改編
三S平面幾何學

趙型 編譯

新中國聯合出版社出版

改編
三S平面幾何學

趙型 編譯

新中國聯合出版社出版

改編三S平面幾何學

編譯者	趙型
出版者	新中國聯合出版社 上海：(9)石門二路41弄44號
發行者	通联書店 上海：(11)九江路295號
經售處	全國各大書店

一九五四年五月二版　3001—5000　定價 ¥ 7,400

編者自白

本書係以舊三S平面幾何爲藍本，編譯而成，妄參陋見，頗有增删，兹擇要說明如次.

1. 增列示範例題　初學幾何，對於習題之寫法，每感生疏，故本書於證明題，作圖題，計算題，及軌跡題等每種開始之前，先列示範例題，詳示寫法格式，使學者知所取法，不致疑難趦趄.

2. 增列共圓定理　三S幾何內，無共圓定理，但習題內往往又須用到，學者每感無所依據，故本書增列共圓定理於第二編作圖之前，使理論較爲周密.

3. 擴充軌跡教材　軌跡爲作圖之基礎，但初學者往往見而生畏，本書將基本軌跡，列爲定理，證法務求詳盡，雖嫌嚕囌，但爲使初學者徹底瞭解起見，不得不然.

4. 提前極限原理　極限原理三S幾何內，擺在第五編，本書提前於第三編內卽行講到，卽以極限原理證不可通約情形，自信比近似證法較爲妥當.

5. 提前代數作圖法　三S書內，代數分析作圖法，擺在附錄，頗嫌太遲，本書將此法移前在第三編內，學者可以多得練習之機會.

6. 删去附錄　三S書內附錄之對稱，極大極小，及應用題等，一律删去，以免與高中教材衝突.

其他說明之詳簡，習題之增減等，均屬細微末節，不再具論，自問該書優點，本書均儘量保存，不使喪失，希望改編以後，對學習效率，更可增進，但編者並非數學專家，只憑數年來做教書匠的一點粗淺實踐經驗，不自量力，侈言改編，貽笑大方，知所難免，敝帚自珍，大胆問世，邦人君子，幸垂教焉.

平面幾何學目次

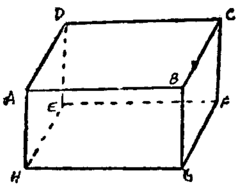
緒 論

1. 立體 空間的有限部分叫做**立體**.立體有三個向度,就是長,闊,和厚

我人所處的宇宙叫做空間,宇宙無窮無疆,故空間大而無限,一人一物,一草一木,各佔據空間的有限部分,叫做立體;人、物、草、木、叫做物質的立體,物質的立體佔據的空間有限部分,叫做幾何的立體.

立體的形狀大小各異,但不外向三個方向擴展,就是長,闊與厚,叫做立體的三個向度.

立體可用圖形表示之,如下圖:



2. 面 立體的界叫做**面**.面有二個向度,就是**長**和**闊**.

上圖內,$ABCD$, $BCFG$ 等都是面.面是立體的界,就是立體和立體的分界處,或交處,故面無厚.

3. 線 面的界叫做**線**.線祗有一個向度,就是長.

上圖內,AB, BC, DE……等都是線.線是面的界,就是面和面的分界處或交處,故線無厚亦無闊.

4. 點 線的界叫做**點**.點祗有位置而無向度.

上圖內,A, B, C, D, E……等都是點.點是線的界,就是線和線的分界處或交處,故點祗有位置而無長,闊,和厚.

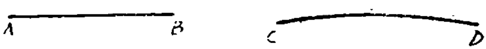
點的表示和記法　點常以細點表示之，而以一大寫之字母記之，如點 A。

$\cdot\ A$

5. 直線　一線，若取其任意一部分，用任意放法，使其兩端落在任意另一部分上，而二部分完全重合的，叫做直線.

線的種類很多，最簡單而最重要的一種叫做直線，要試驗一線是否直線，須在線上截取任意部分，放在任意另一部分上，若二部分之各點，完全相合，叫做重合，則此線必爲直線，若此線有一部分不直時，此試驗必告失敗，因必有若干點不能落在另一部分上也.

如下圖所示：AB 爲直線，CD 則非直線.



直線的表示和記法　直線常以筆依直尺作細線表示之，而以線上二點之名稱記之，如直線 AB；有時亦可以一小寫之字母記一直線，如直線 l.

直線有時即簡稱線，過二點的直線簡稱二點的聯線.

6. 直線的研究

(a) **直線的長**　直線的全長是無限的，在直線上二指定點間的有限部分叫做**線段**或**線分**。線段或線分有時亦簡稱直線，直線的長即指線段或線分的長.

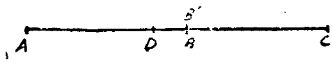
爲實用便利起見，直線的長恆用一一定的單位量之，如尺，寸等.

線段或線分的二頭定點叫做直線的二端。如上圖，A和 B 是

直線 AB 的二端.

(b) **直線相等或大小的比較** 把二線段的一個端點重合而置他端在同一方向,若另一端亦彼此重合,則二線相等,若另一端不重合,則另一端在外的線分較長.

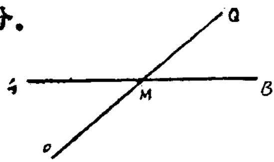
如圖: $AB=AB'$, $AC>AB$, $AD<AB$.



附註: 相等的記號爲=
大於的記號爲>
小於的記號爲<

(c) **中點與二等分** 若一點將一直線分成二相等線段時,此點叫做此直線的**中點**,此直線叫做被此點**平分**或**二等分**.過此點的直線也叫做二等分此直線.

如圖: 若 $AM=MB$, 則 M 叫做 AB 的中點. AB 叫做被 M 點二等分.



又若 PQ 過 M 點,則 PQ 也二等分 AB.

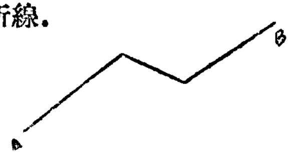
(d) **直線的加減** 把二線段的各一端重合,而另一端向反對方向伸展,則不重合的二端間的長叫做二線段的**和**.把二線段的各一端重合而另一端向同方向伸展,則不重合二端間的長叫做二線段的**差**.

如圖: $AB+BC=AC$, $DE-DF=FE$.

(e) **直線的方向和延長** 直線 AB 的方向就是從 A 到 B 的方向，直線 BA 的方向就是從 B 到 A 的方向，延長 AB 就是由 A 過 B 點延長，延長 BA 就是由 B 過 A 點延長.

7. 折線 由幾個不同方向的線段，連接而成的線叫做**折線.**

如圖: AB 爲折線.



8. 平面 一面，取面上任意二點而以直線聯結之，若此直線完全在此面之上，則此面叫做**平面.**

面的種類很多，最簡單而最重要的一種叫做平面，要試驗一面是否平面，須在面上任取二點，聯以直線，而視直線是否完全在此面之上，若此試驗永不失敗，則面爲平面；若此面有高低不平處，則此試驗必將失敗，因直線過不平處時，必有若干點不在平面之上.

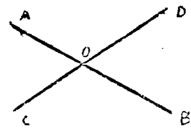
9. 幾何圖形 表示點，線，面，體等的圖形叫做**幾何圖形.** 在一個平面內的幾何圖形叫做**平面圖形.** 完全用直線做成的幾何圖形叫做**直線圖形.**

本書內所討論的圖形，都是平面圖形.

10. 幾何學 研究幾何圖形性質的科學叫做**幾何學.** 研究平面圖形的性質的叫做**平面幾何學.**

11. 交線 二直線過一公共點，叫做二線**相交**，公共點叫做**交點.**

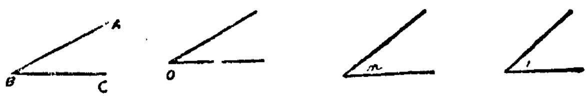
如圖: 直線 AB 和 CD 相交於 O.



12. 角　二直線相交而止於一點，叫做角，交點叫做角的頂點．二直線叫做角的邊．

如圖：　AO，OB，相交於 O，成角 AOB，O為角頂，AO 及 OB 爲邊．

角的記號和記法：　角的記號爲∠，角的記法有三種．



(a) 以頂點及二邊上各另一點記之，頂點須放在中間，如 $\angle ABC$．

(b) 以頂點的名字記之，如 $\angle O$．

(c) 以小寫字母或數字記之，如 $\angle m$，$\angle 1$．

13. 角的研究

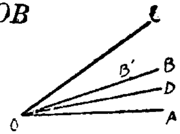
(a) **角的大小**　角的大小，以一邊繞頂點旋轉至與他邊重合爲止之旋轉量定之，與邊之長短無關．

(b) **二角相等或大小的比較**　二角放在一處，使頂點重合，一邊亦重合，而另一邊在重合邊的同側，若另一邊亦重合時，則二角相等；若另一邊不重合時，則另一邊在外側的是大角。

如圖：　$\angle AOB = \angle AOB'$

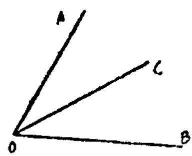
$\angle AOC > \angle AOB$

$\angle AOD < \angle AOB$



(c) **角的平分線** 若一線分一角成二相等的角時，此線叫做角的平分線，角二等分線，或分角線.

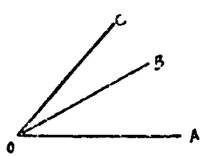
如圖： 若 $\angle AOC = \angle COB$，則 OC 叫做 $\angle AOB$ 的分角線.



(d) **角的加減** 把二個角放在一起，使角頂及一邊重合，若另一邊在重合邊的異側，其不重合的二邊所夾的角叫做二角的和；若另一邊在重合邊的同側，其不重合的二邊所夾的角叫做二角的差.

如圖： $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$

$\angle BOC = \angle AOC - \angle AOB$



14. 角的種類

(a) **平角** 角的二邊在一直線上而由頂點向反對方向伸張的，叫做平角.

平角的記號是 $st.\angle$

(b) **直角**　一個角等於平角的一半的，叫做直角。

直角的記號是 $rt.\angle$

(c) **銳角**　一個角小於一個直角的，叫做銳角.

(d) **鈍角**　一個角大於一個直角而小於一個平角的叫做鈍角.

銳角和鈍角統稱斜角.

平角　　直角　　銳角　　鈍角

15. 角的度量　角的大小，以直角爲單位計算之，但爲實用便利起見，往往以直角的$\frac{1}{90}$做單位，叫做度（符號爲°），一度的$\frac{1}{60}$叫做**分**，一分的$\frac{1}{60}$叫做**秒**（符號爲′及″）.

如 28 度 38 分 42 秒，寫作 $28°38'42''$.

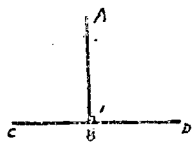
如上所述，一直角等於 90°，一平角等於 180°.

16. 垂直　兩直線相交而成直角，則兩直線叫做互相垂直，交點叫做垂足.　（二線垂直亦稱正交）

垂直的記號是⊥

如圖：　若 $\angle 1 = rt.\angle$;

則 $AB \perp CD$, B 爲垂足.

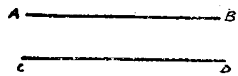


17. 平行　在同一平面上的二直線，向任意方向延長而永不相交的，叫做平行線.

依上定義，在一平面上的二直線，若不平行，則適當延長後必能相交.

平行的記號是//

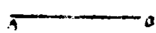
如圖： $AB//CD$



18. 點與點的距離 二點間聯線的長，叫做二點間的距離.

19. 點與直線的距離 從一點到一直線的垂直線的長，叫做此點與此直線的距離.

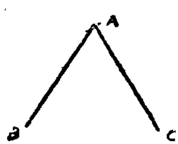
如圖： AB 的長叫做 A 與 B 的距離.

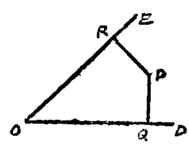


若 $CD \perp EF$，則 CD 的長叫做 C 與 EF 的距離.

20. 等距 二個距離相等時，叫做等距.

如圖： 若 $AB=AC$，則 A 與 B,C 等距.





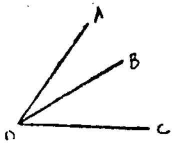
若 $PQ \perp OD$，$PR \perp OE$，而 $PQ=PR$；則 P 與 OD OE 等距.

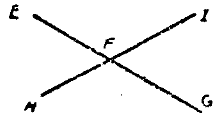
21. 鄰角 凡兩個角有公共頂點，且有一公共邊，而他兩邊在公共邊的異側，這二個角叫做鄰角.

22. 對頂角 凡兩個角有公共頂點，而一角的二邊爲他角的二邊過頂點的延長線時，這二個角叫做對頂角.

如圖： $\angle AOB$ 與 $\angle BOC$ 爲鄰角.

$\angle EFH$ 及 $\angle IFG$ 爲對頂角.



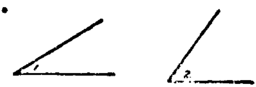


23. 餘角 凡兩角的和,等於一個直角的,這二個角叫做互為餘角,或一角為他角的餘角.

24. 補角 凡兩角的和等於一個平角的,這二個角叫做互為補角,或一角為他角的補角.

二個相鄰又相補的角叫做鄰補角.

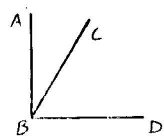
如圖: 如 $\angle 1+\angle 2=rt.\angle$.



則 $\angle 1$ 為 $\angle 2$ 的餘角.

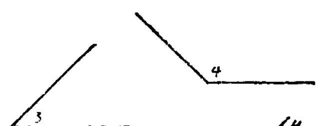
$\angle 2$ 為 $\angle 1$ 的餘角.

如 $AB\perp BD$.



則 $\angle ABC$ 與 $\angle CBD$ 互為餘角.

如 $\angle 3+\angle 4=st.\angle$.

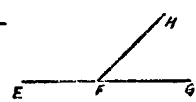


則 $\angle 3$ 為 $\angle 4$ 的補角.

$\angle 4$ 為 $\angle 3$ 的補角.

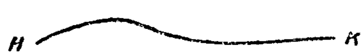
如 EFG 為一直線

則 $\angle EFH$ 與 $\angle HFG$ 叫做鄰補角.

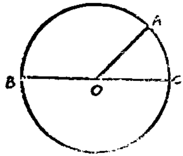


25. 曲線 無一部分為直線的線,叫做曲線.

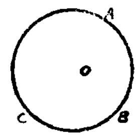
如圖: HK 為曲線.



26. 圓 在一平面內首尾相接的封閉曲線,而曲線上的各點皆與中央一點等距的,叫做圓.



與圓上各點皆等距的中央一點叫做**圓心**，如 O，自圓心到圓上任意點的聯線叫做**半徑**，如 OA. 過圓心而二端止於圓上的直線叫做**直徑**如 BC. 構成圓的封閉曲線的全長叫做**圓周**. 構成圓的曲線的一部份，叫做**圓弧**或**弧**



圓的記號和記法: 圓的記號為⊙，以圓規在代表平面的紙張或黑板上所作的封閉細線代表之，以圓心的點或圓上任意三點的名稱記之，如 $\odot O$ 或 $\odot ABC$.

圓弧的記號和記法: 圓弧的記號為 $\frown$，以圓弧二端的二點記之. 如 $\overset{\frown}{AB}$.

27. 名詞的解釋:

(a) **定義** 解釋一個名詞的含義的敍述，叫做**定義**.

凡與定義所述的情形完全相同的，方才可以叫做這個名詞，這叫做**定義的必須性**; 凡叫做這個名詞的，必含有定義所述的情形，這叫做**定義的必然性**.

以上各節(從1-26)及本節，都是定義.

(b) **公理** 公認為眞確而不必證明的敍述，叫做**公理**.

適用於一般數學的公理，叫做**普通公理**.

祇用於幾何學的公理，叫做**幾何公理**.

(c) **定理** 必須經過證明而確定成立的敍述，叫做**定理**.

定理之易從其他定理推得的叫做**系**.

(d) **問題** 要求解決的一種敍述叫做**問題**.

問題的求計算的叫做**計算題**.

問題的求作圖的叫做**作圖題**.

(e) **命題** 定理及問題的總稱叫做**命題**.

28. 普通公理.

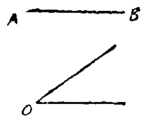
(a) 等量公理.

(1) 同量恆等.

如: $3=3$

$AB=AB$

$\angle O=\angle O$



(2) 等於同量的量相等,等於等量的量相等.

如 $a=b$,又 $c=b$;則 $a=c$,叫做等於同量的量相等.

如 $a=b, c=d$ 而 $b=d$;則 $a=c$,叫做等於等量的量相等.

(3) 等量加等量,其和相等.

如 $a=b, c=d$;則 $a+c=b+d$.

(4) 等量減等量,其差相等.

如,$a=b, c=d$;則 $a-c=b-d$.

(5) 等量之同倍量相等.

如 $a=b$;則 $2a=2b, ca=cb$.

(6) 等量之同分量相等.

如 $a=b$; 則 $\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}b$, $\dfrac{a}{d}=\dfrac{b}{d}$.

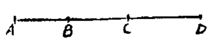
(7) 等量之同次方積或同次正方根皆相等.

如 $a=b$;則 $a^2=b^2, a^3=b^3, a^n=b^n$.

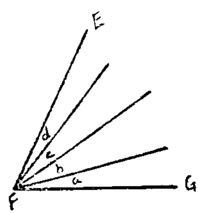
如 $a=b$;則$\sqrt{a}=\sqrt{b}, \sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}, \sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{b}$.

(8) 全量等於其各分量之和.

如: $AD=AB+BC+CD$.



$\angle GFE=\angle a+\angle b+\angle c+\angle d$.



(b) 不等量公理.

(1) 若三量中，第一量大於第二量，第二量大於第三量，則第一量大於第三量。

如 $a>b, b>c$: 則 $a>c$.

(2) 等量加不等量，其和不等，大者仍大.

如 $a=b$, $c>d$; 則 $a+c>b+d$。

(3) 從不等量減去等量，其差不等，大者仍大.

如 $a>b, c=d$; 則 $a-c>b-d$。

(4) 從等量減去不等量，其差不等，減大量者餘小。

如 $a=b, c>d$; 則 $a-c<b-d$。

(5) 不等量加不等量，大量與大量相加，其和不等，大者仍大.

如 $a>b, c>d$; 則 $a+c>b+d$.

(6) 自不等量減不等量，自大量減去小量，其差不等，大者仍大.

如 $a>b, c<d$; 則 $a-c>b-d$.

(7) 不等量的同倍量或同分量不等，大者仍大.

如 $a>b$，則 $2a>2b, ma>mb$.

如 $a>b$，則 $\frac{1}{2}a>\frac{1}{2}b$, $\frac{a}{n}>\frac{b}{n}$。(m, n 須爲正數)

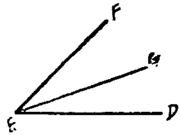
(8) 正不等量的同次方積，或同次正方根亦不等，大者仍大.

如 $a>b$，則 $a^2>b^2$, $a^3>b^3$。

如 $a>b$，則 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$, $\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$.

(9) 全量大於其任何部分量.

如 $AB>AC$, $\angle DEF>\angle DEG$.



(c) **替代公理.**

在一等式或一不等式中,一量可替代其等量.

如 $a+x=8$, 而 $a=3$; 則 $3+x=8$.

如 $a+x>b$, 而 $a=c$; 則 $c+x>b$.

29. 幾何公理.

(1) **過二點可作一直線,但只能作一直線.**

依此公理,**二直線祗能交於一點**, 因若二直線交二點, 則過二點可作二直線矣,此公理亦可寫作**二點決定一直線.**

(2) **二點間最短的線是直線.**

(3) **一直線可以任意延長**(延線公理).

(4) **二相交直線,不能皆平行於第三直線**(平行線公理).

(5) **以任意點做圓心,任意長為半徑,可作一圓.**

(6) **幾何圖形,可以不變其形狀大小,而移動其位置.**(移形公理).

故二直線可以使其重合,二等角可以使其重合,二點可以使其重合.

(7) **一線段有一中點,但祗有一中點.**

(8) **一角有一分角線,但祗有一分角線.**

30. 定理的證明. 定理是一個敍述, 其要點分為二部份: 一部份是假設, 就是定理的已知事項, 另一部份為結論,就是須要證明其眞確的事項.證明定理的方法,是先將假設(已知)及求證(結論)寫出,再依推理方法寫出證明,證明時每一敍述必須附

述理由，以作根據，理由必須為已知部份，定義，公理，已經證明的定理，或其他合於推理方法的說明，故每一定理的證明，應有下列各項：

(a) **假設.**

(b) **求證.**

(c) **證明.**(包括敘述及理由)

定理證明的方法 有直接證法及間接證法二種，直接證法有**疊合法**，**綜合法**，**解析法**等，間接證法有**同一法**，**歸謬法**等，以後用到時，再行逐一說明。

簡易定理一

31. 平角皆相等.

假設： $st.\angle AOB$, $st.\angle A'O'B'$.

求證： $\angle AOB=\angle A'O'B'$.

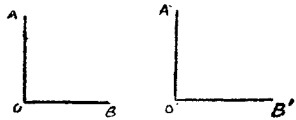
證明：

敘述	理由
1. $\angle AOB$ 為一 $st.\angle$.	1. 假設.
2. $\therefore AOB$ 為一直線.	2. 平角定義.
3. $\angle A'O'B'$ 為一 $st.\angle$.	3. 假設.
4. $\therefore A'O'B'$ 為一直線.	4. 平角定義.
5. 將AOB移至$A'O'B'$上，使O點與O'重合，二線亦重合.	5. 移形公理.
6. $\therefore \angle AOB=\angle A'O'B'$.	6. 等角定義.

附註： 本定理之證明法叫做疊合法，是直接證明的一種.

簡易定理二

32. 直角皆相等.



假設: rt.$\angle AOB$ 及 rt.$\angle A'O'B'$.

求證: $\angle AOB=\angle A'O'B'$.

證明:

敘　述	理　由
1. $\angle AOB$ 及 $\angle A'O'B'$ 爲直角.	1. 假設.
2. $\therefore \angle AOB=\frac{1}{2}st.\angle$.	2. 直角定義.
3. $\angle A'O'B'=\frac{1}{2}st.\angle$.	3. 直角定義.
4. $\therefore \angle AOB=\angle A'O'B'$.	4. 等量之同分量相等.

附註: 本定理之證法叫做綜合法是直接證法的一種.

簡易定理三

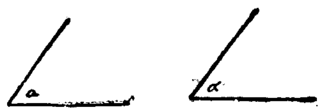
33. 同角或等角的補角相等.

假設 $\angle a=\angle a'$

$\angle b$ 爲 $\angle a$ 之補角.

$\angle c$ 爲 $\angle a$ 之補角.

$\angle b'$ 爲 $\angle a'$ 之補角.



求證: $\angle b=\angle c$

$\angle b=\angle b'$

證明:

敘　述	理　由
1. $\angle b+\angle a=st.\angle$.	1. 補角定義.
2. $\angle c+\angle a=st.\angle$.	2. 補角定義.
3. $\therefore \angle b+\angle a=\angle c+\angle a$.	3. 平角皆相等.

敍述	理由
4. $\therefore \angle b=\angle c$.	4. 等量減等量，其差相等.
5. 又 $\angle b'+\angle a'=st\angle$.	5. 補角定義.
6. $\therefore \angle b+\angle a=\angle b'+\angle a'$.	6. 平角皆相等.
7. 而 $\angle a=\angle a'$.	7. 假設.
8. $\therefore \angle b=\angle b'$.	8. 等量減等量，其差相等.

附註： $\angle b$, $\angle c$ 是同角的補角.

$\angle b$, $\angle b'$ 是等角的補角.

簡易定理四

34. 同角或等角的餘角相等.

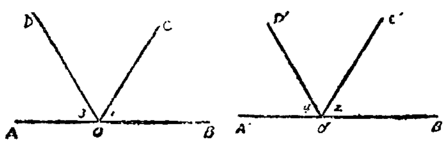
（證法同簡易定理三，學者可自證之.）

【例題】假設： AOB 及 $A'O'B'$ 爲直線.

$\angle 1=\angle 2$.

OD 平分 $\angle AOC$.

$O'D'$ 平分 $\angle A'O'C'$.



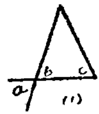
求證： $\angle 3=\angle 4$.

證明：

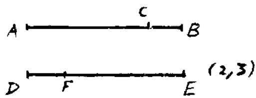
敍述	理由
1. $\angle AOB$ 爲平角.	1. 假設 AOB 爲直線.（平角定義）
2. $\angle A'O'B'$ 爲平角.	2. 假設 $A'O'B'$ 爲直線.（平角定義）
3. $\therefore \angle AOC$ 爲 $\angle 1$ 之補角. $\angle A'O'C'$ 爲 $\angle 2$ 之補角.	3. 補角定義.
4. 而 $\angle 1=\angle 2$.	4. 假設.
5. $\therefore \angle AOC=\angle A'O'C'$	5. 等角的補角相等.
6. $\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}\angle A'O'C'$.	6. 等量的同分量相等.

7. $\angle 3=\frac{1}{2}\angle AOC$. $\angle 4=\frac{1}{2}\angle A'O'C'$.	7. 假設 OD 平分 $\angle AOC$. $O'D'$ 平分 $\angle A'O'C'$.
8. $\therefore \angle 3=\angle 4$.	8. 替代公理.

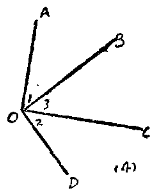
習　題　一



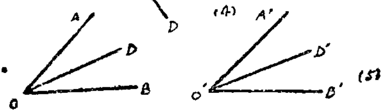
1. 假設: $\angle a=\angle b$, $\angle b=\angle c$.
   求證: $\angle a=\angle c$.



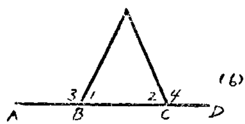
2. 假設: $AB=DE, CB=DF$,
   求證: $AC=FE$.
3. 假設: $AC=FE, CB=DF$.
   求證: $AB=DE$.



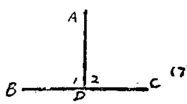
4. 假設: $\angle AOC$ 及 $\angle BOD$ 為直角.
   求證: $\angle 1=\angle 2$.



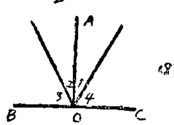
5. 假設: $\angle AOB=\angle A'O'B'$.
   OD 平分 $\angle AOB$.
   $O'D'$ 平分 $\angle A'O'B'$.
   求證: $\angle AOD=\angle A'O'D'$.



6. 假設: $ABCD$ 為直線.
   $\angle 1=\angle 2$.
   求證: $\angle 3=\angle 4$.



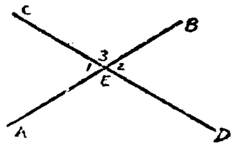
7. 假設: $AD\perp BC$.
   求證: $\angle 1=\angle 2$.



8. 假設: $AO\perp BC$.
   $\angle 1=\angle 2$.
   求證: $\angle 3=\angle 4$.

簡易定理五

35. 二直線相交，對頂角相等。



假設： AB，CD 相交於 E，

$\angle 1$ 及 $\angle 2$ 為對頂角。

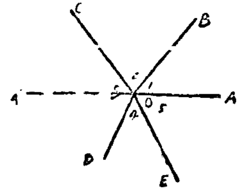
求證： $\angle 1=\angle 2$。

證明：

敘述	理由
1. AB 為一直線。	1. 假設。
2. $\angle 1+\angle 3=st.\angle$。	2. 平角定義。
3. CD 為一直線。	3. 假設。
4. $\angle 2+\angle 3=st.\angle$。	4. 平角定義。
5. $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 3$。	5. 平角皆相等。
6. $\therefore \angle 1=\angle 2$。	6. 等量減等量，其差相等。

簡易定理六

36. 環繞一點而在一平面內的所有諸角之和，等於二平角。



假設： OA，OB，OC，OD，OE 諸直線，

交於 O，成 $\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$，$\angle 5$。

求證： $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5=2st.\angle$。

證明:

敍　述	理　由
1. 延長 AO 至 A'.	1. 一直線可以延長.
2. $\angle 1+\angle 2+\angle COA'=st.\angle$.	2. 全量等於各分量之和.
3. $\angle A'OD+\angle 4+\angle 5=st.\angle$.	3. 同上.
4. $\angle 1+\angle 2+\angle COA'+\angle A'OD+\angle 4+\angle 5=2st.\angle$.	4. 等量加等量,其和相等.
5. 但 $\angle COA'+\angle A'OD=\angle 3$.	5. 全量等於分量之和.
6. $\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5=2st.\angle$.	6. 替代公理.

附註: 證明時延長或所作之線,宜用虛線表示之.

37. 周角及共軛角　環繞一點而在一平面內的諸角之和叫做**周角**;二角之和等於周角時,二角叫做**互爲共軛角.**

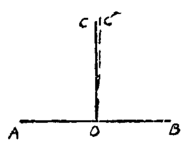
依定理六,一周角等於二平角.

簡易定理七

38. 自已知直線上一已知點,可作一垂直線,但祇可作一垂直線.

假設: AB 直線上一點 O.

求證: 自 O 點可作一直線 $\perp AB$,但祇可作一垂直線.



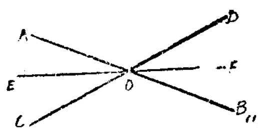
證明:

敍　述	理　由
1. $\angle AOB$ 爲一 $st.\angle$.	1. AOB 爲直線.
2. $\angle AOB$ 必有一分角線,	2. 一角有一分角線.

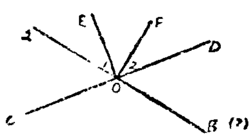
如 OC.	
3. $\angle AOC=\frac{1}{2}\angle AOB$.	3. 分角線定義.
4. $\therefore \angle AOC=\frac{1}{2}st.\angle=rt.\angle$.	4. 直角定義.
5. $\therefore CO\perp AB$.	5. 垂直定義.
6. 若 $C'O$ 亦 $\perp AB$.	6. 臨時假定.
7. 則 $\angle AOC'=rt.\angle$.	7. 垂直定義.
8. $\angle AOC=\angle AOC'$.	8. 直角皆等.
9. $\therefore CO$ 與 $C'O$ 重合為一線.	9. 等角定義.
10. $\therefore$祇有一垂線.	10. 因 CO 與 $C'O$ 重合，則必為一直線.

附註： 本定理的證明叫做同一法，是間接證法的一種.

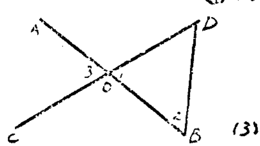
習　題　二



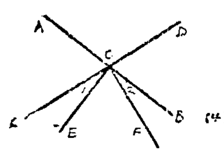
1. 假設：AOB 及 COD 為直線.
   EO平分$\angle AOC$，FO平分$\angle DOB$.
   求證：$\angle AOE=\angle FOD$.



2. 假設：AOB 及 COD 為直線.
   $EO\perp CD$，$FO\perp AB$.
   求證：$\angle 1=\angle 2$.



3. 假設：AOB 及 COD 為直線.
   $\angle 1=\angle 2$.
   求證：$\angle 3=\angle 2$.

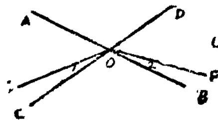


4. 假設：AOB 及 COD 為直線.
   $\angle 1=\angle 2$.
   求證：$\angle AOE=\angle DOF$.

5. 假設：AOB 及 COD 爲直線。

$\angle 1=\angle 2$。

求證：$\angle AOE=\angle DOF$。



(5)

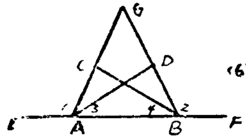
6. 假設：$\angle 1=\angle 2$.

$EABF$ 爲一直線.

AD 平分 $\angle GAB$。

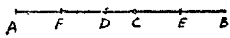
BC 平分 $\angle ABG$.

求證：$\angle 3=\angle 4$。



(6)

7. 設 AB 爲一直線，F 爲 AD 之中點，E 爲 CB 之中點，$AC=BD$；則 $AF=BE$。



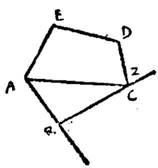
(7)　(8)

8. 設 AB 爲一直線，F 爲 AD 之中點，E 爲 CB 之中點，$FD=EC$；則 $AC=BD$。

第一編　直　線　形

39. 多邊形　由一折線圍成的封閉平面圖形叫做**多邊形**.

構成折線的幾個直線線分，叫做多邊形的**邊**.每相鄰二邊所交成的角，叫做多邊形的**內角**或**角**.每一邊與其鄰邊延長線所成的角，叫做多邊形的**外角**，角的頂點叫做多邊形的**頂**.不相鄰的二頂的聯線叫做**對角線**.各邊的長的和叫做多邊形的**周**或**周界**；或**周圍**.



如圖：$ABCDE$ 為一多邊形.

$AB, BC, CD,$………等為邊.

$\angle A, \angle ABC, \angle BCD, \angle D$………等為內角.

$\angle 1, \angle 2$………等為外角.

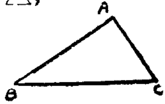
A, B, C, D, E 為頂.

AC 為對角線.

$AB+BC+CD+DE+EA$ 為周.

40. 多邊形依邊數分類　三邊的多邊形叫做**三角形**，四邊的多邊形叫**四邊形**，五邊的叫**五邊形**，以上依此類推.

三角形的記號和記法　三角形的記號為 $\triangle$，以其三頂點之名稱記之，如 $\triangle ABC$.



41. 三角形的分類.

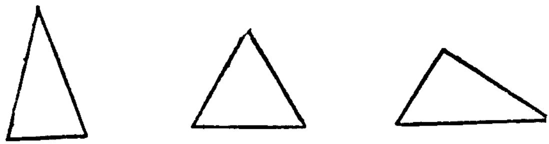
(a) 依邊分類.

等腰三角形　三角形有二邊相等的，叫做等腰三角形.

等邊三角形　三角形的三邊都相等的，叫做等邊三角形或正三角形.

不等邊三角形　三角形的三邊都不等的叫做不等邊三

角形.



等腰三角形　　等邊三角形　　不等邊三角形

三角形當他平置的一邊，叫做**底邊**或**底**. 對底邊的角叫**頂角**.三角形的任一邊都可當底,但等腰三角形內每以不等的邊當底,而以二等邊的夾角叫**頂角**，二等邊叫做**二腰**，二腰的對角叫**底角**.

(b) 依角分類

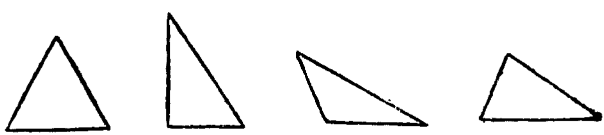
等角三角形　三角形三角都相等的,叫做等角三角形.

直角三角形　三角形有一角是直角的，叫做直角三角形.

鈍角三角形　三角形有一角是鈍角的，叫做鈍角三角形.

銳角三角形　三角形的三角都是銳角的，叫做銳角三角形.

銳角三角形及鈍角三角形,統稱**斜三角形**.



等角三角形　　直角三角形　　鈍角三角形　　銳角三角形

直角三角形對直角的邊叫**斜邊**，夾直角的二邊叫**直角邊**或**腰**.

42. 三角形的高,分角線和中線.

從三角形一頂至對邊的垂直線叫做三角形的**高**.

從三角形一頂所作內角分角線叫做三角形的**內角分角線**或簡稱**分角線**.

三角形一頂與對邊中點的聯線叫做三角形的**中線**.

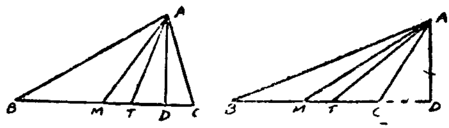
三角形的高,分角線與中線各有三條,其長度均以自頂點至與對邊之交點爲止計之.分角線與中線恆在形內,高則有時在形內,有時在形外.

如圖:

AD 爲高

AT 爲分角線

AM 爲中線



43. 全等形 若二圖形能疊合放置而各部分均完全重合者,叫做**全等形**或**全同形**.

全等的記號爲 $\cong$, 互相重合的部分叫做對應部分或相當部份.

若二形全等,則其對應部份必能互相重合,故其對應部份必相等.(全等定義的必然性)

命題一 定理

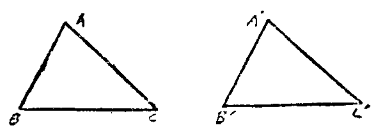
44. 二三角形,如各有二邊及夾角彼此相等,則二形全等.

假設: $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$,

$\angle B=\angle B'$ $AB=A'B'$

$BC=B'C'$

求證: $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$



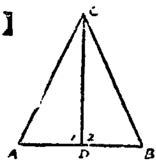
證明：

敘述	理由
1. 將$\triangle ABC$放在$\triangle A'B'C'$之上，使 BC 與$B'C'$重合	1. 移形公理，假設 $BC=B'C'$
2. BA 必沿 $B'A'$ 落下	2. 假設 $\angle B=\angle B'$
3. A 與 A' 重合	3. 假設 $AB=A'B'$
4. AC 必與 $A'C'$ 重合	4. 二點決定一直線.
5. $\therefore \triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$	5. 全等定義.

附註一： 本定理的簡寫符號爲$s.a.s.=s.a.s.$

附註二： 本定理的證明法亦爲疊合法.

【例題一】



假設： $CD\perp AB$

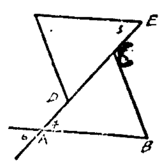
CD二等分 AB.

求證： $\angle A=\angle B$

證明：

敘述	理由
1. $\angle 1$ 與 $\angle 2$ 均爲直角	1. 假設 $CD\perp AB$
2. $\angle 1=\angle 2$	2. 直角皆相等.
3. $AD=DB$	3. 假設 CD 平分 AB.
4. $CD=CD$	4. 同量恆等.
5. $\therefore\triangle ACD\cong\triangle BCD$	5 $s.a.s.=s.a.s.$
6. $\therefore\angle A=\angle B$	6. 全等三角形的對應部份必相等.

【例題二】



假設： $\angle 3=\angle 6$

$AD=CE$

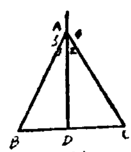
$AB=FE$

求證： $BC=FD$

證明:

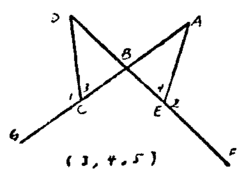
敍述	理由
1. $\angle 3=\angle 6$	1. 假設
2. $\angle 6=\angle 4$	2. 對頂角
3. $\therefore \angle 3=\angle 4$	3. 等於同量
4. $AD=CE$	4. 假設
5. $AD+DC=CE+DC$	5 等量加等量
6. $AC=DE$	6. 代入
7. $AB=FE$	7. 假設
8. $\therefore \triangle ACB\cong\triangle EDF$	8. $s.a.s.=s.a.s.$ 3,6,7)
9. $\therefore BC=FD$	9. 對應邊

習題三



(1, 2)

1. 假設: AD 平分 $\angle A$, $AB=AC$.
   求證: $\triangle ABD\cong\triangle ACD$.
2. 假設: $\angle 3=\angle 4$, $AB=AC$, FAD 爲一直線.
   求證: $AB=AC$.
3. 假設: $DB=BA$, $CB=BE$.
   DBE 及 CBA 爲直線.
   求證: $DC=AE$.



(3, 4, 5)

4. 假設: AG, DF 爲直線.
   $AC=DE$, $BC=BE$
   求證: $\angle D=\angle A$.
5. 假設: DF, AG 爲直線, $\angle 1=\angle 2$
   $AE=DC$, $BC=BE$.
   求證: $\triangle DCB\cong\triangle ABE$.
6. 假設: GH 爲直線.

$AD=BF, CB=DE$.

$CB\perp GH, DE\perp GH$.

求證：$\angle 1=\angle 2$.

7. 假設：GH 爲一直線，$\angle 3=\angle 4$

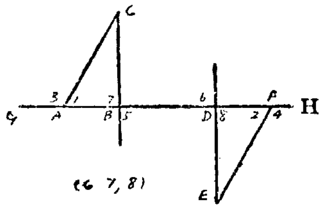
$AC=FE, AD=BF$.

求證：$CB=DE$.

8. 假設：GH 爲直線，$\angle 5=\angle 6$.

$CB=DE, AD=BF$.

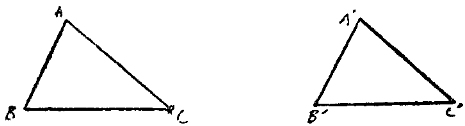
求證：$\angle C=\angle E$.



(6 7, 8)

命題二　定理

45. 二三角形如各有二角及夾邊彼此相等，則二三角形全等.



假設： $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$, $BC=B'C'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$

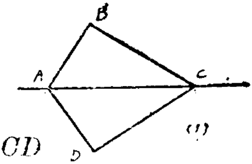
求證： $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

證明：

敘述	理由
1. 將 $\triangle ABC$ 放在 $\triangle A'B'C'$ 上使 BC 與其等量 $B'C'$ 重合.	1. 移形公理 $BC=B'C'$ (假設)
2. BA 沿 $B'A'$ 落下.	2 $\angle B=\angle B'$
3. CA 沿 $C'A'$ 落下.	3. $\angle C=\angle C'$
4. A 必與 A' 重合	4. 二直線祇有一交點.(幾何公理 1).
5. $\therefore\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$	5. 全等定義.

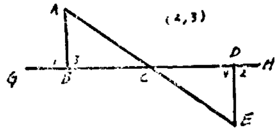
附註： 本定理的簡寫符號為 a.s.a. = a.s.a.

習 題 四



1. 假設： AC 平分 $\angle A$ 及 $\angle C$.

   求證： $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.



2. 假設： BCD 及 ACE 為直線，$BC = CD$

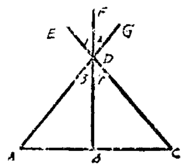
   $AB \perp BD$, $DE \perp BD$

   求證： $\angle A = \angle E$

3. 假設： ACE 及 GH 為直線

   $\angle 1 = \angle 2$, $BC = CD$

   求證： $AC = CE$



(4,5)

4. 假設： FDB, ADG, CDE 為直線

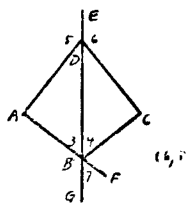
   $\angle 1 = \angle 2$, $DB \perp AC$

   求證： $AD = CD$

5. 假設： FDB 為直線，$DB \perp AC$.

   $\angle FDA = \angle FDC$

   求證： $\angle A = \angle C$



6. 假設： $EDBG$ 為直線，ABF 為直線.

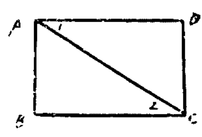
   $\angle 5 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 7$.

   求證： $\angle A = \angle C$

7. 假設： EG 為一直線，$\angle 4 = \angle 7$.

   $\angle 5$ 為 $\angle CDB$ 之補角

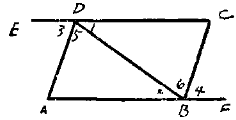
   求證： $AB = BC$



8. 假設： $AB \perp AD$, $BC \perp DC$, $\angle 1 = \angle 2$.

   求證： $\angle B = \angle D$

9. 假設： $\angle EDB = \angle FBD$, $\angle 5 = \angle 6$



(9,10)

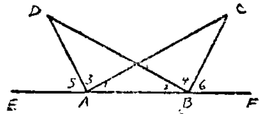
CE 及 AF 爲直線.

求證: $AD=BC$.

10. 假設: $\angle 3=\angle 4$, $\angle 5=\angle 6$.

EC, AF 爲直線.

求證: $AB=DC$



(11,12)

11. 假設: $AD=CB$, $\angle 5=\angle 6$.

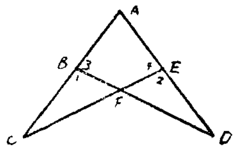
EF 爲一直線.

求證: $\angle 1=\angle 2$

12. 假設: $\angle 5=\angle 6$, $\angle 3=\angle 4$.

EF 爲一直線.

求證: $AC=DB$.



(13,14)

13. 假設: $AB=AE$, $BC=ED$.

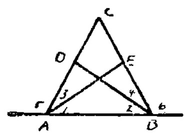
CE, BD, AC, AD 爲直線.

求證: $CE=BD$.

14. 假設: AC, AD, BD, CE 爲直線.

$\angle 3=\angle 4$, $BF=FE$.

求證: $\angle C=\angle D$.



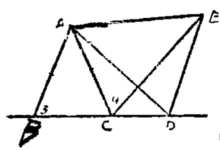
(15,16)

15. 假設: $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$.

求證: $AD=BE$.

16. 假設: $\angle 5=\angle 6$, $\angle 1=\angle 2$.

求證: $AD=BE$.

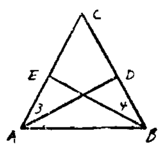


(17)

17. 假設: BCD 爲直線, $\angle 1=\angle 2$,

$AB=AC$, $\angle 3=\angle 4$.

求證: $BD=CE$.



(18)

18. 假設　$AC=BC$, $\angle 3=\angle 4$.

求證　$AD=BE$.

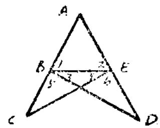
19. 假設：$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$。

AD，AC 爲直線。

求證：$EC=BD$。

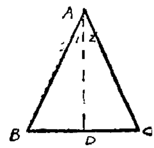
20 假設：$DB\perp AC$，$CE\perp AD$，$\angle 1=\angle 2$。

求證：$\angle C=\angle D$。



(19, 20)

命題三　定理



46. 等腰三角形的底角相等。

假設： 等腰三角形 ABC，$AB=AC$。

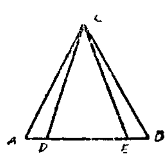
求證： $\angle B=\angle C$。

證明：

敘述	理由
1. 若 AD 爲 $\angle A$ 之分角線交 BC 命 D。	1. 每角有一分角線。
2. 則 $\angle 1=\angle 2$。	2. 分角線定義。
3. $AD=AD$。	3. 同量恆等。
4. $AB=AC$。	4. 假設。
5. $\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACD$。	5. s.a.s.=s.a.s.。
6. $\therefore \angle B=\angle C$。	6. 對應角。

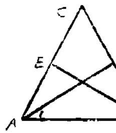
47. 系　等邊三角形的三角皆等。

習　題　五



1. 設 $AC=BC$，$AE=DB$，則 $CD=CE$。

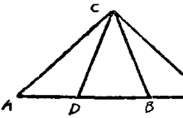
2. 設 $AC=BC$，$\angle DCA=\angle ECB$，則 $CD=CE$。



(3,4)

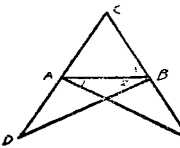
3. 若 $AC=BC$; AD, BE 爲分角線，則 $AE=BD$.

4 若 $AC=BC$, $\angle 1=\angle 2$，則 $AE=BD$.



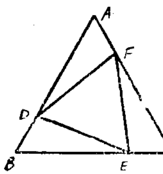
(5)

5. 若 $DC=BC$, AE 爲直線, $AD=BE$. 求證 $\triangle ACE$ 爲等腰.



(6)

6 若 $AC=BC$, $\angle 1=\angle 2$, CD, CE 爲直線. 則 $\angle D=\angle E$.



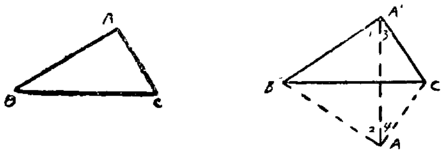
(7,8)

7. $\triangle ABC$ 爲等邊三角形，於三邊上取 D, E, F，使 $AD=BE=CF$. 求證 $\triangle DFE$ 爲等邊三角形.

8. 若 $DE=EF=FD$, $\angle AFD=\angle BDE=\angle CEF$，$AB$, BC, AC 爲直線. 求證 $\triangle ABC$ 爲等邊三角形.

命題四　定理

48. 二三角形，若三邊各彼此相等，則二形全等.



假設: $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$, $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $AC=A'C'$.

求證: $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

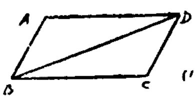
證明:

敍　述	理　由
1. 放 $\triangle ABC$ 使 BC 與其等量 $B'C'$ 重合而 A 與 A' 在 $B'C'$ 之異側.	1. 移形公理.

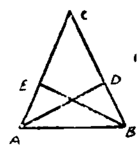
2. 聯 AA'	2. 二點決定一直線.
3. $\triangle A'B'A$ 爲等腰三角形.	3. $AB=A'B'$
4. $\therefore \angle 1=\angle 2$	4. 等腰 $\triangle$ 底角相等.
5. $\triangle A'C'A$ 爲等腰三角形.	5. $AC=A'C'$
6. $\therefore \angle 3=\angle 4$	6. 等腰 $\triangle$ 底角相等.
7. $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$	7. 等量加等量.
8. $\therefore \angle A=\angle A'$	8. 替代.
9. $\triangle AB'C'\cong\triangle A'B'C'$	9. $s.a.s.=s.a.s.$
10. $\therefore \triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$	10. 替代.

附註： 本定理的簡寫符號爲 $s.s.s.=s.s.s.$

習 題 六



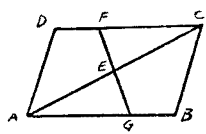
(1)



(2)

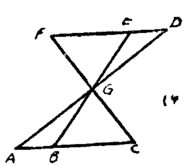
1. 若 $AB=CD, AD=BC$. 則 $\angle A=\angle C$

2. 若 $AE=BD, AD=BE$. 則 $\angle CEB=\angle CDA$.



(3)

3. 若 $AB=CD, AD=BC, E$ 爲 AC 之中點. FEG 爲直線; 則 $FE=EG$.
(提示: 先證 $\triangle ADC\cong\triangle ABC$.
再證 $\triangle AEG\cong\triangle CEF$.)

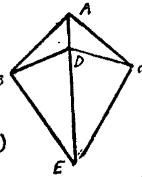


(4)

4 AD, BE, CF, AC, DF, 皆爲直線.
$AG=GD, CG=FG$.
求證 $BG=GE$

5. $AB=AC, AE$ 平分 $\angle BAC$.

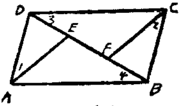
求證 $\angle DBE=\angle DCE$.



(5)

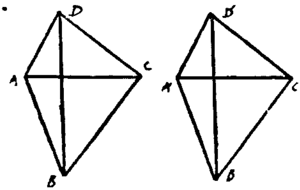
6. $AB=CD, BC=DA, \angle 1=\angle 2$

BD 為直線，求證 $AE=CF$.



(6)

7.



假設 $AB=A'B'$

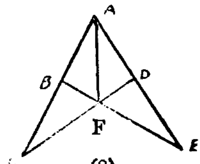
$BC=B'C'$

$CD=C'D'$

$DA=D'A'$

$AC=A'C'$

求證 $BD=B'D'$



(8)

8. $AB=AD, AC=AE$.

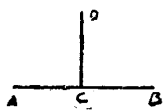
BE, DC 為直線

求證 $\angle BAF=\angle DAF$.

49. 中垂線　一直線垂直且等分另一直線者，第一線叫做第二線的垂直二等分線或中垂線.

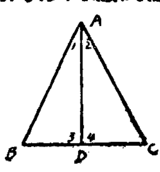
如圖：若 $DC\perp AB$, 且 C 為 AB 之中點，

則 DC 為 AB 之中垂線.



命題五　定理

50. 等腰三角形頂角的分角線為底的中垂線.



假設： $\triangle ABC, AB=AC, AD$ 平分 $\angle A$.

求證: $AD \perp BC$,　　$BD = DC$.

證明:

敘述	理由
1. $AB = AC$.	1. 假設
2. $\angle 1 = \angle 2$.	2. 假設
3. $AD = AD$.	3. 同量恆等.
4. $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.	4. $s.a.s. = s.a.s.$
5. $BD = DC$.	5 對應邊.
$\angle 3 = \angle 4$.	對應角.
6. $\angle 3 + \angle 4 = st.\angle$.	6. BDC 爲一直線.
7. $\angle 3 + \angle 3 = 2\angle 3 = st.\angle$.	7. 替代.
8. $\angle 3 = \frac{1}{2} st.\angle = rt.\angle$.	8. 等量之同分量.
9. $AD \perp BC$.	9. 垂直定義.

51. 系一　若二線相交,而所成的二鄰補角相等,則二線垂直　（證法見命題五後半部份）

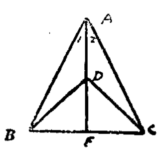
52. 系二　等腰三角形底邊上的高,中線,頂角的分角線及底邊的中垂線四線合一.

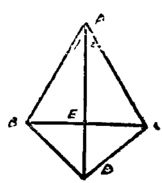
命題六　定理

53. 二點各與一直線的二端等距,則此二點的聯線爲此直線的中垂線.

假設: $AB = AC, DB = DC$.

求證: AD 爲 BC 的中垂線.

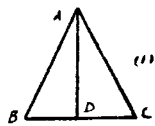




證明:

敍述	理由
1. $AB=AC$.	1. 假設.
2. $BD=DC$.	2. 假設.
3. $AD=AD$.	3. 恆等.
4. $\triangle ABD\cong\triangle ACD$.	4. $s.s.s.=s.s.s.$
5. $\angle 1=\angle 2$.	5. 對應角.
6. AD 爲 BC 之中垂線.	6. 等腰△頂角的分角線爲底邊的中垂線.

習　題　七



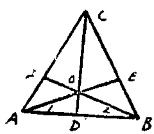
1. 假設: $AB=AC$, $BD=DC$, BC 爲直線.

   求證: $AD\perp BC$.

2. 假設: $AC=BC$, $\angle 1=\angle 2$.

   ADB, AFC, BEC, AOE, BOF 均爲直線.

   求證: $CD\perp AB$.



(2, 3)

3. 假設: $\angle A=\angle B$, $AF=BE$.

   AB, AC, BC, AE, BF 均爲直線.

   求證: $CD\perp AB$.

4. 二三角形 ABC 及 $A'B'C'$, 若 $AB=A'B'$, $\angle A=\angle A'$ 且分角線 AD 及 $A'D'$ 相等; 則二形全等.

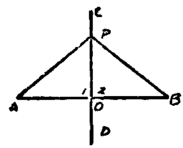
5. 二全等三角形之二對應中線相等.

6. 二全等三角形之二對應分角線相等.

7. 一六邊形的三雙對邊各各相等, 一雙對角亦等. 試證另二雙對角亦各相等.

命題七　定理

54. 在一線分中垂線上的任意點與線分的二端等距.



假設： CD 爲 AB 的中垂線.

P 爲 CD 上的任意點.

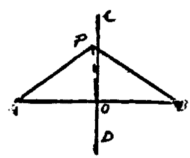
求證： $PA=PB$.

證明：

敘述	理由
1. $\angle 1$ 及 $\angle 2$ 爲直角.	1. $CD\perp AB$.
2. $\angle 1=\angle 2$.	2. 直角皆等.
3. $AO=OB$.	3. CD 爲中垂線.
4. $PO=PO$.	4. 同量.
5. $\triangle APO\cong\triangle BPO$.	5. s.a.s.=s.a.s.
6. $\therefore AP=BP$.	6. 對應邊.

命題八　定理

55. 一點與一線分的二端等距，則此點在此線分的中垂線上.



假設： CO 爲 AB 的中垂線.

$PA=PB$.

求證： P 在 CO 線上.

證明：

敘述	理由
1. 聯 PO.	1. 二點定一直線.
2. $PA=PB$.	2. 假設.
3. $AO=BO$.	3. 假設.
4 $PO=PO$.	4. 恆等.

5. $\triangle APO \cong \triangle BPO$.	5. $s\,s\,s = s.s.s.$
6. $\angle AOP = \angle BOP$.	6. 對應角.
7. $\therefore PO \perp AB$.	7. 鄰補角相等.
8. $\therefore PO$ 與 CO 重合.	8. 過線上一點祇有一垂線.
9. $\therefore P$ 在 CO 線上.	9. 因 PO 與 CO 已重合.

56. 逆定理　若二定理的假設及結論，全部或一部適互相對調的叫做互爲**逆定理**.

如命題七及命題八互爲逆定理.

定理與逆定理不一定皆眞確. 如"直角皆相等"的逆定理可寫作爲"相等之角皆直角". 此前一定理爲眞確, 但後一定理則不能成立, 故逆定理必須另行證明.

57. 作圖　作圖是用幾何方法畫適合已知條件的圖形. 幾何學內作圖所用的工具, 限於直尺及圓規, 用直尺及圓規可作下列基本作法:

(a) **作二點的聯線**（幾何公理一）

(b) **延長一已知直線**（幾何公理三）

(c) **以已知點爲圓心, 以已知長爲半徑作圓, 或圓弧, 或截取定長**（幾何公理五）

58. 作圖題的解法　作圖題必包括二重要部份, 一爲已知部份, 另一爲求作部份. 作圖題的解法是由已知部份, 用基本作法或曾經證明眞確的作法, 作出求作部份. 作圖後並須證明所作的圖, 合於所求的條件. 遇必要時更須討論作圖的可能與否及作圖的解答種數. 故作圖題的解法可有下列數項:

(a) **已知**

(b) **求作**

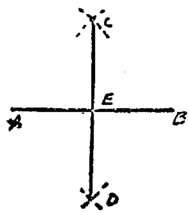
(c) **作法**

(d) 證明

(e) 討論（不一定需要）

命題九　作圖

59. 二等分一已知直線.



已知： 直線 AB.

求作： 二等分 AB.

作法： 1. 以 A 爲圓心,任意長(須大於 $\frac{1}{2}AB$)爲半徑作圓弧.

2. 以 B 爲圓心,等長爲半徑作圓弧,二圓弧相交於二點 C 及 D.

3. 聯 CD 交 AB 於 E.

4. 則 CD 二等分 AB 於 E.

證明：

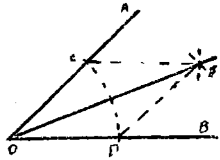
敘述	理由
1. C 與 A,B 二點等距.	1. 作圖.
2. D 與 A,B 二點等距.	2. 作圖.
3. CD 平分 AB. 即 $AE=BE$.	3. 二點各與一直線的二端等距，則此二點的聯線爲此直線的中垂線.

60. 系　依命題九的方法可作一已知線分的中垂線.

注意：已知部份,用實線;作圖部分用虛線;求作部分用實線;證明時添作的部份用虛線.

命題十　作圖

61. 二等分一已知角.



已知: $\angle AOB$.

求作: 平分 $\angle AOB$.

作法: 1. 於 OA, OB 上截 $OC=OD$.

2. 以 C 及 D 爲圓心,以等長爲半徑(須大於 $\frac{1}{2}CD$)畫二弧相交於 E.

3. 聯 OE.

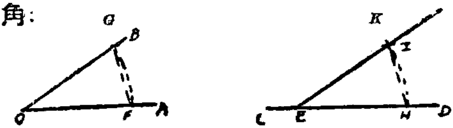
4. 則 OE 爲 $\angle AOB$ 的分角線.

證明:

敍述	理由
1. 聯 CE, DE	1. 二點定一直線.
2. $OC=OD$.	2. 作圖.
3. $CE=DE$.	3. 作圖.
4. $OE=OE$.	4. 恆等.
5. $\triangle OCE \cong \triangle ODE$.	5. $s.s.s.=s.s.s.$
6. $\therefore \angle AOE=\angle BOE$.	6. 對應角.

命題十一　作圖

62. 過已知直線上一已知點,作一直線與已知直線成一角等於一已知角:



已知： 直線 CD 上一點 E 及 $\angle AOB$.

求作： 過 E 點作一直線與 CD 成一角等於 $\angle AOB$.

作法： 1. 以 O 及 E 爲圓心，以等長爲半徑作二弧 $\overset{\frown}{FG}$ 及 $\overset{\frown}{HK}$，分別交 OA, OB 於 F 及 G；交 CD 於 H.

2. 以 H 爲圓心，以 FG 之距離爲半徑作弧，截 $\overset{\frown}{HK}$ 於 I.

3. 聯 EI.

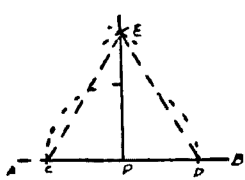
4. 則 $\angle IED = \angle AOB$.

證明：

敍　　述	理　　由
1. 聯 HI, FG.	1. 二點決定直線.
2. $EH = OF$. $EI = OG$.	2. 作圖.
3. $HI = FG$.	3. 作圖.
4. $\triangle EHI \cong \triangle OFG$.	4. $s.s.s. = s.s.s.$
5. $\therefore \angle IEH = \angle AOB$.	5. 對應角.

命題十二　作圖

63. 自已知直線上一已知點，作此線的垂線.



已知： 直線 AB 上一點 P.

求作： 自 P 點，作一線 $\perp AB$.

作法： 1. 以 P 爲圓心，以任意長爲半徑，於 AB 線上截 $CP = PD$.

2. 以 C 及 D 爲圓心，以等長半徑（須大於 CP）作二弧交於 E.

3. 聯 EP.

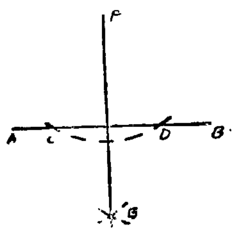
4. 則 $EP \perp AB$.

證明：

敍述	理由
1. 聯 CE, DE.	1. 二點定直線.
2. $CE = DE$.	2. 作圖.
3. $CP = DP$.	3. 作圖.
4. $\therefore EP \perp CD$.	4. 二點各與直線二端等距.
5. 卽 $EP \perp AB$.	5. AB 卽 CD.

命題十三 作圖

64. 自已知直線外一已知點，作此線的垂線.



已知： 直線 AB，線外一點 P.

求作： 自 P 點，作一線 $\perp AB$.

作法： 1. 以 P 爲圓心以適當長之半徑作弧，截 AB 於 C 及 D.

2. 以 C 及 D 爲圓心，以相等半徑（須大於 $\frac{1}{2}CD$）作二弧相交於 E.

3. 聯 PE.

4. 則 $PE \perp AB$.

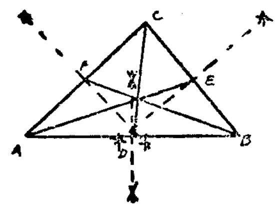
證明:

敍述	理由
1. P 點與 C,D 等距.	1. 作圖.
2. E 點與 C,D 等距.	2. 作圖.
3. $\therefore PE\perp CD$.	3. 點各與線之兩端等距.
4. 卽 $PE\perp AB$.	4. AB 卽 CD.

【例題】 作已知三角形的三中線.

已知: $\triangle ABC$.

求作: $\triangle ABC$ 的三中線.



作法: 1. 二等分 AB 於 D.

2. 二等分 BC 於 E.

3. 二等分 CA 於 F.

4. 聯 CD, BF, AE.

5. 則 CD, BF, AE 爲 $\triangle$ 的三中線.

證明:

敍述	理由
1. $AD=DB$, $BE=EC$, $CF=FA$.	1. 作圖.
2. $\therefore AE, BF, CD$爲中線	2. 中線定義.

附註: 凡已經證明眞確的作法，卽可應用作爲一步，不必再詳細寫出其包含的基本作法.

習題八

1. 作已知三角形的三高.

2. 作已知三角形的三內角分角線.

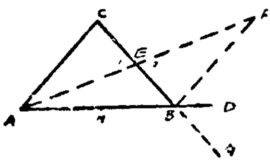
3. 作三線平分已知三角形的三外角，並延長之使交成另一三角形.

4. 作已知三角形的三邊的中垂線.

5. 分一已知線成四等分。
6. 作一直角。
7. 作一 45° 角。
8. 作一 $22\frac{1}{2}^\circ$ 的角，作一 $67\frac{1}{2}^\circ$ 的角。
9. 作一角等於 $180^\circ-\angle A-\angle B$；$\angle A$ 與 $\angle B$ 爲已知角。
10. 已知 $\angle A$，作一角等於 $2\angle A$ 的餘角的補角。

命題十四　定理

65. 三角形的一外角，大於其任意不相隣的內角。



假設： $\triangle ABC$ 及外角 $\angle CBD$。

求證： $\angle CBD>\angle C$。

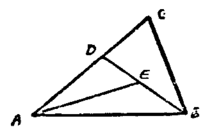
$\angle CBD>\angle A$。

證明：

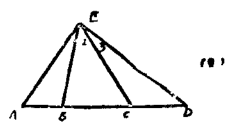
敍　述	理　由
1. 取 BC 的中點 E。	1. 一直線必有一中點。
2. 聯 AE。	2. 二點定一直線。
3. 延長 AE 至 F，使 $EF=AE$。	3. 直線可以延長。
4. 聯 FB。	4. 二點定一直線。
5. $AE=EF$，$CE=EB$。	5. 作圖。
6. $\angle 1=\angle 2$。	6. 對頂角。
7. $\triangle ACE\cong\triangle FBE$。	7. $s.a.s.=s.a.s.$。

8. $\angle EBF=\angle C$.	8. 對應角.
9. $\angle CBD>\angle EBF$.	9. 全量大於分量.
10. $\therefore\angle CBD>\angle C$.	10. 替代.
11. 同理取 AB 的中點 H, 聯 CH 延長之……可證 $\angle ABG>\angle A$.	11. 1—10.
12. $\angle ABG=\angle CBD$.	12. 對頂角.
13. $\therefore\angle CBD>\angle A$.	13. 替代.

習 題 九

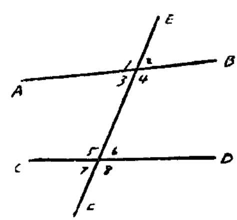


1. 若 AC, DB 爲直線.
   求證: (a) $\angle 1>\angle 2$.
   (b) $\angle 2>\angle 3$.
   (c) $\angle 1>\angle 3$.



2. 若 AD 爲直線.
   求證: (a) $\angle 1>\angle 2$.
   (b) $\angle 1>\angle D$.
   (c) $\angle 1>\angle 3$.

66. 截線 若一線與二線或二線以上分別相交，則此線叫做二線或二線以上的截線.



如圖: EF 爲 AB, CD 的截線.

截線與二線相交所成的角在二線內側的叫做內角,外側的叫做外角,內角之在截線同側的叫做**同側內角**，內角之在截線異側而上下不同的，叫做**內錯角**，外角之在截線異側而上下不

同的叫做外錯角，一內角一外角而地位相同的叫做同位角.

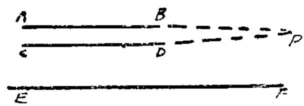
如圖： 3,4,5,6 爲內角;1,2,7,8 爲外角;4 與 6, 3 與 5 爲同側內角; 3 與 6，4 與 5 爲內錯角；1 與 8，2 與 7 爲外錯角；2 與 6,4 與 8,1 與 5,3 與 7 爲同位角.

命題十五　定理

67. 二直線若都與第三直線平行，則二直線平行.

假設: $AB // EF$.

$CD // EF$.



求證: $AB // CD$.

證明:

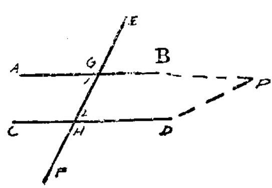
敍述	理由
1. 若 AB 與 CD 延長相交於一點 P，則過 P 點有二線皆平行於 EF.	1. 臨時假定.
2. 但此爲不可能.	2. 二相交直線，不能皆平行於第三直線.(平行公理)
3. $\therefore AB$ 與 CD 不能相交.	3. 臨時假定不合理.
4. $\therefore AB // CD$.	4. 平行定義.

附註： 本定理的證法，叫做歸謬法，是間接證法的一種.

命題十六　定理

68. 若二直線爲一直線所截，而有一對內錯角相等，則二線平行.

假設: 截線 EF 交 AB, CD 於 G, H 其內錯角，$\angle 2 = \angle 1$.

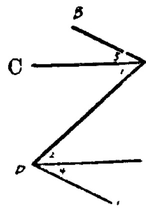


求證: $AB // CD$.

證明：

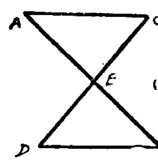
敍　述	理　由
1. 若 AB 與 CD 延長相交於一點 P。	1. 臨時假定.
2. 則 GHP 成一三角形.	2. 定義.
3. 則 $\angle 1 > \angle 2$.	3. △外角>不相隣內角.
4. $\therefore AB$ 與 CD 不能相交.	4. 與假設 $\angle 1 = \angle 2$ 不合.
5. $\therefore AB \parallel CD$.	5. 平行定義.

習　題　十



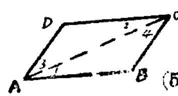
(1,2,3)

1. 若 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, 則 $AB \parallel DE$.
2. 若 $\angle A = \angle D$, $\angle 3 = \angle 4$, 則 $AC \parallel DF$.
3. 若 $BA \perp AD$, $ED \perp AD$, $\angle 3 = \angle 4$.
   求證: $AC \parallel DF$.



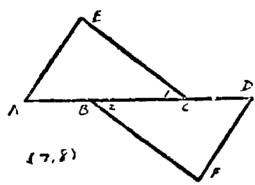
(4)

4. 若 AB, CD 互相等分於 E,
   則 $AC \parallel DB$.



(5,6)

5. 若 $AB = DC$, $\angle 1 = \angle 2$, 則 $AD \parallel BC$.
6. 若 $AB = DC$, $AD = BC$, 則 $AB \parallel DC$.
7. 若 $AB = CD$, $EC = BF$, $\angle 1 = \angle 2$.
   AD 爲一直線, 則 $AE \parallel DF$.

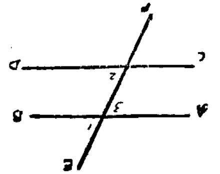


(7,8)

8. 若 $AB = CD$, $\angle ABF = \angle DCE$,
   $EC = BF$.
   試證: $AE \parallel DF$.

命題十七　定理

69. 若二直線為一直線所截,而有一對同位角相等,則二線平行.



假設: 截線 EF 交 AB 及 CD,
　　而 $\angle 1=\angle 2$.

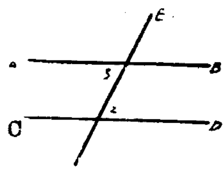
求證: $AB \parallel CD$.

證明:

敍　述	理　由
1. $\angle 1=\angle 2$.	1. 假設.
2. $\angle 1=\angle 3$.	2. 對頂角.
3. $\angle 3=\angle 2$.	3. 等於同量.
4. $AB \parallel CD$.	4. 內錯角相等,則二直線平行.

命題十八　定理

70. 若二直線為一直線所截,而有一對同側內角相補,則二直線平行.



假設: 截線 EF 交 AB 及 CD.
　　$\angle 1+\angle 2=st.\angle$.

求證: $AB \parallel CD$.

證明:

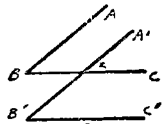
敍　述	理　由
1. $\angle 1+\angle 2=st.\angle$.	1. 假設.
2. $\angle 1+\angle 3=st.\angle$.	2. AB 為直線.
3. $\therefore \angle 2=\angle 3$.	3. 同角的補角.
4. $AB \parallel CD$.	4. 內錯角相等.

71. 系　若二線皆垂直於第三直線,則二線平行.

習　題　十　一

1. 設 $\angle B=\angle 2=\angle B'$,

   求證 $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$.



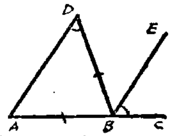
(1)

2. 若 $AB=BD$, $\angle D=\angle EBC$,

   則 $AD \parallel BE$.

3. 若 $AB=BD$, $\angle D$ 是 $\angle ABE$ 的補角,

   則 $AD \parallel BE$.

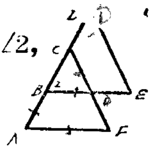


(2,3)

4. 若 $AF=BE$, $AB=CD$, $\angle A=\angle 2$,

   AD 是直線.

   求證 $CF \parallel DE$.

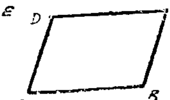


(4)

5. 若 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=2st.\angle$.

   $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$.

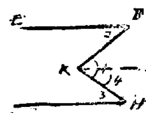
   則 $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$.



(5)

6. 若 $\angle 1=\angle 2+\angle 3$, 則 $EF \parallel GH$.

   (提示: 作 KI 使 $\angle 4=\angle 3$)



(6)

命題十九　作圖

72. 過已知直線外一已知點, 作一直線, 與已知直線平行.

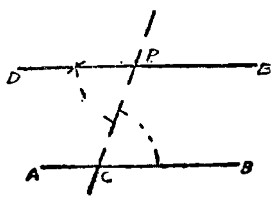
已知: 直線 AB, 線外一點 P.

求作: 過 P 點作一直線 $\parallel AB$.

作法: 1. 過 P 點作一直線, 與 AB 交於 C.

2. 過 P 點作直線 DE 使 $\angle DPC=\angle PCB$.

3. 則 $DE \parallel AB$.

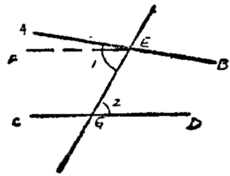


證明：　敍述　　理由

敍述	理由
1. $\angle DPC=\angle PCB$.	1. 作圖.
2. $\therefore DE // AB$.	2. 內錯角相等.

命題二十　定理

73. 若二直線為一直線所截，而有一對內錯角不等，則二直線不平行.



假設：AB 與 CD 為 EG 所截，

而 $\angle 1>\angle 2$.

求證：$AB \nparallel CD$,

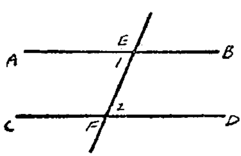
證明：

敍述	理由
1. 作 EF 使 $\angle FEG=\angle 2$.	1. 已有作法.
2. 則 $EF // CD$.	2. 內錯角相等.
3. AB 與 FE 為二相交直線.	3. 因$\angle 1>\angle 2$,故 $\angle 1>\angle FEG$ 故 AB, FE 不重合.
4. $\therefore AB \nparallel CD$.	4. 二相交直線不能皆平行於第三直線.(平行公理)

附註：不平行的記號為 $\nparallel$.

命題二十一　定理

74. 二平行線被一線所截，則其內錯角相等.



假設：$AB // CD$, 截線 EF, 內錯角 $\angle 1$ 及 $\angle 2$.

求證: $\angle 1=\angle 2$.

證明:

敍述	理由
1. $\angle 1=\angle 2$ 或 $\angle 1\neq\angle 2$,	1. 祇有一種可能.
2. 若 $\angle 1\neq\angle 2$.	2. 臨時假定.
3. 則 $AB \nparallel CD$.	3. 內錯角不等,則二直線不平行.
4. 但與假設不合.	4. 假設 $AB//CD$.
5. $\therefore \angle 1=\angle 2$.	5. 已證明臨時假定 $\angle 1\neq\angle 2$ 的不合理.

附註一: 不等的記號爲 $\neq$.

附註二: 本定理爲定理十六的逆定理.

附註三: 本定理之證法亦爲歸謬法.

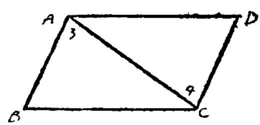
75. 系一　若一截線垂直於二平行線之一,則必垂直於他一線.

76. 系二　二平行線被一線所截,則其同位角相等.

77. 系三　二平行線被一線所截,則其同側內角相補.

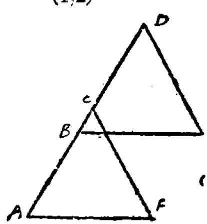
習 題 十 二

1. 假設 $AD=BC$, $AD//BC$.
   求證: $\angle 3=\angle 4$.



(1,2)

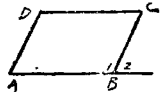
2. 若 $AB//CD$, $AD//BC$.
   則 $\angle B=\angle D$.
3. 假設: AD 爲一直線, $AB=CD$,
   $AF//BE$, $CF//DE$
   求證: $DE=CF$
4. 假設: $AB=CD$, $CF=DE$,
   $CF//DE$, AD 爲一直線.
   求證: $AF=BE$



(3,4)

5. 假設：$AB // CD$, $AD // BC$.

求證：$\angle 2 + \angle D = st.\angle$, $\angle A = \angle C$.

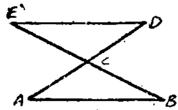


(5)

6. 假設：$ED // AB$, $AC = CD$.

EB 和 AD 都是直線.

求證：$\triangle ABC \cong \triangle CDE$



(6)

7 假設：$AB = ED$, $BC // FE$,

$AF // DC$.

又 AD 是一直線.

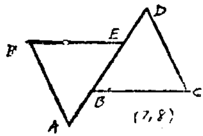
求證：$\triangle AEF \cong \triangle BCD$.

8. 假設：$AB = ED$, $BC = FE$,

$BC // FE$,

又 AD 是一直線.

求證：$AF = CD$.



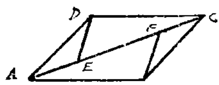
(7, 8)

9. 假設：$AB // CD$, $AB = CD$,

$AF = EC$,

又 AC 是一直線.

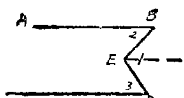
求證：$DE // BF$.



(9)

10. 假設　如圖 $AB // CD$.

求證：$\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$.

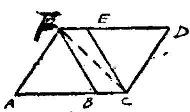


(10)

11. 假設：$AC // FD$, $AF // CD$,

$FB // EC$,

求證：$\triangle AFB \cong \triangle ECD$.

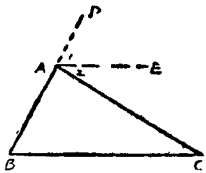


(11)

12. 兩平行線所成的一組同位角的二條角二等分線必平行.

命題二十二　定　理

78. 三角形三角的和等於一平角.



假設： $\triangle ABC$

求證： $\angle A+\angle B+\angle C=st.\angle$.

證明：

敘述	理由
1. 過點 A 作 $AE /\!/ BC$	1. 已有作法.
2. 延長 BA 到 D	2. 延線公理.
3. $\angle 1=\angle B$	3. 同位角.
4. $\angle 2=\angle C$	4. 內錯角.
5. $\angle A+\angle 1+\angle 2=st.\angle$	5. 全量等於各分量之和.
6. $\angle A+\angle B+\angle C=st.\angle$	6. 替代.

79. 系一　一個三角形，至多祇有一個鈍角或直角.

80. 系二　直角三角形的兩個銳角互爲餘角.

81. 系三　等邊三角形的每一內角等於 $60°$.

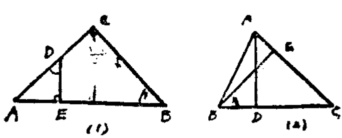
82. 系四　二三角形有二雙角彼此相等，則第三雙角亦等.

83. 系五　一三角形的外角等於其二不相鄰內角之和.

84. 系六　一四邊形內角之和爲 $360°$.

習題十三

1. 若 $BC\perp AC$, $DE\perp AB$.
   求證：$\angle ADE=\angle ABC$



2. 若 AD, BE 爲
   $\triangle ABC$ 之高，
   $\angle EBD=\angle EAD$.

3. 直角三角形 ABC 之 $\angle C=90°$.

$CD\perp BA$, 求證: $\angle ACD=\angle B$.

4. 等腰△頂角的外角分角線必平行於底邊.

5. 若△的一外角分角線平行於對邊,則他二內角相等.

6. 平行線之同側內角之分角線必互相垂直.

7. 若二線被截線所截,而同側內角之分角線互相垂直,則二線平行.

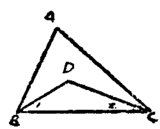
85. 計算題 凡問題之欲從已知量或指定條件去求未知量之值,或未知量間之數量之關係的叫做計算題.計算題必有二重要部分: (1)已知部分, (2)所求部份,解題時或先從已知量依指定條件和幾何關係,逐部推求, 至求出未知量為止; 或先令未知量為 x, 就已知量及未知量間的關係列成方程式,再依代數方法解出方程式. 演算時亦應逐步將根據理由,分別寫出,但如遇理由屬於簡單之公理時,可以酌量省略, 此種演算方法, 叫做代數計算法,演算過程叫做解.故計算題分下列三項:

(a) 已知.

(b) 求.

(c) 解.

【例題】



已知 $\angle A=80°$; BD, CD 為分角線,

求 $\angle D$ 之值.

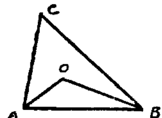
解

敍述	理由
1. $\angle A=80°$.	1. 已知.
2. $\angle B+\angle C=180°-\angle A$ $=100°$.	2. △三角之和$=180°$.
3. $\angle 1+\angle 2=\dfrac{\angle B}{2}+\dfrac{\angle C}{2}$	3. 等分量.

$=\dfrac{100^\circ}{2}=50^\circ$.	
4. $\angle D=180^\circ-(\angle 1+\angle 2)$ $=130^\circ$.	4. △三角之和$=180^\circ$.

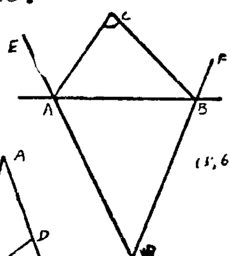
習題十四

1. $\triangle ABC$ 之 $AB=AC$, $\angle A=40^\circ$, 求 $\angle B$.
2. $\triangle ABC$ 之 $AB=AC$, $\angle B=65^\circ$, 求 $\angle A$.
3. AO, BO 爲分角線, $\angle C=60^\circ$, 求 $\angle O$.



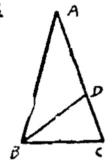
(3, 4)

4. AO, BO 爲分角線, $\angle O=100^\circ$, 求 $\angle C$.
5. EAD 平分 $\angle A$ 之外角, FBD 平分 $\angle B$ 之外角, 若 $\angle C=80^\circ$, 求 $\angle D$.



(5, 6)

6. EAD 平分 $\angle A$ 之外角, FBD 平分 $\angle B$ 之外角, 若 $\angle D=40^\circ$, 求 $\angle C$.
7. 若 $\triangle ABC$ 內 $AB=AC$, $BC=BD=AD$ 求 $\angle A$.

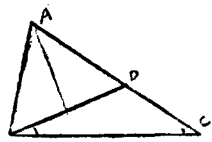


(7)

86. 代數證題法 利用代數計算法之方式以證明量與量間之某種關係的證法叫做代數證題法.

【例題】

已知 $\triangle ABC$ 之 AC 上一點 D, 使 $AB=AD$.

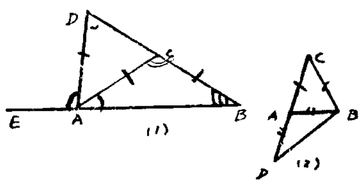


求證： $\angle DBC=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$

證明：

敍　述	理　由
命 $\angle A=a$, $\angle B=b$, $\angle C=c$	
$\angle DBC=b-\angle ABD.$	
$=b-\dfrac{180°-a}{2}$	$AB=AD$ $\therefore \angle ABD=\angle ADB$.
$=b-90°+\dfrac{a}{2}$	
$=b-90°+\dfrac{180°-b-c}{2}$	△三角之和＝180°.
$=b-90°+90°-\dfrac{b}{2}-\dfrac{c}{2}$	
$=\dfrac{1}{2}(b-c)$	
$=\dfrac{1}{2}(\angle B-\angle C)$.	

習題十五



1. 設 $AD=AC=CB$
   DCB 及 EAB 爲直線
   求證：$\angle EAD=3\angle B$.
2. 設 $AD=AB$, $AC=BC$,
   CAD 爲一直線,
   求證：$\angle C=180°-4\angle D$.
3. 若等腰三角形 ABC 的底 AB, 延長至 D, 聯 CD, 則 $\angle BCD=\angle A-\angle D$.
4. 在等腰 $\triangle ABC$ 的一腰 AC 上取任意點 D, 與底邊 AB 之 B 端相聯, 則 $\angle A=\frac{1}{2}(\angle CDB+\angle CBD)$.

5. $\triangle ABC$ 之邊 AC 延長至 D，使 $CD=CB$，則

$\angle ABD=90^\circ+\frac{1}{2}(\angle ABC-\angle A)$.

6. $\triangle ABC$ 之高 AD，分角線 AE，而 $AC>AB$，

求證：$\angle DAE=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$.

命題二十三　定理

87. 二三角形若有二雙角彼此相等，又一雙對應對邊相等，則二形全等.

假設： $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$AB=A'B'$.

求證： $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

證明：

敍述	理由
1. $\angle B=\angle B'$.	1. 假設.
2. $\angle C=\angle C'$.	2. 假設.
3. $\therefore\angle A=\angle A'$.	3. 二三角形有二雙角相等，則第三雙角亦等.
4. $AB=A'B'$.	4. 假設.
5. $\therefore\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.	5. $a.s.a.=a.s.a.$

附註一. 全等形的對應邊及對應角，常以相同記號表示. 如本定理的圖.

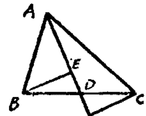
附註二　本定理的簡寫符號為 $a.a.s.=a.a.s.$

88. 系一　二個直角三角形的斜邊及一銳角，彼此相等，則二形全等.

89. 系二　二個直角三角形若有一雙直角邊及一雙對應銳角彼此相等,則二形全等.

習題十六

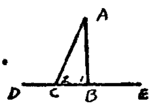
1. 等腰三角形兩腰上之高相等.
2. 從等腰三角形底的中點.所作二腰上的垂線必相等.
3. 全等三角形的對應高相等.
4. AD 為 $\triangle ABC$ 的中線, BE 及 CF 皆 $\perp AD$,
   求證: $BE=CF$.



(4)

命題二十四　定理

90. 自直綫外一點祇能作一直線,垂直於第一直線.



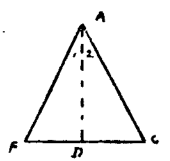
假設: 直線 DE 外一點 A, $AB\perp DE$.
　AC 為自 A 點至 DE 的任意另一直線.

求證; AC 不$\perp$於 DE.

證明:

敍　述	理　由
1. $AB\perp DE$.	1. 假設.
2. $\angle 1 = rt.\angle$.	2. 垂直定義.
3. $\angle 2$ 非 $rt.\angle$.	3. $\triangle$內祇有一直角.
4. $\therefore AC$ 不 $\perp DE$.	4. 垂直定義.

命題二十五　定理



91. 若三角形的二角相等,則其對邊亦相等,而三角形為等腰.

假設: $\triangle ABC$, $\angle B=\angle C$

求證： $AB=AC$

證明：

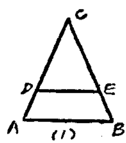
敍述	理由
1. 作 AD 平分 $\angle A$。	1. 已有作法。
2. $\angle 1=\angle 2$。	2. 作圖。
3. $\angle B=\angle C$。	3. 假設。
4. $AD=AD$.	4. 恆等。
5. $\triangle ABD\cong\triangle ACD$。	5. $a.\ a.\ s.=a.\ a.\ s.$
6. $\therefore AB=AC$。	6. 對應部分。

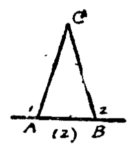
附註： 本定理爲命題三的逆定理.

92. 系　等角三角形是等邊三角形

習題十七

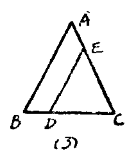
1. 若 $AC=BC$, $DE \parallel AB$
則 $CD=CE$

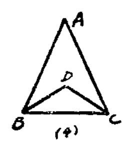




2. 設 $\angle 1=\angle 2$
求證：$AC=CB$

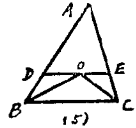
3. 設 $AB=AC$, $DE \parallel AB$
求證：$DE=CE$





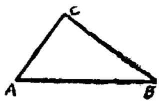
4. 等腰三角形二底角的二等分線，與底邊成另一等腰三角形。

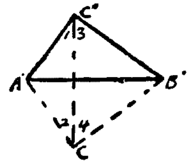
5. 在 $\triangle ABC$ 內，兩底角的分角線，BO, CO 相交於 O，過 O 引 DE 平行 BC，與二邊交於 D 及 E，
試證：$DE=BD+CE$



命題二十六　定理

93. 二個直角三角形，若各有斜邊及一直角邊，彼此相等，則二形全等.





假設： 直角 $\triangle ABC$ 及直角 $\triangle A'B'C'$，$\angle C$ 及 $\angle C'$ 爲直角.
$AB=A'B'$，$AC=A'C'$.

求證： $rt.\triangle ABC\cong rt.\triangle A'B'C'$.

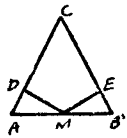
證明：

敍　述	理　由
1. 移$\triangle ABC$至$\triangle A'B'C'$之旁，使 AB 與其等量 $A'B'$ 重合，且 C 與 C' 在 AB 異側.	1. 移形公理.
2. 聯 CC'.	2. 二點定一直線.
3. $AC=A'C'$.	3. 假設.
4. $\therefore A'C'=A'C$.	4. 替代.
5. $\angle 1=\angle 2$.	5. 等腰△底角相等.
6. $\angle C'=\angle C$.	6. 直角均等.
7. $\angle C'-\angle 1=\angle C-\angle 2$.	7. 等減.
8. $\angle 3=\angle 4$.	8. 替代.
9. $B'C'=B'C$.	9. △二角相等，則對邊亦等.
10. $\triangle A'B'C'\cong\triangle A'B'C$.	10. $S.S.S.=S.S.S.$
11. $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.	11. 替代.

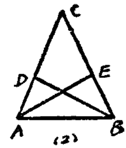
附註： 本定理之簡寫爲（斜邊，一腰＝斜邊，一腰）

習題十八

1. 自三角形底邊中點到二邊的垂直線相等，則三角形為等腰.



(1)

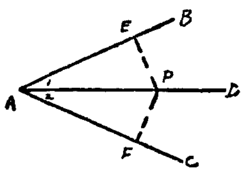


(2)

2. 若三角形的二高相等，則三角形為等腰.
3. 等腰三角形等腰上的高，相交而與底邊成另一等腰三角形.

命題二十七　定理

94. 一角的平分線上任一點，與角的二邊等距.



假設：$\angle BAC$ 的分角線 AD 上一點 P.

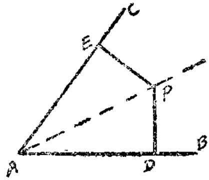
求證；P 與 AB, AC 等距.

證明：

敍　述	理　由
1. 作 $PE\perp AB$, $PF\perp AC$	1. 已有作法.
2. $AP=AP$.	2. 同量.
3. $\angle 1=\angle 2$.	3. AD 為分角線.
4. $\angle E=\angle F=90°$.	4. 直角皆等.
5. $\triangle AEP\cong\triangle AFP$.	5. $a.a.s.=a.a.s.$
6. $PE=PF$.	6. 對應邊.
7. $\therefore P$ 與 AB, AC 等距.	7. 等距定義.

命題二十八　定理

95. 一點與一角的二邊等距,則此點在此角的分角線上.



假設: $\angle BAC$, 點 P。$PE \perp AC$, $PD \perp AB$, 而 $PE=PD$.

求證: P 點在 $\angle A$ 的分角線上.

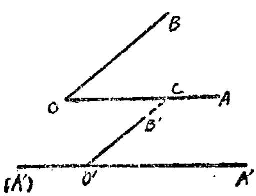
證明:

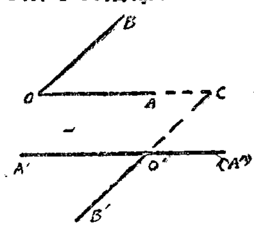
敘述	理由
1. 聯 PA。	1. 二點決定直線.
2. $PE=PD$。	2. 假設.
3. $AP=AP$.	3. 恆等.
4. $rt.\triangle APE \cong rt.\triangle APD$.	4. (斜邊一腰＝斜邊一腰).
5. $\therefore \angle PAE=\angle PAD$.	5. 對應角。
6. $\therefore PA$ 為 $\angle A$ 的分角線.	6. 定義.
7. 故 P 在 $\angle A$ 的分角線上.	7. 一角祗有一分角線.

附註: 本定理爲命題二十七的逆定理.

命題二十九　定理

96. 二角之邊兩兩平行,則二角相等或相補.





假設: $\angle AOB$ 及 $\angle A'O'B'$; $AO /\!/ A'O'$, $BO /\!/ B'O'$, $A'O'(A')$ 爲直線.

求證: $\angle AOB = \angle A'O'B'$

$\angle AOB + \angle(A')O'B' = 180°$.

證明:

敍述	理由
1. $AO /\!/ A'O'$.	1. 設.
2. $\therefore AO$ 與 $B'O'$ 不平行.	2. 二相交直線,不能皆平行於第三線.
3. 延長 OA 及 $O'B'$ 使相交於 C.	3. 直線可以延長,不平行線必相交.
4. $\angle AOB = \angle C$.	4. 平行線的內錯角.
5. $\angle C = \angle A'O'B'$.	5. 平行線的內錯角或同位角.
6. $\therefore \angle AOB = \angle A'O'B'$.	6. 等於同量.
7. $\angle A'O'B' + \angle(A')O'B' = 180°$.	7. 平角定義.
8. $\therefore \angle AOB + \angle(A')O'B' = 180°$.	8. 替代

注意: 若二角之左邊與左邊平行,右邊與右邊平行,則二角等,若二角之左邊與右邊平行右邊與左邊平行,則二角相補.

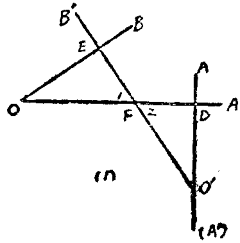
命題三十 定理

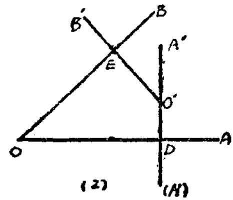
97. 二角之邊兩兩垂直,則二角相等或相補.

假設: $\angle AOB$ 及 $\angle A'O'B'$; $AO \perp A'O'$, $BO \perp B'O'$ $A'O'(A')$ 爲直線.

求證: $\angle AOB = \angle A'O'B'$

$\angle AOB+\angle(A')O'B'=180^\circ$.





證明：

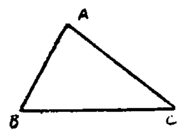
敘　述	理　由
1. 圖(1)內在 $\triangle OEF$ 及 $\triangle O'FD$ 內，$\angle 1=\angle 2$.	1. 對頂角.
2. $\angle OEF=\angle O'DF=90^\circ$.	2. 直角皆等.
3. $\therefore \angle AOB=\angle A'O'B'$.	3. 二△內二雙角等，則第三雙角等。
4. $\angle A'O'B'+\angle(A')O'B'=180^\circ$.	4. $A'O(A')$ 爲直線.
5. $\therefore \angle AOB+\angle(A')O'B'=180^\circ$.	5. 代入.
6. 圖(2)內，$ODO'E$ 爲四邊形.	6. 四邊形定義.
7. $\angle AOB+\angle ODO'+\angle(A')O'B'+\angle O'EO=360^\circ$.	7. 四邊形四角之和$=360^\circ$.
8. $\angle ODO'=\angle O'EO=90^\circ$	8. $AO\perp A'O'$, $BO\perp B'O'$.
9. $\therefore \angle AOB+90^\circ+\angle(A')O'B'+90^\circ=360^\circ$.	9. 代入.

10. $\therefore \angle AOB + (A')O'B' = 180°$.	10. 等減。
11. 但 $\angle A'O'B' + \angle(A')O'B' = 180°$.	11. $A'O'(A')$ 爲直線。
12. $\therefore \angle AOB = \angle A'O'B'$。	12 同角之補角相等。

注意：若二角之左邊與左邊垂直，右邊與右邊垂直，則二角相等．若二角之左邊與右邊垂直，右邊與左邊垂直，則二角相補．

命題三十一　定理

98. 三角形的兩邊的和大於第三邊；兩邊的差小於第三邊。



假設：$\triangle ABC$.

求證：$AC + BC > AB$

$AB - AC < BC$.

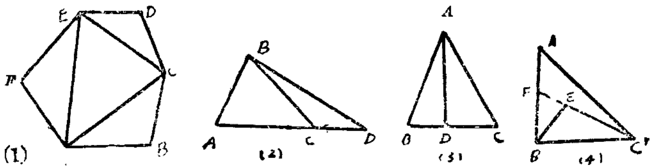
證明：

敍述	理由
1. $AC + BC > AB$.	1. 二點間直線爲最短．
2. 各減 AC，得 $BC > AB - AC$.	2. 自不等量減去等量，大者仍大．
3. 即 $AB - AC < BC$。	3. 與(2)意義相同．

習題十九

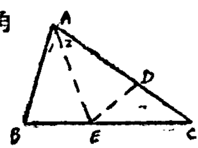
1. 試證多邊形 $ABCDEF$ 的周圍，大於 $\triangle ACE$ 的周圍．
2. 在 $\triangle ABC$ 中，$AC = BC$，又 AC 延長線上一點 D 與 B 聯結；則 $DA > DB$。
3. 在 $\triangle ABC$ 的 BC 邊上，取任意點 D，則 $AB + BC > AD + DC$.

4. 在$\triangle ABC$中的任意點E，聯EB和EC，則
$AB+AC>EB+EC$.



5. 三角形內任一點與三頂之聯線之和，必大於三邊之和之半.
6. 三角形內任一點與三頂點聯線之和，必小於三邊之和。
(用第4題)

命題三十二　定理



99. 三角形的二邊不等，則其所對的角亦不等，邊大則對角亦大.

假設：$\triangle ABC$，$AC>AB$.

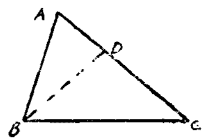
求證：$\angle B>\angle C$.

證明：

敘述	理由
1. 於AC上截取$AD=AB$則D在AC之間.	1. $AC>AB$.
2. 作AE平分$\angle A$，交BC於E，聯DE.	2. 已有作法.
3. $AB=AD$.	3. 作圖.
4. $\angle 1=\angle 2$.	4. 作圖.
5. $AE=AE$.	5. 恆等.

6. $\triangle ABE \cong \triangle ADE$.	6. $S.A.S.=S.A.S.$
7. $\angle B=\angle ADE$。	7. 對應角.
8. 但 $\angle ADE>\angle C$.	8. △之外角>不相鄰之內角.
9. $\therefore \angle B>\angle C$.	9. 代入,

命題三十三　定理



100. 三角形的二角不等,則其所對的邊亦不等,角大則對邊亦大.

假設: $\triangle ABC$, $\angle B>\angle C$.

求證: $AC>AB$.

證明:

敘　述	理　由
1. 作 BD 使 $\angle CBD=\angle C$ 則 BD 在 AB 及 BC 之間.	1. $\angle B>\angle C$.
2. $BD=DC$.	2. 等角之對邊亦等.
3. $AD+BD>AB$.	3. △二邊之和>第三邊.
4. $\therefore AD+DC>AB$.	4. 代入.
5. $AC>AB$.	5. 代入.

附註: 本定理爲定理三十二的逆定理.

101. 系　從線外一點到線上各點的聯線,以垂線爲最短.

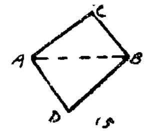
習題二十

1. 等腰三角形 ABC, $AB=AC$, 延長 AC 至 D, 則 $\angle ABD>\angle ADB$.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB>AC$, $\angle A=60°$. 試證 $\angle C$ 爲三角形的

最大角.

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, AB 上一點 D,
求證: $DC>DB$.



4. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC>BC$;
若 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的二等分線
相遇於 D, 則 $AD>BD$.

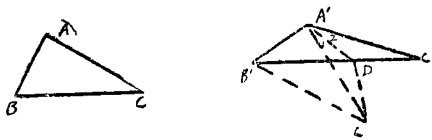
5. $AC>BC$, $AD\perp AC$, $DB\perp BC$, 試證 $BD>AD$.

6. 三角形三高的和小於三角形的周圍.

7. 設等邊 $\triangle ABC$ 的一邊 AC 延長到 D 則 $AD>BD>AB$.

命題三十四　定理

102. 兩個三角形有兩邊彼此各各相等, 而夾角不等, 則第三邊不等, 夾角大的第三邊亦大.



假設: $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的 $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\angle A'>\angle A$.

求證: $B'C'>BC$.

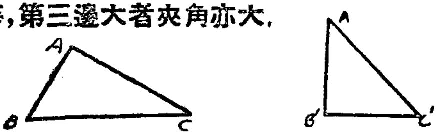
證明:

敘述	理由
1. 移 $\triangle ABC$ 至 $\triangle A'B'C'$ 上, 使 AB 與其等量 $A'B'$ 重合, C 與 C' 在 $A'B'$ 之同側.	1. 移形公理.
2. 則 AC 落在 $A'C'$ 和 $A'B'$ 之間如 $A'C$.	2. 假設 $\angle A'>\angle A$.

3. 作 $A'D$ 平分 $\angle CA'C'$ 交 $B'C'$ 於 D.	3. 分角線作法.
4. 聯 DC.	4. 定線公理.
5. $A'C=A'C'$.	5. 假設.
6. $\angle 1=\angle 2$.	6. $A'D$ 爲分角線.
7. $AD=AD$.	7. 恆等.
8. $\triangle CA'D\cong\triangle C'A'D$.	8. $S.A.S.=S.A.S.$
9. $DC=DC'$.	9. 對應邊.
10. $B'D+DC>B'C$.	10. 三角形二邊之和大於第三邊.
11. $B'D+DC'>B'C$.	11. 代入.
12. $\therefore B'C'>B'C$.	12. 代入.
13. $\therefore B'C'>BC$.	13. 代入.

命題三十五 定理

103. 兩個三角形,有兩邊彼此各各相等,而第三邊不等,則其夾角亦不等,第三邊大者夾角亦大.



假設: $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的 $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $BC>B'C'$.

求證: $\angle A>\angle A$.

證明:

敍述	理由
1. 若 $\angle A<\angle A'$.	1. 臨時假定.
2. 則 $BC<B'C'$.	2. 二△有二邊彼此各各相等,其夾角大者第三邊亦大.

3. 與假設不合.	3. 假設 $BC>B'C'$。
4. 若 $\angle A=\angle A'$.	4. 臨時假定。
5. 則$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.	5. s. a. s.＝s. a. s.
6. $\therefore BC=B'C'$.	6. 對應邊.
7. 與假設不合.	7. 假設 $BC>B'C'$.
8. $\therefore \angle A>\angle A'$.	8. 除以上二種臨時假定外，祇有此種情形。

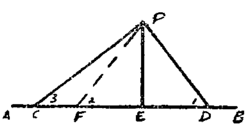
附註: 本定理爲定理三十四的逆定理.

習題二十一

1. 設 AD 是 $\triangle ABC$ 的一中線,若 $\angle ADB$ 是銳角，證明 $AC>AB$, $\angle B>\angle C$。
2. 設 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=\angle B$，又在 AB 上取一點 D，使 $AD>DB$，則 $\angle ACD>\angle DCB$。
3. 於 $\triangle ABC$ 的兩邊 AB, AC 上，取 D, E 二點，使 BD 等於 CE，若 $BE>CD$，試證 $AB>AC$.

命題三十六 定理

104. 若自一已知直線的垂線上的一點，作此線的二斜線，其交點與垂足的距離較大的，則其線必較長.



假設: $PE\perp AB$ 於 E，$CE>ED$.

求證: $PC>PD$.

證明:

敘述	理由
1. 在 CE 上取 $EF=ED$ 則 F 在 C,E 之間.	1. $CE>DE$.
2. 聯 PF.	2. 二點間得引一直線.
3. $PF=PD$.	3. PE 爲 FD 的垂直平分線.
4. $\angle 1=\angle 2$.	4. 等腰△的底角相等.
5. $\angle 2>\angle 3$.	5. △的外角大於其不相鄰之內角.
6. $\angle 1>\angle 3$.	6. 代入.
7. $\therefore PC>PD$.	7. △的兩角不等, 則對大角之邊大.

習題二十二

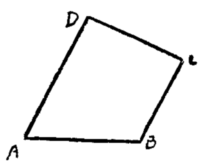
1. 自一直線的垂線上任一點, 所作此線的二斜線, 較長斜線的足距垂足較遠.(卽命題三十五的逆定理).

(提示: 用歸謬法).

105. 四邊形 四邊的多邊形叫做四邊形.

四邊形有四邊四角四頂, 相鄰的邊, 角, 頂, 叫做鄰邊, 鄰角與鄰頂, 不相鄰的叫對邊, 角對與對頂, 對頂的聯線叫做對角線.

四邊形的記號和記法: 四邊形的記號爲▱, 以四頂的字母或相對二字稱之, 如▱$ABCD$ 或▱AC.



106. 平行四邊形 四邊形二雙對邊兩兩平行的叫做**平行四邊形**.

平行四邊形的任意一邊可以當底，底與其對邊間的垂直距離叫**高**.

平行四邊形的記號為▱.

菱形 平行四邊行的四邊皆相等的叫做**菱形**.

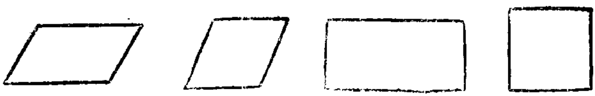
菱形的記號為◇。

矩形 平行四邊形的四角都是直角的叫做**矩形**。

矩形的記號為▭.

正方形 平行四邊形的四邊相等，且四角都是直角的叫做**正方形**，正方形是菱形又是矩形.

正方形的記號為□.

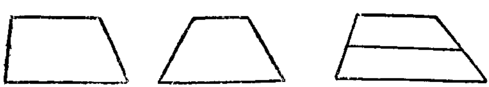


平形四邊形　菱形　矩形　正方形

107. 梯形 四邊形一雙對邊平行，而另一雙對邊不平行的，叫做**梯形**.

梯形的平行二邊叫做**底**分稱**上底**與**下底**；二底間的垂直距離叫做**高**，梯形的不平行二邊叫做**腰**，二腰相等的梯形叫做**等腰梯形**. 二腰的中點的聯線叫做梯形的**中線**.

梯形的記號為⏢。

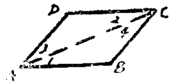


梯形　等腰梯形　梯形與中線

命題三十七 定理

108. 平行四邊形的對邊與對角皆相等.

假設: ▱$ABCD$.



求證: $AB=CD$, $AD=BC$, $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$.

證明:

敘述	理由
1. 聯 AC.	1. 二點決定一直線.
2. $AB /\!/ CD$, $AD /\!/ BC$.	2. ▱定義.
3. $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$.	3. 平行線的內錯角.
4. $AC=AC$.	4. 同量恆等.
5. $\triangle ABC\cong\triangle ADC$.	5. $a.s.a.=a.s.a.$
6. $\therefore AB=CD$. $AD=BC$. $\angle D=\angle B$.	6. 對應部分.
7. $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$.	7. 等加公理.
8. $\therefore \angle A=\angle C$.	8. 代入.

109. 系一　平行四邊形被一對角線分成二全等三角形.

110. 系二　夾在平行直線間的平行線分相等.

111. 系三　二平行線處處等距.

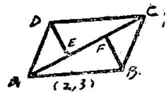
112. 系四　平行四邊形的隣角相補.

113. 系五　平行四邊形中有一角是直角,便是矩形.

習題二十三

1. 若平行四邊形的兩鄰邊相等,則此形必為菱形.
2. 假設: $ABCD$ 為▱, $DE\perp AC$, $BF\perp AC$.

求證：$DE=FB$.



3. 假設：▱$ABCD$, $AE=FC$.

求證：$DE=BF$.

4. ▱$ABCD$ 中，作 $BE\perp AD$, $DF\perp BC$. 證明：$BE=DF$.

5. 平行四邊形的鄰角的分角線互相垂直.

命題三十八　定理

114. 若四邊形的二雙對邊相等，則四邊形爲平行四邊形.

假設：▱$ABCD$, $AB=CD$, $AD=BC$.

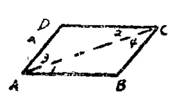
求證：$ABCD$ 爲▱.

證明：

敍述	理由
1. 聯 AC.	1. 二點決定一直線.
2. $AB=CD$, $AD=BC$.	2. 假設.
3. $AC=AC$.	3. 同量恆等.
4. $\triangle ABC\cong\triangle ADC$.	4. s. s. s.=s. s. s.
5. $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$.	5. 對應角.
6. $\therefore AB/\!/CD$, $AD/\!/BC$.	6. 內錯角相等.
7. 故 $ABCD$ 爲▱.	7. ▱定義.

命題三十九　定理

115. 若四邊形的一雙對邊相等且平行，則另一雙對邊亦相等且平行，而四邊形爲平行四邊形.



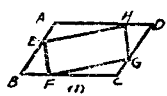
假設：▱$ABCD$, $AB=CD$, $AB/\!/CD$.

求證：$AD=BC$, $AD/\!/BC$, $ABCD$ 爲▱.

證明:

敍述	理由
1. 聯 AC.	1. 二點決定一直線.
2. $AB /\!/ DC$.	2. 假設.
3. $\angle 1=\angle 2$.	3. 平行線的內錯角.
4. $AB=CD$.	4. 假設.
5. $AC=AC$.	5. 恆等.
6. $\triangle ABC\cong\triangle ADC$.	6. $s.a.s.=s.a.s.$
7. $\therefore AD=BC$, $\angle 3=\angle 4$.	7. 對應部分.
8. $\therefore AD /\!/ BC$.	8. 內錯角相等.
9. 故 $ABCD$ 爲▱.	9. ▱定義.

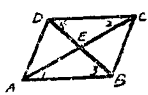
習題二十四



1. 在▱$ABCD$四邊上，順次取 $AE=CG$, $BF=DH$, 證明: $EFGH$ 爲▱.
2. 在 AB 的兩側作▱$ABCD$ 及▱$ABFE$, 則 $CDEF$ 爲▱.

命題四十 定理

116. 平行四邊形的對角線互相等分.



假設: ▱$ABCD$, 對角線 AC, BD 相交於 E.

求證: $AE=EC$, $BE=ED$.

證明:

敍　述	理　由
1. $AB=CD$.	1. ▱對邊相等。
2. $AB\parallel CD$.	2. ▱定義.
3. $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$.	3. 平行線的內錯角.
4. $\therefore \triangle ABE\cong\triangle CDE$.	4. a. s. a.=a. s. a.
5. $\therefore AE=EC$. $BE=ED$.	5. 對應邊.

命題四十一　定理

117. 若四邊形的對角線互相等分，則四邊形爲平行四邊形.

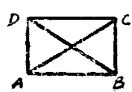
如上圖先證 $\triangle ABE\cong\triangle CDE$ 得 $\angle 1=\angle 2$, $\therefore AB \mathrel{\underline{\parallel}} CD$. (學者可自證之)

習題二十五

1. ▱$ABCD$ 中，對角線 AC, BD 交於 O, 若 E 與 F 爲 AO 及 OC 的中點，則 $DEBF$ 爲▱.
2. 二等分平行四邊各對角線的線份，而順次聯結其中點，必另成一平行四邊形.
3. 非菱形的平行四邊形的對角分角線互相平行.

命題四十二　定理

118. 矩形的對角線相等.



假設: ▭$ABCD$, 對角線 AC, BD.

求證: $AC=BD$.

證明：

敘述	理由
1. $AD=BC$.	1. 平行四邊形對邊相等.
2. $AB=AB$.	2. 同量恆等.
3. $\angle A=\angle B=90°$.	3. 矩形定義.
4. $\triangle ABD\cong\triangle BAC$.	4. s. a. s.＝s. a. s.
5. $\therefore AC=BD$.	5. 對應邊.

命題四十三　定理

119. 若平行四邊形的二對角線相等,則此形爲矩形.

如上圖先證 $\triangle ABD\cong\triangle ABC$ 得 $\angle A=\angle B$，但平行四邊形的鄰角相補，$\therefore \angle A=\angle B=90°$.

(學者可自證之)

習題二十六

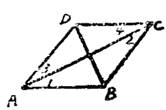
1. 非菱形的平行四邊形各角的分角線,圍成一矩形.

命題四十四　定理

120. 菱形的對角線平分各內角,且互相垂直.

假設： ◇$ABCD$，對角線 AC 及 BD.

求證： AC，BD 平分各內角，且
$AC\perp BD$.



證明：

敘述	理由
1. $AB=BC$.	1. 菱形的四邊相等.
2. $\angle 1=\angle 2$.	2. 等腰△底角相等.
3. $\angle 2=\angle 3$.	3. 平行線的內錯角.
4. $\therefore \angle 1=\angle 3$.	4. 等於同量.

5. 故 AC 平分 $\angle A$。	5. 平分定義。
6. 同理 AC，BD 平分其他各角。	6. 同上。
7. $\triangle ABD$ 爲等腰$\triangle$。	7. $AB=AD$。
8. $\therefore AC\perp BD$。	8. 等腰$\triangle$頂角分角線爲底的中垂線。

命題四十五　定理

121. 若平行四邊形的對角線互相垂直，則此形爲菱形。

如上圖 $AC\perp BD$，且 AC，BD 互相等分，

$$\therefore AB=AD=BC=CD.$$

（學者可自證之）

122. 系一　正方形的對角線相等，且互相垂直等分，並平分各頂角，而與各邊成 45° 角。

123. 系二　若二直線互相垂直等分，則其四端的聯線成一菱形。

124. 系三　若四邊形的對角線平分各頂角，則此形爲菱形。

125. 系四　若二直線相等且互相垂直等分，則其四端聯成一正方形。

命題四十六　定理

126. 二平行四邊形，如各有兩邊及夾角彼此對應相等，則二形全等。

假設: ▱$ABCD$ 及 ▱$A'B'C'D'$ 中 $AB=A'B'$, $\angle A=\angle A'$,
$AD=A'D'$.

求證: ▱$ABCD\cong$▱$A'B'C'D'$.

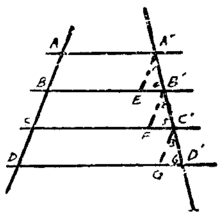
證明: (用叠合法,學者試自證之)

127. 系一　等底等高的二矩形必全等.

128. 系二　二正方形各有一邊彼此相等,則二形全等.

命題四十七　定理

129. 數平行線在一截線上截取線分相等,則在他截線上截取之線分亦相等.



假設: $AA'/\!/BB'/\!/CC'/\!/DD'$, AD 及 $A'D'$ 爲截線,
$AB=BC=CD$.

求證: $A'B'=B'C'=C'D'$.

證明:

敘述	理由
1. 作 $A'E$, $B'F$ 及 $C'G/\!/AD$.	1. 平行線作法.
2. $A'E/\!/B'F/\!/C'G$.	2. 平行於同一直線的直線互相平行.
3. $\angle 1=\angle 2=\angle 3$, $\angle 4=\angle 5=\angle 6$.	3. 平行線的同位角相等.
4. $ABEA'$, $BCFB'$ 及 $CDGC'$ 是▱.	4. 平行四邊形定義.

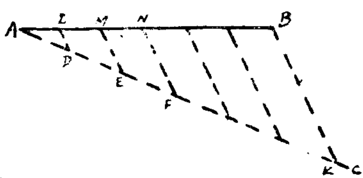
5. $A'E=AB, B'F=BC, C'G=CD$.	5. 平行四邊形對邊相等.
6. $AB=BC=CD$.	6. 假設.
7. $A'E=B'F=C'G$.	7. 等於等量.
8. $\triangle A'B'E \cong \triangle B'C'F \cong \triangle C'D'G$.	8. $a.a.s.=a.a.s.$
9. $\therefore A'B'=B'C'=C'D'$.	9. 全等形的對應邊相等.

130. 系一　一直線平行於三角形的一邊，平分另一邊，則必平分第三邊.

131. 系二　一直線平行於梯形的底，若平分其中一腰，則必平分其另一腰.

命題四十八　作圖

132. 求將一直線數等分.



已知： 直線 AB.

求作： 將 AB 分做 n 等分.

作法： 1. 過 A 作線 AC，與 AB 相交於 A.

2. 在 AC 上任意取等長線分 $AD=DE=EF\cdots\cdots$ 共 n 段至 k.

3. 聯 BK。

4. 從 AC 的各分點作 BK 的平行線，把 AB 分做 n 等分於 $L, M, N\cdots\cdots$

證明:

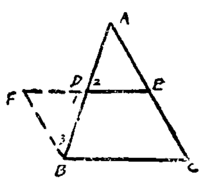
敍述	理由
1. $DL // EM // FN // \cdots\cdots // BK$.	1. 作圖.
2. $AD = DE = EF = \cdots\cdots$	2. 作圖.
3. $\therefore AL = LM = MN = \cdots$	3. 數平行線在一截線上截取之線分相等，則在他線上截取之線分亦等.

習題二十七

1. 在 $\triangle ABC$ 內，過 AC 的中點 D，作 DE 平行於 AB，則必平分其自 C 到 AB 上的中線及高.
2. 在 $\triangle ABC$ 中，過 AC 的中點 D，作直線 DE 平行於 AB，交 BC 於 E，又自 E 作 EF 平行於 AB，交 AB 於 F，則 DE，AF，FB 三線分等長.

命題四十九　定理

133. 三角形二邊中點的聯線，必平行於第三邊，且等於第三邊之半.



假設: $\triangle ABC$，D 及 E 爲 AB 及 AC 的中點.

求證: $DE // BC$. $DE = \frac{1}{2} BC$.

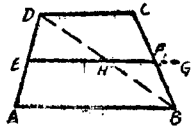
證明：敍述	理由
1. 延長 ED 到 F，使 $DF=ED$.	1. 延線公理。
2. 聯 BF.	2. 定線公理。
3. $DF=ED$.	3. 作圖。
4. $\angle 1=\angle 2$.	4. 對頂角。
5. $BD=AD$.	5. D 爲 AB 的中點。
6. $\triangle BDF\cong\triangle ADE$.	6. $s.a.s.=s.a.s.$
7. $BF=AE$.	7. 對應邊。
8. $AE=CE$.	8. E 爲 AC 的中點。
9. $\therefore BF=CE$.	9. 等於同量。
10. $\angle 3=\angle A$.	10. 對應角。
11. $\therefore BF\parallel CA$.	11. 內錯角相等。
12. $BCEF$ 爲 ▱.	12. 一雙對邊平行且相等。
13. $EF \mathrel{\underline{\parallel}} BC$.	13. 平行四邊形的對邊。
14. 故 $DE\parallel BC$.	14. DE 爲 EF 之一部分。
15. $DE=\frac{1}{2}EF$.	15. 作圖 $DF=ED$.
16. 故 $DE=\frac{1}{2}BC$.	16. 代入。

習題二十八

1. $\triangle ABC$ 之中線 AD, BE 交於 O；則 AO, BO 兩中點之聯線等於 DE.
2. 四邊形二鄰邊中點之聯線必等於且平行於他二邊中點之聯線.

命題五十 定理

134. 梯形的中線,必平行於兩底,且等於兩底之和之半.



假設: ⏢$ABCD$, 中線 EF (即 E 爲 AD 之中點, F 爲 BC 之中點)

求證: $EF /\!/ AB /\!/ DC$,

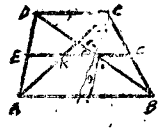
$$EF=\frac{1}{2}(AB+CD)$$

證明:

敘述	理由
1. 過 E 作 AB 之平行線 EG.	1. 有作法.
2. 則 $AB /\!/ CD /\!/ EG$.	2. 二直線同 // 於第三直線,則二線 //.
3. EG 必過 CB 之中點 F.	3. (131).
4. EG 與 EF 重合.	4. 二點決定一直線.
5. 作對角線 DB 交 EF 於 H.	
6. H 爲 DB 之中點.	6. (130).
7. $EH=\frac{1}{2}AB$, $HF=\frac{1}{2}DC$.	7. △二邊中點聯線必等於第三邊之半.
8. $EF=EH+HF$.	8. 全量等於各分量之和.
9. $\therefore EF=\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}DC$ $=\frac{1}{2}(AB+DC)$.	9. 代入.

135. 系 梯形的中線與二對角線相交,交點間的線分等於

二底差之半.



（略證）：

$$EH=\frac{1}{2}AB.$$

$$EK=\frac{1}{2}DC.$$

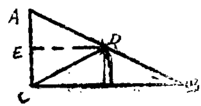
$$KH=EH-EK=\frac{1}{2}(AB-DC).$$

習題二十九

1. 三角形三邊中點的聯線分原三角形成四個全等△.

命題五十一　定理

136. 直角三角形斜邊上的中線，等於斜邊之半.



假設： $rt\triangle ABC$，CD 爲斜邊 AB 上的中線。

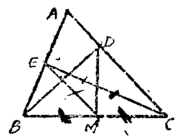
求證： $CD=\frac{1}{2}AB.$

證明：

敍述	理由
1. 過 D 作 $DE\perp AC$.	1. 垂直作法.
2. $DE/\!/CB$.	2. 垂直於同一直線.
3. $AD=DB$.	3. CD 爲中線.
4. $\therefore AE=EC$.	4. 一線//△之一邊，且平分第二邊，必平分第三邊.
5. $DE=DE$.	5. 恆等。
6. $\angle AED=\angle CED$.	6. 直角皆等.
7. $\triangle ADE\cong\triangle CDE$.	7. s. a. s.=s. a. s.
8. $AD=CD$.	8. 對應邊.
9. 但 $AD=DB=\frac{1}{2}AB$.	9. CD 爲中線.
10. $\therefore CD=\frac{1}{2}AB$.	10 代入.

137. 系　直角三角形斜邊的中點，與三頂等距。

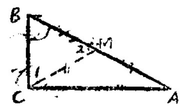
習題三十



1. 若 BD, CE 爲 $\triangle ABC$ 的高. M 爲 BC 的中點. 則 $ME=MD$.
2. 三角形一邊的中點，若與三頂等距，則此三形爲直角三角形.

命題五十二　定理

138. 若直角三角形的二銳角爲 30° 及 60°，則斜邊爲 30° 角對邊的二倍。



假設： $rt\triangle ABC$, AB 爲斜邊, $\angle A=30°$, $\angle B=60°$.

求證： $AB=2BC$.

證明：

敍述	理由
1. 作 AB 上的中線 CM.	1. 有作法.
2. $AM=CM=BM$.	2. 斜邊之中點與三頂等距.
3. $\angle 1=\angle B=60°$.	3. 等腰△的底角相等.
4. $\angle 2=180°-\angle 1-\angle B=60°$.	4. △三角之和爲 180°.
5. $\therefore CB=BM$.	5 △中有二角等則對邊等.
6. 故 $AB=2BM=2CB$.	6. 代入.

習題三十一

1. $\triangle ABC$ 內, $\angle C=90°$, $\angle B=60°$, $CD\perp AB$.
試證： $AB=4BD$.

2. 等腰三角形 ABC 中，$\angle A=\angle B=15°$，$BC=12$．求高 AD 之長．

3. $\square ABCD$ 內，$AB=BC=6$，$\angle A=120°$，$\angle B=60°$，$\angle C=150°$．求 AD 之長．

4. 梯形 $ABCD$ 的上底 $DC=14$，$AB=BC$，$\angle A=90°$，$\angle B=60°$，求 AB 之長．

5. 直角三角形的斜邊若爲一直角邊的二倍，則二銳角爲 $60°$ 及 $30°$．

139．等邊多邊形與等角多邊形 多邊形的各邊相等的，叫做等邊多邊形；多邊形的各角相等的，叫做等角多邊形．

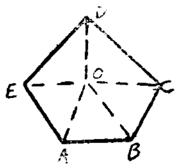
等邊多邊形不一定等角，等角多邊形不一定等邊，如菱形爲等邊不等角之四邊形，矩形爲等角不等邊之四邊形．但三角形則等邊卽等角等角卽等邊．

140．互等邊多邊形與互等角多邊形 二多邊形的各角依次互等的叫做互等邊多邊形，二多邊形的各角依次互等的叫做互等角多邊形．

若二多邊形互等邊且互等角，則二形必全等．(可用疊合法證明)

命題五十三 定理

141．n 邊多邊形的內角之和等於 $(n-2)180°$．



假設: n 邊多邊形 $ABCDE$.

求證: $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\cdots\cdots=(n-2)180°$.

證明:

敍　述	理　由
1. 於多邊形內取一點 O, 聯 OA, OB ······	1. 二點可聯一線.
2. 此諸線分多邊形成 n 個△.	2. 每邊有一△.
3. △三角之和$=180°$.	3. △三角之和$=180°$.
4. n△之各角之和$=n\cdot 180°$.	4. 等倍.
5. 各△頂角之和爲$360°$.	5. 周角.
6. 各△底角之和$=n\cdot180°-360°$.	6. 等減.
7. 多邊形內角之和$=$各△底角之和.	7. 全量等於各分量之和
8. $\therefore \angle A+\angle B+\angle C+\cdots\cdots$ $=n180°-360°$ $=(n-2)180°$.	8. 代入.

142. 系　n 邊等角多邊形之一內角等於$\dfrac{(n-2)180°}{n}$

習題三十二

1. 求下列多邊形之各內角之和:(以度數表之)
   (a) 五邊形.
   (b) 六邊形.
   (c) 十五邊形.

2. 求下列 n 邊多邊形之各內角之和:(以直角數表之)

(a) $n=8$.

(b) $n=12$,

(c) $n=20$.

3. 求下列等角多邊形之每一內角之度數:

(a) 六邊形.

(b) 十邊形.

(c) 七十二邊形.

4. 求下列等角 n 邊形之每一內角等於幾度:

(a) $n=5$.

(b) $n=8$.

(c) $n=24$.

5. 一等角多邊形的內角之和等於 32 直角, 求邊數及每一內角的度數.

6. 一多邊形之各內角皆等於 $172°$, 求邊數及內角之總和.

7. 一等角多邊形的內角之和爲六邊形內角之和的三倍, 求邊數,及每一內角之度數.

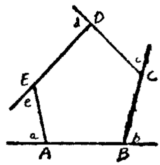
8. 一多邊形之每一內角較一等角八邊形之每一內角大$40°$,求邊數.

命題五十四　定理

143. 於 n 邊多邊形之每一頂上作一外角, 則外角之和等於 $360°$.

假設: n 邊多邊形 $ABCDE$……每一頂作一外角 $\angle a, \angle b, \angle c$……等.

求證: $\angle a+\angle b+\angle c+\cdots\cdots=360°$.



證明:

敘述	理由
1. $\angle A+\angle a=180^\circ$. $\angle B+\angle b=180^\circ$. $\angle C+\angle c=180^\circ$. …………………	1. 全量等於分量之和.
2. 多邊形共有 n 對外角及內角.	2. 每頂有一對.
3. $\angle A+\angle a+\angle B+\angle b+\angle C+\cdots\cdots=n180^\circ$.	3. 等加.
4. $(\angle A+\angle B+\angle C+\cdots\cdots)+(\angle a+\angle b+\angle c+\cdots\cdots)=n180^\circ$.	4. 整理之,加法結合律.
5. $\angle A+\angle B+\angle C+\cdots\cdots=(n-2)180^\circ$.	5. 內角之和$=(n-2)180^\circ$.
6. $\therefore \angle a+\angle b+\angle c+\cdots\cdots=n180^\circ-(n-2)180^\circ=36$.	6. 等減.

144. 系一 n 邊等角多邊形的每一外角等於 $\frac{360^\circ}{n}$.

145. 系二 n 邊等角多邊形的每一內角等於

$$\left(180^\circ-\frac{360^\circ}{n}\right).$$

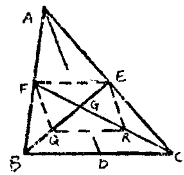
習題三十三

1. 求下列等角 n 邊形的每一外角的度數，再從外角計算每一內角的度數:
   (a) $n=8$.
   (b) $n=12$.
   (c) $n=72$.
2. 求等角多邊形之邊數，若
   (a) 一外角爲 20°.
   (b) 一外角爲 $\frac{1}{4}rt.\angle$.
   (c) 一內角爲 172°.
   (d) 一內角爲 $\frac{5}{3}rt.\angle$.
3. 一等角多邊形的一內角爲外角的二倍，求邊數.
4. 一等角多邊形的一外角爲內角的二倍，求邊數.
5. 一等角多邊形的一內角爲外角的四倍，求邊數.
6. 二等角多邊形邊數的和爲 18，各一外角之和爲 90°，求邊數各若干?
7. 二等角多邊形的邊數差爲二，每一內角之大小差 9°，求邊數各若干?
8. 二等角多邊形之邊數之比爲 $1:2$，各一內角的度數之比爲 $4:5$，求邊數各若干?

143. **共點線**　相交於一點的三直線(或三以上直線)，叫做**共點線**.

命題五十五　定理

147. 三角形的三中線共點，此點至每頂之距離爲此中線之三分之二.（此點叫做三角形的重心）



假設： $\triangle ABC$，中線 AD, BE, CF.

求證： AD, BE, CF 交於一點 G，且

$GA=\frac{2}{3}AD$，$GB=\frac{2}{3}BE$，

$GC=\frac{2}{3}CF$.

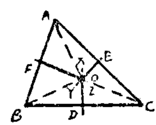
證明：

敘述	理由
1. 令 BE, CF 相交於一點 G.	1. 因 $\angle EBC+\angle BCF<180^\circ$ 故二線不平行.
2. 取 BG, CG 之中點 Q, R.	2. 一線必有一中點.
3. 聯 QR, RE, EF, FQ.	3. 二點決定一線.
4. $FE \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BC$.	4. $\triangle ABC$ 之二邊中點聯線.
5. $QR \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BC$.	5. $\triangle BCG$ 之二邊中點聯線.
6. $\therefore FE \mathrel{\underline{\parallel}} QR$.	6. 平行於同線，等於同量.
7. $QREF$ 爲▱.	7. 二邊相等且平行.
8. $FG=GR$, $QG=GE$.	8. ▱之對角線.
9. $\therefore FG=GR=RC=\frac{1}{3}FC$. $GE=QG=BQ=\frac{1}{3}BE$.	9. 等於同量.

敍述	理由
10. $\therefore GB=\frac{2}{3}BE$, $GC=\frac{2}{3}CF$。	10. 等加。
11. 同理，AD 亦必交 BE 於其 $\frac{2}{3}$ 之分點處。	11. 1—10。
12. 故三線必交於一點 G 且 $AG=\frac{2}{3}AD$。	12. 因 BE 之 $\frac{2}{3}$ 分點處必爲 G 點。

命題五十六　定理

148. 三角形三邊的中垂線共點，此點與三頂等距.（此點叫做三角形的外心）.



假設：$\triangle ABC$，三邊之中垂線 DX，EY，FZ。

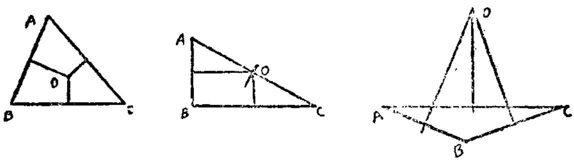
求證：DX，EY，FZ 交於一點 O，且 $OA=OB=OC$。

證明：

敍述	理由
1. DX，FZ 必不平行。	1. 若 $DX // FZ$，則 $BC \perp FZ$，而 $BC // AB$ 矣；
2. 令 DX 與 FZ 相交於 O。	2. 不平行必相交。
3. 聯 OA，OB，OC。	3. 二點決定一線。
4. DX 爲 BC 之中垂線，$\therefore OB=OC$。	4. 中垂線上一點與二端等距。
5. FZ 爲 AB 之中垂線，$\therefore OB=OA$。	5. 同上。

6. $\therefore OA=OB=OC$。	6. 等於同量。
7. $\therefore O$ 在 EY 之上。	7. 與二端等距之點必在中垂線上。
8. $\therefore DX, EY, FZ$, 共點。	

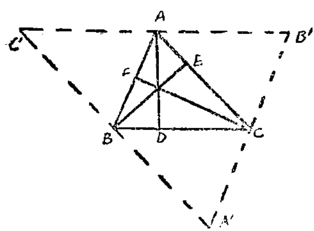
注意： 銳角△的外心在△內．
直角△的外心爲斜邊之中點．
鈍角△的外心在△之外(鈍角對邊之外)．



149．系 與三角形三頂點等距的點祇有一點．

命題五十七 定理

150． 三角形的三高共點．(此點叫做三角形的垂心)



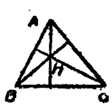
假設： $\triangle ABC$ 中；AD, BE, CF 爲三高。

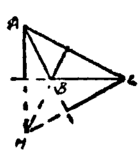
求證： AD, BE, CF 交於一點。

證明:

敍　述	理　由
1. 過 A, B, C 作三線,分別平行於對邊.	1. 已有作法.
2. 此三線相交而成 $\triangle A'B'C'$.	2. 如 AB' 與 CB' 必不平行,因若 $AB' /\!/ CB'$ 則 AB' 與 AB 重合矣.
3. $ABCB'$ 爲▱.	3. 對邊平行.
4. $AB'=BC$.	4. ▱對邊相等.
5. 同理 $AC'=BC$.	5. (3—4).
6. $AC'=AB'$.	6. 等於同量.
7. $AD\perp B'C'$.	7. 一線⊥二平行線之一必⊥於他一線.
8. $\therefore AD$ 爲 $B'C'$ 之中垂線.	8. 定義.
9. 同理 BE, CF 爲 $A'C'$ 及 $A'B'$ 之中垂線,	9. (3—8).
10. $\therefore AD, BE, CF$ 交於一點.	10. △三邊之中垂線交於一點.

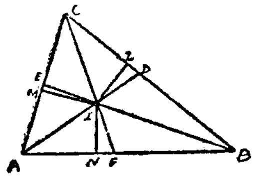
注意: 銳角△的垂心在△內.
直角△的垂心爲直角頂.
鈍角△的垂心在△外.





命題五十八 定理

151. **三角形三內角的分角線共點,此點與三邊等距.(此點叫做三角形的內心)**



假設: $\triangle ABC$, 內角分角線 AD, BE, CF.

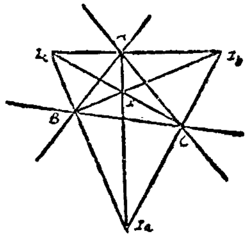
求證: AD, BE, CF 交於一點 I, 且 I 與三邊等距.

證明:

敍述	理由
1. 令 AD 與 BE 相交於 I.	1. 因 $\angle DAB+\angle ABE<180°$ 故 AD, BE 不平行.
2. 作 IL, IM, $IN\perp$ 於三邊.	2. 有作法.
3. 則 $IM=IN$.	3. 分角線上一點與二邊等距.
4. $IN=IL$.	4. 同上.
5. $\therefore IM=IL$.	5. 等於同量.
6. $\therefore I$ 在 CF 上.	6. 與二邊等距之點必在分角線上.
7. $\therefore AD, BE, CF$ 交於一點 I 且 I 與三邊等距.	

152. **系一　三角形的一角內角分角線與他二角的外角分角線三線共點,叫做三角形的傍心.**

一三角形共有三傍心;均與三角形之三邊等距.



153. 系二　與三角形三邊等距之點共四點，一內心及三傍心。

(如圖，內心爲 I，傍心爲 I_a，I_b，I_c)。

154. 共線點　在一直線上之三點，或三點以上之點，叫做共線點。

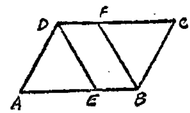
155. 系三　三角形之一頂點，內心及對此頂之傍心，三點共線。

156. 系四　三角形之一頂點，及對他二頂之二傍心，三點共線。

157. 解析證題法　定理的證明，凡能由假設直接逐步推論，至得到結論爲止的叫做綜合證明法。但有時定理比較複雜，不能直接窺知綜合的證法，則往往先從結論研究；欲得結論須先證明何項條件，再研究欲證此項條件，須先證何項條件，如此逐步分析，至一可以直接由假設推得之條件爲止。然後再依此分析，用綜合證法寫出證明，此種研究，叫證題的分析。先分析而再證明的證法，叫做解析證題法或分析證題法，解析證題法，是指研究證題之方法，至證明之格式，則仍須用綜合法寫出。

【例題】

平行四邊形一雙對角的分角線，必互相平行。



假設: ▱$ABCD$, $\angle B$ 及 $\angle D$ 之分角線 BF, DE.

求證: $BF /\!/ DE$.

分析: (1) 欲證 $BF /\!/ DE$, 可以先證:

(a) $DEBF$ 爲▱.

或 (b) $\angle AED=\angle ABF$,

或 (c) $\angle EDF=\angle BFC$.

或 (d) $\angle DEB+\angle EBF=180°$,

或 (e) $\angle EDF+\angle DFB=180°$.

(2) 如於 (a), (b), (c), (d), (e) 五種中選取(a),欲證 $DEBF$ 爲▱,可以先證:

(a) 二雙對邊相等.

或 (b) 一雙對邊相等且平行.

(3) 如於 (a),(b) 二種中選取 (b), 欲證 $DF /\!/ BE$, $DF=BE$, 可以先證 $\triangle ADE \cong \triangle BCF$.

(4) 於是得證法如下:

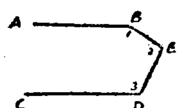
證明:

敍述	理由
1. $AD=BC$.	1. 平行四邊形對邊.
2. $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$.	2. 平行四邊形對角.
3. $\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{2}\angle D$.	3. 等分.
4. $\angle ADE=\angle FBC$.	4. DE, BF 爲分角線.
5. $\therefore \triangle ADE \cong \triangle BCF$.	5. $a.s.a.=a.s.a.$
6. $DE=BF$, $AE=CF$.	6. 對應邊.
7. $AB=DC$.	7. 平行四邊形對邊.

8. $AB-AE=DC-CF$.	8. 等減.
9. $\therefore BE=DF$.	9. 代入.
10. $BE \parallel DF$.	10. 因 $ABCD$ 為▱.
11. $\therefore EBFD$ 為▱.	11. 二邊相等且平行.
12. $\therefore DE \parallel BF$.	12. 平行四邊形對邊.

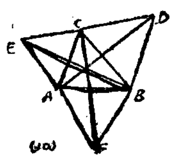
總習題一

1. 二鄰補角的分角線互相垂直.
2. 若二鄰角的分角線互相垂直,則二鄰角互補.
3. 一雙對頂角的分角線,成一直線.
4. 一等腰三角形的一腰過頂點延長一倍,則自終點所作與底的他端之聯線必垂直於底.
5. 若四邊形的對角相等,則四邊形為平行四邊形.
6. 若 $AB \parallel CD$, 則 $\angle 1+\angle 2+\angle 3=360°$.
7. 若 $\angle 1+\angle 2+\angle 3=360°$, 則 $AB \parallel CD$.



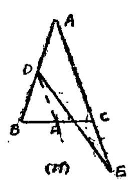
(6,7)

8. 二等腰三角形的頂角及一腰上的高彼此相等,則二形全等.
9. 一六邊形的三雙對邊平行,一雙對邊相等,則他二雙對邊亦相等.
10. 在 $\triangle ABC$ 之三邊上,向外各作等邊 $\triangle ABF$, BCD, CAE, 則 $AD=BE=CF$.



(10)

11. 在等腰三角形的一腰 AB 上取一點 D, 又在另一腰 AC 之延長線上取一點 E, 使 $BD=CE$, 則 DE 被底 BC



(11)

所二等分.

（提示： 作 $DF \parallel AE$）

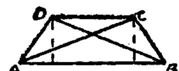
12. 任意四邊形四邊的中點順次聯結，成一平行四邊形.

13. 任意四邊形一雙對邊的中點及二對角線的中點，決定一平行四邊形.

14. 任意四邊形二雙對邊中點的聯線，及二對角線中點的聯線，三線交於一點，且互相平分.

15. 平行四邊形 $ABCD$, AB 之中點為 E, DC 之中點為 F, 則 AF, EC 三等分 BD.

（提示 先證 $AF \parallel EC$）

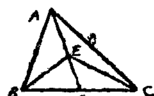


(17, 18)

16. 等腰梯形的底角及對角線均相等.

17. 若梯形之底角相等，則梯形為等腰.

18. 若梯形之對角線相等，則梯形為等腰.

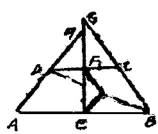


(19)

19. AD 為 $\triangle ABC$ 之中線，E 為 AD 上之一點，若 $\angle B > \angle C$，則 $\angle EBD > \angle ECD$.

(20)

20. 四邊形 $ABCD$，若 $AB = CD$，$\angle ADC > \angle BAD$，則 $\angle ABC > \angle BCD$.



(21)

21. 四邊形 $ABCD$，$AD = BC$，E，F 為 AB，CD 之中點. BC 與 AD 之延長線與 EF 之延長線交於 G 及 H，求證：$\angle AHE = \angle BGE$.

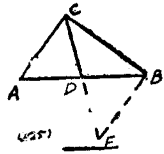
（提示： 取對角線 BD 之中點並與 E, F 聯結）

22. $\triangle ABC$ 中 $AB > BC$，角 B 的分角線 BD 交 AC 於，D，則 $AD > DC$.

23. 四邊形之內角分角線圍成之四邊形之對角互補.

24. 四邊形之外角分角線延長而圍成之四邊形之對角互補.

25. 三角形之一中線小於其二夾邊之和之半.



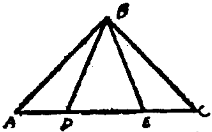
(25)

26. 三角形之三中線之和小於三邊之和.

27. 三角形之三中線之和大於三邊之和之$\frac{3}{4}$.

28. 若三角形之二邊不等,則第三邊上之中線與大邊所夾之角,小於其與小邊所夾之角.

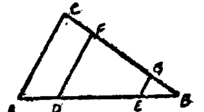
29. 在等腰$\triangle ABC$的底邊AC上取二點D, E使$AE=AB$; $CD=BC$,求證: $\angle DBE=\angle A$.



(29)

30. 自等腰三角形底邊上一點作二腰之平行線,二線之和等於一腰.

31. 自三角形ABC底邊AB上取二點D及E使$AD=EB$,作DF, EG // AC,則$DF+EG=AC$.



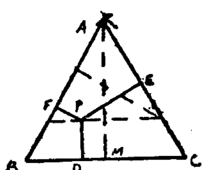
(31)

32. 自等腰三角形底邊上一點,作二腰之垂線,二垂線之和等於一腰上之高,故為定值.

33. 自等腰三角形底邊延長線上一點,作二腰之垂線,則二垂線之差等於一腰上之高,故為定值.

34. 自等邊三角形內任一點作三邊之垂線則三垂線之和為定值.

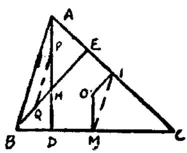
(提示: 等於一邊上之高)



(34)

35. 三角形垂心至一頂之距離,等於外心至此頂對邊之垂線之二倍.

(提示: $QP \perp MN$, $\triangle PQH \cong \triangle OMN$)



(35)

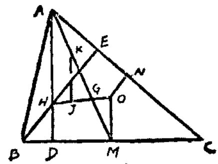
36. 三角形垂心與外心之聯線交中線

於其距底較近之三等分處.

(提示: 取 AG, HG 之中點 K, J 則

$KJ=\frac{1}{2}AH=MO$.

$\triangle KJG\cong\triangle OMG$.



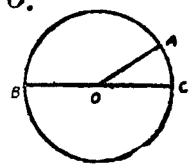
(36, 37)

37. 三角形垂心 H, 外心 O, 及重心 G 在一直線上, 且 $HG=2GO$.

第二編　圓

158. 圓　在一平面內首尾相接的封閉曲線,而曲線上的各點皆與中央一點等距的, 叫做圓.

與圓上各點等距的中央一點,叫圓心, 如 O.



自圓心到圓上任意點的聯線, 叫做半徑,如 OA.

過圓心而二端止於圓上的直線, 叫做直徑,如 BC.

構成圓的封閉曲線的全長叫做圓周.

構成圓的曲線的一部分叫做圓弧或弧, 等於圓周的一半的圓弧叫半圓, 大於半圓的圓弧叫優弧, 小於半圓的圓弧叫劣弧.

圓的表示,記號,和記法　圓的記號爲 ⊙, 以圓規在代表平面的紙張或黑板上所作的封閉曲線表示之,以圓心的點,或圓周上任意三點的名稱記之,如 $\odot O$, 或 $\odot CAB$.

圓弧的記號和記法　圓弧的記號爲 ⌒, 以圓弧二端的二點記之,如 $\overset{\frown}{AB}$. 圓弧普通指劣弧而言,若要指優弧時,須說明優弧或以三點記之,如優弧 $\overset{\frown}{ACB}$.

159. 等圓　半徑相等的圓叫做等圓.

160. 同心圓　圓心相同的圓叫做同心圓.

161. 系一　同圓或等圓的半徑相等,同圓或等圓的直徑相等.

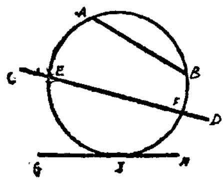
162. 系二　一點與圓心的距離小於半徑,則在圓內; 等於半徑,則在圓周上;大於半徑,則在圓外.

163。系三 等圓可以重合，同圓或等圓的相等圓弧，可以重合。

以上三系，皆可由定義及公理證明之。

164。弦 圓上二點的聯線，叫做弦。二點間的弧叫做弦的對弧。

如圖：AB 爲弦，$\overparen{AB}$ 爲對弧。



165. 割線 交圓於二點，而一端或二端伸出圓外的直線，叫做割線。

自圓外一點至圓的割線之長，指自此點到與圓第二交點的距離；自圓外一點與圓第一交點的距離，叫做割線的圓外線分。

如圖：CD 爲割線，自 C 至圓的割線之長爲 CF，CE 爲圓外線分。

166. 切線 與圓相遇於一點，而雖延長亦不再相交的直線叫做圓的切線，公共點叫做切點。

自圓外一點至圓的切線之長，指自此點到切點的距離。

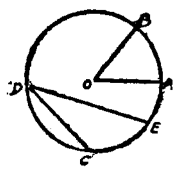
如圖：GH 爲切線，I 爲切點，自 G 至圓的切線之長爲 GI。

167. 圓心角 二半徑在圓心所成的角叫做圓心角。

如圖：$\angle AOB$ 是圓心角，$\overparen{AB}$ 叫做 $\angle AOB$ 所截的弧。

168. 圓周角 二弦相交於圓周上一點所成的角叫做圓周角。

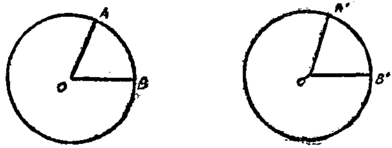
如圖：$\angle CDE$ 是圓周角，$\overparen{CE}$ 叫做 $\angle CDE$ 所截的弧。



命題一 定理

169。在同圓或等圓中，等圓心角所截的弧相等，等弧所對

的圓心角相等。



I. 假設：等⊙O及O'中，$\angle O=\angle O'$。

求證：$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$。

證明：

敘述	理由
1. 將⊙O放在⊙O'上，使OB和$O'B'$重合。	1. 移形公理，等圓半徑相等。
2. OA沿$O'A'$而落下。	2. $\angle O=\angle O'$。
3. A與A'重合。	3. 等⊙半徑相等。
4. $\overset{\frown}{AB}$之各點與$\overset{\frown}{A'B'}$之各點重合。	4. (161,162)。
5. $\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$。	5. 兩弧重合。

II. 假設：等⊙O及O'中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$。

求證：$\angle O=\angle O'$。

證明：

敘述	理由
1. 將⊙O放在⊙O'上，使OA和$O'A'$重合。	1. 移形公理，等圓半徑相等。
2. $\overset{\frown}{AB}$沿$\overset{\frown}{A'B'}$而落下。	2. (161,162)。
3. B點必落於B'上。	3. $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$。
4. OB與$O'B'$重合。	4. 二點決定一直線。
5. $\therefore \angle O=\angle O'$。	5. 等角定義。

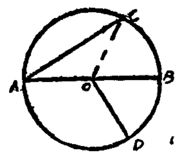
170. 系一　在同圓或等圓中，圓心角不等，則大角所對的弧亦大，其逆亦真。

171. 系二 直徑分圓爲二等分.

172. 系三 分圓爲二等分的直線是直徑.

習題三十四

1. 若 AB 和 CD 是同圓中的兩直徑, 則 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

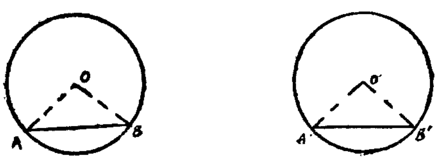


(2)

2. 若 AB 是直徑, OD 是半徑, AC 是弦, 又 $\angle BOD=2\angle A$, 則 $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{BC}$.
   (提示: 聯 OC, 證出 $\angle BOD=\angle BOC$).
3. 兩弦 AC 和 AD 所成的 A 角被直徑 AB 所二等分, 則 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$.
4. 經圓上一點 A, 作弦 AB 及直徑 AC, 則平行於 AB 的半徑, 二等分 $\overset{\frown}{BC}$.
5. 若過與圓上兩點等距離的圓內一點作一半徑, 則兩點間的弧被他二等分.
6. 若經圓周上一點, 所作到二半徑的垂線相等, 則此點必二等分二半徑所截的弧.

命題二　定理

173. 在同圓或等圓中, 等弧所對的弦相等; 等弦所對的弧相等.



I. **假設**: 等 $\odot O$ 和 O' 中, $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$.

求證: $AB=A'B'$.

證明：

敍述	理由
1. 聯 $OA, OB, O'A', O'B'$.	1. 聯線公理。
2. $\angle AOB = \angle A'O'B'$.	2. $\overparen{AB} = \overparen{A'B'}$，等弧對等圓心角。
3. $AO = A'O', BO = B'O'$.	3. 等圓半徑。
4. $\triangle AOB \cong \triangle A'O'B'$.	4. $s.a.s. = s.a.s.$
5. $\therefore AB = A'B'$.	5. 對應邊。

II **假設：** 等 $\odot O$ 和 O' 中，弦 $AB = A'B'$.

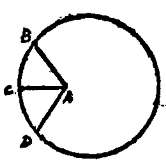
求證： $\overparen{AB} = \overparen{A'B'}$.

證明：

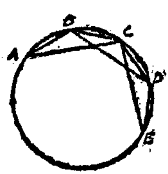
敍述	理由
1. 聯 $OA, OB, O'A', O'B'$.	1. 聯線公理。
2. $AB = A'B'$.	2. 假設。
3. $OA = O'A', OB = O'B'$.	3. 等圓半徑。
4. $\therefore \triangle AOB \cong \triangle A'O'B'$.	4. $s.s.s. = s.s.s.$
5. $\therefore \angle O = \angle O'$.	5. 對應角。
6. $\therefore \overparen{AB} = \overparen{A'B'}$.	6. 等圓心角截取等弧。

習題三十五

1. 若 $\angle BAC = \angle DAC$, $AB = AD$. 則 $\overparen{BC} = \overparen{CD}$.
2. 若諸弦 AB, BC, CD, DE 相等，則 AC, BD, CE 亦等。



(1)



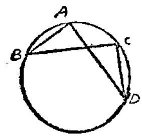
(2)

3. 若二弦互相等分，則一雙對頂角所對的弧相等.

4. 若二弦互相等分，則兩弦都是直徑.

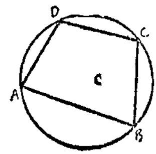
5. 若 $AB=CD$，則 $BC=AD$.

6. 若 $AD=BC$，則 $AB=CD$.



(5,6)

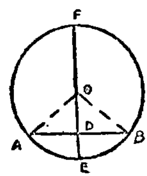
174. 圓內接多邊形與外接圓 一個多邊形的各頂，都在一個圓的圓周上，則此多邊形叫做此圓的內接多邊形，此圓叫做此多邊形的外接圓，圓心叫做多邊形的外心.



如圖，$ABCD$ 爲圓內接四邊形，O 爲 $ABCD$ 的外心.

命題三　定理

175. 垂直於弦的直徑，必二等分此弦及其所對的弧.



假設： 在 $\odot O$ 中，直徑 $EF\perp AB$ 於 D.

求證： $AD=BD$，$\overparen{AE}=\overparen{BE}$，$\overparen{AF}=\overparen{BF}$.

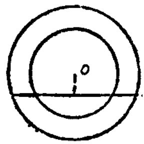
證明：

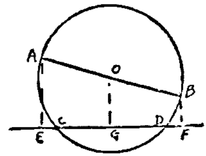
敍　述	理　由
1. 聯 OA，OB.	1. 聯線公理.
2. $rt.\triangle AOD\cong rt.\triangle BOD$.	2. 斜邊一腰各相等.
3. $\therefore AD=BD$.	3. 對應邊.
4. 又 $\angle AOE=\angle BOE$.	4. 對應角.
5. $\therefore \overparen{AE}=\overparen{BE}$.	5. 等圓心角截取等弧.
6. 而 $\overparen{EAF}=\overparen{EBF}$.	6. 直徑分圓爲二等分.
7. $\therefore \overparen{AF}=\overparen{BF}$.	7. 等減.

176. 系一 弦的垂直二等分線，必通過圓的中心.

177. 系二 圓心與一弦中點的聯線，必爲此弦的中垂線.

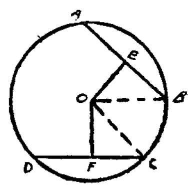
習題三十六





1. 若一割線,截二同心圓,則兩圓間所截線分相等.
2. 自圓 O 的直徑 AB 兩端及圓心 O 作弦 CD 的垂線 AE, BF, OG. 則 $EG=GF$, $EC=FD$.
3. 一直徑二等分不過中心的二弦,則此二弦平行.

命題四　定理



178. 在同圓或等圓中,等弦與圓心等距;與圓心等距的弦相等.

I. 假設: $\odot O$ 中,弦 $AB=CD$, $OE\perp AB$, $OF\perp CD$.

求證: $OE=OF$.

證明:

敘　述	理　由
1. 聯 OB, OC.	1. 聯線公理.
2. $AE=EB=\frac{1}{2}AB$. $DF=FC=\frac{1}{2}DC$.	2. 垂直於弦的直徑必二等分此弦.
3. $EB=FC$.	3. 等分量.
4. $OB=OC$.	4. 半徑相等.
5. $\therefore rt\triangle OBE\cong rt\triangle OCF$.	5. 斜邊,腰=斜邊,腰.
6. $\therefore OE=OF$	6. 對應邊.

II. 假設: $\odot O$ 中 $OE\perp AB$, $OF\perp CD$, $OE=OF$.

求證： $AB=CD$.

證明：

敍述	理由
1. 聯 OB, OC.	1. 聯線公理.
2. $rt\triangle OBE \cong rt\triangle OCF$.	2. 斜邊，腰＝斜邊，腰.
3. $BE=CF$.	3. 對應邊.
4. $\therefore AB=CD$.	4. 等量之同倍量.

習題三十七

1. 若過半徑上任意一點作兩弦與此半徑成等角，則此二弦必相等.
2. 兩等弦相交於一點，此點與圓心的聯線，必二等分此兩弦所夾的角.
3. 相交二弦，各有一部分彼此相等，則二弦相等.
4. 若從一直徑的二端所作兩弦平行，則二弦相等.

命題五　定理

179. 在同圓或等圓中，兩劣弦不等，則大弧所對的弦較大；反之，大弦所對的劣弧較大.

I. **假設：** 等圓 O 和 O' 中，$\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{A'B'}$.

求證： 弦 $AB > A'B'$.

證明：敍　述	理　由
1. 聯 $OA, OB, O'A', O'B'$.	1. 聯線公理.
2. $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{A'B'}$.	2. 假設.
3. $\angle O > \angle O'$.	3. 大弧對大圓心角.
4. $OA = O'A', OB = O'B'$.	4. 等圓之半徑相等.
5. $\therefore AB > A'B'$.	5. 兩△中二組對應邊等夾角大者第三邊大.

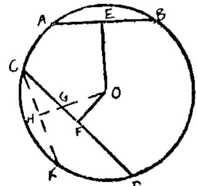
II. 假設：等圓 O 和 O' 中，弦 $AB > A'B'$.

求證：$\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{A'B'}$.

證明：敍　述	理　由
1. 聯 $OA, OB, O'A', O'B'$.	1. 聯線公理.
2. $AB > A'B'$.	2. 假設.
3. $OA = O'A', OB = O'B'$.	3. 等⊙之半徑,
4. $\therefore \angle O > \angle O'$	4. 二雙邊等，第三邊大則夾角大.
5. $\therefore \overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{A'B'}$.	5. 大⊙心角截大弧.

命題六　定理

180. 在同圓或等圓中，若兩弦不等，則大弦到圓心的距離較小；反之，到圓心距離較小的弦較大.



I. 假設：在 ⊙O 中有弦 $CD > AB$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$.

求證：$OE > OF$.

證明：敍　述	理　由
1. $CD > AB$.	1. 假設.
2. $\overset{\frown}{CD} > \overset{\frown}{AB}$.	2. 大弦對大弧.

敘述	理由
3. 作 $CK=AB$ 截 $\overset{\frown}{CD}$ 於 K，則 K 在 CD 之間。	3. $\overset{\frown}{CD}>\overset{\frown}{AB}$ 故 $\overset{\frown}{CD}>\overset{\frown}{CK}$.
4. 作 $OH\perp CK$ 交 CD 於 G	4. 垂線作法.
5. $OH=OE$.	5. 等弦與圓心等距.
6. $OG>OF$.	6. $rt\triangle$ 中，斜邊最大.
7. $OH>OG$.	7. 全量大於分量.
8. $\therefore OH>OF$ 即 $OE>OF$.	8. 不等量公理 1.

II. 假設：在 $\odot O$ 中有 $OE\perp AB$，$OF\perp CD$，而 $OE>OF$.

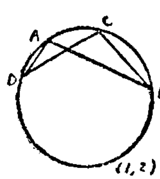
求證：$CD>AB$.

證明：

敘述	理由
1. $AB>CD$，$CD=AB$ 或 $CD>AB$.	1. 祇有三種情形.
2. 若 $AB>CD$ 則 $OF>OE$.	2. 大弦到圓心的距離小.
3. 若 $CD=AB$ 則 $OE=OF$.	3. 等弦與圓心等距.
4. 但(2)(3)均不合。	4. 因 $OE>OF$.
5. $\therefore CD>AB$.	5. (2)(3)均不對.

181. 系 直徑大於任何不過圓心的弦.

習題三十八



1. 假設：$AB>CD$，又 $\overset{\frown}{ACB}$ 和 $\overset{\frown}{DAC}$ 都是劣弧.

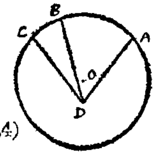
   求證：$CB>AD$.

2. 假設：$CB>AD$，又 $\overset{\frown}{DAC}$ 和 $\overset{\frown}{ACB}$ 都是

劣弧.

求證: $AB>CD$.

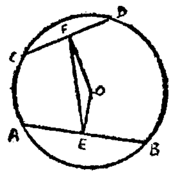
3. 若 $AD=DC$, $\angle ADB>\angle BDC$.
則 $\widehat{AB}>\widehat{BC}$.



(3,4)

4. 若 $AD=DC$, $\widehat{AB}>\widehat{BC}$.
則 $\angle ADB>\angle BDC$.

5. 若 $EO\perp AB$, $FO\perp CD$, $\angle OEF>OFE$.
則 $AB>CD$.

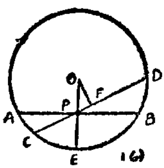


(5)

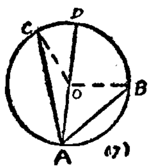
6. 在圓內過一點的弦,以垂直於過此點的半徑的弦爲最短.

7. 過圓上一點,所引的二弦,與過此點的半徑成不等角,則與半徑成大角的弦較短.

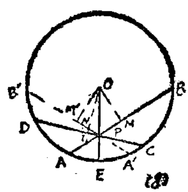
8. 過圓內一點,所引的二弦,與過此點的半徑成不等角,則二弦不等,與半徑成較大的銳角的弦較短.



(6)



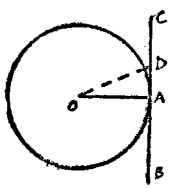
(7)



(8)

命題七　定理

182. 垂直於圓半徑外端的一直線,是此圓之切線.



假設：$\odot O$，半徑 OA，$BC \perp OA$ 於 A。

求證：BC 是切線。

證明：

敘述	理由
1. 以 BC 上任意另一點 D 與 O 相聯。	1. 聯線公理。
2. $OD > OA$。	2. 點到直線上諸線，以垂線最短。
3. D 在 $\odot$ 外。	3. 與⊙心距離大於半徑的點在⊙外。
4. $\therefore BC$ 是 $\odot O$ 的切線。	4. BC 祇過 $O\odot$ 上一點 A。

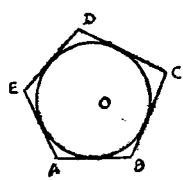
183. 系一　切線必垂直於自切點所作的半徑.

184. 系二　在切點垂直於切線的垂線，必通過此圓的⊙心.

185. 系三　從圓心到切線的垂線，必遇切線於切點.

186. 系四　在一已知切點，祗能有一切線.

187. 圓外切多邊形與內切圓　一個多邊形的各邊都是一個圓的切線，則此多邊形叫做此圓的外切多邊形，此圓叫做此多邊形的內切圓，圓心叫做多邊形的內心。

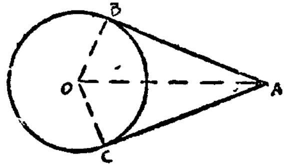


如圖：$ABCDE$ 為 $\odot O$ 的外切多邊形，$\odot O$ 是多邊形 $ABCDE$ 的內切圓，O 為此多邊形的內心。

命題八　定理

188. 從圓外一點到圓所作的兩切線必相等.

假設：$\odot O$ 的切線 AB，AC；B，C 為切點。



求證: $AB=AC$。

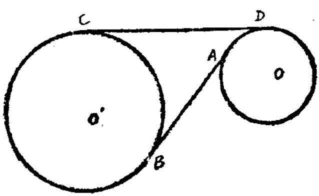
證明:

敘　述	理　由
1. 聯 OA, OB, OC。	1. 聯線公理.
2. $\angle OBA=\angle OCA=rt.\angle$.	2. 切線必垂直於切點半徑.
3. $OB=OC$。	3. 同圓半徑相等,
4. $OA=OA$。	4. 恆等.
5. $rt\triangle AOB\cong rt\triangle AOC$。	5. 斜邊一腰=斜邊一腰.
6. $\therefore AB=AC$。	6. 相當邊.

189. 系　從圓外一點所作的二切線,與此點到圓心的聯線成等角.

如命題, $\angle OAB=\angle OAC$.

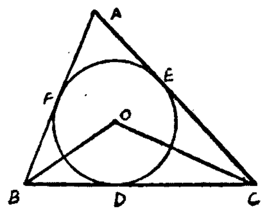
190. 公切線　同時切於二圓的直線叫做二圓的公切線. 兩圓的圓心若在此兩圓的公切線的兩側, 此公切線叫做**內公切線**.否則叫做**外公切線**.兩切點間的線分,叫做**公切線的長**.



如圖: AB 爲內公切線, CD 爲外公切線, AB 及 CD 二線分各爲二公切線的長。

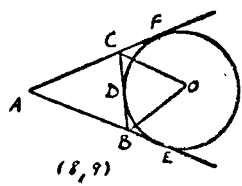
習題三十九

1. 兩圓二內公切線相等.
2. 兩圓二外公切線相等.
3. 圓外切四邊形兩對邊的和,必等於其他二對邊的和.
4. $ABCDEF$ 六邊形,外切於一圓,則 $AB+CD+EF=BC+DE+FA$.
5. 直角三角形外切於一圓,則二直角邊之和等於斜邊與此圓直徑之和.
   (提示:自圓心作二直角邊的切點半徑).
6. 若 $\triangle ABC$ 外切於一圓,切點 D, E, F, 令三邊為 a, b, c. 且 $a+b+c=2s$ 則 $BD=BF=s-b$,
   $AE=AF=s-a$,
   $CD=CE=s-c$.



(6,7)

7. 若 $\odot O$ 為 $\triangle ABC$ 之內切圓.
   求證: $\angle BOC=90°+\frac{1}{2}\angle A$.



(8,9)

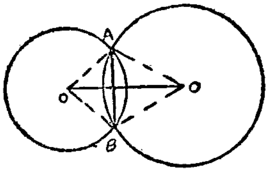
8. 若 $\odot O$ 切 $\triangle ABC$ 之一邊及他二邊之延長線於 D, E, F 而令三邊為 a, b, c 且 $a+b+c=2s$.
   則 $AE=AF=s$,
   $BE=BD=s-c$,
   $CD=CF=s-b$.
9. 上題內求證: $\angle BOC=90°-\frac{1}{2}\angle A$.

191. 聯心線 兩圓圓心決定的直線叫做聯心線,圓心間之

線分叫做聯心線之長.

命題九　定理

192. 若兩圓相交,則其聯心線必垂直二等分其公共弦.



假設: O 及 O' 兩圓相交於 A 及 B, 公共弦 AB.

求證: 聯心線 OO' 是 AB 的垂直二等分線.

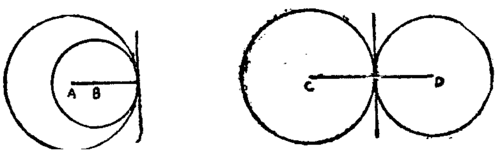
證明:

敘述	理由
1. 聯 AO, BO, AO', BO'.	1. 二點可決定一直線.
2. $AO=BO$, $AO'=BO'$.	2. 同圓半徑相等.
3. OO' 是 AB 的垂直二等分線。	3. 二點各與一線的兩端等距則決定此直線的中垂線.

193. 系　若二圓相交,則聯心線之長小於二圓半徑之和而大於二圓半徑之差.

因 AOO' 爲一三角形所以 $OO'<AO+AO'$, $OO'>AO'-AO$.

194. 切圓　若兩圓切一直線於同一點,則此兩圓叫做切圓.若一圓在他圓內,叫做**內切**;否則叫做**外切**.

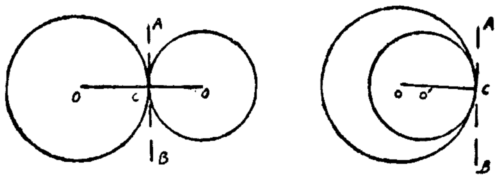


如圖：$\odot A$ 及 $\odot B$ 相內切，$\odot C$ 及 $\odot D$ 相外切。

注意：二圓內切時，切點之公切線爲外公切線.
二圓外切時，切點之公切線爲內公切線.

命題十　定理

195. 若兩圓相切，則聯心線必過切點。



假設：兩圓 O 和 O' 相切於 C。

求證：聯心線 OO' 通過 C。

證明：

敘述	理由
1. 過 C 點作公切線 AB。	1. 依定義切圓必有公切線。
2. 聯 OC 和 $O'C$。	2. 二點決定一直線，
3. $OC \perp AB$，$O'C \perp AB$。	3. 切點半徑必垂直切線。
4. $\therefore OC$ 和 $O'C$ 爲同一直線。	4 過直線上一點祇有一垂線.
5. $\therefore OO'$ 通過 C。	5. 已證三點在一直線上。

196. 系一　若二圓外切，則聯心線之長等於二圓半徑之和.

197. 系二　若二圓內切，則聯心線之長等於二圓半徑之差。

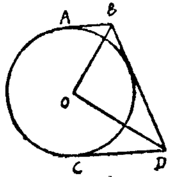
習題四十

1. 若二圓相切，過切點公切線上的任一點，所作二圓的各另一

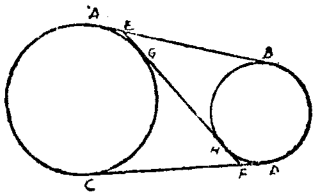
切線相等.

2. AB, CD 爲 $\odot O$ 的二平行切線，DB 爲另一切線.

求證; $\angle DOB = rt.\angle$.



(2)



(3)

3. 兩圓的二外公切線 AB, CD 與一內公切線 GH 相交於 E 及 F. 則 $AB=CD=EF$.

198. 圓弧的度量　(1)圓弧的大小往往以其所對的圓心角的度數表之，叫做**圓弧的度數或曲度**.

因周角爲 360°，所以圓周叫做 360° 的圓弧，半圓周叫做 180° 的圓弧.

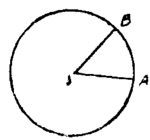
大於 180° 的圓弧是**優弧**，小於 180° 的圓弧是**劣弧**，二弧之和爲 360° 時，二弧叫**共軛弧**.

90° 的圓弧叫做**象限**，一象限卽等於圓周的四分之一.

(2) **圓弧的度數，若與一角的度數相等時，叫做此角以此圓弧度之.**

命題十一　定理

199. 圓心角以其所對的弧度之.



假設: 圓心角 $\angle AOB$ 及其所對的弧 $\overset{\frown}{AB}$.

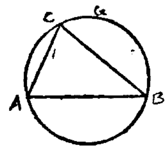
求證: $\angle AOB$ 以 $\overset{\frown}{AB}$ 度之.

證明：　敍　述　　　　理　由

敍述	理由
1. $\overset{\frown}{AB}$ 的度數與 $\angle O$ 的度數相等.	1. 定義 198(1).
2. $\therefore \angle O$ 以 $\overset{\frown}{AB}$ 度之.	2. 定義 198(2).

200. 弓形　圓弧與其所對的弦所成的圖形叫做**弓形**.

如右圖，AQB 爲弓形.



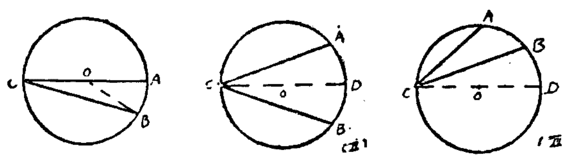
201. 弓形角　一個角的頂點在圓弧上而兩邊通過這圓弧的兩端的叫做此弧的**弓形角**.

如圖：$\angle ACB$ 是 $\overset{\frown}{AQB}$ 的弓形角.

弓形角卽圓周角，圓周角對於其所指定之圓弧而稱時，叫做弓形角.

命題十二　定理

202. 圓周角以其所對的弧之半度之.



假設：圓 O 的圓周角 ACB，其所對的弧 $\overset{\frown}{AB}$.

求證：$\angle ACB$ 以 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ 度之.

證明：　敍　述　　　　理　由

（甲）角的一邊是圓的直徑.（如圖 I.）

敍述	理由
1. 作 OB，則 $\triangle BOC$ 爲等腰.	1. OB 及 OC 爲同圓半徑，相等.

2. $\angle AOB=\angle C+\angle B$.	2. △的外角等於其二不相鄰內角之和.
3. $\angle AOB=2\angle C=2\angle ACB$	3. 等腰△的底角 $\angle B=\angle C$.
4. 即 $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$.	4. 等量之半相等.
5. $\angle AOB$ 以 $\overparen{AB}$ 度之.	5. 圓心角以其所對的弧度之.
6. $\therefore\angle ACB$ 以 $\frac{1}{2}\overparen{AB}$ 度之.	6. 代入.
(乙)圓心在角內.(如圖 II.)	
1. 作直徑 CD,則 $\angle ACB=\angle ACD+\angle BCD$	1. 全量等於分量之和
2. $\angle ACD$ 以 $\frac{1}{2}\overparen{AD}$ 度之 $\angle BCD$ 以 $\frac{1}{2}\overparen{BD}$ 度之.	2. (甲).
3. $\therefore\angle ACB$ 以 $\frac{1}{2}\overparen{AB}$ 度之.	3. 等加公理.
(丙)圓心在角外.(如圖 III.)	
1. 作直徑 CD, 則 $\angle ACB=\angle ACD-\angle BCD$.	1. 全量等於分量之和,等減.
2. $\angle ACD$ 以 $\frac{1}{2}\overparen{AD}$ 度之, $\angle BCD$ 以 $\frac{1}{2}\overparen{BD}$ 度之.	2. (甲).
3. $\therefore\angle ACB$ 以 $\frac{1}{2}\overparen{AB}$ 度之.	4. 等減公理.

203. 系一　同弧內的弓形角相等.

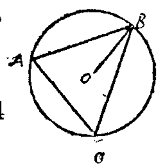
204. 系二　半圓內的弓形角是一直角.

205. 系三　圓內接四邊形的對角相補.

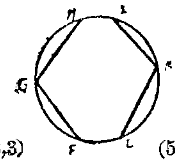
206. 系四　圓內接四邊形的一外角與其內對角相等.

習題四十一

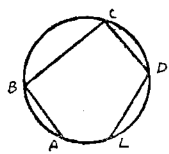
1. 若 $\overset{\frown}{AC}=100°$, $\overset{\frown}{BC}=125°$ 求 $\angle ACB$.
2. 若 $\overset{\frown}{AC}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{AB}=2:3:4$ 求 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.
3. 若 O 爲圓心, $\angle ABO=15°$ 求 $\angle ACB$.
4. 若 $\overset{\frown}{AE}=40°$; 求 $\angle B+\angle D$.
5. 若 $\overset{\frown}{HI}=20°$, $\overset{\frown}{FL}=30°$ 求 $\angle G+\angle K$.
6. 若 $\overset{\frown}{DA}=50°$; 求 $\angle B+\angle C$.



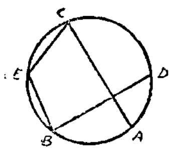
(1,2,3)



(5)

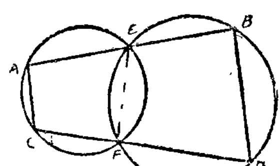


(4)



(6)

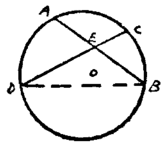
7. 求一個圓內接六邊形的相間三角的和.
8. 過二等圓的交點之一, 作一直線, 與二圓相遇, 則其兩端與二圓的另一交點等距.
9. 以等腰三角形的一腰爲直徑作圓, 此圓必平分底邊.
10. 過相交二圓的一交點, 作二圓的直徑, 則二直徑的他一端點與二圓的另一交點在一直線上.
11. 二圓相交於 E, F; 過 E, F 任作二線與圓相交, 則 $AC \parallel BD$.



(11)

命題十三　定理

207. 兩弦交於圓內所成的角，以其所截的弧與其對頂角所截的弧之和之半度之.



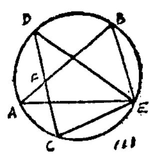
假設: AB, CD 兩弦在 O 圓內相交於 E.

求證: $\angle AED$ 以 $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC})$ 度之.

證明:

敍述	理由
1. 聯 BD.	
2. $\angle AED=\angle D+\angle B$.	2. 三角形的外角等於其不相鄰二內角之和.
3. $\angle D$ 以 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ 度之. $\angle B$ 以 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$ 度之.	3. 圓周角以其所對弧的 $\frac{1}{2}$ 度之.
4. $\angle AED$ 以 $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC})$ 度之.	4. 等加.

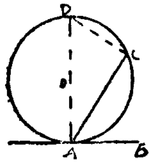
習題四十二



1. 設 $\angle AFD=120°$, $\angle DEB=35°$ 求 $\angle AEC$.
2. 圓內正交二弦，所截取的二對對弧之和皆等於半圓周.

命題十四　定理

208. 圓的切線和自切點所作的弦所夾的角以其所夾的弧之半度之.(此角簡稱弦切角)



假設： 切線 AB，切 O 圓於 A；又圓內一弦 AC。

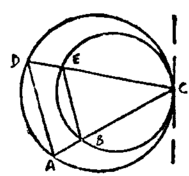
求證： $\angle CAB$ 以 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ 度之。

證明：

敍述	理由
1. 作直徑 AD，弦 CD.	
2. $\angle C = rt.\angle$.	2. 半圓內的弓形角。
3. $\angle DAB = rt.\angle$.	3. 切線垂直於切點半徑。
4. $\angle D$ 是 $\angle DAC$ 的餘角.	4. 直角三角形的兩銳角。
5. $\angle BAC$ 是 $\angle DAC$ 的餘角。	5. 已證 $\angle DAB = rt.\angle$。
6. $\therefore \angle BAC = \angle D$,	6. 同角的餘角。
7. $\angle D$ 以 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ 度之。	7. 圓周角。
8. $\therefore \angle BAC$ 以 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ 度之。	8. 代入。

習題四十三

1. 過一弧的中點的切線，必平行於此弧的對弦.



2. 二圓內切於 C，過 C 作 CED 及 CBA 二線。

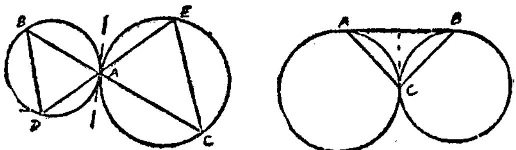
   求證：$DA /\!/ BE$。

3. 二圓外切於 A，過 A 作 DAE 及 BAC 二線。

求證：$BD /\!/ EC$。

4. 二圓外切於 C，AB 為公切線。

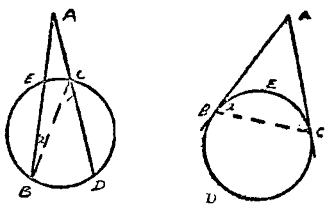
求證：$AC \perp CB$。



(3)　(4)

命題十五　定理

209. 兩割線，或兩切線，或一割線和一切線在圓外相交所成的角，以其所截的兩弧的差之半度之。



(I)　(II)

(甲)假設：從圓外一點 A，作 AB 和 AD 兩割線，交此圓於 E，C。

求證：$\angle A$ 以 $\frac{1}{2}(\widehat{BD}-\widehat{CE})$ 度之。

證明：

敘述	理由
1. 聯 BC。	
2. $\angle A+\angle 2=\angle 1$。	2. 三角形的外角等於其不相鄰的二內角之和。

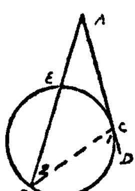
3. $\angle A=\angle 1-\angle 2$.	3. 等減.
4. $\angle 1$ 以 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ 度之.	4. 圓周角.
5. $\angle 2$ 以 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{CE}$ 度之.	5. 圓周角.
6. $\therefore\angle A$ 以 $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{CE})$ 度之.	6. 代入.

(乙)**假設**: 從圓外一點 A; 作 AB, AC 兩切線.

求證: $\angle A$ 以 $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BDC}-\overset{\frown}{CEB})$ 度之.

證明:

敍述	理由
1. 聯 BC.	
2. $\angle A+\angle 2=\angle 1$.	2. △的外角.
3. $\angle A=\angle 1-\angle 2$.	
4. $\angle 1$ 以 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{BDC}$ 度之.	4. 弦切角.
5. $\angle 2$ 以 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{CEB}$ 度之.	5. 弦切角.
6. $\therefore\angle A$ 以 $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BDC}-\overset{\frown}{CEB})$度之.	6. 代入.



(五)

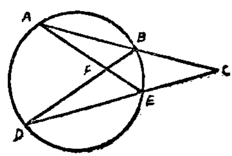
(丙)**假設**: 從圓外一點 A 作 AB 割線,交圓周於 E,及切線 AC.

求證： $\angle A$ 以 $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{CE})$ 度之.

證明：

敍　述	理　由
1. 聯 BC.	
2. $\angle A+\angle 2=\angle 1$.	2. △的外角.
3. $\angle A=\angle 1-\angle 2$.	
4. $\angle 1$ 以 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ 度之.	4. 弦切角.
5. $\angle 2$ 以 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{CE}$度之.	5. 圓周角.
6. $\therefore \angle A$ 以 $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{CE})$ 度之.	6. 代入.

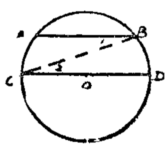
習題四十四



1. 設一圓的二切線相交的角為 60°, 求其所截二弧的度數.
2. 設如圖, $\angle AFD=70^\circ$, $\angle ACD=20^\circ$. 求 $\angle AED$ 及 $\angle BDE$.

命題十六　定理

210. 平行的弦在圓上所截的兩弧相等.



假設： 圓內兩平行弦 AB 和 CD.

求證： $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

證明：敍　述	理　由
1. 聯 BC.	
2. $\angle 1$ 以 $\frac{1}{2}\widehat{AC}$ 度之.	2. 圓周角.
3. $\angle 2$ 以 $\frac{1}{2}\widehat{BD}$ 度之.	3. 圓周角.
4. 但 $AB /\!/ CD$.	4. 題設.
5. $\angle 1=\angle 2$.	5. 內錯角.
6. $\frac{1}{2}\widehat{AC}=\frac{1}{2}\widehat{BD}$.	6. 代入.
7. $\therefore \widehat{AC}=\widehat{BD}$.	7. 等倍.

211. 系一　若一切線平行於一割線，則所截的兩弧相等.

212. 系二　平行的兩切線，在圓上所截的兩弧相等，即每弧等於一半圓周.

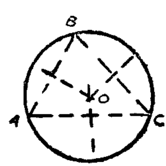
習題四十五

1. 圓內接梯形必是等腰梯形.
2. 設二等弦相交，則順次聯結其各端的直線成一等腰梯形.

213. 決定一圓　若過幾個已知點，可作一圓，且祇能作一圓，叫做此幾個點決定一圓.

命題十七　定理

214. 不在一直線上的三點決定一圓.



假設: A, B, C 三點不在一直線上。

求證: A, B, C 決定一圓.

證明:

敍　述	理　由
1. 聯 AB, BC, CA 成 $\triangle ABC$。	1. 二點決定一直線.
2. 作 $\triangle ABC$ 三邊的中垂線交於一點 O, 且與 A, B, C 等距。	2. 三角形的三邊中垂線, 交於一點.(148)
3. 故以 O 爲圓心, OA 爲半徑作圓, 必過 A,B,C 三點。	3. 圓的定義
4. 三中垂線無第二交點.	4. (149)。
5. 故過 A, B, C 祇有一圓; 卽 A, B, C 決定一圓。	

215. 系一　二圓相交, 交點最多二點。

216. 系二　過一直線上的三點, 不能作一圓。

(因三聯線爲一直線, 其中垂線平行)。

217. 系三　一直線與一圓相交, 交點最多二點。

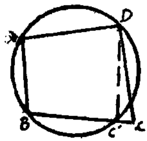
218. 共圓點　若過四點或四點以上可以作一圓, 則此諸點, 叫做共圓點。

命題十八　定理

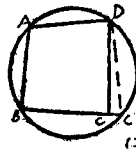
219. 若四邊形的對角相補, 則四邊形的四頂共圓.

假設: ▱$ABCD$ 中, $\angle A+\angle C=180°$.

求證: A, B, C, D 四點共圓.



(I)



(II)

證明:

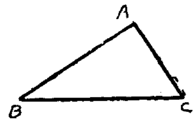
敘述	理由
1. 過 A, B, D 三點可作一圓.	1. 不在一直線上三點決定一圓.
2. 若 C 點在圓外,則 BC 交圓於 C'.(如圖 I)	2. 臨時假定.
3. $\angle A+\angle BC'D=180°$	3. 圓內接四邊形對角相補.
4. 則 $\angle BC'D=\angle C$.	4. 同角的補角相等.
5. 但 $\angle BC'D>\angle C$.	5. $\angle BC'D$ 為 $\triangle CDC'$ 的外角.
6. 所以 C 不能在圓外.	6. (4)與(5)矛盾.
7. 若 C 點在圓內,則 BC 的延線交圓於 C'.(如圖 II)	7. 臨時假定.
8. $\angle A+\angle C'=180°$.	8. 圓內接四邊形之對角.
9. 則 $\angle C'=\angle BCD$.	9. 同角的補角.
10. 但 $\angle C'<\angle BCD$.	10. 三角形的外角.
11. 所以 C 不能在圓內.	11. (9)與(10)矛盾.
12. $\therefore C$ 必在圓周上, 即 A, B, C, D 四點共圓.	

220. 系　若四邊形的一外角等於其內角的對角,則此四邊形的四頂共圓.

221. 張角　從線外一點到線分兩端所作的直線所夾的角,

叫做此線分對此點的張角．

如圖: $\angle ACB$ 爲 AB 線對 C 點的張角．



命題十九　定理

222. 若四邊形的一邊對他二頂的張角相等，則此四邊形四頂共圓．

假設: ▱$ABCD$ 中 $\angle ADB=\angle ACB$．

求證: A, B, C, D 四點共圓．

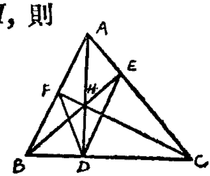
證明:

敍　述	理　由
1. 過 A, B, D 三點可作一圓．	1. 不在一直線上之三點決定一圓．
2. 若 C 點在圓外，則 BC 交圓於 C'．如圖 (I)	2. 臨時假定．
3. $\angle 1=\angle D$．	3. 同弧的弓形角．
4. 但 $\angle 1>\angle C$．	4. 三角形外角．
5. $\therefore \angle D$ 將 $>\angle C$．	5. 代入．
6. 所以 C 點不能在圓外．	6. 與假設矛盾．
7. 若 C 點在圓內，則 BC 延長交圓於 C'．(如圖 II)	7. 臨時假定．

8. $\angle D=\angle C'$.	8. 同弧弓形角.
9. 而 $\angle C>\angle C'$.	9. 三角形外角.
10. $\therefore \angle C$ 將 $>\angle D$.	10. 代入.
11. 所以C點不能在圓內.	11. 與假設矛盾.
12. $\therefore C$ 必在圓周上, 即 A, B, C, D 四點共圓.	

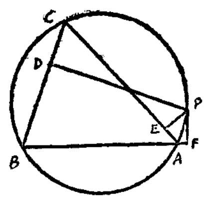
習題四十六

1. 若 $\triangle ABC$ 的三高 AD, BE, CF 交於 H, 則
   (1) B, D, H, F 四點共圓.
   (2) B, C, E, F 四點共圓.



(1,2)

2. 上題內求證:
   (1) $\angle FBH=\angle FDH$.
   (2) $\angle FBE=\angle FCE$.
3. 若在 $\triangle ABC$ 的外接圓周上一點 P, 作三邊的垂線 PD, PE, PF 則
   (1) P, A, E, F 四點共圓.
   (2) P, C, D, E 四點共圓.
   (3) P, D, B, F 四點共圓.



(3)

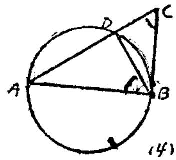
4. 等腰梯形之四頂共圓.
5. 圓內接四邊形 $ABCD$ 之, $\angle A$ 之分角線及, $\angle C$ 之外角分角線交於 E, 則 A, D, C, E 四點共圓.

總習題二

1. 自圓外一點與圓上各點之距離, 以過圓心之割線爲最長, 以此割線之圓外線分爲最短.

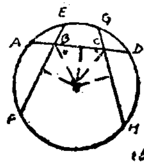
2. 自圓內一點與圓上各點之距離，以過此點之直徑之較短線分爲最短，此直徑之較長線分爲最長.

3. 過圓內一點之諸弦，以直徑爲爲最長，以垂直於此直徑之弦爲最短。



(4)

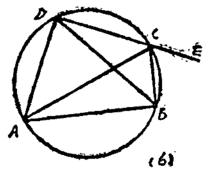
4. AB 爲圓之直徑，BC 爲切線，AC 交圓於 D，求證：$\angle ABD=\angle ACB$.



(5)

5. 於弦 AD 上，取 $AB=CD$，過 B 及 C 作 EF 及 GH 二弦，使 $\angle CBF=\angle BCH$ 求證：$EF=GH$.

6. $ABCD$ 爲圓內接四邊形，若外角 $BCE=\angle BCA$，求證：$AB=BD$.



(6)

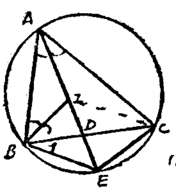
7. 外切於圓之平行四邊形必爲菱形.

8. 直角三角形中，取直角邊之一爲直徑作圓，則在此圓與斜邊之交點上所作之切線，平分另一直角邊.

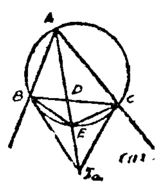
9. 過平行四邊形 $ABCD$ 之 A, B 二點作任意圓與 BC 及 AD 或其延長線交於 E 及 F，則 C, D, E, F 四點共圓.

10. $\triangle ABC$ 之分角線 AD 交外接圓於 E，若 I 爲△之內心，則 $BE=EC=IE$.

11. $\triangle ABC$ 之分角線 AD 交外接圓於 E，若 I_a 爲△對 A 之傍心，則 $BE=EC=I_aE$.

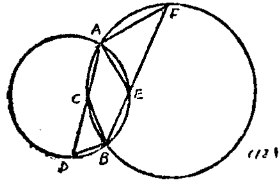


(10)

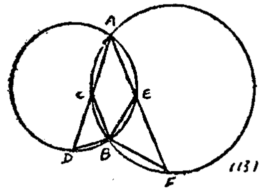


(11)

12. 二圓相交於 A, B; 過 A, B 作二直線 ACD 及 BEF 交二圓，求證：$\angle DBC=\angle EAF$.



13. 二圓相交於 A, B, 過 A 作二直線 ACD 及 AEF 交二圓，求證：$\angle DBC=\angle FBE$.



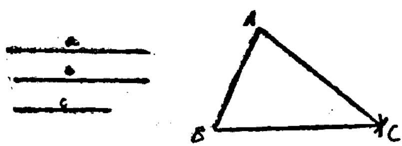
14. 若銳角 $\triangle ABC$ 之三高為 AD, BE, CF 求證：AD, BE, CF 為 $\triangle DEF$ 之內角分角線.

15. $ABCD$ 為圓內接四邊形，其對角線 AC, BD 交於 E, 求證過 E 所作 $\odot ABE$ 之切線與 CD 平行.

16. 於直角 $\triangle ABC$ 之斜邊 BC 上向外作正方形 $BCDE$, 若正方形之對角線交點為 F 則 AF 平分 $\angle A$.

命題二十 作圖

223. 已知三邊，求作三角形. ($s. s. s.$)



已知： 三角形三邊的長是 a, b, c.

求作： 三角形.

作法： 1. 作 $AB=c$.

2. 以 A 為圓心，b 為半徑，作弧.

3. 以 B 為圓心，a 為半徑，作弧.交第一弧於 C.

4. 聯 AC, BC. 則 $\triangle ABC$ 為所求作的三角形.

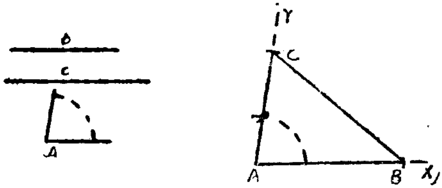
證明: $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, 故作圖無誤.

討論: 若一邊≧他二邊之和，則作圖不可能.

(三角形二邊之和大於第三邊)

命題二十一　作圖

224. 已知二邊和夾角，求作三角形.(s. a. s.)



已知: 三角形的二邊為 b, c 及其夾角 A.

求作: 三角形.

作法: 1. 作 $\angle XAY=$已知角 A.

2. 在 AX 上取 $AB=c$, AY 上取 $AC=b$. 聯 BC, 則 $\triangle ABC$ 為所求之 $\triangle$.

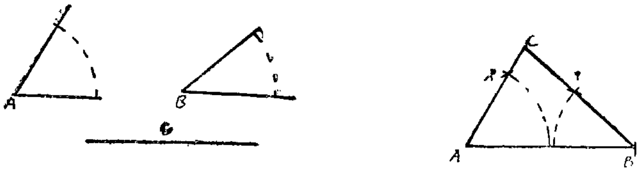
證明: (略).

習題四十七

1. 求作一等邊三角形，已知周圍.
2. 求作一等腰直角三角形，已知一腰.
3. 求作一等腰三角形，已知一腰及一底.
4. 求作一等腰三角形，已知頂角及一腰.
5. 求作一直角三角形，已知二直角邊.

命題二十二　作圖

225. 已知二角和一夾邊，求作三角形.(a. s. a.)



已知：三角形的二角為 A 及 B，又其夾邊為 c.

求作：三角形.

作法：1. 作 $AB=c$。

2. 由 A 作 AX 使 $\angle BAX=$ 已知角 A.

3. 由 B 在同側作 BY 使 $\angle ABY=$ 已知角 B.

4. AX 及 BY 延長相交於 C，即得求作之三角形 ABC.

證明：(略)。

討論：若 $A+B\geqq st.\angle$，則作圖為不可能。

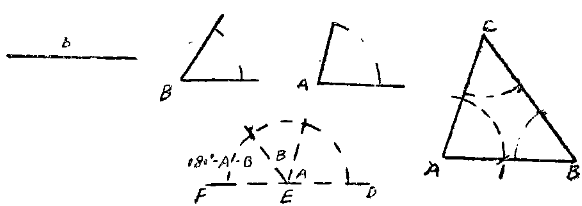
(三角形三內角之和為一平角)

習題四十八

1. 求作一等腰直角三角形，已知斜邊.
2. 求作一等腰三角形，已知一底及一底角.

命題二十三　作圖

226. 已知一邊一鄰角和一對角，求作三角形.(a. a. s.)



已知: 三角形的邊 b, 鄰角 A 及對角 B。

求作: 三角形。

作法: 1. 在平角 DEF 的 E 點,作一角$=180°-A-B$。

2. 作 $\triangle ABC$ 使 $AC=b$, $\angle A=$已知角 A, $\angle C=180°-A-B$。(用 $a.s.a.$ 作法) 則 $\triangle ACB$ 為所求之 $\triangle$

證明:

敘述	理由
1. $\angle A=$已知角 A.	1. 作圖。
2. $AC=b$。	2. 作圖。
3. $\angle B=180°-A-(180°-A-B)=$已知角 B.	3. 三角形內角之和為一平角。

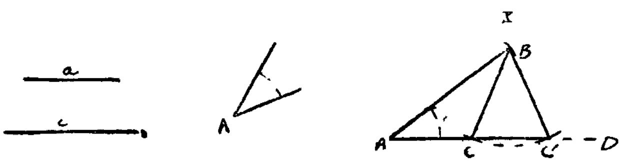
討論: 若 $A+B\geqq st.\angle$, 則作圖為不可能。

習題四十九

1. 求作一直角三角形,已知一直角邊及一對角。
2. 求作一等腰三角形,已知底及頂角。

命題二十四 作圖

227. 已知兩邊及其中一邊的對角,求作三角形。($s\ s.\ a.$)



已知: 三角形的二邊為 a 及 c, 又 a 邊的對角 A。

求作：三角形.

作法：1. 作$\angle XAD$＝已知角A.

2. 在AX上截$AB=c$.

3. 以B為圓心，a為半徑作弧交AD於C及C'.

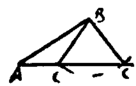
4. 聯BC及BC'，則$\triangle ABC$及$\triangle ABC'$都是所求的三角形.

證明：（略）.

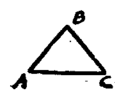
討論：1. 若a的長等於自B到AD的距離，則只有一個交點，即有一個三角形，且為$rt.\triangle$.

2. 若a的長小於自B到AD的距離，則無交點，故無解.

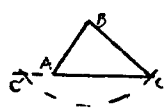
3. 若a的長大於自B到AD的距離，而小於c，則在A點的同側有二個交點C及C'，此題有兩解，如作圖.



4. 若$a=c$，則二交點之一與A重合，故祇有一解.



5. 若a的長大於c，則在A點的兩側有二交點，C及C'，但$\angle C'AB=180°-A$，故亦祇一解$\triangle ABC$.



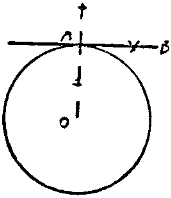
習題五十

1. 求作一直角三角形，已知斜邊及一直角邊.（斜邊，一腰）

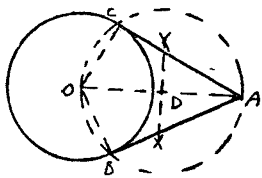
2. 求作一等腰三角形，已知一腰及一底角.

命題二十五　作圖

228. 從一已知點作一已知圓的切線.



(I)



(II)

已知: 定圓 O 及一定點 A.

求作: 過 A 點的 O 圓的切線.

作法: (甲)若 A 點在圓周上(如圖 I)

1. 聯半徑 OA.

2. 過 A 作 OA 的垂線 AB, 即爲所求作的切線.

(乙)若 A 點在圓外(如圖 II)

1. 聯 OA.

2. 以 OA 爲直徑作圓交 O 圓於 B 及 C.

3. 聯 AB, AC, 即爲所求作的切線.

證明:

	敍述	理由
(甲)	1. $AB \perp$ 半徑 OA.	1. 作圖.
	2. 故 AB 爲 O 圓的切線.	2. 垂直於半徑外端.
(乙)	1. 聯 OB, OC.	
	2. $\angle ABO = \angle ACO = rt.\angle$.	2. 半圓的弓形角.

3. $\therefore AB\perp OB$, $AC\perp OC$.	3. 垂直定義.
4. 故 AB 及 AC 為 O 圓的切線.	4. 垂直於半徑的外端.

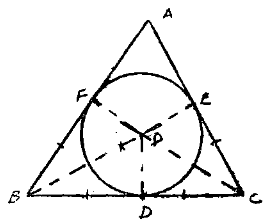
討論: 1. 點在圓上時,有一切線可作。

2. 點在圓外時,有二切線可作。

3. 點在圓內時,無切線可作.

命題二十六　作圖

229. 求作一圓使內切於一已知三角形.



已知: $\triangle ABC$。

求作: 一圓內切於 $\triangle ABC$。

作法: 1. 作 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的分角線交於一點 O.

2. 過 O 作 $OD\perp BC$ 於 D。

3. 以 O 為圓心, OD 為半徑作圓卽得.

證明:

敍　述	理　由
1. 作 $OE\perp AC, OF\perp AB$.	
2. $OE=OD$。	2. OC 為 $\angle C$ 的分角線.
3. $OF=OD$.	3. OB 為 $\angle B$ 的分角線.
4. $\therefore OE=OF=OD$.	4. 等量公理.

5. 故以 O 為圓心，OD 為半徑之圓必過 E 及 F。	5. 與圓心等距。
6. $OE \perp AC$, $OF \perp AB$.	6. 作圖。
7. $\therefore O$ 圓內切於 $\triangle ABC$.	7. 垂直於半徑外端之線必切於圓。

命題二十七　作圖

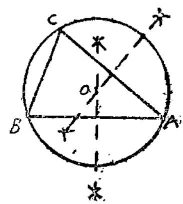
230. 求作三圓各切於三角形之一邊及他二邊之延長線.

此三圓叫做此三角形之三傍切圓，三圓心叫做傍心，卽各外角分角線之三交點.

（學者試自解之）.

命題二十八　作圖

231. 求作一圓使外接於一巳知三角形.



巳知： $\triangle ABC$.

求作： $\triangle ABC$ 的外接圓.

作法： 1. 作 AB 及 AC 的中垂線相交於 O。

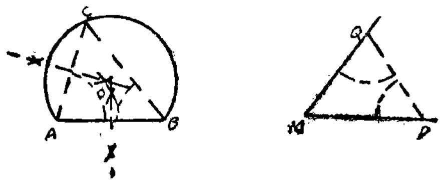
2. 以 O 為圓心，OA 之距離為半徑作圓卽得.

證明：

敍述	理由
1. $OA=OB$.	1. O 在 AB 的中垂線上。
2. $OA=OC$.	2. O 在 AC 的中垂線上.
3. $\therefore OA=OB=OC$.	3. 等量公理.
4. 所以 A, B, C 均在同一圓周上.	4. 與 O 點等距.
5. $\therefore$ 此圓外接於三角形.	5. 定義.

命題二十九 作圖

232. 以已知直線做弦，作一圓弧使其弓形角等於已知角.



已知: 線分 AB, $\angle M$.

求作: 以 AB 爲弦，作弓形角等於 $\angle M$ 的圓弧.

作法: 1. 在 $\angle M$ 的兩邊上取任意兩點 P 及 Q, 聯 PQ.

2. 以 AB 爲底邊作 $\triangle ABC$ 使 $\angle A=\angle P$, $\angle B=\angle Q$.

3. 作 $\triangle ABC$ 的外接圓.

4. 則 $\overset{\frown}{ACB}$ 爲所求的圓弧.

證明:

敍述	理由
1. $\angle C=\angle M$.	1. 二△內二雙∠相等，則第三雙角等
2. 所以在弓形 ACB 內的任意弓形角 $=\angle M$.	2. 同弧的弓形角.

習題五十一

1. 以已知定直線爲斜邊求作一等腰直角三角形.
2. 已知定直線爲斜邊求作一直角三角形，使一直角邊等於已知長.

233. 三角形基本作法 一三角形計有三邊與三角，若邊角中有三項爲已知(至少須有一邊)，則三角形可以作出，依上面命

題所述，可以分成下列幾種。

(1) 二角及一夾邊($a.\ s.\ a.$)

(2) 二角及一對邊($a.\ a.\ s.$)

(3) 二邊及一夾角($s.\ a.\ s.$)

(4) 二邊及一對角($s.\ s.\ a$)——可有二解或一解。

(5) 三邊($s.\ s.\ s.$)

234. 三角形奠基作圖法　已知圖形的若干部分，欲作此圖形，往往先作一草樣，將已知部分劃出，然後研究在所求的圖樣內是否有一部分的三角形可以依三角形基本作法先行作出，然後再依次作出其他部份，此種作圖方法，叫做三角形奠基作圖法，研究的方法，叫做作圖的分析。

235. 三角形內邊角的記號　為便利起見，三角形的各部分用不同的文字代表：

(1) 三角形三邊的長為：a，b，c。

(2) 三角形三內角的大小為：A，B，C。

(3) 三角形三中線的長為：m_a，m_b，m_c。

(4) 三角形三高的長為：h_a，h_b，h_c。

(5) 三角形三內角分角線的長為：t_a，t_b，t_c。

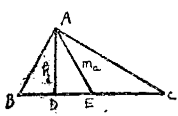
(6) 三角形的外接圓半徑為：R。

(7) 三角形的內切圓半徑為：r。

【作圖例題一】

已知：a，h_a，m_a 求作△。

分析：



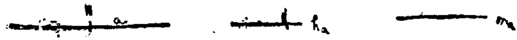
$\angle ADE = rt.\angle$。

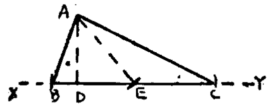
$AD = h_a$。

$AE = m_a$。

$\therefore \triangle ADE$ 可先作出($s.\ s.\ a.$)

作圖:





1. 作 $AD=h_a$.

2. 作 $XY\perp AD$ 於 D.

3. 以 A 爲圓心, m_a 爲半徑畫弧截 XY 於 E, 聯 AE.

4. 於 XY 上截 $BE=EC=\frac{1}{2}a$.

5. 聯 AB, AC.

6. 則 $\triangle ABC$ 爲所求作的三角形.

證明: 1. $AD=h_a$.

2. $AD\perp BC$.

3. $AE=m_a$.

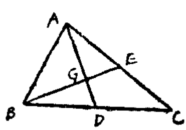
4. $BC=BE+CE=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a=a$.

所以作圖無誤.

【作圖例題二】

已知: m_a, m_b, a. 求作△.

分析: 若 $\triangle ABC$ 中的中線 AD 及 BE 相交於 G.



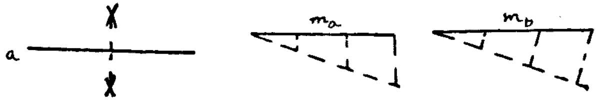
則 $BG=\frac{2}{3}m_b$.

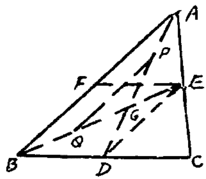
$DG=\frac{1}{3}m_a$.

$BD=\frac{1}{2}a$.

所以 $\triangle BDG$ 可先作成 $(s.\ s.\ s.)$

作圖:





1. 作 $\triangle BDG$ 使 $BD=\frac{1}{2}a$, $DG=\frac{1}{3}m_a$, $BG=\frac{2}{3}m_b$.

2. 延長 BG 到 E 使 $GE=\frac{1}{3}m_b$.

3. 延長 DG 到 A 使 $AG=\frac{2}{3}m_a$.

4. 聯 AB.

5. 聯 AE, 延長之交 BD 的延長線於 C.

6. 則 $\triangle ABC$ 爲所求作的三角形.

證明:

敍　述	理　由
1. $AD=AG+DG=\frac{2}{3}m_a+\frac{1}{3}m_a=m_a$.	1. 作圖.
2. $BE=BG+GE=\frac{2}{3}m_b+\frac{1}{3}m_b=m_b$.	2. 作圖.
3. 取 AG, BG 的中點 P 及 Q, 聯 PQ, ED.	
4. $\because GE=GQ=\frac{1}{3}m_b$, $GD=GP=\frac{1}{3}m_a$.	4. 作圖.

5. $\therefore DEPQ$ 爲▱.	5. 對角線互相等分.
6. $\therefore DE \stackrel{\parallel}{=} PQ$.	6. ▱的對邊.
7. 而 $PQ \stackrel{\parallel}{=} \frac{1}{2}AB$.	7. P, Q 爲△二邊中點.
8. $\therefore DE \stackrel{\parallel}{=} PQ \stackrel{\parallel}{=} \frac{1}{2}AB$.	8. (略).
9. 取 AB 之中點 F, 聯 EF.	
10. 今 $DE \stackrel{\parallel}{=} \frac{1}{2}AB$, 卽 $\stackrel{\parallel}{=} BF$.	
11. $\therefore FEDB$ 爲▱.	11. 一雙對邊平行且相等.
12. $\therefore FE \parallel BD \parallel BC$.	12. ▱的對邊.
13. $\therefore E$ 爲 AC 的中點.	13. 一線∥△一邊平分第二邊則平分第三邊.
14. 又 $DE \parallel AB$.	14. 已證.
15. $\therefore D$ 爲 BC 的中點.	15. 同(13).
16. $\therefore AD$, BE 爲中線.	
17. 且 $BC = 2BD = 2\left(\frac{1}{2}a\right) = a$.	

習題五十二

求作三角形,已知:

1. a, b, m_b.
2. a, b, h_b.
3. b, h_a, A.
4. b, t_c, A.

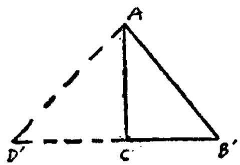
5. a, h_b, t_c.
6. a, b, h_c. (有二解)
7. b, t_c, C.
8. A, B, h_a.
9. b, h_a, m_a. (有二解)
10. a, h_b, h_c.
11. 已知一直角邊及斜邊上的高,求作一直角三角形。
12. 已知底邊及一腰上的高,求作一等腰三角形.
13. 已知底邊上的高及頂角,求作一等腰三角形.
14. 已知一銳角及斜邊上的高,求作一直角三角形.
15. 已知斜邊上的高及斜邊被高所分成二線段之一.
求作 $rt.\triangle$.
16. 已知 b, h_a, m_b, 求作$\triangle$.
17. 已知 a, h_a, B 求作$\triangle$.
18. 已知 a, B, m_c 求作$\triangle$.
19. 已知 a, B, t_c. 求作$\triangle$.
20. 已知 A, h_a, t_a 求作$\triangle$.

236. 已知二線分之和差作圖法　凡已知二線的和或差時,往往在分析時先作出已知的和或差,然後應用等腰三角形以解出之.

【作圖例題三】

已知: 直角三角形的斜邊 c 及二直角邊的和 $(a+b)$,
求作 $rt.\triangle$.

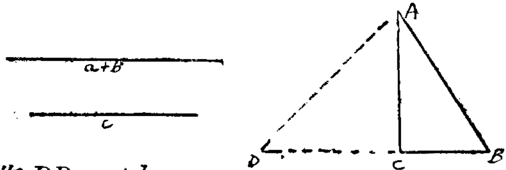
分析:



若延長 $rt.\triangle$ 的一腰 $B'C'$ 到 D'.
使 $C'D'=A'C'$.
則 $\triangle A'C'D'$ 爲等腰直角三角形.

$$\therefore \angle D'=\frac{1}{2}(90^\circ)=45^\circ,\ D'B'=a+b,\ A'B'=c.$$

作圖:



1. 作 $DB=a+b$.
2. 作 $\angle D=45^\circ$.
3. 以 B 爲圓心, c 爲半徑作弧交 DA 於 A. 聯 AB.
4. 作 $AC\perp BD$ 於 C. 得所求之 rt.$\triangle ABC$.

證明: 1. $\angle DAC=180^\circ-90^\circ-45^\circ=45^\circ=\angle D$.

2. $\therefore AC=DC$.

3. 所以 $AC+BC=DB=a+b$.

習題五十三

1. 已知 a, $b+c$, B, 求作△.
2. 已知底與一腰之和,一個底角,求作等腰三角形.
3. 已知斜邊及二直角邊之差,求作直角三角形.
4. 已知 b, A, $c-a$, 求作三角形.
5. 已知 b, A, $a-c$, 求作△.
6. 已知 b, B, $a-c$, 求作△.
7. 已知頂角,底與一腰之和,求作等腰三角形.
8. 已知周圍及二底角,求作三角形.
9. 已知一銳角與二直角邊之和,求作直角三角形.

237. 平行四邊形作圖題 欲解平行四邊形的作圖題,須將各種平行四邊形的性質,詳細牢記,茲再列舉如下.

A. 平行四邊形的一般性質:

(1) 對邊平行.

(2) 對邊相等.

(3) 對角相等.

(4) 鄰角相補.

(5) 對角線互相平分.

(6) 被對角線分成二個全等三角形.

B. 矩形的性質——矩形除具有平行四邊形的一般性質外,尙有下列諸性質:

(1) 各角均爲直角.

(2) 對角線相等.

C. 菱形的性質——菱形除具有平行四邊形的一般性質外,尙有下列諸性質:

(1) 各邊都相等.

(2) 對角線平分各頂角且互相垂直.

D. 正方形的性質——正方形除具有平行四邊形的一般性質外,並兼有矩形及菱形的性質,卽

(1) 各邊相等,各角均爲直角.

(2) 對角線相等且互相垂直平分,並平分各頂角,(卽對角線與各邊成 45° 之角)

習題五十四

求作平行四邊形,已知:

1. 二邊及一夾角.
2. 一邊及二對角線.
3. 二邊及一對角線.

4. 二對角線及對角線的夾角.
5. 二邊及一邊上的高。
6. 周圍,一對角線,及此對角線與一邊的夾角.

求作矩形,已知:

7. 二鄰邊.
8. 一邊及對角線.
9. 對角線及二鄰邊之和.
10. 一邊及二對角線的夾角.

求作菱形,已知:

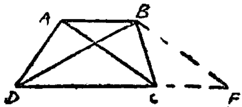
11. 周圍及一頂角.
12. 一邊及一對角線.
13. 二對角線.
14. 一對角線及一頂角.
15. 一邊及此邊上的高.
16. 高及一角.

求作正方形,已知:

17. 一邊.
18. 一對角線.
19. 一邊與一對角線之和.
20. 一邊與一對角線之差.

238. 梯形的作圖題 梯形的二平行邊叫做二底,(上底和下底),二不平行邊叫做腰.等腰梯形的對角線及底角都相等.欲解梯形的作圖題,須注意下列二種情形:

(1) 自 A 作 $AE /\!/ BC$, 則 $\triangle ADE$ 的三邊相當於二腰 AD 與 $BC(=AE)$ 及二底之差 $DC-AB(=DE)$. (因 $AE \underline{\parallel} BC$)



(2) 自 B 作 $BF /\!/ AC$, 交 DC 延長線於 F, 則 $\triangle BDF$ 的三邊相當於二對角線, BD 與 $AC(=BF)$ 及二底之和 $DC+AB$ $(=DF)$. (因 $BF \underline{\parallel} AC$)

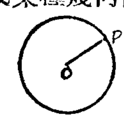
習題五十五

求作梯形, 已知:

1. 四邊.
2. 二底邊及二下底角.
3. 二底邊, 一腰及他腰的下底角.
4. 二底邊及二對角線.
5. 一底, 二對角線及對角線的夾角.

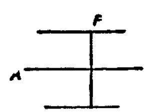
239. 軌跡　適合一定幾何條件的無窮點所成的幾何圖形, 叫做適合此條件的點的軌跡.

假定有一幾何條件, 求適合此條件的點, 若適合此條件的點不止一點, 而有無窮點, 且此無窮點的位置合成某種幾何圖形, 則此幾何圖形就叫做適合此條件的點的軌跡.



初等幾何內所涉及的軌跡不外圓與直線.

例如: (a) 距離一定點 O 1 寸的點 P 的跡軌爲以 O 點爲圓心, 而以 1 寸爲半徑的一圓.



(b) 距離一定直線 AB 1 寸的點 P 的軌跡為平行於 AB 而與 AB 相距 1 寸的二直線.

240. 軌跡定理 說明適合某種幾何條件的點的軌跡為某種幾何圖形的定理,叫做軌跡定理.

軌跡定理的證明,須證明下列二種情形:

(a) **軌跡上的任意一點必適合指定的條件.**

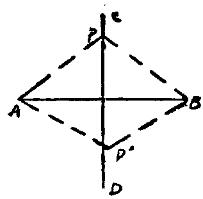
(b) **適合指定條件的任意一點,必在此軌跡上;**

或不在軌跡上的任意一點,必不適合指定條件.

若只證 (a) 而不證 (b),則在假定軌跡之外或尚有適合條件的點,因而假定的軌跡為不完全;若只證 (b) 而不證 (a),則假定軌跡上的點或有不適合指定條件的,因而假定的軌跡為不適當.

軌跡定理一　與二定點等距

241. 與二定點等距的點的軌跡為此二定點聯線的中垂線.



假設: 二定點 A 及 B, 聯線 AB, CD 為 AB 的中垂線.

求證: CD 為與 A, B 等距的點的軌跡.

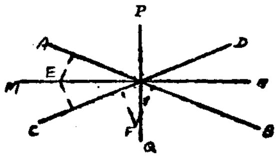
證明:

敘述	理由
1. 於 CD 上取任意點 P, 則 $PA=PB$.	1. 一線中垂線上一點與直線二端等距.
2. 若 P' 與 A,B 等距,則 P' 在 CD 線上.	2. 與一直線二端等距的點在此線的中垂線上.

3. ∴CD 爲與 A, B 等距的點的軌跡。	

軌跡定理二　與相交二直線等距

242. 與相交二直線等距的點的軌跡，爲此二直線相交二雙對頂角的二分角線。



假設：二定直線，AB 及 CD 相交於 O，MN 及 PQ 爲 $\angle AOC$ 及 $\angle BOC$ 的分角線。

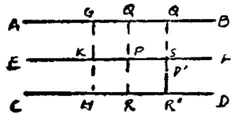
求證：MN 及 PQ 爲與 AB, CD 等距的點的軌跡。

證明：

敍　述	理　由
1. 於 MN 或 PQ 上取任意點 E，則 E 與 AB, CD 等距。	1. 分角線上一點與角的二邊等距。
2. 若 F 與 AB, CD 等距，則 F 必在分角線 MN 或 PQ 上。	2. 與角的二邊等距的點必在此角的分角線上。
3. ∴MN, PQ 爲與 AB, CD 等距的點的軌跡。	

軌跡定理三　與二平行線等距

243. 與二平行定直線等距的點的軌跡爲平行於此二線而通過其公共垂線中點的一線。



假設: 二平行線 AB, CD; $EF /\!/ AB$ 及 CD; $GH \perp AB$ 及 CD; $KG = KH$.

求證: EF 爲與 AB 及 CD 等距的點的軌跡.

證明:

敍述	理由
1. 於 EF 上取任意點 P, 過 P 作 $QR \perp AB$.	
2. 則 $QR /\!/ GH$.	2. 垂直於同一直線 AB.
3. $\therefore GK = PQ$, $HK = RP$.	3. 夾於平行線間的平行線分.
4. $\therefore PQ = RP$.	4. 假設 $GK = HK$, 等於等量.
5. 所以P與AB,CD等距.	
6. 於 EF 外取任意點 P' 過 P' 作 $Q'R' \perp AB$ 交 EF 於 S.	
7. 則 $SR' = SQ'$.	7. 證同(2—4)
8. $P'R' < SR'$ 及 SQ'.	8. 全量>分量.
9. 又 $SQ' < P'Q'$.	9. 同上.
10. $\therefore P'R' < P'Q'$.	10. 不等公理(1).
11. 所以 P' 與 AB, CD 不等距.	
12. $\therefore EF$ 爲與 AB, CD 等距的點的軌跡.	

軌跡定理四　與定點定距

244. 與定點定距的點的軌跡爲以定點爲圓心,定距爲半徑的一圓.

假設: 定點 O, 定距 r, 以 O 爲圓心 r 爲半徑的 $\odot O$.

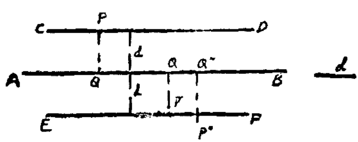
求證: $\odot O$ 爲與 O 點相距 r 的點的軌跡.

證明:

敍　述	理　由
1. 於 $\odot O$ 上取任意點 P 則 $PO=r$.	1. 圓周上一點到圓心的距離等於半徑.
2. 若 P_1 爲 $\odot O$ 內的任意點,則 $P_1O<r$.	2. 圓周內一點到圓心的距離小於半徑.
3. 若 P_2 爲 $\odot O$ 外的任意點,則 $P_2O>r$.	3. 圓周外一點到圓心的距離大於半徑.
4. $\therefore \odot O$ 爲與 O 點相距 r 的點的軌跡.	

軌跡定理五　與定直線定距

245. 與定直線定距的點的軌跡爲平行於定直線而與定直線相距定距的,在定直線兩側的二直線.



假設: 定直線 AB, 定距 d, CD 與 $EF // AB$ 而與 AB 之距為 d.

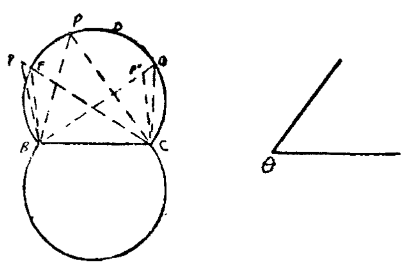
求證: CD 及 EF 為與 AB 相距 d 的點的軌跡.

證明:

敍述	理由
1. 於 CD 或 EF 上取任意點 P. 過 P 作 $PQ \perp AB$ 於 Q.	
2. 則 $PQ=d$.	2. 二平行線間處處等距.
3. 若 P' 或 P'' 為不在 CD 或 EF 上的任意點, 作 $P'Q' \perp AB$ 於 Q', $P''Q'' \perp AB$ 於 Q''.	
4. 則 $P'Q'<d$, $P''Q''>d$.	4. 全量>分量.
5. $\therefore CD$ 及 EF 為與 AB 相距 d 的點的軌跡.	

軌跡定理六 對定線分張定角

246. 對定線分張定角的點的軌跡為以定線分為弦而以定角為弓形角的二圓弧.



假設：定線分 BC，定角 θ，$\overparen{BDC}$ 及 $\overparen{BEC}$ 爲以 BC 爲弦而以 $\angle\theta$ 爲弓形角的二弧。

求證：$\overparen{BDC}$ 及 $\overparen{BEC}$ 爲對 BC 張定角 θ 之點之軌跡。

證明：

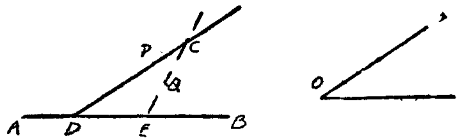
敘　述	理　由
1. 於 $\overparen{BDC}$ 或 $\overparen{BEC}$ 上取任意點 P。聯 PB，PC。	
2. 則 $\angle BPC=\theta$。	2. 弓形角相等。
3. 若 P' 或 P'' 爲不在 $\overparen{BDC}$ 或 $\overparen{BEC}$ 上的任意點，聯 $P'B$，$P'C$，$P''B$，$P''C$。	
4. 則 $\angle BP'C<\angle BFC$，$\angle BP''C>\angle BGC$。	4. 外角>不相鄰內角。
5. $\therefore\angle BP'C<\theta$。$\angle BP''C>\theta$。	5. 代入。
6. $\therefore\overparen{BDC}$ 及 $\overparen{BEC}$ 爲對 BC 張 θ 角的點的軌跡。	

247. 系　對定線分張直角的點的軌跡爲以此直線爲直徑的一圓。

軌跡定理七　與定點的聯線與定線交定角

248. 與定點的聯線與定直線交成定角的點的軌跡爲過定點而與定線交成定角的直線。

假設：定直線 AB，定點 C，定角 O，直線 CD 爲過 C 而與 AB



交成 $\angle CDB=\angle O$ 的直線,

求證: 與 C 點的聯線與 AB 交成一等於 $\angle O$ 的角的點的軌跡爲直線 CD。

證明:

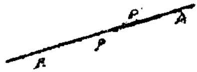
敍述	理由
1. 於 CD 上取任意點 P. 則 PC 與 AB 的交角 $\angle PDB=\angle O$.	1. 題設.
2. 於 CD 線外取任意點 Q.	
3. 聯 CQ. 延長 CQ 交 BA 於 E.	
4. 則 $\angle QEB>\angle CDB$.	4. 三角形外角.
5. 即 $\angle QEB>\angle O$.	5. 代入.
6. $\therefore CD$ 爲所求的軌跡.	

249. 系一 與定點的聯線與定直線垂直的點的軌跡爲過定點而與定直線垂直的直線.

250. 系二 與定點的聯線,與定直線平行的點的軌跡爲過定點而與定直線平行的直線.

軌跡定理八 與定點的聯線過另一定點

251. 與一定點的聯線過另一定點的點的軌跡爲此二定點的聯線.



假設: 定點 A 及 B.

求證: 與 A 點的聯線過 B 點的點的軌跡爲 AB 線.

證明:

敍　述	理　由
1. 於 AB 上取任意點 P. 則 PA 過 B 點.	1. 同一直線.
2. 若 $P'A$ 的聯線過 B 點, 則 P' 在 AB 線上.	2. 過二點祇有一直線.
3. $\therefore AB$ 線爲所求的軌跡.	

252. 軌跡問題　已知一軌跡的幾何條件,而欲求其軌跡的圖形的問題,叫做**軌跡問題**.

軌跡問題的解法　軌跡問題的解法分爲下列二種:

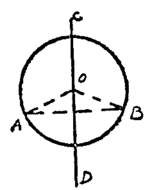
(a) **基本證明法**　先從研究結果,說出軌跡爲何種圖形,然後再用軌跡定理之證法證明之.

(1) 在軌跡上的任意點,適合所設條件.

(2) 在軌跡外的任意點,不適合所設條件;或適合條件的任意點,必在軌跡上.

(b) **應用軌跡定理**　將所設的幾何條件,逐步分析,使變成已有軌跡定理的條件,然後再應用已知定理,說出軌跡.

【軌跡例題一】



求過二定點 A, B 諸圓的圓心軌跡.

設: 二定點 A 及 B.

求: 過 A, B 二點諸圓的圓心軌跡.

解: 若 $\odot O$ 過 A 及 B.

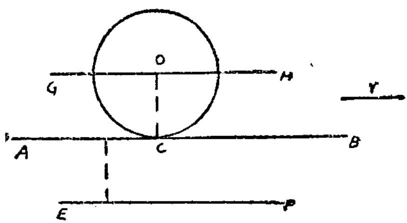
則 $OA=OB$ (半徑相等).

$\therefore$圓心 O 與 A, B 等距.

所以此軌跡爲 AB 的中垂線.(軌跡定理一)

【軌跡例題二】

求切於定直線 AB 而有定半徑 r 諸圓的圓心的軌跡.



設: 定直線 AB, 定半徑 r.

求: 以 r 爲半徑而切於 AB 的諸圓的圓心軌跡.

解: 若 $\odot O$ 切 AB 於 C, 而半徑爲 r.

則 $OC\perp AB$ (切線$\perp$半徑)

而 $CC=r$

$\therefore O$ 點與 AB 的距離爲定距 r

所以此軌跡爲與 AB 相距 r 而在其兩側的二平行線, GH 及 EF (軌跡定理五)

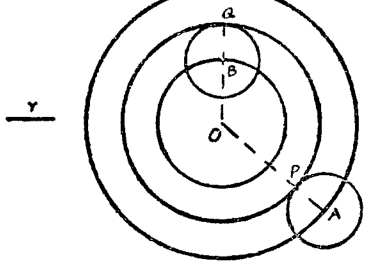
【軌跡例題三】

求切於定圓 O 而以定長 r 爲半徑諸圓的圓心軌跡.

設: 定圓 O, 其半徑爲 R. 另一定長 r.

求: 以 r 爲半徑而切於 $\odot O$ 諸圓的圓心軌跡.

解: 若 $\odot A$ 外切 $\odot O$ 於 P, 而其半徑爲 r.



則 O, P, A 在一直線上.（聯心線必過切點）

$OA=R+r$ 爲定値

若 $\odot B$ 內切 $\odot O$ 於 Q, 而其半徑爲 r.

則 O, B, Q 在一直線上（聯心線必過切點）

$OB=R-r$ 爲定値.

$\therefore$ 軌跡爲以 O 爲圓心, 以 $R+r$ 及 $R-r$ 爲半徑的二同心圓.（軌跡定理四）

習 題 五 十 六

1 求一定圓的半徑的中點軌跡.

2. 求過定點 A 而有定半徑 r 諸圓的圓心軌跡.

3. 求切於二平行線諸圓的圓心軌跡.

4. 求切於二相交定直線諸圓的圓心軌跡.

5. 求以定直線 AB 爲斜邊的直角三角形的直角頂點軌跡.

6 求以定直線 AB 爲底邊的等腰三角形的頂點的軌跡.

7. 求切定直線 AB 於其上一定點 P 的諸圓的圓心軌跡.

8. 求切於定圓上一定點 P 的諸圓的圓心軌跡.

9. $\triangle ABC$ 的底 BC, 有定長定位置, h_a 爲定値, 求頂點 A 的

軌跡.

10. $\triangle ABC$ 的底 BC, 有定長定位置, m_a 爲定値, 求頂點 A 的軌跡.

11. 矩形的底有定長定位置,求對角線交點的軌跡.

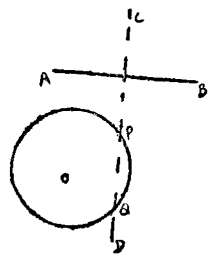
12. 求定圓內諸定長弦的中點軌跡.

13. 求定圓內平行於定直線 AB 諸弦的中點軌跡.

14. 定直線 AB 上作任意一直角三角形 ABC,$\angle C$ 爲直角, 延長 AC 到 D 使 $CD=BC$, 求 D 點的軌跡.

253. 交軌作圖法 作圖時應用軌跡的交點而作成的,叫做交軌作圖法:

【例題一】



於定圓 O 上求與定點 A,B 等距的點。

已知: 定圓 O, 定點 A 及 B.

求作: 於定圓 O 上求與 A, B 等距的點.

作法: 1. 聯 AB.

2. 作 AB 的中垂線 CD 交 $\odot O$ 於 P 及 Q.

3. 則 P 及 Q 爲所求的點.

證明:

敍述	理由
1. P 與 A, B 等距.	1. P 在 AB 的中垂線上.
2. Q 與 A, B 等距.	2. Q 在 AB 的中垂線上.

討論: 1. 若 CD 不交 $\odot O$, 則無解.

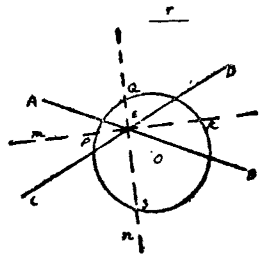
2. 若 CD 切於 $\odot O$, 則有一點.

3. 若 CD 爲 $\odot O$ 的割線,則有二點.

【例題二】

求作與二相交定直線 AB, CD 等距, 且與定點 O 有定距 r

的點。



已知：AB, CD 相交於 E, 定點 O 及定距 r。

求作：求與 AB, CD 等距且與 O 的距離爲 r 的點。

作法：1. 作 $\angle AEC$ 及 $\angle AED$ 的分角線，m 及 n。

2. 以 O 爲圓心，r 爲半徑作圓交 m 及 n 於 P, Q, R, S.

3. 則 P, Q, R, S 爲所求的點。

證明：(從略)

討論：1. 若圓 O 與 m, n 均不相交，則無解。

2. 若 $\odot O$ 切 m, n 中的一線，則可得一點。

3. 若 $\odot O$ 與 m, n 中的一線相交，則可得二點。

4. 若 $\odot O$ 與 m, n 皆相切，則可得二點。

5. 若 $\odot O$ 與 m, n 中的一線相切，一線相交，則可得三點.

6. 若 $\odot O$ 與 m, n 均相交，則可得四點.

習題五十七

1. 求一點與定點 A, B 等距，且與 C 點有定距 d。
2. 求一點與二平行線 l, m 等距，且與二相交線 p, q 等距。
3. 求一點與一線 l 有定距 d, 且與二點 A, B 等距。
4. 求一點與二定點 A, B 等距，且與二平行線 l, m 等距。
5. 求一點與一線 l 有定距 d, 且與二平行線 m, n 等距。
6. 求一點與 A, B 二點等距，且與二交線 l, m 等距。
7. 求一點與二交線 l, m 等距，且與一定點 A 有定距 d。
8. 於一定直線 AB 上求一點與二定點 P, Q 等距。

9. 於一定圓 O 上求一點與二相交直線 l, m 等距.
10. 於三角形的一邊上求一點與他二邊等距.
11. 於定直線 AB 上求一點對另一直線 CD 張直角.
12. 於定直線 AB 上求一點對另一直線 CD 張已知角 Q.
13. 求一點對二已知線 AB 及 CD 各張一定角, α 及 β.
14. 已知 A, a, h_a 求作△.
15. 已知 A, a, m_a 求作△.
16. 已知頂角,及頂角分角線所分成底邊的二線分,求作△.

254. 作圓問題 作圓的問題在解決圓心的位置,及半徑的長,關於圓心的位置,應特別注意下列各種情形:

(1) 已知半徑 r, 且過一定點 P 的圓的圓心, 必在以 P 為圓心, 而以 r 為半徑的圓周上.

(2) 已知半徑 r, 且切於一定直線 l 的圓的圓心, 必在與 l 平行而與 l 相距 r 的二平行線上.

(3) 已知半徑 r, 且切於一半徑為 R 的定圓 O 的圓的圓心必在以 O 為圓心,以 $R+r$ 及 $R-r$ 為半徑的二同心圓周上.

(4) 過二定點 A, B 諸圓的圓心,必在 AB 的中垂線上.

(5) 切二平行直線的圓的圓心, 必在二平行線間公垂線的中垂線上,其半徑必等於二平行線間距離的一半.

(6) 切二相交直線的圓的圓心, 必在此二線相鄰兩交角的二分角線上.

(7) 切定直線 AB 於一定點 P 的圓的圓心,必在過 P 點而垂直於 AB 的直線上.

(8) 切定圓 O 於一定點 P 的圓的圓心,必在過 P 點的半徑 PO 或其延長線上.

習題五十八

已知半徑 r，求作一圓.

1. 過二定點 A 及 B.
2. 過一定點 A，且切一定直線 l.
3. 過一定點 A，且切一定圓 O.
4. 切二相交定直線 l 及 m.
5. 切二定圓 O_1 及 O_2.
6. 切一定直線 l，且切一定圓 O.

求作一圓：

7. 切一定直線 AB 於 P 點，且過線外一定點 C.
8. 切一定圓 O 於 P 點，且過圓外一定點 C.
9. 切一定直線 AB，且切一定圓 O 於 P 點.

    (提示　作 P 點的切線)
10. 切一定直線 AB 於 P 點，且切一定圓 O.

    (提示：過 P 點作 AB 的垂線，並截 $PQ=PQ'$ =圓半徑)

總習題三

1. 求過線外一點作一直線，與已知直線成定角.
2. 在一三角形內作一直線，平行於底邊，而截於他二邊間的線分有定長.
3. 求過一定點作一直線與二已知平行線相交，而使截於二平行線間的線分等於定長.
4. 求過圓內一定點作一弦，等於定長.
5. 求於定圓內作一直徑，使與一已知點的距離等於定長.
6. 求過一定點作一直線，使與另一已知點有定距.
7. 求過一點作一直線，使與另二定點等距.

8. 過圓上二定點作相等且平行的二弦.

9. 求過一定點作一直線,與另二交線成等角.

10. 求作一線平分二不平行線的交角,但不得延長使二線相交.

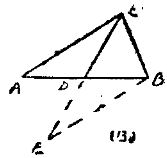
求作三角形,已知:

11. a, h_a, R. (外接圓半徑)

12. h_a, h_b, B.

13. a, b, m_c.

(提示: 先作$\triangle CBE$)



(13)

14. a, m_c, C.

15. m_a, h_b, h_c.

16. m_a, m_b, h_c.

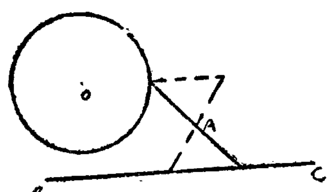
17. m_a, m_b, m_c.

18. 求於圓內作一內接三角形,使三角各等於已知角.

19. 求於圓外作一外切三角形,使三角各等於已知角.

20. 自圓上一定點作一弦,被另一已知弦所平分.

21. 過 A 點作一直線,交 BC 於 D, 交 $\odot O$ 於 E, 使 $EA=AD$.



(21)

22. 作二圓的外公切線.

23. 作二圓的內公切線.

24. 求過圓內一定點諸弦的中點軌跡.

25. 求過圓上一定點諸弦的中點軌跡.

26. 求過圓外一定點諸割線的圓內部分的中點軌跡.

27. 求圓內一定點與圓上各點相聯諸線的中點軌跡.

28. 自圓外一定點與圓上各點相聯,求聯線中點的軌跡.

29. 平行四邊形的一邊有定長及定位置，其一鄰邊有定長，但無一定位置，求此平行四邊形對角線交點的軌跡.

30. 三角形的底邊的長及位置一定，頂角一定，求此三角形內心的軌跡.

第三編　比例及相似形

255. 比　二數或同類二量間倍數的關係叫做比.

表示二數或同類二量間倍數關係的式子叫比式,如 $a:b$ 或 $\frac{a}{b}$, 讀如 a 比 b.

a 與 b 叫做比的二項, a 叫**前項**, b 叫**後項**, $\frac{a}{b}$ 之值叫比值.

比是倍數關係,故比的二項須爲數或同單位的量;比值則無單位,是數而非量,故二量相比時可視同數値之比.

256. 比例　表示二比相等的等式叫做比例.

如: $a:b=c:d$; 或 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 叫做比例.

a, b, c, d 叫做比例的四項; a 與 c 叫前項, b 與 d 叫後項; a 與 d 叫**外項**, b 與 c 叫**內項**.

註: $a:b=c:d$ 與 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 寫法雖異,意義相同.

257. 第四比例項　比例的第四項叫做前三項的第四比例項.

如: $a:b=c:d$, 則 d 叫做 a, b, c 的第四比例項, 前三項須依次提及,不可顚倒.

258. 比例中項　比例的第二項與第三項相同時,此相同之量叫做第一項與第四項的比例中項.

如: $a:b=b:c$, 則 b 叫做 a 與 c 的比例中項.

259. 第三比例項　比例的第二項與第三項相同時,第四項叫做第一項與第二項的第三比例項.

如: $a:b=b:c$, 則 c 叫做 a 與 b 的第三比例項.

命題一　定理

260. 比例之外項之積等於內項之積.

假設: $a:b=c:d$.

求證: $ad=bc$.

證明:

敍　述	理　由
1. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.	1. 假設.
2. 各以 bd 乘,得 $ad=bc$.	2. 等倍.

註: 依比的定義,比的各項,都當做數值,故可相乘.

261. 系一　二數之比例中項等於二數之積的平方根.

如: $a:b=b:c$, 則 $b=\sqrt{ac}$.

262. 系二　若二比例之任意三對應項分別相等,則第四對應項亦相等.

若 $a:b=c:d$, $a':b'=c':d'$, 而 $a=a'$, $b=b'$, $d=d'$ 則 $c=c'$.

命題二　定理

263. 若 $a:b=c:d$, 則 $a:c=b:d$, 叫做比例的更比.

假設: $a:b=c:d$.

求證: $a:c=b:d$.

證明:

敍　述	理　由
1. $a:b=c:d$	1. 假設.
2. $ad=bc$.	2. 外項之積=內項之積.
3. 各以 cd 除之,得 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ 即 $a:c=b:d$.	3. 等分公理.

命題三　定理

264. 若 $a:b=c:d$, 則 $b:a=d:c$, 叫做比例的反比.

假設: $a:b=c:d$.

求證: $b:a=d:c$.

證明:

敍　述	理　由
1. $a:b=c:d$.	1. 設.
2. $bc=ad$.	2. 外項之積＝內項之積.
3. 各以 ac 除之,得 $b:a=d:c$.	3. 等分公理.

命題四　定理

265, 若 $a:b=c:d$, 則 $a+b:b=c+d:d$, 叫做比例的合比.

假設: $a:b=c:d$.

求證: $a+b:b=c+d:d$.

證明:

敍　述	理　由
1. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.	(略).
2. 各加 1, 得 $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$.	
3. 通分, $\frac{a+b}{b}=\frac{c+a}{d}$.	
4. 即 $a+b:b=c+d:d$.	

註: 理由太簡單時,可以酌量省略.

命題五 定理

266. 若 $a:b=c:d$, 則 $a-b:b=c-d:d$, 叫做比例的分比.

假設: $a:b=c:d$.

求證: $a-b:b=c-d:d$.

證明:

敍述	理由
1. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.	(略).
2. $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$.	
3. $\therefore \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.	

命題六 定理

267. 若 $a:b=c:d$, 則 $a+b:a-b=c+d:c-d$, 叫做比例的合分比.

假設: $a:b=c:d$.

求證: $a+b:a-b=c+d:c-d$.

證明:

敍述	理由
1. $a:b=c:d$.	
2. $a+b:b=c+d:d$.	2. 合比.
3. $a-b:b=c-d:d$.	3. 分比.
4. 相除,得 $a+b:a-b=c+d:c-d$.	

命題七 定理

268. 二比例之對應項相乘,四積亦成比例.

假設: $a : b = c : d$, $a' : b' = c' : d'$.

求證: $aa' : bb' = cc' : dd'$.

證明:

敍述	理由
1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}$.	(略).
2. 相乘,得 $\frac{aa'}{bb'} = \frac{cc'}{dd'}$.	
即 $aa' : bb = cc' : dd'$.	

269. 系一 若 $\boldsymbol{a : b = c : d}$, 則 $\boldsymbol{ma : nb = mc : nd}$.

270. 系二 若 $\boldsymbol{a : b = c : d}$, 則 $\boldsymbol{ma : mb = c : d}$.

271. 系三 $\boldsymbol{ma : mb = a : b}$.

命題八 定理

272. 比例各項之同次方積或同次方根仍成比例.

假設: $a : b = c : d$.

求證: $a^n : b^n = c^n : d^n$, $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$.

證明:

敍述	理由
1. $a : b = c : d$.	(略).
2. 即 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.	
3. $\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{c}{d}\right)^n$.	
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$.	
4. $\therefore a^n : b^n = c^n : d^n$.	
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$.	

命題九　定理

273. 一串等比中,任意若干前項的和與其對應各後項的和之比等於此一串等比之任一比.

假設: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=\dfrac{g}{h}$.

求證: $\dfrac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=\dfrac{g}{h}$.

證明:

敍　述	理　由
1. 令 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=\dfrac{g}{h}=r$.	(略).
2. 則 $a=br$, $c=dr$. $e=fr$, $g=hr$.	
3. $a+c+e+g=br+dr+fr+hr=(b+d+f+h)r$.	
4. $\therefore \dfrac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=r$.	
5. $\therefore \dfrac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ 等.	

習題五十九

1. 設 $a:b=c:d$.

　求證 $a+c:b+d=a-c:b-d$.

2. 設 $a+b:a-b=c+d:c-d$.

求證 $a:b=c:d$.

3. 設 $a:b=c:d$.

求證 $ma+nb:mc+nd=a:c$.

4. 設 $a:b=c:d$.

求證 $mc+na:md+nb=mc-na:md-nb$.

5. 設 $a:b=c:d=e:f=g:h$.

求證 $3a+5c+me+ng:3b+5d+mf+nh=2c-g:2d-h$.

274. 常數與常量　在討論某一問題時,假定為固定不變之數或量叫做常數或常量.

275. 變數與變量　在討論某一問題時,假定隨時變更的數或量叫做變數或變量.

276. 極限　在討論某一問題時,若一變數或變量 x 與一常數或常量 a 之間之差,永遠存在,但逐漸減小,可以小至較任意指定之甚小之常量更小,則此常量或常數 a 叫做此變量或變數 x 之極限,列式如下:

$$x \to a \quad 或 \quad x \doteq a$$

或 $\lim x=a$, 讀如 x 以 a 為極限.

【例一】

一循環小數 $x=.3333\cdots\cdots$之值,隨所取小數之位數而變,位數愈多,則 x 之值愈大,

如取一位小數,則 $x=.3$

如取二位小數,則 $x=.33$

如取三位小數,則 $x=.333$

....

故 x 之值為變數.

今有一分數 $\frac{1}{3}$，則 $\frac{1}{3}$ 爲常數。

而變數 $x=.333\cdots\cdots$ 與常數 $\frac{1}{3}$ 間之差 d，則因 x 所取小數位數之逐漸增加而逐漸減小，有如下述，

若 $x=.3$　　則 $d=\frac{1}{3}-.3=\frac{1}{3}-\frac{3}{10}=\frac{1}{30}$。

若 $x=.33$　　則 $d=\frac{1}{3}-.33=\frac{1}{3}-\frac{33}{100}=\frac{1}{300}$。

若 $x=.333$　則 $d=\frac{1}{3}-.333=\frac{1}{3}-\frac{333}{1000}=\frac{1}{3000}$。

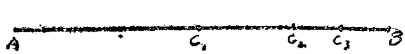
…………………………………………

顯而易見，x 與 $\frac{1}{3}$ 間之差 d 可以小至較任意指定之甚小之常數更小，

故 x 以 $\frac{1}{3}$ 爲極根，卽 $.333\cdots\cdots\to\frac{1}{3}$。

注意： 變數與極限間之差，必須可以小至較任意指定之常數更小；否則不能叫做極限；譬如 .333……與 .4 之間，其差値雖亦逐漸減小，但如假定一常數 .06，則 .4 與 .333……之差，不論取若干位小數，決不能使此差小於 .06，故 .4 非 .33,……之極限.

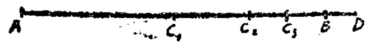
【例二】



若有一直線 AB，取 AB 之中點爲 C_1，再取 C_1B 之中點爲 C_2，再取 C_2B 之中點爲 C_3，如此連續不已，而令 AC_1，AC_2，AC_3，$AC_4\cdots\cdots$等之値，叫做 AC；則 AC 爲變量而 AB 爲常量，且 AB 與 AC 間之差 BC 逐漸減小，可以小至比任意指定之線分更小，故

AB 為 AC 之極限，即 $AC \to AB$.

注意：若 AB 之延長線上有一定點 D，而 C 之位置仍如上述，則 AD 與 AC 之差雖亦逐漸減小，但不能小至比 BD 更小，故 AD 不能稱為 AC 之極限.



277. 極限定理一　若 $x \to a$，則 $\frac{x}{m} \to \frac{a}{m}$，$mx \to ma$，$m$ 為任意常數或常量.

假設：$x \to a$.

求證：$\frac{x}{m} \to \frac{a}{m}$，$mx \to ma$.

證明：

敘述	理由
1. $x \to a$.	1. 設.
2. $a - x = s$（s 為可以小於任意指定常數之變數）	2. 極限定義.
3. $\frac{a}{m} - \frac{x}{m} = \frac{s}{m}$，$ma - mx = ms$.	3. 等分或等倍公理.
4. 但 $\frac{s}{m}$ 及 ms 仍為可以小於任意指定常數之變數.	4. 因 s 可以較前更小 m 倍或 m 倍以上.
5. $\therefore \frac{x}{m} \to \frac{a}{m}$，$mx \to ma$.	5. 極限定義.

278. 極限定理二　二變數（或變量）各以一常數（或常量）為極限，而二變數（或變量）常等，則二極限必相等.

假設：$x \to a$，$y \to b$　且，$x = y$.

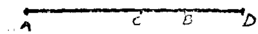
求證: $a=b$.

證明:

敍　述	理　由
1. $x \to a$, $y \to b$.	1. 設.
2. $\therefore a-x=s$ $b-y=s'$. (s 及 s' 均爲可以小於任意指定值之變數).	2. 極限定義.
3. 若 $a>b$, 則 $a=b+c$, 而 c 爲常量.	3. 臨時假定.
4. 則 $a-y=b+c-y$ $=c+s'$.	4. 代入.
5. $\therefore a-x=c+s'$, 卽 $a-x$ 之差將不能小於常量 c.	5. $x=y$, 代入.
6. 故 x 不能以 a 爲極限.	6. 不能適合極限定義.
7. $\therefore a$ 不能 $>b$.	7. (6) 與假設不符.
8. 同理 b 不能 $>a$.	8. (3) 至 (7).
9. $\therefore a=b$.	

279. 可通約線分與不可通約線分　有二線分 a 及 b, 若可以有一第三較短之線分 c, 使 a 與 b 均爲 c 之整倍量時, a 與 b 叫做可通約線分; 若不能有一第三較短之線分 c, 使 a 與 b 均爲 c 之整倍量時, a 與 b 叫做不可通約線分。

280. 線分的內分和外分　線分 AB 內有一點 C 時, C 叫做 AB 的內分點, 內分 AB 成二線分 AC 及 CB. 線 AB 之延長線上有一點 D 時, D 叫做 AB 的外分點, 外分 AB 成二線分 AD 及 DB.

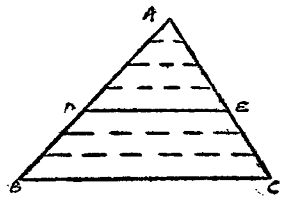


全線分之一端至分點爲一分，分點至另一端爲又一分；若線分不計正負，則內分時全線分等於二分之和，外分時全線分等於二分之差。

如圖：內分時，$AC+CB=AB$；外分時，$AD-BD=AB$。

命題十　定理

281. 平行於一三角形的一邊而交其他二邊之直線，分其他二邊成比例線分.



假設： $\triangle ABC$，$DE /\!/ BC$。

求證： $AD:DB=AE:EC$。

證明： (甲)若 AD 與 DB 爲可通約線分。

敍述	理由
1. AD, DB 爲可通約線分，則必有一線分 d，使 AD, DB 均爲 d 之整倍量。	1. 可通約線分定義。
2. 若 $AD=md$, $DB=nd$. 則 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{md}{nd}=\dfrac{m}{n}$。	
3. 分 AD 成 m 等分，DB 成 n 等分。	

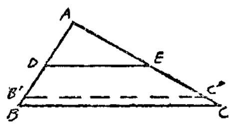
4. 過各分點作 BC 之平行線，則各線分 AE 成 m 等分，EC 成 n 等分，各各相等。

4. 三或三以上平行線於一截線上截取相等線分，則在他截線上亦截取相等線分。

5. 令 AC 上之一線分為 e，則 $AE=me$，$EC=ne$。

6. $\therefore \dfrac{AE}{EC}=\dfrac{me}{ne}=\dfrac{m}{n}$。

7. $\therefore \dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$，即 $AD:DB=AE:EC$。



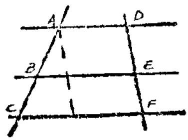
(乙)若 AD，DB 為不可通約線分。

敍述	理由
1. 分 AD 成若干等分，使一分之長為 d，於 DB 上連續截取等於 d 長之線分，因 AD，DB 為不可通約線分，故 DB 必非 d 之整倍量，故截至 DB' 之後，必剩 $B'B<d$。	1. 不可通約線分定義。
2. 作 $B'C' \parallel BC$。	

3. 則 $\frac{AD}{DB'}=\frac{AE}{EC'}$	3. (甲),因 AD, DB' 爲可通約線分。
4. 若分 AD 成更多等分,則每分 d 之長可以更小,因此 $B'B\ (<d)$ 亦可更小,DB' 逐漸增大. EC' 亦隨 DB' 而逐漸增大。	
5. 若分 AD 成非常多之相等線分,則每分 d 之長可以小至較任意指定之線分更小,BB' 及 CC' 亦隨之而小至較任意指定之線分更小。	
6. 故 $DB'\to DB$; $EC'\to EC$。	6. 極限定義。
7. $\frac{DB'}{AD}\to\frac{DB}{AD}$ $\frac{EC'}{AE}\to\frac{EC}{AE}$.	7. 極限定理 I。
8. 但 $\frac{AD}{DB'}=\frac{AE}{EC'}$.	8. (3)。
9. $\therefore \frac{DB'}{AD}=\frac{EC'}{AE}$.	9. 反比定理。
10. $\therefore \frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$.	10. 極限定理 II。
11. 即 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$, 或 $AD:DB=AE:EC$.	11. 反比定理。

282. 系一　**若一線平行於三角形一邊而交其他二邊，則他二邊中之任一邊與此邊之任一線分之比等於他一邊與其對應線分之比.**

如命題之圖，$AB : AD = AC : AE$ (合比定理).

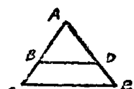


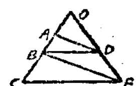
283. 系二　**三條或三條以上之平行線在任意二截線上截取比例線分.**

$AB : BC = DE : EF$.

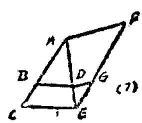
習題六十

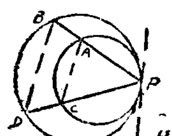
1. 若 $BD /\!/ CE$，$AB=3$，$BC=5$，$AD=6$，求 DE.
2. 若 $BD /\!/ CE$，$AB=2$，$BC=3$，$AE=6$，求 AD 及 DE.
3. 若 $BD /\!/ CE$，$AB=2BC$，$AE=9$，求 AD 及 DE.
4. 若 $BD /\!/ CE$，$AC=3AB$，$DE=10$，求 AE.
5. 若 $BD /\!/ CE$，$AD /\!/ BE$，求證 $OA : OB = OB : OC$.
6. 若 $BD /\!/ CE$，$DF /\!/ EG$，求證 $AC : BC = AG : FG$.
7. 若 $BD /\!/ CE$，$DG /\!/ AF$，求證 $AC : AB = EF : FG$.
8. 二圓內切，從切點作大圓之二弦，則二弦被小圓分成等比.


(1, 2, 3, 4)


(5)

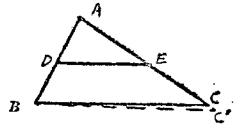

(6)


(7)


(8)

命題十一　定理

284. 一直線分三角形的二邊成比例線分,則這直線平行於第三邊.



假設: $\triangle ABC$, $AD:DB=AE:EC$.

求證: $DE/\!/BC$.

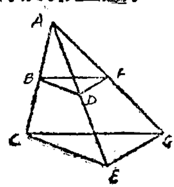
證明:

敍述	理由
1. 過 B 作 $BC'/\!/DE$ 交 AC 於 C'.	
2. 則 $AD:DB=AE:EC'$.	2. 命題十.
3. 但 $AD:DB=AE:EC$.	3. 設.
4. $\therefore EC'=EC$.	4. 二比例之三對應項分別相等,則第四對應項亦等.
5. C' 與 C 重合.	5. 直線相等定義.
6. $\therefore BC'$ 與 BC 重合.	6. 二點決定一直線.
7. $\therefore DE/\!/BC$.	7. 因 $DE/\!/BC'$.

附註: 本定理爲命題十之逆定理.

285. 系　若一直線交三角形的二邊,使一邊與其一線分之比等於他邊與其對應線分之比,則這直線平行於第三邊.

習題六十一

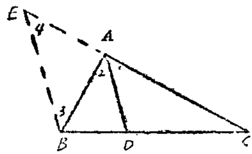


1. 若 $BD/\!/CE$, $DF/\!/EG$, 求證 $CG/\!/BF$.

2. 若 $BD // CE$, $BF // CG$,
求證 $DF // EG$.

命題十二　定理

286. 三角形的一個內角分角線，分對邊成二線分，與鄰邊成比例.



假設: $\triangle ABC$，分角線 AD 交 BC 於 D.

求證: $BD : DC = AB : AC$.

證明:

敍述	理由
1. 作 $BE // AD$ 與 CA 之延長線交於 E.	
2. $BD : DC = EA : AC$.	2. 平行於△一邊的直線分他二邊成比例.
3. $\angle 2 = \angle 3$.	3. 平行線的內錯角.
4. $\angle 1 = \angle 4$.	4. 平行線的同位角.
5. $\angle 1 = \angle 2$.	5. AD 爲分角線.
6. $\therefore \angle 3 = \angle 4$.	6. 等於等量.
7. $AB = EA$.	7. 二∠相等則對邊亦等.
8. $\therefore BD : DC = AB : AC$.	8. 代入 (2).

習題六十二

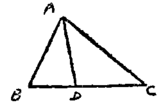
1. AD 爲 $\angle A$ 的分角線，求 BD 及 DC，已知:

(a) $AB=8$, $AC=10$, $BC=9$.

(b) $AB=6$, $AC=8$, $BC=10\frac{1}{2}$.

(c) $AB=9$, $AC=18$, $BC=21$.

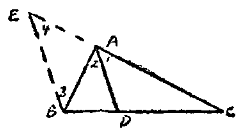
(d) $AB=21$, $AC=14$, $BC=25$.



2. 若$\triangle ABC$之三邊為7,8,9,求三邊為對角內角分角線所分成之各線分.

命題十三 定理

287. 若自三角形的一頂作直線內分對邊成二線分與鄰邊成比例,則此線必平分頂角.



假設: $\triangle ABC$, $BD:DC=AB:AC$.

求證: AD平分$\angle BAC$.

證明:

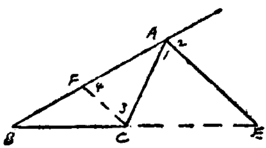
敍述	理由
1. 作$BE \parallel AD$交CA之延長線於E.	
2. 則$BD:DC=EA:AC$.	2. 平行於$\triangle$一邊之直線分他二邊成比例.
3. 但$BD:DC=AB:AC$.	3. 設.
4. $\therefore EA=AB$.	4. 二比例之三對應項相等,則第四對應項亦等.
5. $\therefore \angle 3=\angle 4$.	5. 等腰$\triangle$底角相等.

6. 但 $\angle 4=\angle 1$.	6. 平行線之同位角.
7. 　$\angle 3=\angle 2$.	7. 平行線之內錯角.
8. $\therefore \angle 1=\angle 2$.	8. 等於等量.
9. $\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$.	

附註: 本定理爲命題十二之逆定理.

命題十四　定理

288. 三角形的一個外角分角線,外分對邊成二線分與鄰邊成比例.



假設: $\triangle ABC$, $\angle A$ 之外角分角線 AE 交 BC 之延長線於 E.

求證: $BE:EC=AB:AC$.

證明:

敘述	理由
1. 作 $CF \parallel EA$.	
2. $\triangle BEA$ 內, $BE:EC=AB:AF$.	2. 一線平行於△之一邊, 則第二邊與其一線分之比等於第三邊與其對應線分之比.
3. $\angle 1=\angle 3$.	3. $\parallel$線之內錯角.
4. $\angle 2=\angle 4$.	4. $\parallel$線之同位角.
5. $\angle 1=\angle 2$.	5. 分角線.
6. $\therefore \angle 3=\angle 4$.	6. 等於等量.

7. $\therefore AF=AC$.	7. △二角相等,則對邊相等.
8. $\therefore BE:EC=AB:AC$.	8. 代入 (2).

附註: 外角分角線與對邊的交點,必在對邊與較短鄰邊交點之外旁.

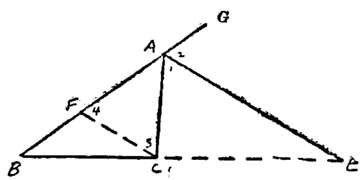
289. 系 三角形一頂之內外角分角線內外分對邊成等比.

習題六十三

1. 已知△之三邊爲 4, 6, 9, 求三邊爲外角分角線所分成之線分之長.
2. 已知△ABC之內角分角線及外角分角線交對邊於D及E, 求證 $BD:DC=BE:EC$.

命題十五 定理

290. 若自三角形的一頂作一直線外分對邊成二線分與鄰邊成比例,則此線必平分頂角之外角.



假設: △ABC, E點外分BC使$BE:EC=AB:AC$.

求證: AE平分外角$\angle CAG$.

證明:

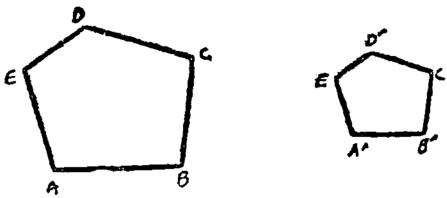
敍述	理由
1. 作$CF \parallel AE$.	
2. $BE:EC=AB:AF$.	2. 一線平行於△一邊,則第二邊與一線分之比等於第三邊與對應線分之比.

3. 但 $BE:EC=AB:AC$。	3. 設。
4. $\therefore AC=AF$。	4. 二比例三對應項相等，則第四對應項等。
5. $\angle 3=\angle 4$。	5. 等腰△底角等。
6. $\angle 1=\angle 3$。	6. //線之內錯角。
7. $\angle 2=\angle 4$。	7. //線之同位角。
8. $\therefore \angle 1=\angle 2$。	8. 等於等量。
9. $\therefore AE$ 平分 $\angle CAG$。	

附註： 本定理爲命題十四之逆定理.

291. 相似多邊形　若二多邊形的對應角各各相等，且對應邊成比例，則二多邊形叫做相似多邊形。

相似的符號爲 ～。



如圖： 若 $\angle A=\angle A'$　$\angle B=\angle B'$　$\angle C=\angle C'$

$\angle D=\angle D'$　$\angle E=\angle E'$.

$AB:A'B'=BC:B'C'=CD:C'D'=DE:D'E'$

$=EA:E'A'$.

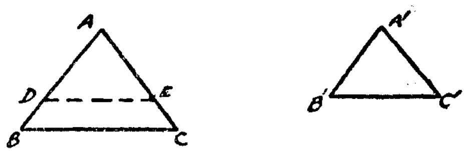
則 $⬠ABCDE \sim ⬠A'B'C'D'E'$。

根據相似定義之必然性，相似多邊形之對應角必相等，二雙對應邊成比例.

命題十六　定理

292. 若一三角形的三角，與他一三角形的三角，彼此各各

相等，則二三角形相似。



假設： $\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$；$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$.

求證： $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

證明：

敘述	理由
1. 於 AB 及 AC 上截 $AD=A'B'$ $AE=A'C'$，聯 DE。	
2. 則 $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.	2. $s.a.s.=s.a.s.$
3. $\therefore \angle ADE=\angle B'$.	3. 對應角.
4. 但 $\angle B'=\angle B$.	4. 設.
5. $\therefore \angle ADE=\angle B$.	5. 等於同量.
6. $\therefore DE \parallel BC$.	6. 同位角等.
7. $\therefore AB:AD=AC:AE$.	7. 因 $DE \parallel BC$. (282)
8. 即 $AB:A'B'=AC:A'C'$.	8. 代入.
9. 同法可證 $AB:A'B'=AC:A'C'=BC:B'C'$.	
10. $\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.	10. 角相等，邊成比例(相似定義).

注意： 相等的角叫對應角，對應角的對邊叫對應邊，對應邊的比叫做二相似形之相似比.

293. 系一　若一三角形的二角各等於他一三角形的二角，則二三角形相似.

294. 系二　若一直角三角形的一銳角等於他一直角三角形的一銳角，則二三角形相似.

295. 系三　平行於三角形一邊的直線截成一三角形與原三角形相以.

296. 系四　若二三角形都與第三三角形相似，則二三角形相似.

習題六十四

1. 若圓之二弦 AB, CD 相交於 E, 則 $\triangle ACE \sim \triangle BDE$.
2. 若從圓外一點 A, 作二割線, 交圓於 B, C; 及 D, E; 則 $\triangle ABE \sim \triangle ACD$.
3. 若 $\triangle ABC$ 的高 AD 與 BE 交於 F, 則 $\triangle AFE \sim \triangle BFD$, 且 $BF : FA = DF : FE$.
4. 梯形的對角線互分成比例線分.
5. 若圓內接 $\triangle ABC$ 的一角二等分線 AD 延長交圓於 E, 則 $\triangle ABD \sim \triangle AEC$.
6. 若 $\triangle ABC$ 中作高 AD 及 BE, 則 $AC : BC = DC : EC$.
7. 若從圓內接 $\triangle ABC$ 的頂點 A, 作高 AD 及直徑 AF, 則 $AB : AD = AF : AC$.
8. 若從圓外一點, 作切線及一割線, 則切線爲割線及其圓外線分之比例中項.
9. 若延長直徑 AB 至 C, 自 C 點作 AB 之垂線, 再過 B 點作一直線與圓及垂線交於 D 及 E, 則 $AB : BE = DB : BC$.
10. 若延長圓內接 $\triangle ABC$ 的角二等分線 CD 與圓相交於 E, 則

$EB : EC = DB : CB$, 又 EB 爲 CE 及 DE 之比例中項, 又 $AD : EB = AC : CE$。

11. 若從 AB 弦上任意一點 E 作 AD 直徑的垂線 EC 則 $AC \cdot AD = AB \cdot AE$。

(提示: 比例之外項之積等於內項之積)

12. 直角三角形的二直角邊的積等於斜邊與其高的積.

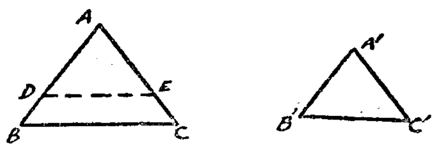
13. 若在 $\triangle ABC$ 內高 AD 與 BE 相交於 F, 則 $BF \cdot BE = BC \cdot BD$; 又 $BD \cdot DC = DF \cdot AD$.

14. AB 是直徑, BD 是切線, DA 交圓於 E, 則 $\overline{AB}^2 = AE \cdot AD$, $\overline{BE}^2 = AE \cdot ED$.

15. 若圓內接四邊形 $ABCD$ 之二邊 AB 與 DC 延長而交於 E, 且 $\angle DBA = \angle CBE$, 則 $AD \cdot BE = CE \cdot BD$.

命題十七 定理

297. 若二三角形有一角相等, 且夾邊成比例, 則二三角形相似.



假設: $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, $\angle A = \angle A'$, $AB : A'B' = AC : A'C'$

求證: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

證明:

敍述	理由
1. 於 AB, AC 上截取 $AD = A'B'$ $AE = A'C'$, 聯 DE。	
2. 則 $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$。	2. s. a. s. = s. a. s.

3. $AB:A'B'=AC:A'C'$.	3. 設.
4. $\therefore AB:AD=AC:AE$.	4. 代入.
5. $\therefore DE \parallel BC$.	5. 若一線交△之二邊使一邊與一線分之比等於他邊與其對應線分之比，則此線 // 第三邊.
6. $\angle ADE=\angle B$.	6. 平行線之同位角.
7. $\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE$.	7. 二雙角相等.
8. $\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.	8. 代入.

習題六十五

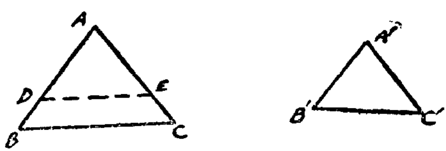
相似三角形的對應中線之比等於對應邊之比.

若高 AD : 高 $A'D'=BC:B'C'$，又 $\angle B=\angle B'$，
則 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

二相似三角形之外接圓半徑之比等於任意二對應邊之比.

命題十八 定理

298. 若二三角形的三雙邊皆成比例，則二三角形相似.



設: $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$,

$AB:A'B'=BC:B'C'=AC:A'C'$.

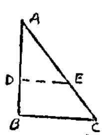
證: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

證明:

敍述	理由
1. 於 AB, AC 上截取 $AD=A'B', AE=A'C'$, 聯 DE.	
2. $AB:A'B'=AC:A'C'$.	2. 設.
3. $\therefore AB:AD=AC:AE$.	3. 代入.
4. $\therefore DE \parallel BC$.	4. (285).
5. $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.	5. (295).
6. $AB:AD=BC:DE$.	6. 相似△之對應邊成比例.
7. 但 $AB:A'B'=BC:B'C'$.	7. 設.
8. $\therefore DE=B'C'$.	8. 二比例之三對應項相等,則第四對應項亦等.
9. $\therefore \triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.	9. s. s. s. = s. s. s.
10. $\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.	10. 代入 (5).

習題六十六

1. 若一三角形的二邊及二邊中一邊上的中線,與另一三角形的對應部分成比例,則二三角形相似.
2. 若一直角三角形的斜邊與一直角邊之比,等於另一直角三角形的斜邊與一直角邊之比,則二三角形相似.



提示: 取 $AD=A'B', AE=A'C'$.

3. 在二相似三角形內，內切圓半徑之比等於任意二對應邊之比.

提示： 證 $\triangle BOD \sim \triangle B'O'D'$,

$\triangle BOC \sim \triangle B'O'C'$.

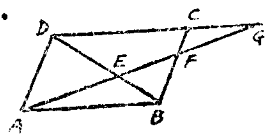
4. AD 及 $A'D'$ 爲二相似 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$ 之對應高，AF 及 $A'F'$ 爲對應分角線，求證 $AD : A'D' = AF : A'F'$.

5. 在二相似三角形 ABC 及 $A'B'C'$ 的 BC 及 $B'C'$ 邊上，取 D 及 D' 使 $\angle BAD = \angle B'A'D'$，求證 $BD : B'D' = BC : B'C'$.

6. $ABCD$ 爲平行四邊形，AG 爲直線.

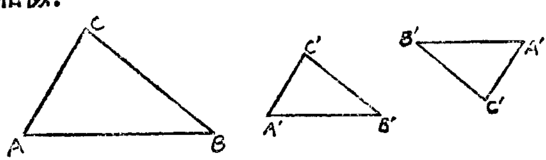
求證 $EF : EA = EA : EG$.

提示： 證明各等於 $EB : ED$.



命題十九　定理

299. 若一三角形的三邊，各平行於他一三角形的三邊，則二三角形相似.



假設： $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$; $AB \parallel A'B'$,

$AC \parallel A'C'$, $BC \parallel B'C'$.

求證： $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

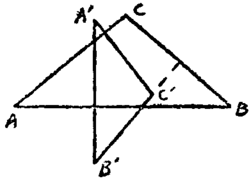
證明:

敍　述	理　由
1. $AB \parallel A'B', BC \parallel B'C', AC \parallel A'C'$.	1. 設。
2. $\angle A=\angle A'$ 或 $\angle A+\angle A'=180°$, $\angle B=\angle B'$ 或 $\angle B+\angle B'=180°$, $\angle C=\angle C'$ 或 $\angle C+\angle C'=180°$.	2. 二角之邊互相平行，則二角相等或相補。
3. 若三對角相補，則六角之和爲$3\times180°=540°$	
4. 若二雙角相補，一雙角相等，則六角之和$>360°$。	
5. 但(3)與(4)均不可能。	5. 因二三角形 6 角之和爲 $360°$。
6. ∴二雙角相等，另一雙角相等或相補。	
7. 但二雙角等，則第三雙角亦等。	
8. ∴$\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$.	8. 三雙角相等。

附註: 互相平行之邊爲對應邊.

命題二十　定理

300. 若一三角形的三邊，各垂直於另一三角形的三邊，則二三角形相似。



[證法同命題十九].

附註： 互相垂直之邊爲對應邊.

命題二十一　定理

301. 若二三角形相似,則對應高之比等於任意二對應邊之比.

假設： $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, AD, $A'D'$ 爲對應高.

求證： $AD : A'D' = BC : B'C'$.

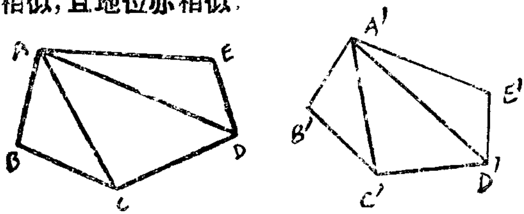
證明：

敍　述	理　由
1. $\angle B = \angle B'$.	1. 相似△之對應角.
2. $\therefore \triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$.	2. 二直角△有一銳角相等.
3. $AD : A'D' = AB : A'B'$.	3. 相似△之對應邊.
4. $\therefore AD : A'D' = AB : A'B' = BC : B'C'$.	4. 相似△之對應邊,等於同量.

命題二十二　定理

302. 二相似多邊形被一對應頂之各對角線分成同數的三

角形，各各相似，且地位亦相似.



假設：　$ABCDE \sim A'B'C'D'E'$，
對應對角線 AC, AD, $A'C'$, $A'D'$.

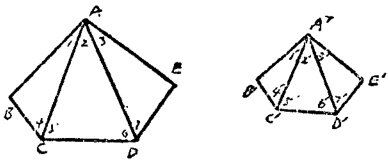
求證： $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，$\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$，
$\triangle ADE \sim \triangle A'D'E'$.

證明：

敍述	理由
1. $\angle B = \angle B'$.	1. 相似多邊形之對應角.
2. $AB : A'B' = BC : B'C'$.	2. 相似多邊形之對應邊.
3. $\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.	3. 一雙角等，夾邊成比例.
4. 同理 $\triangle ADE \sim \triangle A'D'E'$.	4. (1—3).
5. $\therefore AB : A'B' = AC : A'C' = AE : A'E' = AD : A'D' = CD : C'D'$.	5. 相似多邊形之對應邊，等於同量.
6. $\therefore \triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$.	6. 各邊成比例.

命題二十三　定理

303. 若二多邊形由同數的三角形組成，各各相似，且地位亦相似，則二多邊形相似.



假設: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$,
$\triangle ADE \sim \triangle A'D'E'$,
各△以相似地位組成二多邊形 $ABCDE$ 及 $A'B'C'D'E'$.

求證: $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$.

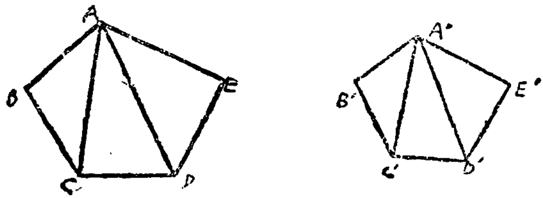
證明:

敍述	理由
1. $\angle 1=\angle 1'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle 4=\angle 4'$, $\angle 2=\angle 2'$, $\angle 5=\angle 5'$, $\angle 6=\angle 6'$, $\angle 3=\angle 3'$, $\angle 7=\angle 7'$, $\angle E=\angle E'$.	1. 相似△之對應角.
2. $\therefore \angle A=\angle A'$, $\angle C=\angle C'$ $\angle D=\angle D'$.	2. 等加等.
3. $AB:A'B'=BC:B'C'$ $=AC:A'C'=CD:C'D'$ $=AD:A'D'=AE:A'E$ $=DE:D'E'$.	3. 相似△之對應邊, 等於同量.
4. $\therefore$ ⬠$ABCDE\sim$ ⬠$A'B'C'D'E'$.	4. 對應角相等, 對應邊成比例(相似定義).

命題二十四　定理

304. 二相似多邊形的周圍之比, 等於任意二對應邊之比,

等於任意二對應對角線之比。



假設: 相似多邊形 $ABCDE$ 及 $A'B'C'D'E'$, 周圍 P 及 P', 對應對角線 AC 及 $A'C'$.

求證: $P : P' = AB : A'B' = AC : A'C'$.

證明:

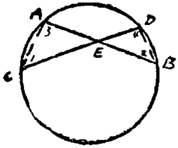
敍述	理由
1. $AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DE : D'E' = EA : E'A' = AC : A'C'$	1. 相似多邊形之對應線分.
2. $\therefore AB+BC+CD+DE+EA : A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'A' = AB : A'B' = AC : A'C'$.	2. 在一串等比中,若干前項之和比對應後項之和等於任意一比.

習題六十七

1. 若二相似多邊形之二對應邊爲5及6,小多邊形之周圍爲20,求大多邊形之周圍.

命題二十五　定理

305. 若二弦相交於圓內,則一弦的二線分的積等於他一弦的二線分的積.



假設：二弦 AB, CD 相交於圓內一點 E.

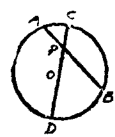
求證：$AE\cdot EB=CE\cdot ED$.

證明：

敘　述	理　由
1. 聯 AC, BD.	
2. $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$.	2. 同弓形之圓周角.
3. $\triangle ACE\sim\triangle BDE$.	3. 二雙角相等.
4. $\therefore AE:ED=CE:EB$.	4. 相似三角形之對應邊.
5. $\therefore AE\cdot EB=CE\cdot ED$.	5. 內項之積等於外項之積.

306. 系　過圓內一定點的各弦的二線分的積爲定量.

$$PA\cdot PB=PC\cdot PD=(r-PO)(r+PO)$$
$$=r^2-\overline{PO}^2.$$



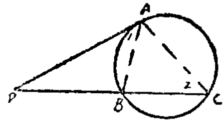
習題六十八

1. 二圓交於 A,B; 過 AB 上任意點 C, 作二圓之弦 DCE, 及 FCG, 則 $DC\cdot CE=FC\cdot CG$.
2. 一圓之半徑爲 9, 一點距圓心 5, 求過此點之弦之二線分之積.
3. 一圓之半徑爲 10, 一點距圓心 5, 若過此點作一弦使此點所分弦之二份之比爲 3 : 5, 求弦長.

命題二十六　定理

307. 若從圓外一定點, 作圓之一切線及一割線則切線是割

線及割線的圓外線分之比例中項.



假設: 切線 PA 切圓於 A, 割線 PBC.

求證: $PC : PA = PA : PB$.

證明:

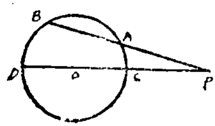
敍述	理由
1. $\angle P = \angle P$.	1. 恆等.
2. $\angle 1 = \angle 2$.	2. 圓周角及弦切角各以 $\frac{1}{2}$ $\overset{\frown}{AB}$ 度之.
3. $\triangle PAB \sim \triangle PCA$.	3. 二雙角相等.
4. $\therefore PC : PA = PA : PB$.	4. 對應邊.

308. 系一　若從圓外一點作圓之一切線及一割線,則割線與其圓外線分之積等於切線之平方.

309. 系二　若從圓外一點作任意二割線,則一割線與其圓外線分之積等於他一割線與其圓外線分之積.

310. 系三　若從圓外一點作圓諸割線,則各割線與其圓外線分之積爲定量.

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = (PO - r)(PO + r) = \overline{PO}^2 - r^2.$$



習題六十九

1. 從二相交圓之公共弦之延長線上任意點作二圓之割線, 則

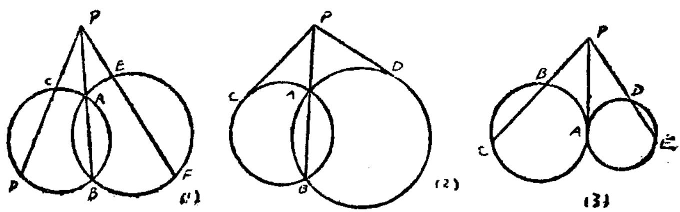
各割線與其圓外線分之積必相等.

2. 從二相交圓之公共弦之延長線上任意點,作二圓之切線,則二切線必相等.

3. 從二相切圓之切點之公切線上任意點作二圓之割線,則割線與其圓外線分之積必相等.

4. 一圓之半徑爲 8, 一點與圓心之距離爲 12, 求自此點所作圓之切線之長.

5. 一圓之半徑爲 7, 一點與圓心之距離爲 11, 若自此點作圓之割線使割線之圓外線分與圓內線分相等,求割線之長.



命題二十七　定理

311. 在任一直角三角形內作斜邊上之高,分斜邊成二線分,則

(1) 此直角三角形被分成二直角三角形,互相相似,且與原三角形相似.

(2) 斜邊上之高爲斜邊二線分之比例中項.

(3) 任一直角邊爲斜邊及鄰近此邊之斜邊線分之比例中項.

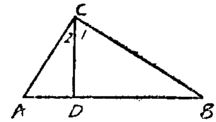
假設: $\triangle ABC$, $\angle C=90°$, $CD\perp AB$.

求證: (1) $\triangle ADC \sim \triangle BCD \sim \triangle ABC$.

(2) $AD : CD = CD : DB$,

(3) $AB : AC = AC : AD$,

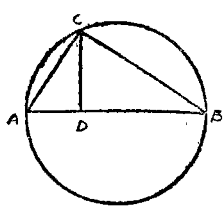
$AB : BC = BC : BD$.



證明:

敍　述	理　由
1. $\angle A = \angle 1$.	1. 各爲 $\angle 2$ 之餘角.
2. $\angle B = \angle 2$.	2. 各爲 $\angle 1$ 之餘角.
3. $\therefore \triangle ADC \sim \triangle BCD$	3. 二雙角相等.
4. 又 $\angle A = \angle A$, $\angle B = \angle 2$.	
5. $\therefore \triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle BCD$.	5. 二雙角等; 二△各與第三△相似.
6. $\therefore AD : CD = CD : DB$.	6. $\triangle ACD$ 及 $\triangle BCD$ 之對應邊.
7. $AB : AC = AC : AD$.	7. $\triangle ABC$ 及 $\triangle ADC$ 之對應邊.
8. $AB : BC = BC : BD$.	8. $\triangle ABC$ 及 $\triangle BCD$ 之對應邊.

312. 系　從圓上任一點到一直徑作垂線,則此垂線是直徑二線分的比例中項,此點到直徑一端之聯線爲直徑及鄰近此弦之直徑線分之比例中項.



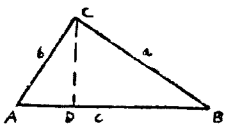
$AD:CD=CD:BD,\quad AB:AC=AC:AD,$
$AB:BC=BC:BD.$

習題七十

1. 直角△之三邊爲 8, 15, 17, 斜邊 17 上之高分斜邊爲二線分,求二線分之長,再求高之長.
2. 直角△之斜邊爲 13, 斜邊上之高分 13 爲二線分,其一份爲 $\frac{25}{13}$, 求二直角邊及高.
3. 直角三角形之斜邊被高分成二線分之長爲 8 及 18, 求二直角邊及高.

命題二十八　定理

313. 直角三角形的二直角邊的平方和,等於斜邊之平方.



假設: $\triangle ABC$, $\angle C=90^\circ$ 三邊爲 a, b, c.

求證: $c^2=a^2+b^2$.

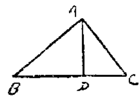
證明:

敍述	理由
1. 作 $CD\perp AB$.	
2. $b^2=c\cdot\overline{AD}$.	2. 命題 27.
3. $a^2=c\cdot BD$.	3. 命題 27.
4. $\therefore a^2+b^2=c\,\overline{BD}+c\cdot\overline{AD}=c(BD+AD)=c\cdot AB=c^2$.	4. 相加.

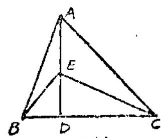
314. 系　**直角三角形的一直角邊的平方等於斜邊的平方減去他一直角邊的平方.**

習題七十一

1. 直角三角形之直角邊爲 7 及 24，求斜邊.
2. 直角三角形之斜邊爲 41，一直角邊爲 7，求另一直角邊.
3. 等腰△之底爲 8，一腰爲 6，求底邊上之高.
4. 若等邊△之一邊爲 8，求高.
5. 等腰直角三角形之一直角邊爲 8，求斜邊.
6. 等腰直角三角形之斜邊爲 12，求直角邊.
7. 等邊三角形之高爲 8，求一邊.
8. 菱形之二對角線爲 16 及 30，求周圍.
9. 若 $AD \perp BC$，求證
   $AB^2-AC^2=BD^2-DC^2$.
10. 若 $AD \perp BC$，E 爲 AD 上之任意點，
   求證 $AB^2-AC^2=EB^2-EC^2$.



(9)

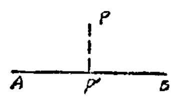


(10)

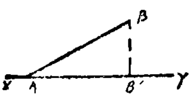
315. 射影　從線外一點到一直線的垂線之垂足叫做此點在此直線上之射影.

如圖　若 $PP' \perp AB$,

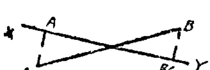
　　則 P 在 AB 上之射影爲 P'.



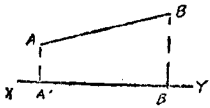
一線分二端在另一直線上之射影間之線分叫做此線分在此直線上之射影.



如圖　AB 在 XY 上之射影爲 AB'.



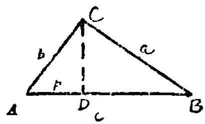
如圖　AB 在 XY 上之射影爲 $A'B'$.



如圖　AB 在 XY 上之射影爲 $A'B'$.

命題二十九　定理

316. 在任意三角形內，銳角所對的邊的平方，等於他二邊的平方之和. 減去此二邊內之一邊乘他邊在此邊上之射影之二倍.



假設：$\triangle ABC$，三邊爲 a, b, c, $\angle A$ 爲銳角
b 邊在 c 邊上之射影爲 p
(卽 $CD \perp AB$).

求證：$a^2=b^2+c^2-2cp$.

證明：

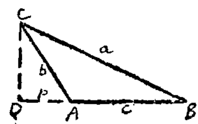
敍述	理由
1. $a^2=CD^2+DB^2$.	1. $\triangle BCD$ 爲 rt.$\triangle$.
2. $a^2=CD^2+(c-p)^2$.	2. 代入.
3. $a^2=CD^2+c^2-2cp+p^2$.	
4. $a^2=b^2+c^2-2cp$.	4. $CD^2+p^2=b^2$.

習題七十二

1. △之三邊爲 13, 14, 15, 求邊 13 在邊 14 上之射影.
   提示：以第三邊 15 爲 a, 以投射之邊 13 爲 b.
2. △之三邊爲 5, 7, 8, 求邊 8 在邊 5 上之射影, 邊 7 在邊 5 上之射影.
3. △之三邊爲 10, 17, 21, 求邊 10 在邊 21 上之射影, 邊 21 在邊 17 上之射影.

命題三十 定理

317. 在鈍角三角形內，鈍角所對的邊的平方等於他二邊的平方之和加上此二邊內之一邊乘他邊在此邊上之射影之二倍.



假設： $\triangle ABC$，三邊 a, b, c, $\angle A$ 為鈍角，b 邊在 c 邊上之射影為 p（即 $CD \perp AB$）.

求證： $a^2=b^2+c^2+2cp$.

證明：

敘述	理由
1. $a^2=CD^2+DB^2$.	1. $\triangle CDB$ 為 $rt.\triangle$.
2. $a^2=CD^2+(p+c)^2$.	2. $DB=p+c$.
3. $a^2=CD^2+p^2+c^2+2cp$.	
4. $a^2=b^2+c^2+2cp$.	4. $\triangle CDA$ 為 $rt.\triangle$, $\therefore CD^2+p^2=b^2$.

注意一 若 $\angle A$ 為銳角，則射影在 AB 邊上.
若 $\angle A$ 為鈍角，則射影在 BA 之延長線上.
若 $\angle A$ 為直角，則射影等於 O.

注意二 若以射影在延長線上時之 p 為負，則不論 $\angle A$ 為銳角，鈍角，或直角，可以用下列之統一公式：

$$a^2=b^2+c^2-2cp.$$

習題七十三

1. $\triangle$之三邊為 20, 15, 7，求邊 15 在邊 7 上之射影.

   提示： 用公式 $a^2=b^2+c^2-2cp$.

   若 p 為負時，表示 a 邊之對角為鈍角.

2. $\triangle$之三邊為 20, 15, 25，求邊 15 在邊 20 上之射影，求邊 15

在邊 20 上之射影.

3. △之三邊爲 4, 13, 15, 求邊 13 在邊 4 上之射影, 求邊 4 在邊 13 上之射影.

318. 關於三角形爲銳角三角形, 直角三角形, 或鈍角三角形的檢定.

若三邊爲 a, b, c 而 a 邊爲最大, 則

(a) 如 $a^2<b^2+c^2$,　$\angle A$ 爲銳角, △爲銳角△.

(b) 如 $a^2=b^2+c^2$,　$\angle A$ 爲直角, △爲直角△.

(c) 如 $a^2>b^2+c^2$,　$\angle A$ 爲鈍角, △爲鈍角△.

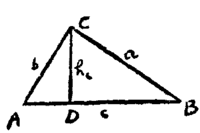
習題七十四

下列△爲直角三角形, 銳角三角形, 抑鈍角三角形, 試檢定之.

1. 三邊爲 8, 9, 15.
2. 三邊爲 5, 8, 7.
3. 三邊爲 21, 25, 7.
4. 三邊爲 5, 7, 9.

命題三十一　定理

319. 若三角形之三邊爲 a, b, c 而 $(a+b+c)=2s$, 則 c 邊上之高 $h_c=\dfrac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.



假設： $\triangle ABC$，三邊爲 a, b, c, c 邊上之高 h_c, $a+b+c=2s$.

求證： $h_c=\dfrac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

證明：

敘述	理由
1. 令 AD 爲 p，則 $a^2=b^2+c^2-2cp$.	1. 316.
2. $p=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$.	2. 代數演算.
3. $h_c^2=b^2-p^2$ $=(b+p)(b-p)$ $=\left(b+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(b-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)$ $=\dfrac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2c}\cdot\dfrac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2c}$ $=\dfrac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4c^2}$	3. $\triangle ACD$ 爲 rt $\triangle$.
4. 若 $b+c+a=2s$，則 $b+c-a=2s-2a=2(s-a)$ $a+b-c=2(s-c)$, $a-b+c=2(s-b)$.	4. 設.
5. $\therefore h_c^2=\dfrac{2s\cdot2(s-a)\cdot2(s-b)2(s-c)}{4c^2}$	5. 代入.
6. $\therefore h_c=\dfrac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.	6. 開平方.

注意： 若 $\angle A$ 爲鈍角時，證法亦相類，結果亦同；

若 $\angle A$ 爲直角時，則 $h_c=b$, $h_b=c$, 但上列公式亦仍適用。

320. 系　若$\triangle ABC$之三邊爲 a, b, c，則

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

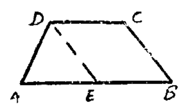
$$s=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

習題七十五

在$\triangle ABC$內，

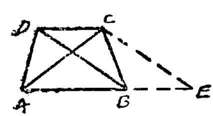
1. 若 $a=10$，$b=19$，$c=21$，求 h_c。
2. 若 $a=13$，$b=21$，$c=20$，求 h_b。
3. △之三邊爲 20，13，25，求 h_{25}。
4. △之三邊爲 37，13，40，求 h_{40}。
5. △之三邊爲 25，30，11，求 h_{11}。
6. 梯形之二底爲 12 及 33，二腰爲 10 及 19，求高。

   提示：　求$\triangle AED$之高。



7. 梯形之二底爲 6 及 19，二對角線爲 20 及 13，求高。

   提示：　求$\triangle AEC$之高。

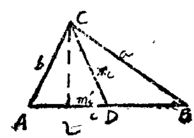


命題三十二　定理

321. 若三角形之三邊爲 a, b, c，c 邊上之中線爲 m_c，m_c 在 c 邊上之射影爲 m'_c，且 $a>b$，則

$$a^2+b^2=2\left(\frac{c}{2}\right)^2+2m_c^2$$

$$a^2-b^2=2cm'_c.$$



假設： $\triangle ABC$，三邊爲 a，b，c，c 邊上之中線 m_c

m_c 在 c 邊上之射影爲 m'_c，且 $a>b$

求證： $a^2+b^2=2\left(\frac{c}{2}\right)^2+2m_c^2$

$a^2-b^2=2cm'_c$.

證明：

敍述	理由
1. $AD=DB$，$CD=CD$，$a>b$.	
2. $\therefore \angle CDB>\angle CDA$.	2. 二△內，二雙邊相等，第三邊大則對角大。
3. $\therefore \angle CDB$ 爲鈍角，$\angle CDA$ 爲銳角.	
4. $\therefore a^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+m^2_c+2\left(\frac{c}{2}\right)m'_c$.	4. (317).
5. $b^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+m^2_c-2\left(\frac{c}{2}\right)m'_c$.	5. (316).
6. 相加，$a^2+b^2=2\left(\frac{c}{2}\right)^2+2m^2_c$.	
7. 相減，$a^2-b^2=2cm'_c$.	

注意： m_a，m_b 之公式學者應自行變出.

習題七十六

1. 三角形三邊爲 7，8，9，求 m_8 及 m_8 在邊 8 上之射影。
2. 三角形三邊爲 7，4，9，求 m_9 及 m_9 在邊 9 上之射影。

3. 三角形三邊爲 22, 20, 18, 求 m_{18} 及 m_{18} 在邊 18 上之射影。

4. 三角形 ABC 內, $a=8$, $b=11$, $m_c=8\frac{1}{2}$, 求 c.

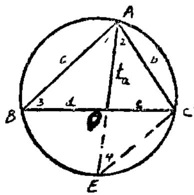
5. 三角形 ABC 內, $a=28$, $c=32$, $m_c=38$, 求 b.

6. 平行四邊形四邊平方之和等於二對角線之平方之和。

7. 在 $\triangle ABC$ 內, $3(a^2+b^2+c^2)=4(m_a{}^2+m_b{}^2+m_c{}^2)$.

命題三十三　定理

322. 在任意三角形內,二邊的乘積等於其夾角的二等分線的平方加第三邊被分角線所分成的二線分的積.



假設: $\triangle ABC$, 三邊爲 a, b, c, $\angle A$ 之分角線 AD (t_a) 分 BC 成二線分 $BD(d)$ 及 $DC(e)$.

求證: $bc=t_a{}^2+de$.

證明:

敘述	理由
1. 作 $\triangle ABC$ 之外接圓, 延長 AD 交外接圓於 E, 聯 CE.	
2. $\angle 1=\angle 2$.	2. AD 爲分角線.
3. $\angle 3=\angle 4$.	3. 同弧的圓周角.
4. $\triangle ABD\sim\triangle AEC$.	4. 二雙角等.
5. $\therefore AB:AE=AD:AC$.	5. 對應邊.

6. $\therefore AB\cdot AC=AE\cdot AD$.	6. 外項之積=內項之積。
7. $AB\cdot AC=(AD+DE)AD$.	7. 代入。
8. $AB\cdot AC=\overline{AD}^2+DE\cdot AD$.	
9. 但 $AD\cdot DE=BD\cdot DC$.	9. 二弦交於圓內，則二弦線分之積相等。
10. $\therefore AB\cdot AC=\overline{AD}^2+BD\cdot DC$.	10. 代入。
11. 即 $bc=t_a^2+de$.	11. 代入。

習題七十七

1. 三角形之三邊爲 18, 9, 21, 求 t_{21}。

   提示：先求邊 21 之二線分 $(e:d=b:c)$.

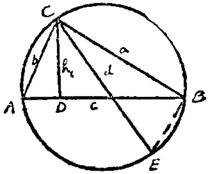
2. 三角形之三邊爲 21, 14, 25, 求 t_{25}。
3. 三角形之三邊爲 22, 11, 21, 求 t_{21}。
4. 三角形之三邊爲 6, 3, 7, 求 t_7。
5. 在 $\triangle ABC$ 內，求證.

$$t_c^2=ab-\frac{abc^2}{(a+b)^2}$$

$$t_c=\frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}\ \left(s=\frac{a+b+c}{2}\right).$$

命題三十四　定理

323. 在任意三角形內，二邊的積等於第三邊上之高與外接圓直徑之乘積



假設: $\triangle ABC$, 三邊爲 a, b, c, c 邊上之高 h_c, (CD) 外接圓直徑 $d(CE)$.

求證: $ab=h_c d$.

證明:

敍述	理由
1. 聯 BE。	
2. $\angle CBE=$直角$=\angle CDA$.	2. 半圓內之弓形角爲直角.
3. $\angle A=\angle E$.	3. 同弧之圓周角.
4. $\therefore \triangle ACD \sim \triangle CEB$.	4. 二雙角等.
5. $\therefore BC:CD=CE:AC$.	5. 對應邊.
6. $\therefore AC\cdot CB=CD\cdot CE$. 卽 $ab=h_c d$.	6. 外項之積＝內項之積.

324. 系 若三角形之三邊爲 a, b, c, 外接圓之半徑爲

$$\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}\cdot\left(s=\frac{a+b+c}{2}\right)。$$

習題七十八

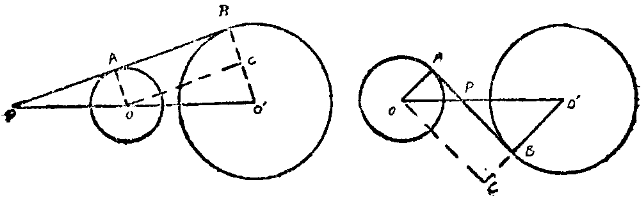
1. $\triangle ABC$ 內 $a=17$, $b=8$, $c=15$, 求外接圓的直徑.
2. △之三邊爲 10, 17, 21, 求外接圓半徑.
3. $\triangle ABC$ 內, $b=4$, $c=5$, 外接圓半徑＝3, 求 h_a.
4. $\triangle ABC$ 內, $a=20$, $b=15$, b 在 c 上的射影爲 9. 求外接圓半徑.

5. $\triangle ABC$ 內，$a=9$，$b=12$，外接圓直徑為 15，求 c(有二解).

總習題四

1. 三角形之三邊為 6，7，8；求
   (a) 邊 7 在邊 6 上之射影.
   (b) h_8.　　(c) t_7.
   (d) m_6.　　(e) m_6 在邊 6 上之射影.
   (f) 外接圓半徑.
2. 一直角三角形之直角邊為 8 及 15，求斜邊，斜邊上之高及斜邊上高分斜邊所成之線分.
3. 一圓之弦長 24 吋，距圓心 5 吋，另一弦之長為 10 吋，問此弦距圓心幾吋？
4. 一圓之半徑為 10 吋，一點距圓心 8 吋，求過此點所作任意弦之二線分之積，過此點之諸弦中最長者為幾吋？最短者為幾吋？
5. 一平行四邊形之二邊為 7 及 9，一對角線為 8，求他一對角線之長.
6. 一菱形之二對角線為 10 及 24，求周圍及高.
7. 一圓之平二行弦為 6 及 8，二弦之距離為 1，求圓之半徑.
8. 二圓之半徑為 5 及 3，圓心之距離為 17，求外公切線及內公切線之長.

   提示：$AB=OC$.



9. 上題內求內公切線與聯心線之交點距二圓心之距離，外公切線與聯心線之交點距二圓心之距離.

提示：$\triangle PAO\sim\triangle PO'B$.

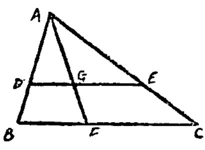
10. 梯形的二底是 8 吋及 12 吋，高是 3 吋，若離下底二吋作一線平行於底邊而止於二邊，求此直線之長.

11. 在 $\triangle ABC$ 內，$AB=BC=25$，$AC=30$，在 AB 上取 $AD=8$，求 CD 的長.

12. 三角形的三邊為 14，16 及 6，求邊 14 所對的角.

13. 四邊形 $ABCD$，$AB=10$，$BC=17$，$CD=13$，$DA=20$，$AC=21$，求對角線 BD 之長.

14. 若 DE 平行於 $\triangle ABC$ 之底邊 BC，AF 交 DE，BC 於 G 及 F，則 $DG:GE=BF:FC$.



15. 若在二平行的切線間，作第三切線，則圓的半徑是第三切線的二線分的比例中項.

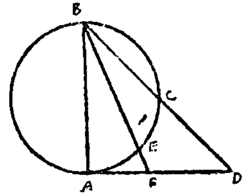
16. 若經過二外切圓的切點作一割線，則所成二圓之弦之比等於二半徑之比.

17. 若 C 是弧 AB 的中點，又弦 CD 與 AB 相交於一點 E，則 $CE:CA=CA:CD$.

18. 若在 $\triangle ABC$ 內，高 BD 及 AE 交於一點 F，且 $AB=BC$，

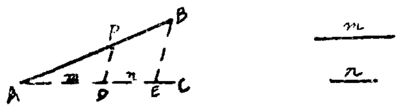
則 $BC : AF = BD : CD$.

19. AB 爲直徑，AD 爲切線，FB 及 DB 爲割線，求證 $BE \times BF = BC \times BD$.



命題三十五　作圖

325. 內分已知線分成二份與另二已知線分成比例.



已知： 直線 AB，及線分 m，n.

求作： 內分 AB 成二線分與 m，n 成比例.

作法： 1. 過 A 作任意直線 AC.

2. 於 AC 上連續截取 $AD = m$，$DE = n$.

3. 聯 BE.

4. 作 $DP \parallel EB$，交 AB 於 P.

5. 則 $AP : PB = AD : DE = m : n$.

證明：（略）.

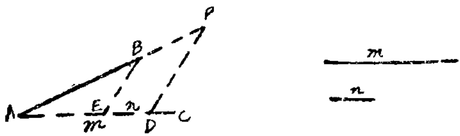
習題七十九

1. 內分已知直線 AB 於 P 使 $AP : PB = 3 : 2$.
2. 內分已知直線 AB 於 P 使 $AP : PB = 2 : 3$.
3. 內分已知直線 AB 於 P 使 $AP : PB = m : n$，m，n 爲已知線分.

(a) $m>n$,　(b) $m<n$,　(c) $m=n$.

命題三十六　作圖

326. 外分已知線分成二份與另二已知線分成比例.



已知: 直線 AB, 及線分 m, n.

求作: 外分 AB 成二線分與 m, n 成比例.

作法: 1. 過 A 作直線 AC,

2. 於 AC 上截 $AD=m$.

3. 自 D 向 DA 之方向截 $DE=n$.

4. 聯 EB.

5. 作 $DP /\!/ EB$ 交 AB 之延長線於 P.

6. 則 $AP:PB=m:n$.

證明: (略).

注意: 若 $m<n$ 時, 外分點在 A 點以外, 應過 B 點作交線, 先截 n, 較爲便利. 若 $m=n$ 時, 外分爲不可能.

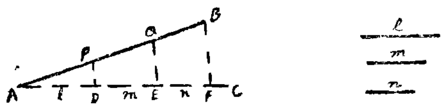
習題八十

1. 外分已知直線 AB 於 P 使 $AP:PB=5:3$.
2. 外分已知直線 AB 於 P 使 $AP:PB=3:5$.
3. 外分已知直線 AB 於 P 使 $AP:PB=m:n$

(a) $m>n$,　(b) $m<n$.

命題三十七　作圖

327. 分已知線分成若干份與已知線分成比例.（比例配分法）



已知： 直線 AB，線分 l, m, n.

求作： 分 AB 成三份與 l, m, n 成比例.

作法： 1. 過 A 作 AC.

2. 於 AC 上連續截取 $AD=l$, $DE=m$, $EF=n$.

3. 聯 BF.

4. 作 DP, $EQ /\!/ BF$.

5. 則 $AP:PQ:QB=l:m:n$.

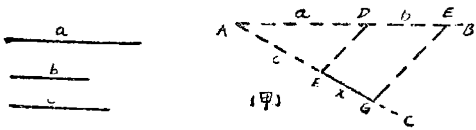
注意： 三量連續相比叫做連比，連比是一種符號，並非算式，故不能寫成算式，如須運算時，應寫成 $\frac{AP}{l}=\frac{PQ}{m}=\frac{QB}{n}$.

習題八十一

1. 分直線 AB 爲三份成 2, 3, 4 之比.
2. 分直線 AB 爲四份與 m, n, p, q 成比例，m, n, p, q 爲已知線分.

命題三十八　作圖

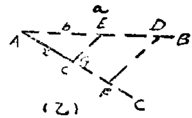
328. 求已知三線分之第四比例項.



(甲)

已知: 三線分 a, b, c.

求作: 一線分 x 使 $a:b=c:x$.



(乙)

作法: (甲) 1. 作二相交直線 AB, 及 AC.

2. 於 AB 上截 $AD=a$, $DE=b$.

3. 於 AC 上截 $AF=c$.

4. 聯 DF.

5. 作 $EG \parallel DF$ 交 AC 於 G.

6. 則 $FG=x$ 卽 $a:b=c:FG$.

(乙) 1. 作二相交直線 AB 及 AC.

2. 於 AB 上截 $AD=a$, $AE=b$.

3. 於 AC 上截 $AF=c$.

4. 聯 DF.

5. 作 $EG \parallel DF$ 交 AC 於 G.

6. 則 $AG=x$, 卽 $a:b=c:AG$.

證明: (略).

329. 系 設 a, b, c 爲已知線分, 可作一線分 x 使 $x=\dfrac{bc}{a}$.

習 題 八 十 二

設 a, b, c……等爲已知線分, 求作直線 x, 使

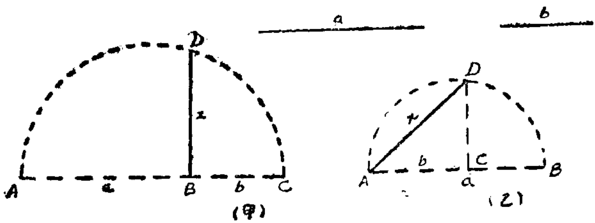
1. $x=\dfrac{3bc}{2a}$.　　　　2. $x=\dfrac{a^2}{2b}$.

3. $x=\dfrac{b^2-c^2}{a}$ 4. $x=\dfrac{cde}{ab}$.

提示: $\left(令\ y=\dfrac{cd}{a},\ 則\ x=\dfrac{ye}{b}\right)$.

命題三十九 作圖

330. 作已知二線分的比例中項.



已知: 二已知線分 a, b.

求作: 一線分 x 使 $a:x=x:b$.

作法: (甲) 1. 作直線 $AB=a$.

2. 延長 AB 至 C 使 $BC=b$.

3. 以 AC 爲直徑作半圓.

4. 作 $BD\perp AC$.

5. BD 爲 x, 即 $a:BD=BD:b$,

(乙) 1. 作直線 $AB=a$.

2. 於 AB 上截 $AC=b$.

3. 以 AB 爲直徑作半圓.

4. 作 $CD\perp AB$.

5. 聯 AD.

6. 則 AD 爲 x, 卽 $a : AD = AD : b$.

證明: (略).

331. 系　**設 a, b 爲已知線分, 可作一線分 x, 使 $x=\sqrt{ab}$.**

習題八十三

若 a, b, c……爲已知線分, 求作線分 x, 使

1. $x=\sqrt{2ab}$.　　2. $x=\sqrt{\dfrac{2ab}{3}}$.

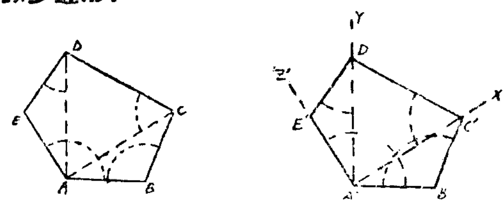
3. $x=\sqrt{6ab}$.　　4. $x=\sqrt{2}a(\sqrt{2}a=\sqrt{2a\cdot a})$.

5. $x=\sqrt{3}a$.　　6. $x=\sqrt{a(a+b)}$.

7. $x=\sqrt{\dfrac{abc}{d}}$.　　提示: 令 $y=\dfrac{ab}{d}$, 則 $x=\sqrt{yc}$.

命題四十　作圖

332. 在已知線分上, 使此線分對應於一多邊形之一指定邊, 作一相似多邊形.



已知: 一多邊形 $ABCDE$, 一線分 $A'B'$.

求作: 以 $A'B'$ 對應 AB, 作一多邊形$\sim ABCDE$.

作法: 1. 作對角線 AC, AD.

2. 作 $A'X$, $A'Y$, $A'Z$, 使 $\angle B'A'X = \angle BAC$, $\angle XA'Y = \angle CAD$, $\angle YA'Z = \angle DAE$.

3. 作 $B'C'$ 使 $\angle B' = \angle B$ 交 $A'X$ 於 C'.

4. 作 $C'D'$ 使 $\angle A'C'D' = \angle ACD$ 交 $A'Y$ 於 D'.

5. 作 $D'E'$ 使 $\angle A'D'E' = \angle ADE$ 交 $A'Z$ 於 E'.

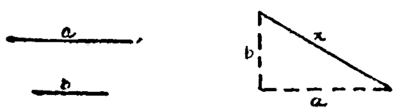
6. 則 $A'B'C'D'E' \sim ABCDE$.

證明:

敘述	理由
1. $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.	1. 二雙角等.
2. $\triangle A'C'D' \sim \triangle ACD$.	2. 同上.
3. $\triangle A'D'E' \sim \triangle ADE$.	3. 同上.
4. $\therefore A'B'C'D'E' \sim ABCDE$.	4 (303).

命題四十一 作圖

333. 已知二線分 a, b, 作線分 x 使 $x=\sqrt{a^2+b^2}$.



已知: 二已知線分 a, b.

求作: 一線分 x, 使 $x=\sqrt{a^2+b^2}$.

作法: 1. 以 a, b 爲直角邊作一直角三角形.

2. 則斜邊爲所求之 x, 等於 $\sqrt{a^2+b^2}$.

證明: (略).

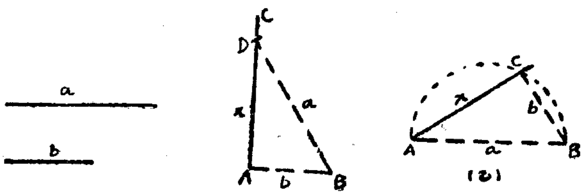
習題八十四

設 $a, b, c\cdots\cdots$ 爲已知線分，求依上法作線分 x，使

1. $x=\sqrt{2}a$.　　(提示：$\sqrt{2}a=\sqrt{2a^2}=\sqrt{a^2+a^2}$).
2. $x=\sqrt{3}a$.　　3. $x=\sqrt{2a^2+b^2}$.
4. $x=\sqrt{2a^2+3b^2}$.
5. $x=\sqrt{2ab+3cd}$.　　(提示：令 $y=\sqrt{2ab}$，$z=\sqrt{3cd}$).

命題四十二　作圖

334. 巳知二線分 a, b，求作線分 x，使 $x=\sqrt{a^2-b^2}$.



(甲)　(乙)

巳知：二巳知線分 a, b.

求作：一線分 x，使 $x=\sqrt{a^2-b^2}$.

作法：(甲) 1. 作 $AB=b$.

2. 作 $AC\perp AB$.

3. 自 B 截 AC 於 D 使 $BD=a$.

4. 聯 BD.

5. 則 $AD=x=\sqrt{a^2-b^2}$.

(乙) 1. 作 $AB=a$.

2. 以 AB 爲直徑作半圓.

3. 自 B 截圓周於 C 使 $BC=b$。

4. 聯 BC, AC。

5. 則 $AC=x=\sqrt{a^2-b^2}$。

證明: (略)。

習題八十五

設 a, b, c……等爲已知線分, 求作 x, 使

1. $x=\sqrt{2a^2-b^2}$。
2. $x=\sqrt{3a^2-2b^2}$。
3. $x=\sqrt{2(a^2-b^2)}$。
4. $x=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{2}}$。
5. $x=\sqrt{ab-cd}$。

335. 代數解析作圖法 從本章所述, 如 a, b, c……等爲已知線分, m, n 等爲已知有理數, 則可作一線分 x, 使

1. $x=a+b$。 (線分之和)
2. $x=a-b$。 (線分之差)
3. $x=ma$。 (線分之倍量)
4. $x=\dfrac{a}{n}$。 (線分之等分量)
5. $x=\dfrac{bc}{a}$。 (第四比例項)
6. $x=\sqrt{ab}$。 (比例中項)
7. $x=\sqrt{a^2+b^2}$。 (直角△之斜邊)
8. $x=\sqrt{a^2-b^2}$。 (直角△之直角邊)

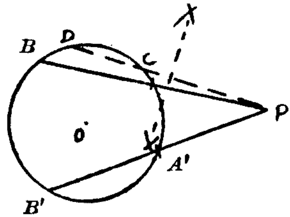
若干幾何作圖題, 其解法依賴於一未知線分之長短者, 往往可用代數方法, 列出此未知線分 x 與已知線分 a, b, c……等之關係方程式, 從而應用上列各種作法, 求得 x 之大小, 此種解法, 叫做代數解析作圖法。

【例一】

從圓外一點,求作一割線,使割線之圓外線分與圓內線分相等.

假設：已知圓 O, 圓外一點 P.

求作：過 P 點之一割線,使圓內線分與圓外線分相等.



解析：過 P 點任作一割線 PCD.

令 $PC=a$, $PD=b$.

若所求割線之圓外線分爲 x,

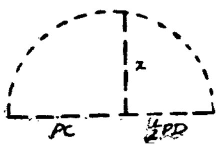
則割線之全長爲 $2x$.

得方程式 $2x\cdot x=a\cdot b$.

(割線與圓外線分之積爲定量)

$\therefore x=\sqrt{\dfrac{ab}{2}}$.

作圖：1. 作 PC 及 $\dfrac{PD}{2}$ 之比例中項 x.



2. 以 P 爲圓心,以 x 爲半徑畫弧截圓周於 A 及 A'.

3. 聯 PA, PA' 並延長交圓於 B 及 B'.

4. 則 PAB 及 $PA'B'$ 爲所求之割線.

證明：(略).

討論：若 P 點與圓 O 之距離太遠使 $PO-r>\sqrt{\dfrac{ab}{2}}$ 時，則本題

無解。

註： 更詳細的討論.

$PC \cdot PD = a \cdot b =$ 定量 $= \overline{PO}^2 - r^2.$

欲本題有解，須 $\sqrt{\dfrac{PO^2 - r^2}{2}} \geqq PO - r.$

$$\frac{PO^2 - r^2}{2} \geqq \overline{PO}^2 - 2\overline{PO} \cdot r + r^2.$$

$$\overline{PO}^2 - r^2 \geqq 2\overline{PO}^2 - 4\overline{PO}r + 2r^2.$$

$$\overline{PO}^2 - 4\overline{PO}r + 3r^2 \lesseqgtr O.$$

$$(PO - 3r)(PO - r) \lesseqgtr O.$$

若 $PO > 3r$，本題無解.

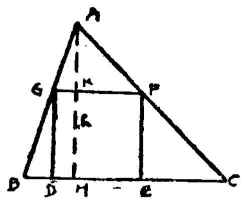
$PO = 3r$，本題有一解.

$r < PO < 3r$，本題有二解.

$\left.\begin{array}{ll} PO = r, & \text{即 } P \text{ 點在圓上} \\ PO < r, & \text{即 } P \text{ 點在圓內} \end{array}\right\}$ 本題無意義(因與原解設不符)。

【例二】

作一正方形內接於一已知三角形。



假設： 已知 $\triangle ABC$。

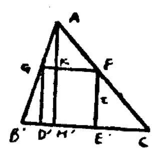
求作： 一正方形內接於 $\triangle ABC$

解析： 令 $BC = a$，高 $AH = h$。

內接正方形之一邊爲 x，

如右圖。

則 $\triangle AGF \sim \triangle ABC$，

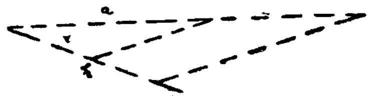


(解析用圖)

$$x : a = h - x : h,$$

$$xh = ah - ax,$$

$$x = \frac{ah}{a+h}.$$



作圖: 1. 作 $a+h$, a, h, 之第四比例項 x.

2. 於 AH 上截 $HK=x$.

3. 過 K 作 $GF /\!/ BC$,

4. 作 GD, $FE \perp BC$.

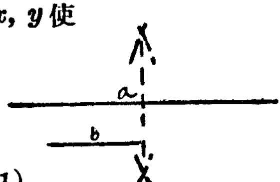
5. 則 $DGFE$ 爲所求之正方形.

證明: (略).

【例三】

設 a, b 爲已知直線，求作二直線 x, y 使

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=b^2. \end{cases}$$



假設: 二線分 a 及 b.

求作: 二線分 x 及 y, 使 $xy=b^2 \cdots\cdots(1)$

$x+y=a \cdots\cdots(2)$

解析: $x+y=a \cdots\cdots(2)$

解(2)　$y=a-x$

代入(1)　$x(a-x)=b^2$

$$ax-x^2=b^2$$

$$x^2-ax=-b^2$$

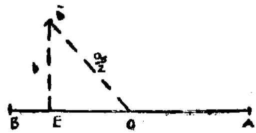
$$x^2-ax+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}-b^2$$

$$x-\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b^2}$$

$$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b^2}$$

$$y=a-x=\frac{a}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b^2}$$

作圖: 1. 作 $OE=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b^2}$.



2. 於 OE 上截 $OA=OB=\frac{a}{2}$.

3. 則 $AE=\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b^2}$.

$BE=\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b^2}$.

4. $\therefore$ $AE=x$, $BE=y$.

或 $AE=y$, $BE=x$.

習題八十六

1. 於圓外一點 P 作圓之割線使圓外線分爲圓內線分之二倍.
2. 於圓內一點 P 作一弦 APB 使 $AP=2PB$.
3. 作一直線平行於矩形的一邊,使割取一矩形與原矩形相似.
4. 設 a, b, c……爲已知線分,求作直線 x. 使

   (a) $x=\sqrt[3]{2}\,a$, (b) $x=\sqrt{2ab+\frac{3cd^2}{e}}$
5. 作一正方形內接於一已知半圓.
6. 已知二同心圓,求在大圓內作一弦使他的夾於小圓內部份爲全弦之半.
7. 作一直線平行於梯形之底邊,使分梯形成二相似梯形.(此題必須證明)
8. 在直線 AB 上,求作一點 C, 使 $\overline{AC}^2=3\overline{CB}^2$.

9. 設 a, b 為已知線分，求作二線分 x 及 y，使 $x-y=a$, $xy=b^2$.

10. 在一已知正方形中，作一內接正方形，使他的一邊等於已知長．並討論此已知長之大小之限制．

總 習 題 五

1. 由圓外一點 P 至圓引切線 PA, PB，割線 PCD，則 $AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

2. 圓內接四邊形 $ABCD$ 之對邊 AB 及 DC 延長相交於 P，則 $PB \cdot AC = PC \cdot BD$.

3. 由圓上之一點 P，至內接四邊形之各邊作垂線，則一雙對邊上垂線之積等於另一雙對邊上垂線之積．

4. 自圓外一點 P，作割線 PAB，切線 PC，作 $CN \perp PB$, $AL \perp PC$, $BM \perp PC$，則 $AL \cdot BM = \overline{CN}^2$.

5. 梯形 $ABCD$ 之對角線 AC, BD 相交於 E，二腰 AD 及 BC 延長相交於 F，則 $EC \quad EA = CF : FB$.

6. 過 $\triangle ABC$ 內一點 P 作 $DE /\!/ BC$, $FG /\!/ AC$, $HI /\!/ AB$，則 $\frac{DE}{BC}+\frac{FG}{AC}+\frac{IH}{AB}=2$.

7. 過相交二圓之公共弦上一點 P 作直線 $ABPCD$ 交一圓於 A 及 C，交他圓於 B 及 D，則 $AB : BP = CD : PC$.

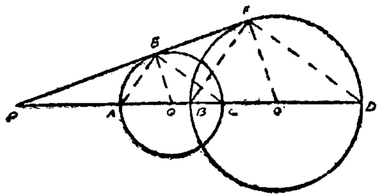
8. AB, CD, EF 為相交於 O 點之三線，求證 EF 上任一點至 AB, CD 二線距離之比為定值．

9. 若 AB 及 CD 相交於 O，而 $AO \cdot OB = CO \cdot OD$，則 A, B, C, D 四點共圓．

10. 若 AB 及 CD 二線延長相交於 O，而 $OA \cdot OB = OC \cdot OD$,

則 A, B, C, D 四點共圓.

11. 二相交圓之外公切線 EF 之延長線與聯心線 OO' 之延長線交於 P, 聯心線交二圓於 A, B, C, D, 則
$PA \cdot PD = PB \cdot PC$.
(提示: 證 $\triangle PAE \sim \triangle PBF$　$\triangle PCE \sim \triangle PDF$)



12. 二相離圓之內公切線及外公切線, 內外分聯心線成同比.
13. 已知底邊, 頂角, 及二鄰邊之比, 求作△.
14. 已知頂角, 高, 及二鄰邊之比, 求作△.
15. 過一定點求作一直線與另二已知點之距離之比等於定比.
(有二解)
16. 分一定弧成二分使其弦成已知比.

第四編　面積

336. 面積　平面封閉圖形所包含之平面之大小叫做圖形的面積.圖形之面積以對於單位面積的倍數計算之.單位面積爲以單位長爲一邊的正方形.

如長的單位爲一寸,則以一寸爲邊的正方形的大小是面積的單位,叫做一平方寸.

如長的單位爲一尺,則以一尺爲邊的正方形的大小是面積的單位,叫做一平方尺.

如一平面圖形所包含的面的大小10倍於一平方尺,他的面積就是10平方尺.

如一平面圖形所包含的面的大小等於一平方寸的100倍,則他的面積就是100平方寸.

注意:　面積與長爲二個不同類的量,我們可以說一尺等於幾寸,我們也可以說一平方尺等於幾平方寸,但不能說一平方寸等於幾寸,或一平尺等於幾尺.

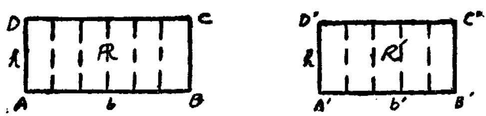
337. 等積形　二圖形的面積相等的,叫做等積形.

等積的符號爲=.

等積形的形狀不一定相同,故等積形不一定相似,若等積形相似,則是全等形.

命題一　定理

338. 高相等的矩形的比等於其底的比.

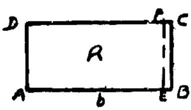


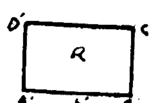
假設: 矩形 R 及 R'，等高 h，底 b 及 b'。

求證: $\dfrac{R}{R'}=\dfrac{b}{b'}$.

證明: (甲)若 b 及 b' 爲可通約線分。

敘述	理由
1. b 及 b' 爲可通約線分，則必有一公約量 c 使 $b=mc$, $b'=nc$。	
2. 分 b 成 m 等分，分 b' 成 n 等分。	
3. $\dfrac{b}{b'}=\dfrac{mc}{nc}=\dfrac{m}{n}$.	
4. 於各分點作底之垂線，則分 R 成 m 個矩形，分 R' 成 n 個矩形，各各全等。	4. 等底等高的矩形必全等。
5. 令一個分成之矩形爲 K，則 $R=mK$, $R'=nK$。	
6. $\therefore \dfrac{R}{R'}=\dfrac{mK}{nK}=\dfrac{m}{n}$.	
7. $\therefore \dfrac{R}{R'}=\dfrac{b}{b'}$.	





(乙)若 b 及 b' 為不可通約線分。

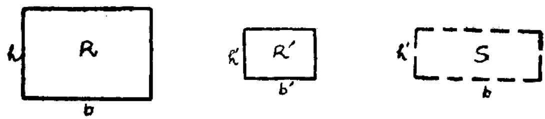
敍　述	理　由
1. 分 b' 成若干等分，以一等分之長於 b 上繼續截取之，自 A 至 E，剩 EB 小於一等分。	1. 因 b 與 b' 為不可通約線分，故必有餘量 EB。
2. 作 $EF \perp AB$，令 $AEFD$ 為 S。	
3. 則 $\dfrac{S}{R'}=\dfrac{AE}{b'}$。	3. 因 AE 及 b' 為可通約線分。
4. 若分 b' 成甚多等分，則每一等分之長，可減至甚小，卽 EB 之長亦可減至甚小。	
5. $\therefore AE \to b$。	5. 極限定義。
6. 於是，$S \to R$。	6. 極限定義。
7. $\dfrac{AE}{b'} \to \dfrac{b}{b'}$。 $\dfrac{S}{R'} \to \dfrac{R}{R'}$。	7. 極限定理 I。
8. 但 $\dfrac{S}{R'}=\dfrac{AE}{b'}$。	8. (3)。
9. $\therefore \dfrac{R}{R'}=\dfrac{b}{b'}$。	9. 極限定理 II。

339. 系一　等底的矩形的比等於其高的比。

註：二平面圖形之比卽指他們的面積之比。

命題二 定理

340. 二矩形的面積之比等於其底高乘積之比.



假設: 二矩形 R 及 R', 高 h, h', 底 b, b'.

求證: $\dfrac{R}{R'}=\dfrac{bh}{b'h'}$.

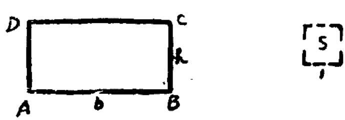
證明:

敍　　述	理　　由
1. 作矩形 S 使其底爲 b, 高爲 h'.	
2. 則 $\dfrac{R}{S}=\dfrac{h}{h'}$.	2. 底相等.
3. $\dfrac{S}{R'}=\dfrac{b}{b'}$.	3. 高相等.
4. $\therefore \dfrac{R}{S}\cdot\dfrac{S}{R'}=\dfrac{h}{h'}\cdot\dfrac{b}{b'}$.	4. 相乘.
5. $\therefore \dfrac{R}{R'}=\dfrac{bh}{b'h'}$.	

命題三 定理

341. 矩形的面積等於其底與高之積.

$(R=bh)$.



假設： 矩形 $ABCD$，面積 R，底 b，高 h。

求證： $R=bh$。

證明：

敘　述	理　由
1. 作正方形 S，其一邊爲單位長 1。	
2. 則其面積爲單位面積即 $S=1$。	2. 面積單位之定義。
3. $\frac{R}{S}=\frac{bh}{1\cdot1}$。	3. 矩形之比等於底高乘積之比。
4. $\therefore\ \frac{R}{1}=\frac{bh}{1}$。即 $R=bh$。	4. 代入。

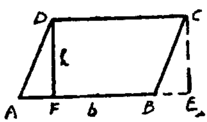
342. 系　正方形的面積等於其一邊的平方.

$(S=a^2)$。

命題四　定理

343. 平行四邊形的面積等於其底與高之積.

$(P=bh)$。



假設： 平行四邊形 $ABCD$，底 b，高 h。

求證： $ABCD=bh$。

證明：

敘　述	理　由
1. 作 $CE\perp AB$ 與 AB 之延長線交於 E。	

2. $\triangle ADF \cong \triangle BCE$.	2. $a.a.s.=a.a.s.$
3. $ABCD=DFBC$ $+\triangle ADF=DFBC$ $+\triangle BCE=DFCE$.	
4. $DFCE=FE\cdot h$ $=DC\cdot h=bh$.	4. 矩形之面積等於底乘高.
5. $\therefore ABCD=bh$.	

344. 系一　等底等高的平行四邊形相等.

345. 系二　二平行四邊形之比,等於底高乘積之比.

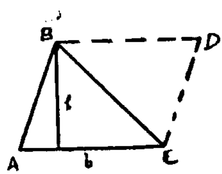
346. 系三　等底的平行四邊形之比,等於其高之比.

347. 系四　等高的平行四邊形之比,等於其底之比.

命題五　定理

348. 三角形的面積等於其高與底的乘積之半.

$$\left(\triangle=\frac{1}{2}hb\right).$$



假設: $\triangle ABC$, 高 h, 底 b.

求證: $\triangle ABC=\frac{1}{2}bh$.

證明:

敍述	理由
1. 以 BA, AC 爲鄰邊作平行四邊形 $ACDB$.	

2. 則 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\text{▱}ACDB$.	2. 對角線分▱成$=\cong\triangle$.
3. $ACDB=bh$.	
4. $\therefore\triangle ABC=\frac{1}{2}bh$.	

349. 系一　等底等高的三角形等積.

350. 系二　二三角形的比,等於其底高乘積之比.

351. 系三　等底三角形之比,等於其高之比.

352. 系四　等高三角形之比,等於其底之比.

353. 系五　菱形之面積等於二對角線乘積之半.

習 題 八 十 七

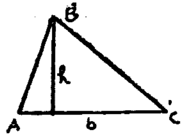
1. 平行四邊形的二對角線分平行四邊形成四個等積三角形.
2. 三角形的重心與三頂之聯線分三角形成三個等積三角形.
3. 若二三角形二邊各各相等,夾角互為補角,則二三角形等積.
4. 四邊形四邊中點聯線圍成之平行四邊形,其面積等於原四邊形之半.
5. 若 E 是平行四邊形 $ABCD$ 對角線 AC 上的一點,則 $\triangle AEB=\triangle ADE$.
6. 過平行四邊形的對角線交點作一直線,必分平行四邊形為二等分.
7. 若過平行四邊形的對角線上一點作二直線平行於二邊,成四個平行四邊形,則不含此對角線的二平行四邊形等積.
8. 平行四邊形 $ABCD$ 內一點 P,則 $\triangle ABP+\triangle PCD=\triangle BCP+\triangle ADP=\frac{1}{2}ABCD$.

9. 三角形之面積等於其周圍與內切圓半徑乘積之半.

10. 圓外切多邊形的面積等於其周圍與圓徑半乘積之半.

命題六　定理

354. 若三角形之三邊爲 a, b, c, $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$,則三角形之面積爲 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.



假設: $\triangle ABC$, 底 b, 高 h. $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

求證: $\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

證明:

敍　述	理　由
1. $h=\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.	(略).
2. $\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}bh=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.	

習題八十八

1. 求下列三角形的面積, 已知三邊爲.

   (a) 13, 14, 15.　　(b) 9, 10, 17.

   (c) 11, 25, 30.　　(d) 4, 13, 15.

2. 三角形的三邊之比爲 8 : 15 : 17, 面積爲 960 平方吋, 求各邊及周圍.

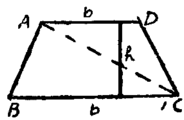
3. 三角形的三邊是 8，15，17，求內切圓半徑.

4. 三角形的三邊是 6，7，8，邊 6 與邊 8 所夾之角之分角線分三角形成二部分，求△之全面積及二部份之面積.

命題七　定理

355. 梯形的面積等於高與二底和的乘積之半.

$$\left[⏢=\frac{1}{2}h(b+b')\right]$$



假設：梯形 $ABCD$，二底 b 及 b'，高 h.

求證：$ABCD=\frac{1}{2}h(b+b')$.

證明：

敘　述	理　由
1. 聯 AC.	(略).
2. $\triangle ABC=\frac{1}{2}bh$.	
3. $\triangle ACD=\frac{1}{2}b'h$.	
4. $\therefore ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD=\frac{1}{2}bh+\frac{1}{2}b'h=\frac{1}{2}h(b+b')$.	

356. 系　梯形的面積等於高與中線之積.

$$\left[因中線=\frac{1}{2}(b+b')\right]$$

習　題　八　十　九

1. 梯形的二底是 12 及 8，高是 5，求面積.

2. 梯形的面積是 200，二底是 15 及 25，求高.

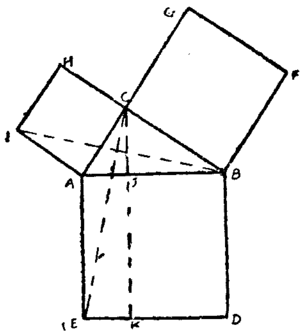
3. 梯形的二底是 10 與 25，二腰爲 13 及 14，求面積.

4. 梯形的二底是 6，與 11，二腰爲 9 及 10，求面積.

命題八　定理

357. 在直角三角形斜邊上所作之正方形等於在二直角邊上所作二正方形之和.

[畢氏(Pythgoras)定理]



假設：直角 $\triangle ABC$，$\angle C=90^\circ$，$ABDE$，$BCGF$，$ACHI$ 均爲正方形.

求證：$ABDE=BCGF+ACHI$

證明：

敘述	理由
1. 聯 CE，BI，作 $CJK\perp ED$.	
2. $IA=AC$，$AB=AE$.	2. 正方形之邊。
3. $\angle IAB=\angle A+90^\circ$ $=\angle CAE$.	
4. $\therefore \triangle IAB\cong\triangle CAE$.	4. $s.a.s.=s.a.s.$

5. $AJKE=2\triangle ACE$.	5. 底等高等.
6. $ACHI=2\triangle IAB$.	6. 底等高等.
7. $\therefore ACHI=AEKJ$.	
8. 同理 $BCGF=JKDB$.	
9. $\therefore ABDE=AEKJ+JKDB=ACHI+BCGF$.	

注意: 本定理之乘積證法已見前編,此證法叫做面積證法.

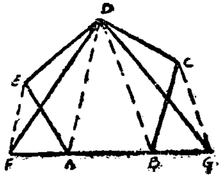
358. 系 直角三角形一直角邊上所作之正方形等於斜邊上所作之正方形減去另一直角邊上所作之正方形

習題九十

1. 等邊三角形的一邊是 10 吋,求高及面積.
2. 等腰△的底邊是 6, 一腰是 5, 求面積.
3. 若等邊△高爲 $4\sqrt{3}$, 求周圍及面積.
4. 一弧的弦長是 42 吋,這弧之半的弦長是 29 吋,求圓的直徑.
5. 若 $\triangle ABC$ 之 $a=10$, $b=17$, $h_c=8$, 求面積及周圍. (有二解)
6. 菱形之二對角線之和爲 24 呎,比爲 3 : 5, 求面積及周圍.
7. 等圓的內接三角形的面積之比等於三邊乘積之比.
8. 梯形的二對角線與二腰成二個等積△.

命題九　作圖

359. 變多邊形成等積的三角形.



已知: 五邊形 $ABCDE$.

求作: 變 $ABCDE$ 成等積 $\triangle$.

作法 1. 聯 AD, BD.

2. 作 $EF \parallel DA$, $CG \parallel DB$ 各交 AB 之延長線於 F 及 G.

3. 聯 DF, DG.

4. 則 $\triangle FDG = ABCDE$.

證明:

敍述	理由
1. $\triangle ADF = \triangle ADE$.	1. 等底等高.
2. $\triangle BDG = \triangle BDC$.	2. 等底等高.
3. $\therefore \triangle FGD = \triangle FAD + \triangle ABD + \triangle BGD = \triangle ADE + \triangle ABD + \triangle BDC = ABCDE$.	

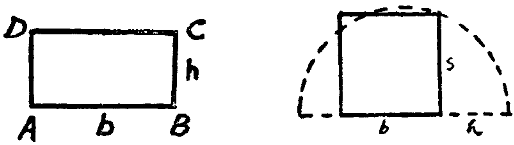
習題九十一

1. 變一六邊形成一三角形.
2. 變斜三角形爲直角三角形(不變底).
3. 變不等腰三角形爲等腰△(不變底).
4. 變梯形成一三角形.
5. 過平行四邊形之一頂作二直線,三等分此平行四邊形.
6. 作一直線,二等分一平行四邊形,且垂直於一邊.
7. 過五邊形之一頂點,作三直線四等分此五邊形.

命題十 作圖

360. 變矩形成等積的正方形

已知: 矩形 $ABCD$, 底 b, 高 h.



求作：變 $ABCD$ 成等積正方形.

作法：1. 求 b, h 之比例中項 s.

2. 以 s 爲一邊作正方形，卽得.

證明：(略).

361. 系一　利用上法可以變三角形成一等積正方形.

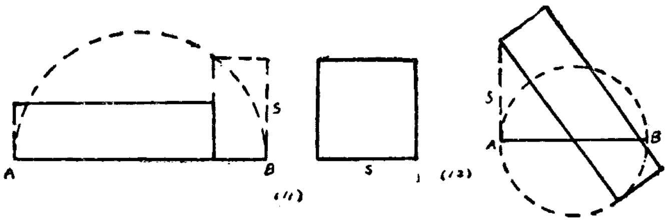
362. 系二　任意多邊形，可以先變成等積三角形，再變成等積正方形.

習題九十二

1. 求作一正方形等於已知平行四邊形之二倍.
2. 求作一正方形等於一已知三角形的三倍.
3. 求作一正方形等於一已知五邊形之四分之一.
4. 求作一正方形等於已知正方形之三倍.
5. 求作一正方形使與一已知正方形之比爲已知比 $m:n$ (面積之比).
6. 變平行四邊形爲矩形使其底邊爲一已知直線.
7. 已知三角形的底邊及一底角，求作等於已知梯形的三角形.
8. 變正方形成一等腰△，使其底爲已知直線.
9. 過底邊上之一定點作一直線平分此△.
10. 求作等於已知正方形的等邊△.

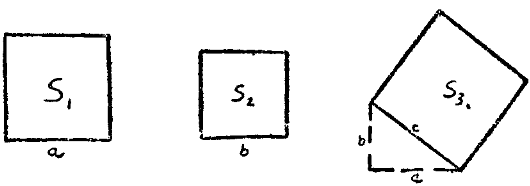
11. 作一矩形使等於已知正方形，且其底與高之和等於已知直線.

12. 作一矩形使等於已知正方形，且其底與高之差等於已知直線.



命題十一 作圖

363. 求作一正方形等於二已知正方形之和.



已知: 二正方形 S_1, S_2 其邊為 a 及 b.

求作: 一正方形等於 S_1 及 S_2 面積之和.

作法: 1. 以 a 及 b 為直角邊作一直角 △, 其斜邊為 c.

2. 以 c 為一邊作正方形 S_3.

3. 則 $S_3=S_1+S_2$.

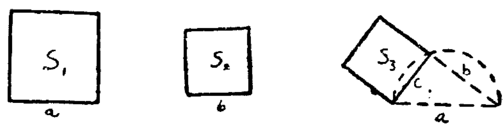
證明: (略).

習題九十三

1. 求作一正方形等於三已知正方形之和.
2. 求作一正方形等於二已知三角形之和.
   (提示;　先將三角形變成正方形).
3. 求作一正方形等於二已知多邊形之和.
4. 求作一正方形等於一已知三角形之二倍加上一已知多邊形之三倍.

命題十二　作圖

364. 求作一正方形,等於二已知正方形之差.



已知: 二正方形 S_1 及 S_2 其邊爲 a, 及 b.

求作: 一正方形等於 S_1-S_2.

作法: 1. 以 a 爲斜邊爲, b 一直角邊, 作一直角△, 另一直角邊爲 c.

2. 以 c 爲一邊作一正方形 S_3.

3. 則 $S_3=S_1-S_2$.

證明: (略).

習題九十四

1. 求作一正方形等於二已知正方形之和減去第三已知正方形之面積.

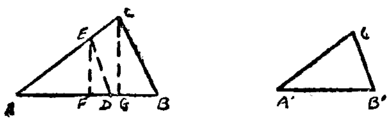
2. 求作一正方形等於一已知矩形，減去一已知△之面積。

3. 求作一正方形等於二已知多邊形之差。

4. 求作一正方形等於一已知多邊形之二倍減去一已知梯形之半。

命題十三　定理

365. 有一角相等的二三角形的面積之比，等於夾等角的二邊乘積之比.



假設: $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$, $\angle A=\angle A'$。

求證: $\triangle ABC : \triangle A'B'C' = AB \cdot AC : A'B' \cdot A'C'$。

證明:

敘述	理由
1. 在 AB, AC 上截 $AD=A'B'$, $AE=A'C'$, 連 DE。	
2. 則 $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.	2. s. a. s. = s. a. s.
3. 作 EF, CG, $\perp AB$。	
4. $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle ADE}=\dfrac{AB \cdot CG}{AD \cdot EF}$.	4. △面積之比等於底高乘積之比。
5. $\triangle AEF \sim \triangle ACG$。	5. 二雙角等。
6. $\therefore CG : EF = AC : AE$.	6. 對應邊。
7. $\therefore \dfrac{\triangle ABC}{\triangle ADE}=\dfrac{AB}{AD}\cdot\dfrac{AC}{AE}$.	7. 代入。

8. $\therefore \dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \dfrac{AB}{A'B'} \cdot \dfrac{AC}{A'C'}$

$\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \dfrac{AB \cdot AC}{A'B' \cdot A'C'}$.

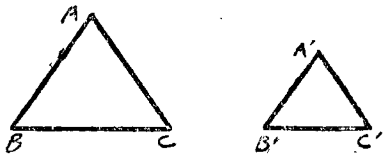
習題九十五

1. 求於已知 $\triangle ABC$ 之二邊 AB 及 AC 上各取一點 D 及 E 使 $AD = AE$, 且 $\triangle ADE = \frac{1}{2}\triangle ABC$.

2. 求於已知 $\triangle ABC$ 之二邊 AB 及 AC 上各取一點 D 及 E, 使 $AD = 2AE$, 且 $\triangle ADE = \frac{1}{3}\triangle ABC$.

命題十四　定理

366. 相似三角形之比等於其對應邊平方之比.



假設: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

求證: $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$.

證明:

敘述	理由
1. $\angle B = \angle B'$.	1. 相似三角形之對應角.
2. $\therefore \dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \dfrac{AB \cdot BC}{A'B' \cdot B'C'}$.	2. (365.)

3. 但 $\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB}{A'B'}$.	3. 相似△之對應邊.
4 $\therefore\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$.	4. 代入.

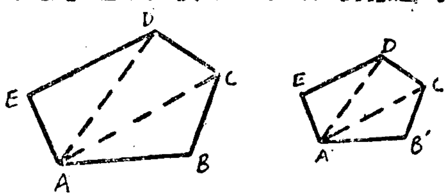
337. 系 相似三角形之比等於其對應高之平方之比,周圍的平方之比,或任意二對應線的平方之比.

習 題 九 十 六

1. 一三角形的三邊爲 4, 7, 8, 求相似於此三角形而面積爲其 9 倍之一三角形之三邊.
2. 若二相似三角形之一組對應邊爲 2 吋及 3 吋,求周圍之比,求面積之比.
3. 二相似三角形的面積之比爲 9 : 25, 若二三角形的周圍之和爲 96, 求二三角形的周圍各若干.
4. 梯形的二底是 12 與 8, 延長不平行的二邊使交於一點, 若梯形的面積爲 90, 求較小三角形的面積.
5. 作一三角形與一已知三角形相似。且等於他的二倍.
6. 作一三角形與已知三角形相似且等於他的三分之一.
7. 作一直線平行於三角形之底且平分其面積.
8. 作二直線平行於三角形之底且三等分其面積.
9. 作二直線平行於三角形之一中線且三等分其面積.

命題十五 定理

338. 相似多邊形面積之比等於其對應邊的平方之比.



假設： $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$.

求證： $ABCDE : A'B'C'D'E' = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2$.

證明：

敘述	理由
1. 聯 $AD, AC, A'D', A'C'$.	
2. $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$.	2. 設。
3. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$, $\triangle ADE \sim \triangle A'D'E'$.	3. 二相似多邊形可分成同數相似△。
4. $\frac{\triangle ADE}{\triangle A'D'E'} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{A'D'}^2} = \frac{\triangle ADC}{\triangle A'D'C'} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2} = \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$.	4. 相似△之比等於對應邊平方之比。
5. $\frac{\triangle ADE + \triangle ADC + \triangle ABC}{\triangle A'D'E' + \triangle A'D'C' + \triangle A'B'C'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$.	5. 一串等比中，若干前項之和比後項之和等於任一比。
6. $\therefore \frac{ABCDE}{A'B'C'D'E'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$.	

369. 系　相似多邊形面積之比，等於周圍的平方之比，等於任意二對應線的平方之比。

習題九十七

1. 二相似多邊形的面積是 3 平方吋與 12 平方吋，較小多邊形的一邊是 6 吋，求較大多邊形的對應邊。
2. 二相似多邊形的一組對應邊爲 4 吋與 3 吋，大多邊形的面積是 144 平方吋，求小多邊形的面積。

3. 二相似多邊形的面積之比爲 25 : 144，求對應邊之比，求周圍之比。

4. 二相似多邊形的對應邊之比爲 4 : 9，求周圍之比，求面積之比。

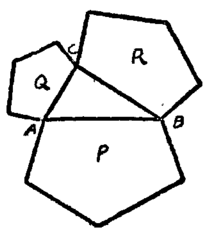
5. 求作一多邊形與一已知多邊形相似且等於他的二倍。

6. 作一多邊形與一已知多邊形相似，且等於他的三分之一。

7. 作一多邊形與已知多邊形相似且使其與已知多邊形之比，等於定比($m : n$)。

命題十六　定理

370. 若以直角三角形之三邊爲對應邊，作三個相似多邊形，則在斜邊上所作之多邊形等於其他二多邊形之和。



假設：$\triangle ABC$，$\angle C=90°$，P，Q，R 爲以 AB，BC，AC 爲對應邊之相似多邊形。

求證：$P=Q+R$。

證明：

敍述	理由
1. $P \sim Q \sim R$。	1. 設。
2. $\frac{Q}{P}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}$　$\frac{R}{P}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2}$。	2. 相似△面積之比等於對應邊平方之比。
3. $\frac{Q}{P}+\frac{R}{P}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}+\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2}$。	

4. $\dfrac{Q+R}{P}=\dfrac{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2}$.	
5. $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=AB^2$.	5. ABC 爲直角△.
6. $\therefore \dfrac{Q+R}{P}=1$.	
7. 卽 $P=Q+R$.	

習題九十八

1. 作一等邊三角形,等於二已知等邊三角形之和.
2. 作一等邊三角形,等於二已知等邊三角形之差.
3. 作一等腰直角三角形,等於三已知等腰直角三角形之和.
4. 作一多邊形與二已知相似多邊形相似,且等於其差.
5. 作一等邊三角形,等於一已知等邊三角形之三倍,減去另一已知等邊三角形之半.
6. 二相似多邊形的對應邊之比爲 5 : 9, 面積之和爲 212 平方呎,求各多邊形之面積.
7. 二相似多邊形的一組對應邊爲 12 呎與 5 呎,求等於他們的和的一個相似多邊形之對應邊.

總習題六

1. 直角三角形 ABC 之 $\angle A$ 爲直角, $\angle A$ 之內角分角線交斜邊於 D, 交外接圓於 E, 則 $AD\cdot AE=2\triangle ABC$.
2. O 爲 $\triangle ABC$ 內一點, AO 交 BC 於 D, 則
$\triangle ABO : \triangle ACO = BD : CD$.
3. 於 $\triangle ABC$ 之邊 BC 上取一點 D, 使 $BD=\dfrac{1}{3}BC$, AC 上取一點 E 使 $AE=\dfrac{1}{4}AC$. 求 $\triangle ABD : \triangle BEC$ 之値.

4. 過平行四邊形 $ABCD$ 之 D 作直線，交 BC 於 E，交 AB 之延長線於 F，則 $\triangle ABE=\triangle CEF$.

5. 梯形之下底爲 AB 上底爲 CD，對角線 AC，BD 之交點爲 O，二腰延長之交點爲 E，則 $\triangle COE=\triangle DOE$.

6. 平行四邊形 $ABCD$ 之對角線 AC，BD 交於 E，若 P 爲 $\triangle ABE$ 內任一點，求證
$\triangle PCD=\triangle PAB+\triangle PAC+\triangle PBD$.

7. 於已知三角形 ABC 內求一點 P 使
$\triangle ABP:\triangle BCP:\triangle CAP=1:2:3$.

8. 自△底邊 BC 上一點 P，作二直線三等分此三角形.

9. 自△底邊 BC 上一點 P，作三直線四等分此三角形.

10. 作三線平行於△之底邊且分此三角形成四等積部份.

11. 垂直於△之底邊作一直線，二等分此三角形.

12. 作一多邊形，相似於一已知多邊形，且與另一已知多邊形等積.

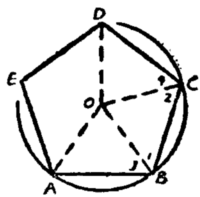
第五編　正多邊形,圓的度量

371. 正多邊形　等邊又等角的多邊形叫做正多邊形.

附註:　正三邊形卽等邊三角形,正四邊形卽正方形,

命題一　定理

372. 在一正多邊形的外面可作一外接圓.



假設: 正多邊形 $ABCDE$.

求證: 在 $ABCDE$ 的外面可作一外接圓.

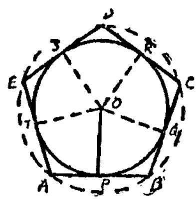
證明:

敍　述	理　由
1. 作一圓過 A,B,C 三點,其圓心為 O.	1. 不在一直線上的三點決定一圓.
2. 聯 OA,OB,OC,OD.	
3. $OB=OC$.	3. 半徑相等.
4. $\angle 1=\angle 2$.	4. 等腰△底角相等.
5. $\angle B-\angle 1=\angle C-\angle 2$.	5. 等量減等量.
6. $\angle 3=\angle 4$.	6. 代入.
7. $AB=CD$.	7. 正多邊形之邊相等.
8. $\triangle ABO\cong\triangle OCD$.	8. $s.a.s.=s.a.s.$
9. $OA=OD$.	9. 對應邊.

10. ∴此圓必過 D 點.	10. 與圓心之距離等於半徑.
11. 同法可證此圓必過 E 點.	11. (3—10).
12. ∴在 $ABCDE$ 外可作一外接圓.	

命題二 定理

373. 在一正多邊形的裏面可作一內切圓.



假設: 正多邊形 $ABCDE$.

求證: 在 $ABCDE$ 內可作一內切圓.

證明:

敘述	理由
1. 作 $ABCDE$ 之外接圓其圓心爲 O.	1. 在正多邊形外可作一外接圓.
2. $AB=BC=CD=DE=EA$.	2. 正多邊形之邊相等.
3. 作 $OP\perp AB$, $OQ\perp BC$ $OR\perp CD$, $OS\perp DE$, $OT\perp AE$.	
4. $OP=OQ=OR=OS=OT$.	4. 等弦與圓心等距.

5. 以 O 爲圓心，以 OP 爲半徑作圓必過 Q,R,S,T 等點.	
6. 此圓必切於各邊.	6. ⊥於半徑外端之線必切於圓.
7. ∴ $ABCDE$ 內可作一內切圓.	

374. 系　一正多邊的外接圓與內切圓是同心圓.

375. 正多邊形的中心，半徑，邊心距，中心角.

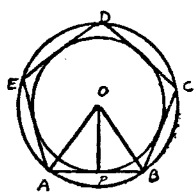
一正多邊形的外接圓與內切圓的公共圓心叫做正多邊形的中心.

中心與一頂的聯線（即外接圓的半徑）叫做正多邊形的半徑或頂心距.

中心與一邊的距離（即內切圓的半徑）叫做正多邊形的邊心距.

一邊在中心所張的角叫做正多邊形的中心角.

如圖　O 是正多邊形 $ABCDE$ 的中心，OA 是半徑或頂心距，OP 是邊心距，$\angle AOB$ 是中心角.

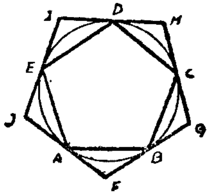


命題三　定理

376. 若一圓被分成若干相等弧，

(1) 順次聯結分點所作之弦成一內接正多邊形.

(2) 從分點所作之切線成一外切正多邊形.



假設： 圓 O，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EA}$

FG, GH, HI, IJ, JF 為切線。

求證： $ABCDE$ 為內接正多邊形，

$FGHIJ$ 為外切正多邊形.

證明：

敍述	理由
1. $AB=BC=CD=DE=EA$.	1. 等弧對等弦.
2. $\overset{\frown}{BCDE}=\overset{\frown}{CDEA}=\overset{\frown}{DEAB}=\overset{\frown}{EABC}=\overset{\frown}{ABCD}$.	2. 等量加等量.
3. $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E$.	3. 等弧的圓周角.
4. $\therefore$ $ABCDE$ 為正多邊形.	4. 邊等角等.
5. $\angle FAB=\angle FBA=\angle GBC=\angle GCB=\cdots\cdots$	5. 等弧的弦切角.
6. $\triangle AFB\cong\triangle BGC\cong\triangle CHD\cong\cdots\cdots$	6. a. s. a. = a. s. a.
7. $\angle F=\angle G=\angle H=\angle I=\angle J$.	7. 對應角.

8. $AF=FB=BG=GC=CH=\cdots\cdots$	8. 全同△之對應邊，一△之二角等，則對邊等。
9. $\therefore FG=GH=HI=IJ=JF$。	9. 等量加等量。
10. $\therefore$ $FGHIJ$ 為正多邊形。	10. 等邊且等角。

377. 系一　圓內接等邊多邊形是正多邊形。

378. 系二　正多邊形的中心角等於$\dfrac{360°}{n}$。

379. 系三　正多邊形的中心角等於一外角。

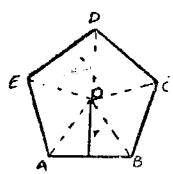
380. 系四　正多邊形的中心角與一內角相補。

習題九十九

1. 若一多邊形之外接圓與內切圓為同心圓，則此多邊形為正多邊形。

命題四　定理

381. 正多邊形的面積，等於其周圍與邊心距的乘積之半。



假設： 正多邊形 $ABCDE$，周圍 P，中心 O 邊心距 r，面積 S。

求證： $S=\dfrac{1}{2}Pr$。

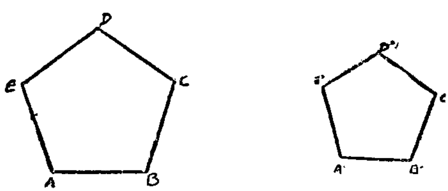
證明： 敘述 理由

敘述	理由
1. 作半徑 OA, OB, OC, OD, OE.	
2. $\triangle OAB = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot r$ $\triangle OBC = \frac{1}{2}\overline{BC}\cdot r$	2. △之面積等於底高乘積之半.
3. $S = \triangle OAB + \triangle OBC + \cdots\cdots = \frac{1}{2}r(\widehat{AB} + \widehat{BC} + \cdots\cdots) = \frac{1}{2}Pr.$	

382. 系 若正多邊形之面積爲 S，邊心距爲 r，邊數 n，一邊 a，則 $S = \frac{1}{2}nar$.

命題五 定理

383. 邊數相同的正多邊形必相似.



假設：正多邊形 $ABCDE, A'B'C'D'E'$ 各爲 n 邊形.

求證 $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$.

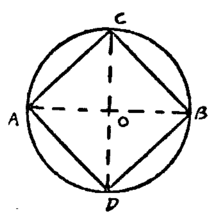
證明：

敘述	理由
1. $AB=BC=CD=DE=EA$, $A'B'=B'C'=C'D'=D'E'=E'A'$.	1. 正多邊形之邊相等.
2. $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}$.	
3. $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E=\frac{(n-2)}{n}180°=\angle A'=\angle B'=\angle C'=\angle D'=\angle E'$.	3. 正 n 多邊形之角.
4. $ABCDE\sim A'B'C'D'E'$.	4. 角等.邊成比例.

384. 系一　邊數相同的正多邊形之周圍之比,等於他們的邊之比,或半徑之比,或邊心距之比,或對應對角線之比.

385. 系二　邊數相同的正多邊形之面積之比.等於他們的邊的平方之比,或半徑平方之比,或邊心距平方之比,或周圍平方之比,或任意對應線之平方之比.

命題六　作圖



386. 在一已知圓內,作一內接正方形.

已知: $\odot O$

求作: 一圓內接正方形.

作法： 1. 作互相垂直之二直徑 AB, CD,

2. 聯 AD, DB, BC, CA

3. 則 $ADBC$ 爲正方形.

證明：

敍　述	理　由
1. $\overparen{AD}=\overparen{DB}=\overparen{BC}=\overparen{CA}$.	1. 圓心角等則弧等.
2. $ADBC$ 爲正方形.	2. § 376.

387. 系一　在一已知圓內及圓外，可作邊數爲 4,8,16, … $4\cdot 2^n$ 之內接及外切正多邊形,

（n 爲 0, 1, 2, ……等任意整數）

388. 系二　若圓之半徑爲 R，則內接正方形的一邊爲

$$R\sqrt{2}.$$

389. 系三　若正方形之一邊爲 a，則半徑爲 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$,

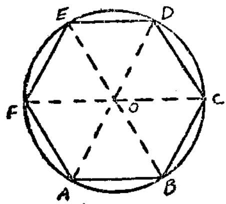
邊心距爲 $\dfrac{1}{2}a$.

習 題 一 百

1. 作外切於圓的正方形.
2. 作內接於圓的正八邊形.
3. 作外切於圓的正八邊形.
4. 在已知邊上作一正八邊形.
5. 若半徑爲 R，求正方形之周圍及面積.

命題七　作圖

390. 在一已知圓內作一內接正六邊形.



已知: 圓 O, 半徑 R.

求作: 圓內接正六邊形.

作法: 1. 以圓上任意點 A 爲圓心, 半徑 R 爲半徑作弧截圓於 B

2. 再自 B 起以 R 爲半徑, 連續截圓於 C, D, E, F.

3. 聯 AB, BC, CD, DE, EF, FA.

4. 則 $ABCDEF$ 爲正六邊形.

證明:

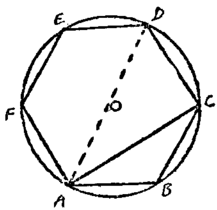
敘述	理由
1. 聯 OA, OB, OC, OD, OE, OF.	
2. $\triangle AOB$ 爲等邊$\triangle$.	2. 三邊皆爲 R.
3. $\therefore \angle AOB = 60°$.	
4. 同理 $\angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF = 60°$	
5. $\therefore \angle AOF = 360° - 5 \times 60° = 60°$.	
6. $\therefore \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FA}$.	6. 圓心角等則弧等.
7. $ABCDEF$ 爲正六邊形.	7. § 376.

391. 系一　聯內接正六邊形相間的三頂點, 則成一內接正

三角形.

392. 系二 在一已知圓內及圓外,可作邊數爲 3, 6, 12, ⋯ $3\cdot 2^n$ 之內接及外切正多邊形.

393. 系三 若半徑爲 R,則內接正六邊形之一邊爲 R,內接正三角形之一邊爲 $R\sqrt{3}$.



$\triangle ACD$ 爲直角 $\triangle$.

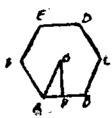
$AD=2R$

$CD=R$

$\therefore AC=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{CD}^2}$

$=R\sqrt{3}$.

394. 系四 若一邊爲 a,則正六邊形之半徑爲 a,邊心距爲 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$,面積爲 $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}a^2$



$$r=OP=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

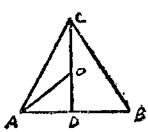
$$\text{面積}=\frac{1}{2}6\cdot a\,\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{3}{2}\sqrt{3}a^2.$$

395. 系五 若一邊爲 a,則正三角形之半徑爲 $\dfrac{1}{3}\sqrt{3}a$,邊心距爲 $\dfrac{1}{6}\sqrt{3}\,a$,面積爲 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

$$CD=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$R=AO=CO=\frac{2}{3}CD=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$r=OD=\frac{1}{3}CD=\frac{\sqrt{3}}{6}a$$



$$\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot CD$$

$$=\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

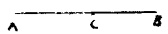
習題一〇一

1. 在圓內作內接正 12 邊形.
2. 在圓外作外切正 12 邊形.
3. 已知一邊,求作正 12 邊形.
4. 已知圓半徑 R,求內接正六邊形及內接正三角形之面積,外切正三角形之面積.

396. 外中比　若一直線被分成二線分,而一線分為全長及他一線分之比例中項時,這直線叫做被分成外中比.

如圖,

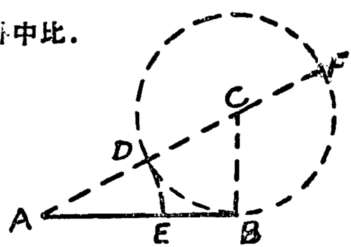
若 $AB:AC=AC:CB$,



則 AB 被 C 點內分成外中比.

命題八　作圖

397. 內分一直線成外中比.



已知: 一直線 AB.

求作: 內分 AB 成外中比.

解析: 設　$AB=a$,　中項為 x,

則　$a:x=x:a-x$

$$x^2=a^2-ax$$

$$x^2+ax+\frac{a^2}{4}=a^2+\frac{a^2}{4}$$

$$x+\frac{a}{2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$x=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}.$$

作法： 1. 作 $BC\perp AB$，且使 $BC=\frac{AB}{2}$.

2. 聯 AC.

3. 截 $CD=BC=\frac{AB}{2}$.

4. 截 $AE=AD$.

5. 則 E 內分 AB 成外中比，

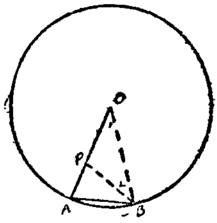
即 $AB:AE=AE:EB$.

證明：

敘述	理由
1. 以 C 爲圓心 CB 爲半徑作圓必過 D 點.	
2. 延長 AC 交圓於 F.	
3. 則 $AF:AB=AB:AD$.	3. 切線爲割線與圓外線分之比例中項.
4. $AF-AB:AB=AB-AD:AD$.	4. 分比.
5. $AF-DF:AB=AB-AE:AE$.	5. $DF=2BC=AB$. $AE=AD$.
6. $AD:AB=EB:AE$.	6. 代入.
7. $\therefore AB:AE=AE:EB$.	7. 反比.($AD=AE$)

命題九　作圖

398. 在一已知圓內，作內接正十邊形.



已知：$\odot O$，半徑 OA，

求作：一圓內接正十邊形。

作法：1. 內分 OA 成外中比於 P，OP 為較長線分，

即 $AO:OP=OP:PA$。

2. 以 A 為圓心，OP 為半徑作弧截圓於 B。

3. 聯 AB，OB。

4. 則 AB 為正十邊形之一邊。

證明：

敍　述	理　由
1. $AO:OP=OP:AP$。	1. 作圖。
2. $AO:AB=AB:AP$。	2. 代入。
3. $\triangle AOB\sim\triangle BAP$。	3. 一雙角等，夾邊成比例。
4. $\triangle AOB$ 為等腰 $\triangle$。	
5. $\therefore\triangle ABP$ 為等腰 $\triangle$。	
6. $\therefore BP=AB=OP$。	
7. $\therefore\angle 2=\angle 1$。	
8. $\angle APB=\angle 2+\angle 1=2\angle 1$。	8. 外角。
9. $\angle A=\angle APB=2\angle 1$。	
10. $\angle B=\angle A=2\angle 1$。	
11. $\angle 1+\angle A+\angle B=180^\circ$。	11. $\triangle$ 三角之和。
12. $\therefore 5\angle 1=180^\circ$。	

13. $\angle 1=36^\circ$.	
14. $\therefore AB$ 爲正十邊形之一邊.	14. 因 $360^\circ=10\times 36^\circ$.

399. 系一 聯結圓內接正十邊形的相間五頂點,則成一圓內接正五邊形.

400. 系二 在圓內及圓外可作邊數爲 $5, 10, 20\cdots\cdots 5\cdot 2^n$ 之內接及外切正多邊形.

401. 系三 若 R 爲圓的半徑,則內接正十邊形的一邊爲 $\dfrac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$

$$R:x=x:R-x, \qquad x^2=R^2-Rx$$

$$x^2+Rx=R^2, \qquad x^2+Rx+\frac{R^2}{4}=\frac{5R^2}{4}$$

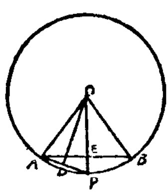
$$x+\frac{R}{2}=\frac{\sqrt{5}R}{2}, \qquad x=\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}R.$$

402. 系四 若 R 爲圓的半徑,則內接正五邊形的一邊爲 $\dfrac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

作 $OD\perp AP$, 則 $\overline{OD}^2=\overline{OA}^2-\overline{AD}^2$

$$=R^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}R\right)^2$$

$$=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}R^2.$$



$$\therefore\ OD=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}R,$$

$OD\cdot AP=OP\cdot AE$ （△底高之積）

$$\therefore\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}R\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}R=R\cdot AE,$$

$$AE=\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2}}{8}R=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}R.$$

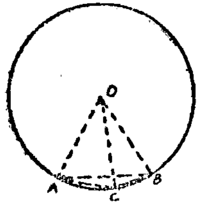
$$\therefore\ AB=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}R.$$

習題一〇二

1. 已知一邊，求作正十邊形.
2. 已知一邊，求作正五邊形.
3. 求作 36° 之角，18° 之角，9° 之角.
4. 正五邊形的對角線相等.
5. 正五邊形的對角線互分成外中比.
6. 圓內接正五邊形一邊上的正方形等於半徑上的正方形加內接正十邊形一邊上的正方形.
7. 若圓半徑等於 8，求內接正十邊形的周圍及面積.
8. 若圓半徑等於 8，求內接正五邊形的周圍及面積.
9. 若正十邊形的一邊等於 8，求半徑及面積.
10. 若正五邊形的一邊等於 8. 求半徑及面積.

命題十　作圖

403. 在一已知圓內，作內接正十五邊形



已知: $\odot O$,

求作: $\odot$ 內接正十五邊形.

作法: 1. 作內接正六邊形之一邊 AB.

2. 作內接正十邊形之一邊 AC.

3. 聯 BC.

4. 則 BC 爲內接正十五邊形之一邊.

證明:

敍述	理由
1. 聯 OA, OB, OC.	
2. $\angle AOB=60°$.	2. 正六邊形之中心角爲 $\frac{360°}{6}$.
3. $\angle AOC=36°$.	3. 正十邊形之中心角爲 $\frac{360°}{10}$.
4. $\therefore \angle BOC=60°-36°$ $=24°$.	
5. $\therefore BC$ 爲內接正十五邊形之一邊.	5. $15\times24°=360°$

404. 系 在已知圓之內外,可作邊數爲 15, 30, 60 ……………$15\cdot2^n$ 之內接及外切正多邊形.

習題一〇三

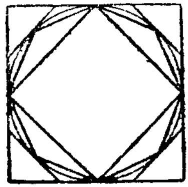
1. 求作 24°之角

2. 求作 12° 之角, 6° 之角, 3° 之角.

405. 圓周與圓內接及外切正多邊形之周圍之關係 圓周卽一圓圓弧之全長,若正多邊形之邊數無限增加時,則內接正多邊形之周圍逐漸增加而以圓周爲極限, 外切正多邊形之周圍則逐漸減小而以圓周爲極限.

406. 圓面積與內接及外切正多邊形之面積之關係 若正

多邊形之邊數無限增加，則內接正多邊形之面積逐漸增加而以圓面積爲極限，外切正多邊形之面積逐漸減小而以圓面積爲極限。



若圓周爲 C，內接或外切正多邊形之周圍爲 P，

則　$P \to C$.

若圓面積爲 S，內接或外切正多邊形之面積爲 A，

則　$A \to S$.

因 $P-C$ 或 $C-P$ 及 $A-S$ 或 $S-A$ 均逐漸減小，可以小至較任意指定之很小值更小。

407. 扇形及弓形　過圓弧的二端的二半徑與圓弧所成的圖形叫做扇形。過圓弧的二端的一弦與圓弧所成的圖形叫做弓形。

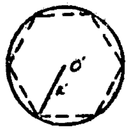
扇形

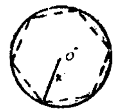
弓形

408. 相似弧，相似扇形，相似弓形　半徑不同而曲度相等的弧（即所張中心角相等的弧）叫做相似弧，相似弧所成的扇形及弓形叫做相似扇形，相似弓形。

命題十一　定理

409. 二圓的圓周之比等於其半徑之比。





假設：$\odot O$ 及 $\odot O'$，圓周 C 及 C'，半徑 R 及 R'，

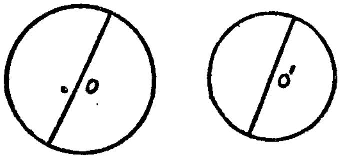
求證：$C:C'=R:R'$。

證明：

敍　　述	理　　由
1. 在二圓內，作邊數相同的內接正多邊形，其周圍為 P 及 P'。	
2. 則 $P:P'=R:R'$。	2. 邊數相同的正多邊形周圍之比等於半徑之比。
3. $\therefore\ \dfrac{P}{R}=\dfrac{P'}{R'}$。	3. 更比。
4. 若多邊形之邊數無限增加。	
5. 則 $P\to C$ $P'\to C'$。	5. § 405
6. $\dfrac{P}{R}\to\dfrac{C}{R}$ $\dfrac{P'}{R'}\to\dfrac{C'}{R'}$。	6. 極限定理一。
7. 但 $\dfrac{P}{R}=\dfrac{P'}{R'}$。	7. (3)。
8. $\therefore\ \dfrac{C}{R}=\dfrac{C'}{R'}$。	8. 極限定理二。
9. $\therefore\ C:C'=R:R'$。	9. 更比。

命題十二 定理

410. 任一圓周與直徑之比是常數.



假設: 二圓 O 及 O',圓周 C 及 C',直徑 D 及 D' 半徑 R 及 R'.

求證: $\frac{C}{D}$ 為一常數.

證明:

敍述	理由
1. $C:C'=R:R'$.	1. 圓周之比等於半徑之比.
2. $C:C'=2R:2R'$ $=D:D'$.	
3. $\frac{C}{D}=\frac{C'}{D'}$.	3. 更比.
4. $\therefore \frac{C}{D}$ 為一常數.	4. 因所有圓之 $\frac{C}{D}$ 之比皆相等.

411. 圓周率 任一圓的圓周與其直徑之比叫做圓周率,圓周率為一常數,但此常數不易求得其準確值,故通常以希臘字母 π 代之.

412. 系一 若 C 為圓周,R 為半徑,π 代圓周率,則 $C=2\pi R$.

$$\left(因\frac{C}{D}=\pi\right)$$

413. 系二 若半徑為 R,則曲度 m° 之圓弧之長為

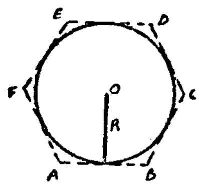
$$2\pi R\cdot\frac{m}{360}$$

習題一〇四

1. 作一圓使其圓周等於一已知圓的圓周的二倍.
2. 作一圓使其圓周等於二已知圓的圓周之和.
3. 作一圓使其圓周等於二已知圓的圓周之差.

命題十三 定理

414. 圓的面積等於圓周與半徑乘積之半.



假設: $\odot O$, 圓面積 S, 半徑 R, 圓周 C,

求證: $S=\frac{1}{2}RC$.

證明:

敍述	理由
1. 作外切正多邊形其周圍爲 P, 面積爲 S'.	
2. 則其邊心距爲 R.	2. 切線⊥半徑.
3. 而 $S'=\frac{1}{2}RP$.	3. §381
4. 若外切正多邊形之邊數無限增加, 則 $S'\to S$ $P\to C$.	4. §405, §406
5. $\therefore \frac{1}{2}RP\to\frac{1}{2}RC$.	5. 極限定理一

6. 但 $S'=\frac{1}{2}RP$.	6. (3)
7. $\therefore$ $S=\frac{1}{2}RC$.	7. 極限定理二.

415. 系一　若圓周率爲 π,半徑爲 R,

圓面積爲 S,則　$S=\pi R^2$,

$$\left(S=\frac{1}{2}RC=\frac{1}{2}R\cdot 2\pi R=\pi R^2.\right)$$

416. 系二　圓的面積之比等於其半徑平方之比,直徑平方之比,或圓周平方之比.

417. 系三　中心角等於 m° 之扇形的面積爲 $\pi R^2\cdot\frac{m}{360}$.

習題一〇五

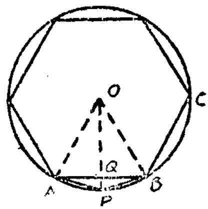
1. 作一圓使其面積等於二已知圓的面積之和,

   解析:　$\pi x^2=\pi a^2+\pi b^2$.

2. 作一圓使其面積等於二已知圓的面積之差.
3. 作一圓使其面積等於二已知同心圓間所包之面積.
4. 求作一圓使其面積等於已知圓的面積之三倍.
5. 求作一圓使其面積等於二已知圓的面積之和之半.

命題十四　問題

418. 已知正多邊形的一邊及半徑,求半徑相同而邊數爲二倍的正多邊形的一邊.



假設：n 邊正多邊形之一邊爲 $S_n(AB)$.

$2n$ 邊正多邊形之一邊爲 $S_{2n}(AP)$.

二多邊形之半徑相同，均爲 $R(OA)$.

求：以 S_n 表 S_{2n}.

解：

敍　述	理　由
1. $OP\perp AB$ 於 Q.	1. O,P 各與 A,B 等距.
2. $OQ=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AQ}^2}$ $=\sqrt{R^2-\dfrac{S_n^2}{4}}$.	
3. $PQ=OP-OQ=R$ $-\sqrt{R^2-\dfrac{S_n^2}{4}}$.	
4. $AP=\sqrt{\overline{AQ}^2+\overline{PQ}^2}$	

$$=\sqrt{\frac{S_n^2}{4}+\left(R-\sqrt{R^2-\frac{S_n^2}{4}}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{S_n^2}{4}+R^2+R^2-\frac{S_n^2}{4}-2R\sqrt{R^2-\frac{S_n^2}{4}}}.$$

$$\therefore\ S_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-S_n^2}}.$$

419. 系　若 $R=1$，則 $S_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-S_n^2}}$，$S_n$ 與 S_{2n} 爲 n 邊及 $2n$ 邊正多邊形之各一邊.

命題十五　問題

420. 求圓周率之近似值.

假設：任意一圓 O.

求：圓周率 π 之近似值.

解：1. 圓周率 π 之值，與圓半徑之大小無關，爲計算便利起

見，令 $R=1$。

2. 如於圓內作內接正六邊形，則一邊 $S_6=1$，周圍 $P_6=6$。

3. 如於圓內作內接正十二邊形，則一邊

   $S_{12}=\sqrt{2-\sqrt{4-S_6^2}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}=.51764\cdots\cdots$

   周圍 $P_{12}=12S_{12}=12\times.51764=6.21166\cdots\cdots$

4. 依此法，再求 $S_{24}, S_{48}, S_{96}\cdots\cdots P_{24}, P_{48}, P_{96}, \cdots\cdots$

   所得結果列表如下：

邊長	周長
$_{24}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.51764)^2}}=0.26105$	$P_{24}=24\times S_{24}=6.26526$
$S_{48}=0.13081$	$P_{48}=6.27870$
$S_{96}=0.06534$	$P_{96}=6.28206$
$S_{192}=0.03272$	$P_{192}=6.28291$
$S_{384}=0.01636$	$P_{384}=6.28312$
$S_{768}=0.00818$	$P_{768}=6.28317$

5. 若邊數無限增加時，內接多邊形之周圍 P 以圓周 C 為極限，故可求得 C 之近似值準確至任意位數。

6. 若以 P_{768} 為圓周之近似值，則

$$\pi=\frac{C}{2R}=\frac{6.28317}{2}=3.14159.$$

421. π 的近似值　圓周率的準確值無法求得，故理論上以 π 代之。π 之近似值，如命題十五所得，為 3.14159，準確至五位小數，π 準確至十位小數之近似值為 3.1415926536，在普通應用時，往往以 π 之近似值為 3.1416 或 $\frac{22}{7}$。

422. 關於圓的計算公式。

(1) 圓周　　　$C=2\pi R$。

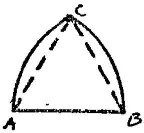
(2) 圓面積 $S=\pi R^2$.

(3) 圓弧的長 $2\pi R\cdot\frac{m}{360}$.

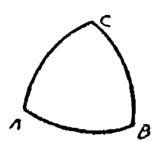
(4) 扇形的面積 $\pi R^2\cdot\frac{m}{360}$.

習題一〇六

(在下列習題內,凡不註明π之值時,不必以近似值代入

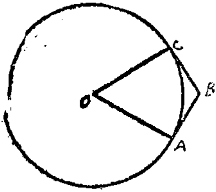
1. 若半徑等於5寸,求圓周及面積 ($\pi=3.1416$)
2. 若半徑等於7尺,求圓周及面積 $\left(\pi=\frac{22}{7}\right)$
3. 若直徑等於10寸,求60°之圓弧之長,及以30°爲圓心角的扇形之面積.($\pi=3.1416$)
4. 若圓周等於88寸,求100°扇形之面積及周圍 $\left(\pi=\frac{22}{7}\right)$.
5. 若圓面積等於S,求圓周C.
6. 若圓周等於C,求圓面積S.
7. 一正方形內接於半徑爲10寸的圓內,求一邊上之弓形之面積($\pi=3.1416$).
8. 圓的半徑是5寸,求120°弧的長,120°弧的扇形的面積 120°弧的弓形的面積.
9. 

在圖內, $AB=BC=CA=4$
B爲$\overset{\frown}{AC}$的圓心,A爲$\overset{\frown}{BC}$的圓心,求全圖形的面積.
10. A爲$\overset{\frown}{BC}$的圓心,B爲$\overset{\frown}{AC}$的圓心,C爲$\overset{\frown}{AB}$的圓心,且半徑皆等於6寸,求圖形的周圍及面積.



.0 呎,扇形的面積是 25π 平方呎,求扇形的中心角.

面積是 18π,中心角是 $80°$,求半徑.



若 AB 與 BC 為切線

$\angle COA=60°$　$OA=10$ 吋.

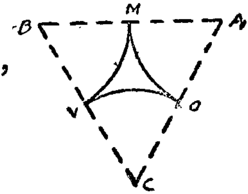
(a) 求 $OABC$ 的面積

(b) 求在 $\widehat{AC}$ 與二切線間的面積.

求 $\widehat{MN}, \widehat{NO}$

$\widehat{OM}$ 所圍的面積,已知每弧 $=60°$,

半徑都是 10.



總 習 題 七

知圓半徑為 8, 求 (1—7)

接正方形的一邊及面積.

接正六邊形的一邊及面積.

接正三角形的一邊及面積.

接正十邊形的一邊及面積.

接正五邊形的一邊及面積.

接正十二邊形的一邊及面積.

接正八邊形的一邊及面積.

一點在正多邊形內移動, 則從此點到各邊所作垂線之和為定量.

提示:　　和 $= nsr$ (r 為邊心距)

於扇形內,作內切圓.

外切於圓的等邊多邊形,若邊數為奇數,則必為正多邊形

內接於圓的等角多邊形,若邊數為奇數,則必為正多邊形

於 $\triangle ABC$ 之二邊 AB 及 AC 上向外作正方形,其各對角

之交點爲 P, Q, BC 之中點爲 M,

則 $MP=MQ$, 且 $MP \perp MQ$.

13. 圓內接正三角形 ABC, 劣弧 BC 上之任一點 P,

則 $PA=PB+PC$.

14. $\triangle ABC$ 之垂心爲 H, 高 AD 交外接圓於 K, 則 $HD=$

15. 圓內接四邊形之對邊延長線之二交角之分角線, 必

直.

16. 圓中垂直二弦之平方和, 等於半徑平方之8倍減去交

心之聯線之平方之四倍.

17. 圓內接四邊形之對角線若互相垂直, 則自對角線交

邊之垂線之延長線必過對邊之中點.

18. 銳角三角形 ABC 三高爲 AD, BE, CF, 則 $\triangle DE$

等於 $180°-2A, 180°-2B, 180°-2C$.

19. 圓內接四邊形之對角線之乘積等於二雙對邊乘積之

20. 求作一圓過二點且切一定直線.

21. 求作一圓過二點且切一定圓.

22. 梯形之對角線交點, 二腰延長線之交點及二底之中點,

共線.

23. 二圓之內公切線交點, 外公切線交點及二圓心, 四點共

24. 三圓兩兩相交, 三公共弦交於一點.

25. 三圓兩兩相切, 三公切線交於一點.

26. 二相似多邊形之對應邊各各平行, 則對應頂之聯結線

10. 一點.

27. 二圓之各平行半徑之頂點之聯線, 交於一點.

台