

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 3

Aufgaben

AUFGABE 3.1. Es sei $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Bestimme den Träger der folgenden 6-Tupel mit Werten in \mathbb{R} .

- (1) $(7, 1, 0, 0, 5, 0)$,
- (2) $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$,
- (3) $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$,
- (4) $(7, -10, 4, 4, 5, -19)$,
- (5) $(0, 1, 0, 0, 0, 0)$,
- (6) $(0, 5, 0, -5, 5, 0)$.

Wie sieht die Antwort in einem Körper der Charakteristik 5 aus?

AUFGABE 3.2. Bestimme sämtliche simplizialen Komplexe auf einer höchstens dreielementigen Grundmenge und skizziere die zugehörige Achsenraumkonfiguration und die geometrische Realisierung.

AUFGABE 3.3. Es sei ein simplizialer Komplex Δ auf der Menge V und ein Körper K gegeben. Zeige, dass die zu Δ gehörende Achsenraumkonfiguration über K die Beschreibungen

$$\Delta(K) = \bigcup_{F \in \Delta} K^F = \bigcup_{F \in \Delta, F \text{ Facette}} K^F$$

besitzt.

AUFGABE 3.4. Es sei $V = V(XYZ) \subseteq \mathbb{A}_K^3$. Beschreibe die möglichen Schnitte von V mit einer Ebene durch den Nullpunkt. Was ist der „typische“ Schnitt?

AUFGABE 3.5. Bestimme und skizziere für jede Achsenraumkonfiguration A im \mathbb{R}^n , $n = 1, 2, 3$, den Durchschnitt $A \cap S^{n-1}$ mit der Sphäre. Welche topologischen Eigenschaften besitzt dieser Schnitt (Zusammenhangskomponenten, Fundamentalgruppe, Mannigfaltigkeitsstruktur)?

AUFGABE 3.6. Zeige, dass man eine Achsenraumkonfiguration A im \mathbb{R}^n aus ihrem Durchschnitt $A \cap S^{n-1}$ mit der Sphäre rekonstruieren kann.

AUFGABE 3.7. Es sei $\Delta(K) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine Achsenraumkonfiguration. Zeige, dass $\Delta(K)$ eine Unterhalbgruppe des affinen Raumes ist, wenn man diesen mit der komponentenweisen Multiplikation als Verknüpfung versteht.

AUFGABE 3.8. Zeige, dass die reelle Achsenraumkonfiguration A im \mathbb{R}^n sich aus dem Schnitt $A \cap H$, mit

$$H = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n x_j = 1 \right\},$$

rekonstruieren lässt, indem man zu jedem Punkt $P \in A \cap H$ die Gerade durch den Nullpunkt und P nimmt.

AUFGABE 3.9. Welche Vor- oder Nachteile hat es, einen simplizialen Komplex auf einer beliebigen Menge V oder auf $\{1, \dots, n\}$ anzusetzen?

AUFGABE 3.10. Zeige, dass sich über dem Körper K mit zwei Elementen eine Achsenraumkonfiguration $A \subseteq K^n$ im Allgemeinen nicht aus dem Durchschnitt $A \cap H$ mit $H = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + \dots + x_n = 1\}$ rekonstruieren lässt.

Es sei Δ ein simplizialer Komplex auf der Menge V und Δ' ein simplizialer Komplex auf der (zu V disjunkten) Menge W . Dann nennt man den simplizialen Komplex auf $V \cup W$, der aus allen Seiten der Form $S \cup T$ mit $S \in \Delta$ und $T \in \Delta'$ besteht, das *Smashprodukt* von Δ und Δ' . Es wird mit $\Delta \wedge \Delta'$ bezeichnet.

AUFGABE 3.11. Es sei Δ ein simplizialer Komplex auf der Menge V und Δ' ein simplizialer Komplex auf der Menge W mit den zugehörigen Achsenraumkonfigurationen $\Delta(K) \subseteq K^V$ und $\Delta'(K) \subseteq K^W$. Zeige, dass dann in $K^{V \cup W}$ die Beziehung

$$K(\Delta) \times K(\Delta') = K(\Delta \wedge \Delta')$$

besteht, wobei $\Delta \wedge \Delta'$ das Smashprodukt der beiden simplizialen Komplexe bezeichnet.

AUFGABE 3.12.*

- (1) Skizziere die Nullstellengebilde

$$V = V(XY, XZ, YZ) \subseteq \mathbb{A}_K^3$$

und

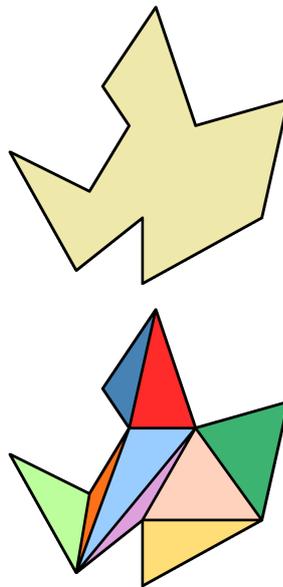
$$W = V(ST(S - T)) \subseteq \mathbb{A}_K^2$$

im reellen Fall.

- (2) Stifte einen bijektiven Morphismus

$$\varphi: V \longrightarrow W.$$

- (3) Zeige, dass der Morphismus
- φ
- außerhalb des Nullpunktes ein Isomorphismus ist (die Charakteristik des Körpers sei
- $\neq 2$
-).

Triangulación

Der ursprüngliche Ausgangspunkt für simpliziale Komplexe war es, komplizierte topologische Gebilde durch einfachere Gebilde zu approximieren, deren Kombinatorik die topologischen Eigenschaften widerspiegeln soll. Man spricht von einer *Triangulierung*.

AUFGABE 3.13. Bestimme die Grundmenge und den simplizialen Komplex, der im Bild erkennbar ist.

AUFGABE 3.14. Sei K ein Körper der Charakteristik $p \geq 0$. Man charakterisiere die Polynome $F \in K[X, Y]$ mit der Eigenschaft, dass

- (1) die erste partielle Ableitung,

- (2) die zweite partielle Ableitung,
- (3) beide partiellen Ableitungen

0 sind.

AUFGABE 3.15. Beweise den Satz von Schwarz für den Polynomring $K[X_1, \dots, X_n]$ über einem beliebigen Körper K , also die Vertauschbarkeit von formalen partiellen Ableitungen.

AUFGABE 3.16. Es sei K ein Körper und seien $F, G \in K[X_1, \dots, X_n]$ Polynome. Zeige, dass für die partiellen Ableitungen die Produktregel

$$\partial_i(FG) = F\partial_i(G) + G\partial_i(F)$$

gilt.

AUFGABE 3.17. Es sei K ein Körper und seien $F_1, \dots, F_m \in K[X_1, \dots, X_\ell]$ und $G_1, \dots, G_n \in K[X_1, \dots, X_m]$ Polynome, die zu den polynomialen Abbildungen

$$\mathbb{A}_K^\ell \xrightarrow{F} \mathbb{A}_K^m \xrightarrow{G} \mathbb{A}_K^n$$

Anlass geben. Es seien $J(F)_P$ und $J(G)_Q$ die durch formales partielles Ableiten definierten Jacobi-Matrizen. Beweise die formale Kettenregel

$$J(G \circ F)_P = J(G)_{F(P)} \circ J(F)_P.$$

AUFGABE 3.18. Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und

$$\varphi: G \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine stetig differenzierbare Abbildung, die im Punkt $P \in G$ ein surjektives totales Differential besitze. Es sei

$$\psi: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

(mit $U \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ offen) ein lokaler Diffeomorphismus auf die Faser durch P , bei dem $Q \in U$ auf P abgebildet wird. Zeige, dass man den Tangentialraum an die Faser durch P auch als

$$\left\{ P + (D\psi)_Q(u) \mid u \in \mathbb{R}^{n-m} \right\}$$

beschreiben kann.

AUFGABE 3.19. Bestimme den Tangentialraum an die Faser im Punkt $(2, -1, 3)$ der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto \left(x^2 e^z - y^3, \frac{x}{e^{yz}} \right),$$

und zwar sowohl durch lineare Gleichungen als auch durch eine parametrisierte Gerade.

AUFGABE 3.20.*

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto (x^2 + y^2 + z^2, 2x + 3y + 4z).$$

- a) Bestimme die regulären Punkte der Abbildung φ . Zeige, dass $P = (1, -2, 1)$ regulär ist.
- b) Beschreibe für den Punkt $P = (1, -2, 1)$ den Tangentialraum an die Faser F von φ durch P .
- c) Man gebe für $P = (1, -2, 1)$ einen lokalen Diffeomorphismus zwischen einem offenen Intervall und einer offenen Umgebung von P in der Faser F durch P an.

AUFGABE 3.21. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2,$$

im Punkt $P = (1, -1, 2)$. Man gebe eine differenzierbare Abbildung

$$\psi: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

an, wobei U eine möglichst große offene Teilmenge des Tangentialraumes $T_P F$ an die Faser F_P von φ durch P ist, die eine Bijektion zwischen U und $V \cap F_P$ stiftet ($P \in V \subseteq \mathbb{R}^3$ offen).

AUFGABE 3.22. Bestimme den singulären Ort der Hyperfläche $V(X^2 + Y^3 Z^2 + Z^2)$ und zeige, dass es sich nicht um eine isolierte Singularität handelt.

Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Triangulación.svg , Autor = Benutzer Magister Mathematicae auf Commons, Lizenz = CC0 1.0 3
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7