Prof. Dr. H. Brenner | Osnabrück SS 2022

Riemannsche Flächen

Vorlesung 26

Der Beweis der folgenden Aussage erfordert funktionalanalytische Methoden, die wir nicht entwickeln werden.

SATZ 26.1. *Es sei X eine kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche. Dann ist $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum.*

Die Dimension dieses Raumes nennt man das (kohomologische) *Geschlecht* von X, was wir ab der nächsten Vorlesung systematisch untersuchen werden. Hier werden wir zeigen, wie man mit Satz 26.1 zeigen kann, dass man jede „abstrakte“ kompakte riemannsche Fläche „konkrete“ algebraisch über der projektiven Geraden realisieren kann.

Der Existenzsatz für meromorphe Funktionen

SATZ 26.2. *Es sei X eine kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche und $P \in X$ ein Punkt. Dann gibt es eine nichtkonstante meromorphe Funktion auf X, die außerhalb von P holomorph ist.*

Beweis. Nach Satz 26.1 ist $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ endlichdimensional, sei g die Dimension. Es sei $P \in U$ eine offene Umgebung, die einer offenen Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ mit Koordinate z entspreche, und sei

$$V = X \setminus \{P\}.$$

Dann ist U, V eine offene Überdeckung von X und $U \cap V$ ist eine punktierte Kreisscheibe. Jede auf $U \cap V$ definierte holomorphe Funktion definiert via ?ech-Kohomologie eine Kohomologieklasse in $H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Dies wenden wir auf die Potenzen $z^{-1}, z^{-2}, z^{-3}, \ldots$ an. Wegen der Endlichdimensionalität der Kohomologiegruppe muss es in $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ eine nichttriviale lineare Abhängigkeit zwischen den Klassen $[z^{-1}], [z^{-2}], \ldots, [z^{-g-1}]$ geben. D.h. es gibt eine Linearkombination

$$h = \sum_{i=1}^{g+1} c_i z^{-i},$$

wo nicht alle Koeffizienten c_i gleich 0 sind, dessen Klasse die Nullklasse ist. Nach Lemma 22.5 ist die Zuordnung $\check{H}^1(U, V, \mathcal{O}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ injektiv. Daher ist auch h in der ?ech-Kohomologie zur gegebenen Überdeckung trivial. Das bedeutet, dass es holomorphe Funktionen

$$f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$$

und

$$\tilde{f} \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$$

gibt mit

$$h = f - \tilde{f}$$

auf $U \cap V$. Dann ist

$$\tilde{f} = f - h$$

eine insgesamt meromorphe Funktion auf X, die auf $X \setminus \{P\}$ holomorph ist. Auf U liegt eine nichtkonstante meromorphe Funktion mit (eventuell) einem Pol in P vor, der nur von h abhängt und dessen Polordnung höchstens $g+1$ ist. □

Die algebraische Realisierbarkeit von kompakten riemannschen Flächen

Satz 26.3. *Es sei X eine kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche. Dann gibt es eine surjektive endliche holomorphe Abbildung*

$$X \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}.$$

Beweis. Nach Satz 26.2 gibt es eine nichtkonstante meromorphe Funktion f auf X. Nach Satz 18.6 entspricht dies einer holomorphen Abbildung von X nach $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, die wir ebenfalls mit f bezeichnen. Nach Lemma Anhang 3.3 ist die Abbildung eigentlich. Insbesondere sind die Fasern kompakt. Aus der Diskretheit der Fasern bei einer nichttrivialen holomorphen Funktion folgt, dass die Fasern endlich sind. Da das Bild nach Satz Anhang. abgeschlossen und nach Satz 3.15 auch offen ist, folgt, dass die Abbildung surjektiv ist. □

Wir wollen ausgehend von Satz 26.3 zeigen, dass jede kompakte riemannsche Fläche sich algebraisch über der projektiven Geraden realisieren lässt. Als Hilfsmittel verwenden wir die elementar-symmetrischen Polynome, siehe den Anhang.

Lemma 26.4. *Es sei $\pi\colon Y \to X$ eine endliche holomorphe Überlagerung zwischen riemannschen Flächen der Blätterzahl n. Es sei f eine meromorphe Funktion auf Y. Zu einer offenen Menge $U \subseteq X$ mit der Eigenschaft, dass*

$$\pi^{-1}(U) = \biguplus_{i=1}^{n} V_i$$

und $\pi_i\colon V_i \to U$ biholomorph sind, betrachten wir auf U die meromorphen Funktionen

$$f_i := f \circ \pi_i^{-1}.$$

Dann sind die elementar-symmetrischen Polynome $E_j(f_1, \ldots, f_n)$, , $j = 1, \ldots, n$, in den f_i wohldefinierte meromorphe Funktionen auf ganz X.

Beweis. Auf einer offenen Menge $U \subseteq X$ mit der formulierten Eigenschaft kann man f_i über $f_i \circ \pi$ auch als Funktionen auf $\pi^{-1}(U)$ auffassen, die invariant unter der Vertauschung der Kopien oberhalb von U sind. Die Funktionen $E_j(f_1, \ldots, f_n)$ sind aufgefasst auf $\pi^{-1}(U)$ ebenfalls invariant unter einer Vertauschung der Indizes i und man kann sie daher unmittelbar als meromorphe Funktionen auf U auffassen. Zu einer anderen offenen Menge mit der formulierten Eigenschaft erhält man jeweils die gleiche Funktion, da die Nummerierung der Urbilder keine Rolle spielt. $\square$

Lemma 26.5. *Es sei $\pi\colon Y \to X$ eine endliche holomorphe Überlagerung zwischen zusammenhängenden riemannschen Flächen der Blätterzahl n. Es sei f eine meromorphe Funktion auf Y. Dann erfüllt f eine algebraische Gleichung über dem Körper der meromorphen Funktionen von X vom Grad n.*

Beweis. Wir betrachten die meromorphen Funktionen f_i im Sinne von Lemma 26.4 und das Polynom

$$\prod_{i=1}^{n}(T - f_i) \,=\, T^n - E_1(f)T^{n-1} \pm \ldots \pm E_{n-1}(f_1, \ldots, f_n)T \pm E_n(f),$$

wobei die $E_j(f)$ die elementar-symmetrischen Polynome in den f_i sind, die auf ganz X definiert sind. Diese sind meromorphe Funktionen auf X, das Polynom gehört zum Polynomring über dem Körper der meromorphen Funktionen zu X und die Faktorzerlegung existiert über dem Körper der meromorphen Funktionen zu U bzw. zu $\pi^{-1}(U)$. Wenn man in dieses Polynom f einsetzt, so erhält man die Nullfunktion, da man dies auf den offenen Mengen V_i lokal überprüfen kann. D.h. f erfüllt eine algebraische Gleichung vom Grad n über dem Körper der meromorphen Funktionen von X. $\square$

Lemma 26.6. *Es sei $\pi\colon Y \to X$ eine endliche holomorphe Abbildung zwischen zusammenhängenden riemannschen Flächen der Blätterzahl n. Es sei f eine meromorphe Funktion auf Y. Dann erfüllt f eine algebraische Gleichung über dem Körper der meromorphen Funktionen von X vom Grad n.*

Beweis. Dies kann man nach der Herausnahme von diskreten Punktmengen in X und in Y auf die unverzweigte Situation $Y' \to X'$ zurückführen und Lemma 26.5 verwenden. Man beachte, dass in dieser Situation die elementar-symmetrischen Funktionen auf X' sich auf ganz X meromorph fortsetzen lassen. Die Gültigkeit der algebraischen Gleichung liegt nach dem Identitätssatz auf ganz Y vor, da sie auf einer offenen Teilmenge gilt. $\square$

Lemma 26.7. *Es sei $\pi\colon Y \to X$ eine endliche holomorphe Abbildung zwischen zusammenhängenden riemannschen Flächen der Blätterzahl n. Dann ist*

$$\mathcal{M}(X) \subseteq \mathcal{M}(Y)$$

eine endliche Körpererweiterung vom Grad $\leq n$.

Beweis. Nehmen wir an, dass eine Körpererweiterung

$$\mathcal{M}(X) \subseteq \mathcal{M}(Y)$$

vorliegt, deren Grad unendlich ist oder endlich ist mit einem Grad, der größer als n ist. Im ersten Fall gibt es nach Lemma 26.6 innerhalb von $\mathcal{M}(Y)$ eine unendliche Kette von endlichen Körpererweiterungen

$$\mathcal{M}(X) \subset \mathcal{M}(X)[f_1] \subset \mathcal{M}(X)[f_1, f_2] \subset \ldots,$$

es gibt dann also auch (wie sowieso im zweiten Fall) eine endliche Körpererweiterung

$$\mathcal{M}(X) \subset L \subseteq \mathcal{M}(Y),$$

deren Grad über $\mathcal{M}(X)$ größer als n ist. Nach Satz 13.15 (Körper- und Galoistheorie (Osnabrück 2018-2019)) gibt es ein $f \in L$, das L erzeugt, also

$$L = \mathcal{M}(X)[f].$$

Dabei ist der Grad des irreduziblen Minimalpolynoms von f gleich dem Grad der Körpererweiterung im Widerspruch zu Lemma 26.6. □

Satz 26.8. *Es sei $\pi \colon Y \to X$ eine endliche holomorphe Abbildung zwischen kompakten zusammenhängenden riemannschen Flächen der Blätterzahl n. Dann ist*

$$\mathcal{M}(X) \subseteq \mathcal{M}(Y)$$

eine endliche Körpererweiterung vom Grad n.

Beweis. Die Abschätzung, dass der Grad der Körpererweiterung höchstens n ist, wurde in Lemma 26.7 bewiesen.

Es sei nun

$$\mathcal{M}(Y) = \mathcal{M}(X)[g]$$

und es ist zu zeigen, dass das Minimalpolynom von g den Grad n besitzt. Angenommen, das Minimalpolynom

$$H = T^m + a_{m-1}T^{m-1} + \cdots + a_1T + a_0$$

mit $a_j \in \mathcal{M}(X)$ (aufgefasst in $\mathcal{M}(Y)$) hat Grad $m < n$. Es sei $Q \in X$ ein Punkt, über dem keine Verzweigung stattfindet, wo die a_j holomorph sind und worüber g holomorph ist. Es gibt dann Urbildpunkte $P_1, \ldots, P_n \in Y$. Diese erfüllen die Gleichung

$$0 = H(g)(P_i) = \left(\sum_{j=0}^{m} a_j g^j\right)(P_i) = \sum_{j=0}^{m} a_j(P_i) g^j(P_i) = \sum_{j=0}^{m} a_j(Q) g(P_i)^j.$$

D.h. die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ haben die Eigenschaft, dass alle Werte $g(P_i)$ Nullstellen des Polynoms $\sum_{j=0}^{m} a_j(Q)T^j$ sind. Da es nur m Nullstellen gibt, muss beispielsweise $g(P_1) = g(P_2)$ sein. Da g jedoch zusammen mit $\mathcal{M}(X)$ den Körper der meromorphen Funktionen auf Y erzeugt, haben P_1 und P_2 für beliebige meromorphe Funktionen den gleichen Wert. Doch das widerspricht dem Beweis von Satz 26.2. □

Satz 26.9. *Es sei X eine kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche. Dann ist der Körper der meromorphen Funktionen $\mathcal{M}(X)$ eine endliche Körpererweiterung vom Körper der rationalen Funktionen $\mathbb{C}(t)$.*

Beweis. Nach Satz 26.3 gibt es eine surjektive endliche holomorphe Abbildung

$$X \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}},$$

sagen wir mit Blätterzahl n. Nach Satz 26.8 liegt eine endliche Körpererweiterung

$$\mathcal{M}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \subseteq \mathcal{M}(X)$$

vom Grad n vor und nach Satz 19.19 ist

$$\mathcal{M}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{C}(t).$$

□

Mit Hilfe der vorstehenden Resultate kann man zeigen, dass man jede kompakte riemannsche Fläche als eine glatte projektive Kurve erhalten kann. Dies ist nach diesen Ergebnissen noch eine rein algebraische Aussage, da man jede endliche Körpererweiterung von $\mathbb{C}(t)$ als Funktionenkörper einer eindeutig bestimmten glatten projektiven Kurve realisieren kann. Der folgende Satz besagt, dass zu einer glatten projektiven Kurve der Funktionenkörper mit dem Körper der meromorphen Funktionen auf der zugehörigen riemannschen Fläche übereinstimmt.

Satz 26.10. *Es sei X eine zusammenhängende glatte projektive Kurve über $\mathbb{C}$ und sei X_{an} die zugehörige kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche. Dann stimmt der Körper der meromorphen Funktionen $\mathcal{M}(X_{an})$ mit dem Funktionenkörper der projektiven Kurve überein.*

Beweis. Es gibt einen algebraischen endlichen Morphismus

$$X \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}},$$

dabei ist der Grad n der Körpererweiterung der Funktionenkörper $\mathbb{C}(t) = K(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \subseteq K(X)$ nach Satz 13.8 (Elliptische Kurven (Osnabrück 2021-2022)) gleich der generischen Anzahl der Urbildpunkte. Diese Abbildung induziert eine endliche holomorphe Abbildung zwischen den riemannschen Flächen

$$X_{\text{an}} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}},$$

deren Blätterzahl gleich n ist. Nach (dem Beweis von) Satz 26.9 besitzt die Körpererweiterung

$$\mathbb{C}(t) \subseteq \mathcal{M}(X)$$

ebenfalls den Grad n. Aus der trivialen Inklusion $K(X) \subseteq \mathcal{M}(X)$ folgt dann $K(X) = \mathcal{M}(X)$. □

Der folgende Satz über Nullstellengebilde schließt an Lemma 14.2 an.

Satz 26.11. *Es sei X eine zusammenhängende riemannsche Fläche, es seien $a_0, \ldots, a_{n-1}$ holomorphe Funktionen auf X und es sei das Polynom*

$$T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_2T^2 + a_1T + a_0$$

irreduzibel. Dann ist das Nullstellengebilde Y zu P über X zusammenhängend.

Beweis. Wir argumentieren über die offene Teilmenge von X, auf der die meromorphen Funktionen holomorph sind, was die Irreduzibilität nicht ändert. Die α_i seien also holomorph. Die Abbildung $Y \to X$ ist endlich. Nehmen wir an, es gebe eine Zerlegung

$$Y = Y_1 \uplus \ldots \uplus Y_k$$

in Zusammenhangskomponenten Y_j. Die induzierten Abbildungen $Y_j \to X$ sind ebenfalls endlich. Nach Lemma 26.6 erfüllt die auf Y_1 eingeschränkte Funktion T eine Ganzheitsgleichung vom Grad $< n$. Sie erfüllt aber auch die Ausgangsgleichung auf Y und damit auf Y_1. Dies widerspricht der Irreduzibilität. □

Satz 26.12. *Es sei $\pi \colon Y \to X$ eine endliche holomorphe Abbildung zwischen kompakten zusammenhängenden riemannschen Flächen der Blätterzahl n. Dann lässt sich Y über dem Komplement einer diskreten Teilmenge von X als Nullstellengebilde zu einem Polynom vom Grad n über dem Körper $\mathcal{M}(X)$ realisieren.*

Beweis. Nach Satz 26.8 liegt eine endliche Körpererweiterung $\mathcal{M}(X) \subseteq \mathcal{M}(Y)$ vom Grad n vor. Nach Satz 13.15 (Körper- und Galoistheorie (Osnabrück 2018-2019)) ist

$$\mathcal{M}(Y) = \mathcal{M}(X)[g] \cong \mathcal{M}(X)[T]/(H)$$

mit einer meromorphen Funktion g auf Y und einem Minimalpolynom

$$H = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_1T + a_0$$

mit meromorphen Funktionen $a_j \in \mathcal{M}(X)$. Es sei $X' \subseteq X$ das Komplement einer diskreten Teilmenge derart, dass π über X' unverzweigt ist, dass die a_j holomorph auf X' sind und dass g auf

$$Y' = \pi^{-1}(X')$$

holomorph ist. Wir betrachten die Abbildung

$$\pi \times g \colon Y' \longrightarrow X' \times \mathbb{C}.$$

Wegen $H(g) = 0$ als holomorphe Funktion auf Y ist

$$H(g)(P) = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j g^j \right)(P) = \sum_{j=0}^{n} a_j(\pi(P)) g^j(P) = H(\pi(P), g(P)) = 0$$

und daher liegt das Bild von $\pi \times g$ im Nullstellengebilde V zu H. Die Abbildung ist injektiv (vergleiche den Beweis zu Satz 26.8) und aus Anzahlgründen auch surjektiv. Wir haben also eine Homöomorphie zwischen den beiden holomorphen Überlagerungen $Y' \to X'$ und $V \to X'$ über X'. Daher ist $Y' \to V$ auch biholomorph. $\square$

Bemerkung 26.13. Entsprechend zu Satz 26.1 gilt, dass für eine invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ auf einer zusammenhängenden kompakten riemannschen Fläche X die Kohomologiegruppen $H^1(X, \mathcal{L})$ endlichdimensional sind. Entsprechend zu Satz 26.2 folgt, dass die invertierbare Garbe einen meromorphen Schnitt besitzt, der abgesehen von einem Punkt holomorph ist. Dies erlaubt es, eine invertierbare Garbe als eine Untergarbe der Garbe der meromorphen Funktionen zu realisieren. Dies bedeutet wegen Lemma 20.16, dass jede invertierbare Garbe die zugehörige invertierbare Garbe $\mathcal{L}_D$ zu einem Divisor D ist. Man kann also Konzepte wie den Grad eines Divisors auf jede invertierbare Garbe übertragen. Mit Satz 20.17 folgt

$$\mathrm{DKG}\,(X) \,\cong\, \mathrm{Pic}\,(X) \,\cong\, H^1(X, \mathcal{O}_X^\times).$$

Aus Lemma 25.12 folgt dann wiederum im kompakten Fall, dass $H^1(X, \mathcal{M}_X^\times)$ trivial ist.

Abbildungsverzeichnis