}{3}=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

$\cos\frac{6\pi}{15}=\cos 72^\circ=\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$=4\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{1}{2}$

(9). $\cos 55^\circ\cos 65^\circ+\cos 65^\circ\cos 175^\circ+\cos 175^\circ\cos 55^\circ=-\frac{3}{4}$.

解. 左辺 $=\cos 65^\circ(\cos 55^\circ+\cos 175^\circ)+\cos 175^\circ\cos 55^\circ$.

$=\cos 65^\circ\cdot 2\cos 115^\circ\cos 60^\circ+\cos 175^\circ\cos 55^\circ$.

$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

$=\cos 65^\circ\cos 115^\circ+\cos 175^\circ\cos 55^\circ$

$=\frac{1}{2}(\cos 180^\circ+\cos 50^\circ+\cos 230^\circ+\cos 120^\circ)$

$=\frac{1}{2}(-1+\cos 50^\circ-\cos 50^\circ-\frac{1}{2})$

$=-\frac{3}{4}$

注意. $2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$

$\cos 180^\circ=-1$, $\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$

$\cos 230^\circ=\cos(180^\circ+50^\circ)=-\cos 50^\circ$.



(10). $\cos^2(A-B)+\cos^2(B-C)+\cos^2(C-A)$

$=2\cos(B-C)\cos(C-A)\cos(A-B)+1$ (10点)

解. 公式 $\cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ ヲ用ヒヨ.

左辺 $=\frac{1+\cos 2(A-B)}{2}+\frac{1+\cos 2(B-C)}{2}+\frac{1+\cos 2(C-A)}{2}$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left\{\cos 2(A-B)+\cos 2(B-C)+\cos 2(C-A)\right\}$.

$\cos 2(A-B)+\cos 2(B-C)+\cos 2(C-A)$.

$=2\cos^2(A-B)-1+2\cos(A-B)\cos(A+B-2C)$.

$=2\cos(A-B)\left\{\cos(A-B)+\cos(A+B-2C)\right\}-1$.

$=4\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)-1$.

故 $=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left\{4\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)-1\right\}$.

$=2\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)+1$

次ノ式ヲ簡単ニセヨ. (11—13)

(11). $\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha+\sin 2\alpha\sin 3\alpha+\cdots\cdots+\sin n\alpha\cdot\sin(n+1)\alpha$

解. 公式 $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$ ヲ用ヒテ

原式ヲ和ノ形ニ変形シテ

原式 $=\frac{1}{2}\left\{(\cos\alpha-\cos 3\alpha)+(\cos\alpha-\cos 5\alpha)+\cdots\cdots\right.$

$\left.+(\cos\alpha-\cos(2n+1)\alpha)\right\}$.

$=\frac{1}{2}\left\{n\cdot\cos\alpha-(\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cdots\cdots+\cos(2n+1)\alpha)\right\}$.

故 $=\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cdots\cdots+\cos(2n+1)\alpha=S$ トオケバ

公式 $S=\frac{\cos(a+\frac{n-1}{2}d)\sin\frac{n}{2}d}{\sin\frac{1}{2}d}$ ニヨリテ

$a=3\alpha$, $d=2\alpha$, $n=n$ ヲ代入スレバ

$$S=\frac{\cos\left\{3\alpha+\frac{n-1}{2}\cdot 2\alpha\right\}\sin\frac{n}{2}\cdot 2\alpha}{\sin\frac{1}{2}\cdot 2\alpha}$$

$$=\frac{\cos(n+2)\alpha\cdot\sin n\alpha}{\sin\alpha}$$

故ニ原式ハ次ノ如クナル.

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\left\{n\cdot\cos\alpha-\frac{\cos(n+2)\alpha\cdot\sin n\alpha}{\sin\alpha}\right\}$$

(12). $\operatorname{Cosec}x+\operatorname{Cosec}2x+\operatorname{Cosec}4x+\cdots\cdots+\operatorname{Cosec}2^{n-1}x$.

解. 13章(VII)公式 $\operatorname{Cosec}x=\cot\frac{x}{2}-\cot x$ ヲ用ヒヨ.

所要ノ和ヲSトスレバ

$$S=(\cot\tfrac{x}{2}-\cot x)+(\cot x-\cot 2x)+(\cot 2x-\cot 4x)+$$
$$\cdots\cdots\cdots+(\cot 2^{n-2}x-\cot 2^{n-1}x).$$
$$=\cot\frac{x}{2}-\cot 2^{n-1}x$$

(13). $\sec x\cdot\sec 2x+\sec 2x\sec 3x+\cdots\cdots+\sec nx\cdot\sec(n+1)x$.

解 所要ノ和ヲSトオケバ

$$S=\frac{1}{\cos x\cdot\cos 2x}+\frac{1}{\cos 2x\cdot\cos 3x}+\cdots\cdots+\frac{1}{\cos nx\cdot\cos(n+1)x}\qquad(1)$$

然ニ $\frac{\sin x}{\cos x\cdot\cos 2x}=\frac{\sin(2x-x)}{\cos x\cdot\cos 2x}$

$$=\frac{\sin 2x\cos x-\cos 2x\sin x}{\cos x\cdot\cos 2x}$$

$$=\operatorname{ty}2x-\operatorname{ty}x\qquad(2)$$

同様ニ $\frac{\sin x}{\cos 2x\cos 3x}=\operatorname{ty}3x-\operatorname{ty}2x\qquad(3)$

進テ斯ノ如クナルヲ以テ(1)式ノ両辺ニ $\sin x$ ヲ乗ジテ(2),(3)……ヲ用ヒテ変形スレバ



$$\sin x\cdot S=\frac{\sin x}{\cos x\cdot\cos 2x}+\frac{\sin x}{\cos 2x\cdot\cos 3x}+\cdots\cdots+\frac{\sin x}{\cos nx\cdot\cos(n+1)x}$$
$$=(\operatorname{ty}2x-\operatorname{ty}x)+(\operatorname{ty}3x-\operatorname{ty}2x)+\cdots\cdots+\operatorname{ty}(n+1)x-\operatorname{ty}nx$$
$$=\operatorname{ty}(n+1)x-\operatorname{ty}x$$

故ニ $S=\frac{\operatorname{ty}(n+1)x-\operatorname{ty}x}{\sin x}$.

(14). $\frac{1}{1+\operatorname{ty}\alpha\cdot\operatorname{ty}2\alpha}+\frac{1}{1+\operatorname{ty}2\alpha\cdot\operatorname{ty}4\alpha}+\frac{1}{1+\operatorname{ty}3\alpha\cdot\operatorname{ty}6\alpha}+\cdots$(n項マデ)

ノ和ヲ求メヨ.

解. 第n項 $=\frac{1}{1+\operatorname{ty}n\alpha\operatorname{ty}2n\alpha}$

$$=\frac{1}{1+\frac{\sin n\alpha\cdot\sin 2n\alpha}{\cos n\alpha\cdot\cos 2n\alpha}}$$
$$=\frac{\cos n\alpha\cdot\cos 2n\alpha}{\cos n\alpha\cos 2n\alpha+\sin n\alpha\sin 2n\alpha}$$
$$=\frac{\cos n\alpha\cdot\cos 2n\alpha}{\cos n\alpha}$$
$$=\cos 2n\alpha$$

故ニ此結果ニ於テnヲ順次ニ1,2,3,……nトシテ相加フレバ所題ノ級数ノ和ハ

$\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha+\cdots\cdots+\cos 2n\alpha$.

所要ノ和ヲSトオケバSハ公式ニヨリテ

$$S=\frac{\cos\left(2\alpha+\frac{n-1}{2}\cdot 2\alpha\right)\cdot\sin\frac{n}{2}\cdot 2\alpha}{\sin\frac{1}{2}\cdot 2\alpha}$$

$$=\frac{\sin n\alpha\cdot\cos(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$$

(15). $\frac{2\,tg\alpha}{1+tg^2\alpha}+\frac{2\,tg2\alpha}{1+tg^2 2\alpha}+\frac{2\,tg3\alpha}{1+tg^2 3\alpha}+\cdots\cdots$ ノ n 項ノ和ヲ求ム.

解. 第 n 項 $=\frac{2\,tgn\alpha}{1+tg^2 n\alpha}$

$=\frac{2\,tgn\alpha}{sec^2 n\alpha}$.

$=2\sin n\alpha\cdot\cos n\alpha=\underline{\sin 2n\alpha}$

此結果ニ n ヲ順次 1,2,3,----,n トオケバ所題ノ級數ノ各項ヲ得ベク, 從ヒテ所要ノ和ヲ S トスレバ

$S=\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha+\cdots\cdots+\sin 2n\alpha$.

$S=\frac{\sin(2\alpha+\frac{n-1}{2}\cdot 2\alpha)\sin\frac{n}{2}\cdot 2\alpha}{\sin\frac{1}{2}\cdot 2\alpha}$

$=\frac{\sin n\alpha\cdot\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$

$A+B+C=\pi$ ナルトキ次ノ等式ヲ證セヨ (16,17).

(16). $tg^3A\,tg^3B\,tg^3C-tg^3A-tg^3B-tg^3C=\frac{3\,tgA\,tgB\,tgC}{\cos A\cos B\cos C}$. (14年).

解. $A+B+C=\pi$ ナルトキハ

$tgA\,tgB\,tgC=tgA+tgB+tgC$ (1)

左辺 $=(tgA\cdot tgB\cdot tgC)^3-tg^3A-tg^3B-tg^3C$

此式ニ (1)式ヲ用ヒテ

$=(tgA+tgB+tgC)^3-tg^3A-tg^3B-tg^3C$

然ルニ代數学ニ於テ次ノ公式アリ.

$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(b+c)(c+a)(a+b)$.



故 = 左辺 $=3(tgB+tgC)(tgC+tgA)(tgA+tgB)$

$=3\cdot\frac{\sin(B+C)}{\cos B\cdot\cos C}\cdot\frac{\sin(C+A)}{\cos C\cdot\cos A}\cdot\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cdot\cos B}$.

$=\frac{3\sin A\sin B\sin C}{\cos^2 A\cdot\cos^2 B\cdot\cos^2 C}$

$=\underline{\frac{3\,tgA\cdot tgB\cdot tgC}{\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C}}$

注意. 第二編7章注意(1)ニヨリテ

$tgx+tgy=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}$. (42P). 及ビ

$A+B+C=\pi$ ナル故 $\sin(B+C)=\sin A$.

(17) $\cos 3A\sin(B-C)+\cos 3B\sin(C-A)+\cos 3C\sin(A-B)$

$=-4\sin(B-C)\sin(C-A)\sin(A-B)$.

解. 左辺 $=\frac{1}{2}\{\sin(3A+B-C)-\sin(3A-B+C)\}+$

$\frac{1}{2}\{\sin(3B+C-A)-\sin(3B-C+A)\}+$

$\frac{1}{2}\{\sin(3C+A-B)-\sin(3C-A+B)\}$.

$=\frac{1}{2}\{\sin(3A+B-C)-\sin(3C-A+B)\}+$

$\frac{1}{2}\{\sin(3B+C-A)-\sin(3A-B+C)\}+$

$\frac{1}{2}\{\sin(3C+A-B)-\sin(3B-C+A)\}$.

$=\frac{1}{2}\{2\cos(A+B+C)\sin(2A-2C)\}+$

$\frac{1}{2}\{2\cos(A+B+C)\sin(2B-2A)\}+$

$\frac{1}{2}\{2\cos(A+B+C)\sin(2C-2B)\}$.

$=\cos(A+B+C)\{\sin 2(A-C)+\sin 2(B-A)+\sin 2(C-B)\}$.

然ルニ公式ニヨリ

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$.

$$\sin 2(A-C)+\sin 2(B-A)+\sin 2(C-B)$$
$$=4\sin(A-C)\sin(B-A)\sin(C-B).$$

又 $A+B+C=\pi$ ナルヲ以テ $\cos(A+B+C)=\cos\pi=-1$.

故ニ左辺 $=-4\sin(A-C)\sin(B-A)\sin(C-B)$
$=-4\sin(B-C)\sin(C-A)\sin(A-B)$

(18). $\cos^2\theta+\cos^2(\alpha+\theta)-2\cos\alpha\cdot\cos\theta\cdot\cos(\alpha+\theta)$ ノ値ハ θ ノ値ニ関係ナキコトヲ證セヨ. (36年).

解. 原式 $=\cos^2\theta+\cos^2(\alpha+\theta)-\{\cos(\alpha+\theta)+\cos(\alpha-\theta)\}\cos(\alpha+\theta)$.
$=\cos^2\theta+\cos^2(\alpha+\theta)-\cos^2(\alpha+\theta)-\cos(\alpha+\theta)\cos(\alpha-\theta)$.
$=\cos^2\theta-\cos(\alpha+\theta)\cos(\alpha-\theta)$.

公式 $\cos(x+y)\cos(x-y)=\cos^2x-\sin^2y$ ヲ用ヒテ
$=\cos^2\theta-\cos^2\alpha+\sin^2\theta$
$=1-\cos^2\alpha$
$=\sin^2\alpha$

此結果ハθヲ含マズ故ニ題言ノ如シ.

別解 $\cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ ヲ用ヒテ平方ヲ去レバ

原式 $=\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\frac{1+\cos 2(\alpha+\theta)}{2}-\cos\alpha\{\cos(\alpha+2\theta)+\cos\alpha\}$
$=1+\frac{1}{2}\{\cos 2\theta+\cos 2(\alpha+\theta)\}-\cos\alpha\{\cos(\alpha+2\theta)+\cos\alpha\}$.
$=1+\frac{1}{2}\cdot 2\cos(\alpha+2\theta)\cos\alpha-\cos\alpha\cos(\alpha+2\theta)-\cos^2\alpha$.
$=1+\cos(\alpha+2\theta)\cos\alpha-\cos\alpha\cos(\alpha+2\theta)-\cos^2\alpha$.
$=1-\cos^2\alpha$.
$=\sin^2\alpha$.



(19). $\cos^2(A-\theta)+\cos^2(B-\theta)-2\cos(A-B)\cos(A-\theta)\cos(B-\theta)$ ノ値ハ θ ニ関係ナキコトヲ證セヨ. (11年).

解 原式 $=\frac{1+\cos 2(A-\theta)}{2}+\frac{1+\cos 2(B-\theta)}{2}$
$-\cos(A-B)[\cos(A+B-2\theta)+\cos(A-B)]$
$=1+\frac{1}{2}\{\cos 2(A-\theta)+\cos 2(B-\theta)\}$
$-\cos(A-B)[\cos(A+B-2\theta)+\cos(A-B)]$
$=1+\frac{1}{2}\{2\cos(A+B-2\theta)\cos(A-B)\}$
$-\cos(A-B)[\cos(A+B-2\theta)+\cos(A-B)]$
$=1+\cos(A+B-2\theta)\cos(A-B)$
$-\cos(A-B)\cos(A+B-2\theta)-\cos^2(A-B)$
$=1-\cos^2(A-B)$
$=\sin^2(A-B)$

(20). $\tan\theta\tan\varphi=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ ナル時ハ $(a-b\cos 2\theta)(a-b\cos 2\varphi)$ ノ値ハ θ, φ ニ関係ナシ. (8年)

解. $(a-b\cos 2\theta)(a-b\cos 2\varphi)$.
$=\left(a-b\cdot\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)\left(a-b\cdot\frac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi}\right)$
$=\frac{\{a-b+(a+b)\tan^2\theta\}\{a-b+(a+b)\tan^2\varphi\}}{(1+\tan^2\theta)(1+\tan^2\varphi)}$
$=\frac{(a+b)^2}{(1+\tan^2\theta)(1+\tan^2\varphi)}\left\{\frac{a-b}{a+b}+\tan^2\theta\right\}\left\{\frac{a-b}{a+b}+\tan^2\varphi\right\}$.

此式ニ於テ $\frac{a-b}{a+b}$ ノ代リニ $\tan^2\theta\tan^2\varphi$ ヲ代入スルト

$$= (a+b)^2 tg^2\theta\, tg^2\varphi$$

此式ニ於テ更ニ $tg^2\theta \cdot tg^2\varphi$ ノ代リニ $\frac{a-b}{a+b}$ ヲ代入スルト

$$= \underbrace{a^2-b^2}$$

トナリテ $\theta, \varphi$ ニ無関係ノ式トナル.

注意　$\cos 2x$ ヲ $tg\,x$ ニテ表スコト.

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}} \quad \therefore \cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x}$$

$$\sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}} \quad \therefore \sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}$$

$$\therefore \quad \cos 2x = \frac{1}{1+tg^2 x} - \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \underbrace{\frac{1-tg^2 x}{1+tg^2 x}}$$

(21)　$A\cos^2\theta + B\cos^2(\alpha+\theta) + C\cos\theta\cos(\alpha+\theta)$　ガ $\theta$ ニ無関係ナルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ヲ求メヨ. 但 $\sin\alpha \neq 0$.

解. 原式 $= A\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2} + B\cdot\frac{1+\cos 2(\alpha+\theta)}{2} + C\cdot\frac{1}{2}\left\{2\cos\theta\cos(\alpha+\theta)\right\}$

$$= \frac{1}{2}\left\{\cos 2\theta(A+B\cos 2\alpha + C\cdot\cos\alpha) - \sin 2\theta(B\sin 2\alpha + C\sin\alpha)\right\}.$$
$$+ \frac{1}{2}(A+B+C\cos\alpha).$$

此式ニ於テ

$$\left.\begin{aligned} A+B\cos 2\alpha + C\cdot\cos\alpha &= p \\ B\sin 2\alpha + C\cdot\sin\alpha &= q \\ \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} &= \cos\phi \\ \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} &= \sin\phi \end{aligned}\right\} \text{ト置ケバ}$$

$$\cos 2\theta(A+B\cos 2\alpha + C\cdot\cos\alpha) - \sin 2\theta(B\sin 2\alpha + C\sin\alpha).$$



$$= \sqrt{p^2+q^2}\left\{\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\cdot\cos 2\theta - \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\cdot\sin 2\theta\right\}$$

$$= \sqrt{p^2+q^2}\,(\cos\phi\cdot\cos 2\theta - \sin\phi\cdot\sin 2\theta).$$

$$= \sqrt{p^2+q^2}\cdot\cos(\phi+2\theta)$$

此式ガ $\theta$ ニ無関係ナルタメニハ $\sqrt{p^2+q^2} = 0$. 即 $p=0$, $q=0$ ナルコトガ必要ナリ. 然ルニ $\sin\alpha \neq 0$ ($\sin\alpha \geqq 0$) ナルヲ以テ

$$q = 0 \text{ ハ} \quad 2B\cos\alpha + C = 0 \qquad (1)$$

トナル. 故ニ $\cos\alpha = -\frac{C}{2B}$ ヲ $p=0$ ニ代入シテ

$$A = B \qquad (2)$$

此ノ (1),(2) ガ本題ニ必要ナル條件ナリ

逆ニ (1),(2) ガ満足セラルトキハ $p$ 及 $q$ ハ0トナリ共ニラレタル式ハ

$$\frac{A+B+C\cdot\cos\alpha}{2} = \frac{4B^2-C^2}{4B}$$

トナリテ $\theta$ ニ無関係ナリ.

故ニ (1), (2) ハ本題ニ充分ナル條件ナリ.

(22). 方程式 $\cos x = a$ ニ於テ $|a|<1$ ナルトキハ, $\cos\frac{x}{n}$ ノ相異ナル値ハ $n$ 個アルコトヲ證明セヨ. 但 $n$ ハ正整数トス.

解. 方程式 $\cos x = a$ ニ於テ $|a|<1$ ナルガ故ニ之ニ適スル $x$ ノ値ハ成リ立ツ. 其一ツヲ $\alpha$ トスレバ　$\alpha+2\pi\gamma$. 及 $-\alpha+2\pi\gamma$ ハ上ノ方程式ニ適スル一般ノ値ナリ. 但 $\gamma$ ハ零

或任意ノ整数トス．故ニ $\frac{x}{n}$ ノ値ハ一般ニ $\frac{\alpha+2\pi r}{n}$ 及 $\frac{-\alpha+2\pi r}{n}$，偖是等ノ角ヲ調ベテ見ルニ

$$\cos\frac{\alpha}{n},\ \cos\frac{\alpha+2\pi}{n},\ \cos\frac{\alpha+4\pi}{n},\ \cdots\cdots\ \cos\frac{\alpha+(n-1)2\pi}{n}.$$

ノ値ハ同一ナラズ．如何トナレバ此中ノ二ツヲ $\cos\frac{\alpha+p2\pi}{n}$，$\cos\frac{\alpha+q2\pi}{n}$，トスレバ此値ガ同一ナルタメニハ $\frac{\alpha+p\cdot2\pi}{n}$ ト $\frac{\alpha+q2\pi}{n}$ トノ差ガ0或ハ $2\pi$ ノ倍数ナルヲ要ス．偖

$$\frac{\alpha+p\cdot2\pi}{n}-\frac{\alpha+q\cdot2\pi}{n}=\frac{(p-q)2\pi}{n}$$

$p$ 及 $q$ ハ相異ナリテ $n$ ヨリ小ナルガ故ニ此値ハ0或 $2\pi$ ノ倍数ナラズ．又

$$\frac{\alpha+p\cdot2\pi}{n}+\frac{\alpha+q\cdot2\pi}{n}=\frac{2\alpha+(p+q)2\pi}{n}$$

$|a|<1$ ナルガ故ニ $2\alpha$ ハ0或ハ $2\pi$ ノ倍数ナラズ．故ニ此値ハ0或ハ $2\pi$ ノ倍数ナラズ．故ニ上ニ挙ゲタル一列ノ餘弦ノ値ハ相異ナルガ故ニ $\cos\frac{x}{n}$ ノ値ハ $n$ 個アリ．

次ニ $\frac{x}{n}$ ノ他ノ値ニ對スル餘弦ハ如何ト云フニ $r=n\cdot m+p$ トセヨ．但 $m$ ハ整数ニシテ $p$ ハ $n$ ヨリ小ナル正ノ整数或ハ0トス．

$$\cos\frac{\alpha+2\pi r}{n}=\cos\frac{\alpha+(nm+p)2\pi}{n}=\cos\left(m\cdot2\pi+\frac{\alpha+p2\pi}{n}\right)=\cos\frac{\alpha+p2\pi}{n}$$

$$\cos\frac{\alpha+2\pi r}{n}=\cos\frac{-\alpha+(nm+p)2\pi}{n}=\cos\frac{-\alpha+p2\pi}{n}=\cos\frac{\alpha+(n-p)2\pi}{n}$$

故ニ一般ニ相異ナル $\cos\frac{x}{n}$ ノ値ハ上ノ一列ノ $n$ 個ノ中ニ含マルヽガ故ニ方程式 $\cos x=\alpha$



ニ於テ $|a|<1$ ナルトキ $\cos\frac{x}{n}$ ノ相異ナル値ハ $n$ 個アリ．

(23). $tyx$ ヲ與ヘテ $ty\frac{x}{4}$ ヲ求ムル式ヲ作レ．(1條)．

解．先ヅ $tyx$ ヲ與ヘテ $ty\frac{x}{2}$ ヲ求ムルコト．

$$tyx=\frac{2ty\frac{x}{2}}{1-ty^2\frac{x}{2}}$$ 分母ヲ拂ッテ

$$tyx-tyx\cdot ty^2\frac{x}{2}-2ty\frac{x}{2}=0.$$

$$\therefore\ ty\frac{x}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+ty^2x}}{tyx} \qquad (1)$$

今此(1)式ニ於テ $x$ ヲ $\frac{x}{2}$ トスレバ

$$ty\frac{x}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{1+ty^2\frac{x}{2}}}{ty\frac{x}{2}} \qquad (2)$$

故ニ $tyx$ ガ與ヘラレタルトキ $ty\frac{x}{4}$ ヲ求ムルニハ先ヅ(1)式ニテ $ty\frac{x}{2}$ ヲ見出シテ之ヲ(2)式ニ代入シテ求ムルコトヲ得．

或ハ(1)ト(2)トノ間ニ $ty\frac{x}{2}$ ヲ消去スレバ直チニ $tyx$ ヲ以テ $ty\frac{x}{4}$ ヲ表ス式ヲ得ベシ．サレドモ斯クスルトキハ四次式トナルヲ以テ上ノ方法ガ簡便ナリ．

注意．$tyx$ ヲ以テ $ty\frac{x}{2}$ ヲ表スニハ87頁13章(iii)ノ公式ヨリ直チニ得ラル．

$$ty\frac{x}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+ty^2x}}{tyx}$$

(24). $ty^2\theta=ty(\theta-\alpha)ty(\theta-\beta)$ ナルトキハ $ty2\theta=\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ ナルコトヲ證明セヨ．

解. 假定式ヨリ

$$ty^2\theta = \frac{ty\theta - ty\alpha}{1-ty\theta\cdot ty\alpha}\cdot\frac{ty\theta - ty\beta}{1-ty\theta\cdot ty\beta}$$

之ヨリ分母ヲ掃ヒ共通因数ヲ省キテ簡單ニスレバ

$$ty\theta(ty\alpha+ty\beta)+ty\alpha\,ty\beta(ty^2\theta-1)=0.$$

依リテ之ヨリ

$$\frac{2ty\theta}{1-ty^2\theta}=\frac{2ty\alpha\,ty\beta}{ty\alpha+ty\beta}=\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

故ニ $$ty2\theta=\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

(25). $x\,ty(\alpha-\beta)=y\,ty(\alpha+\beta)$, $(x-y)\cos2\alpha+(x+y)\cos2\beta=Z$ ナルトキハ $2Z(x+y)\cos2\beta=Z^2+4xy$.

解. 假定式ヲ夫々(1),(2)トス.

(1)ヨリ $$\frac{x}{y}=\frac{ty(\alpha+\beta)}{ty(\alpha-\beta)}.$$

$$\frac{x-y}{x+y}=\frac{ty(\alpha+\beta)-ty(\alpha-\beta)}{ty(\alpha+\beta)+ty(\alpha-\beta)}=\frac{\sin2\beta}{\sin2\alpha}.$$

故ニ $$(x-y)\sin2\alpha=(x+y)\sin2\beta. \qquad (3)$$

又(2)ヨリ $$(x-y)\cos2\alpha=Z-(x+y)\cos2\beta. \qquad (4)$$

(3)(4)ヲ各平方シテ辺々相加フレバ

$$(x-y)^2=Z^2-2Z(x+y)\cos2\beta+(x+y)^2$$

即 $$2Z(x+y)\cos2\beta=Z^2+4xy.$$

(26). $a\sin\theta+b\cos\theta=C=a\operatorname{cosec}\theta+b\sec\theta$ ナルトキハ

$$\sin2\theta=\frac{2ab}{C^2-a^2-b^2}$$

解. 仮定ヨリ $$a\sin\theta+b\cos\theta=C \qquad (1)$$



$$\frac{a\cos\theta+b\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}=C \qquad (2)$$

(1)×(2) $(a\sin\theta+b\cos\theta)(a\cos\theta+b\sin\theta)=C^2\sin\theta\cos\theta$.

$$(a^2+b^2)\sin\theta\cos\theta+ab=C^2\sin\theta\cos\theta.$$

$$2(C^2-a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta=2ab.$$

$$\sin2\theta=\frac{2ab}{C^2-a^2-b^2}$$

(27). $l\cos(\theta-\beta)-m\cos(\theta-\alpha)=n$ ナルトキハ

$$l\sin(\theta-\beta)-m\sin(\theta-\alpha)=\pm\sqrt{l^2+m^2-n^2-2lm\cos(\alpha-\beta)}$$

解. $l\sin(\theta-\beta)-m\sin(\theta-\alpha)=x$ トオケバ

$$l\cos(\theta-\beta)-m\cos(\theta-\alpha)=n \qquad (1)$$

$$l\sin(\theta-\beta)-m\sin(\theta-\alpha)=x \qquad (2)$$

$(1)^2+(2)^2$

$$l^2+m^2-2lm\{\cos(\theta-\beta)\cos(\theta-\alpha)+\sin(\theta-\beta)\sin(\theta-\alpha)\}=n^2+x^2$$

$$l^2+m^2-2lm\cos(\alpha-\beta)=n^2+x^2$$

故ニ $$x=\pm\sqrt{l^2+m^2-n^2-2lm\cos(\alpha-\beta)}.$$

(28). $\frac{ty\theta}{ty\alpha}=\frac{k+\cos^2\theta}{k+\sin^2\theta}$ ナルトキ $\frac{\sin(3\theta+\alpha)}{\sin(\theta-\alpha)}$ ノ値ヲ $k$ ニテ表ハセ. (12年)

解. 假定式ヨリ

$$ty\alpha=\frac{ty\theta(k+\sin^2\theta}{k+\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta\left\{k+\frac{1-\cos2\theta}{2}\right\}}{\cos\theta\left\{k+\frac{1+\cos2\theta}{2}\right\}}$$

$$=\frac{\sin\theta(2k+1-\cos2\theta)}{\cos\theta(2k+1+\cos2\theta)}$$

$$\frac{\sin(3\theta+\alpha)}{\sin(\theta-\alpha)}=\frac{\sin3\theta\cos\alpha+\cos3\theta\sin\alpha}{\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha}\quad\cos\alpha\text{デ除シ}$$

$$=\frac{\sin3\theta+\cos3\theta\,\mathrm{ty}\alpha}{\sin\theta-\cos\theta\,\mathrm{ty}\alpha}$$

此式ノ $\mathrm{ty}\alpha$ ニ上ノ $\mathrm{ty}\alpha$ ノ値ヲ代入シテ簡単ニスレバ

$$=\frac{\sin4\theta(2k+1)+\sin2\theta\cos2\theta}{2\sin\theta\cos\theta\cos2\theta}$$

$$=2(2k+1)+1$$

$$=4k+3$$

(29). $2\sin\frac{A}{2}=-\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A}$ ナルキ $\frac{A}{2}$ ノアル所ノ限界ヲ求メヨ.

解. 右辺ノ結果ヲ得ルタメニハ

$$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=-\sqrt{1+\sin A}\quad(1)$$

$$\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=+\sqrt{1-\sin A}\quad(2)$$

ナラザルベカラズ. 而シテ(1)ノ左辺ガ負ナルタメニハ $\frac{A}{2}$ ハ次ノ範囲ニアルコトヲ要シ

$$2n\pi+\frac{3\pi}{4}<\frac{A}{2}<2n\pi+\frac{7\pi}{4}\quad(3)$$

(2)ノ左辺ガ正ナルタメニハ

$$2n\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{A}{2}<2n\pi+\frac{5\pi}{4}\quad(4)$$

ナルコトヲ要ス故 $\frac{A}{2}$ ノ所要ノ限界ハ (3),(4) ヨリ

$$2n\pi+\frac{3\pi}{4}<\frac{A}{2}<2n\pi+\frac{5\pi}{4}.$$

注意. 13章注意(2) 85～87頁ヲ見ヨ.



(30). $2\sin\frac{A}{2}=+\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A}$ ナルトキ $\frac{A}{2}$ ノアル所ノ限界ヲ求メヨ.

解. 13章注意(2)公式ニヨレ. (85～87頁)

答. $2n\pi-\frac{\pi}{4}<\frac{A}{2}<2n\pi+\frac{\pi}{4}$

(31). $2\sin\frac{A}{2}=+\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A}$ ナルトキ $\frac{A}{2}$ ノアル所ノ限界ヲ求メヨ.

解. 13章注意(2)公式ニヨレ. (85～87頁).

答. $2n\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{A}{2}<2n\pi+\frac{3\pi}{4}$.

(32). $2\cos\theta=\sqrt{1-\sin2\theta}-\sqrt{1+\sin2\theta}$ ナルトキハ $\theta$ ハ $(8n+5)\frac{\pi}{4}$ ト $(8n+7)\frac{\pi}{4}$ トノ間ニアリ.

解. 右辺ノ結果ヲ得ルタメニハ

$$\sin\theta+\cos\theta=-\sqrt{1+\sin2\theta}\quad(1)$$

$$\sin\theta-\cos\theta=-\sqrt{1-\sin2\theta}\quad(2)$$

ナラザルベカラズ

倩(1)式ヨリ $\theta$ ノ範囲ハ

$$2n\pi+\frac{3\pi}{4}<\theta<2n\pi+\frac{7\pi}{4}\quad(3)$$

又(2)式ヨリ $\theta$ ノ範囲ハ

$$2n\pi+\frac{5\pi}{4}<\theta<2n\pi+\frac{9\pi}{4}\quad(4)$$

故ニ所要ノ $\theta$ ノ範囲ハ(3)(4)ヨリ

$$2n\pi+\frac{5\pi}{4}<\theta<2n\pi+\frac{7\pi}{4}$$

$$\therefore\quad(8n+5)\frac{\pi}{4}<\theta<(8n+7)\frac{\pi}{4}.$$

(33) $\sin A+\cos A=-\sqrt{1+\sin 2A}$ ナルトキ A ハ 135° ト 315° トノ間ニアルコトヲ證セヨ. 但 A ハ 360° ヨリ小ナル正角トス.

解. $\sin A+\cos A$ ガ負ナルタメニハ $\sin A$. $\cos A$ ガ共ニ正ナルコト能ハズ. 依リテ A ハ第一分面ノ角ナラズ. 又 $\sin A$, $\cos A$ ガ共ニ負ナレバ適スルコト明カナリ. 依リテ A ガ第三分面ノ角ナレバ適合ス.

次ニ $\sin A>0$, $\cos A<0$ ナレバ

$|\sin A|<|\cos A|$ ナルコトヲ要ス. 故ニ

$$135°<A<180°$$

最後ニ $\sin A<0$, $\cos A>0$ ナレバ $|\sin A|>|\cos A|$ ナルコトヲ要ス. 故ニ

$$270°<A<135°$$

故ニ所要ノ解答ハ

$$135°<A<315°$$

(34). $\sin^{-1}u$ ハ正弦ガ u ニ等シキ角ノ中 $-\frac{\pi}{2}$ ト $+\frac{\pi}{2}$ トノ間ニアルモノヲ表ハストシテ

$$\frac{\pi}{4}+\sin^{-1}x=\sin^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(x+\sqrt{1-x^2})\right\}.$$

ヲ満足スル x ノ値ノ範囲ヲ求メヨ. (8年).

解. $\sin^{-1}x=\theta$, $\sin^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(x+\sqrt{1-x^2})\right\}=\phi$ トセヨ. 依リ

$$\frac{\pi}{4}+\sin^{-1}x=\sin^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(x+\sqrt{1-x^2})\right\} \qquad (1)$$



ガ満足セラルヽトキハ,其両辺ノ正弦ハ相等シ. コノ関係ヨリ x ガ如何ナル制限ヲ受クルカヲ試ミン. 依テ θ ハ $-\frac{\pi}{2}$ ト $\frac{\pi}{2}$ トノ間ニアル故 $\cos\theta$ ハ負ナルコトナシ. 故ニ

$$\cos\theta=\sqrt{1-x^2}.$$

故ニ $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+\sqrt{1-x^2})$

トナリテ. (1) ノ右辺ノ正弦ニ等シ. 故ニ (1) ノ両辺ノ正弦ガ相等シト云フコトノタメニ新ニ x ノ制限ヲ増スコトナシ.

依テ假設ニヨリ φ ハ $-\frac{\pi}{2}$ ト $\frac{\pi}{2}$ トノ間ニアリ.

即 $\frac{\pi}{4}+\theta$ ハ $-\frac{\pi}{2}$ ト $\frac{\pi}{2}$ トノ間ニアリ.

故ニ θ ハ $-\frac{3\pi}{4}$ ト $\frac{\pi}{4}$ トノ間ニアリ.

然ルニ θ ハ $-\frac{\pi}{2}$ ト $\frac{\pi}{2}$ トノ間ニアルガ故ニ此ノ二ツノ制限ヲ組合スレバ

θ ハ $-\frac{\pi}{2}$ ト $\frac{\pi}{4}$ トノ間ニアリ.

従テ x ハ $-1$ ト $\frac{1}{\sqrt{2}}$ トノ間ニアリ. コレ (1) ヲ満足セシムル x ノ値ノ範囲ナリ.

(35). $-\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}\theta<\frac{\pi}{2}$ トスルトキ

$$\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}$$

ガ成立スルタメニハ a, b ノ間ニ如何ナル制限アルコトヲ要スルカ.

解. 約束ニヨリ $-\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}a<\frac{\pi}{2}$

$$-\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}b<\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}a+\tan^{-1}b<\frac{\pi}{2}$$

故ニ　$-\frac{\pi}{2}-tg^{-1}a<tg^{-1}b<\frac{\pi}{2}-tg^{-1}a$

之ガ $tg^{-1}b$ ノ約束ニ矛盾セザルタメニハ

I. $a<0$ ナルトキハ　$-\frac{\pi}{2}-tg^{-1}a<tg^{-1}b<\frac{\pi}{2}$

即　$\frac{1}{a}<b<\infty$　(1)

II. $a=0$ ナルトキハ　$-\infty<b<\infty$　(2)

III. $a>0$ ナルトキハ　$-\frac{\pi}{2}<tg^{-1}b<\frac{\pi}{2}-tg^{-1}a$

即　$-\infty<b<\frac{1}{a}$　(3)

同様ニシテ

$b<0$ ナルトキハ　$\frac{1}{b}<a<\infty$　(4)

$b=0$ ナルトキハ　$-\infty<a<\infty$　(5)

$b>0$ ナルトキハ　$-\infty<a<\frac{1}{a}$　(6)

$a,b$ ガ (1) 乃至 (6) ノ制限ヲ持ツトキハ

$tg^{-1}a+tg^{-1}b$

ハ約束ニ適スベク依ヒテ $tg^{-1}\frac{ab}{1-ab}$ ニ等シ.

(36). $A+B+C=\pi$, $\sin^3\theta=\sin(A-\theta)\sin(B-\theta)\sin(C-\theta)$ ナルトキハ

$$\cot\theta=\cot A+\cot B+\cot C.$$

解、假設ヨリ

$$\sin^3\theta=\frac{1}{2}\sin(A-\theta)\{2\sin(B-\theta)\sin(C-\theta)\}$$
$$=\frac{1}{2}\sin(A-\theta)\{\cos(B-C)-\cos(B+C-2\theta)\}$$
$$=\frac{1}{4}[2\sin(A-\theta)\cos(B-C)-2\sin(A-\theta)\cos(B+C-2\theta)]$$
$$=\frac{1}{4}[\sin(A+B-C-\theta)+\sin(A-B+C-\theta)-\sin(A+B+C-3\theta)+\sin(B+C-A-\theta)]$$



然ルニ互ニ補角ヲナス二角ノ正弦ハ相等シ

即　$\sin(\pi-x)=\sin x$.

$(A+B-C-\theta)$ ト $(2C+\theta)$ トハ互ニ補角ヲナスヲ以テ

$\sin(A+B-C-\theta)=\sin(2C+\theta)$　他モ同様ニシテ

$=\frac{1}{4}[\sin(2C+\theta)+\sin(2B+\theta)-\sin 3\theta+\sin(2A+\theta)]$.

$\therefore\ 4\sin^3\theta=\sin 2C\cos\theta+\cos 2C\sin\theta+\sin 2B\cos\theta+\cos 2B\sin\theta-3\sin\theta+4\sin^3\theta+\sin 2A\cos\theta+\cos 2A\sin\theta$.

故ニ　$3\sin\theta=\sin\theta(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)+\cos\theta(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$

77頁注意公式ニヨリ

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$$
$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$$

之等ヲ上式ニ代入シテ簡單ニスレバ

$$3\sin\theta=-\sin\theta(1+4\cos A\cos B\cos C)+4\cos\theta\sin A\sin B\sin C.$$

故ニ　$4\cos\theta\sin A\sin B\sin C=4\sin\theta+4\sin\theta\cos A\cos B\cos C$

両辺ヲ $\sin\theta\cdot\sin A\sin B\sin C$ ニテ除シテ

$$\cot\theta=\operatorname{cosec}A\cdot\operatorname{cosec}B\cdot\operatorname{cosec}C+\cot A\cdot\cot B\cdot\cot C$$
$$=\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}(1+\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C)$$

然ルニ　$1+\cos A\cos B\cos C=\cos A\sin B\sin C+\cos B\sin A\sin C+\cos C\sin A\sin B$.

故ニ　$\cot\theta=\frac{\cos A\sin B\sin C+\cos B\sin A\sin C+\cos C\sin A\sin B}{\sin A\sin B\sin C}$

$$\cot\theta=\cot A+\cot B+\cot C$$

注意.　$\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C-\cos B\sin C\sin A-\cos C\sin A\sin B$.

然ル＝ $A+B+C=180°$ ナルヲ以テ $\cos 180° = -1$

故＝ $1+\cos A\cos B\cos C = \cos A\sin B\sin C+\cos B\sin C\sin A$
$+\cos C\sin A\sin B.$

別解 $A+B+C=\pi$ (1)

$\sin^3\theta = \sin(A-\theta)\sin(B-\theta)\sin(C-\theta)$ (2)

(2)ヨリ

$\sin^3\theta=(\sin A\cos\theta-\cos A\sin\theta)(\sin B\cos\theta-\cos B\sin\theta)$
$(\sin C\cos\theta-\cos C\sin\theta).$

$\sin^3\theta\sin A\sin B\sin C$ ＝テ両辺ヲ除シテ

$$\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}=(\cot\theta-\cot A)(\cot\theta-\cot B)(\cot\theta-\cot C).$$
$$=\cot^3\theta-\cot^2\theta\Sigma\cot A+\cot\theta\Sigma\cot A\cot B$$
$$-\cot A\cot B\cot C.$$

然ル＝ $$\Sigma\cot A\cot B=\frac{\cos A\cos B\sin C+\cos B\cos C\sin A+\cos C\cos A\sin B}{\sin A\sin B\sin C}$$

$\sin(A+B+C)=\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A+\sin C\cos A\cos B$
$-\sin A\sin B\sin C.$

$\sin(A+B+C)=0$ ナルヲ以テ

$\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A+\sin C\cos A\cos B=\sin A\sin B\sin C.$

故＝ $\Sigma\cot A\cot B=1$

又 $\cos(A+B+C)=-1=\cos A\cos B\cos C-\Sigma\cos A\sin B\sin C$

故＝ $$\frac{1+\cos A\cos B\cos C}{\sin A\sin B\sin C}=\frac{\Sigma\cos A\sin B\sin C}{\sin A\sin B\sin C}$$
$$=\cot A+\cot B+\cot C.$$

$\cot^3\theta-\cot^2\theta\Sigma\cot A+\cot\theta-\Sigma\cot A=0.$

$\cot\theta(\cot^2\theta+1)-\Sigma\cot A(\cot^2\theta+1)=0.$



$\cot^2\theta+1\neq 0$ ＝テ除シテ

$\cot\theta-\Sigma\cot A=0$

故＝ $\cot\theta=\cot A+\cot B+\cot C$

(37). $A+B+C=\pi$ ナルトキ $\tan A,\tan B,\tan C$ ガ等差級数ヲナセバ

$$\frac{4+5\cos 2C}{5+4\cos 2C}=\cos(B+C-A).$$

解 $\tan A,\tan B,\tan C$ ガ等差級数ヲナスコトヨリ

$\tan A+\tan C=2\tan B$

即 $$\frac{\sin(A+C)}{\cos A\cos C}=\frac{2\sin B}{\cos B}$$

然ル＝ $\sin(A+C)=\sin B$ $(A+B+C=\pi$ ナル故$)$

従テ上式ハ $\cos B=2\cos A\cos C.$

今 $\cos(B+C-A)=K$ トスレバ

$K=\cos\{B+(C-A)\}$

$=\cos B\cdot\cos(C-A)-\sin B\sin(C-A).$

$=2\cos A\cdot\cos C\cdot\cos(C-A)-(\cos^2 A-\cos^2 C)$

$\sin B=\sin(C+A)$

従テ $K^2(5+4\cos 2C)-K(4+10\cos 2C+4\cos^2 2C)$
$+\cos 2C(4+5\cos 2C)=0$

此式ヲ $K-\cos 2C$ ＝テ除シテ少シク変化スレバ

$$K=\frac{4+5\cos 2C}{5+4\cos 2C}$$

(38) $\cos\alpha=\tan\beta,\ \cos\beta=\tan\gamma,\ \cos\gamma=\tan\alpha$ ナルトキハ

$|\sin\alpha|=|\sin\beta|=|\sin\gamma|=2\sin\frac{\pi}{10}.$

解. $\cos^2\alpha = \operatorname{tg}^2\beta = \sec^2\beta - 1$

$$= \frac{1}{\cos^2\beta} - 1$$

$$\therefore \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\beta} - 1 = \frac{1}{\sec^2\beta - 1} - 1$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\beta} - 1} - 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha - 1} - 1$$

$$= \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} - 1$$

$$(1-\sin^2\alpha)(1-2\sin^2\alpha) = \sin^2\alpha - 1 + 2\sin^2\alpha$$

$$2\sin^4\alpha - 6\sin^2\alpha + 2 = 0$$

$$\sin^2\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

正符号ハ2ヨリ大トナリテ採用スル能ハズ何トナレバ1頁定理ヨリ $-1 < \sin x < +1$ ナルヲ以テナリ.

$$\therefore \quad \sin^2\alpha = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}$$

$$|\sin\alpha| = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$= 2\,\frac{\sqrt{5}-1}{4} = 2\sin\frac{\pi}{10}.$$

他モ同様ナリ.

次ノ方程式ヲ解ケ. (39, 40)

(39). $\operatorname{tg}^{-1}4x + \operatorname{tg}^{-1}6x = \frac{\pi}{4}$

解. 両辺ノ正切ヲ相等シトオイテ

$$\frac{4x+6x}{1-4x\cdot 6x} = 1$$

$$24x^2 + 10x - 1 = 0 \qquad x = \frac{1}{12} \text{ 或ハ } -\frac{1}{2}$$

(i). $x = \frac{1}{12}$ ナルトキハ

$$\operatorname{tg}^{-1}4x + \operatorname{tg}^{-1}6x = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$



(ii). $x = -\frac{1}{2}$ ナルトキ

$$\operatorname{tg}^{-1}4x + \operatorname{tg}^{-1}6x = \operatorname{tg}^{-1}(-2) + \operatorname{tg}^{-1}(-3)$$

是ハ負ノ角ニシテ $\frac{\pi}{4}$ ニ等シカラズ

故ニ所要ノ根ハ $\frac{1}{12}$ ナリ.

(40). $\sin^{-1}x + \sin^{-1}\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$

解. $\sin^{-1}x = \theta$ トスレバ

$$\sin^{-1}\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\therefore \quad \frac{x}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{2}\cos\theta - \cos\frac{\pi}{2}\sin\theta$$

然ルニ $\sin\frac{\pi}{2} = 1. \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0$

故ニ $\frac{x}{2} = \cos\theta.$

従テ $\sin\theta = 2\cos\theta$

従テ $\operatorname{tg}\theta = 2$

故ニ $x = \sin\theta = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} = \frac{2}{\sqrt{1+(2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

(41). $\sin^{-1}2x - \sin^{-1}\sqrt{3}x = \sin^{-1}x$ ヨリ $x$ ヲ求メヨ.

解. 97頁注意公式ヨリ

$$\sin^{-1}\left\{2x\sqrt{1-3x^2} - \sqrt{3}\cdot x\sqrt{1-4x^2}\right\} = \sin^{-1}x$$

両辺ノ正弦ヲ取リテ

$$2x\sqrt{1-3x^2} - \sqrt{3}\cdot x\sqrt{1-4x^2} = x$$

依リテ $x = 0$

或ハ $2\sqrt{1-3x^2} - \sqrt{3}\sqrt{1-4x^2} = 1$

$$2\sqrt{1-3x^2} = 1 + \sqrt{3}\cdot\sqrt{1-4x^2}$$ 平方シテ

$$4(1-3x^2)=1+2\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2}+3(1-4x^2)$$

故= $2\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2}=0$

故= $\sqrt{1-4x^2}=0 \qquad x=\pm\frac{1}{2}$

故= 所要ノ $x$ ノ値ハ $0, \pm\frac{1}{2}$.

(42). $tg^{-1}(x-1)+tg^{-1}x+tg^{-1}(x+1)=tg^{-1}3x$ ヨリ $x$ ヲ求メヨ.

解. $tg^{-1}(x-1)=\alpha$, $tg^{-1}x=\beta$, $tg^{-1}(x+1)=\gamma$ トスレバ

$tg^{-1}3x=\alpha+\beta+\gamma$,

故= $3x=tg(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=\frac{tg\alpha+tg\beta+tg\gamma-tg\alpha\cdot tg\beta\cdot tg\gamma}{1-tg\beta\,tg\gamma-tg\gamma\,tg\alpha-tg\alpha\,tg\beta}$$

$$=\frac{3x-x(x^2-1)}{\{1-x(x+1)-(x+1)(x-1)-x(x-1)\}}$$

$$=\frac{4x-x^3}{2-3x^2}$$

故= $x=0$, 或ハ $3(2-3x^2)=4-x^2$ 即 $8x^2=2$ 故= $x^2=\frac{1}{4}$ 依リテ $x=\pm\frac{1}{2}$

(43). $p\cos(A+B)+\cos(A-B)=p\cos(B+C)+\cos(B-C)$

$=p\cos(C+A)+\cos(C-A)$

ナルトキハ

$$\frac{tgA}{tg\frac{1}{2}(B+C)}=\frac{tgB}{tg\frac{1}{2}(C+A)}=\frac{tgC}{tg\frac{1}{2}(A+B)} \qquad (12年)$$

解. $p\cos(A+B)+\cos(A-B)=p\cos(B+C)+\cos(B-C)$ ヨリ

$p\{\cos(A+B)-\cos(B+C)\}+\cos(A-B)-\cos(B-C)=0$

$p\sin(B+\frac{C+A}{2})\sin\frac{C-A}{2}-\sin(B-\frac{C+A}{2})\sin\frac{C-A}{2}=0$

$\therefore \quad \sin\frac{C-A}{2}=0. \qquad (1)$



或ハ $p\sin(B+\frac{C+A}{2})-\sin(B-\frac{C+A}{2})=0$

之ヨリ $p(tgB+tg\frac{C+A}{2})=tgB-tg\frac{C+A}{2}$

之ヨリ $\frac{tgB}{tg\frac{1}{2}(C+A)}=\frac{1+p}{1-p}$ (2)

同様ニ其ヘラレタル式ヨリ

$\sin\frac{A-B}{2}=0$ (1)'

$\frac{tgC}{tg\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{1+p}{1-p}$ (2)'

及 $\sin\frac{B-C}{2}=0$ (1)''

$\frac{tgA}{tg\frac{1}{2}(B+C)}=\frac{1+p}{1-p}$ (2)''

ヲ得.

(1), (1)', (1)'' ノ中ニツガ同時ニ成立ツトキハ證明ヲ要スル式ノ各項ハ皆(1)トナルヲ以テ相等シ.

又(2), (2)', (2)'' ガ同時ニ成立ツトキハ各項ハ皆 $\frac{1+p}{1-p}$ ニ等シキ故相等シ.

次ニ(1), (1)', (1)'' ノ中一ツ(2), (2)', (2)'' ノ中ニツガ同時ニ成立ツトキハ例バ (1). (2)', (2)'' ガ同時ニ成立ツトキハ證明ヲ要スル式ノ第一項ハ第三項ト同一トナリ. 第二項ト第三項トハ (2)', (2)'' ニヨリテ相等シ. 故ニ總テノ場合ニ於テ證明ヲ得タリ.

(44). $2\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A}$ ニ於テ $A$ ガ $0°$ ヨリ $360°$ マデ変ズルトキニ於ケル複符号ノ取リ方ヲ吟味セヨ. (12年)

解. $\sqrt{1+\sin A}=\alpha$, $\sqrt{1-\sin A}=\beta$ トセヨ.

I. $A$ が $0°$ ヨリ $90°$ マデ変ズルトキ.

$\sin A$ 及 $\sin\frac{A}{2}$ ハ正ニシテ, $2\sin\frac{A}{2} \leqq 2$.

故ニ $\alpha$ ニ $(-)$ ヲ附スル能ハズ、$\beta$ ニ $(+)$ ヲ附スルトキハ

$$(\alpha+\beta)^2 = 2+2\sqrt{1-\sin^2 A} \quad \therefore \alpha+\beta \geqq \sqrt{2}$$

トナリテ不合理ナリ、故ニ此場合ニハ

$$2\sin\frac{A}{2} = \alpha - \beta.$$

II. $A$ が $90°$ ヨリ $180°$ マデ変ズルトキ.

$\sin A$, $\sin\frac{A}{2}$ ハ正ニシテ, $2\sin\frac{A}{2} \geqq \sqrt{2}$ ナリ.

故ニ $\alpha$ ニ $(-)$ ヲ附スル能ハズ, $\beta$ ニ $(-)$ ヲ附スルトキハ

$$(\alpha-\beta)^2 = 2-2\sqrt{1-\sin^2 A} \quad \therefore \alpha-\beta \leqq \sqrt{2}$$

トナリテ不合理ナリ、故ニ此場合ニハ

$$2\sin\frac{A}{2} = \alpha+\beta.$$

III. $A$ が $180°$ ヨリ $270°$ マデ変ズルトキ.

$\sin A$ ハ負ニシテ, $\sin\frac{A}{2}$ ハ正 $2\sin\frac{A}{2} \geqq \sqrt{2}$ ナリ.

故ニ $\beta$ ニ $(-)$ ヲ附スル能ハズ $\alpha$ ニ $(-)$ ヲ附スルトキハ

$$(-\alpha+\beta)^2 = 2-2\sqrt{1-\sin^2 A} \quad \therefore -\alpha+\beta \leqq \sqrt{2}$$

トナリテ不合理ナリ. 故ニ此場合ニハ

$$2\sin\frac{A}{2} = \alpha+\beta.$$

IV. $A$ が $270°$ ヨリ $360°$ マデ変ズルトキ.

$\sin A$ ハ負ニシテ $\sin\frac{A}{2}$ ハ正ナリ. 而シテ

$2\sin\frac{A}{2} \leqq \sqrt{2}$、故ニ $\beta$ ニ $(-)$ ヲ附スル能ハズ、$\alpha$ ニ $(+)$ ヲ附スルトキハ



$$(\alpha+\beta)^2 = 2+2\sqrt{1-\sin^2 A}, \quad \therefore \alpha+\beta \geqq \sqrt{2}$$

トナリテ不合理ナリ、故ニ此場合ニハ

$$2\sin\frac{A}{2} = -\alpha+\beta.$$

(45). $\sin A+\sin B+\sin C=0$, $\cos A+\cos B+\cos C=0$ ナル時ハ $3(B-C)$, $3(C-A)$, $3(A-B)$ ハ各 $360°$ ノ整数倍ナルコトヲ証明シ且 $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$ ノ値ヲ求メヨ. (14年)

解. $$\sin A+\sin B+\sin C=0 \quad (1)$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=0 \quad (2)$$

(1) 及 (2) ヨリ夫々 $$\sin A+\sin B=-\sin C \quad (3)$$

$$\cos A+\cos B=-\cos C \quad (4)$$

$\{(3)^2+(4)^2\}\div 2$ スレバ $\cos(B-C)=-\frac{1}{2}$

同様ニ $\cos(C-A)=-\frac{1}{2}$, $\cos(A-B)=-\frac{1}{2}$ (5)

依ツテ $B-C=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ ($n$ ハ0又ハ整数)

故ニ $3(B-C)=6n\pi\pm 2\pi=2\pi(3n\pm 1)$

即 $3(B-C)$ ハ $360°$ ノ整数倍ナリ. 同様ニ $3(C-A)$, $3(A-B)$ ハ $360°$ ノ整数倍ナルコトヲ知ル.

次ニ $$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+3).$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(2\cos 2A+2\cos 2B+2\cos 2C)+3\right\}.$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2B+\cos 2C+\cos 2C+\cos 2A)+3\right\}.$$

$$=\frac{1}{2}\{\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos(B+C)\cos(B-C)+\cos(C+A)\cos(C-A)+3\}$$

之レニ (5) ヲ代入シテ

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\{\cos(A+B)+\cos(B+C)+\cos(C+A)\}+3\right]$$

$$=-\frac{1}{4}\{\cos(A+B)+\cos(B+C)+\cos(C+A)-6\} \quad (6)$$

又別ニ (2) ヨリ

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=-(2\cos A\cos B+2\cos B\cos C+2\cos C\cos A)$$

$$=-\{\cos(A+B)+\cos(A-B)+\cos(B+C)+\cos(B-C)+\cos(C+A)+\cos(C-A)\}$$

之レ = (5)ヲ代入シテ

$$=-\left\{\cos(A+B)+\cos(B+C)+\cos(C+A)-\frac{3}{2}\right\} \quad (7)$$

(6)×4−(7) スレバ

$$3(\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C)=6-\frac{3}{2}$$

故 = $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=\frac{3}{2}$

---



# 附 録 試 験 問 題 集

茲ニ記載セル問題集ハ最近数年間ニ於ケル入試問題及今後ノ試験問題ノ傾向ヲ示セリ.

## 第 一 回

(1). 次ノ等式ヲ證明セヨ.

(i) $(\cos A-\sin 3A)^2+2\sin 3A\cos A(\cos A-\sin A)^2=\cos^2 2A$.

(ii) $2\,tg^{-1}\frac{8}{15}=\sin^{-1}\frac{240}{289}$

(2). $A+B+C=\pi$ ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$\sin 2B\sin 2C+\sin 2A\sin 2C+\sin 2A\sin 2B.$$
$$=\sin A\sin(2C-A)+\sin B\sin(2A-B)+\sin C\sin(2B-C).$$

(3). $x$ ガ第二分面ノ角ナルトキ $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$ ヲ $\sin x$ ニテ表ハセ.

(4). 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$tg^{-1}2x+tg^{-1}3x=\frac{3\pi}{4}.$$

## 第 二 回

(1). $\cos\alpha+\cos(\alpha+d)+\cos(\alpha+2d)+\cdots+\cos(\alpha+\overline{n-1}\cdot d)$ ノ値ヲ求ムル方法ヲ説明セヨ.

(2) $\sin x=-\frac{24}{25}$, $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ ナルトキ $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$ ノ値ヲ求メヨ.

(3). 方程式 $tg^{-1}4x+tg^{-1}6x=\frac{\pi}{4}$ ヲ解ケ.

(4). $\sqrt{2}\cos x=\cos y+\cos^3 y$, $\sqrt{2}\sin x=\sin y-\sin^3 y$ ナルトキ $|\sin(x-y)|=\cos 2y=\frac{1}{3}$

ナルコトヲ證明セヨ.

## 第三回.

(1). $\sin x = m + \frac{1}{m}$ ハ $m$ ノ値ニ拘ラズ之ヲ満足スル $x$ ナキコトヲ證明セヨ.

(2) $\frac{\pi}{2} > A > B > 0$ ナルトキ

$$\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} > \frac{\sin A}{\sin B}$$ ナルコトヲ證明セヨ.

(3). $\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$ ヲ證セヨ.

(4). 方程式 $\operatorname{tg}^{-1} 2x + \operatorname{tg}^{-1} 3x = \frac{3\pi}{4}$ ヲ解ケ.

(5). $2\sin\theta = \sqrt{1-\sin 2\theta} - \sqrt{1+\sin 2\theta}$ ナルトキ $\theta$ ノアル所ノ限界ヲ求メヨ.

## 第四回

(1). $2\cos\alpha = -\sqrt{1+\sin 2\alpha} - \sqrt{1-\sin 2\alpha}$ ナルトキ $\alpha$ ハ第何象限ノ角ナルカ.

(2). $\cos\frac{2\pi}{15} + \cos\frac{4\pi}{15} + \cos\frac{8\pi}{15} + \cos\frac{14\pi}{15}$ ノ値ヲ求メヨ.

(3). $\operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{m-n}{m+n}}$ ナルトキ

$(m - n\cos 2\theta)(m - n\cos 2\varphi)$ ノ値ヲ求メヨ.

(4). 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$\sin^{-1} 2x - \sin^{-1} x \cdot \sqrt{3} = \sin^{-1} x.$$

## 第五回

(1) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{m^2+2mn}{2mn+2n^2}$ ナルトキ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ヲ求ム.

(2). $a\sin x + b\cos x = m$, $b\operatorname{tg} x - n\sec x = a$ ナルトキハ $a^2+b^2 = m^2+n^2$ ナリ.



(3). $2\cos\theta = \sqrt{1-\sin 2\theta} - \sqrt{1+\sin 2\theta}$ ナルトキ $\theta$ ヘ $(8n+5)\frac{\pi}{4}$ ト $(8n+7)\frac{\pi}{4}$ トノ間ニアリ.

(4). $A+B+C = \pi$ 及 $\cos A = \cos B \cos C$ ナルトキハ

$$\cot B \cot C = \frac{1}{2}.$$

## 第六回

(1). $x$ ト相等シキ正弦ヲ有スル総テノ角ハ

$(2n+\frac{1}{2})\pi \pm (\frac{\pi}{2} - x)$ ニヨリテ表ハサル.

(2). $\sin x + \cos x = a$ ナルトキ $\operatorname{tg} x + \cot x$ ヲ求メヨ.

(3). $\operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ ナルトキハ

$(a - b\cos 2\theta)(a - b\cos 2\varphi)$ ノ値ハ $\theta, \varphi$ ニ関係ナシ.

(4). $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) \Big/ \operatorname{tg}(\alpha-\beta+\gamma) = \operatorname{tg}\gamma / \operatorname{tg}\beta$ ナルトキハ

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0.$$

## 第七回

(1). $\sin A = \frac{24}{25}$ ナルトキ $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ ヲ求メヨ.

(2) 次式ヲ簡単ニセヨ.

$$\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+2\beta) + \cdots + \cos^2(\alpha + \overline{n-1}\beta).$$

(3) 次ノ等式ヲ證明セヨ.

$$\cos 11A + 3\cos 9A + 3\cos 7A + \cos 5A = 16\cos^3 A \cos(4A + \tfrac{\pi}{4}) \cos(4A - \tfrac{\pi}{4}).$$

(4). $\cos A = \cos x \sin C$, $\cos B = \sin x \sin C$ ナルトキ

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$$

(5) $\frac{2\cos\theta+1}{2\cos\theta-1}$ ハ $3$ ト $\frac{1}{3}$ トノ間ノ値ヲ有セズ.

## 第八回

(1) $\sin(a+b+c+d)=0$ ナルトキハ

$\sin(a+c)\sin(a+d)=\sin(b+c)\sin(b+d)$ ナリ.

(2). 次ノ等式ヲ證明セヨ.

(i). $\sin 3\alpha\cos^3\alpha-\cos 3\alpha\sin^3\alpha=\sin 2\alpha\left(1+\frac{1}{2}\cos 4\alpha\right)$

(ii). $\tan^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{27}{11}$

(3). 第三分面ノ角 A ノ tg ガ $\frac{24}{7}$ ナルトキ

$\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\tan\frac{A}{2}$ ヲ求メヨ.

(4). A ガ 0 ヨリ π マデ変動スルトキ

$$2\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}$$

ニ於ケル複号ノ取リ方ヲ吟味セヨ.

## 第九回

(1). A,B,C ガ三角形ノ三ツノ角ナルトキ

$\sin A+\sin B+\sin C$, 及 $\cos A+\cos B+\cos C$

及 $\tan A+\tan B+\tan C$ ノ各ヲ對數計算ニ適スル式トナセ.

(2). 次ノ等式ヲ證明セヨ.

(i). $\tan 9^\circ-\tan 27^\circ-\tan 63^\circ+\tan 81^\circ=4$

(ii). $\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{7}+2\tan^{-1}\frac{1}{3}$

(3). $\tan\alpha$ ヲ知リテ $\tan\frac{\alpha}{4}$ ヲ得ル式ヲ求ム. 又此式ヨリ $\frac{\pi}{8}$ ノ正切ノ値ヲ求メヨ.

(4). $\sin A$ ガ奨ヘラレタルトキ $\sin\frac{A}{2}$ ニ四ツノ値アル所以ヲ説明セヨ.



## 第十回

(1). $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ヲ其ノ餘弦ノ値トスル處ノ總テノ角ヲ表ハス一般ノ式ヲ求ム.

(2). $1+\sin A$ ナル和ヲ乘積ノ形ニ変ゼヨ.

(3). $\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\cdots+\sin^2 n\alpha$ ノ和ヲ求メヨ.

(4). $A+B+C=\pi$, $\sin^3\theta=\sin(A-\theta)\sin(B-\theta)\sin(C-\theta)$

ナルトキハ

$$\cot\theta=\cot A+\cot B+\cot C$$

## 第十一回

(1). $a,b,c$ ノ中少クトモ一ツガ零ニ等シカラザルキ

$a=b\cos C+c\cos B$, $b=c\cos A+a\cos C$, $c=a\cos B+b\cos A$

ナルトキハ $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C-1=0$

(2) 次式ヲ對數計算ニ適スル形ニ直セ.

$$\frac{\sin A-\cos A}{\sin A+\cos A}$$

(3). $2\sin\frac{A}{2}=-\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A}$ ナルトキ $\frac{A}{2}$ ノアル所ノ限界ヲ求メヨ.

(4). $\cos^2\theta+\cos^2(A+\theta)-2\cos A\cos\theta\cos(A+\theta)$ ハ θ ニ關係ナシ.

## 第十二回

(1). $\sec^2\theta=\frac{4xy}{(x+y)^2}$ ハ唯 $x=y$ ナルトキノミ成立スルコトヲ證セヨ.

(2). $\tan x=\sin y\tan A$ $\tan y=\sin x\tan B$ ナルトキハ

$\sin^2A\cos^2y=\cos^2B$ ナリ.

(3). $\frac{\tan(A+B-C)}{\tan(A-B+C)} = \frac{\tan C}{\tan B}$ ナルトキハ

$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 0$ ヲ證セヨ.

(4). 次ノ等式ヲ證明セヨ.

$$\tan^3 A \tan^3 B \tan^3 C - \tan^3 A - \tan^3 B - \tan^3 C = \frac{3 \tan A \tan B \tan C}{\cos A \cos B \cos C}.$$

## 第十三回

(1). $A+B+C = 180°$ ナルトキ次ノ等式ヲ證明セヨ.

(i). $\sin^3 A \cos(B-C) + \sin^3 B \cos(C-A) + \sin^3 C \cos(A-B) = 3 \sin A \sin B \sin C.$

(ii). $\cos^2(A-B) + \cos^2(B-C) + \cos^2(C-A) = 2\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A) + 1.$

(2). $\cos^2(A-\theta) + \cos^2(B-\theta) - 2\cos(A-B)\cos(A-\theta)\cos(B-\theta)$ ノ値ハ $\theta$ ニ無關係ナルコトヲ證明セヨ.

(3). $\sin A + \sin B + \sin C = 0$, $\cos A + \cos B + \cos C = 0$, ナレバ $(B-C)$, $(C-A)$, $(A-B)$ ハ皆 $\frac{2\pi}{3}$ ノ整數倍ナリ.

(4). $\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} + \frac{2\tan 2\alpha}{1+\tan^2 2\alpha} + \frac{2\tan 3\alpha}{1+\tan^2 3\alpha} + \cdots$ $n$ 項ノ和ヲ求メヨ.

(5). $\tan^{-1}(x-1) + \tan^{-1}x + \tan^{-1}(x+1) = \tan^{-1}3x$ ヨリ $x$ ヲ求メヨ.

(6). $\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sqrt{1+\sin A}} + \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sqrt{1-\sin A}} = \sec A$ ナレバ

$A$ ハ $(4n-\frac{1}{2})\pi$ ト $(4n+\frac{1}{2})\pi$ トノ間ニアリ.

---

昭和三年十月二十一日印刷
昭和三年十月二十五日發行

不許複製

定價 金貳圓

著者 山名眞直
東京市外上落合町六二五

發行者 池田岩平
東京府長崎町一八九七

印刷者 有村博行
東京市麻布區谷町七六
電話青山一二四九番