大學用書

統計應用數學

李銳夫　編著

正中書局印行

大學用書

統計應用數學

李銳夫 編著

正中書局印行

中華民國三十七年一月初版

統計應用數學

全一册 定價國幣壹拾貳元叁角
(精裝本定價另加五元)
(外埠酌加運費匯費)

編著者 李銳夫
發行人 吳秉常
印刷所 正中書局
發行所 正中書局

(1977)

校：向
整：壽

滬·本 3/1

序

本書爲民國二十八年以來，作者先後在中央政治學校經濟系與國立重慶大學會統系及統計專修科授統計應用數學時之講演稿；目的在供給研習數理統計者所必需之數學知識，而非爲數理統計。

全書分二十章．第一與第二兩章略述幾何量之解析，爲本書之預篇；如讀者已有良好之解析幾何基礎，可以略去．第三章至第十二章爲微積分，對於函數之極限，導微函數及積分之基本觀念，以極經濟之方法敍述，而又不失理論之嚴正．凡初等微積分範圍內之定理及公式該述無遺．此外並隨時插入爲統計學所特別需要之材料，如求近似積分法，戴勞級數，求函數之近似値等．第十三章至第十五章爲微分方程式，所論僅限於常微分方程式；至於偏微分方程式，在目前雖作高深之統計研究，亦無須用此，故未列入．第十六章論有限差式，插補法，第十七與第十八兩章論幾率，幾率積分及最小二乘方，皆爲治統計者所不可或缺之工具．第十九與第二十兩章論線積分，特殊函數及富里哀級數，亦爲研究數理統計所必需．此外行列式，二項定理等，統計學中應用甚廣；但本書爲供大學學生閱讀，此項代數知識已在高級中學習過，無須重複也．

中央政治學校統計教授褚一飛先生對本書之取材，多所指示；國立重慶大學數學教授周伯平先生曾校閱全稿，試教數次，並完成

插補法一章之初稿，謹此誌謝．前國立重慶大學商學院院長馬寅初先生與統計專修科主任倪亮先生對作者不斷鼓勵，尤所心感．數學書籍，排印繁複；正中書局在此印刷極度困難之際，接受本書出版，其提倡文化之精神，至爲可佩．

民國三十三年七月

作者於重慶

目　次

第一章　幾何量之解析… … … … … … … … … … 1

1. 向量與軸　2. 射影　3. 直角坐標　4. 極坐標　5. 線分之長　6. 斜度　7. 三角形之面積　8. 共線點　9. 分點　10. 幾何圖形與代數方程式　11. 直線之一般方程式　12. 直線方程式之各種形式　13. 直線至一點之距離　14. 二直線之交點

第二章　圓錐曲線… … … … … … … … … … … 13

1. 圓之一般方程式　2. 圓之切線　3. 抛物線　4. 抛物線機械作法　5. 橢圓　6. 橢圓之繪法　7. 輔圓　8. 雙曲線　9. 雙曲線之漸近線　10. 共軛雙曲線　11. 坐標軸之平移　12. 坐標軸之旋轉　13. 一般二次方程式

第三章　函數,導微函數　… … … … … … … … … 28

1. 變數,函數　2. 極限　3. 連續函數　4. 導微函數　5. 改變率　6. 無窮小之級　7. 微分

第四章　代數函數… … … … … … … … … … … 38

1. 有理整函數　2　有理函數　3. 代數函數　4. 導微函數　5. 隱函數之導微函數　6. 高級導微函數　7. 重根　8. 切線與法線　9. 次切線與次法線　10. 圓錐曲線之切線與法線之性質　11. 升函數與降函數　12. 極大,極小　13. 彎曲性,反曲點　14. 導微曲線　15. 反函數　16. 參數方程式

第五章　曲線製法… … … … … … … … … … … 58

1. 對稱　2. 截距　3. 彎曲性與界限　4. 異點　5. 原點切線　6. 漸近線　7. 求漸近線另法　8. 曲線無窮遠枝之情形　9. 製曲線之例

10. 縱坐標之相加

第六章 圓函數,反圓函數 … … … … … … … … … 74

1. 弧度法 2. 圓函數 3. 圓函數之導微函數 4. 圓函數之圖形 5. 反圓函數 6. 反圓函數之導微函數

第七章 指數函數,對數函數 … … … … … … … 85

1. 指數函數 2. 二項定理 3. 數 e 4. 對數函數 5. 導微函數 6. 對數之微分法

第八章 中値定理. 不定式… … … … … … … … 93

1. 中値定理 2. 不定式 $0/0, \infty/\infty$ 3. 不定式 $0\cdot\infty, \infty-\infty$.

第九章 積分法 … … … … … … … … … … … 97

1. 積分 2. 代換積分法 3. 求積分公式 4. 三角函數之積分 5. 被積函數具二次分母者 6. 部分積分法 7. 三角函數代換法 8. 部分分式 9. 求有理分式之積分

第十章 定積分 … … … … … … … … … … …113

1. 基本定理 2. 定積分 3. 積分中値定理 4. 代換 5. 面積 6. 積分之限爲無窮大者 7. 被積函數在限內爲無窮大者 8. 弧之長 9. 含二變數之連續函數 10. 二重積分 11. 極坐標之變換 12. 積分 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ 13. 近似積分法——梯形法則 14. 近似積分法——辛伯孫法則 15. 平均値

第十一章 偏導微函數… … … … … … … … …142

1. 偏導微函數 2. 全微分 3. 隱函數之導微函數 4. 高級偏導微函數 5. 齊次函數 6. 包線

第十二章 無窮級數 … … … … … … … … …151

1. 定義 2. 正項級數 3. 幾何級數 4. 積分檢驗法 5. 比値檢驗法 6. 含正負項之級數 7. 冪級數 8. 冪級數所定之函數 9. 級數之積分法與微分法 10. 對數級數 11. 二項級數 12. 戴勞定理 13. 戴勞級數 14. 級數之運算 15. 函數之近似値 16. 函數增量

之近似值　17. 比例部分法

第十三章　一級微分方程式… … … … … … … …175

1. 微分方程式　2. 微分方程式之解

I. 一級一次微分方程式 … … … … … … …178

3. 變數可以分離者　4. 齊次方程式　5. 可化爲齊次型之方程式　6. 積分因式　7. 微分方程式爲恰當之條件　8. 恰當微分方程式之解法　9. 一級線性微分方程式　10. 應用

II. 一級高次微分方程式 … … … … … … …189

11. 方程式可就 p 解出者　12. 方程式可就 y 解出者　13. 方程式可就 x 解出者　14. 克雷勞方程式　15. 異解

第十四章　高級線性微分方程式… … … … … … …197

I. 常係數線性微分方程式… … … … … … …197

1. 線性方程式　2. 常係數方程式 $f(D)=0$　3. 求 $f(D)y=X$ 之特解　4. 參數度變法

II. 解高級微分方程式雜法… … … … … … …207

5. 方程式不含 y 者　6. 方程式不含 x 者　7. 歌西線性方程式　8. 存在定理　9. 級數解

第十五章　全微分方程式.微分方程式組 … … … … …217

1. 可積分全微分方程式　2. 不可積分全微分方程式　3. 一級方程式組　4. 全微分方程式組　5. 線性方程式組

第十六章　有限差式.插補法 … … … … … … …226

I. 等差自變數之插補法 … … … … … … …226

1. 差數表　2. 符號算子　3. 多項式之差數　4. $x(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-p+1)$之差數　5. 以階乘表多項式　6. 格里哥來與牛頓之插補公式

II. 非等差自變數之插補法… … … … … … …239

7．除差數 8．關於除差數之定理 9．對非等差自變數之牛頓公式 10．拉果蘭諸之插補公式

第十七章 幾率．幾率積分 … … … … … … …248

1．幾率之定義 2．互斥事件 3．獨立事件 4．誤差 5．頻率分配 6．幾率曲線 7．幾率積分

第十八章 最小二乘方原理及其應用… … … … … …262

I．最小二乘方之原理 … … … … … … … …262

1．觀測之權 2．最小二乘方之原理 3．可能誤差

II．單一事物之直接測值 … … … … … … …265

4．等權測值 5．算術平均數之可能誤差 6．不等權測值 7．帶權平均數之可能誤差

III．一羣事物之間接觀測 … … … … … … …270

8 觀測方程式 9 法方程式 10．間接觀測之可能誤差 11．函數之近似表示法

第十九章 線積分… … … … … … … … … …280

1．積分號下求導微函數 2．線積分 3．變數代換公式 4．閉曲線所圍之面積 5．格林定理 6．積分 $F(x,y)=\int_{a,b}^{x,y} P\,dx+Q\,dy$

第二十章 特殊函數．富里哀級數 … … … … … …291

1．甘馬函數 2．皮塔函數 3．甘馬函數與皮塔函數之關係 4．拔努里數 5．超幾何函數 6．$F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ 之表爲積分 7．倍塞爾函數 8．$J_n(x)$ 表爲積分 9．π 之瓦利斯公式 10．斯得林公式 11．富里哀級數 12．積分 $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2m+1)x}{\sin x}dx$ 13．杜里克來脫積分 14．富里哀定理

第一章　幾何量之解析

§1. **向量與軸**　凡一直線有二相異之方向，任取其一爲**正向**(positive direction)，則其他爲**負向**(negative direction)。正向取定之直線曰**軸**(axis)。

二點 A, B 所定之線分曰**向量**(vector)；此二點因作用之不同，其一曰**起點**(initial point)，其他曰**終點**(terminal point)。自起點至終點之方向表向量之方向，自起點至終點之距離表向量之長度。

圖 1.

設 $x'x$ 軸上有一向量 AB, AB 之方向爲與軸之方向同。如以自 x' 至 x 爲正，則 AB 爲正，BA 爲負；故

$$AB=-BA. \tag{1}$$

設 A, B, C 爲軸上之任意三點，則無論其排列之次序如何，恆有關係：

$$AC=AB+BC. \tag{2}$$

依此推廣，設 $A, B, C, \cdots\cdots, H, K, L$ 爲一軸上之任意 n 點，則恆有

$$AL=AB+BC+\cdots\cdots+HK+KL. \tag{3}$$

在軸上任取一點 O 爲**原點**(origin)。若 A 爲軸上之任一點，並

知 OA 之代數值，則此點在軸上之位置得以確定；而此代數值曰 A 點之坐標(coördinate).

設 A, B 爲軸上之二點，其坐標分別爲 a, b. 由(2)式，

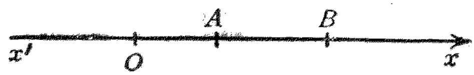

圖 2.

$$OB = OA + AB,$$

則
$$AB = OB - OA = b - a, \tag{4}$$

此卽表示向量之代數值等於其終點坐標與起點坐標之差.

(4)式爲溝通向量式與坐標式之基本公式.

§2. **射影** 設 P 爲 $x'x$ 軸外之一點，自 P 作 $x'x$ 之垂線，命 M 爲其垂足，則 M 曰 P 點在 $x'x$ 上之**射影**(projection). 設 Q 點在 $x'x$ 上之射影爲 N，則 MN 曰 PQ 向量在 $x'x$ 上之射影，表以符號

$$MN = (PQ)_x.$$

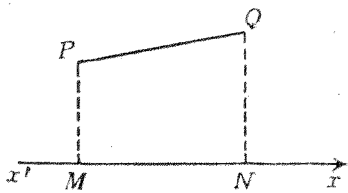

圖 3.

設 $A_0, A_1, A_2, \cdots\cdots, A_{n-1}, A_n$ 爲平面上之任意 n 點，則由 §1,(3)式，

$$(A_0A_1)_x + (A_1A_2)_x + \cdots\cdots + (A_{n-1}A_n)_x = (A_0A_n)_x. \tag{5}$$

§3. **直角坐標** 取 $x'x$ 與 $y'y$ 二軸正交於原點 O，命 Ox, Oy 爲正向，Ox', Oy' 爲負向，此二軸定一平面. 設平面有一點 P，其在 $x'x$ 上之射影爲 M，其在 $y'y$ 上之射影爲 N，則 OM 曰 P 點之**橫坐標**(abscissa)，ON 曰 P 點之**縱坐標**(ordinate). 命 $x = OM$, $y = ON$; x, y

曰 P 點在 xy 平面上之坐標(coördinates),以符號 $P(x,y)$ 表之.

此種坐標曰**直角坐標**(rectangular coördinates),爲笛卡兒(Descartes)所初創.

應用此種坐標,平面上任意一點定二實數;反之,任意二實數定平面上之一點.

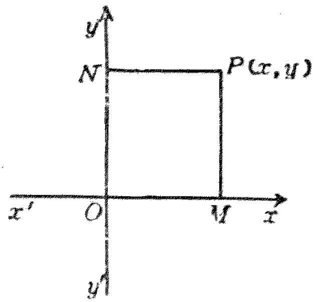

圖 4.

§4. **極坐標** 在平面上取 Ox 爲軸,O 爲極(pole).則平面上一點 P 之位置,可用 OP 旋轉之角 θ 與 OP 之長 ρ 以定之.合 θ 與 ρ 曰 P 點之**極坐標**(polar coördinates),以符號 $P(\rho,\theta)$ 表之.

依向量之定義,一點 $P'(-\rho,\theta)$ 爲在 OP 向後之延長線上,OP' 之絕對值爲 ρ.

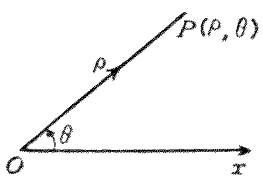

圖 5.

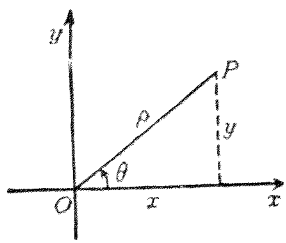

圖 6.

設一點 P 之直角坐標爲(x,y),極坐標爲(ρ,θ),則由圖 6,直角坐標與極坐標之變換式爲

$$\left.\begin{aligned} x&=\rho\cos\theta \\ y&=\rho\sin\theta \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

§5. 線分之長 設 $P\equiv(x_1,y_1)$, $Q\equiv(x_2,y_2)$, 由圖 7, 因 $\overline{PQ}^2=\overline{PK}^2+\overline{KQ}^2$, 故得

$$PQ=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}. \quad (7)$$

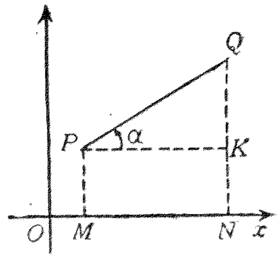

圖 7.

§6. 斜度 由圖 7, 若 PQ 之延長線與 Ox 相交成 α 之角, 則 α 謂之 PQ 直線之**方位角**(directional angle), $\tan\alpha$ 謂之 PQ 直線之**斜度**(slope).

因 $0\leqq\alpha\leqq\pi$, 故 $-\infty\leqq\tan\alpha\leqq\infty$. 再因 $\tan\alpha=KQ/PK$, 故

$$\tan\alpha=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}. \quad (8)$$

設 l_1 與 l_2 二直線之方位角分別為 α_1,α_2, 此處 $\alpha_2>\alpha_1$, 並設 ω 為 l_1 與 l_2 之交角, 則因

$$\tan\omega=\tan(\alpha_2-\alpha_1),$$

展開右端, 並令 m_1,m_2 為 l_1,l_2 之斜度, 則

$$\tan\omega=\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}. \quad (9)$$

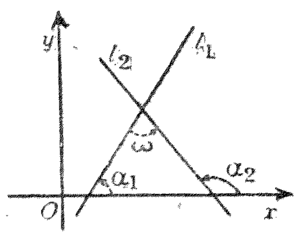

圖 8.

由(9)式得知 $l_1\parallel l_2$ 之條件為 $m_1=m_2$; $l_1\perp l_2$ 之條件為 $1+m_1\cdot m_2=0$, 即 $m_1=-\dfrac{1}{m_2}$.

§7. 三角形之面積 設 P,Q 之直角坐標為 (x_1,y_1), (x_2,y_2), 極坐標為 (ρ_1,θ_1), (ρ_2,θ_2), 則就面積而言,

$$\triangle OPQ=\frac{1}{2}\rho_1\cdot\rho_2\cdot\sin(\theta_2-\theta_1)$$

$$=\frac{1}{2}\rho_1\cdot\rho_2\cdot(\sin\theta_2\cos\theta_1-\cos\theta_2\sin\theta_1)$$

$$=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1), \qquad \text{[由(6)式]}$$

$$\therefore\quad \triangle OPQ=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

在此，若三角形三邊之順序取爲 OQP 向，則面積爲負；蓋此時 $\theta_2-\theta_1$ 爲順時針之方向，其正弦爲負也.故三角形之三邊若取逆時針之方向，所得之面積爲正；順時針之方向，其面積爲負.

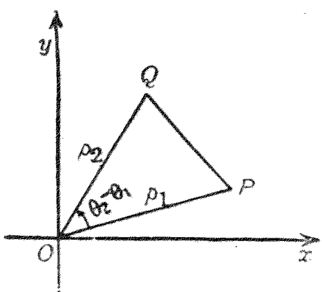

圖 9.

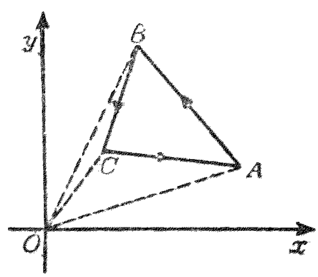

圖 10.

玆推廣之，若 $A\equiv(x_1,y_1)$, $B\equiv(x_2,y_2)$, $C\equiv(x_3,y_3)$；注意面積之正負，$\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA$，由(10)式，得

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

§8. 共線點 三點 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2), P_3(x_3,y_3)$ 共線之條件為

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

蓋若三點為共線,其所成三角形之面積為零也(§7).

§9. 分點 設 $P_1 \equiv (x_1,y_1), P_2 \equiv (x_2,y_2)$;求一點 $P(x,y)$,使分 P_1P_2 線分為二段,而

$$P_1P : PP_2 = l : m.$$

由圖 11,

$$LN : NM = P_1P : PP_2,$$

即 $$(x-x_1) : (x_2-x) = l : m.$$

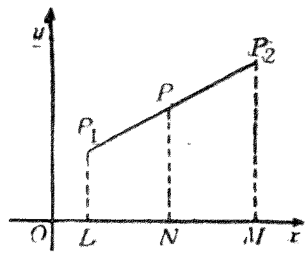

圖 11.

故
$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{lx_2+mx_1}{l+m} \\ y &= \frac{ly_2+my_1}{l+m} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$l:m$ 曰位比(position ratio). 若 P 居 P_1P_2 之內,位比為正;若 P 居 P_1P_2 之外,位比為負. 當 $P \to P_1$, $l:m \to 0$;當 $P \to P_2$, $l:m \to \infty$. 又因

$$\frac{l}{m} = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{P_1P_2+P_2P}{PP_2} = \frac{P_1P_2}{PP_2} - 1,$$

當 $PP_2 \to \infty$, $l:m \to -1$. 茲以圖 12 表之如次:

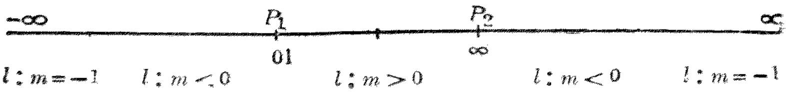

圖 12.

特例,若 P 為 P_1P_2 之中點,則 $l:m=1$,由(13)式,

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{1}{2}(x_1+x_2) \\ y&=\frac{1}{2}(y_1+y_2) \end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

習　題　一

1. 試證以上公式(3).

2. 設 A, B, C, D 為軸上之任意四點,試證

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}.$$

3. 試證平行向量在同軸上之射影之比等於其向量之比.

4. 設 $P\equiv(-2,3)$, $Q\equiv(4,-1)$; 求 PQ 之長.

5. 試求三角形$(-2,3)$, $(-7,5)$, $(3,-5)$之面積.

6. 試求四邊形(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), (x_4,y_4)之面積.

7. 試求三角形(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)之重心.

8. 試證$(6,2)$, $(-2,-2)$, $(12,5)$為共線,並求其位比.

§10. **幾何圖形與代數方程式**　凡曲線(直線為曲線之特例)可視為無窮數之點所構成.若一點 P 之坐標常適合於一定方程式,則**此點常在一軌跡**(locus)**或曲線**(curve)之上,此方程式謂之**軌跡之方程式,而軌跡曰方程式之軌跡.**

例如在 x 軸上所有點之縱坐標皆爲 0,而在 xy 平面上僅有 x 軸上之點如此,故 x 軸之方程式爲 $y=0$;同樣 y 軸之方程式爲 $x=0$.

又如有方程式

$$x^2+y^2+6x-16=0,$$

在圖 13 圓周上所有點之坐標皆適合於此方程式,故此方程式之軌跡爲圓.

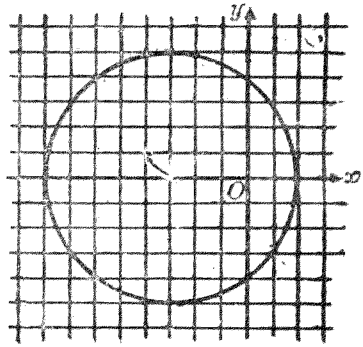

圖 13.

有方程式皆可作其圖形;反之,有圖形亦可求其方程式.

§11. **直線之一般方程式** x,y 之一般一次方程式爲

$$Ax+By+C=0. \tag{15}$$

定理. 直線之方程式爲 x,y 之一次方程式.

蓋設直線通過 $A(a,b)$, $P(x,y)$ 兩點,並設其斜度爲 m,則由(8)式,

$$y-b=m(x-a).$$

命 $m=A$, $-1=B$, $b-am=C$,則上式化爲(15)式.

逆定理. x,y 之一次方程式之軌跡爲直線.

蓋設 $A(a,b)$ 爲在(15)式之軌跡上,則 $Aa+Bb+C=0$. 與(15)式相減,

$$A(x-a)+B(y-b)=0.$$

故 $$斜度=(y-b)/(x-a)=-A/B(常數).$$

因斜度爲常數,故爲直線.

§12. 直線方程式之各種形式

1° 斜度式(slope form):

據§10, 經過(x_1, y_1)點而斜度爲 m 之直線之方程式爲

$$y-y_1=m(x-x_1). \tag{16}$$

設 $k=y_1-mx_1$, 則又得

$$y=mx+k. \tag{17}$$

2° 截距式(intercept form):

設直線與 x, y 二軸交於 $A(a, 0)$, $B(0, b)$ 兩點, 則 a, b 曰該直線在 x, y 二軸之截距(intercept). 命 $P(x, y)$ 爲直線上之任一點, 則因 $\triangle OAP+\triangle OPB=\triangle OAB$, 得直線之方程式爲

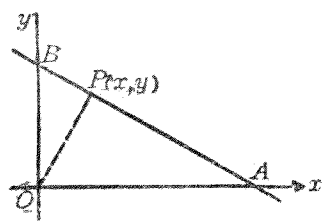

圖 14.

$$ay+bx=ab,$$

即

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{18}$$

3° 二點式(two-point form):

設直線經過 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2)$ 二點. 命 $P(x, y)$ 爲直線上之任一點, 則 P_1P_2 之斜度等於 PP_1 之斜度. 由(8)式, 得直線之方程式爲

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}. \tag{19}$$

此或可書爲行列式形:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (20)$$

4° **極坐標方程式:**

自原點向一直線作垂線 ON，設 $ON=p$，ON 與 Ox 之交角爲 α. 命 $P(\rho,\theta)$ 爲直線上之任一點，則因 $ON=\rho\cos(\theta-\alpha)$，故得直線之方程式爲

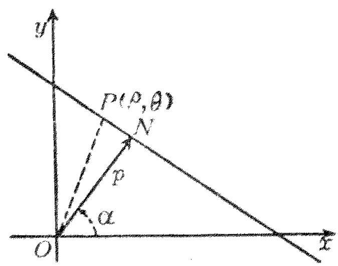

圖 15.

$$\rho\cos(\theta-\alpha)-p=0. \qquad (21)$$

5° **法線式**(normal form):

將(21)式展開，

$$\rho(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)-p=0.$$

再據(6)式，採用直角坐標，得直線之方程式爲

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0. \qquad (22)$$

§13. 直線至一點之距離

設 $P(x_1,y_1)$ 爲一定點，d 爲自直線 AB 至 P 點之距離. 過 P 作 CD 直線平行於 AB，因取 ON 爲正，若 P 與 O 居 AB 之兩旁，由(22)式，

$$x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha=p+d.$$

若 P 與 O 居 AB 之同旁，

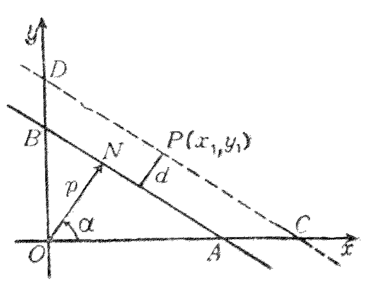

圖 16.

$$x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha=p-d.$$

故得 $$d=\pm[x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-p].\tag{23}$$

故若 P 與 O 居直線之兩旁，d 爲正；若 P 與 O 居直線之同旁，d 爲負.

若 AB 直線之方程式爲 $Ax+By+C=0$，則因

$$\frac{\cos\alpha}{A}=\frac{\sin\alpha}{B}=\frac{-p}{C}=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},$$

因 $p>0$，$\pm\sqrt{A^2+B^2}$ 之符號視 C 而定；若 C 爲正，取負號，若 C 爲負，取正號．故

$$d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.\tag{24}$$

例如自直線 $3x+4y-7=0$ 至 $(3,-2)$ 點之距離爲

$$d=\frac{3\cdot3+4(-2)-7}{+\sqrt{3^2+4^2}}=-\frac{6}{5}.$$

§ 14. 二直線之交點　設有二直線，其方程式爲

$$Ax+By+C=0 \text{ 與 } A'x+B'y+C'=0.$$

若 $\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}\neq0$，並其交點爲 (x_0, y_0)，則由代數解聯立方程式法得

$$\frac{x_0}{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}}=\frac{y_0}{\begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}.\tag{25}$$

習題二

1. 求三角形$(2,1)$, $(3,-2)$, $(-4,-1)$之三邊及三分角線之方程式,並證三分角線爲相交於一點.

2. 求三角形$(2,0)$, $(3,5)$, $(-1,2)$之三高.

3. 求$Ax+By+C=0$與$A'x+B'y+C'=0$二直線互相垂直與平行之條件.

4. 求過一點$(4,-7)$而平行於$3x+y+6=0$之直線之方程式.

5. 求過一點$(-2,-5)$而垂直於$x-2y-7=0$之直線之方程式.

6. 試證若二次方程式可分解爲二個一次因式,則其軌跡爲二直線.

7. 試證x,y之一般二次方程式

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

代表二直線之條件爲

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=0.$$

8. 試求λ之值使方程式

$$4x^2-9y^2-2(8+\lambda)x-18y-29=2\lambda$$

代表二直線.

9. 已知三角形之底及其餘二邊平方之差,試求頂點之軌跡.

第二章　圓錐曲線

§1. 圓之一般方程式　設 $C(\alpha,\beta)$ 為圓心，r 為半徑．命 $P(x,y)$ 為圓上之任一點，則因 $PC=r$，得圓之方程式為

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2. \qquad (1)$$

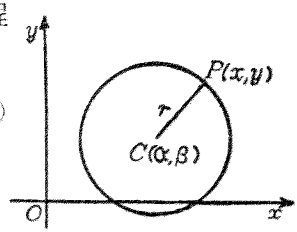

圖 17.

展開，得

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0.$$

與 x,y 之一般二次方程式比較，得：

定理 1.　方程式 $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ 代表一圓之條件為 $A=C, B=0$.

故圓之一般方程式可書為

$$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0,\ A\neq 0. \qquad (2)$$

(2)式更可書為

$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-AF}{A^2}. \qquad (3)$$

試與(1)比較，又得：

定理 2.　若圓之方程式為 $Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0$，則圓心之坐標為 $(-D/A, -E/A)$，半徑為 $\sqrt{D^2+E^2-AF}/A$.

若 $\sqrt{D^2+E^2-AF}/A=0$，則圓縮為一點；若 $\sqrt{D^2+E^2-AF}/A<0$，則不能有實圓.

系. 圓心在原點上,半徑爲 r 之圓之方程式爲

$$x^2+y^2=r^2. \tag{4}$$

(2)式中含有四常數,其中僅有三者爲獨立;欲定此三常數必須有三條件,故三條件定一圓.

§ **2. 圓之切線**　設 AP 爲圓周上 $P(x_1, y_1)$ 點之切線(tangent). OP 垂直於 AP,謂之法線(normal).

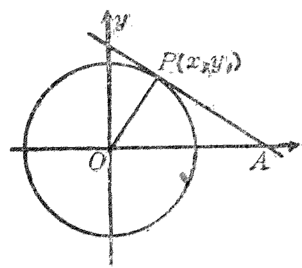

圖 18.

設圓之方程式爲 $x^2+y^2=r^2$,由圖18, OP 經過原點與 P 點,故其方程式爲

$$y_1x-x_1y=0. \tag{5}$$

OP 之斜度爲 y_1/x_1,由此可知 AP 之斜度應爲 $-x_1/y_1$;故 AP 之方程式爲 $y-y_1=-\dfrac{x_1}{y_1}(x-x_1)$,因 $x_1^2+y_1^2=r^2$,上式化簡得

$$x_1x+y_1y=r^2. \tag{6}$$

習　題　一

1. 求經過(5, 10), (6, 9), (−2, 3)三點之圓之方程式.
2. 求圓心爲(1, 3)並與直線 $2x+y+5=0$ 相切之圓之方程式.
3. 求三角形(4, 3), (3, −3), (−1, 2)之內切圓之方程式.
4. 求直線 $x-7y+25=0$ 與圓 $x^2+y^2=25$ 之交點.
5. 求直線 $Ax+By+C=0$ 爲圓 $x^2+y^2=r^2$ 之切線之條件.
6. 試證 $S_1+kS_2=0$ 爲代表經過 $S_1=0$, $S_2=0$ 二圓交點之圓

之方程式.

7. 通過兩圓交點之直線曰根軸(radical axis),試求兩圓之根軸之方程式.

8. 已知三角形之底邊及頂角,求頂點之軌跡.

§3. **拋物線** 一動點與一定直線及一定點等距離之軌跡曰拋物線(parabola).

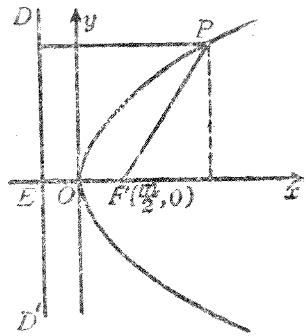

圖 19.

設 $D'D$ 為定直線,F 為定點. 以過 F 而垂直於 $D'D$ 之直線為 x 軸,過 x 軸與 $D'D$ 之交點 E 與 F 之中點,作垂線為 y 軸. 命 $P(x,y)$ 為曲線上之任一點,$EF=m$,則

$$FP=\sqrt{\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+y^2}.$$

又因 $D'D$ 與 P 之距離為 $x+\frac{m}{2}$,依定義,

$$\sqrt{\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{m}{2}.$$

兩端平方並化簡,則得拋物線之方程式為

$$y^2=2mx. \tag{7}$$

定直線 $D'D$ 曰**準線**(directrix),定點 F 曰**焦點**(focus),O 曰**頂點**(vertex),OF 曰**軸**(axis),FP 曰**焦點半徑**(focal radius).

以 O 為頂點,y 軸為軸之拋物線之方程式為

$$x^2=2my. \tag{8}$$

(7),(8) 兩式為拋物線方程式之標準式. 因

$$Ax^2+2Ey=0 \tag{9}$$

及

$$Cy^2+2Dx=0 \tag{10}$$

可以化爲(7)式或(8)式之形，故凡具(9)，(10)兩式之形之方程式，其圖形皆爲拋物線.

§4. 拋物線機械作法 已知拋物線之準線 $D'D$ 及焦點 F，則由拋物線之定義，拋物線可用機械法作出.

自 F 作 $D'D$ 之垂線，命 O 爲 EF 之中點，則 O 爲拋物線上之一點. 在 Ox 上取 $M_1, M_2, \cdots\cdots$ 諸點，作垂線. 以 F 爲心，$EM_1, EM_2, \cdots\cdots$ 爲半徑，作弧交諸垂線於 $P_1, P_1', P_2, P_2', \cdots\cdots$ 諸點，則此諸點爲在拋物線之上. 以平滑之曲線連接此諸點，則得所求之拋物線.

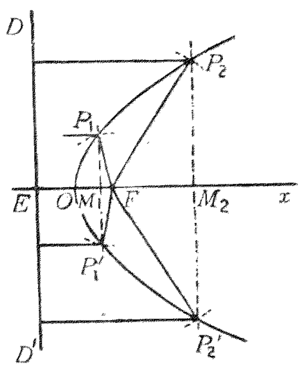

圖 20.

習 題 二

1. 試繪出以下諸方程式之圖形，並求其焦點與準線:

(1) $y^2=4x$, (2) $y^2+4x=0$,

(3) $x^2-8y=0$, (4) $y^2+x=0$.

2. 試證以 y 軸爲準線之拋物線方程式爲

$$y^2=2m(x-m).$$

3. 試證 $y=ax^2+bx+c$ 之軌跡爲拋物線.

4. 過焦點而垂直於軸之直線交拋物線於 P', P 兩點, $P'P$ 曰通徑(latus rectum). 試求拋物線 $y^2=2mx$ 之通徑之長.

5. 試將 $y^2=2mx$ 變爲極坐標方程式.

§5. 橢圓 一動點與二定點距離之和爲常數之軌跡曰橢圓(ellipse).

設 F, F' 爲二定點, 命 $F'F$ 之延長線爲 x 軸, $F'F$ 之中點垂線爲 y 軸. 設 $F'\equiv(-c, 0)$, $F\equiv(c, 0)$, $F'P+FP=2a$, 由圖 21,

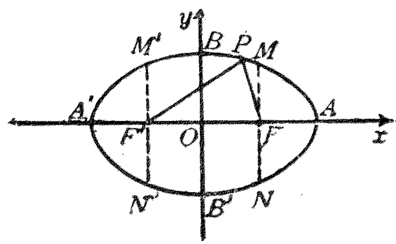

圖 21.

$$F'P=\sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad FP=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

故 $$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

兩端平方並化簡, 得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

令 $a^2-c^2=b^2$, 得橢圓之方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{11}$$

F', F 曰焦點, $A'A$ 曰長軸(major axis), $B'B$ 曰短軸(minor axis). O 曰心(center), A', A 曰頂點, 過焦點而垂直於長軸之弦 $N'M'$ 與 NM 曰通徑.

由(11)式, 得 $A'\equiv(-a, 0)$, $A\equiv(a, 0)$, $B'\equiv(-b, 0)$, $B\equiv(b, 0)$ 故橢圓之長軸爲 $2a$, 短軸爲 $2b$.

注意因 $a^2=b^2+c^2$, 故 $a>b, c$. 命

$$e=\frac{c}{a}, \tag{12}$$

e 曰離心率(eccentricity). 因 $a>c$, 故 $e<1$.

若 $a=b$, 則 $c=0$, 卽 F' 及 F 合於 O, 於是橢圓變爲圓, 故圓爲橢圓之特例. 由(12)式, 當 $c=0$, $e=0$, 故圓亦可謂之離心率爲 0 之橢圓.

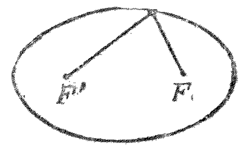

圖 22.

§6. 橢圓之繪法 取一長爲 $2a$ 之線, 其兩端分別固定於 F', F 兩點. 以鉛筆拉緊在紙上活動, 則得一橢圓.

§7. 輔圓 以長軸 $A'A$ 爲直徑之圓, 曰橢圓之輔圓(auxiliary circle). 設 P 爲橢圓上之一點, 作 MP 垂直於 $A'A$, 並延長之交輔圓於 Q. 命 $P\equiv(x', y')$, $Q\equiv(x', y_1)$, 則

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1,$$

$$x'^2+y_1^2=a^2,$$

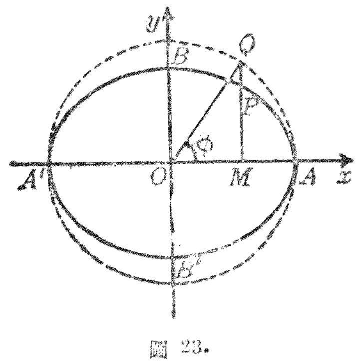

圖 23.

由此 $$y_1=\frac{a}{b}y',$$

亦卽 $$MQ : MP=a : b, \tag{13}$$

此爲橢圓之一重要性質.

因輔圓之方程式爲 $x^2+y^2=a^2$, 此可書爲參數方程式(parametric equation):

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\phi \\ y &= a\sin\phi \end{aligned}\right\}, \tag{14}$$

此處參數 ϕ 爲表 MOQ 角. 若 $P\equiv(x,y)$, 則由(11)式,

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\phi \\ y &= b\sin\phi \end{aligned}\right\}, \tag{15}$$

此爲橢圓之參數方程式,參數 ϕ 曰橢圓之離心角(eccentric angle). (15)式在微積分中頗爲重要.

習　題　三

1. 試作下列各方程式中所表之橢圓:

(1) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$,　　(2) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$,

(3) $4x^2+9y^2=36$,　　(4) $5x^2+9y^2=4$.

2. 試作下列各方程式所表之橢圓, 並求其軸之長, 焦點, 離心率及通徑:

(1) $x^2+2y^2=2$,　　(2) $2x^2+7y^2=10$,

(3) $3x^2+2y^2=4$,　　(4) $11x^2+y^2=3$.

3. 求橢圓 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 與直線 $x-y=1$ 之交點.

4. 求橢圓 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 與拋物線 $y^2=4x$ 之交點.

5. 求橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 與 $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 之交點.

6. 自焦點至橢圓之線分曰焦點半徑. 求證橢圓之焦點半徑爲 $PF=a-ex$, $PF'=a+ex$.

§8. **雙曲線** 一動點與二定點距離之差爲常數之軌跡曰雙曲線(hyperbola).

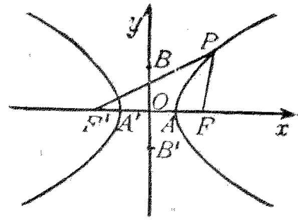

圖 24.

設定點爲 F', F. 以 $F'F$ 之延長線爲 x 軸, $F'F$ 之中點爲原點, 作 y 軸. 命 $F' \equiv (-c, 0)$, $F \equiv (c, 0)$, $P(x, y)$ 爲動點. $F'A - FA = \pm 2a$. 則依定義,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a.$$

平方並化簡, 得

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1.$$

因 $c>a$, 命 $c^2-a^2=b^2$, 得雙曲線之方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{16}$$

F', F 曰**焦點**, A', A 曰**頂點**, $A'A$ 曰**長軸**或**橫軸**(transverse axis), 在 y 軸取 $B'(0, -b)$, $B(0, b)$ 兩點, $B'B$ 曰**短軸**或**共軛軸**(conjugate axis), O 曰**心**.

命

$$e = \frac{c}{a}, \tag{17}$$

e 曰**離心率**. 因 $c > a$, 故 $e > 1$.

§9. **雙曲線之漸近線** 設 $P(x, y)$ 爲雙曲線上之一點, 並假定在第一象限, 則 OP 之斜度爲 y/x. 由(16)式, $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, 故

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}.$$

設 P 點移至無窮遠，則其橫坐標 x 亦無限增加；由是 $\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\doteq 1$，而 $y/x\doteq b/a$。故在曲線之一無窮遠枝，其斜度與直線 $y=\frac{b}{a}x$ 之斜度相同。同樣其他一枝之斜度，與直線 $y=-\frac{b}{a}x$ 之斜度相同。直線

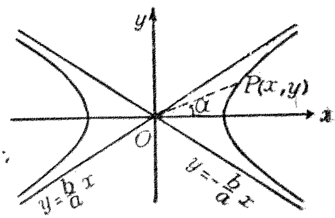

圖 25.

$$y=\frac{b}{a}x \quad 與 \quad y=-\frac{b}{a}x \tag{18}$$

曰雙曲線之漸近線(asymptotes)。注意令雙曲線方程式之常數項等於零，即 $b^2x^2-a^2y^2=0$，便得(18)式。

設 2α 爲二漸近線之交角，因 $\tan\alpha=b/a$，則當 $a=b$ 時，$2\alpha=\pi/2$，即二漸近線成正交，於是(16)式化簡爲

$$x^2-y^2=a^2, \tag{19}$$

此曰正雙曲線(rectangular hyperbola)。

§ 10. 共軛雙曲線 方程式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

及

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

所表之二雙曲線之漸近線相同，且前者之橫徑爲後者之共軛徑，前者之共軛徑亦爲後者之橫徑。

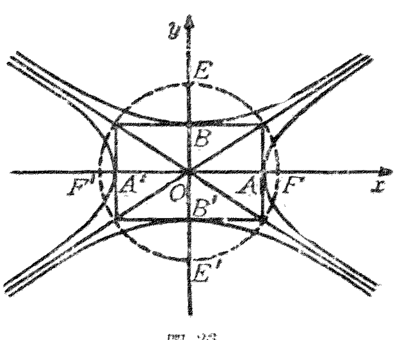

圖 26.

此二雙曲線互稱共軛雙曲線(conjugate hyperbolas).

注意共軛雙曲線之四焦點同在一圓周上.

習　題　四

1. 試作下列各方程式所表之雙曲線,並求其焦點,漸近線,頂點及離心率:

(1) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$,　　(2) $x^2-3y^2=1$,

(3) $x^2-4y^2=4$,　　(4) $y^2-2x^2=1$,

(5) $x^2-y^2=4$,　　(6) $25x^2-144y^2=3,600$.

2. 試求雙曲線 $9x^2-25y^2=225$ 與圓 $x^2+y^2=36$ 之交點,並作出其圖形.

3. 試求橢圓 $x^2/16+y^2/9=2$ 與雙曲線 $x^2-y^2=25$ 之交點,並作出其圖形.

4. 試證雙曲線之參數方程式可書爲

$$x=a\sec\theta,\quad y=b\tan\theta.$$

5. 試證雙曲線之一漸近線與其焦點之距離之絕對值爲 b.

6. 試證共軛雙曲線之四焦點在一圓周上.

7. 若 e 與 e' 爲共軛二雙曲線之離心率,試證 $1/e^2+1/e'^2=1$.

8. 試證二雙曲線相似之條件爲離心率相等.

§11. 坐標軸之平移　若坐標軸 Ox, Oy 移至新位置 $O'x', O'y'$,但 $O'x', O'y'$ 仍與 Ox, Oy 平行,此曰**坐標軸之平移**(translation of axes).

設新原點對舊軸之坐標爲(h, k)，並設任一點 P 對舊軸之坐標爲(x,y)，對新軸之坐標爲(x', y')，則由圖 27，

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + h \\ y &= y' + k \end{aligned}\right\}. \qquad (20)$$

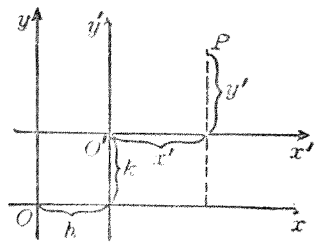

圖 27.

例如方程式 $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 18 = 0$，若坐標軸移至新原點$(3, 5)$，因 $x = x' + 3, y = y' + 5$，原式變爲

$$(x' + 3)^2 + (y' + 5)^2 - 6(x' + 3) - 10(y' + 5) + 18 = 0.$$

化簡，
$$x'^2 + y'^2 = 16.$$

故知原式表半徑爲 4 而心在$(3, 5)$之圓.

茲就一般二次方程式

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (21)$$

研究之. 作(20)式之變換，得

$$\begin{aligned} Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 &+ 2(Ah + Bk + D)x' \\ &+ 2(Bh + Ck + E)y' \\ &+ Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 + 2Dh + 2Ek + F = 0. \end{aligned}$$

若選取 h, k，使

$$Ah + Bk + D = 0, \quad Bh + Ck + E = 0,$$

則(21)式化簡爲下形：

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0. \qquad (22)$$

§12. 坐標軸之旋轉 原點不動，使兩坐標軸繞原點旋轉，此曰

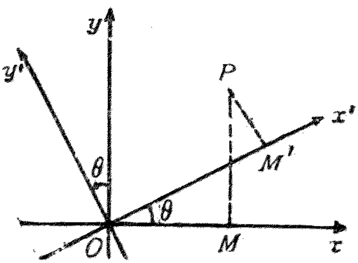

圖 28.

坐標軸之旋轉(rotation of axes).

設新軸 Ox', Oy' 繞 O 點旋轉一角 θ, 因

$$(OP)_x=(OM')_x+(M'P)_x,$$

故得

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\theta-y'\sin\theta\\ y&=x'\sin\theta+y'\cos\theta\end{aligned}\right\}. \tag{23}$$

若將一般二次方程式(21)之軸旋轉一角 θ, 則得

$$\begin{aligned}(A\cos^2\theta+2B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta)x'^2&\\ +[-2A\sin\theta\cos\theta+2B(\cos^2\theta-\sin^2\theta)&\\ +2C\sin\theta\cos\theta]x'y'&\\ +(A\sin^2\theta-2B\sin\theta\cos\theta+C\cos^2\theta)y'^2&\\ +(2D\cos\theta+2E\sin\theta)x'&\\ +(-2D\sin\theta+2E\cos\theta)y'+F=0.&\end{aligned}$$

若選取 θ 使 $x'y'$ 之係數爲零, 卽令

$$(C-A)\sin 2\theta+2B\cos 2\theta=0,$$

亦卽

$$\tan 2\theta=2B/(A-C), \tag{24}$$

則(21)式化簡爲下形:

$$A'x'^2+C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F=0. \tag{25}$$

§ 13. 一般二次方程式 利用坐標軸之變換,方程式可以化簡.一般二次方程式

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \tag{21}$$

由坐標軸之平移化爲

$$A\bar{x}^2+2B\bar{x}\bar{y}+C\bar{y}^2+F'=0 \tag{22}$$

之形.若坐標軸再旋轉 $\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}2B/(A-C)$ 角,則又化爲

$$A'x'^2+C'y'^2+F'=0 \tag{26}$$

之形,此處

$$A'=A\cos^2\theta+2B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta,$$

$$C'=A\sin^2\theta-2B\sin\theta\cos\theta+C\cos^2\theta.$$

相加,得 $$A'+C'=A+C. \tag{27}$$

又因 $$B'=-(A-C)\sin 2\theta+2B\cos 2\theta,$$

故 $$A'C'-B'^2=AC-B^2. \tag{28}$$

$A+C$ 與 $AC-B^2$ 曰不變量(invariant).

因吾人選取 θ 使 $B'=0$,故

$$A'C'=AC-B^2. \tag{29}$$

I. $AC-B^2<0$. 在此 A',C' 爲異號.若 $F'\neq 0$,(26)式亦卽(21)式之軌跡爲雙曲線.若 $F'=0$,(26)式變爲 $A'x'^2+C'y'^2=0$,因 $A'C'<0$,左端恆可因式分解,故(26)式亦卽(21)式代表二相交之直線.

II. $AC-B^2>0$. 在此 A',C' 爲同號.若 $F'\neq 0$,(26)式亦卽

(21)式之軌跡為橢圓;但若A',C',F'皆為正,則不能有軌跡.若$F'=0$,$A'x'^2+C'y'^2=0$僅能為$x=0,y=0$所適合,故(26)式亦即(21)式代表一點,亦即為點橢圓(null ellipse).

III. $AC-B^2=0$. 此時必A'為零或C'為零.若$A'=0$,由§12,

$$A\cos^2\theta+2B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta=0.$$

因此時$C=B^2/A$,故

$$(A\cos\theta+B\sin\theta)^2=0,$$

$$\theta=\tan^{-1}(-A/B). \tag{30}$$

故若將坐標軸旋轉$\tan^{-1}(-A/B)$角,則$A'=0$,但因$AC-B^2=0$,故此時$B'=0$.於是由(27),$C'=A+C$.故(21)式經此變換後化為

$$(A+C)y'^2+2Dx'+2Ey'+F=0. \tag{31}$$

故(31)式亦即(21)式之軌跡為拋物線.

例. 試作方程式

$$5x^2-6xy+5y^2-4x-4y-4=0$$

所表之軌跡.

先將坐標軸平移至新原點(h,k),由(20)式,求得$h=1,k=1$,而方程式化簡為

$$5\bar{x}^2-6\bar{x}\bar{y}+5\bar{y}^2-8=0.$$

再將坐標軸旋轉$\frac{1}{2}\tan^{-1}[-6/(5-5)]=\frac{\pi}{4}$角,變換後之方程式為

$$9x'^2+11y'^2-8=0.$$

故軌跡為橢圓,如圖29.

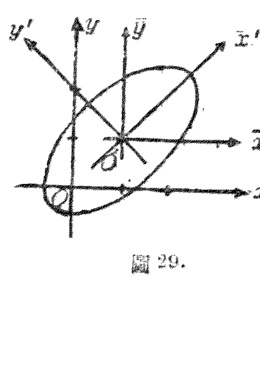

圖 29.

習 題 五

試將下列諸方程式化簡,然後作其圖形:

1. $3x^2-8xy+4y^2-x+y+5=0$.

2. $4y^2-4xy-2x^2-8y-2x+9=0$.

3. $4x^2-12xy+9y^2+4x-5y+3=0$.

4. $17x^2-12xy+8y^2+46x-28y+17=0$.

5. $77x^2+78xy-27y^2+70x-30y+29=0$.

6. $4x^2+y^2-4xy-10y-19=0$.

7. $5x^2-4xy+y^2+2x=0$.

8. $2x^2-7xy+3y^2-9x+7y+4=0$.

9. $4x^2-12xy+9y^2-8x+12y-7=0$.

10. $4x^2-2xy+y^2-14x+2y+13=0$.

第三章　函數．導微函數

§1．**變數，函數**　一種數學符號如 x，其在某範圍內可以任意代表何數者，曰**變數**(variable)，此範圍曰變數之**域**(range).

若兩變數 y 與 x 有一種關係，對 x 之任一值，y 有一值與之相應者，y 曰 x 之**函數**(function)，x 曰**自變數**(independent variable).例如

$$y=x^2,\quad y=ax^2+bx+c,\quad y=\sin x$$

等，y 之值均依 x 而變，故皆爲 x 之函數．又如圓周之長視半徑而定，故圓周之長爲半徑之函數；植物之生長視氣候而變，故植物之生長爲氣候之函數．

y 爲 x 之函數，以符號 $y=f(x)$ 表之，$f(x)$ 當 $x=a$ 時之值以 $f(a)$ 表之；如 $f(x)=2x^2+3x-1$，$f(1)=4$，$f(2)=13$ 等．

初等函數分爲**代數函數**(algebraic function)與**超越函數**(transcendental function)二種．代數函數又分爲**有理函數**(rational function)與**無理函數**(irrational function)．有理函數又分爲**整函數**(integral function)與**分函數**(fractional function)．超越函數又分爲**三角函數**(trigonometric function)，**反三角函數**(inverse trigonometric function)，**指數函數**(exponential function)，**對數函數**(logarithmic function)，**雙曲線函數**(hyperbolic function)與**反雙曲線函數**(inverse hyperbolic function)．

§2．**極限**　若一變數 x 繼續變易，但其與一常數 a 之差之絕對

值，恆小於任何所能與之正值 δ，即 $|x-a|<\delta$ 者，則 x 謂之趨近於 a 爲極限(limit)，而以符號

$$\lim x=a \quad 或 \quad x\to a$$

表之.

例如 x 依數列 $1, 1/2, 1/4, 1/8, \cdots\cdots$ 而變，則其極限爲 0；又如依數列 $1, -1, 1, -1, \cdots\cdots$ 而變，則不能有極限.

以下爲極限存在之基本定理，其證明則非本書之範圍.

1. 若 x 繼續增加，但終小於一常數 l，則趨近於一極限，此極限之值爲等於 l 或較 l 爲小.

2. 若 x 繼續減小，但終大於一常數 l，則趨近於一極限，此極限之值爲等於 l 或較 l 爲大.

變數之極限爲 0 者曰無窮小(infinitesimal). 上述之 δ，乃一無窮小也.

次就函數而言，若當 $x\to a$ 時，$|f(x)-A|<\epsilon$，此處 ϵ 爲一無窮小，則 $f(x)$ 謂之趨近於 A 爲極限，以符號

$$\lim_{x\to a} f(x)=A$$

表之.

以下爲關於極限運算之定理，本書亦假定其成立而不加證明：

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+\phi(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a}\phi(x)$.

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\phi(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\phi(x)$.

3. $\lim\limits_{x\to a} f(x)/\phi(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)/\lim\limits_{x\to a}\phi(x)$, $\lim\limits_{x\to a}\phi(x)\neq 0$.

4. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$.

例如 $$\lim_{x\rightarrow 1}(x^2+2x-1)=2.$$

若謂 $f(x)$ 當 $x\rightarrow a$ 時有極限，必須 x 自大於 a 之值趨近於 a（用符號 $x\rightarrow a$ 表之）時 $f(x)$ 之值與 x 自小於 a 之值趨近於 a（用符號 $x\rightarrow a$ 表之）時 $f(x)$ 之值為相等，即必須

$$\lim_{x\rightarrow a} f(x)=\lim_{x\rightarrow a} f(x);$$

否則謂之極限不存在.

例如 $\lim\limits_{x\rightarrow 1}\sqrt{1-x}=0$，而 $\lim\limits_{x\rightarrow 1}\sqrt{1-x}$ 不存在，故 $\lim\limits_{x\rightarrow 1}\sqrt{1-x}$ 為不存在.

但若 $\lim\limits_{x\rightarrow a} f(x)$ 存在，則曰有**左極限**(left-hand limit)，若 $\lim\limits_{x\rightarrow a} f(x)$ 存在，則曰有**右極限**(right-hand limit).

求分式之極限時，分子分母如有公因式，應先行約分. 例如

$$\lim_{x\rightarrow 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\rightarrow 1}(x+1)=2.$$

又如求分式當 $x\rightarrow\infty$ 時之極限，分子分母應先以 x 之最高次徧除. 例如

$$\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2+2}=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=1.$$

習 題 一

1. 設 $f(x)=x^2(x^2-2x-4)$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(-2)$，$f(4)$.

2. 設 $f(x)=(x^2+2x)/(x^2+1)$，求 $f(1)$，$f(-1)$，$f(-2)$，$f(a+b)$.

3. 設 $f(x)=a^x$，試證 $f(x)f(y)=f(x+y)$。

4. 試求以下各極限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x-1)$，　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-3x+2}{x-3}$，

(3) $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-8)/(x^2-2x)$，　(4) $\lim\limits_{x\to -1}(5x^2-2x)/(x^2+2)$，

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x^2-2x+1}$，　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+1}{x^3-4x-2}$，

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2-4}{x^2-2}$，　(8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^3-1}}{\sqrt{x^2-1}}$。

§3. **連續函數**　試研究圖 30 當 x 爲 a 之點附近曲線之情形，當 $x\to a$，$|f(x)-f(a)|\to 0$，故若

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a),$$

則函數謂之於 $x=a$ 點爲**連續**(continuous)。

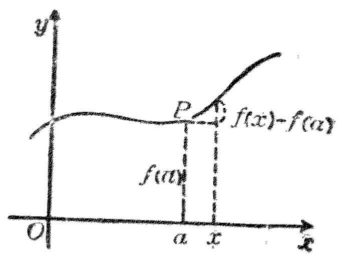

圖 30.

由此定義，得知函數於 $x=a$ 點爲連續，必須 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在且等於 $f(a)$。若此條件不適合，則 $x=a$ 謂之爲 $f(x)$ 之**不連續點**(discontinuous point)。

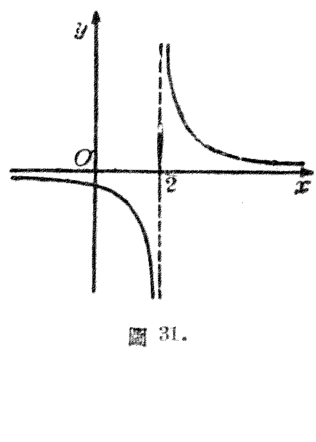

圖 31.

例如 $f(x)=1/(x-2)$，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$，故圖形於 $x=2$ 點爲不連續。

若 x 爲 (a,b) 數節內之各點時，$f(x)$ 皆爲連續，則 $f(x)$ 謂之於 (a,b) 數

節內為連續,注意 $x=a$ 與 $x=b$ 兩點亦計算在內.

以下兩點,為連續函數之重要性質:

1. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 內為連續,則必有一極大值 M 與一極小值 m.

如圖 32, $f(a)=m$, $f(c)=M$.

2. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 內為連續,則 $f(x)$ 之值必經過 M 與 m 中之各值至少一次.

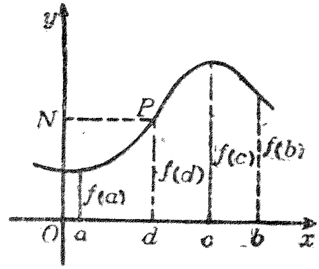

圖 32.

蓋若 μ 為 M 與 m 中之一值,在 Oy 上取 $ON=\mu$,自 N 作 NP 平行於 Ox,交曲線於 P. 設 P 點之橫坐標為 d,則 $f(d)=\mu$.

習 題 二

1. 試證多項式當 x 為任何值時皆為連續.

2. 試求下列各函數之不連續點:

(1) $\dfrac{x}{x-1}$, (2) $\dfrac{x+5}{x^2-4x+4}$,

(3) $\dfrac{2x^3-x+8}{x^3-3x^2-4x+12}$, (4) $\tan x$,

(5) $\sec\theta$, (6) $\sin\dfrac{1}{x}$.

§4. 導微函數 設

$$y=f(x) \tag{1}$$

為一連續函數. 取 x 之某一定值,當 x 增加 Δx 時,則 y 亦增加 Δy,

此處 Δx, Δy 表**增量**(increment). 則

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x),$$

$$\therefore\quad \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x),$$

由是得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{2}$$

因 $f(x)$ 爲連續, 當 $\Delta x\to 0$ 時, $f(x+\Delta x)-f(x)\to 0$. 若(2)式右端當 $\Delta x\to 0$ 時之極限存在, 此極限以 $D_x y$ 表之, 卽

$$D_x y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \tag{3}$$

此曰函數 y 對 x 之**導微函數**(derivative), 或用符號 y', $f'(x)$ 表之. 例如

$$y=x^3-2x,$$

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x).$$

展開右端, 並以 Δx 徧除, 得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-2.$$

$$\therefore\quad y'=3x^2-2.$$

求 y' 之方法曰**微分法**(differentiation).

導微函數有重要之幾何意義. 設(1)式之曲線爲 C, $P\equiv(x_1,y_1)$, 則

$$f(x_1)=MP,$$

$$\Delta y=f(x_1+\Delta x)-f(x_1)=KQ,$$

$$\Delta x=MN=PK,$$

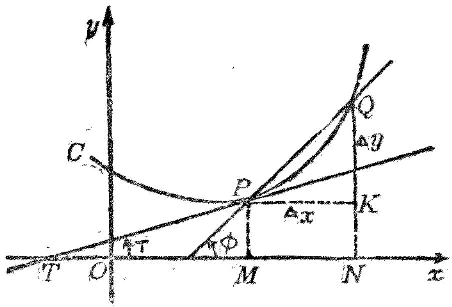

圖 33.

而 $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{KQ}{PK}=\tan\phi=PQ\text{ 弦之斜度.}$$

當 $\Delta x\to 0$, Q 點趨近於 P, PQ 趨近於切線 TP, 而 $\phi\to\tau$. 故

$$f'(x_1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\tan\tau=TP\text{ 切線之斜度.}$$

故 $f'(x_1)$ 爲曲線 $y=f(x)$ 於 $P(x_1,y_1)$ 點之切線之斜度. 曲線 C 於 P 點之切線之斜度, 亦謂之 C 於 P 點之斜度. 由第一章(16)式, TP 切線之方程式爲

$$y-y_1=f'(x_1)(x-x_1). \qquad (4)$$

例. 求拋物線 $y=x^2$ 於(1, 2)點之切線之方程式.

在此 $$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x.$$

故 $f'(x_1)=2$, 而切線之方程式爲

$$y-2=2(x-1),$$

即 $$y=2x.$$

習 題 三

試求下列各函數之導微函數:

1. $y=3x^2-2x+1$.　　2. $y=3x^3-2x^2+x-1$.

3. $y=(x-1)^3$.　　4. $y=\sqrt{x}$.

5. $y=\sqrt{x^2-2x+1}$.　　6. $y=\dfrac{1}{x}$.

7. $y=\dfrac{x}{x-1}$.　　8. $y=x^{\frac{3}{2}}$.

9. $y=(1-x)^{\frac{2}{3}}$.　　10. $y=(1-x)^{-\frac{1}{2}}$.

試求下列各函數在指定點之切線方程式:

11. $y=x^2-3x\quad(2,-2)$.　　12. $y=x^4\quad(0,0)$.

13. $y^2=2mx\quad(x_0,y_0)$.　　14. $y^2=m^2-2mx\quad(x_1,y_1)$.

§5. 改變率　設有函數 $y=f(x)$,當 x 給以任意增量 Δx,則 y 亦必得一增量 Δy. 若 Δy 與 Δx 成比例,卽 $\Delta y/\Delta x$ 爲一常數,則函數謂之成等速改變(change uniformly),而其圖形爲斜度不變之直線.

但常遇之函數,並非如此改變,例如以本金若干存入銀行中,依單利計算,則本利之增加與時期成比例;但若用複利計算,則時期愈久,本利之增加愈速,此顯然非等速改變也.

若函數不爲等速改變,則 $\Delta y/\Delta x$ 僅爲在 Δx 間隔內之平均改變率(mean rate of change). 令 $\Delta x\to 0$, $\Delta y/\Delta x$ 在一般能趨近於一極限,此曰 y 對 x 之改變率(rate of change),卽

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y\text{ 對 }x\text{ 之改變率.}\tag{5}$$

由是若 s 表距離，t 表時間，則 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 爲運動在 t 時間之速率.

§6. 無窮小之級　設一無窮小爲另一無窮小之函數，則此自變數曰**主無窮小**(principal infinitesimal). 由是 Δy 爲主無窮小 Δx 之函數.

設無窮小 v 爲主無窮小 u 之函數. 若

$$\lim_{u\to 0}\frac{v}{u}=k\neq 0, \tag{6}$$

則 u, v 謂之爲同級無窮小，亦可謂 v 對 u 爲同級無窮小. 若

$$\lim_{u\to 0}\frac{v}{u}=0,$$

則 v 謂之較 u 爲高級之無窮小.

由(6)式，$v/u=k+\epsilon$，此處 $\epsilon\to 0$，故

$$v=ku+\epsilon\cdot u,$$

即無窮小 v 可以分爲兩部：ku 與 $\epsilon\cdot u$. 因 $\epsilon\cdot u$ 較 ku 爲更小，亦即其級爲更高，ku 謂之 v 之**主部**(principal part).

§7. 微分　設有一函數 $y=f(x)$，在一般 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$，而 $f'(x)\neq 0$. 故 Δy 與 Δx 爲同級無窮小. 因 $\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\epsilon\Delta x$，而 $f'(x)\cdot\Delta x$ 爲 Δy 之主部.

Δy 之主部曰 y 之**微分**(differential)，而以 dy 表之. 由是

$$dy=f'(x)\cdot\Delta x.$$

當 $y=x$, $y'=1$，而 $dy=dx=\Delta x$，故自變數之微分等於其增量. 由是

$$dy = f'(x)dx. \tag{7}$$

是以 dy 者，卽當 x 改變 Δx 或 dx 時，y 所改變之近似值．例如 $y=x^2$，當 x 自 20 改變至 20.1 時，y 所改變之近似值如何？在此 $x=20, dx=0.1, f'(x)=2x$，故 y 之改變約等於 $40\times0.1=4$．

由(7)式，

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

故此後吾人將以 $\frac{dy}{dx}$ 或 $\frac{df(x)}{dx}$ 代 $f'(x)$．

習　題　四

1．試證 $v=\sqrt{u^2+2u^3}$ 對 u 爲同級無窮小．

2．試證 $v=\sqrt[3]{u^3-u}$ 對 u 之級爲如何？

3．設 $y=x^5-3x+1$，求 dy．

4．設 $y=\dfrac{a^2-x^2}{a+x^2}$，求 dy．

5．設 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$，求 dy．

第四章　代數函數

§1. **有理整函數**　凡具

$$f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots\cdots + a_n, \quad a_0 \neq 0 \tag{1}$$

形之函數曰 x 之**有理整函數**(rational integral function), 此處 a_0, $a_1, \cdots\cdots, a_n$ 爲常數. n 爲整數並 $\geqq 0$, 此曰 $f(x)$ 之**次**(degree). 此類函數又曰**多項式**(polynomial).

x 之値 b 使 $f(b)=0$ 者, 曰 $f(x)$ 之**根**(root).

定理 1.　當 $f(b)=0$ 而惟當 $f(b)=0$ 時, $f(x)$ 爲 $x-b$ 所整除.

蓋設 $f(x)$ 爲 $x-b$ 所除, 商式爲 $\phi(x)$, 餘式爲 R, 則

$$f(x) \equiv (x-b)\phi(x) + R,$$

由是 $f(b)=R$. 若 $f(b)=0$, 則 $R=0$, 故爲整除.

反之, 若 $f(x)$ 爲 $x-b$ 所整除, 則 $f(x) \equiv (x-b)\phi(x)$, 故 $f(b)=(b-b)\phi(b)=0$.

定理 2.　若 $f(a)$ 與 $f(b)$ 爲異號, 則 $f(x)$ 必有一根在 a 與 b 之間.

此可由應用第三章 §3 定理 2 而得.

定理 3.　若(1)之 $a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n$ 爲實數, 則 $f(x)$ 至少必有一根.

此曰代數之基本定理, 其證明繁複, 非本書之範圍.

由此定理及定理1,易知有n個數$b_1,b_2,\cdots\cdots,b_n$存在,而適合下列關係

$$f(x)\equiv a_0(x-b_1)(x-b_2)\cdots\cdots(x-b_n). \tag{2}$$

故得

定理 4. n次多項式$f(x)$有n個根.

§2. 有理函數 兩多項式之商如

$$F(x)\equiv\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_m},\quad b_0\neq 0, \tag{3}$$

曰**有理函數**,此處$a_0,a_1,\cdots\cdots;b_0,b_1,\cdots\cdots$皆爲常數,而$n,m$爲整數並$\geqq 0$.若$m=0$,則$F(x)$變爲多項式.

有理函數除於分母$b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_m$之根之點外,皆爲連續.

§3. 代數函數 若y適合於具

$$f(x,y)\equiv y^n+R_1(x)y^{n-1}+R_2(x)y^{n-2}+\cdots\cdots+R_n(x)=0 \tag{4}$$

形之方程式,此處$R_1,R_2,\cdots\cdots$爲x之有理函數,n爲正整數,則y曰x之**代數函數**.y之次爲n.

因(4)式對y有n個根$y_1,y_2,\cdots\cdots,y_n$;故對x之每一值,y有n個値與之相應,是以y爲x之n值函數.

若$n=1$,則(4)式化爲$y+R_1(x)=0$,亦卽

$$y=-R_1(x), \tag{5}$$

故y爲x之有理函數.

其次若$n=2$,則(4)式化爲

$$y^2+R_1(x)y+R_2(x)=0,$$

亦即
$$y=\frac{1}{2}(-R_1\pm\sqrt{R_1^2-4R_2}). \tag{6}$$

方程式(4)定 y 爲 x 之函數,可書爲 $f(x,y)=0$ 之形,此曰隱函數(implicit function). 若(5)與(6), y 爲 x 之函數而書爲 $y=\phi(x)$ 之形,此曰顯函數(explicit function).

若(4)之 n 爲 3 與 4, y 皆可表爲 x 之顯函數. 至若 $n\geqq 5$, y 是否可以表爲 x 之顯函數? 此在十七與十八世紀中爲一重大問題,其後於 1826 年阿倍爾(Abel)證明其不可能.[註]

§4. 導微函數

I. 常數之導微函數 設 $y=c$, c 爲一常數,則 $\Delta y/\Delta x=0$. 故當 $\Delta x\to 0$ 時,

$$\frac{dc}{dx}=0. \tag{7}$$

II. 函數之和之導微函數

設 u,v,w 各爲 x 之連續函數,而

$$y=u+v-w.$$

當 x 增加 Δx 時, u,v,w 亦各增加 $\Delta u,\Delta v,\Delta w$, 而 y 亦增加 Δy. 於是

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)-(w+\Delta w),$$

$$\therefore\quad \Delta y=\Delta u+\Delta v-\Delta w,$$

[註] 此處所謂不可能,係指表爲根式而言,亦即不能用代數法解之,至若表爲其他函數仍屬可能,1858 年漢米德(Hermite)已證明可表爲橢圓模函數(elliptic modular function),但非本書所能詳.

而
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}-\frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

兩端各取當 $\Delta x\to 0$ 時之極限，得

$$\frac{d}{dx}(u+v-w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}. \tag{8}$$

III. **函數之積之導微函數**

設 u, v 爲 x 之函數，並設 $y=u\cdot v$，故

$$\Delta y=u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\Delta v.$$

以 Δx 徧除，並取 $\Delta x\to 0$ 之極限. 因當 $\Delta x\to 0$ 時，$\Delta u\to 0$，故

$$\frac{d}{dx}(u\cdot v)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}. \tag{9}$$

特例，若 $u=c$，c 爲常數，則由(7)，$\frac{d}{dx}u=0$，故

$$\frac{d}{dx}(c\cdot v)=c\frac{dv}{dx}. \tag{10}$$

IV. **函數之商之導微函數**

設 $y=u/v$，此處 u, v 爲 x 之函數，則

$$\Delta y=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)},$$

$$\therefore\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}.$$

取 $\Delta x\to 0$ 時之極限，得

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}. \tag{11}$$

V. x^n 之導微函數

設 n 爲任何有理數,

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}. \tag{12}$$

(i) 設 $n=p/q$, $y=x^{p/q}$, p,q 爲正整數,則

$$\Delta y=(x+\Delta x)^{p/q}-x^{p/q}.$$

令 $x^{1/q}=z$ 及 $(x+\Delta x)^{1/q}=w$,

則 $x=z^q$ 及 $x+\Delta x=w^q$, $\therefore\ \Delta x=w^q-z^q$.

再 $x^{p/q}=z^p$ 及 $(x+\Delta x)^{p/q}=w^p$, $\therefore\ \Delta y=w^p-z^p$.

$$\therefore\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{w^p-z^p}{w^q-z^q}=\frac{w^{p-1}+w^{p-2}z+\cdots\cdots+z^{p-1}}{w^{q-1}+w^{q-2}z+\cdots\cdots+z^{q-1}}.$$

當 $\Delta x\to 0, w\to z$, 故

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{pz^{p-1}}{qz^{q-1}}=\frac{p}{q}z^{p-q}=\frac{p}{q}(x^{1/q})^{p-q}=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}.$$

(ii) 設 s 爲正有理數,由(i)及(11)式,

$$\frac{d}{dx}x^{-s}=\frac{d}{dx}\frac{1}{x^s}=-\frac{sx^{s-1}}{x^{2s}}=(-s)x^{-s-1}.$$

故(12)當 n 爲任何有理數時皆成立.

例一. $y=2x^4-5x^2+3x-2$.

$$\frac{dy}{dx}=2\frac{dx^4}{dx}-5\frac{dx^2}{dx}+3\frac{dx}{dx}-\frac{d2}{dx} \qquad [由(8), (10)]$$

$$=2\cdot 4x^3-5\cdot 2x+3 \qquad [由(12), (7)]$$

$$=8x^3-10x+3.$$

例二. $y=(3x^2+2)(2x+3)$.

$$\frac{dy}{dx}=(3x^2+2)\frac{d}{dx}(2x+3)+(2x+3)\frac{d}{dx}(3x^2+2) \quad [由(9)]$$

$$=(3x^2+2)\cdot 2+(2x+3)\cdot 6x \quad [由(10),(12)]$$

$$=18x^2+18x+4.$$

例三. $y=(x^2-1)/(x^2+1)$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2+1)\frac{d}{dx}(x^2-1)-(x^2-1)\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \quad [由(11)]$$

$$=\frac{(x^2+1)\cdot 2x-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

VI. 函數之函數之導微函數

若 y 爲 u 之函數，而 u 又爲 x 之函數，則 y 曰 x 之函數之函數 (function of a function). 因

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

兩端求 $\Delta x\to 0$ 時之極限，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}. \tag{13}$$

由(13)，則

$$\frac{du^n}{dx}=\frac{du^n}{du}\cdot\frac{du}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}. \tag{14}$$

例四. $y=(2x+3)^3$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(2x+3)^3}{d(2x+3)}\cdot\frac{d(2x+3)}{dx} \qquad \text{[由(13)]}$$

$$=3(2x+3)^2\cdot 2=6(2x+3)^2.$$

例五. $y=(3x^2+2)\sqrt{1+5x^2}$.

$$\frac{dy}{dx}=(3x^2+2)\frac{d}{dx}(1+5x^2)^{\frac{1}{2}}+(1+5x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(3x^2+2)$$

$$=(3x^2+2)\frac{d(1+5x^2)^{\frac{1}{2}}}{d(1+5x^2)}\frac{d(1+5x^2)}{dx}+(1+5x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(3x^2+2)$$

$$=(3x^2+2)\cdot\frac{1}{2}(1+5x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 10x+(1+5x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 6x$$

$$=\frac{45x^3+16x}{\sqrt{1+5x^2}}.$$

習　題　一

求下列各函數之導微函數:

1. $y=3x^2-2x+5$.　　2. $y=x-2x^2+5x^3$.

3. $y=\frac{2}{3}x^2-x^{-2}$.　　4. $y=2x+\frac{2}{x}$.

5. $y=(2x-1)(3x+2)$.　　6. $y=(2x^2+3x)(x^2-3)$.

7. $y=(x^2-1)(x^2+1)(x^3+2x)$.

8. $y=\sqrt[3]{x^2}-2x^2+5$.　　9. $y=x/(2x^2-1)$.

10. $y=(3x^2-2x+1)/(x^2+2)$.

11. $y=(x^2-2x+1)(x^3-x)/2x^2$.

12. $y=(3x^3-2x+5)^4$.　　13. $y=(2x^2+5x-1)^{\frac{1}{2}}$.

14. $y=(x-1)\sqrt{x-1}$.　　15. $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$.

16. $y=2x/(1-3x^2)^2$.　　17. $y=(x^2-2x-1)^2\sqrt{x^2-1}$.

18. $y=(1-x^2)^2/(1+x^2)^2$.

19. $y=[1+(x^2-1)^3]^{\frac{2}{3}}$.　　20. $y=\sqrt{x^2-\sqrt{1-x^2}}$.

§5. 隱函數之導微函數　設方程式$f(x,y)=0$定y爲x之函數(§3),並設$y=\phi(x)$爲其解.令$\frac{d}{dx}f(x,y)$表$f(x,y)$對x之導微函數.因$f[x,\phi(x)]\equiv 0$,故

$$\frac{d}{dx}f[x,\phi(x)]=0,$$

由是一點之坐標(x,y)適合於$f(x,y)=0$者,亦當適合於

$$\frac{d}{dx}f(x,y)=0.$$

故求$f(x,y)$對x之導微函數,可將$f(x,y)$逐項以y爲x之函數而求其對x之導微函數,然後令其結果爲零而得.

例一.　設有$2x^2y-3y^2-2x+7=0$,求對x之導微函數.

$$2\left(x^2\frac{dy}{dx}+y\frac{dx^2}{dx}\right)-3\frac{dy^2}{dx}-2\frac{dx}{dx}=0,$$

即

$$2\left(x^2\frac{dy}{dx}+2xy\right)-6y\frac{dy}{dx}-2=0,$$

$$(2x^2-6y)\frac{dy}{dx}+4xy-2=0,$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{4xy-2}{2x^2-6y}.$$

由此例，得知 $f(x,y)=0$ 對 x 之導微函數可書爲下形：

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}, \tag{15}$$

此處 M 爲將 $f(x,y)$ 中之 y 視爲常數然後求其對 x 之導微函數而得，N 爲將 $f(x,y)$ 中之 x 視爲常數然後求其對 y 之導微函數而得.

例二.　設 $f(x,y)\equiv 2x^2+3xy+y^2-3x+5y-10=0$,

$$M\equiv 4x+3y-3, \quad N\equiv 3x+2y+5.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} \equiv -\frac{4x+3y-3}{3x+2y+5}.$$

習　題　二

試求下列各函數之 dy/dx:

1. $x^2+3xy+5y^2-7x+8=0$.　　2. $x^3+2x^2y+y^2-3=0$.

3. $y^2-2mx=0$.　　4. $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$.

5. $ax^6+2x^2y-by-2=0$.　　6. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{y}=0$.

7. $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$.　　8. $y^2(2a-x)=x^3$.

9. $(4a^2+x^2)y-8a^3=0$.

10. $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$.

§6. 高級導微函數　$y=f(x)$ 對 x 之導微函數之本身亦爲 x 之函數，此曰**一級導微函數**(first derivative). 一級導微函數之導微函

數曰二級導微函數(second derivative),以符號 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 或 y'' 或 $f''(x)$ 表之.如此類推,$\frac{d^ny}{dx^n}$ 爲 n 級導微函數(nth derivative).例如

$$y=2x^3-3x^2+4x-5,$$

$$y'=6x^2-6x+4,$$

$$y''=12x-6,$$

$$y'''=12,$$

$$y^{(\mathrm{iv})}=0.$$

習　題　三

1. 求下列各函數之三級導微函數:

(1) $y=x^4-2x+5$,　　(2) $y=x(x-1)^3$,

(3) $y=\sqrt{2ax-x^2}$,　　(4) $y=1/\sqrt{1-x^2}$,

(5) $y=x(x+1)^4$,　　(6) $y=\sqrt{ax+b}$.

2. 設 u,v 爲 x 之函數,並設 $y=u\cdot v$,試證

$$y''=uv''+2u'v'+u''v,$$

並求 y''' 之公式.

§7. 重根　若 $f(x)$ 有 r 個根皆爲 a,則 a 曰 $f(x)$ 之 r 級重根(multiple root of order r).

定理.　若 a 爲 $f(x)$ 之 r 級重根,則 a 必爲 $f'(x)$ 之 $r-1$ 級重根.

蓋若 a 爲 $f(x)$ 之 r 級重根,

$$f(x)\equiv(x-a)^r\phi(x),\quad \phi(a)\neq 0,$$
$$f'(x)\equiv(x-a)^{r-1}[(x-a)\phi'(x)+r\phi(x)],$$

故 a 為 $f'(x)$ 之 $r-1$ 級重根.

§8. **切線與法線** 據第三章 §4, $y=f(x)$ 於 (x_1, y_1) 點之切線方程式為

$$y-y_1=f'(x_1)(x-x_1). \tag{16}$$

定理 1. 圓錐曲線於 $P(x_1, y_1)$ 點之切線方程式如次:

1° 橢圓 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 之切線為 $x_1x/a^2+y_1y/b^2=1$;

2° 雙曲線 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 之切線為 $x_1x/a^2-y_1y/b^2=1$;

3° 拋物線 $y^2=2ax$ 之切線為 $y_1y=a(x+x_1)$.

蓋由橢圓之方程式 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, $\dfrac{dy_1}{dx_1}=-b^2x_1/a^2y_1$. 由(16)式, 得於 P 點之切線為 $x_1x/a^2+y_1y/b^2=1$.

同樣可證 2° 與 3°.

在切點與切線成垂直之直線曰**法線**. 因切線之斜度為 dy_1/dx_1, 則法線之斜度為 $-dx_1/dy_1$. 由是曲線於 $P(x_1,y_1)$ 點之法線方程式為

$$y-y_1=-\frac{1}{f'(x_1)}(x-x_1). \tag{17}$$

讀者可以證明下之定理:

定理 2. 圓錐曲線於 $P(x_1,y_1)$ 之法線方程式如次:

1° 橢圓 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 之法線為 $a^2y_1x-b^2x_1y=(a^2-b^2)x_1y_1$;

2° 雙曲線 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 之法線為 $a^2y_1x+b^2x_1y=(a^2+b^2)x_1y_1$;

3° 拋物線 $y^2=2ax$ 之法線為 $y_1x+ay=x_1y_1+ay_1$.

§9. 次切線與次法線　設 $P(x_1, y_1)$ 爲 TP 切線與曲線 C 之切點，PN 爲法線．則 $(TP)_x = TM$ 曰**次切線**(subtangent)，$(PN)_x = MN$ 曰**次法線**(subnormal)．因 $TM = MP/\tan\tau$，故

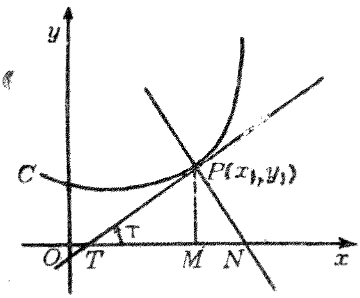

圖 34.

$$TM = y_1 \cdot \frac{dx_1}{dy_1}. \tag{18}$$

又因 $MN = MP \cdot \tan\tau$，故

$$MN = y_1 \cdot \frac{dy_1}{dx_1}. \tag{19}$$

例．　求 $y = 8a^3/(4a^2 + x^2)$ 於 $x = 2a$ 點之切線與法線方程式，次切線，次法線．

在此 $dy_1/dx_1 = -1/2$，故切線之方程式爲 $x + 2y - 4a = 0$；法線之方程式爲 $2x - y - 3a = 0$；次切線 $= -2a$（因 $y_1 = a$）；次法線 $= -a/2$．

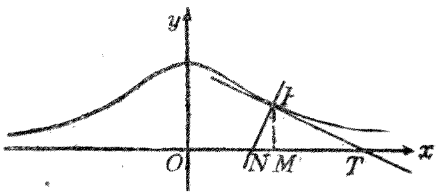

圖 35.

習　題　四

求下列各曲線於指定點之切線與法線方程式，次切線，次法線：

1．$y = 3x^2 - 5x$，　$x = 2$．

2．$9x^2 - y^2 + 2x - 4 = 0$，　$(2, 6)$．

3. $y^2=x^3+8$, $(2,4)$.

4. $y=x^4-3x^3-5x^2+4x+4$, $(0,4)$.

5. $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, (x_1,y_1).

§10. 圓錐曲線之切線與法線之性質

定理 1. 橢圓之切線與過切點之二焦點半徑相夾成等角.

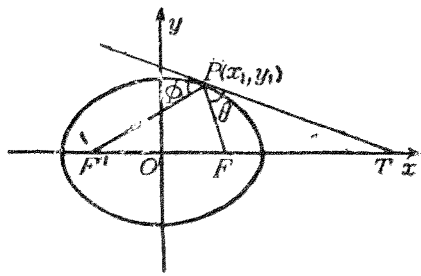

圖 36.

蓋因切線 PT 之方程式為 $x_1x/a^2+y_1y/b^2=1$. 令 $y=0$, 得 $T\equiv(a^2/x_1, 0)$. 故

$$FT=a^2/x_1-ae,$$

$$F'T=a^2/x_1+ae.$$

但 $FP=a-ex$, $F'P=a+ex$ (第二章, 習題三, 6.), 故

$$FT : F'T=FP : F'P,$$

由是 T 為 F' 與 F 之外分點, 由平面幾何, $\theta=\phi$.

定理 2. 橢圓於切點之法線, 平分過切點之二焦點半徑所夾之角.

此由定理 1. 直接推得.

讀者更可證明下之定理:

定理 3. 雙曲線之切線與法線, 平分過切點之二焦點半徑所夾之內角與外角.

定理 4. 拋物線之切線與法線, 平分過切點之焦點半徑與過切點平行於軸之直線所夾之內外角.

§11. **升函數與降函數**　若 $y=f(x)$ 當 x 增加時，y 亦增加者，則曰**升函數**(increasing function)；若當 x 增加時而 y 反減小者，則曰**降函數**(decreasing function)．由是得知升函數當 x 增加時，其圖形爲向上升，降函數當 x 增加時，其圖形爲向下降．

若曲線向上升，則其斜度爲正；若向下降，則其斜度爲負．由是

若 $f'(x)>0$，$f(x)$ 爲升函數；

若 $f'(x)<0$，$f(x)$ 爲降函數．

如圖 37，AB，CD，EF 諸段之斜度爲正，BC，DE 二段之斜度爲負．

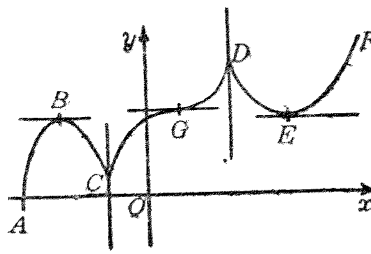

圖 37．

§12. **極大，極小**　設曲線之方程式爲 $y=f(x)$．若當 $x=a-\epsilon$，曲線向上升，當 $x=a+\epsilon$，曲線向下降，則此曲線當 $x=a$ 時有一**極大**(maxima)，其縱坐標爲 $f(a)$，此曰函數之**極大值**(maximum value)，如圖 37 中 B，D 兩點．若曲線在 $x=b$ 點之附近先降後升，則當 $x=b$ 時有一**極小**(minima)，其縱坐標爲 $f(b)$，此曰函數之**極小值**(minimum value)，如圖 37 中 C，E 兩點．

由圖 37 得知曲線於極大或極小點之切線爲平行於 x 軸或垂直於 x 軸，故於極大極小點之切線之斜度爲 0 或 ∞．由是得

定理 1.　曲線 $y=f(x)$ 於 $x=a$ 點爲極大或極小之條件爲 $f'(a)=0$ 或 ∞．

但此定理之逆理則不成立，蓋如在圖 37 中 G 點，切線亦平行於 x 軸，但 G 點並非極大或極小點．故僅據 $f'(a)=0$ 或 ∞ 不足以定曲

線之極大或極小點. 因在極大點，曲線先升後降；在極小點，曲線先降後升，故由 § 11，又得

定理 2. 若 $f'(a)=0$ 或 ∞，

1° $f'(a-\epsilon)>0, f'(a+\epsilon)<0$，則 $f(a)$ 爲極大值；

2° $f'(a-\epsilon)<0, f'(a+\epsilon)>0$，則 $f(a)$ 爲極小值.

例一. $y=x^3-3x$.

在此 $y'=3x^2-3$.

命 $y'=0$，得 $x=1$ 或 -1. 當 $x<-1$ 時，$y'>0$，當 $x>-1$ 時，$y'<0$；故 $y=2$ 爲極大（圖 38 中 A 點）. 當 $x<1$ 時，$y'<0$，當 $x>1$ 時，$y'>0$；故 $y=-2$ 爲極小（圖 38 中 B 點）.

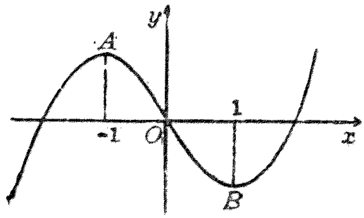

圖 38.

例二. $y=(x-2)^{2/3}+1$.

在此 $y'=2/3(x-2)^{-1/3}$.

當 $x=2$ 時，$y'=\infty$，而 y' 之號當 $x=2$ 時爲由 $-$ 而 $+$；故 $f(2)=1$ 爲極小值（圖 39）.

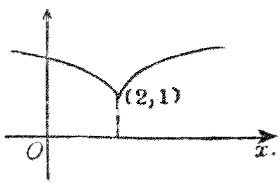

圖 39.

§ 13. 彎曲性，反曲點 假定 $f(x)$ 有二級導微函數 $f''(x)$ 存在. 當 $f''(x)$ 爲正，斜度 $f'(x)$ 爲增加，故切線依反時針之方向旋轉，而曲線爲**向上曲**（concave upward），如圖 40 中 AP 弧. 當 $f''(x)$ 爲負，$f'(x)$ 爲減小，故切線依順時針之方向旋轉，而曲線**向下曲**（concave downward），如圖 40 中 PB 弧. 至若 $f''(a-\epsilon)$ 與 $f''(a+\epsilon)$ 爲異號，並 $f''(a)=0$，則曲線於 $x=a$ 點既非向上曲又非向下曲，如圖 40 中

P 點之情形,此曰**反曲點**(point of inflexion). 由是得

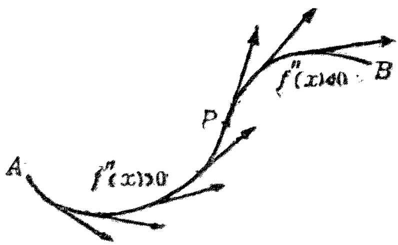

圖 40.

定理 1. 1° 若 $f''(a)>0$, 曲線於 $x=a$ 點爲向上曲;

2° 若 $f''(a)<0$, 曲線於 $x=a$ 點爲向下曲;

3° 若 $f''(a)=0$ 且 $f''(a-\epsilon)$ 與 $f''(a+\epsilon)$ 爲異號, 曲線於 $x=a$ 點爲反曲點.

因在極大點曲線向下曲,在極小點曲線向上曲,由定理 1., 又得

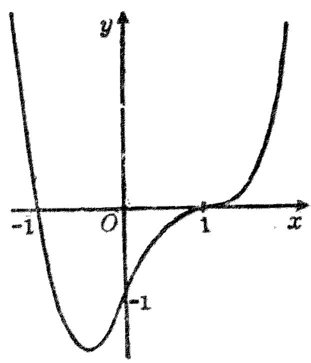

圖 41.

定理 2. 若 $f'(a)=0$,

1° $f''(a)<0$, $f(a)$ 爲極大值;

2° $f''(a)>0$, $f(a)$ 爲極小值.

例. $f(x)=(x+1)(x-1)^3$.

在此　$f'(x)=2(2x+1)(x-1)^2$.

$$f''(x)=12x(x-1).$$

令 $f'(x)=0$, 得 $x=-1/2$, $x=1$. 又令 $f''(x)=0$, 得 $x=0$, $x=1$. 茲列下表以觀其彎曲性:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$		0	$+$	
$f''(x)$			$+$		0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{27}{16}$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

由此表得知曲線在$(-\infty,0)$間向上曲，在$(0,1)$間向下曲，在$(1,\infty)$間又向上曲. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{27}{16}\right)$為極小點，$(0,-1)$與$(1,0)$皆為反曲點.

習　題　五

求下列各函數之極大，極小，彎曲性與反曲點:

1. $y=2x^2-4x+1$.　　2. $y=5+2x-x^2$.

3. $y=x^3-2x^2-x+2$.　　4. $y=2\sqrt{2x-x^2}$.

5. $y=(x^2-1)/(x-2)^2$.　　6. $y=(x-3)(x-2)$.

7. $y=x(x-1)^2(x+1)$.　　8. $y=a^2/x+b^2/(a-x)$.

§ 14. **導微曲線**　$y=f'(x)$, $y=f''(x)$, …… 各曲線分別曰$y=f(x)$曲線之一級，二級，…… 導微曲線(derived curves). 函數$f(x)$與其一級，二級等導微函數之關係，可由原函數之圖形與其一級，二級等導微曲線之關係以明之.

例如　　$y=\frac{1}{3}x^3-x^2$,

$$y'=x^2-2x,$$

$$y''=2x-2,$$

其各級之導微曲線如圖 42.

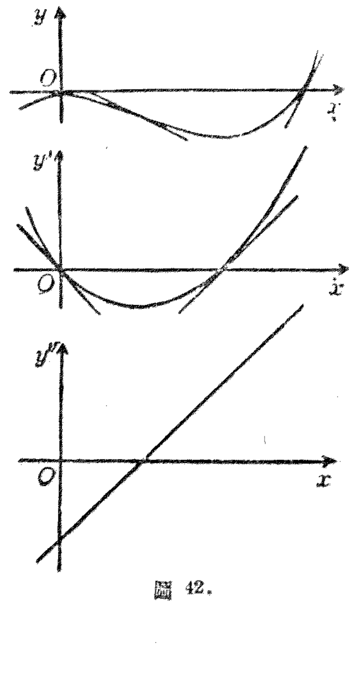

圖 42.

在應用方面，有時根據實驗結

果不能求出其數學方程式．但若能知其某一級導微函數，於是將實驗所得之結果，在坐標紙上繪出，並描出其導微曲線，於是原曲線於各點之斜度可以量出，而原曲線可以繪出矣．

習　題　六

1．設 $y'=x^2-x+1$，試討論原函數之性狀．

2．設 $y''=x^3+x$，試討論原函數之性狀．

3．試作 $y=x^3-\frac{1}{4}x^4$ 之各級導微曲線．

4．試作 $y=(x-1)^3(x+1)^2$ 之各級導微曲線，並研究其等根之情形．

§15．反函數　函數 $x=\phi(y)$ 曰函數 $y=f(x)$ 之**反函數**(inverse function)．例如 $y=x^2$，其反函數有二枝，即 $x=+\sqrt{y}$ 與 $x=-\sqrt{y}$．

若 $y=f(x)$ 之反函數為 $x=\phi(y)$，並設 $f'(x)$ 存在，則因 $\Delta x/\Delta y=1\div\Delta y/\Delta x$，而當 $\Delta y\to 0$ 時 $\Delta x\to 0$，故得

$$\frac{dx}{dy}=1\bigg/\frac{dy}{dx}. \tag{19}$$

例如 $y=x^2$，$dy/dx=2x$．由反函數 $x=y^{\frac{1}{2}}$，得 $dx/dy=1/2x$．

§16．參數方程式　設

$$x=\phi(t),\quad y=\psi(t)$$

對 t 之任一值，x,y 有一對之值與之相應，亦即有一點 $P(x,y)$ 與之相應；當 t 繼續變動，P 描一曲線，故 $x=\phi(t)$，$y=\psi(t)$ 曰曲線之**參數方程式**(parametric equation)，t 曰**參數**(parameter)．例如 $x=r\cos\theta$，

$y=r\sin\theta$ 表圓 $x^2+y^2=r^2$ 之參數方程式.

設 $t=f(x)$ 爲 $x=\phi(t)$ 之反函數，由 $t=f(x)$, $y=\psi(t)$，得定 y 爲 x 之函數 $y=\psi[f(x)]$. 設 $\phi'(t)$, $\psi'(t)$ 皆存在，並 $\phi'(t)\neq 0$，則由 §15,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt}=\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}. \tag{20}$$

例如方程式 $x=t^2$, $y=2t$ 代表拋物線 $y^2=4x$. 當 t 自 $-\infty$ 變至 $+\infty$，(x, y) 描出拋物線如圖 43. 當 $t=1$, $x=1$, $y=2$. $dx/dt=2t=2$, $dy/dt=2$, $\therefore$ $dy/dx=2/2=1$. 故此拋物線於該點之切線方程式爲

$$y-2=(x-1).$$

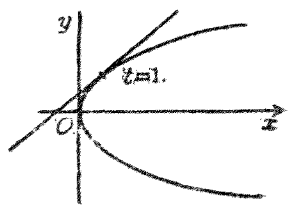

圖 43.

習 題 七

求下列各函數之反函數及其圖形:

1. $y=2x-1$.　　2. $y=x^2-4x$.

3. $y=(x^2-1)^2$.　　4. $y=4x^2+2$.

求作下列各方程式所表之曲線於所設點之切線:

5. $x=3t^2+2t$, $y=1/t$, $t=-2$.

6. $x=(t-1)/(t^2+1)$, $y=2t/(t^2+1)$, $t=1$.

7. 試證公式:

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dx}\left[1\bigg/\frac{dy}{dx}\right]=-\frac{d^2y}{dx^2}\bigg/\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

8. 若 $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$, 試證公式:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt}\right]\frac{dt}{dx}$$

$$=\left[\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right]\bigg/\left(\frac{dx}{dt}\right)^3.$$

第五章　曲線製法

§1. **對稱**　若已知一軌跡之方程式 $y=f(x)$，或 $F(x,y)=0$，可給 x 以諸值，然後求 y 之各對應值；將此所得之 x，y 對應值在坐標紙上記出，以平滑曲線連接諸點，則得方程式之軌跡．但此法殊爲冗長；軌跡之形狀，可由討論方程式之性質以知之．本章將專論代數曲線之製法．

1° 若方程式不含 y 之奇次項，則曲線對 x 軸成對稱；蓋若一點 (x,y) 適合於方程式，則 $(x,-y)$ 亦能適合於方程式也．

2° 若方程式不含 x 之奇次項，則曲線對 y 軸成對稱；蓋 (x,y)，$(-x,y)$ 二點皆能適合於方程式也．

3° 若方程式不含 x,y 之奇次項，則曲線對原點成對稱；蓋 (x,y)，$(-x,-y)$ 二點皆能適合於方程式也．

4° 若將方程式中 x,y 互易而方程式不變，則曲線對直線 $y=x$ 成對稱；蓋 (x,y)，(y,x) 二點皆能適合於方程式也．

5° 若曲線不對任何軸成對稱，則研究其是否可由坐標軸之移轉而成對稱．

§2. **截距**

1° 若方程式不含常數項，則曲線通過原點．

2° 命 $y=0$，則得曲線在 x 軸之截距；命 $x=0$，則得曲線在 y 軸

之截距.

§3. **彎曲性與界限** 由前章所論,可求曲線之極大,極小,反曲點及其彎曲性.

若方程式可書爲 $y=\phi(x)\sqrt[2n]{\psi(x)}$ 之形,則必 $\psi(x)\geqq 0$, y 始有實值,故由 $\psi(x)\geqq 0$ 可求得 x 之界限. 例如有方程式

$$4y^2-4xy+2x^2-8y-2x+9=0,$$

此可書爲

$$y=\frac{x+2}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(1-x)(x-5)}.$$

由 $(1-x)(x-5)\geqq 0$,得 $1\leqq x\leqq 5$. 故曲線在 $x=1$ 與 5 之範圍之內.

§4. **異點** 設 y 爲 x 之函數而由方程式 $F(x,y)=0$ 所定. 由第四章,(15)式,曲線於 (x,y) 點之斜度爲

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M(x,y)}{N(x,y)}.$$

若 $M(x,y)$, $N(x,y)$ 於一點 $P(x,y)$ 皆爲零,則曲線於該點之斜度爲 $0/0$, 此爲不定, $P(x,y)$ 曰**異點**(singular point).

求曲線之異點,必須求方程式

$$F(x,y)=0,\quad M(x,y)=0,\quad N(x,y)=0$$

之公共解. 但因方程式之個數多於變數之個數,此三方程式不一定有公共解,故異點爲不常有也.

若曲線於一點 P 有二切線(實或虛),則 P 曰**二重點**(double point). 若曲線於一點有三切線,則此點曰**三重點**(triple point). 茲

僅就二重點論之.

1° 若二切線爲實,並不相合,則 P 曰**結點**(node) (圖44).

2° 若二切線爲實而相合,則 P 曰**歧點**(cusp). 歧點又分二類:圖 45 曰**第一類歧點**,圖 46 曰**第二類歧點**.

3° 若二切線爲虛,而在 P 之隣近無曲線上之點,即 P 爲完全孤立,則 P 曰**共軛點**(conjugate point).

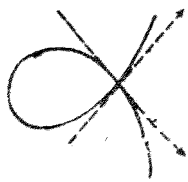
圖 44.

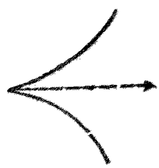
圖 45.

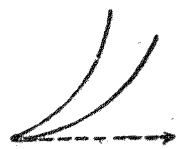
圖 46.

§5. **原點切線** 設曲線之方程式書爲下形:

$$F(x,y)\equiv a_0+b_0x+b_1y+c_0x^2+c_1xy+c_2y^2+\cdots\cdots +k_ny^n=0. \tag{1}$$

求導微函數,得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b_0+2c_0x+c_1y+\cdots\cdots}{b_1+c_1x+2c_2y+\cdots\cdots}.$$

若曲線爲經過原點,則 $a_0=0$, 於是曲線於原點之斜度爲 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b_0}{b_1}$, 而於原點之切線之方程式爲

$$b_0x+b_1y=0. \tag{2}$$

故曲線於原點之切線可由令方程式之一次項等於 0 而得. 例如曲線 $y-x^2=0$ 於原點之切線爲 $y=0$.

其次, 若 a_0, b_0, b_1 皆爲 0, 則曲線亦經過原點, 而於原點之斜度

爲不定，故原點爲一異點. 此時若 c_0, c_1, c_2 不皆爲 0，設 $c_2 \neq 0$，則可書

$$c_0x^2+c_1xy+c_2y^2 \equiv c_2(y-m_1x)(y-m_2x), \tag{3}$$

而(1)式變爲下形

$$c_2(y-m_1x)(y-m_2x)+d_0x^3+\cdots\cdots+k_ny^n=0.$$

於是直線 $y=mx$ 與此曲線之交點之橫坐標可於方程式

$$c_2x^2(m-m_1)(m-m_2)+x^3(d_0+\cdots\cdots)+\cdots\cdots=0$$

定之. 此方程式對 x 有二等根爲 0，故直線 $y=mx$ 與曲線於原點相交於無限接近之二點. 但由以上之方程式，得知當 $m \to m_1$ 或 m_2，x^2 之係數 $\to 0$，故曲線與直線另有一交點趨近於原點，而直線

$$y=m_1x, \qquad y=m_2x$$

爲曲線於原點之切線，惟可爲實或虛耳. 由(3)式得知於原點之切線，可由方程式二次項等於 0 而得. 例如曲線 $y^2=4x^2(1-x)$，其於原點之切線爲 $y^2-4x^2=0$，即 $y=2x$ 與 $y=-2x$.

由以上之理論推廣，若 $F(x,y)$ 之最低項爲 i 次，$i \neq 0$，則由令 $F(x,y)=0$ 之 i 次項爲 0，得於原點之 i 枝切線(或實或虛).

§6. 漸近線 若一曲線漸趨近於一直線至無窮遠而相交，則此直線曰此曲線之漸近線(asymptote). 故漸近線亦即曲線於無窮遠點之切線.

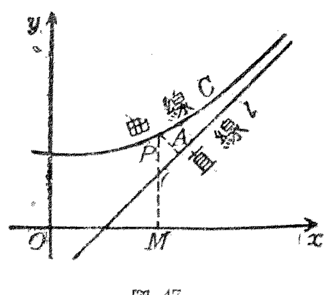

圖 47.

設曲線之方程式爲

$$y=f(x)/\phi(x),$$

此處 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 無公共因式. 若分

子之次數低於分母之次數或相等，則當 $|x| \to \infty, y \to k$（k 爲常數），故 $y=k$ 爲一漸近線. 再若 $x-a$ 爲 $\phi(x)$ 之一因式，則當 $x \to a$ 時，$y \to \infty$，故 $x=a$ 爲一漸近線. 由是得

定理 1. 若 $|x| \to \infty, y \to k$, 則 $y=k$ 爲一平行於 x 軸之漸近線；若 $x \to a, y \to \infty$，則 $x=a$ 爲一平行於 y 軸之漸近線.

若 $f(x)$ 之次數高於 $\phi(x)$ 之次數，則由實行除法而可書爲下形

$$y=mx+b+\psi(x),$$

此處 $\psi(x)$ 爲一眞分數；由是 $\lim\limits_{|x| \to \infty} \psi(x)=0$.

定理 2. 若 $y=mx+b+\psi(x)$，而當 $|x| \to \infty$ 時，$\psi(x)$ 與 $\psi'(x)$ $\to 0$，則 $y=mx+b$ 爲曲線之漸近線.

蓋由圖 47，設 l 之方程式爲 $y=mx+b$，C 之方程式爲 $y=mx+b+\psi(x)$. 命 $P \equiv (x,y)$，則 $MP=mx+b+\psi(x)$，$MQ=mx+b$，$QP=\psi(x)$. 因 $\lim\limits_{|x| \to \infty} \psi(x)=0$，即

$$\lim_{|x| \to \infty} AP = \lim_{|x| \to \infty} QP \cdot \sin \angle AQP = 0.$$

再因 $\psi'(x) \to 0$，$F'(x)=m+\psi'(x) \to m$. 此即表示在無窮遠處曲線 C 與直線 l 相交，並斜度相等，故 l 爲 C 之漸近線.

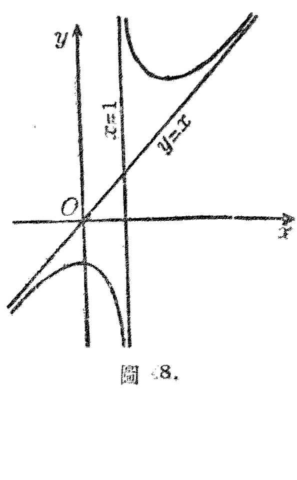

圖 48.

例如曲線 $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.

當 $x \to 1$ 時，$y \to \infty$，故 $x=1$ 爲一漸近線. 又 $y=x+\dfrac{1}{x-1}$，當 $|x| \to \infty$ 時，$\psi(x)=\dfrac{1}{x-1} \to 0$，$\psi'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2} \to 0$，故

$y=x$ 亦爲一漸近線.

§7. **求漸近線另法**　設曲線之方程式爲

$$F(x,y)=0,$$

而 y 不能就 x 解出，則用下法求其漸近線.

假設　　　　$$y=mx+k$$

爲 $F(x,y)=0$ 之一漸近線，則因漸近線爲曲線於無窮遠點之切線，故 $F(x,mx+k)=0$ 必有二等根爲無窮大. 由代數定理，[註]若令方程式最高次項爲 0，則有一根爲無窮大；若令最高次項及次高次項之係數爲 0，則有二根爲無窮大；餘類推. 若將 $F(x,mx+k)=0$ 書爲下形

$$\phi_1(m,k)x^n+\phi_2(m,k)x^{n-1}+\cdots\cdots=0,$$

則命 $\phi_1(m,k)=0$ 及 $\phi_2(m,k)=0$，上式之曲線與直線 $y=mx+k$ 相交於二無窮遠點. 故由 $\phi_1=0$ 與 $\phi_2=0$ 解得 m,k 之值，代入 $y=mx+k$ 中，則得所求之漸近線.

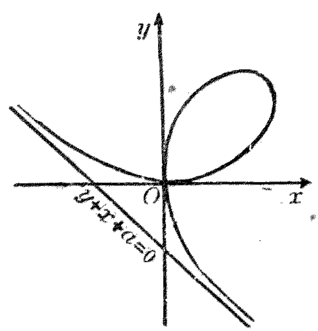

圖 49.

例.　求曲線 $x^3+y^3-3axy=0$ 之漸近線.

命 $y=mx+k$ 爲所求之漸近線；代入上式中，得

$$(m^3+1)x^3+3m(km-a)x^2+3k(km-a)x+k^3=0.$$

令 $m^3+1=0$ 及 $3m(km-a)=0$，得 $m=-1$ 與 $k=-a$. 故所求之漸

[註]　見 Fine: College Algebra, §816.

近線爲 $y+x+a=0$.

至欲求平行於坐標軸之漸近線，將 $F(x,y)=0$ 依 y 之降冪序列之，設爲

$$ay^n+(bx+c)y^{n-1}+(dx^2+ex+f)y^{n-2}+\cdots\cdots=0.$$

若 $a\neq0$，則不能有平行於 y 軸之漸近線．若 $a=0$，選取 x 使 $bx+c=0$，於是方程式有二根爲無窮大，故 $bx+c=0$ 爲代表平行於 y 軸之漸近線.

若 $a=b=c=0$，則 $dx^2+ex+f=0$ 爲表二平行於 y 軸之漸近線．餘類推.

同理，將 $F(x,y)=0$ 依 x 之降冪序列之，可得平行於 x 軸之漸近線(注意若曲線有平行於 x 軸之漸近線，由以上用 $y=mx+k$ 代入法，亦可求得；蓋若 $m=0$，則 $y=k$ 爲平行於 x 軸之漸近線).

注意若方程式中 y 之最高次項之係數爲不等於 0 之常數，則不能有平行於 y 軸之漸近線．同理，若 x 之最高次項之係數爲不等於 0 之常數，則不能有平行於 x 軸之漸近線.

例.　求 $x^2y^2-x^2y+xy^2+y+1=0$ 之漸近線.

就 y 之降冪序列之，

$$(x^2-x)y^2-(x^2-1)y+x+1=0.$$

命 $x^2-x=0$，得二平行於 y 軸之漸近線 $x=0$ 及 $x=1$.

次依 x 之降冪序列之，

$$(y^2-y)x^2-(y^2-1)x+y+1=0.$$

命 $y^2-y=0$，得二平行於 x 軸之漸近線 $y=0$ 及 $y=1$.

習　題　一

求下列各曲線之漸近線:

1. $y=\dfrac{1}{x-1}$.　　2. $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.

3. $y=\dfrac{x}{x^2-5x+4}$.　　4. $y=\dfrac{x^2-7x+6}{x^2-6x+5}$.

5. $y=\dfrac{x^2-1}{(x-2)^2}$.　　6. $y^2=\dfrac{(x-1)(x-3)}{x(x-2)}$.

7. $y^3=x^2(2-x)$.　　8. $x^3+y^3=a^3$.

9. $x^2y^2=(a+y)^2(b^2-y^2)$.　　10. $(a^2-x^2)y^2=x^2(a^2+x^2)$.

11. $xy^2+a^2y=x^3+mx+ny+p$.

12. $2x^3-x^2y-2xy^2+y^3+2x^2+xy-y^2+x+y+1=0$.

13. $(x+2y)(x^2+xy+y^2)=x^2+y^2+x$.

14. $x^2y^2=(y+a)^2(b^2-y^2)$.

§8. 曲線無窮遠枝之情形　曲線如有漸近線,則其無窮遠枝必依漸近線之方向,但究在漸近線之上或下,須加討論.

由§6,定理2.,$y=mx+b+\psi(x)$之漸近線為$y=mx+b$,此處$\psi(x)\to 0$.

1° 若$\lim\limits_{|x|\to\infty}\psi(x)=+0$,即$0+\epsilon$,則曲線之無窮遠枝為在漸近線之上.蓋由§6之圖47,$\lim\limits_{|x|\to\infty}QP=+0$,即$P$點居$l$之上部也.

2° 若$\lim\limits_{|x|\to\infty}\psi(x)=-0$,即$0-\epsilon$,則曲線之無窮遠枝為在漸近線之下.

由§6之例，$y=x+\frac{1}{x-1}$. 因 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=+0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=-0$, 故在 x 之負無窮遠方向，曲線居漸近線 $y=x$ 之下，在 x 之正無窮遠方向，曲線居漸近線 $y=x$ 之上.

§9. 製曲線之例

例一. 試作 $y=(x-a)^2(x-b)$ 之曲線 $(a>b>0)$.

1° 曲線不經過原點.

令 $y=0$, 得 $x=a$ 與 $x=b$. 再令 $x=0$, 得 $y=-a^2b$.

2° 曲線不對任何軸成對稱.

3° 曲線不能有漸近線，蓋當 $x\to\pm\infty$, $y\to\pm\infty$ 也.

4° $\frac{dy}{dx}=3(x-a)\left(x-\frac{a+2b}{3}\right)$.

令 $\frac{dy}{dx}=0$, 得 $x=a$ 及 $x=\frac{a+2b}{3}$.

5° $\frac{d^2y}{dx^2}=6x-2(2a+b)$.

令 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, 得 $x=\frac{2a+b}{3}$.

6° 茲列表如次:

x	$-\infty$		0		b		$\frac{a+2b}{3}$		$\frac{2a+b}{3}$		a		$+\infty$
$\frac{dy}{dx}$				+			0		−		0	+	
$\frac{d^2y}{dx^2}$					−				0		+		
y	$-\infty$	↗	$-a^2b$	↗	0	↗	$\frac{4}{9}(a-b)^3$	↘	$\frac{2}{9}(a-b)^3$	↘	0	↗	$+\infty$
							(極大)		(反曲點)		(極小)		

7° 依表得描其曲線如圖 50.

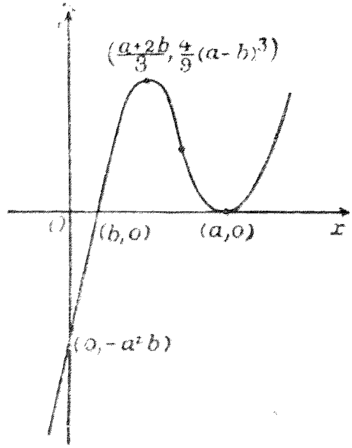

圖 50.

例二. 試作 $y=2x/(x^2-1)$ 之圖形.

1° 曲線經過原點. 因原式可書爲 $x^2y-y-2x=0$, 故在原點之切線爲 $y+2x=0$.

2° 因 (x, y), $(-x, -y)$ 皆能適合於方程式, 故曲線對原點成對稱.

3° 當 $x=\pm 1$ 時, $y\to\infty$, 故 $x=+1$ 與 $x=-1$ 爲二平行於 y 軸之漸近線. 又 $y=2\Big/\left(x-\frac{1}{x}\right)$, 當 $x\to\infty$ 時, $y\to 0$, 故 $y=0$ 爲水平漸近線. 因 $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-0$, $\lim\limits_{x\to\infty} y=+0$, 故曲線於 x 之負無窮遠點在 x 軸之下, 於 x 之正無窮遠點在 x 軸之上.

4° $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$.

令 $\dfrac{dy}{dx}=0$, x 無實根，故無極大極小.

5° $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{4x(x^4+2x^2-3)}{(x^2-1)^4}$.

令 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$, x 之實根爲 $0, -1, 1$.

6° 茲列表如次:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\dfrac{dy}{dx}$		$-$	∞		$-$		∞	$-$	
$\dfrac{d^2y}{dx^2}$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-0	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	$+0$
					(反曲點)				

7° 依表得描其曲線如圖 51.

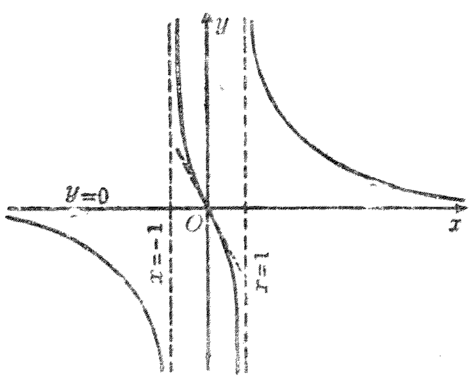

圖 51.

例三.　試作 $y=\dfrac{x^3+2x^2+8}{x^2-4}$ 之曲線.

1° 此曲線不經過原點，並不對任何軸成對稱.

2° 求漸近線. 由原式,

$$y=x+2+\frac{16-4x}{x^2-4}.$$

故 $y=x+2$ 為一斜漸近線. 又當 $x^2-4=0$ 時, $y\to\infty$, 故 $x-2=0$ 與 $x+2=0$ 為二垂直漸近線.

又因 $\lim\limits_{x\to\infty}(16-4x)/(x^2-4)=+0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(16-4x)/(x^2-4)=-0$, 故當 $x\to\infty$ 時, 曲線在漸近線之上, 當 $x\to-\infty$ 時, 曲線在漸近線之下. 由此曲線與漸近線必相交, 其交點為 $(-4,2)$.

3° $$\frac{dy}{dx}=\frac{x(x^3-12x-32)}{(x^2-4)^2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{8(x^3+12x^2+12x+16)}{(x^2-4)^4}.$$

令 $\dfrac{dy}{dx}=0$, 得 $x=0$ 或 $x^3-12x-32=0$, 後式僅有一實根為 4.28. 令 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$, 得 $x=-11.05$.

4° 由以上之討論, 列表如次:

x	$-\infty$		-11.05		-4		-2		0		2		4.28		$+\infty$
$\dfrac{dy}{dx}$				$+$			∞	$+$	0	$-$	∞	$-$	0	$+$	
$\dfrac{d^2y}{dx^2}$		$-$	0			$+$	∞		$+$		∞		$+$		
y	$-\infty$	$\nearrow$	-9.25	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty \mid -\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	8.58	$\nearrow$	∞
			(反曲點)						(極大)				(極小)		

5° 依表得描其曲線如圖 52.

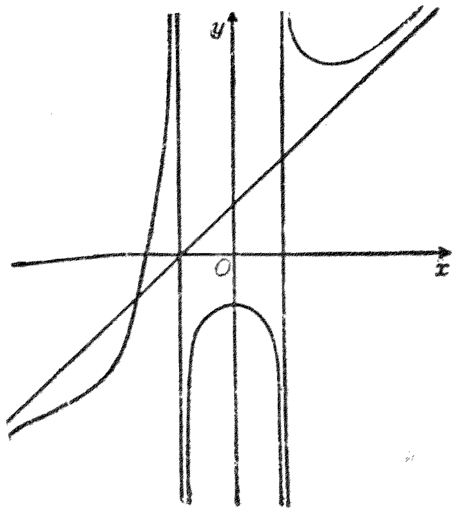

圖 52.

例四. 試作 $4y^2 = x^3 - 3x$ 之曲線.

1° 此曲線與 x 軸成對稱,故僅討論其在 x 軸之上部之性狀足矣.

2° 曲線過原點,其於原點之切線爲 $x=0$.

3° 曲線與 y 軸僅交於原點,在 x 軸之截距爲 $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$.

4° 由原式,$2y = \pm\sqrt{x^3-3x}$,在此必須 $x^3-3x \geqq 0$,故得 x 之界限爲 $-\sqrt{3} \leqq x \leqq 0$ 及 $x \geqq \sqrt{3}$.

5° 因 $8y\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$,

令 $dy/dx = 0$, $3x^2-3=0$, $\therefore x = \pm 1$. 當 $x = +1$ 時,y 爲虛,不能有曲線,故可能之極大極小惟 $x = -1$.

6° $8y\dfrac{d^2y}{dx^2} + 8\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 6x$.

令 $d^2y/dx^2=0$，得 $(dy/dx)^2=3x/4$. 由 5°，$(3x^2-3)^2/16(x^3-3x)=3x/4$，即 $x^4-6x^2-3=0$，此方程式之實根約為 ± 2.5. 當 $x \doteq -2.5$，y 為虛，不能有曲線，故可能之反曲點惟 $x \doteq 2.5$.

7° 曲線不能有漸近線，蓋 $x \to -\infty$ 時，y 為虛，$x \to +\infty$ 時，$y \to \pm\infty$ 也.

8° 茲列表如次（表中所列僅 $y>0$ 之一半）：

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		$\sqrt{3}$		2.5		$+\infty$
$\frac{dy}{dx}$			∞	$+$	0	$-$	∞		∞		$+$		
$\frac{d^2y}{dx^2}$					$-$					$-$	0	$+$	
y		虛	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	0	虛	0	$\nearrow$	1.4	$\nearrow$	∞
					（極大）						（反曲點）		

9° 依表得繪其圖形如圖 53：

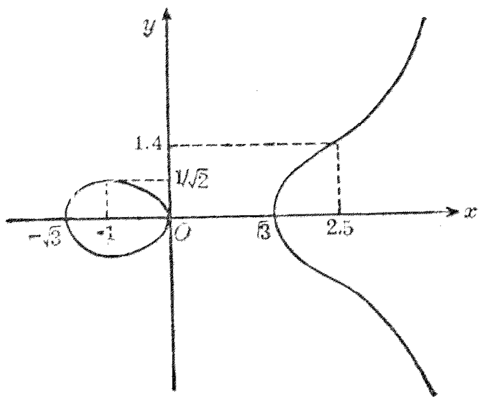

圖 3.

習 題 二

試作下列各曲線:

1. $y=x^3+4x^2-11$.　　2. $y=(x-2)^2(x+1)$.

3. $y=\dfrac{x^2-1}{(x-2)^2}$.　　4. $y=\dfrac{x^2-7x+6}{x^2-8x+5}$.

5. $y=\dfrac{1}{x^2+3x+5}$.　　6. $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-8x+15}$.

7. $y^2=\dfrac{x-1}{x(x-2)}$.　　8. $y^2=(1-x^2)(x^2-4)$.

9. $y^2=x^3-4x^2+3x$.　　10. $(x+y+1)^2=(1-x)^5$.

11. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.　　12. $x^4-4x^2y^2+y^4=0$.

13. $(x^2+a^2)^2+(y^2-b^2)=c^4$, $c<b<a$.

14. $y^2=(x-a)(x-b)(x-c)$,

(1) $a<b<c$,　　(2) $a<b=c$,

(3) $a=b<c$,　　(4) $a=b=c$.

§10. 縱坐標之相加 設曲線之方程式可書為

$$y=\phi(x)+\psi(x)$$

之形. 先作 $y=\phi(x)$ 之曲線 C_1, 然後在 C_1 曲線上加上 $\psi(x)$, 則結果所得之曲線即為 $y=\phi(x)+\psi(x)$ 之曲線. 蓋設 $M\equiv(x_1,0)$, 則 $MQ=\phi(x_1)$, $QP=\psi(x_1)$, 故 $MP=\phi(x_1)+\psi(x_1)$. 用此法製曲線有時較為

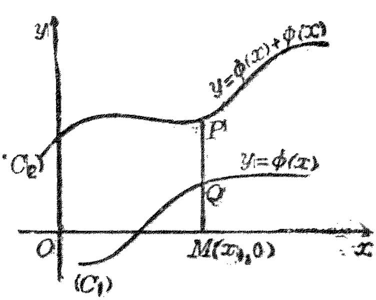

圖 54.

便利.

例.　試作 $y=x-1\pm\sqrt{4x-x^2}$ 之曲線.

命 $\phi(x)=x-1$, $\psi(x)=\pm\sqrt{4x-x^2}$. $\phi(x)=x-1$ 爲一直線, 先作此直線, 再在此直線上加減 $\psi(x)$.

x	$-\infty$	0	1	2	3	4	∞
$\psi(x)$		0	$\pm\sqrt{3}$	± 2	$\pm\sqrt{3}$	0	

據上表, 當 $x=0$ 時, $\psi(x)=0$, 故在直線 $y=x-1$ 上 $x=0$ 點加減 0, 得 A 點. 當 $x=1$ 時, $\psi(x)=\pm\sqrt{3}$, 故在直線上 $x=1$ 點加減 $\pm\sqrt{3}$, 得 B, B' 兩點. 餘類推. 由此得所求之曲線爲一橢圓.

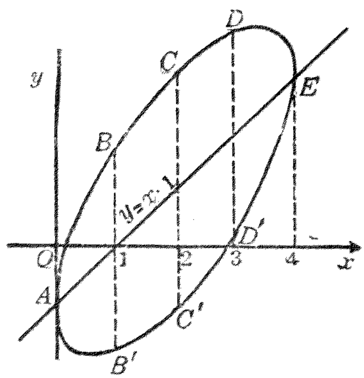

圖 55.

習　題　三

試作下列各曲線:

1. $y=x+x^2$.　　2. $y=x\pm\sqrt{x+1}$.

3. $y=2x^2+1+\sqrt{2x-1}$.　　4. $y=2x+1\pm\sqrt{x^2-2x+1}$.

5. $3x^2-8xy+4y^2-x+y-5=0$.

第六章　圓函數,反圓函數

§1. 弧度法　設以 O 爲心,r 爲半徑作圓,AOB 角所對之弧爲 s. 由平面幾何學,s 與 r 之比爲常數;命爲 θ,即 $\theta=s/r$,θ 曰 AOB 角之弧度.

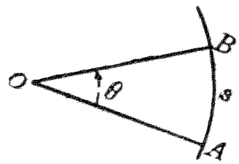

圖 56.

若 s 爲四分之一圓周,$s=\pi r/2$,於是 $\theta=\pi/2$. 設 ϕ 爲 AOB 角以度爲單位之度量,則 θ 與 ϕ 成比例,即 $\theta=c\phi$,c 爲一常數. 欲定此常數,已知當 $\theta=\pi$ 時,$\phi=180$,故 $\pi=c\cdot 180$. $\therefore$ $c=\pi/180$. 由是

$$\theta=\frac{\pi}{180}\phi,\quad \phi=\frac{180}{\pi}\theta.$$

當 $s=r$ 時,$\theta=1$,此爲弧度之單位,曰弳(radian). 故

$$1^\circ=\pi/180=0.0174532925\cdots \text{弳},$$

$$1\,\text{弳}=180/\pi=57^\circ 17'44.81''(=57.29578^\circ).$$

設圓之半徑取爲單位長,即取 $r=1$,則 $\theta=s$. 故單位圓之弧長,等於此弧所對之圓心角.

§2. 圓函數　設 $OA=1$,AOP 角爲 x,則線分 MP 與 OM 皆爲 x (亦即 AP 弧)之函數. MP 曰 x 之**正弦** (sine),OM 曰 x 之**餘弦** (cosine). 以下列符號表之:

$$MP=\sin x,\quad OM=\cos x.$$

由圖 57，得知當 x 在第一象限時，$\sin x$，$\cos x$ 皆為正；當 x 在第二象限時，$\sin x$ 為正，$\cos x$ 為負；當 x 在第三象限時，$\sin x$，$\cos x$ 皆為負；當 x 在第四象限時，$\sin x$ 為負，$\cos x$ 為正。

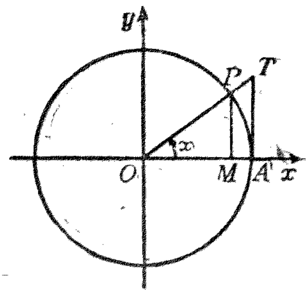

圖 57.

$\sin x$ 與 $\cos x$ 之比曰**正切**(tangent)，以 $\tan x$ 表之，即

$$\tan x = \sin x / \cos x.$$

因 $MP/OM = AT/OA = AT$ ($\because OA = 1$)，故 $\tan x$ 可以線分 AT 表之。$\tan x$ 在各象限之正負，可由 $\sin x$ 與 $\cos x$ 在各象限之正負以知之。

$\tan x$，$\cos x$，$\sin x$ 之倒數分別曰 x 之**餘切** (cotangent)，**正割** (secant) 與**餘割** (cosecant)，以符號 $\cot x$，$\sec x$，$\csc x$ 表之。合此六函數曰**圓函數**(circular functions)，或**三角函數**。

因 $MP^2 + OM^2 = OP^2$，故得重要之恆等式

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{1}$$

下列諸公式，在化第二，第三象限之角之函數為第一象限之角之函數時，頗為有用：

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = +\cos x, \tag{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x, \tag{3}$$

$$\sin(\pi \pm x) = \mp \sin x, \tag{4}$$

$$\cos(\pi \pm x) = -\cos x. \tag{5}$$

讀者由作圖更可證明以下之和角函數公式:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \tag{6}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y. \tag{7}$$

若 $f(x) = f(x+k) = f(x+2k) = \cdots$, 則 $f(x)$ 曰週期函數(periodic function),其週期(period)爲 k. 因 $\sin(x+2n\pi) = \sin x$, $\cos(x+2n\pi) = \cos x$, $\tan(x+n\pi) = \tan x$, 此處 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, 故圓函數爲週期函數, $\sin x$, $\cos x$ 之週期爲 2π, $\tan x$ 之週期爲 π.

當 x 自 $-\infty$ 至 $+\infty$, $\sin x$, $\cos x$ 皆爲連續, $\tan x$ 除當 $x = \pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, …外亦皆連續.

茲證:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{8}$$

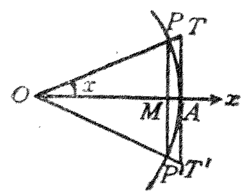

圖 58.

設圖 58 中圓弧 PAP' 之半徑爲 1, 因扇形 OAP 之面積, 介於三角形 OMP 與 OAT 之面積之間, 而 OAP 之面積爲 $\frac{x}{2}$, 故

$$\frac{1}{2}\sin x \cos x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x,$$

亦即

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

因當 $x \to 0$ 時, $\cos x \to 1$, $1/\cos x \to 1$, 故 $\sin x/x \to 1$.

習　　題　　一

1. 試由作圖以證公式(2)—(7).

2. 試證 $\tan(x\pm y)=(\tan x\pm\tan y)/(1\mp\tan x\cdot\tan y)$.

3. 試證 $\sin 2x=2\sin x\cos x$,

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1,$$

$$\tan 2x=2\tan x/(1-\tan^2 x).$$

4. 試證 $\sin\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$, $\cos\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$,

$$\tan\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.$$

5. 試證 $\sin x, \cos x$ 之週期為 2π, $\tan x$ 之週期為 π. $\cot x, \sec x$, $\csc x$ 之週期各為若干?

6. 試證 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

7. 試證 $\sin x$, $\cos x$ 為連續函數.

§3. 圓函數之導微函數　由(6)式,

$$\sin(\theta+\phi)-\sin(\theta-\phi)=2\cos\theta\sin\phi.$$

設 $\theta+\phi=x+\Delta x, \theta-\phi=x$, 則 $\theta=x+\dfrac{\Delta x}{2}, \phi=\dfrac{\Delta x}{2}$.

$$\therefore\quad \sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

設 $$y=\sin x,$$

則 $$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x.$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

求當 $\Delta x \to 0$ 時之極限，由(8)式，得

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x. \tag{9}$$

因
$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

$$\frac{d}{dx}\cos x=\frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

故又得
$$\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x. \tag{10}$$

其餘之圓函數若化為正弦及餘弦函數，則可求得：

$$\frac{d}{dx}\tan x=\sec^2 x, \tag{11}$$

$$\frac{d}{dx}\cot x=-\csc^2 x, \tag{12}$$

$$\frac{d}{dx}\sec x=\sec x\tan x, \tag{13}$$

$$\frac{d}{dx}\csc x=-\csc x\cot x. \tag{14}$$

例一. $y=2\sin 3x.$

$$\frac{dy}{dx}=2\frac{d}{d(3x)}\sin 3x\cdot\frac{d(3x)}{dx}=2\cdot\cos 3x\cdot 3=6\cos 3x.$$

例二. $\sin x+\sin y=x-y.$

$$\cos x + \cos y \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx},$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1-\cos x}{1+\cos y}.$$

習 題 二

試求以下各式對 x 之導微函數(15—16)：

1. $y = 3\cos x$.
2. $y = \tan x \cdot \sin x$.
3. $y = \sin^3 x$.
4. $y = \tan^2 \dfrac{x}{2}$.
5. $y = x^2 \tan x$.
6. $y = \sin x \cdot \cos^2 x$.
7. $y = \sqrt{1-\cos x}$.
8. $y = \sin x/(1-\cos x)$.
9. $y = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$.
10. $y = 1/(a\cos x + b\sin x)$.
11. $y = \sqrt{1-k^2\sin^2 x}$.
12. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$.
13. $x\cos y = \sin(x+y)$.
14. $\sin x - \sin y = 1$.
15. $x = y\sin y$.
16. $\tan x - \cot y = \sin x \sin y$.
17. 若 $y = \cos x$，求 $y', y'', y''', y^{(iv)}$.
18. 若 $y = \sin kx$，求 $y', y'', y''', y^{(iv)}$.
19. 若 $y = \sin x$，求 $y^{(n)}$ 之公式.
20. 若 $x = A\cos kt + B\sin kt$，試證 $\dfrac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = 0$.

21. 由圖 59, 試示 $\Delta y/\Delta x = QP'/\widehat{PP'}$, 若 x 以度為單位, 則 $\Delta x = \dfrac{180}{\pi}\widehat{PP'}$, 由是以證

$$\frac{d}{dx}\sin x = \frac{\pi}{180}\cos x.$$

[讀者由此可知用弧度法之優點.]

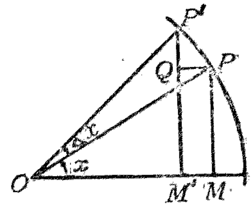

圖 59.

§4. 圓函數之圖形　I. 正弦曲線(sine curve).

設　　　　$y = \sin x.$

因 $\sin x$ 之週期為 2π, 故只須求當 $x=0$ 至 $x=2\pi$ 一段曲線之形狀, 其他部分可以依樣描出.

1° 當 $x=0, y=0$; 當 $y=0, x=0, \pi, 2\pi$.

2° $dy/dx = \cos x$, 故知 $\left(\dfrac{1}{2}\pi, 1\right), \left(\dfrac{3}{2}\pi, -1\right)$ 為極大, 極小點.

3° $d^2y/dx^2 = -\sin x$, 故 $(0, 0), (\pi, 0), (2\pi, 0)$ 為反曲點.

4° 茲列表如次:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0
	(反曲點)	(極大)	(反曲點)	(極小)	(反曲點)

5° 依表得繪其曲線如次:

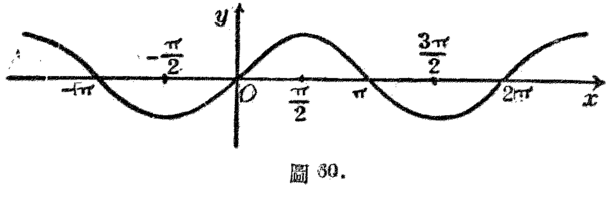

圖 60.

II. **餘弦曲線**(cosine curve).

設 $$y=\cos x.$$

因 $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，故 $y=\cos x$ 之圖形與 $y=\sin x$ 同，惟向左移動 $\pi/2$ 之距離，如圖 61.

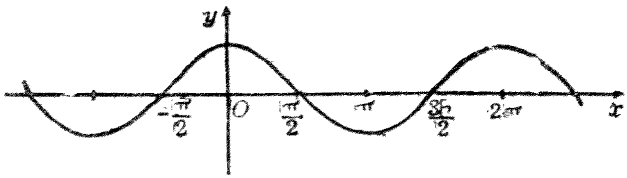

圖 61.

III. **正切曲線**(tangent curve).

設 $$y=\tan x.$$

在 $x=-\frac{\pi}{2}$ 與 $x=\frac{\pi}{2}$ 之間，令 $dy/dx=1/\cos^2 x$，故曲線不能有極大與極小點. $d^2y/dx^2=2\sin x/\cos^3 x$，故當 $x=0$，曲線有反曲點. 因 $\tan x$ 之週期為 π，故圖形向左右每隔 π 距離無限次重複，如圖 62.

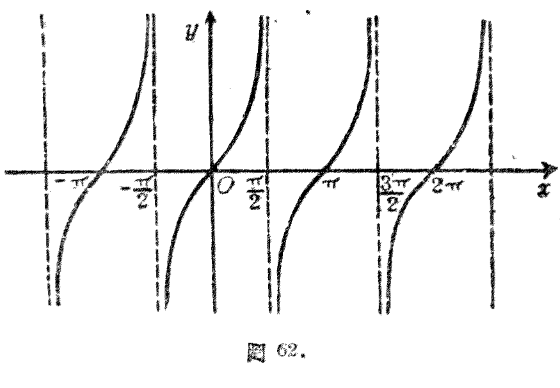

圖 62.

習 題 三

試作以下各函數之圖形:

1. $y=\cot x$.　　2. $y=\sec x$.

3. $y=\csc x$.　　4. $y=x\sin x$.

5. $y=\cos 3x$.　　6. $y=\sin^2 x$.

7. $y=\sin x+\cos x$.　　8. $y=\sqrt{x+1}-\cos x$.

9. $y=\sin x/x$.　　10. $y=2\sin x+\sin 2x$.

[注意,7.—10.四題用縱坐標之相加法.]

§5. 反圓函數　設 y 爲 x 之函數而由方程式 $\sin y=x$ 所定,若此方程式就 y 解爲 x,則產生一種新函數,既非代數函數,又非圓函數,故必須另創一符號以表此函數.

一角 y 其正弦爲 x 者,以符號 arc $\sin x$ 或 $\sin^{-1}x$ 表之,即

若　　$\sin y=x$,　　則　　$y=\sin^{-1}x$.

$\sin^{-1}x$ 曰**反正弦函數**(inverse function of sine).同樣,

若　　$\cos y=x$,　　則　　$y=\cos^{-1}x$;

若　　$\tan y=x$,　　則　　$y=\tan^{-1}x$.

$\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ 等曰**反圓函數**(inverse circular functions).

若一角之值爲已知,則其正弦,餘弦,正切等完全可以決定,故圓函數爲**單值函數**(single-valued function);如 $y=\sin x$,每與 x 以一值,y 僅有一值與之相應;反之,一角之正弦爲已知,則角之值有無窮個,如 $\sin x=0$, $x=0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots\cdots$,故反圓函數爲**多值函數**

(many-valued function). 因此,在下列界限以內之反函數曰**主反函數**(principal inverse functions):

$$-\frac{\pi}{2}\leqq \sin^{-1}x\leqq\frac{\pi}{2},\qquad 0\leqq\cos^{-1}x\leqq\pi,$$

$$-\frac{\pi}{2}\leqq\tan^{-1}x\leqq\frac{\pi}{2}.$$

由 §4, 及第五章, §1, 得知反圓函數之圖形爲與圓函數之圖形對 $y=x$ 直線成對稱,如圖 63—65.

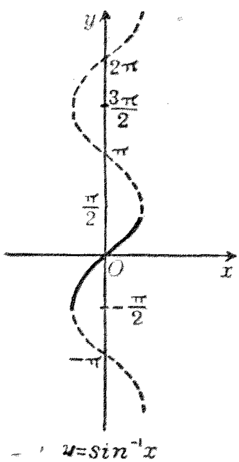

圖 63.

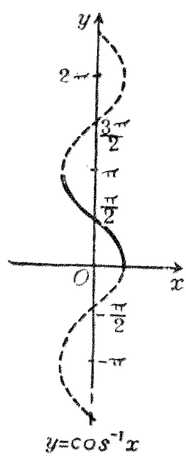

圖 64.

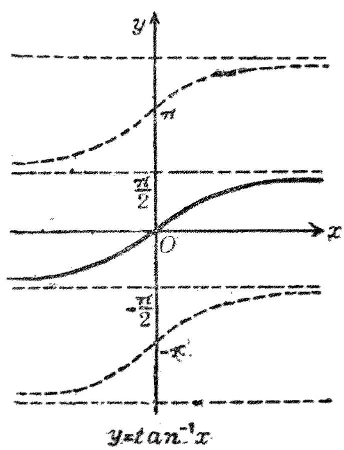

圖 65.

§6. 反圓函數之導微函數 由第四章, (19)式,

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=1\Big/\frac{d}{dy}\sin y=1/\cos y.$$

因 $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$ (注意: 此處指主反函數言,下同),故得

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{15}$$

同樣

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{16}$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{x^2+1}. \tag{17}$$

習 題 四

試求以下各函數之導微函數:

1. $y=\sin^{-1}x/a$.
2. $y=\cos^{-1}2x$.
3. $y=\tan^{-1}(2-3x)$.
4. $y=\sin^{-1}\sqrt{x}$.
5. $y=\sin^{-1}(\cos x)$.
6. $y=\cos^{-1}(1-x^2)^{1/2}$.
7. $y=\sin^{-1}\sqrt{\sin x}$.
8. $y=\tan^{-1}(x+a)/(1-ax)$.
9. $y=a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}-x\sqrt{a^2-x^2}$.
10. $y=(x^2+1)\tan^{-1}x-x$.
11. $\cot^{-1}x$, $\sec^{-1}x$, $\csc^{-1}x$ 可視爲下列公式所定:

$$\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x,\qquad \sec^{-1}x=\cos^{-1}\frac{1}{x},$$

$$\csc^{-1}x=\sin^{-1}\frac{1}{x}.$$

求此諸函數之圖形及其導微函數之公式.

第七章　指數函數,對數函數

§ 1. **指數函數**　在初等代數中,吾人曾證明下列之**指數定則**(laws of exponents):

$$1.\ a^m\cdot a^n=a^{m+n};\qquad 2.\ (a^m)^n=a^{mn};\qquad 3.\ (ab)^m=a^mb^m,$$

此處 a b 為正實數,m, n 為有理數,並命

$$1.\ a^0=1;\qquad 2.\ a^{-n}=\frac{1}{a^n};\qquad 3.\ a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}.$$

若 $a>0$,當 x 連續變易,吾人必須與 a^x 以一種意義.

若 c 為任一無理數,則可證明當 x 由有理數而趨近於 c(例如 c 為 $\sqrt{2}$,而 x 由 $1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \cdots\cdots$ 而趨近於 $\sqrt{2}$),函數 a^x 恆能趨近於一定之極限;此極限以 a^c 表之,即 $\lim\limits_{x\to c}a^x=a^c$.

函數　　$y=a^x$

曰**指數函數**(exponential function).指數函數之運算,適用以上之指數定則.

因　$\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0,\quad a^0=1,$

$$\lim_{x\to\infty}a^x=\infty,$$

故 $y=a^x$ 之圖形為如圖 66.

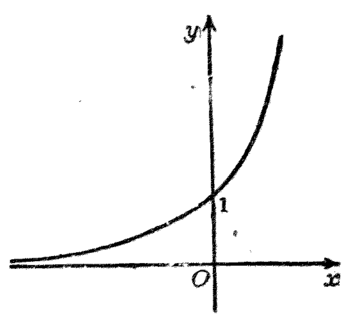

圖 66.

§2. 二項定理 若 n 爲正整數,

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)(n-r)}{(r+1)!}a^{n-r-1}b^{r+1}$$

$$+\cdots\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}{n!}b^n. \qquad (1)$$

蓋因 $(a+b)^2=a^2+2a^{2-1}b^1+\dfrac{2(2-1)}{2!}b^2.$

$$(a+b)^3=a^3+3a^{3-1}b^1+\frac{3(3-1)}{2!}a^{3-2}b^2+\frac{3(3-1)(3-2)}{3!}b^3.$$

由數學歸納法,假定當 n 爲 k 時爲成立,研究當 n 爲 $k+1$ 時能否成立;若能成立,則 n 爲任何值時皆能成立.

因 $(a+b)^{k+1}=(a+b)^k(a+b)$,以 a 乘 $(a+b)^k$ 中之第 $r+2$ 項,得

$$\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-r+1)(k-r)}{(r+1)!}a^{k-r}b^{r+1}.$$

以 b 乘 $(a+b)^k$ 中之第 $r+1$ 項,得

$$\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-r+1)}{r!}a^{k-r}b^{r+1}.$$

此兩項爲同類項,其和爲

$$\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-r+1)}{r!}\left[\frac{k-r}{r+1}+1\right]a^{k-r}b^{r+1},$$

即
$$\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-r+1)}{r!}\left[\frac{k+1}{r+1}\right]a^{k-r}b^{r+1},$$

或
$$\frac{(k+1)k(k-1)\cdots\cdots(k-r+1)}{(r+1)!}a^{k-r}b^{r+1}.$$

此即 $(a+b)^{k+1}$ 展開後之普通項，故知當指數為 $k+1$ 時亦能成立。吾人之歸納法至此已告完全，亦即(1)式當 n 為任何正整數時皆為成立。

(1)式曰二項定理(binomial theorem)。

若 n 為負數或分數，則

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots,$$

其項數為無窮。

§ **3. 數 e** 設 m 為任何實數，由二項定理

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{m}{1}\cdot\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{1}{m^2}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{1}{m^3}+\cdots\cdots$$
$$=1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{m}}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{3!}+\cdots\cdots,$$

由是
$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots. \qquad (2)$$

(2)式右端之值為 2.7182818……，此數以 e 表之，即

$$e=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m. \tag{3}$$

§4. **對數函數** 指數函數之反函數曰**對數函數**(logarithmic function). 若 $x=a^y$, 對數函數表以符號

$$y=\log_a x.$$

當 x 爲大於 0 之諸值, 此函數爲單值並連續, a 曰對數之底(base). 爲簡單計, 恆取 $a>1$.

若取 $a=e\ (=2.71828\cdots\cdots)$, 則 $\log_e x$ 曰**自然對數**(natural logarithm). 爲便於應用計, 取 $a=10$; $\log_{10} x$ 曰**常用對數**(common logarithm).

由定義, 負數不能有(實數)對數. 一數在 0 與 1 之間者, 其對數爲負數; 大於 1 之數之對數爲正數. 當 $x\to 0$, $y\to-\infty$; 當 $x\to\infty$, $y\to\infty$. $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$.

對數函數既爲指數函數之反函數, 由第五章, §1, 其曲線爲與 $y=a^x$ 之曲線對直線 $y=x$ 成對稱, 如圖 67.

若 $a^\mu=x$, $a^\nu=y$, 則 $\mu=\log_a x$, $\nu=\log_a y$. 因

$x\cdot y=a^{\mu+\nu}$, $x/y=a^{\mu-\nu}$, $x^r=a^{\mu r}$ 及 $\sqrt[s]{x}=a^{\mu/s}$, 故得

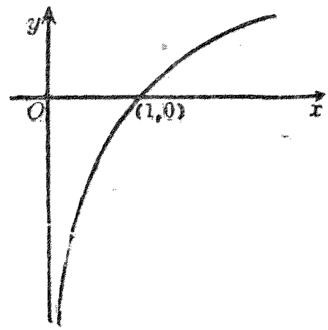

圖 67.

$$\log_a x\cdot y=\log_a x+\log_a y, \tag{4}$$

$$\log_a x/y=\log_a x-\log_a y, \tag{5}$$

$$\log_a x^r=r\log_a x, \tag{6}$$

$$\log_a \sqrt[s]{x}=(\log_a x)/s. \tag{7}$$

再若 $x=a^{\mu}=b^{\nu}$，於是 $\mu=\log_a x$，$\nu=\log_b x$．$a^{\mu/\nu}=b$，$\log_a b=\log_a x/\log_b x$．故

$$\log_b x=\log_a x/\log_a b. \tag{8}$$

令 $x=a$，得

$$\log_b a=1/\log_a b. \tag{9}$$

(8)為換底之公式．由對數表，$\log_{10} e=0.43429$，故 $\log_e 10=1/0.43429=2.30259$．由是

$$\log_{10} x=0.43429\log_e x;$$

$$\log_e x=2.30259\log_{10} x.$$

習　題　一

試用對數求下列各式之值：

1．750.4×0.0527．　　2．$37.145/842$．

3．$\sqrt[3]{84.72/621}$．　　4．$304^8\cdot 472^5/248^3$．

5．$e^{5-\log_e 5}$．　　6．$e^{\sin\pi/4}$．

試求下列各函數之反函數：

7．$y=10^{5x}$．　　8．$y=e^{2x-2}$．

9．$y=\sin e^x$．　　10．$y=\cos^{-1}(e^x-1)$．

試解下列各方程式：

11．$2^x=5$．　　12．$e^x-e^{-x}=2$．

13．$e^x-5e^{-x}-4=0$．　　14．$3^x=4^{x-3}$．

15．$\log_e(x+3)+\log_e(3x+2)=\log_e 20$．

16. $\log_{10}x+\log_{10}(3x+5)-2=0$.

試作下列各函數之圖形:

17. $\log_{10}x-\log_{10}(3x+y)+1-\log_{10}5=0$.

18. $2\log_{10}x-\log_{10}(y+1)+1=0$.

19. $\log\sin x-x-\log y=0$.

§5. **導微函數** 若 $y=\log x$ (此處爲以 e 爲底,下同),則

$$\Delta y=\log(x+\Delta x)-\log x=\log\frac{x+\Delta x}{x}$$

$$=\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{\Delta x}{x}\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}},$$

故
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

令 $x/\Delta x=m$,則 $\Delta x/x=1/m$. 於是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=e.$$

因 $\log x$ 爲連續, $\log\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\to\log e=1$,故得

$$\frac{d}{dx}\log x=\frac{1}{x}. \tag{10}$$

因 $y=e^x$ 爲 $x=\log y$ 之反函數,

$$\frac{d}{dx}e^x=1\Big/\frac{d}{dy}\log y=1\Big/\frac{1}{y}=y=e^x,$$

故
$$\frac{d}{dx}e^x=e^x. \tag{11}$$

例一. $\dfrac{d}{dx}\log\sin x=\dfrac{1}{\sin x}\dfrac{d}{dx}\sin x=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x.$

例二. 因 $\log_a x=\dfrac{\log x}{\log a}=\log_a e\cdot\log x,$

$$\therefore\quad \frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x}\log_a e.$$

由例二，讀者得知何以 e 取爲自然對數之底矣.

§6. **對數之微分法** 因 $f(x)=e^{\log f(x)}$，故

$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}e^{\log f(x)}=e^{\log f(x)}\frac{d}{dx}\log f(x)=f(x)\frac{d}{dx}\log f(x).$$

由是得知某函數之導微函數，等於該函數乘以該函數之對數之導微函數.

例. $y=x^x$，取對數 $\log y=x\log x$. 兩端求導微函數，

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\log x+1,\quad \therefore\quad \frac{dy}{dx}=x^x(\log x+1).$$

習　題　二

求下列各函數之導微函數(1.—14.).

1. $y=e^{3x}$.
2. $y=a^{x^2}$.
3. $y=e^{\sin x}$.
4. $y=e^{ax}\sin bx$.
5. $y=\sin e^x$.
6. $y=2^{-x}$.
7. $y=(1-e^{-2x})^2$.
8. $y=\log e^x/x$.

9. $y=\log(\sec x+\tan x)$.

10. $y=\log\sqrt{e^{-x}+x}$.

11. $y=x^{x^n}$.

12. $y=(1-e^x)/(1+e^x)$.

13. $y=\dfrac{a}{2}(e^{x/a}-e^{-x/a})$.

14. $y=(\sin x)^{\tan 2x}$.

15. 試作 $y=xe^x$ 之曲線.

16. 試作 $y=e^x\sin x$ 之曲線.

17. 試作 $y=\log(x^2+x)$ 之曲線.

18. 試作 $y=e^x+\dfrac{1}{x}$ 之曲線.

第八章　中值定理. 不定式

§1. 中值定理　設 $f(x)$ 爲一函數，其在 (a,b) 數節內之各點皆有導微函數者，則在 a,b 之間必有一值 x_1 適合下列關係

$$f(b)-f(a)=f'(x_1)(b-a). \tag{1}$$

蓋設 QR 弧之方程式爲 $y=f(x)$，則 QR 弦之斜度爲

$$SR/QS=[f(b)-f(a)]/(b-a).$$

但在 QR 弧上必可選取一點 P，其橫坐標爲 x_1，使 PT 之切線爲平行於 QR 弦，因 PT 之斜度爲 $f'(x_1)$，故得 $[f(b)-f(a)]/(b-a)=f'(x_1)$，此即 (1) 式.

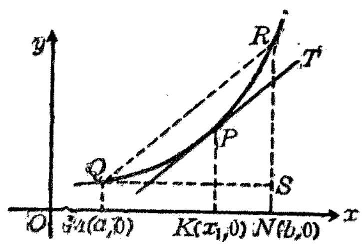

圖 68.

中值定理在微分學中爲一最重要定理.

因 x_1 在 (a,b) 之中，可表爲 $a+\theta(b-a)$，$0<\theta<1$，故 (1) 式又可書爲

$$f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a). \tag{2}$$

又若令 a 爲 x，b 爲 $x+\Delta x$，則 $f(b)-f(a)=\Delta y$，故 (2) 式又可書爲

$$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\quad 0<\theta<1. \tag{3}$$

§ 2. 不定式 $0/0, \infty/\infty$. 若 $f(x), \phi(x)$ 二函數，當 $x=a$ 時 $f(a)=0, \phi(a)=0$，則 $f(x)/\phi(x)$ 當 x 爲 a 時爲 $0/0$，此謂之不定式 (indeterminate form)。但若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)/\phi(x)$ 存在，則命此極限値爲 $f(x)/\phi(x)$ 之値，即命

$$\left.\frac{f(x)}{\phi(x)}\right|_{x=a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\phi(x)}.$$

例如當 $x=0$, $\sin 2x/\tan x = 0/0$. 但因 $\sin 2x/\tan x = 2\cos^2 x \to 2$，故命 $\sin 2x/\tan x$ 當 $x=0$ 時之値爲 2.

由(1)式，設 $f(x), \phi(x)$ 爲於 $x=a$ 點有導微函數，則

$$f(x)=f(a)+f'(x_1)(x-a), \qquad a<x_1<x,$$

$$\phi(x)=\phi(a)+\phi'(x_2)(x-a), \qquad a<x_2<x.$$

因 $f(a)=\phi(a)=0$，故

$$f(x)/\phi(x)=f'(x_1)/\phi'(x_2).$$

當 $x\to a$, $x_1, x_2\to a$，故得

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}. \tag{4}$$

例如 $x=1$ 時，$\log x/(x^2-x)=0/0$; 但因 $f'(x)/\phi'(x)=1/x\div(2x-1)\to 1$，故當 $x=1$ 時 $\log x/(x^2-x)$ 之値爲 1.

若 $f(a)=\phi(a)=f'(a)=\phi'(a)$，但 $f''(a)/\phi''(a)$ 存在，由(4)之推廣

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{\phi''(x)}. \tag{5}$$

餘類推。

若 $f(a)=\infty$，$\phi(a)=\infty$，但 $f'(a)/\phi'(a)$ 存在，則可證

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}. \tag{6}$$

§3. 不定式 $0\cdot\infty$，$\infty-\infty$ $0\cdot\infty$ 與 $\infty-\infty$ 亦皆爲不定式.

1° 若 $f(a)=0, \phi(a)=\infty$，則 $f(a)\cdot\phi(a)=0\cdot\infty$. 但

$$f(x)\cdot\phi(x)=f(x)\Big/\frac{1}{\phi(x)}=\frac{0}{0},$$

故可依 §2 之法行之.

2° 若 $f(a)=\infty$，$\phi(a)=\infty$，則 $f(a)-\phi(a)=\infty-\infty$. 但

$$f(x)-\phi(x)=\frac{\dfrac{1}{\phi(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\cdot\phi(x)}}=\frac{0}{0}.$$

故亦可依 §2 之法行之.

例如當 $x=\pi/2$, $(1-\sin x)\tan x$ 爲 $0\cdot\infty$. 但

$$(1-\sin x)\tan x=\frac{1-\sin x}{\cot x},$$

而
$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{\cot x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\csc^2 x}=\frac{0}{1}=0.$$

至若 1^∞, 0^0, ∞^0 等亦皆爲不定式，其極限值可由取對數以求得之.

例如 $y=(1+a/x)^x$，求當 $x=\infty$ 時之值.

在此當 $x=\infty$，$y=1^\infty$.

但 $\log y=x\log(1+a/x)=\dfrac{\log(1+a/x)}{1/x}$，此當 $x=\infty$ 時爲 $0/0$.

故
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+a/x)}{1/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{a/x^2}{(1+a/x)(1/x^2)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{1+a/x}=a.$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty} y=e^a$.

習　題　一

試求下列各極限值:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.

3. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} x\log x$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}[\log(1+x)-\log x]$.

8. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\log 2x$.

10. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sec x-\tan x)$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}+x)^{1/x}$.

13. 若在 (a,b) 內各點 $f'(x)=0$, 試證 $f(x)$ 在 (a,b) 內爲常數.

14. 試證樂爾定理(Rolle's theorem): 若 $f(x)$ 於 (a,b) 內各點皆有導微函數, 且 $f(a)=f(b)=0$, 求證在 (a,b) 內必至少有點 x_1, 而 $f'(x_1)=0$.

15. 由樂爾定理並由函數 $F(x)=f(x)-f(a)-G(x-a)$, G 爲一常數, 試證中值定理.

第九章 積 分 法

§1. **積分** 在前數章已論由已知函數求其導微函數之法.茲論由導微函數如何以求其原函數,亦即若 $dy/dx=f(x)$,或 $dy=f(x)dx$,此處 $f(x)$ 爲已知函數,進而求 y. 設 $y=F(x)$,則 $F(x)$ 曰 $f(x)$ 之**積分**(integral),表以符號

$$F(x)=\int f(x)dx.$$

$f(x)$ 曰**被積函數**(integrand).故積分法爲微分法之反運算,由是

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x). \qquad (1)$$

因常數 C 之導微函數爲 0,故若 $F(x)$ 爲 $f(x)$ 之一積分,則 $F(x)+C$ 亦爲其積分;故恆書

$$\int f(x)dx=F(x)+C. \qquad (2)$$

例如 x^3 爲 $3x^2$ 之一積分,故 $\int 3x^2dx=x^3+C$.

依定義,若 k 爲常數,

$$\int[f(x)+\phi(x)]dx=\int f(x)dx+\int\phi(x)dx, \qquad (3)$$

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx. \qquad (4)$$

蓋(3),(4)兩式兩端之導微函數爲相等.

下列二公式至爲明顯:

1° 若$n\neq-1$,

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C. \tag{5}$$

2° 若$n=-1$,

$$\int x^n dx=\int\frac{dx}{x}=\log x+C. \tag{6}$$

例如 1. $\int x^2 dx=\frac{x^3}{3}+C$,

2. $\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$,

3. $\int\frac{dx}{x^2}=\int x^{-2}dx=-x^{-1}+C=-\frac{1}{x}+C.$

§2. **代換積分法** 被積函數非皆可直接求其積分,有時須先變更形式,玆舉例以明之:

例一. 求 $\int 2x\sqrt{x^2+3}\,dx$.

令 $u=x^2+3$, 則 $du=2xdx$.

$$\therefore \int 2x\sqrt{x^2+3}\,dx=\int\sqrt{u}\,du=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}(x^2+3)^{\frac{3}{2}}+C.$$

例二. 求 $\int\frac{x+1}{x^2+2x-3}dx$.

令 $u=x^2+2x-3$, $du=(2x+2)dx$.

$$\therefore \int\frac{x+1}{x^2+2x-3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x-3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}$$

$$=\frac{1}{2}\log u+C=\frac{1}{2}\log(x^2+2x-3)+C.$$

習　題　一

求下列各積分:

1. $\int (x^3-2x^2+x-1)\,dx$.　　2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

3. $\int x(2x^3-5)^{\frac{1}{2}}dx$.　　4. $\int \frac{x-2}{x^2-4x+5}\,dx$.

5. $\int (x^3+2)^{\frac{2}{3}}x^2dx$.　　6. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

7. $\int \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}\,dx$.　　8. $\int \frac{dx}{x+1}$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4-5x}}$.　　10. $\int \frac{\log^3(2x)}{2x}\,dx$.

11. $\int \frac{dx}{x^{1/2}+1}$. [令 $x=t^2$]　　12. $\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$.

13. $\int \frac{(x-3)(2x-1)}{x}\,dx$.　　14. $\int (ax^2+b)^{\frac{2}{3}}x\,dx$.

15. $\int \sin^2 x \cos x\,dx$.　　16. $\int \tan x\,dx$.

§3. 求積分公式　求微分之公式,經顛倒運算後則爲求積分公式.讀者須熟記以下公式,並在各公式之右端須加積分常數 C.

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. $(n \neq -1)$　　2. $\int \frac{dx}{x} = \log x$.

3. $\int e^x dx = e^x$.　　4. $\int \cos x\,dx = \sin x$.

5. $\int \sin x\,dx = -\cos x.$ 6. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x.$

7. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x.$ 8. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}.$

9. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}.$ $(x > a)$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a}.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \log(x+\sqrt{x^2\pm a^2}).$

讀者可由求各式右端之導微函數,以證其結果等於左端之被積函數.

茲舉數例以示公式之應用:

例一. $\int e^{2x-1}dx = \frac{1}{2}\int e^{2x-1}d(2x-1) = \frac{1}{2}e^{2x-1}+C.$

例二. $\int \frac{dx}{3x^2+2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{3}{2}}x+C.$

例三. $\int \frac{dx}{(2x^2+1)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^{1/2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left[x+(2x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]+C.$$

習 題 二

求下列各積分:

1. $\int \sin 2x\, dx$,

2. $\int \sec x\, dx$.

3. $\int \sqrt[3]{1+2x}\, dx$.

4. $\int (a+bx)^n dx$.

5. $\int e^{ax+b} dx$.

6. $\int e^{\cos x} \sin x\, dx$.

7. $\int (1+e^x)^{\frac{1}{2}} e^x dx$.

8. $\int \cos 2x \sin 2x\, dx$.

9. $\int \frac{dx}{2x-3}$.

10. $\int \frac{dx}{4x^2+25}$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$.

13. $\int \frac{2x^2+5x-2}{x-1} dx$.

14. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^4+1}}$.

15. $\int \frac{dx}{1-\sin x}$.

16. $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

17. $\int \frac{dx}{a+b\cos x}$.

18. $\int \frac{dx}{a+b\sin^2 x}$.

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+1}}$.

20. $\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} dx$.

§4. 三角函數之積分　1° 求積分

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx,$$

此處 m 或 n 有其一爲奇數並 >0, 可由 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 化爲對 $\sin x$ 或 $\cos x$ 之積分,然後依公式求之.

例一. 求 $\int \sin^{\frac{1}{2}} x \cos^5 x\, dx$.

令 $u=\sin x$, $du=\cos x\,dx$; $\cos^4 x=(1-u^2)^2$.

$$\therefore\quad \int \sin^{\frac{1}{2}} x \cos^5 x\,dx=\int\left(u^{\frac{1}{2}}-2u^{\frac{5}{2}}+u^{\frac{9}{2}}\right)du$$

$$=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{7}u^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{11}u^{\frac{11}{2}}+C$$

$$=\sin^{\frac{3}{2}} x\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\sin^2 x+\frac{2}{11}\sin^4 x\right)+C.$$

2° 具 $\sin mx\cos nx$, $\sin mx\sin nx$ 或 $\cos mx\cos nx$ 形之積分，可以下法求之:

例二. 求 $\int \sin 3x\cos 2x\,dx$.

因 $$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B,$$

令 $A=3x$, $B=2x$, 則

$$\int \sin 3x\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 5x+\sin x)\,dx$$

$$=-\frac{\cos 5x}{10}-\frac{\cos x}{2}+C.$$

習　題　三

求下列各積分:

1. $\int \sin x\cos x\,dx$.　　2. $\int \sin^3 x\,dx$.

3. $\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx$.　　4. $\int \sin x\cos^{\frac{3}{2}} x\,dx$.

5. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$.　　6. $\int \sin 2x\cos 5x\,dx$.

7. $\int \sin 3x \sin 2x \, dx$.　　　　8. $\int \cos 2x \cos 4x \, dx$.

§5. 被積函數具二次分母者　具

1. $\int \frac{dx}{x^2+bx+c}$,　　　　2. $\int \frac{dx}{(\pm x^2+bx+c)^{1/2}}$

形之積分,可將分母配方成下形:

$$x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4}\right),$$

$$-x^2+bx+c=\left(c+\frac{b^2}{4}\right)-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2,$$

然後依§3,公式 8.,10.以求之.

例. 求 $\int \frac{dx}{2x^2-6x+5}$.

因 $$2x^2-6x+5=2\left(x^2-3x+\frac{5}{2}\right)=2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right],$$

$$\therefore \int \frac{dx}{2x^2-6x+5}=\frac{1}{2}\int \frac{d(x-3/2)}{(x-3/2)^2+1/4}$$

$$=\tan^{-1}\frac{x-3/2}{1/2}+C=\tan^{-1}(2x-3)+C.$$

習 題 四

求下列各積分:

1. $\int \frac{dx}{x^2-x+1}$.　　　　2. $\int \frac{dx}{2x^2-4x+3}$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2}}$.　　　4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.　　　6. $\int \frac{dx}{(2ax-x^2)^{1/2}}$.

7. $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}\,dx$.　　　8. $\int \frac{3x+2}{x^2+2x}\,dx$.

9. $\int \sqrt{\frac{a+x}{x}}\,dx$.　　　10. $\int \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/2} dx$.

§6 **部分積分法** 設 u, v 爲 x 之函數，並 u', v' 爲其對 x 之導微函數. 因 $d(uv)/dx=uv'+vu'$，則

$$\int uv'\,dx=uv-\int vu'\,dx.$$

因 $v'dx=dv$, $u'dx=du$, 故得公式

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du. \tag{7}$$

此曰部分積分法(integration by parts), 爲用甚廣.

例一. 求 $\int xe^x\,dx$.

令 $u=x$, $dv=e^x\,dx$; 則 $du=dx$, $v=\int e^x dx=e^x$.

$$\therefore \int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x dx=(x-1)e^x+C.$$

例二. 求 $\int \log x\,dx$.

令 $u=\log x$, $dv=dx$; 則 $du=\frac{dx}{x}$, $v=x$.

$$\therefore\quad \int \log x\,dx = x\log x - \int x\frac{dx}{x} = x(\log x - 1) + C.$$

例三.　求 $\int (x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$.

由部分積分法,

$$\int (x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = x\,(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}} - \int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{1/2}}.$$

但 $$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{1/2}}\,dx = \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{1/2}}dx$$

$$= \int (x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}dx - \int \frac{a^2dx}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$= \int (x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}dx - a^2\log\left[x + (x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}\right].$$

$$\therefore\quad \int (x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}x(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{a^2}{2}\log\left[x+(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}\right].$$

由部分積分法,可得以下求 $\int \cos^n x\,dx$, $\int \sin^n x\,dx$ 之公式.

因 $$\int \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1}x\cdot\frac{d}{dx}\sin x\,dx$$

$$= \sin x\cos^{n-1}x + (n-1)\int \sin^2 x\cos^{n-2}x\,dx$$

$$= \sin x\cos^{n-1}x + (n-1)\int \cos^{n-2}x\,dx$$

$$- (n-1)\int \cos^n x\,dx,$$

移項,得

$$\therefore \quad \int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1}x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx. \qquad (8)$$

在(8)中，命 x 爲 $\frac{\pi}{2}-x$，又得

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1}x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx. \qquad (9)$$

例四. 求 $\int \cos^4 x\,dx$.

由(8)式，

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{\cos^3 x \sin x}{4} + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\,dx.$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{\cos x \sin x}{2} + \int dx = \frac{\cos x \sin x}{2} + x + C.$$

$$\therefore \quad \int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\cos^3 x \sin x + \frac{3}{8}\cos x \sin x + \frac{3}{8}x + C.$$

習　題　五

求下列各積分:

1. $\int xe^{2x}\,dx$.
2. $\int x^2 \cos x\,dx$.
3. $\int x^2 e^x\,dx$.
4. $\int \tan^{-1}x\,dx$.
5. $\int \sin^{-1}x\,dx$.
6. $\int x^2 \log x\,dx$.
7. $\int e^{ax} \sin x\,dx$.
8. $\int e^{ax} \cos(bx+c)\,dx$.

9. $\int\sqrt{3+x-x^2}\,dx.$ 　　10. $\int x\cos^{-1}x\,dx.$

11. $\int\log(x^2-1)\,dx.$ 　　12. $\int\frac{dx}{(x^2+1)^{5/2}}.$

13. $\int\sin^6 x\,dx.$ 　　14. $\int\cos^5 x\,dx.$

15. $\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx.$

§7. 三角函數代換法 二次函數可藉三角函數代換法以求其積分.

若含 $\sqrt{a^2-x^2}$, 令 $x=a\sin\theta$, $\therefore\ \sqrt{a^2-x^2}=a\cos\theta$;

若含 $\sqrt{x^2+a^2}$, 令 $x=a\tan\theta$, $\therefore\ \sqrt{x^2+a^2}=a\sec\theta$;

若含 $\sqrt{x^2-a^2}$, 令 $x=a\sec\theta$, $\therefore\ \sqrt{x^2-a^2}=a\tan\theta$.

例一. 求 $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

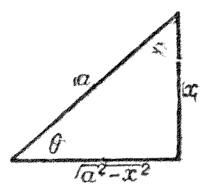

圖 70.

令 $x=a\sin\theta$, $\therefore\ \sqrt{a^2-x^2}=a\cos\theta$,

$dx=a\cos\theta\,d\theta.$

$$\therefore\quad\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=a^2\frac{\sin\theta\cos\theta}{2}+\frac{a^2\theta}{2}+C$$

$$=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]+C.$$

例二. 求 $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4x-x^2}}.$

因 $4x-x^2=4-(x-2)^2$. 令 $x-2=2\sin\theta$, $\sqrt{4x-x^2}=2\cos\theta$, $dx=2\cos\theta\,d\theta$. 於是

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4x-x^2}}=\int\frac{(2+2\sin\theta)\cdot 2\cos\theta}{2\cos\theta}d\theta$$

$$=2\int(1+\sin\theta)\,d\theta$$

$$=2\theta-2\cos\theta+C$$

$$=2\sin^{-1}\frac{x-2}{2}-\sqrt{4x-x^2}+C.$$

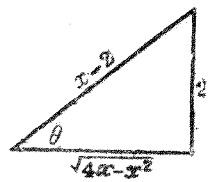

圖 70.

習　題　六

求下列各積分:

1. $\int\sqrt{4-x^2}\,dx.$　　2. $\int(3-2x-x^2)^{\frac{1}{2}}dx.$

3. $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}.$　　4. $\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx.$

5. $\int\frac{dx}{x(9-x^2)^{1/2}}.$　　6. $\int\frac{(x^2-1)^{1/2}}{x}dx.$

7. $\int\frac{dx}{x(x^2+9)^{1/2}}.$　　8. $\int\frac{dx}{(x^2+4x+7)^2}.$

9. $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)^{1/2}}.$

§8. 部分分式　設 $f(x)/\phi(x)$ 為既約分式,且為含實係數之有理眞分式,則由多項式之理論,$\phi(x)$ 可分解為具 $x-a$ 形或具 ax^2+

$bx+c$ 形之因式之積，a,b,c 爲實數.吾人可證 $f(x)/\phi(x)$ 可分解爲一組而僅有一組眞分式之和，此諸分式謂之原分式之**部分分式**(partial fraction).部分分式之範式如次:

I. 若 $x-a$ 爲 $\phi(x)$ 之一因式，則相當於此因式之部分分式爲 $A/(x-a)$，A 爲一實常數.

II. 若 ax^2+bx+c 爲 $\phi(x)$ 之一因式，則相當於此因式之部分分式爲 $(Ax+B)/(ax^2+bx+c)$，係數皆爲常數，下同.

III. 若 $(x-a)^r$ 爲 $\phi(x)$ 之一因式，則相當於此因式之部分分式爲

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots\cdots+\frac{A_r}{(x-a)^r}.$$

IV. 若 $(ax^2+bx+c)^r$ 爲 $\phi(x)$ 之一因式，則相當於此因式之部分分式爲

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots\cdots+\frac{A_rx+B_r}{(ax^2+bx+c)^r}.$$

例一. 將 $x^2/(x^2-1)(x-2)$ 化爲部分分式.

因分母可分解爲 $(x+1)(x-1)(x-2)$.故由 I.，命

$$\frac{x^2}{(x^2-1)(x-2)}\equiv\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}.$$

去分母，得

$$x^2\equiv A(x-1)(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x-1).$$

因此爲恆等式，兩端 x 可以代以任何相同之值.

命 $x=-1$，得　$1=A(-1-1)(-1-2)$，　$\therefore\ A=\dfrac{1}{6}.$

令 $x=1$，得 $B=-\frac{1}{2}$. 同樣，令 $x=2$，得 $C=\frac{4}{3}$. 故

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)}\equiv\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x-2}.$$

例二. 將 $\frac{x^3+x^2-2x-3}{x^3-1}$ 分解爲部分分式.

因 $$\frac{x^3+x^2-2x-3}{x^3-1}\equiv1+\frac{x^2-2x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

令

$$\frac{x^2-2x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

於是 $$\begin{aligned}x^2-2x-2&\equiv A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)\\&\equiv(A+B)x^2+(A-B+C)x+(A-C).\end{aligned}$$

令兩端之相當係數相等，得

$$A+B=1,\quad A-B+C=-2,\quad A-C=-2,$$

$$\therefore\quad A=-1,\quad B=2,\quad C=1.$$

故 $$\frac{x^3+x^2-2x-3}{x^3-1}\equiv1-\frac{1}{x-1}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

例三. 將 $\frac{x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2-x+1)}$ 化爲部分分式.

令

$$\frac{x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2-x+1)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}.$$

於是 $$\begin{aligned}x^2+x+2\equiv{}&A(x-1)(x^2-x+1)+B(x^2-x+1)\\&+(Cx+D)(x-1)^2.\end{aligned}$$

令 $x=1$,得 $B=4$,代入上式,並移項.因右端含有因式 $x-1$,左端亦必含有因式 $x-1$,即

$$-(3x-2)(x-1)\equiv A(x-1)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x-1)^2.$$

以 $x-1$ 除兩端,並令 $x=1$,得 $A=-1$.再將 A 之值代入,移項後除以 $x-1$,得

$$x-3=Cx+D.$$

$\therefore\ C=1, D=-3$.由是

$$\frac{x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2-x+1)}\equiv-\frac{1}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{x-3}{x^2-x+1}.$$

§ 9. 求有理分式之積分 有理分式既可分爲部分分式,則求其積分可先化爲部分分式,然後求之.

由 § 8,部分分式之種類不外下列四種:

1° $\dfrac{A}{x-a}$,　　　　2° $\dfrac{A}{(x-a)^k}$,

3° $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$,　　　　4° $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$.

1° 之積分爲 $A\log(x-a)$,2° 之積分爲 $\dfrac{1}{1-k}(x-a)^{1-k}$.至於 3°,4° 兩種,分子適可配成分母之導徵函數,故亦可求其積分.

由 §8,例一,

$$\int\frac{x^2dx}{(x^2-1)(x-2)}=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{4}{3}\int\frac{dx}{x-2}$$

$$=\frac{1}{6}\log(x+1)-\frac{1}{2}\log(x-1)+\frac{4}{3}\log(x-2)+C$$

$$=\log\frac{(x+1)^{1/6}\cdot(x-2)^{4/3}}{(x-1)^{1/2}}+C.$$

由§8,例二,

$$\int\frac{x^3+x^2-2x-3}{x^3-1}dx=\int dx-\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$

$$=x+\log\frac{x^2+x+1}{x-1}+C.$$

習 題 七

求下列各積分:

1. $\int\frac{x^2-2}{x(x-1)(x-2)}dx.$ 2. $\int\frac{3+2x}{(2x-3)(5x-4)}dx.$

3. $\int\frac{2x^2-1}{(x-1)(x^2+3x+2)}dx.$

4. $\int\frac{5x^2+8x+11}{(x^2+1)(x-3)(x+1)}dx.$

5. $\int\frac{x}{(x+3)(2x^2-x-4)}dx.$ 6. $\int\frac{x^3+5}{x^4+x^3+x^2+x}dx.$

7. $\int\frac{2x+5}{(x-3)(x-1)^3}dx.$ 8. $\int\frac{2x^4-1}{x^4(x+1)}dx.$

9. $\int\frac{x^3-2x-1}{(x-1)(x^2+x-1)}dx.$

10. $\int\frac{x^3+4}{(x^2+2x+2)^2}dx.$

第十章　定　積　分

§1. 基本定理　設 $f(x)$ 在 (a,b) 內爲連續. 分 (a,b) 爲 n 部分, 令其分點爲 $x_0, x_1, \cdots\cdots, x_{n-1}, x_n (x_0=a, x_n=b)$. 再令 $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $i=1,2,\cdots\cdots,n$. 則在每一 Δx_i 內, $f(x)$ 必有一最大值 M_i 與一最小值 m_i (第三章, §3, 1.). 吾人可選取每一 Δx_i 爲相當小, 使 $M_i - m_i < \epsilon$, $\epsilon \to 0$. 命

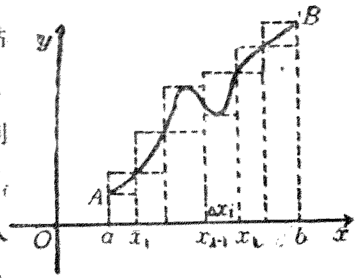

圖 71.

$$S_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \cdots\cdots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

$$s_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \cdots\cdots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i.$$

當 n 逐漸增加, S_n 必逐漸減小, 但終大於 s_n. 由第三章, §2, 1., S_n 趨近於一極限 A. 同樣, 當 n 逐漸增加, s_n 亦增加, 但必小於 S_n, 故亦趨近於一極限. 因

$$S_n - s_n = \Sigma(M_i - m_i)\Delta x_i < \epsilon \Sigma \Delta x_i = \epsilon(b-a),$$

$$\therefore \quad \lim(S_n - s_n) = 0, \quad 即 \quad \lim S_n = \lim s_n = A.$$

因 $$s_n \leqq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \leqq S_n,$$

由是
$$\lim\left[\Sigma f(x_i)\,\Delta x_i\right]_a^b=A. \tag{1}$$

此爲定積分之基本定理.

在幾何方面言，A 卽爲 AB 與 Ox 所圍之面積.

由以上之定義，立得

$$\lim\left[\Sigma f(x_i)\,\Delta x_i\right]_a^b=-\lim\left[\Sigma f(x_i)\,\Delta x_i\right]_b^a. \tag{2}$$

設 c 爲 (a,b) 之一分點，則

$$\lim\left[\Sigma f(x_i)\Delta x_i\right]_a^b=\lim\left[\Sigma f(x_i)\Delta x_i\right]_a^c+\lim\left[\Sigma f(x_i)\,\Delta x_i\right]_c^b. \tag{3}$$

因 $f(x)$ 在 (a,b) 內必經過其最大値 M 與最小値 m 中之任一値（第三章，§3，2.），故在 (a,b) 中必可選取 x 之一値 $\bar{x}$，使

$$\lim\left[\Sigma f(x_i)\Delta x_i\right]_a^b=f(\bar{x})(b-a),\quad a<\bar{x}<b. \tag{4}$$

§2. 定積分　若令(1)中之 b 爲 x，則 A 爲 x 之函數，可書爲 $A(x)=\lim\left[\Sigma f(x_i)\Delta x_i\right]_a^x$. 玆證 $dA/dx=f(x)$. 由(2)，(3)，(4)，

$$A(x+\Delta x)-A(x)=\lim\left[\Sigma f(x_i)\,\Delta x_i\right]_a^{x+\Delta x}-\lim\left[\Sigma f(x_i)\,\Delta x_i\right]_a^x$$
$$=\lim\left[\Sigma f(x_i)\,\Delta x_i\right]_x^{x+\Delta x}=f(\bar{x})\Delta x,$$

此處 $x<\bar{x}<x+\Delta x$. 當 $\Delta x\to 0$, $\bar{x}\to x$，故

$$\frac{d}{dx}A(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\bar{x})=f(x).$$

由是得知 $A(x)$ 爲 $f(x)$ 之一積分，以符號

$$A(x)=\int_a^x f(x)dx \tag{5}$$

表之，讀爲 $f(x)$ 自 a 至 x 之**定積分**(definite integral). a 曰**下限**(lower limit)，x 曰**上限**(upper limit).

設 $F(x)$ 爲 $f(x)$ 之任一已知積分，則 $\int_a^x f(x)dx=F(x)+C$，令 $x\to a$ 以求 C. 當 $x\to a$ 時，$\int_a^x f(x)dx\to 0$，而 $F(x)\to F(a)$. 故得 $0=F(a)+C$，$\therefore C=-F(a)$. 故知 $\int_a^x f(x)dx=F(x)-F(a)$. 重令 x 爲 b，則得

$$\int_a^b f(x)dx=\lim\Big[\Sigma f(x_i)\Delta x_i\Big]_a^b, \tag{6}$$

及

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). \tag{7}$$

故若已知 $f(x)$ 之一積分，則由(7)可求其定積分之值.

因 $f(x)$ 爲連續，故**連續函數皆有其積分**.

例. $\int_0^1 (x+1)^2dx=\left[\dfrac{(x+1)^3}{3}\right]_0^1=\dfrac{8}{3}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$.

由(5)式，得知定積分爲其限之函數，故

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(y)dy. \tag{8}$$

再由(2)，(3)，(4)三式，

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx. \tag{9}$$

$$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{10}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(\bar{x})(b-a). \tag{11}$$

因 $|A+B|\leqq|A|+|B|$，由(6)式，得知

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqq\int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{12}$$

習　題　一

求下列各定積分之值：

1. $\int_1^2 (x^2-2x+1)\,dx.$　　2. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}.$

3. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx.$　　4. $\int_0^4 e^{3x+2}\,dx.$

5. $\int_{-1}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$　　6. $\int_0^a \frac{x^2\,dx}{(a^2+x^2)^2}.$

7. $\int_1^2 \frac{\log x}{x}\,dx.$　　8. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \csc x \cot x\,dx.$

9. $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx.$　　10. $\int_0^{\frac{1}{2}} x\cos x^2\,dx.$

§3. 積分中值定理　設 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 在 (a,b) 內各爲連續函數，並 $\phi(x)$ 爲不變號，爲固定起見，令 $\phi(x)>0$.

假定將 (a,b) 分爲 $(x_0,x_1,x_2,\cdots\cdots,x_{n-1},x_n)$，令 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，

M 與 m 爲 $f(x)$ 在 (a,b) 內之最大與最小值，則

$$m \leqq f(x_i) \leqq M.$$

乘以 $\phi(x_i)\Delta x_i$，並相加，得

$$m\Sigma\phi(x_i)\Delta x_i \leqq \Sigma f(x_i)\phi(x_i)\Delta x_i \leqq M\Sigma\phi(x_i)\Delta x_i.$$

取極限，則得

$$m\int_a^b \phi(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)\phi(x)\,dx \leqq M\int_a^b \phi(x)\,dx.$$

此可書爲

$$\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx = \mu\int_a^b \phi(x)\,dx,$$

此處 μ 爲在 m 與 M 間之一值. 因 $f(x)$ 爲連續，由第三章，§3，2.，必有 x 之一值 $\bar{x}$ 居 (a,b) 之中，而 $\mu = f(\bar{x})$，故得

$$\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx = f(\bar{x})\int_a^b \phi(x)\,dx, \tag{13}$$

此曰**積分之第一中値定理**(first mean value theorem for integral).

若 $\phi(x)=1$，則(13)式化爲(11)式. (11)式即微分中之中值定理；蓋若 $F(x)$ 爲 $f(x)$ 之積分，則 $F(b)-F(a)=f(\bar{x})(b-a)$，而此處 $f(\bar{x})=F'(\bar{x})$，此爲微分中値定理之另一證法.

§4. 代換 $\int_a^b f(x)\,dx$ 有時藉代換法以求之. 設令 $x=\phi(t)$，$\phi'(t)$ 存在. 當 $x=a$ 時，$t=t_1$；當 $x=b$ 時，$t=t_2$. 因 $dx=\phi'(t)dt$，故

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f[\phi(t)]\phi'(t)\,dt. \tag{14}$$

例如求 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$. 令 $x=a\sin\theta$, $dx=a\cos\theta$. 當 $x=0$ 時，

$\theta=0$；當 $x=a$ 時，$\theta=\frac{\pi}{2}$. 故

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{\pi}{4}a^2.$$

以下之公式頗爲有用:

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx=\int_0^a[f(-x)+f(x)]\,dx. \tag{15}$$

蓋
$$\int_{-a}^a f(x)\,dx=\int_{-a}^0 f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx.$$

在右端第一積分中，令 $x=-u$，則

$$\int_{-a}^0 f(x)dx=\int_0^a f(-u)du=\int_0^a f(-x)dx, \quad [\text{由(8)式}]$$

故得(15)式.

若 $f(-x)\equiv f(x)$，則 $f(x)$ 曰偶函數(even function)；若 $f(-x)=-f(x)$，則 $f(x)$ 曰奇函數(odd function). 由(15)式,

1° 若 $f(x)$ 爲偶函數,

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)dx. \tag{16}$$

2° 若 $f(x)$ 爲奇函數,

$$\int_{-a}^a f(x)dx=0. \tag{17}$$

§5. 面積 由定積分之定義，曲線 $y=f(x)$，Ox，$x=a$，$x=b$ 所圍之面積 A 爲

$$A=\int_a^b y\,dx. \tag{18}$$

若曲線爲在 Ox 之下部，$\int_a^b y\,dx$ 爲負，其絕對值爲所圍之面積.

例一.　求 $y=x^2$ 自 $x=1$ 至 $x=2$ 一段弧與 Ox 所圍之面積.

$$A=\int_1^2 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=2\frac{1}{3}.$$

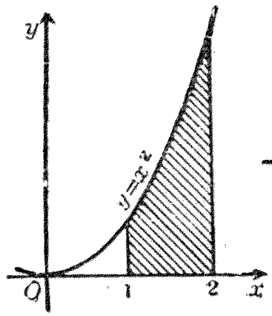

圖 72.

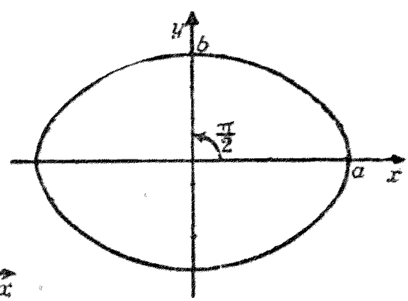

圖 73.

例二.　求橢圓 $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$ 之面積.

由第一式，$dx=-a\sin\theta\,d\theta$. 當 $x=0$, $\theta=\frac{\pi}{2}$; 當 $x=a$, $\theta=0$. 故

$$A=4\int_0^a y\,dx=-4ab\int_{\pi/2}^0 \sin^2\theta\,d\theta$$

$$=4ab\left[-\frac{\sin\theta\cos\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}=\pi ab.$$

若 $a=b$，則橢圓變爲圓，故圓之面積爲 πa^2.

習　題　二

1．試求曲線 $y=x^2-3x-4$ 與 x 軸所圍之面積；並作圖.

2. 試求曲線 $y=(x^2-1)^2$ 與 x 軸所圍之面積; 並作圖.

3. 試求曲線 $y=(1-x^2)/(x+2)$ 與 x 軸所圍之面積; 並作圖.

4. 求 $x=0, y=6-2x$ 及 Ox 所圍之面積.

5. 求三邊爲 $x-2y+6=0$, $x+y=0$, $x-y=0$ 之三角形之面積.

6. 求曲線 $y=x^2, y=x, y=2x$ 所圍之面積.

7. 求 $y^2=4ax, x^2=4ay$ 二拋物線所圍之面積.

8. 求曲線 $y^2=x^2(a-x)$ 之圈中之面積.

9. 求圓 $x^2+y^2=a^2$ 之面積.

10. 求正弦曲線 $y=\sin x$ 之一弓形之面積.

11. 求擺線(cycloid) $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ 之一弓形之面積.

12. 求曲線 $x=1+\cos t, y=2\sin t$ 所圍之面積.

13. 設曲線之方程式爲 $\rho=f(\theta)$, 分 $\beta-\alpha$ 角爲 n 部分 $\Delta\theta_i$, 則扇形 OPQ 之面積爲 $\frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\theta_i$. 由是, 試證 OAB 之面積爲 $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\theta$.

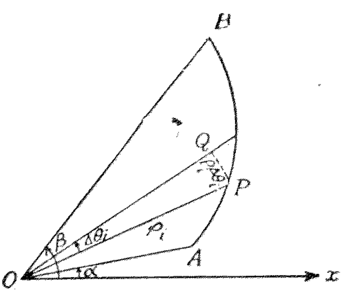

圖 74.

14. 求曲線 $\rho=a(1-\cos\theta), \theta=\pi/6$, $\theta=\pi/3$ 所圍之面積.

15. 求雙紐線(lemniscate) $\rho^2=a^2\cdot\cos 2\theta$ 所圍之面積.

§ 6. **積分之限爲無窮大者** 若 $f(x)$ 在 (a, x) 內爲連續, 並當

$x \to \infty$ 時，$\int_a^x f(x)\,dx$ 之極限存在，則此極限以 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 表之，即

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty}\int_a^x f(x)dx. \tag{19}$$

同樣，
$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(x)dx, \tag{20}$$

及
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{x\to-\infty}\int_x^0 f(x)dx + \lim_{x\to\infty}\int_0^x f(x)dx. \tag{21}$$

注意若以上三式右端之極限爲不存在，則無意義.

例.
$$\int_0^x e^{-x}\,dx = \Big[-e^{-x}\Big]_0^x = 1-e^{-x},$$

$$\therefore\quad \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{x\to\infty}(1-e^{-x}) = 1.$$

§ 7. **被積函數在限內爲無窮大者** 若 $f(x)$ 在 (a,b) 內各點皆爲連續，但 $f(b)=\infty$，如 $\lim\limits_{x\to b}\int_a^x f(x)dx$ 存在，則命

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b}\int_a^x f(x)dx. \tag{22}$$

同樣，若 $f(a)=\infty$，命

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to a}\int_x^b f(x)dx. \tag{23}$$

其次，若 c 爲 (a,b) 中間之一點，$f(c)=\infty$，但在其他各點皆爲連續，則命

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to c}\int_a^x f(x)dx + \lim_{x\to c}\int_x^b f(x)dx. \tag{24}$$

例．求 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$.

當 $x=0$, $1/x^{\frac{2}{3}}=\infty$. 故

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}=\lim_{x\to 0}\int_{-1}^{x}\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}+\lim_{x\to 0}\int_{x}^{1}\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[3x^{\frac{1}{3}}\right]_{-1}^{x}+\lim_{x\to 0}\left[3x^{\frac{1}{3}}\right]_{x}^{1}=6.$$

習　題　三

求下列諸積分之值(1.—9.):

1. $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}$.　　2. $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x}$.

3. $\int_{0}^{\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx$. $(a>0)$　　4. $\int_{0}^{a}\frac{x^{5/2}\,dx}{(a-x)^{1/2}}$.

5. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$.　　6. $\int_{a}^{b}\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

7. $\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.　　8. $\int_{0}^{1}\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. $\int_{0}^{2a}\frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$.

10. 試證 $\int_{a}^{\infty}\frac{dx}{(x-c)^n}$, $a>c$, 惟當 $n>1$ 時存在.

11. 試證 $\int_{a}^{b}\frac{dx}{(b-x)^n}$ 與 $\int_{a}^{b}\frac{dx}{(x-a)^n}$ 惟當 $n<1$ 時存在.

12. 試證$\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^{p/q}}$, $a<c<b$, 惟當 q 爲奇數並 $p/q<1$ 時存在.

13. 設 $a<c<b$, 而 $f(c)=\infty$. 若 $\phi(x)$ 爲 $f(x)$ 之一已知積分，而$\int_a^b f(x)dx$ 存在，試證 $\int_a^b f(x)dx=\phi(b)-\phi(a)$.

14. 設 n 爲正整數，試用部分積分法以證

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx=n!.$$

§8. 弧之長　設 AB 弧之方程式爲 $y=f(x)$, 內接以一 n 邊形，當 $n\to\infty$ 時，各邊皆 $\to 0$. 設 PQ 爲此多邊形之任一邊，並設 Δx 爲其在 Ox 上之正射影. 由中值定理，知在 PQ 弧上必有一點 R, 其橫坐標爲 x, 而曲線於 R 點之斜角爲 DPQ. 因 $\tan DPQ=f'(x)$, 得

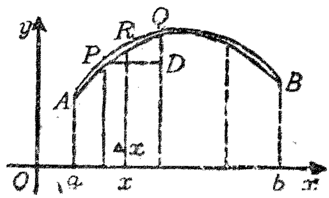

圖 75.

$$PQ=PD\sec DPQ=[1+f'(x)^2]^{\frac{1}{2}}\Delta x.$$

故多邊形之周界可表爲$\left[\Sigma\{1+f'(x)^2\}^{\frac{1}{2}}\Delta x\right]_a^b$. 當 $n\to\infty$, 則得

$$AB=\int_a^b\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2}dx. \tag{25}$$

例.　求圓周之長.

1° 設圓之半徑爲 a, 方程式爲 $x^2+y^2=a^2$, 則 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$. 故

$$s=4\int_0^a\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,dx=4\int_0^a\frac{\sqrt{y^2+x^2}}{y}\,dx=4a\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=4a\left[\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a=2\pi a.$$

2° 設圓之方程式為 $x=a\cos\theta$, $y=a\sin\theta$, 則 $\dfrac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta}=a\cos\theta$. 故

$$s=4\int_0^a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sqrt{1+\cot^2\theta}\,(-a\sin\theta)\,d\theta$$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=2\pi a.$$

習 題 四

求下列各曲線之長; 並作圖:

1. $x^2+y^2=4$, $x=1$ 至 $x=2$.
2. $y^2=6x-x^2$ 為 $y=x$ 所截之弧.
3. $y=\log(1-x^2)$, $x=-\dfrac{1}{2}$ 至 $x=\dfrac{1}{4}$.
4. $y=\dfrac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})$, $x=0$ 至 $x=a$.
5. $y^2=x^2\left(\dfrac{1}{3}-x\right)$ 之一圈.
6. $x=at^2$, $y=at^3$, $x=0$ 至 $x=5a$.
7. $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ 之一弓形.

8. $x=a(\sin\theta-\theta\cos\theta)$, $y=a(\cos\theta+\theta\sin\theta)$, $\theta=0$ 至 $\theta=\pi$.

9. 一弧繞 Ox 或 Oy 旋轉一週所得之立體曰**旋轉體**(solid of revolution). PQ 弧繞 Ox 旋轉所得之體積約等於 $\pi f(x_i)^2\Delta x_i$, 設 V_x 爲 AB 弧繞 Ox 旋轉所得旋轉體之體積, 試證

$$V_x=\pi\int_a^b f(x)^2dx. \tag{26}$$

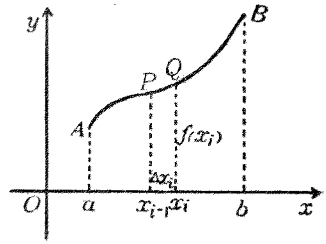

圖 76.

設 V_y 爲 AB 弧繞 Oy 旋轉所得旋轉體之體積, 試證

$$V_y=2\pi\int_a^b xf(x)dx. \tag{27}$$

10. 試求半徑爲 a 之球體體積.

11. 試求 $y^2=x^3$, 與 $x=4$ 及 Ox 所圍之部分之 V_x.

12. 試求 $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ 一弓形之 V_x 及 V_y.

13. 試求圓 $x^2+(y-b)^2=a^2$, $a<b$, 繞 Ox 旋轉所得之環之體積.

14. AB 弧繞 Ox 旋轉所得之曲面曰**旋轉面**(surface of revolution). 由本節之圖 75, $PQ=[1+f'(x)^2]^{1/2}\Delta x$. PQ 弧旋轉所得旋轉面之面積約爲 $2\pi f(x)\cdot PQ$. 由是以證旋轉面面積 S 爲

$$S=2\pi\int_a^b f(x)[1+f'(x)^2]^{\frac{1}{2}}dx. \tag{28}$$

15. 試求拋物線 $y^2=2x$ 在 $x=0$ 與 $x=4$ 間一段繞 Ox 所得旋轉面之面積.

16. 求圓 $x^2+y^2=a$ 在 $x=x_1$ 與 $x=x_1+h$ 間之弧繞 Ox 旋轉所得高爲 h 之球帶面積，並由此以推球之面積爲 $4\pi a^2$.

17. 求 $y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})$ 自 $x=0$ 至 $x=a$ 一段繞 Ox 旋轉所得旋轉面之面積.

18. 求圓 $x^2+(y-b)^2=a^2$, $a<b$, 繞 Ox 旋轉所成之環之面積.

§9. 含二變數之連續函數　設 S 爲 xy 平面上之一閉區域，其圍線 C 亦屬於此區域. 並設 $f(x,y)$ 爲 x,y 在 S 內之一單値函數，於是對 S 上任一點 (x,y)，有 $f(x,y)$ 之一實値與之相應. 若 $f(a,b)$ 爲一有限之定値，並若在 S 內當 $(x,y)\to(a,b)$ 時，$f(x,y)\to f(a,b)$，則 $f(x,y)$ 謂之於 S 內之 (a,b) 點爲連續. 若 $f(x,y)$ 在 S 內各點皆爲連續，則謂之於 S 內爲連續. 單變數函數之性質可以推廣至於此含兩變數之函數.

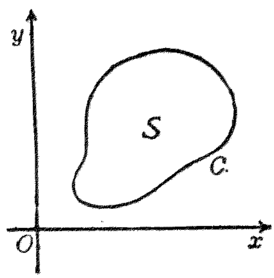

圖 77.

同樣可推廣至於含多變數之函數.

§10. 二重積分　設 S 區域爲由 C_1, C_2 二曲線所圍成；C_1 之方程式爲 $y=\phi_1(x)$，C_2 之方程式爲 $y=\phi_2(x)$. 設 $f(x,y)$ 於 S 內及圍線上爲連續. 設 aA 及 bB 爲圍線平行於 y 軸之二切線，cC 及 dD 爲平行於 x 軸之二切線. 分 (a,b) 爲 n 部分 $\Delta x_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$，分 (c,d) 爲 m 部分 Δy_k $(k=1,2,\cdots\cdots,m)$. 過諸分點作平行於

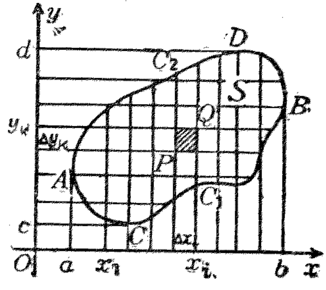

圖 78.

坐標軸之直線，於是 S 被分為若干有規則及不規則之矩形，如圖 78 所示.

矩形 PQ 之面積為 $\Delta x_i \cdot \Delta y_k$，乘以 $f(x_i, y_k)$，並作成和

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{m} f(x_i, y_k)\Delta y_k\right]\Delta x_i,$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} f(x_i, y_k)\Delta y_k \Delta x_i.$$

先令 x_i 及 Δx_i 為常數以求當 $\Delta y_k \to 0$ 時之極限，則

$$\lim_{\Delta y_k\to 0}\left[\sum_{k=1}^{m} f(x_i, y_k)\Delta y_k\right] = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x_i, y)\,dy.$$

此積分顯然為 x 之函數；命為 $\phi(x)$，再求其當 $\Delta x_i \to 0$ 時之極限，

$$\lim_{\Delta x_i\to 0}\left[\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)\Delta x_i\right] = \int_a^b \phi(x)\,dx$$

$$= \int_a^b\left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\,dy\right]dx.$$

此以符號

$$\int_a^b\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\,dy\,dx \quad 或 \quad \int_a^b dx\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\,dy$$

表之，即

$$\int_a^b\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\,dy\,dx$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x_i\to 0\\ \Delta y_k\to 0}}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} f(x_i, y_k)\Delta y_k\cdot\Delta x_i\right]. \qquad (29)$$

此曰 $f(x,y)$ 布於 S 區域之二重積分(double integral).

命 $\Delta x_i \cdot \Delta y_k = \Delta S_{ik}$, (29) 之左端又用符號

$$\int_S f(x,y)dS \quad 或 \quad \iint_S f(x,y)dy\,dx$$

表之.

例. 求 $f(x,y)=x^2+3y^2$ 布於 $x=2, x=4; y=0, y=x$ 諸直線所圍之區域之二重積分.

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_2^4 \int_0^x (x^2+3y^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_2^4 \Big(x^2y+y^3\Big)_0^x dx = 2\int_2^4 x^3\,dx = 120.$$

二重積分之幾何意義如次:

設 $z=f(x,y)$ 之軌跡爲 π 曲面(圖 79). 於是 $f(x_i, y_k)$ 爲 KN 之

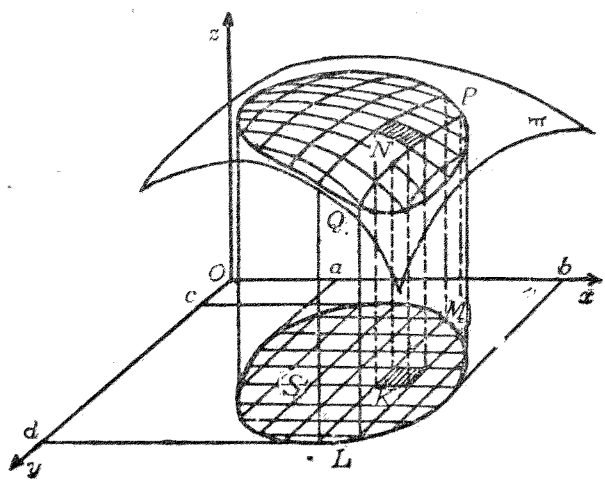

圖 79.

長，而 $f(x_i, y_k)\Delta y_k \cdot \Delta x_i$ 爲 KN 之體積，$\int_{\phi_1}^{\phi_2} f(x_i, y)\,dy$ 爲 $LMPQ$ 之體積. 設 V 爲 S 與 π 曲面所圍之柱形之體積，則

$$V = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\,dy\,dx. \tag{30}$$

例. 求柱面 $x^2 + y^2 = r^2$ 與 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=x+y$ 諸平面所包之立體體積.

在此 $\phi_1(x) = 0$, $\phi_2(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $a=0$, $b=r$, $f(x, y) = x+y$.

由(30)，

$$V = \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} (x+y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^r \left[x\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2 - x^2}{2} \right] dx = \frac{2a^3}{3}.$$

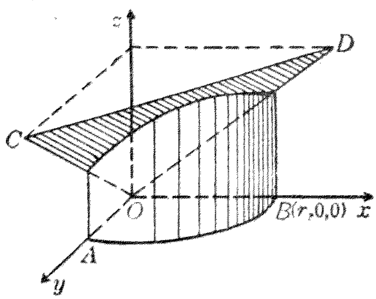

圖 80.

在(30)式中，若 $f(x, y) = 1$，則二重積分爲表 S 區域之面積 A，即

$$A = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy\,dx. \tag{31}$$

習　題　五

求以下二重積分之值;並指出其所表之體積(1.—4.):

1. $\int_0^1\int_0^{1-x^2}(x+y)\,dy\,dx.$

2. $\int_0^2\int_0^{2\sqrt{4-x^2}}\left(4-x^2-\frac{1}{4}y^2\right)dy\,dx.$

3. $\int_2^3\int_{\sqrt{2}}^{x}xy\,dy\,dx.$　　4. $\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}(x^2+y^2)\,dy\,dx.$

5. 試求坐標平面與平面 $x/a+y/b+z/c=1$ 所圍四面三角體(tetrahedron)之體積.

6. 求柱形 $x^2+y^2=a^2, x^2+z^2=a^2$ 在第一卦限(octant)所圍之體積.

7. 試求曲面 $x^2+y^2=4$ 與平面 $z+y=0, z=0$ 所圍之體積.

8. 設 a,b,c,d 爲常數,試證公式

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx. \tag{32}$$

9. 設 a,b,c,d 爲常數,試證公式

$$\int_a^b\int_c^d \phi(x)\psi(y)\,dy\,dx=\int_a^b\phi(x)dx\times\int_c^d\psi(y)dy. \tag{33}$$

§11. 極坐標之變換　設 S 爲由曲線 $\rho=\phi(\theta)$, $\theta=\theta_1$, $\theta=\theta_2$ 所圍之區域,並設 PQ 爲 ΔS,則

$$\Delta S=\frac{1}{2}(\rho+\Delta\rho)^2\Delta\theta-\frac{1}{2}\rho^2\Delta\theta=\rho\Delta\rho\Delta\theta+\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\Delta\theta.$$

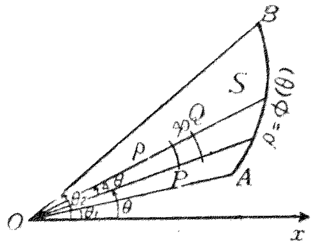

圖 81.

由是 $dS=dx\,dy=\rho\,d\rho\,d\theta$. 因 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, 故得

$$\iint_S f(x,y)\,dy\,dx=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_0^{\phi(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,d\rho\,d\theta. \quad (34)$$

例一. 求 $\iint_S e^{-(x^2+y^2)}dy\,dx$, 此處 S 爲在第一象限之圓弧, S 之半徑爲 a.

由(33)式, 因 $x^2+y^2=\rho^2$,

$$\iint_S e^{-(x^2+y^2)}dy\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta=\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2}).$$

§12. 積分 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ 　此積分以後頗爲有用. 令

$$I=\int_0^a e^{-x^2}dx,$$

則

$$I=\int_0^a e^{-y^2}dy.$$

由(33),

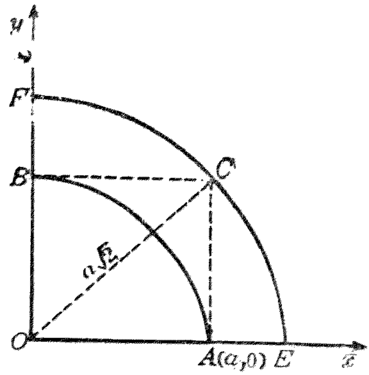

圖 82.

$$I^2=\int_0^a e^{-x^2}dx\times\int_0^a e^{-y^2}dy=\int_0^a\int_0^a e^{-(x^2+y^2)}dy\,dx.$$

此為布於 $OACB$ 之積分. 但

$$\iint_{OAB} e^{-(x^2+y^2)}dy\,dx\leqq I^2\leqq\iint_{OEF} e^{-(x^2+y^2)}dy\,dx.$$

由(34)式,

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^a e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta\leqq I^2\leqq\int_0^{\pi/2}\int_0^{a\sqrt{2}} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta.$$

由 §11, 例一,

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2})\leqq I^2\leqq\frac{\pi}{4}(1-e^{-2a^2}).$$

令 $a\to\infty$, 此式之兩端俱為 $\pi/4$, 故 $\lim\limits_{a\to\infty} I=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, 即

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{35}$$

習　題　六

試求以下各積分:

1. $\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx.$　　2. $\int_0^1\int_y^1\frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

3. $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\cos(x^2+y^2)dy\,dx.$

4. $\int_0^\infty\frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}}dx.$　$(a>0)$

5. 試證經過圓 $\rho=a\cos\theta$ 之正柱面與球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 所圍之體積為

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta}(a^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\rho\,d\rho\,d\theta=\frac{4a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

§13. 近似積分法——梯形法則　若干函數不能用初等方法以求其積分之值，則可求其近似值，此曰**近似積分法**(approximate integration). 在應用方面頗關重要.

設 $f(x)=ax+b$，則

$$\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx=\int_{x_1}^{x_2}(ax+b)dx$$

$$=(x_2-x_1)\left[\frac{1}{2}a(x_1+x_2)+b\right].$$

因 $f(x_1)=ax_1+b$, $f(x_2)=ax_2+b$, $\frac{1}{2}a(x_1+x_2)+b=\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$,

故

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)[f(x_1) + f(x_2)]. \tag{36}$$

令 $x_1 = -h, x_2 = h$, 則因 $\frac{1}{2}(x_2 - x_1) = h$,

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx = h[f(-h) + f(h)], \tag{36'}$$

此謂之(1,1)法則.

設 $f(x) = ax + b$ 之圖形爲直線 AB (圖 83), 則(36)或(36′)之右端係表 x_1x_2BA 之面積. 設 $y = \phi(x)$ 爲另一函數而有二級導微函數, 其圖形亦經過 A, C, B 三點者. 則在(x_1, x_2)間曲線與 x 軸所圍之面積爲 $\int_{-h}^{h}\phi(x)dx$. 若令

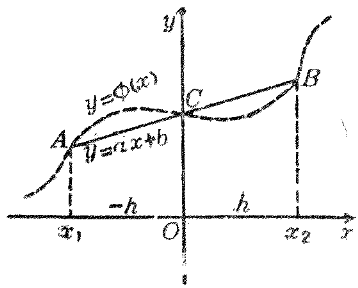

圖 83.

$$\int_{-h}^{h}\phi(x)\,dx = h[\phi(-h) + \phi(h)],$$

則其誤差可計算之如次:

令 $S = \int_{-h}^{h}\phi(x)dx, T = h[\phi(-h) + \phi(h)]$, 則 $|T - S|$ 卽爲誤差之絕對值. 設 $\Phi(x)$ 爲 $\phi(x)$ 之一積分, 則

$$T - S = h[\phi(-h) + \phi(h)] - [\Phi(h) - \Phi(-h)].$$

令右端爲 $\psi(h)$,

$$\psi'(h) = h[\phi'(h) - \phi'(-h)].$$

應用中值定理, $\phi'(h) - \phi'(-h) = 2\phi''(h_1)h$, $-h < h_1 < h$. 故

$$\psi'(h)=2h^2\phi''(h_1).$$

令 M_2 爲 $\phi''(h)$ 於 $(-h,h)$ 中之最大值，則

$$|\psi(h)|=\left|\int_0^h\psi'(h)\,dh\right|=\left|\int_0^h 2h^2\phi''(h_1)\,dh\right|$$

$$\leqq 2M_2\int_0^h h^2\,dh=\frac{2}{3}h^3M_2.$$

故若以 $\phi(x)$ 爲 $ax+b$，而求其積分，其結果之最大誤差爲 $\frac{2}{3}h^3M_2$。由是若 h 爲相當大，其誤差亦相當大。但吾人可將 x 數節分爲若干部分，然後每部分應用(1,1)法則以求之。

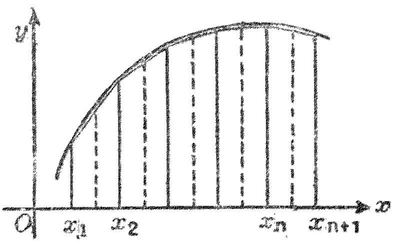

圖 84.

設有函數 $y=\phi(x)$，試求 $\int_{x_1}^{x_{n+1}}\phi(x)dx$。分 (x_1,x_{n+1}) 爲 n 部分，每部分之長爲 h。由(1,1)法則，

$$\int_{x_1}^{x_2}\phi(x)dx\doteq\frac{h}{2}[\phi(x_1)+\phi(x_2)],$$

……………………………………,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\phi(x)dx\doteq\frac{h}{2}[\phi(x_i)+\phi(x_{i+1})],$$

……………………………………,

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}}\phi(x)dx\doteq\frac{h}{2}[\phi(x_n)+\phi(x_{n+1})],$$

相加則得梯形法則(trapezoidal rule):

$$\int_{x_1}^{x_{n+1}}\phi(x)dx=\frac{h}{2}\Big[\phi(x_1)+\phi(x_{n+1})+2\Big\{\phi(x_2)+\phi(x_3)$$
$$+\cdots\cdots+\phi(x_n)\Big\}\Big]. \tag{37}$$

設 M 為 $\phi''(x)$ 在 (x_1,x_{n+1}) 中之最大值，因在每部分中之誤差小於或等於 $\frac{2}{3}h^3M$，今有 n 部分，故

$$\text{總誤差之絕對值} \leqq \frac{2}{3}h^3nM=\frac{2}{3}h^2M(x_{n+1}-x_1). \tag{38}$$

§14．近似積分法——辛伯孫法則 設 $f(x)=ax^2+bx+c$，則

$$\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx=\frac{1}{3}a(x_2^3-x_1^3)+\frac{1}{2}b(x_2^2-x_1^2)+c(x_2-x_1)$$
$$=(x_2-x_1)\Big[\frac{a}{3}(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+\frac{b}{2}(x_1+x_2)+c\Big].$$

因 $f(x_1)=ax_1^2+bx_1+c$, $f(x_2)=ax_2^2+bx_2+c$，設 $\xi=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$，

$$f(\xi)=\frac{a}{4}(x_1+x_2)^2+\frac{b}{2}(x_1+x_2)+c,$$

$$\frac{a}{3}(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+\frac{b}{2}(x_1+x_2)+c=\frac{1}{6}[f(x_1)+4f(\xi)+f(x_2)],$$

故
$$\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx=\frac{x_2-x_1}{6}\Big[f(x_1)+4f(\xi)+f(x_2)\Big]. \tag{39}$$

令 $x_1=-h$, $x_2=h$，則

$$\int_{-h}^{h}f(x)dx=\frac{h}{3}\Big[f(-h)+4f(0)+f(h)\Big]. \tag{39'}$$

此曰(1,4,1)法則,或抛物線法則(parabolic rule)。

若 $y=\phi(x)$ 爲一有四級導微函數而且其曲線經過 A,B,C 三點者,令

$$\int_{-h}^{h}\phi(x)\,dx=\frac{h}{3}\Big[\phi(-h)+4\phi(0)+\phi(h)\Big],$$

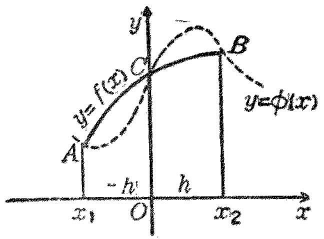

圖 85.

則可依 §13 之法,求得其誤差之絕對值[註]最大爲 $M_4h^5/90$,此處 M_4 爲 $\phi^{(\mathrm{iv})}(x)$ 在 $(-h,h)$ 內之最大值。

在實際應用上,恆將 x 數節分爲若干部分,然後在每部分應用(39)以求之.設有函數 $y=\phi(x)$,而求 $\int_{x_1}^{x_{2n+1}}\phi(x)\,dx$。分 (x_1,x_{2n+1}) 爲 $2n$ 部分,每部分之長爲 h,則由(1,1)法則,

$$\int_{x_1}^{x_3}\phi(x)\,dx=\frac{h}{3}\Big[\phi(x_1)+4\phi(x_2)+\phi(x_3)\Big],$$

$$\int_{x_3}^{x_5}\phi(x)\,dx=\frac{h}{3}\Big[\phi(x_3)+4\phi(x_4)+\phi(x_5)\Big],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

[註] 見 Fine: Calculus, § 195.

相加則得辛伯孫法則(Simpson's rule):

$$\int_{x_1}^{x_{2n+1}}\phi(x)dx=\frac{h}{3}\Big[\phi(x_1)+\phi(x_{2n+1})$$

$$+2\Big\{\phi(x_3)+\phi(x_5)+\cdots\cdots+\phi(x_{2n-1})\Big\}$$

$$+4\Big\{\phi(x_2)+\phi(x_4)+\cdots\cdots+\phi(x_{2n})\Big\}\Big]. \qquad (40)$$

設 M 爲 $\phi^{(iv)}(x)$ 在 (x_1, x_{2n+1}) 中之最大值，則在每相隣之兩部分，誤差之絕對值爲小於或等於 $Mh^5/90$. 故

$$\text{總誤差之絕對值} \leqq Mh^5\cdot n/90$$

$$\leqq (x_{2n+1}-x_1)\cdot Mh^4/180. \qquad (41)$$

例一. 1° 由積分法，

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1=\log 2=0.6931472.$$

2° 應用梯形法則，分 $(0,1)=(0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1)$, $h=\frac{1}{4}$.

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\Big[\phi(0)+\phi(1)+2\Big\{\phi\Big(\frac{1}{4}\Big)+\phi\Big(\frac{1}{2}\Big)+\phi\Big(\frac{3}{4}\Big)\Big\}\Big]$$

$$=\frac{1}{8}(1.5+2\times 2.0380953)=0.6970238.$$

誤差爲 0.0038766. 因 $\phi''(x)=2/(1+x)^3$, 在 $(0,1)$ 中 $\phi''(0)=2$ 爲最大. 由(38), 誤差 $<\frac{2}{3}\cdot\Big(\frac{1}{4}\Big)^2\cdot 2\cdot 1=\frac{1}{12}$.

3° 應用辛伯孫法則，取 $h=\frac{1}{4}$ 如上，

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\left[\phi(0)+\phi(1)+2\phi\left(\frac{1}{2}\right)+4\left\{\phi\left(\frac{1}{4}\right)+\phi\left(\frac{3}{4}\right)\right\}\right]$$

$$=0.6932540.$$

誤差爲 0.0001068. 因 $\phi^{(iv)}(x)=24/(1+x)^5$, 在 $(0,1)$ 間 $\phi^{(iv)}(0)=24$ 爲最大, 由 (41), 誤差 $<1\cdot 24\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\Big/180=0.000521$.

比較 2°, 3° 之結果, 得知用辛伯孫法則較爲精密.

例二. 求 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx$.

應用辛伯孫法則, 分 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 爲六等分 $\left(h=\dfrac{\pi}{12}\right)$.

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{12}\left[\phi(0)+\phi\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\left\{\phi\left(\frac{\pi}{6}\right)+\phi\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}\right.$$

$$\left.+4\left\{\phi\left(\frac{\pi}{12}\right)+\phi\left(\frac{\pi}{4}\right)+\phi\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right\}\right]$$

$$=1.37077.$$

習　題　七

試用兩法以求下列各積分之近似値, 並比較其結果:

1. $\displaystyle\int_0^8\frac{x\,dx}{1+x^2}$, $n=8$.　　2. $\displaystyle\int_2^6\sqrt[3]{x^2-2x}\,dx$, $n=4$.

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2+\sin^2\theta}\,d\theta$, $n=6$.

4. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{10\,d\theta}{\sqrt{4-\sin^2\pi\theta}}$, $n=10$. 5. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\,dx$, $n=4$.

§15. **平均值** 設 $y=f(x)$ 在 (a,b) 內為連續. 分 (a,b) 為 n 等分，其分點為 $x_0, x_1, \cdots\cdots, x_{n-1}, x_n$ $(x_0=a, x_n=b)$，而每分點之長為 h. 在各部分中各取出任意一點 ξ_i $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$. 則 $f(\xi_1), f(\xi_2), \cdots\cdots, f(\xi_n)$ 之算術平均數為 $[f(\xi_1)+f(\xi_2)+\cdots\cdots+f(\xi_n)]/n$, 亦即

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)h/(b-a).$$

蓋 $nh=b-a$. 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Sigma f(\xi_i)}{n}=\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}. \tag{42}$$

(42) 曰 $f(x)$ 在 (a,b) 內對 x 之**平均值**(mean value).

例如拋物線 $y=x^2$ 在 $(0,2)$ 間其縱坐標對 x 之平均值為

$$\left[\int_0^2 x^2\,dx\right]\Big/2=4/3.$$

平均值之記法，可推廣至於含二個變數之函數. 如 S 為 xy 平面上之任一閉區域並代表其面積，則 $z=f(x,y)$ 對 x,y 在 S 區域上之平均值為

$$\bar{z}=\left[\iint_S f(x,y)\,dy\,dx\right]\Big/S. \tag{43}$$

例如 R 為 $x=0, x=a, y=0, y=b$ 所圍之矩形，則 R 上之點與 O

距離之平方之平均值為$\left[\int_0^a\int_0^b (x^2+y^2)\,dy\,dx\right]\Big/ab=(a^2+b^2)/3$.

習　題　八

1. 試求 $\sin x$ 在$(0,\pi)$間之平均值.

2. 試求圓 $x^2+y^2=a^2$ 在第一象限之縱坐標之平均值.

3. 一數 c 任意分為二部;試示其乘積之平均值為 $c^2/6$.

4. 求一正方形上之點與其中心距離之平方之平均值.

5. 試由(41)以證積分之中值定理(11).

6. 設 S 為一區域,$(\bar{x},\bar{y})$為其重心(centroid),試證

$$\bar{x}=\frac{\int_S x\,dy\,dx}{\int_S dy\,dx},\qquad \bar{y}=\frac{\int_S y\,dy\,dx}{\int_S dy\,dx}.$$

7. 試求圓面 $x^2+y^2=a^2$ 在第一象限之重心.

8. 試求圓 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta$ 在第一象限之弧之重心.

9. 試證 AB 弧繞 Ox 所得之旋轉面之面積,等於弧之長乘以其重心所轉成之圓周〔此為伯樸司定理(Pappus' theorem)〕.

第十一章　偏導微函數

§1. 偏導微函數　設

$$z=f(x,y)$$

於 (x,y) 點之隣近[註]爲連續. 視 y 爲常數, 求 $f(x,y)$ 對 x 之導微函數所得之結果, 曰 $f(x,y)$ 對 x 之偏導微函數(partial derivative). 以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, 或 $f_x(x,y)$ 表之, 卽

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}. \tag{1}$$

此必須右端之極限存在時, $\partial f/\partial x$ 始爲存在. $f(x,y)$ 對 y 之偏導微函數爲

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}. \tag{2}$$

例如 $z=2x^2-3xy-2y$. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x-3y$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-3x-2$.

§2. 全微分　設 $f(x,y)$, f_x, f_y 在 (x,y) 點及其隣近爲連續. 給 x, y 以增量 Δx, Δy, 則 $z=f(x,y)$ 得一增量

[註] 所謂 (x_1, y_1) 點之隣近(neighborhood)者, 卽 $x=x_1-a$, $x=x_1+a$; $y=y_1-b$, $y=y_1+b$ 諸直線所圍之矩形也

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$= [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)].$$

由中值定理,

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x, \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

代入上式,得

$$\Delta z = f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y. \tag{3}$$

當 Δx, $\Delta y \to 0$ 時, $f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) \to f_x(x,y)$, $f_y(x, y+\theta_2\Delta y) \to f_y(x,y)$,故可書

$$\Delta z = [f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y] + [\epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y], \tag{4}$$

此處 ϵ_1, ϵ_2 與 Δx, Δy 同趨近於零. 因右端第一括號內爲 Δz 之主部分,以符號 du 表之,此曰 u 之全微分(total differential). 又因 $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$,故

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{5}$$

(5)式可以推廣至於含多變數之函數.

例. 若 $z = x^2y^3$, $dz = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy$.

若 $z = f(x,y)$,而 x, y 又各爲 t 之函數,則由(3),

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

命 $\Delta t \to 0$,得

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{6}$$

此為 z 對 t 之導微函數.

若 z 為 t 及其他變數之函數,則

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{7}$$

例. 若 $z=ax+by$, 及 $x=a_1s+b_1t$, $y=a_2s+b_2t$,則

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=aa_1+ba_2;$$

同理,
$$\frac{\partial z}{\partial t}=ab_1+bb_2.$$

§3. 隱函數之導微函數 設方程式 $f(x,y)=0$ 定 y 為 x 之函數,由(5)式,

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0,$$

故得
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}. \tag{8}$$

讀者試與第四章,(15)式比較.

又若方程式 $F(x,y,z)=0$ 定 z 為 x,y 之函數,由(5)式之推廣,

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0.$$

再因 z 為 x,y 之函數,故可書

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

由此二式消去 dz,得

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy=0.$$

令 y 爲常數以求 $\partial z/\partial x$,因 $dy=0$,若 $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{9}$$

又令 x 爲常數以求 $\partial z/\partial y$. 因 $dx=0$,若 $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$,得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{10}$$

習 題 一

1. $z=x^3y^2-x^2-4y$, 求 $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$.

2. $z=\sqrt{x^3-y^3}$, 求 $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$.

3. $u=\log(x^2+y^2-z^2)^2$, 求 $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial u/\partial z$.

4. $x^2+y^2+z^2=a^2$, 求 $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$.

5. $y^2+z^2=4zx$, 求 $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$.

6. 若 $u=x(y-z)$, $x=r+2s$, $y=s-t$, $z=t$. 求 $\partial u/\partial r$, $\partial u/\partial s$, $\partial u/\partial t$.

7. 若 $u=f(x,y)$, $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, 試示

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2.$$

§4. **高級偏導微函數**　$z=f(x,y)$對 x 或 y 之偏導微函數,恆亦爲 x,y 之連續函數,並有其導微函數,故有二級,三級以至高級之導微函數,此以符號

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3},\cdots\cdots;\ z_{xx},\ z_{yyy},\cdots\cdots;\ f_{xx},\ f_{yyy},\cdots\cdots$$

表之.再 $\partial z/\partial x$ 之 y 導微函數爲

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\ \text{或}\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x},$$

而 $\partial z/\partial y$ 之 x 導微函數爲

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\ \text{或}\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}.$$

若 f_x,f_y,f_{xy},f_{yx} 爲皆連續,則可證

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}. \tag{11}$$

例如 $f(x,y)=ax^my^n$,則

$$\frac{\partial f}{\partial x}=max^{m-1}y^n,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=nmax^{m-1}y^{n-1};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=nax^my^{n-1},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=mna\,x^{m-1}y^{n-1}.$$

故 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}.$

§5. **齊次函數**　若函數 $f(x,y)$適合於關係式

$$f(tx,ty)\equiv t^nf(x,y) \tag{12}$$

者,則曰齊 n 次函數(homogeneous function of degree n).例如 $y+x(\log x-\log y)$爲齊次函數.

求(12)式對 t 之導微函數,並令 $t=1$,則得

$$nf(x,y)\equiv x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{13}$$

此曰**歐拉定理**(Euler's theorem).

例如 $f(x,y)=\tan^{-1}(y/x)$,則 $f(x,y)$ 爲齊零次函數.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{1+y^2/x^2}\times\frac{-y}{x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

$$\therefore\quad x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{xy}{x^2+y^2}+\frac{xy}{x^2+y^2}=0.$$

習題二

1. 試求 $\sqrt{x^2+y^2}$, $(x+y)/(x+z)$, e^{xy^2} 之全微分.

2. 試示 $x\sin^{-1}(y^2/x^2)$, $xyz/(x+y+z)$ 爲齊次函數,並以驗證歐拉定理.

3. 若 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, 試證 $x\,dy-y\,dx=\rho^2 d\theta$.

4. 若 $u=\log(x^2+y^2)^{1/2}$,試示 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ [此曰**拉伯拉斯方程式**(Laplace's equation)].

5. 若 $u=f(y+ax)+\phi(y-ax)$,試示 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

6. 設 $u=\phi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$. 若 $v=f(u)$,試示

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\end{vmatrix}\equiv 0.$$

此式之左端曰 ϕ,ψ 對 x,y 之函數行列式(functional determinant or Jacobian)。

§6. 包線 在 xy 平面之上,含有一任意常數或參數之方程式 $f(x,y,c)=0$ 爲代表一族曲線,每與常數 c 以一值,則得一曲線,是以此族含有無窮枝曲線.設 S 表此族曲線,有時另有一曲線 E 存在,S 族之各曲線皆與之相切,吾人名 E 曰 S 族之包線(envelope)。

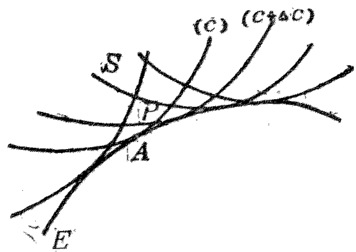

圖 86.

假定 S 族之一代表曲線 (c),與一相隣之曲線 $(c+\Delta c)$ 交於 P.當 $\Delta c\to 0$,則 P 趨近於一定點 A 爲極限.

由中值定理,

$$f(x,y,c+\Delta c)-f(x,y,c)=\frac{\partial}{\partial c}f(x,y,c+\theta\Delta c)\Delta c,\quad 0<\theta<1.$$

因 $P(x,y)$ 適合於 $f(x,y,c)=0$ 及 $f(x,y,c+\Delta c)=0$,故亦適合於 $\frac{\partial}{\partial c}f(x,y,c+\theta\Delta c)=0$.

當 $\Delta c\to 0$,則 $\frac{\partial}{\partial c}f(x,y,c+\theta\Delta c)\to\frac{\partial}{\partial c}f(x,y,c)$.故 A 點之坐標適合於方程式

$$\begin{cases} f(x,y,c)=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial c}=0. \end{cases}\tag{14}$$

故由(14)中消去 c，則得包線 E 之方程式 $E(x,y)=0$.

設 $\frac{\partial}{\partial c}f(x,y,c)=0$ 可就 c 解爲 $c=\phi(x,y)$. 代入 $f(x,y,c)=0$，得 $f[x,y,\phi(x,y)]=0$，此卽代表 E. 求此式之全微分，得

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial c}d\phi=0.$$

因於 A 點 $\frac{\partial f}{\partial c}=0$，故此式化爲

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0,$$

卽包線於 A 點之斜度爲 $dy/dx=-\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial y}$. 但此卽 S 曲線族經過 A 點之曲線 (c) 之斜度，故包線與 S 曲線族於 A 點爲相切.

例. 求圓族 $5x^2+5y^2-10cx+4c^2=0$ 之包線.

在此 $$\frac{\partial f}{\partial c}=-10x+8c=0.$$

與原方程式消去 c，得包線之方程式爲二直線

$$4y^2-x^2=0,$$

卽 $$y=x/2,\quad y=-x/2.$$

注意 $E(x,y)=0$ 卽 $f(x,y,c)$ 之判別式.

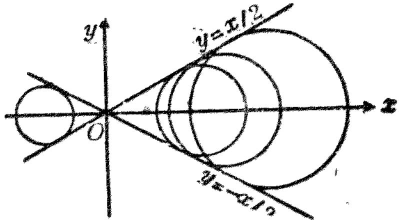

圖 87.

習題三

求下列各曲線族之包線;並作圖:

1. $x^2-4y-2cx+c^2=0$.

2. $y^2-cx+c^2=0$.

3. $y=cx+\frac{1}{c}$.

4. $(3y+2c)^2=4cx^3$.

5. $x^2+y^2+2cx+2c^2-1=0$.

6. $c^2+(x+y)c+1-xy=0$.

第十二章　無窮級數

§1. **定義**　設 $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n, \cdots\cdots$ 爲一組無盡數列，則

$$\sum u_n = u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_n + \cdots\cdots \tag{1}$$

曰**無窮級數**(infinite series).例如

$$\sum \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots\cdots,$$

$$\sum \frac{n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 4} + \cdots\cdots$$

等皆爲無窮級數.

命　　$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_n.$$

則　　$S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, $\cdots\cdots$, $S_i = u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_i$.

若當 $n \to \infty$，S_n 有一極限，則(1)曰**收歛級數**(convergent series); 若當 $n \to \infty$，S_n 並不趨近於一極限，則(1)曰**發散級數**(divergent series).若(1)爲收歛級數，則 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 曰(1)之**和**.

例如級數 $\Sigma \frac{1}{2^n}$, $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{3}{4}$, $S_3 = \frac{7}{8}$, $\cdots\cdots$, $S_n \to 1$，故此級數爲收歛，其和爲 1. 又如級數 Σn, $S_1 = 1$, $S_2 = 3$, $S_3 = 6$, $\cdots\cdots$, $S_n \to \infty$，故爲發散級數. $1-1+1-1+\cdots\cdots$ 亦爲發散級數.

若(1)爲收歛級數，S 爲其和，則可書

$$S=S_n+R_n, \tag{2}$$

此處 R_n 爲表第 n 項以後諸項之和. 因 $\lim S_n=S$, 故 $\lim R_n=0$.

若 S 趨近於一極限, 必須 $u_n\to 0$, 卽若(1)爲收歛, 必 $u_n\to 0$. 反之, 若 $u_n\to 0$, (1) 不必爲收歛; 例如級數 $\Sigma\frac{1}{n}$, 在此 $u_n=\frac{1}{n}\to 0$, 但此級數爲發散.

若級數(1)爲收歛, 其和爲 S, 則級數 $Cu_1+Cu_2+\cdots\cdots$ 亦爲收歛; 蓋因 $Cu_1+Cu_2+\cdots\cdots+Cu_n=CS_n\to CS$ 也. 又若(1)爲發散, 則 $Cu_1+Cu_2+\cdots\cdots$ 亦爲發散.

§2. **正項級數** 若級數 $u_1+u_2+\cdots\cdots$ 之各項皆爲正者, 則曰正項級數(positive series).

定理 1. 若 n 增加, S_n 永較一有限數 c 小, 則正項級數 Σu_n 爲收歛.

蓋因級數之各項爲正, 當 n 增加時, 則 S_n 繼續增加, 但永小於一常數 c, 由第三章, §2, 1., S_n 趨近於一極限.

定理 2. 若一正項級數 $u_1+u_2+\cdots\cdots$ 之各項比一已知正項收歛級數 $a_1+a_2+\cdots\cdots$ 之相應項小, 則此級數爲收歛.

蓋若 Σa_n 之和爲 A, 則 $S_n=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n<A$. 由定理一, Σu_n 爲收歛.

同理可證

定理 3. 若一正項級數 $u_1+u_2+\cdots\cdots$ 之各項比一已知正項發散級數 $b_1+b_2+\cdots\cdots$ 之相應項大, 則此級數爲發散.

§3. **幾何級數** 級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots\cdots \tag{3}$$

曰無窮幾何級數(infinite geometric series).

定理. 幾何級數(3)當$|r|<1$時爲收歛;當$|r|\geqq 1$時爲發散.

蓋$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1}$. 乘以$r$,並相減,得$(1-r)S_n = a(1-r^n)$,即$S_n = a(1-r^n)/(1-r)$.

當$|r|<1$, $\lim r^n = 0$,故$S = \lim S_n = a/(1-r)$爲收歛.

當$|r|\geqq 1$, (3)易知爲發散.

§4. 積分檢驗法 因正項級數之各項爲n之函數,故可書$u_n = f(n)$. 由是

$$\sum u_n = f(1) + f(2) + \cdots\cdots.$$

定理. 設$f(x)$當x爲正整數時爲正,並爲降函數,則級數$f(1) + f(2) + \cdots\cdots$爲收歛或發散爲視積分

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

存在與否而定.

蓋因$f(x)$爲降函數,故其圖形如圖88所示. 取1, 2, 3,……等横坐標,則$u_1 = f(1)$, $u_2 = f(2)$,……,而Σu_n爲圖中Ox, Oy與AB曲線間之

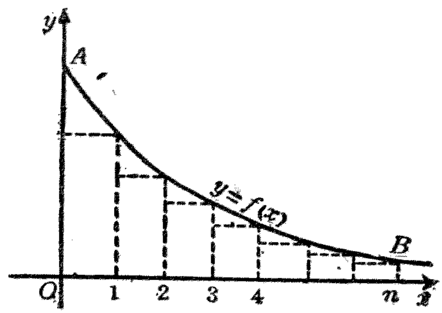

圖 88.

n 個矩形之面積之和. 因 $\int_1^\infty f(x)dx$ 爲存在, 而

$$S_n - u_1 < f(1) + f(2) + \cdots\cdots + f(n) < \int_1^\infty f(x)dx,$$

故 S_n 趨近於一極限, 亦卽 $f(1)+f(2)+\cdots\cdots$ 爲收歛.

依同法, 得證若 $\int_1^\infty f(x)dx$ 爲發散, 則 $f(1)+f(2)+\cdots\cdots$ 亦爲發散.

例如級數 $\Sigma \frac{1}{n^p}$. $f(x)=\frac{1}{x^p}$, 此函數適合於以上定理之條件. 積分 $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ 惟當 $p>1$ 時存在, 故級數

$$\sum \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots\cdots \tag{4}$$

當 $p>1$ 時爲收歛; 當 $p \leqq 1$ 時爲發散.

習　題　一

試檢驗以下各級數之收歛性:

1. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots$.

2. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots$.

3. $1+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\frac{1}{\sqrt{3^3}}+\cdots\cdots$.

4. $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\cdots$.

5. $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{1+\sqrt{4}}+\cdots\cdots$.

6. $\frac{1}{2(\log 2)^p}+\frac{1}{3(\log 3)^p}+\cdots\cdots$.

§5. **比值檢驗法**　設 Σu_n 爲一正項級數，茲述一種檢驗其收斂性之最普通方法，此方法爲基於下之定理.

定理.　若 $u_{n+1}/u_n < r$, $r<1$, 則 Σu_n 爲收斂.

蓋由假設

$$\frac{u_2}{u_1}<r,\quad \frac{u_3}{u_2}<r,\quad \frac{u_4}{u_3}<r,\cdots\cdots,\frac{u_{n+1}}{u_n}<r,\ \cdots\cdots,$$

則　$u_2<u_1r$, $u_3<u_1r^2$, $u_4<u_1r^3$, $\cdots\cdots$, $u_{n+1}<u_1r^n$, $\cdots\cdots$.

於是級數 Σu_n 除第一項外，其餘各項皆較收斂級數 $u_1+u_1r+u_1r^2+\cdots\cdots$ 之相應項爲小，故爲收斂.

同理，若 $u_{n+1}/u_n \geqq 1$, 則 Σu_n 爲發散.

推論.　設 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}/u_n)=l$, 則若 $l<1$, 級數爲收斂；若 $l>1$, 級數爲發散.

蓋若 $l<1$, 命 r 爲在 l 與 1 間之一數，則當 n 至相當大之某一值 N 時，$l<(u_{n+1}/u_n)<r$；故級數爲收斂.

若 $l>1$, 則當 n 爲 N 時，$(u_{n+1}/u_n)>1$, 故級數爲發散.

注意若 $l=1$, 則此檢驗法失敗.

例一.　試驗 $1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots\cdots$ 之收斂性.

在此　$$u_n=\frac{1}{(n-1)!},\qquad u_{n+1}=\frac{1}{n!}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\text{ 故爲收斂.}$$

例二.　試驗 $\dfrac{3}{4}+\dfrac{3\cdot5}{4\cdot7}+\cdots\cdots+\dfrac{3\cdot5\cdots\cdots(2n+1)}{4\cdot7\cdots\cdots(3n+1)}+\cdots\cdots$ 之收

斂性.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+1/n}{3+1/n}=\frac{2}{3}<1,$$

故原級數爲收斂.

習　題　二

試驗下列各級數之收斂性:

1. $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{3^n}+\cdots\cdots.$

2. $\frac{1}{e}+\frac{2^{10}}{e^2}+\frac{3^{10}}{e^3}+\cdots\cdots.$

3. $\frac{1}{1}+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots\cdots.$

4. $\frac{1\cdot 3}{3}+\frac{2\cdot 4}{3^2}+\frac{3\cdot 5}{3^3}+\cdots\cdots.$

5. $\frac{1}{2}+\frac{2^2}{1+2^2}+\frac{3^2}{1+3^2}+\cdots\cdots.$

6. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots\cdots.$

§6. 含正負項之級數

定理 1.　設 Σu_n 爲一含正負項之級數，若級數 $\Sigma|u_n|$ 爲收斂，則 Σu_n 亦爲收斂.

若正項或負項之項數爲有限，則此定理甚爲明顯. 茲設正項及負項之數皆爲無窮.

設 $S_n=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n$; $S'_n=|u_1|+|u_2|+\cdots\cdots+|u_n|$. 若 S_n 中有 p 項為正,有 q 項為負,命 P_p 及 $-N_q$ 分別為正項及負項之和,則

$$S_n=P_p-N_q,\quad S'_n=P_p+N_q.$$

由假設 $\lim S'_n=S'$,故 P_p, N_q 二者皆隨項數而增加,但終小於 S'. $\lim P_p=P$, $\lim N_q=N$, $\lim S_n=\lim(P_p-N_q)=P-N$. 故 Σu_n 為收斂.

定理 1. 之逆理為不成立. 蓋當 P_p, N_q 各趨近於無窮大時,S_n 有時亦可趨近於一極限,而 S'_n 則否也.

收斂級數之負項皆變為正項後仍為收斂者,曰**絕對收斂**(absolute convergence);否則曰**條件收斂**(conditional convergence).

正負項相間之級數曰**交替級數**(alternating series).

定理 2. 若交替級數各項之絕對值小於其前一項之絕對值,且第 n 項之極限為零者,則為收斂級數.

設交替級數為 $S=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots\cdots$, a_1, a_2, $\cdots\cdots$ 皆為正. 當 n 為偶數,S_n 可書為

$$S_n=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots\cdots+(a_{n-1}-a_n) \qquad \text{(i)}$$

$$=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\cdots\cdots-(a_{n-2}-a_{n-1})-a_n. \qquad \text{(ii)}$$

由假設 $a_1>a_2>a_3>\cdots\cdots$, (i), (ii) 各括號內皆為正. 由(i)得知當 n 依偶數增加,S_n 亦增加; 由(ii)得知無論如何增加,終必小於 a_1,故 S_n 趨近於一極限 l. 又因 $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$, 及 $a_{n+1}\to 0$, 故 S_{n+1} 亦趨近於此極限 l. 由是當 n 經過 $1, 2, 3, \cdots\cdots$ 趨近於 ∞ 時,$S_n\to l$. 故級數為收斂.

例. $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\cdots\cdots$ 爲絕對收斂級數; $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots$ 爲條件收斂級數.

§7. 冪級數 設 x 爲變數, $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots$ 爲常數, 則

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_n x^n + \cdots\cdots \tag{5}$$

曰冪級數 (power series).

定理. 設冪級數(5)之係數之比 $|a_n/a_{n+1}| \to l$, 則當 $|x| < l$ 時級數爲收斂; 當 $|x| > l$ 時級數爲發散.

蓋由 §5 之推論, 得知正項級數 $|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots\cdots$ 當 $\lim|a_{n+1}x^{n+1}/a_nx^n| < 1$ 時, 即當 $|x| < \lim|a_n/a_{n+1}|$ 時級數爲收斂.

吾人亦可證當 $|x| > \lim|a_n/a_{n+1}|$ 時級數爲發散.

l 稱爲級數之**收斂限**(limit of convergence), $(-l, l)$ 曰級數之**收斂節**(interval of convergence). 當 $x=-l$ 及 l 時, 級數可能爲收斂, 可能爲發散.

例一. 級數 $1+x+\frac{x}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$.

因 $$\lim|a_n/a_{n+1}| = \lim(n+1) = \infty,$$

故當 x 爲任何實值時級數皆爲收斂.

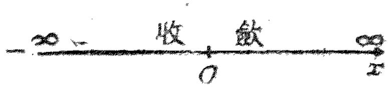

圖 89.

例二.　級數 $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots$.

因　$$\lim|a_n/a_{n+1}|=\lim(n+1)/n=1,$$

故級數之收斂節為$(-1,1)$.

當 $x=1$,　$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\cdots$ 為收斂級數.

當 $x=-1$,　$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots\cdots$ 為發散級數.

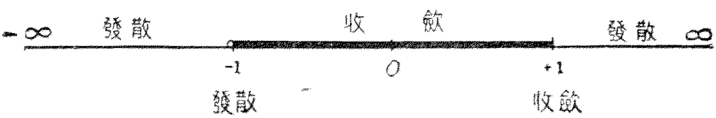

圖 90.

習　題　三

試檢驗下列各級數之收斂性:

1. $1-\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}-\frac{4}{3^3}+\cdots\cdots$.　　2. $\frac{e^2}{2}-\frac{e^3}{3}+\frac{e^4}{4}-\cdots\cdots$.

3. $\frac{\pi}{3}-2\left(\frac{\pi}{3}\right)^2+3\left(\frac{\pi}{3}\right)^3-\cdots\cdots$.

4. $\frac{1}{1-c}+\frac{1}{1-2c}+\frac{1}{1-3c}+\cdots\cdots$.

試求下列各級數之收斂限:

1. $1+2x+3x^3+4x^4+\cdots\cdots$.

2. $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots$.

3. $3x+\frac{(3x)^2}{2}+\frac{(3x)^3}{3}+\cdots\cdots.$

4. $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3^2\cdot 2^2}+\frac{x^3}{5^2\cdot 2^3}+\frac{x^4}{7^2\cdot 2^4}+\cdots\cdots.$

5. $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots.$ 6. $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots.$

7. $1+x+2!\,x^2+3!\,x^3+\cdots\cdots.$

8. $1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots.$

9. $(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\cdots\cdots.$

10. $2(x-2)+\frac{3(x-2)^2}{2!}+\frac{4(x-2)^3}{3!}+\cdots\cdots.$

§8. 冪級數所定之函數 冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 當 x 爲其收斂節 $(-l,l)$ 內之任一値時，皆有一定之和，故在其收斂節內爲 x 之函數，由是可書

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots,\quad |x|<l.$$

反之，一函數有時可表爲 x 或 $x-a$ 之冪級數，而此表示法僅在收斂節內爲有效. 例如當 $|x|<1$,

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots\cdots.$$

可表爲冪級數之函數曰解析函數(analytic function).

吾人可證下之定理:

定理. 在收斂節內，x 之冪級數爲 x 之連續函數.

§9. 級數之積分法與微分法

定理 1.　若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$x_1$ 爲收歛節 $(-l,l)$ 內之一點，則

$$\int_0^{x_1}f(x)=a_0x_1+a_1\frac{x_1^2}{2}+\cdots\cdots+a_{n-1}\frac{x_1^n}{n}+\cdots\cdots \tag{6}$$

卽可逐項求其積分.

蓋　$$f(x)=S_n(x)+R_n(x).$$

若 ϵ 爲任何小之正數，則可選取 n 爲相當大，當 x 爲 $(0,x_1)$ 內之任何值時，$|R_n(x)|<\epsilon$. 因

$$\int_0^{x_1}f(x)dx=a_0x_1+a_1\frac{x_1^2}{2}+\cdots\cdots+a_{n-1}\frac{x_1^n}{n}+\int_0^{x_1}R_n(x)dx,$$

而 $\int_0^{x_1}R_n(x)dx\to 0$，故得(6)式.

定理 2.　若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，則在收歛節 $(-l,l)$ 內，

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots\cdots \tag{7}$$

卽可逐項求其導微函數.

蓋若 $|a_n/a_{n+1}|\to l$，則因 $n/(n+1)\to 1$，$|na_n/(n+1)a_{n+1}|\to l$. 若 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$ 之收歛節爲 $(-l,l)$，則 $a_1+2a_2x+\cdots\cdots$ 之收歛節亦爲 $(-l,l)$，故當 $|x|<l$，

$$\int_0^x\left[a_1+2a_2x+\cdots\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots\cdots\right]dx$$
$$=a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots.$$

故　$$\frac{d}{dx}\left[a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots\right]$$
$$=a_1+2a_2x+\cdots\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots\cdots;$$

即當 $|x|<l$，吾人可逐項求 $f(x)$ 之導微函數.

§10. **對數級數**　因

$$\log(1+x)=\int_0^x \frac{dx}{1+x},$$

但

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x}=\int_0^x (1-x+x^2-\cdots\cdots)\,dx$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots,\quad |x|<1,$$

故當 $|x|<1$，

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots, \tag{8}$$

此曰**對數級數**(logarithmic series). 此級數僅當 $|x|<1$ 時爲代表 $\log(1+x)$，並收斂遲緩；計算對數，當另創其他級數.

因

$$\log\frac{1+x}{1-x}=\log(1+x)-\log(1-x)$$

$$=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right],$$

令 $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{n+1}{n}$，則 $x=1/(2n+1)$，故

$$\log(n+1)=\log n+2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^3}+\cdots\cdots\right]. \tag{9}$$

(9)可爲計算對數之用. 例如因 $\log 1=0$，故

$$\log 2=2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5}\frac{1}{3^5}+\cdots\cdots\right]=0.6931\cdots\cdots;$$

$$\log 3=\log 2+2\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\frac{1}{5^3}+\cdots\cdots\right]=1.0986\cdots\cdots;$$

餘類推.

§11. 二項級數　由§5之法得證級數

$$f(x)=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots$$

當$|x|<1$爲收斂. 茲證$f(x)=(1+x)^m$.

當$|x|<1$,

$$f'(x)=m\left[1+\frac{m-1}{1}x+\frac{(m-1)(m-2)}{2!}x^2+\cdots\cdots\right].$$

乘以x,並與此相加,

$$f'(x)(1+x)=mf(x),$$

即

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{m}{1+x}.$$

$$\int_0^x \frac{f'(x)}{f(x)}dx=m\int_0^x \frac{dx}{1+x}.$$

$$\therefore\quad \log f(x)=\log(1+x)^m.$$

$$\therefore\quad f(x)=(1+x)^m.$$

故當m爲實值,並$|x|<1$,

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\cdots,\qquad(10)$$

此曰二項級數(binormal series).

習　題　四

試證以下諸關係:

1. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\dfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots\cdots,\ |x|<1.$

2. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4+\dfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^6+\cdots\cdots,\ |x|<1.$

3. $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2\cdot4}x^2+\dfrac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3-\cdots\cdots,\ |x|<1.$

4. $\sqrt{1-x^2}=1-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2\cdot4}x^4-\dfrac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^6-\cdots\cdots,\ |x|<1.$

5. 由 $\tan^{-1}x=\displaystyle\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}$，試證

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots,\ |x|<1.$$

6. 由 $\sin^{-1}x=\displaystyle\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$，並由 2. 題，試證

$$\sin^{-1}x=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots\cdots,\ |x|<1.$$

7. 由 $\sin^{-1}(1/2)=\pi/6$，試證 $\pi=3.14159$.

8. 由 $\sqrt{17}=4(1+1/16)^{1/2}$，試求 $\sqrt{17}$ 至小數第四位.

9. 設 $K=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$，此積分不能用初等方法求之，曰第一類完全橢圓積分(complete elliptic integral of the first kind)．試證

$$K=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2k^6+\cdots\cdots\right].$$

10. 設橢圓之方程式為$x=a\cos\phi$, $y=b\sin\phi$,則由第十章,(25)式,橢圓圓周之長為

$$s=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}\,d\phi,\qquad e=\sqrt{a^2-b^2}/a.$$

命
$$E=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}\,d\phi,$$

此積分亦不能用初等方法求之,此曰第二類完全橢圓積分.試證

$$E=\frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2e^2-\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\frac{e^4}{3}-\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\frac{e^6}{5}-\cdots\cdots\right].$$

§12. 戴勞定理 茲研究函數在某種條件之下可以展開為冪級數.

引理 若$f(x)$在(a,b)內之各點皆有導微函數,且$f(a)=f(b)=0$,則在(a,b)至少有一值x_1,而$f'(x_1)=0$.

若$f(x)$於(a,b)內各點皆為0,則此引理顯能成立.

若$f(x)$於(a,b)內不為常數,因於(a,b)內各點皆有導微函數,故必為連續.因$f(a)=f(b)=0$,則$f(x)$必至少有一次先升而後降或先降而後升,亦必至少經過一極大點或極小點.設此極大點或極小點之橫坐標為x_1,則$f'(x_1)=0$.

此引理曰樂爾定理(Rolle's theorem).讀者試用樂爾定理以證中值定理(第八章,習題一,15.題).

中值定理之推廣 設$f(x)$在(a,b)內有有限之n級導微函數,則於(a,b)內必至少有一值x_1,而

$$f(b)-f(a)=f'(a)\frac{(b-a)}{1!}+f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!}$$

$$+\cdots\cdots+f^{(n-1)}(a)\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$+f^{(n)}(x_1)\frac{(b-a)^n}{n!}. \qquad (11)$$

蓋若命 K 爲一常數而適合於方程式

$$f(b)-f(a)-f'(a)\frac{b-a}{1!}-f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!}-\cdots\cdots$$

$$-f^{(n-1)}(a)\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}-K\frac{(b-a)^n}{n!}=0.$$

若能證得 $K=f^{(n)}(x_1)$, $a<x_1<b$，則定理成立.

令 a 爲 x，並命

$$F(x)=f(b)-f(x)-f'(x)\frac{b-x}{1!}-\cdots\cdots$$

$$-f^{(n-1)}(x)\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}-K\frac{(b-x)^n}{n!}.$$

因 $F(a)=0$, $F(b)=0$，由引理，在 (a,b) 內必有一值 x_1，而 $F'(x_1)=0$.
因

$$F'(x)=-f^{(n)}(x)\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}+K\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!},$$

令 $F'(x_1)=0$，得 $K=f^{(n)}(x_1)$.

於(11)式中，令 b 爲 x，則得

$$f(x)=f(a)+f'(a)\frac{x-a}{1!}+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots\cdots$$

$$+f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}+R_n,$$

此處
$$R_n=f^{(n)}(x_1)\frac{(x-a)^n}{n!},\quad a<x_1<x. \tag{12}$$

(12)曰戴勞定理(Taylor's theorem)，R_n 曰餘項(remainder)。

因 x_1 爲在(a,x)之間，可書爲

$$x_1=a+\theta(x-a),\quad 0<\theta<1,$$

故
$$R_n=f^{(n)}[a+\theta(x-a)]\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

若將 x 軸之原點移至 a，卽令 a 爲 0，則(12)變爲

$$f(x)=f(0)+f'(0)\frac{x}{1!}+f''(0)\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots$$
$$+f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+R_n,$$

此處
$$R_n=f^{(n)}(\theta x)\frac{x^n}{n!}. \tag{13}$$

(13)曰馬克勞凌定理(Maclaurin's theorem)。

§13. 戴勞級數　若在(12)式中當 n 爲任何有限值時 $f^{(n)}(x)$ 於(a,b)內皆爲有限，且當 $n\to\infty$ 時 $R_n\to 0$，則

$$f(x)=f(a)+f'(a)\frac{x-a}{1!}+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots\cdots$$
$$+f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}+\cdots\cdots, \tag{14}$$

(14)曰戴勞級數(Taylor's series)。故若 $f(x)$ 於(a,b)內有各級之導微函數，且 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$，則在$(a,b)$內戴勞級數(14)爲收斂，並代表 $f(x)$.

同樣，若 $f(x)$ 於$(0,b)$內有各級之導微函數，並 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$，則在

$(0,b)$內，

$$f(x)=f(0)+f'(0)\frac{x}{1!}+f''(0)\frac{x^2}{2!}$$

$$+\cdots\cdots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots. \qquad (15)$$

(15)曰馬克勞凌級數(Maclaurin's series).

注意戴勞級數與馬克勞凌級數分別爲 $x-a$ 與 x 之冪級數.

例一. 設 $f(x)=e^x$，因 $f^{(n)}(x)=e^x$，當 x 及 n 爲任何值時皆爲有限，

$$f^{(n)}(\theta x)\frac{x^n}{n!}=e^{\theta x}\frac{x^n}{n!}\to 0,$$

蓋 $e^{\theta x}$ 爲有限，$x^n/n!$ 爲收斂級數(§5，例一)之第 n 項，$x^n/n!\to 0$. 故由(15)式，

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots, \quad |x|<\infty. \qquad (16)$$

例二. 設 $f(x)=\sin x$，$f'(x)=\cos x=\sin(x+\pi/2)$，故 $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$. 故

$$f^{(n)}(\theta x)\frac{x^n}{n!}=\sin\left(\theta x+n\frac{\pi}{2}\right)\frac{x^n}{n!}\to 0.$$

由(15)式，得

$$\sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots, \quad |x|<\infty. \qquad (17)$$

此曰正弦級數(sine series).

同樣，可得餘弦級數(cosine series)爲

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\cdots, \quad |x| < \infty. \tag{18}$$

三角函數表卽藉(17),(18)二級數製成.

§ 14. 級數之運算　函數 $f(x)$ 是否可以展開爲羃級數(14)或(15),須視 R_n 是否爲趨近於零而定.但在實際應用方面,欲證明一函數之 R_n 是否爲零,頗爲不易,故有時藉下列之定理以求函數之級數,至此諸定理之證明從略.

若當 $|x| < l$,
$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots\cdots,$$
$$\phi(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots\cdots,$$

則當 $|x| < l$,

$$f(x) + \phi(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots\cdots, \tag{19}$$

$$f(x) \cdot \phi(x) = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + \cdots\cdots. \tag{20}$$

例如求將 $f(x) = (1+x)^{-3}(1+2x)^{-1}$ 展爲級數.

因
$$(1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + \cdots\cdots, \quad |x| < 1,$$
$$(1+2x)^{-1} = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \cdots\cdots, \quad |x| < 1/2,$$
$$\therefore \quad f(x) = 1 - 5x + 16x^2 - 42x^3 + \cdots\cdots, \quad |x| < 1/2.$$

習　題　五

試將下列諸函數展爲馬克勞凌級數,並求其收斂限:

1. $\log(1 - 3x + 2x^2)$.　　2. $\cos^{1/2}x$.

3. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \sin x \cdot \cos^{-1}x$.　　4. $1/e^x$.

5. $\sin x\cos x$. 6. $e^x\sin x$.

7. $\csc x-\cot x$. 8. $\sinh x$.

§15. 函數之近似值 由(13)式,若令

$$f(x)=f(0)+f'(0)\frac{x}{1!}+f''(0)\frac{x^2}{2!}$$

$$+\cdots\cdots+f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \qquad (21)$$

則其誤差之絕對值 $\leqq M_n\frac{|x^n|}{n!}$,此處 M_n 爲 $|f^{(n)}(x)|$ 在 $(0,b)$ 中之最大值.令

$$f(x)=f(0)+f'(0)x,\text{ 此爲一級近似值;}$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2!},\text{ 此爲二級近似值;}$$

餘類推.

例一. 設 $f(x)=(1-x)^{1/2}$.由馬克勞凌級數展開至第三項,

$$(1-x)^{1/2}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}.$$

設 x 之值爲在 $(0,1/4)$ 之內,求其誤差.因

$$f'''(x)=-\frac{3}{8}(1-x)^{-5/2},$$

$$\therefore\quad M_3=\frac{3}{8}\left(\frac{4}{3}\right)^{5/2}=0.7698.$$

$\therefore$ 誤差之絕對值 $<0.7698/(6\cdot4^3)=0.002005$.

在幾何方面言之,n 愈大,

$$y=f(0)+f'(0)x+\cdots\cdots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$$

所表之曲線愈與 $y=f(x)$ 之曲線接近(在收斂限內).

例二. 設 $f(x)=\tan^{-1}x$. 由馬克勞凌級數展開,

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots\cdots,$$

$$|x|<1.$$

一級近似值為

$$y=f_1(x)=x;$$

二級近似值為

$$y=f_2(x)=x-\frac{x^3}{3};$$

三級近似值為

$$y=f_3(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

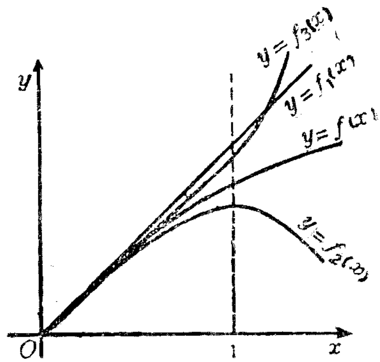

圖 91.

各級之圖形如圖 91 所示.

§16. 函數增量之近似值 由(11)式,令 a 為 x, b 為 $x+\Delta x$. 因 $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$, 故若令

$$\Delta f(x)=f'(x)\Delta x+f''(x)\frac{(\Delta x)^2}{2!}+\cdots\cdots$$

$$+f^{(n-1)}(x)\frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{22}$$

則誤差之絕對值 $|E|\leqq M_n(\Delta x)^n/n!$, M_n 為 $|f^{(n)}(x)|$ 在 $(x, x+\Delta x)$ 中之最大值. 由是

$$\Delta f(x)=f'(x)\Delta x, \qquad |E|\leqq M_2\frac{(\Delta x)^2}{2!}; \tag{23}$$

$$\Delta f(x)=f'(x)\Delta x+f''(x)\frac{(\Delta x)^2}{2!},\quad |E|\leqq M_3\frac{(\Delta x)^3}{3!};\qquad (24)$$

………………………………………………………………………………

例. 當 x 自 45° 變至 46°，試求 $\tan x$ 之增值.

因　$\tan(x+\Delta x)-\tan x=\sec^2 x\cdot\Delta x+\sec^2 x\tan x(\Delta x)^2+\cdots\cdots.$

在此 $\tan x=\tan 45^\circ, \Delta x=1^\circ=0.01745$ 弳.

取一級近似值

$$\Delta\tan 45^\circ=\tan 46^\circ-\tan 45^\circ=2(0.01745)=0.0349;$$

取二級近似值

$$\Delta\tan 45^\circ=\tan 46^\circ-\tan 45^\circ=0.0349+2(0.01745)^2$$

$$=0.0349+0.0006=0.0355.$$

故由二級近似值，

$$\tan 46^\circ=1.0355,$$

此結果精確至小數第四位.

§17. 比例部分法　設已知 $\log 5$ 與 $\log 6$ 之値，求 $\log 5.5$，恆用比例部分法.

設 $f(x)$ 爲一函數，a 與 $a+h$ 爲表中所列 x 之相隣二值，$f(a)$，$f(a+h)$ 爲相應之函數値. 設 $a+th$，$(0<t<1)$ 爲在 $(a, a+h)$ 中之一値，由 $f(a)$，$f(a+h)$ 以求 $f(a+th)$. 用比例部分法，

$$\frac{f(a+th)-f(a)}{f(a+h)-f(a)}=\frac{th}{h},$$

或
$$f(a+th)=f(a)+t[f(a+h)-f(a)].\qquad (25)$$

例如已知 $\sqrt{2.1460}=1.46492321$，$\sqrt{2.1470}=1.46526448$，求 $\sqrt{2.1469}$.

在此 $a=2.1460,\quad h=2.1470-2.1460=0.001.$

$$th=2.1469-2.1460=0.0009,\qquad t=0.9.$$

$$f(a)=1.46492321,\quad f(a+h)=1.46526448.$$

由(25),

$$f(a+th)=\sqrt{2.1469}=1.46492321+0.9\times0.00034127$$
$$=1.46523035.$$

茲求用比例部分法所得之結果之誤差.

由(25),用比例部分法所得 $f(a+th)$ 之值爲 $f(a)+t[f(a+h)-f(a)]$. 設眞值爲 $f(a+th)$,則

$$\text{誤差}=f(a+th)-f(a)-t[f(a+h)-f(a)]=\phi(h).\qquad(\text{設})$$

$$\phi'(h)=t[f'(a+th)-f'(a+h)].$$

由中值定理,

$$\phi'(h)=-t\cdot f''(x_1)(h-th),\quad a+th<x_1<a+h.$$

$$\therefore\quad |\phi(h)|=\left|\int_0^h\phi'(h)\,dh\right|=|f''(x_1)|\left|\int_0^h t(h-th)\,dh\right|$$
$$=\frac{h^2}{2}\left|t-t^2\right|\left|f''(x_1)\right|\leqq\frac{h^2}{2}|t-t^2|\cdot M_2,$$

此處 M_2 爲 $f''(x)$ 在 $(a,a+h)$ 中之最大值. 因當 $t=\dfrac{1}{2}$ 時, $|t-t^2|$ 爲最大,故得

$$\text{誤差之絕對值}\leqq\frac{h^2}{8}M_2.\qquad(26)$$

習 題 六

1. 設 $y=\dfrac{1}{x}$,求 Δy 之一級,二級近似值,並其誤差.

2. 求 $\Delta \log x$ 之一級,二級近似值,並其誤差.

3. 求 $\Delta \sin x$ 之一級,二級近似值,並其誤差.

4. $\log_{10} 397 = 2.5988$, $\log_{10} 398 = 2.5999$. 試用比例部分法求 $\log_{10} 397.465$,並其誤差.

5. 由(25)式, $f(a+th) = f(a) + thf'(a) + \dfrac{th^2}{2} f''(x_1)$, $a < x_1 < a+h$. 由戴勞定理, $f(a+th) = f(a) + thf'(a) + \dfrac{t^2h^2}{2} f''(x_2)$, $a < x_2 < a+th$, 由是以證用比例部分法所得之誤差為

$$[f''(x_1)t - f''(x_2)t^2]h^2/2.$$

設 A, B 為曲線 $y = f(x)$ 上其橫坐標為 a 及 $a+h$ 之二點. P, Q 為 AB 弧及 AB 弦上其橫坐標為 $a+th$ 之相應點,試證以上之誤差等於 PQ 之長.

第 十 三 章

一級微分方程式

§1. **微分方程式** 含有導微函數或微分之方程式曰**微分方程式**(differential equation).例如

1. $x\frac{dy}{dx}-y=0$ 或 $xdy-ydx=0$,

2. $\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+5y=e^x$,

3. $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+3y=0$, 4. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$

等皆係微分方程式.

方程式中含偏導微函數者曰**偏微分方程式**(partial differential equation);否則曰**常微分方程式**(ordinary differential equation).

微分方程式中所含導微函數之最高級曰該方程式之級(order);如上述 1., 3., 4. 諸式爲一級, 2. 式爲二級. 當方程式經整理後,對其所含之導微函數爲有理整式時,其中最高級導微函數之次曰該方程式之次(degree);如 1., 2., 4. 諸式爲一次, 3. 式爲二次.

§2. **微分方程式之解** 設

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

爲一微分方程式；x 之任何函數 y，$y=\phi(x)$ 或 $f(x,y)=0$ 其能適合於此微分方程式者，曰此微分方程式之解(solution).

例如 $y=a\cos x$ 能適合於 $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$，故爲此方程式之解．設 C_1，C_2 爲二任意常數，讀者可示 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$ 亦爲 $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ 之解.

由是求微分方程式之解卽爲求微分方程式之積分．二級方程式須求積分兩次，故其解含二任意常數．由此類推，n 級方程式之解應含 n 個任意常數.[註]方程式之解，含任意常數之個數等於方程式之級者，曰通解(general solution)．由給任意常數以特殊之値而得之解，曰特解(particular solution)．如 $y=\cos x$，$y=2\cos x+\sin x$ 等爲 $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ 之特解.

已知通解反求微分方程式，可由求導微函數，然後用代數方法消去任意常數而得．例如已知通解

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x},$$

求微分方程式，此處 C_1，C_2 爲任意常數.

求導微函數兩次，

$$\frac{dy}{dx}=-C_1e^{-x}+2C_2e^{2x}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=C_1e^{-x}+4C_2e^{2x}.$$

[註] 嚴密之證明，頗爲不易．見 Goursat-Hedrick: Mathematical Analysis, Vol. II, Part II, Ch. II, I. 及本章習題一，12.題.

由此二式中消去 C_1, C_2，得所求之微分方程式爲

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-2y=0.$$

微分方程式之通解可由求積分而得者，曰**可積分方程式**（integrable equation）. 無論可積分或不可積分之方程式，在一般皆有一解，可藉戴勞級數以證之.

習　題　一

試證以下左端各函數爲右端微分方程式之解：

1. $xy=C,$　　$y\,dx+x\,dy=0.$

2. $(x-C)^2+y^2=r^2,$　　$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=r^2.$

3. $x^2-xy+2Cx+C^2=0,$　　$x\frac{dy}{dx}+y=2\sqrt{xy}.$

4. $y=C_1e^x+C_2e^{2x},$　　$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=0.$

5. $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt,$　　$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0.$

試求以下列各函數爲通解之微分方程式：

6. $y=Cx+\sqrt{1-C^2}.$　　7. $y=C_1x^2+C_2.$

8. $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x.$　　9. $x^2+y^2=C^2.$

10. $y^2=4C(x+C).$　　11. $y=\sin(x+C).$

12. 假定 $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{dy}{dx}$ 之解可書爲

$$y=a_0+a_1x+a_2\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+a_n\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$$

之形，試由代入上之微分方程式中以證 $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots$ 僅有三個爲獨立，亦卽此微分方程式之解僅能含有三個任意常數.

I. 一級一次微分方程式

§3. 變數可以分離者 一級一次微分方程式爲具下形

$$\frac{dy}{dx}=F(x,y), \tag{1}$$

或

$$M\,dx+N\,dy=0. \tag{1'}$$

若 M 僅爲 x 之函數，N 僅爲 y 之函數，則此式之解爲

$$\int M\,dx+\int N\,dy=C. \tag{2}$$

例. 試解 $xy\,dx-(1+x^2)dy=0.$

以 $y(1+x^2)$ 徧除，

$$\frac{x}{1+x^2}dx-\frac{dy}{y}=0.$$

求積分，

$$\frac{1}{2}\log(1+x^2)-\log y=C,$$

卽

$$\log\frac{\sqrt{1+x^2}}{y}=C.$$

令 $e^C=C_1$，則通解可書爲

$$\sqrt{1+x^2}=C_1y.$$

§4. 齊次方程式 若 M, N 各爲 x, y 之齊次函數並爲同次者，則

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}=F\left(\frac{y}{x}\right).$$

令 $v=y/x$，則

$$y=vx,\quad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}.$$

於是微分方程式變爲下形

$$v-F(v)+x\frac{dv}{dx}=0.$$

分離變數並求積分，得通解爲

$$\int\frac{dv}{v-F(v)}+\int\frac{dx}{x}=C_1,\ \text{即}\ x=Ce^{\int\frac{dv}{f(v)-v}}.\tag{3}$$

例. 試解 $2xy\,dx+(y^2-x^2)dy=0$.

令 $y=vx$，並化簡，

$$\frac{dx}{x}+\frac{v^2-1}{v^3+v}dv=0.$$

求積分，
$$\log x-\log v+\log(v^2+1)=C_1,$$

即
$$(v^2+1)x/v=C.$$

令 $v=y/x$，得通解爲

$$x^2+y^2=Cy.$$

§5. 可化爲齊次型之方程式 若方程式之形爲

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0,$$

設 $a_1/a_2\neq b_1/b_2$，則可將坐標軸平移，以直線

$$a_1x+b_1y+c_1=0\quad\text{與}\quad a_2x+b_2y+c_2=0$$

之交點爲新原點，使方程式變爲齊次.

例. 試解 $(y-x+1)dx+(y+x+5)dy=0$.

在此 $y-x+1=0$ 與 $y+x+5=0$ 二直線之交點爲 $(-2,-3)$.

令 $x=x'-2, y=y'-3$，則變換後之方程式爲

$$(y'-x')dx'=(y'+x')dy'.$$

此爲齊次方程式，其解爲

$$\log(y'^2+x'^2)+2\tan^{-1}\frac{y'}{x'}+C=0,$$

即
$$\log[(y+3)^2+(x+2)^2]+2\tan^{-1}\frac{y+3}{x+2}+C=0.$$

若 $a_1/a_2=b_1/b_2$，則二直線爲平行，以上之變換失敗．但此時變數可由令

$$v=a_1x+b_1y, \quad dy=(dv-a_1dx)/b_1$$

以分離之．蓋若令 $a_1/a_2=b_1/b_2=1/k$，則原式變爲

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+[k(a_1x+b_1y)+c_2]dy=0,$$

即
$$b_1(v+c_1)dx+(kv+c_2)(dv-a_1dx)=0.$$

變數可以分離矣．

習 題 二

試解下列各方程式：

1. $xy\,dx+\sqrt{1+x^2}\,dy=0.$　　2. $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0.$

3. $\cos x\sin y\,dx+\sin x\cos y\,dy=0.$

4. $\dfrac{dy}{dx}=x^3y^2.$　　5. $y\,dx-x\,dy=xy\,dx.$

6. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+y^2}{2x^2}.$

7. $(2x^2y+3y^3)dx-(x^3+2xy^2)dy=0.$

8. $x\dfrac{dy}{dx}+y=2\sqrt{xy}$.

9. $(4x+3y-1)dx+(x+y+1)dy=0$.

10. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x+1}{y-x+5}$.

§6. 積分因式 設 $M\,dx+N\,dy=0$ 之通解為

$$u(x,y)=C,$$

則
$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=0.$$

試與原方程式比較,得

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{M}=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{N}.$$

命此比為 $\mu(x,y)$,則

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mu M,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\mu N.$$

由是
$$\mu(M\,dx+N\,dy)\equiv du. \tag{4}$$

(4)之左端為 u 之微分,此謂之**恰當微分** (exact differential). 若微分方程式(1′)之左端為一恰當微分者,曰**恰當微分方程式** (exact differential equation). 若(1′)之左端乘以一因式 $\mu(x,y)$ 而成為恰當微分者,則 μ 曰**積分因式**(integrating factor). (1′)之解即相當於 $\mu(M\,dx+N\,dy)=0$ 之解. 故通解為 $u=C$.

例一. 試解 $x\,dy-y\,dx=0$.

因
$$\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=d\left(\frac{y}{x}\right),$$

故 $1/x^2$ 爲積分因式,而原方程式之解爲

$$y/x=C \quad 或 \quad y=Cx.$$

例二. 試解 $(3x^2y-y)dx+(3x^3+x)dy=0$.

原式可書爲

$$3x^2(y\,dx+x\,dy)+(x\,dy-y\,dx)=0.$$

乘以 $1/x^2$,

$$3(y\,dx+x\,dy)+\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=0,$$

即
$$3d(xy)+d\left(\frac{y}{x}\right)=0.$$

故通解爲
$$3xy+\frac{y}{x}=C.$$

§7. 微分方程式爲恰當之條件

定理 $M\,dx+N\,dy=0$ 爲恰當微分方程式之條件爲

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}; \tag{5}$$

逆定理亦成立.

1° 若 $M\,dx+N\,dy=0$ 爲恰當微分方程式,則必有一函數 $u(x,y)$ 存在,而

$$M\,dx+N\,dy\equiv du\equiv\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

$$\therefore\quad M=\frac{\partial u}{\partial x},\quad N=\frac{\partial u}{\partial y}.$$

故
$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

2° 反之，若(5)式爲成立，則吾人將可求得一函數 $u(x,y)$，而

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M \quad 及 \quad \frac{\partial u}{\partial y}=N. \tag{i}$$

欲(i)之第一式成立，必須

$$u=\int M\,dx+C(y), \tag{ii}$$

此處 $\int M\,dx$ 係視 y 爲常數對 x 求積分，$C(y)$ 爲 y 之函數. 欲 u 適合於(i)之第二式，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx+\frac{dC}{dy}=N,$$

$$\therefore\quad \frac{dC}{dy}=N-\frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx. \tag{iii}$$

因 C 僅爲 y 之函數，必 $N-\frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx$ 亦然，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx\right]=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\int M\,dx$$

$$=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=0,$$

卽 $N-\frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx$ 不爲 x 之函數而僅爲 y 之函數.

故由(ii)與(iii)，

$$u=\int M\,dx+\int\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx\right]dy. \tag{6}$$

故逆定理亦成立.

§8. 恰當微分方程式之解法　由(6)式，則方程式 $M\,dx+N\,dy$

$=0$ 之解爲

$$\int M\,dx+\int\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx\right]dy=C. \tag{7}$$

例. 試解 $\frac{2xy+1}{y}dx+\frac{y-x}{y^2}dy=0.$

在此 $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy+1}{y}\right)=-\frac{1}{y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y-x}{y^2}\right).$$

故原式爲恰當微分方程式.

由(7)式,

$$\int M\,dx=\int\frac{2xy+1}{y}dx=x^2+\frac{x}{y}.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+\frac{x}{y}\right)=-\frac{x}{y^2}.$$

$$N-\frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx=\frac{y-x}{y^2}+\frac{x}{y^2}=\frac{1}{y}.$$

$$\int\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx\right]dy=\log y.$$

故通解爲

$$x^2+\frac{x}{y}+\log y=C.$$

習 題 三

試解下列各方程式:

1. $(6x+2y+4)dx+(2x-2y+8)dy=0.$

2. $(2xy-y^3)dx+(x^2-3xy^2)dy=0.$

3．$2xy^3dx+\dfrac{3x^2y^3+1}{y}dy=0.$

4．$\dfrac{dx}{\sqrt{xy}}+\left(\dfrac{2}{y}-\sqrt{\dfrac{x}{y^3}}\right)dy=0.$

5．$\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0.$

6．設 μ 爲 $M\,dx+N\,dy=0$ 之一積分因式，則 $\mu(M\,dx+N\,dy)\equiv du$，於是 $\mu F(u)$ 亦爲一積分因式，此處 $F(u)$ 爲任一函數，惟其積分 $\phi(u)$ 爲已知者．試證之．

7．若 $M\,dx+N\,dy=0$ 爲齊次方程式，則 $\dfrac{1}{xM+yN}$ 爲一積分因式．試證之〔由第十一章，§5，(13)式〕．

§9．一級線性微分方程式 設 P,Q 爲 x 之函數，則

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q \tag{8}$$

曰一級線性微分方程式(linear differential equation)．

(8)式可書爲

$$(Py-Q)dx+dy=0.$$

假定此式有一積分因式 $\mu(x)$，則

$$\mu(Py-Q)dx+\mu\,dy=0$$

爲恰當微分方程式．因恰當之條件爲 $\partial M/\partial y=\partial N/\partial x$，此處

$$M=\mu Py-\mu Q,\quad N=\mu,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\mu P,\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{d\mu}{dx}.$$

故若 $$\mu P=\frac{d\mu}{dx} \quad 或 \quad \frac{d\mu}{\mu}=P\,dx,$$

則方程式爲恰當.解此方程式,得$\mu=Ce^{\int P\,dx}$.令$C=1$,則得積分因式$\mu=e^{\int P\,dx}$.因

$$\frac{d}{dx}\left[ye^{\int P\,dx}\right]=\left(\frac{dy}{dx}+Py\right)e^{\int P\,dx},$$

故(8)式之兩端乘以$e^{\int P\,dx}$,並求積分,則得通解爲

$$ye^{\int P\,dx}=\int Qe^{\int P\,dx}dx+C. \qquad (9)$$

例. 試解 $\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=x^3$.

在此 $$\int P\,dx=\int\frac{2}{x}\,dx=\log x^2.$$

$$\therefore \quad e^{\int P\,dx}=e^{\log x^2}=x^2.$$

由(9),通解爲

$$yx^2=\int x^5\,dx+C=\frac{x^6}{6}+C,$$

即 $$y=\frac{x^4}{6}+\frac{C}{x^2}.$$

方程式 $$\frac{dy}{dx}+Py=Qy^k \qquad (10)$$

曰拔努里方程式(Bernoulli's equation),此處P,Q爲x之函數,k爲任何實數.

除以y^k,並令$y^{-k+1}=v$,於是$(1-k)y^{-k}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$,(10)式變爲

線性方程式:

$$\frac{dv}{dx}+(1-k)Pv=(1-k)Q. \tag{11}$$

此可依公式(9)而解之.

習　題　四

試解下列各方程式:

1. $\dfrac{dy}{dx}=x+y.$

2. $x\dfrac{dy}{dx}+(1+x)y=e^x.$

3. $(x^2+1)y'-xy=1.$

4. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}.$

5. $3(1+x^2)y'+2xy=2xy^4.$

6. $xy'-y\log y=x^2y.$

7. $dy+(ax+by+c)dx=0.$

8. $\dfrac{d}{dx}\phi(y)+P\phi(y)=Q.$

9. $y\,dx-(3x+y^4)dy=0.$　〔以 y 爲自變數〕

10. $x\cos y\dfrac{dy}{dx}+(x+1)\sin y=e^x.$

§10. 應用　微分方程式於幾何及物理上之應用甚大,茲舉關於幾何上之數例.

例一. 求一組曲線,使每曲線上各點之切線,與自切點至原點之聯接線及 x 軸成等邊三角形,而以 x 軸爲底邊.

因切線之方位角之正切爲 $\dfrac{dy}{dx}$,而切點至原點之聯接線與 x 軸之斜角之正切爲 y/x,因三角形爲二等邊,故

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x},\quad \text{即}\quad x\,dy+y\,dx=0.$$

解之,得　　　　$xy=C.$

此為一族正雙曲線.

若吾人欲經過(2,1)點之曲線,則 $2\cdot1=C$, 故 $xy=2$,此為一特解.特解所適合之條件,曰**邊界條件**(boundary condition).

例二.　一曲線與一組曲線皆成正交者，則此組曲線曰該曲線之**正交曲線**(orthogonal trajectories).同樣一組曲線與另一組曲線成正交.設一組曲線之方程式為 $\phi(x,y,c)=0$,其相當之微分方程式為 $f\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0$,則因正交曲線之斜度互為負倒數,故正交曲線之微分方程式為 $f\left(x,y,-\frac{dx}{dy}\right)=0$.求曲線族 $cy^2=x^3$ 之正交曲線族.

在此,曲線族之微分方程式為

$$\frac{2}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{3}{x}.$$

故所求之正交曲線族之微分方程式為

$$-\frac{2}{y}\frac{dx}{dy}=\frac{3}{x}.$$

解之,得一族相似且在相似位置之橢圓

$$2x^2+3y^2=C_1.$$

習　題　五

1. 試求以下各曲線族之正交曲線族:

(a) $xy=c,$　　　　(b) $x^2+y^2=c,$

(c) $x^2-y^2-cx=0$, (d) $y^m=cx^n$.

2. 當 λ 變動時，方程式 $\frac{x^2}{c}+\frac{y^2}{c-\lambda}=1$ 代表二族圓錐曲線. 試證此二族圓錐曲線爲自成正交.

3. 求一族曲線其法線之長爲等於其 x 截距.

4. 求一族曲線其次法線爲常數.

5. 求一族曲線其在 $x=a$ 與 $x=x$ 間之弧長爲 k 倍於此弧與 x 軸所包之面積.

II. 一級高次微分方程式

特殊之一級高次微分方程式可以無須無窮級數而解之. 爲簡單計，令 $\frac{dy}{dx}=p$. 此特殊方程式共分三類:

(一) 方程式可就 p 解出者;

(二) 方程式可就 y 解出者;

(三) 方程式可就 x 解出者.

玆分别論之.

§11. 方程式可就 p 解出者 設方程式 $F(x,y,p)=0$ 可用代數方法就 p 解爲 x,y:

$$p=\phi_1(x,y),\ p=\phi_2(x,y),\ \cdots\cdots,\ p=\phi_n(x,y).$$

若此方程式之解爲

$$f_1(x,y,C)=0,\ f_2(x,y,C)=0,\ \cdots\cdots,\ f_n(x,y,C)=0,$$

則 $F(x,y,p)=0$ 之通解爲

$$f_1(x,y,C)\cdot f_2(x,y,C)\cdots\cdots f_n(x,y,C)=0. \qquad (12)$$

蓋(12)式左端爲零，卽表示其中某因式爲零；而令該因式爲零，卽得 $p=\phi_i(x,y)$, $i=1,2,\cdots\cdots,n$ 中之一方程式之解，故爲 $F(x,y,p)=0$ 之解。

例. 試解 $p^2+(x+y)p+xy=0$.

在此
$$(p+x)(p+y)=0.$$
令
$$p+x=0 \quad 及 \quad p+y=0,$$
得解
$$2y+x^2=C \quad 及 \quad y=Ce^{-x}.$$

故原式之通解爲
$$(2y+x^2-C)(y-Ce^{-x})=0.$$

習　題　六

試解：

1. $p^2+p-2=0$.
2. $xp^2-2yp+x=0$.
3. $x+yp^2=p(1+xy)$.
4. $xp^2-(x^2-y)p-xy=0$.
5. $(2xp-y)^2=8x^3$.
6. $y^2p^2-2xyp+2y^2-x^2=0$.

§ 12. 方程式可就 y 解出者 若方程式可就 y 以代數方法解出者，則可分解爲一組含一個或多個之方程式如下形：
$$y=\psi(x,p). \tag{i}$$
對 x 求導微函數，
$$p=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial p}\frac{dp}{dx}.$$
此式不含 y 而爲 p 之一級方程式，設其解爲
$$\phi(x,p)=C. \tag{ii}$$

於(i),(ii)中消去 p,設爲

$$f(x,y,C)=0, \tag{iii}$$

此即 i)式之通解. 有時 p 不易消去,則(i),(ii)可視爲通解之表爲參數式者,p 爲參數.

例. 試解 $3p^5-py+1=0$.

就 y 解之, $$y=3p^4+p^{-1}.$$

$$\therefore\quad p=12p^3\frac{dp}{dx}-p^{-2}\frac{dp}{dx},$$

即 $$dx=(12p^2-p^{-3})dp.$$

求積分, $$x=4p^3+\frac{1}{2}p^{-2}+C.$$

故原方程式之通解爲

$$\begin{cases} x=4p^3+\frac{1}{2}p^{-2}+C, \\ y=3p^4+p^{-1}. \end{cases}$$

§ 13. **方程式可就 x 解出者** 若方程式可就 x 解出者,與上節同法,對 y 求導微函數而解之.

例. 試解 $p^2+py-x=0$.

就 x 解之, $$x=py+p^2.$$

對 y 求導微函數,並以 $\frac{1}{p}$ 代 $\frac{dx}{dy}$,得

$$\frac{1}{p}=p+(2p+y)\frac{dp}{dy},$$

即 $$\frac{dy}{dp}-\frac{p}{1-p^2}y=\frac{2p^2}{1-p}.$$

其解爲 $$y(1-p^2)^{\frac{1}{2}}=\sin^{-1}p-p\sqrt{1-p^2}+C.$$

故原方程式之通解爲

$$x=py+p^2,$$

$$y=(1-p^2)^{-\frac{1}{2}}(\sin^{-1}p-p\sqrt{1-p^2}+C).$$

習題七

試解:

1. $xp^2-2p-x=0$.
2. $y+xp=x^4p^2$.
3. $x+yp(2p^2+3)=0$.
4. $p^2-py+x=0$.
5. $y=x+p^3$.
6. $p^3+p=e^y$.
7. $2yp^3-3xp+2y=0$.
8. $4xp^2+2xp-y=0$.

§14. **克雷勞方程式** 具

$$y=px+f(p) \tag{13}$$

形之方程式曰克雷勞方程式(Clairaut equation).

用§12之法,對 x 求導徵函數,得

$$[x+f'(p)]\frac{dp}{dx}=0.$$

因 $x+f'(p)$ 不含 dp/dx,其與組成(13)之通解無關,由是

$$\frac{dp}{dx}=0, \quad 即 \quad p=C.$$

與(13)消去 p,得(13)之通解爲

$$y=Cx+f(C). \tag{14}$$

故克雷勞方程式之通解，卽爲於方程式中之 p 易以常數 C 而得.

由(13)，得知凡具

$$F(y-px,p)=0 \tag{15}$$

形之方程式，皆爲克雷勞方程式.

例如 $(xp-y)^2=p^2+1$，此爲克雷勞式，其通解爲

$$(Cx-y)^2=C^2+1.$$

§15. **異解** 設 $F(x,y,p)=0$ 爲所與之二次或高次方程式，並設 $f(x,y,C)=0$ 爲其通解. 則此微分方程式或其通解所表之一族曲線，有時有一包線，其方程式爲 $\phi(x,y)=0$. 因包線上之每點皆與曲線族中之一曲線相切，故包線上每點 (x,y) 之斜度爲與曲線族中某一曲線於此點之斜度相等，是以適合於 $F(x,y,p)=0$. 由是 $\phi(x,y)=0$ 爲微分方程式之解. 此曰異解 (singular solution)；蓋其非在通解中給 C 以特殊之値而得者.

因包線之方程式可由

$$\left.\begin{aligned} &f(x,y,C)=0 \\ &\frac{\partial f}{\partial C}=0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

中消去 C 而得，故由(16)中消去 C 所得之方程式

$$\phi_C(x,y)=0 \tag{17}$$

曰 $F=0$ 或 $f=0$ 之 C 判別式 (C-discriminant).

例一. 求 $y=p^2$ 之異解.

此方程式之通解爲

$$4y=(x-C)^2.$$

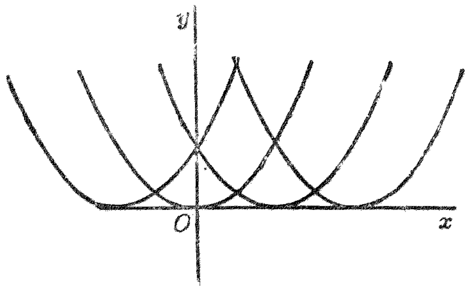

圖 92.

故 $$\phi_C(x,y)\equiv 4y=0.$$

$$\therefore\quad y=0.$$

因 $y=0$ 能適合於原方程式,故爲異解.

注意因 $\phi_C(x,y)=0$ 有時不僅含有包線,且有其他軌跡,故所得之結果須代入原方程式中驗證之.

若通解爲 C 之二次方程式 $AC^2+BC+D=0$, A,B,D 爲 x,y 之函數,則易知

$$\phi_C(x,y)\equiv B^2-4AC=0. \tag{18}$$

設微分方程式 $F(x,y,p)=0$ 有一包線爲 $\phi(x,y)=0$,則在包線上之任一點,$F(x,y,p)=0$ 所與之 p 有二值爲相等.但若 $p=p_1$ 爲 $F(x,y,p)=0$ 之等根,則亦必爲 $\frac{\partial F}{\partial p}=0$ 之根.故包線上之點適合於

$$\left.\begin{aligned}&F(x,y,p)=0\\&\frac{\partial F}{\partial p}=0\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

設 $$\phi_p(x,y)=0 \tag{20}$$

爲由(19)中消去 p 所得之方程式，則(20)亦應爲包線之方程式，此曰 p 判別式.

但 p 判別式中有時亦含有其他軌跡，故所得之結果應代入原方程式中驗其是否適合.

若微分方程式之形狀爲 $Lp^2+Mp+N=0$, L,M,N 爲 x,y 之函數，則 p 判別式顯然爲

$$\phi_p(x,y)\equiv M^2-4LN=0. \tag{21}$$

例二. 求 $y^2p^2+y^2-r^2=0$ 之異解.

在此，由(21)式，

$$\phi_p(x,y)\equiv y^2(x^2-r^2)=0.$$

因 $y=0$ 不適合於原方程式，不爲異解. $y=\pm r$ 能適合於原方程式，故爲異解.

注意若判別式中含有表包線之因式，則此因式應同時存在於 C 及 p 判別式中，且爲同次.

例三. 方程式 $p^2(2-3y)^2=4(1-y)$ 之通解爲

$$(x-C)^2=y^2(1-y).$$

$$\phi_C(x,y)\equiv y^2(1-y)=0.$$

$$\phi_p(x,y)\equiv(2-3y)^2(1-y)=0.$$

此處 $1-y=0$ 在 ϕ_C 與 ϕ_p 中皆爲存在，並皆爲一次. 令 $y=1$ 代入原方程式中能適合，故爲一異解.

習題八

試求下列各方程式之通解與異解.

1. $y=p^2x+p^3$.

2. $4p^2-9x=0$.

3. $p^2-y^2-1=0$.

4. $xp^2-2yp+x=0$.

5. $yp^2-2xp+y=0$.

6. $4xp^2-(3x-1)^2=0$.

7. 試證克雷勞方程式有一異解.

8. 試求以 $x^2+y^2+2Cx+2C^2-1=0$ 爲通解之微分方程式,求此微分方程式之異解,並作其圖形.

第十四章

高級線性微分方程式

I. 常係數線性微分方程式

§1. 線性方程式 n 級微分方程式，若其對 y 及其導微函數為一次者，曰線性微分方程式. 此類方程式之一般形式為

$$\frac{d^n y}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots\cdots+X_{n-1}\frac{dy}{dx}+X_n y=X, \tag{1}$$

此處 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n, X$ 表 x 之函數或常數.

以 $D, D^2, \cdots\cdots, D^n$ 等代表 $\frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}, \cdots\cdots, \frac{d^n}{dx^n}$，以 $f(D)$ 代表 $D^n+X_1D^{n-1}+\cdots\cdots+X_n$，並命 $f(D)y$ 表 $f(D)$ 對 y 運算之結果. 則(1)可書為下形:

$$(D^n+X_1D^{n-1}+\cdots\cdots+X_{n-1}D+X_n)y=X,$$

即

$$f(D)y=X. \tag{2}$$

令(2)之右端為 0 所得之方程式

$$f(D)y=0 \tag{3}$$

曰(2)之補助方程式(auxiliary equation).

若 $y=c_1y_1$, $y=c_2y_2$ 為(3)之解，此處 y_1, y_2 為 x 之函數，c_1, c_2 為常數，則

$$f(D)[c_1y_1+c_2y_2]\equiv c_1f(D)y_1+c_2f(D)y_2\equiv 0.$$

由是推廣,得

定理 1. 若 $y_1,y_2,\cdots\cdots,y_n$ 爲(3)之 n 個線性獨立之特解,即不能有 n 個不皆爲 0 之常數 $A_1,A_2,\cdots\cdots,A_n$ 存在,而有關係[註]

$$A_1y_1+A_2y_2+\cdots\cdots+A_ny_n\equiv 0,$$

則(3)之通解爲

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots\cdots+c_ny_n, \tag{4}$$

此處 $c_1,c_2,\cdots\cdots,c_n$ 爲任意常數.

若 $y_1,y_2,\cdots\cdots,y_n$ 爲線性相倚,則(4)不爲(3)之通解. 蓋若

$$A_1y_1+A_2y_2+\cdots\cdots+A_ny_n\equiv 0,$$

則若 $A_n\neq 0$,

$$y_n\equiv-\left(\frac{A_1}{A_n}y_1+\frac{A_2}{A_n}y_2+\cdots\cdots+\frac{A_{n-1}}{A_n}y_{n-1}\right),$$

而(4)化爲

$$y=\left(c_1-\frac{A_1}{A_n}c_n\right)y_1+\cdots\cdots+\left(c_{n-1}-\frac{A_{n-1}}{A_n}c_n\right)y_{n-1}.$$

其中僅含 $n-1$ 個常數爲獨立矣,故不爲通解.

(4)曰(1)之**補函數**(complementary function).

定理 2. 若 $y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots\cdots+c_ny_n$ 爲(1)之補函數,並若 $y=Y$ 表(1)之一特解,則(1)之通解爲

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots\cdots+c_ny_n+Y. \tag{5}$$

[註] 若 $y_1,y_2,\cdots\cdots,y_n$ 有關係 $A_1y_1+A_2y_2+\cdots\cdots+A_ny_n\equiv 0$, $A_1,A_2,\cdots\cdots,A_n$ 不皆爲零,則 $y_1,y_2,\cdots\cdots,y_n$ 曰成線性相倚(linearly dependent).

蓋 $$f(D)[c_1y_1+\cdots\cdots+c_ny_n+Y]$$
$$=f(D)[c_1y_1+\cdots\cdots+c_ny_n]+f(D)Y$$
$$=0+X=X.$$

不幸在一般無法可以求得(5)式.但若(1)之係數 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ 爲常數 $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$ 時,則方程式

$$(D^n+b_1D^{n-1}+\cdots\cdots+b_{n-1}D+b_n)y=X \tag{6}$$

爲可解.欲解此方程式當先求補函數,次求一特解,然後其通解爲(5)式.(6)曰**常係數線性方程式**(linear equation with constant coefficients).

§2. 常係數方程式 $f(D)=0$ 設

$$f(D)\equiv D^n+b_1D^{n-1}+\cdots\cdots+b_{n-1}D+b_n, \tag{7}$$

此處 $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$ 爲常數.

設 $f(D)=0$ 之根爲 $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_n$,則

$$f(D)\equiv(D-m_1)(D-m_2)\cdots\cdots(D-m_n),$$

即 $$f(D)y\equiv(D-m_1)(D-m_2)\cdots\cdots(D-m_n)y. \tag{8}$$

(8)之右端係表示先 $D-m_n$ 對 y 運算,次 $D-m_{n-1}$ 對第一次所得之結果運算,餘類推.例如

$$f(D)y\equiv(D^2+b_1D+b_2)y\equiv(D-m_1)(D-m_2)y$$
$$\equiv(D-m_1)(Dy-m_2y)$$
$$\equiv D^2y-(m_1+m_2)Dy+m_1m_2y.$$

茲就 $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_n$ 之情形分三節論之:

[1] **當 $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_n$ 皆爲不等之實數**

$(D-m_i)y=0$ 之解即爲 $f(D)y=0$ 之一解;蓋若 $y=y_1$ 爲其解,

則 $$f(D)y_1=\phi(D)(D-m_i)y_1=\phi(D)\cdot 0=0.$$

但 $(D-m_i)y=0$ 之解,即 $\frac{dy}{dx}-m_iy=0$ 之解,爲

$$ye^{-\int m_i dx}=c_i,\quad 或\quad y=c_ie^{m_ix}.$$

故由§1,定理1,若 $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_n$ 爲不等之實根,則 $f(D)y=0$ 之通解爲

$$y=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}+\cdots\cdots+c_ne^{m_nx}. \tag{9}$$

例一. $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=0.$

在此 $$f(D)\equiv D^2-3D+2\equiv(D-1)(D-2),$$

$$\therefore\quad m_1=1,\quad m_2=2.$$

故通解爲 $$y=c_1e^x+c_2e^{2x}.$$

[II] **當 $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_n$ 有相等者** 因

$$(D-a)e^{ax}\phi(x)=e^{ax}\phi'(x),$$

$$(D-a)^2e^{ax}\phi(x)=e^{ax}\phi''(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$(D-a)^re^{ax}\phi(x)=e^{ax}\phi^{(r)}(x).$$

假定 $m_1=m_2=\cdots\cdots=m_r=a$,並設

$$\phi(x)\equiv c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots\cdots+c_rx^{r-1},$$

此處 $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_r$ 爲常數.於是因 $\phi^{(r)}(x)\equiv 0$,

$$(D-a)^re^{ax}\phi(x)=e^{ax}\phi^{(r)}(x)=0.$$

$$\therefore\quad y=e^{ax}\phi(x),$$

亦即$(D-a)^r y=0$之通解為

$$y=e^{ax}(c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots\cdots+c_rx^{r-1}).$$

故$f(D)y=(D-a)^r(D-m_{r+1})\cdots\cdots(D-m_r)=0$之通解為

$$y=e^{ax}(c_1+c_2x+\cdots\cdots+c_rx^{r-1})+c_{r+1}e^{m_{r+1}x}$$

$$+\cdots\cdots+c_ne^{m_nx}. \qquad (10)$$

例二. $\dfrac{d^3y}{dx^3}-3\dfrac{dy}{dx}+2y=0.$

在此 $(D^3-3D+2)y=(D-1)^2(D+2)y=0,$

$$\therefore\quad m_1=m_2=1,\ m_3=-2.$$

故由(10)通解為

$$y=e^x(c_1+c_2x)+c_3e^{-2x}.$$

[111] **當$m_1,m_2,\cdots\cdots,m_n$有為複數者** 因$f(D)=0$之係數為實數，故若$f(D)y=0$有一根為$\alpha+i\beta$，則必另有一根為$\alpha-i\beta$.設$m_1=\alpha+i\beta,m_2=\alpha-i\beta$，則補函數之兩項為

$$c_1e^{(\alpha+i\beta)x}+c_2e^{(\alpha-i\beta)x},$$

即 $$e^{\alpha x}(c_1e^{i\beta x}+c_2e^{-i\beta x}).$$

因 $$e^{i\beta x}=\cos\beta x+i\sin\beta x,$$

$$e^{-i\beta x}=\cos\beta x-i\sin\beta x,$$

上式可書為

$$e^{\alpha x}[(c_1+c_2)\cos\beta x+i(c_1-c_2)\sin\beta x],$$

亦可書為 $$e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x), \qquad (11)$$

此處 $A=c_1+c_2, B=i(c_1-c_2)$.

故若 $f(D)=0$ 有二複根 $\alpha+i\beta, \alpha-i\beta$，則補函數中相當於此二複根之項爲(11)式.

若 $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_n$ 中有相等之複根，設 $m_1=m_3=\alpha+i\beta$, $m_2=m_4=\alpha-i\beta$，則補函數中相當於此四根之四項爲

$$e^{(\alpha+i\beta)x}(c_1+c_3x)+e^{(\alpha-i\beta)x}(c_2+c_4x),$$

即可書爲下形

$$e^{\alpha x}[(A_1+A_2x)\cos\beta x+(B_1+B_2x)\sin\beta x]. \tag{12}$$

若重根 r 次，可依此類推.

例三. $\dfrac{d^3y}{dx^3}-8y=0$.

由 $D^3-8=0$，得 $m_1=2, m_2=-1+i\sqrt{3}, m_3=-1-i\sqrt{3}$，故通解爲

$$y=c_1e^{2x}+e^{-x}(c_2\cos\sqrt{3}x+c_3\sin\sqrt{3}x).$$

習 題 一

試解下列各方程式:

1. $\dfrac{d^3y}{dx^3}-\dfrac{dy}{dx}=0$.
2. $\dfrac{d^3y}{dx^3}-2\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}+2y=0$.
3. $(4D^3-3D+1)y=0$.
4. $(D^3-D^2-D+1)y=0$.
5. $(D^2+2)y=0$.
6. $(D^2-6D+25)y=0$.
7. $D^2(2D-1)(D+1)^3y=0$.

8. $a\frac{d^2y}{dx^2}-(a^2+1)\frac{dy}{dx}+ay=0.$

9. $(D^4-D^2)y=0.$ 10. $(D^4+2D^2+1)y=0.$

§3. **求 $f(D)y=X$ 之特解** 設 $1/f(D)$ 表 $f(D)$ 之反運算，於是

$$f(D)\left[\frac{1}{f(D)}X\right]=X.$$

故 $f(D)y=X$ 可表爲 $y=\frac{1}{f(D)}X$，卽

$$y=\frac{1}{D-m_1}\cdot\frac{1}{D-m_2}\cdots\cdots\frac{1}{D-m_n}X.$$

茲先求 $\frac{1}{D-m_n}X$. 令 $z=\frac{1}{D-m_n}X$，則

$$(D-m_n)z=X.$$

$$\therefore\quad z=e^{m_nx}\int e^{-m_nx}X\,dx.$$

此處無須加積分常數，蓋吾人所求者係特解.

由是

$$\frac{1}{D-m_{n-1}}\cdot\frac{1}{D-m_n}X=\frac{1}{D-m_{n-1}}z$$

$$=e^{m_{n-1}x}\int e^{-m_{n-1}x}z\,dx$$

$$=e^{m_{n-1}x}\int e^{-m_{n-1}x}\left[e^{m_nx}\int e^{-m_nx}X\,dx\right]dx$$

$$=e^{m_{n-1}x}\int e^{(-m_{n-1}+m_n)x}\int e^{-m_nx}X\,(dx)^2.$$

由此推廣，得 $f(D)y=X$ 之特解爲

$$Y=e^{m_1x}\int e^{(-m_1+m_2)x}\int\cdots\cdots$$

$$\int e^{(-m_{n-1}+m_n)x}\int e^{-m_nx}X(dx)^n. \quad (13)$$

於是通解爲(5)式.

例. $\dfrac{d^3y}{dx^3}-\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}=e^{-x}$.

在此 $f(D)=0$ 之根爲 $0, -1, 2$，故補函數爲

$$y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}.$$

$$Y=e^{2x}\int e^{(-1-2)x}\int e^{(0+1)x}\int e^{-x}(dx)^3=e^{2x}\int e^{-3x}\int e^x(-e^{-x})(dx)^2$$

$$=-e^{2x}\int e^{-3x}\left[\int dx\right]dx=\frac{1}{3}xe^{-x}+\frac{1}{9}e^{-x}.$$

因 e^{-x} 已見於補函數中，不必再用，故通解爲

$$y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+\frac{1}{3}xe^{-x}.$$

習 題 二

求下列各方程式之通解:

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+2y=e^{e^x}$.　　2. $(D+3)^2y=50e^{2x}$.

3. $(D^3+4D^2+4D)y=8e^{-2x}$.　　4. $(D^2+3D+2)y=\cos 2x$.

5. $(D^2+8D+25)y=48\cos x-16\sin x$.

6. $(D^4-6D^3+9D^2)y=54x+18$.

7. $(D^2-6D+13)y=8e^{3x}\sin 2x$.

8. $(D-1)^2y=\dfrac{e^x}{(1-x)^2}$.

9. 設由部分分式法，

$$\frac{1}{(D-m_1)\cdots\cdots(D-m_n)}\equiv\frac{A_1}{D-m_1}+\frac{A_2}{D-m_2}+\cdots\cdots+\frac{A_n}{D-m_n}.$$

試證 $f(D)y=X$ 之特解可書爲

$$Y=A_1e^{m_1x}\int e^{-m_1x}X\,dx+A_2e^{m_2x}\int e^{-m_2x}X\,dx+\cdots\cdots+A_ne^{m_nx}\int e^{-m_nx}X\,dx.$$

又有等根時之情形如何?

10. 若 $(D-a)u=0$, $(D-a)v=u$, 及 $(D-a)y=v$, 試迭求 u,v, 與 y; 於是解方程式 $(D-a)^3y=0$.

§4. 參數度變法 玆述一種求 $f(D)y=X$ 之特解法，曰參數度變法(variation of parameters)。此法爲由補函數以求特解. 玆舉一例以明之。

例. 試解 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=\sec x$.

此式可書爲

$$D^2y+y=\sec x. \tag{i}$$

補助方程式之根爲 $m_1=i$, $m_2=-i$; 故補函數爲

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x. \tag{ii}$$

試以 C_1, C_2 爲 x 之函數，使(2)爲(1)之通解.

求(ii)之導微函數，

$$Dy=-C_1\sin x+C_2\cos x+\cos x\frac{dC_1}{dx}+\sin x\frac{dC_2}{dx}.$$

假定 C_1, C_2 爲適合於

$$\cos x\frac{dC_1}{dx}+\sin x\frac{dC_2}{dx}=0, \tag{iii}$$

則

$$Dy=-C_1\sin x+C_2\cos x. \tag{iv}$$

求(iv)之導微函數，

$$D^2y=-C_1\cos x-C_2\sin x-\sin x\frac{dC_1}{dx}+\cos x\frac{dC_2}{dx}. \tag{v}$$

將(ii)與(v)代入(1)中，得

$$-\sin x\frac{dC_1}{dx}+\cos x\frac{dC_2}{dx}=\sec x. \tag{vi}$$

故若 C_1, C_2 適合於(iii)與(iv)，則(ii)將適合於(i).

由(iii)與(vi)，

$$\frac{dC_1}{dx}=-\sin x\sec x=-\frac{\sin x}{\cos x},\quad \frac{dC_2}{dx}=1.$$

$$\therefore\quad C_1=\log\cos x+A_1,\qquad C_2=x+A_2.$$

代入(ii)式，得通解爲

$$y=A_1\cos x+A_2\sin x+\cos x\log\cos x+x\sin x.$$

習 題 三

試用上法解:

1. $D^2y+y=\tan x$. 　　2. $(D-1)^2y=\dfrac{e^x}{(1-x)^2}$.

3. $D^3y+Dy=\tan x$. 　　4. $(D^2-2D+1)y=2xe^{2x}-\sin^2 x$.

II. 解高級微分方程式雜法

高級變係數微分方程式無一般之解法已如上述,但特殊之方程式仍可以解之.茲分别述之如次:

§5. 方程式不含 y 者 　若方程式爲不含 y,

$$f(x,y',\cdots\cdots,y^{(n)})=0. \tag{14}$$

令 $y'=p$, 則 $y''=p',\cdots\cdots,y^{(n)}=p^{(n-1)}$, (14)式變爲

$$f(x,p,p',\cdots\cdots,p^{(n-1)})=0,$$

此爲 p 之 $(n-1)$ 級方程式.設此方程式爲可解,其解爲

$$p=\phi(x,c_1,c_2,\cdots\cdots,c_{n-1}).$$

則(14)式之通解爲

$$y=\int\phi\,dx+c_n. \tag{15}$$

例. 　試解 $(1+x^2)y''+1+y'^2=0$.

令 $y'=p$,則上式變爲

$$\frac{dp}{1+p^2}+\frac{dx}{1+x^2}=0.$$

$$\therefore\quad \tan^{-1}p+\tan^{-1}x=c. \qquad 或 \quad p=\frac{c_1-x}{1+c_1x}.$$

求積分,

$$c_1^2y=(c_1^2+1)\log(1+c_1x)-c_1x+c_2,$$

此即原式之通解.

§6. 方程式不含 x 者 若方程式不含 x,

$$f(y, y', \cdots\cdots, y^{(n)})=0. \tag{16}$$

令 $y'=p$,則

$$\left.\begin{aligned} y'' &= \frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy} \\ y''' &= \frac{dy''}{dx}=p^2\frac{d^2p}{dy^2}+p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\}. \tag{17}$$

由此(16)變爲 p 之 $(n-1)$ 級方程式,設其解爲

$$y'=\phi(y, c_1, \cdots\cdots, c_{n-1}).$$

故(16)之通解爲

$$\int\frac{dy}{\phi}=x+c_n. \tag{18}$$

例. 試解 $y\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=1.$

由代換(17),上式化爲

$$yp\frac{dp}{dy}+p^2=1.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{(y^2-c_1)^{1/2}}{y},$$

$$\therefore\quad y^2-(x+c_2)^2=c_1.$$

習 題 四

試解以下各方程式:

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$.　　2. $xy''+(x^2-1)(y'-1)=0$.

3. $y''-xe^x=0$.　　4. $(xy'''-y'')^2=y'''^2+1$.

5. $2y''=e^y$.　　6. $yy''^2+y'^2+1=0$.

§7. 歌西線性方程式 具

$$K_0x^ny^{(n)}+K_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots\cdots$$
$$+K_{n-1}xy'+K_ny=X \tag{19}$$

形之方程式,其中 $K_0, K_1, \cdots\cdots, K_n$ 為常數,X 為 x 之函數,各項呈常數乘 $x^ry^{(r)}$ 之形,此曰**歌西線性方程式**(Cauchy's linear equation).如令 $x=e^u$ 或 $u=\log x$,此類方程式可變為常係數線性方程式.

令 $\mathfrak{D}=\dfrac{d}{du}$,則因 $u=\log x$,

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{du}=\frac{1}{x}\mathfrak{D}y,$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d}{du}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{du}\right)\frac{du}{dx}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{du^2}-\frac{dy}{du}\right)$$
$$=\frac{1}{x^2}\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)y,$$

$$y'''=\frac{dy''}{dx}=\frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{du}\right)$$
$$=\frac{1}{x^3}\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)y,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由此

$$\left.\begin{aligned}
xy' &= \mathfrak{D}y \\
x^2y'' &= \mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)y \\
x^3y''' &= \mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)y \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x^ny^{(n)} &= \mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)\cdots\cdots(\mathfrak{D}-n+1)y
\end{aligned}\right\}. \tag{20}$$

於是(19)式變爲

$$\begin{aligned}
[K_0\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)\cdots\cdots(\mathfrak{D}-n+1) \\
+K_1\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)\cdots\cdots(\mathfrak{D}-n+2) \\
+\cdots\cdots+K_{n-1}\mathfrak{D}+K_n]y=U,
\end{aligned} \tag{21}$$

此爲常係數線性方程式.

例. 解 $x^3y'''+xy'-y=x\log x$.

令 $x=e^u$, 由(20), 上式變爲

$$(\mathfrak{D}^3-3\mathfrak{D}^2+3\mathfrak{D}-1)y=ue^u.$$

故補函數爲

$$y=(c_1+c_2u+c_3u^2)e^u.$$

$$Y=e^u\iiint e^{-u}ue^u(du)^3=e^u\frac{u^4}{24}.$$

$$\therefore\quad y=(c_1+c_2u+c_3u^2)e^u+e^u\frac{u^4}{24},$$

即

$$y=[c_1+c_2\log x+c_3(\log x)^2]x+\frac{x(\log x)^4}{24}.$$

習　題　五

試解:

1. $(x^2D^2+3xD+1)y=\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

2. $x^2D^2y-2xDy+2y=x^3$.

3. $(x^3D^3+2x^2D^2-xD+1)y=\dfrac{1}{x}$.

4. $(x+1)^2y''-4(x+1)y'+6y=x$. [令 $x+1=e^u$].

§8. **存在定理**　微分方程式無論爲可積分或不可積分,在一般皆有解,此曰**存在定理**(existence theorem).

先研究在 xy 平面上之一區域 S 內之方程式

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y).\tag{22}$$

設在此區域內,f 及其偏導微函數爲單值連續實函數,於 S 中取一點 $P(a,b)$, dy/dx 於 P 點之值爲 $f(a,b)$. 再由累次求(22)之導微函數,可得於 P 點 dy^2/dx^2, d^3y/dx^3, ……之值,故(22)與 P 點定一戴勞級數

$$y=b+\left(\frac{dy}{dx}\right)_{a,b}\frac{x-a}{1}+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots\cdots.\tag{23}$$

吾人可證明當 x 之值爲在距 a 之某一距離 l 內之所有值時,此級數爲收斂,並能適合於(22)式,故此級數所定之函數爲(22)之一特解,亦可謂之(22)於 P 點之解.

若在(23)中以任意常數 c 易 b, 則得一具 $y=\phi(x,c)$ 形之方程式,此在以 P 爲心,其邊平行於 Ox, Oy 之某一矩形 R 內爲代表(22)

之通解.再若將坐標軸之原點平移至(a,c),則(23)變爲馬克勞凌級數.足見(22)之解可表爲馬克勞凌級數.

由此方法之推廣,可證一組聯立微分方程式

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx}=f_1(x,y,z,\cdots\cdots,w)\\ &\frac{dz}{dx}=f_2(x,y,z,\cdots\cdots,w)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\frac{dw}{dx}=f_n(x,y,z,\cdots\cdots w)\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

有一解.

至n級微分方程式

$$\frac{d^ny}{dx^n}=F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots\cdots,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right), \tag{25}$$

可由令

$$y_1=\frac{dy}{dx},\ y_2=\frac{d^2y}{dx^2},\ \cdots\cdots,\ y_{n-1}=\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

而變爲一組聯立微分方程式

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx}=y_1\\ &\frac{dy_1}{dx}=y_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\frac{dy_{n-1}}{dx}=F(x,y,y_1,\cdots\cdots,y_n)\end{aligned}\right\}. \tag{26}$$

(26)爲(24)之特例,因(24)有一解,是以(25)有一解.此解表爲

馬克勞凌級數.

§9. **級數解** 根據存在定理,吾人可求微分方程式表爲級數之解.玆舉例明之.

例一. 試解 $\dfrac{dy}{dx}=x+y^2$.

令
$$y=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots\cdots$$
爲試解.代入方程式中,得
$$C_1+2C_2x+3C_3x^2+\cdots\cdots\equiv x+(C_0+C_1x+\cdots\cdots)^2.$$
令相當項之係數相等,得
$$\begin{aligned}
C_1&=C_0^2, & C_1&=C_0^2;\\
2C_2&=2C_0C_1+1, & C_2&=\frac{1}{2}+C_0^3;\\
3C_3&=2C_0C_2+C_1^2, & C_3&=\frac{1}{3}C_0+C_0^4;\\
4C_4&=2C_0C_3+2C_1C_2, & C_4&=\frac{5}{12}C_0^2+C_0^5;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots, & &\cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{aligned}$$
故得通解爲
$$y=C_0+C_0^2x+\left(\frac{1}{2}+C_0^3\right)x^2+\left(\frac{1}{3}C_0+C_0^4\right)x^3+\cdots\cdots.$$

例二. 試解
$$(2x+x^3)\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-6xy=0. \qquad \text{(i)}$$

依照法蠑倍尼司(Frobenius)法,令
$$y=x^C(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots),\quad a_0\neq 0$$

爲試解，此處 $a_0, a_1, \cdots\cdots$ 爲常數.

由是

$$\frac{dy}{dx}=a_0Cx^{C-1}+a_1(C+1)x^C+a_2(C+2)x^{C+1}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=a_0C(C-1)x^{C-2}+a_1(C+1)Cx^{C-1}$$
$$+a_2(C+2)(C+1)x^C+\cdots\cdots.$$

代入(i)中，並令相當項之係數相等，得

x 之最低次項 x^{C-1} 之係數爲

$$a_0[2C(C-1)-C]=0,$$

即
$$C(2C-3)=0. \tag{ii}$$

(ii)曰**指數方程式**(indicial equation).

x^C 之係數爲

$$a_1[2(C+1)C-(C+1)]=0, \quad 即 \quad a_1=0. \tag{iii}$$

x^{C+1} 之係數爲

$$a_2[2(C+2)(C+1)-(C+2)]+a_0[C(C-1)-6]=0,$$

即
$$a_2(2C+1)+a_0(C-3)=0. \tag{iv}$$

同樣
$$a_3(2C+3)+a_1(C-2)=0; \tag{v}$$

$$a_4(2C+5)+a_2(C-1)=0; \tag{vi}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

由(iii)，(v)，……，得

$$a_1=a_3=a_5=\cdots\cdots=a_{2n+1}=0.$$

由(iv),(vi),……,得

$$\frac{a_2}{a_0}=-\frac{C-3}{2C+1},\qquad \frac{a_4}{a_2}=-\frac{C-1}{2C+5},$$

$$\frac{a_6}{a_4}=-\frac{C+1}{2C+9},\qquad \frac{a_{2n}}{a_{2n-2}}=-\frac{C+2n-5}{2C+4n-3}.$$

但由(ii),$C=0$ 或 $\frac{3}{2}$.

命 $C=0$,得

$$y_1=a_0\left[1+3x^2+\frac{3}{5}x^4-\frac{1}{15}x^6+\frac{1}{65}x^8-\cdots\cdots\right]. \tag{vii}$$

命$C=\frac{3}{2}$,得

$$y_2=a_0x^{3/2}\left[1+\frac{3}{8}x^2-\frac{1\cdot 3}{8\cdot 16}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{8\cdot 16\cdot 24}x^6\right.$$
$$\left.-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 9}{8\cdot 16\cdot 24\cdot 32}x^8+\cdots\cdots\right]. \tag{viii}$$

(vii),(viii)之相合卽爲通解.因 a_0 爲任意常數,並在(vii),(viii)中彼此爲獨立,故可命(vii)之 a_0 爲 C_1,(viii)中之 a_0 爲 C_2,由是通解爲

$$y=C_1\left[1+3x^2+\frac{3}{5}x^4-\frac{1}{15}x^6+\cdots\cdots\right]$$
$$+C_2x^{3/2}\left[1+\frac{3}{8}x^2-\frac{1\cdot 3}{8\cdot 16}x^4+\cdots\cdots\right].$$

習題六

試用上法解:

1. $\frac{d^2y}{dx^2}=xy.$

2. $\frac{d^2y}{dx^2}+x^2\frac{dy}{dx}+xy=0.$

3. $4x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=0.$

4. $2x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}+3y=0.$

第十五章

全微分方程式. 微分方程式組.

§1. 可積分全微分方程式 具

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=0 \tag{1}$$

形之微分方程式,曰**全微分方程式**(total differential equation). 若此方程式之解可書

$$u(x,y,z)=C \tag{2}$$

者,則曰**可積分方程式**.

定理. 方程式(1)爲可積分之條件爲

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)$$

$$+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\equiv 0. \tag{3}$$

蓋若(1)爲可積分,卽有一積分因式λ存在,而

$$\lambda(Pdx+Qdy+Rdz)\equiv du\equiv\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

於是

$$\lambda P=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \lambda Q=\frac{\partial u}{\partial y},\quad \lambda R=\frac{\partial u}{\partial z}.$$

故 $\frac{\partial}{\partial y}\lambda P=\frac{\partial}{\partial x}\lambda Q$, 即 $P\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\lambda\frac{\partial P}{\partial y}=Q\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\lambda\frac{\partial Q}{\partial x}$;

$\frac{\partial}{\partial z}\lambda Q=\frac{\partial}{\partial y}\lambda R$, 即 $Q\frac{\partial\lambda}{\partial z}+\lambda\frac{\partial Q}{\partial z}=R\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\lambda\frac{\partial R}{\partial y}$;

$\frac{\partial}{\partial x}\lambda R=\frac{\partial}{\partial z}\lambda P$, 即 $R\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\lambda\frac{\partial R}{\partial x}=P\frac{\partial\lambda}{\partial z}+\lambda\frac{\partial P}{\partial z}$.

分別乘以 R, P, Q,並相加,則得(3).

逆定理. 若(3)之關係成立,則(1)爲可積分.

蓋欲解(1)式,先視 z 爲常數而解

$$P\,dx+Q\,dy=0, \tag{i}$$

設其解爲

$$v(x,y,z)=C(z). \tag{ii}$$

求(ii)之導微函數,

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial z}\right)dz=0. \tag{iii}$$

因(ii)爲(i)之解,則有一積分因式 $\lambda(x,y,z)$ 存在,而

$$\lambda(P\,dx+Q\,dy)=dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy.$$

$$\therefore\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\lambda P,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\lambda Q. \tag{iv}$$

故若 $C(z)$ 適合於

$$\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial z}=\lambda R,$$

即

$$\frac{\partial v}{\partial z}-\lambda R=\frac{\partial C}{\partial z}, \tag{v}$$

則(iii)爲相當於(1).

若吾人能證明當條件(3)成立時，(v)可藉(ii)化爲僅含 C 與 z 之函數，則設(v)之解爲 $C=\phi(z)+C_1$，於是(1)之解爲

$$v(x,y,z)=\phi(z)+C_1, \tag{vi}$$

而吾人之定理爲成立矣.

茲證若(ii)就 y 解爲 x, z, C 之函數，並代入(v)中，則結果僅含 z 與 C 而無 x. 但此只須證明當 x, z, C 視爲自變數，而 y 由(ii)式定爲 $x\ z, C$ 之函數，$\dfrac{\partial v}{\partial z}-\lambda R$ 對 x 之導微函數爲零卽可，亦卽只須證明

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v}{\partial z}-\lambda R\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial v}{\partial z}-\lambda R\right]\frac{\partial y}{\partial x}\equiv 0.$$

由(vi)， $$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=0, \quad \therefore \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Big/\frac{\partial v}{\partial y},$$

卽只須證明

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v}{\partial z}-\lambda R\right]\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial v}{\partial z}-\lambda R\right]\frac{\partial v}{\partial x}\equiv 0. \tag{vii}$$

由(iv)，(vii)之左端爲

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\lambda R\right]\lambda Q-\left[\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\lambda R\right]\lambda P,$$

卽 $$\left[\frac{\partial}{\partial z}\lambda P-\frac{\partial}{\partial x}\lambda R\right]\lambda Q-\left[\frac{\partial}{\partial z}\lambda Q-\frac{\partial}{\partial y}\lambda R\right]\lambda P,$$

卽[註] $$\lambda R\left[\frac{\partial}{\partial y}\lambda P-\frac{\partial}{\partial x}\lambda Q\right],$$

[註] 蓋因

$$\lambda P\left(\frac{\partial}{\partial z}\lambda Q-\frac{\partial}{\partial y}\lambda R\right)+\lambda Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\lambda R-\frac{\partial}{\partial z}\lambda P\right)+\lambda R\left(\frac{\partial}{\partial y}\lambda P-\frac{\partial}{\partial x}\lambda Q\right)\equiv 0.$$

此可由直接展開以證之.

亦卽
$$\lambda R\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}-\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right],$$

故爲恆等於零．定理至此已完成證明．

例． 試解
$$2xzdx+2yz^2dy+(x^2+2y^2z-1)dz=0. \tag{i}$$

此方程式適合於(3)之條件，故爲可積分．

先假定 z 爲常數，
$$2x\,dx+2yz\,dy=0,$$

其解爲
$$x^2+y^2z=C(z). \tag{ii}$$

求(ii)之導微函數，
$$2x\,dx+2yz\,dy+y^2\,dz=dC. \tag{iii}$$

(iii)乘以 z，自(i)中減去，得
$$(x^2+y^2z-1)dz+zdC=0.$$

(ii)化爲
$$(C-1)dz+zdC=0.$$

$$\therefore\quad (C-1)z=C_1,\quad 卽\quad C=C_1/z+1.$$

代入(ii)中，則得(i)之通解爲
$$x^2z+y^2z^2-z=C_1.$$

§2. **不可積分全微分方程式**　若(1)式爲不合於可積分之條件(3)，則吾人可假定一任意關係 $\psi(x,y,z)=0$．用此關係則得一含二個變數之新微分方程式．故通解包含一任意函數 $\psi(x,y,z)=0$ 與一含任意常數之另一方程式．

例． 試解 $y\,dx+x\,dy-(x+y+z)dz=0.$

此方程式爲不可積分．假定 $x+y+z=0$，則方程式變爲

$$y\,dx+x\,dy=0,$$

其解爲
$$xy=C.$$

故原方程式之通解爲

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=0\\ xy&=C \end{aligned}\right\}.$$

若假定 $x+y=0$，則原方程式之通解爲

$$\left.\begin{aligned} x+y&=0\\ 2xy-z^2&=C \end{aligned}\right\}.$$

習　　題　　一

試解：

1．$zy\,dx-zx\,dy-y^2\,dz=0$．　　2．$y^2\,dx+z\,dy-y\,dz=0$．

3．$(x^2-y^2-z^2)dx+2xy\,dy+2xz\,dz=0$．

4．$(y^2z^2-xyz)dx+x^2z\,dy+x^2y\,dz=0$．

5．$y\,dx-x\,dy-x\,dz=0$．

6．$2x\,dx+dy+(2x^2z+2yz+2z^2+1)dz=0$．

7．$y\,dx+(z-y)dy+x\,dz=0$．

8．$x\,dx+y\,dy+C\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}\,dz=0$．

§3．一級方程式組　設一級方程式組爲

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}=\frac{P(x,y,t)}{R(x,y,t)}\\ \frac{dy}{dt}=\frac{Q(x,y,t)}{R(x,y,t)}\end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

或
$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dt}{R}. \tag{5}$$

此類方程式可依以下之三種方法解之:

〔I〕 若(5)之任一對為可解,則由其一得

由其他,得
$$\left.\begin{aligned}u(x,y)=C_1\\ v(x,y)=C_2\end{aligned}\right\}\text{此卽通解.}$$

例. $\dfrac{dx}{yt}=\dfrac{dy}{tx}=\dfrac{dt}{xy}$.

由前二者,得解 $x^2-y^2=C_1$,由後二者,得解 $y^2-t^2=C_2$,故通解爲

$$\left.\begin{aligned}x^2-y^2=C_1\\ y^2-t^2=C_2\end{aligned}\right\}.$$

〔II〕 若(5)中有一對爲可解,設其解爲

$$u(x,y)=C_1,\ \text{或}\ x=\phi(C,y).$$

代入 $\dfrac{dy}{Q}=\dfrac{dt}{R}$ 中,則結果僅含 y 與 t; 設 $v(y,t)=C_2$ 爲其解,則通解爲

$$\left.\begin{aligned}u(x,y)=C_1\\ v(x,y)=C_2\end{aligned}\right\}.$$

例. $\dfrac{dx}{xt}=\dfrac{dy}{yt}=\dfrac{dt}{xy}$.

由前二者，$\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}$，$\therefore x=C_1y$. 代入 $\dfrac{dy}{yt}=\dfrac{dt}{C_1y^2}$ 中，得

$C_1ydy-t\,dt=0$，$\therefore C_1y^2-t^2=C_2$，或 $xy-t^2=C_2$. 故通解爲

$$\left.\begin{array}{r}x-C_1y=0\\ xy-t^2=C_2\end{array}\right\}.$$

[III] 設 λ,μ,ν 可以求得，使

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dt}{R}=\frac{\lambda\,dx+\mu\,dy+\nu\,dt}{\lambda P+\mu Q+\nu R}.$$

(A) 最右端之式有時可以與其餘者配合而爲可解。

例一. $\dfrac{dx}{y}=\dfrac{dy}{x}=\dfrac{dt}{t}$.

(i) 命 $\lambda=1,\mu=1,\nu=0$，

$$\frac{dx+dy}{x+y}=\frac{dt}{t},\qquad \therefore x+y=C_1t.$$

(ii) 命 $\lambda=1,\mu=-1,\nu=0$，

$$\frac{dx-dy}{x-y}=\frac{dt}{t},\qquad \therefore x-y=C_2t.$$

(B) 若 $\lambda P+\mu Q+\nu R\equiv 0$，則必

$$\lambda\,dx+\mu\,dy+\nu\,dt=0.$$

例二. $\dfrac{dx}{cy-bt}=\dfrac{dy}{at-cx}=\dfrac{dt}{bx-ay}$.

設 $\lambda=a,\mu=b,\nu=c$，則 $\lambda P+\mu Q+\nu R\equiv 0$，故

$$a\,dx+b\,dy+c\,dt=0.$$

$$\therefore\quad ax+by+ct=C_1.$$

次設 $\lambda=x,\mu=y,\nu=t$，則 $\lambda P+\mu Q+\nu R\equiv 0$，故

$$x\,dx+y\,dy+t\,dt=0.$$

$$\therefore\quad x^2+y^2+t^2=C_2.$$

故通解爲

$$\left.\begin{aligned}ax+by+ct&=C_1\\x^2+y^2+t^2&=C_2\end{aligned}\right\}.$$

§4. 全微分方程式組　設全微分方程式組爲

$$\left.\begin{aligned}P_1\,dx+Q_1\,dy+R_1\,dz&=0\\P_2\,dx+Q_2\,dy+R_2\,dz&=0\end{aligned}\right\}.$$

由此二式得

$$\frac{dx}{Q_1R_2-Q_2R_1}=\frac{dy}{R_1P_2-R_2P_1}=\frac{dz}{P_1Q_2-P_2Q_1}.$$

此可依 §3 之法而解之.

§5. 線性方程式組　設兩常係數線性微分方程式成聯立，則可依下法解之：

例.　試解

$$\left.\begin{aligned}3\frac{dx}{dt}+3x+2y&=e^t\\4x-3\frac{dy}{dt}+3y&=3t\end{aligned}\right\}.$$

書爲

$$\left.\begin{aligned}3(D+1)x+2y&=e^t\\4x+3(D-1)y&=3t\end{aligned}\right\}.$$

視爲代數聯立方程式，先消去 y，得

$$(9D^2-1)x=6t.$$

解此式，得

$$x=C_1e^{\frac{1}{3}t}+C_2e^{-\frac{1}{3}t}-6t. \tag{i}$$

次消去 x，得解

$$y=-2C_1e^{\frac{1}{3}t}+C_2e^{-\frac{1}{3}t}+9t+9. \tag{ii}$$

(i)，(ii)組成通解.

習　題　二

試解:

1. $\dfrac{dx}{y}=\dfrac{dy}{x}=\dfrac{dt}{t}$.

2. $\dfrac{dx}{y+1}=\dfrac{dy}{x+1}=\dfrac{dt}{t}$.

3. $\dfrac{dx}{x(y-t)}=\dfrac{dy}{y(t-x)}=\dfrac{dt}{t(x-y)}$.

4. $\dfrac{dx}{x^2+y^2+yt}=\dfrac{dy}{x^2+y^2-xt}=\dfrac{dt}{(x+y)t}$.

5. $\dfrac{dx}{xt(xy+t^2)}=\dfrac{dy}{-yt(xy+t^2)}=\dfrac{dt}{x^4}$.

6. $\dfrac{dx}{1}=\dfrac{dy}{-2}=\dfrac{dz}{3x\sin(y+2x)}$.

第十六章[註]

有限差式. 插補法

I. 等差自變數之插補法

§1. 差數表 數學之大部分爲研究對應關係,亦卽研究函數關係. 如 y 與 x 有某種關係,已知 x 與 y 之一組對應値,求當 x 爲另一値時 y 之對應値之法,曰**插補法**(interpolation). 第十二章,§17 所論比例部分法,亦卽插補法之一種也. 本章將先論自變數成等差之插補法,次論自變數不成等差之插補法.

設函數 $f(u)$ 對自變數 u 爲 $a, a+w, a+2w, \cdots\cdots$ 之相應値已載於一已知之表中,玆求 $f(a+xw)$ 之値,此處 x 爲一分數.

吾人先作差數或差式(difference). 以 $\Delta f(a)$ 表

$$f(a+w)-f(a),$$

此曰 $f(a)$ 之**第一級差數**(first difference). 以 $\Delta f(a+w)$ 表

$$f(a+2w)-f(a+w),$$

此曰 $f(a+w)$ 之第一級差數. 再以 $\Delta^2 f(a)$ 表

$$\Delta f(a+w)-\Delta f(a),$$

此曰 $f(a)$ 之**第二級差數**. 同樣以 $\Delta^3 f(a)$ 表

$$\Delta^2 f(a+w)-\Delta^2 f(a),$$

[註] 本章取材於 Whittaker-Robinson: Interpolation 一書.

此曰 $f(a)$ 之第三級差數．餘類推．

爲適宜計，將表値及其差數依自變數增加之次序排列之，此曰**差數表**(difference table)．

自變數	相應値	Δ	Δ^2	Δ^3
a	$f(a)$			
		$\Delta f(a)$		
$a+w$	$f(a+w)$		$\Delta^2 f(a)$	
		$\Delta f(a+w)$		$\Delta^3 f(a)$
$a+2w$	$f(a+2w)$		$\Delta^2 f(a+w)$	
		$\Delta f(a+2w)$		$\Delta^3 f(a+w)$
$a+3w$	$f(a+3w)$		$\Delta^2 f(a+2w)$	
		$\Delta f(a+3w)$		$\Delta^3 f(a+2w)$
$a+4w$	$f(a+4w)$		$\Delta^2 f(a+3w)$	

同樣可作出高於三級之差數．第一相應値 $f(a)$ 曰**首項**(leading term)，而 $\Delta f(a)$，$\Delta^2 f(a)$，……曰**首差**(leading differences)．表中每一差數，可由其左下一項減去上項而得．由此可知每列差數之和爲其前一列中第一差數與最後一差數之差．故有

$$\Delta^2 f(a+3w)=\Delta^2 f(a)+\Delta^3 f(a)+\Delta^3 f(a+w)+\Delta^3 f(a+2w).$$

以下之差數表，表明自 25°40′ 0″ 至 25°43′ 0″ 每相隔 20″ 之角之正弦函數値：

自變數	相應値	Δ	Δ^2	Δ^3
25°40′ 0″	0.433134785866963			
		8739305476		
20″	0.433222179172439		−4073056	
		87389232420		−822
40″	0.433309568404859		−4073878	
		87385158542		−822
25°41′ 0″	0.433396953563401		−4074700	
		87381083842		−820
20″	0.433484334647243		−4075520	
		87377008322		−823
40″	0.433571711655565		−4076343	
		87372931979		−821
25°42′ 0″	0.433659084587544		−4077164	
		87368854815		−821
20″	0.433746453442759		−4077985	
		87364776830		−822
40″	0.433833818219189		−4078807	
		87360698023		
25°43′ 0″	0.433921178917212			

由上表,如略去相應值之小數後第十五位,則 Δ^3 之各項均相等,由是 Δ^4 均爲零.實際上任何相應值至某級差數必均爲零.此乃插補法所建立之基礎也

§2. **符號算子** 若採用一種符號算子(symbolic operator),則計算差數之公式可變爲簡單.吾人已引用 Δ,玆再引用 E.

設函數 $f(a)$ 之自變數相隣兩値之差爲 w.以 E 表自變數增加 w 之運算,於是 $Ef(a)=f(a+w)$;在一般 $E^x f(a)=f(a+xw)$,此處 x 爲一整數.由定義,$\Delta f(a+xw)=f(a+xw+w)-f(a+xw)$,於是

$$\Delta f(a+xw)=(E-1)f(a+xw).$$

故 Δ 與 E 之關係爲

$$E=1+\Delta,\quad 或\quad \Delta=E-1.$$

吾人易證以下之關係式:

$$\Delta[f(a)+f(b)+f(c)+\cdots\cdots]$$
$$=\Delta f(a)+\Delta f(b)+\Delta f(c)+\cdots\cdots;$$
$$\Delta kf(a)=k\Delta f(a),\qquad k 爲常數;$$
$$\Delta^m\Delta^n f(a)=\Delta^{m+n}f(a),\qquad m,n 爲正整數.$$
$$E[f(a)+f(b)+f(c)+\cdots\cdots]$$
$$=Ef(a)+Ef(b)+Ef(c)+\cdots\cdots;$$
$$Ekf(a)=kEf(a);$$
$$E^mE^nf(a)=E^{m+n}f(a).$$

以下爲示此種符號算子之應用.

例一. 用連續相應値以表函數之第 n 級差數.

$$\Delta^n f(a)=(E-1)^n f(a)$$

$$=\left[E^n-nE^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}E^{n-2}-\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^n\right]f(a),$$

即 $$\Delta^n f(a)=f(a+nw)-nf(a+nw-w)$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}f(a+nw-2w)-\cdots\cdots$$

$$+(-1)^n f(a).$$

例二. 用 $f(a)$ 及其各級差數以表函數 $f(a+xw)$,此處 x 為一正整數.

$$f(a+xw)=E^x f(a)=(1+\Delta)^x f(a).$$

於是

$$f(a+xw)=f(a)+xf(a)+\frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 f(a)$$

$$+\cdots\cdots+\Delta^x f(a).$$

§3. 多項式之差數 吾人求得 $y=x^3$ 之差數表如次:

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0	0				
		1			
1	1		6		
		7		6	
2	8		12		0
		19		6	
3	27		18		0
		37		6	
4	64		24		0
		61		6	
5	125		30		
		91			
6	216				

在此 Δ^3 皆為 6, Δ^4 為零. 此乃以後所論者之一特例.

茲研究表相應值之函數 $f(x)$ 爲一 n 次多項式，如：

$$f(x)=Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\cdots\cdots+Lx+M.$$

於是

$$\begin{aligned}\Delta f(a)&=f(a+w)-f(a)\\&=A[(a+w)^n-a^n]+B[(a+w)^{n-1}-a^{n-1}]\\&\qquad+\cdots\cdots+w^?.\end{aligned}$$

因

$$(a+w)^n=a^n+nwa^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}w\,a^{n-2}+\cdots\cdots+w^n,$$

由是

$$\begin{aligned}\Delta f(a)=&A\left[nwa^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}w\,a^{n-2}+\cdots\cdots+w^n\right]\\&+B\left[(n-1)wa^{n-2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}w^2a^{n-3}\right.\\&\qquad\left.+\cdots\cdots+w^{n-1}\right]\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+Lw.\end{aligned}$$

此爲 a 之 $n-1$ 次多項式；故一多項式之第一級差數爲另一多項式，其次數較原多項式小一.

繼續運用此結果，得知

第二級差數爲 $n-2$ 次之多項式；

第三級差數爲 $n-3$ 次之多項式；

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$；

第 n 級差數爲 0 次之多項式，

即第 n 級差數爲常數. 故 n 次多項式之第 $n+1$ 級差數爲零.

§4. $x(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-p+1)$ 之差數 在 p 次多項式中有一多項式於插補法之理論爲特別重要，即多項式

$$x(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-p+1),$$

此多項式以 $[x]^p$ 表之，曰階乘(factorial). 設在 $[x]^p$ 之差數表中自變數之節(interval)為 1，則

$$[a]^p=a(a-1)(a-2)\cdots\cdots(a-p+1),$$

$$[a+1]^p=(a+1)a(a-1)(a-2)\cdots\cdots(a-p+2),$$

$$\begin{aligned}\Delta[a]^p&=[a+1]^p-[a]^p\\&=a(a-1)(a-2)(a-3)\cdots\cdots\\&\qquad(a-p+2)[(a+1)-(a-p+1)]\\&=p[a]^{p-1},\end{aligned}$$

故 $$\Delta[x]^p=p[x]^{p-1}.$$

此與微分學中公式 $\frac{d}{dx}(x^p)=px^{p-1}$ 為相似.

由此得

$$\frac{\Delta[x]^p}{p!}=\frac{[x]^{p-1}}{(p-1)!},\quad \text{即}\quad \frac{[x+1]^p}{p!}=\frac{[x]^p}{p!}+\frac{[x]^{p-1}}{(p-1)!}.$$

此結果可用以計算 $[x]^p/p!$ 之值如下表:

x	$[x]^2/2!$	$[x]^3/3!$	$[x]^4/4!$	$[x]^5/5!$
0				
1	0			
2	1	0		
3	3	1	0	
4	6	4	1	0
5	10	10	5	1
6	15	20	15	6
7	21	35	35	21
8	28	56	70	56
9	36	84	126	126

§5. 以階乘表多項式 在§3中吾人曾求得表 $\Delta f(x)$ 之式，但並不較多項式之本身爲簡單. 玆用

$$\Delta[x]^p = p[x]^{p-1} \tag{1}$$

爲較宜於運算.

設 $\phi_k(x)$ 爲一 k 次多項式. 可書 $\phi_k(x) = r + (x-n+k)\phi_{k-1}(x)$，此處 r 與 $\phi_{k-1}(x)$ 乃爲 $\phi_k(x)$ 被 $(x-n+k)$ 所除得之餘數與商數，故 $\phi_{k-1}(x)$ 爲 $k-1$ 次. 繼續作此變換，得以階乘表 n 次多項式:

$$\begin{aligned}
\phi_n(x) &= \alpha + [x]\phi_{n-1}(x) \\
&= \alpha + \beta[x] + [x]^2\phi_{n-2}(x) \\
&= \alpha + \beta[x] + \gamma[x]^2 + [x]^3\phi_{n-3}(x) \\
&= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \alpha + \beta[x] + \gamma[x]^2 + \cdots\cdots + [x]^n\phi_0(x),
\end{aligned}$$

此處 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots$ 爲常數，$\phi_0(x)$ 亦爲一常數，命爲 ν; 吾人得

$$\phi_n(x) = \alpha + \beta[x] + \gamma[x]^2 + \delta[x]^3 + \cdots\cdots + \nu[x]^n. \tag{2}$$

例. 試用階乘表出函數 $y = x^4 - 12x^3 + 42x^2 - 30x + 9$ 及其各級差數.

以分離係數法，用 $x, x-1, x-2, \cdots\cdots$ 除上式，

$$\begin{array}{r|l|l}
1 & 1-12+42-30 & 9 \\
 & 0+\ \ 1-11+31 & \\
\hline
2 & 1-11+31 & 1 \\
 & 0+\ \ 2-18 & \\
\hline
3 & 1-\ \ 9 & 13 \\
 & 0+\ \ 3 & \\
\hline
 & 1 & -6 \\
\end{array}$$

故 $$y=[x]^4-6[x]^3+13[x]^2+[x]+9,$$

$$\Delta y=4[x]^3-18[x]^2+26[x]+1,$$

$$\Delta^2 y=12[x]^2-36[x]+26,$$

$$\Delta^3 y=24[x]-36,$$

$$\Delta^4 y=24.$$

茲設 a 爲一 n 次多項式之自變數之一表值，w 爲自變數二相隣之值之差，求 $f(a+xw)$ 之值. 命(2)中之 $\phi_n(x)$ 爲 $f(a+xw)$，並以方程式(1)所示之運算應用於(2)之兩端，得

$$\Delta f(a+xw)=\beta+2\gamma[x]^1+3\delta[x]^2+\cdots\cdots+n\nu[x]^{n-1}. \qquad (3)$$

求此方程式之差數，得

$$\Delta^2 f(a+xw)=2\gamma+2\cdot 3\delta[x]^1+3\cdot 4\epsilon[x]^2+\cdots\cdots$$
$$+n(n-1)\nu[x]^{n-2}, \qquad (4)$$

$$\Delta^3 f(a+xw)=2\cdot 3\delta+2\cdot 3\cdot 4\epsilon[x]^1+3\cdot 4\cdot 5\zeta[x]^2$$
$$+\cdots\cdots+n(n-1)(n-2)\nu[x]^{n-3}, \qquad (5)$$

餘類推. 將(2)，(3)，(4)，……中之 x 以零代入以求 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots\cdots$ 之值，得

$$\alpha=f(a), \qquad \beta=\Delta f(a), \qquad \gamma=\frac{1}{2}\Delta^2 f(a),$$

$$\delta=\frac{1}{6}\Delta^3 f(a), \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \qquad \nu=\Delta^n f(a)/n!.$$

故方程式(2)可書爲

$$f(a+xw)=f(a)+x\Delta f(a)+\frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 f(a)+\cdots\cdots$$
$$+\frac{x(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-n+1)}{n!}\Delta^n f(a). \qquad (6)$$

當一函數之差數表爲已知時,公式(6)爲以階乘 x, $x(x-1)$, $x(x-1)(x-2)$, ……表 $f(a+xw)$.

§6. 格里哥來(Gregory)與牛頓(Newton)之插補公式 前節之一般公式可用以解決插補法問題.

設 y 爲 u 之函數. 當 u 爲 $a, a+w, a+2w, a+3w,$ ……等值時, y 在表内之相應値爲 $f(a), f(a+w), f(a+2w), f(a+3w),$ ……; 並假定此諸相應値爲已列入差數表中,而其第 n 級差數爲常數. 但吾人不知當 u 爲其他値時 y 之相應値. 茲求一公式以表此 y 之相應値. 此問題可以圖解說明之如次:

作 Ou, Oy 軸. 設 $K, L, M, N,$ ……爲 Ou 上其橫坐標爲 $a, a+w, a+2w, a+3w,$ ……之點. 再在此諸點上取縱坐標 $KA, LB, MC, ND,$ ……分別等於 $f(a), f(a+w), f(a+2w), f(a+3w),$ ……. 於是如此所定之點皆在函數之曲線上. 求經過 $A, B, C, D,$ ……諸點之平滑曲線無一定之解; 實際上經過此諸點可作無窮數之曲線. 因吾人之目的在於實用,是以選取一最簡單者. 但最簡單之函數爲多項式,故吾人欲求一曲線經過 $A, B, C, D,$ ……等點而爲一 n 次多項式之圖形.

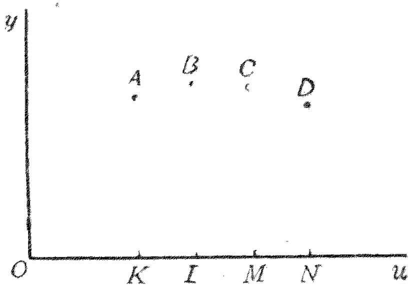

圖 93.

在§3已知任意 n 次多項式之第 n 級差數爲常數,並對 $f(a)$, $f(a+w), f(a+2w),$ ……,已假定其第 n 級差數爲常數. 由此可有一

n 次多項式存在，當 $u=a, a+w, a+2w, \cdots\cdots$ 時 多項式之相應值為 $f(a), f(a+w), f(a+2w), \cdots\cdots$. 由前節，可書此多項式為

$$y=f(a)+x\Delta f(a)+\frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 f(a)+\cdots\cdots$$
$$+\frac{x(x-1)\cdots\cdots(x-n+1)}{n!}\Delta^n f(a)$$
$$=f(u), \tag{1}$$

其中 x 與 u 之關係為 $u=a+xw$, 並 $\Delta f(a)=f(a+w)-f(a)$, $\Delta^2 f(a)=f(a+2w)-2f(a+w)+f(a)$, 等等.

茲取多項式(1)代表函數 y, 並代表當自變數 u 為表中所列之值之中間數值時 y 之相應值. 由是在圖形中 $A, B, C, \cdots\cdots$ 間之曲線可由作曲線

$$y=f(a+xw)$$
$$=f(a)+x\Delta f(a)+\frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 f(a)+\cdots\cdots \tag{2}$$

以填補之.

公式(1)曰**牛頓之插補公式**，但此為 1670 年格里哥來所發明.

例. 由下表求 $x=21$ 時 y 之相應值.

自變數	相應值	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
20	0.229314955248				
		701747247			
22	0.230016702495		602297		
		702349544		-1944	
24	0.230719052039		600353		4
		702949897		-1940	
26	0.231422001936		598413		3
		703548310		-1937	
28	0.232125550246		596476		
		704144786			
30	0.232829695032				

在此　$a=20,\ w=2,\ f(a+xw)=f(21),\ x=\frac{1}{2}.$

$$f(21)=f(20)+x\Delta f(20)+\frac{x(x-1)}{2}\Delta^2 f(21)$$
$$+\frac{x(x-1)(x-2)}{2}\Delta^3 f(20)+\cdots\cdots$$
$$=229314955248+\frac{1}{2}(701747247)$$
$$-\frac{1}{8}(602297)-\frac{1}{16}(1944)$$
$$=0.229665753463.$$

因　　$f(a+xw)=E^x f(a)=(1+\Delta)^x f(a),$

故格里哥來與牛頓之插補公式又可書爲下形:

$$E^x f(a)=(1+\Delta)^x f(a)$$
$$=\left[1+x\Delta+\frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2+\cdots\cdots\right]f(a), \qquad (3)$$

此處右端[ ]內卽爲$(1+\Delta)^x$用二項定理之展開式,此展開式乃對$f(a)$而運算也.

(3)式又謂之**二項差數定理**(binomial difference theorem).

注意若$(1+x)^n$之差數表:

自變數	相應值	Δ	Δ^2	Δ^3
0	1			
		x		
1	$(1+x)^1$		x^2	
		$x(1+x)$		x^3
2	$(1+x)^2$		$x^2(1+x)$	
		$x(1+x)^2$		$x^3(1+x)$
3	$(1+x)^3$		$x^2(1+x)^2$	

於是將 $f(0)=1, \Delta f(0)=x, \cdots\cdots$ 之值代入公式(2)中，得

$$f(n)=f(0)+n\Delta f(0)+\frac{1}{2}n(n-1)\Delta^2 f(0)+\cdots\cdots,$$

由是

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots.$$

此即二項定理.

習 題 一

1. 由以下之相應值，試作差數表:

x			$\sin x$
28°	40′	00″	0.479713113250246
		10″	0.479755651470168
		20″	0.479798188562452
		30″	0.479840724526998
		40″	0.479883259363705
		50″	0.479925793072474
28°	41′	00″	0.479968325653205
		10″	0.480010857105798

2. 試求第一級差數爲 $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ 之函數.

3. 試將 $f(x)=3x^3+x^2+x+1$ 表爲

$$\alpha x(x-1)(x-2)+\beta x(x-1)+\gamma x+\delta$$

之形.求當 $x=0,1,2,3,4,5,\cdots\cdots$ 時 $f(x)$ 之值作差數表; 並驗證方程式

$$f(x)=f(0)+x\Delta f(0)+\frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 f(0)$$
$$+\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^3 f(0).$$

4. 由下表用格里哥來與牛頓之公式作出 y 為 x 之函數.

x	-3	-2	-1	0	1
y	16	7	4	1	-8

5. 設

x	$f(x)$
0	858.313740095
1	869.645772308
2	880.975826766
3	892.303904583
4	903.630006875

試求 $f(1.5)$.

6. 設 $I(x)=\int_x^\infty e^{-u^2}du$, 其相應值如下:

x	$I(x)$
0.00	0.88622692
0.01	0.87622724
0.02	0.86622957
0.03	0.85623590
0.04	0.84624822
0.05	0.83626853

試求 $I(0.025)$, 並用級數

$$I(0)-I(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\cdots\cdots$$

以校驗所得之結果.

II. 非等差自變數之插補法

§7. 除差數 在此以前所論者,僅限於自變數相隣之值之差為相等,但實際觀測所得之結果不為如是,卽若記載之時間有間斷,則每二相隣時間之差不為相等矣.

設 x 及其函數 $f(x)$ 之相應值為

$$\begin{array}{llllll} x: & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_n \\ f(x): & f(a_0) & f(a_1) & f(a_2) & \cdots\cdots & f(a_n) \end{array}$$

此處 $a_1-a_0, a_2-a_1, a_3-a_2, \cdots\cdots, a_n-a_{n-1}$ 為不相等. 作

$$\frac{f(a_1)-f(a_0)}{a_1-a_0}=f(a_1, a_0),$$

$$\frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}=f(a_2, a_1), \quad \cdots\cdots,$$

此曰第一級除差數(divided difference of the first order). 再作

$$\frac{f(a_2, a_1)-f(a_1, a_0)}{a_2-a_0}=f(a_2, a_1, a_0),$$

$$\frac{f(a_3, a_2)-f(a_2, a_1)}{a_3-a_1}=f(a_3, a_2, a_1),$$

此曰第二級除差數. 又

$$\frac{f(a_3, a_2, a_1)-f(a_2, a_1, a_0)}{a_3-a_0}=f(a_3, a_2, a_1, a_0),$$

曰第三級除差數. 高級之除差數以同法作之.

除差數又可書爲下之對稱形:

$$f(a_1,a_0)=\frac{f(a_0)}{a_0-a_1}+\frac{f(a_1)}{a_1-a_0},$$

$$f(a_2,a_1,a_0)=\frac{f(a_0)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)}+\frac{f(a_1)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)}$$
$$+\frac{f(a_2)}{(a_2-a_1)(a_2-a_0)},$$

$$f(a_3,a_2,a_1,a_0)=\frac{f(a_0)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)}$$
$$+\frac{f(a_1)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)}$$
$$+\frac{f(a_2)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)}$$
$$+\frac{f(a_3)}{(a_3-a_0)(a_3-a_1)(a_3-a_2)},$$

餘類推.

除差表之排列如下:

自變數	相應值			
a_0	$f(a_0)$			
		$f(a_0,a_1)$		
a_1	$f(a_1)$		$f(a_0,a_1,a_2)$	
		$f(a_1,a_2)$		$f(a_0,a_1,a_2,a_3)$
a_2	$f(a_2)$		$f(a_1,a_2,a_3)$	
		$f(a_2,a_3)$		$f(a_1,a_2,a_3,a_4)$
a_3	$f(a_3)$		$f(a_2,a_3,a_4)$	
		$f(a_3,a_4)$		$f(a_2,a_3,a_4,a_5)$
a_4	$f(a_4)$		$f(a_3,a_4,a_5)$	

§8. 關於除差數之定理

定理 1.　若對自變數 x 之一組值，函數 $f(x)$ 之數值等於 $g(x)$ 與 $h(x)$ 之和者,則由諸值所成 $f(x)$ 之除差數等於 $g(x)$ 與 $h(x)$ 相當

除差數之和.

例如

$$f(a_1,a_2)=\frac{f(a_1)-f(a_0)}{a_1-a_0}$$

$$=\frac{[g(a_1)-g(a_0)]+[h(a_1)-h(a_0)]}{a_1-a_0}$$

$$=g(a_1,a_0)+h(a_1,a_0).$$

高級除差數亦同.

定理 2. 設 c 爲常數,則 $cf(x)$ 之除差數等於 c 乘 $f(x)$ 之除差數.

例如 $cf(x)$ 之除差數爲

$$\frac{cf(a_1)-cf(a_0)}{a_1-a_0}=c\,\frac{f(a_1)-f(a_0)}{a_1-a_0}=cf(a_1,a_0).$$

定理 3. x^n 之第 n 級除差數爲常數,此處 n 爲正整數.

蓋設
$$f(x)=x^n,$$
則
$$f(a_0,a_1)=(a_0^n-a_1^n)/(a_0-a_1)$$
$$=a_0^{n-1}+a_1a_0^{n-2}+\cdots\cdots+a_1^{n-1},$$
此爲 a_0,a_1 之 $n-1$ 次齊次函數. 再

$$f(a_0,a_1,a_2)$$
$$=\frac{[a_0^{n-1}+a_1a_0^{n-2}+\cdots+a_1^{n-1}]-[a_2^{n-1}+a_1a_2^{n-2}+\cdots+a_1^{n-1}]}{a_0-a_2}$$
$$=\frac{a_0^{n-1}-a_2^{n-1}}{a_0-a_2}+\frac{a_1(a_0^{n-2}-a_2^{n-2})}{a_0-a_2}+\cdots\cdots+\frac{a_1^{n-2}(a_0-a_2)}{a_0-a_2}$$
$$=(a_0^{n-2}+a_2a_0^{n-3}+\cdots\cdots+a_2^{n-2})+a_1(a_0^{n-3}+a_2a_0^{n-4}+\cdots\cdots$$
$$+a_2^{n-3})+\cdots\cdots.$$

此為 a_0, a_1, a_2 之 $n-2$ 次齊次函數. 在一般, $f(a_0, a_1, \cdots\cdots, a_p)$ 為 $a_0, a_1, \cdots\cdots, a_p$ 之 $n-p$ 次齊次函數. 令 $p=n$, 則 $f(a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n)$ 為一常數.

推論. x^n 之第 $n+1$ 級除差數為零.

定理 4. n 次多項式之第 n 級除差數為常數.

此由定理 1., 2., 3. 立可推得.

§9. 對非等差自變數之牛頓公式 設 $f(u)$ 為一函數, 其第四級(假設)除差式為零或為可略者; 且對 a_0, a_1, a_2, a_3 四個自變數, 函數之值為已知, 而除差數之表為:

自變數	相應值			
a_0	$f(a_0)$			
		$f(a_0, a_1)$		
a_1	$f(a_1)$		$f(a_0, a_1, a_2)$	
		$f(a_1, a_2)$		$f(a_0, a_1, a_2, a_3)$
a_2	$f(a_2)$		$f(a_1, a_2, a_3)$	
		$f(a_2, a_3)$		$f(a_1, a_2, a_3, a_4)$
a_3	$f(a_3)$			

吾人可推求當 u 為其他之值時函數之值如次: 先從第三級常數差着手,

$$f(u, a_0, a_1, a_2) = f(a_0, a_1, a_2, a_3). \tag{1}$$

由第二級除差數之定義,

$$f(u, a_0, a_1) = f(a_0, a_1, a_2) + (u - a_2) f(u, a_0, a_1, a_2),$$

故

$$f(u, a_0, a_1) = f(a_0, a_1, a_2) + (u - a_2) f(a_0, a_1, a_2, a_3). \tag{2}$$

再由定義,

$$f(u, a_0) = f(a_0, a_1) + (u - a_1) f(u, a_0, a_1). \tag{3}$$

將(2)代入此方程式中, 得

$$f(u,a_0)=f(a_0,a_1)+(u-a_1)f(a_0,a_1,a_2)$$
$$+(u-a_1)(u-a_2)f(a_0,a_1,a_2,a_3).$$

又由定義，

$$f(u)=f(a_0)+(u-a_0)f(u,a_0), \tag{4}$$

卽
$$\begin{aligned}f(u)=f(a_0)&+(u-a_0)f(a_0,a_1)\\&+(u-a_0)(u-a_1)f(a_0,a_1,a_2)\\&+(u-a_0)(u-a_1)(u-a_2)f(a_0,a_1,a_2,a_3).\end{aligned} \tag{5}$$

由(1)，(2)，(3)，(4)諸式，$f(u,a_0,a_1,a_2)$，$f(u,a_0,a_1)$，$f(u,a_0)$ 及 $f(u)$ 諸量皆爲已知，故可列成除差數之表如下：

$$\begin{array}{llllll}
\text{自變數} & \text{相應值} & & & \\
u & f(u) & & & \\
 & & f(u,a_0) & & \\
a_0 & f(a_0) & & f(u,a_0,a_1) & \\
 & & f(a_0,a_1) & & f(u,a_0,a_1,a_2) \\
a_1 & f(a_1) & & f(a_0,a_1,a_2) & \\
 & & f(a_1,a_2) & & f(a_0,a_1,a_2,a_3) \\
a_2 & f(a_2) & & f(a_1,a_2,a_3) & \\
 & & f(a_2,a_3) & & \\
a_3 & f(a_3) & & &
\end{array}$$

公式(5)可推廣至於一函數，其第$(n+1)$級除差數爲零或爲可略者．由是得牛頓公式：

$$\begin{aligned}f(u)=f(a_0)+(u-a_0)f(a_0,a_1)&+(u-a_0)(u-a_1)f(a_0,a_1,a_2)\\&+(u-a_0)(u-a_1)(u-a_2)f(a_0,a_1,a_2,a_3)+\cdots\cdots\\&+(u-a_0)(u-a_1)\cdots(u-a_{n-1})f(a_0,a_1,\cdots,a_n).\end{aligned} \tag{6}$$

此公式右端之第一項爲零次多項式，當 $u=a_0$ 時其值爲 $f(a_0)$．第一與第二項之和爲一次多項式，當 $u=a_0$ 與 a_1，其值分別爲 $f(a_0)$ 與 $f(a_1)$．餘類推．

為欲精確計，右端應加入一餘項:

$$(u-a_0)(u-a_1)\cdots\cdots(u-a_n)f(u,a_0,a_1,\cdots\cdots,a_n).$$

但若第 n 級除差數為常數，則此項為零.

注意 §6 之格里哥來與牛頓之公式為公式(6)之特例. 蓋若於(6)中令 $a_0=a, a_1=a+w, a_2=a+2w, \cdots\cdots; u=a+xw$, 則 $f(a_0,a_1,a_2)=\frac{1}{2!w^2}\Delta^2 f(a), f(a_0,a_1,a_2,a_3)=\frac{1}{3!w^3}\Delta^3 f(a)$, 餘類推. 於是則得格里哥來與牛頓之公式.

例.　由下表求對 3.7608 之相應值.

x	$f(x)$		
$a_0=0$	0.3989423		
		-500	
$a_1=2.5069$	0.3988169		-199
		-1499	
$a_2=5.0154$	0.3984408		-199
		-2496	
$a_3=7.5270$	0.3978138		

在此 $u=3.7608$,

$$f(u,a_0,a_1)=f(a_0,a_1,a_2)=-199.$$

由(3),

$$f(u,a_0)=-500+1.2539\times(-199)=-749.526.$$

由(6),得

$$f(u)=0.3989423+3.7608\times(-749.526)$$
$$=0.3986604.$$

§10. 拉果蘭諸之插補公式　設 $f(x)$ 為一 n 次多項式，其對 x 為 $a_0,a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$ 之相應值為 $f(a_0),f(a_1),\cdots\cdots,f(a_n)$. 由分差數之定義,

$$f(a_0,a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n,x)=\frac{f(x)}{(x-a_0)(x-a_1)\cdots\cdots(x-a_n)}$$
$$+\frac{f(a_0)}{(a_0-x)(a_0-a_1)\cdots\cdots(a_0-a_n)}$$
$$+\frac{f(a_1)}{(a_1-x)(a_1-a_0)\cdots\cdots(a_1-a_n)}+\cdots\cdots$$
$$+\frac{f(a_n)}{(a_n-x)(a_n-a_0)\cdots\cdots(a_n-a_{n-1})}.$$

因 $f(x)$ 爲 n 次多項式，其第 $n+1$ 級之除差數爲零，即

$$f(a_0,a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n,x)=0.$$

將以上各分母之因式重加排列，使第一因式具 $(x-a_p)$ 形，得

$$\frac{f(x)}{(x-a_0)(x-a_1)\cdots\cdots(x-a_n)}$$
$$=\frac{f(a_0)}{(x-a_0)(a_0-a_1)(a_0-a_2)\cdots\cdots(a_0-a_n)}$$
$$+\frac{f(a_1)}{(x-a_1)(a_1-a_0)\cdots\cdots(a_1-a_n)}+\cdots\cdots$$
$$+\frac{f(a_n)}{(x-a_n)(a_n-a_0)\cdots\cdots(a_n-a_{n-1})}. \qquad (1)$$

即
$$f(x)=\frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_n)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\cdots\cdots(a_0-a_n)}f(a_0)$$
$$+\frac{(x-a_0)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_n)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)\cdots\cdots(a_1-a_n)}f(a_1)$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{(x-a_0)(x-a_1)\cdots\cdots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_0)(a_n-a_1)\cdots\cdots(a_n-a_{n-1})}f(a_n). \qquad (2)$$

此謂之拉果蘭諸(Lagrange)插補公式，乃 1795 年拉氏所發表者．

例一． 已知 $x, f(x)$ 之相應值如下表，求 $f(27)$．

x:	14	17	31	35
$f(x)$:	68.7	64.0	44.0	39.1

由公式(1)，

$$\frac{f(27)}{(27-14)(27-17)(27-31)(27-35)}$$

$$=\frac{68.7}{(27-14)(14-17)(14-31)(14-35)}$$

$$+\frac{64.0}{(27-17)(17-14)(17-31)(17-35)}$$

$$+\frac{44.0}{(27-31)(31-14)(31-17)(31-35)}$$

$$+\frac{39.1}{(27-35)(35-14)(35-17)(35-31)}.$$

即 $$\frac{f(27)}{4160}=-\frac{68.7}{13923}+\frac{64.0}{7560}+\frac{44.0}{3808}-\frac{39.1}{12096}.$$

$$\therefore\quad f(27)=49.317\cdots\cdots.$$

例二. 已知

x:	0	1	2	5
$f(x)$:	2	3	12	147

試作 x 之三次函數.

由公式(2)，

$$f(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(0-1)(0-2)(0-5)}2+\frac{x(x-2)(x-5)}{1(1-2)(1-5)}3$$

$$+\frac{x(x-1)(x-5)}{2(2-1)(2-5)}12+\frac{x(x-1)(x-2)}{5(5-1)(5-2)}147$$

$$=x^3+x^2-x+2.$$

習 題 二

1. 若 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$，求除差數 $f(a,b)$，$f(a,b,c)$ 及 $f(a,b,c,d)$。

2. 已知

x:	4	5	7	10	11	13
$f(x)$:	48	100	294	900	1210	2028

試作除差數表，並求 $f(3)$，$f(14)$。

3. 已知

x:	16	17	19	23	29	31
$f(x)$:	65536	83521	130321	279841	707281	923521

試求函數 $f(x)$。

4. 由下表，求 $f(1)$，$f(4)$，$f(5)$ 及 $f(8)$：

x:	0	2	3	6	7	9
$f(x)$:	658503	704969	729000	804357	830584	884736

5. 假定 $f(x)$ 為 x 之四次函數，由下表以求 $f(19)$：

x:	11	17	21	23	31
$f(x)$:	14646	83526	194486	279846	923526

第十七章　幾率. 幾率積分

§1. **幾率之定義**　試行某事有 a 次成功，b 次失敗，但其成功或失敗結果之發生，均有相等與相若之機會者，則 $a/(a+b)$ 曰某事出**現之幾率**(probability of happening)，$b/(a+b)$ 曰某事**失敗之幾率**(probability of failing).

例如投一骰子，六面中任有一面皆有向上之可能，吾人絕無理由可希望某一面比其他一面易於向上. 一點能向上之情形有一種，不能向上之情形有五種，故投出一點之幾率爲 $1/(1+5)$ 或 $1/6$.

由以上之定義，得

推論 1.　一事必能出現者，其出現之幾率爲 1；若必不能出現者，其出現之幾率爲 0；在其他情形，其幾率爲一正眞分數.

是以 1 爲表示某事必出現之數學符號.

推論 2.　若某事出現之幾率爲 p，則失敗之幾率爲 $1-p$.

讀者注意，分數 $a/(a+b)$ 吾人稱爲一事之幾率，其意義並非謂嘗試一次或少數次，其出現之次數與嘗試次數之比卽等於 $a/(a+b)$；此乃指繼續嘗試多次及無限次所出現之頻率也. 如擲一錢幣，繼續至許多次，則擲出正面之次數與擲錢次數之比漸趨近於 $1/2$.

然分數 $a/(a+b)$ 雖不能表示一事嘗試一次出現之幾率，但能表示此事嘗試一次希望之強度. 如吾人已知過去同樣事件之頻率，卽

能斷定頻率愈大，對於一特別事件一次嘗試出現之希望愈強.

§ 2. 互斥事件　兩件或兩件以上之事，其中僅有一件能出現者，則此等事件曰**互斥事件**(mutually exclusive events). 如投一骰子，一次投出一點與投出二點為互斥事件，蓋如投出一點，則不能投出二點也.

定理.　一組互斥事件，其中任意一件出現之幾率，為其每件出現之幾率之和.

設有二互斥事件 A 與 B，共可配成三種情形. 1°，A 出現，B 不出現；2°，A 不出現，B 出現；3°，A 不出現，B 不出現. 設此三種情形之種數，分別為 l, m, n，則 A 或 B 任一出現之情形有 $l+m$ 種，A 或 B 任一出現與均不出現情形之種數之和為 $l+m+n$，故 A 或 B 任一出現之幾率為 $(l+m)/(l+m+n)$，A 單獨出現之幾率為 $l/[l+(m+n)]$，B 單獨出現之幾率為 $m/[(l+n)+m]$. 但

$$\frac{l+m}{l+m+n}=\frac{l}{l+(m+n)}+\frac{m}{(l+n)+m}. \tag{1}$$

故 A 或 B 出現之幾率等於 A 出現之幾率與 B 出現之幾率之和.

兩件以上之事件，可以同理證明.

例如一粒骰子，擲出一點之幾率為 1/6，擲出三點之幾率為 1/6，擲出五點之幾率亦為 1/6，故擲出奇數點之幾率為 $1/6+1/6+1/6=1/2$.

注意此定理不可應用於不互斥之事件.

§ 3. 獨立事件　若兩件或兩件以上之事，其中任一件之出現或失敗，不受其餘事件之出現或失敗所影響者，則此諸事件曰**獨立事件**(independent events)；否則曰**相倚事件**(dependent events). 如在

一袋中連取一球兩次，在第一次取出者還入後，再取第二次，則兩次取球之結果互爲獨立. 若第一次取出後不還入，而第二次再取，則爲相倚，蓋第二次取時因第一次已取出一個，袋中較第一次取時爲少一球也.

定理 1. 一組獨立事件均出現之幾率爲各單獨事件出現之幾率之相乘積.

蓋若二單獨事件出現之幾率分別爲 $a_1/(a_1+b_1)$ 與 $a_2/(a_2+b_2)$，因此二事件互爲獨立，則在全體 $(a_1+b_1)(a_2+b_2)$ 種情形內，共有 $a_1\cdot a_2$ 種情形爲二事均出現者，故二事均出現之幾率爲

$$\frac{a_1\cdot a_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}=\frac{a_1}{a_1+b_1}\cdot\frac{a_2}{a_2+b_2}. \qquad (2)$$

二件以上之事，得以同理證之.

例如連擲骰子兩次均爲一點之幾率爲 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$. 又如一袋內裝白球五個，黑球三個，連取兩次，每次取一球. 在第一次取出者還入，再取第二次，則均取得一白球之幾率爲 $\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}=\frac{25}{64}$.

定理 2. 設第一件事出現之幾率爲 $a_1/(a_1+b_1)$，若第一件事出現後，第二件事出現之幾率爲 $a_2/(a_2+b_2)$，則兩件事順次出現之幾率爲 $\frac{a_1}{a_1+b_1}\cdot\frac{a_2}{a_2+b_2}$.

證法與定理一同.

例如一袋中有白球五個，黑球三個. 取出一個白球後不再放入，則第二次取白球之幾率爲 4/7. 故連取白球兩次而第一次取出者不還入，則其幾率爲 $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{20}{56}$.

由是,若有四個事件,p_1, p_2, p_3, p_4 分別爲各事件出現之幾率;q_1, q_2, q_3, q_4 分別爲各事件失敗之幾率,則所有事件皆出現之幾率爲 $p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4$;所有事件皆失敗之幾率爲 $q_1\cdot q_2\cdot q_3\cdot q_4$;第一件出現而其餘三件失敗之幾率爲 $p_1\cdot q_2\cdot q_3\cdot q_4$;餘類推.

設 P 爲一事件一次出現之幾率,Q 爲其失敗之幾率,於是 $P+Q=1$. 若此類之事件共有 n 個,則皆出現之幾率爲 P^n. $(n-1)$ 個出現而某一個失敗之幾率爲 $P^{n-1}Q$,但因失敗者可爲 n 個中之任一個,故 $(n-1)$ 個出現而一個失敗之幾率爲 $nP^{n-1}Q$. 同樣若 $(n-2)$ 個出現,而某兩個失敗,其幾率應爲 $P^{n-2}Q^2$;但此可有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 種,故 $(n-2)$ 個出現而某兩個失敗之幾率爲 $\frac{n(n-1)}{2}P^{n-2}Q^2$. 若 $(P+Q)^n$ 依照二項定理展開,得

$$(P+Q)^n=P^n+nP^{n-1}Q+\frac{n(n-1)}{2!}P^{n-2}Q^2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}P^{n-r}Q^r+\cdots\cdots. \quad (3)$$

此處第一項表皆出現之幾率;第二項表 $(n-1)$ 個出現,一個失敗之幾率;第 $r+1$ 項表 $(n-r)$ 個出現,r 個失敗之幾率. 故求最可能之情形,只須求(3)右端之最大項.

由二項定理之理論,得知若 n 爲奇數,中間兩項爲最大;若 n 爲偶數,中間一項爲最大. 例如擲 n 個錢幣,$P=Q=\frac{1}{2}$,(3)之右端爲

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots\cdots.$$

若 $n=6$，此級數為

$$\frac{1}{64}+\frac{6}{64}+\frac{15}{64}+\frac{20}{64}+\frac{15}{64}+\frac{6}{64}+\frac{1}{64}.$$

故若擲錢幣六枚，所得不同情形之幾率如下：

皆正面……………………………… $\frac{1}{64}$

五正面，一反面……………………… $\frac{6}{64}$

四正面，二反面……………………… $\frac{15}{64}$

三正面，三反面……………………… $\frac{20}{64}$

二正面，四反面……………………… $\frac{15}{64}$

一正面，五反面……………………… $\frac{6}{64}$

皆反面……………………………… $\frac{1}{64}$

此諸幾率之和當然為 1. 由此得知三正面與三反面之可能性為最大.

若於水平線 $x'x$ 上取等距離之七點，在各點上作垂線令其高依次為 $\frac{1}{64}$，$\frac{6}{64}$，……等，過垂線之頂點作一平滑之曲線，則曲線之形狀為如圖 94. 此圖將與以下所討論之圖 95 相類似.

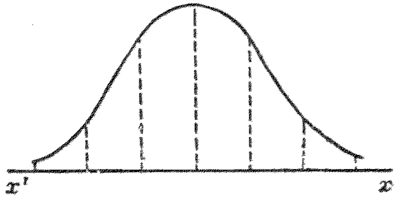

圖 94.

習　題　一

1．擲骰子二粒，問得八點之幾率如何？

2．擲骰子二粒，得兩者點數之和爲 7 之幾率若干？並證此爲最易得之點。

3．今有二袋，一袋中有白球四個，紅球一個，另一袋中有白球三個．若由第一袋中取出三球置於第二袋中，再由第二袋中取出四球置於第一袋中，問紅球在第一袋中之幾率及在第二袋中之幾率各若干？

4．一袋有白球六個，紅球四個，黑球二個．問自其中取出四球全爲白者之幾率如何？又取出六球爲三白二紅一黑之幾率如何？

5．擲錢幣五枚，問至少有三個正面出現之幾率如何？

6．擲錢幣十枚，各種現象出現之幾率如何？並繪一曲線表示之．

§4．誤差　觀測一事物所得之值與該事物之眞值之差曰誤差(error)．設 Z 爲某事物之眞值，M 爲觀測所得之值，則

$$誤差\ x=Z-M. \tag{4}$$

觀測所得最可能之值與觀測所得之值之差曰殘差(residual error)．設 z 爲觀測所得最可能之值，則

$$殘差\ v=z-M. \tag{5}$$

若觀測之次數愈多，則 z 與 Z 愈爲接近；故若觀測多次，則 v 直可視爲 x 也．

§5．頻率分配　設有百萬人於此，欲依其身長而列爲等級；例如其身長在 $67\frac{1}{2}$ 吋與 $68\frac{1}{2}$ 吋之間者列爲第一等，身長在 $68\frac{1}{2}$ 吋

與 $69\frac{1}{2}$ 吋之間者列爲第二等,餘類推. 設 x_1 爲百萬人中最低者之身長, y_1 爲身長在 $x_1-\frac{1}{2}$ 與 $x_1+\frac{1}{2}$ 間之人數. 命 x_1+1 爲 x_2, y_2 爲身長在 $x_2-\frac{1}{2}$ 與 $x_2+\frac{1}{2}$ 間之人數,依此類推,得知 y 爲 x 之函數,而 y_1, y_2, ……爲 x_1, x_2, ……之對應値. 如此所得之値列成一表,卽表百萬人身長之分配,此曰**頻率分配**(frequency distribution).

玆舉一例,蘇格蘭軍隊 5732 人,胸圍度量之分配如下:

胸圍之長(吋)	33	34	35	36	37	38	39	40
人　　數	3	19	81	189	409	753	1062	1082
胸圍之長(吋)	41	42	43	44	45	46	47	48
人　　數	935	646	313	168	50	18	3	1

在此例中,吾人將胸圍之長在 $37\frac{1}{2}$ 吋與 $38\frac{1}{2}$ 吋間之兵士 753 人列爲一組. 但吾人亦可將其分爲兩組,如胸圍之長在 $37\frac{1}{2}$ 吋與 38 吋之間者爲一組,及在 38 吋與 $38\frac{1}{2}$ 吋之間者亦爲一組,於是組數將增加一倍. 再每小組又可分爲二組. 如此繼續進行,組數可達非常之多. 在實際應用上,組數分爲過多有不便之處,但在理論上則不顧此.

在理論上吾人可假定量法絕對精確及被測驗之人數相當多,使分組無論如何細,在每組中皆有相當多之人數,而使每組中之人數彼此排列成一正規數列(regular sequence).

吾人將純粹在理論方面研究,此種理論乃拉伯拉斯(Laplace)開其先河. 如以上所舉士兵胸圍度量之頻率分配,若吾人注意於單

一士兵，其胸圍之大小有極多因子使其如此.在遺傳方面言，其胸圍之大小與其父母胸圍大小有關；而其父母之胸圍又受其祖父母與外祖父母胸圍之影響等等.故一特殊士兵之胸圍與其歷代祖先之胸圍有關.亦卽其歷代任一祖先之胸圍皆成爲該士兵胸圍之度量之影響者；此外尙有其他種種因子，如平日之營養與運動等皆是.故單一士兵胸圍之度量與全體士兵胸圍之度量之平均數之偏差(deviation)，可視爲極多細小偏差之總和，而此細小之偏差爲由不同之因子而成者.此細小之偏差，又曰分偏差(component deviation).分偏差爲假定彼此成獨立.

觀測一事物若干次，研究所得誤差之分配，亦卽頻率分配.例如測量某角一百次，其得一百個誤差，其分配如下:

誤差在 $+6''$ 與 $+5''$ 之間者	1 個
誤差在 $+5''$ 與 $+4''$ 之間者	2 個
誤差在 $+4''$ 與 $+3''$ 之間者	2 個
誤差在 $+3''$ 與 $+2''$ 之間者	3 個
誤差在 $+2''$ 與 $+1''$ 之間者	13 個
誤差在 $+1''$ 與 $0''$ 之間者	26 個
誤差在 $0''$ 與 $-1''$ 之間者	26 個
誤差在 $-1''$ 與 $-2''$ 之間者	17 個
誤差在 $-2''$ 與 $-3''$ 之間者	8 個
誤差在 $-3''$ 與 $-4''$ 之間者	2 個

觀此得知誤差小者較大者爲多，正負誤差幾爲相等；而最大之誤差不至超過 $6''$.此在士兵胸圍之頻率分配亦如此.

§ 6. **幾率曲線** 以下雖就誤差而言，但可應用於任何頻率分配.

在一組觀測所得之值中，每次觀測在某一範圍內之誤差之幾率為該誤差之個數與誤差之總數之比；即對一事物作 n 次之觀測，若所得之誤差有 n 個，而為某一誤差者有 m 個，則該誤差之幾率 P 為

$$P=m/n. \tag{6}$$

由 § 5 之例及其他各種經驗，得知誤差分配或頻率分配為適合於下之原則：

1. 小誤差較大誤差為多；
2. 正誤差之個數與負誤差之個數幾為相等；
3. 超出某種範圍之大誤差為不存在。

由以上之所述，得知誤差（偏差同）之幾率為誤差之函數，故若命 x 為誤差，y 為其幾率，則

$$y=f(x). \tag{7}$$

依照誤差分配之三原則，函數(7)之曲線之形狀必如下圖所示。此曰**幾率曲線**(probability curve)。

茲述海根(Hagen)氏求幾率曲線之方程式之法，此法為基於以

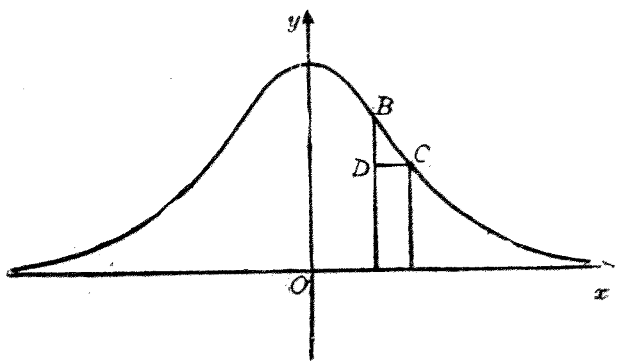

圖 95.

下之原則:

某一誤差爲無數個細小原子誤差之代數和,而各原子誤差之大小爲相等而正負之分配亦相等.

原子誤差卽相當於分偏差.

設 Δx 表原子誤差之大小,及 m 爲其個數,則 Δx 爲正之幾率爲 $\frac{1}{2}$,爲負之幾率亦爲 $\frac{1}{2}$,而所有 m 個原子誤差皆爲正之幾率爲 $\left(\frac{1}{2}\right)^m$; $(m-1)$ 個爲正,一個爲負之幾率爲 $m\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)$,卽 $m\left(\frac{1}{2}\right)^m$; $(m-2)$ 個爲正,二個爲負之幾率爲 $\frac{m(m-1)}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$;餘類推.當所有 m 個原子誤差皆爲正,則結果誤差爲 $m\Delta x$;當 $(m-1)$ 個原子誤差爲正,一個爲負,結果誤差爲 $(m-1)\Delta x-\Delta x$,卽 $(m-2)\Delta x$;若 $(m-n)$ 個爲正,n 個爲負,則結果誤差爲 $(m-n)\Delta x-n\Delta x$,卽 $(m-2n)\Delta x$.餘類推.故結果得列表如次:

原子誤差分配	誤差	幾率
若 m 個爲正,0 個爲負	$m\Delta x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^m$
若 $m-1$ 個爲正,一個爲負	$(m-2)\Delta x$	$m\left(\frac{1}{2}\right)^m$
若 $m-2$ 個爲正,二個爲負	$(m-4)\Delta x$	$\frac{m(m-1)}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$
若 $m-3$ 個爲正,三個爲負	$(m-6)\Delta x$	$\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$
…………………	…………	…………………………
若 $m-n$ 個爲正,n 個爲負	$(m-2n)\Delta x$	$\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$
若 $m-n-1$ 個爲正,$n+1$ 個爲負	$(m-2n-2)\Delta x$	$\frac{m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^m$
…………………	…………	…………………………

在曲線 $y=f(x)$ 上，命 $C\equiv(x,y)$，$B\equiv(x',y')$，則由圖 95，

$$\lim_{x\to x'}\frac{BD}{CD}=\lim_{x\to x'}\frac{y-y'}{x-x'}=\frac{dy}{dx}. \tag{i}$$

設 x,x' 爲相隣之二誤差，由上表

$$x=(m-2n)\Delta x,\quad x'=(m-2n-2)\Delta x \tag{ii}$$

此二誤差之幾率之比爲

$$\frac{y'}{y}=\frac{m-n}{n+1}.$$

由(ii)，$n=\frac{1}{2}\left(m-\frac{x}{\Delta x}\right)$. 代入，得

$$y'(m\Delta x-x+2\Delta x)=my\Delta x+xy,$$

即
$$y(m\Delta x-x+2\Delta x)-y'(m\Delta x-x+2\Delta x)$$
$$=y(m\Delta x-x+2\Delta x)-ym\Delta x-xy,$$

即
$$y-y'=y\frac{2(\Delta x-x)}{(m+2)\Delta x-x}. \tag{iii}$$

(iii)之右端，分子 Δx 與 x 較爲甚小，故可略去. 分母之 2 與 m 較亦甚小，亦可略去；至 x 與 $m\Delta x$ 較亦爲甚小，故亦可略去，由是(iii)式可書爲

$$y-y'=-\frac{2xy}{m\Delta x}.$$

再由(ii)式，

$$x-x'=2\Delta x.$$

故得
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-y'}{2\Delta x}=-\frac{yx}{m(\Delta x)^2}.$$

命 $2h^2=1/m(\Delta x)^2$，得微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=-2h^2yx. \tag{8}$$

解之，得
$$y=ke^{-h^2x^2}, \tag{9}$$

此處 k 爲常數．此即幾率曲線之方程式．

玆研究(9)所表之曲線形狀．由(8)或(9)，

$$\frac{dy}{dx}=-2kh^2e^{-h^2x^2}\cdot x.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-2kh^2e^{-h^2x^2}(-2h^2x^2+1).$$

令 $\frac{dy}{dx}=0$，得 $x=0$，而 $\frac{dy}{dx}$ 之號爲由＋變－，故 $(0,\ k)$ 爲一極大點．

令 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$，得 $x=\pm\frac{1}{h\sqrt{2}}$．曲線上橫坐標爲 $\pm\frac{1}{h\sqrt{2}}$ 之點爲反曲點．又 x 軸爲漸近線．

故曲線爲鐘形如圖 96．

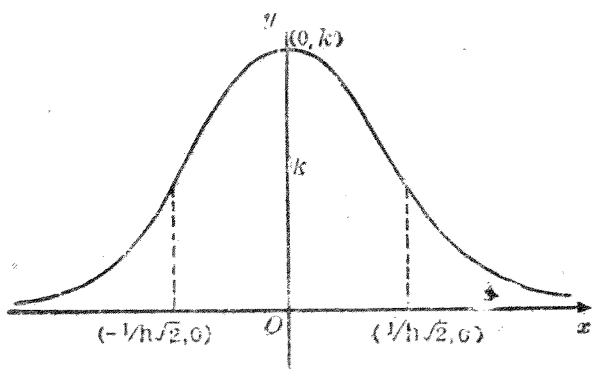

圖 96.

§7. 幾率積分 設 $x', x_1, x_2, \cdots\cdots, x$ 爲一組誤差，x' 爲最小者，x 爲最大者；每二相隣誤差之差皆爲相等．則在 (x', x) 間誤差之幾率 P 爲下列諸分幾率之和．

$$ke^{-h^2x'^2},\ ke^{-h^2x_1^2},\ ke^{-h^2x_2^2},\ \cdots\cdots,\ ke^{-h^2x^2},$$

即
$$P=k\left[\Sigma e^{-h^2x^2}\right]_{x'}^{x}.$$

此可書爲

$$P=\frac{k}{dx}\int_{x'}^{x}e^{-h^2x^2}dx. \tag{10}$$

茲將此式表爲另一相宜之形狀．

因誤差在 $-\infty$ 與 ∞ 之間爲必遇之事，而必遇之符號爲 1，故

$$1=\frac{k}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-h^2x^2}dx. \tag{11}$$

因 $e^{h^2x^2}$ 爲偶函數，

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-h^2x^2}dx=2\int_0^{\infty}e^{-h^2x^2}dx=\frac{2}{h}\int_0^{\infty}e^{-h^2x^2}d(hx).$$

由第十章(35)式，

$$\int_0^{\infty}e^{-h^2x^2}d(hx)=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\therefore\quad \int_{-\infty}^{\infty}e^{-h^2x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{h},$$

代入(11)式，得

$$1=\frac{k\sqrt{\pi}}{h\,dx}.$$

$$\therefore\quad k=\frac{h\,dx}{\sqrt{\pi}}.$$

由是幾率曲線之方程式變爲

$$y=h\,dx/\sqrt{\pi}\cdot e^{-h^2x^2}, \tag{12}$$

而在任何二界限 x', x 內之誤差之幾率爲

$$P=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{x'}^{x}e^{-h^2x^2}dx. \tag{13}$$

(12), (13)二式爲基本公式.

因在 $-x$ 與 x 間之誤差幾率爲二倍於在 0 與 x 間之誤差幾率，故

$$P=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x}e^{-h^2x^2}dx.$$

此亦可書爲

$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{hx}e^{-h^2x^2}d(hx), \tag{14}$$

此曰**幾率積分**(probability integral).

注意，(13), (14)二幾率積分僅界限不同，前者表誤差在 x' 與 x 間之幾率，後者表誤差在 $-x$ 與 x 間之幾率.

相當於 hx 之 P 之值，有積分表可以檢查. 參見 Pierce: A Short Table of Integrals.

第十八章

最小二乘方原理及其應用

I. 最小二乘方之原理

§1. 觀測之權 若量一繩之長二十次,其中有十次所得之結果爲 934.2 尺,八次爲 934 尺,二次爲 934.6 尺;則此三結果可靠之程度之比爲 10 : 8 : 2,亦卽 5 : 4 : 1.此卽表示 934.2 之結果較 934.6 之結果可靠五倍也.表可靠之程度之值曰**權**(weight).由是以上所得之結果,934.2 之權爲 10;934 之權爲 8;934.6 之權爲 2.

觀測之權旣爲相當於觀測之次數;則同樣作 n 次觀測所得之平均值之權應爲 n,亦卽每次觀測之權爲 1.觀測所得之結果之權爲 p 者,則爲相當於 p 次觀測,而每次之權爲 1.

將觀測所得之值乘以其權,所得之結果曰**帶權觀測值**(weighted observation).設 $M_1, M_2, \cdots\cdots, M_n$ 爲觀測所得之值,$p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n$ 分別爲其權,則 p_1M_1, p_2M_2, $\cdots\cdots$, p_nM_n 爲帶權之觀測值.若 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 爲 $M_1, M_2, \cdots\cdots, M_n$ 相應之誤差,則 p_1x_1, p_2x_2, $\cdots\cdots$, p_nx_n 曰**帶權誤差**(weighted error).同樣若 $v_1, v_2, \cdots\cdots, v_n$ 爲殘差,則 p_1v_1, p_2v_2, $\cdots\cdots$, p_nv_n 曰**帶權殘差**(weighted residual error).

設 $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_m$ 爲 m 個事物,而 M 爲對 $f(z_1, z_2, \cdots\cdots, z_m)$ 所測得之值,則殘差

$$v=f(z_1,z_2,\cdots\cdots,z_m)-M.$$

若 M 之權爲 p,則帶權殘差爲

$$pv=p\cdot f(z_1,z_2,\cdots\cdots,z_m)-pM.$$

在此 $z_1,z_2,\cdots\cdots,z_m$ 代表未知量之最可能值.

§2. 最小二乘方之原理.

原理一. 若觀測爲等權,則所測之事物之最可能值爲其殘差之平方之和爲最小者.

蓋設 $M_1,M_2,\cdots\cdots,M_n$ 爲所測 $f_1(z_1,z_2,\cdots\cdots,z_m)$, $f_2(z_1,z_2,\cdots\cdots,z_m)$, $\cdots\cdots$, $f_n(z_1,z_2,\cdots\cdots,z_m)$ 之值,並 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ 分別爲其誤差;

即 $$x_1=f_1-M_1,\quad x_2=f_2-M_2,\quad \cdots\cdots,\quad x_n=f_n-M_n.$$

命 $y_1,y_2,\cdots\cdots,y_n$ 爲其相應之幾率,則由第十七章(9)式,

$$y_1=ke^{-h^2x_1{}^2},\quad y_2=ke^{-h^2x_2{}^2},\quad \cdots\cdots,\quad y_n=ke^{-h^2x_n{}^2}.$$

因所測爲同一方法,故 h 皆爲相等; h 曰精確度(precision).

因 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ 同時出現之幾率爲 $y_1,y_2,\cdots\cdots,y_n$ 之相乘積,故

$$P=k^ne^{-h^2(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots\cdots+x_n{}^2)}.$$

最可能之誤差爲必使 P 爲最大者.上式指數爲最小時, P 爲最大,故必須

$$x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2=\text{最小}.$$

因 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ 必須適合於其平方爲最小之條件,故即爲 $v_1,v_2,\cdots\cdots,v_n$. 故欲得 $z_1,z_2,\cdots\cdots,z_n$ 之最可能值之條件爲

$$v_1^2+v_2^2+\cdots\cdots+v_n^2=\text{最小}.\tag{1}$$

由是原理一得以證明.

原理二. 若觀測爲不等權,則所測之事物之最可能値爲其帶權殘差之平方之和爲最小者.

蓋由第十七章(9)式,

$$y_1=k_1e^{-h_1^2x_1^2},\ \ y_2=k_2e^{-h_2^2x_2^2},\ \ \cdots\cdots,\ \ y_n=k_ne^{-h_n^2x_n^2}.$$

因觀測爲不等權,諸式中 k 與 h 皆爲不等.此時

$$P=k_1\cdot k_2\cdots\cdots k_ne^{-(h_1^2x_1^2+h_2^2x_2^2+\cdots\cdots+h_n^2x_n^2)}.$$

欲 P 爲最大,必須

$$h_1^2x_1^2+h_2^2x_2^2+\cdots\cdots+h_n^2x_n^2=\text{最小},$$

亦卽 $$h_1^2v_1^2+h_2^2v_2^2+\cdots\cdots+h_n^2v_n^2=\text{最小}.$$

命 $p_1,p_2,\cdots\cdots,p_n$ 爲各値之權,則

$$\frac{h_1^2}{p_1}=\frac{h_2^2}{p_2}=\cdots\cdots=\frac{h_n^2}{p_n}\ (\text{設}=h^2). \tag{2}$$

故 $$p_1v_1^2+p_2v_2^2+\cdots\cdots+p_nv_n^2=\text{最小}. \tag{3}$$

由是原理二成立.

§3. 可能誤差 在一組誤差中,若大於某一誤差之數爲等於小於此某一誤差之數者,則此某一誤差曰可能誤差(probable error).因誤差之積分爲

$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hx}e^{-h^2x^2}d(hx),$$

所謂可能誤差卽當 $P=\frac{1}{2}$ 時之 x.據計算在上式中,當 $hx=0.4769$ 時,$P=\frac{1}{2}$.命可能誤差爲 r,則

$$hr=0.4769. \tag{4}$$

由此得知 h 與 r 成反變.

若有二組觀測, h_1, r_1 與 h_2, r_2 爲在二組中之相應值, 則由(2), (4), 得

$$p_1 : p_2 : p = \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2} : \frac{1}{r^2}. \tag{5}$$

II. 單一事物之直接測值

§4. 等權測值 若 $M_1, M_2, \cdots\cdots, M_n$ 爲對單一事物作 n 次相同之直接觀測所得之值, 則

$$z=\frac{M_1+M_2+\cdots\cdots+M_n}{n} \tag{6}$$

曰**算術平均數**(arithmetical mean).

定理. 觀測一事物, 用同一之方法與注意, 則所得若干不同之測值, 其最可能者爲諸值之算術平均數.

蓋設 $M_1, M_2, \cdots\cdots, M_n$ 爲等權之 n 個觀測值, z 爲其最可能值, 則殘差爲

$$z-M_1,\ z-M_2,\ \cdots\cdots,\ z-M_n.$$

依最小二乘方原理一, 必須

$$(z-M_1)^2+(z-M_2)^2+\cdots\cdots+(z-M_n)^2=\text{最小}.$$

欲此爲最小, 必須其第一級導微函數爲零, 即

$$(z-M_1)+(z-M_2)+\cdots\cdots+(z-M_n)=0. \tag{7}$$

即

$$z=\frac{M_1+M_2+\cdots\cdots+M_n}{n}.$$

注意, (7) 另有意義, 即算術平均數 z 必須使殘差之代數和爲 0.

§5. 算術平均數之可能誤差 在前節中 $M_1, M_2, \cdots\cdots, M_n$ 之權爲 1，而其算術平均數之權爲 n. 設 r 爲一次直接測値之可能誤差，即權爲 1 之可能誤差，r_0 爲算術平均數之可能誤差，則由(5)，

$$n : 1 = \frac{1}{r_0^2} : \frac{1}{r^2},$$

即
$$r_0 = \frac{r}{\sqrt{n}}. \tag{8}$$

玆求 r 之值. 由誤差幾率公式，

$$y = h \cdot dx \cdot \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-h^2 \Sigma x^2}.$$

設 P 爲 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 同時出現之幾率，則

$$P = h^n (dx)^n \pi^{-\frac{n}{2}} e^{-h^2 \Sigma x^2}.$$

在一組誤差中，h 之最可能值爲使 P 爲最大. 命 $\frac{dP}{dh} = 0$，並化簡，得

$$n - 2h^2 \Sigma x^2 = 0, \quad \text{即} \quad h = \sqrt{\frac{n}{2\Sigma x^2}}.$$

因 $hr = 0.4769$，故

$$r = \frac{0.4769}{h} = 0.6745 \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}}.$$

因 Σv^2 較 Σx^2 爲小，亦即 Σv^2 爲 Σx^2 之最小值，故可命

$$\Sigma x^2 = \Sigma v^2 + n^2,$$

此處 n^2 爲待定之值. 但因 n^2 爲隨 n 之增加而減小，而當 Σx^2 增加時爲增加，故可取 n^2 之近似值等於 $\Sigma x^2/n$. 由是

$$\Sigma x^2 = \Sigma v^2 + \frac{\Sigma x^2}{n},$$

即
$$\frac{\Sigma x^2}{n}=\frac{\Sigma v^2}{n-1}.$$

故
$$r=0.6745\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-1}}. \tag{9}$$

代入(8)式，得
$$r_0=0.6745\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n(n-1)}}. \tag{10}$$

茲舉一例，以明以上之所述.

設測量一角之值爲如下表:

M	$v=z-M$	v^2
116°43′44.″45	5.19	26.94
50.55	−0.91	0.83
50.95	−1.31	1.72
48.90	0.74	0.55
49.20	0.44	0.19
48.85	0.79	0.63
47.40	0.24	5.02
47.75	1.89	3.57
51.05	−1.41	2.00
47.85	1.79	3.20
50.60	−0.96	0.92
48.45	1.19	1.42
51.75	−2.11	4.45
49.00	0.64	0.41
52.35	−2.71	7.34
51.30	−1.66	2.75
51.05	−1.41	2.00
51.70	−2.06	4.24
49.05	0.59	0.35
50.55	−0.91	0.83
49.25	0.39	0.15
46.75	0.89	0.79
49.25	0.39	0.15
53.40	−3.76	14.14
$z=116°43′49.″64$		$\Sigma v^2=92.15$

在此 $n=24$, $\Sigma v^2=92.15$. 由(9),得

$$r=0.6745\sqrt{\frac{92.15}{23}}=1''.35.$$

代入(10)中,得算術平均數之可能誤差爲

$$r_0=\frac{1.35}{\sqrt{24}}=0''.28.$$

故所測之角之值應爲 $116°43'49''.64\pm0''.28$.

§6. **不等權測值** 若測值 $M_1, M_2, \cdots\cdots, M_n$ 之權分別爲 $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n$, 則

$$z=\frac{p_1M_1+p_2M_2+\cdots\cdots+p_nM_n}{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n} \tag{11}$$

曰**帶權平均數**(weighted mean).

定理. 若觀測一事物爲不等權者,則所得若干不同之測值以其帶權平均數爲最可能値.

蓋設 z 爲最可能値,由(3)式,

$$p_1(z-M_1)^2+p_2(z-M_2)^2+\cdots\cdots+p_n(z-M_n)^2=\text{最小}.$$

令其第一級導微函數爲零,得

$$p_1(z-M_1)+p_2(z-M_2)+\cdots\cdots+p_n(z-M_n)=0,$$

卽
$$z=\frac{p_1M_1+p_2M_2+\cdots\cdots+p_nM_n}{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n},$$

是明所欲證.

§7. **帶權平均數之可能誤差** 在前節中,若 $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n$ 爲 $M_1, M_2, \cdots\cdots, M_n$ 之權,則帶權平均數之權爲

$$\Sigma p=p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n.$$

設 r 爲單一測值之誤差，其權爲 1，r_0 爲帶權平均數之誤差，則

$$1:\Sigma p=\frac{1}{r^2}:\frac{1}{r_0^2}.$$

$$\therefore\quad r_0=\frac{r}{\sqrt{\Sigma p}}.\tag{12}$$

依 §5 之法可求 r，但可依下法求之.

設 h 爲其權爲 1 之觀測之精確度，而 $h_1,h_2,\cdots\cdots,h_n$ 爲其權爲 $p_1,p_2,\cdots\cdots,p_n$ 之觀測之精確度，則由(2)式，

$$h_1^2=p_1h^2,\quad h_2^2=p_2h^2,\quad\cdots\cdots,\quad h_n^2=p_nh^2.$$

設 x 爲誤差，p 爲其相應觀測之權，則其幾率爲

$$y=h\sqrt{p}\pi^{-\frac{1}{2}}dx\cdot e^{-h^2px^2},$$

而
$$px^2y=h\sqrt{p}\cdot\pi^{-\frac{1}{2}}\cdot px^2e^{-h^2px^2}dx.$$

故
$$\Sigma px^2y=\frac{h\sqrt{p}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}px^2e^{-h^2px^2}dx.$$

但
$$\Sigma px^2y=\frac{\Sigma px^2}{n}.$$

蓋取其中一項 $p_2x_2^2$ 而研究之，每次觀測，$p_2x_2^2$ 之幾率爲 y_2，而在 n 次觀測中，則其幾率應爲 ny_2. 故

$$\Sigma px^2=p_1x_1^2\cdot ny_1+p_2x_2^2\cdot ny_2+\cdots\cdots+p_nx_n^2\cdot ny_n,$$

或
$$\frac{\Sigma px^2}{n}=p_1x_1^2y_1+p_2x_2^2y_2+\cdots\cdots+p_nx_n^2y_n=\Sigma px^2y.$$

$$\therefore\quad\frac{\Sigma px^2}{n}=\frac{h\sqrt{p}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}px^2e^{-h^2px^2}dx.$$

令 $hx\sqrt{p}=t$，則

$$\frac{\Sigma px^2}{n}=\frac{1}{h^2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}dx$$

$$=\frac{1}{2h^2\sqrt{\pi}}\left[\left(te^{-t^2}\right)_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dx\right]=\frac{1}{2h^2}.$$

因 $hr=0.4769$，故 $\frac{1}{h^2}=\left(\frac{r}{0.4769}\right)^2$，即

$$\left(\frac{r}{0.4769}\right)^2=2\frac{\Sigma px^2}{n}.$$

$$\therefore\quad r=0.6745\sqrt{\frac{\Sigma px^2}{n}}.$$

因 Σpx^2 中之 x 表眞誤差，故爲大於 Σpv^2. 依 §5 之法，得證

$$\frac{\Sigma px^2}{n}=\frac{\Sigma pv^2}{n-1}.$$

$$\therefore\quad r=0.6745\sqrt{\frac{\Sigma pv^2}{n-1}}. \tag{13}$$

代入(12)式得帶權平均數之誤差 r_0 爲

$$r_0=0.6745\sqrt{\frac{\Sigma pv^2}{(n-1)\Sigma p}}. \tag{14}$$

III. 一羣事物之間接觀測

§8. 觀測方程式 設有 AOB, BOC 二角，吾人觀測 AOB 角，BOC 角及 AOC 角之值設爲

$$\angle AOB=35^\circ,\quad \angle BOC=42^\circ.1,\quad \angle AOC=77^\circ.05.$$

因 $\angle AOB+\angle BOC$ 應等於 $\angle AOC$，今所得之結果不等，必觀測有錯

誤.此種錯誤得藉最小二乘方之原理以矯正之.

設 $\angle AOB=z_1$, $\angle BOC=z_2$,則以上之結果爲

$$z_1=35°,\ z_2=42°.1,\ z_1+z_2=77°.05.$$

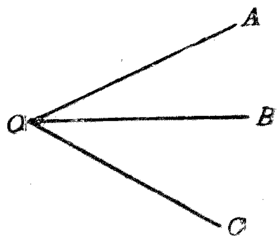

圖 97.

此含兩個未知數之三個方程式,曰**觀測方程式**(observation equations).但以上之觀測方程式各有其權.

§9. **法方程式** 設有 $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_q$ 之 q 個事物作 n 次之觀測,$n>q$,其觀測方程式設爲

$$\left.\begin{array}{ll} a_1z_1+b_1z_2+\cdots\cdots+l_1z_q=M_1, & 帶權\ p_1 \\ a_2z_1+b_2z_2+\cdots\cdots+l_2z_q=M_2, & 帶權\ p_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_nz_1+b_nz_2+\cdots\cdots+l_nz_q=M_n, & 帶權\ p_n \end{array}\right\}, \tag{15}$$

此處 $a_i, b_i, \cdots\cdots, l_i\ (i=1,2,\cdots\cdots,n)$ 爲已知值,M_i 爲測值.

因方程式之個數較未知數爲多,此一組方程式未必有解,故惟有藉最小二乘方之原理以求其最可能之解.

設 $Z_1, Z_2, \cdots\cdots, Z_q$ 爲此 q 個事物之最可能值,則將此代入(15)之左端,其與 M_i 之差不一定爲零,而爲每次觀測之殘差 $v_1, v_2, \cdots\cdots, v_n$;即

$$\left.\begin{array}{ll} a_1Z_1+b_1Z_2+\cdots\cdots+l_1Z_q-M_1=v_1, & 帶權\ p_1 \\ a_2Z_1+b_2Z_2+\cdots\cdots+l_2Z_q-M_2=v_2, & 帶權\ p_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_nZ_1+b_nZ_2+\cdots\cdots+l_nZ_q-M_n=v_n, & 帶權\ p_n \end{array}\right\}, \tag{16}$$

此謂之**殘差方程式**(residual equations).

依最小二乘方之原理，此 q 個未知數 $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_q$ 之最可能值 $Z_1, Z_2, \cdots\cdots, Z_q$，應使

$$p_1v_1^2 + p_2v_2^2 + \cdots\cdots + p_nv_n^2 = \text{最小}.$$

注意 $v_1, v_2, \cdots\cdots, v_n$ 各為 $Z_1, Z_2, \cdots\cdots, Z_q$ 之函數. 欲上式之左端為最小，必須其對 $Z_1, Z_2, \cdots\cdots, Z_q$ 之導微函數為零，即

$$\left.\begin{aligned}
p_1v_1\frac{\partial v_1}{\partial Z_1} + p_2v_2\frac{\partial v_2}{\partial Z_1} + \cdots\cdots + p_nv_n\frac{\partial v_n}{\partial Z_1} &= 0\\
p_1v_1\frac{\partial v_1}{\partial Z_2} + p_2v_2\frac{\partial v_2}{\partial Z_2} + \cdots\cdots + p_nv_n\frac{\partial v_n}{\partial Z_n} &= 0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\
p_1v_1\frac{\partial v_1}{\partial Z_q} + p_2v_2\frac{\partial v_2}{\partial Z_q} + \cdots\cdots + p_nv_n\frac{\partial v_n}{\partial Z_q} &= 0
\end{aligned}\right\}. \tag{17}$$

由(16)式，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_1}{\partial Z_1} = a_1, \quad \frac{\partial v_2}{\partial Z_1} = a_2, \quad \cdots\cdots, \quad \frac{\partial v_n}{\partial Z_1} = a_n,\\
&\frac{\partial v_1}{\partial Z_2} = b_1, \quad \frac{\partial v_2}{\partial Z_2} = b_2, \quad \cdots\cdots, \quad \frac{\partial v_n}{\partial Z_2} = b_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial v_1}{\partial Z_q} = l_1, \quad \frac{\partial v_2}{\partial Z_q} = l_2, \quad \cdots\cdots, \quad \frac{\partial v_n}{\partial Z_q} = l_n,
\end{aligned}$$

代入(17)式中，得

$$\left.\begin{aligned}
p_1a_1v_1 + p_2a_2v_2 + \cdots\cdots + p_na_nv_n &= 0\\
p_1b_1v_1 + p_2b_2v_2 + \cdots\cdots + p_nb_nv_n &= 0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\
p_1l_1v_1 + p_2l_2v_2 + \cdots\cdots + p_nl_nv_n &= 0
\end{aligned}\right\}. \tag{18}$$

(18)式中共有 q 個方程式. 將(15)式中 $v_1, v_2, \cdots\cdots, v_q$ 之值代入(18)式中，得

$$
\begin{aligned}
& p_1a_1(a_1Z_1+b_1Z_2+\cdots\cdots+l_1Z_q-M_1) \\
&\qquad +p_2a_2(a_2Z_1+b_2Z_2+\cdots\cdots+l_2Z_q-M_2)+\cdots\cdots \\
&\qquad +p_na_n(a_nZ_1+b_nZ_2+\cdots\cdots+l_nZ_q-M_n)=0, \\
& p_1b_1(a_1Z_1+b_1Z_2+\cdots\cdots+l_1Z_q-M_1) \\
&\qquad +p_2b_2(a_2Z_1+b_2Z_2+\cdots\cdots+l_2Z_q-M_2)+\cdots\cdots \\
&\qquad +p_nb_n(a_nZ_1+b_nZ_2+\cdots\cdots+l_nZ_q-M_n)=0, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
& p_1l_1(a_1Z_1+b_1Z_2+\cdots\cdots+l_1Z_q-M_1) \\
&\qquad +p_2l_2(a_2Z_1+b_2Z_2+\cdots\cdots+l_2Z_q-M_2)+\cdots\cdots \\
&\qquad +p_nl_n(a_nZ_1+b_nZ_2+\cdots\cdots+l_nZ_q-M_n)=0.
\end{aligned}
$$

命
$$
\begin{aligned}
[paa] &= p_1a_1^2+p_2a_2^2+\cdots\cdots+p_na_n^2, \\
[pab] &= p_1a_1b_1+p_2a_2b_2+\cdots\cdots+p_na_nb_n, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
[paM] &= p_1a_1M_1+p_2a_2M_2+\cdots\cdots+p_na_nM_n,
\end{aligned}
$$

則以上 q 個方程式可以書爲

$$
\left.
\begin{aligned}
&[paa]Z_1+[pab]Z_2+\cdots\cdots+[pal]Z_q=[paM] \\
&[pba]Z_1+[pbb]Z_2+\cdots\cdots+[pbl]Z_q=[pbM] \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&[pla]Z_1+[plb]Z_2+\cdots\cdots+[pll]Z_q=[plM]
\end{aligned}
\right\}. \qquad (19)
$$

(19)爲含 q 個未知數之 q 個方程式，$Z_1, Z_2, \cdots\cdots, Z_q$ 之值可以求得.

(19)曰**法方程式**(normal equations).

特例，若觀測方程式爲等權者，即 $p_1=p_2=\cdots\cdots=p_n$，則法方程

式可由(19)中令 $p=1$ 而得之.

茲設一例以明之.

設有 z_1, z_2 二事物,觀測方程式爲

$$
\begin{aligned}
z_1 \qquad &= 0, & p_1 &= 8, \\
z_2 &= 0, & p_2 &= 10, \\
z_1 + 2z_2 &= 0.25, & p_3 &= 1, \\
z_1 - 3z_2 &= 0.92, & p_4 &= 5.
\end{aligned}
$$

在此

$$
\begin{aligned}
[paa] &= 8+0+1+5=14, \\
[pba] &= 0+0+2-15=-13, \\
[pab] &= 0+0+2-15=-13, \\
[pbb] &= 0+10+4+45=59, \\
[paM] &= 0+0+0.25-4.60=-4.35, \\
[pbM] &= 0+0+0.50+13.80=14.30.
\end{aligned}
$$

故法方程式爲

$$
\left.\begin{aligned}
14Z_1 - 13Z_2 &= -4.35 \\
-13Z_1 + 59Z_2 &= 14.30
\end{aligned}\right\}.
$$

解此聯立方程式,得

$$Z_1 = -0.102, \quad Z_2 = 0.225,$$

此卽 z_1, z_2 之最可能値.

§10. 間接觀測之可能誤差　茲進而研究,由法方程式所解得最可能値之誤差.設求 Z_i 之誤差.命 p_{Z_i} 爲其權,r_{Z_i} 爲其可能誤差,r 爲其權爲 1 之觀測之可能誤差.由(8)式,

$$r_{Z_i} = \frac{r}{\sqrt{p_{Z_i}}}. \tag{20}$$

故欲求 $Z_1, Z_2, \cdots\cdots, Z_q$ 之可能誤差,必須先求 r 及其權.但爲法頗複雜,茲僅書其結果如次:

$$r=0.6745\sqrt{\frac{\Sigma pv^2}{n-q}}. \tag{21}$$

解法方程式(19),可將結果書爲

$$\left.\begin{array}{l}
Z_1=\alpha_1[paM]+\alpha_2[pbM]+\cdots\cdots+\alpha_q[plM]\\
Z_2=\beta_1[paM]+\beta_2[pbM]+\cdots\cdots+\beta_q[plM]\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
Z_q=\lambda_1[paM]+\lambda_2[pbM]+\cdots\cdots+\lambda_q[plM]
\end{array}\right\}. \tag{22}$$

於是可證

$$p_{Z_1}=\frac{1}{\alpha_1}, \quad p_{Z_2}=\frac{1}{\beta_2}, \quad \cdots\cdots, \quad p_{Z_q}=\frac{1}{\lambda_q}. \tag{23}$$

將(21),(23)代入(20)中,則得 r_{Z_i} 之値.

[參考 Merriman's Method of Least Squares, Ch. IV, §§ 72–75.]

習 題 二

設觀測之方程式爲

$$\begin{array}{rl}
z_1=18, & p_1=5;\\
z_1+z_2=42, & p_2=8;\\
z_1+z_3=65, & p_3=10;\\
z_2+z_3=63, & p_4=5;\\
z_1+z_2+z_3=81, & p_5=12.
\end{array}$$

試求 z_1, z_2, z_3 之最可能値,並各可能誤差.

§11. 函數之近似表示法 設 $f(x)$ 爲一連續函數,茲欲求另一

連續函數 $\phi(x, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$ 在 (a,b) 內爲近似於 $f(x)$，此處 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 爲常數，卽在 (a,b) 內 $\phi(x)$ 能代表 $f(x)$. 玆利用最小二乘方之原理以定此 $\phi(x)$.

欲 $\phi(x)$ 代表 $f(x)$，則其誤差必須爲最小，亦卽誤差之平方之積分

$$\int_a^b [f(x)-\phi(x)]^2 dx \tag{1}$$

應爲最小.

但定常數 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 之値甚爲繁複. 但若

$$\phi(x)=\sum_{k=1}^n a_k\phi_k(x)=a_1\phi_1(x)+a_2\phi_2(x)+\cdots\cdots+a_n\phi_n(x), \tag{2}$$

則求 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ 之値甚爲簡便. 在此

$$\begin{aligned}\left[f(x)-\phi(x)\right]^2 &= \left[f(x)-\sum_{k=1}^n a_k\phi_k(x)\right]^2\\ &= \left[f(x)\right]^2-2\sum_{k=1}^n a_k\phi_k(x)f(x)+\left[\sum_{k=1}^n a_k\phi_k(x)\right]^2\\ &= \left[f(x)\right]^2-2\sum_{k=1}^n a_k\phi_k(x)f(x)\\ &\quad+\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n [a_k a_l\phi_k(x)\phi_l(x)].\end{aligned} \tag{3}$$

故

$$\begin{aligned}\int_a^b\left[f(x)-\phi(x)\right]^2 dx &= \int_a^b\left[f(x)\right]^2 dx\\ &\quad-2\sum_{k=1}^n\left[a_k\int_a^b\phi_k(x)f(x)dx\right.\\ &\quad+\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n\left[a_k a_l\int_a^b\phi_k(x)\phi_l(x)dx\right].\end{aligned} \tag{4}$$

故積分(1)爲諸常數之二次多項式,而諸係數爲 x 之已知函數之積分.

將(4)之右端書爲下形:

$$P+\sum_{k=1}^{n}a_kQ_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_ka_lR_{kl}. \tag{5}$$

若此式對所有常數 a_1, a_2, ……, a_n 爲最小,則對 a_1 亦應爲最小;而欲其對 a_1 爲最小之條件爲其對 a_1 之一級偏微分爲零,即

$$Q_1+\sum_{l=1}^{n}a_lR_{1l}+\sum_{k=1}^{n}a_kR_{k1}=0.$$

因 $R_{k1}=R_{1l}$,故

$$Q_1+2\sum_{l=1}^{n}a_lR_{1l}=0.$$

同理(5)對 a_2, ……, a_n 等常數亦各爲最小. 由此得 n 個條件方程式:

$$Q_k+2\sum_{l=1}^{n}a_lR_{kl}=0 \quad (k=1,2,\cdots\cdots,n). \tag{6}$$

因

$$Q_k=-2\int_a^b\phi_k(x)f(x)dx,$$

$$R_{kl}=R_{lk}=\int_a^b\phi_k(x)\phi_l(x)dx,$$

方程式組(6)變爲

$$\int_a^b\phi_k(x)\left[f(x)-\sum_{l=1}^{n}a_l\phi_l(x)\right]dx=0,$$

即

$$\int_a^b\phi_k(x)\left[f(x)-\phi(x)\right]dx=0$$

$$(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n). \tag{7}$$

此 n 個線性方程式，足以定 n 個常數 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 之値. 此曰**法方程式**.

若 $\phi(x)$ 爲 $n-1$ 次多項式

$$\phi(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots\cdots+a_nx^{n-1}, \tag{8}$$

則法方程式爲[註]

$$\int_a^b x^k[f(x)-\phi(x)]dx=0$$

$$(k=0,1,2,\cdots\cdots,n-1). \tag{9}$$

例. 試求 $\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 內以 $ax+bx^3+cx^5$ 表之.

在此 $$f(x)=\sin x,$$

$$\phi(x)=ax+bx^3+cx^5.$$

(9)爲

$$\int_0^\pi x^k[\sin x-(ax+bx^3+cx^5)]\,dx=0 \quad (k=1,3,5). \tag{i}$$

因 $$\int_0^\pi x\sin x\,dx=\pi, \quad \int_0^\pi x^3\sin x\,dx=\pi^3-6\pi,$$

$$\int_0^\pi x^5\sin x\,dx=\pi^5-20\pi^3+120\pi.$$

代入(i)中，得

[註] $\int_a^b x^k f(x)dx$ 謂之 $f(x)$ 之第 k 級之矩量(moment). (9)卽表示

$$\int_a^b x^k f(x)dx=\int_a^b x^k\,\phi(x)\,dx, \quad k=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots,n-1.$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{3}a\pi^3+\frac{1}{5}b\pi^5+\frac{1}{7}c\pi^7=\pi\\
&\frac{1}{5}a\pi^5+\frac{1}{7}b\pi^7+\frac{1}{9}c\pi^9=\pi^3-6\pi\\
&\frac{1}{7}a\pi^7+\frac{1}{9}b\pi^9+\frac{1}{11}c\pi^{11}=\pi^5-20\pi^3+120\pi
\end{aligned}\right\}. \qquad \text{(ii)}$$

解此聯立方程式，得

$$a=0.98785,\quad b=-0.15527,\quad c=0.005643.$$

故
$$\sin x \doteq 0.98785x-0.15527x^3+0.005643x^5. \qquad \text{(iii)}$$

習　題　三

試用最小二乘方法以驗下列之結果:

1. $e^x \doteq 1.013+0.851x+0.839x^2$, $(0,1)$.
2. $\log_e x \doteq -0.94+1.091x-0.141x^2$, $(1,3)$.
3. $\dfrac{1}{(1+x)^2} \doteq 0.990-1.767x+1.661x^2-0.640x^3$, $(0,1)$.

第十九章　線積分

§1. **積分號下求導微函數**　設 $f(x,\alpha)$ 爲 x 及參數 α 之連續函數，α 在求積分時爲常數．再設 a,b 爲 α 之函數，Δa, Δb, $\Delta\alpha$ 表 a,b,α 之增量，則

$$F(\alpha+\Delta\alpha)=\int_{a+\Delta a}^{b+\Delta b}f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx$$

$$=-\int_{a}^{a+\Delta a}f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx$$

$$+\int_{a}^{b}f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx$$

$$+\int_{b}^{b+\Delta b}f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx.$$

$$\therefore\quad F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)=-\int_{a}^{a+\Delta a}f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx$$

$$+\int_{a}^{b}[f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]\,dx$$

$$+\int_{b}^{b+\Delta b}f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx.$$

由積分之中值定理〔第十章(13)式〕，

$$\int_a^{a+\Delta a} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx = f(a+\theta\Delta a,\alpha+\Delta\alpha)\cdot\Delta a,\ \ 0<\theta<1,$$

$$\int_b^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx = f(b+\theta'\Delta b,\alpha+\Delta\alpha)\cdot\Delta b,\ \ 0<\theta'<1,$$

$$\therefore\ \frac{F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)}{\Delta\alpha} = -f(a+\theta\Delta a,\alpha+\Delta\alpha)\frac{\Delta a}{\Delta\alpha}$$

$$+\int_a^b \frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}dx$$

$$+f(b+\theta'\Delta b,\alpha+\Delta\alpha)\frac{\Delta b}{\Delta\alpha}.$$

若$F(x,\alpha)$對α之導微函數存在，當$\Delta\alpha\to 0$時，則得積分號下求導微函數之公式

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha)dx + f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha}. \qquad (1)$$

特例，若a,b為常數而不為α之函數，則

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha)dx. \qquad (2)$$

例.　求$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$之值.

設
$$\phi(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}\sin x}{x}dx, \qquad (\text{i})$$

則
$$\phi(0) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx. \qquad (\text{ii})$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\alpha} = -\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx$$

$$= -\frac{1}{1+\alpha^2}. \quad \text{(由部分求積分法)}$$

$$\therefore \quad \phi(\alpha) = -\tan^{-1}\alpha + C. \tag{iii}$$

茲求 C. 由(i), 當 $\alpha \to \infty$, $\phi(\alpha) \to 0$, $\therefore\ 0 = -\tan^{-1}\infty + C$. 故 $C = \frac{\pi}{2}$. 由(iii), $\phi(\alpha) = -\tan^{-1}\alpha + \frac{\pi}{2}$, $\therefore\ \alpha = \tan\left[\frac{\pi}{2} - \phi(\alpha)\right] = \cot\phi(\alpha)$, 即 $\phi(\alpha) = \cot^{-1}\alpha$. $\phi(0) = \cot^{-1}0 = \frac{\pi}{2}$. 故由(ii),

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

§2. **線積分** 設 AB 爲平面曲線之一弧, 其方程式爲 $y = \phi(x)$ 或 $x = \psi(y)$, 此在 (a, b) 內爲單值且連續. 設 $P(x, y)$ 爲定於 AB 上之函數.

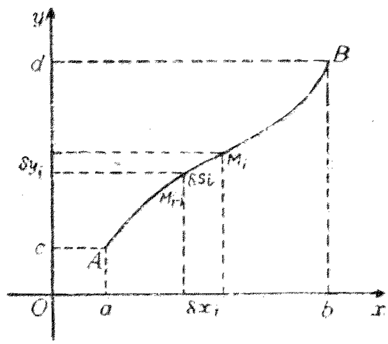

圖 98.

分 AB 弧爲若干部分 δs_i, 在每部分上選取任一點 (x_i, y_i). 則

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i)\,\delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} P[x_i, \phi(x_i)]\,\delta x_i$$

$$= \int_a^b P[x, \phi(x)]\,dx.$$

此曰 $P(x, y)$ 沿 $\widehat{AB}$ 之 x **積分**, 亦曰**線積分** (line integral), 表以符號

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i)\,\delta x_i = \int_{AB} P(x, y)\,dx. \tag{3}$$

同樣，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}P(x_i,y_i)\delta y_i=\int_{AB}P(x,y)dy. \tag{4}$$

以下二公式爲表普通積分與線積分之關係：

$$\int_{AB}P(x,y)dx=\int_a^b P[x,\phi(x)]dx. \tag{5}$$

$$\int_{AB}P(x,y)dy=\int_c^d P[\psi(y),y]dy. \tag{6}$$

注意，1° $$\int_{AB}=-\int_{BA}. \tag{7}$$

2° 若 $AB\perp Ox$，

$$\int_{AB}P(x,y)dx=0. \tag{8}$$

3° 若 $AB\parallel Ox$，

$$\int_{AB}P(x,y)dy=0. \tag{9}$$

4° 若 $y=\phi(x)$ 不爲單值函數，則分爲若干單值函數．例如 $\overset{\frown}{AB}$ 爲如右圖所示，則

$$\int_{AB}=\int_{AC}+\int_{CD}+\int_{DB}. \tag{10}$$

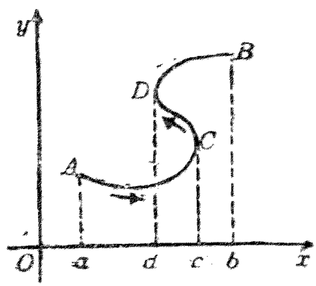

圖 99.

設 AB 弧爲 C，$P(x,y)$ 與 $Q(x,y)$ 皆爲定於C上之函數，則可將$\int_C P\,dx$ 與 $\int_C Q\,dy$ 之和書爲

$$\int_C P\,dx+Q\,dy, \tag{11}$$

此爲 x,y 線積分之一般式.

例. 若 C 爲拋物線 $y=x^2$ 自 $(0,0)$ 至 $(1,1)$ 一段之弧, $P=x+y$, $Q=x^2$, 則

$$\int_C (x+y)\,dx+x^2\,dy=\int_0^1 (x+x^2)\,dx+\int_0^1 y\,dy=\frac{4}{3}.$$

§3. 變數代換公式 設 AB 弧或 C 之方程式爲

$$x=\phi(t),\qquad y=\psi(t),$$

此處 ϕ,ψ 及其導微函數 ϕ',ψ' 皆爲 t 之連續函數. 設

$$x_i=\phi(t_i),\quad y_i=\psi(t_i).$$

由中値定理,

$$x_i-x_{i-1}=\phi'(\theta_i)(t_i-t_{i-1}),\quad t_{i-1}<\theta_i<t_i,$$

因 $\delta x_i=x_i-x_{i-1}$, 故

$$\Sigma P(x_i,y_i)\delta x_i=\Sigma P[\phi(\theta_i),\psi(\theta_i)]\phi'(\theta_i)(t_i-t_{i-1}).$$

求極限, 得

$$\int_C P(x,y)\,dx=\int_{t_0}^T P[\phi(t),\psi(t)]\phi'(t)\,dt,$$

此處 t_0,T 爲 A,B 對參數 t 之坐標.

同樣 $$\int_C Q(x,y)\,dy=\int_{t_0}^T Q[\phi(t),\psi(t)]\psi'(t)\,dt.$$

故 $$\int_C P\,dx+Q\,dy=\int_{t_0}^T [P\phi'(t)+Q\psi'(t)]\,dt, \tag{12}$$

此爲線積分變數代換公式.

§4. 閉曲線所圍之面積 設 C 爲一閉曲線, S 爲此閉曲線所圍之面積,則此面積之正負視一點在 C 上移動之方向而定.若依反時針之方向移動,則所得之 S 爲正,順時針之方向移動,則所得之 S 爲負.

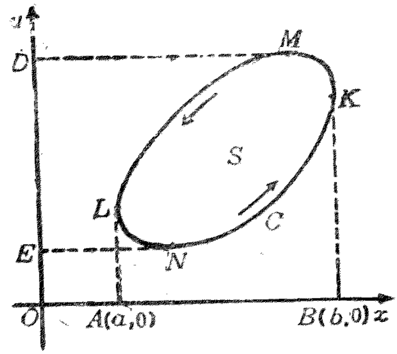

圖 100.

試研究積分

$$\int_C y\,dx,$$

此處 $C=LNK+KML$. 設 $y_1=\psi_1(x)$, $y_2=\psi_2(x)$ 分別爲弧 LNK 與 KML 之方程式,則

$$\text{面積 } ALNKB=\int_a^b \psi_1(x)\,dx,$$

$$\text{面積 } ALMKB=\int_a^b \psi_2(x)\,dx.$$

故
$$S=\int_a^b \psi_2(x)\,dx-\int_a^b \psi_1(x)\,dx.$$

若圍線 C 爲依正向而描,則

$$S=-\int_C y\,dx.$$

同樣
$$S=\int_C x\,dy.$$

相加,得
$$S=\frac{1}{2}\int_C x\,dy-y\,dx. \tag{13}$$

例. 求橢圓

$$x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta$$

之面積.

由(12),(13),

$$S=\frac{1}{2}\int_C x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}ab(\cos^2\theta+\sin^2\theta)d\theta=\pi ab.$$

§5. 格林定理 設 S 表圖 101 中由 $KLMN$ 所圍之區域, KL 與 NM 爲不相交之弧. 令 $C=KLMN$. 設 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 與 $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ 在 S 內及 C 上爲連續, 則

$$\begin{aligned}\iint_S \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,dx&=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial P}{\partial y}dy\\&=\int_a^b[P(x,y_2)-P(x,y_1)]dx\\&=-\int_{MN}P(x,y)dx-\int_{KL}P(x,y)dx=-\int_C P\,dx.\end{aligned}$$

同樣, $$\iint_S\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy=\int_C Q\,dy.$$

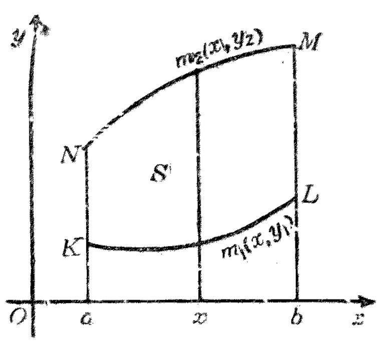

圖 101.

故得格林公式(Green's formula):

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy=\int_C P\,dx+Q\,dy. \tag{14}$$

格林公式可以推廣至於任何形狀之區域。

由格林公式,易得以下之推論:

若於區域 S 內之各點 $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$,則

$$\int_C P\,dx+Q\,dy=0. \tag{15}$$

§6. 積分 $F(x,y)=\int_{a,b}^{x,y} P\,dx+Q\,dy$

定理 1. 若於 S 內,$\partial Q/\partial x=\partial P/\partial y$,設 A, B 爲 S 內之任二定點,則 $\int_{AB} P\,dx+Q\,dy$ 與自 A 至 B 之路線無關.

蓋設 ADB 與 AEB 爲自 A 至 B 之任二路線,於是由(15),

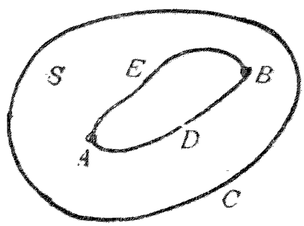

圖 102.

$$\int_{ADBEA} P\,dx+Q\,dy=0,$$

卽
$$\int_{ADB}+\int_{BEA}=0,$$

亦卽
$$\int_{ADB}=-\int_{BEA}=\int_{AEB}.$$

故與路線無關.

積分 $\int_{AB} P\,dx+Q\,dy$ 亦書爲 $\int_A^B P\,dx+Q\,dy$.設 $A\equiv(a,b), B\equiv(x,y)$,

則$\int_A^B P\,dx+Q\,dy$ 爲 x,y 之函數.

定理 2. 若 $F(x,y)=\int_{a,b}^{x,y} P\,dx+Q\,dy$ 及 $\partial Q/\partial x=\partial P/\partial y$, 則 $\partial F/\partial x=P$, $\partial F/\partial y=Q$, 卽 $P\,dx+Q\,dy$ 爲 $F(x,y)$ 之微分.[註]

蓋因

$$F(x+\Delta x,y)-F(x,y)=\int_{x,y}^{x+\Delta x,y} P\,dx+Q\,dy.$$

由中值定理,

$$\int_{x,y}^{x+\Delta x,y} P\,dx=P(x+\theta\Delta x,y)\Delta x,\quad 0<\theta<1.$$

$$\int_{x,y}^{x+\Delta x,y} Q\,dx=0.$$

$$\therefore\quad \frac{\partial F}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x,y)-F(x,y)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}P(x+\theta\Delta x,y)=P(x,y).$$

同樣, $$\frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y).$$

定理 3. 若 $u(x,y)$ 爲 $P\,dx+Q\,dy$ 之一已知積分, 則

$$\int_{a,b}^{x,y} P\,dx+Q\,dy=u(x,y)-u(a,b). \tag{16}$$

因 $$F(x,y)=\int_{a,b}^{x,y} P\,dx+Q\,dy=u(x,y)+C.$$

[註] 試與第十三章, §7 比較.

設 $x,y\to a,b$，則 $0=u(a,b)+C$，$\therefore\ C=-u(a,b)$. 故

$$F(x,y)=u(x,y)-u(a,b).$$

由以上諸定理，得求 $F(x,y)$ 之方法如下：

定理 4. 若 $F(x,y)=\int_{a,b}^{x,y}P\,dx+Q\,dy$，於 S 內 $\partial Q/\partial x=\partial P/\partial y$，則

$$F(x,y)=\int_a^x P(x,b)\,dx+\int_b^y Q(x,y)\,dy \tag{17}$$

在第二積分中，x 視為常數.

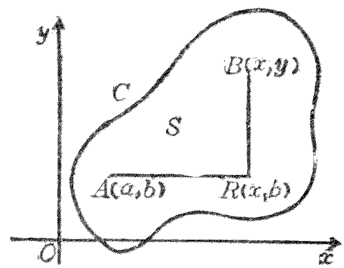

圖 103.

蓋因 F 之值與路線無關；取積分之路線為 ARB，則沿 AR，

$$P\,dx+Q\,dy=P(x,b)\,dx.$$

沿 RB，

$$P\,dx+Q\,dy=Q(x,y)\,dy.$$

故
$$F(x,y)=\int_a^x P(x,b)\,dx+\int_b^y Q(x,y)\,dy.$$

因 $A(a,b)$ 之改變，僅積分常數改變，故可選取 A 使積分易求.

例. 設有 $(4x^3+10xy^3-3y^4)\,dx+(15x^2y^2-12xy^3+5y^4)\,dy$.

此處 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=30xy^2-12y^3$，此於有限平面內皆為存在. 取 A 為原點，則由 (17) 式，

$$F(x,y)=\int_0^x 4x^3\,dx+\int_0^y(15x^2y^2-12xy^3+5y^4)\,dy$$
$$=x^4+5x^2y^3-3xy^4+y^5.$$

習　題　一

1．求 $\int_C x^3 dx$，此處 C 為圓 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta$.

2．求 $\int_C (x^3+y)dx+(x+3y^2)dy$，此處 C 為圓 $x^2+y^2=a^2$.

3．求 $\int_{2,1}^{6,3} y^2\,dx+x^2\,dy$.

4．試證 $\int_{(1,1)}^{(2,5)}(2xy-y^3)\,dx+(x^2-3xy^2)\,dy$ 與路線無關，並求其值.

5．試示若 $F(x,y)=\int_C \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$，(i) 當 C 為不經過及不包含原點之圓，$F(x,z)=0$，(ii) 當 C 為圓 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, F(x,y)=2\pi$；(iii) 當 C 為圓 $x-a=a\cos\theta, y=a\sin\theta, F(x,y)=\pi$.

第二十章

特殊函數. 富里哀級數

§1. 甘馬函數 定積分[註]

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx, \quad n>0$$

曰甘馬函數(gamma function). 此在數理統計中至為重要,而論頻率曲線時為用尤多. 此函數之值為參數 n 之函數,恆以符號 $\Gamma(n)$ 表之,即

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx, \quad n>0. \tag{1}$$

定理. 甘馬函數適合差分方程式:

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n). \tag{2}$$

蓋由部分求積分法,

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}dx=\Big[-xe^{-x}\Big]_0^\infty+n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$$

$$=n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx.$$

故定理成立.

[註] 證明此積分為存在甚易. 參見 Goursat-Hedrick: Mathematical Analysis, Vol. I, §92.

推論. $$\Gamma(n+1)=n!. \tag{3}$$

蓋 $\Gamma(1)=1$. 由(2), 令 $n=1,2,3,\cdots\cdots,n+1$, 得

$$\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1\cdot 1=1!,$$
$$\Gamma(3)=2\cdot\Gamma(2)=2\cdot 1=2!,$$
$$\Gamma(4)=3\cdot\Gamma(3)=3\cdot 2\cdot 1=3!,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\Gamma(n+1)=n!.$$

若 $n<0$, 則(1)之積分不存在, 但吾人可將(2)書為

$$\Gamma(n)=\frac{\Gamma(n+1)}{n}. \tag{4}$$

以此式定 $\Gamma(n)$ 當 n 為負數時之值. 例如

1° 若 $-1<n<0$, 則 $0<n+1<1$. 由(1), $\Gamma(n+1)$ 為已知, 故由(4), $\Gamma(n)$ 為已知.

2° 若 $-2<n<-1$, 則 $-1<n+1<0$. 由 1°, $\Gamma(n+1)$ 為已知, 故由(4), $\Gamma(n)$ 為已知.

餘類推.

積分(1)又可變換為其他有用之形狀如次.

I. 令 $x=y^2$, 則

$$\Gamma(n)=2\int_0^\infty y^{2n-1}e^{-y^2}dy. \tag{5}$$

II. 令 $x=ay$, 則

$$\Gamma(n)=a^n\int_0^\infty y^{n-1}e^{-ay}\,dy. \tag{6}$$

於(5)中, 令 $n=\frac{1}{2}$, 得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}.$$

此結果以後爲有用.

由(3)與(4),當 x 爲任何值時,$\Gamma(x)$之値可以計算(參見 Peirce: A Short Table of Integrals). 由此吾人得繪其圖形如圖 104.

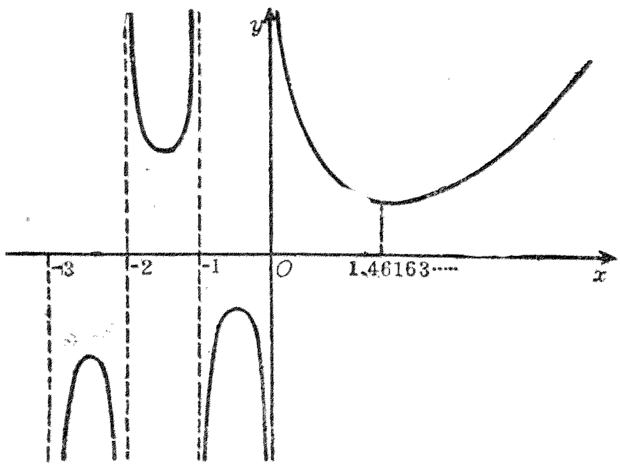

圖 104.

§2. 皮塔函數　積分 $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$ 當 m 與 n 爲正數時爲存在,並定 m 與 n 之函數,此曰皮塔函數(beta function),表以符號

$$\mathrm{B}(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx,\quad m,n>0. \tag{7}$$

定理 1.　$$\mathrm{B}(m,n)=\mathrm{B}(n,m). \tag{8}$$

蓋於(7)中,令 $x=1-y$,則

$$B(m,n)=\int_0^1(1-y)^{m-1}y^{n-1}\,dy$$
$$=\int_0^1(1-x)^{m-1}x^{n-1}\,dx=B(n,m).$$

定理 2.　$$B(m+1,n)+B(m,n+1)=B(m,n).\tag{9}$$

蓋　$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}(1-x+x)\,dx$$
$$=\int_0^1 x^m(1-x)^{n-1}\,dx+\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^n\,dx,$$

此卽(9).

定理 3.　$$nB(m+1,n)=mB(m,n+1).\tag{10}$$

蓋　$$B(m+1,n)=\int_0^1 x^m(1-x)^{n-1}dx.$$

由部分求積分法

$$B(m+1,n)=\left[-\frac{x^m(1-x)^n}{n}\right]_0^1+\frac{m}{n}\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^n dx$$
$$=\frac{m}{n}B(m,n+1).$$

推論.

$$B(m,n)=\frac{n+m}{n}B(m,n+1)=\frac{m+n}{m}B(m+1,n).\tag{11}$$

蓋由(3)與(4),

$$B(m,n)=B(m+1,n)+B(m,n+1)$$
$$=\frac{m}{n}B(m,n+1)+B(m,n+1)$$
$$=\frac{m+n}{n}B(m,n+1).$$

同樣　$$B(m,n)=\frac{m+n}{n}B(m+1,n).$$

皮塔函數亦可變換爲其他形狀：

I. 命 $x=y/a$，則

$$B(m,n)=\frac{1}{a^{m+n-1}}\int_0^a y^{m-1}(a-y)^{n-1}dy. \tag{12}$$

II. 命 $x=\sin^2\theta$，則

$$B(m,n)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta. \tag{13}$$

III. 命 $x=y/(1+y)$，則

$$B(m,n)=\int_0^\infty\frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}dy. \tag{14}$$

§3. 甘馬函數與皮塔函數之關係

定理.
$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}. \tag{15}$$

蓋由(6)式，

$$\Gamma(m)=\int_0^\infty a^m x^{m-1}e^{-ax}dx. \tag{i}$$

命 $n+1=m$，

$$\Gamma(m)a^{n-1}e^{-a}=\int_0^\infty a^{m+n-1}x^{m-1}e^{-a(1+x)}dx.$$

兩端對 a 求積分，

$$\Gamma(m)\int_0^\infty a^{n-1}e^{-a}\,da=\int_0^\infty x^{m-1}dx\int_0^\infty a^{m+n-1}e^{-a(1+x)}da, \tag{ii}$$

此處 $\int_0^\infty a^{n-1}e^{-a}da=\Gamma(n)$．茲求 $\int_0^\infty a^{m+n-1}e^{-a(1+x)}\,da$．

命 $y=a(1+x)$，則 $a=y/(1+x)$，$da=dy/(1+x)$，

$$\therefore \quad \int_0^\infty a^{m+n-1} e^{-a(1+x)} da = \int_0^\infty \frac{y^{m+n-1}}{(1+x)^{m+n}} e^{-y} dy$$

$$= \frac{\Gamma(m+n)}{(1+x)^{m+n}}.$$

由(14)式,(ii)之右端爲

$$\Gamma(m+n)\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx = \Gamma(m+n)\cdot \mathrm{B}(m,n). \qquad \text{(iii)}$$

代入(ii)中,則定理證明.

例. 求 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{1/4}}}$ 之值.

命 $y=x^{\frac{1}{4}}$,則

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{1/4}}} = \int_0^1 4y^3(1-y)^{-\frac{1}{2}} dy = 4\,\mathrm{B}\left(4, \frac{1}{2}\right).$$

由(15),

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{1/4}}} = 4\frac{\Gamma(4)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}.$$

但 $\Gamma(4)=3!$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

故
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{1/4}}} = \frac{128}{35}.$$

習　題　一

1. 試證

$$\Gamma(n)=(m+1)^n\int_0^1 y^m\left(\log\frac{1}{y}\right)^{n-1} dy.$$

[於(1)中命 $x=-(m+1)\log y$.]

2．試證

$$\Gamma(n)\,\Gamma(1-n)=\int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{1+y}\,dy,$$

［於(7)，(8)中令 $m=1-n$.］

3．試由積分號下求導微函數法以求 $\Gamma'(n)$.

4．試證 $\Gamma'(1)=0.5772157\cdots\cdots$，此曰**歐拉常數**(Euler's constant).

5．試證

$$\Gamma\left(\frac{2s+1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2s-1)}{2^s}\sqrt{\pi}.$$

6．試證

$$\Gamma(n)=\frac{\Gamma(n+k)}{n(n+1)\cdots\cdots(n+k-1)}.$$

7．試證

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2.$$

8．試證

$$\int_0^1\frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)};$$

並求當 n 爲奇數與偶數時，上積分之值各如何.

9．試證

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}=\frac{\sqrt{\pi}}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)}.$$

§4. 拔努里數 展開式

$$\frac{x}{e^x-1}=B_0-B_1x+B_2\frac{x^2}{2!}-B_4\frac{x^4}{4!}+B_6\frac{x^6}{6!}-\cdots\cdots \tag{16}$$

之係數 $B_0, B_1, B_2, B_4, \cdots\cdots$ 曰**拔努里數**(Bernoulli's numbers).

(16)之係數,易由實行除法或用馬克勞凌級數展開而得,其值為

$$\begin{array}{llll} B_0=1, & B_1=\frac{1}{2}, & B_2=\frac{1}{6}, & B_4=\frac{1}{30}, \\ B_6=\frac{1}{42}, & B_8=\frac{1}{30}, & B_{10}=\frac{5}{66}, & B_{12}=\frac{691}{2730}, \\ B_{14}=\frac{6}{7}, & B_{16}=\frac{3617}{510}, & B_{18}=\frac{43867}{798}, & B_{20}=\frac{174611}{330}, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array} \tag{17}$$

[求拔努里數之公式見 Pierpont: The Theory of Functions of Real Variables, Vol. II, § 219.]

§5. 超幾何函數 具

$$(x^2-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[(\alpha+\beta+1)x-\gamma]\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y=0 \tag{18}$$

形之微分方程式曰**勾斯方程式**(Gauss's equation).由第十四章,§ 9,法螺倍尼斯之法,得其特解可書為下形:

$$y=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdot\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots\cdots.$$

因
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right|=\left|\frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}\right|=1,$$

故此級數當 $|x|<1$ 時爲收斂. 當 $x=1$, 此級數惟當 $\alpha+\beta-\gamma<0$ 時爲收斂, 並爲絕對收斂. 當 $x=-1$, 此級數惟當 $\alpha+\beta-\gamma-1<0$ 時爲收斂, 並當 $\alpha+\beta-\gamma<0$ 時爲絕對收斂, 其證明[註]則非本書之目的也.

當 $|x|<1$, 以上之級數既爲收斂, 故定一函數, 此曰**超幾何函數**(hypergeometric function), 以符號 $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ 表之, 即

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdot\beta\cdot(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3$$
$$+\cdots\cdots. \tag{19}$$

右端之級數曰**超幾何級數**(hypergeometric series). α,β,γ 曰**參數**. 注意 γ 不能爲零或負數; 蓋若爲零或負數, 則至若干項後, 分母皆爲零也.

當 α,β,γ 爲特殊之值時, $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ 變爲初等函數.

I. 當 $\alpha=1,\ \beta=\gamma$,

$$F(1,\beta,\beta;x)=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots, \tag{20}$$

此爲幾何級數.

II. 當 α 或 β 爲一負整數, 設爲 $-n$, 則因

$$a_{n+2}=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots\cdots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\cdots\cdots(\beta+n)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(n+1)\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots\cdots(\gamma+n)}.$$

此項與以後各項皆爲零, 故 $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ 變爲一多項式.

[註] 證明見

Pierpont: The Theory of Functions of Real Variables, Vol. II, § 100.

III. 當 $\alpha=\beta=1, \gamma=2$, 因

$$F(1,1,2;-x)=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots\cdots$$

及

$$\log(1+x)=x\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\cdots\cdots\right),$$

故

$$F(1,1,2;-x)=\frac{1}{x}\log(1+x). \tag{21}$$

同樣，

$$F(1,1,2;x)=-\frac{1}{x}\log(1-x), \tag{22}$$

$$F\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2};x^2\right)=\frac{1}{2x}\log\frac{1+x}{1-x}. \tag{23}$$

IV. 因

$$F(-\alpha,\beta,\beta;x)=1-\frac{\alpha}{1}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2-\cdots\cdots,$$

故

$$F(-\alpha,\beta,\beta;x)=(1-x)^\alpha. \tag{24}$$

V.

$$xF\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2};x^2\right)=\sin^{-1}x. \tag{25}$$

VI. 因

$$F\left(\alpha,1,1;\frac{x}{\alpha}\right)=1+\frac{\alpha\cdot 1}{1\cdot 1}\frac{x}{\alpha}+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot 1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{x}{1!}+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\frac{x^2}{2!}$$

$$+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots,$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}F\left(\alpha,1,1;\frac{x}{\alpha}\right)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots,$$

故

$$\lim_{\alpha\to\infty}F\left(\alpha,1,1;\frac{x}{\alpha}\right)=e^x. \tag{26}$$

VII. 因

$$xF\left(\alpha,\alpha,\frac{3}{2};-\frac{x^2}{4\alpha^2}\right)=x-\frac{x^3}{3!}+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^2\frac{x^5}{5!}$$

$$-\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^2\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)^2\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots,$$

故
$$\lim_{\alpha\to\infty}xF\left(\alpha,\alpha,\frac{3}{2};-\frac{x^2}{4\alpha}\right)=\sin x. \tag{27}$$

VIII.
$$\lim_{\alpha\to\infty}F\left(\alpha,\alpha,\frac{1}{2};-\frac{x^2}{4\alpha}\right)=\cos x. \tag{28}$$

§ 6. $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ 之表爲積分 下列之關係在統計學中爲有用:

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)$$
$$=\frac{1}{\mathrm{B}(\beta,\gamma-\beta)}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du. \tag{29}$$

蓋由二項定理,當 $|xu|<1$,

$$(1-ux)^{-\alpha}=1+\frac{\alpha}{1}xu+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2u^2$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!}x^3u^3+\cdots\cdots,$$

故 $\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du$

$$=\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}du+\frac{\alpha\cdot x}{1}\int_0^1 u^{\beta}(1-u)^{\gamma-\beta-1}du$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2\int_0^1 u^{\beta+1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}du+\cdots\cdots$$
$$=\mathrm{B}(\beta,\gamma-\beta)+\alpha x\mathrm{B}(\beta+1,\gamma-\beta)$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2\mathrm{B}(\beta+2,\gamma-\beta)+\cdots\cdots. \tag{i}$$

由§2,(11)式,

$$\mathrm{B}(\beta,\gamma-\beta)=\frac{\beta+\gamma-\beta}{\beta}\mathrm{B}(\beta+1,\gamma-\beta),$$

即 $$\mathrm{B}(\beta+1,\gamma-\beta)=\frac{\beta}{\gamma}\mathrm{B}(\beta,\gamma-\beta).$$

故 $\mathrm{B}(\beta+2,\gamma-\beta)=\dfrac{\beta+1}{\gamma+1}\mathrm{B}(\beta+1,\gamma-\beta)=\dfrac{\beta}{\gamma}\cdot\dfrac{\beta+1}{\gamma+1}\mathrm{B}(\beta,\gamma-\beta),$

等等.代入(i)中,則得(29)式.

因 $$\mathrm{B}(\beta,\gamma-\beta)=\frac{\Gamma(\beta)\cdot\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)},$$

故(29)又可書為

$$\Gamma(\alpha,\beta,\gamma;x)$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\cdot\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du. \quad (30)$$

習 題 二

1. 試證(22),(23),(25),(28)諸公式.
2. 試證 $xF\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-x\right)=\tan^{-1}x.$
3. 試證 $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ 適合於勾斯微分方程式.
4. 試將 $1/(1-x)$ 表為超幾何級數.
5. 試將 $(1+x)^n+(1-x)^n$ 表為超幾何級數.
6. 試將 e^x+e^{-x} 表為超幾何級數.

§7. 倍塞爾函數 無窮級數

$$J_n(x)=x^n\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{x^{s+n}}{2^{n+2s}s!(n+s)!},$$

$$(n=0,1,2,\cdots\cdots)\qquad(31)$$

當 x 爲任何值時皆爲收歛，故此級數定 x 之一連續函數.此曰 n 級之倍塞爾函數(Bessel functions of order n).

特例，

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{2\cdot2}+\frac{x^4}{2^2\cdot4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}+\cdots\cdots,\qquad(32)$$

$$J_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^2\cdot4}+\frac{x^5}{2^2\cdot4^2\cdot6}-\frac{x^7}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8}+\cdots\cdots.\qquad(33)$$

由(32),(33)易知

$$\frac{d}{dx}J_0(x)=-J_1(x).\qquad(34)$$

因(31)爲收歛級數，故可逐項求其導微函數.結果得

$$J_n'(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(2s+n)}{2^{n+2s}s!(n+s)!}x^{s-n+1}.\qquad(35)$$

相隣三個倍塞爾函數有下列之關係:

$$J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)-J_{n-1}(x),\quad n>0.\qquad(36)$$

蓋

$$J_{n-1}(x)=\frac{x^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!}+\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s\frac{x^{2s+n-1}}{2^{n+2s-1}s!(n-1+s)!},$$

$$J_{n+1}(x)=-\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s\frac{x^{2s+n-1}}{2^{n+2s-1}(s-1)!(n+s)!},$$

故

$$J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{x^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!}$$

$$+\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s\frac{x^{2s+n-1}}{2^{n+2s-1}}\left[\frac{1}{s!(n-1+s)!}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(s-1)!(n+s)!}\right]$$

$$=\frac{x^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!}+n\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s\frac{x^{2s+n-1}}{2^{n+2s-1}s!(n+s)!}$$

$$=\frac{n}{x}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{x^{2s+n}}{2^{n+2s-1}s!(n+s)!}$$

$$=\frac{2n}{x}J_n(x).$$

同樣,可證

$$2J'_n(x)=J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x),\qquad n>0. \tag{37}$$

以(36)之 $J_{n+1}(x)$代入(37)中,又得

$$J'_n(x)=-\frac{n}{x}J_n(x)+J_{n-1}(x),\quad n>0. \tag{38}$$

由(36),亦得

$$J'_n(x)=\frac{n}{x}J_n(x)-J_{n+1}(x),\qquad n>0. \tag{39}$$

微分方程式

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$$

曰倍塞爾方程式(Bessel equation).讀者由第十四章§9之法,得證其解爲 $y=J_n(x)$.玆反證 $y=J_n(x)$適合於倍塞爾方程式.

求(38)之導微函數,

$$J_n''(x)=\frac{n}{x^2}J_n(x)-\frac{n}{x}J_n'(x)+J_{n-1}'(x). \qquad \text{(i)}$$

於(39)中令 n 為 $n-1$,

$$J_{n-1}'(x)=\frac{n-1}{x}J_{n-1}(x)-J_n(x). \qquad \text{(ii)}$$

由(38)式,

$$J_{n-1}=J_n'+\frac{n}{x}J_n.$$

代入(ii)中,得

$$\begin{aligned}J_{n-1}'&=\frac{n-1}{x}\left[J_n'+\frac{n}{x}J_n\right]-J_n\\&=\frac{n-1}{x}J_n'+\left[\frac{n(n-1)}{x^2}-1\right]J_n.\end{aligned}$$

代入(i)中,

$$\begin{aligned}J_n''&=\frac{n}{x^2}J_n-\frac{n}{x}J_n'+\frac{n-1}{x}J_n'+\left[\frac{n(n-1)}{x^2}-1\right]J_n\\&=\left(\frac{n^2}{x^2}-1\right)J_n-\frac{1}{x}J_n',\end{aligned}$$

即

$$J_n''+\frac{1}{x}J_n'+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)J_n=0. \qquad (40)$$

是以 $y=J_n$ 為倍塞爾方程式之解.

§8. $J_n(x)$ 表為積分 因

$$2\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta=\mathrm{B}(m,n),$$

$$\int_0^{\pi}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta=\mathrm{B}(m,n),$$

$$\therefore \quad \mathrm{B}\left(\frac{2s+1}{2}, \frac{2n+1}{2}\right)=\int_0^\pi \cos^{2s}\theta \sin^{2n}\theta\, d\theta. \qquad (41)$$

茲證 $J_n(x)$ 可表爲積分式如下:

$$J_n(x)=\frac{x^n}{2^n\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)}\int_0^\pi \cos(x\cos\theta)\sin^{2n}\theta\, d\theta. \qquad (42)$$

蓋

$$\cos u=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{u^{2s}}{(2s)!},$$

$$\therefore \quad \cos(x\cos\theta)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(2s)!}x^{2s}\cos^{2s}\theta.$$

$$\therefore \quad \cos(x\cos\theta)\sin^{2n}\theta=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(2s)!}x^{2s}\cos^{2s}\theta\sin^{2n}\theta.$$

因此級數於 $(0,\pi)$ 中爲收斂,故可逐項求積分,得

$$\int_0^\pi \cos(x\cos\theta)\sin^{2n}\theta\, d\theta=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(2s)!}x^{2s}\int_0^\pi \cos^{2s}\theta\sin^{2n}\theta\, d\theta$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(2s)!}x^{2s}\mathrm{B}\left(\frac{2s+1}{2}, \frac{2n+1}{2}\right)$$

[由(41)]

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(2s)!}x^{2s}\frac{\Gamma\left(\frac{2s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{\Gamma(s+n+1)}.$$

由本章習題一,5.,

$$\Gamma\left(\frac{2s+1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2s-1)}{2^s}\sqrt{\pi}.$$

$$\therefore \quad \int_0^{\pi} \cos(x\cos\theta)\sin^{2n}\theta\, d\theta$$

$$=\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(2s)!}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2s-1)}{2^s(n+s)!}x^{2s},$$

即 $$\frac{x^n}{2^n\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\cos(x\cos\theta)\sin^{2n}\theta\, d\theta$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(2s)!}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2s-1)}{2^{(s+n)}(n+s)!}x^{2s+n}.$$

因 $$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2s-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots s(s+1)\cdots(2s-1)\cdot 2s}=\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2s-2)\cdot 2s}$$

$$=\frac{1}{2^s(1\cdot 2\cdot 3\cdots s)}=\frac{1}{2^s s!},$$

故 $$\frac{x^n}{2^n\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\cos(x\cos\theta)\sin^{2n}\theta\, d\theta$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s x^{2s+n}}{2^{2s+n}s!(n+s)!}=J_n(x).$$

故(42)式成立。

§9. π之瓦利斯公式 茲述瓦利斯(Wallis)求 π 之公式。

若 $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$，$0\leqq \sin x\leqq 1$，故

$$\sin^{2m+1}x\leqq\sin^{2m}x\leqq\sin^{2m-1}x.$$

由定積分之定義，

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2m+1}x\,dx<\int_0^{\pi/2}\sin^{2m}x\,dx<\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}x\,dx,$$

卽[註]

$$\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3}<\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$$

$$<\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m-4}{2m-3}\cdots\frac{2}{3}.$$

由此

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1}<\frac{\pi}{2}$$

$$<\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2m-2}{2m-3}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m-1}.$$

此卽表示 $\pi/2$ 之值爲在於兩數之間，此兩數之比爲 $2m/(2m+1)$，卽 $1\Big/\left(1+\dfrac{1}{2m}\right)$. 當 $m\to\infty$，此値趨近於 1. 此卽表示

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{m\to\infty}\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1},\qquad(43)$$

此曰**瓦利斯公式**(Wallis' formula). 此公式更可書之爲較相宜之形式.

因由(43)，

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{m\to\infty}\frac{2^2\cdot4^2\cdots(2m-2)^2\cdot(2m)^2}{3^2\cdot5^2\cdots(2m-1)^2\cdot(2m+1)}$$

$$\doteq\lim_{m\to0}\frac{2^2\cdot4^2\cdots(2m-2)^2}{2^2\cdot5^2\cdots(2m-1)^2}\cdot2m.$$

兩端開平方，

[註] 見 Gibson: Elementary Calculus, § 119.

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\lim_{m\to\infty}\frac{2\cdot4\cdots(2m-2)}{3\cdot5\cdots(2m-1)}\sqrt{2m}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{2^2\cdot4^2\cdots(2m-2)^2}{(2m-1)!}\sqrt{2m}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{2^2\cdot4^2\cdots(2m)^2}{(2m)!}\frac{\sqrt{2m}}{2m}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{2^{2m}(1\cdot2\cdot3\cdots m)^2}{(2m)!\sqrt{2m}}.$$

故結果

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\lim_{m\to\infty}\frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m)!\sqrt{2m}}. \tag{44}$$

§10. **斯得林公式** 玆更進而證明,當 n 爲甚大之值時,求 $n!$ 之近似値之斯得林公式(Stirling formula).本節所述係根據義大利數學家西沙絡(Cesaro)之法.

由第十二章,(9)式,

$$\frac{1}{2}\log_e\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots,$$

此亦可書爲

$$N=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{5(2n+1)^4}+\cdots.$$

若係數中之 3, 5, …皆改爲 3,則得一幾何級數.由此級數之和,得知

$$1<N<1+\frac{1}{12n(n+1)},$$

亦卽

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}. \tag{i}$$

若令
$$u_n=\frac{n!e^n}{n^{n+1/2}},\tag{ii}$$

則
$$u_{n+1}=\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+3/2}},$$

由是
$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{(1+1/n)^{n+1/2}}{e}.$$

(i)以 e 徧除，得

$$1<\frac{u_n}{u_{n+1}}<e^{\frac{1}{12n(n+1)}},\tag{iii}$$

此處 e 之指數可書爲

$$\frac{1}{12n(n+1)}=\frac{1}{12n}-\frac{1}{12(n+1)}.$$

故(iii)可書爲

$$1<\frac{u_n}{u_{n+1}}<e^{\frac{1}{12n}}\cdot e^{-\frac{1}{12(n+1)}},$$

卽
$$e^{-\frac{1}{12n}}<\frac{u_n}{u_{n+1}}e^{-\frac{1}{12n}}<e^{-\frac{1}{12(n+1)}},$$

$$\therefore\quad u_ne^{-\frac{1}{12n}}<u_{n+1}e^{-\frac{1}{12(n+1)}}<u_{n+1}<u_n.$$

由是[註]

$$\lim_{n\to\infty}u_ne^{-\frac{1}{12n}}=\lim_{n\to\infty}u_n=a\ (\text{設}).$$

故當 n 爲任何有限值時

[註] 參考 Fisher: The Mathematical Theory of Probabilities, 2nd ed., Ch. VIII, §58.

$$u_n \cdot e^{-\frac{1}{12n}} < a,$$

此處 $$a = u_n e^{-\frac{\theta}{12n}}, \quad 0 < \theta < 1,$$

卽 $$u_n = a e^{\frac{\theta}{12n}},$$

代入(ii)中，得

$$n! = a \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n+\frac{\theta}{12n}}. \qquad \text{(iv)}$$

玆定係數 a 之値．由(44)式代入(iv)中，並略去 $\theta/12n$，經簡化後，得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{an}{\sqrt{2n}(2n)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \therefore \quad a = \sqrt{2\pi}.$$

由此斯得林公式之最後形式爲

$$n! = \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n}, \qquad (45)$$

亦卽 $$n! = \sqrt{2n\pi} \cdot n^n e^{-n}. \qquad (45')$$

例如由(45′)，

$$10! = 10^{10} \cdot e^{-10} \sqrt{20\pi} = 3598699.$$

由實行乘算，

$$10! = 3628800.$$

若欲有精確之結果，由(iv)，

$$n! = \sqrt{2n\pi} \cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot e^{\frac{\theta}{12n}}, \quad 0 < \theta < 1, \qquad (46)$$

卽 $$\log_e(n!) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\log_e n - n + \log_e(\sqrt{2\pi}) + \frac{\theta}{12n}, \qquad (47)$$

亦即 $$\log_{10}(n!)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log_{10}n-(0.434294482n)+0.39909$$
$$+\frac{0.03619\theta}{n}. \tag{48}$$

(48)之最後一項表所得近似値之精確度.

當 n 自 1 至 1000, $\log_{10}(n!)$ 之七位表見 Pearson 表, 第 98 頁.

§11. **富里哀級數** 假定當 $-\pi<x<\pi$, 函數 $f(x)$ 可展開爲具下形之級數:

$$f(x)=a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\cdots+(a_m\cos mx+b_m\sin mx)+\cdots$$

或 $$f(x)=a_0+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx+b_m\sin mx), \tag{49}$$

則
$$\left.\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx\\ a_m&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx\\ b_m&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mx\,dx\end{aligned}\right\}. \tag{50}$$

茲證(50)之關係. 因

1° $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx=0$, 2° $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,dx=0$,

3° $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\,dx=0$, 4° $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=0, m\neq n$,

5° $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=0$, 6° $\int_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi$,

7° $\int_{-\pi}^{\pi}\text{ccs}^2 mx\,dx=\pi$, 8° $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx\,dx=\pi$.

求(49)自 $-\pi$ 至 π 之積分，得 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=2a_0\pi$．(49) 之兩端乘以 $\cos mx$，求自 $-\pi$ 至 π 之積分，得 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx=a_m\pi$．再(49)之兩端乘以 $\sin mx$，求自 $-\pi$ 至 π 之積分，得 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx=b_m\pi$．故(49)之係數爲(50)。

例一． 將 ϵ^x 在 $(-\pi,\pi)$ 間展開爲富里哀級數。

在此
$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\epsilon^x dx=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi},$$

$$\begin{aligned}a_m&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\epsilon^x\cos mx\,dx\\&=\left[\frac{\epsilon^x(m\sin mx+\cos mx)}{\pi(m^2+1)}\right]_{-\pi}^{\pi}\\&=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi(m^2+1)}\ (\text{當 } m \text{ 爲偶數})\\&=-\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi(m^2+1)}\ (\text{當 } m \text{ 爲奇數}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_m&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\epsilon^x\sin mx\,dx\\&=\left[\frac{\epsilon^x(\sin mx-m\cos mx)}{\pi(m^2+1)}\right]_{-\pi}^{\pi}\\&=-\frac{m(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi(m^2+1)}\ (\text{當 } m \text{ 爲偶數})\\&=\frac{m(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi(m^2+1)}\ (\text{當 } m \text{ 爲奇數}).\end{aligned}$$

故由(49)，得

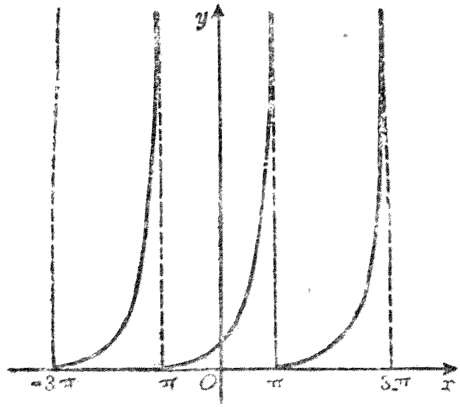

圖 105.

$$e^x=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{5}\cos 2x-\frac{1}{10}\cos 3x+\cdots\right)$$

$$+\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{5}\sin 2x+\frac{3}{10}\sin 3x-\cdots\right). \qquad (51)$$

級數(51)僅在$(-\pi,\pi)$內爲代表e^x. 在$(-\pi,\pi)$以外, 因$\sin mx$, $\cos mx$爲周期函數, 其圖形成重複.

例二. 設 $f(x)=1,\quad -\pi<x<0,$

$$=2,\qquad 0<x<\pi.$$

求在$(-\pi,\pi)$間之富里哀級數.

在此 $$a_0=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}dx+\int_{0}^{\pi}2\,dx\right]=\frac{3}{2},$$

$$a_m=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\cos mx\,dx+2\int_{0}^{\pi}\cos mx\,dx\right]$$

$$=\frac{3}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos mx\,dx=0.$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\sin mx\,dx+2\int_{0}^{\pi}\sin mx\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin mx\,dx=\left[-\frac{1}{\pi m}\cos mx\right]_0^{\pi}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{m\pi}, & \text{當 } m \text{ 爲奇數,}\\[2ex] 0, & \text{當 } m \text{ 爲偶數.}\end{cases}$$

$$\therefore\qquad f(x)=\frac{3}{2}+\frac{2}{\pi}\sin x+\frac{2}{3\pi}\sin 3x+\frac{2}{5\pi}\sin 5x+\cdots.$$

以下將證級數(49)在$(-\pi,\pi)$內確實代表$f(x)$.

§12. 積分$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2m+1)x}{\sin x}dx$ 因由三角學,

$$\frac{1}{2}+\cos\beta+\cos 2\beta+\cdots+\cos m\beta=\frac{\sin\dfrac{2m+1}{2}\beta}{2\sin\dfrac{\beta}{2}},$$

令 $\beta=2x$,

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2m+1)x}{\sin x}dx$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{2}+\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos 2mx\right]dx$$

$$=\frac{\pi}{2}. \tag{i}$$

令 $2m+1=n$, 得

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin nx}{\sin x}dx. \tag{ii}$$

將$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$分爲

$$\left(0,\frac{\pi}{n},\frac{2\pi}{n},\frac{3\pi}{n},\cdots(k-1)\frac{\pi}{n},\frac{k\pi}{n},(k+1)\frac{\pi}{n},\cdots,r\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{2}\right)$$

因 $\sin nx$ 在每分點變號，設 u_k 爲(ii)右端之積分在 $\left(k\frac{\pi}{n},(k+1)\frac{\pi}{n}\right)$ 間之絕對值，則

$$(-1)^k u_k=\int_{k\frac{\pi}{n}}^{(k+1)\frac{\pi}{n}}\frac{\sin nx}{\sin x}dx, \tag{iii}$$

由是
$$\frac{\pi}{2}=u_0-u_1+u_2-\cdots+(-1)^r u_r. \tag{iv}$$

因 $\frac{r+1}{n}\pi=\frac{\pi}{2}$，$\therefore n=2(r+1)$. 故當 $r\to\infty$，$n\to\infty$. 吾人可證當 $n\to\infty$ 時，$u_0\to l_0$，$u_1\to l_1$，$\cdots$，此處 l_0，l_1，$\cdots$ 爲極限值並爲降數列，及 $\lim u_r\to 0$. 由是 $\frac{\pi}{2}$ 可展爲收斂級數如下形:

$$\frac{\pi}{2}=l_0-l_1+l_2-\cdots\cdots. \tag{v}$$

§13. 杜里克來脫積分 1° 設 n 爲任何奇數，h 爲 $\leqq\frac{\pi}{2}$ 之正數，$\phi(x)$ 爲在 $(0,h)$ 內之正，降連續函數. 命

$$J=J[\phi(x)]=\int_0^h\phi(x)\frac{\sin nx}{\sin x}dx, \tag{52}$$

此曰杜里克來脫積分(Dirichlet's integral). 玆證

$$\lim_{n\to\infty}J=\phi(0)\frac{\pi}{2}. \tag{i}$$

分 $(0,h)$ 爲 $\left(0,\frac{\pi}{n},\frac{2\pi}{n},\cdots,\frac{s\pi}{n},h\right)$，命 v_k 爲 J 在第 k 部分之積分之絕對值，則

$$(-1)^k v_k=\int_{k\frac{\pi}{n}}^{(k+1)\frac{\pi}{n}}\phi(x)\frac{\sin nx}{\sin x}dx, \tag{ii}$$

故
$$J=v_0-v_1+v_2-\cdots+(-1)^s v_s. \tag{iii}$$

由積分之中值定理,

$$\int_{k\frac{\pi}{n}}^{(k+1)\frac{\pi}{n}}\phi(x)\frac{\sin nx}{\sin x}dx=\phi(x_k)\int_{k\frac{\pi}{n}}^{(k+1)\frac{\pi}{n}}\frac{\sin nx}{\sin x}dx, \tag{iv}$$

此處 $k\frac{\pi}{n}<x_k<(k+1)\frac{\pi}{n}$.

由 § 12, (iii),

$$v_k=\phi(x_k)u_k. \tag{v}$$

因 $\phi(x_k)$ 與 u_k 皆為降函數,

$$v_0>v_1>v_2>\cdots>v_s.$$

命 k 為奇數並 n 為相當大, 則吾人可書

$$J=[\phi(x_0)u_0-\phi(x_1)u_1+\cdots-\phi(x_k)u_k]+\theta\phi(x_{k+1})u_{k+1}, \tag{vi}$$

此處 $0<\theta<1$.

將 § 12, (iv) 之兩端乘以 $\phi(0)$, 得

$$\phi(0)\frac{\pi}{2}=[\phi(0)l_0-\phi(0)l_1+\cdots-\phi(0)l_k]+\theta'\phi(0)l_{k+1}, \tag{vii}$$

此處 $0<\theta'<1$.

當 $n\to\infty$, $u_0, u_1, \cdots\to l_0, l_1, \cdots$. 再因 $k\frac{\pi}{n}<x_k<(k+1)\frac{\pi}{n}$, 故 $x_k\to 0$, 即 $\phi(x_0), \phi(x_1), \cdots\to\phi(0)$. 故在極限

$$J=[\phi(0)l_0-\phi(0)l_1+\cdots-\phi(0)l_k]+\theta\phi(0)l_{k+1}. \tag{viii}$$

自(viii)中減去(vii),得

$$J-\phi(0)\frac{\pi}{2}\to\theta''\phi(0)l_{k+1},\quad \theta''=\theta-\theta'.$$

當 k 爲相當大,$l_{k+1}\to 0$,故

$$\lim_{n\to\infty}J=\phi(0)\frac{\pi}{2}.$$

2° 若 $\phi(x)$ 爲負降函數,設 $\phi(h)=-C$,則 $y=\phi(x)+C$ 爲正降函數.因 $J[\phi(x)]=J[\phi(x)+C]-J[C]$,

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}J[\phi(x)]=[\phi(0)+C]\frac{\pi}{2}-C\frac{\pi}{2}=\phi(0)\frac{\pi}{2}.$$

故(i)之關係當 $\phi(x)$ 爲負降函數時亦成立.

3° 若 $\phi(x)$ 爲升函數,則 $-\phi(x)$ 爲降函數.

$$\lim_{n\to\infty}J[\phi(x)]=-\lim_{n\to\infty}J[-\phi(x)]=-\left[-\phi(0)\frac{\pi}{2}\right]=\phi(0)\frac{\pi}{2}.$$

故(i)亦爲成立.

4° 設 g 與 h 爲兩數,$0\leqq g<h\leqq\frac{\pi}{2}$,及 $\phi(x)$ 在 (g,h) 內爲單升或單降函數,則

$$\lim_{n\to\infty}\int_g^h\phi(x)\frac{\sin nx}{\sin x}dx=0. \tag{ix}$$

蓋

$$\int_g^h\phi(x)\frac{\sin nx}{\sin x}dx=\int_0^h\phi(x)\frac{\sin nx}{\sin x}dx-\int_0^g\phi(x)\frac{\sin nx}{\sin x}dx$$

$$=\phi(0)\frac{\pi}{2}-\phi(0)\frac{\pi}{2}=0.$$

5° 若 $\frac{\pi}{2}<h<\pi$,分 $(0,h)$ 爲 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2},h\right)$,則

$$J=\int_0^{\pi/2}\phi(x)\frac{\sin nx}{\sin x}dx+\int_{\pi/2}^{h}\phi(x)\frac{\sin nx}{\sin x}dx,$$

此處 $$\int_0^{\pi/2}\phi(x)\frac{\sin nx}{\sin x}dx\to\phi(0)\frac{\pi}{2}.$$

在第二積分中，令 $x=\pi-y$，則

$$\int_{\pi/2}^{h}\phi(x)\frac{\sin nx}{\sin x}dx=-\int_{\pi/2}^{\pi-h}\phi(\pi-y)\frac{\sin ny}{\sin y}dy$$

$$=\int_{\pi-h}^{\pi/2}\phi(\pi-y)\frac{\sin ny}{\sin y}dy=0,\text{當 } n\to\infty.$$

故(i)當 $h<\pi$ 時亦成立.

6° 由以上之討論，得以下之定理:

定理. 若 $0<h<\pi$，$\phi(x)$ 爲連續單升或單降函數，則

$$\lim_{n\to\infty}J=\lim_{n\to\infty}\int_0^{h}\phi(x)\frac{\sin nx}{\sin x}dx=\phi(0)\frac{\pi}{2}. \tag{53}$$

§14. 富里哀定理 若 C 爲 $(-\pi,\pi)$ 中之一點，並設 $f(c-0)$，$f(c+0)$ 爲存在，

1° 若 $f(c-0)=f(c+0)$，則

$$f(c)=\frac{f(c-0)+f(c+0)}{2};$$

2° 若 $f(c-0)\neq f(c+0)$，則令

$$f(c)=\frac{f(c-0)+f(c-0)}{2}.$$

杜里克來脫條件 若 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 內爲有限，並 $(-\pi,\pi)$ 可分爲有限個部分，$f(x)$ 在各部分內爲連續且爲單升或單降，則 $f(x)$

謂之適合於杜里克來脫條件.

富里哀定理　定於$(-\pi,\pi)$內之任一函數，凡適合於杜里克來脫條件者，在$(-\pi,\pi)$內可表爲富里哀級數.

蓋命此函數爲$f(x)$，取α爲求積分變數，則

$$f(x)=a_0+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx+b_m\sin mx). \qquad \text{(i)}$$

命第$k+1$項爲

$$a_k\cos kx+b_k\cos kx, \qquad \text{(ii)}$$

式中　$a_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha,\quad b_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(\alpha)\sin k\alpha\,d\alpha.$

故(ii)可書爲下形:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\alpha)[\cos k\alpha\cos kx+\sin k\alpha\sin kx]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\alpha)\cos k(\alpha-x)dx.$$

設　$$S_m=a_0+\sum_{m=1}^{m}(a_m\cos mx+b_m\sin mx).$$

於是　$$S_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\alpha)\Big[\frac{1}{2}+\cos(\alpha-x)+\cos 2(\alpha-x)+\cdots$$

$$+\cos m(\alpha-x)\Big]dx. \qquad \text{(iii)}$$

當$-\pi<x<\pi$，玆證$\lim\limits_{m\to\infty}S_m=f(x)$.

因　$$\frac{1}{2}+\cos\beta+\cos 2\beta+\cdots+\cos m\beta=\frac{\sin\dfrac{2m+1}{2}\beta}{2\sin\dfrac{\beta}{2}}.$$

令 $\alpha-x=2y,\ \alpha=x+2y$,

$$S_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\alpha)\frac{\sin\frac{2m+1}{2}(\alpha-x)}{2\sin\frac{\alpha-x}{2}}d\alpha$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}}f(x+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}dy.$$

令 $2m+1=n$,

$$S_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}}f(x+2y)\frac{\sin ny}{\sin y}dy. \tag{iv}$$

分 $\left(-\frac{\pi+x}{2},\frac{\pi-x}{2}\right)$ 爲 $\left(-\frac{\pi+x}{2},0\right)+\left(0,\frac{\pi-x}{2}\right)$, 則

$$S_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{0}f(x+2y)\frac{\sin ny}{\sin y}dy$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi-x}{2}}f(x+2y)\frac{\sin ny}{\sin y}dy. \tag{v}$$

於第一積分中, 令 $y=-z$,

$$\int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{0}f(x+2y)\frac{\sin ny}{\sin y}dy$$

$$=-\int_{\frac{\pi+x}{2}}^{0}f(x-2z)\frac{\sin nz}{\sin z}dz\to f(x-0)\frac{\pi}{2},$$

因 $0>\frac{\pi+x}{2}<\pi$.

又 $$\int_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2y)\frac{\sin ny}{\sin y}\,dy \to f(x+0)\frac{\pi}{2}.$$

代入(v)，$$S_m \to \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=f(x), \tag{vi}$$

故定理成立.

注意，於 $x=-\pi$ 及 $x=\pi$，富里哀級數不能代表 $f(x)$.

習 題 三

1. 試將下列各級數在 $(-\pi,\pi)$ 間表為富里哀級數:

(1) $f(x)=x$, (2) $f(x)=x^2+x$,

(3) $f(x)=x\ \ \mathrm{in}\, x$, (4) $f(x)=1,\ -\pi<x<0$

$=-1,\ 0<x<\pi$,

(5) $f(x)=x,\quad 0<x<\pi$

$=2n-x,\ \pi<x<2\pi$.

2. 若 $f(x)$ 為偶函數，則富里哀級數為如何?

3. 若 $f(x)$ 為奇函數，則富里哀級數為如何?