Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 40

Übungsaufgaben

AUFGABE 40.1. Bestimme die[1] Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ mit } v(2) = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

AUFGABE 40.2. Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = \begin{pmatrix} t^2 - \sin t \\ \cos^2 t \end{pmatrix} \text{ mit } v(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

AUFGABE 40.3. Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems zum Vektorfeld

$$F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (t,x,y) \longmapsto (-ay, ax),$$

und zur Anfangsbedingung $v(s) = (b,c)$ (dabei seien $a,b,c,s \in \mathbb{R}$ fixierte reelle Zahlen).

AUFGABE 40.4. Wie löst man eine gewöhnliche Differentialgleichung zu einem stetigen ortsunabhängigen Vektorfeld

$$f\colon I \times U \longrightarrow V,\, (t,v) \longmapsto f(t,v) = g(t)?$$

AUFGABE 40.5. Sei

$$F\colon I \times U \longrightarrow V,\, (t,v) \longmapsto F(t,v),$$

ein Vektorfeld. Zeige, dass eine konstante Abbildung

$$\varphi\colon I \longrightarrow U,\, t \longmapsto \varphi(t) = c,$$

genau dann eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung $v' = F(t,v)$ ist, wenn $F(t,c) = 0$ ist für alle $t \in I$.

AUFGABE 40.6. Löse das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = txy^2 \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

[1] Mit dieser Formulierung wird hier und im Folgenden implizit benutzt, dass die Lösung eindeutig ist. In den meisten der hier gestellten Aufgaben ergibt sich die Eindeutigkeit direkt, sie ist aber nicht Teil der Aufgabenstellung.

Aufgabe 40.7.*

Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow V,\, t \longmapsto \varphi(t),$$

eine Lösung der zeitunabhängigen Differentialgleichung

$$v' = F(t,v) = F(v)$$

zum Vektorfeld $F\colon V \to V$. Zeige, dass auch

$$\psi(t) := \varphi(t+c)$$

zu jedem $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist.

Aufgabe 40.8. Es sei $W \subseteq V$ ein Untervektorraum in einem reellen endlichdimensionalen Vektorraum V. Es sei $F\colon I \times V \to V$ ein Vektorfeld auf V mit der Eigenschaft, dass $F(t,v) \in W$ für alle $(t,v) \in V$ gilt. Zeige, dass jede Lösung zur Differentialgleichung

$$v' = F(t,v)$$

ganz in einer Teilmenge der Form $P+W$ (einem affinen Unterraum von V) verläuft.

Aufgabe 40.9.*

Es sei V ein euklidischer Vektorraum, $u \in V$ ein fixierter Vektor und $F\colon \mathbb{R}\times V \to V$ ein stetiges Vektorfeld mit der Eigenschaft

$$F(t,v) = F(t,v+u)$$

für alle $v \in V$. Es sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to V$ eine Lösung zur Differentialgleichung

$$v' = F(t,v).$$

Zeige, dass auch

$$\psi(t) := \varphi(t) + u$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung ist.

Aufgabe 40.10. Es sei ein entkoppeltes Differentialgleichungssystem zum Vektorfeld

$$F(t,x_1,\ldots,x_n) = (f_1(t,x_1),\ldots,f_n(t,x_n))$$

gegeben. Erläutere, wie sich die Lösungen der einzelnen Differentialgleichungen $x_i' = f_i(t,x_i)$ zur Gesamtlösung verhalten, wie dabei die Definitionsintervalle der Lösungen zusammenhängen und was man über die Eindeutigkeit von Lösungen aussagen kann.

Aufgabe 40.11. Finde alle Lösungen des Differentialgleichungssystems zum Vektorfeld

$$F\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (t,x,y) \longmapsto \big(t^2x, yt+\sin t\big).$$

Aufgabe 40.12.*

a) Zeige, dass die archimedischen Spiralen

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (at\cos(t+t_0),\ at\sin(t+t_0)),$$

(zu fixierten $a, t_0 \in \mathbb{R}$) Lösungskurven für die Differentialgleichung (bei $t > 0$)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -y + \frac{x}{t} \\ x + \frac{y}{t} \end{pmatrix}$$

sind.

b) Man gebe eine Lösung für das Anfangswertproblem

$$v\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zu dieser Differentialgleichung an.

Aufgabe 40.13. Finde die Lösung φ des Anfangswertproblems für das Zentralfeld

$$F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t, v, w) \longmapsto (t^2 - t)(v, w) = \big((t^2 - t)v, (t^2 - t)w\big),$$

mit $\varphi(0) = (1, 1)$.

Aufgabe 40.14.*

Bestimme die Lösung φ des Anfangswertproblems für das Zentralfeld

$$F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t, x, y) \longmapsto e^t x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

mit $\varphi(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 40.15.*

Es sei ein Vektorfeld der Form

$$F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t,\ x,\ y) \longmapsto h(t,\ x,\ y) \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix},$$

mit einer stetigen Funktion

$$h\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (t,\ x,\ y) \longmapsto h(t,\ x,\ y),$$

gegeben. Die Richtungsvektoren stehen also stets senkrecht zu den Ortsvektoren. Es sei $r \in \mathbb{R}$ und es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung zur eindimensionalen Differentialgleichung

$$y' = -h(t, r\cos y(t), r\sin y(t)).$$

Zeige, dass

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \begin{pmatrix} r\cos(g(t)) \\ r\sin(g(t)) \end{pmatrix},$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$v' = F(t,v)$$

ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 40.16. (4 Punkte)

Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = \left(-\sin^3 t \cos t,\ \frac{t^3 - t + 1}{t^2 - 4}\right) \text{ mit } v(0) = (3,\ 7)\ .$$

Aufgabe 40.17. (4 Punkte)

Finde die Lösung des Anfangswertproblems zum Vektorfeld

$$F\colon\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t,x,y) \longmapsto \left(xt - 3(t+1)e^{-t},\ \frac{t^2}{\sin y}\right)$$

und zur Anfangsbedingung $v(0) = (2,0)$.

Aufgabe 40.18. (3 Punkte)

Löse das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = t^2(x-y) \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 40.19. (4 Punkte)

Finde die Lösung φ des Anfangswertproblems für das Zentralfeld

$$F\colon\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t,v,w) \longmapsto (t^3 - t)(v,w) = ((t^3-t)v, (t^3-t)w),$$

mit $\varphi(0) = (2,3)$.

Aufgabe 40.20. (4 Punkte)

Finde die Lösung φ des Anfangswertproblems für das Zentralfeld

$$F\colon\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t,v,w) \longmapsto (t^2 v)(v,w) = (t^2 v^2, t^2 vw),$$

mit $\varphi(0) = (5,-1)$.

Aufgabe 40.21. (5 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $U \subseteq V$ offen und $F\colon\ U \to V$ ein zeitunabhängiges Vektorfeld. Es sei $v\colon\ J \to U$ eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung $v' = F(v)$. Es gebe zwei Zeitpunkte $t_0 \neq t_1$ in J mit $v(t_0) = v(t_1)$. Zeige, dass es dann eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung dieser Differentialgleichung gibt.

Abbildungsverzeichnis