中等教育立体幾何学教科書

中等教育

立体幾何學教科書

廣島高等師範學校

附屬中學校

數學研究會著

東　京

修文館藏版

緒　言

中學校第五學年ノ數學科敎授程困難ヲ感ズルモノハナイ。彼等ハ卒業後或ハ高等學校ニ入ラントシ,或ハ專門學校ニ進マントシ又或ハ實業ニ從事セントシテ居ルノデアル。彼等ハソノ進ムトコロニ急ナルノ餘リ只己ガ目前ノ必要トスル所ヲ追フノニ汲々トシテ學習ニ統一モ熱心モナイ。數學科敎授ノ効果ノアガラナイノモ無理ハナイノデアル。加フルニ立體幾何學ハ全ク立體圖形ノ想像ヲ主トスル學科デアルカラ學習ニモ敎授ニモ一層困難ヲ感ズルノデアル。ソレ故立體幾何學ヲ敎ヘ易ク學ビ易ク而モ興味深キモノタラシメテ生徒ノ學習ノ効果ヲ多カラシムルヤウニスルニハソノ内容ニ於テトクニ取捨鹽梅ニ工夫ヲ要スルノデ吾々敎授者ノ任務トスルトコロハ實ニコヽニアリト考ヘルノデアル。本會ハ此趣旨ニヨツテ此敎科書ヲ立案シ實地敎授ニ鑑ミテ熟議訂正シ更ニ高橋敎授ノ校閲ヲ經タモノデアル。

本書ハ未ダ完全ナリトイフコトハ出來ナイ。唯之ヲ以テ研究ノ歩ヲ進メル一階梯トスルノミデアル。幸ニ諸賢ノ御批正ヲ仰ギテ數學上ニ貢獻スルトコロガアルナラバ啻吾々ノ喜ビトスルバカリデハナイ。

次ニ本書編纂上トクニ注意シタ主ナル點ヲ擧ゲテ御參考ニ供ショウ。

1. 生徒ノ能力ニ應ジテ敎授ノ歩ヲ進メンコトヲ圖リ自明ナ事項ハソノ理論ヲ避ケ定理ノ如キモ容易ナモノハ或ハ發問ノ形ニ止メ或ハ全ク之ヲ略シ困難ナモノハ問題ニマデモ備考ヲ附シ又ハ圖ヲ挿入シテ思考ノ緒ヲ與ヘタ。
2. 問題ハ努メテ實際的材料ヲトリ且ソノ配列ニ注意シ敎室デナスベキ問題ト生徒各自ノ自習ニ委スベキ問題トヲ分ツタコトハ他ノ當會編纂ノ敎科書ト同樣デアル。
3. 卷末ニハ復習ノ部トシテ摘要ノ項ヲ設ケ且雜問題ヲ課シテ理解ヲ一層確實ニシ推理ノ練磨ヲナサシメル樣ニ圖ツタ。

8頁

目次

第一篇

平面

第二篇

多面體

第三篇

迴轉體

復習之部

第一篇

第二篇

第三篇

第一篇　平　面

第一章

空間ニ於ケル直線及平面

問　空間ニ於ケル一定點ヨリ等距離ニ在ル點ハ如何ナル曲面ノ上ニアルカ。

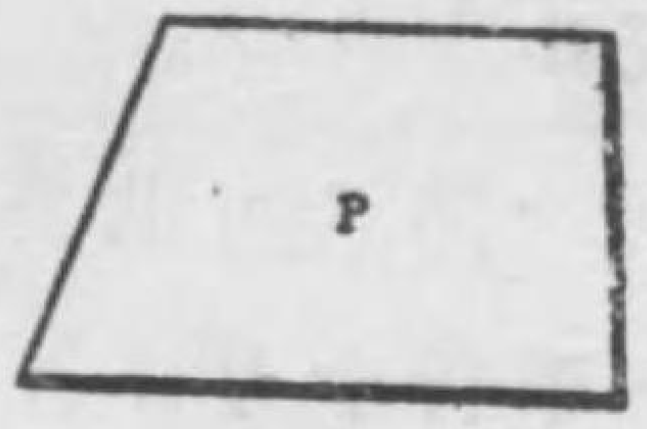
立體幾何學ハ同一平面上ニ在ラザル**面**,**線**及ビ**點**ノ**位置**,**大サ**及ビ**形**ニツキテ論ズル學科ナリ。

1　平面

一ツノ面ニ於テ其上ノ任意ノ二點ヲ過ル直線ガ全クソノ上ニ在ルトキハ其面ヲ**平面**トイフ。

（平面幾何學新教科書5頁）

從テ平面ハ限リナク廣キモノナリ。然レドモ之ヲ書キ表ハスニハ便宜上矩形ヲ斜ニ見タル形ヲ以テス。



即チ圖ノ如ク書キ表ハシテ
之ヲ　**平面P**
又ハ　**P平面**　ト呼ブ。

2 空間ニ於ケル一直線ト一平面

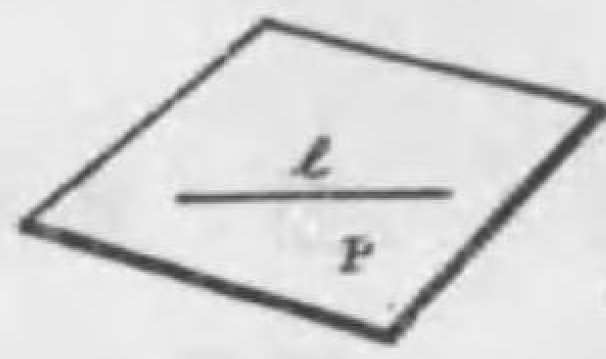
問一 相交ラザル總テノ直線ハ互ニ平行ナルカ。否

問二 同一ノ鉛直線ニ垂直ナル直線ハ總テ互ニ平行ナルカ。否

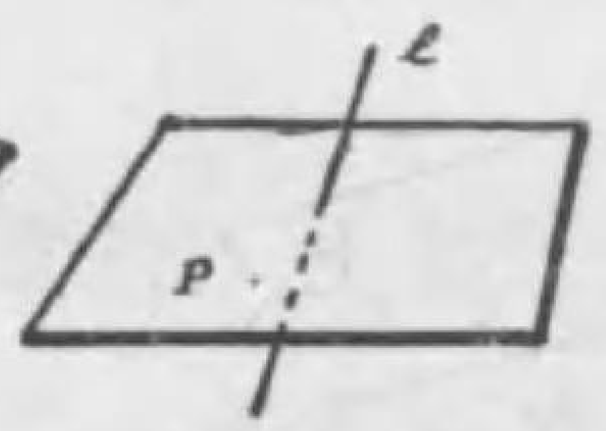
問三 空間ニ於ケル二直線ノ相對的位置ニツイテ種々ノ場合ヲ擧ゲヨ。

空間ニ於ケル一直線lト一平面Pトノ相對的位置ニハ次ノ三通ノ場合アリ。

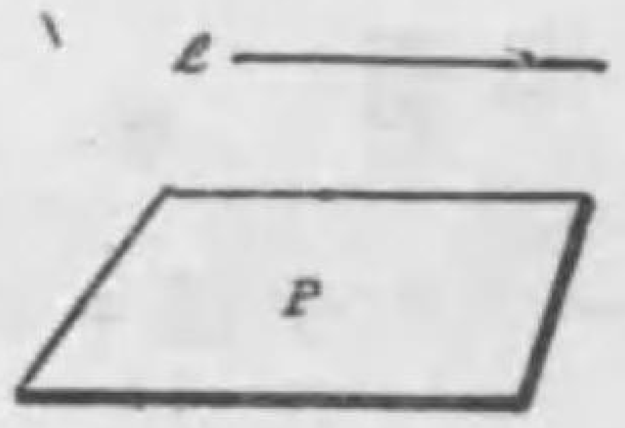
(一)



(二)



(三)



此等ノ場合ノ中ニテ

(一)ノ如ク一直線ガ全ク一平面ノ上ニアルトキハ其平面ハ其直線ヲ**含ム**トイヒ，

(二)ノ如ク一直線ト一平面トガ唯一點ヲ共有スルトキハ其直線ト平面トハ**相交ル**トイフ。

又(三)ノ如ク一直線ト一平面トガ一點ヲモ共有セザルトキハ其直線ト其平面トハ**平行ナリ**トイフ。

3 平面ノ決定

問一 空間ニ於ケル一直線ノ位置ヲ固定スルニハ幾ツノ點ヲ要スルカ。 2

問二 空間ニ於ケル一平面ノ位置ヲ固定スルニハ幾ツノ點ヲ要スルカ。 3

定義 若干ノ點或ハ線又ハ點ト線トヲ含ム平面ガ一ツアリテ而シテ唯一ツニ限ルトキハ此等ノ點或ハ線又ハ點ト線トハ**平面ヲ決定ス**トイフ。

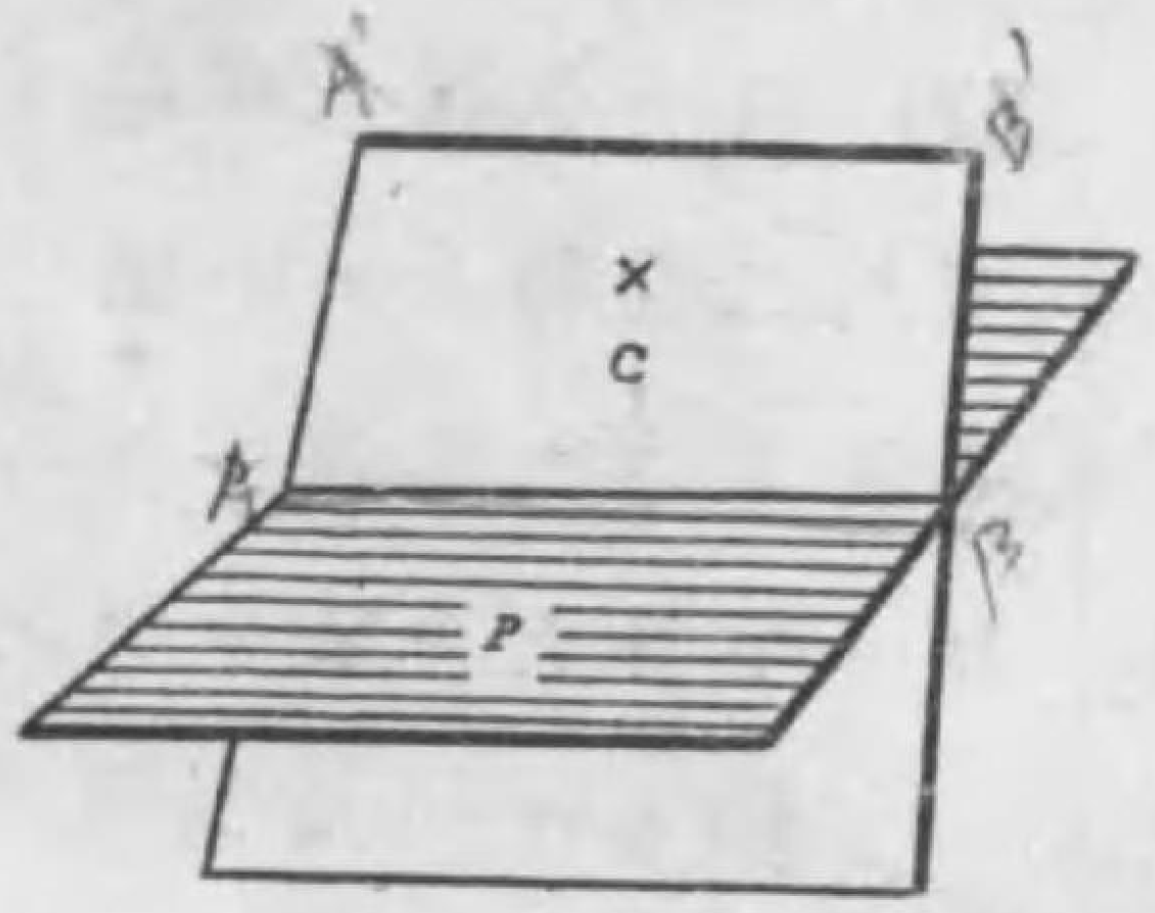
定理 (1)一直線ト其上ニ在ラザル一點

(2)同一直線上ニ在ラザル三點

(3)相交ル二直線

(4)平行二直線

ハ何レモ平面ヲ決定ス。

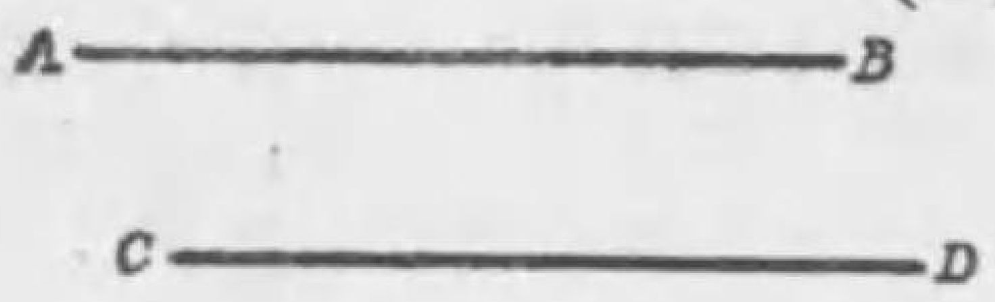


(1) **證明** 與直線AB外ノ一與點ヲCトセヨ。

今直線ABヲ含ム任意ノ平面PヲトリABヲ軸トシテ之ヲ廻轉セバ平面Pガ點Cヲ含ム位置ハ必ズ一度アリ。而シテ一度ニ限ル。

故ニ直線ABト點Cトハ一平面ヲ決定ス。

(2)ト(3)トハ(1)ニヨリテ容易ニ之ヲ證スルヲ得。



(4)　**證明**　AB, CDヲ平行ナル二直線トセバ平行線ノ定義（平面幾何學19頁）ニヨリテAB, CDハ同一平面上ニアリ。

而シテAB上ノ一點AトCDトハ一平面ヲ決定シABハ此平面上ニ在ルヲ以テAB, CDハ一平面ヲ決定ス。

問　題

1　二ツ宛三點ニ於テ交ル三直線ハ同一平面上ニ在リ。

2　同一直線上ニ在ラザル三點ト,ソレラノ何レヲモ通ラザル相交ル二直線トアリ。此等ノ中ノ點ト點,點ト直線,直線ト直線トニテ決定サルヽ平面ガ幾ツアルカ。

(1)　床ノ上ニテ、ガタガタスル四脚ノ卓ノ、スワリヲヨクスルニハ其脚ノ長サヲ如何ニスベキカ。

(2)　同一平面上ニ在ラザル二直線上ノ一點宛ヲ連ラヌル直線中ニハ互ニ平行ナルモノナシ。

注意　歸謬法ニヨレ。

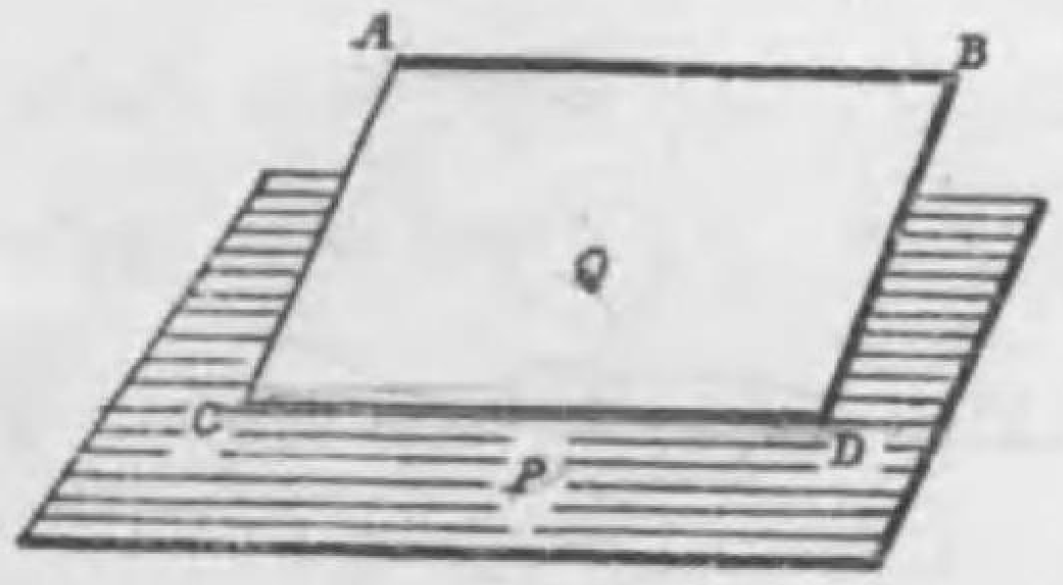
4　直線ト平面トノ平行圖形

問　空間ニ於ケル二平面ノ相對的位置ニツイテ種々ノ場合ヲ擧ゲヨ。

定義　二平面ガ一直線ヲ共有スルトキハ此二平面ハ**相交ル**トイヒ,其直線ヲ二平面ノ**交線**トイフ。

又二平面ガ一點ヲモ共有セザルトキハ此二平面ハ**互ニ平行ナリ**トイフ。

定理　二直線ガ平行ナルトキハ,其一ツノ直線ノミヲ含ム平面ハ他ノ直線ニ平行ナリ。



證明　AB, CDヲ平行ナル二直線トシ,CDヲ含ミABヲ含マザル平面ヲPトセヨ。

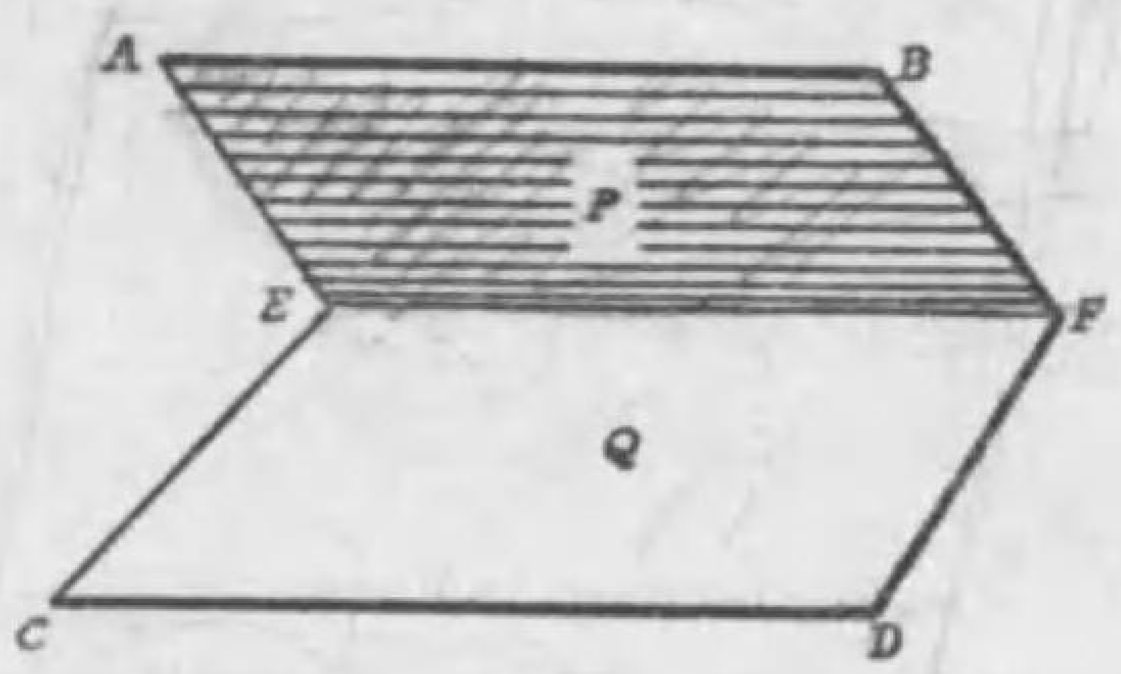
$AB \parallel CD$ナル故AB, CDハ一平面Qヲ決定ス。

而シテCDハPトQトノ交線ナリ。

故ニ若シABトPトガ平行ナラズトセバABハCD上ノ一點ニ於テ交ルベシ。是假設ニ反ス。

故ニ　平面$P \parallel AB$

系　平行ナル二直線ノ一ツヲ含ミ他ヲ含マザル二平面ノ交線ハ其二直線ニ平行ナリ。



證明　ABヲ含ミCDヲ含マザル平面ヲP, CDヲ含ミABヲ含マザル平面ヲQトシP, Qノ交線ヲEFトセバ

$AB \parallel CD$ナル故　平面$P \parallel CD$

而シテCD,EFハ同一平面上ニ在リ。

故ニ　$EF \parallel CD$　同様ニ　$EF \parallel AB$

注意　相交ラザル二直線ハ必ズシモ平行線ニアラザル故平行線ナルコトヲ證スルニハ相交ラザルコト・同一平面上ニ在ルコト、ヲ證セザルベカラズ。

問　　題

3　定平面P外ノ與點Aヲ過ル直線ヲ作リP上ノ定直線CDニ平行ナラシメヨ。

(3)　與點Aヲ通ル平面ヲ作リAヲ過ラザル定直線CDニ平行ナラシメヨ。

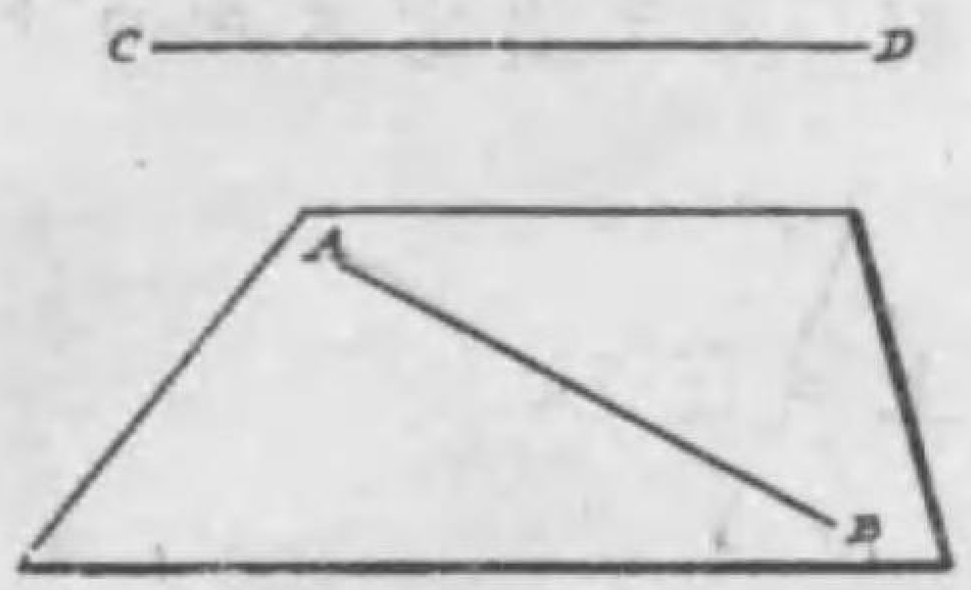
注意　立體幾何學ニ於ケル作圖題ハ平面幾何學ニ於ケルガ如ク與條件ヲ滿足スル實際ノ圖形ヲ求ムルニアラズシテ唯ソノ方法ヲ推理上ニテ決定スルニ過ギズ。

但シ

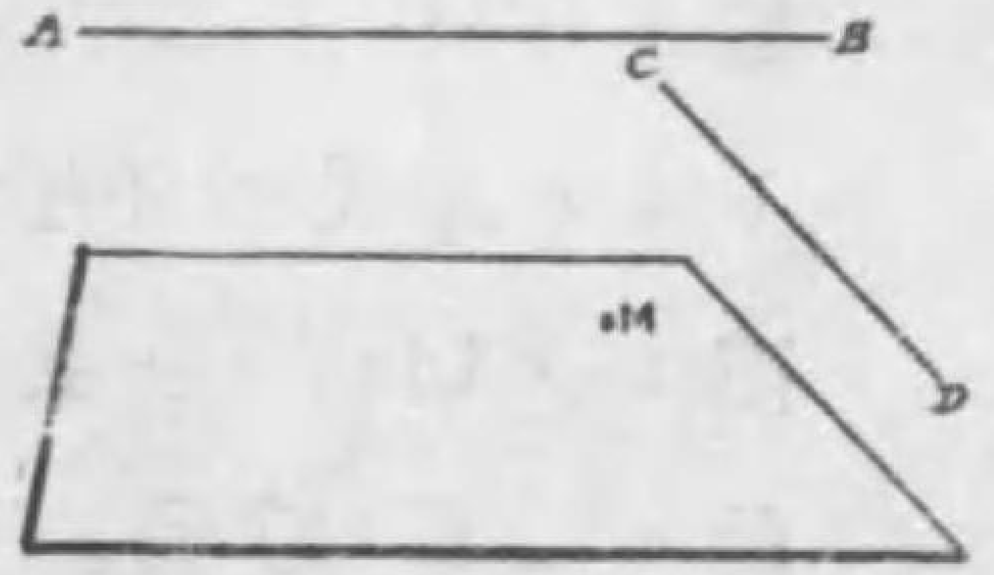
(一)　一直線上ニアラザル三點
(二)　相交ル二直線
(三)　平行ナル二直線
　　}…ヲ含ム平面
(四)　二定平面ノ交線
(五)　定平面ト定直線トノ交點………等ハ求メ得ルモノトス。

問　　題

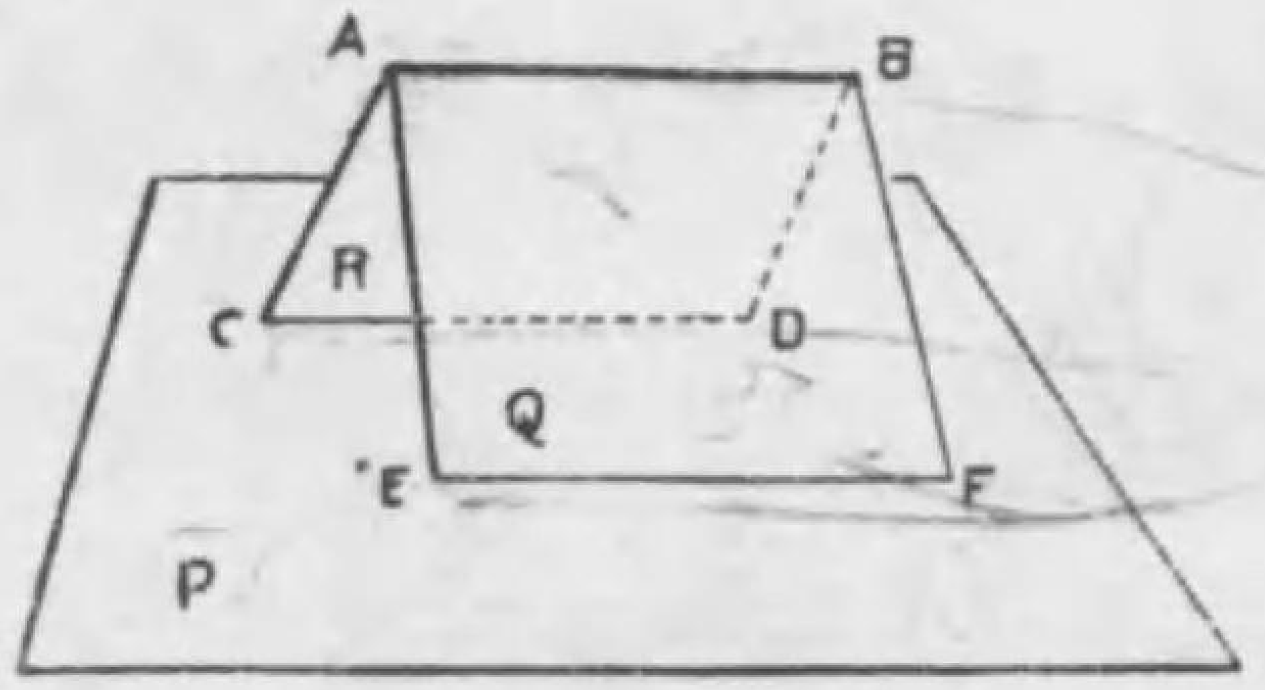
4　同一平面上ニアラザル二定直線AB,CDアリ。ABヲ含ミCDニ平行ナル平面ヲ作レ。



(4)　一與點Mヲ通リ且同一平面上ニ在ラザル二定線AB, CDニ平行ナル平面ヲ作レ。



定理 一ツノ平面ト,之ニ平行ナル一ツノ直線ヲ含ム平面トノ交線ハ其直線ニ平行ニシテ其交線ハ互ニ平行ナリ。



平面 P ニ平行ナル直線ABヲ含ム平面ヲ Q,Rトシ,此等ノ平面トP トノ交線ヲ夫々 CD, EF トセバ

(一) $CD \parallel AB$, $EF \parallel AB$

(二) $CD \parallel EF$

證明 (一) $P \parallel AB$ 故ニ AB ハ CD ト交ラズ。

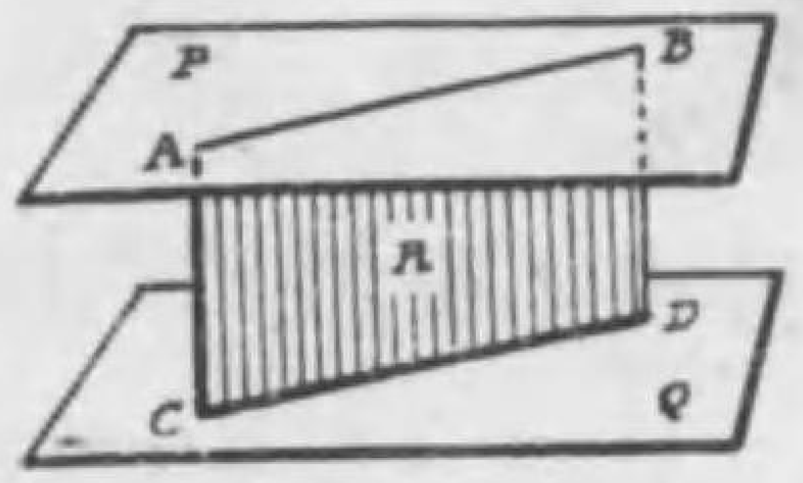
而シテ AB,CD ハ同一平面上ニ在リ。

故ニ $CD \parallel AB$ 同様ニ $EF \parallel AB$

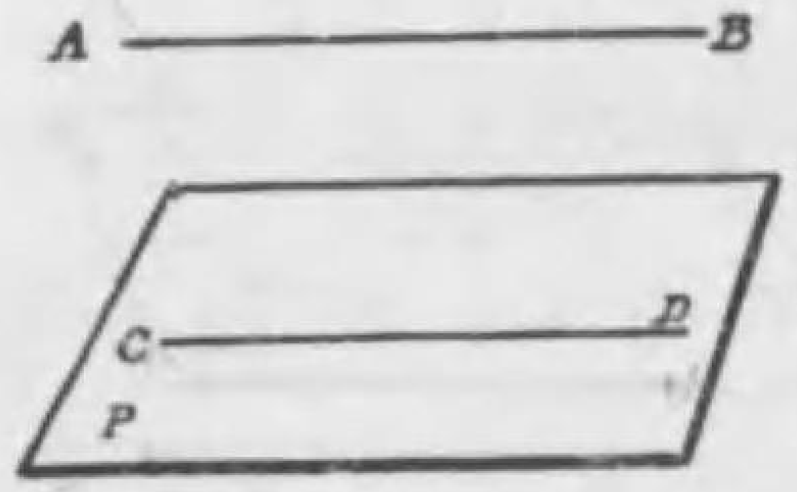
(二) 若シ CD, EF ガ平行ナラズトセバ此二直線ハ或一點ニ於テ交ルベシ。然ラバソノ交點トABトハ二ツノ平面Q,Rヲ決定スルコトトナル。是レ不合理ナリ。

而シテ CD,EF ハ共ニ P上ニ在リ。

故ニ $CD \parallel EF$

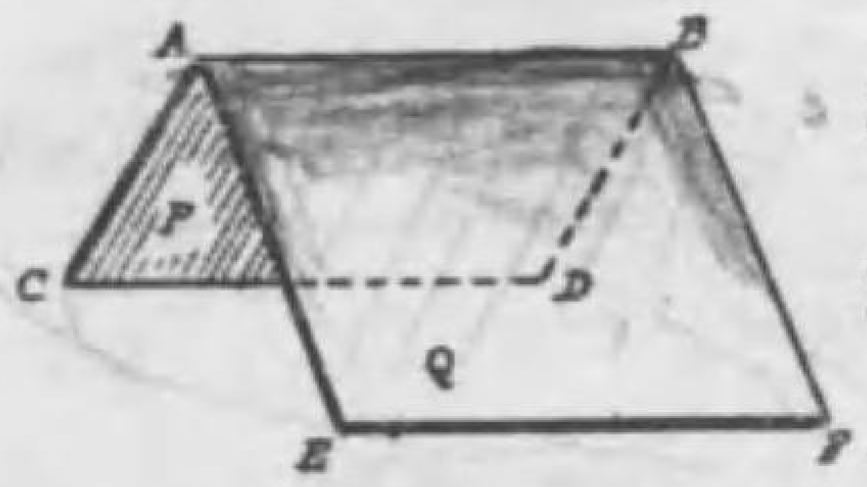


系一 平行ナル二平面ト他ノ一平面トノ交線ハ互ニ平行ナリ。



系二 一平面上ノ一點ヲ過リ其平面ニ平行ナル直線ニ平行ニ引ケル直線ハ其平面上ニ在リ。

系三 同一直線ニ平行ナル二平面ノ交線ハ其直線ニ平行ナリ。



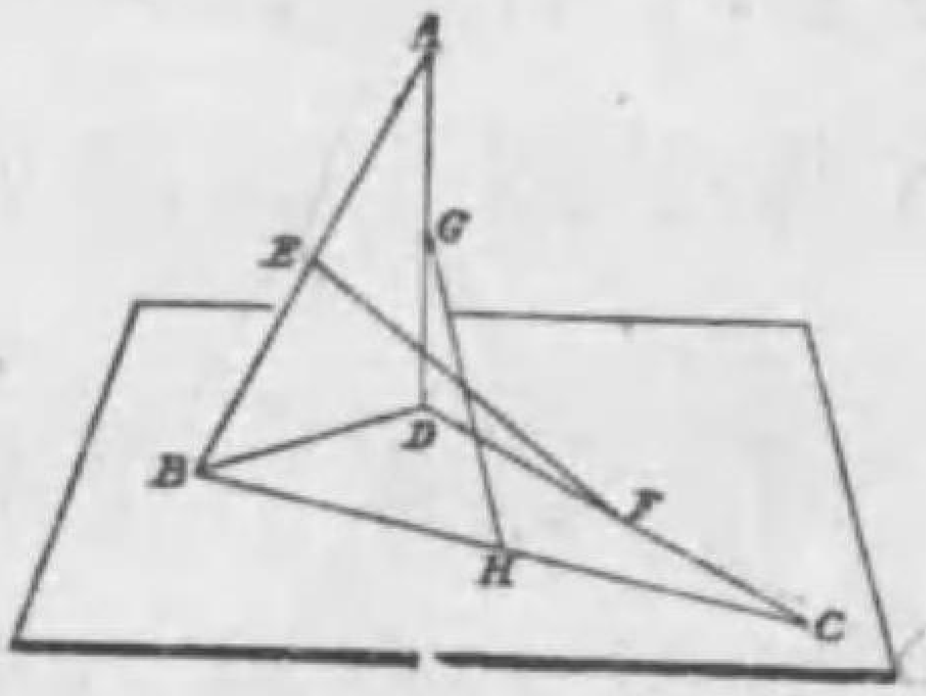
系四 同一直線ABニ平行ナル二直線CD, EF ハ互ニ平行ナリ。

證明 AB, CD 及ビ AB, EF ノ決定スル平面ヲ夫々P, Qトス。然ルトキハ EF ト C トノ決定スル平面ハ AB ニ平行ニシテ且コレトPトノ交線ハ CD ニ一致ス………何故カ。

故ニ $CD \parallel EF$

問　題

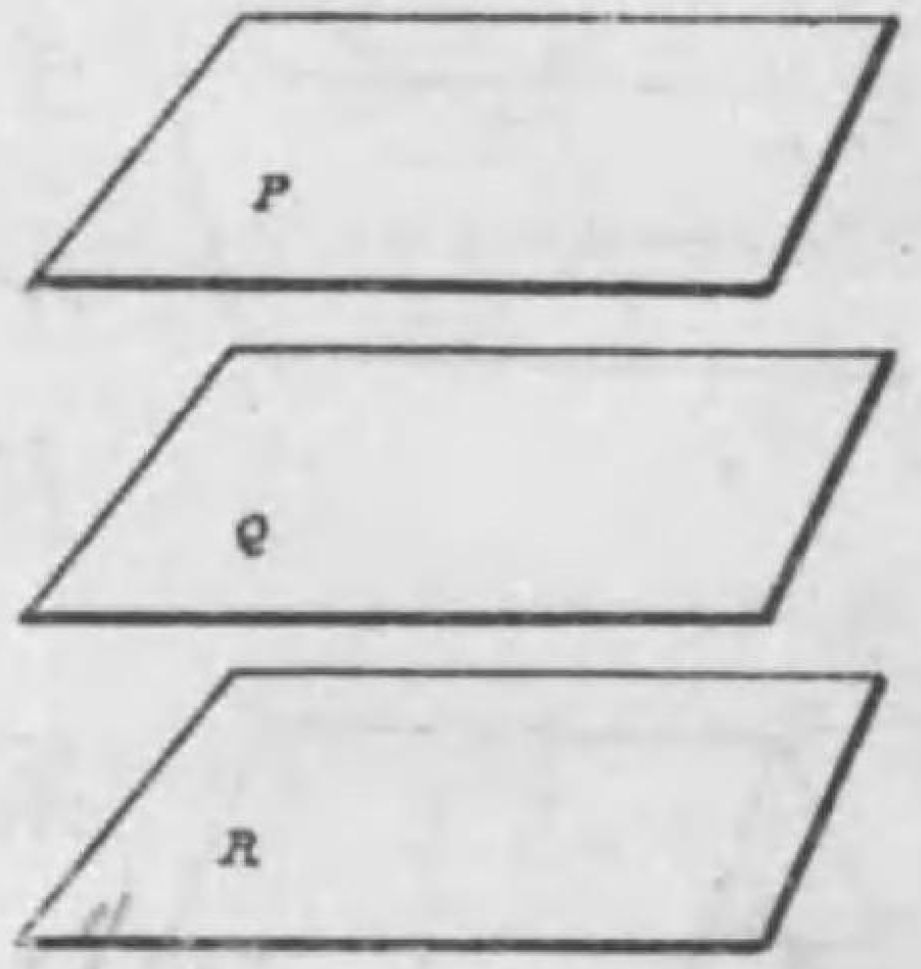
5　四ツノ頂點ガ同一平面上ニ在ラザル四邊形（歪（ヒヅミ）四邊形）ノ對邊ノ中點ヲ結ブ二線分ハ互ニ二等分ス。



6　一與點ヲ過リ同一平面上ニ在ラザル二定直線ニ交ル直線ヲ引ケ。

7　同一平面上ニ在ラザル二直線上ニ夫々一點宛ヲ求メ其二點ヲ結ブ直線ヲシテ一定直線ニ平行ナラシメヨ。

(5)　同一ノ平面ニ平行ナル二平面ハ互ニ平行ナリ。



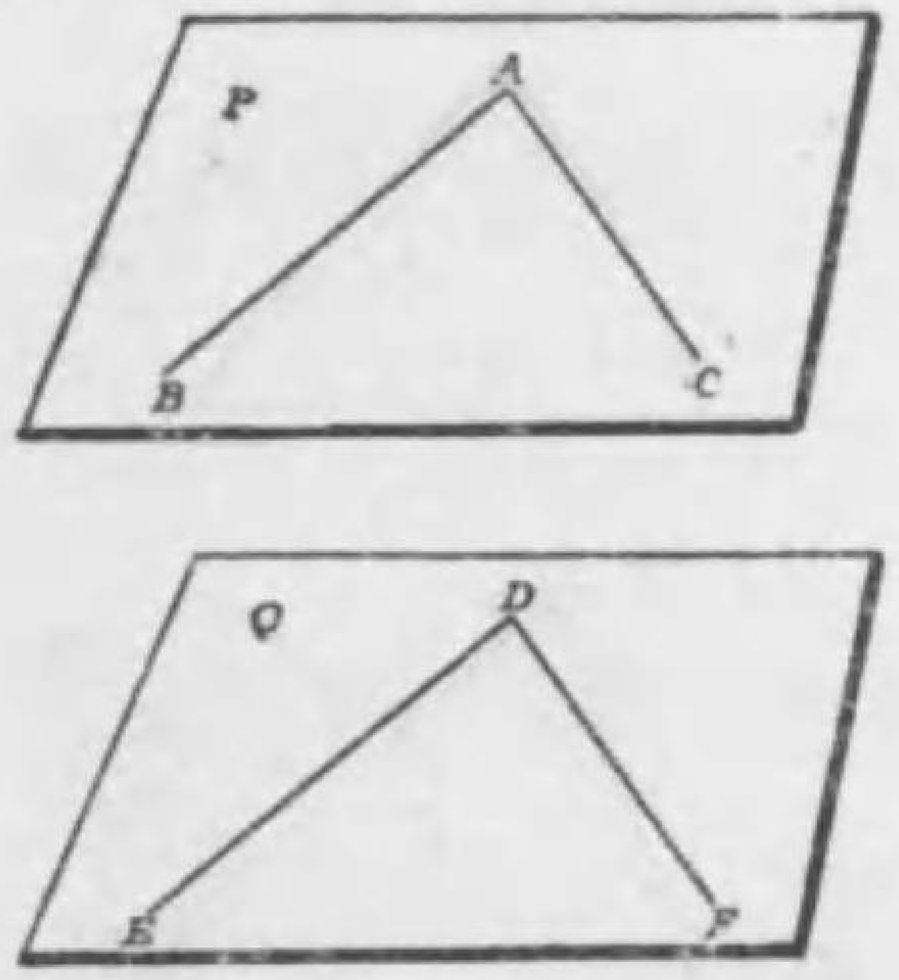
(6)　何レノ二ツヲ取ルモ同一平面上ニ在ラザル三定直線ニ交ル直線ヲ作レ。

(7)　一與點ヲ過リ一與直線ニ交ル直線ヲ引キ與平面ニ平行ナラシメヨ。

定理　相交ル二直線ガ夫々他ノ相交ル二直線ニ平行ナルトキハ

(一)　前者ノ定ムル平面ハ後者ノ定ムル平面ニ平行ナリ。

(二)　前者ノ夾ム角ハ後者ノ夾ム角ニ等シキカ又ハ補角ヲナス。



(一)　$AB \parallel DE$

$AC \parallel DF$ トシ

AB, AC 及 DE, DF ノ決定スル平面ヲ夫々P, Q トス。

證明　P,Q二平面ガ平行ナラズトセバ

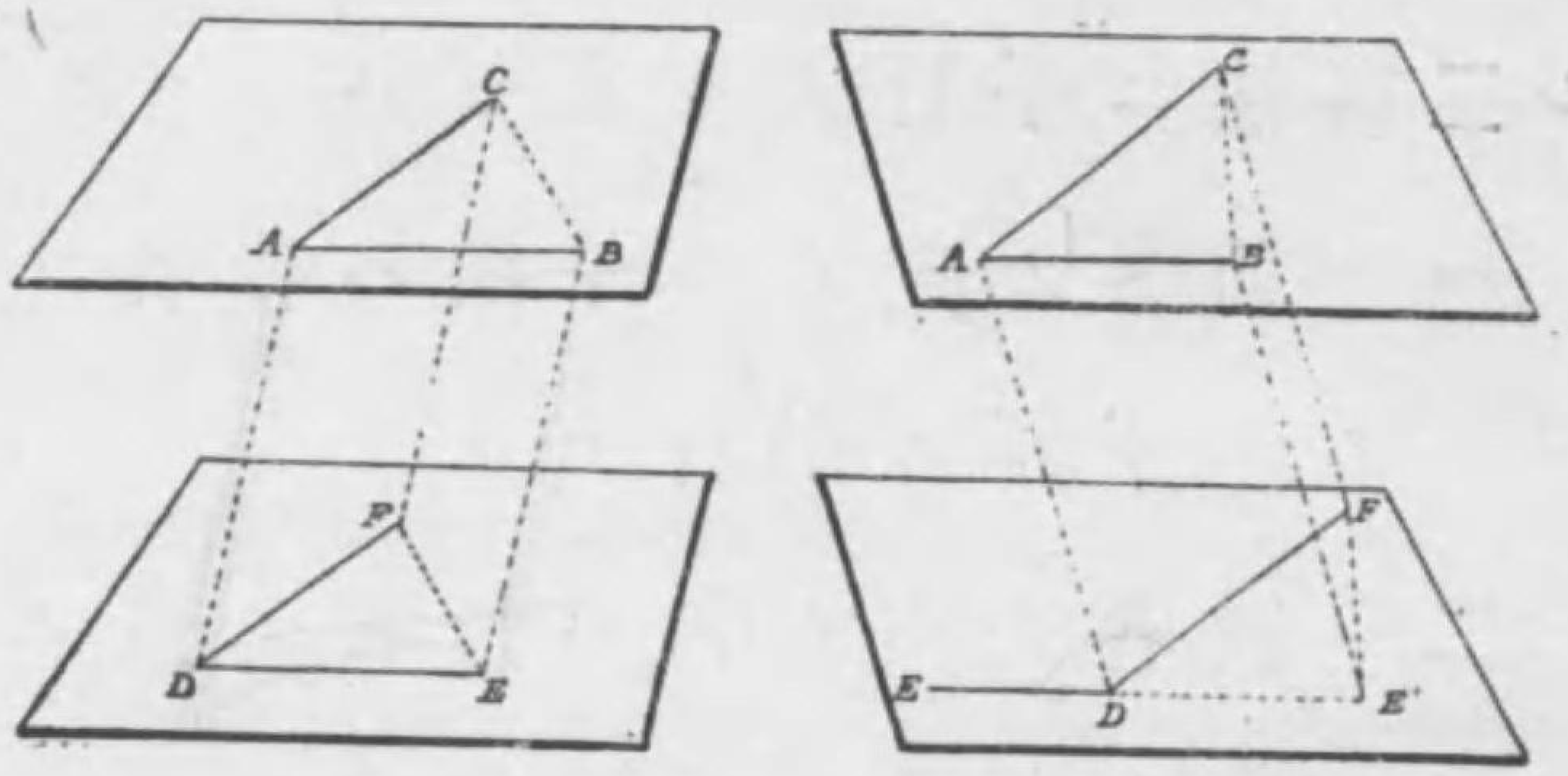
AB, AC ハ共ニ P, Q 二平面ノ交線ニ平行ナラザルベカラズ……何故カ。

是レ不合理ナリ。

故ニ P,Q二平面ハ交ラズ。

$\therefore\ P \parallel Q$

(二)　甲　乙



$\angle BAC=\angle EDF$　　$\angle BAC+\angle EDF=2R.\llcorner$

證明 (甲) $AB=DE$, $AC=DF$ ノ如ク B, E, C, F ヲ定メ AD, BE, CF, BC, EF ヲ引クトキハ

$AD\overset{\parallel}{=}BE$, $AD\overset{\parallel}{=}CF$………何故カ。

$\therefore\ BE\overset{\parallel}{=}CF$

故ニ四邊形CEハ平行四邊形ナリ。

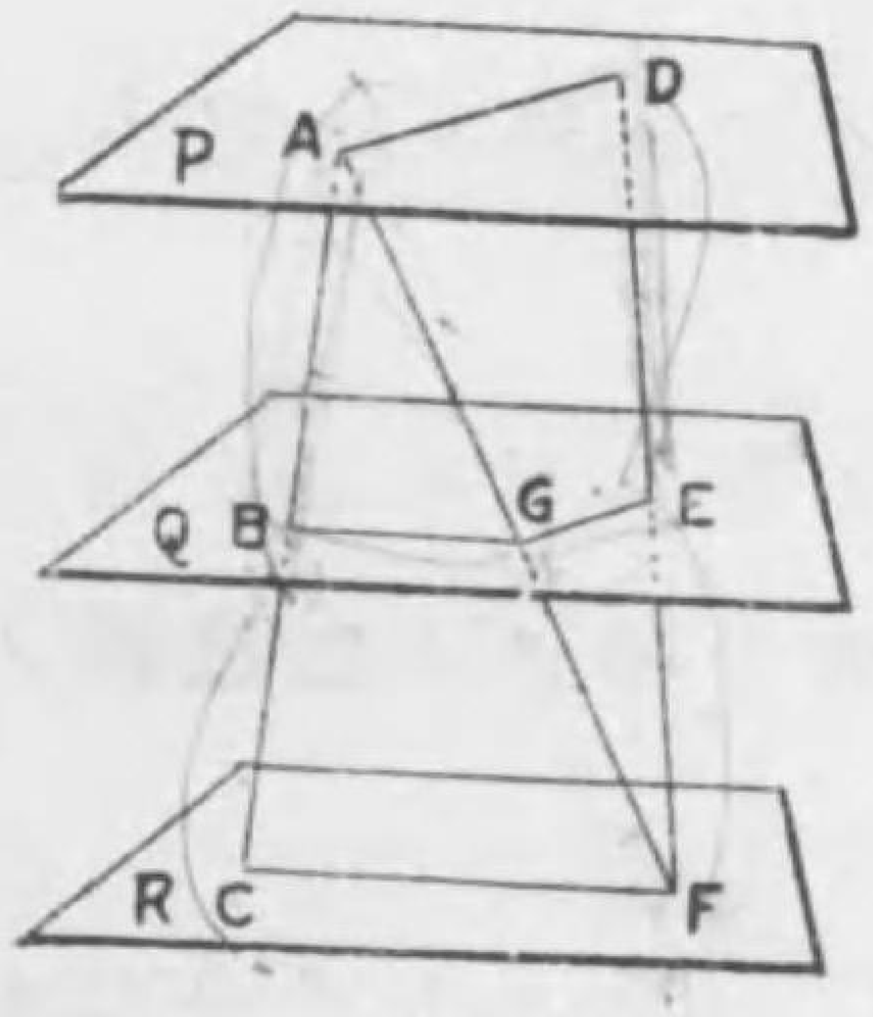
從テ $BC=EF$

$\therefore\ \triangle ABC\equiv\triangle DEF$

$\therefore\ \angle BAC=\angle EDF$

(乙) モ DE ヲ延長スレバ同樣ニシテ證スルコトヲ得。

定理　任意ノ二直線ガ平行ナル三平面ニ交ルトキハソレラノ平面ノ間ノ分ノ比ハ相等シ



二直線AB, DEト平行ナル三平面P, Q, Rトノ交點ヲ夫々A, B, C, D, E, FトセバABBC

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$$ ナリ。

證明　A, Fヲ結ビ之トQ平面トノ交點ヲGトシ, AトD, BトG, CトF, EトGトヲ結ブトキハ

$BG\parallel CF$,　$EG\parallel AD$………何故カ、

從テ $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AG}{GF}$, $\dfrac{DE}{EF}=\dfrac{AG}{GF}$

$\therefore\ \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$

問題

8 一點Oニ於テ交ル三ツノ線分 AOA', BOB' COC' アリ。O點ガソノ各線分ノ中點ナルトキハ $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ノ定ムル二平面ハ平行ナリ。

(8) 任意ノ一點ヨリ同一平面上ニ在ラザル二直線ニ平行ナル二ツノ直線ヲ引ケバソノ二直線ノナス角ハ一定ナリ。

定義 一點ヨリ同一平面上ニ在ラザル二直線ニ平行ニ引ケル二直線ノナス角ヲ初メノ**二直線ノナス角**トイフ。

9 相交ル二直線ノ各ガ一平面ニ平行ナルトキハ其二直線ノ決定スル平面ハ其平面ニ平行ナリ。

(9) 一點ヨリ一平面ニ平行ニ引ケル數多ノ直線ハ同一平面上ニ在リ。

10 同一平面上ニ在ラザル二定直線上ニ兩端ヲ有スル線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

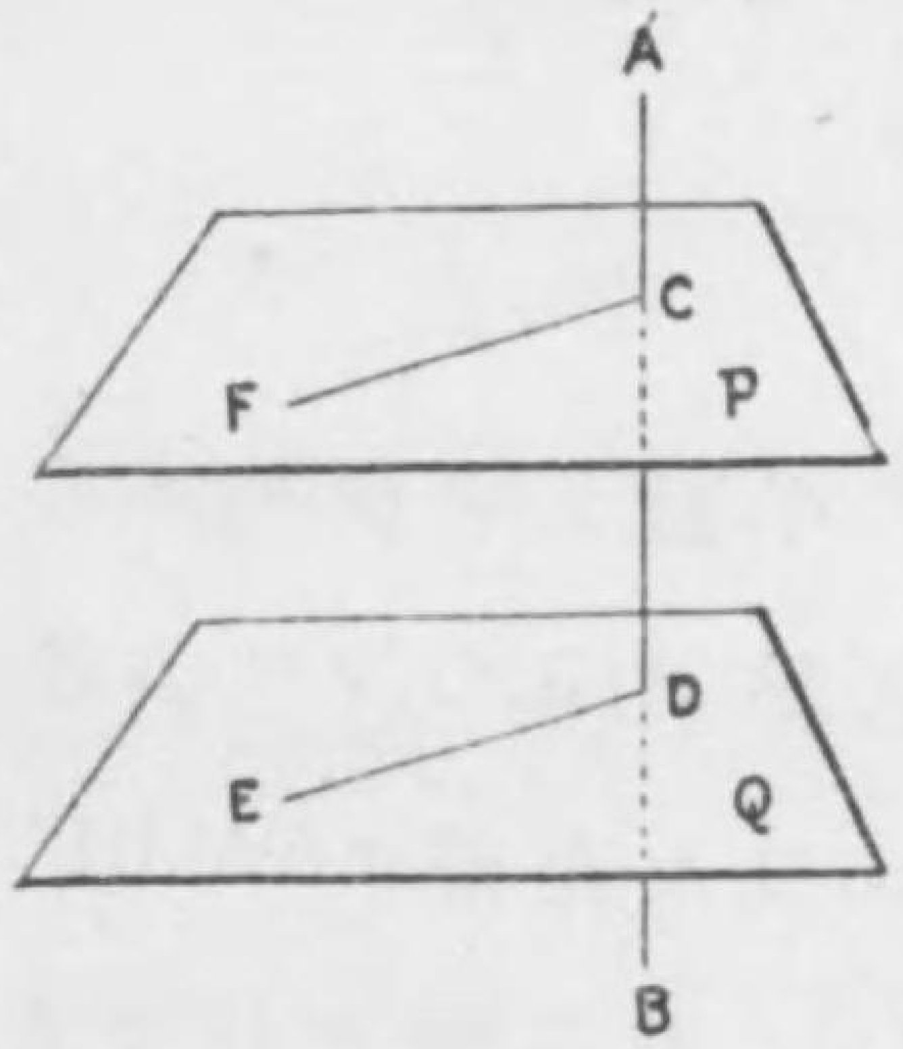
(10) 平行ナル二ツノ平面上ニ兩端ヲ有スル線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

欠

ヲガルフリ

問　平行ナル二平面ノ一ツニ交ル直線ハ他ノ一ツニモ交ルカ。

定理　平行ナル二平面ノ一ツニ垂直ナル直線ハ他ノ一ツニモ亦垂直ナリ。



平面P ∥ 平面Q

AB⊥平面Pナルトキハ

AB⊥平面Q

證明　ABガP,Qト交ル點ヲ夫々C,DトシQ上ニ於テDヲ過ル任意ノ直線DEヲ引キDE, ADノ定ムル平面トPトノ交線ヲCFトセバ

CF ∥ DE…………何故カ。

然ルニ　AB⊥CF

∴　AB⊥DE　　∴　AB⊥平面Q

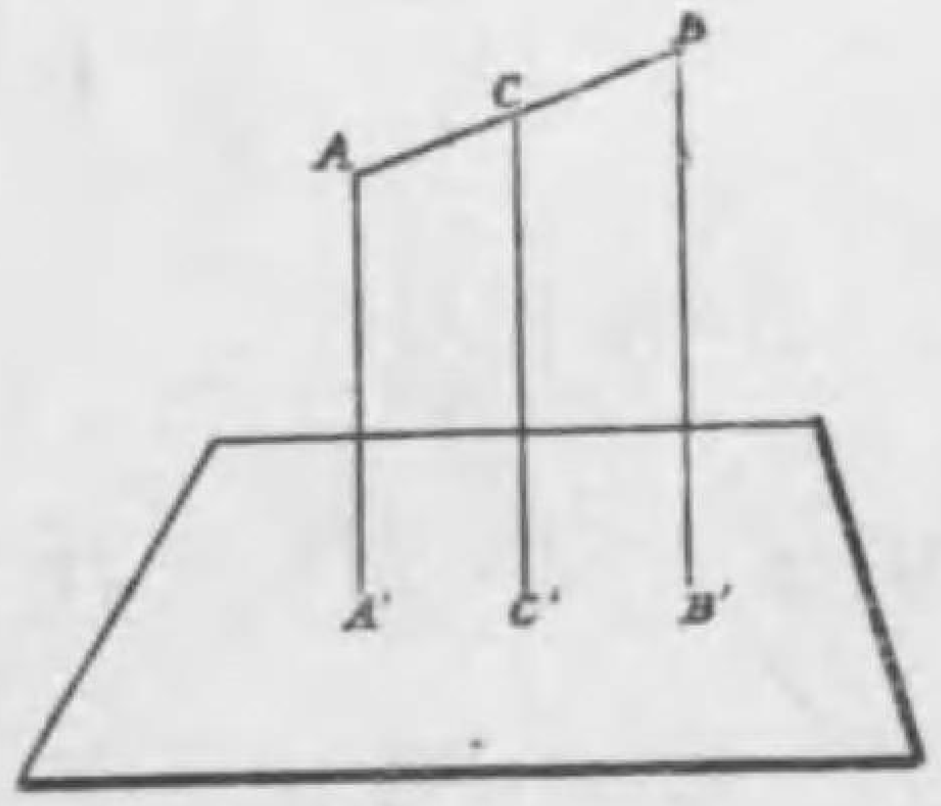
系　同一直線ニ垂直ナル二平面ハ互ニ平行ナリ。

定義　平行ナル二平面ノ間ニ在ル共通垂線ノ部分ノ長サヲ,ソノ**平行二平面ノ距離**トイフ。

問　題

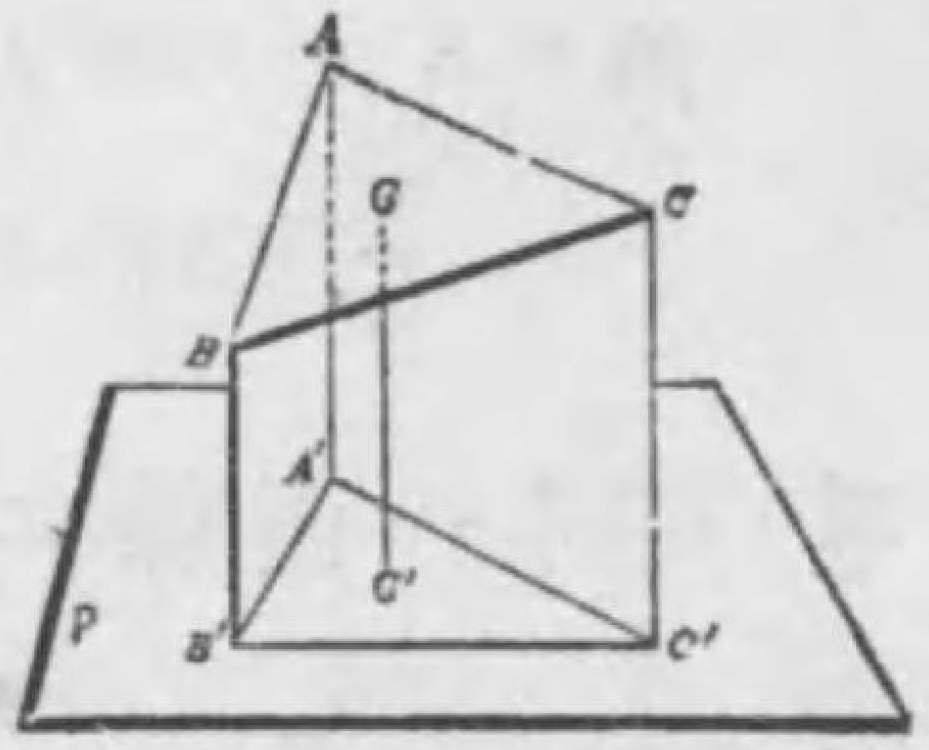
15　平行ナル二平面ノ各ノ上ノ一點宛ヲ結ブ線分ノ中ニテ,ソノ二平面ノ距離ハ最短ナリ。

16　長サ2.5米, 3.5米ナル二本ノ杙ヲ地面ニ垂直ニ立テ眞直ナル竿ノ兩端ヲ支ヘ尙ホ其竿ノ中央ヲ地面ニ垂直ナル杙ニテ支ヘタリ。中央ノ杙ノ長サヲ求メヨ。



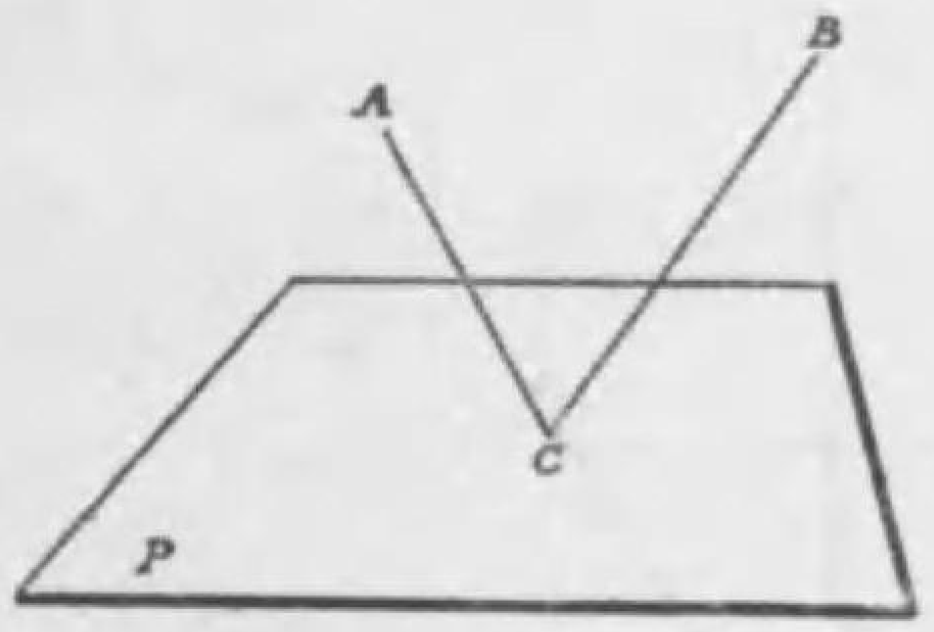
(15)　10頁ニ於ケル問題(5)ノ別證明ヲ試ミヨ。

(16)　平面Pノ同側ニ在ル三點A, B, Cヨリ其平面ニ至ル距離ヲAA′,BB′,CC′トシ其三點ヲ結ビテ得ル三角形ノ重心Gヨリノ距離ヲGG′トセバ $AA'+BB'+CC'=3GG'$



17　同一平面上ニ在ラザル二定直線ニ交リ且第三定直線ニ平行ナル直線ヲ引ケ。

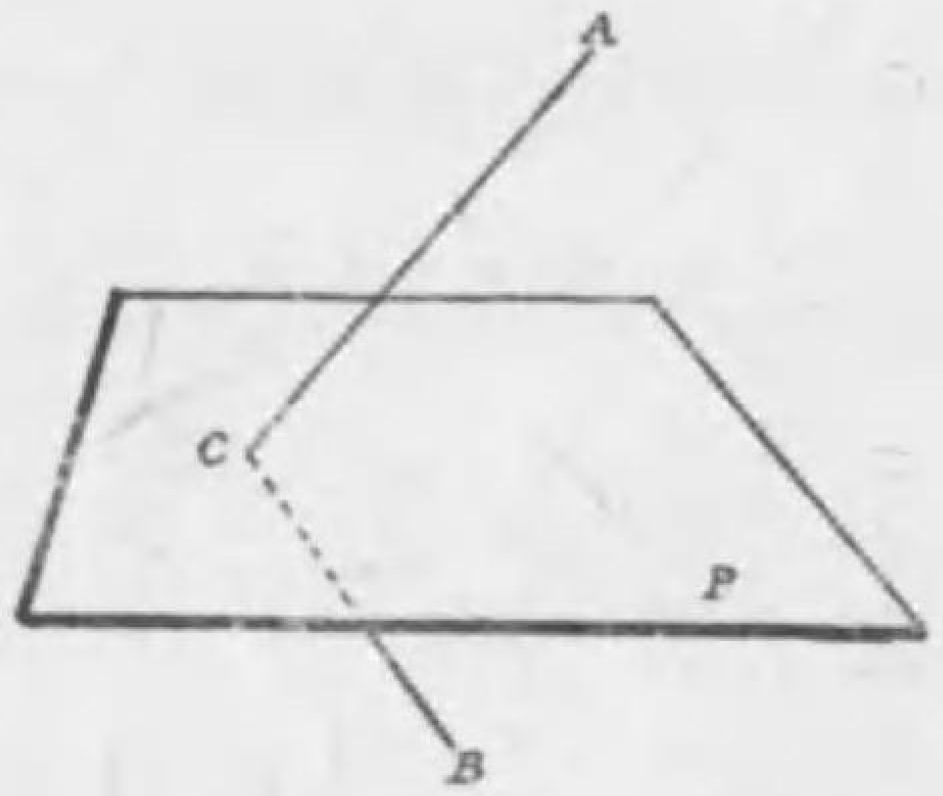
18　定平面P上ニ一點Cヲ求メCヨリPノ同側ニアル二定點A, Bニ至ル距離ノ和ヲシテ最小ナラシメヨ。



19　問題18ノP平面上ニ於テAC, BCノ比ガ夫々A, BヨリPニ至ル距離ニ等シキ點Cノ軌跡ヲ求メヨ。

(17)　同一平面上ニ在ラザル定直線ト定圓周トニ交リ且他ノ定直線ニ平行ナル直線ヲ引ケ。

(18)　定平面P上ニ一點Cヲ求メCヨリPノ兩側ニアル二定點A, Bニ至ル距離ノ差ヲシテ最大ナラシメヨ。



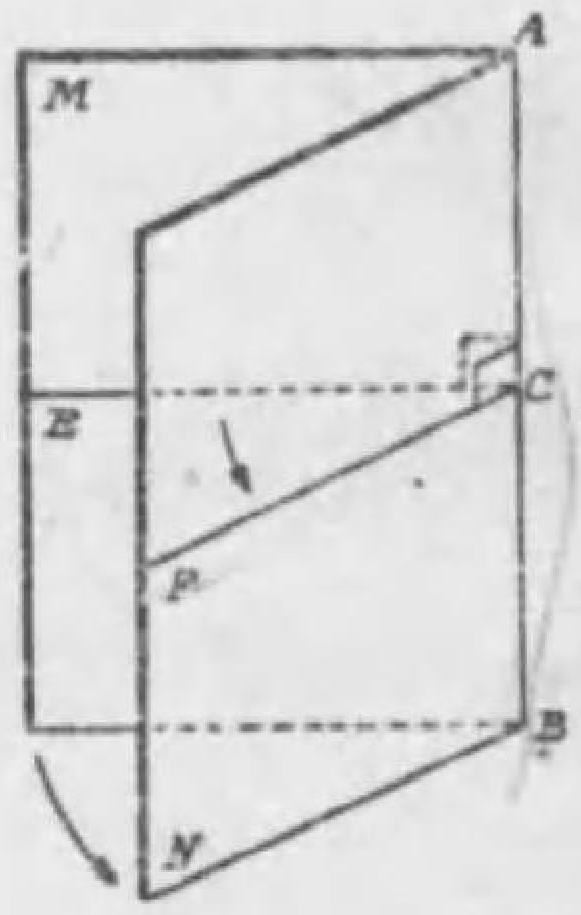
(19)　問題19ニ於テ問題(18)ノ如キ場合ハ如何。

第二章

二面角及立體角

6 二面角

定義　(一)相交ル二平面ノ開キヲ**二面角**トイヒ,其二平面ハ**二面角ヲナス**トイフ。又其交線ヲ二面角ノ**稜**トイフ。



例ヘバ圖ニ於テ一直線ABニテ交ル二平面MB,NAハ二面角ヲナシABハ其稜ナリ。

二面角ハ其稜上ノ二點ノ兩側ニ各平面上ニ一點ノ名ヲ附シテ之ヲ表ハス。

例ヘバ二面角M-AB-Nトイフガ如シ。

(二)二面角ノ稜(AB)上ノ任意ノ一點(C)ヨリ其稜ニ垂直ニ各平面上ニ引ケル二直線(CE, CF)ノナス角ヲ**二面角ノ平面角**トイフ。

今圖ニ於テ稜ABヲ軸トシ平面MBヲ平面NAノ位置マデ廻轉スルトキハ平面角ECFノ一邊CEハ$\angle ECF$ダケ廻轉ス。故ニ二面角ノ大サハ平面角$\angle ECF$ノ大サニ等シ。

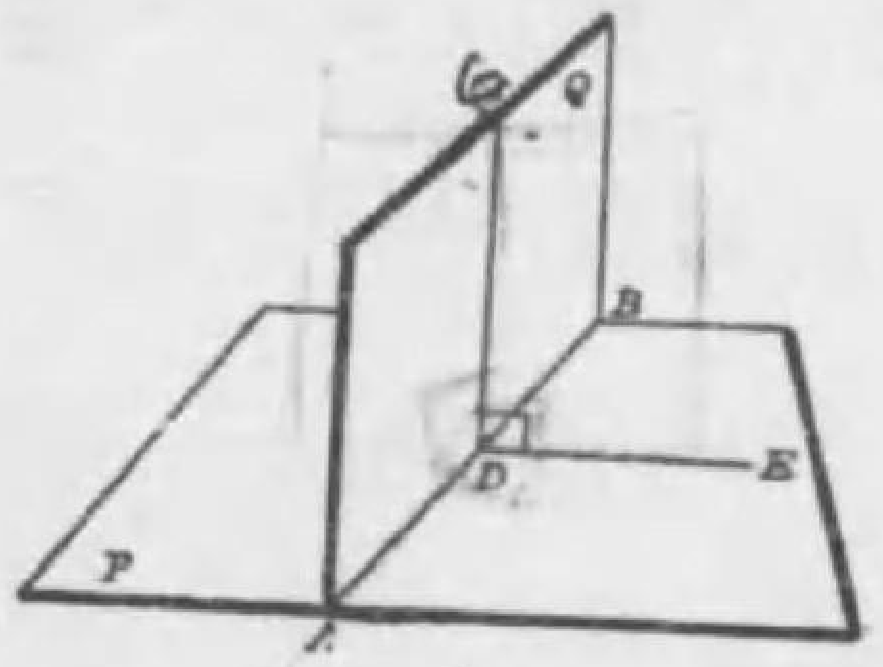
故ニ**二面角ノ大サハ平面角ノ大サヲ以テ定ム。**

7 平面ノ垂直圖形

問　二面角ノ平面角ハ其稜上ノ點ノ位置ニヨリテ大サヲ異ニセザルカ。

定義　二ツノ平面ノナス二面角ガ直角ナルトキハ其二ツノ平面ガ**互ニ垂直**ナリトイフ。

定理　二平面(P,Q)ガ互ニ垂直ナルトキハ其一平面(Q)上ノ一點(C)ヨリ其交線(AB)ニ垂線(CD)ヲ引クトキハ其垂線(CD)ハ他ノ平面(P)ニ垂直ナリ。



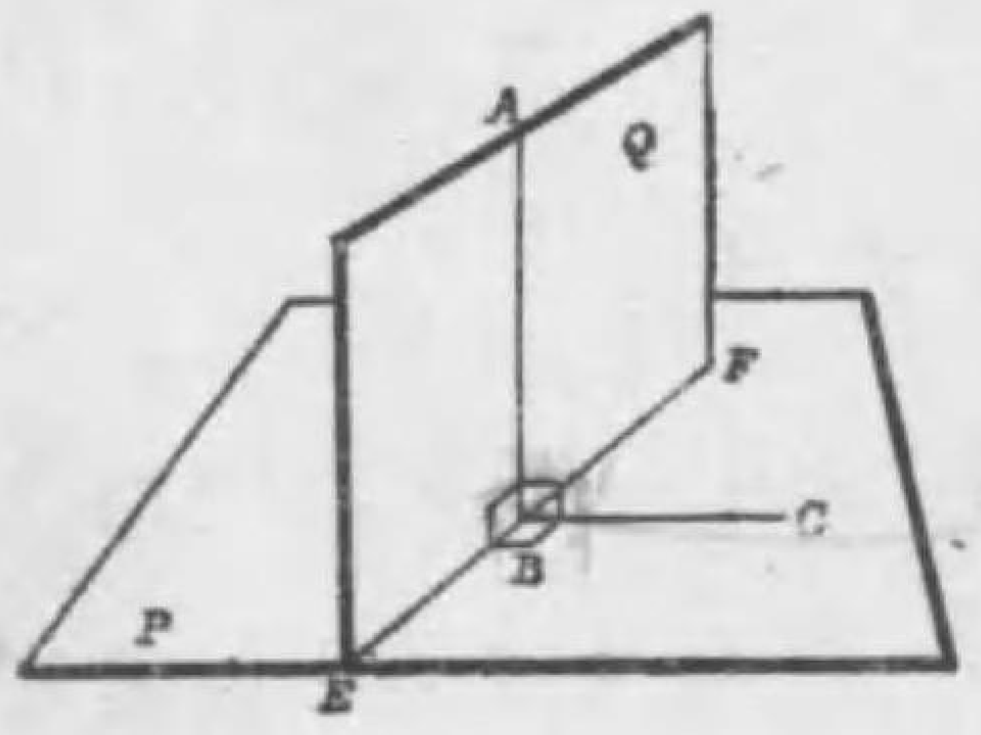
證明　ABトCDトノ交點ヲDトシDヨリABニ垂直ニP上ニDEヲ引クトキハ$P\perp Q$ナル故

$\angle CDE=R.\llcorner$　又$\angle CDA=R.\llcorner$　$\therefore CD\perp P$

系一 二平面(P,Q)ガ互ニ垂直ナルトキハ其一平面(Q)上ノ一點(C)ヨリ他ノ平面(P)ニ引ケル垂線(CD)ハ其平面(Q)上ニ在リ。

系二 同一平面(P)ニ垂直ナル二平面(Q,R)ノ交線(AB)ハ其平面(P)ニ垂直ナリ。

定理 平面(P)ニ垂直ナル直線(AB)ヲ含ム平面(Q)ハ其平面(P)ニ垂直ナリ。



證明 P,Qノ交線EFトABトノ交點ヲBトシP上ニ於テBヨリEFニ垂直ニBCヲ引キP,Qノナス二面角ノ平面角ABCヲ作ルトキハ

AB⊥P ナル故 ∠ABC=R.∠

故ニ Q⊥P

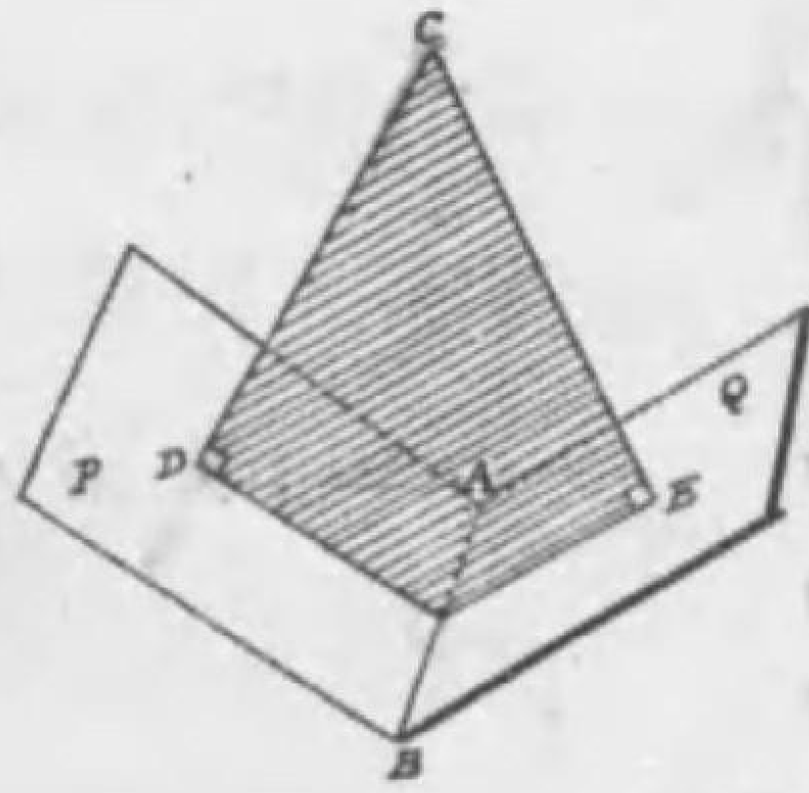
問 題

20 互ニ平行ナル二平面ノ一ツニ垂直ナル平面ハ亦他ノ一ツニモ垂直ナリ。

21 相交ル二平面外ノ一點ヨリ其各ノ平面ニ引ケル二垂線ノ定ムル平面ハ初メノ二平面ノ交線ニ垂直ナリ。

(20) 何レノ二ツヲトルモ互ニ垂直ナル三平面ニヨリテ生ズル三ツノ交線ハ亦二ツ宛互ニ垂直ナリ。

(21) 相交ル二平面ノ交線ニ垂直ナル平面ハ初メノ二平面ノ各ニ垂直ナリ。



22 同一直線上ニ在ラザル三點ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

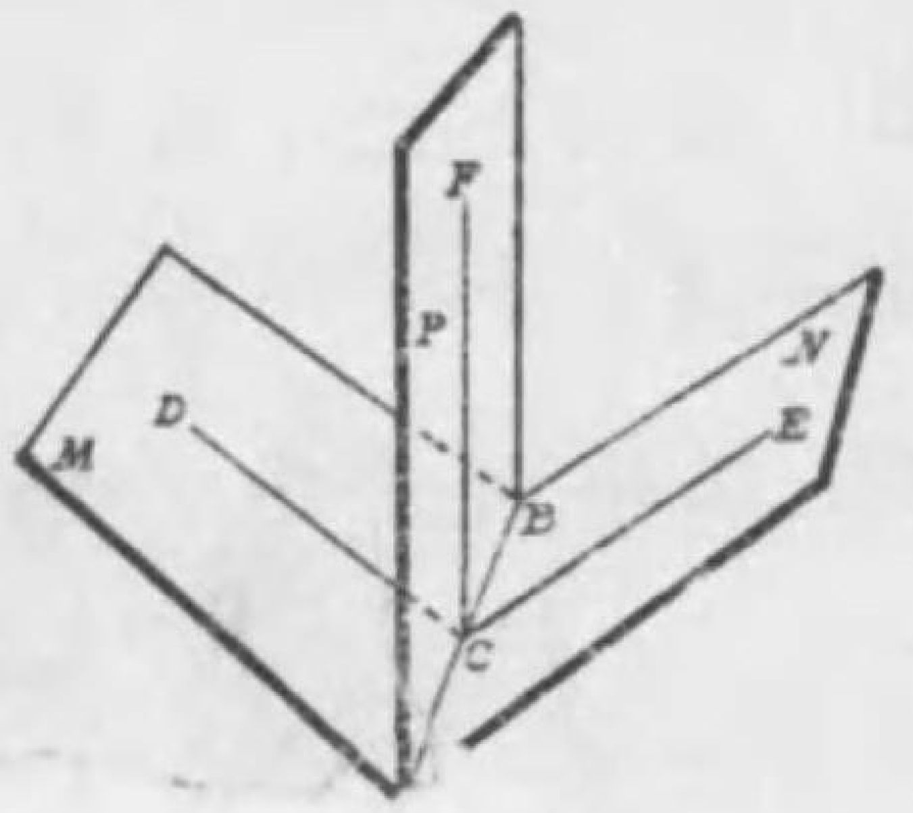
(22) 同一平面上ニ在ラザル四

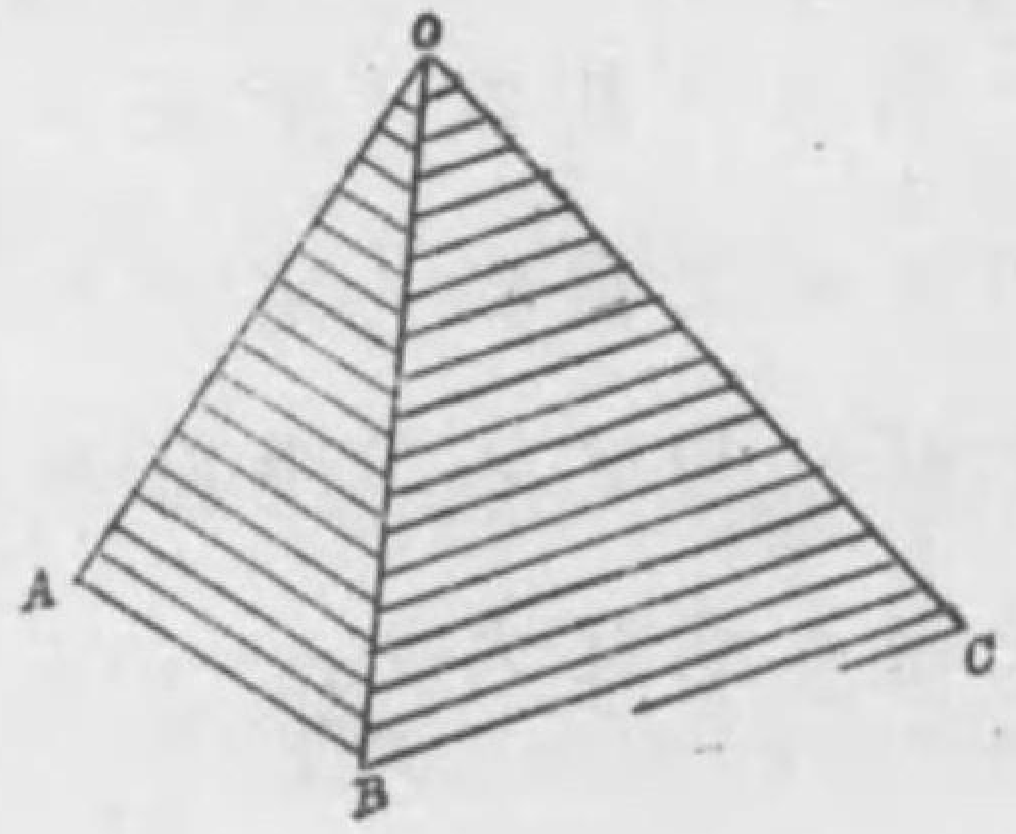
23 相交ル二直線ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

24 二面角M-AB-Nノ二等分面Pヲ作ルニハ如何ニスベキカ。

(23) 一點ニ於テ交ル三直線ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

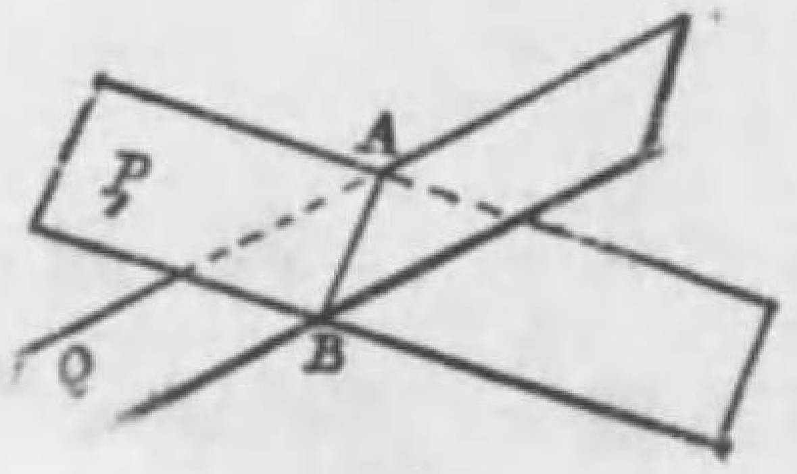
(24) 一點ニ於テ交ル三平面ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求メヨ。





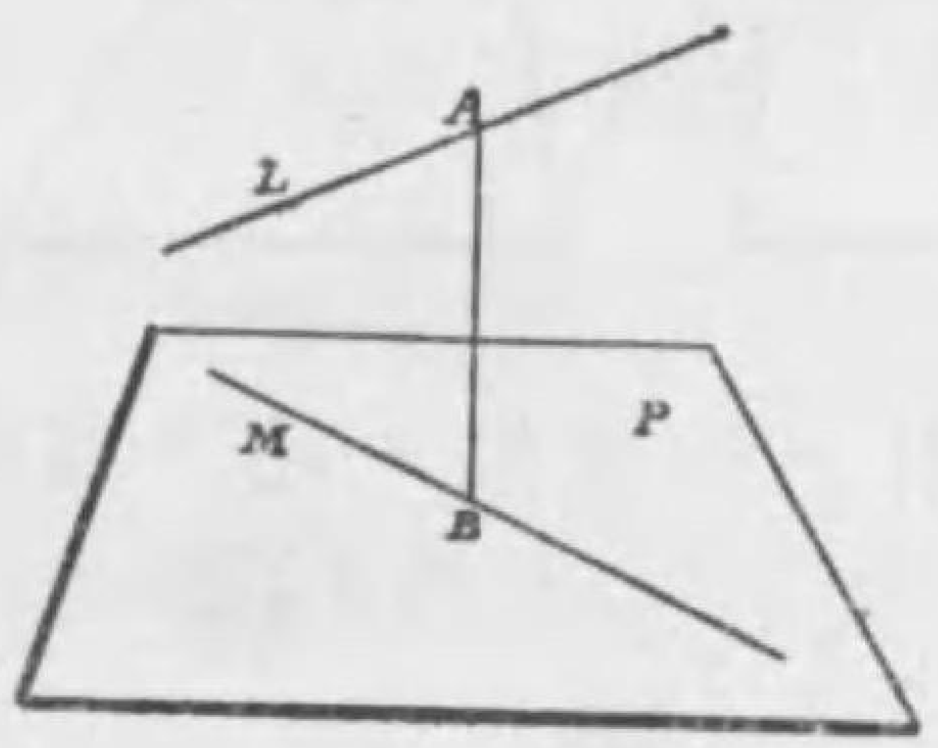
平面ヨリ
在ル點ノ軌跡
ヲ求メヨ。

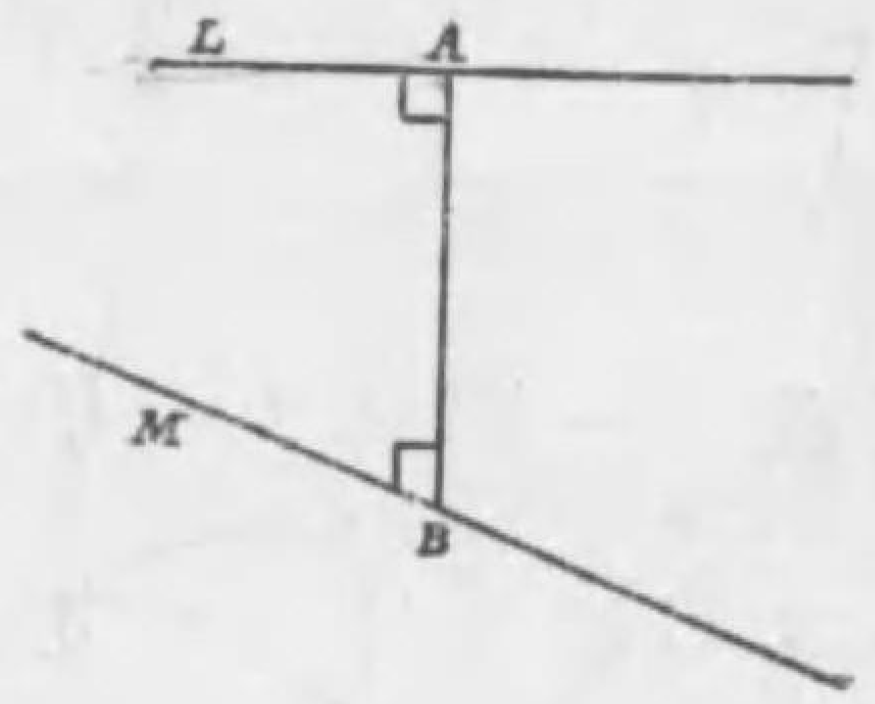
(25) 相交ル二平面ヨリノ距離ノ比ガ 3:2 ナル如キ點ノ軌跡ヲ求メヨ。



26 P平面上ノ定直線MトP上ニ在ラザル定直線Lトニ交ル直線ABヲ引キPニ垂直ナラシメヨ。

(26) 同一平面上ニ在ラザル二定直線L, Mニ共通ナル垂線ABヲ引ケ。且ソノ線分ABハ二直線L, M間ノ最短距離ナルコトヲ證セヨ。



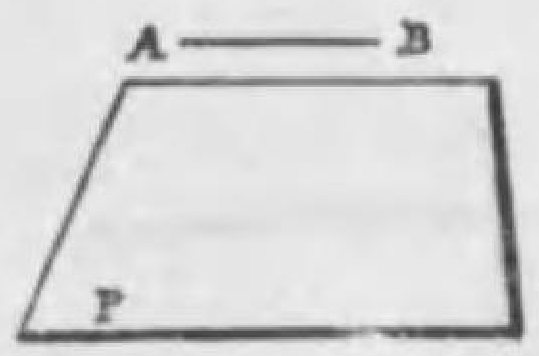


8 正射影

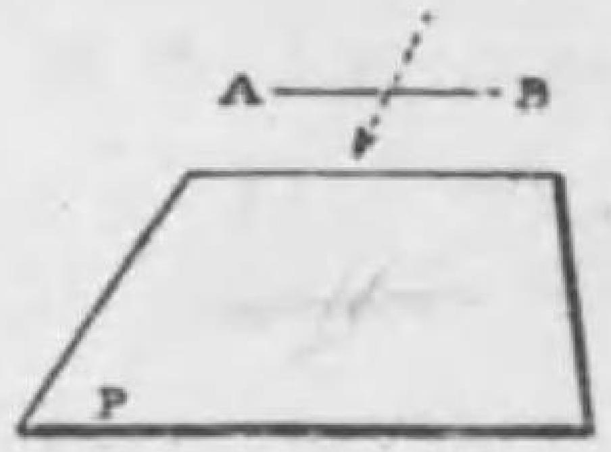
問一　次ノ圖ニ於テ線分ABノ平面Pニ投ズル影ヲ作レ。

(一) 放射光線　　(二) 平行光線

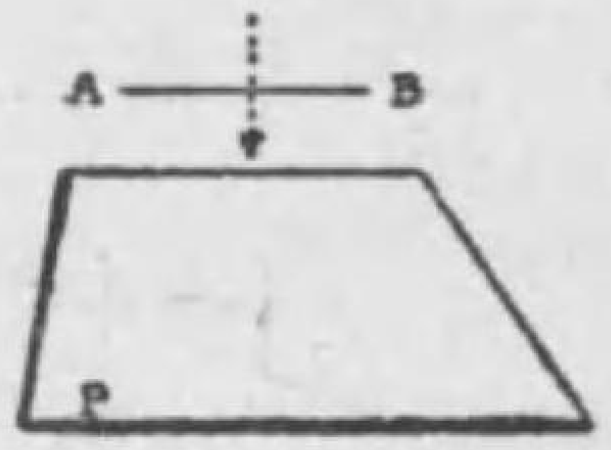
.S (光源)



斜光線

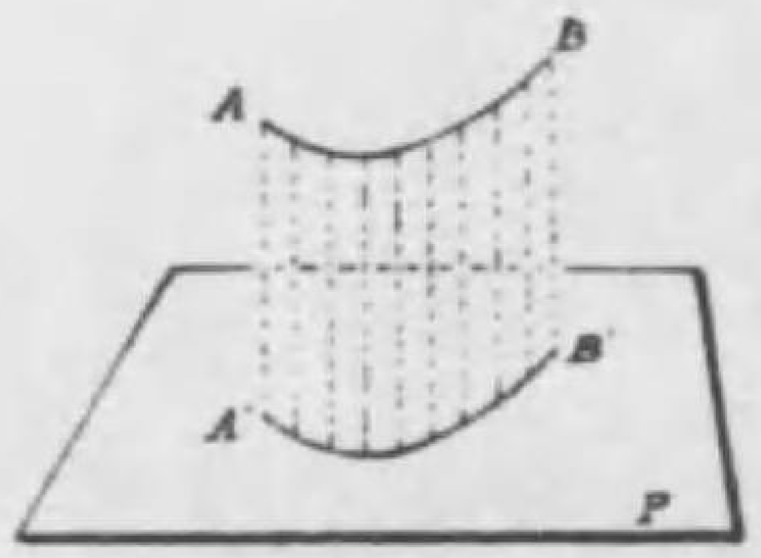


垂直光線



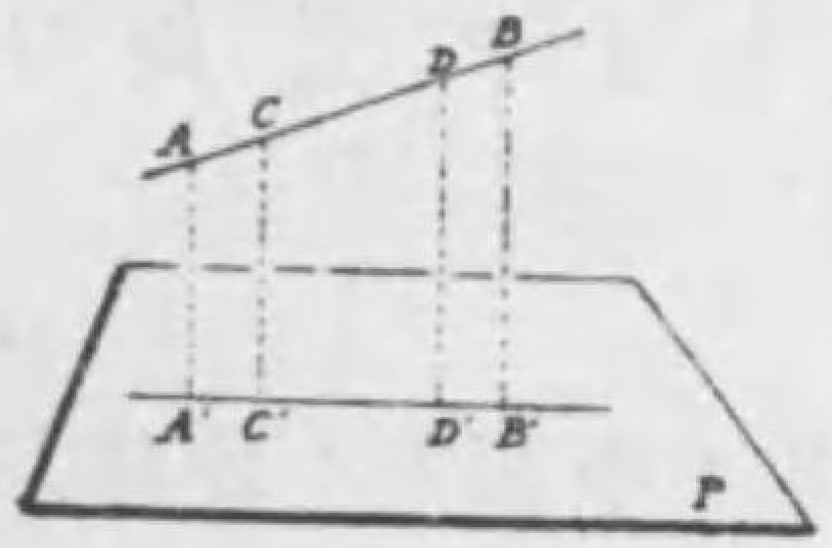
定義　一點ヨリ一平面ニ引ケル垂線ノ足ヲ其點ノ其平面ニ於ケル**正射影**トイフ。

又平面外ノ線上ノ點ノ其平面ニ於ケル正射影ノ軌跡ヲ其線ノ其平面ニ於ケル**正射影**トイフ。



問二　一平面ニ垂直ナル直線ノ其平面ニ於ケル正射影ヲ求メヨ。

定理　平面ニ垂直ナラザル直線ノ其平面ニ於ケル正射影ハ直線ナリ。



平面Pニ垂直ナラザル直線AB上ノ二點A,BノPニ於ケル正射影ヲA', B'トセバ直線ABノPニ於ケル正射影ハ直線$A'B'$ナリ。

證明　二垂線AA', BB'ハPニ垂直ナル平面Qヲ決定ス。而シテ此平面ハ直線AB, $A'B'$ヲ含ム。

故ニAB上ノ任意ノ點CヨリPニ引キタル垂線ハQ上ニ在リテ$A'B'$ニ交ル。其交點ヲC'トセバC'ハ即チCノ正射影ナリ。

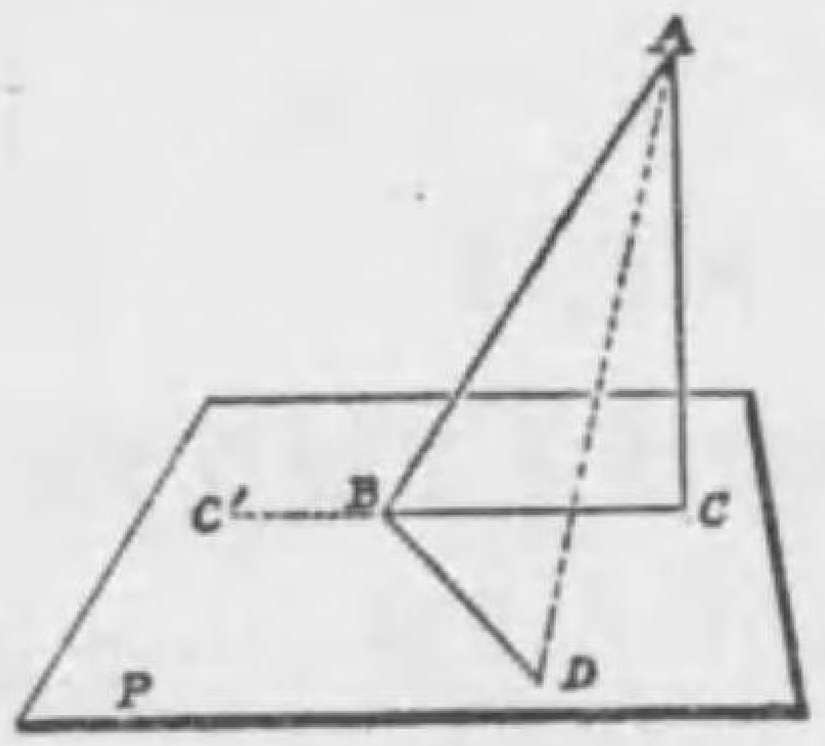
故ニAB上ノ總ベテノ點ノ正射影ハ$A'B'$上ニ在リ。

次ニ$A'B'$上ノ任意ノ點D'ヨリQ上ニ於テAA'ニ平行ナル直線ヲ引キABトノ交點ヲDトセバ$DD' \perp P$　故ニD'ハDノ正射影ナリ。

故ニ$A'B'$上ノ總テノ點ハAB上ノ或點ノ正射影ナリ。

故ニABノPニ於ケル正射影ハ直線$A'B'$ナリ。

定理 一平面ノ斜線ガ其平面ニ於ケル其正射影トナス鋭角ハ其斜線ト其平面上ノ何レノ直線トナス鋭角ヨリモ小ナリ。



ABヲ平面Pノ斜線,BCヲ其正射影トシテBヲ通リP上ニ任意ノ直線BDヲ引クトキハ

$\angle ABC < \angle ABD$

點Cヲ點Aノ正射影トセヨ。

證明 BCニ等シクBDヲトリA,Dヲ結ブトキハ

△ABCト△ABDトニ於テ

$BC = BD$

ABハ共通

$AC < AD$…………何故カ。

故ニ $\angle ABC < \angle ABD$

問 斜線ABハP上ノ如何ナル直線ト最大ノ角ヲナスカ。

定義 一直線ガ一平面ニ於ケル其正射影トナス角ヲソノ直線トソノ平面トノナス角トイフ。

問 題

28 互ニ平行ナル二直線ノ一平面ニ於ケル正射影ハ特別ノ場合ヲ除ク外平行ナル二直線ナリ。

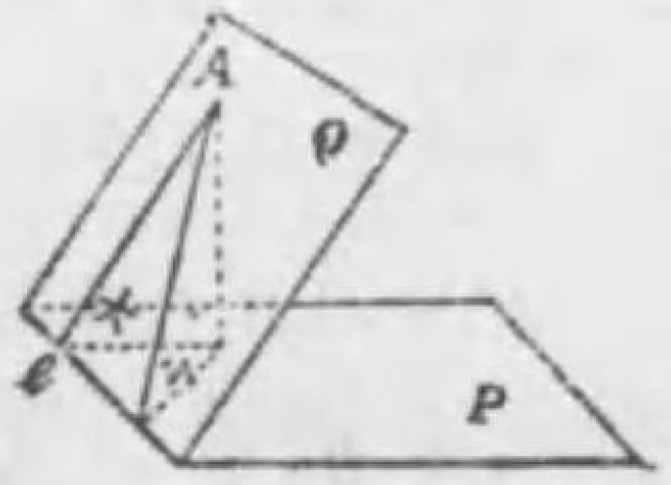
29 或線ノ相交ル二平面ノ各ニ於ケル正射影ガ共ニ直線ナルトキハ其線ハ直線ナリ。

30 矩形ノ紙ABCDアリ。ABハ8糎,BCハ6糎ナリ。之ヲ對角線ACニ沿フテ折リ曲ゲ平面ABCトCDAトヲ垂直ナラシメタルトキ線分BDノ平面ABCニ於ケル正射影ノ長サヲ求メヨ。

(28) 垂直ナラザル二平面ノ一ツノ上ノ平行四邊形ガ他ノ平面ニ投ズル正射影ハ平行四邊形ナリ。

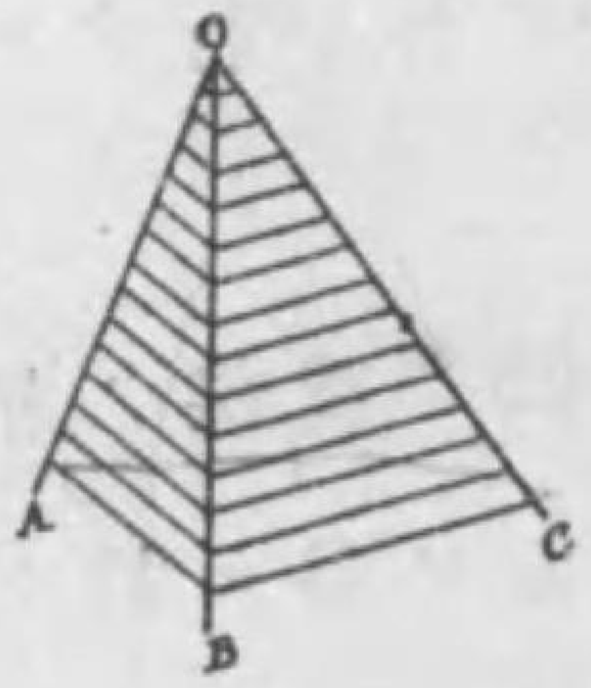
(29) 一線分ノ二平面ニ投ズル正射影ガ相等シキトキハ其線分ハ二平面ト等角ヲナス。

(30) 直線lニ於テ交ル二平面P,Qアリ。Q上ノ一點AヨリQ上ニ引ケル直線ノ中lニ垂直ナルモノハPト最大ノ角ヲナス。



9 立體角

問一 一點ニ於テ出會フ三ツノ平面ニヨリテ生ズル二面角ハ幾ツアルカ。



定義 三ツ以上ノ平面ガ一點ニ於テ出會ヒ尖形ヲナストキハ相隣レル二面角ノ稜ノナス角ヲ**面角**トイヒ,ソレ等ノ面角ガ**立體角**(又ハ**多面角**)**ヲナス**トイフ。

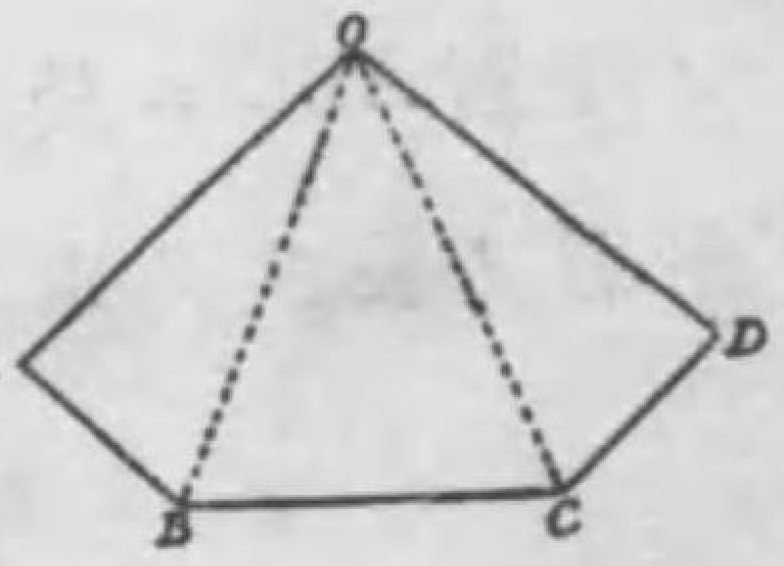
而シテ面角ノ共通頂點ヲ立體角ノ**頂點**トイフ。

例ヘバ圖ニ於テ∠AOB, ∠BOC, ∠COAハ面角ニシテコレ等ノ面角ハ立體角O-ABCヲナストイフ。

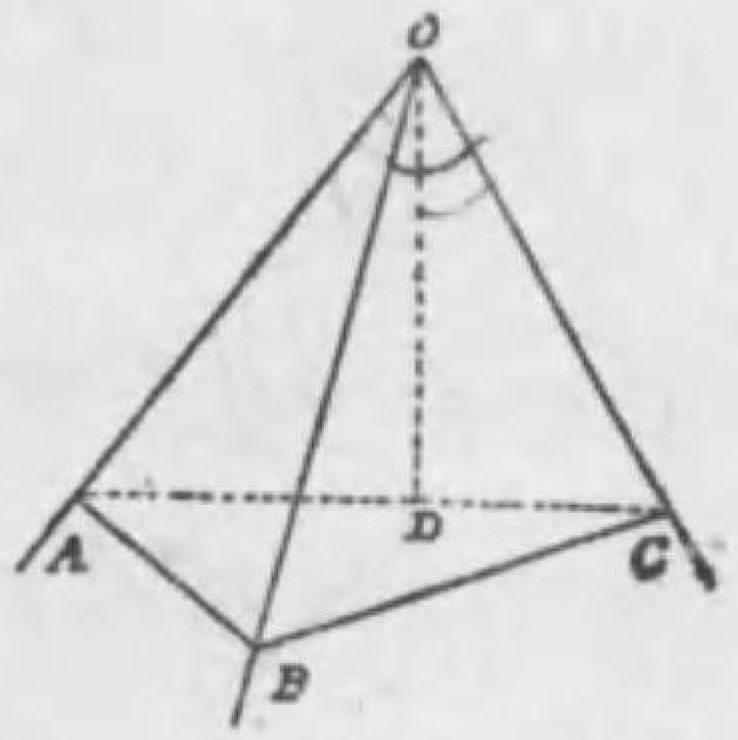
點Oハ立體角O-ABCノ頂點ナリ。

立體角ハコレヲ作ル面角ノ數ニ從テ**三面角,四面角等**トイフ。

問二 紙ヲ圖ノ如ク截リヌキテ點線ヲ折目トシテ之ヲ折リ曲ゲナバ常ニ三面角ヲ作リ得ベキカ。



定理 三面角ノ二ツノ面角ノ和ハ他ノ一ツノ面角ヨリ大ナリ。



三面角 O-ABC ニ於テ面角AOCヲ三ツノ面角中ノ最大ナルモノトスルモ

∠AOB+∠BOC>∠AOC

ナリ。

證明 平面AOC上ニ於テ∠AOBニ等シク∠AODヲトリOD上ノ一點Dヲ通リ平面AOC上ニ於テ直線ADCヲ引キODニ等シクOBヲ取ラバ

△AOB≡△AOD

∴ AD=AB

又 BC>DC……何故カ。

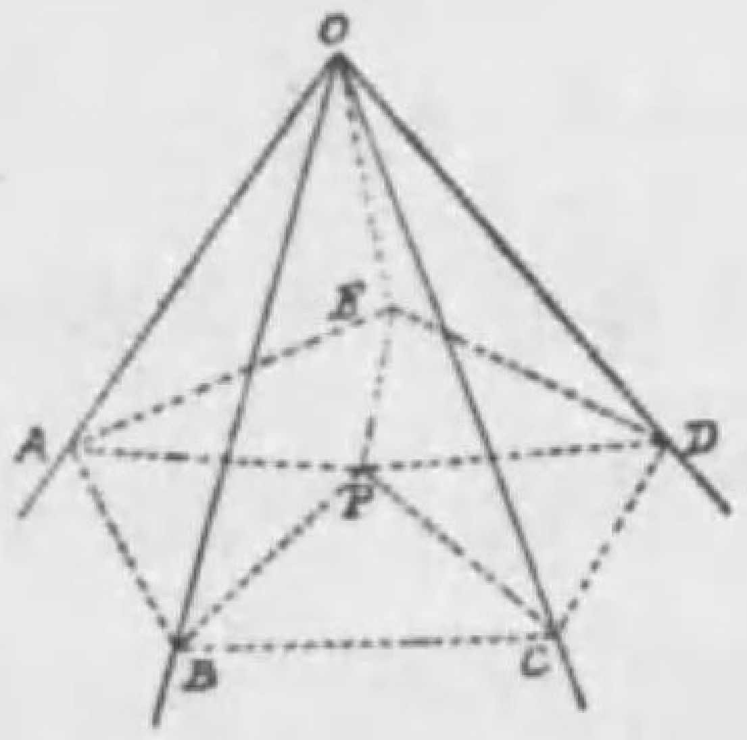
三角形BOCトDOCトニ於テ

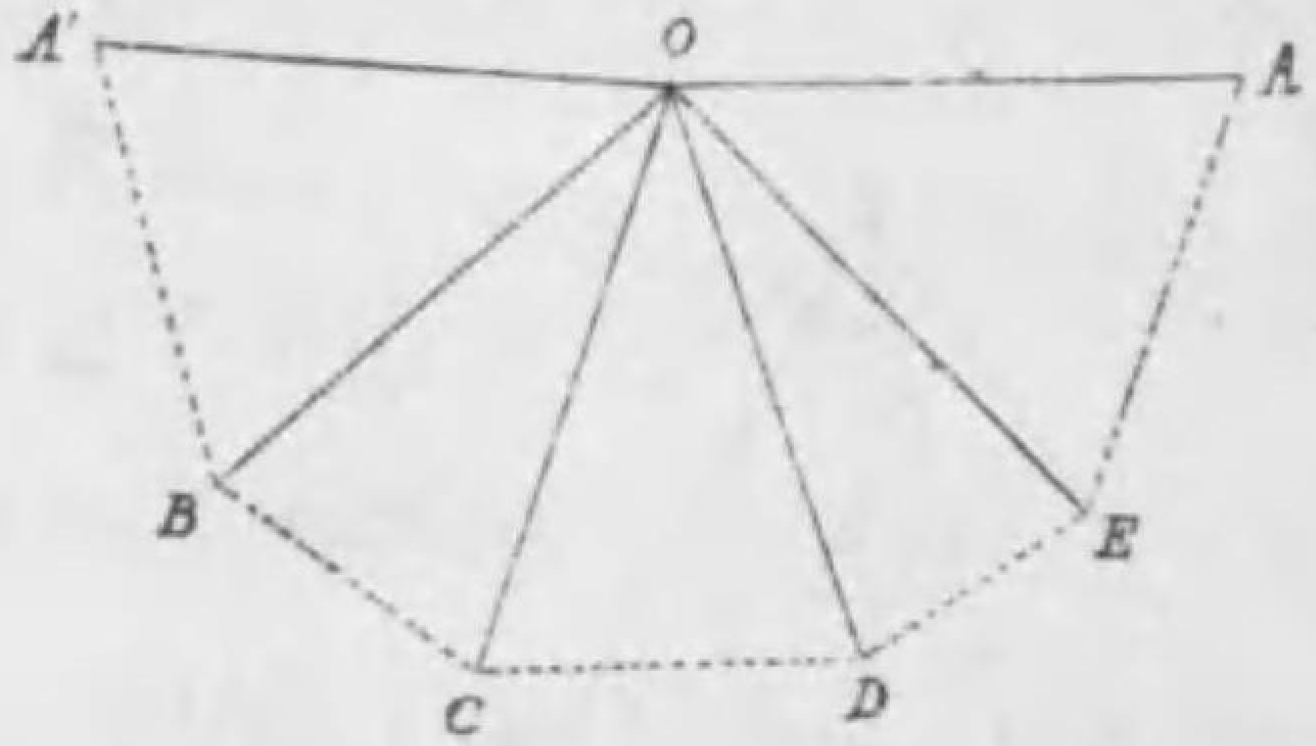
OB=OD, OC共通, BC>DC

∴ ∠BOC>∠DOC

∴ ∠AOB+∠BOC>∠AOC

定理 一ツノ立體角ノ總テノ面角ノ和ハ四直角ヨリ小ナリ。





立體角 O-ABCDE ニ於テ

$$\angle AOB+\angle BOC\cdots\cdots\cdots+\angle EOA<4R.\llcorner$$

證明 此立體角ヲ各稜ト交ル平面ニテ截リ各稜トノ交點ヲ夫々A,B,…EトシA多角形AB…E内ニ一點Pヲトリ之ト多角形ノ各頂點トヲ結ベバ

$$\angle OBA+\angle OBC>\angle ABC=\angle PBA+\angle PBC$$

C,D……Aヲ頂點トスル三面角ニ於テモ亦同樣ナリ。從テOヲ共通頂點トセル總テノ三角形ノ底角ノ和ハPヲ共通頂點トセル總テノ三角形ノ底角ノ和ヨリ大ナリ。

而シテ三角形ノ數ハ前後同數ニシテ夫々ノ内角ノ和ハ相等シキヲ以テ點Oニ於ケル面角ノ和ハ點Pニ於ケル角ノ和ヨリ小ナリ。

故ニ $\angle AOB+\angle BOC\cdots\cdots+\angle EOA\not<4R.\llcorner$

問題

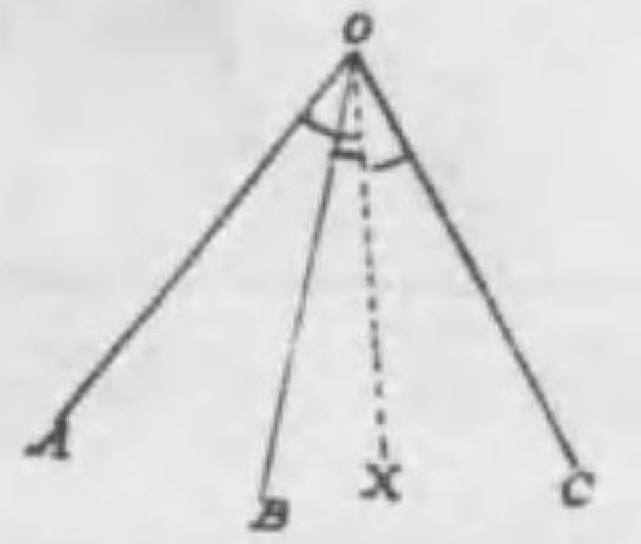
31 Dヲ三面角 O-ABC 内ノ一點トスレバ

$$\angle AOD+\angle BOD+\angle COD$$
$$>\frac{1}{2}(\angle AOB+\angle BOC+\angle COA)$$

32 正三角形ノミニテ作リ得ベキ立體角ハ幾通リアルカ。

33 三面角ノ三ツノ面角ガ相等シキトキハ其各稜ヲ稜トスル二面角モ亦相等シ。

34 三面角ノ頂點ヲ過リ三ツノ稜ト等角ヲナス直線ヲ引ケ。

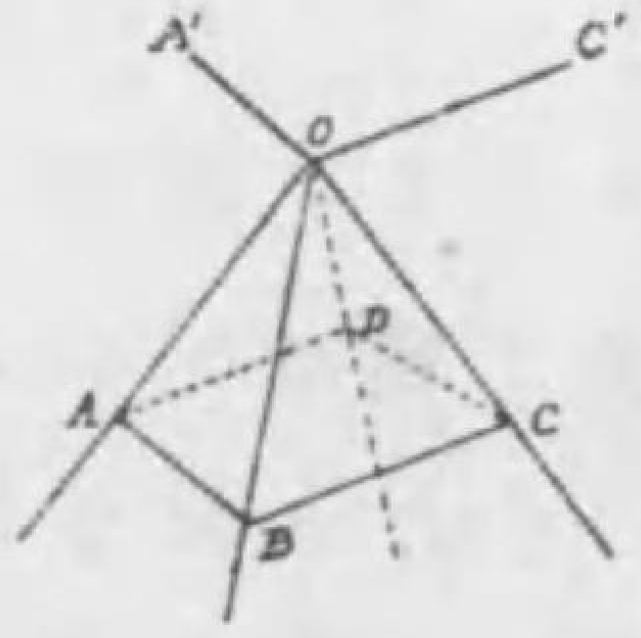


(31) 歪四邊形ノ四ツノ内角ノ和ハ4R.∟ヨリ小ナリ。

(32) 正三角形ト正方形トニテ作リ得ベキ立體角ハ幾通リアルカ。

(33) 二等邊三角形ノ底邊ヲ含ム任意ノ平面ハ其等邊ト等角ヲナス。

(34) 四面角ヲナス四ツノ平面ヲ一平面ニテ截リ其截口ヲシテ平行四邊形ナラシメヨ。



第二篇　多面體

第一章

多面體ノ性質

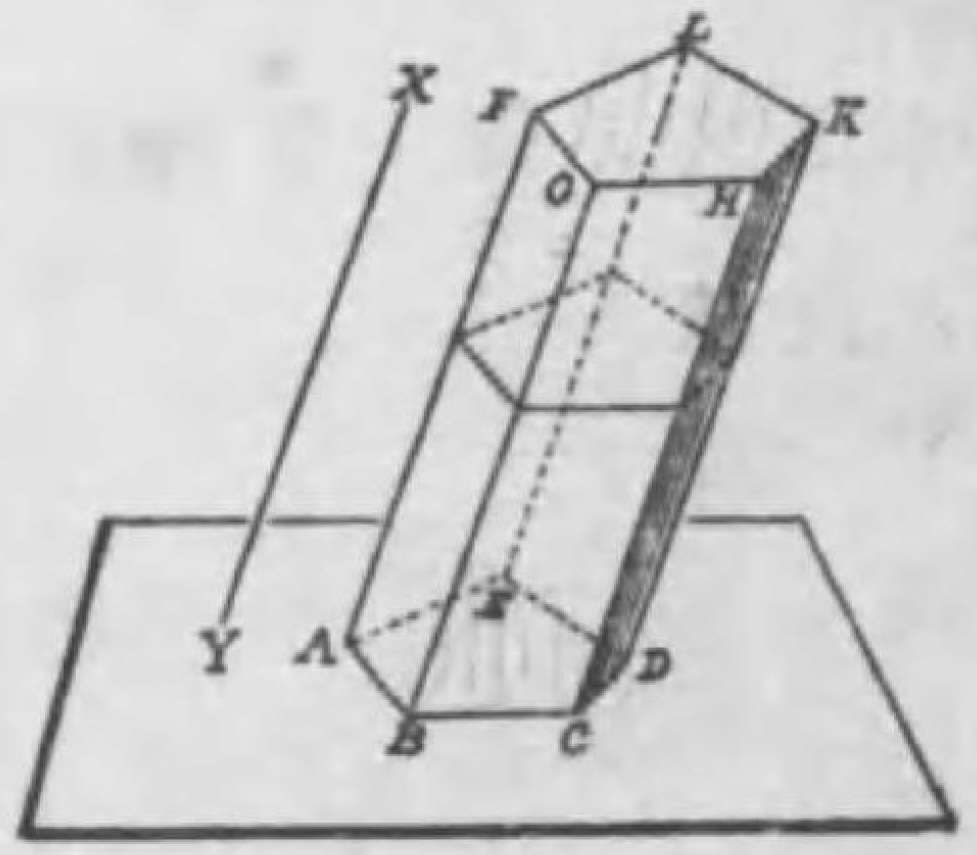
10　角壔及平行六面體

定義　**多面體**トハ多クノ平面ニヨリテ圍マレタル空間ノ一部分ナリ。

而シテ多面體ヲ境界スル平面ノ一部分ヲ多面體ノ**面**トイヒ,面ト面トノ交線ヲ其**稜**,稜ト稜トノ交點ヲ其**頂點**トイフ。

又多面體ハ其面ノ數ニヨリ之ヲ**四面體**,**五面體**,**六面體**等トイフ。

定義　一ツノ直線ニ平行ナル三ツ以上ノ平面ト之ニ交ル二ツノ平行ナル平面トニヨリテ圍マレタル多面體ヲ**角壔**トイフ。



問　稜 AF, BG, CH, 等ハ平行ニシテ且等シ。又多角形 ABC…, FGH… ハ合同ナリ。

定義　角壔ノ平行四邊形ナル面ヲ其**側面**トイヒ他ノ二ツノ平行ナル平面ヲ其**底面**トイフ。

側面ト側面トノ交線ヲ角壔ノ**側稜**トイヒ,兩底面間ノ距離ヲ其**高サ**トイフ。

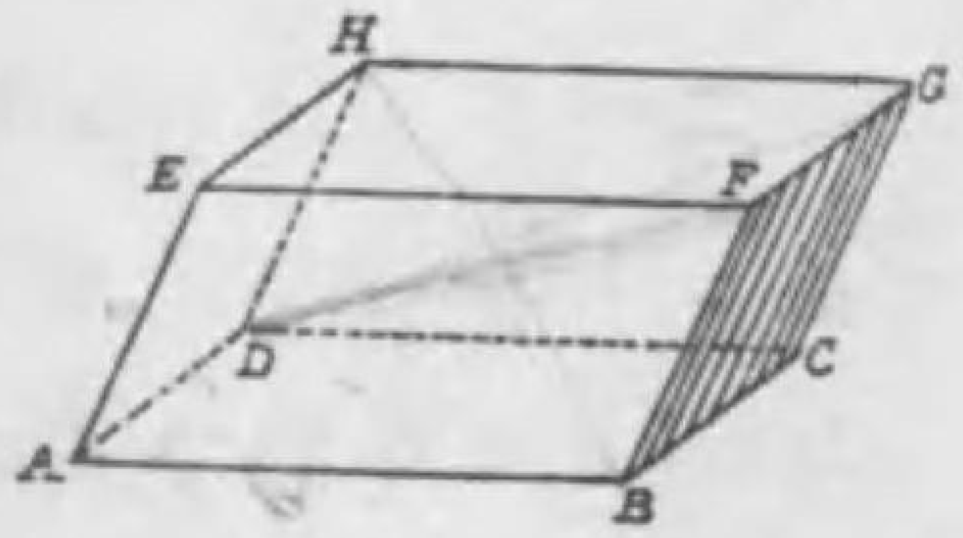
角壔ハ底面ノ邊ノ數ニヨリ之ヲ**三角壔**,**四角壔**,**五角壔**等トイフ。

定義　多面體ヲ一平面ニテ截リタルトキ生ズル多角形ヲ其**截面**トイヒ,角壔ノ側稜ニ垂直ナル截面ヲ其**直截面**トイフ。

定理　角壔ノ總テノ側稜ニ交ル平行ナル截面ハ合同ナル多角形ナリ.

證明　二ツノ截面ノ相對應スル邊ハ夫々平行ニシテ且相等シ。故ニ其相對應スル角モ亦夫々相等シ。故ニ平行ナル截面ハ合同ナリ。

定義　底面ガ平行四邊形ナル角壔ヲ**平行六面體**トイヒ,其ノ同一ノ面上ニ在ラザル頂點ヲ結ビ付クル直線ヲ其**對角線**トイフ。



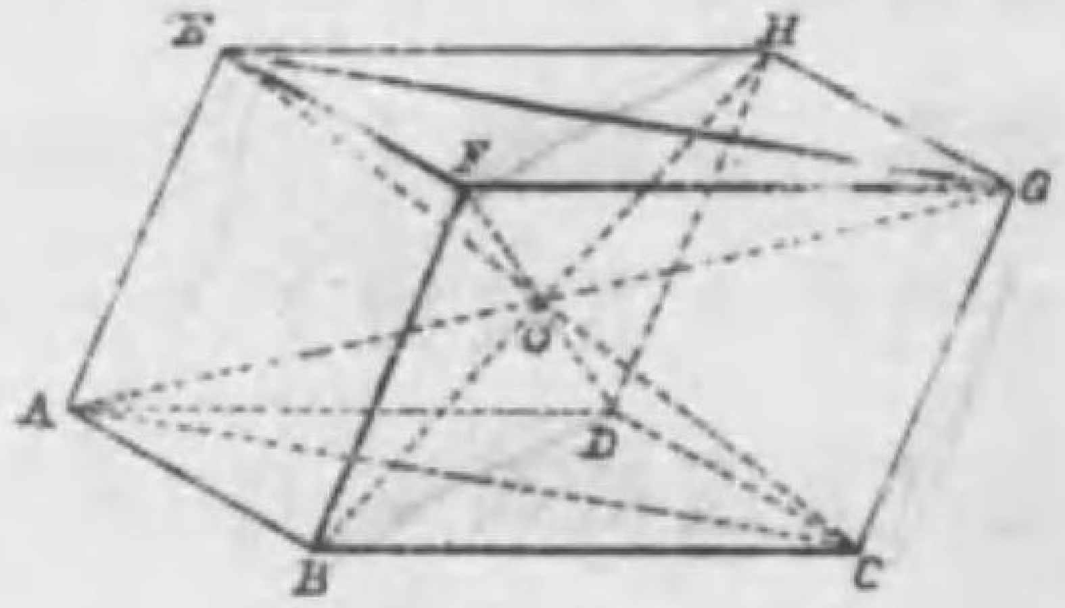
問　三双ノ相對應スル面ハ平行ナリ。

定理　平行六面體ニ於テ

(一)　相對スル面ハ合同ナル平行四邊形ニシテ

(二)　四對角線ハ同一ノ點ヲ通ル。

A—G ヲ平行六面體トセバ



(一)　$\square AC \equiv \square EG$

(二)　AG, BH, CE, DF ハ同一ノ點ヲ通ル。

證明(一)　$AB \parallel EF$,　$AE \parallel BF$…………何故カ。

故ニ ABFE ハ平行四邊形ナリ。

同樣ニ他ノ五ツノ四邊形モ平行四邊形ナリ。

$\therefore \quad AB \underline{\parallel} EF, \; BC \underline{\parallel} FG$

$\therefore \quad \angle ABC = \angle EFG$

$\therefore \quad \square AC \equiv \square EG$

(二)　$AE \underline{\parallel} CG$ ………何故カ。

故ニ EC ハ AG ノ中點ヲ通ル。之ヲ點 O トセバ BH, FD モ亦點 O ヲ通ル。………何故カ。

故ニ四對角線ハ同一點 O ヲ通ル。

定義　側稜ガ底面ニ垂直ナル角壔ヲ**直角壔**トイヒ,垂直ナラザルモノヲ**斜角壔**トイフ。又底面ガ正多角形ナル直角壔ヲ**正角壔**トイフ。

各面ガ矩形ナル平行六面體ヲ**直六面體**トイヒ各面ガ正方形ナル直六面體ヲ**立方體**トイフ。

問　題

35　正角壔ノ側面ハ合同ナル矩形ナリ。

36　直三角壔アリ。其底面ノ三邊ハ 8 糎, 10 糎, 11 糎ニシテ高サ 15 糎ナリ。ソノ側面積ヲ求メヨ。

37　直六面體ノ四ツノ對角線ハ相等シ。

38　平行六面體ノ四ツノ對角線ノ上ノ正方形ノ和ハ其十二稜ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ。

(35)　多面體ノ中ニテ最モ面ノ數ノ少キモノハ何面體ナルカ。

(36)　斜角壔ノ側面積ハ其直截面ノ周ト其側稜トノ積ニ等シ。

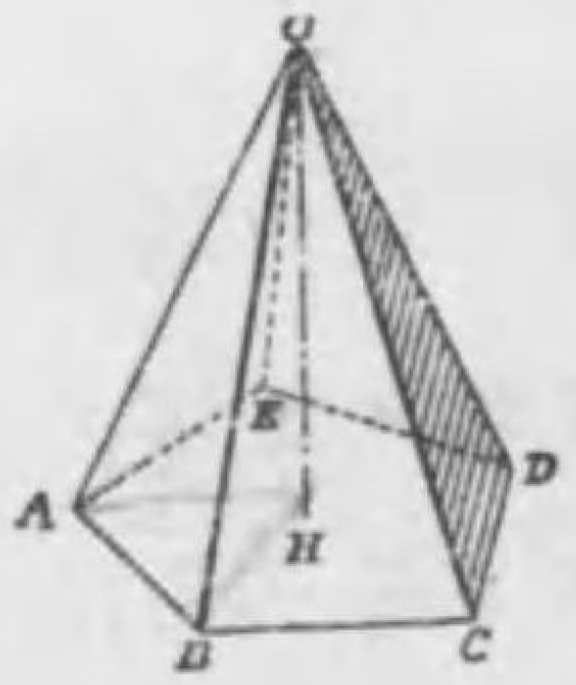
(37)　一稜ノ長サ a 糎ナル立方體ノ對角線ノ長サハ $a\sqrt{3}$ 糎ナリ。

(38　何レノ二ツヲトルモ同一平面上ニ在ラザル三直線上ニ三稜ヲ有スル平行六面體ヲ作レ。

11 角錐

定義　一ツノ面ガ多角形ニシテ他ノ總テノ面ガ共通頂點ヲ有スル三角形ナル多面體ヲ**角錐**トイヒ,其多角形ヲ角錐ノ**底面**,三角形ヲ**側面**,共通頂點ヲ其**頂點**トイフ。

又側面ト側面トノ交線ヲ**側稜**トイヒ,頂點ヨリ底面ニ至ル距離ヲ其ノ**高サ**トイフ。



角錐ハ底面ノ邊ノ數ニヨリ之ヲ**三角錐**,**四角錐**,**五角錐**,等トイフ。三角錐ハ之ヲ**四面體**トイフコトアリ。

定義　底面ガ正多形ニシテ頂點ヨリ底面ヘ引ケル垂線ノ足ガ其正多角形ノ中心ト合スルモノヲ**正角錐**トイフ。

問　　題

39　正角錐ノ側面ハ二等邊三角形ナリ。

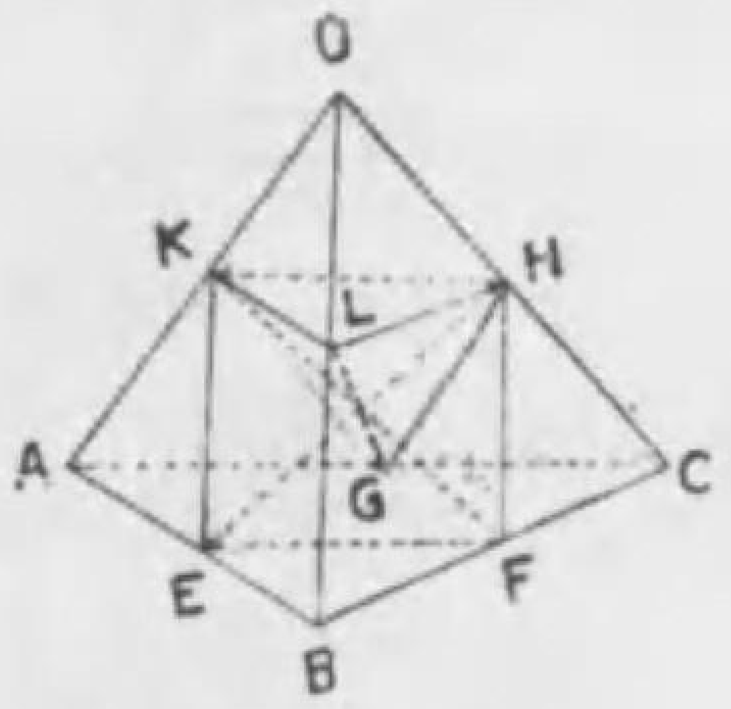
(39)　正角錐ノ側面ノ高サハ皆相等シ。

定義　正角錐ノ側面ナル二等邊三角形ノ高サヲ其**斜高**トイフ。

40　正角錐ノ側面積ハ其底面ノ周ト斜高トノ積ノ半分ニ等シ。

41　四面體 O–ABC ノ各稜ノ中點ヲ E, F, G, H, K, L トセバ其各稜ノ上ノ正方形ノ和ハ

$4(\mathrm{KF}^2+\mathrm{EF}^2+\mathrm{GL}^2)$ ニ等シ。

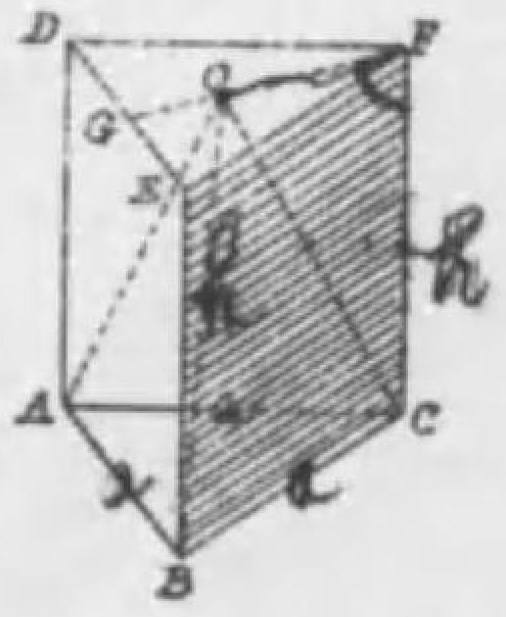


(40)　正三角錐アリ。其斜高ハ 6 糎,高サ $2\sqrt{3}$ 糎ナリ全表面積ヲ求メヨ。

(41)　圖ノ如ク高サ h,底面ノ一邊ガ a ナル正三角壔ニ內接スル正角錐ノ側稜ノ上ノ正方形ノ和ハ $3h^2+a^2$ ニ等シ。

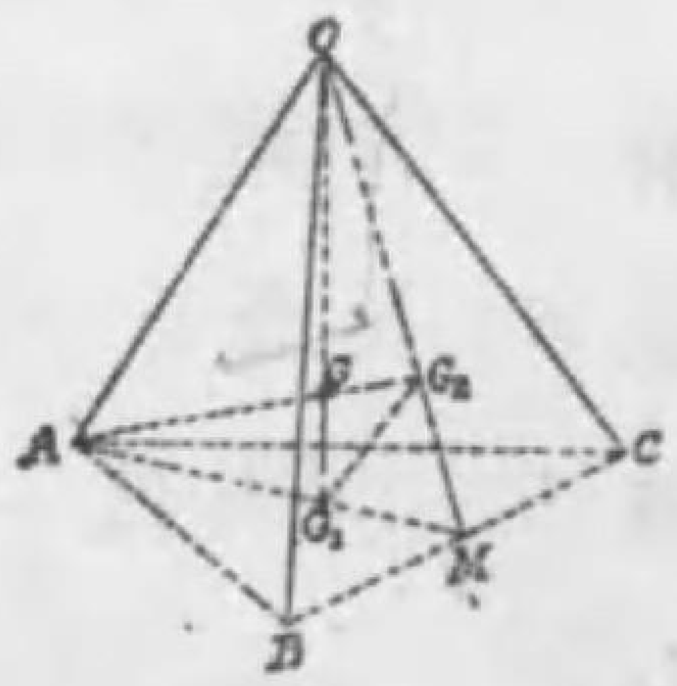
$\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{2}{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{3}a$



42　四面體ノ各頂點ヲ夫々其對面ノ重心ト結ブ四直線ハ同一ノ點ヲ通ル。

其一點ヲ四面體ノ**重心**トイフ。

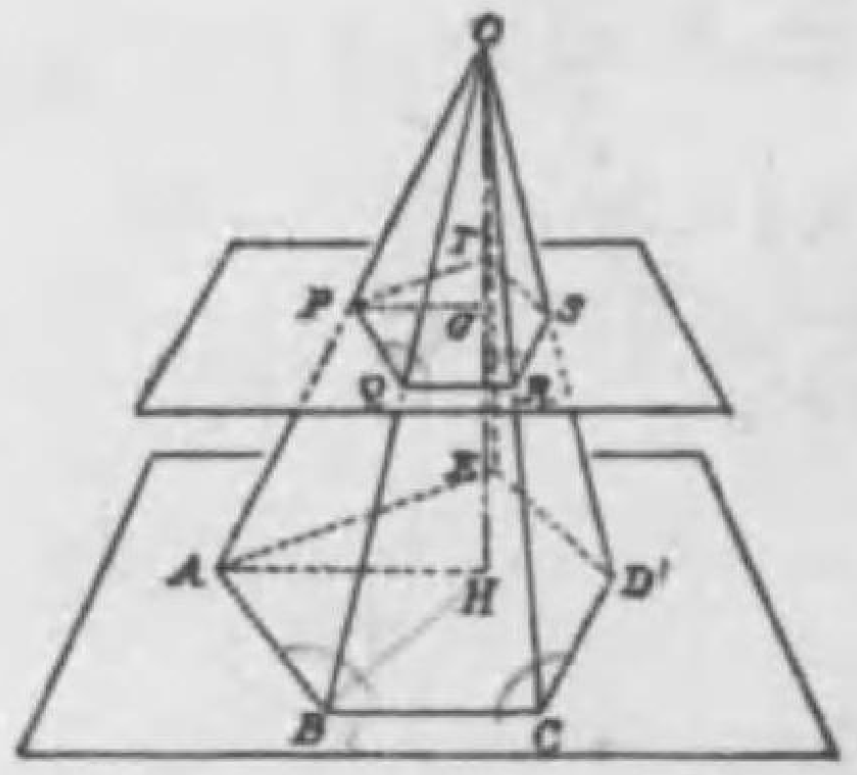


定理 角錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截レバ

㈠ 側稜及ビ高サハ同ジ比ニ分タル。

㈡ 截面ト底面トハ相似多角形ナリ。

證明 角錐 O-ABCDE ノ截面ヲ PQRST トセバ



㈠ $\frac{OP}{OA}=\frac{OQ}{OB}=\frac{OR}{OC}$

$=\frac{OS}{OD}=\cdots$何故カ。

㈡ $\angle ABC=\angle PQR, \angle BCD=\angle QRS\cdots\cdots$何故カ。

又 $\frac{OP}{OA}=\frac{PQ}{AB}$, $\frac{OP}{OA}=\frac{QR}{BC}\cdots\cdots$何故カ。

故ニ $\frac{PQ}{AB}=\frac{QR}{BC}=\frac{RS}{CD}=\cdots\cdots$

故ニ多角形$ABCDE \backsim$多角形$PQRST$

系 角錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ其截面ノ面積ノ比ハ頂點ヨリ其截面ニ至ル距離ノ二乘比ニ等シ。

問題

43 等高ナル二ツノ角錐ヲ底面ニ平行ニシテ且各頂點ヨリ等距離ニ在ル平面ニテ截レバ其截面ノ比ハ底面ノ比ニ等シ。

44 角錐ノ底面ノ面積ハ其側面ノ面積ノ和ヨリ小ナリ。

(43) 等底等高ナル二ツノ角錐ヲ底面ニ平行ニシテ且各頂點ヨリ等距離ニ在ル平面ニテ截レバ其截面ハ相等シ。

(44) 四面體ノ二双ノ對稜ガ互ニ垂直ナルトキハ他ノ一双ノ對稜モ亦互ニ垂直ナリ。

定義 角錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截リタルトキ底面ト截面トノ間ニ在ル部分ヲ**角錐臺**トイフ。

45 正六角錐臺ノ兩底面ノ周ハ夫々 p 糎, p' 糎ニシテ斜高ハ h 糎ナリ。其全表面積ヲ求メヨ。

(45) 問題45ニ於ケル角錐臺ヲ一部分トシテ有スル元ノ角錐ノ高サヲ求メヨ。

12 正多面體

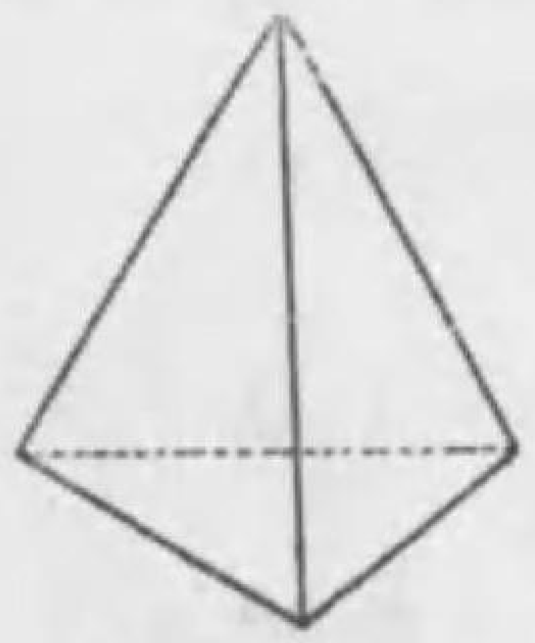
定義 正多面體トハ總テノ面ガ合同ナル正多角形ニシテ且總テノ立體角ガ相等シキ多面體ナリ。

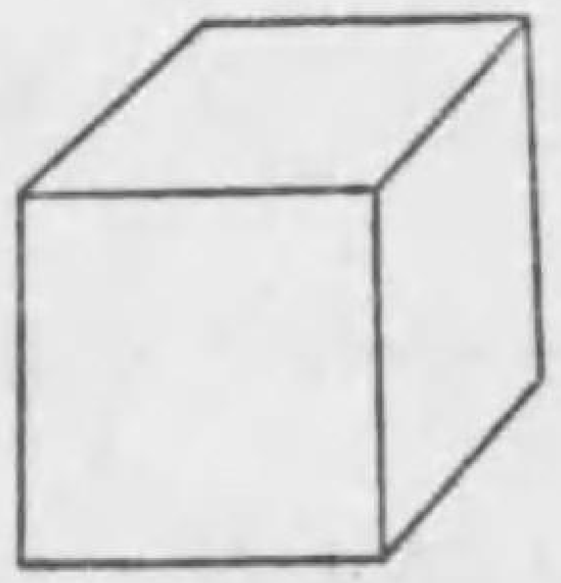
問一 總テノ面ガ正三角形ノミナル正多面體ニ幾通リノ場合ガアルカ。（39頁問題32ヲ見ヨ）

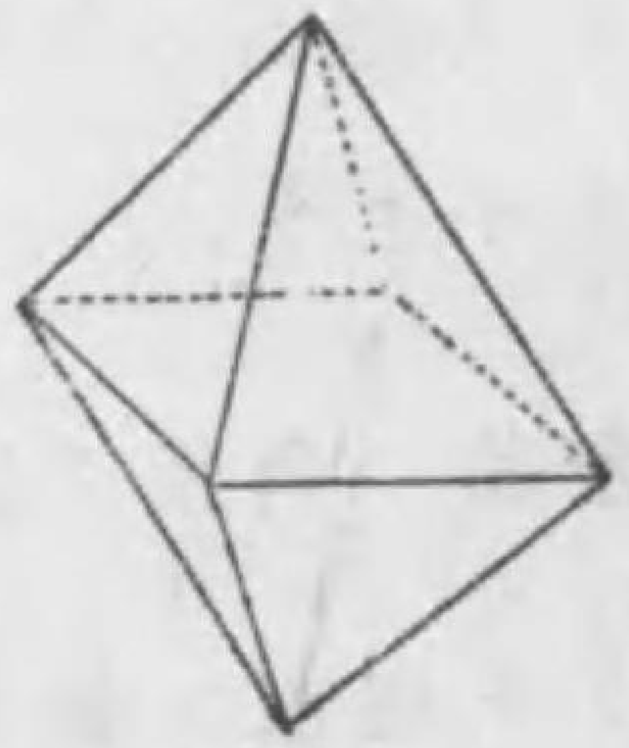
問二 總テノ面ガ正方形ノミ又ハ正五邊形ノミニテハ如何。

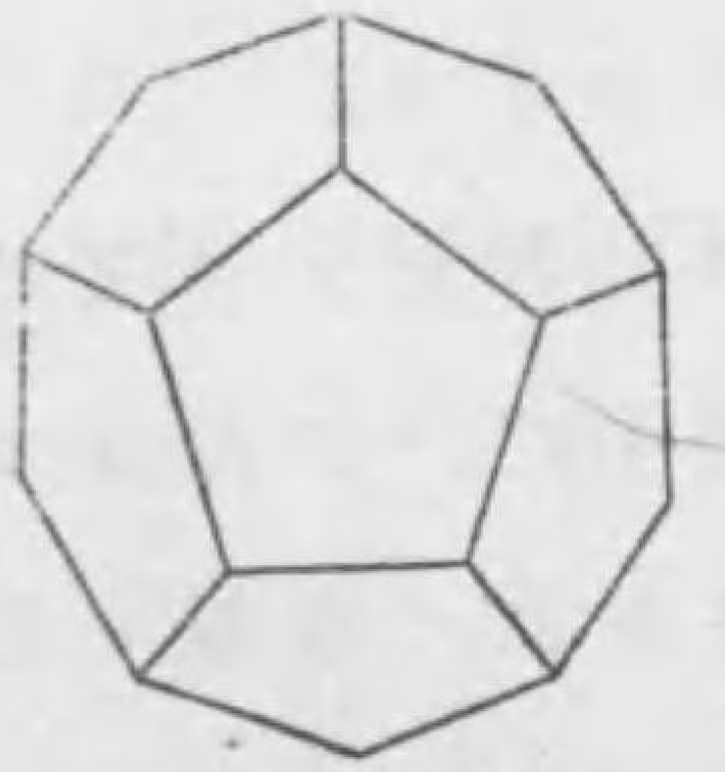
問三 正六邊形ノミヲ以テ立體角ヲ作リ得ルカ。

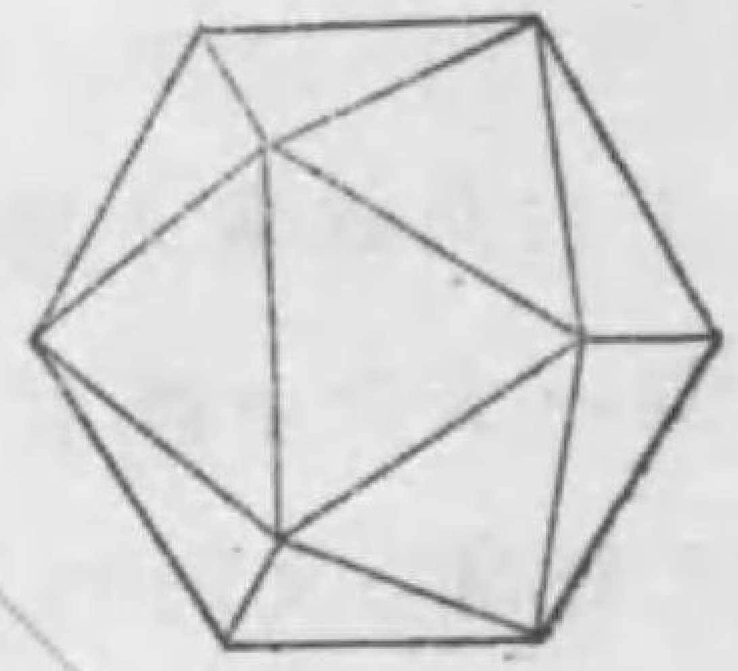
定理 正多面體ハ唯五種ニ限ル。


正四面體

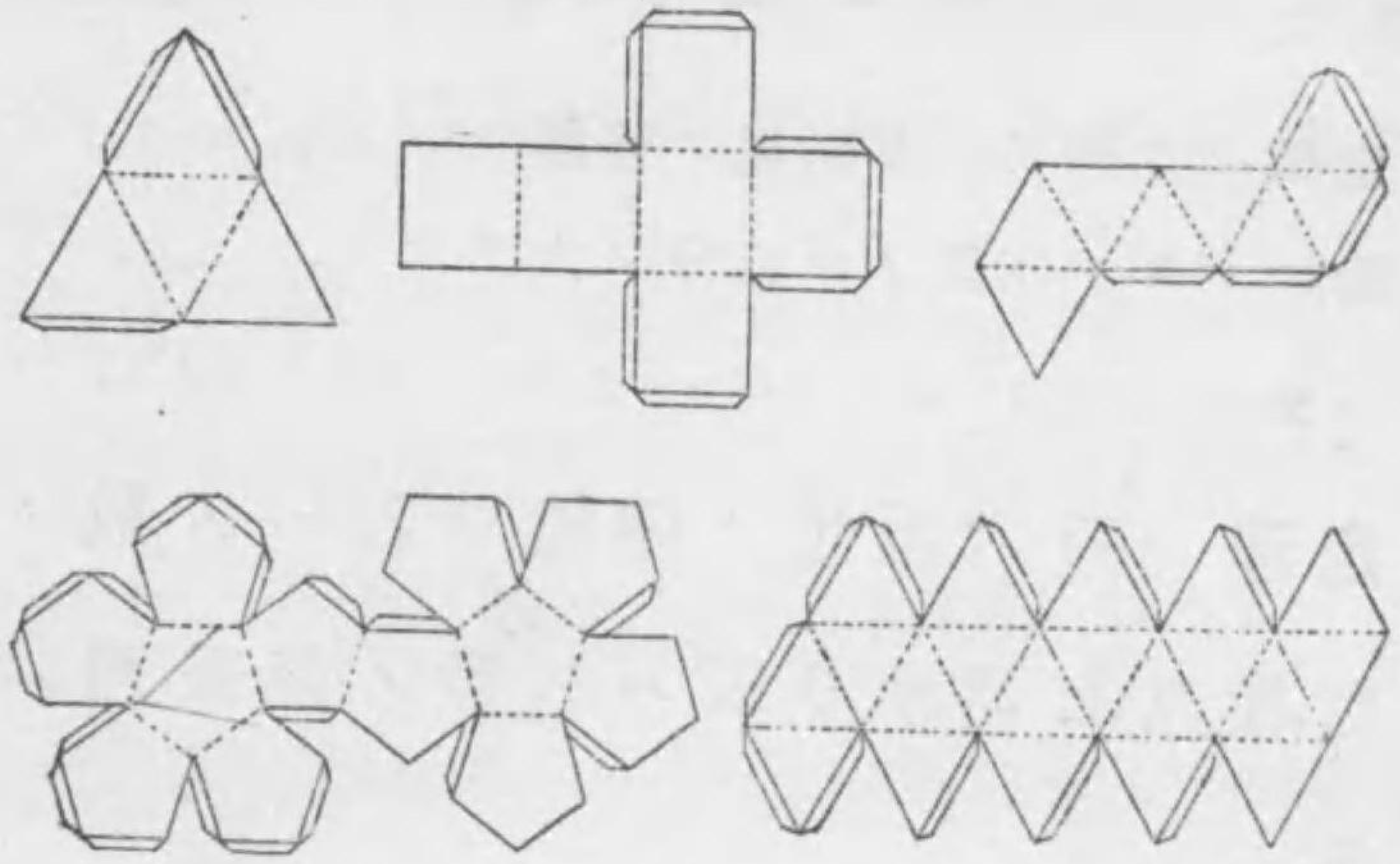

正六面體


正八面體


正十二面體


正二十面體

正多面體ハ次ノ圖ノ如ク紙ヲ切拔キテ容易ニ之ヲ作ルコトヲ得。



問 題

46 一稜ノ長サ$2a$糎ナル正四面體ノ表面積ヲ求メヨ。

47 正八面體ノ相隣ラザル頂點ヲ結ブ三ツノ線分ノ相等シキコトヲ證セヨ。

(46) 一稜ノ長サa糎ナル正二十面體ノ表面積ヲ求メヨ。

(47) 四面體ノ對稜ノ中點ヲ結ブ三直線ガ互ニ垂直ナルトキハ其四面體ハ正四面體ナリ。

第二章

多面體ノ體積

定義 立體(又ハ多面體)ノ**體積**トハ其面ニヨリテ圍マレタル空間ノ一部分ノ大サナリ。

問 全表面積ガ486平方糎ナル立方體ノ體積ヲ求メヨ。

定理 直六面體ノ體積ヲ表ハス數ハ縱,橫及ビ高サヲ表ハス數ノ連乘積ニ等シ。

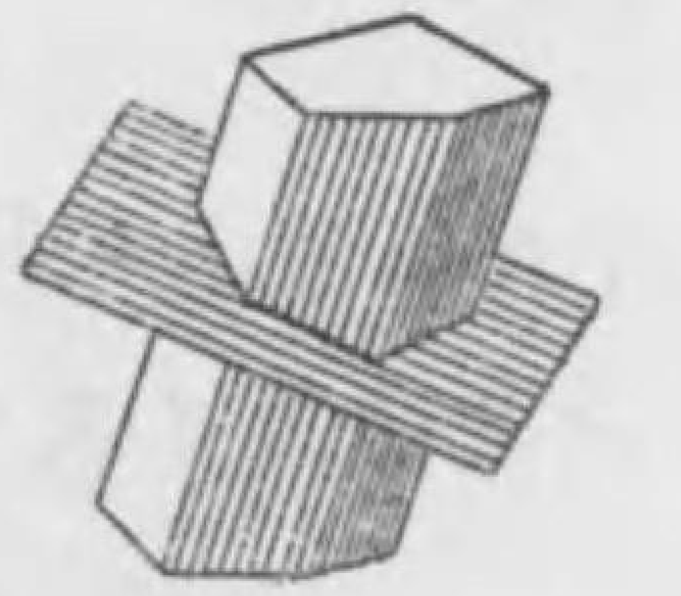
コノ定理ヲ略シテ「直六面體ノ體積ハ縱,橫,高サノ積ニ等シ」トイフコトアリ。

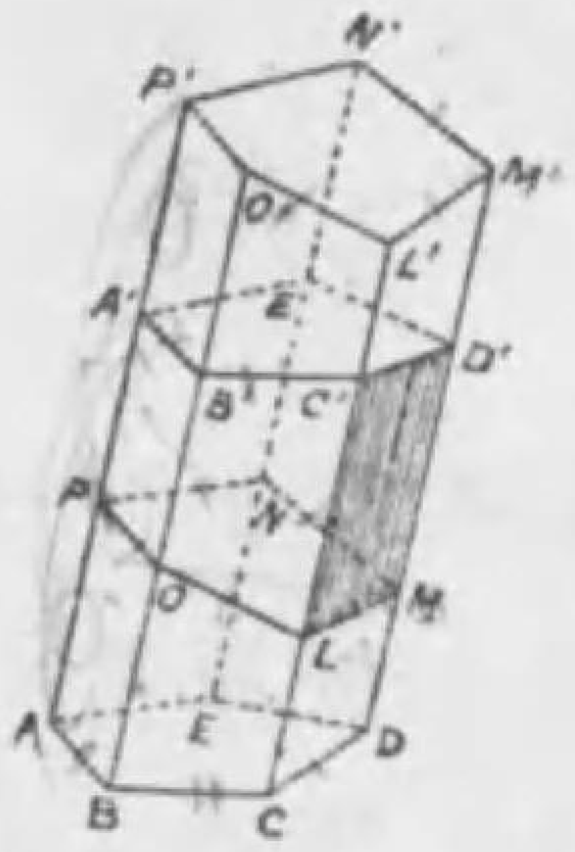
定義 二ツノ立體ノ體積ガ相等シキトキハ其二ツノ立體ハ**相等シ**,又ハ**等積ナリ**トイヒ,二ツノ立體ヲ全ク重ネ合スコトヲ得ルトキハ其二ツノ立體ハ**合同ナリ**トイフ。

從テ合同ナル立體ハ等積ナルモ等積ナル立體ハ必ラズシモ合同ナラズ。例ヘバ立方體ト三角壔トハ等積タリ得ルモ合同ナラザルガ如シ。

13 平行六面體及角壔ノ體積

定理 斜角壔ノ體積ハ其直截面ヲ底面トシ其側稜ヲ高サトスル直角壔ニ等シ。





A—D'ヲ斜角壔トシ其直截面ヲPMトセバ此斜角壔ハPMヲ底面トシAA'ヲ高サトスル直角壔ニ等シ。

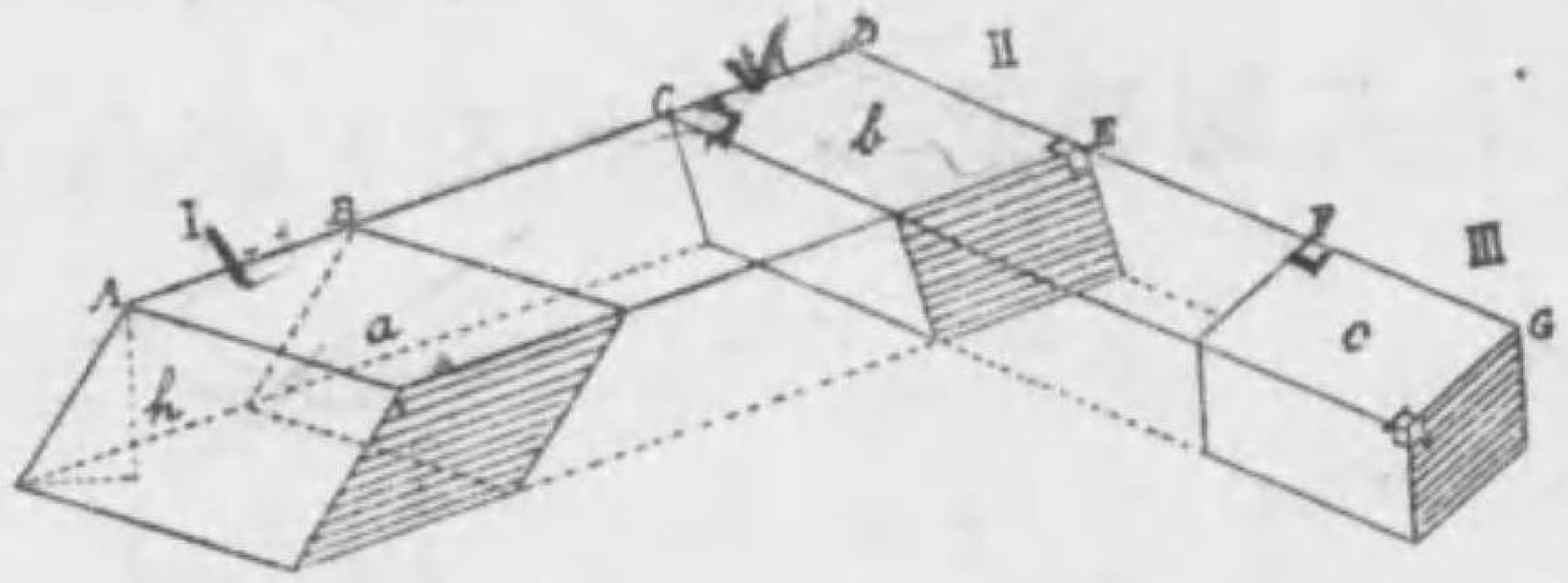
證明 PP'ヲAA'ニ等シクトリP'ヲ通リ平面PMニ平行ナル平面ヲ引キ直角壔P-M'ヲ作ルトキハ多面體A'-M'ヲ下方ニズラスコトニヨリテ多面體A-Mニ重ネ合スコトヲ得。

故ニ　多面體A'-M'=A-M

此ノ雙方ヘ多面體P-D'ヲ加フルトキハ

斜角壔A-D'=直角壔P-M'

定理 平行六面體ノ體積ハ其底面積ト高サトノ積ニ等シ。



I ヲ與ヘラレタル平行六面體トシ其底面ノ面積ヲ a, 高サヲ h トセバ其體積ヲ表ハス數ハ ah ニ等シ。

證明 I ノ稜AB及ビ之ニ平行ナル各稜ヲ延長シテAB ノ延長上ニAB ニ等シクCD ヲトリC, D ヲ過リ AD ニ垂直ナル平面ニテ此等ノ稜ヲ切ルトキハ直角壔 II ヲ得。

然ルトキハ II=I……何故カ。

同樣ニシテDE ノ延長上ニ DE ニ等シクFG ヲトリF, G ヲ通リ DG ニ垂直ナル平面ニテ FG ニ平行ナル稜ヲ切ルトキハ直六面體 III ヲ得。

然ルトキハ　III=II

故ニ　III=I

而シテ I ノ底面 a=II ノ底面 b……何故カ。

II ノ底面 b=III ノ底面 c

故ニ　$c=a$

然ルニ I, II, III ノ高サハ共ニ h ニシテ III ノ體積ハ ch ナリ。

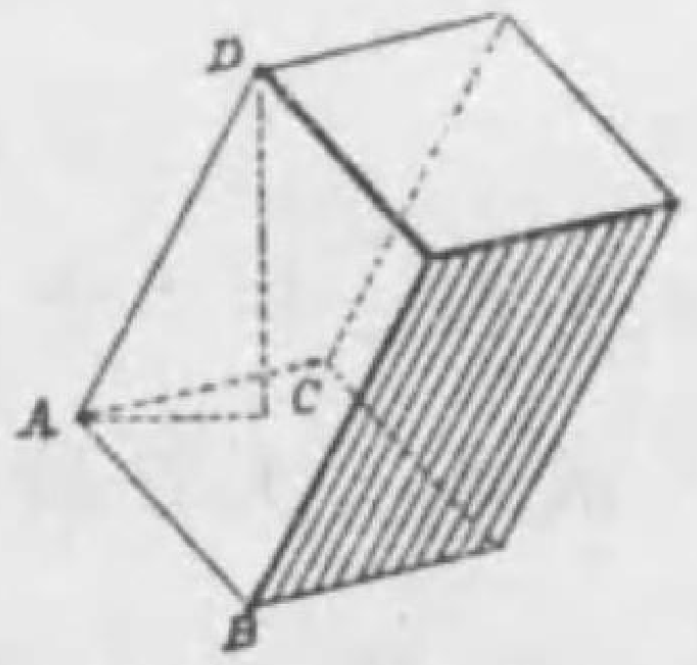
故ニ　I ノ體積=ah

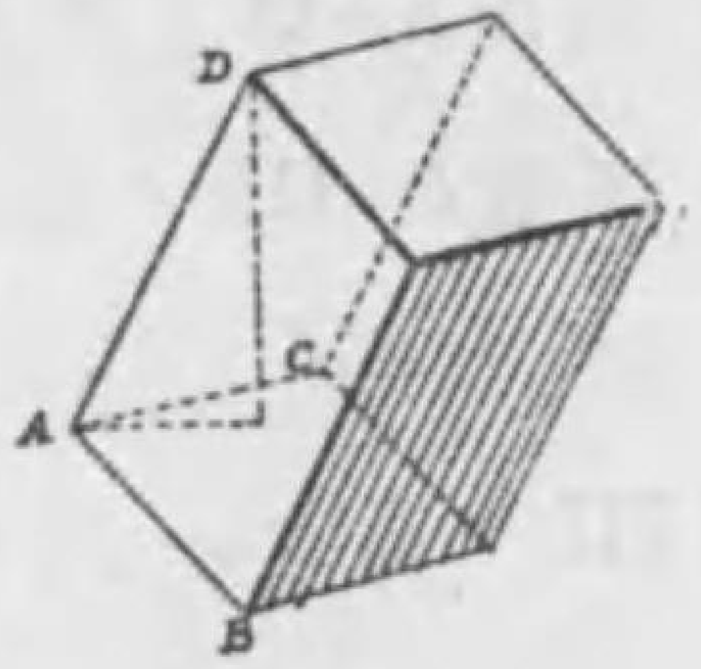
即チ　**平行六面體ノ體積＝底面×高**

問　題

48 底面積ガ50平方糎ニシテ其側稜ガ20糎ナル平行六面體ノ體積ヲ求メヨ。但シ其側稜ト底面トノナス角ヲ30°ナリトス。

(48) 底面積ガ30平方糎ニシテ其側稜ガ10糎ナル平行六面體ノ體積ヲ求メヨ。但シ其稜ノ底面ニ於ケル正射影ヲ 6 糎ナリトス。





49　平行六面體ノ一頂點ニ會スル三ツノ稜ヲAB, AC, ADトス。

AB=6糎,　AC=5糎,

AD=15糎, ∠BAC=30°

ニシテADノ平面ABCニ於ケル正射影ガ12糎ナルトキノ體積ヲ求メヨ。

50　底面ガ菱形ナル平行六面體アリ。其高サハa糎ニシテ,底面ノ一邊及ビ一對角線モa糎ナルトキノ體積ヲ求メヨ。

(49)　平行六面體ノ一頂點ニ會スル三ツノ稜ヲAB, AC, ADトス。

AB=5糎,　AC=5糎,

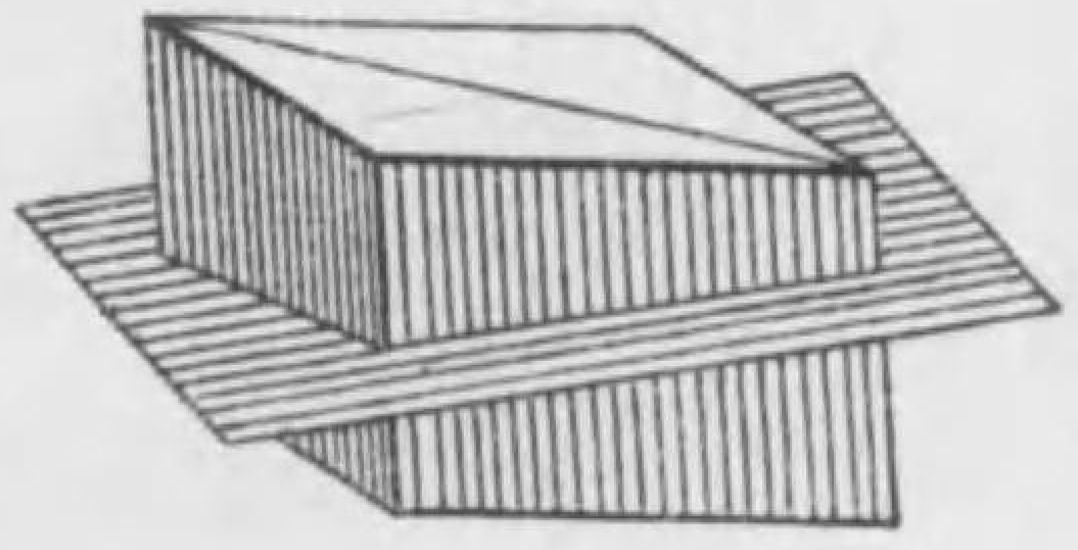
AD=8糎, ∠BAC=60°

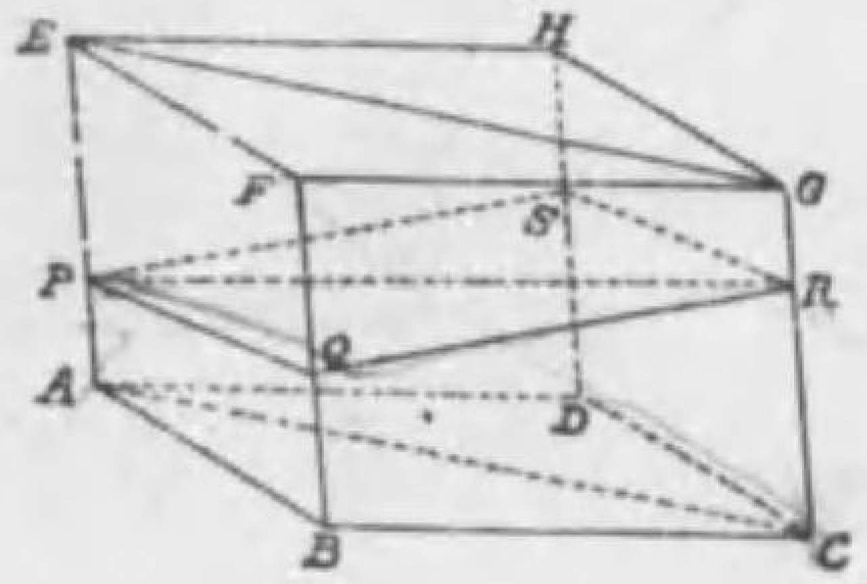
ニシテADト平面ABCトノナス角ガ60°ナルトキノ體積ヲ求メヨ。

(50)　一頂點ニ於テ會スル三稜ノ比ガ3:5:6ニシテ其體積ガ2430立方糎ナル直六面體アリ。其各稜ノ長サヲ求メヨ。

問　直六面體ヲ一平面ニテ截リ二ツノ合同ナル直三角壔ニ分テ。

定理　平行六面體ノ二ツノ相對スル稜ヲ含ム平面ハ之ヲ相等シキ二ツノ三角壔ニ分ツ。





平行六面體ABCD-Eヲ平面ACGEニヨリテ二ツノ三角壔ABC-F, ADC-Hニ分ツトキハ此等ノ三角壔ハ相等シ。

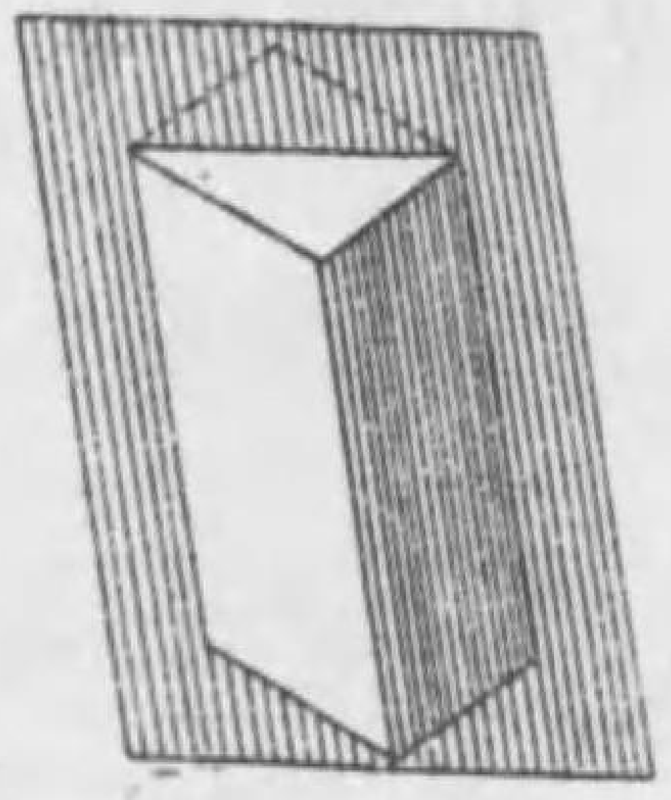
證明　PQRSヲ平行六面體ノ直截面トシ平面ACGEトノ交線ヲPRトセバ三角壔ABC-F, ADC-Hハ底面ガ夫々PQR, PSRニ等シク高サガ共ニAEナル直三角壔ニ等シ。

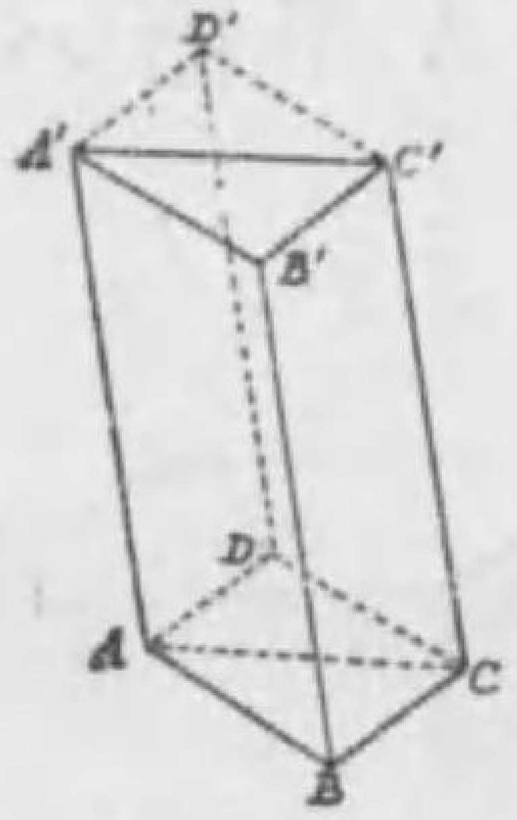
然ルニ四邊形PQRSハ平行四邊形ナルヲ以テ

$$\triangle PQR \equiv \triangle PSR$$

故ニ　三角壔ABC-F＝三角壔ADC-H

定理 三角壔ノ體積ハ其底ト高サトノ積ニ等シ。





三角壔ABC–A′ノ底面ヲaトシ高サヲhトセバ其體積ヲ表ハス數vハahニ等シ。

證明 BA, BC, BB, ヲ三稜トスル平行六面體ABCD–B′ヲ作ルトキハ

三角壔 $\mathrm{ABC\text{–}A'}=\frac{1}{2}\mathrm{ABCD\text{–}B'}$

然ルニ $\mathrm{ABCD\text{–}B'}=$底面$\mathrm{ABCD}\times h$

而シテ底面 $\mathrm{ABCD}=2a$

故ニ $v=\frac{1}{2}\times 2ah$

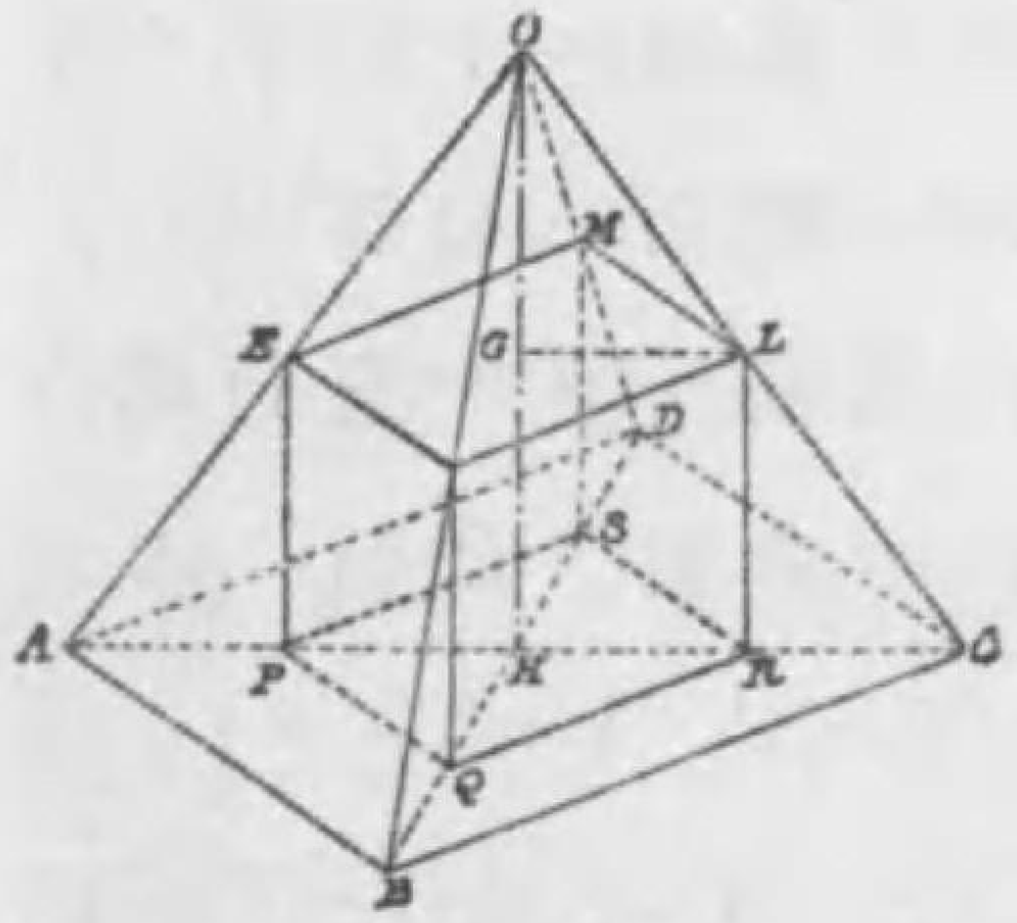
即チ $.\boldsymbol{v=ah}$

系 多角壔ノ體積ハ其底面ト高サトノ積ニ等シ。

問 題

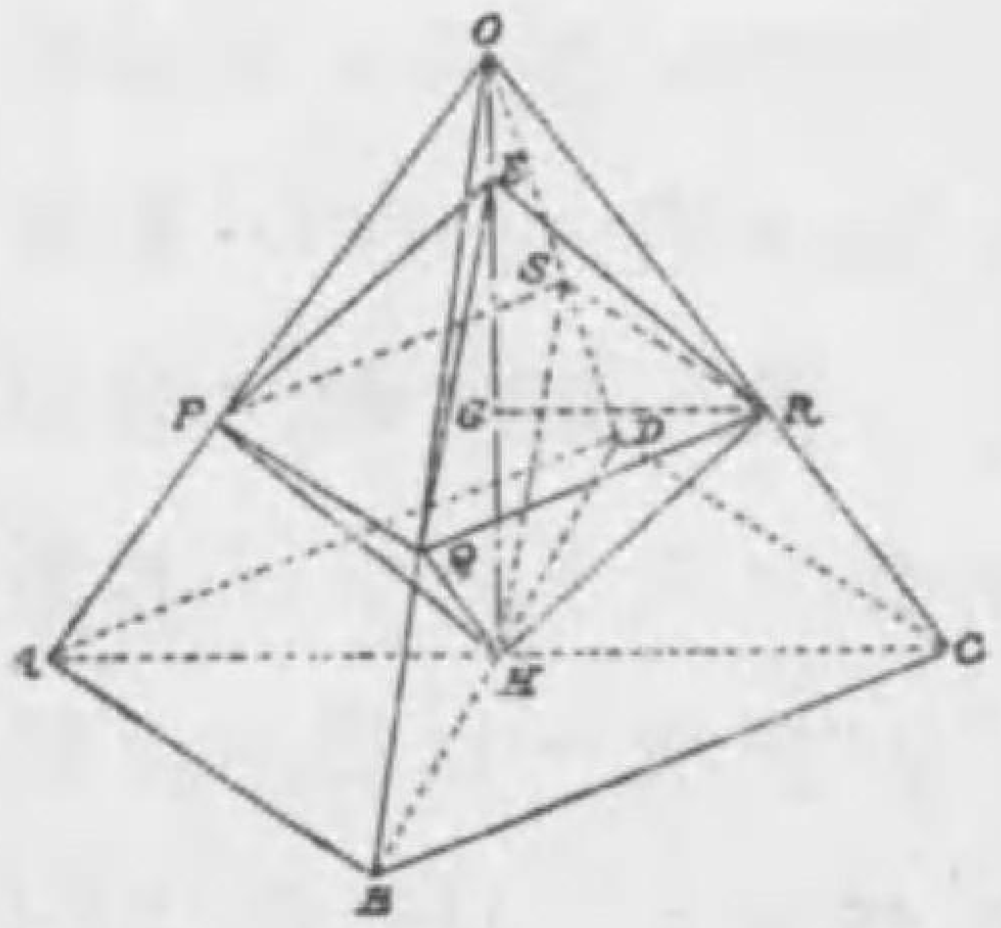
51 一邊ノ長サ4糎ナル正六邊形ノ上ニ立ツ高サ8糎ナル斜角壔ノ體積ヲ求メヨ。

52 高サハh糎ニシテ底面ノ一邊ノ長サハa糎ナル正四角錐O-ABCDニ圖ノ如ク內接セル立方體P-Lノ體積ヲ求メヨ。



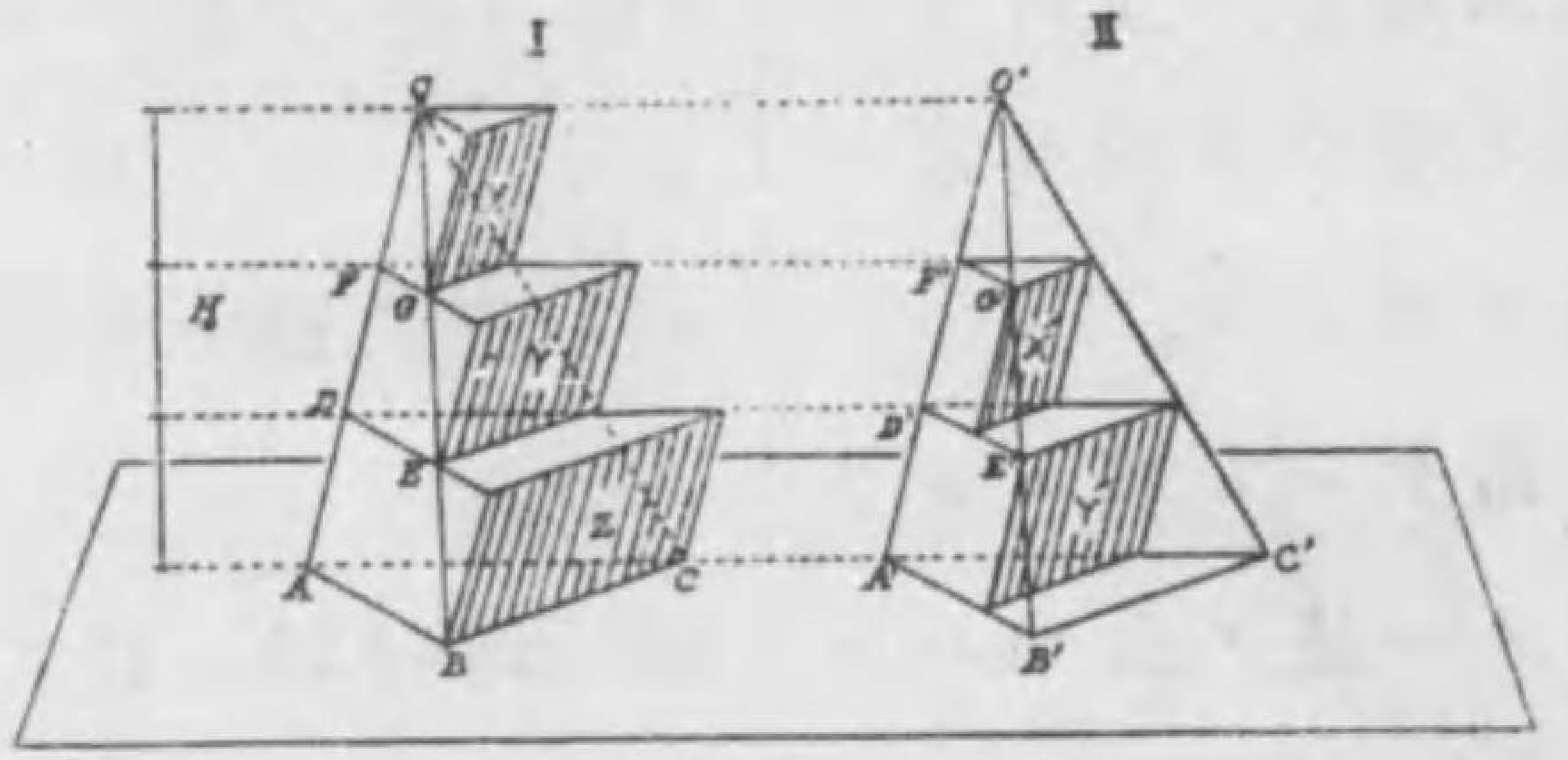
(51) 各邊ノ長サガ夫々6糎, 8糎, 10糎ナル三角形ノ上ニ立ツ高サ9糎ナル三角壔ノ體積ヲ求メヨ。

(52) 問題**52**ニ於ケル正四角錐ニ圖ノ如ク正八面體ヲ內接セシムルトキハ其內接正八面體ノ體積如何。



14 角錐ノ體積

定理 底面ト高サトガ相等シキ二ツノ三角錐ハ相等シ。



二ツノ三角錐 $O-ABC$ ト $O'-A'B'C'$ トニ於テ底面 ABC ハ $A'B'C'$ ニ等シク高サガ共ニ H ナリトス。

證明 $O-ABC$ ト $O'-A'B'C'$ トガ等シカラズトセバソノ何レカ一方ガ大ナラザルベカラズ。

$O-ABC > O'-A'B'C'$ ト假定セヨ。

H ヲ n 等分シ各分點ヲ通リ底面ニ平行ナル平面ヲ引クトキハ相對應スル截面ハ相等シ。

故ニ圖ノ如ク各截面ヲ底面トスル三角壔ヲ作ルトキハソノ相對應スル截面ヲ底面トセル三角壔ハ相等シ。即チ $X=X'$, $Y=Y'$

然ルニ $O-ABC<X+Y+Z$, $O'-A'B'C'>X'+Y'$.

故ニ $(O-ABC)-(O'-A'B'C')<X+Y+Z-(X'+Y')=Z$

サテ此三角壔 Z ハ n ヲ限リナク大ナラシムルトキハ其高サハ限リナク小トナリソノ極限ニ於テハ 0 トナル。

然ルニ假定ノ如クニツノ三角錐ニ大サノ差アリトセバ此差ハ Z ヨリ小ナラザルベカラズ。

是不合理ナリ。

故ニ $O-ABC$ ト $O'-A'B'C'$ トハ等シカラザルベカラズ。

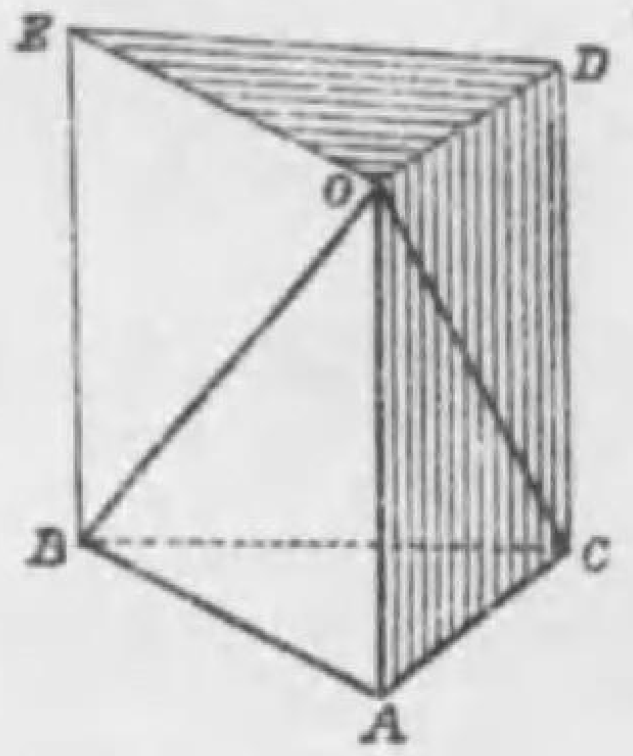
即チ $O-ABC=O'-A'B'C'$

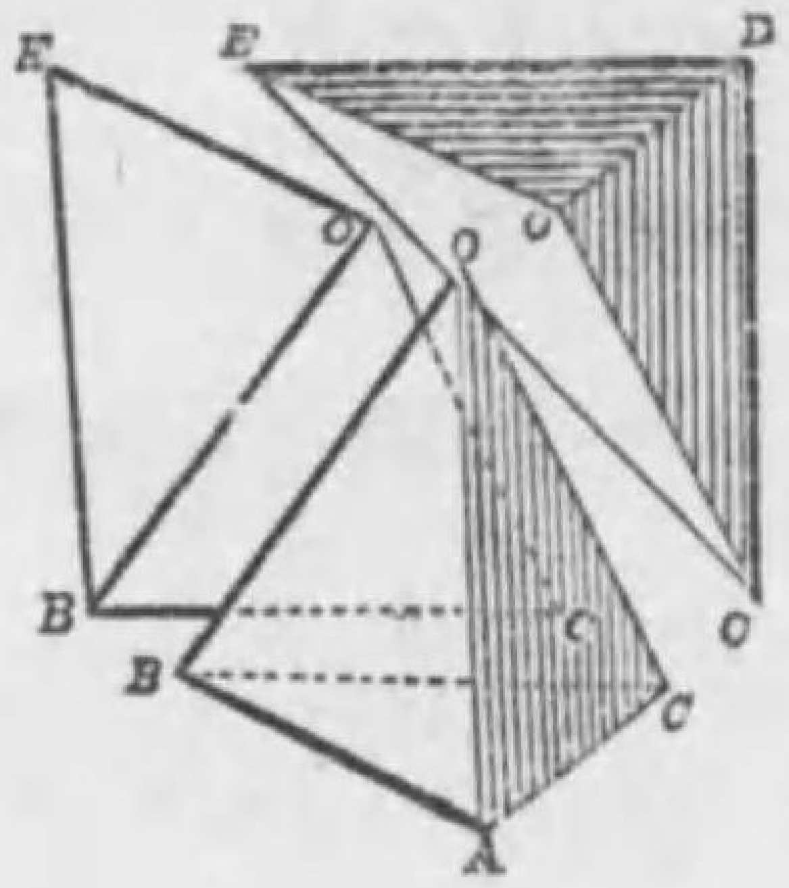
問 題

53 同一平面上ニ在ラザル三平行線ノ一ツノ上ニ一定ノ長サ AB ヲトリ他ノ二ツノ上ニ夫々點 C, D ヲ任意ニトルトキハ四面體 $ABCD$ ノ體積ハ一定ナリ。

(53) 一平面上ニ在ラザル二直線上ニ夫々一定ノ長サノ線分 AB, CD ヲ任意ノ位置ニトルトキハ四面體 $ABCD$ ノ體積ハ一定ナリ。

定理 ル 三角錐ノ體積ハ其底面ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ。





三角錐 O-ABC ニ於テ其底面ヲ a トシ高サヲ h トセバ其體積ハ $\frac{1}{3}ah$ ナリ。

證明 AB, CD, A~~O~~C ヲ三稜トスル三角壔 ABC-OED ヲ作ルトキハ此角壔ハ三角錐 O-ABC ト四角錐 O-BCDE トノ和ニ等シ。

四角錐 O-BCDE ヲ二ツノ三角錐 O-BCE ト O-CDE トニ分ツトキハソレ等ノ底面 BCE ハ CDE ニ等シク,且高サガ共通ナルヲ以テ

$$\text{O-BCE} = \text{O-CDE}$$

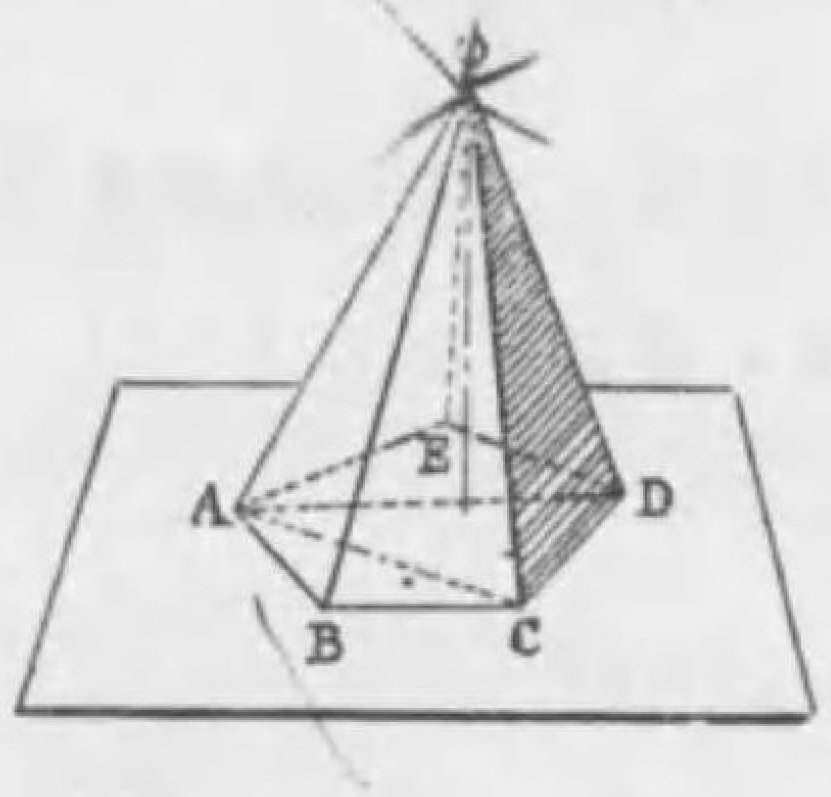
又三角錐 O-BCE, O-ABC ノ頂點ヲ共ニ C トセバ底面 BEO ハ底面 ABO ニ等シク,且高サガ共通ナルヲ以テ O-BCE = O-ABC

故ニ $$\text{O-ABC} = \frac{1}{3}\text{ABC-ODE}$$

然ルニ $$\text{ABC-ODE} = ah$$

故ニ $$\text{O-ABC} = \frac{1}{3}ah$$

系 ル 多角錐ノ體積ハ其底面ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ。



問題

54 一邊ノ長サガ 6 糎ナル正三角形ヲ底トスル正角錐アリ。其側稜ガ底面トナス角ハ 45°ナリ。其體積ヲ求メヨ。

55 底面ガ正方形ニシテ高サガ h 糎,全表面積ガ t 平方糎ナル正角錐ノ體積ヲ求メヨ。

(54) 四邊形 ABCD ヲ底トシ高サ 20 糎ナル角錐アリ。 AB = 9 糎, BC = 12 糎, CD = 14 糎, AD = 14 糎, AC = 15 糎, ナリ。其體積ヲ求メヨ。

(55) 一邊ノ長サ a 糎ナル正方形ヲ底面トシ全表面積ガ t 平方糎ナル正角錐ノ體積ヲ求メヨ。

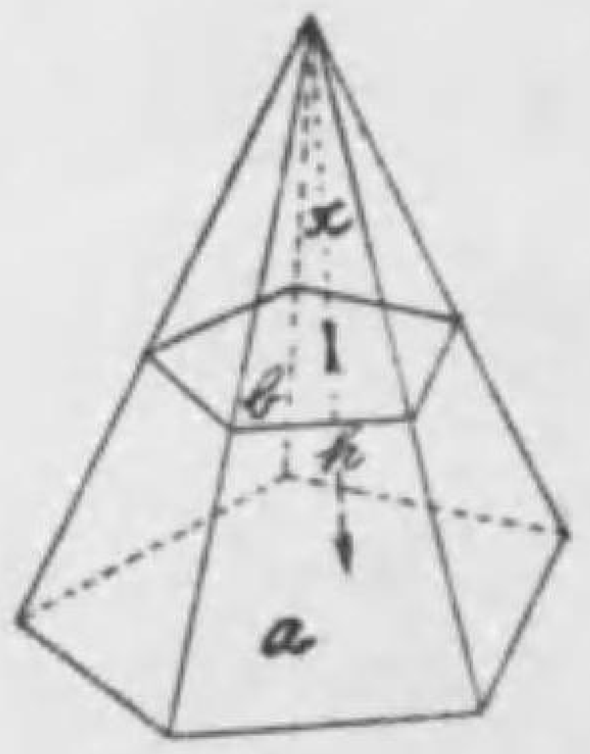
56 兩底ノ面積ガ夫々 a,b ニシテ高サ h ナル角錐臺ノ體積ヲ v トセバ

$$v=\frac{h}{3}(a+\sqrt{ab}+b)$$

(56) 上底,下底ガ夫々 4 平方糎, 9 平方糎ニシテ高サ 5 糎ナル三角錐臺ノ體積ヲ求メヨ。

注意 各側稜ヲ延長シテ角錐ヲ作リソノ角錐ノ頂點ト上底トノ距離ヲ x トセバ

$$a:b=(x+h)^2:x^2$$



57 兩底ノ一邊ノ長サハ夫々 6 糎, 8 糎ニシテ側稜ガ 9 糎ナル正三角錐臺ノ體積ヲ求メヨ。

58 一ツノ角錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ,其截リトリタル角錐トモトノ角錐トノ比ハソレ等ノ高サノ三乘比ニ等シ。

(57) 正六角錐臺ノ上底下底ノ一邊ハ夫々 6 糎, 10 糎ニシテ側稜ハ 5 糎ナリ。其體積ヲ求メヨ。

(58) 角錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截リ之ヲ二等分セヨ。

第三篇 廻轉體

第一章

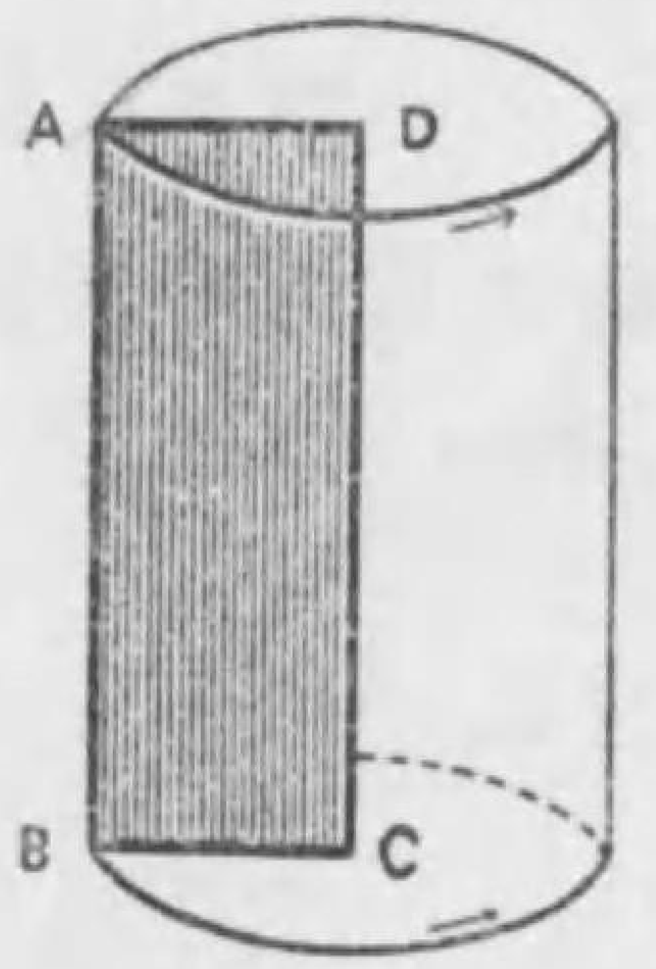
直圓壔及直圓錐

15 直圓壔及直圓錐ノ性質

定義 **直圓壔**トハ矩形ガ其一邊ヲ軸トシテ一周廻轉スルトキ生ズル立體ナリ。

其廻轉軸ヲ直圓壔ノ**軸**トイヒ,軸ニ垂直ナル二對邊ニヨリテ生ズル二ツノ等圓ヲ其**底面**トイフ。

又軸ニ平行ナル邊ヲ直圓壔ノ**母線**トイヒ,母線ニヨリテ生ズル曲面ヲ其**側面**トイフ。



問一 兩底面ガ等圓ナルコト及ビ軸ガ底ニ垂直ナルコトヲ證セヨ。

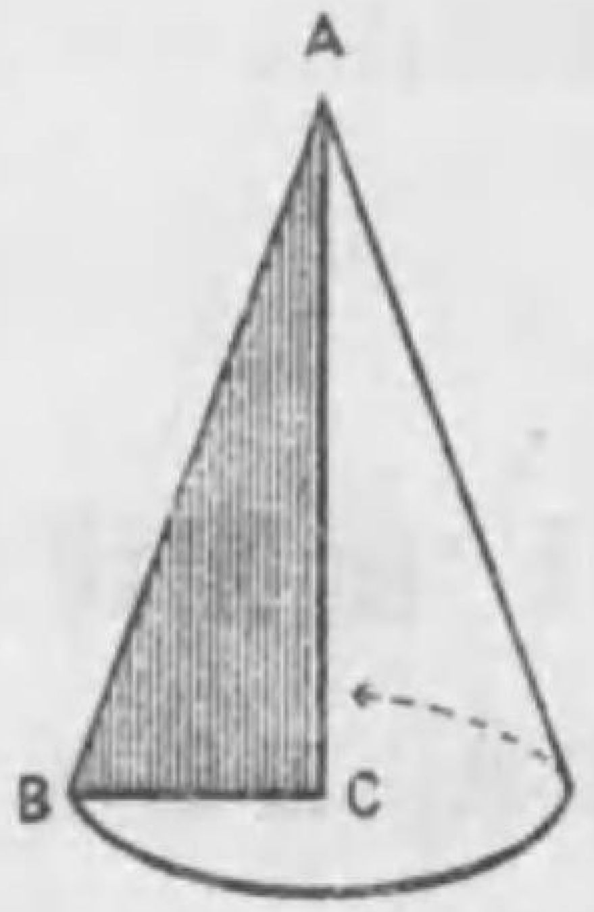
定義 軸ノ長サヲ直圓壔ノ**高サ**トイフ。

問二 軸ニ垂直ナル平面ニテノ截面ハ底面ニ等シキ圓ニシテ,母線ヲ含ム平面ニテノ截面ハ矩形ナルコトヲ證セヨ。

定義 **直圓錐**トハ直角三角形ガ直角ヲ夾ム一邊ヲ軸トシテ一周廻轉スルトキ生ズル立體ナリ。

其廻轉軸ヲ直圓錐ノ**軸**トイヒ,軸ニ垂直ナル邊ニヨリテ生ズル圓ヲ其**底面**トイフ。

斜邊ヲ直圓錐ノ**母線**,其長サヲ**斜高**トイヒ,母線ニヨリテ生ズル曲面ヲ其**側面**トイフ。軸ト母線トノ交點ヲ直圓錐ノ**頂點**トイヒ,軸ノ長サヲ其**高サ**トイフ。



問一 直圓錐ノ直截面ハ圓ナルコトヲ證セヨ。

定義 底面ト之ト平行ナル截面トノ間ニ在ル直圓錐ノ部分ヲ**直圓錐臺**トイヒ,其截面及ビ原直圓錐ノ底面ヲ直圓錐臺ノ**底面**トイフ。而シテ原直圓錐ノ母線ノ兩底面ノ間ノ部分ヲ其**斜高**トイヒ,兩底面間ノ距離ヲ其**高サ**トイフ。

問二 直圓錐面トソノ頂點ヲ通ル平面トノ交リハ相交ル二直線ナルコトヲ證セヨ。

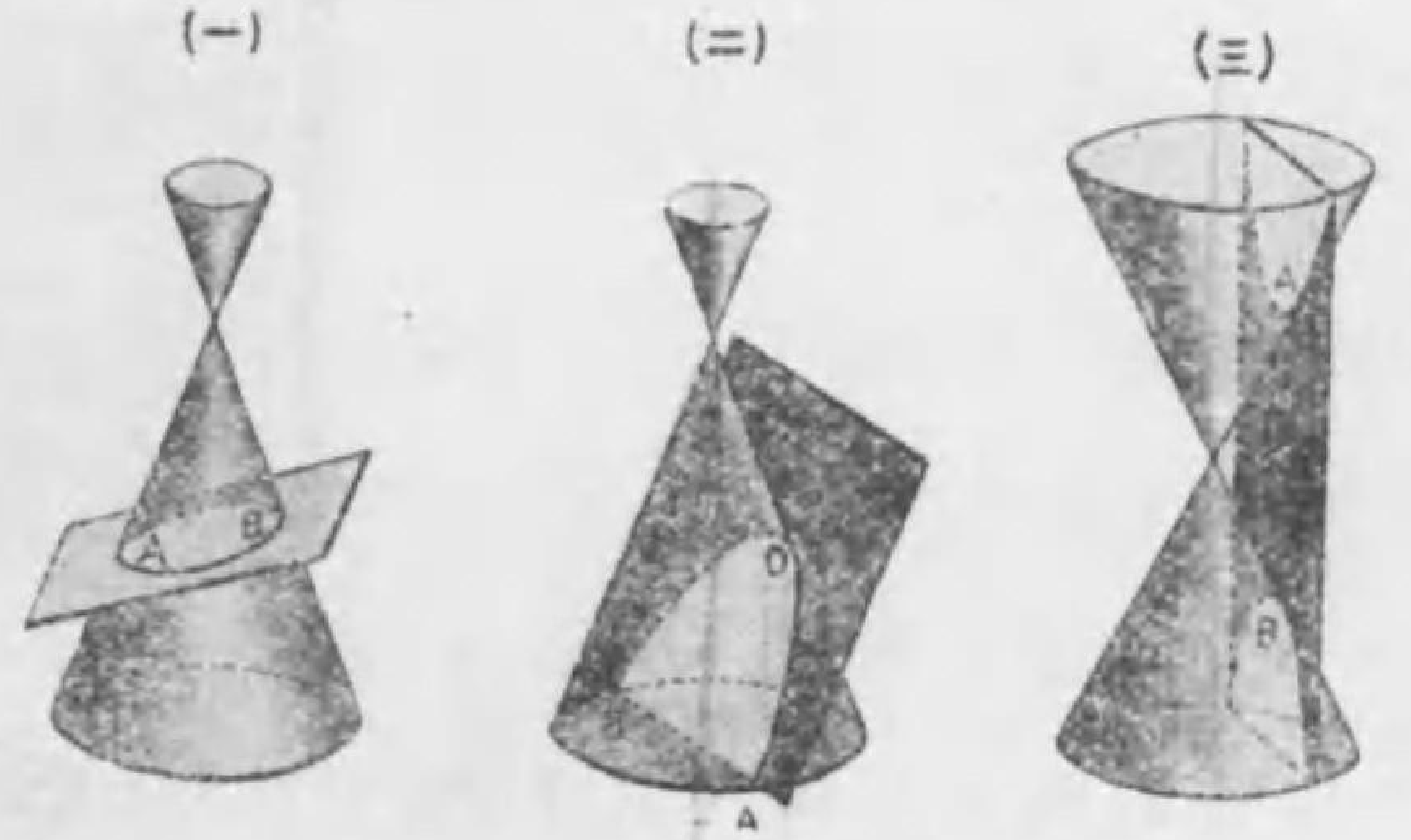
直圓錐ヲ其軸ニ垂直ナル平面ニテ截レバ**圓**ヲ得。其頂點ヲ通ル平面ニテ截レバ**相交ル二直線**ヲ得。

然レドモ直圓錐ノ平面ニヨリテノ截面ハソノ截リ方ニヨリテ尙ホ次ノ圖ノ如キ三通リノ形トナル。

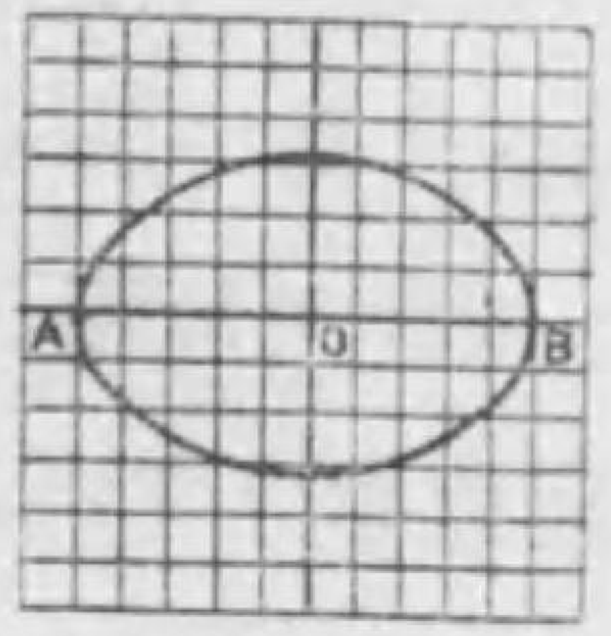
(一) 軸ニ垂直ナラザル平面ニテ總テノ母線ヲ截レバ**橢圓**ヲ得。

(二) 一母線ニ平行ニシテ頂點ヲ通ラザル平面ニテ截レバ**拋物線**ヲ得。

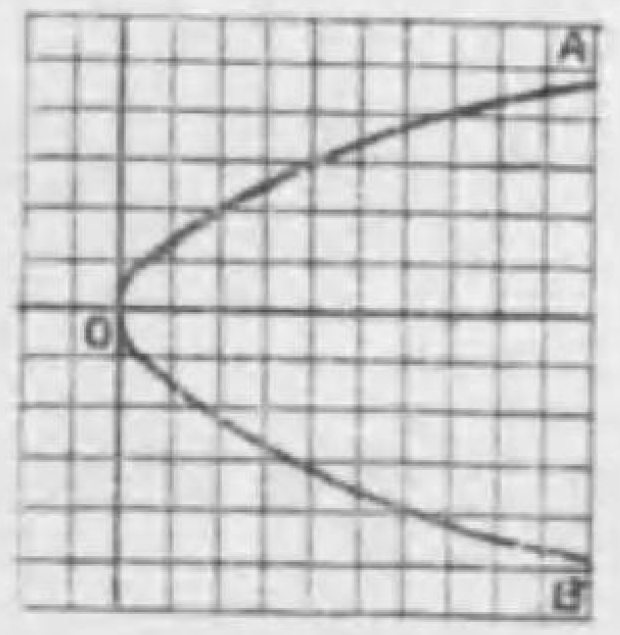
(三) 二母線ニ平行ニシテ頂點ヲ通ラザル平面ニテ截レバ**双曲線**ヲ得。



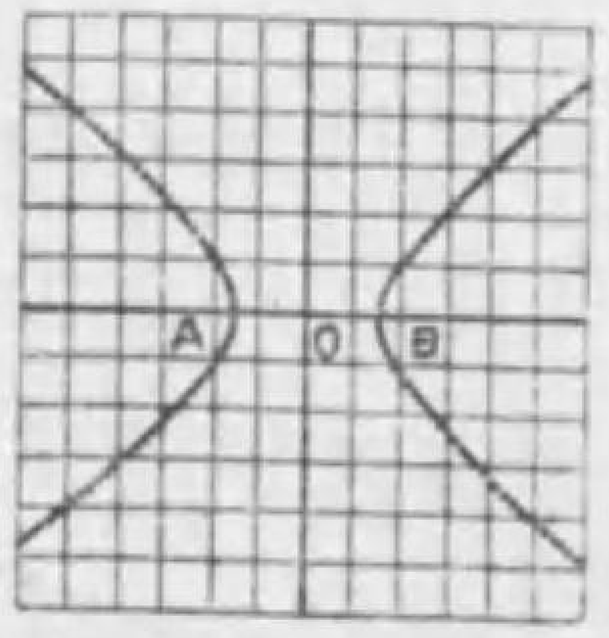
橢圓



拋物線



双曲線

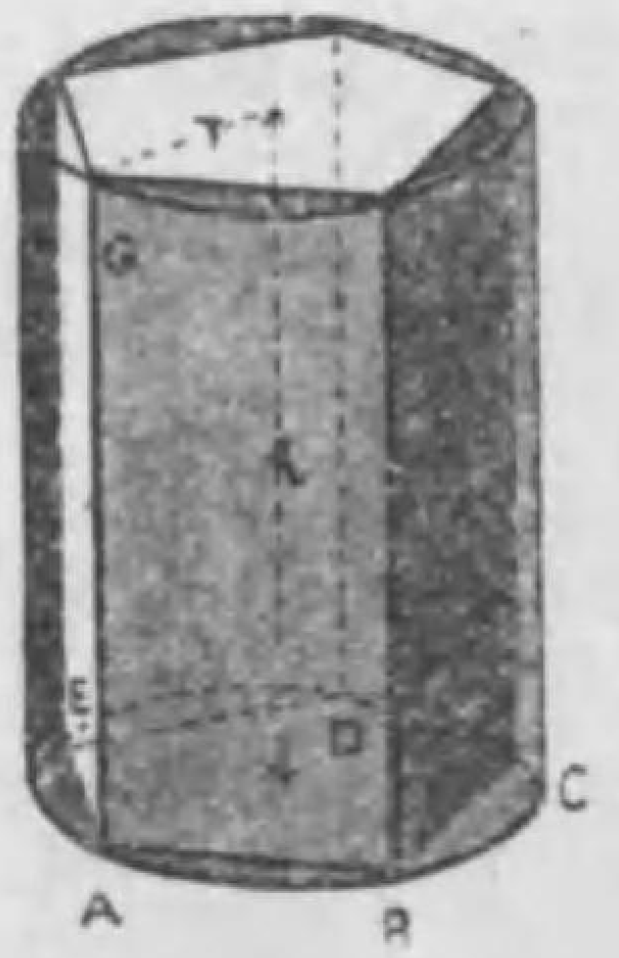


圓,橢圓,拋物線,双曲線等ヲ總稱シテ**圓錐曲線**又ハ**二次曲線**トイフ。

16 直圓壔及直圓錐ノ側面積及體積

定義 一ツノ直圓壔ト同高ニシテ其底面ニ內接(又ハ外接)スル多角形ヲ底面トスル直角壔ハ其直圓壔ニ**內接**(又ハ**外接**)トイフ。

定理 直圓壔ノ側面積ハ底面ノ周ト高サトノ積ニ等シク,其體積ハ底面ト高サトノ積ニ等シ。



直圓壔ノ底面ノ半徑ヲrトシ高サヲhトセバ

(一) 側面積$=2\pi rh$

(二) 體積$=\pi r^2h$ナリ。

證明(一) 直圓壔ニ內接スル正角壔ヲ作リ其底面ノ周ヲpトスルトキハ其側面積ハphナリ。

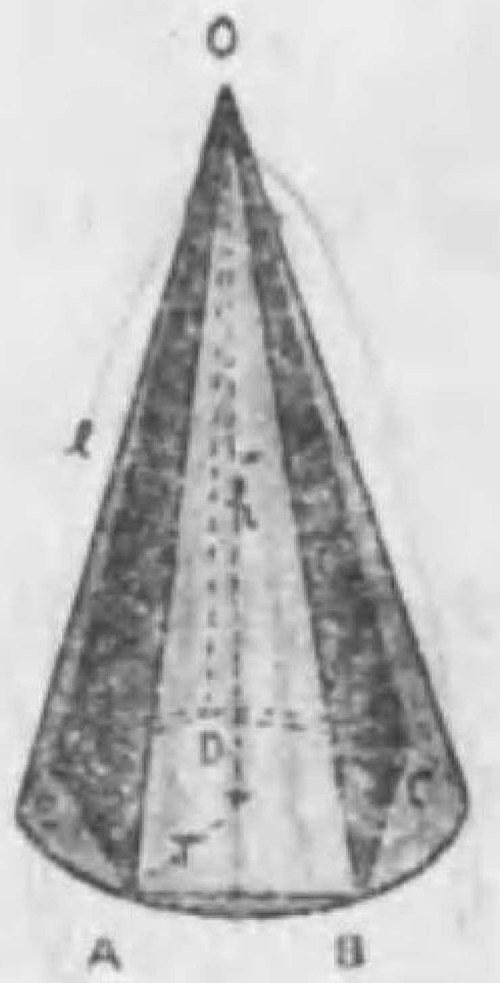
今內接正多角壔ノ底面ナル正多角形ノ邊數ヲ限リナク大ナラシムルトキハp及ビ側面積ノ極限ハ夫々$2\pi r$及ビ直圓壔ノ側面積トナル。

故ニ直圓壔ノ側面積ハ$2\pi rh$ナリ。

(二) 同樣ニシテ直圓壔ノ體積ハπr^2hナルコトヲ證シ得。

定義 一ツノ直圓錐ト頂點ヲ共有シ其底面ニ內接(又ハ外接)スル多角形ヲ底面トスル直角錐ハ其直圓錐ニ**內接**(又ハ**外接**)ストイフ。

定理 直圓錐ノ側面積ハ底面ノ周ト斜高トノ積ノ半ニ等シク,其體積ハ底面ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ。



底面ノ半徑ヲr,斜高ヲl,高サヲhトセバ

(一) 側面積$=\pi rl$

(二) 體積$=\frac{1}{3}\pi r^2h$ナリ。

證明(一) 直圓錐ニ內接スル正多角錐ヲ作リ其底面ノ周ヲp,斜高ヲl'トセバ其側面積ハ$\frac{1}{2}pl'$ナリ。

今內接正多角錐ノ底面ノ邊數ヲ限リナク大ナラシムルトキハp, l'及ビ側面積ノ極限ハ夫々$2\pi r, l$及ビ直圓錐ノ側面積トナル。

故ニ直圓錐ノ側面積ハ$\frac{1}{2}\times 2\pi rl$即チ$\pi rl$ナリ。

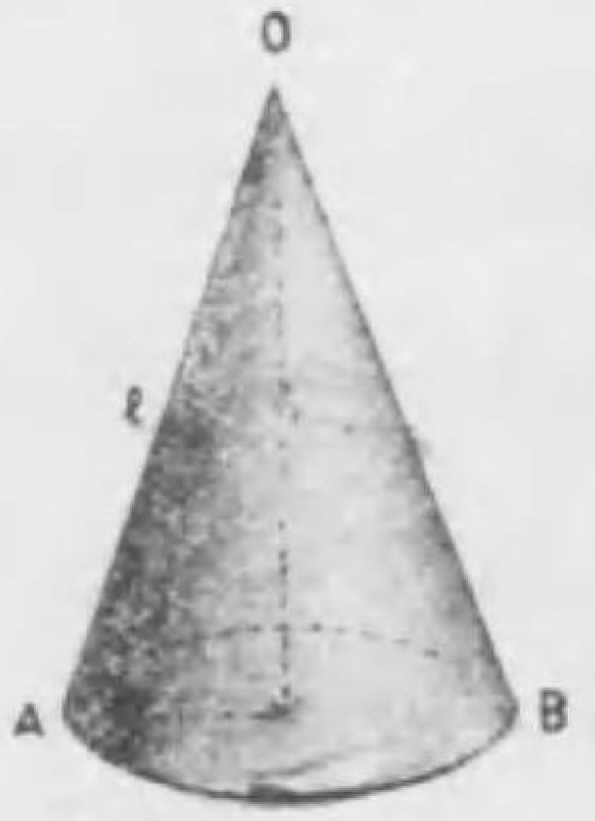
(二) 同樣ニシテ直圓錐ノ體積ハ$\frac{1}{3}\pi r^2 h$ナルコトヲ證シ得。

系 直圓錐臺ノ兩底面ノ半徑ヲR, rトシ斜高ヲlトセバ其側面積ハ$\pi(R+r)l$ナリ。

$\pi(R+r)l$. (P.80)

問　　題

59 底面ノ半徑ハrニシテ斜高lナル直圓錐ノ全表面積ハ$\pi r(r+l)$ナルコトヲ證セヨ。



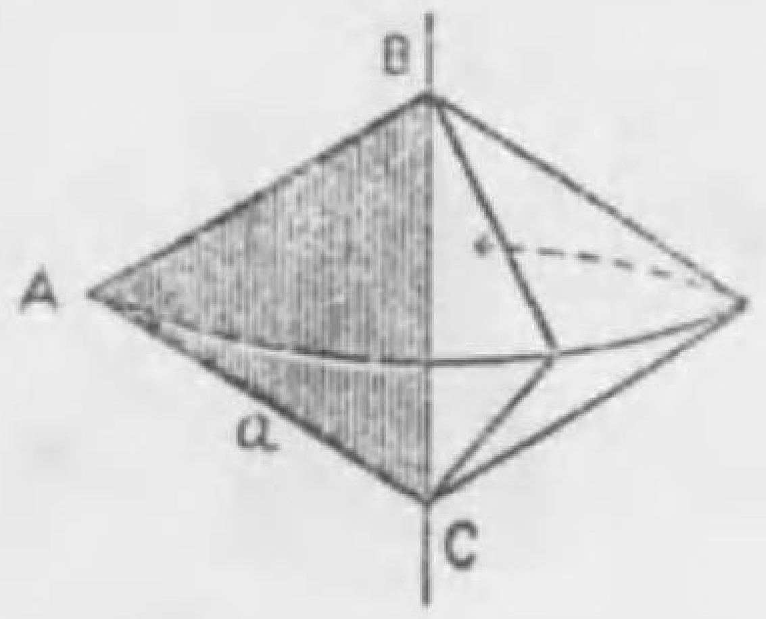
60 側面積ハ198平方糎ニシテ高サ9糎ナル直圓壔ノ體積ヲ求メヨ。

但シ $\pi=\frac{22}{7}$ナリトス。

(59) 底面ノ半徑ハrニシテ高サhナル直圓錐ノ全表面積ハ$\pi r(r+\sqrt{h^2+r^2})$ナルコトヲ證セヨ。

(60) 體積ハ660立方糎ニシテ高サ10糎ナル直圓錐ノ全表面積ヲ求メヨ。但シ $\pi=\frac{22}{7}$ナリトス。

61 一邊ノ長サa糎ナル正三角形ノ一邊ヲ軸トシテ之ヲ廻轉スルトキ生ズル立體ノ表面積及ビ體積ヲ求メヨ。

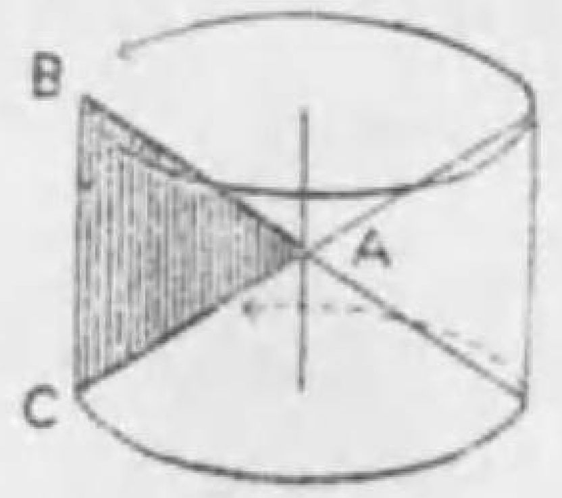


62 上底下底ノ半徑ガ夫々r, Rニシテ高サhナル直圓錐臺ノ體積ハ$\frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2)$ナリ。

注意 62頁問題56參照

63 高サ18糎ナル直圓錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ二等分スルニハ其頂點ヨリ何糎ノ距離ニ於テ截ルベキカ。

(61) 問題61ニ於ケル廻轉軸ヲ一頂點ヲ過リ其對邊ニ平行ナル直線トスレバ如何。



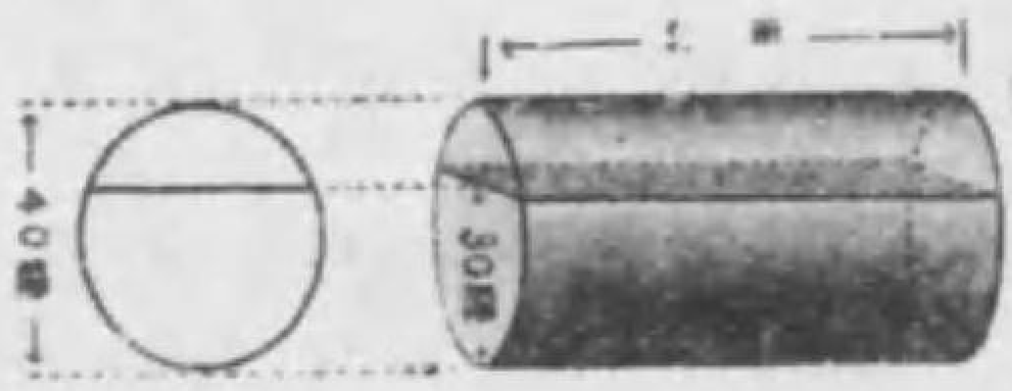
(62) 兩底面ノ半徑ガ3糎ト5糎トナル半立容レノ「コツプ」ヲ作ルニハ高サヲ何糎ニスベキカ。

(63) 底面ノ半徑ガ8糎, ニシテ高サ12糎ナル直圓錐ヲ底面ヨリ9糎ノ距離ニ於テ之ニ平行ナル平面ニテ截リトリタル圓錐臺ノ體積ヲ求メヨ。

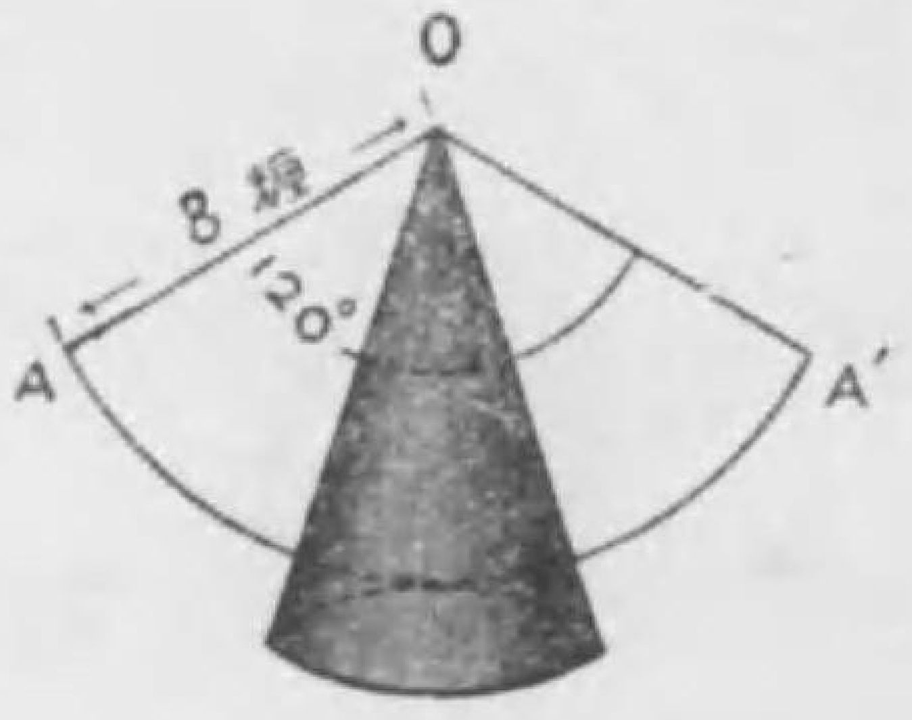
64　側面積ガ底面積ノ2倍ナル直圓錐ノ頂角ノ大サヲ求メヨ。

注意　圓錐ノ頂角トハ軸ヲ含ム截面ニヨリテ生ズル二直線ノナス角ヲ云フ。

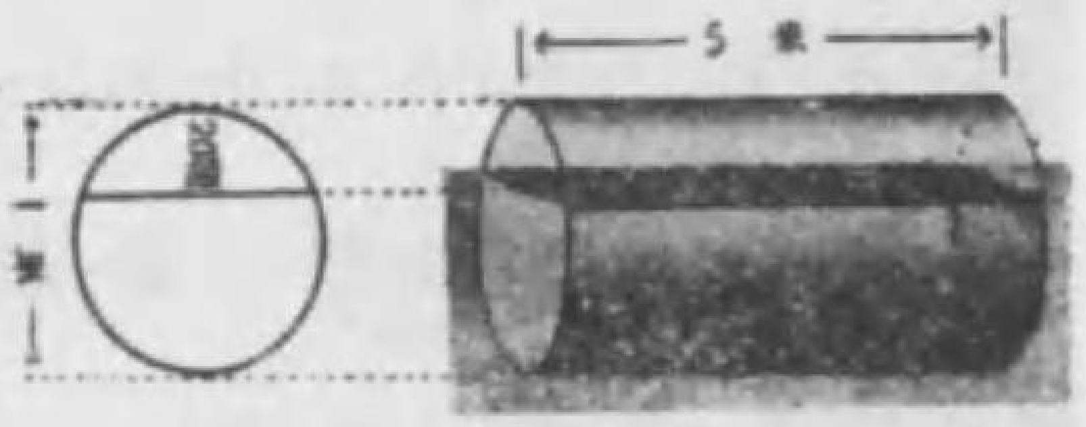
65　次ノ圖ノ如ク水平ニ置カレタル圓壔形ノ水漕アリ。底面ノ半徑ハ20糎,長サ2米ニシテ最モ深キ部分ノ水ノ深サ30糎ナラバ其水ノ體積如何。



(64)　半徑ガ8糎ニシテ中心角ガ120°ナル扇形ニテ作リタル直圓錐ノ體積ヲ求メヨ。



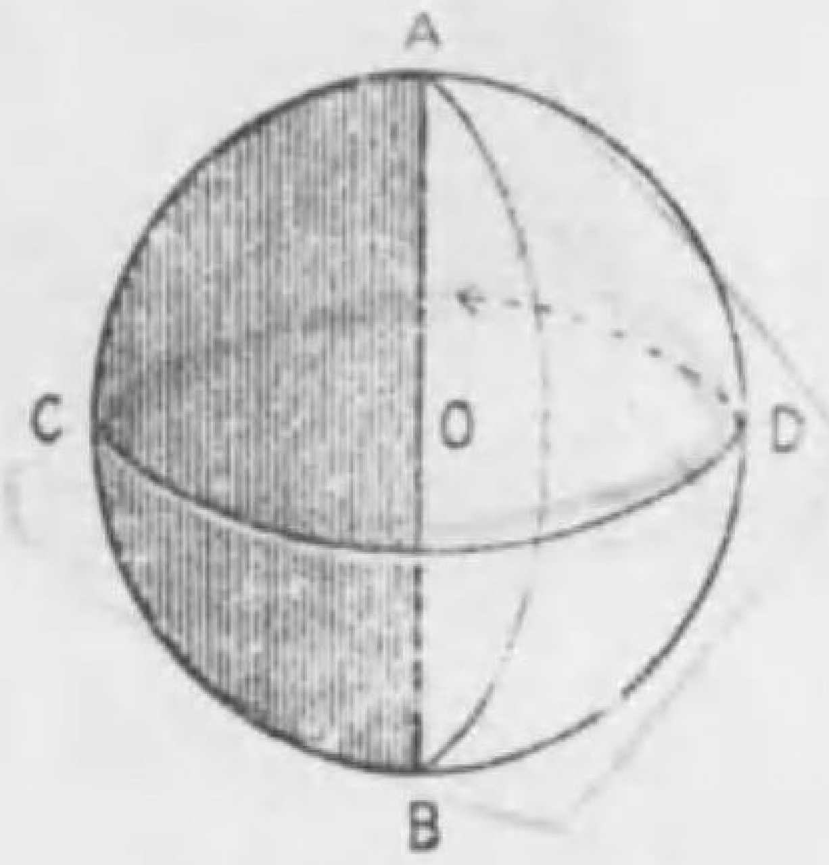
(65)　圖ノ如ク水中ニ浮ベル圓壔形ノ材木アリ。長サ5米其ノ切口ノ直徑1米ニシテ浮ベル部分ノ最高ナル高サハ20糎ナラバ此材木ノ重サ如何。



第二章　球

17 球ノ性質

定義　球トハ半圓ガ直徑ヲ軸トシテ一周廻轉スルトキ生ズル立體ナリ。



其半圓ノ作ル曲面ヲ**球面**トイヒ,半圓ノ中心ヲ球ノ**中心**トイフ。

又球ノ中心ト球面上ノ一點トヲ結ブ線分ヲ其**半徑**トイヒ,中心ヲ通リ兩端ガ球面上ニ在ル線分ヲ球ノ**直徑**トイフ。

上ノ定義ニヨリ球ノ總テノ半徑ハ半圓ノ半徑ニ等シキヲ以テ相等シ。

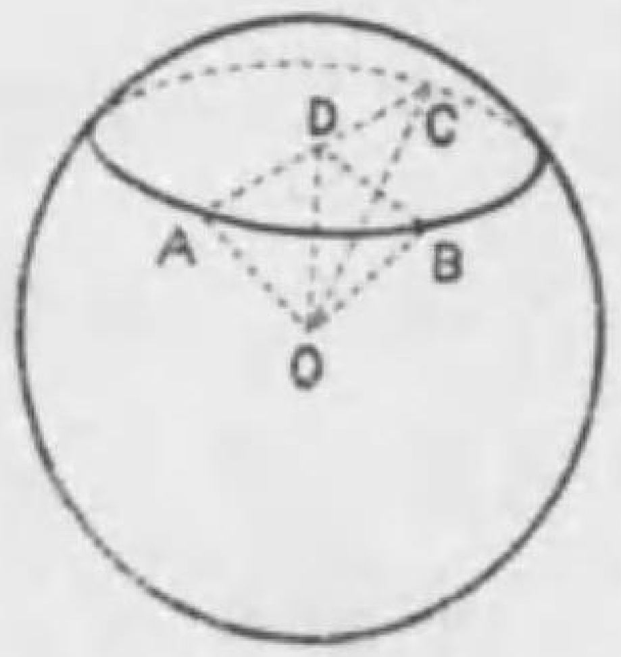
從テ半徑ノ2倍ナル直徑モ亦相等シ。

問一　一定點ヨリ一定ノ距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

問二　一定線分ヲ斜邊トスル直角三角形ノ直角頂ノ軌跡ヲ求メヨ。

問三　二定點ヨリノ距離ノ比ガ3:2ナル如キ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

定理　球ヲ平面ニテ截レバ其截面ハ圓ナリ。



中心Oナル球ヲ一平面ニテ截リ其截面ヲABCトセバABCハ圓ナリ。

證明　中心Oヨリ截面ニ垂線ODヲ引キDト截面ノ周ノ上ノ任意ノ點A, B, Cトヲ結ブトキハ

AD=BD=CD………何故カ。

故ニ截面ABCハDヲ中心トスル圓ナリ。

系一　球ノ中心ト截面ノ中心トヲ結ビ付クル直線ハ截面ニ垂直ナリ。

上圖ニ於テ球ノ中心Oト截面ノ中心Dトヲ含ム平面ト截面トノ交線ヲACトセヨ。

然ラバ　AC⊥OD………何故カ。

系二　球ノ中心ヨリ等距離ニ在ル截面ハ相等シク,中心ヨリ不等ナル距離ニ在ル二ツノ截面ニ於テハ中心ニ近キモノハ遠キモノヨリ大ナリ。

前圖ニ於テ　$AD^2=AO^2-DO^2$

上至

故ニDOガ減少スルニ從テADハ増大ス。

問一　二與點ヲ通ル平面ニテ與球ヲ截リ其截面ヲシテ最大ナラシメヨ。且解ノ數ヲ吟味セヨ。

定義　球ノ中心ヲ通ル平面ニヨリテノ截面ヲ球ノ**大圓**トイヒ,他ノ平面ニヨリテノ截面ヲ**小圓**トイフ。

大圓又ハ小圓ニ垂直ナル直徑ヲ其圓ノ**軸**トイヒ,軸ノ兩端ノ二點ヲ其圓ノ**極**トイフ。

又大圓ニヨリテ分タレタル球ノ各部分ヲ**半球**トイフ。

問二　地球ヲ球ト見做ストキハ赤道及ビ經緯度ヲ表ハス線ハ如何ナル種類ノ圓トナルカ。

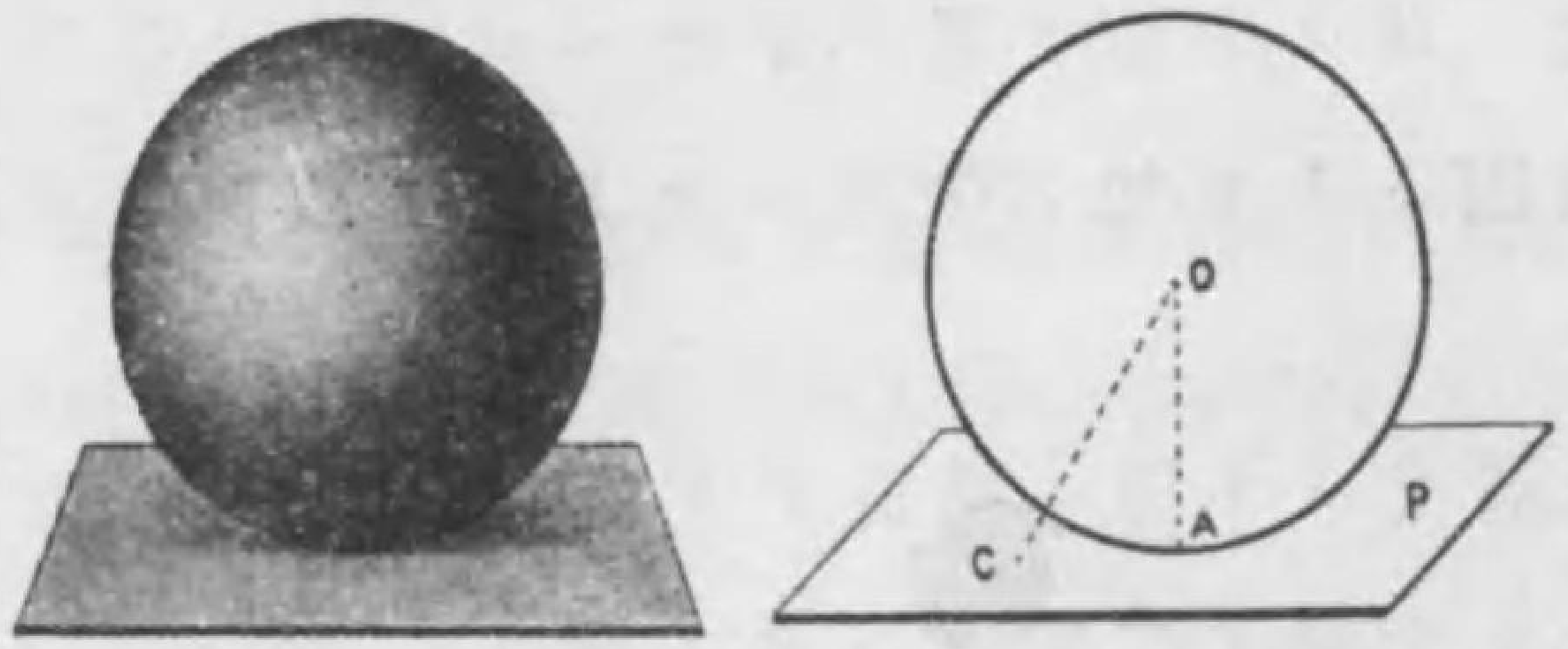
問三　二ツノ大圓ハ互ニ二等分ス。

問四　球面上ノ三與點ヲ通ル圓ヲ畫ケ。

問五 球ノ中心ヨリ其半徑ニ等シキ距離ニアル平面ニツキテ考ヘヨ。

定義 球面ト唯一點ヲ共有スル平面ヲ球ノ**切平面**トイヒ,球面ト唯一點ヲ共有スル直線ヲ球ノ**切線**トイフ。其平面又ハ直線ハ其點ニ於テ球ニ**切ス**トイヒ,其點ヲ**切點**トイフ。

定理 球面上ノ一點ニ於テ其點ヲ通ル半徑ニ垂直ナル平面ハ其球ニ切ス。



球面上ノ一點 A ニ於テ半徑 OA ニ垂直ナル平面ヲPトセバPハ球Oノ切平面ナリ。

證明 P上ニ於テA以外ノ任意ノ點CヲトリOト結ブトキハ　OC>OA

故ニ點Cハ球面外ニ在リ。故ニPハ球ニ切ス。

系一 球面上ノ一點ニ於テ其點ヲ通ル半徑ニ垂直ナル直線ハ其球面ニ切ス。

系二 球面ニ切スル直線又ハ平面ハ其切點ヲ通ル半徑ニ垂直ナリ。

垂

問題

66 球ノ大圓又ハ小圓ノ切線ハ又球ノ切線ナリ。

67 球外ノ一點ヨリ其球ニ切線ヲ引ケ。

68 半徑 5 糎ナル球ノ中心ヨリ 4 糎ノ距離ニ在ル小圓ノ面積ヲ求メヨ。

(66) 同一ノ點ニ於テ球ニ切スル二直線ノ定ムル平面ハ又其球ニ切ス。

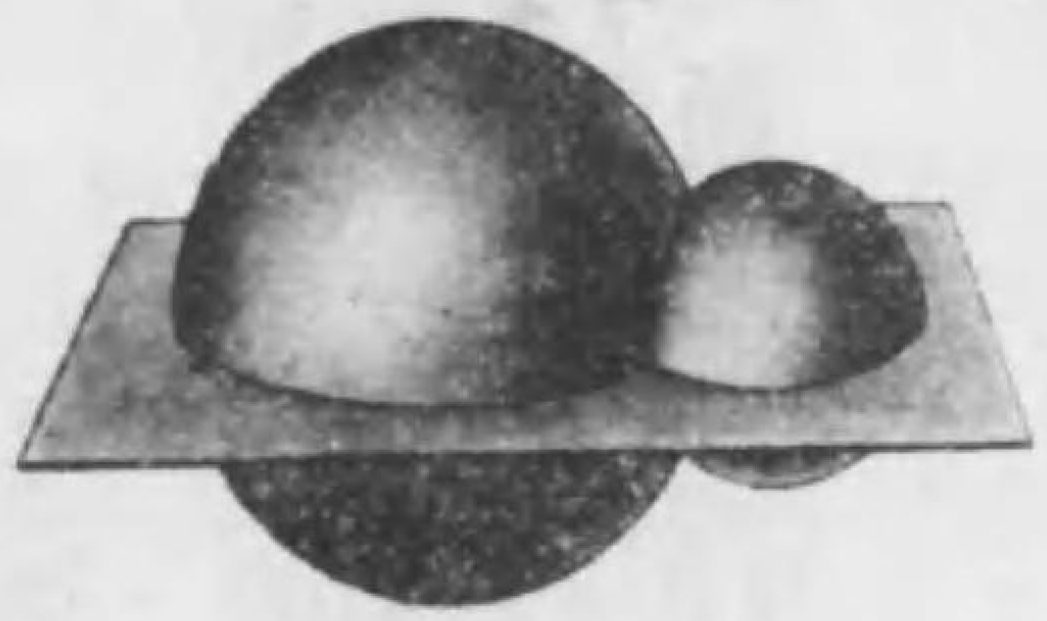
(67) 球外ノ一點ヲ通ル其球ノ切平面ヲ作レ。

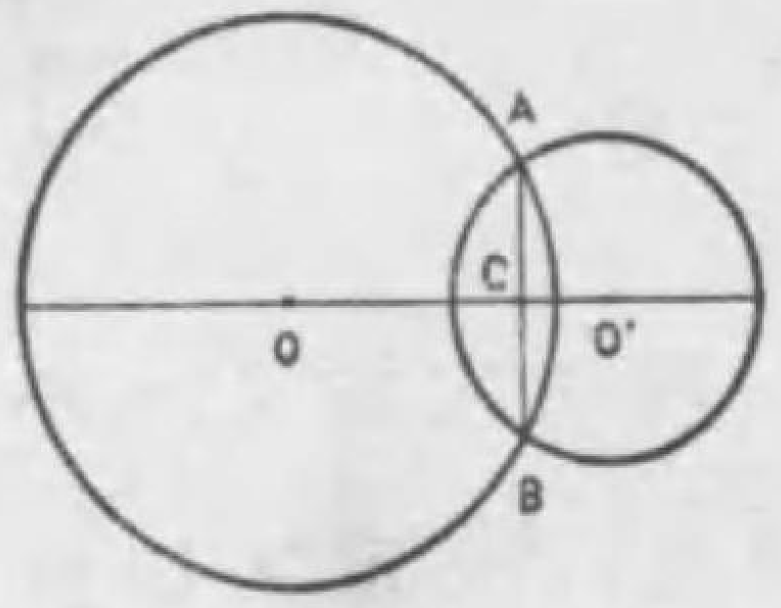
(68) 半徑 6 糎ナル球ノ小圓ノ周ヲ通ル半徑ト其軸トノナス角ガ60°ナルトキハ其小圓ノ面積如何。

問　二球ノ相對的位置ニハ幾通リノ場合ガアルカ。

定義　唯一點ヲ共有スル二ツノ球ハ**互ニ切ス**トイヒ,其各ガ他ノ外ニ在ルトキハ**外切**,一ツガ他ノ内ニ在ルトキハ**内切ス**トイフ。

定理　二ツノ球ガ交ルトキハ其交リハ其ノ中心線ニ垂直ナル圓ナリ。





證明　中心線ヲ含ム平面ニテ二球ヲ截リタルトキノ大圓ヲO,O'トシ其交點A,Bヲ結ブ線分ト中心線OO'トノ交點ヲCトセヨ。

OO'ヲ軸トシテコレ等ノ大圓ヲ廻轉スルトキハ球O,O'ヲ得。

而シテ　$AB\perp OO'$,　$AC=BC$　ナルヲ以テ二球ノ交リハOO'ニ垂直ニシテCヲ中心トシACヲ半徑トスル圓ナリ。

問　題

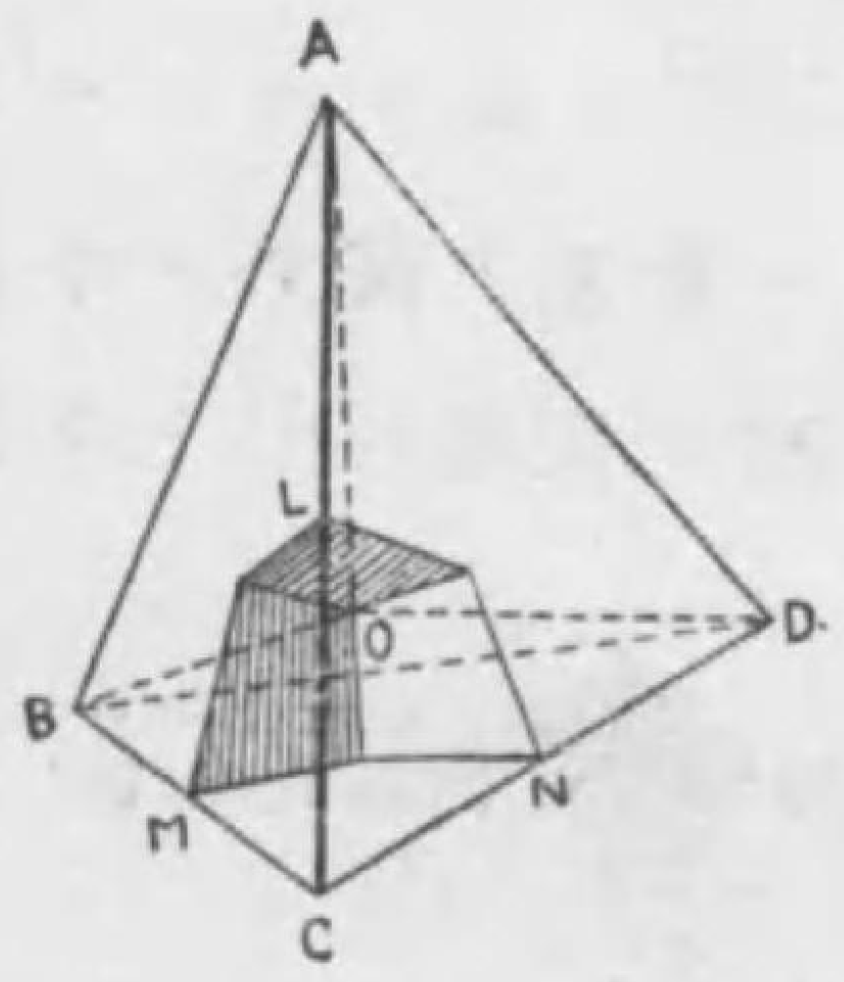
69　相交ル二球ノ半徑ハ夫々6粍,8粍ニシテ其中心距離ハ10粍ナリ。其交リノ面積ヲ求メヨ。

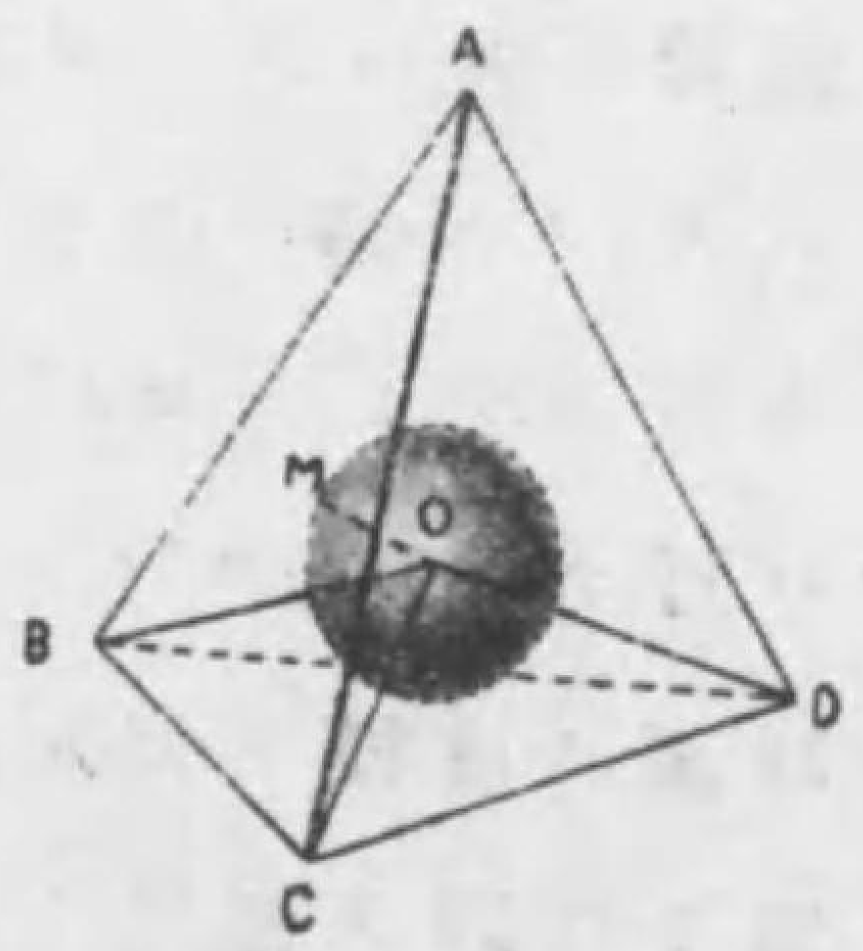
(69)　相交ル二球ノ半徑ハ夫々5粍,6粍ニシテ其交リノ半徑ハ47粍ナリ。其二球ノ中心距離ヲ求メヨ。

定義　多面體ノ各面ガ一ツノ球面ニ切スルトキハ其球ハ多面體ニ**内接ス**トイヒ,多面體ノ各頂點ガ一ツノ球面上ニ在ルトキハ其球ハ多面體ニ**外接ス**トイフ。

70　四面體A-BCDニ外接スル球ヲ作レ。

(70)　四面體A-BCDニ内接スル球ヲ作レ。



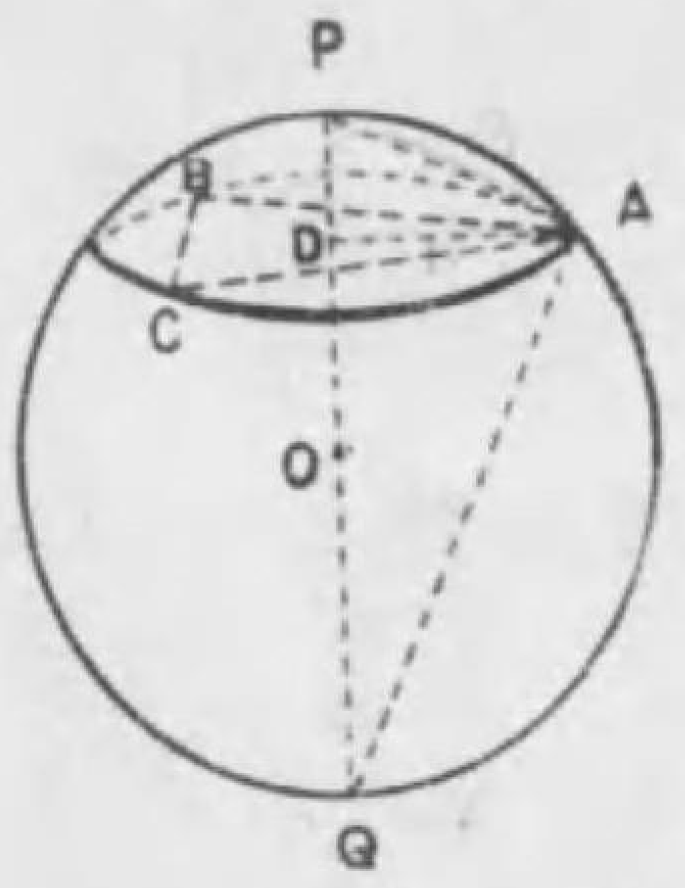


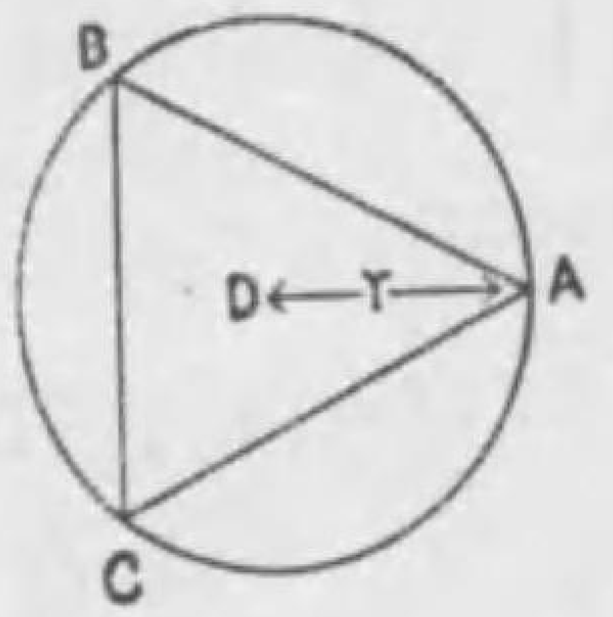
71 一稜ノ長サ6糎ナル正四面體ニ外接スル球ノ半徑ヲ求メヨ。

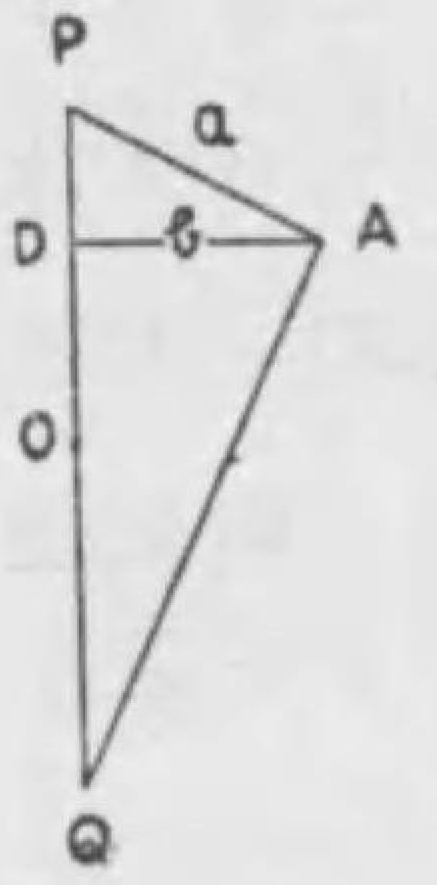
72 「コンパス」ノ一端ヲ球面上ニ置キテ其球面上ニ書ケル小圓ノ半徑ヲ知ルニハ如何ニスベキカ。

(71) 問題71ニ於ケル正四面體ニ內接スル球ノ半徑ヲ求メヨ。

(72) 「コンパス」ノ兩端ノ距離ヲa糎トシテ球面上ニ書ケル小圓ノ半徑ガb糎ナルトキハ其球ノ直徑ハ$\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ナリ。







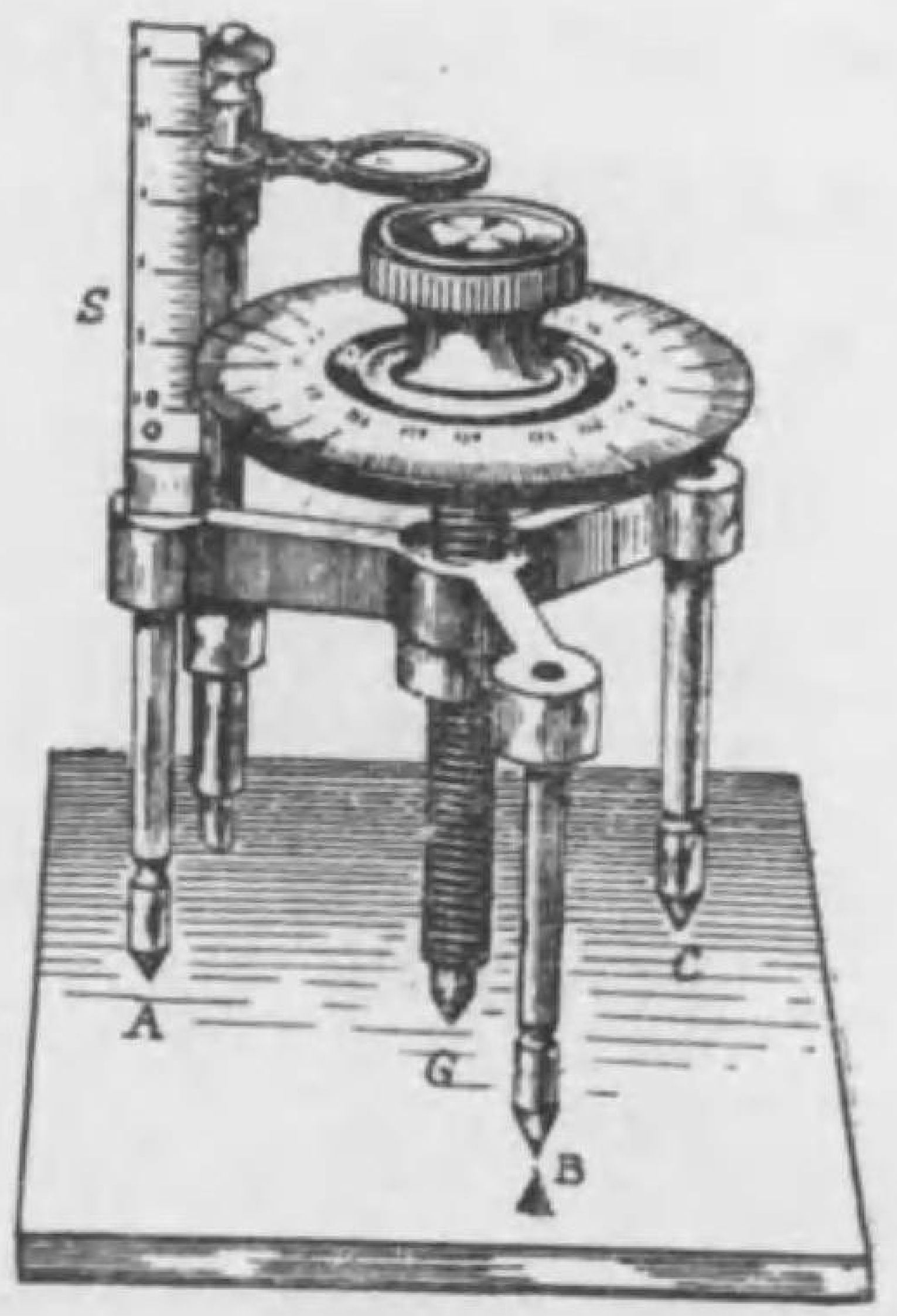
備考 與ヘラレタル球ノ直徑ヲ求ムルニハ「コンパス」ノ一端ヲ球面上(P)ニ置キテ書ケル小圓ノ半徑(AD)ト「コンパス」ノ兩端ノ距離(PA)トヲ知レバ可ナリ。

球面ノ直徑ヲ測ルニ用ヒラルヽSpherometer（すふえろめーたー）ハ即チ此理ヲ應用セルモノナリ。

Spherometer ハ次ノ圖ノ如キ器械ニシテ固定セル三脚A, B, Cト其中央ニ於テ上下シ得ル一脚Gトヲ備フ。而シテソノ三脚A, B, Cノ尖端A, B, Cハ正三角形ヲナス。

用法 PDノ長サヲ求ムルニハ先ヅG脚ノ尖端ガ平面ABCニ觸ルヽトキノSノ讀ミト四脚ノ先端A, B, C, Gノ各ガ與球面上ニ在ルトキノSノ讀ミトノ差ヲトル。

正三角形ABCノ外接圓ノ半徑ハ一邊ABノ長サヲ測ルコトニ依テ之ヲ知ルコトヲ得。



18　球面ノ表面積 (1.68)

定理　直圓錐臺(又ハ直圓錐)ノ側面積ハ其斜高ノ中點ニ於テ之ニ垂直ニ軸マデ引ケル線分ヲ半徑トセル圓周ト其高サトノ積ニ等シ。

直圓錐臺ABCDノ斜高ABノ中點Mニ於テ之ニ垂直ニ軸OO'マデ引ケル線分ヲMLトセバ其側面積ハ　$2\pi ML\cdot OO'$ナリ。

證明　上底下底ノ半徑ヲ夫々AO, BO'トシMヨリ軸ニ引ケル垂線ヲMN, AヨリBO'ニ引ケル垂線ヲAEトセバ側面積ハ　$\pi AB(AO+BO')$ナリ。

然ルニ　$AO+BO'=2MN$

$\therefore$　$\pi AB(AO+BO')=2\pi AB\cdot MN$

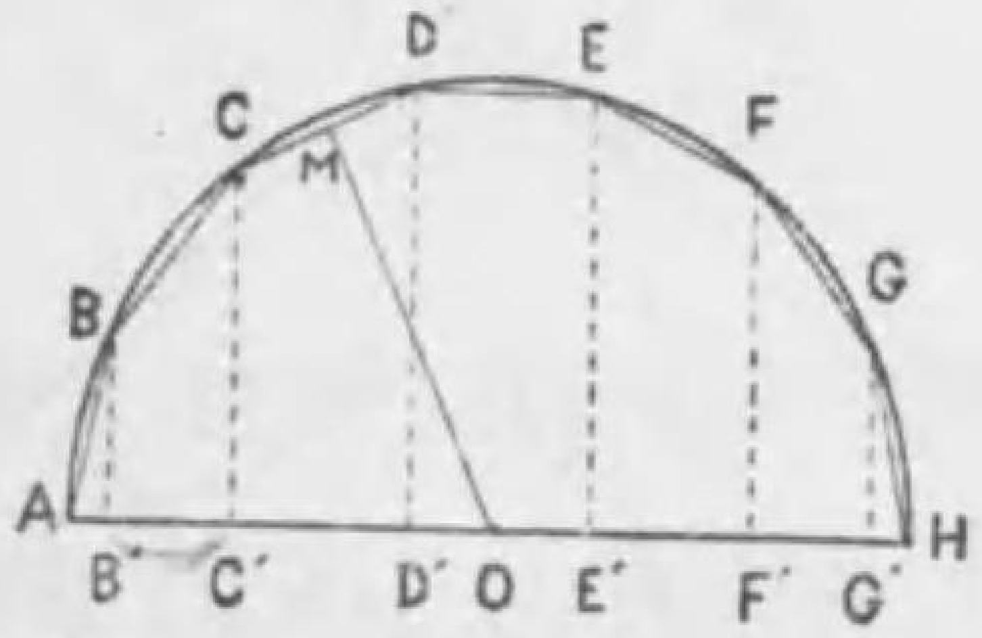
而シテ　$\triangle ABE\backsim\triangle MLN$………何故カ。

$\therefore$　$AB:AE=ML:MN$

$\therefore$　$AB\cdot MN=ML\cdot AE=ML\cdot OO'$

$\therefore$　$\pi AB(AO+BO')=2\pi ML\cdot OO'$

定理　球ノ表面積ハ大圓ノ周ト直徑トノ積ニ等シ。



球ノ半徑ヲrトセバ其ノ表面積ハ$2\pi r\cdot 2r$ナリ。

證明　半徑rナル半圓ABGHガ直徑AHヲ軸トシテ廻轉シ球面ヲ生ズルモノトス。

今此半圓周ヲn等分シ各分點ヲ順次ニ結ビ弦AB, BC, CD……GHヲ作リ中心Oヨリ各弦ニ垂線ヲ引クトキハソレ等ノ垂線ハ皆相等シク且弦ヲ二等分ス。

故ニ弦AB, BC, CD……GHガAHヲ軸トシテ廻轉スルトキ生ズル曲面ハ夫々　$2\pi MO\cdot AB'$, $2\pi MO\cdot B'C'$, $2\pi MO\cdot C'D'$……$2\pi MO\cdot G'H$ニ等シ。

故ニ此等ノ曲面積ノ總和ヲSトセバ

$$S=2\pi OM(AB'+B'C'+C'D'\cdots\cdots+G'H)=2\pi MO\cdot AH$$

然ルニ半圓周ノ等分數nヲ限リナク増ストキハS及ビMOノ極限ハ夫々球ノ表面積及ビ其半徑トナル。故ニ球ノ表面積ハ$2\pi r\cdot 2r$ナリ。

系一　球ノ表面積ハ其大圓ノ面積ノ四倍ニ等シ。

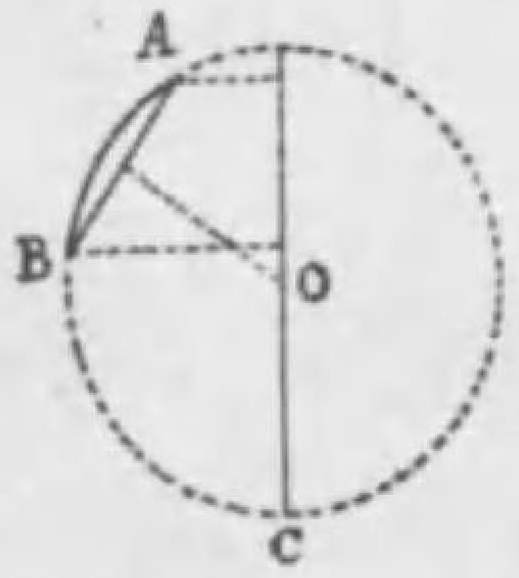
系二　球ノ表面積ハソレニ外接スル直圓壔ノ側面積ニ等シ。

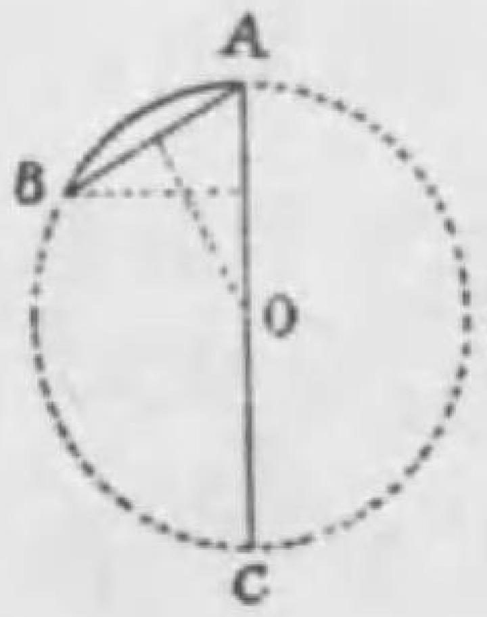
定義　平行ナル二平面ノ間ニ在ル球ノ部分ヲ**球分**トイヒ,其二平行面ニヨル球ノ截面ヲ球分ノ**底**,兩底間ノ距離ヲ其**高サ**トイフ。而シテ二平行面ノ一ツガ球ノ切平面ナルトキハソノ球分ヲ**一ツノ底ノ球分**又ハ**缺球**トイフ。

球分ノ曲面ヲ**球帶**,缺球ノ曲面ヲ**缺球面**トイフ。

系三　球帶及缺球面ノ面積ハ其大圓ノ周ト高サトノ積ニ等シ。

半圓ノ代リニ弧ABヲトルトキハ本定理ト同樣ニシテ之ヲ證スルコトヲ得。





問　題

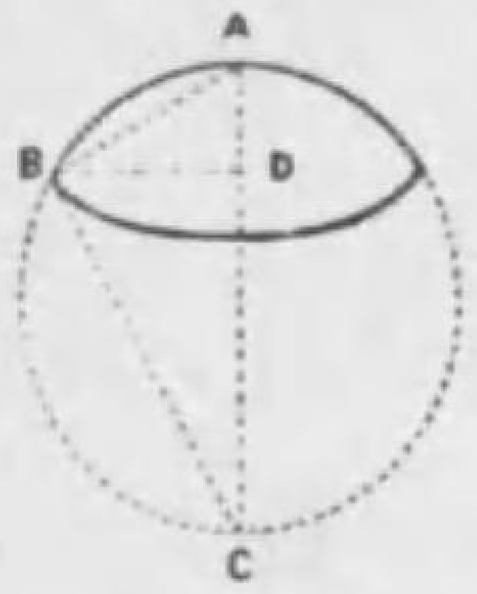
73　地球ノ赤道ノ長サハ約四萬粁ナリ。其表面積ヲ求メヨ。

但シ$\pi=\frac{22}{7}$トス。

74　球ノ表面積ハ之ニ外接スル直圓壔ノ全表面積ノ三分ノ二ニ等シキコトヲ證セヨ。

75　球ヲ平行ナル平面ニテ截リソノ球面積ヲ十等分セヨ。

76　弧ABガ直徑ACヲ軸トシテ廻轉スルトキ生ズル缺球面ハ弦ABヲ半徑トスル圓ニ等シ。

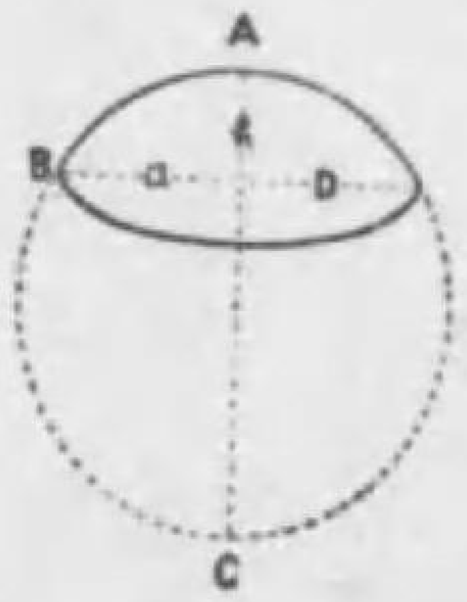


(73)　月ノ直徑ヲ約三千五百粁トシテ地球ノ表面積ト月ノ表面積トノ比ヲ求メヨ。

(74)　半徑ガa粍,b粍ナル二球ノ表面積ノ和ニ等シキ表面積ヲ有スル球ノ半徑ヲ求メヨ。

(75)　全表面積ガ110平方粍ナル球面上ニ面積11平方粍ナル球帶アリ。其高サヲ求メヨ。

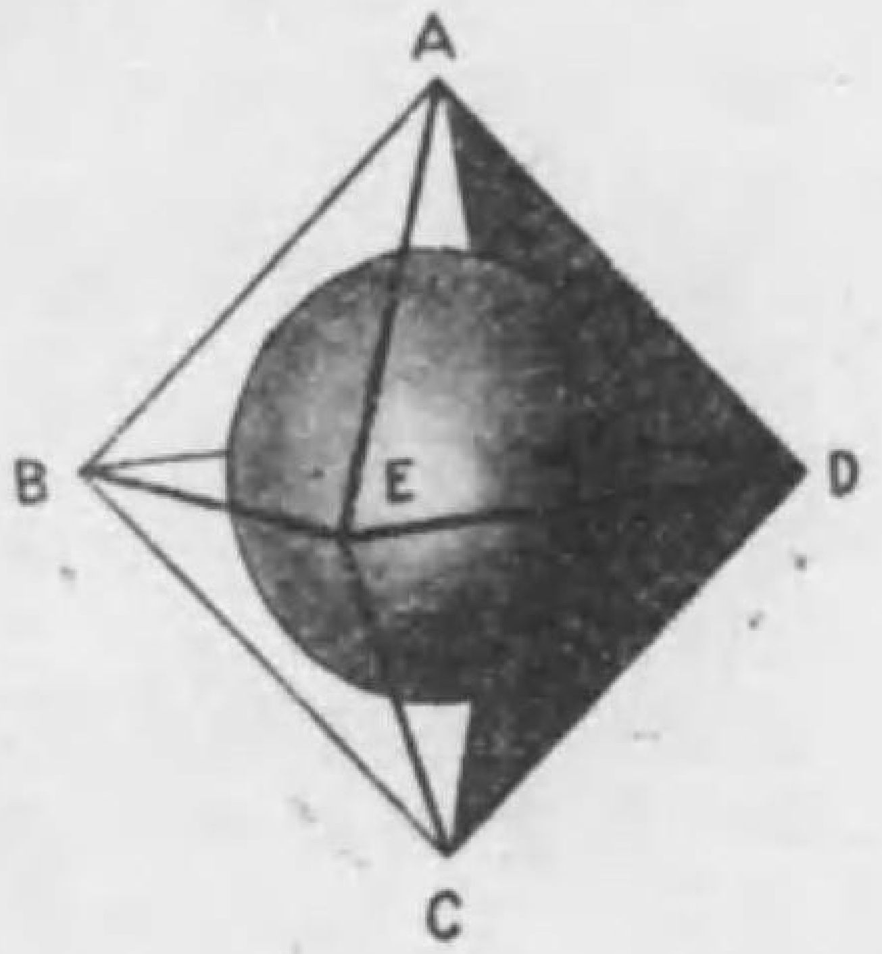
(76)　高サハh,底面ノ半徑ガaナル缺球ノ全表面積ハ$\pi(h^2+2a^2)$ナリ。

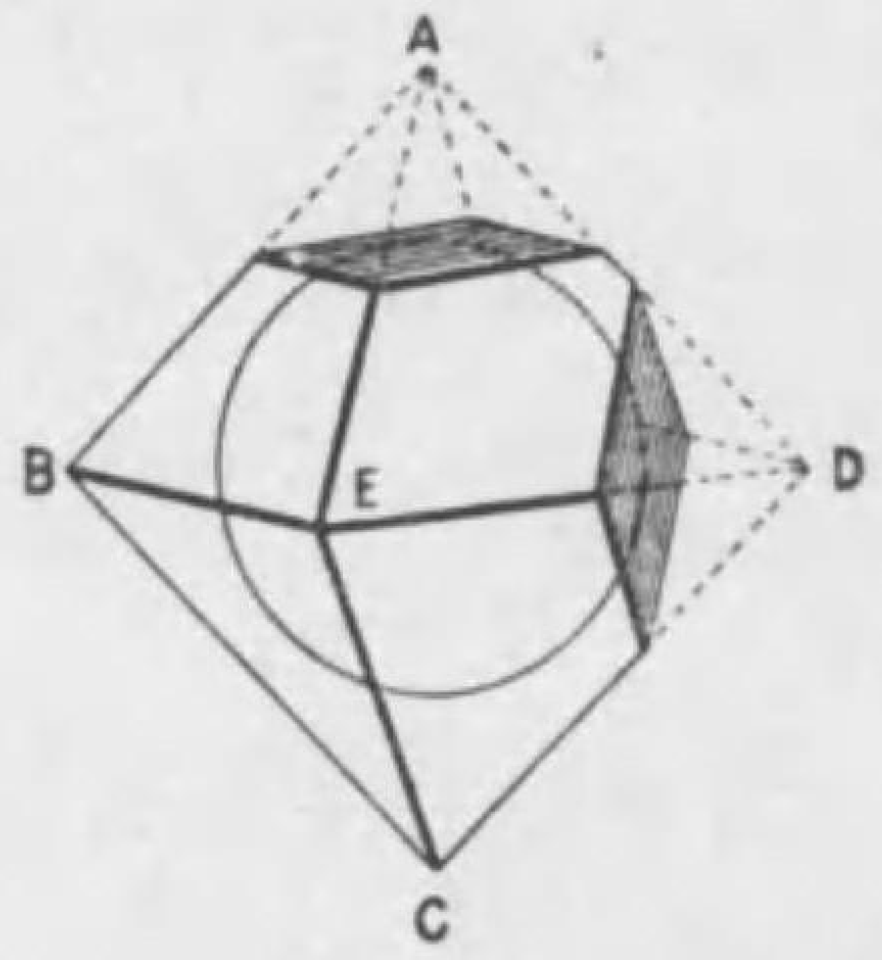


19 球ノ體積

定理 球ノ體積ハ其表面積ト半徑トノ和ノ三分ノ一ニ等シ。

積





球ノ體積ヲVトシ其表面積ヲs，半徑ヲrトセバ $V=\frac{1}{3}sr$ ナリ。

證明 球ニ外接スル任意ノ多面體A–Cヲ作リ其各頂點ト球ノ中心トヲ結ブトキハ多面體A–Cハ其各面ヲ底面トシrヲ高サトスル角錐ニ分タル。故ニ此多面體ノ體積ヲV′トシ其表面積ヲs′トセバ $V'=\frac{1}{3}s'r$ ナリ。

今圖ニ示ス如ク球ノ切平面ヲ以テ外接多面體ノ各立體角ヲナス所ノ部分ヲ截リトルコトニヨリ外接多面體ノ面ノ數ヲ限リナク增シ行クトキハV', s'ノ極限ハ夫々V, sトナル。

故ニ $V=\frac{1}{3}sr$

系一 半徑rナル球ノ體積ハ$\frac{4}{3}\pi r^3$ナリ。

系二 球ノ體積ハ之ニ外接スル直圓壔ノ體積ノ三分ノ二ニ等シ。

證明 球ノ半徑ヲrトセバ之ニ外接スル直圓壔ノ底面ノ半徑ハrニシテ其高サハ2rナリ。
故ニ外接直圓壔ノ體積ハ $2\pi r^3$ ナリ。
故ニ球ノ體積ハ之ニ外接スル直圓壔ノ體積ノ三分ノ二ニ等シ。

問題

77 直徑7糎ナル球ノ體積ヲ求メヨ。

$\pi=\frac{22}{7}$トス。

(77) 表面積ガ154平方糎ナル球ノ體積ヲ求メヨ。

78　體積ガ一立方尺ニ等シキ球ノ直徑ヲ求メヨ。

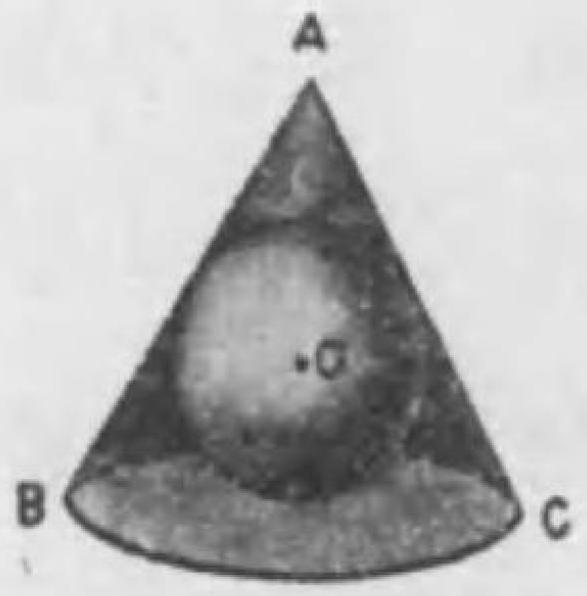
79　直徑ト高サトガ相等シキ直圓壔トソレニ内接スル球及直圓錐トノ體積ノ比ハ 3:2:1 ニ等シ。

80　800匁ノ球アリ。之ト同質ニシテ直徑ガ其$\frac{1}{2}$ナルモノヽ目方ハ何程ナルカ。

又比重ヲ 11.3 トシテモトノ球ノ體積ヲ求ム。

(78)　一邊ノ長サガ a 糎ナル立方體ニ外接スル球ノ體積ヲ求メヨ。

(79)　底面ノ直徑ト母線トガ相等シキ直圓錐トソレニ内切スル球トノ體積ノ比ヲ求メヨ。



(80)　半徑ガ夫々 3 糎, 4 糎ナル二ツノ金屬球ヲ熔解シテ中空ナル直圓壔ヲ作ラントス。外側ノ直徑ヲ 1 糎,厚サヲ 2 粍トセバ其長サハ幾糎トナルカ。

第一篇　摘要

◎平面ノ決定及ビ同一平面上ニ在ル直線

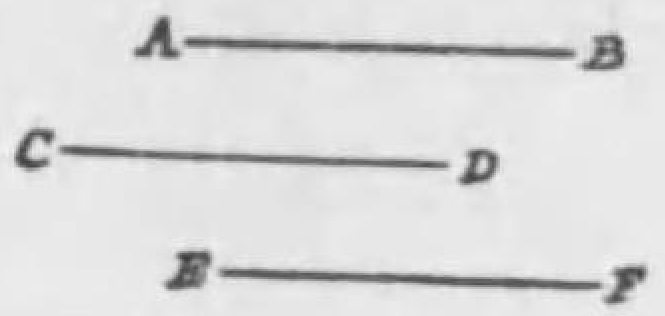
1　同一直線上ニ在ラザル三點
2　相交ル二直線
3　平行ナル二直線
……ハ夫々一平面ヲ決定ス。

4　定直線上ノ一定點ヲ過リ之ニ垂直ナル總テノ直線ハ其直線ニ垂直ナル平面上ニ在リ。

◎二直線ノ平行

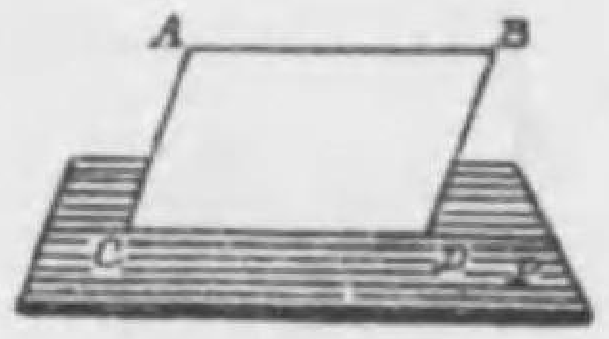
1

$AB \parallel CD,\ AB \parallel EF$



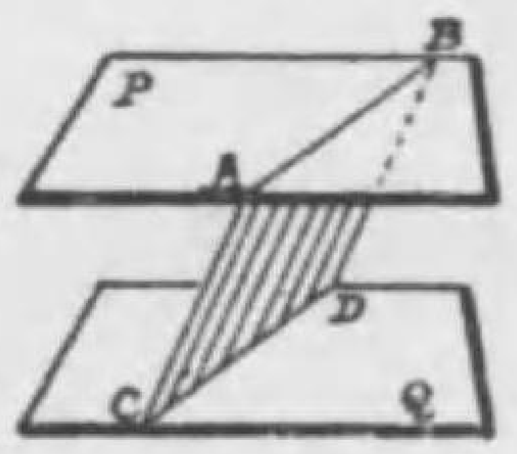
2

$AB \parallel P$



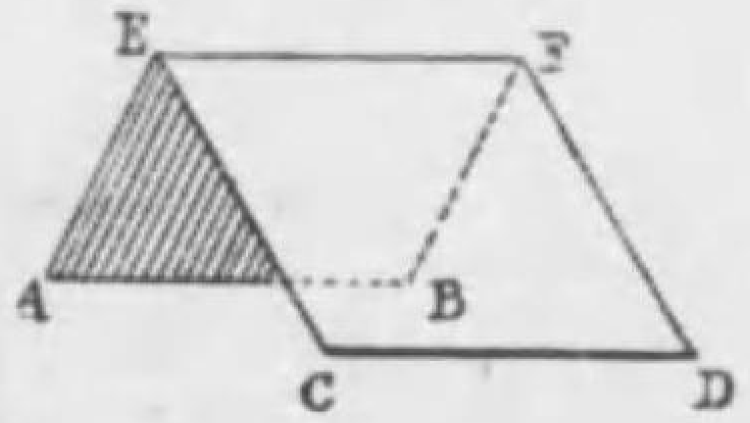
3

$P \parallel Q$



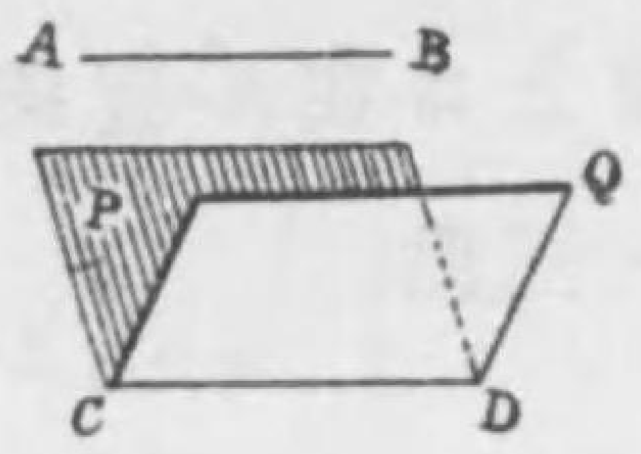
4

$AB \parallel CD$



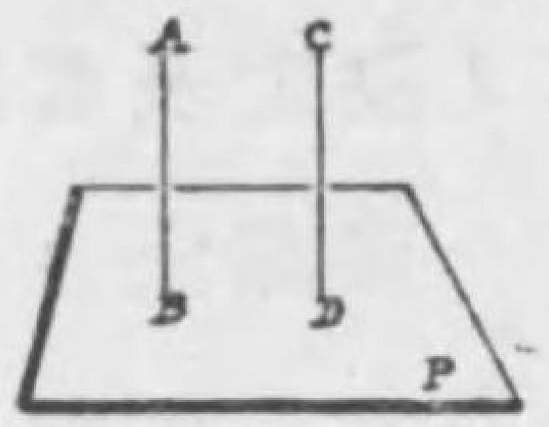
5

$AB \parallel P,\ AB \parallel Q$



6

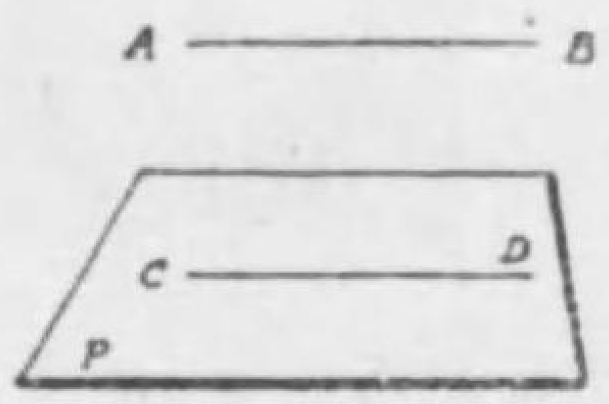
$AB \perp P,\ CD \perp P$



◎直線ト平面トノ平行及ビ二平面ノ平行

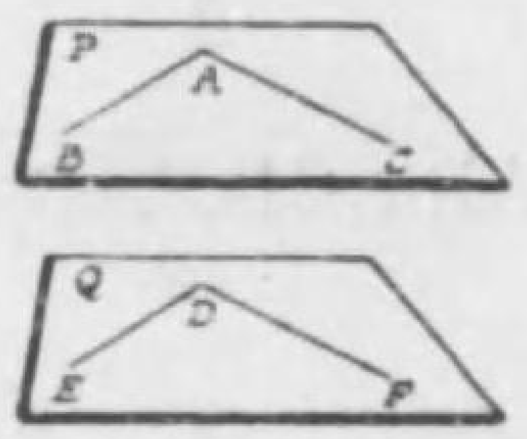
1

$AB \parallel CD$; P∥AB



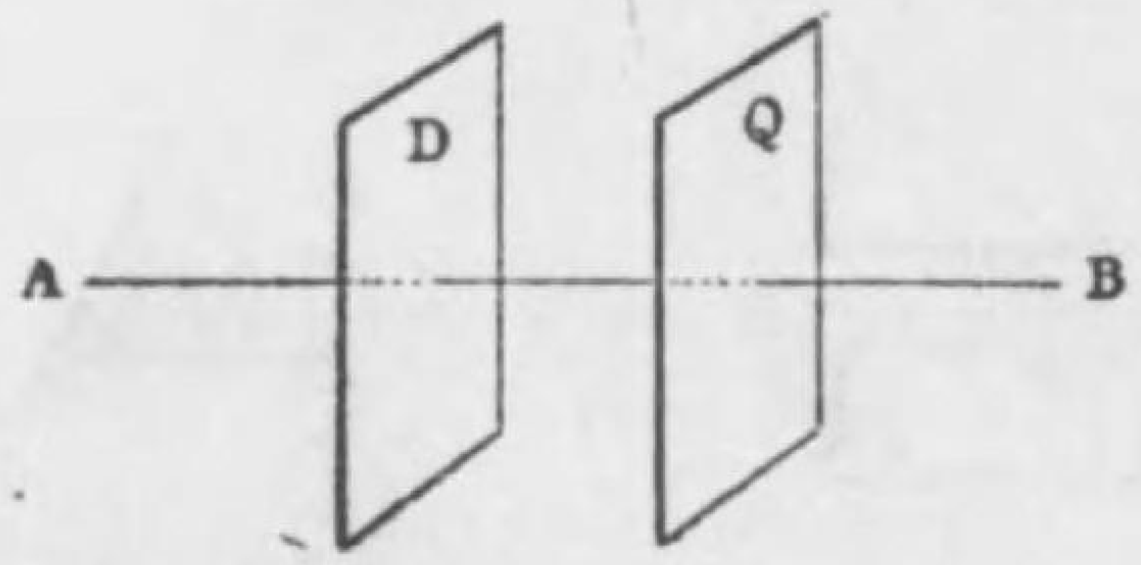
2

$AB \parallel DE,\ AC \parallel DF$



3

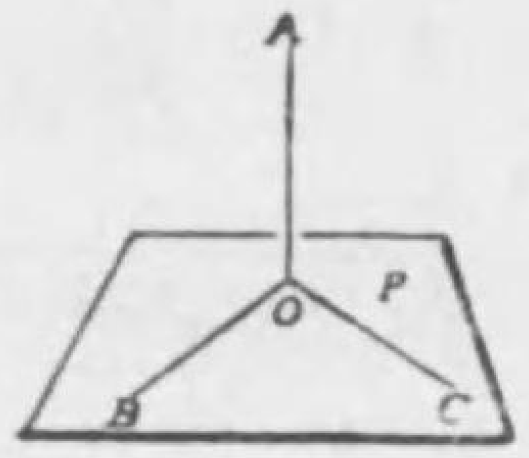
$AB \perp P,\ AB \perp Q$



◎直線ト平面トノ垂直

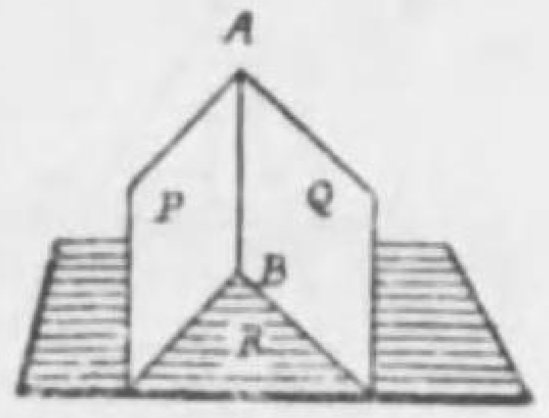
1

$AO \perp BO,\ AO \perp CO$



2

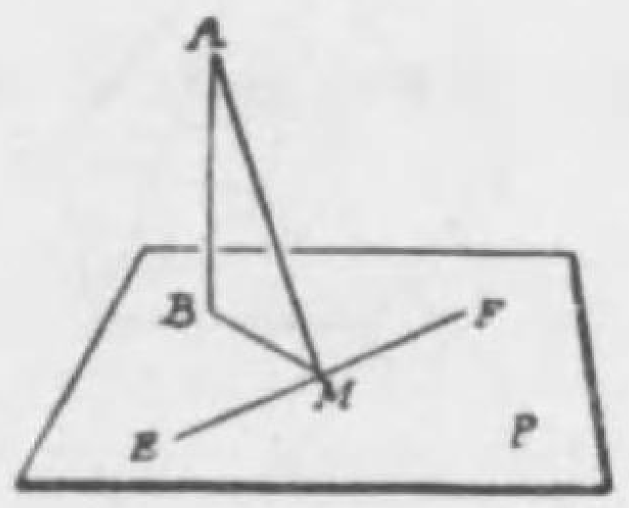
$P \perp R,\ Q \perp R$



◎垂直ナル直線及ビ平面

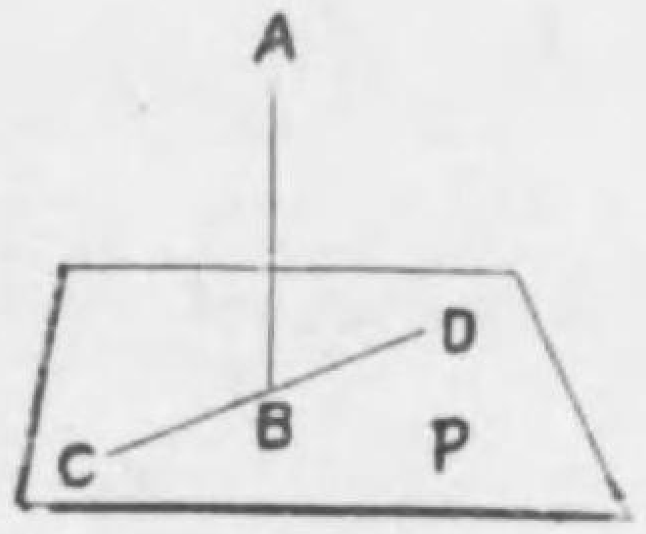
1

$AB \perp P,\ BM \perp EF$



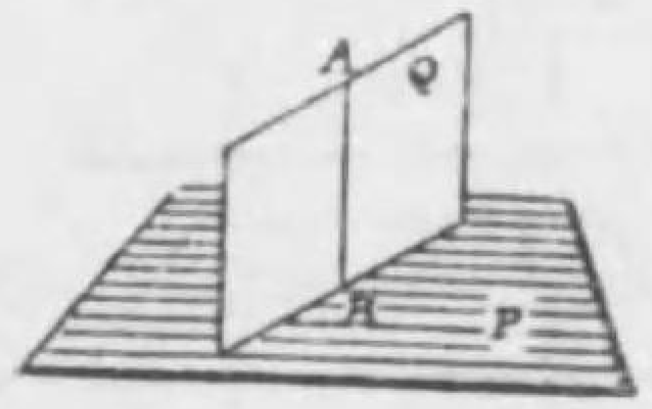
2

$AB \perp P$



3

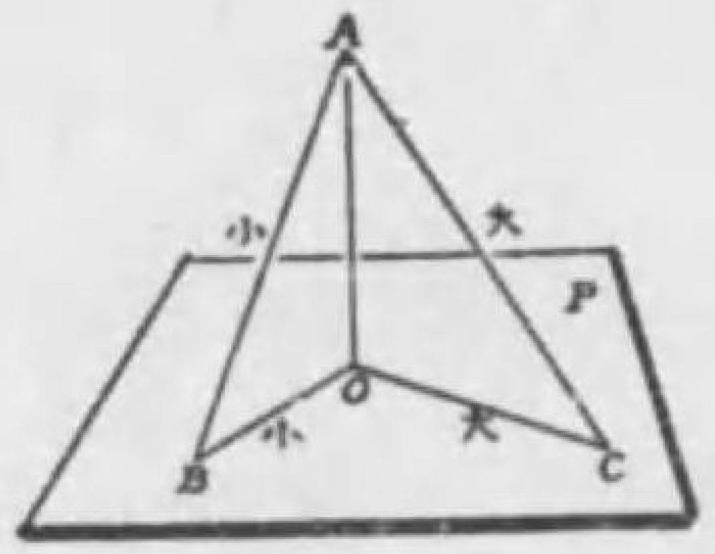
$AB \perp P$



◎線分及ビ角ノ大小

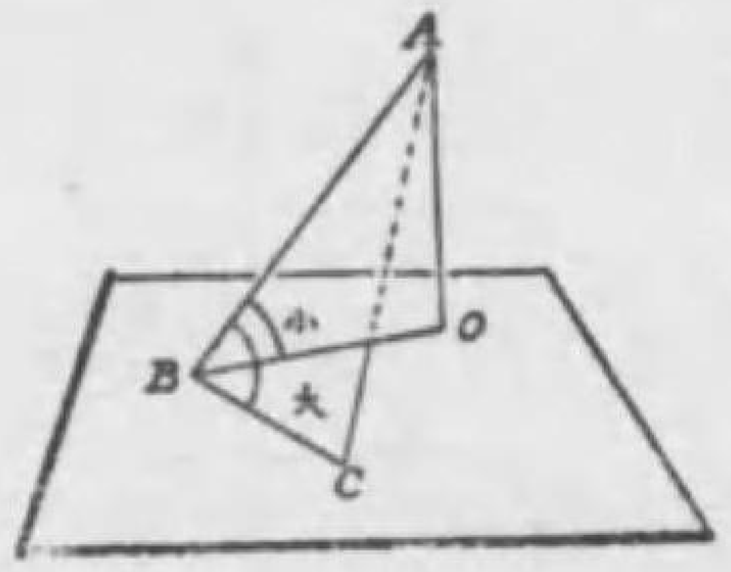
1

AO⊥P



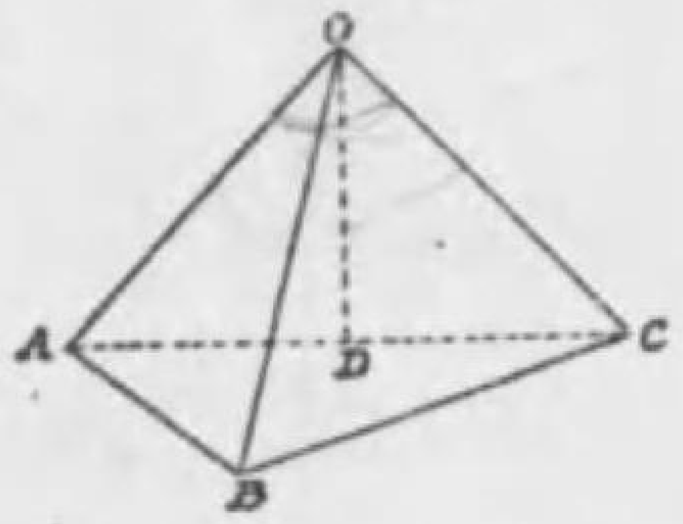
2

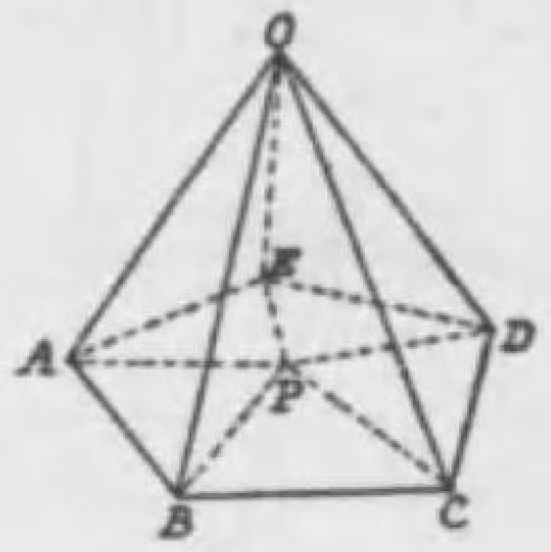
AO⊥P



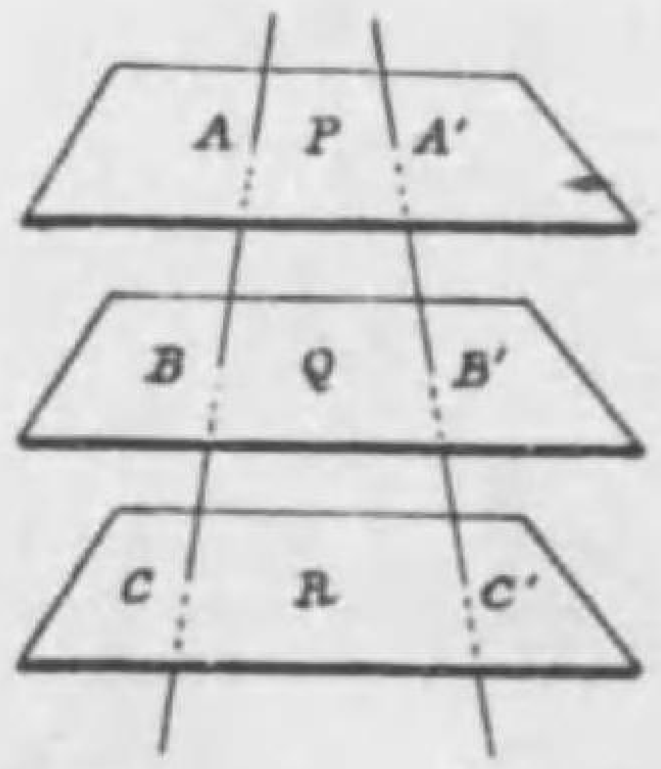
3 4

$\angle AOC < \angle AOB + \angle BOC$, $\angle AOB + \angle BOC + \cdots < 4R.\llcorner$





◎比例線



雜 題

1 折線 ABCD ニ於テ ∠BCD ガ直角ニシテ AB ガ平面 BCD ニ垂直ナルトキハ CD ハ平面 ABC ニ垂直ナリ。

注意 平面 ABC 上ニ於テ點 C ヨリ AB ニ平行ナル直線 CE ヲ引キテ考ヘヨ。

2 各面角ガ直角ナル三面角 P-ABC ノ各稜上ノ點ヲ夫々 A, B, C トシ, 頂點 P ヨリ平面 ABC ニ垂線 PO ヲ引クトキハ O ハ △ABC ノ垂心ナリ。

3 一與平面上ニ於テ其平面外ノ二定點ヲ直角ニ見ルベキ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

(1) 三面角ノ二ツノ面ガ互ニ垂直ナルトキハ其任意ノ稜ニ垂直ナル平面ニテノ截面ハ直角三角形ナリ。

注意 一平面上ノ直線ニ垂直ナル平面ハ其平面ニ垂直ナルコトニ注意セヨ。

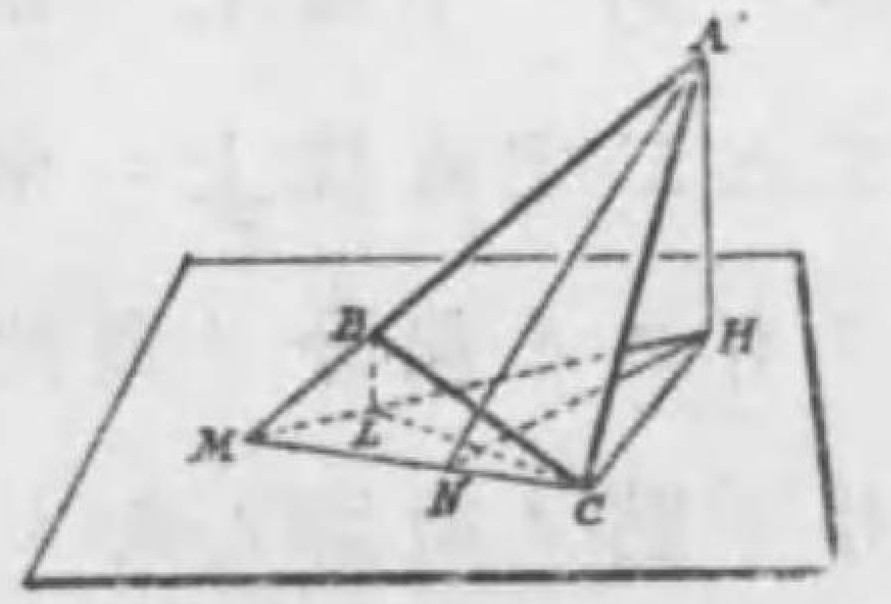
(2) 直線 AB ニ於テ交ル二平面 P, Q アリ。一點 E ヨリ P, Q ノ各ニ垂線 EC, ED ヲ引キ D ヨリ P ヘ垂線 DF ヲ引クトキハ DF⊥AB ナリ。

(3) 同一平面上ニ在ラザル二定直線上ニ兩端ヲ有スル線分ヲ與比ニ分ツ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

4　相交ル二平面P, Qアリ。其交線上ニ一點ヲ求メ其點ヨリP上ノ點AトQ上ノ點Bトニ至ル距離ノ和ヲシテ最小ナラシメヨ。

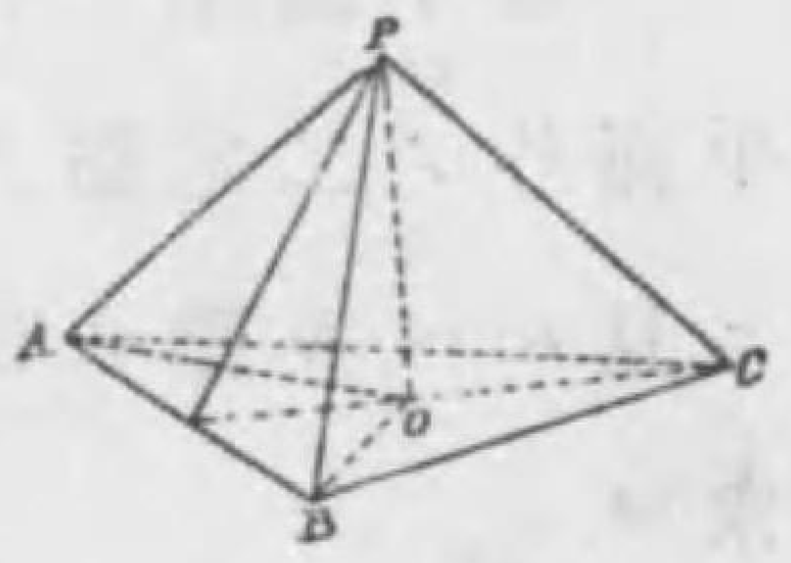
注意　交線ヲ軸トシテ平面ヲ他ノ平面ニ重ナルマデ廻轉セヨ。

5　三角形ABCノ平面Pニ於ケル正射影ノ面積ハ$\triangle ABC$ノ面積ニABCノ平面トPトノナス角ノ餘弦ヲ乘ジタルモノニ等シ。



(4)　直線XY上ニ一點Cヲ求メCヨリ二點A,Bニ至ル距離ノ差ヲシテ最大ナラシメヨ。但シ二點A,BトXYトハ同一平面上ニ在ラザルモノトス。

(5)　二ツノ面角$\angle BPC$　$\angle APC$ガ互ニ直角ナル三面角P-ABCノ各稜上ニ夫々點A,B,Cヲトリ點Pノ平面ABCニ於ケル正射影ヲOトセバ$\triangle APB$ハ$\triangle AOB$ト$\triangle ABC$トノ比例中項ナリ。



第二篇　摘要

◎平行六面體ノ性質及ビソノ體積

1　相對スル面ハ合同ナル平行四邊形ナリ。

2　四對角線ハ同一點ニ於テ相會ス。

3　其體積ハ底面ト高サトノ積ニ等シ。

◎角壔ノ性質及ビソノ體積

1　側稜ニ交ル平行ナル截面ハ合同ナル多角形ナリ。

2　其體積ハ底面ト高サトノ積ニ等シ。

◎角錐

1　角錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截レバ

(一)　側稜及ビ高サハ同ジ比ニ分タル。

(二)　底面ト截面トハ相似多角形ニシテソノ面積ノ比ハ其頂點ヨリ底面及ビ截面ニ至ル距離ノ自乘比ニ等シ。

2　其體積ハ底面ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ。

雜　題

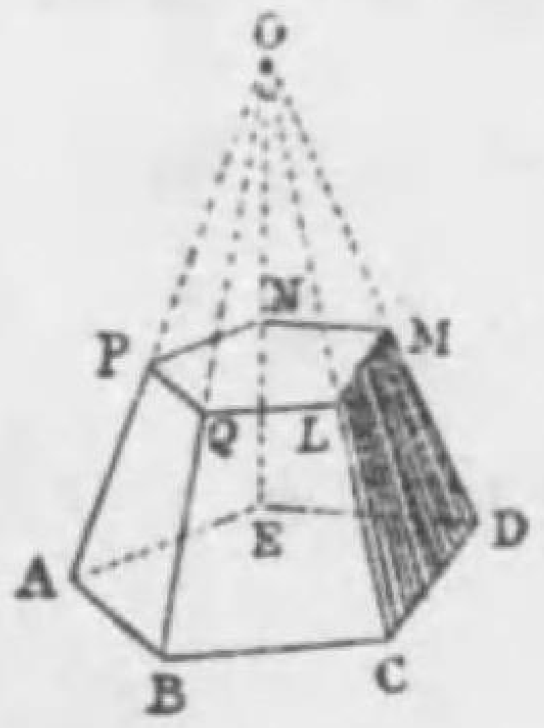
6　四面體ヲ相對スル二稜ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ其截面ハ平行四邊形ナリ。

7　正角錐ノ底面上ノ任意ノ一點ヨリ各側面ヘ引ケル垂線ノ和ハ一定ナリ。

8　正四面體ノ高サヲhトシ一稜ノ長サヲaトスルトキハ

$$3h^2=2a^2$$

9　角錐臺ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截リ其截面積ヲシテ兩底ノ比例中項ナラシメヨ。



(6)　四面體ヲ平面ニテ截リ其截面ヲシテ菱形ナラシメヨ。

(7)　四面體ノ一ツノ二面角ノ二等分面ハソレニ對スル稜ヲ其二面角ヲナス二面ノ面積ノ比ニ分ツ。

(8)　立方體ノ對角線ヲdニテ表ハセバ其體積ハ　$\frac{\sqrt{3}}{9}d^3$　ナリ。

(9)　角錐臺ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截リ其角錐臺ヲ二等分セヨ。

第三篇　摘　要

◎直圓壔ノ側面積及ビ其體積

直圓壔ノ底面ノ半徑ヲrトシ高サヲhトセバ

1　側面積$=2\pi rh$

2　體　積$=\pi r^2h$

◎直圓錐ノ側面積及ビ其體積

直圓錐ノ底面ノ半徑ヲrトシ母線ヲl高サヲhトセバ

1　側面積$=\pi rl$

2　體　積$=\frac{1}{3}\pi r^2h$

◎直圓錐臺ノ側面積及ビ其體積

兩底ノ半徑ヲ夫々r, Rトシ側高ヲlトセバ

1　側面積$=\pi(r+\mathrm{R})l$

兩底ノ面積ヲ夫々a, bトシ高サヲhトセバ

2　體　積$=\frac{h}{3}(a+\sqrt{ab}+b)$

◎球ノ性質

1 平面ニヨリテノ截面ハ圓ナリ。

2 中心ヨリ等距離ニ在ル截面ハ相等シ。

3 二球ノ交リハ其中心線ニ垂直ナル圓ナリ。

◎球ノ表面積及ビ其體積

球ノ半徑ヲrトセバ

1 表面積＝$4\pi r^2$

2 體　積＝$\frac{4}{3}\pi r^3$

◎球帶及缺球面ノ面積

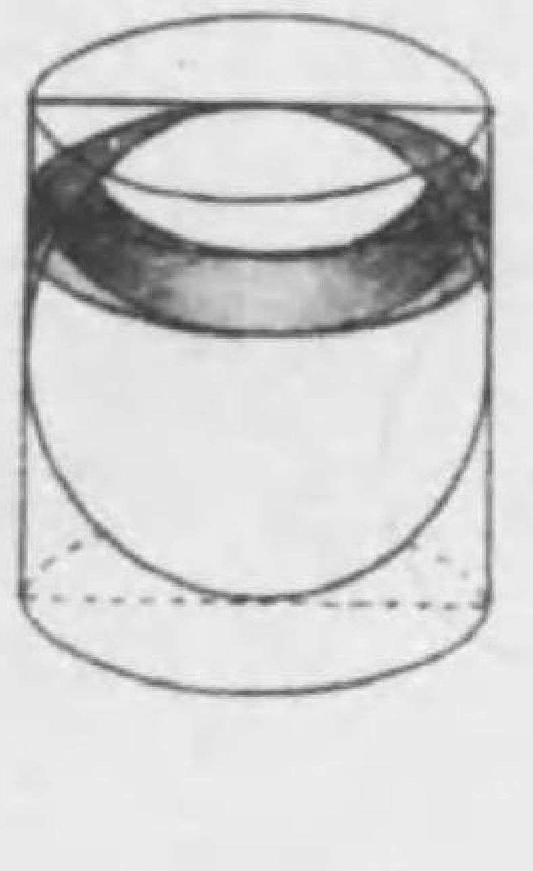
球帶及缺球面ノ屬スル球ノ半徑ヲrトシ其ノ高サヲhトセバ

ソノ面積＝$2\pi rh$ ナリ。

雜　題

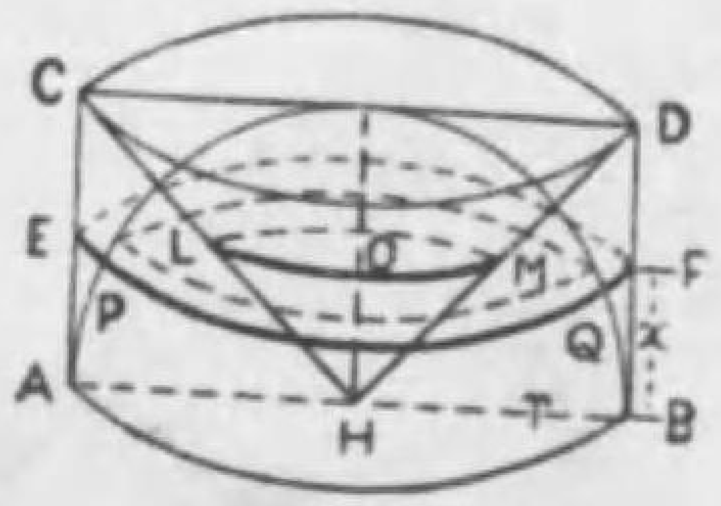
10 底部ハ半球ニシテ上部ハ直圓壔狀ナル試驗管ノ直徑ハ 6 糎,圓壔部ノ長サハ 15 糎ナリ。其容積ヲ求メヨ。

11 球ニ外接スル直圓壔ト其球トヲ圓壔ノ底面ニ平行ナル二平面ニテ截ルトキハ其二平面ノ間ニアル圓壔ノ側面積ト球帶ノ面積トハ相等シ。



(01) 直圓錐臺形ノばけつアリ。ソノ內法高サハ 20 糎兩底ノ半徑ハ夫々 15 糎, 10 糎ナリ。其容積ヲ求メヨ。

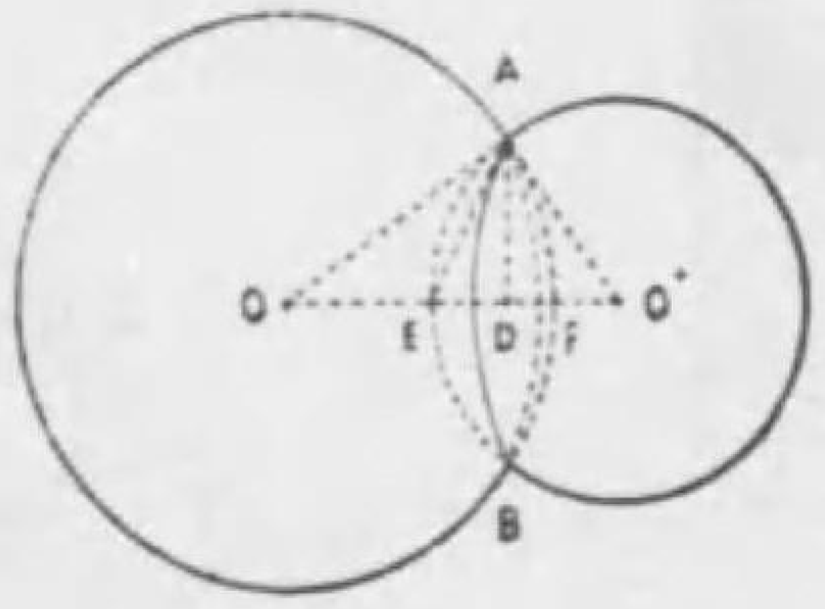
(11) 圖ノ如ク高サガ底面ノ半徑ニ等シキ直圓壔ニ半球ト直圓錐トヲ內接セシメ之ヲ圓壔ノ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ半球ノ截面積ハ圓壔ノ截面積ト圓錐ノ截面積トノ差ニ等シ。



12 同心ナル二球ヲ一平面ニテ截ルトキハ其截面ノ二球面ノ間ニ在ル部分ノ面積ハ一定ナリ。

13 半徑rナル球ニ外接スル直圓錐ノ高サハ球ノ直徑ノ2倍ナリ。其直圓錐ノ全表面積及ビ體積ヲ求メヨ。

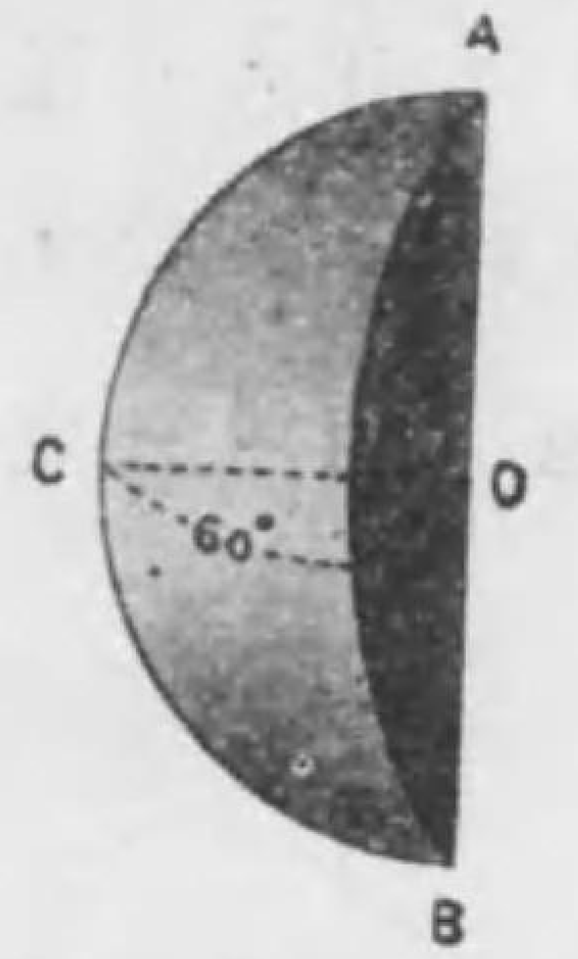
14 半徑ガ8糎ト6糎トナル相交ル二球アリ。其交リナル圓ノ半徑ガ4.8糎ナルトキハ兩球面ノ露出セル部ノ表面積如何。



(12) 半徑rナル球ノ外ニアリテ中心ヨリhナル距離ニ在ル定點ヨリ其球ニ引ケル切線ノ切點ノ軌跡ナル小圓ノ面積ヲ求メヨ。

(13) 半徑6糎ナル球ニ內接スル直圓錐アリ。其底面ノ直徑ト母線トガ相等シキトキハ其直圓錐ノ體積幾許ナルカ。

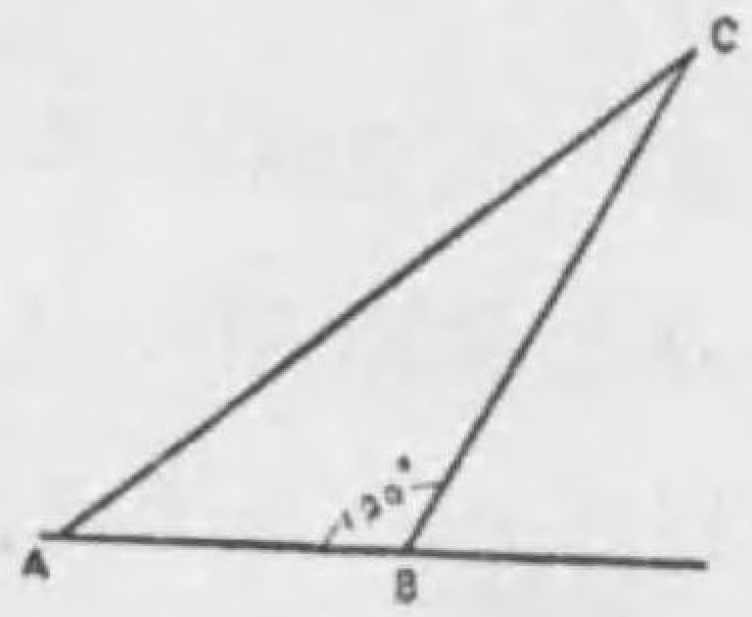
(14) 問題**15**ニ於テ二球ガ交リテ生ズル瓢（ひさご）狀ノ體積ヲ求メヨ。



15 半徑rナル半圓ABCガ直徑ABヲ軸トシテ60°廻轉シテ生ズル立體ノ體積ヲ求メヨ。

16 球ニ內接スル平行六面體ハ直六面體ナルコトヲ證セヨ。

17 同一平面上ニ在ラザル四點ヲ通ル球面ヲ作レ。



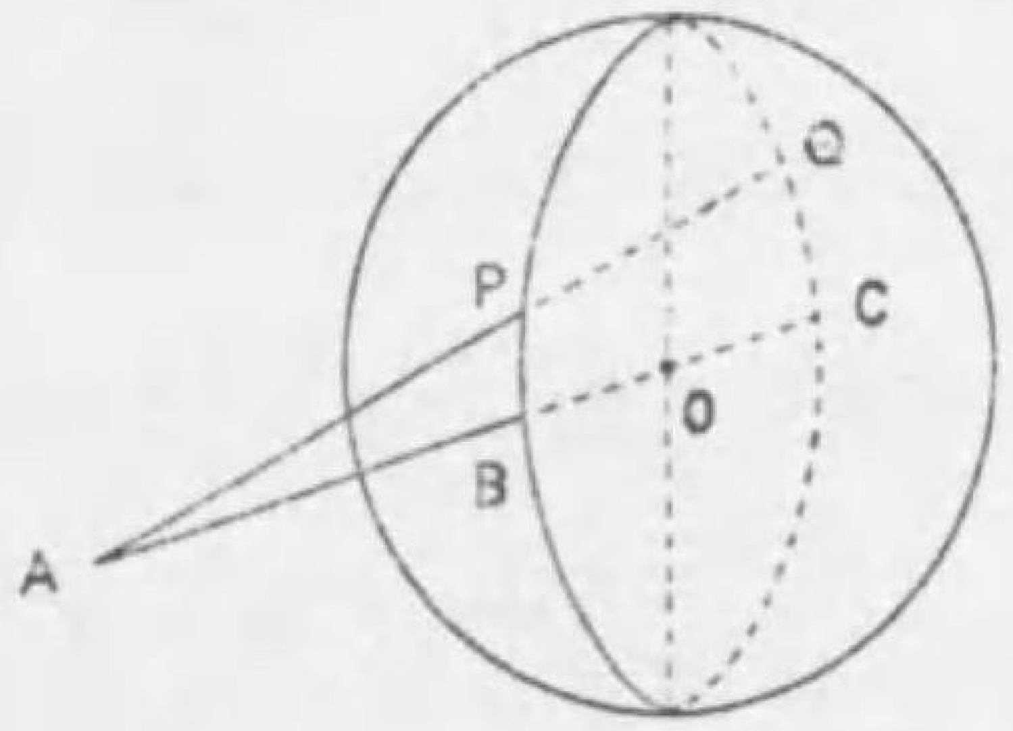
(15) 上圖ニ於テ三角形ABCガABヲ軸トシテ廻轉スルトキ生ズル立體ノ體積ヲ求メヨ。

但シABヲ5糎BCヲ8糎，$\angle ABC=120°$トス。

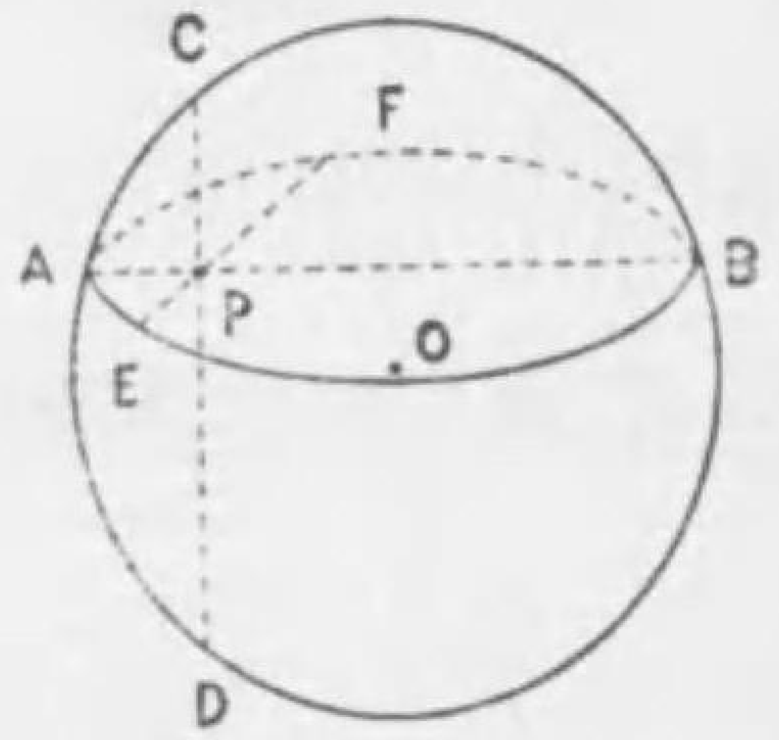
(16) 半徑rナル球ニ內接セル立方體ノ體積ヲ求メヨ。

(17) 相交リ且同一平面上ニ在ラザル二定圓周ヲ通ル球面ヲ作レ。

18 球外ノ一定點Aヨリ引ケル任意ノ直線ト球面トノ交點ヲP,Qトセバニ線分AP,AQノ包ム矩形ハ一定ナリ。



(18) 球面内ノ一定點ヲ通リテ引ケル互ニ垂直ナル三ツノ弦ノ上ノ正方形ノ和ハ一定ナリ。



發行所 大阪振替貯金口座四七一番 大阪市東區博勞町五丁目五十六番地 大阪修文館

發行所 東京振替貯金口座二六四四番 東京市神田區表神保町二番地 東京修文館

發行者 大阪市東區博勞町五丁目五十六番地 鈴木常松

發行兼印刷者 東京市神田區表神保町二番地 鈴木常次郎

著作者 廣島高等師範學校附屬中學校數學研究會
代表者 高橋豐夫

大正十二年三月廿五日印刷
大正十二年三月三十日發行
大正十二年四月廿五日訂正再版印刷
大正十二年四月廿八日訂正再版發行

中等教育 立体幾何學教科書

定價 金貳拾六錢
金四拾四錢（大正十二年度臨時定價）

終