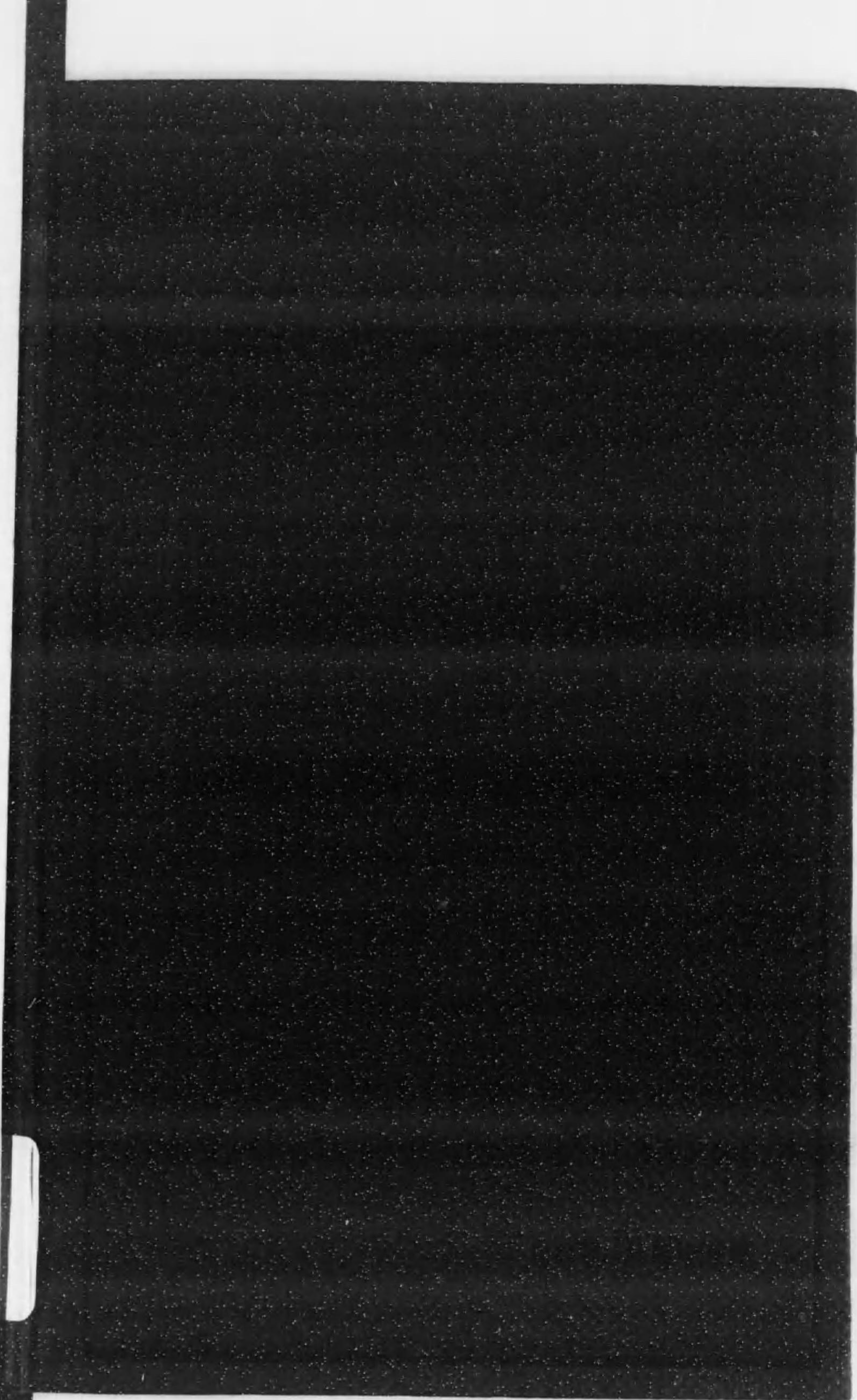




始



Plane Trigonometry.  
V. Year Class.

M. KUNIYEDA.  
TEXT-BOOK  
OF  
MIDDLE-SCHOOL-MATHEMATICS.

HOBUNKWAN

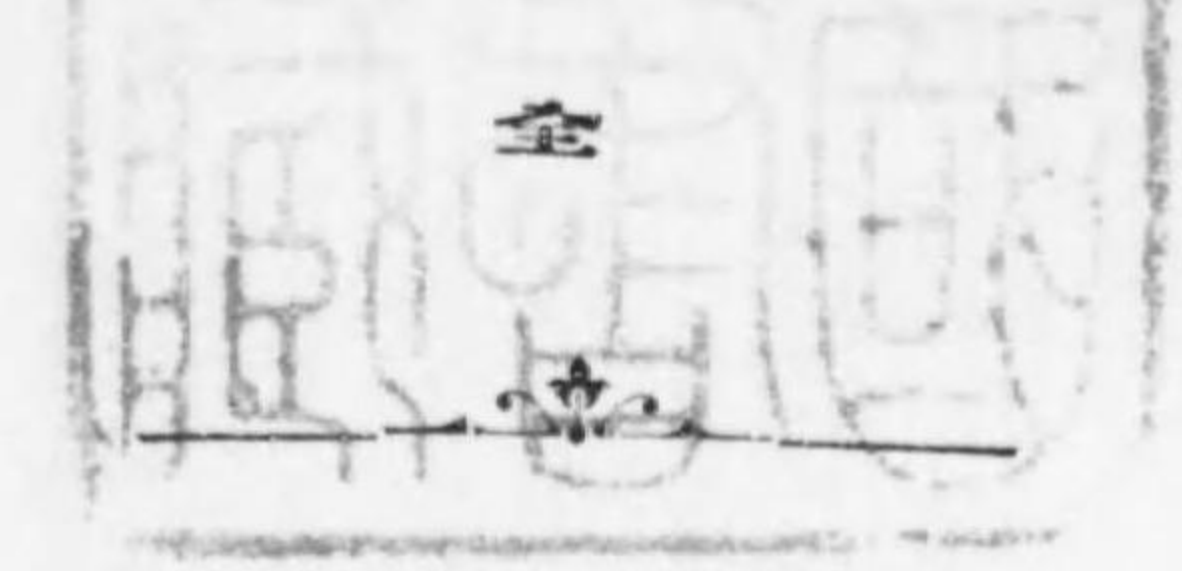
272  
1834

43108  
208

中學教育

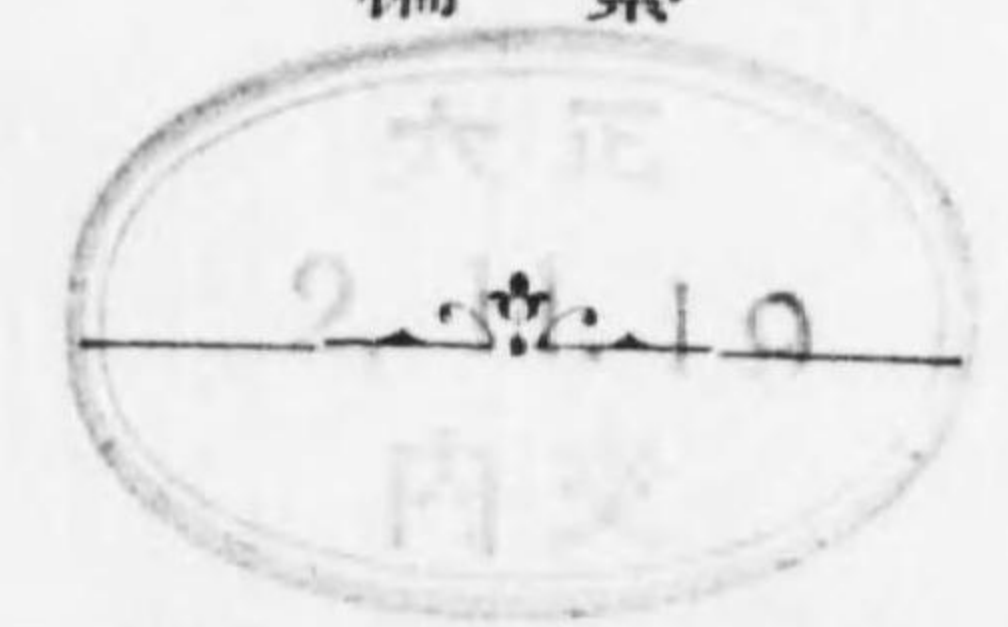
# 數學教科書

平面三角法之部



東京高等師範學校教授  
理學士

國枝元治  
編纂



寶文館藏版  
東京 \* 大阪

## 序

余曩ニ中學教育數學教科書ノ編纂ヲ企圖スルヤ、各學年用トシテハ各一冊宛ノ書籍トシ、第一學年用ニ於テハ算術、第二學年用ニ於テハ代數學、第三學年及第四學年用ニ於テハ各冊中ニ代數學ト幾何學トヲ包含セシメ、第五學年用ニ於テハ代數學、幾何學及三角法ヲ一冊ノ中ニ收ムルコトノ計畫ヲ立テ、本秋ニ至リ漸ク其ノ編纂ヲ完了シタリ。然ルニ現今ノ時勢尙從來世ニ行ハルル教科書ノ如キ學科別ノモノヲ便利トスルモノ亦尠カラズトノ理由ノ下ニ此種ノ教科書ヲモ編纂セシコトノ要求ニ接スルコト頻ナリ。茲ニ於テ上記學年別ノモノヲ算術、代數學、幾何學及三角法ノ四部ニ分チ茲ニ各學年別ノ教科書ヲモ併セテ編纂スルコトトシタルナリ。

本書ハ斯ノ如キ成行ノ下ニ出來シタル學科別トシテノ平面三角法教科書ニシテ其ノ内容タルヤ附録ヲ少シク變更シタル以外ニ於テハ學年別ノ教科書ニ於ケルモノト全然同様ナリ。即チ本書ハ中學校第五學年ニ於ケル三角法ノ教科書ニ

充ツルモノニシテ固ヨリ文部省令中學校教授要目ニ準ヒテ編纂セルナリ。

本書ハ全般ニ亘リ成ベク簡單ナランコトヲ期シタリ。且中學校ニ於ケル本學科ヲ課スルノ趣旨ニヨリ對數的計算及測量上ノ應用等ニハ比較的詳説ヲ試ミタリ。偕中學校ニ於ケル對數計算ニハ四桁ノ對數表ニテ足レリト信ズルヲ以テ代數學之部ニ於ケルト同様ニ全部四桁ノ對數ヲ用ヒ、且本教科書使用者ノ便ヲ圖リ卷末ニ數及三角函數ノ四桁ノ對數表及三角函數ノ眞數表ヲ附シ置キタリ。

又附録トシテ補充問題及復習雜問題等ヲ掲載セリ。復習雜問題ニハ所謂生徒ノ「力試シ」トモナリ、且復習用トシテ極メテ恰好ナリト信ズルヲ以テ諸官立學校入學試驗問題ヲ集メ置キタリ。

本書ヲ編纂スルニ當リ東京高等師範學校附屬中學校助教諭山内鶯君ノ勞ヲ煩シタルトコロ尠カラズ。茲ニ同君ニ對シ謝意ヲ表ス。

大正二年十月

編 者 識

## 目 次

	頁 數
第一編 銳角ノ三角函數 …… …… ……	(1—30)
第一章 銳角ノ三角函數 …… …… ……	1
第二章 三角函數ノ關係 …… …… ……	6
第三章 三角函數ノ値 …… …… ……	13
第四章 直角三角形ノ解法 …… …… ……	22
第五章 直角三角形ノ應用 …… …… ……	25
第二編 任意ノ角ノ三角函數 …… …… ……	(31—57)
第一章 任意ノ角ノ三角函數 …… …… ……	31
第二章 二角ノ和及差ノ三角函數 …… ……	46
第三章 倍角及半角ノ三角函數 …… ……	50
第四章 正弦及餘弦ノ和ト積 …… …… ……	54
第三編 對數 …… …… …… …… ……	(58—65)
第一章 對數ノ性質 …… …… …… ……	58
第二章 三角函數ノ對數 …… …… ……	59
第四編 任意ノ三角形 …… …… …… ……	(66—92)
第一章 三角形ノ性質 …… …… …… ……	66

	頁 數
第二章 斜角三角形ノ解法... ..	74
第三章 測量上ノ應用... ..	83
附 錄 ... ..	(1—21)
I. 補充問題 ... ..	1
II. 弧度法 ... ..	12
III. 三角方程式... ..	14
IV. 希臘文字 ... ..	21
復習雜問題 ... ..	(1—16)
答 ... ..	(1—6)
公 式 ... ..	(1—8)
附 表 ... ..	(1—14)

中 學 教 育

## 數 學 教 科 書

第 五 學 年 用

(平面三角法)

## 第一編 銳角ノ三角函數

## 第一章 銳角ノ三角函數

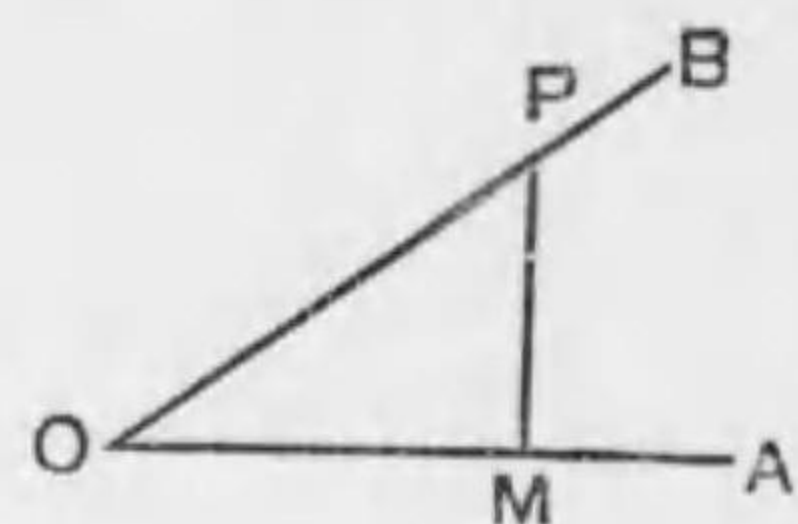
1. 角ノ單位. 實用上ニハ角ヲ測ルトキ通常所謂六十分法ノ單位即チ幾何學ニ於テ既ニ學ベル度,分,秒ヲ用フ. 其ノ關係ヲ再記スレバ

直角=90度, 1度=60分, 1分=60秒

ニシテ,又度,分,秒ヲ表スニ夫夫( $^{\circ}$ ), ( $'$ ), ( $''$ )ヲ用フルコトモ既ニ知レルガ如シ.

2. 定義. 任意ノ銳角 AOB ノ一邊例ヘバ

OB 上ノ任意ノ一點 P ヨ  
 リ他ノ邊 OA = 垂線 PM ヲ  
 下シ、此垂線ノ足ヲ M トス  
 レバ  $\angle M$  ヲ直角トスル直



角三角形 POM ヲ生ズ。此角 AOB ヲ  $\alpha$  ニテ表シ、此  
 直角三角形ノ斜邊 OP、角  $\alpha$  = 對スル邊(垂線) PM  
 及他ノ邊(底邊) OM ノ中ニツ宛取リテ作レル六ツ  
 ノ比ニ次ノ名稱ヲ附ス。

(一) 垂線 PM ノ斜邊 OP = 對スル比  
 ヲ角  $\alpha$  ノ**正弦**ト云ヒ、之ヲ  $\sin \alpha$  ト記ス。

(二) 底邊 OM ノ斜邊 OP = 對スル比  
 ヲ角  $\alpha$  ノ**餘弦**ト云ヒ、之ヲ  $\cos \alpha$  ト記ス。

(三) 垂線 PM ノ底邊 OM = 對スル比  
 ヲ角  $\alpha$  ノ**正切**ト云ヒ、之ヲ  $\tan \alpha$  ト記ス。

(四) 底邊 OM ノ垂線 PM = 對スル比  
 ヲ角  $\alpha$  ノ**餘切**ト云ヒ、之ヲ  $\cot \alpha$  ト記ス。

(五) 斜邊 OP ノ底邊 OM = 對スル比  
 ヲ角  $\alpha$  ノ**正割**ト云ヒ、之ヲ  $\sec \alpha$  ト記ス。

(六) 斜邊 OP ノ垂線 PM = 對スル比  
 ヲ角  $\alpha$  ノ**餘割**ト云ヒ、之ヲ  $\operatorname{cosec} \alpha$  ト記ス。  
 即チ次ノ如シ。

$$\sin \alpha = \frac{PM}{OP}, \quad \cos \alpha = \frac{OM}{OP},$$

$$\tan \alpha = \frac{PM}{OM}, \quad \cot \alpha = \frac{OM}{PM},$$

$$\sec \alpha = \frac{OP}{OM}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{OP}{PM}.$$

注意。上記ノ比トハ比ノ値ノコトナリ。從テ  
 一ツノ角ノ正弦、餘弦等ハ何レモ皆不名數ナリ。

又正弦、餘弦、正切、餘切、正割、餘割ヲ英語ニテハ夫  
 夫 sine, cosine, tangent, cotangent, secant, cosecant ト云  
 フ。

3. 定義。一ツノ角ノ正弦、餘弦、正切、  
 餘切、正割、餘割ヲ總稱シテ其角ノ**三角  
 函數**ト云フ。

三角函數ヲ**圓函數**又ハ**三角比**トモ云フ。

4. 定義。三角法ハ三角函數ノ性質  
 ト主トシテ其ノ三角形ノ解法ニ於ケ



ル應用トヲ攻究スル學問ナリ。

**注意.** 三角形ノ解法トハ三角形ノ邊ト角トノ或モノヲ知リテ他ノモノヲ求ムルコトニシテ後章ニ詳カナリ。又平面三角形ニ關スルモノヲ平面三角法、球面三角形ニ關スルモノヲ球面三角法ト云フ。本書ニ論ズルハ平面三角法ナリ。

**5. 定理一.** 銳角ノ正弦及餘弦ハ1ヨリモ小ニシテ、正切及餘切ハ如何ナル値ヲモ取り得ベク、正割及餘割ハ1ヨリモ大ナリ。

**證明** 直角三角形ノ性質ニヨリ容易ニ證明スルコトヲ得ベシ。

**注意.** 銳角ノ三角函數ノ値ハ皆正數ナリ。

**6. 定理二.** 角ガ一定ナルトキハ其ノ三角函數ノ値モ亦夫夫一定ナリ。

**假設**  $\alpha$ ヲ一定ナル角トセヨ。

**終結** 然ルトキハ  $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha, \sec \alpha, \operatorname{cosec} \alpha$ ノ値ハ夫夫一定ナルベシ。

**證明** 角 $\alpha$ ノ邊ノ上ニ任意ニ點P, P', P''ヲ取リ,

之ヨリ他ノ邊ニ垂線

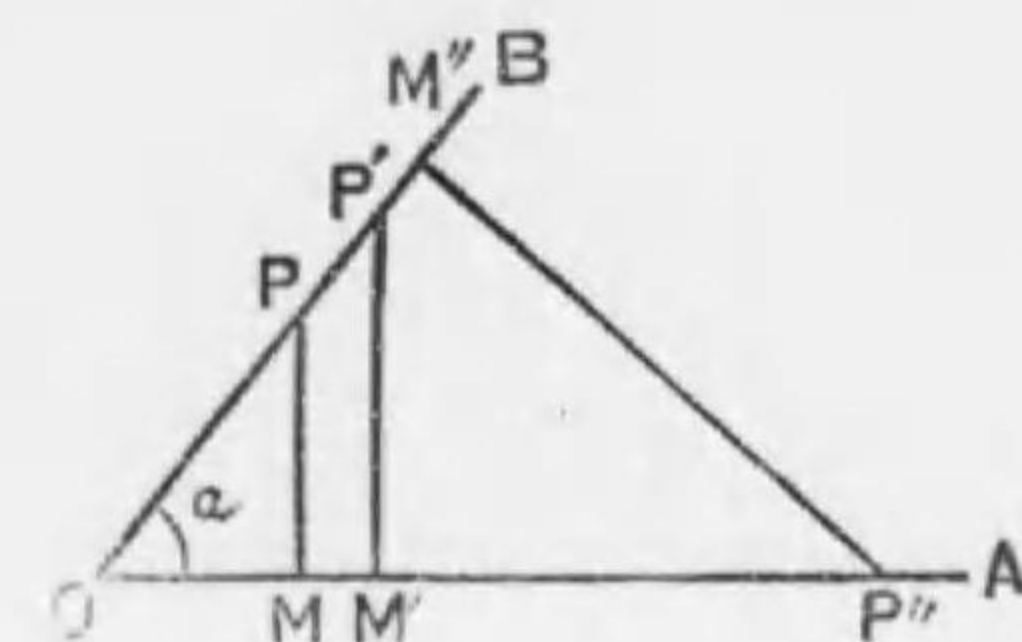
PM, P'M', P''M''ヲ下セ。

然ルトキハ直角三角

形POM, P'OM', P''OM''

ハ何レモ互ニ相似ナ

リ。



$$\therefore \frac{PM}{OP} = \frac{P'M'}{OP'} = \frac{P''M''}{OP''}.$$

即チ  $\sin \alpha$ ハ點Pノ取リ方ノ如何ニ拘ラズ一定ナリ。

同理ニヨリ  $\cos \alpha, \tan \alpha$ 等モ亦夫夫一定ナリ。

### 問題一

1. 直角三角形ノ三邊ノ長サガ夫夫3尺, 4尺, 5尺ナルトキ, 3尺ノ邊ニ對スル角ノ總テノ三角函數ヲ求ム。

2.  $\triangle ABC$ ニ於テ  $\angle C = 90^\circ$ , 邊AC, BCガ夫夫8尺, 15尺ナルトキ  $\sin A, \cos A, \tan A$ ヲ求ム。

3. 斜邊ガ13米, 他ノ一邊ガ6米ナル直角三角形ニ於テ6米ノ邊ニ對スル角ノ正弦, 餘弦及正切ヲ求ム。

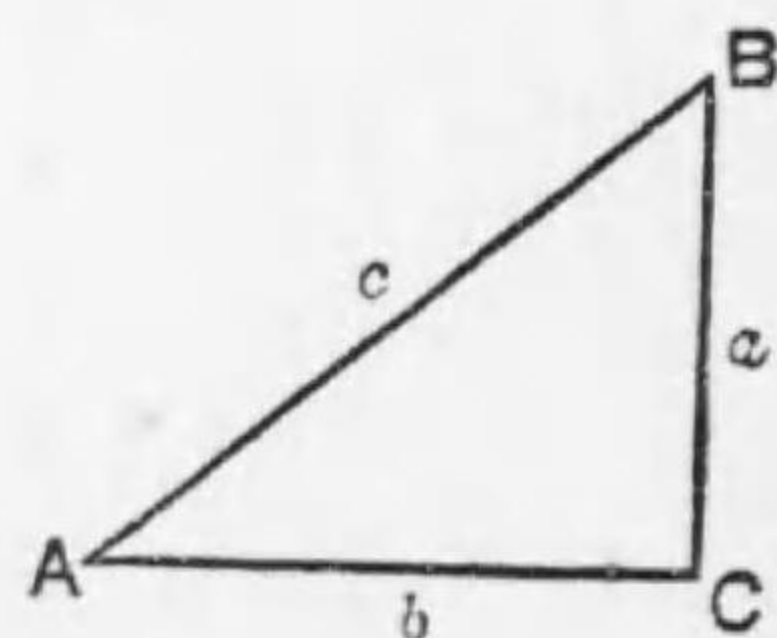
4.  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  ナルトキ角  $\alpha$  ヲ作圖セヨ.

5.  $\tan \alpha = \frac{7}{4}$  ナルトキ角  $\alpha$  ヲ作圖シ, 且  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  ヲ見出セ.

第二章 三角函數ノ關係

7. 定理三. 一ツノ角ノ餘割, 正割, 餘切ハ夫夫其角ノ正弦, 餘弦, 正切ノ逆數ナリ. (逆數關係)

證明 角 A ヲ一ツノ銳角トスル直角三角形 ABC = 於テ角 A, B, C = 對スル邊ヲ夫夫 a, b, c ニテ表シ, 且角 C ヲ直角トスレバ



$$\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a} = \frac{1}{\frac{a}{c}}, \text{ 且 } \sin A = \frac{a}{c},$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore \operatorname{cosec} A &= \frac{1}{\sin A} \\ \text{同様ニシテ} \\ \sec A &= \frac{1}{\cos A}, \cot A = \frac{1}{\tan A} \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{系. } \sin A \operatorname{cosec} A &= 1 \\ \cos A \sec A &= 1 \\ \tan A \cot A &= 1 \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

8. 定理四. 一ツノ角ノ正切ハ其角ノ正弦ノ餘弦 = 對スル比 = 等シ.

證明  $\tan A = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$  (前圖參照)

且  $\sin A = \frac{a}{c}, \cos A = \frac{b}{c},$

$$\therefore \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \dots (3)$$

系.  $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} \dots (4)$

9. 定理五. 一ツノ角ノ正弦ト餘弦トノ平方ノ和ハ 1 = 等シ. (平方關係)

證明  $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2},$

然ルニ  $a^2 + b^2 = c^2, \therefore \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1,$

$$\therefore (\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1.$$

此等式ヲ通常次ノ如ク書キ表ス.

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \dots\dots (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{系. } 1 + \tan^2 A = \sec^2 A \\ 1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A \end{array} \right\} \dots\dots (6)$$

注意.  $(\sin A)^n, (\cos A)^n, (\tan A)^n, \dots$  ヲ通常夫夫  $\sin^n A, \cos^n A, \tan^n A, \dots$  ト記ス.

10. 問題. 三角函數ノ一ツヲ知リテ他ノ三角函數ヲ求ムルコト.

例ヘバ  $\sin A$  ヲ知リテ他ノ三角函數ヲ求ムル方法ハ次ノ如シ.

$$\text{公式 (5) } \Rightarrow \cos^2 A = 1 - \sin^2 A,$$

$$\therefore \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}.$$

從テ公式 (3), (4), (1)  $\Rightarrow$  ヲ

$$\tan A = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}, \quad \cot A = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 A}}{\sin A},$$

$$\sec A = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}, \quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}.$$

又  $\tan A$  ヲ知ルトキハ次ノ如シ.

$$\text{公式 (6) } \Rightarrow \sec A = \sqrt{1 + \tan^2 A},$$

$$\text{從テ } \cos A = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 A}},$$

又 (3)  $\Rightarrow$  ヲ  $\sin A = \tan A \cos A$  ナルヲ以テ

$$\sin A = \frac{\tan A}{\sqrt{1 + \tan^2 A}}, \quad \operatorname{cosec} A = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 A}}{\tan A},$$

$$\text{又 } \cot A = \frac{1}{\tan A}.$$

他ノ三角函數ガ與ヘラルルトキモ亦同様ナリ.

例 1.  $\sin A = \frac{3}{7}$  ナルトキ  $\tan A$  ヲ求ム.

$$\text{解 } \tan A = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}} = \frac{\frac{3}{7}}{\sqrt{1 - \frac{9}{49}}} = \frac{3}{\sqrt{40}} \quad \text{答.}$$

例 2.  $\tan A = 4$  ナルトキ  $\sec A$  及  $\operatorname{cosec} A$  ヲ求ム.

$$\left. \begin{array}{l} \text{解 } \sec A = \sqrt{1 + \tan^2 A} = \sqrt{1 + 4^2} = \sqrt{17} \\ \operatorname{cosec} A = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 A}}{\tan A} = \frac{\sqrt{1 + 4^2}}{4} = \frac{\sqrt{17}}{4} \end{array} \right\} \text{答.}$$

例 3.  $\cos A = m$  ナルトキ  $\sin A$  及  $\tan A$  ヲ求ム.

解 公式 (5)  $\Rightarrow$  ヲ  $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A,$

$$\therefore \sin^2 A = 1 - m^2, \quad \therefore \sin A = \sqrt{1 - m^2}$$

$$\text{又公式 (3) } \Rightarrow \text{ ヲ } \tan A = \frac{\sqrt{1 - m^2}}{m} \quad \text{答.}$$

## 問題 二

1.  $\sin A = \frac{2}{5}$  ナルトキ  $\cos A, \tan A$  ヲ求ム.

2.  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$  ナルトキ  $\sin \alpha, \cos \alpha, \sec \alpha$  ヲ求ム.

3.  $\cos A$  ヲ知リテ  $\tan A, \operatorname{cosec} A$  ヲ求ム.

4.  $\sec A = a$  ナルトキ次ノ等式ヲ證明セヨ.

$$(一) \sin A = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a} \quad (二) \tan A = \sqrt{a^2-1}.$$

5. 次ノ等式ヲ證明セヨ.

$$(一) \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 \alpha}} \quad (二) \cos \alpha = \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1+\cot^2 \alpha}}.$$

6.  $\cot \alpha = \sqrt{3}$  ナルトキ  $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$  ヲ求ム.

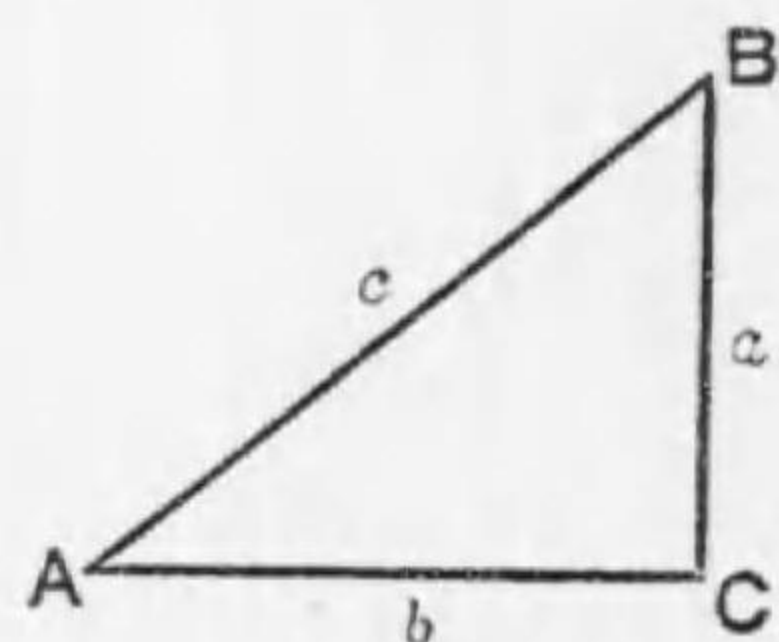
11. 餘角ノ三角函數. 三角形 ABC = 於

テ角 C ヲ  $90^\circ$  トスレバ角 B

ハ角 A ノ餘角ニシテ

$B = 90^\circ - A$  ナリ. 而シテ

$$\sin B = \frac{b}{c} = \cos A,$$



$$\left. \begin{aligned} \therefore \sin(90^\circ - A) &= \cos A \\ \text{同様ニシテ } \cos(90^\circ - A) &= \sin A \\ \tan(90^\circ - A) &= \cot A \\ \cot(90^\circ - A) &= \tan A \\ \sec(90^\circ - A) &= \operatorname{cosec} A \\ \operatorname{cosec}(90^\circ - A) &= \sec A \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

注意. 此六等式ノ後ノ四ツハ前ノ二ツヨリ誘導スルコトヲ得ベシ.

例.  $\cos \alpha = \sin 38^\circ$  ナルトキ角  $\alpha$  ヲ求ム.

解  $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha), \therefore \sin(90^\circ - \alpha) = \sin 38^\circ,$

$$\therefore 90^\circ - \alpha = 38^\circ,$$

之ヨリ  $\alpha = 90^\circ - 38^\circ = 52^\circ$  答.

12. 恒等式ノ證明. 次ニ三角函數ヲ含ム恒等式ノ證明ヲ例示セン.

例1.  $\sin^4 A - \cos^4 A = \sin^2 A - \cos^2 A$  ヲ證明セヨ.

證明  $\sin^4 A - \cos^4 A = (\sin^2 A + \cos^2 A)(\sin^2 A - \cos^2 A),$

然ルニ  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1,$

$$\therefore \sin^4 A - \cos^4 A = \sin^2 A - \cos^2 A.$$

例2.  $(1 + \tan A)(1 + \cot A) = \frac{(\sin A + \cos A)^2}{\sin A \cos A}$  ヲ證明セ

ヨ.

證明  $(1 + \tan A)(1 + \cot A) = 1 + \tan A + \cot A + \tan A \cot A$

$$= 1 + \tan A + \cot A + 1$$

$$= \tan A + \cot A + 2,$$

$$\frac{(\sin A + \cos A)^2}{\sin A \cos A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A + 2 \sin A \cos A}{\sin A \cos A}$$

$$= \frac{\sin^2 A}{\sin A \cos A} + \frac{\cos^2 A}{\sin A \cos A} + \frac{2 \sin A \cos A}{\sin A \cos A}$$

$$= \tan A + \cot A + 2,$$

$$\therefore (1 + \tan A)(1 + \cot A) = \frac{(\sin A + \cos A)^2}{\sin A \cos A}.$$

例 3.  $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$  ヲ證明セヨ.

解 公式(5)ニヨリ  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

$$= (1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha),$$

兩邊ヲ  $\sin \alpha (1 + \cos \alpha)$  ニテ除スレバ

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

### 問題 三

1. 次ノ等式ヨリ角  $\alpha$  ヲ求メヨ.

(一)  $\sin \alpha = \cos 30^\circ$ . (二)  $\tan \alpha = \cot 75^\circ 12'$ .

次ノ等式ヲ證明セヨ.

2.  $\cot A \sin A = \cos A$ . 3.  $\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A} + \frac{1}{\sec^2 A} = 1$ .

4.  $\cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1$ .

5.  $1 + 2 \sin A \cos A = (\sin A + \cos A)^2$ .

6.  $\sin A (\tan A + \cot A) = \sec A$ .

7.  $\tan A + \tan(90^\circ - A) = \sec A \sec(90^\circ - A)$ .

8.  $\sin^3 A + \cos^3 A = (\sin A + \cos A)(1 - \sin A \cos A)$ .

9.  $(\tan A - 1)^2 + (1 - \cot A)^2 = (\sec A - \operatorname{cosec} A)^2$ .

10.  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ .

11.  $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ .

12.  $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} = \tan \alpha \tan \beta$ .

13.  $\frac{\operatorname{cosec} \alpha + \cot \alpha}{\sec \alpha + \tan \alpha} = \frac{\sec \alpha - \tan \alpha}{\operatorname{cosec} \alpha - \cot \alpha}$ .

14.  $(\sec \alpha - \tan \alpha)^2 = \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$ .

15.  $\frac{\tan^3 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{\cot^3 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$ .

16.  $\sin^4 \alpha + (\cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha) \cos^2 \alpha$  ノ値ハ  $\alpha$  ノ値ノ如何ニ拘ラズ一定ナリ. 之ヲ證明セヨ.

### 第三章 三角函數ノ値

13. 定理六. 角ガ増大スルニ從テ其角ノ正弦及正切ハ漸次増大シ, 其角ノ餘弦ハ漸次減小ス.

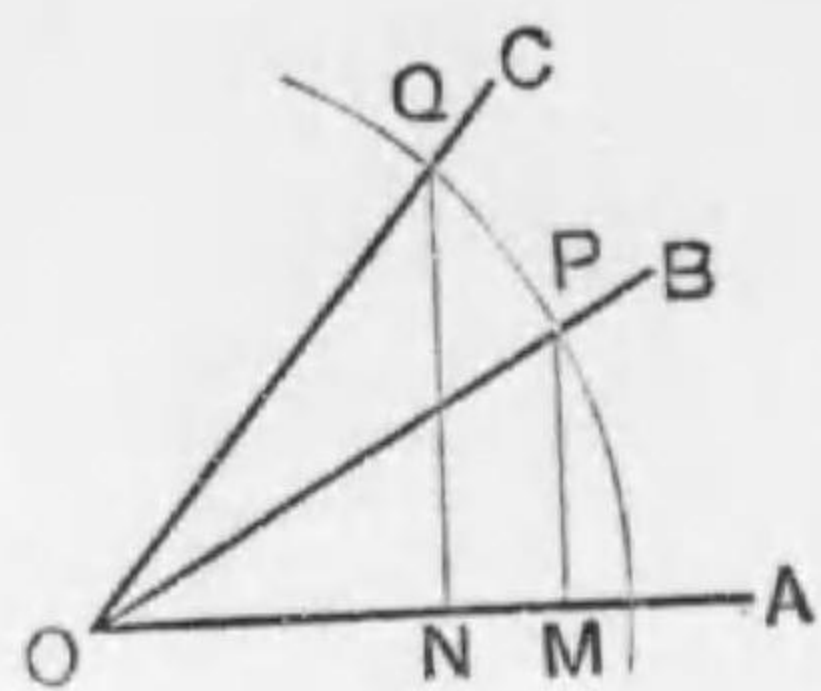
假設 角  $\beta$  ガ角  $\alpha$  ヲモ大ナリトセヨ.

終結 然ルトキハ

$$\sin \beta > \sin \alpha, \quad \cos \beta < \cos \alpha, \quad \tan \beta > \tan \alpha$$

ナルベシ。

證明 圖ニ於テ  $\angle AOB = \alpha$ ,  $\angle AOC = \beta$  トシ,  $O$  ヲ中心トスル一ツノ圓ヲ畫キ,  $OB, OC$  トノ交點ヲ夫夫  $P, Q$  トシ, 此二點ヨリ  $OA$  ニ垂線  $PM, QN$  ヲ下セ.



然ルトキハ

$$\sin \alpha = \frac{PM}{OP}, \quad \sin \beta = \frac{QN}{OQ}, \quad \cos \alpha = \frac{OM}{OP}, \quad \cos \beta = \frac{ON}{OQ}$$

然ルニ  $OP = OQ$ , 且  $QN > PM$ ,  $ON < OM$ ,

$$\therefore \frac{QN}{OQ} > \frac{PM}{OP}, \quad \frac{ON}{OQ} < \frac{OM}{OP},$$

$$\therefore \sin \beta > \sin \alpha, \quad \cos \beta < \cos \alpha.$$

次ニ  $OB$  上ノ點  $P$  ヨリ  $OA$  ニ下セル垂線  $PM$  ノ延長ガ  $OC$  ト交ル點ヲ  $Q$  トセヨ. 然ルトキハ

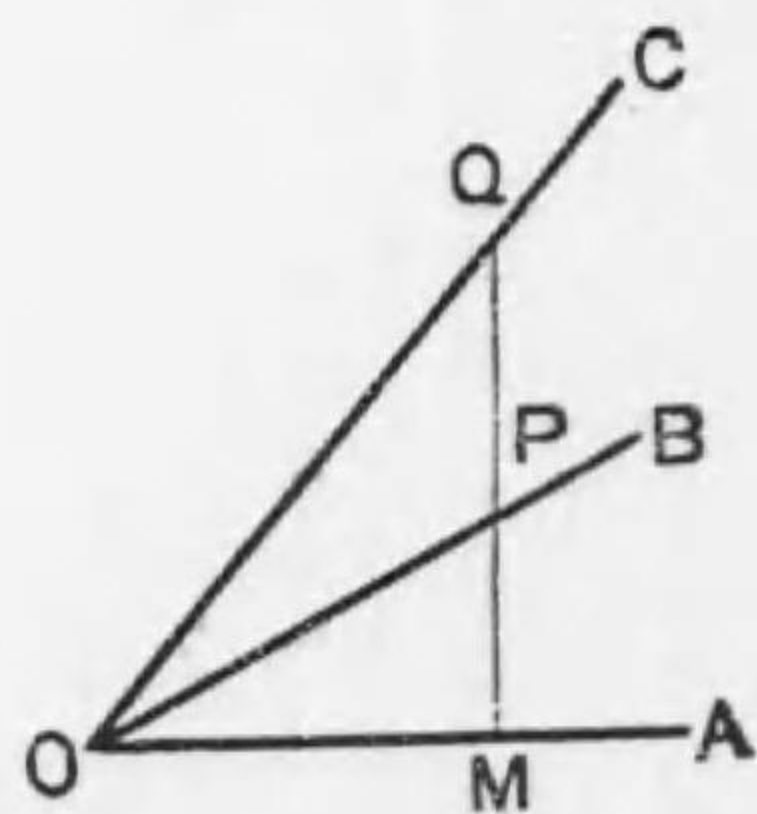
$$\tan \alpha = \frac{PM}{OM}, \quad \tan \beta = \frac{QM}{OM},$$

然ルニ  $QM > PM$ ,

$$\therefore \frac{QM}{OM} > \frac{PM}{OM},$$

$$\therefore \tan \beta > \tan \alpha.$$

系. 角ガ増大スルニ從

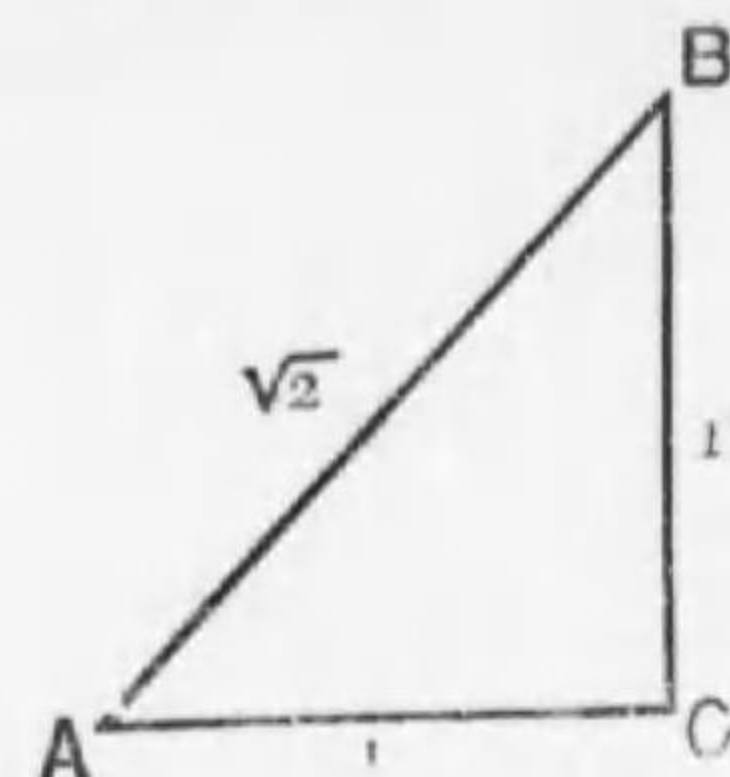


テ其角ノ正割ハ漸次増大シ, 其角ノ餘切及餘割ハ漸次減小ス.

14.  $45^\circ$  ノ三角函數. 直角三角形  $ABC$  ニ於テ  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = BC = 1$  トスレバ  $\angle A = \angle B = 45^\circ$ , 且  $AB = \sqrt{2}$  ナリ.

$$\therefore \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ,$$

$$\tan 45^\circ = 1 = \cot 45^\circ.$$



15.  $30^\circ$  及  $60^\circ$  ノ三角函數. 正三角形  $ABC$  ノ頂點  $A$  ヨリ邊  $BC$  ニ

垂線  $AD$  ヲ下セバ直角三

角形  $ABD$  ニ於テ

$$\angle ABD = 60^\circ, \quad \angle BAD = 30^\circ$$

ナリ. 今  $BD = 1$  トスレバ

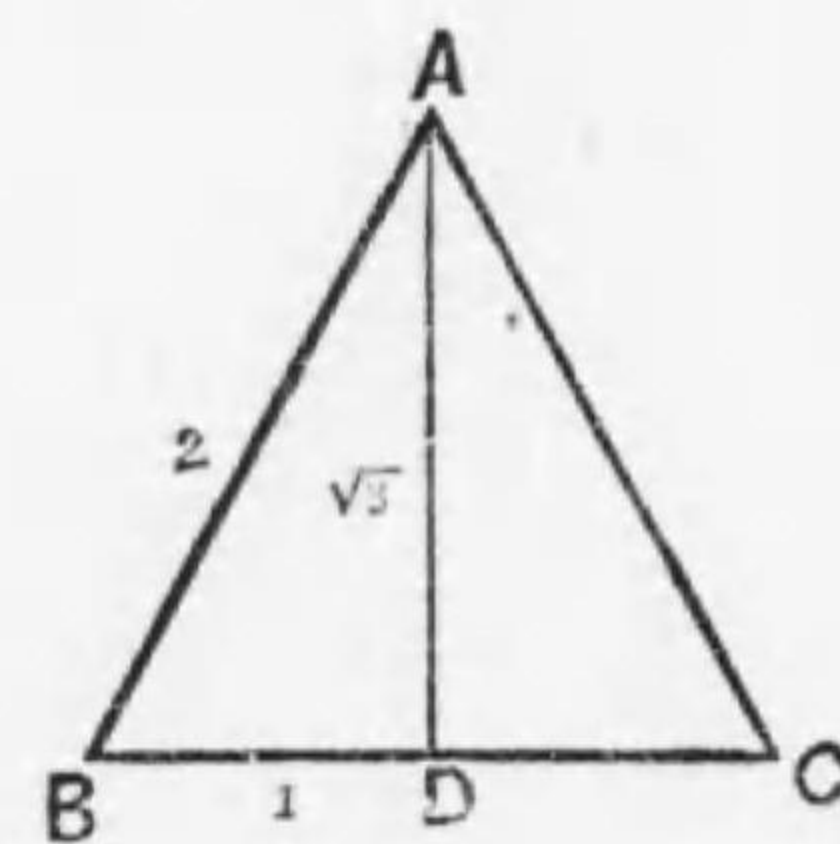
明ニ  $AB = 2$ ,  $AD = \sqrt{3}$  ナ

リ.

$$\therefore \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ,$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} = \cot 30^\circ, \quad \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ,$$

$$\sec 60^\circ = 2 = \operatorname{cosec} 30^\circ, \quad \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sec 30^\circ.$$



16.  $0^\circ$  及  $90^\circ$  ノ三角函數.

角 AOB ヲ  $\alpha$  トシ, P ヲ其ノ邊 OB 上ノ任意ノ定點トシ, 邊 OA ノ位置ヲ固定シ OB ヲ O ノ

周リニ廻轉セシメヨ. 然ル

トキハ角  $\alpha$  ガ限ナク小トナ

ルニ從テ垂線 PM ノ長サモ

亦限ナク小トナリ, 底邊 OM ノ長サハ限ナク OP ニ

接近ス, 從テ  $\sin \alpha$  ハ限ナク零ニ接近シ, 又  $\cos \alpha$  ハ限

ナク 1 ニ接近ス. 故ニ極限ニ於テ

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \cos 0^\circ = 1.$$

從テ  $\tan 0^\circ = 0.$

又角  $\alpha$  ガ限ナク小トナルニ從テ  $\tan \alpha$  ノ逆數即チ  $\cot \alpha$  ハ限ナク大トナル. 此事柄ヲ

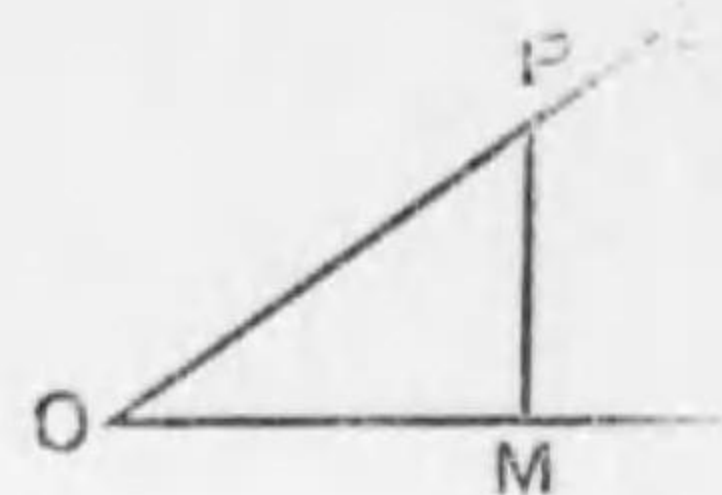
$$\cot 0^\circ = \infty$$

ニテ表ス.

同様ニ  $\sec 0^\circ = 1, \quad \operatorname{cosec} 0^\circ = \infty.$

次ニ OB ガ廻轉シテ銳角  $\alpha$  ガ次第ニ増大シ, 限ナク  $90^\circ$  ニ接近スルトキハ PM ハ限ナク PO ニ接近シ, OM ハ限ナク小トナル. 故ニ極限ニ於テ

$$\sin 90^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0.$$



又  $\alpha$  ガ限ナク  $90^\circ$  ニ接近スルニ從テ  $\tan \alpha$  ハ限ナク大トナル. 故ニ此事柄ヲ

$$\tan 90^\circ = \infty$$

ニテ表ス.

同様ニ  $\cot 90^\circ = 0, \quad \sec 90^\circ = \infty, \quad \operatorname{cosec} 90^\circ = 1.$

注意. 餘角ノ三角函數ノ公式ヲ應用スレバ  $0^\circ$  ノ三角函數ノ値ヨリ  $90^\circ$  ノ三角函數ノ値ヲ推知スルコトヲ得ベシ.

17. 以上ノ諸節ニ於テ見出シタル特別ナル角ノ三角函數ノ値ヲ表ニ掲グレバ次ノ如シ.

角 函 數	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$
cot	$\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	$\infty$
cosec	$\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

## 問題四

次ノ式ノ値ヲ求ム。

1.  $\sin 30^\circ + \cos 45^\circ - 1$ .    2.  $\cot^2 30^\circ \operatorname{cosec}^2 45^\circ - \tan^2 60^\circ$ .  
 3.  $(\sin 30^\circ + \sin 90^\circ)(\cos 0^\circ + \cos 60^\circ) - 4 \sin 0^\circ (\cos 45^\circ + 1)$ .

次ノ方程式ヲ満足スル角  $x$  ヲ求ム。

4.  $\sin x = \cos 2x$ .    5.  $\tan(30^\circ - x) = \tan 4x$ .  
 6.  $2 \sin x = \operatorname{cosec} x$ .    7.  $\cot x = 2 \cos x$ .  
 8.  $\tan x + \cot x = 2$ .    9.  $\sin x + \cos x = 1$ .  
 10.  $2 \sin^2 x = 3 \cos x$ .    11.  $\sin x + 2 \cos^2 x = 2$ .

次ノ聯立方程式ヲ満足スル角  $x, y$  ヲ求ム。

12.  $\sin(x-y) = \frac{1}{2}$ ,  $x+y = 90^\circ$ .  
 13.  $\sin(x-y) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\cos(x+y) = \frac{1}{2}$ .  
 14.  $\tan(x-y) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\tan(x+y) = \sqrt{3}$ .

**18. 三角函數ノ眞數表.** 任意ノ銳角ノ三角函數ノ値ヲ計算スルニハ特別ナル場合ノ他ハ一般ニ高尙ナル方法ニ依ラザルベカラズ。故ニ茲ニハ學者ノ計算シ置ケルモノヲ使用スルコトトスベシ。

$0^\circ$  ヨリ  $90^\circ$  迄ノ角ヲ或一定ノ差ヲ保チテ配列

シ(例ヘバ  $10'$  オキニ), 其各ノ角ノ三角函數ヲ或一定ノ小數位迄計算シタル近似値ヲ掲載セル表ヲ三角函數ノ眞數表ト云フ。本書ノ卷末ニ附セルハ小數第四位迄探リタル三角函數ノ眞數表ナリ。次ニ此表ノ使用法ヲ例示セン。

例 1.  $\sin 25^\circ 40'$  ヲ求ム。

解 表ノ上端  $\sin$  トアル欄ニ於テ左端ノ角ノ欄中ノ  $25^\circ 40'$  ト同ジ列ニアル數ヲ取レバ

$$\sin 25^\circ 40' = 0.4331 \quad \text{答.}$$

例 2.  $\tan 68^\circ 10'$  ヲ求ム。

解 表ノ下端  $\tan$  トアル欄ニ於テ右端ノ角ノ欄中ノ  $68^\circ 10'$  ト同ジ列ニアル數ヲ取レバ

$$\tan 68^\circ 10' = 2.4960 \quad \text{答.}$$

例 3.  $\sin 35^\circ 47'$  ヲ求ム。

解 表ニハ丁度  $35^\circ 47'$  ノ三角函數ヲ掲載セズ。斯ノ如キ場合ニハ對數表ニヨリ數ノ對數ヲ計算スルトキノ如クスベシ。即チ與角ヲ間ニ挟ムニツノ角ノ三角函數ノ差(表差ト云フ)ヲ求メ、與角ト此二角ノ小ナル方トノ差ニ對スル三角函數ノ値ノ差ヲ比例ニヨリテ見出シ、之ヲ其小ナル方ノ角



ノ三角函數ノ値ニ加へ或ハ之ヨリ減ズベシ。

此例題ノ解ハ次ノ如シ。

$\sin 35^\circ 40' = 0.5831$	差	表差ハ 0.0023 ナリ。
	0.0023	
$\sin 35^\circ 50' = 0.5854$		又正弦ハ角ガ増ス
		ニ從テ共ニ増スモ
$10' : 7' = 0.0023 : x$		ノナルヲ以テ角ノ
$x = \frac{0.0023 \times 7}{10} = 0.0016$		差 7' ニ對スル差ヲ
$\sin 35^\circ 40' = 0.5831$		$\sin 35^\circ 40' =$ 加ヘタ
0.0016		ルナリ。
$\sin 35^\circ 47' = 0.5847$	答.	

例 4.  $\cos 57^\circ 24'.5$  ヲ求ム。

$\cos 57^\circ 20' = 0.5398$	差	解 表差ハ 0.0025
	0.0025	ナリ。又餘弦ハ角
$\cos 57^\circ 30' = 0.5373$		ガ増スニ從テ却テ
		減小スルモノナル
$\cos 57^\circ 20' = 0.5398$		ヲ以テ角ノ差 4'.5 =
$\frac{0.0025 \times 4.5}{10} = 0.0011$		對スル差ヲ $\cos 57^\circ 20'$
$\cos 57^\circ 24'.5 = 0.5387$	答.	

ヨリ減ジタルナリ。

注意. 他ノ三角函數ノ値ヲ見出ス方法モ亦同様ナリ。但角ノ増大スルニ從テ正弦, 正切等ハ増大シ, 餘弦, 餘切等ハ減小スルコトニ注意スベシ。

例 5.  $\tan x = 0.2931$  = 適合スル角  $x$  ヲ求ム。

解 表ノ  $\tan$  ノ欄内ヲ見テ直チニ

$$x = 16^\circ 20' \text{ 答.}$$

例 6.  $\sin x = 0.6875$  = 適合スル角  $x$  ヲ求ム。

解 表ニハ正弦ガ 0.6875 ナル角ハ掲載シアラズ。故ニ此値ヲ間ニ挟ムニツノ正弦ヲ求メテ  $x$

	差	ハ $43^\circ 20' = 10'$ ヨ
$\sin 43^\circ 20' = 0.6862$		リモ小ナル或角ヲ
	0.0022	加ヘタルモノナル
$\sin 43^\circ 30' = 0.6884$		コトヲ知り, 茲ニ示
$0.6875 - 0.6862 = 0.0013$		ス如ク計算セルナ
$\frac{0.0013 \times 10}{0.0022} = \frac{13 \times 10}{22} = 5.9$		リ。
$x = 43^\circ 20' + 5.9 = 43^\circ 25'.9$	答.	

## 問 題 五

表ヲ用ヒテ次ノ三角函數ノ値及角  $x$  ヲ求ム。

1.  $\sin 30^\circ 24'.$       2.  $\tan 68^\circ 20'.$       3.  $\cos 18^\circ 51'.$
4.  $\cot 52^\circ 40'.$       5.  $\tan 65^\circ 58'.$       6.  $\cot 23^\circ 44'.$
7.  $\sin x = 0.6352.$       8.  $\cos x = 0.4859.$
9.  $\tan x = 0.8956.$       10.  $\cot x = 1.0248.$

## 第四章 直角三角形ノ解法

19. 定義. 三角形ノ三ツノ角及三ツノ邊ヲ其ノ六原素ト云フ. 六原素中ノ或三ツヲ知リテ他ノ三ツヲ求ムルコトヲ三角形ヲ解クト云ヒ, 其方法ヲ三角形ノ解法ト云フ.

直角三角形ニ於テハ一ツノ角ハ直角ナルヲ以テ他ノ二原素ヲ知ルコトニヨリ之ヲ解キ得ベシ. 但二ツノ銳角ヲ知ルダケニテハ三邊ノ長ヲ求ムルコトヲ得ズ.

通常三角形ABCニ於テハA, B, Cヲ以テ其ノ三ツノ角ヲ表シ,  $a, b, c$ ヲ以テ夫夫此三ツノ角ニ對スル邊ヲ表スモノトス.

本章ニ於テハ直角三角形ABCニ於テCヲ直角トス. 從テ $c$ ハ斜邊,  $a, b$ ハ夫夫銳角A, Bニ對スル邊ナリ.

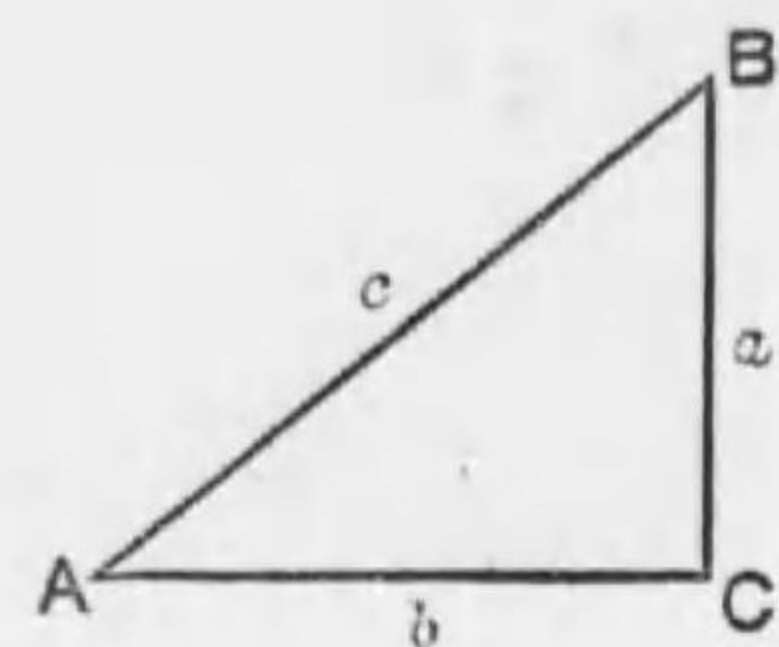
20. 第一ノ場合. 斜邊 $c$ 及一銳角Aヲ知リテ直角三角形ヲ解クコト.

解  $\sin A = \frac{a}{c}, \cos A = \frac{b}{c},$

$\therefore a = c \sin A,$

$b = c \cos A,$

$B = 90^\circ - A.$



例.  $c=20$  尺,  $A=35^\circ 8'$  ナル直角三角形ヲ解ケ.

解  $\sin 35^\circ 8' = 0.5755, \cos 35^\circ 8' = 0.8178,$

$$\begin{aligned} \therefore a &= 20^{\text{尺}} \times 0.5755 = 11.51 \text{ 尺} \\ b &= 20^{\text{尺}} \times 0.8178 = 16.36 \text{ 尺} \\ B &= 90^\circ - A = 54^\circ 52' \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} a \\ b \\ B \end{aligned}} \right\} \text{ 答.}$$

21. 第二ノ場合. 一邊 $b$ 及一銳角Aヲ知リテ直角三角形ヲ解クコト.

解  $\sec A = \frac{c}{b}, \tan A = \frac{a}{b},$

$\therefore c = b \sec A, a = b \tan A,$

$B = 90^\circ - A.$

例.  $b=235$  米,  $A=60^\circ$  ナル直角三角形ヲ解ケ.

解  $\sec A = 2, \tan A = 1.7321,$

$$\begin{aligned} \therefore c &= 235^{\text{米}} \times 2 = 470 \text{ 米} \\ a &= 235^{\text{米}} \times 1.7321 = 407.04 \text{ 米} \\ B &= 90^\circ - A = 30^\circ \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} c \\ a \\ B \end{aligned}} \right\} \text{ 答.}$$

注意. 邊  $a$  と之ニ對スル角  $A$  とヲ知ル場合ノ上ノ場合ニ導クコト容易ナリ.

## 22. 第三ノ場合. 斜邊 $c$ 及他ノ一邊

$a$  ヲ知リテ直角三角形ヲ解クコト.

$$\text{解 } \sin A = \frac{a}{c}, \quad b = c \cos A = a \cot A,$$

$$B = 90^\circ - A.$$

$$\text{或ハ } b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c-a)(c+a)}.$$

例.  $c = 67.24$  間,  $a = 49.15$  間ナル直角三角形ヲ解ケ.

$$\text{解 } \sin A = \frac{49.15}{67.24} = 0.7310 \quad \therefore A = 46^\circ 58'$$

$$B = 90^\circ - A = 43^\circ 2'$$

$$\cos A = 0.6824 \quad c = 67.24 \times 0.6824 = 45.88 \text{ 間}$$

答.

## 23. 第四ノ場合. 直角ヲ夾ム二邊

$a, b$  ヲ知リテ直角三角形ヲ解クコト.

$$\text{解 } \tan A = \frac{a}{b}, \quad c = b \sec A = a \operatorname{cosec} A,$$

$$B = 90^\circ - A.$$

注意.  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  ニヨリテモ亦  $c$  ヲ算出シ得ベシ, サレド此式ハ實用ニハ不便ナリ.

例.  $a = 125.8$  米,  $b = 280.4$  米ナル直角三角形ヲ解ケ.

$$\text{解 } \tan A = \frac{125.8}{280.4} = 0.4486 \quad \therefore A = 24^\circ 9'.7$$

$$B = 90^\circ - A = 65^\circ 50'.3$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{0.4093} \quad \therefore c = \frac{125.8}{0.4093} = 307.4 \text{ 米}$$

答.

## 問題 六

次ノ直角三角形ヲ解ケ.

1.  $c = 280.5$  米,  $A = 28^\circ 43'$ .
2.  $b = 26.82$  尺,  $A = 70^\circ 26'.4$ .
3.  $b = 800$  間,  $B = 50^\circ 35'.4$ .
4.  $c = 660$  尺,  $a = 408$  尺.
5.  $c = 1000$  米,  $b = 678.3$  米.
6.  $a = 78.46$  間,  $b = 45.05$  間.

## 第五章 直角三角形ノ應用

### 24. 測量ニ關スル用語.

或地點ニ於テ絲ヲ以テ鉛錘ヲ懸垂スルトキ, 其絲ノ方向(重力ノ方向)ト一致スル直線ヲ其地點ノ鉛直線ト云フ. 鉛直線ニ垂直ナル平面ヲ水平面,

水平面上ニアル直線ヲ水平線、鉛直線ヲ含ム平面ヲ鉛直面ト云フ。

觀測點ヨリ他ノ點(測點ト云フ)ニ引ケル直線ガ此直線ヲ含ム鉛直面ト水平面トノ交リナル水平線トナス角ヲ其測點ノ高度ト云フ。測點ガ觀測點ヲ含ム水平面ノ上方或ハ下方ニアルニ從テ其測點ノ高度ヲ夫夫其ノ仰角或ハ俯角トモ云フ。

觀測點ヨリ或ニツノ測點ニ引ケル直線ノ各ヲ含ムニツノ鉛直面ト水平面トノ交リナル二直線ノナス角ヲ其ニツノ測點ノ方位差或ハ水平角ト云フ。

測量ニ於テハ距離、高サ等ヲ測ルニ當リ、先ヅ或一ツノ直線ノ長サヲ直接ニ測リ置キ、而シテ之ヲ一邊トスル三角形ヲ解クコトニヨリテ所要ノ距離、高サ等ヲ計算スルヲ通常トス。斯ノ如キ直線ヲ基線ト云フ。

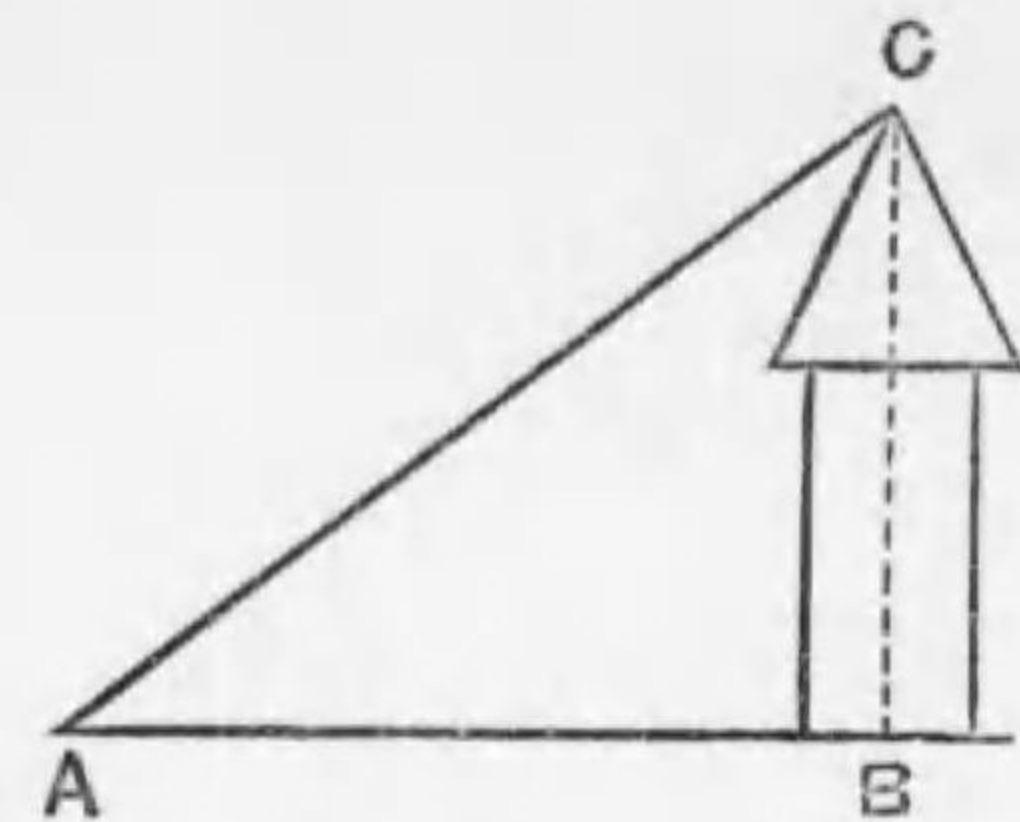
倍距離ヲ測ルニハ通常測鎖、卷尺等ヲ用ヒ、高度、方位角等ヲ測ルニハ通常經緯儀又ハ之ニ類似セル器械ヲ用フ。

注意。上記ノモノノ他ニ尙測針、標竿、水準器等

種種ナル器械ヲ用フ。

25. 問題一. 直下ニ達シ得ベキ直立體ノ高サヲ測ルコト。

解 Cヲ直立體ノ頂上、Bヲ其ノ直下ノ地上ノ點トセヨ。Bヲ通過スル水平線BAヲ基線ニ取リテ其ノ長サヲ測

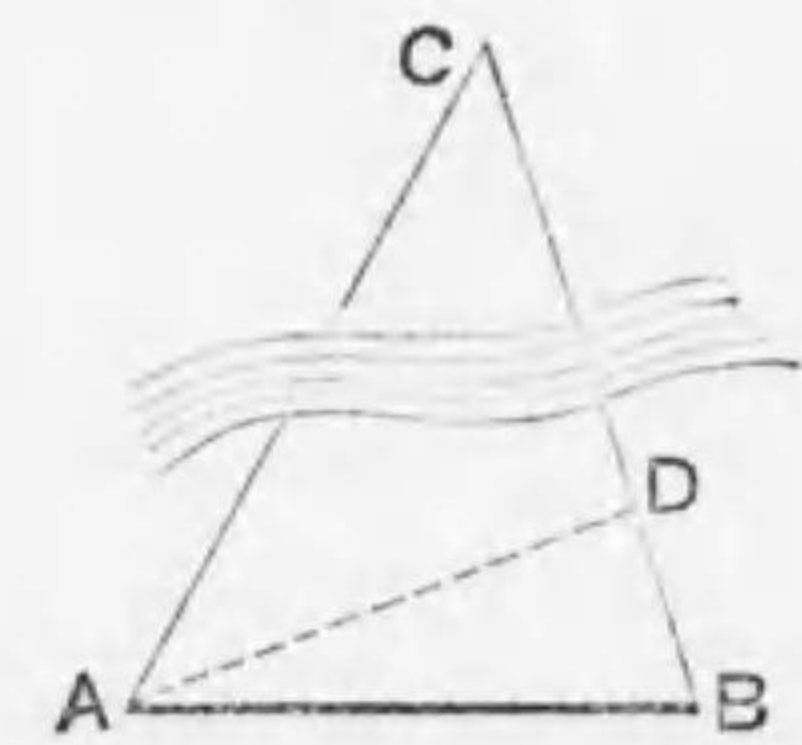


リ、Aニ於テCノ仰角BACヲ測レ。然ルトキハ所要ノ高サ  $BC = AB \tan BAC$ 。

26. 問題二. 達シ得ベカラザル點ノ距離ヲ測ルコト。

解 Aヲ觀測者ノ位置、Cヲ達シ得ベカラザル點トシ、距離ACヲ測ラン

トス。適宜ニ基線ABヲ取リテ其ノ長サヲ測リ、次ニAニ於テ角BAC、Bニ於テ角ABCヲ測レ。然ルトキハ三角形ABCニ於テ



$$C = 180^\circ - (A + B),$$

次ニ AD ヲ A ヨリ BC ニ下セル垂線トスレバ

$$AB \sin B = AD = AC \sin C,$$

$$\therefore AC = \frac{AB \sin B}{\sin C}.$$

注意. 角 B 又ハ C ガ鈍角ナルトキハ此公式ニ於テ B 又ハ C ノ代リニ其ノ補角即チ  $180^\circ - B$  又ハ  $180^\circ - C$  ヲ置換フベシ.

### 問題七

1. 一ツノ塔アリ, 其ノ基點ヲ含ム水平面上ニ於テ, 此基點ヨリ 25.3 間ノ距離ノ點ヨリ見タル塔ノ頂上ノ仰角ガ  $28^\circ 16'$  ナリト云フ. 塔ノ高サヲ求ム.

2. 或堤上ニアル基線 AB ノ兩端ヨリ對岸ノ點 C ヲ見ルニ角 BAC, ABC ハ夫夫  $75^\circ 26'.2$ ,  $53^\circ 48'.6$  ナリ, 而シテ其基線ノ長サ 250.5 米ナリト云フ. 距離 AC ヲ求ム.

3. 平地ニ於テ或立木ノ根本ヨリ 25 尺隔リタル地點ニアル人其立木ノ頂點ノ仰角ヲ測リタルニ  $60^\circ$  ヲ得タリト云フ. 其立木ノ高サヲ求ム. 但仰角ヲ測ルトキノ眼ノ高サ 3.5 尺ナリトス.

4. 高サ 60 尺ノ塔アリ. 此塔ノ基點ト同水平面上 3 尺ノ高サノ處ヨリ塔ノ頂點ノ仰角ヲ測リテ  $30^\circ$  ヲ得タリト云フ. 其處ヨリ塔ノ距離ヲ求ム.

5. 平地ニ立テル塔アリ. 或晴天ノ時其ノ地面ニ投ズル影ノ長サ 85 尺ニシテ, 同時ニ高サ 9 尺ノ直立柱ノ影ノ長サ 5.2 尺ナリシト云フ. 其時ノ太陽ノ仰角及塔ノ高サヲ求ム.

6. 兩岸平行ナル或河ノ岸ニ立チテ丁度其ノ對岸ニ立テル旗竿ヲ望ミ, 夫ヨリ河岸ニ沿フテ 60 米進ミ再ビ以前ノ旗竿ヲ望ミシニ其ノ方向ハ河岸ト  $30^\circ$  ノ角ヲナセリト云フ. 河ノ幅ヲ求ム.

7. 高サ 120 尺ノ塔上ヨリ高サ 18 尺ノ或家屋ノ頂上ノ俯角ヲ測リテ  $22^\circ 30'$  ヲ得タリト云フ. 塔ト家屋トノ距離ヲ求ム.

8. 或遠方ノ高所ニアル一點 P ヲ或地點 A ニテ見タル仰角ガ  $\alpha$  ニシテ, 次ニ A ヨリ P ノ方向ニ  $a$  間進ミタル地點ニ於ケル P ノ仰角ガ  $\beta$  ナルトキハ P ノ高サ何程ナルカ.

9. 或山麓ニ高サ 100 尺ノ塔アリ. 山ノ頂上ヨリ測リタルニ塔ノ頂點ト基點トノ俯角ハ夫夫

15°, 30° ナリト云フ。山ノ高サヲ求ム。

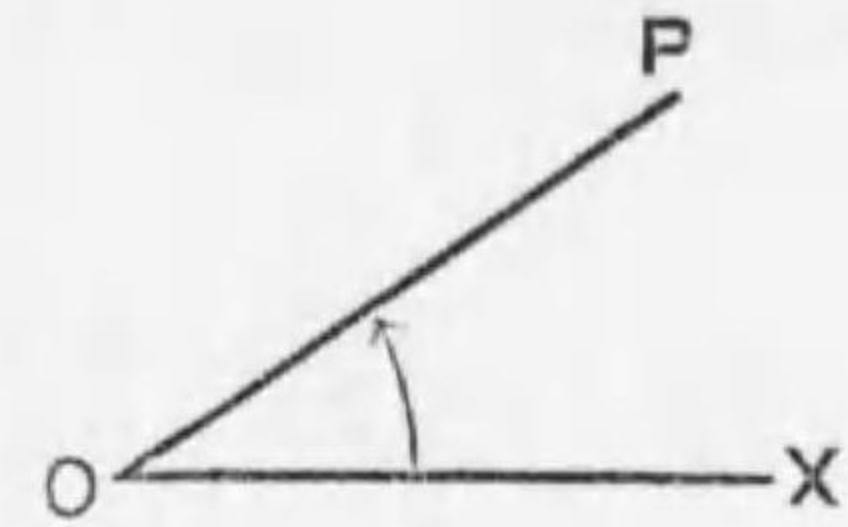
10. 圓柱形ノ臺上ニ立テル銅像アリ。其臺ノ基礎ヨリ20間離レタル同水平面上ノ地點ニ於テ像ノ頂上ト足トノ仰角ヲ測リ夫夫44°50', 41°28'ヲ得タリト云フ。像ノ高サヲ求ム。

11. 或平地ニ立テル相等シキ高サノ二ツノ煙突アリ。或人此二煙突ノ基點ヲ結ベル直線上ノ一地點ニ於テ自分ニ近キ方ノ煙突ノ仰角ヲ測リテ60°ヲ得、夫ヨリ此直線ト直角ノ方向ニ80尺進ミテ兩煙突ヲ夫夫45°, 30°ノ仰角ニ望ミタリト云フ。兩煙突ノ高サ及距離ヲ求ム。但仰角ヲ測ルトキノ眼ノ高サハ4尺ナリトス。

## 第二編 任意ノ角ノ三角函數

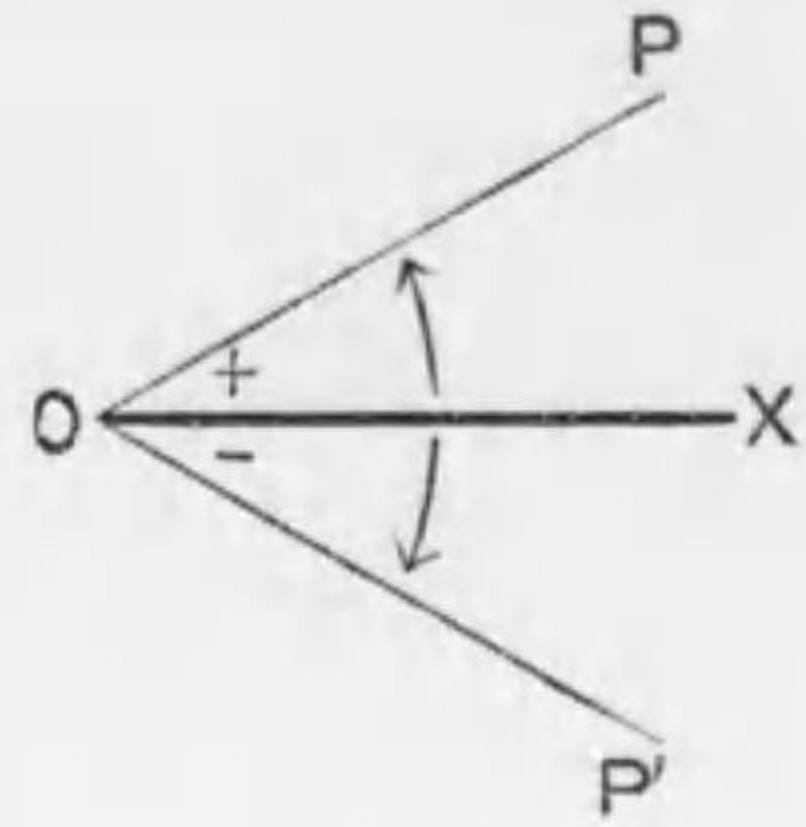
### 第一章 任意ノ角ノ三角函數

27. 角. 角XOPハ頂點Oト一邊OXトノ位置ハ固定シ、他ノ邊OPガ最初OXト一致シテヨリ頂點Oノ周リノ廻轉ニヨリテ生ズルモノトシ、此廻轉ノ量ヲ以テ其角ノ大サトス。其固定セル邊OXヲ其角ノ第一邊又ハ原線(或ハ主線)、廻轉スル邊OPヲ其ノ第二邊(或ハ動徑)ト云フ。

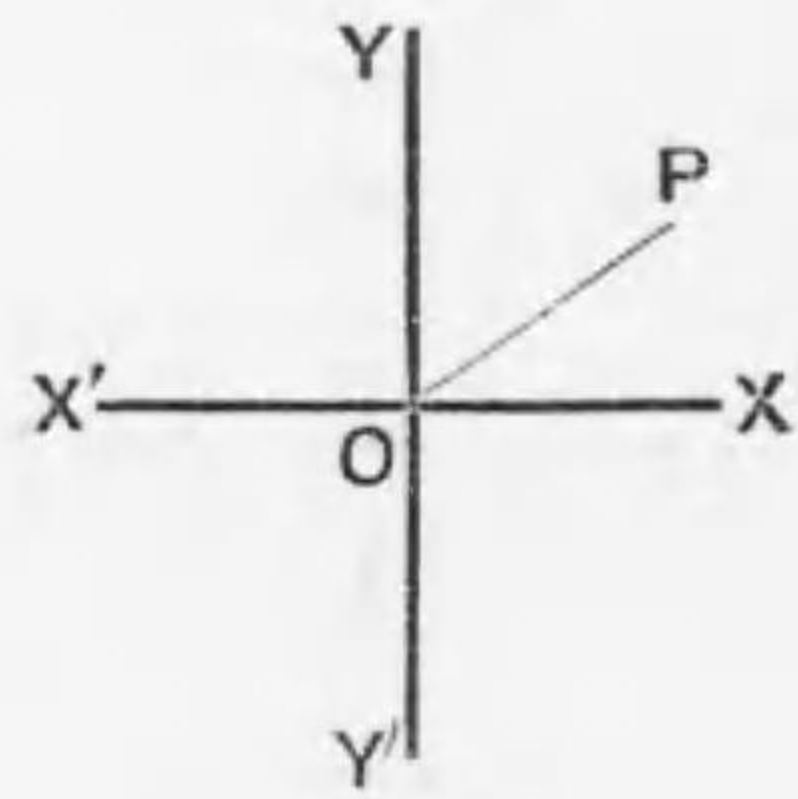


角ノ意義ヲ斯様ニ定ムルトキハ如何ナル大サノ角ヲモ考フルコトヲ得。例ヘバ上圖ニ於テ第二邊ガOXノ位置ヨリ矢ノ方向ニ廻轉シテOPノ位置ニ來リタルトキノ角XOPノ大サヲ $\alpha$ トスレバ、第二邊ガ尙引續キ廻轉シOXヲ超ヘテ再ビOPノ位置ニ來リタルトキノ角XOPノ大サハ $360^\circ + \alpha$ ナリ。尙一廻轉シテ三度OPノ位置ニ來レバ角ハ $720^\circ + \alpha$ トナル。逐次斯ノ如シ。

**28. 角ノ正負.** 一ツノ角ニ於テ第二邊ノ廻轉ノ方向ガ時針ノ廻轉ノ方向ト反對ナルカ或ハ同様ナルカニ從テ其角ハ正或ハ負ナリトス. 正負ノ角ニ於テハ其ノ大サヲ表ス數ニ夫夫正號負號ヲ附ス.



**29. 象限.** 角XOPノ原線OX, 其ノ延長OX', 及Oニ於テ之ニ直交スル直線YOY'ニヨリテ分タルル平面ノ各部分ヲ象限ト云ヒ, XOY, YOX', X'OY', YOX'ヲ夫夫**第一, 第二, 第三, 第四象限**ト云フ. 而シテ角XOPヲ其ノ第二邊OPノ存在スル象限内ノ角ト云フ.

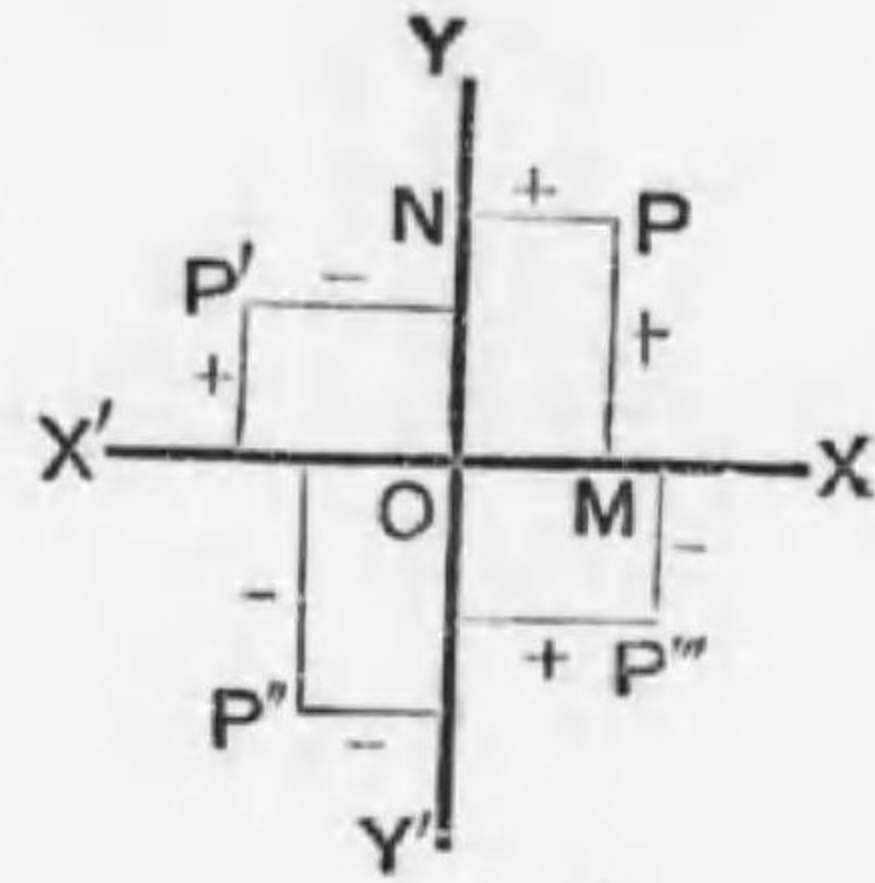


360°以下ノ正角 $\alpha$ ノ各象限内ニ於テノ大サハ次表ニ示スガ如シ.

象限	角ノ大サ	象限	角ノ大サ
I	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	III	$180^\circ < \alpha < 270^\circ$
II	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	IV	$270^\circ < \alpha < 360^\circ$

**注意.** ニツノ直線OX, OPノナス角ハ正負共ニ無數ニアリ. 今其ノ中最小ナル正角ヲ $\alpha$ トスレバ此二直線ノナス總テノ角ハ $n \cdot 360^\circ + \alpha$ ニテ表サル. 茲ニ $n$ ハ0又ハ正負ノ總テノ整數トス.

**30. 直線ノ正負.** XOY, YOY'ヲ點Oニ於テ直交スル二直線トス. 此二直線ノ定ムル平面上任意ノ點Pヨリ此二直線ニ垂線PM, PNヲ引ケ. 點MガXX'上ニ於テ點Oノ右方或ハ左方ニアルニ從テ線分OM, NPハ何レモ正或ハ負トシ, 又點NガYY'上ニ於テOノ上方或ハ下方ニアルニ從テ線分ON, MPハ何レモ正或負トス. (第四學年用代數學參照)



或ハ之ヲ換言スレバ點Pノ存在スル象限ニヨリテ線分OM, ON等ノ符號ハ次表ニ示スガ如シ.

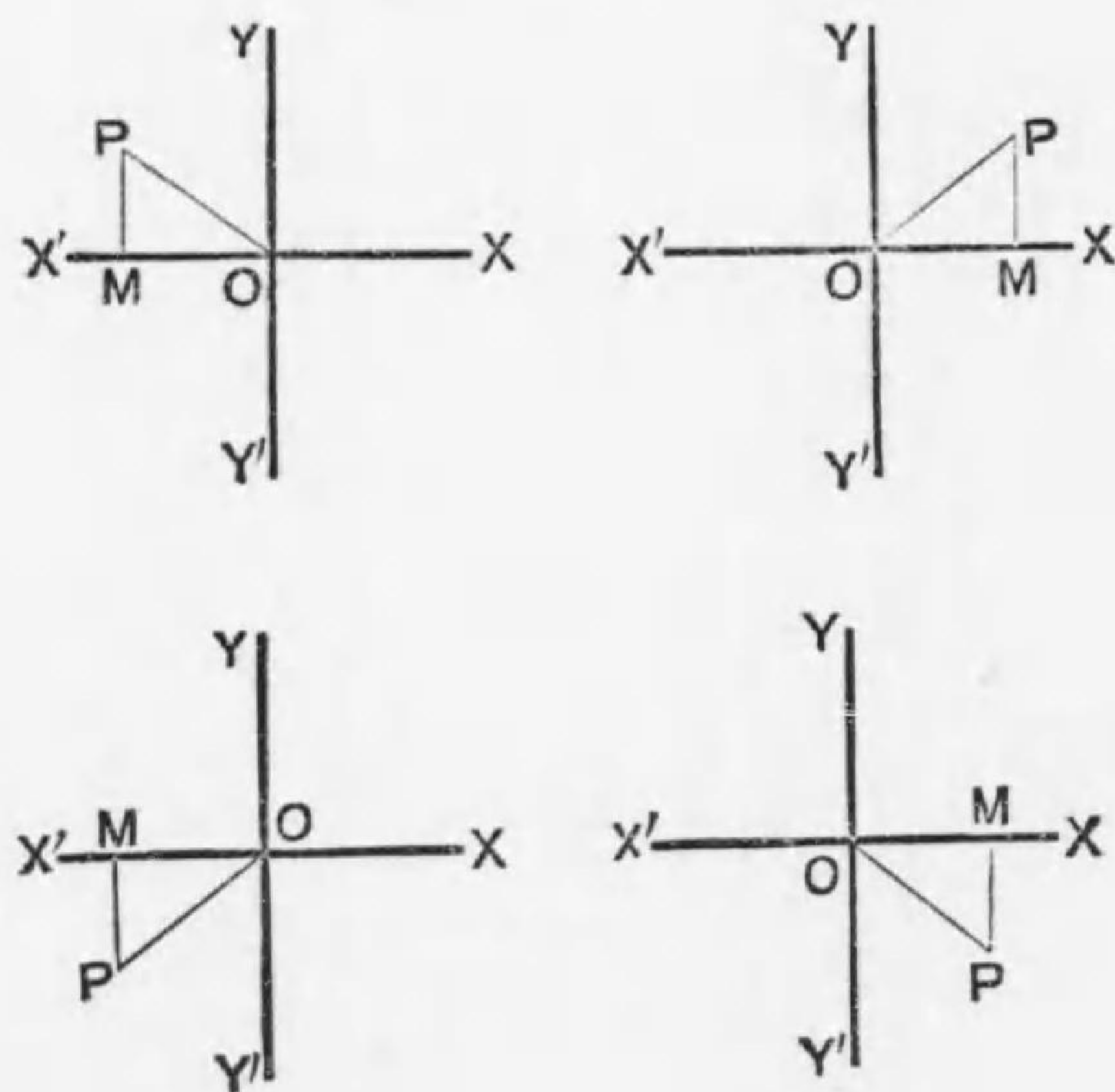
象限	I	II	III	IV
OM, NPノ符號	+	-	-	+
ON, MPノ符號	+	+	-	-

31. 三角函數ノ定義. 任意ノ角  $XOP$  ノ大サヲ  $\alpha$  トシ, 此角ノ第二邊上ニ任意ノ一點  $P$  ヲ取り, 線分  $OP$  ハ恒ニ正ナリトシ,  $P$  ヲ第一邊  $OX$  (又ハ延長  $OX'$ ) ニ垂線  $PM$  ヲ下セ. 然ルトキハ任意ノ角  $\alpha$  ノ三角函數ノ定義ハ次ノ如シ.

$$\sin \alpha = \frac{MP}{OP}, \quad \cos \alpha = \frac{OM}{OP},$$

$$\tan \alpha = \frac{MP}{OM}, \quad \cot \alpha = \frac{OM}{MP},$$

$$\sec \alpha = \frac{OP}{OM}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{OP}{MP}.$$



注意. 以上ノ定義ハ角  $\alpha$  ガ銳角ナルトキニハ第2節ノ定義ト全然一致ス.

32. 三角函數ノ關係. 前節ノ定義ニヨリ角  $\alpha$  ノ大小正負如何ニ拘ラズ, 銳角ノ場合ト同様ニ次ノ關係ノ成立スルコト明ナリ.

$$\sin \alpha \operatorname{cosec} \alpha = 1, \quad \cos \alpha \sec \alpha = 1, \quad \tan \alpha \cot \alpha = 1.$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha, \quad 1 + \cot^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha.$$

從テ此等ノ公式ヨリ誘導セラルベキ恒等式ハ其中ニ含マルル角ノ如何ニ拘ラズ一般ニ眞ナリ.

33. 三角函數ノ符號. 第31節ノ定義ニ於テ  $OP$  ハ恒ニ正ナルコト及第30節ニ規定シタル  $OM, MP$  ノ符號ヲ用フレバ直チニ各象限内ニ於ケル角  $\alpha$  ノ三角函數ノ符號ヲ見出スコトヲ得. 即チ次表ニ示スガ如シ.

象限 函數	I	II	III	IV	象限 函數
$\sin \alpha$	+	+	-	-	$\operatorname{cosec} \alpha$
$\cos \alpha$	+	-	-	+	$\sec \alpha$
$\tan \alpha$	+	-	+	-	$\cot \alpha$



## 問題 八

1. 次ノ角ハ何レノ象限ノ角ナルカ.

$36^\circ, 125^\circ, 250^\circ, 320^\circ, 480^\circ, 835^\circ, 1264^\circ,$   
 $-80^\circ, -160^\circ, -242^\circ, -300^\circ, -403^\circ, -780^\circ, -1000^\circ.$

2. 上記ノ各角ノ正弦, 餘弦, 正切ノ符號ヲ求ム.

3. 次ノ角ノ正弦, 餘弦, 正切, 餘切ヲ求ム.

$120^\circ, 135^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 300^\circ, 690^\circ,$   
 $-30^\circ, -45^\circ, -495^\circ, -510^\circ, -585^\circ, -780^\circ.$

4. 第三象限内ノ或角ノ正弦ガ $-\frac{2}{3}$ ナルトキ,  
 此角ノ他ノ三角函數ノ値ヲ求ム.

5.  $\tan x = -\sqrt{3}$ ナル $180^\circ$ 以下ノ正角 $x$ ヲ求ム.

34.  $n \cdot 360^\circ + \alpha$ ノ三角函數.

$$\left. \begin{aligned} \sin(n \cdot 360^\circ + \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(n \cdot 360^\circ + \alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(n \cdot 360^\circ + \alpha) &= \tan \alpha \\ \cot(n \cdot 360^\circ + \alpha) &= \cot \alpha \\ \sec(n \cdot 360^\circ + \alpha) &= \sec \alpha \\ \operatorname{cosec}(n \cdot 360^\circ + \alpha) &= \operatorname{cosec} \alpha \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

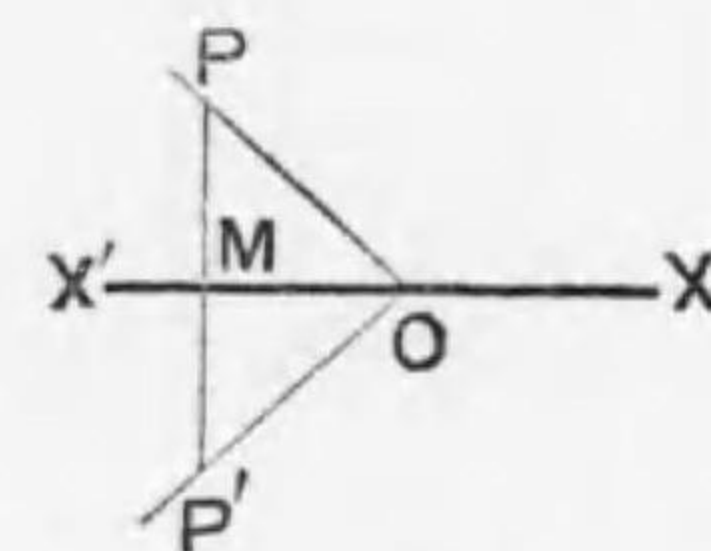
茲ニ $n$ ハ零又ハ正負ノ任意ノ整數トス.(以下倣之)

證明 ニツノ角 $\alpha, n \cdot 360^\circ + \alpha$ ノ第一邊ガ一致スル  
 トキハ第二邊モ亦一致スルガ故ナリ.

## 35. 負角ノ三角函數.

$$\left. \begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha, \quad \cot(-\alpha) = -\cot \alpha \\ \sec(-\alpha) &= \sec \alpha, \quad \operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec} \alpha \end{aligned} \right\} (9)$$

證明 ニツノ角 $\alpha, -\alpha$   
 ノ第一邊ガ一致スルトキ  
 ハ第二邊 $OP, OP'$ ハ共通  
 ナル第一邊 $OX$ ニ對シテ



對稱ナリ. 故ニ $OP, OP'$ 上ニ取リタル $OP = OP'$ ナル  
 點 $P, P'$ ヲ連結スル直線 $PP'$ ハ $OX$ 又ハ其ノ延  
 長ニヨリ點 $M$ ニ於テ直角ニ二等分セラル.

$$\therefore MP' = -MP.$$

故ニ上ノ公式ノ成立スルコト直チニ知ラル.

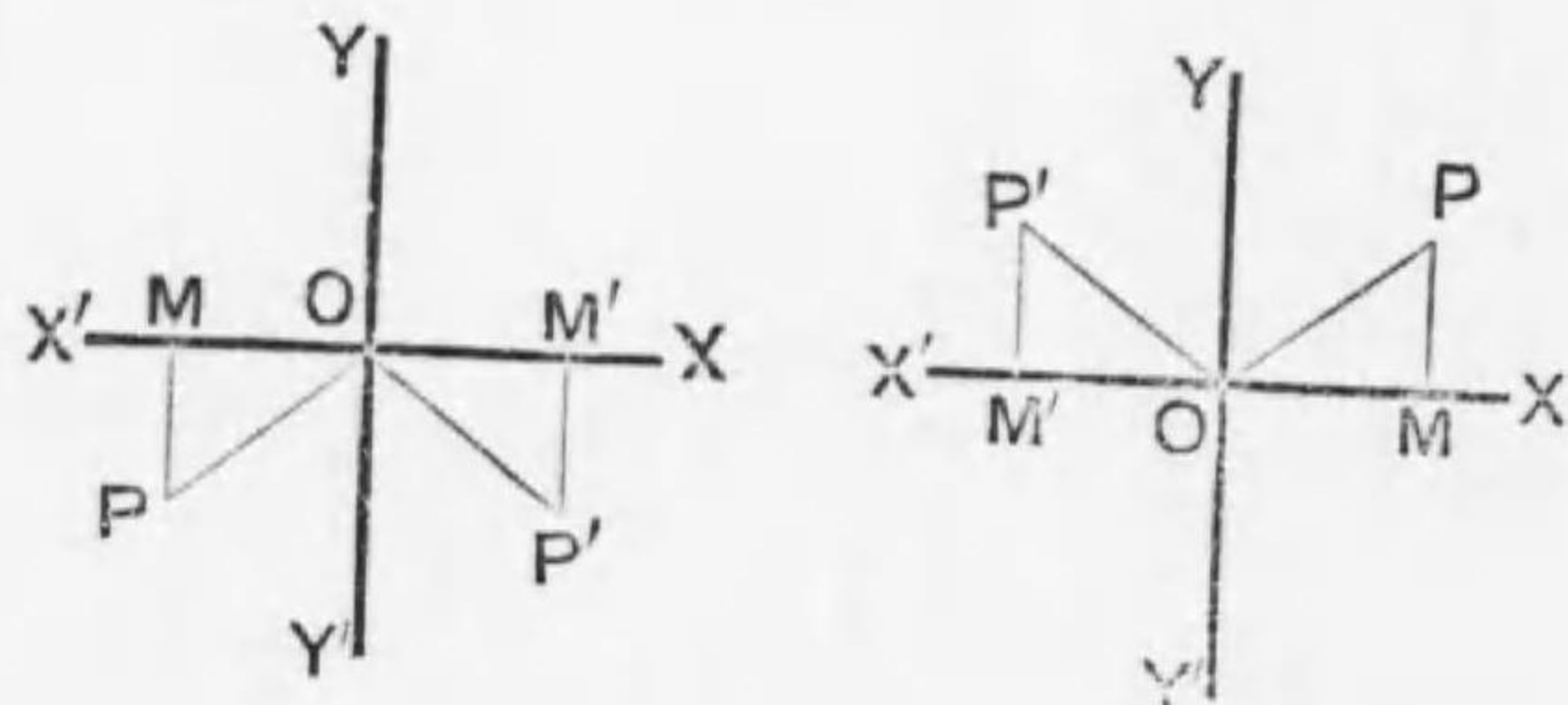
36. 定義. ニツノ角ノ和ガ $180^\circ$ ナル  
 トキハ其ノ一ツヲ他ノ補角ト云フ.

例へば  $210^\circ + (-30^\circ) = 180^\circ$ , 故に  $-30^\circ$  は  $210^\circ$  の補角ナリ.

37. 補角ノ三角函數.

$$\left. \begin{aligned} \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(180^\circ - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(180^\circ - \alpha) &= -\cot \alpha \\ \sec(180^\circ - \alpha) &= -\sec \alpha \\ \operatorname{cosec}(180^\circ - \alpha) &= \operatorname{cosec} \alpha \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

證明 OX, OPノナス角ヲ  $\alpha$  トシ, OX, OP'ノナス



角ヲ  $180^\circ - \alpha$  トスレバ OP, OP'ハ  $YY'$ ニ對シテ對稱ナリ. 故に  $OP = OP'$ ナル點 P, P'ヨリ  $XX'$ ニ垂線 PM, P'M'ヲ下セバ明に

$$M'P' = MP, \quad OM' = -OM,$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin(180^\circ - \alpha) &= \frac{M'P'}{OP'} = \frac{MP}{OP} = \sin \alpha, \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= \frac{OM'}{OP'} = -\frac{OM}{OP} = -\cos \alpha. \end{aligned}$$

他モ亦同様ナリ. (或ハ此ニツヨリ誘導セラル).

注意. 茲ニ示セルハ  $\alpha$ ガ第一及第三象限内ノ角ナルトキノ圖ナリ.  $\alpha$ ガ第二及第四象限内ノ角ナルトキノ圖ハ學者自ラ之ヲ畫ケ.

系.  $180^\circ + \alpha = 180^\circ - (-\alpha)$ ナル故(10), (9)ニヨリ

$$\left. \begin{aligned} \sin(180^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(180^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(180^\circ + \alpha) &= \tan \alpha \\ \cot(180^\circ + \alpha) &= \cot \alpha \\ \sec(180^\circ + \alpha) &= -\sec \alpha \\ \operatorname{cosec}(180^\circ + \alpha) &= -\operatorname{cosec} \alpha \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

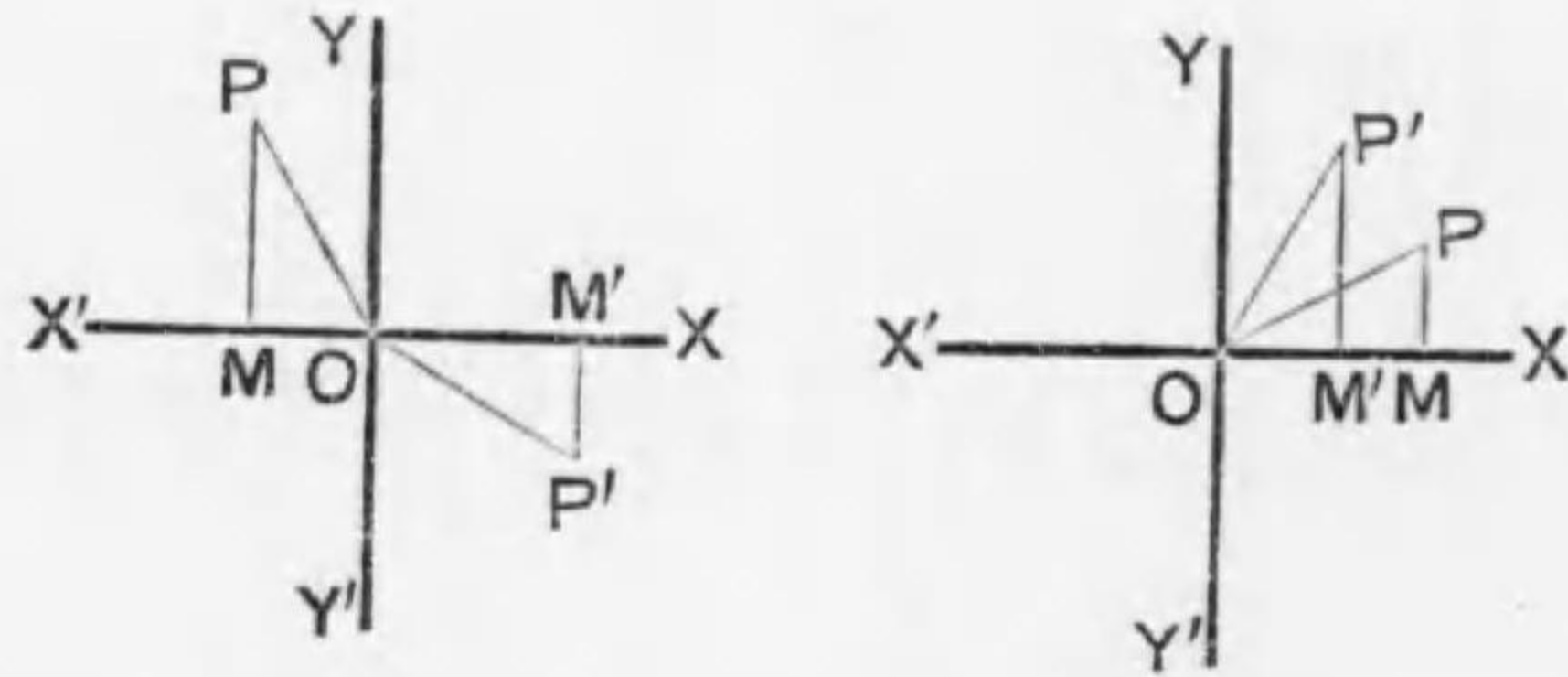
38. 定義. ニツノ角ノ和ガ  $90^\circ$ ナルトキハ其ノ一ツヲ他ノ餘角ト云フ.

例へば  $140^\circ + (-50^\circ) = 90^\circ$ , 故に  $140^\circ$ ハ  $-50^\circ$ ノ餘角ナリ.

39. 餘角ノ三角函數.

$$\left. \begin{aligned} \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \tan(90^\circ - \alpha) &= \cot \alpha \\ \cot(90^\circ - \alpha) &= \tan \alpha \\ \sec(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{cosec} \alpha \\ \operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha) &= \sec \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots (12)$$

證明  $OX, OP$  ノ ナス角ヲ  $\alpha$ ,  $OX, OP'$  ノ ナス角ヲ



$90^\circ - \alpha$  トシ,  $OP = OP'$  ナル點  $P, P'$  ヨリ  $XX'$  = 垂線  $PM, P'M'$  フ下ストキハ直角三角形  $POM, P'OM'$  ハ  $\angle POM = \angle OP'M'$  = シテ全等ナリ. 而シテ

$$M'P' = OM, \quad OM' = MP,$$

$$\therefore \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{OM}{OP} = \cos \alpha,$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{MP}{OP} = \sin \alpha.$$

他モ亦同様ナリ. (或ハ此ニツヨリ誘導セラル)

注意.  $\alpha$  ガ第三及第四象限内ノ角ナルトキノ圖ハ學者自ラ之ヲ畫ケ. 此圖ニ於テ  $OP, OP'$  ハ  $\angle XOY$  ノ二等分線ニ對シテ對稱ナリ.

又公式(12)ハ銳角ノ場合ノ公式(7)ト同様ナリ.

**40. 角ノ縮小.** 任意ノ角ノ三角函數ハ正ノ銳角ノ三角函數ヲ以テ之ヲ表スコトヲ得. 其方法ハ次ノ如シ.

先ヅ負角ノ三角函數ハ公式(9)ニヨリ正角ノモノニテ表シ,  $360^\circ$  ヨリモ大ナル角ノ三角函數ハ公式(8)ニヨリ  $360^\circ$  以下ノ正角ノモノニテ表シ, 次ニ  $180^\circ$  ト  $360^\circ$  トノ間ノ角ノ三角函數ハ公式(11)ニヨリ  $180^\circ$  以下ノ正角ノモノニテ表シ,  $90^\circ$  ト  $180^\circ$  トノ間ノ角ノ三角函數ハ公式(10)ニヨリ其ノ補角( $90^\circ$  以下ノ正角)ニテ表セバ可ナリ.

例.  $\sin(-1050^\circ)$  ヲ求ム.

解  $\sin(-1050^\circ) = -\sin 1050^\circ.$

$$= -\sin(720^\circ + 330^\circ) = -\sin 330^\circ$$

$$= -\sin(180^\circ + 150^\circ) = \sin 150^\circ$$

$$= \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{答.}$$

41. 三角函數ノ變化. 角 $\alpha$ ガ $90^\circ$ 以下ノ正角ナル場合ニ於ケル其角ノ三角函數ノ變化ハ第一編ニ於テ既ニ知ルトコロナリ. 之ヲ用フレバ補角 $180^\circ - \alpha$ ノ三角函數ノ公式及 $180^\circ + \alpha$ ノ三角函數ノ公式ニヨリ容易ニ $\alpha$ ガ $0^\circ$ ヨリ $360^\circ$ 迄變ズルトキノ三角函數ノ變化ヲ知ルコトヲ得ベシ.

又ハ次ノ如ク幾何學的ニ之ヲ知ルコトヲ得.

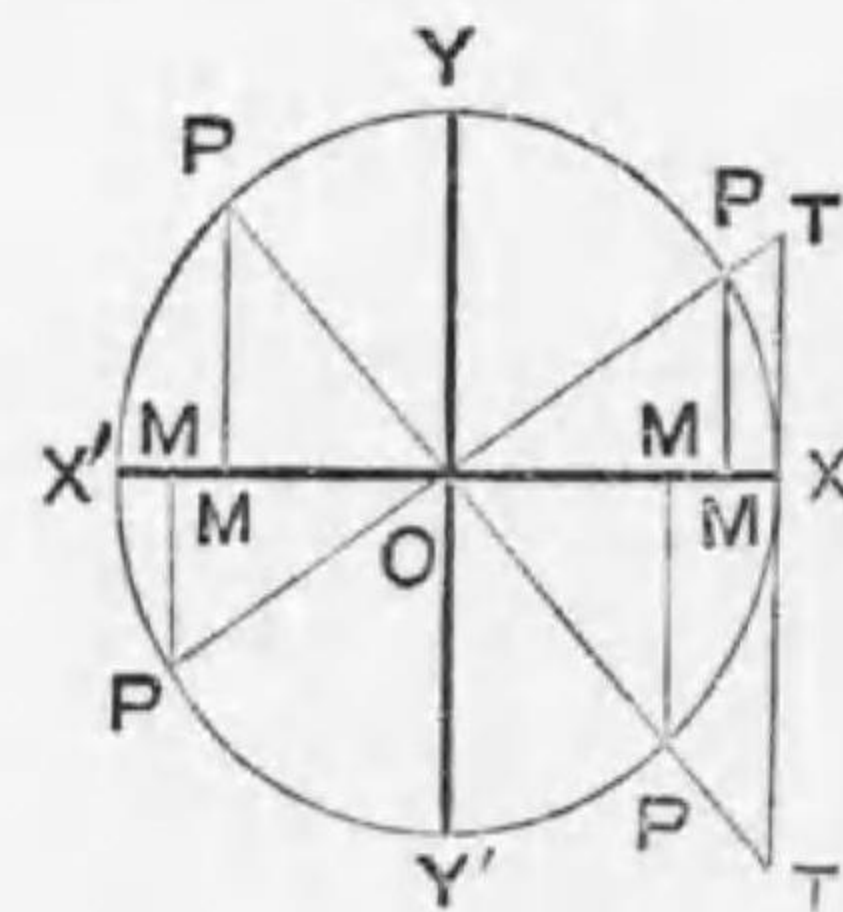
點 $O$ ヲ中心トシ, 單位ノ長サノ半徑ノ圓(單位圓ト云フ)ヲ畫キ,  $O$ ニ於テ直交スル直線 $XX', YY'$ トノ交點ヲ $X, X', Y, Y'$ トシ, 角 $\alpha$ ノ第一邊ヲ $OX$ トスルトキ第二邊ガ此圓周ト交ル點ヲ $P$ トセヨ. 倍 $P$ ヨリ $XX'$ ニ垂線 $PM$ ヲ

下シ, 第二邊 $OP$ 又ハ其ノ延長ガ點 $X$ ニ於ケル切線ト交ル點ヲ $T$ トスレバ

$$OP = OX = 1,$$

$$\therefore \sin \alpha = PM, \cos \alpha = OM, \tan \alpha = XT.$$

而シテ $\alpha$ ガ $0^\circ$ ヨリ増シテ $360^\circ$ トナル間ニ於テ點 $P$ ハ點 $X$ ヲ出發シテ圓周上ヲ一周シ再ビ $X$ ニ歸リ來ル. 因テ $\alpha$ ノ變化ニ伴フ三角函數ノ變



化ハ次ノ如シ.

(1)  $\sin \alpha$ ノ變化. 第一象限ニ於テハ $MP$ ハ $0$ ヨリ $1$ 迄増大スルヲ以テ $\sin \alpha$ ハ $0$ ヨリ $1$ 迄増大ス. 第二象限ニ於テハ $MP$ ハ $1$ ヨリ $0$ 迄減小スルヲ以テ $\sin \alpha$ ハ $1$ ヨリ $0$ 迄減小ス. 第三象限ニ於テハ $MP$ ハ $0$ ヨリ $-1$ 迄減小スルヲ以テ $\sin \alpha$ ハ $0$ ヨリ $-1$ 迄減小ス. 第四象限ニ於テハ $MP$ ハ $-1$ ヨリ $0$ 迄増大スルヲ以テ $\sin \alpha$ ハ $-1$ ヨリ $0$ 迄増大ス.

(2)  $\cos \alpha$ ノ變化.  $OM$ ノ變化ヲ講究スレバ直チニ知ルコトヲ得. 即チ $\cos \alpha$ ハ第一象限ニ於テハ $1$ ヨリ $0$ 迄減小シ, 第二象限ニ於テハ $0$ ヨリ $-1$ 迄減小シ, 第三象限ニ於テハ $-1$ ヨリ $0$ 迄増大シ, 第四象限ニ於テハ $0$ ヨリ $1$ 迄増大ス.

(3)  $\tan \alpha$ ノ變化. 第一象限ニ於テハ $XT$ ハ $0$ ヨリ $+\infty$ 迄増大スルヲ以テ $\tan \alpha$ ハ $0$ ヨリ $+\infty$ 迄増大ス. 第二象限ニ於テハ $XT$ ハ負ニシテ其ノ値ノ絶對值ハ限ナク大ナル値ヨリ $0$ 迄減小ス, 即チ $-\infty$ ヨリ $0$ 迄増大スルヲ以テ $\tan \alpha$ ハ $-\infty$ ヨリ $0$ 迄増大ス. 第三象限ニ於テハ $XT$ ハ $0$ ヨリ $+\infty$ 迄

増大スルヲ以テ  $\tan \alpha$  ハ  $0$  ヨリ  $+\infty$  迄増大ス。  
 第四象限ニ於テハ  $\tan \alpha$  ハ  $-\infty$  ヨリ  $0$  迄増大スル  
 ヲ以テ  $\tan \alpha$  ハ  $-\infty$  ヨリ  $0$  迄増大ス。

$\cot \alpha$ ,  $\sec \alpha$ ,  $\operatorname{cosec} \alpha$  ノ變化. 以上ノ結果ヨリ  
 逆數關係ニヨリ直チニ知ルコトヲ得.

以上ノ結果ヲ表ニテ示セバ次ノ如シ.

象限 函數	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	$0 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow 0$
$\cos \alpha$	$1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 1$
$\tan \alpha$	$0 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow 0$	$0 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow 0$
$\cot \alpha$	$+\infty \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -\infty$
$\sec \alpha$	$1 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow 1$
$\operatorname{cosec} \alpha$	$+\infty \rightarrow 1$	$1 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow -\infty$

### 問題九

次ノ等式ヲ證明セヨ.

1.  $\sin(n \cdot 360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$ ,  $\cos(n \cdot 360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ ,

$\tan(n \cdot 360^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$ .

2.  $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$ ,  $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ ,

$\tan(90^\circ + \alpha) = -\cot \alpha$ .

3.  $\sin(\alpha - 90^\circ) = -\cos \alpha$ ,  $\cos(\alpha - 90^\circ) = \sin \alpha$ .

4.  $\sin(180^\circ + A) + \cos(90^\circ - A) = 0$ .

5.  $\sin^2(540^\circ + A) + \sin^2(270^\circ - A) = 1$ .

6.  $\frac{\sin(180^\circ - A)\cos(90^\circ + A)}{\sin(180^\circ + A)} + \frac{\cos(90^\circ - A)\sin(90^\circ + A)}{\cos(180^\circ + A)} = 0$ .

7. 第40節ノ方法ニヨリ次ノ三角函數ヲ計算  
 セヨ.

$\sin 390^\circ$ ,  $\cos(-675^\circ)$ ,  $\tan 330^\circ$ ,  $\tan 945^\circ$ .

8. 次ノ等式ヲ證明セヨ.

(一)  $\tan 225^\circ + \tan 300^\circ \tan 30^\circ = 0$ .

(二)  $\cot 150^\circ + \sin 240^\circ = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

9. 次ノ式ノ値ヲ求ム.

(一)  $2 \sin 120^\circ + 2 \tan 315^\circ \tan(-765^\circ)$ .

(二)  $\sin(-675^\circ) + \sin(-60^\circ) - \cos 330^\circ - \sin 420^\circ$ .

10. 次ノ方程式ヲ満足スル  $360^\circ$  以下ノ正角  $x$   
 ノ値ヲ求ム.

(一)  $\sin(180^\circ + x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

(二)  $\tan x = 3 \cot x$ . (三)  $2 \cos^2 x - \sin x = 1$ .

(四)  $\sin x = \cos x$ .

(五)  $2 \tan x + 3 \cos x = \tan x + \cos x + 2 \sec x$ .

## 第二章 二角ノ和及差ノ三角函數

42. 基本定理.  $A, B$  ヲ任意ノ角ト

スルトキハ

$$\left. \begin{aligned} \sin(A+B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \cos(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \end{aligned} \right\} (13)$$

ナリ. 之ヲ正弦及餘弦ノ加法定理ト云フ.

證明  $\angle XOY = A, \angle YOZ = B$  トシ,  $OZ$  上ノ點  $P$  ヨリ  $OX, OY$  へ垂線  $PM, PQ$ ヲ引キ,  $Q$  ヨリ  $OX, PM$  へ垂線  $QN, QL$  ヲ引ケ. (圖

參照) 然ルトキハ

$$ML = NQ, \quad LQ = MN,$$

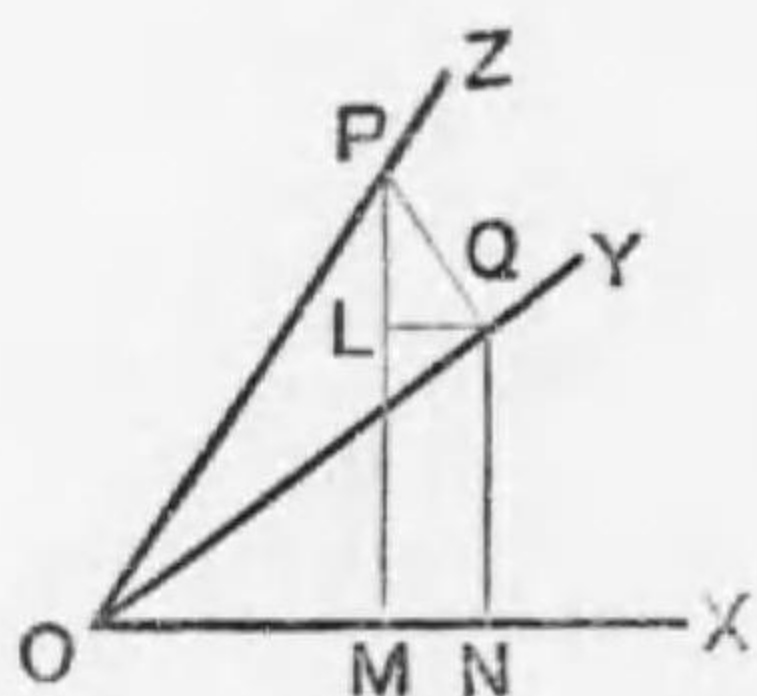
$$\angle XOZ = A+B, \quad \angle LPQ = A,$$

$$\therefore \sin(A+B) = \frac{MP}{OP} = \frac{ML+LP}{OP} = \frac{NQ+LP}{OP}$$

$$= \frac{NQ}{OP} + \frac{LP}{OP}$$

$$= \frac{NQ}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP} + \frac{LP}{QP} \cdot \frac{QP}{OP}$$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$



$$\begin{aligned} \cos(A+B) &= \frac{OM}{OP} = \frac{ON-MN}{OP} = \frac{ON-LQ}{OP} \\ &= \frac{ON}{OP} - \frac{LQ}{OP} \\ &= \frac{ON}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP} - \frac{LQ}{QP} \cdot \frac{QP}{OP} \\ &= \cos A \cos B - \sin A \sin B. \end{aligned}$$

注意. 茲ニハ  $A, B, A+B$  ガ何レモ銳角ナル場合ノ圖ニツキテ證明シタレドモ, 他ノ場合ニ於ケル證明モ亦同様ナリ. 或ハ又前章ノ公式(8)―(12)ヲ應用スルコトニヨリ此結果ヨリ一般ノ場合ヲ誘導スルコトヲ得ベシ.

系. 公式(13)ニ於テ  $B$  ノ代リニ  $-B$  ヲ置ケバ

$$\left. \begin{aligned} \sin(A-B) &= \sin A \cos B - \cos A \sin B \\ \cos(A-B) &= \cos A \cos B + \sin A \sin B \end{aligned} \right\} (14)$$

之ヲ正弦及餘弦ノ減法定理ト云フ.

$$\text{例 1. } \sin(A+B) \sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$$

ヲ證明セヨ.

證明 (13), (14) ノ兩式ヲ邊邊相乗ズレバ

$$\sin(A+B) \sin(A-B) = \sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B$$

$$= \sin^2 A (1 - \sin^2 B) - (1 - \sin^2 A) \sin^2 B$$

$$= \sin^2 A - \sin^2 B.$$

例 2.  $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B$

ヲ證明セヨ.

證明 公式(13), (14)ノ兩式ヲ邊邊相乘ズレバ

$$\begin{aligned} \cos(A+B)\cos(A-B) &= \cos^2 A \cos^2 B - \sin^2 A \sin^2 B \\ &= \cos^2 A(1 - \sin^2 B) - (1 - \cos^2 A)\sin^2 B \\ &= \cos^2 A - \sin^2 B. \end{aligned}$$

43.  $15^\circ$ 及 $75^\circ$ ノ三角函數. 公式(14)ニ於テ  $A=45^\circ$ ,  $B=30^\circ$  ト置ケバ

$$\sin 15^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \cos 75^\circ,$$

同様ニシテ  $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \sin 75^\circ,$

又  $\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$

$$= 2 - \sqrt{3} = \cot 75^\circ.$$

他ノ函數ハ此等ノ値ヨリ直チニ求メ得ベシ.

44. 正切ノ加法定理及減法定理.

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \dots (15)$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} \dots (16)$$

證明 (13)ノ兩式ヲ邊邊相除シ, 右邊ノ分母分子ヲ  $\cos A \cos B$  ニテ除スレバ(15)トナル.

(15)ニ於テ  $B$ ノ代リニ  $-B$ ヲ置ケバ(16)トナル.

### 問題十

次ノ等式ヲ證明セヨ.

1.  $\sqrt{2} \sin(A+45^\circ) = \sin A + \cos A.$

2.  $\sqrt{2} \cos(A+45^\circ) = \cos A - \sin A.$

3.  $\sin(A+B)\sin(A-B) = \cos^2 B - \cos^2 A.$

4.  $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 B - \sin^2 A.$

5.  $\tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B}.$

6.  $\tan A + \cot B = \frac{\cos(A-B)}{\cos A \sin B}.$

7.  $\tan(45^\circ + A) = \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A}.$

8.  $\tan(45^\circ - A) = \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A}.$

9.  $\frac{\sin(A-B)}{\sin A \sin B} + \frac{\sin(B-C)}{\sin B \sin C} + \frac{\sin(C-A)}{\sin C \sin A} = 0.$

$$10. \cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$$

$$11. \cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

$$12. \sin^2 A + \sin^2(A+60^\circ) + \sin^2(A-60^\circ) = \frac{3}{2}$$

13. 公式(15), (16)ヲ用ヒテ  $\tan 15^\circ$  及  $\tan 75^\circ$ ヲ見出セ.

14. A, Bガ何レモ銳角ニシテ且

$$\sin A = \frac{1}{5}, \quad \sin B = \frac{1}{7}$$

ナルトキ,  $\sin(A+B)$ ,  $\cos(A-B)$ ,  $\tan(A+B)$ ヲ求ム.

15. Aハ銳角, Bハ鈍角ニシテ且

$$\cos A = \frac{2}{3}, \quad \sin B = \frac{5}{7}$$

ナルトキ,  $\sin(A-B)$ ,  $\cos(A+B)$ ,  $\tan(A-B)$ ヲ求ム.

### 第三章 倍角及半角ノ三角函數

#### 45. 二倍角ノ三角函數.

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A \dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= 2 \cos^2 A - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 A \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \dots (19)$$

證明  $\sin(A+B)$ ,  $\cos(A+B)$ ,  $\tan(A+B)$ ノ公式ニ於テ  $B=A$ トスレバ直チニ上ノ公式トナル.

#### 46. 三倍角ノ正弦及餘弦.

$$\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A \dots (20)$$

$$\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A \dots (21)$$

證明  $\sin 3A = \sin(2A+A) = \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A$

$$= 2 \sin A \cos^2 A + (1 - 2 \sin^2 A) \sin A$$

$$= 2 \sin A (1 - \sin^2 A) + \sin A - 2 \sin^3 A$$

$$= 3 \sin A - 4 \sin^3 A.$$

公式(21)モ亦同様ニシテ證明スルコトヲ得.

例.  $\sin 18^\circ$ ,  $\cos 18^\circ$ ヲ求ム.

解  $A=18^\circ$ トスレバ  $2A+3A=5A=90^\circ$ ,

$$\therefore \sin 2A = \sin(90^\circ - 3A) = \cos 3A,$$

即チ  $2 \sin A \cos A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A,$

$\cos A \neq 0$ ナルヲ以テ  $\cos A$ ニテ兩邊ヲ除スレバ

$$2 \sin A = 4 \cos^2 A - 3 = 4(1 - \sin^2 A) - 3,$$

即チ  $4 \sin^2 A + 2 \sin A - 1 = 0.$

$\sin A = x$ トスレバ  $4x^2 + 2x - 1 = 0,$



之ヲ解ケバ  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$ .

倍  $x$  ハ正數ナルベキニヨリ負根ハ適セズ.

$$\therefore x = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

次ニ  $\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}$ ,

之ヨリ  $\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ .

### 47. 半角ノ三角函數.

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \\ \cos \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{A}{2} &= \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} \end{aligned} \right\} (23)$$

證明 公式(18)ニ於テ  $2A$  ノ代リニ  $A$  トスレバ直チニ(22)ヲ得ベク,又(17)ヲモ併セ用フレバ直チニ(23)ヲ得ベシ.

### 問題 十一

1.  $\sin A = \frac{1}{5}$  ナルトキ  $\sin 2A, \cos 2A$  ヲ求ム.

2.  $\cos A = \frac{2}{3}$  ナルトキ  $\tan 2A$  ヲ求ム.

3.  $\sin A = \frac{3}{5}$  ナルトキ  $\sin 3A$  ヲ求ム.

4.  $\cos A = -\frac{1}{3}$  ナルトキ  $\cos 3A$  ヲ求ム.

次ノ等式ヲ證明セヨ.

5.  $\sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$     6.  $\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A}$ .

7.  $(\sin A + \cos A)^2 = 1 + \sin 2A$ .

8.  $(\sin A - \cos A)^2 = 1 - \sin 2A$ .

9.  $\tan A + \cot A = 2 \operatorname{cosec} 2A$ .

10.  $\cos^4 A - \sin^4 A = \cos 2A$ .

11.  $\cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$     12.  $\sin 2A = \frac{2 \cot A}{1 + \cot^2 A}$ .

13.  $\tan 2A (\tan A - \cot A) + 2 = 0$ .

14.  $\sin 3A = \sin A (2\cos^2 A + 1)$ .

15.  $\tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$ .

16.  $\cot \frac{A}{2} = \frac{\sin A}{1 - \cos A} = \frac{1 + \cos A}{\sin A}$ .

17.  $\operatorname{cosec} A + \cot A = \cot \frac{A}{2}$ .

18.  $\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A} = \tan^2 \left( 45^\circ + \frac{A}{2} \right)$ .

19.  $\tan \frac{A}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 A}}{\tan A}$ .

20.  $\cos 36^\circ, \tan 36^\circ$  ヲ求ム.

## 第四章 正弦及餘弦ノ和ト積

## 48. 正弦, 餘弦ノ積ヲ和ノ形ニ變ズ

ル公式. 公式(13), (14)ヨリ直チニ

$$\left. \begin{aligned} 2\sin A \cos B &= \sin(A+B) + \sin(A-B) \\ 2\cos A \sin B &= \sin(A+B) - \sin(A-B) \\ 2\cos A \cos B &= \cos(A+B) + \cos(A-B) \\ 2\sin A \sin B &= -\cos(A+B) + \cos(A-B) \end{aligned} \right\} (24)$$

49. 正弦, 餘弦ノ和ヲ積ノ形ニ變ズ  
ル公式.

$$\left. \begin{aligned} \sin C + \sin D &= 2\sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \\ \sin C - \sin D &= 2\cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \\ \cos C + \cos D &= 2\cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \\ \cos C - \cos D &= -2\sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \end{aligned} \right\} (25)$$

證明 公式(24)ニ於テ  $A+B=C$ ,  $A-B=D$ ト置  
ケバ

$$A = \frac{C+D}{2}, \quad B = \frac{C-D}{2}$$

ナルニヨリ此公式トナル.

例 1.  $\sin A + \cos A = \sqrt{2} \cos(45^\circ - A)$ ヲ證明セヨ.

$$\begin{aligned} \text{證明 } \sin A + \cos A &= \sin A + \sin(90^\circ - A) \\ &= 2\sin 45^\circ \cos(45^\circ - A) \\ &= \sqrt{2} \cos(45^\circ - A). \end{aligned}$$

例 2.  $\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \tan \frac{A-B}{2} \cot \frac{A+B}{2}$ ヲ證明セヨ.

$$\begin{aligned} \text{證明 } \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} &= \frac{2\sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}}{2\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}} \\ &= \tan \frac{A-B}{2} \cot \frac{A+B}{2}. \end{aligned}$$

## 問題 十二

次ノ式ヲ和或ハ差ノ形ニ變ゼヨ.

- |                                    |                                  |
|------------------------------------|----------------------------------|
| 1. $2\sin 2A \cos A.$              | 2. $2\cos \alpha \cos 2\beta.$   |
| 3. $\sin \alpha \cos 3\alpha.$     | 4. $2\sin 2\alpha \sin 3\alpha.$ |
| 5. $2\sin 15^\circ \cos 45^\circ.$ | 6. $2\sin 6^\circ \sin 5^\circ.$ |

次ノ式ヲ積ノ形ニ變ゼヨ.

- |                                      |                                      |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 7. $\sin 4A + \sin 3A.$              | 8. $\sin 3\theta - \sin \theta.$     |
| 9. $\cos 6\theta + \cos 3\theta.$    | 10. $\cos 10\alpha - \cos 8\alpha.$  |
| 11. $\sin 70^\circ + \sin 30^\circ.$ | 12. $\sin 70^\circ - \sin 40^\circ.$ |

$$13. \cos 60^\circ + \cos 30^\circ. \quad 14. \cos 125^\circ - \cos 55^\circ.$$

次ノ等式ヲ證明セヨ.

$$15. \sin(A+60^\circ) + \sin(A-60^\circ) = \sin A.$$

$$16. 2 \sin(A+45^\circ) \cos(B-45^\circ) = \cos(A-B) + \sin(A+B).$$

$$17. \frac{\sin A \pm \sin B}{\cos A + \cos B} = \tan \frac{A \pm B}{2}.$$

$$18. \frac{\cos 50^\circ - \cos 70^\circ}{\sin 70^\circ - \sin 50^\circ} = \sqrt{3}.$$

$$19. \frac{\sin(A+3B) + \sin(3A+B)}{\sin 2A + \sin 2B} = 2 \cos(A+B).$$

$$20. \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \sin \frac{3\alpha}{2}.$$

$$21. \cos(30^\circ - A) \cos(60^\circ - A) = \frac{1}{4}(2 \sin 2A + \sqrt{3}).$$

$$22. \tan(45^\circ + A) - \tan(45^\circ - A) = 2 \tan 2A.$$

$$23. \cos A + \cos(120^\circ - A) + \cos(120^\circ + A) = 0.$$

$$24. \sin 70^\circ = \sin 10^\circ + \sin 50^\circ.$$

$$25. \sin \alpha \sin 2\alpha + \sin 3\alpha \sin 6\alpha = \sin 4\alpha \sin 5\alpha.$$

$$26. \sin A \sin(B-C) + \sin B \sin(C-A) + \sin C \sin(A-B) = 0.$$

$$27. \frac{\sin 45^\circ + \cos 75^\circ}{\sin 45^\circ - \cos 75^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cot 15^\circ.$$

$$28. 4 \cos A \cos(60^\circ - A) \cos(60^\circ + A) = \cos 3A.$$

$$29. \sin A (\cos 2A + \cos 4A + \cos 6A) = \sin 3A \cos 4A.$$

30. A, B, C ガ等差級數ヲナストキハ

$$\sin A - \sin C = 2 \sin(A-B) \cos B$$

ナルコトヲ證明セヨ.

31.  $A+B+C=180^\circ$  ナルトキ次ノ等式ヲ證明セヨ.

$$(一) \sin(A+B) = \sin C. \quad (二) \cos(B+C) = -\cos A.$$

$$(三) \sin \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2}. \quad (四) \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2}.$$

$$(五) \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

$$(六) \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

$$(七) \cos A + \cos B + \cos C - 1 = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

32.  $A+B+C=90^\circ$  ナルトキハ

$$\tan C = \frac{1 - \tan A \tan B}{\tan A + \tan B}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

次ノ方程式ヲ解ケ. 但  $0^\circ < x < 360^\circ$  トス.

$$33. \cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}.$$

$$34. \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0.$$

## 第三編 對 數

### 第一章 對數ノ性質

50. 對數ノ性質. 對數ノ性質ハ既ニ代數學ニ於テ學ベルヲ以テ茲ニハ其ノ主要ナルモノヲ列舉スルニ止メン. 又本書ニ於テハ常用對數ニ限ルコトトス.

基本ノ性質.

I.  $\log 10 = 1.$       II.  $\log 1 = 0.$

III.  $\log mn = \log m + \log n.$

IV.  $\log \frac{m}{n} = \log m - \log n.$

V.  $\log n^p = p \log n.$

VI.  $\log \sqrt[p]{n} = \frac{1}{p} \log n.$

VII. 小數點ノ位置ノミ相異ナル二數ノ對數ハ同一ノ假數ヲ有ス.

VIII. 1ヨリモ大ナル數ノ對數ノ指標ハ其ノ整數部ノ數字ノ數ヨリモ1ダケ小ナル數ニシテ, 1ヨリモ小ナル正數ノ對數ノ指標ハ負數ニシテ

其ノ絶對値ハ其數ノ小數點ト最初ノ有効數字トノ間ニアル0ノ數ヨリモ1ダケ大ナリ.

### 問 題 十 三

四桁ノ對數表ヲ用ヒテ次ノ對數及數 $x$ ヲ求ム.

1.  $\log 365.24.$     2.  $\log 97.0956.$     3.  $\log 0.28353.$

4.  $\log 0.000809028.$     5.  $\log (2.046)^3.$

6.  $\log \sqrt{0.052714}.$     7.  $\log (2^5 \times 35).$

8.  $\log 3.1416 \times \frac{3.3}{\sqrt[3]{8}}.$     9.  $\log x = 2.7109.$

10.  $\log x = \bar{3}.1028.$     11.  $\log x = \bar{5}.4273.$

12.  $x = 26.205 \times 3.8^2.$     13.  $x = \frac{1.0029}{\sqrt{0.8246}}$

14.  $x = \sqrt[3]{15} \div \sqrt[5]{20}.$

### 第二章 三角函數ノ對數

51. 對數表. 三角形ノ解法其他應用上ノ計算ニハ對數ヲ用ヒルガ便利ナリ.

倍 $90^\circ$ 以下ノ正角ノ三角函數ノ多クハ1ヨリモ小ナルヲ以テ其ノ對數ノ指數ハ負數ナルモノガ

多數ナリ。通常三角函數ノ對數表ニハ負ノ指標ヲ記入スル代リニ之ニ10ヲ加ヘタルモノヲ掲載ス。斯ノ如ク10ヲ加ヘタルモノヲ表對數ト云ヒ、之ヲ表スニLヲ以テス。

$$\text{例ハバ } L \sin 45^\circ = \log \sin 45^\circ + 10 = 9.8495.$$

卷末ニ掲載セルハ正弦,餘弦,正切及餘切ノ四桁ノ對數表ナリ。

此表ノ使用法ハ數ノ對數表ノ場合ト大差ナシ。唯注意スベキハ,(1)三角函數ノ對數表ニ於テハ指標ヲモ併セテ掲載スルコト,(2)角ガ増大スルニ從テ正弦,正切ノ對數ハ増大スレドモ餘弦,餘切ノ對數ハ減小スルコト,(3)45°ヨリモ大ナル角ノ三角函數ノ對數ハ45°ヨリモ小ナル角ノモノニテ表サルルコトナリ。

比例部分ノ法則ニ亦成立ス。即チ二ツノ角ノ差ガ比較的餘程小ナルトキハ其角ノ三角函數ノ對數ノ差ハ一般ニ其角ノ差ニ比例ス。

## 52. 角ガ與ヘラレタル場合.

例 1.  $L \sin 25^\circ 50'$ ヲ求ム.

解 表ヲ開キテ角ノ欄内  $25^\circ 40'$ ニ並ベル  $L \sin$

ノ欄内ノ數ヲ取レバ直チニ

$$L \sin 25^\circ 50' = 9.6392 \quad \text{答.}$$

例 2.  $L \cos 41^\circ 26'.4$ ヲ求ム.

解  $L \cos 41^\circ 20' = 9.8756$  表差.....11

$$10' : 6'.4 = 11 : x$$

$$\therefore x = \frac{11 \times 6.4}{10} = 7.04$$

$$\therefore L \cos 41^\circ 26'.4 = 9.8756 - 0.0007 = 9.8749 \quad \text{答.}$$

表ニ掲載セル比例部分ヲ用ヒテ計算スレバ

$$L \cos 41^\circ 20' = 9.8756$$

$$\text{比例部分ヨリ } \frac{6'.4 \dots\dots 7}{10}$$

$$L \cos 41^\circ 26'.4 = 9.8749.$$

## 53. 對數ガ與ヘラレタル場合.

例 1.  $L \cot x = 9.7165$ ニ適合スル角  $x$ ヲ求ム.

解 表ニヨリ直チニ

$$x = 62^\circ 30' \quad \text{答.}$$

例 2.  $L \sin x = 9.8598$ ニ適合スル角  $x$ ヲ求ム.

解  $L \sin 46^\circ 20' = 9.8594$  表差.....12

$$9.8598 - 9.8594 = 0.0004$$

$$12 : 4 = 10' : (\text{角ノ差})$$

$$\therefore \text{角ノ差} = \frac{10' \times 4}{12} = 3'.3$$

$$\therefore x = 46^\circ 20' + 3'.3 = 46^\circ 23'.3 \quad \text{答.}$$

或ハ比例部分ヲ用フレバ直チニ所要ノ角ノ差ハ3'.3ナルコトヲ知ルヲ得.

### 54.\* $0^\circ$ 或ハ $90^\circ$ ニ近キ角ノ場合.

$0^\circ$  ニ近キ角ノ正弦, 正切及餘切或ハ  $90^\circ$  ニ近キ角ノ餘弦, 餘切及正切ノ對數ニハ比例部分ノ法則ヲ適用スルコトヲ得ズ. (表ニツキテ調査セヨ).

倍或角ノ餘切ノ對數ハ同ジ角ノ正切ノ對數ヲ0ヨリ減ジタルモノニ等シク, 又或角ノ餘弦, 餘切ノ對數ハ夫夫同ジ角ノ餘角ノ正弦, 正切ノ對數ニ等シ. 因テ小ナル角ノ正弦及正切ノ對數ヲ知レバ可ナリ. 故ニ卷末ニハ  $8^\circ$  以下ノ角ノ正弦及正切ノ對數ヲ1'オキニ取リタル表ヲ掲載シ置キタリ.

尙又小ナル角ノ正弦及正切ノ表對數ハ次ノ公式ニヨリテ計算スルヲ可トス.

$$L \sin x' = \log x + S, \quad \log x = L \sin x' - S,$$

$$L \tan x' = \log x + T, \quad \log x = L \tan x' - T.$$

茲ニ S 及 T ハ表中ニ於テ  $x'$  ( $x$  分) ニ最モ接近ス

\*本節ハ教授上ノ都合ニテ省略スルモ可ナリ.

ル角ニ對應スル S 及 T ノ値ナリ.

卷末ノ表ニ於テハ  $0^\circ$  ヨリ  $8^\circ$  迄ノ角ニ對應スル S 及 T ノ値ヲ掲ゲ置キタリ.

一般ニ  $8^\circ$  以下ノ角ノ正弦及正切ノ對數ヲ計算スルニハ此公式ヲ用フルヲ可トス.

例 1.  $L \sin 1^\circ 27'.5$  ヲ求ム.

$$\text{解 } 1^\circ 27'.5 = 87'.5 \quad \log 87.5 = 1.9420$$

$$S = 6.4637$$

$$L \sin 87'.5 = 8.4057 \quad \text{答.}$$

例 2.  $L \tan x' = 8.1209$  ニ適合スル角  $x'$  ヲ求ム.

解 先ヅ  $L \tan$  ノ欄中 8.1209 ニ最モ近キモノニ對スル T ヲ見出シテ計算スルコト次ノ如シ.

$$L \tan x' = 8.1209$$

$$T = 6.4638$$

$$\log x = 1.6571 \quad x' = 45'.40 \quad \text{答.}$$

## 問題 十四

次ノ對數及角  $x$  ヲ求ム.

1.  $L \sin 26^\circ 18'.$
2.  $L \cos 40^\circ 53'.4.$
3.  $L \tan 72^\circ 41'.8.$
4.  $L \cot 50^\circ 12'.5.$

5.  $L \sin 2^\circ 16'.8$ .      6.  $L \tan 1^\circ 8' 45''$ .  
 7.  $L \sin x = 9.4026$ .      8.  $L \tan x = 0.5083$ .  
 9.  $L \cos x = 9.8142$ .      10.  $L \cot x = 9.4215$ .  
 11.  $L \sin x = 7.5322$ .      12.  $L \tan x = 8.1047$ .

### 55. 直角三角形ノ解法ニ應用.

直角三角形ノ解法ニ對數計算ヲ應用スル公式ヲ列擧スレバ次ノ如シ.

(I)  $c, A$  ヲ知ルトキ.

$$\log a^* = \log c + \log \sin A, \quad \log b = \log c + \log \cos A,$$

$$B = 90^\circ - A.$$

(II)  $b, A$  ヲ知ルトキ.

$$\log c = \log b - \log \cos A, \quad \log a = \log b + \log \tan A,$$

$$B = 90^\circ - A.$$

(III)  $c, a$  ヲ知ルトキ.

$$\log \sin A = \log a - \log c, \quad B = 90^\circ - A,$$

$$\log b = \log c + \log \cos A = \log a + \log \cot A.$$

或ハ 
$$\log b = \frac{1}{2} \{ \log(c-a) + \log(c+a) \}.$$

(IV)  $a, b$  ヲ知ルトキ.

$$\log \tan A = \log a - \log b, \quad B = 90^\circ - A,$$

\* $\log a$  ハ  $a$  ノ數値ノ對數ヲ表スモノトス. 以下倣之.

$$\log c = \log b - \log \cos A = \log a - \log \sin A.$$

例.  $c = 20$  尺,  $A = 35^\circ 8'$  ナル直角三角形ヲ解ケ.

解  $\log 20 = 1.3010$        $\log 20 = 1.3010$

$$\log \sin 35^\circ 8' = 9.7600 - 10 \quad \log \cos 35^\circ 8' = 9.9127 - 10$$

$$\log a = 1.0610$$

$$\log b = 1.2137$$

$$a = 11.51 \text{ 尺}$$

$$b = 16.36 \text{ 尺}$$

$$B = 90^\circ - 35^\circ 8' = 54^\circ 52'$$

答

### 問題十五

對數計算ヲ應用シテ次ノ直角三角形ヲ解ケ.

1.  $c = 507.3$  米,  $A = 36^\circ 23'.4$ .

2.  $a = 7549$  尺,  $B = 53^\circ 47'.6$ .

3.  $a = 10.82$  間,  $A = 40^\circ 17'.2$ .

4.  $c = 50.6$  米,  $a = 28.3$  米.

5.  $a = 230.7$  尺,  $b = 582.4$  尺.

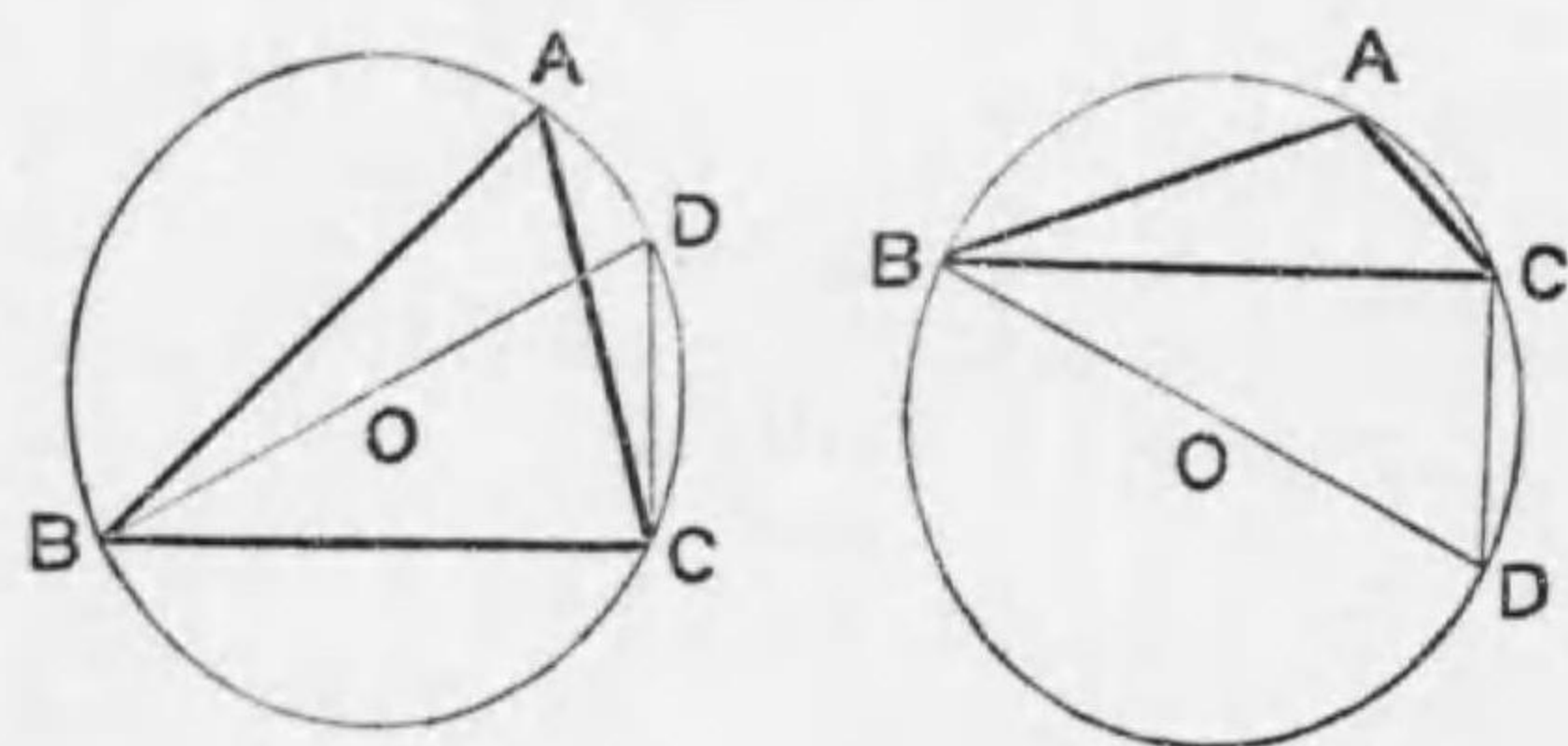
## 第四編 任意ノ三角形

### 第一章 三角形ノ性質

56. 定理一. 三角形ノ邊ハ其ノ對角ノ正弦ニ比例ス. (正弦法則) 即チ

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \dots (26)$$

證明 三角形ABCノ外接圓Oノ直徑BDヲ引キ, C, Dヲ結ビ付ケヨ. 然ルトキハ



$A < 90^\circ$  ナルトキハ  $D=A$ ,

$A > 90^\circ$  ナルトキハ  $D=180^\circ-A$ ,

且何レノ場合ニ於テモ明ニ

$$BC = BD \sin D = BD \sin A,$$

因テ外接圓ノ半徑ヲ  $R$  ニテ表セバ

$$\frac{a}{\sin A} = 2R.$$

同理ニヨリ  $\frac{b}{\sin B} = 2R, \frac{c}{\sin C} = 2R.$

又  $A=90^\circ$  ナルトキハ  $\frac{a}{\sin A} = \frac{a}{1} = 2R,$

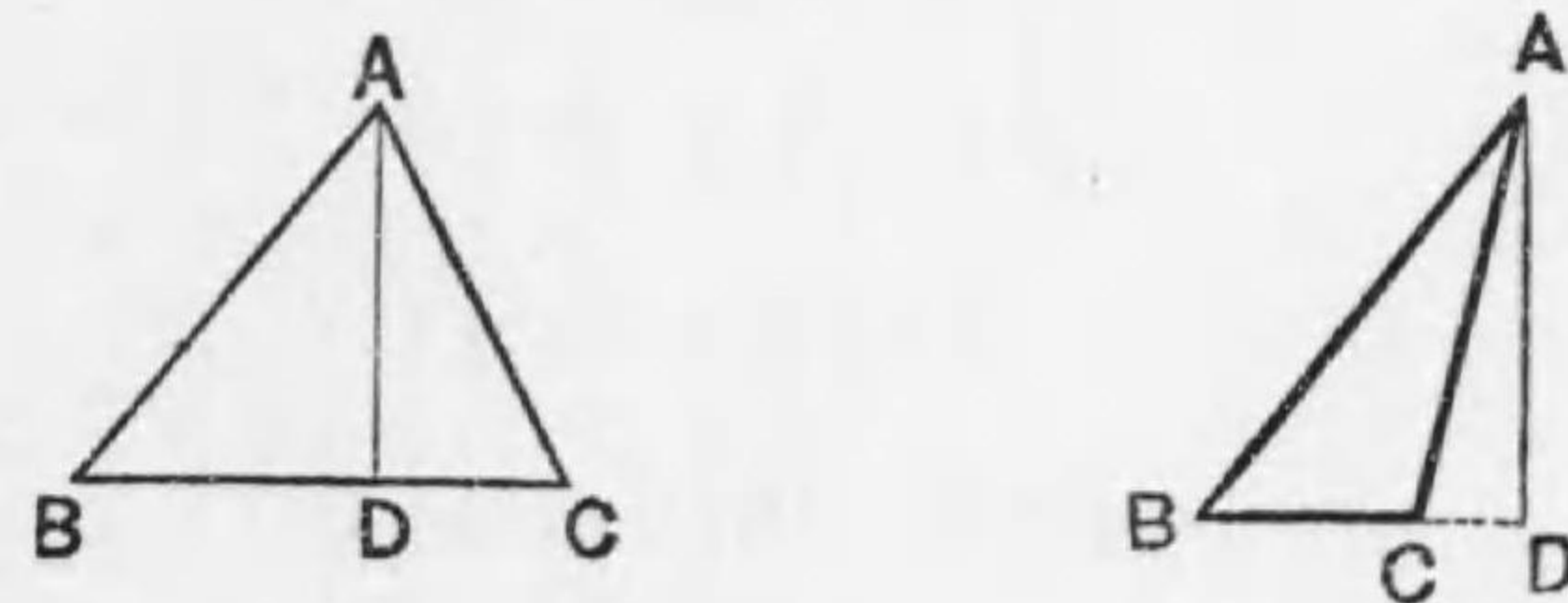
$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} (=2R).$$

系.  $a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C.$

57. 定理二. 三角形ノ各邊ハ他ノ二邊ノ各ト之ニ隣レル角ノ餘弦トノ積ノ和ニ等シ. (第一餘弦法則) 即チ

$$\left. \begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B \\ b &= c \cos A + a \cos C \\ c &= a \cos B + b \cos A \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

證明 頂點Aヨリ邊BCニ垂線ADヲ下セバ



先ヅB, C共ニ銳角ナルトキハ  $BC = BD + DC,$

$$\therefore a = c \cos B + b \cos C.$$

次ニB, Cノ一方例ヘバCガ鈍角ナルトキハ



$$BC = BD - CD,$$

$$\therefore a = c \cos B - b \cos (180^\circ - C) = c \cos B + b \cos C.$$

注意. B が鈍角ナル場合及 B, C ノ一方ガ直角ナル場合ハ學者自ラ之ヲ講究セヨ.

因テ他ノ二式モ亦成立ス.

$$\begin{aligned} \text{別證} \quad a &= 2R \sin A = 2R \sin (B+C) \\ &= 2R (\sin B \cos C + \cos B \sin C) \\ &= 2R \sin B \cos C + 2R \sin C \cos B \\ &= b \cos C + c \cos B. \end{aligned}$$

58. 定理三. 三角形ノ各邊ノ平方ハ他ノ二邊ノ平方ノ和ヨリ此二邊ト其ノ夾角ノ餘弦トノ積ノ二倍ヲ減ジタル差ニ等シ. (第二餘弦法則) 即チ

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

證明 公式(27)ノ第一ノ兩邊ニ  $a$  ヲ乘ジタルモノヲ, 第二第三ノ兩邊ニ夫夫  $b, c$  ヲ乘ジテ邊邊相加ヘタルモノヨリ邊邊相減ズレバ

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A,$$

$$\text{移項スレバ} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

因テ他ノ二式モ亦成立ス.

注意. 面積ニ關スル幾何學ノ定理ヲ用フルコトニヨリテモ亦容易ニ之ヲ證明スルヲ得.

59. 二邊ト夾角トニヨリ他ノ邊及他ノ二角ノ差ヲ求ムル公式.

$$\left. \begin{aligned} a \sin \frac{B-C}{2} &= (b-c) \cos \frac{A}{2} \\ a \cos \frac{B-C}{2} &= (b+c) \sin \frac{A}{2} \\ \tan \frac{B-C}{2} &= \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2} \end{aligned} \right\} \dots (29)$$

證明 公式(26)ニヨリ

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b-c}{\sin B - \sin C} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C},$$

即チ

$$\frac{a}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{b-c}{2 \sin \frac{B-C}{2} \cos \frac{B+C}{2}} = \frac{b+c}{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}$$

$$\text{然ルニ } A+B+C=180^\circ, \therefore \frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2},$$

$$\therefore \cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}, \quad \sin \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2},$$

$$\therefore \frac{a}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{b-c}{\sin \frac{B-C}{2}}, \quad \frac{a}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{b+c}{\cos \frac{B-C}{2}}$$

$$\therefore a \sin \frac{B-C}{2} = (b-c) \cos \frac{A}{2},$$

$$a \cos \frac{B-C}{2} = (b+c) \sin \frac{A}{2},$$

邊邊相除スレバ

$$\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}.$$

### 60. 三邊ニヨリ角ヲ求ムル公式.

$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$  ト置ケバ

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \\ \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \\ \tan \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \end{aligned} \right\} \dots (30)$$

$\frac{B}{2}, \frac{C}{2}$  ノ正弦, 餘弦, 正切ノ公式ハ之ニ準ズ.

證明 公式(28)ニヨリ

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

又公式(18)ニヨリ

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2}, \quad \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin^2 \frac{A}{2} &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \\ &= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} \\ &= \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}. \end{aligned}$$

倍

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c),$$

$$\therefore a-b+c = 2(s-b), \quad a+b-c = 2(s-c),$$

$$\therefore \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}.$$

且  $\frac{A}{2}$  ハ  $90^\circ$  以下ノ正角ナルヲ以テ

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

同様ノ計算ニヨリ

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

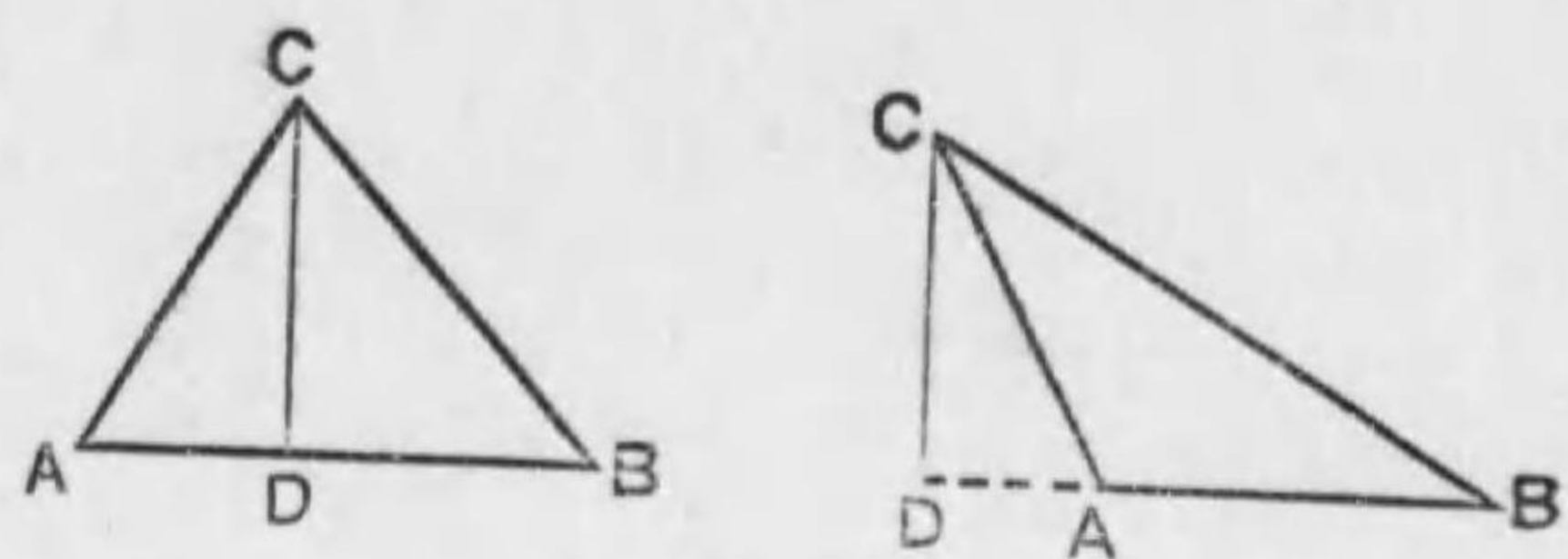
邊邊相除スレバ  $\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ .

### 61. 三角形ノ面積. 三角形ノ面積ヲ $S$ ニ

テ表セバ

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bc \sin A, \quad S = \frac{1}{2}ca \sin B \\ S &= \frac{1}{2}ab \sin C \end{aligned} \right\} (31)$$

證明 三角形  $ABC$ ニ於テ  $CD$ ヲ高サトスレバ



$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CD,$$

然ルニ  $AB = c, \quad CD = b \sin A,$

$$\therefore S = \frac{1}{2} bc \sin A.$$

因テ他ノ二式モ亦成立ス。

系.  $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \dots (32)$

證明  $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$

(30) = ヨリ  $= \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$

故ニ(31)ニ之ヲ代入スレバ(32)トナル。

### 問題 十六

三角形 ABC = 於テ次ノ等式ヲ證明セヨ。

1.  $b \sin B - c \sin C = a \sin (B-C).$
2.  $b \cos B + c \cos C = a \cos (B-C).$
3.  $a^2 \sin (B-C) = (b^2 - c^2) \sin A.$
4.  $\frac{a - c \cos B}{\sin B} = \frac{b - c \cos A}{\sin A}.$

5.  $\frac{a}{\cos B} - \frac{b}{\cos A} = \cos C \left( \frac{b}{\cos B} - \frac{a}{\cos A} \right).$
6.  $a \sin (B-C) + b \sin (C-A) + c \sin (A-B) = 0.$
7.  $c (\sin^2 A + \sin^2 B) = \sin C (a \sin A + b \sin B).$
8.  $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 2a \sin B \sin C.$
9.  $b \cos A - a \cos B = \frac{b^2 - a^2}{c}.$
10.  $\frac{a \cos B - b \cos A}{\sin (A-B)} = \frac{c}{\sin C}.$
11.  $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}.$
12.  $a \sin^2 C = c (\cos B + \cos A \cos C).$
13.  $(s-b) \tan \frac{B}{2} = (s-c) \tan \frac{C}{2}.$
14.  $(b+c-a) \tan \frac{A}{2} = (c+a-b) \tan \frac{B}{2}$   
 $= (a+b-c) \tan \frac{C}{2}.$
15.  $a+c=2b$  ナルトキハ  
 $a \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{3}{2} b.$
16.  $a \cos A = b \cos B$  ナルトキハ 三角形 ABC ハ二  
等邊ナルカ或ハ直角三角形ナリ。
17. D ヲ邊 BC ノ中點トスレバ  
 $\cot BAD - \cot B = 2 \cot A.$

$$18. \quad 2 \cos A + \cos B + \cos C = 2 \text{ ナルトキハ}$$

$$2a = b + c.$$

$$19. \quad a, b, c \text{ ガ等差級數ヲナストキハ}$$

$$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3}.$$

$$20. \quad S = s^2 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

## 第二章 斜角三角形ノ解法

62. 任意ノ三角形. 任意ノ三角形ハ其ノ六原素ノ中三ツヲ知ルコトニヨリ之ヲ解クコトヲ得. 但三ツノ角ヲ知ルダケニテハ三邊ヲ求ムルコトヲ得ズ. 而シテ其ノ解法ハ次ノ四ツノ場合ニ分タル.

63. 第一ノ場合. 一邊及二角ヲ知リテ三角形ヲ解クコト.

解 既知數  $a, B, C$ ; 未知數  $A, b, c$ .

$$\text{公式} \quad A = 180^\circ - (B + C),$$

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

$$\text{因テ} \quad \log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A,$$

$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A.$$

例.  $a = 485.6$  尺,  $B = 38^\circ 52'$ ,  $C = 80^\circ 26'$  ナル三角形ヲ解ケ.

解 $a = 485.6$ 尺	$\log a = 2.6862$
$B = 38^\circ 52'$	$\log \sin B = 9.7976 - 10$
$C = 80^\circ 26'$	$\log \sin C = 9.9939 - 10$
$B + C = 119^\circ 18'$	$\log \sin A = 9.9405 - 10$

答	}	$A = 60^\circ 42'$	$\log b = 2.5433$
		$b = 349.4$ 尺	$\log c = 2.7396$
		$c = 549.0$ 尺	

注意. 實際計算ニ於テハ或數ノ對數ヲ減ズル代リニ其ノ符號ヲ變ジタルモノ(餘對數ト云フ)ヲ加フルヲ便利トス. 即チ上ノ場合ニハ次ノ如クス.

$\log a = 2.6862$	$\log a = 2.6862$
$\log \sin B = 9.7976 - 10$	$\log \sin C = 9.9939 - 10$
$-\log \sin A = 0.0595$	$-\log \sin A = 0.0595$
$\log b = 2.5433$	$\log c = 2.7396$

64. 第二ノ場合 二邊及其ノ夾角

ヲ知リテ三角形ヲ解クコト。

解 既知數  $b, c, A$ ; 未知數  $B, C, a$ .

公式 
$$\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2},$$

$$\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2},$$

$$a = \frac{(b+c) \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B-C}{2}},$$

或ハ 
$$a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{c \sin A}{\sin C}.$$

因テ 
$$\log \tan \frac{B-C}{2} = \log(b-c) - \log(b+c) + \log \cot \frac{A}{2},$$

$$\log a = \log(b+c) + \log \sin \frac{A}{2} - \log \cos \frac{B-C}{2},$$

或ハ 
$$\begin{aligned} \log a &= \log b + \log \sin A - \log \sin B \\ &= \log c + \log \sin A - \log \sin C. \end{aligned}$$

注意. (1) 公式(29)ノ第一即チ

$$a = \frac{(b-c) \cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B-C}{2}}$$

ニヨルモ亦  $a$  ヲ求ムルコトヲ得レドモ多クノ場合ニ於テ  $\frac{B-C}{2}$  ハ小ナルヲ以テ之ハ適切ナラス。

(2)  $b, c$  ノ代リニ其ノ對數ガ與ヘラルルトキハ  $\frac{B-C}{2}$  ハ次ノ公式ヨリ計算スルヲ可トス。

$$\left. \begin{aligned} \tan \varphi^* &= \frac{b}{c}, \\ \tan \frac{B-C}{2} &= \tan(\varphi - 45^\circ) \cot \frac{A}{2} \end{aligned} \right\}$$

何トナレバ

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\frac{b}{c} - 1}{\frac{b}{c} + 1} = \frac{\tan \varphi - 1}{\tan \varphi + 1} = \tan(\varphi - 45^\circ)$$

ナルガ故ナリ。

例 1.  $b = 600$  米,  $c = 350$  米,  $A = 108^\circ 25'$  ナル三角形ヲ解ケ。

解  $b = 600$

$c = 350$

$b - c = 250$

$\log(b - c) = 2.3979$

$b + c = 950$

$-\log(b + c) = \bar{3}.0223$

$\frac{A}{2} = 54^\circ 12'.5$

$\log \cot \frac{A}{2} = 9.8579 - 10$

$\frac{B+C}{2} = 35^\circ 47'.5$

$\log \tan \frac{B-C}{2} = 9.2781 - 10$

$\frac{B-C}{2} = 10^\circ 44'.5$

$\log(b + c) = 2.9777$

$B = 46^\circ 32'.0$

$\log \sin \frac{A}{2} = 9.9091 - 10$

答

$C = 25^\circ 3'.0$   $-\log \cos \frac{B-C}{2} = 0.0077$

$a = 784.3$  米.

$\log a = 2.8945$

\* 斯ノ如キ數ヲ補助未知數ト云フ。

例 2.  $\log b = \bar{1}.6725$ ,  $\log c = \bar{1}.2632$ ,  $A = 75^\circ 42'$  ナル三角形ヲ解ケ. 但長サノ單位ハ軒トス.

$\log b = \bar{1}.6725$	$\varphi = 68^\circ 42'.6$
$-\log c = 0.7368$	$\varphi - 45^\circ = 23^\circ 42'.6$
$\log \tan \varphi = 0.4093$	$\log \tan (\varphi - 45^\circ) = 9.6426 - 10$
$A = 75^\circ 42'$	$\log \cot \frac{A}{2} = 0.1095$
$\frac{A}{2} = 37^\circ 51'$	$\log \tan \frac{B-C}{2} = 9.7521 - 10$
$\frac{B+C}{2} = 52^\circ 9'$	$\log b = \bar{1}.6725$
$\frac{B-C}{2} = 29^\circ 28'.3$	$\log \sin A = 9.9864 - 10$
答 $\left\{ \begin{array}{l} B = 81^\circ 37'.3 \\ C = 22^\circ 40'.7 \\ a = 0.4609 \text{ 軒} \end{array} \right.$	$-\log \sin B = 0.0047$
	$\log a = \bar{1}.6636$

65. 第三ノ場合. 二邊及其ノ一ツノ對角ヲ知リテ三角形ヲ解クコト.

解 既知數  $a, b, A$ ; 未知數  $B, C, c$ .

公式  $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$ ,

$$C = (180^\circ - A) - B,$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

因テ  $\log \sin B = \log b + \log \sin A - \log a$ ,

$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A.$$

吟味. 先ヅ第一ノ式ニヨリ  $B$  ヲ求ムルニハ

$$b \sin A \leq a$$

ナルコトヲ要ス. 倍  $b \sin A = a$  ナルトキハ  $B$  ハ  $90^\circ$  ニシテ,  $b \sin A < a$  ナルトキハ  $B$  ノ値トシテ銳角ト之ノ補角ナル鈍角トヲ得ベシ. 此等ノ  $B$  ノ値ニ對シ第二ノ式ヨリ求メラルル  $C$  ノ値ハ正ナラザルベカラズ. 因テ次ノ場合ニ分ル.

(i)  $A \geq 90^\circ$  ナル場合. 此場合ニハ  $A > B$ , 從テ  $B$  ハ銳角, 且  $a > b$  ナラザルベカラズ. 因テ

(1)  $a \leq b$  ナルトキハ解ナシ.

(2)  $a > b$  ナルトキハ唯一ツノ解アリ.

(ii)  $A < 90^\circ$  ナル場合. 此場合ニハ,  $a \geq b$  ナルトキハ  $A \geq B$  ニシテ  $B$  ハ銳角ナラザルベカラズ, 又  $a < b$  ナルトキハ  $A < B$ , 從テ  $B$  ハ銳角, 鈍角ノ何レトモナルコトヲ得. 因テ

(1)  $a \geq b$  ナルトキハ唯一ツノ解アリ.

(2)  $b \sin A < a < b$  ナルトキハ二ツノ解アリ. 此場合ヲ兩意ノ場合ト云フ.

(3)  $b \sin A = a$  ナルトキハ唯一ツノ解アリ.

(4)  $b \sin A > a$  ナルトキハ解ナシ.

例.  $a = 2.6284$  軒,  $b = 4.0283$  軒,  $A = 28^\circ 54'.5$  ナル三角形ヲ解ケ.

解	$A = 28^\circ 54'.5$	$\log b = 0.6051$
	$180^\circ - A = 151^\circ 5'.5$	$\log \sin A = 9.6843 - 10$
		$-\log a = \bar{1}.5803$
		$\log \sin B = 9.8697 - 10$

答 (I)	$B = 47^\circ 48'.2$	$\log a = 0.4197$
	$C = 103^\circ 17'.3$	$\log \sin C = 9.9882 - 10$
	$c = 5.291$ 軒	$-\log \sin A = 0.3157$
		$\log c = 0.7236$

或ハ 答 (II)	$B = 132^\circ 11'.8$	$\log a = 0.4197$
	$C = 18^\circ 53'.7$	$\log \sin C = 9.5103 - 10$
	$c = 1.761$ 軒	$-\log \sin A = 0.3157$
		$\log c = 0.2457$

66. 第四ノ場合. 三邊ヲ知リテ三角形ヲ解クコト.

解 既知數  $a, b, c$ ; 未知數  $A, B, C$ .

公式  $s = \frac{1}{2}(a+b+c),$

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

$$\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}},$$

$$\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

或ハ次ノ公式ニ依ル方寧ク便利ナリ.

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{r}{s-a}, \quad \tan \frac{B}{2} = \frac{r}{s-b},$$

$$\tan \frac{C}{2} = \frac{r}{s-c}.$$

因テ

$$\log \tan \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \{ \log(s-b) + \log(s-c) - \log s - \log(s-a) \},$$

.....

或ハ  $\log r = \frac{1}{2} \{ \log(s-a) + \log(s-b) + \log(s-c) - \log s \}$

$$\log \tan \frac{A}{2} = \log r - \log(s-a),$$

.....

注意. 上記ノ補助未知數  $r$  ハ三角形ノ内接圓ノ半徑ナルコトヲ容易ニ證明スルヲ得.

例.  $a = 62.58$  尺,  $b = 55.72$  尺,  $c = 50.46$  尺 ナル

三角形ヲ解ケ.

解	$a=62.58$	$\log(s-a)=1.3385$
	$b=55.72$	$\log(s-b)=1.4573$
	$c=50.46$	$\log(s-c)=1.5305$
	<hr/> $2s=168.76$	$-\log s=\bar{2}.0738$
	$s=84.38$	和=2.4001
	$s-a=21.80$	$\log r=1.2001$
	$s-b=28.66$	$-\log(s-a)=\bar{2}.6615$
	$s-c=33.92$	<hr/> $\log \tan \frac{A}{2}=9.8616-10$
	$\frac{A}{2}=36^\circ 1'.2$	$\log r=1.2001$
	$\frac{B}{2}=28^\circ 56'.7$	$-\log(s-b)=\bar{2}.5427$
	$\frac{C}{2}=25^\circ 2'.7$	<hr/> $\log \tan \frac{B}{2}=9.7428-10$
	$A=72^\circ 2'.4$	$\log r=1.2001$
答	$B=57^\circ 53'.4$	$-\log(s-c)=\bar{2}.4695$
	$C=50^\circ 5'.4$	<hr/> $\log \tan \frac{C}{2}=9.6696-10$

驗 和=180° 1'.2

注意. 所得ノ A, B, C ノ和ガ 180° トナラズシテ之ヨリモ少シク大トナリタリ. 之ハ近似計算ニ於テハ止ヲ得ザル事柄ナリ.

## 問題十七

次ノ三角形ヲ解ケ.

1.  $a=328.4$  米,  $B=70^\circ 32'.7$ ,  $C=50^\circ 16'.2$ .
2.  $b=25.85$  尺,  $B=99^\circ 54'.3$ ,  $C=38^\circ 25'.2$ .
3.  $b=82.36$  尺,  $c=57.28$  尺,  $A=78^\circ 36'.4$ .
4.  $a=3.056$  斤,  $b=1.875$  斤,  $C=112^\circ 45'.6$ .
5.  $\log b=\bar{1}.6025$ ,  $\log c=\bar{1}.5003$ ,  $A=64^\circ 23'.8$ .

但長サノ單位ハ哩トス.

6.  $a=0.7346$  哩,  $b=0.5346$  哩,  $A=112^\circ 38'$ .
7.  $b=1.206$  斤,  $c=1.058$  斤,  $B=50^\circ 48'.6$ .
8.  $a=43.62$  尺,  $b=65.87$  尺,  $A=31^\circ 54'.5$ .
9.  $a=300.0$  尺,  $b=350.0$  尺,  $c=400.0$  尺.
10.  $a=532.8$  米,  $b=468.7$  米,  $c=126.9$  米.

注意. 1, 3, 9 ノ三問題ニ於テハ面積ヲモ併セ計算セヨ.

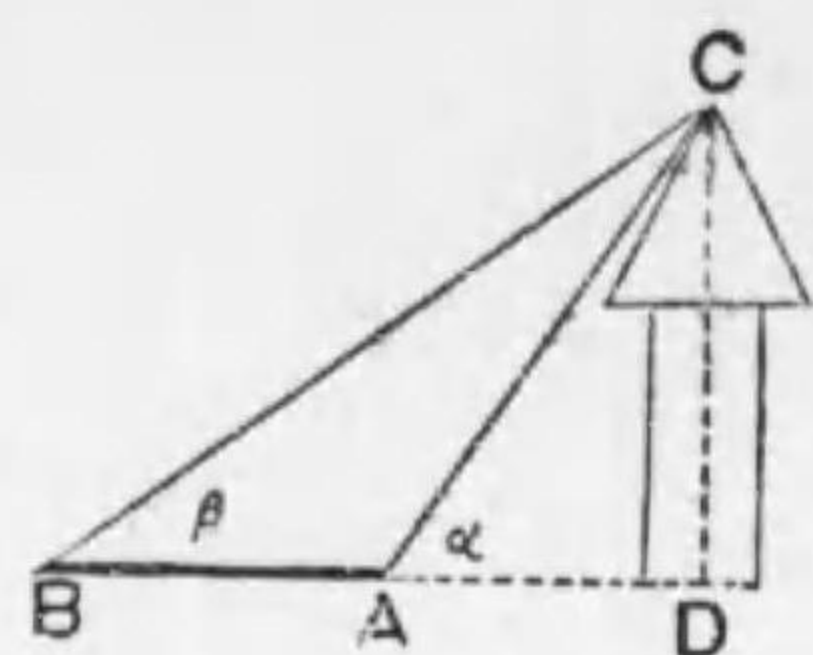
### 第三章 測量上ノ應用

67. 問題一. 直下ニ達シ得ベカラザル點ノ高サヲ測ルコト.



解 Cヲ直下ニ達シ得ベカラザル點トシ, CDヲCノ高サ即チCヨリ或水平面ニ立テタル垂線トセヨ. 然ルトキハ CDヲ測ルニ次ノ二法アリ.

**第一法.** Dヲ含ム水平線上ニ於テ兩端A, BヨリCヲ望見シ得ベキ基線ABヲ選定シテ其ノ長サヲ測リ, 次ニA及Bニ於テCノ



仰角 $\alpha$ 及 $\beta$ ヲ測レ. 然ルトキハ $\angle ACB = \alpha - \beta$ ナリ.

$$\therefore \triangle ABC = \text{於テ} \quad \frac{AC}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin(\alpha - \beta)},$$

$$\text{之ヨリ} \quad AC = \frac{AB \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)},$$

$$\text{又明ニ} \quad CD = AC \sin \alpha,$$

$$\therefore \text{所要ノ高サ} CD = \frac{AB \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

**第二法.** Dヲ含ム水平面上ニ於テ兩端A, BヨリCヲ望見シ得ベキ基線ABヲ選定シテ其ノ長サヲ測リ(A, B, Dハ同一直線上ニアラズトス)次ニAニ於テCノ仰角 $h$ 及水平角BAD即チ $\alpha$ ヲ測リ,

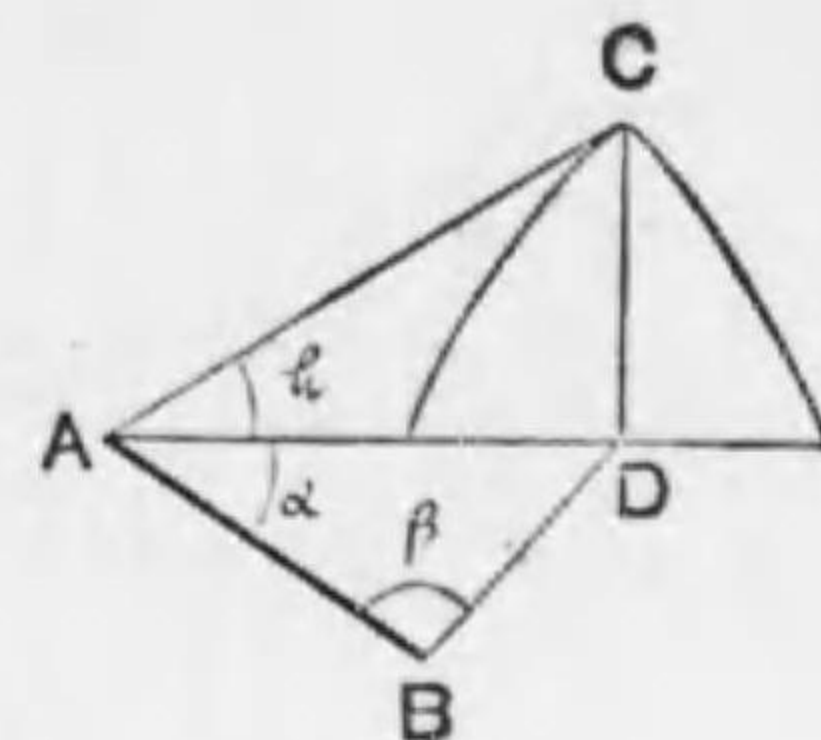
Bニ於テ水平角ABD即チ $\beta$ ヲ測レ. 然ルトキハ先ヅ $\triangle ABD = \text{於テ}$

$$AD = \frac{AB \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)},$$

又明ニ $CD = AD \tan h$ ナルヲ

以テ

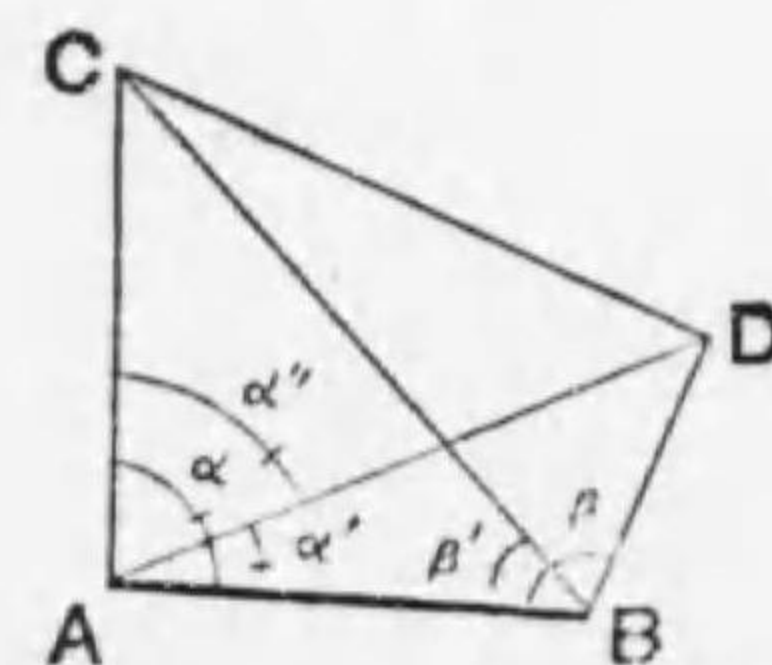
$$\text{所要ノ高サ} CD = \frac{AB \sin \beta \tan h}{\sin(\alpha + \beta)}.$$



**68. 問題二.** 達シ得ベカラザル二點ノ距離ヲ測ルコト.

解 C, Dヲ達シ得ベカラザル二點トセヨ. 兩端A, BヨリC, Dヲ望見シ得ベキ基線ABヲ選定シテ其ノ長サヲ測リ, 次ニ

Aニ於テ三角BAC, BAD, CAD即チ $\alpha, \alpha', \alpha''$ ヲ測リ, Bニ於テ二角ABD, ABC即チ $\beta, \beta'$ ヲ測レ. 然ルトキハ $\triangle ABC$ 及 $\triangle ABD = \text{於テ}$



$$AC = \frac{AB \sin \beta'}{\sin(\alpha + \beta')}, \quad AD = \frac{AB \sin \beta}{\sin(\alpha' + \beta)}.$$

此二等式ニヨリ三角形ACDノ二邊AC, ADヲ求ムルコトヲ得, 而シテ其ノ夾角 $\alpha''$ ハ測定シアルヲ以テ第三邊CDハ第64節ノ方法ニヨリ之ヲ見出スコトヲ得.

注意. 四點A, B, C, Dガ同一平面内ニアルトキハ角CADハ角BAC, BADノ和又ハ差ニ等シ.

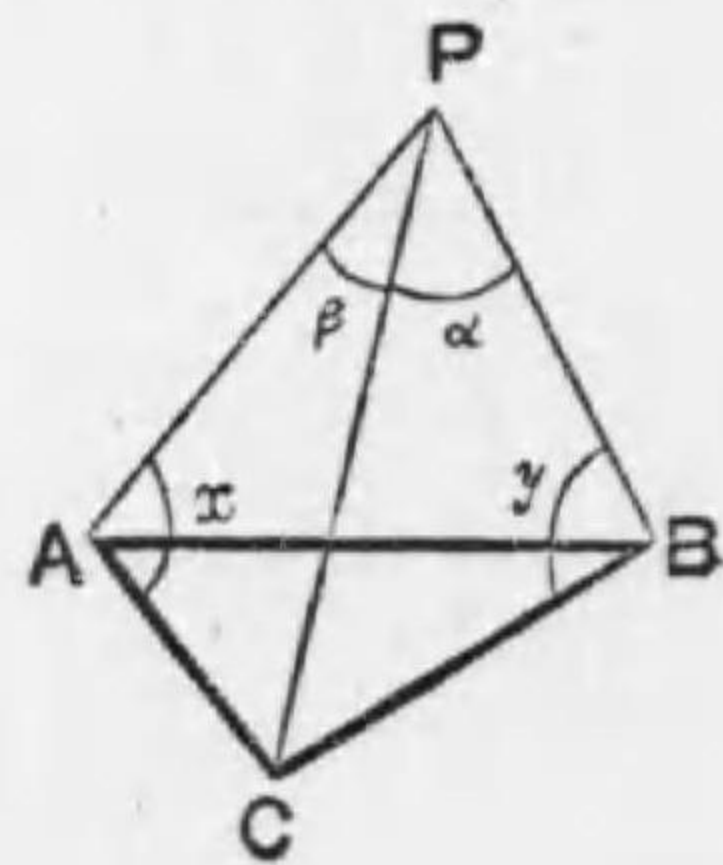
又實際測量ニ於テハ角CBDヲモ測リ置キ, BC, BDノ長サヲ求メテ三角形BCDヲ解キ, 再ビCDノ長サヲ求メテ前ノ結果ヲ驗スコト肝要ナリ.

**69. 問題三.** 與ヘラレタル三角形(ABC)ノ平面上ノ一點(P)ヨリ此三角形ノ二邊(BC, AC)ヲ見込ム角( $\alpha, \beta$ )ヲ測リテ此點ノ位置ヲ求ムルコト.

解  $\angle CAP = x,$

$\angle CBP = y$

ト置ケ.  $x, y$ ヲ知レバ二ツノ三角形ACP, BCPニ於テ二角ト一邊トヲ知ルガ故ニ此三角形ヲ解キテP



ノ位置ヲ決定スルコトヲ得ベシ. 故ニ此問題ハ $x, y$ ヲ求ムルコトニ歸ス.

PACBガ例ハバ凸四角形ナルトキハ

$$\alpha + \beta + x + y + C = 360^\circ,$$

之ヨリ 
$$\frac{x+y}{2} = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta + C}{2} \dots (1)$$

次ニ $\triangle APC, BPC$ ニ於テ

$$\frac{PC}{\sin x} = \frac{b}{\sin \beta}, \quad \frac{PC}{\sin y} = \frac{a}{\sin \alpha},$$

$$\therefore \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha},$$

倍 
$$\tan \varphi = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha} \dots (2)$$

ト置ケバ 
$$\frac{\sin x}{\sin y} = \tan \varphi,$$

之ヨリ 
$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\tan \varphi - 1}{\tan \varphi + 1},$$

即チ 
$$\tan \frac{x-y}{2} \cot \frac{x+y}{2} = \tan(\varphi - 45^\circ),$$

$$\therefore \tan \frac{x-y}{2} = \tan(\varphi - 45^\circ) \tan \frac{x+y}{2} \dots (3)$$

(1), (2)ニヨリテ求メタル $\frac{x+y}{2}, \varphi$ ノ値ヲ(3)ニ代入スレバ $\frac{x-y}{2}$ ノ値ヲ求ムルコトヲ得ベク, 從テ $x, y$ ノ値ヲ求ムルコトヲ得.

70. 羅針盤. 航海用羅針盤ニ於テハ圖ニ



示スガ如ク東西南北ノ各ノ間ノ角ヲ八等分シテ  
 總テノ方向ヲ三十二方位ニ分チ圖ノ如キ名稱ヲ  
 附ス. 例ヘバ東(E)ヨリ南(S)ヘノ名稱ハ東微南  
 (E by S), 東南東(ESE), 南東微東(SE by E), 南東(SE),  
 南東微南(SE by S), 南南東(SSE), 南微東(S by E)等  
 ナリ. 而シテ相隣接セル二ツノ方位ノ間ノ角ハ  
 $360^\circ \div 32$  即チ  $11^\circ 15'$  ナリ.

問題十八

1. 平地ニ立テル塔アリ, 其平地上或地點ニ於  
 ケル其ノ頂上ノ仰角  $30^\circ$  ニシテ其地點ヨリ塔ニ  
 向ツテ進ムコト 85 尺ノ地點ニ於ケル其ノ仰角  $45^\circ$   
 ナリト云フ. 塔ノ高サ何程ナルカ.

2. 或山ノ高サヲ測ラントテ平地ニ基線 AB ヲ  
 選定シ, 其ノ長サヲ測リテ 60 間ヲ得, 又點 A ニ於テ  
 測リタル山頂ノ仰角ハ  $28^\circ$ , 山頂ト點 B トノ方位  
 差  $60^\circ$  ニシテ點 B ニ於テ測リタル山頂ト點 A トノ  
 方位差  $72^\circ$  ナリト云フ. 山ノ高サヲ求ム.

3. 或塔ノ直下ヨリ或山ノ仰角ヲ測リタルニ  
 $31^\circ$ , 其塔ノ頂上ヨリ其山ノ仰角ヲ測リタルニ  $30^\circ$   
 アリタリ, 而シテ塔ノ高サハ 100 尺ナリト云フ.  
 山ノ高サヲ求ム.

4. 東西ノ方向ニ横ハレル或海岸線上 2500 米  
 ノ距離ニアル二點ニ於テ或船ノ方位ヲ測リタル  
 ニ夫夫北  $105^\circ$  西, 北  $117^\circ$  東ヲ得タリト云フ. 此船ハ  
 其海岸線ヨリ南方如何ナル距離ニアルカ.

注意. 北  $105^\circ$  西トハ北ヨリ西ノ方ヘ  $105^\circ$  寄り

タル方向ニシテ、北 $117^\circ$ 東トハ北ヨリ東ノ方へ $117^\circ$ 寄リタル方向ノコトナリ。

5. 正南ニ向テ流ルル河アリ、其ノ河岸ノ或地點ニ於テ對岸ニアル一ツノ旗竿ヲ南西ノ方向ニ望見シ、夫ヨリ南方40間進ミタル處ニテハ其旗竿ヲ西南西ノ方向ニ望見スルニ至レリト云フ。其ノ河ノ幅ヲ求ム。

6. 平地上ノ或地點ニテ測タル或丘ノ頂上ノ仰角ガ $\alpha$ ニシテ、其頂上ニ立テル高サ $a$ 尺ノ人ヲ其地點ヨリ見込ム角ガ $\beta$ ナルトキハ其丘ノ高サハ

$$\frac{a \sin \alpha \cos (\alpha + \beta)}{\sin \beta}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

7. 或丘上ヨリ其ノ麓ニアル圓形ノ池ヲ望見シ、其池畔ノ最モ近キ點ト最モ遠キ點トノ俯角ヲ測リタルニ夫夫 $40^\circ, 35^\circ$ ヲ得タリ、而シテ丘上ハ池ノ面ヨリ400尺ノ高サニアリト云フ。其池ノ直徑ヲ求ム。

8. 平地ト $\alpha$ ノ傾斜ヲナス坂路ノ途中ニ立テル塔 $CD$ アリ、其坂路ニ於テ塔ニ向テ基線 $AB$ ヲ選

定シテ之ヲ測リ、次ニ $A, B$ ニ於テ塔ヲ見込ム角ヲ測リ夫夫 $\beta, \gamma$ ヲ得タリト云フ。塔ノ高サ如何。

9. 丘上ニ旗竿ノ立テルアリ、其ノ麓ノ平地上ニアル人或地點ニ於テ其旗竿ノ頂點ト基點トノ仰角ヲ測リテ夫夫 $\alpha, \beta$ ヲ得、次ニ旗竿ノ方向ニ其平地上ヲ $a$ 米進ミタル處ニテ再ビ之ヲ測リタルニ其旗竿ヲ見込ム角ハ前ト同様ナリシト云フ。丘ノ高サ及旗竿ノ高サヲ求ム。

10. 平地上ノ或地點 $A$ ニ於テ或氣球ヲ正北ニ高度 $45^\circ$ ノ方向ニ望ミ、同時ニ他ノ地點 $B$ ニ於テ之ヲ正東ニ高度 $30^\circ$ ノ方向ニ望ミタリト云フ。 $AB$ ノ距離500米ナルトキハ其氣球ノ高サ何程ナルカ。

11. 或海岸ニ於テ1海里ノ距離ニアル地點 $A, B$ ニ於テ或汽船 $C$ ノ方向ヲ同時ニ測リ、

$$\angle BAC = 27^\circ 8', \quad \angle ABC = 148^\circ$$

ヲ得、夫ヨリ一時間後ニ再ビ之ヲ測リ夫夫 $55^\circ 36', 117^\circ 40'$ ヲ得タリト云フ。此汽船ノ速サヲ求ム。

12. 12「ノット」ノ速サニテ正南ニ向ヒ航走スル汽船アリ、一小島ヲ西微南ニ見タル時ヨリ40分ノ

後ニハ其島ヲ北西微西ニ見ルニ至レリト云フ。  
其島ト航路トノ間ノ距離ヲ求ム。

13. 或汽船10節ノ速サヲ以テ或海峽ヲ北北東ニ向ツテ通過スルアリ。今此海峽ノ西岸ニ立タル人甲ガ其汽船ヲ南東ニ見タルトキヨリ50分ヲ經テ甲ヨリ正東5哩ヲ距タル東岸ニ立タル人乙ハ其汽船ヲ北微東ニ見タリト云フ。甲ヨリ船ヲ乙ト同方向ニ見タルトキ船ハ甲ヨリ何程ノ距離ニアリシカ。

14. 矩形ノ運動場アリ、其四隅ノ點ヲ A, B, C, Dトス。今 Dニ近キ運動場内ノ點 Pニ於テ A, B, Cノ方向ヲ測リ  $\angle APB=68^\circ$ ,  $\angle BPC=43^\circ 30'$ ヲ得タリ、而シテ此矩形ノ邊 AB, BCノ長サハ夫夫80間, 60間ナリト云フ。P點ノ A, B, Cヨリノ距離ヲ求ム。

## 附 錄

## I. 補 充 問 題

## 第一編ニ關スルモノ

1. 直角三角形 ABCノ斜邊 ABノ長サ120米、邊 BCノ長サ50米ナルトキ、角 ABCノ正弦、餘弦、正切ヲ求ム。

2.  $\sec \alpha = \frac{7}{5}$ ナル角  $\alpha$ ヲ作圖セヨ。

3. 直角ヲ夾ム二邊ノ長サガ夫夫50尺, 75尺ナル直角三角形ノ75尺ノ邊ニ對スル角ノ總テノ三角函數ヲ求ム。

4.  $\cot \alpha = \frac{15}{13}$ ナル角  $\alpha$ ヲ作圖セヨ。

5. 次ノ等式ヲ満足スル銳角  $x$ ヲ求ム。

(一)  $\sin(x-20^\circ) = \sin 45^\circ$ .

(二)  $\tan x = \cot 30^\circ$ . (三)  $\cos 2x = \sin 45^\circ$ .

(四)  $\operatorname{cosec}(2x-25^\circ) = \sec 60^\circ$ .

次ノ等式ヲ證明セヨ。(6-19)

6.  $(\sin A - \cos A)^2 = 1 - 2 \sin A \cos A$ .

7.  $\tan A + \cot A = \sec A \operatorname{cosec} A$ .

8.  $4 \cos^2 A - 3 = 1 - 4 \sin^2 A$ .
9.  $\tan A \sin A + \cos A = \sec A$ .
10.  $(1 + \tan A)^2 + (1 - \tan A)^2 = 2 \sec^2 A$ .
11.  $(\tan A - \sin A)^2 + (1 - \cos A)^2 = (\sec A - 1)^2$ .
12.  $\tan^2 A + \cot^2 A = \frac{1 - 2 \sin^2 A \cos^2 A}{\sin^2 A \cos^2 A}$ .
13.  $\sin A(1 + \tan A) + \sin(90^\circ - A)\{1 + \tan(90^\circ - A)\}$   
 $= \sec A + \sec(90^\circ - A)$ .
14.  $(1 - \tan^4 \alpha) \cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha = 1$ .
15.  $(\tan \alpha + \sec \alpha + 1)(\tan \alpha - \sec \alpha + 1) = 2 \tan \alpha$ .
16.  $1 + 2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) = 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)$ .
17.  $\sin^2 \theta \tan \theta + \cos^2 \theta \cot \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = \tan \theta + \cot \theta$ .
18.  $\frac{\tan^2 \theta}{1 + \cot^2 \theta} + \frac{\cot^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \tan^2 \theta + \cot^2 \theta - 1$ .
19.  $(\sin \theta + \sec \theta)^2 + (\cos \theta + \operatorname{cosec} \theta)^2 = (1 + \sec \theta \operatorname{cosec} \theta)^2$ .
20.  $a \sin \theta + b \cos \theta = m, \quad b \sin \theta - a \cos \theta = n$  トナル  
 トキハ  $a^2 + b^2 = m^2 + n^2$  ナルコトヲ證明セヨ.
21.  $\cos x = \cos \theta \sin z, \cos y = \sin \theta \sin z$  ナルトキハ  
 $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = 2$  ナルコトヲ證明セヨ.
22. 次ノ式ノ値ヲ求ム.
- (一)  $\sin^2 20^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ + 2 \sin 30^\circ \sin 45^\circ \sin 60^\circ$ .
- (二)  $\sec 30^\circ (1 - \tan 45^\circ) - \cos^2 60^\circ (\sin 30^\circ - \tan 60^\circ)^2$ .

次ノ方程式ヲ解ケ. (23-25)

23.  $2 \cos^2 x = 3 \sin x$ .    24.  $\sin^2 x - 2 \cos x + \frac{1}{4} = 0$ .

25.  $\tan(x-y)=1, \quad \sin(2x+y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

26. A, B ハ或河ノ兩岸ニアル丁度相對スル點ナリ, 今直線 AB = 直角ナル方向ニ於テ直線 AC ヲ取リ, A ヨリ 50 間ノ距離ノ點 C = 於テ角 ACB ヲ測リテ  $30^\circ$  ヲ得タリト云フ. 河幅ヲ求ム.

27. 同ジ高サノ甲乙ノ煙突アリ, 甲ノ基點ニ於ケル乙ノ頂點ノ仰角  $45^\circ$  = シテ甲乙ノ距離 25 間ナリト云フ. 甲ヨリ 15 間ノ距離ノ地點ニ於ケル甲ノ頂點ノ仰角ヲ求ム.

28. 南北ニ横ハレル鐵道線路ヲ走ル或列車内ノ人此線路ヨリ 100 米ノ距離ニアル或紀念牌ヲ正東ニ望ミテヨリ 10 秒ノ後此紀念碑ヲ北  $30^\circ$  東ニ望ムニ至レリト云フ. 其汽車ノ毎秒ノ速サヲ求ム.

### 第二編ニ關スルモノ

次ノ等式ヲ證明セヨ. (29-58)

29.  $\sin^2(540^\circ - A) + \sin^2(A - 990^\circ) = 1$ .

30.  $4(\tan 225^\circ + \sin 405^\circ + \cos 300^\circ)$

$$= 7 \cot 45^\circ + 4 \sin 135^\circ - 5 \sin 30^\circ.$$

31.  $\cos(-410^\circ) = \cos(-310^\circ) = \cos 50^\circ = \cos 670^\circ$   
 $= \cos 770^\circ.$
32.  $\sin(30^\circ - A) + \sin(30^\circ + A) = \cos A.$
33.  $\sin(A + B) + \cos(A - B) = (\sin A + \cos A)(\sin B + \cos B).$
34.  $\sin(A + B) \cos B - \cos(A + B) \sin B = \sin A.$
35.  $(\sin A - \cos A \sin 2A)^2 + (\cos A - \cos 2A \cos A)^2 = \sin^2 A.$
36.  $\sin^2 A + \sin^2(A + 60^\circ) + \sin^2(A - 60^\circ) = \frac{3}{2}.$
37.  $\frac{2 \sin A + \sin 2A}{2 \sin A - \sin 2A} = \cot^2 \frac{A}{2}.$
38.  $\sin(A + B + C) = \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A$   
 $+ \sin C \cos A \cos B - \sin A \sin B \sin C.$
39.  $\cos^2(A + 15^\circ) + \cos^2(A - 15^\circ) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2A.$
40.  $\frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} = \tan 2A + \sec 2A.$
41.  $\frac{\sin A + 2 \sin 3A + \sin 5A}{\sin 3A + 2 \sin 5A + \sin 7A} = \frac{\sin 3A}{\cos 5A}.$
42.  $4 \sin 110^\circ (\cos 30^\circ - \cos 110^\circ) = 2(\sin 80^\circ + 2 \sin 40^\circ).$
43.  $\cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ + \frac{1}{8} = 0.$
44.  $\sin 40^\circ + \sin 10^\circ = \frac{\sin 25^\circ}{2 \sin 15^\circ}$
45.  $\frac{1}{2 \sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{2 \cos 10^\circ} = 2.$

46.  $\sin 10^\circ \sin 50^\circ - \sin 10^\circ \sin 70^\circ$   
 $- \sin 70^\circ \sin 50^\circ + \frac{3}{4} = 0.$
47.  $\sin 4A = 4 \sin A \cos^3 A - 4 \cos A \sin^3 A.$
48.  $\sin A + \sin 5A = 2 \sin 2A \cos A + 2 \cos 4A \sin A.$
49.  $\operatorname{cosec} 2A + \cot 4A = \cot A - \operatorname{cosec} 4A.$
50.  $\tan \alpha \tan(60^\circ + \alpha) \tan(120^\circ + \alpha) + \tan 3\alpha = 0.$
51.  $\sin \alpha \sin 2\alpha + \sin 3\alpha \sin 6\alpha = \sin 4\alpha \sin 5\alpha.$
52.  $\sin 3\alpha \sin^3 \alpha + \cos 3\alpha \cos^3 \alpha = \cos^3 2\alpha.$
53.  $\sin(\alpha + \beta) \sin 3(\alpha - \beta) = \sin^2(2\alpha - \beta) - \sin^2(2\beta - \alpha).$
54.  $2 \cos^2 \alpha \sin^2 \beta - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta = \cos 2\alpha - \cos 2\beta.$
55.  $4 \sin 3\theta \cos^3 \theta + 4 \cos 3\theta \sin^3 \theta = 3 \sin 4\theta.$
56.  $\cos A + \cos B + \cos C + \cos(A + B + C)$   
 $= 4 \cos \frac{1}{2}(B + C) \cos \frac{1}{2}(C + A) \cos \frac{1}{2}(A + B).$
57.  $\sin(B + C - A) + \sin(C + A - B) + \sin(A + B - C)$   
 $= \sin(A + B + C) + 2 \sin A \sin B \sin C.$
58.  $\cos(A + B) \cos(A - B) - \cos(B + C) \cos(B - C)$   
 $+ \cos(A + C) \cos(A - C) = \cos 2A.$

次ノ方程式ヲ解ケ. (59-68). 但  $-360^\circ < x < 360^\circ$

トス.

$$59. \sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad 60. \sin 4x + \cos x = 0.$$

$$61. \tan x + \tan(45^\circ + x) = 2.$$

$$62. 6 \cot^2 x - 4 \cos^2 x = 1.$$

$$63. \sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}.$$

$$64. \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x = 2.$$

$$65. \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$$

$$66. \tan(45^\circ + x) = 3 \tan(45^\circ - x).$$

$$67. \sin 4x + \sin 6x = 0.$$

$$68. \sin x - \cos x = 4 \sin x \cos^2 x.$$

$$69. \tan^2 \alpha = 1 + 2 \tan^2 \beta \text{ ナルトキハ } \cos^2 \beta = 1 + \cos 2\alpha$$

ナルコトヲ證明セヨ.

$$70. \sin \alpha + \sin \beta = a, \cos \alpha + \cos \beta = b \text{ ナルトキハ}$$

$$(一) \tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} = \frac{4a}{a^2 + b^2 + 2b},$$

$$(二) \sin(\alpha + \beta) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

$$71. \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ ヲ知リテ}$$

$$\tan 7^\circ 30' = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$$

ヲ證明セヨ.

$$72. \text{次ノ方程式ヨリ } \theta \text{ ヲ消去セヨ.}$$

$$a \cos \theta = p, \quad b \sin \theta = q.$$

$$73. \text{次ノ方程式ヨリ } \theta \text{ ヲ消去セヨ.}$$

$$\tan(\alpha + \theta) = a, \quad \tan(\alpha - \theta) = b.$$

$$74. x = a \tan^2 \theta, \quad y = 2a \cot \theta \text{ ナルトキハ } xy^2 = 4a^3$$

ナルコトヲ證明セヨ.

$$75. m \sec \theta = 1 + \tan \theta, \quad n \sec \theta = 1 - \tan \theta \text{ ナルトキ}$$

ハ  $m^2 + n^2 = 2$  ナルコトヲ證明セヨ.

$$76. \text{次ノ方程式ヨリ } x \text{ ヲ逐出セ.}$$

$$\frac{2a \tan \alpha}{\tan A + \tan B} = \frac{a^2 \tan \alpha - x}{\tan A \tan B} = a - x.$$

$$77. \text{次ノ方程式ヨリ } \theta \text{ ヲ逐出セ.}$$

$$\sin(\theta + \alpha) = a, \quad \sin(\theta - \alpha) = b.$$

$$78. A + B + C = 180^\circ \text{ ナルトキ次ノ等式ヲ證明セヨ.}$$

$$(一) \sin A - \sin B + \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

$$(二) \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$$

$$+ 4 \cos A \cos B \cos C + 1 = 0.$$

$$(三) \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}$$

$$= 4 \cos \frac{180^\circ - A}{4} \cos \frac{180^\circ - B}{4} \cos \frac{180^\circ - C}{4}.$$

$$(四) \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$$

$$(五) \cos A - \cos B + \cos C + 1 = 4 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$



$$(六) \cot A + \frac{\sin A}{\sin B \sin C} = \cot C + \frac{\sin C}{\sin A \sin B}$$

$$(七) \sin A \sin (A+2C) + \sin B \sin (B+2A) \\ + \sin C \sin (C+2B) = 0.$$

## 第三編 = 關スルモノ

對數計算ニヨリ次ノ直角三角形ヲ解ケ.

$$79. C = 28.35 \text{ 尺}, B = 48^\circ 52'.$$

$$80. a = 120 \text{ 米}, A = 63^\circ 19'.$$

$$81. C = 0.086 \text{ 軒}, A = 25^\circ 46'.2$$

$$82. C = 500 \text{ 米}, b = 320 \text{ 米}.$$

$$83. a = 5.32 \text{ 尺}, b = 8.07 \text{ 尺}.$$

$$84. a = 1.482 \text{ 哩}, b = 2.506 \text{ 哩}.$$

## 第四編 = 關スルモノ

三角形 ABC = 於テ次ノ關係ヲ證明セヨ.

(85—104)

$$85. \frac{a+2b-3c}{a-2b+3c} = \frac{\sin A + 2 \sin B - 3 \sin C}{\sin A - 2 \sin B + 3 \sin C}$$

$$86. a(\cos B \cos C + \cos A) = b(\cos A \cos C + \cos B) \\ = c(\cos A \cos B + \cos C).$$

$$87. 2(a \cos A - c \cos C) \sin B = b(\sin 2A - \sin 2C).$$

$$88. (a^2 - b^2) \cot C + (b^2 - c^2) \cot A + (c^2 - a^2) \cot B = 0.$$

$$89. a \sec A + b \sec B + c \sec C = a \sec A \tan B \tan C.$$

$$90. \cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{2a \sin B \sin C}{a+b+c}.$$

$$91. \frac{\tan B}{\tan C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{c^2 + a^2 - b^2}.$$

$$92. a^2 = (b+c)^2 \sin^2 \frac{A}{2} + (b-c)^2 \cos^2 \frac{A}{2}.$$

$$93. bc \cos^2 \frac{A}{2} + ca \cos^2 \frac{B}{2} + ab \cos^2 \frac{C}{2} = s^2.$$

$$94. (s-a) \tan \frac{A}{2} = (s-b) \tan \frac{B}{2} = (s-c) \tan \frac{C}{2}.$$

95. 外接圓, 內接圓ノ半徑ヲ夫夫  $R, r$  トシ, 角  $A, B, C$  内ノ傍接圓ノ半徑ヲ夫夫  $r_1, r_2, r_3$  トスレバ(以下微之)

$$(一) r_1 = s \tan \frac{A}{2}, \quad r_2 = s \tan \frac{B}{2}, \quad r_3 = s \tan \frac{C}{2}.$$

$$(二) r_1 + r_2 + r_3 - r = 4R. \quad (三) \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r}.$$

$$96. S = \sqrt{rr_1 r_2 r_3} = r_1 r_2 \tan \frac{C}{2} = \frac{r r_1 (r_2 - r_3)}{b - c}.$$

$$97. S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C \\ = \frac{2abc}{a+b+c} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

$$98. r_1(r_2 + r_3) \operatorname{cosec} A = r_2(r_3 + r_1) \operatorname{cosec} B \\ = r_3(r_1 + r_2) \operatorname{cosec} C.$$

$$99. C = 90^\circ \text{ナルトキハ } \cot \frac{A}{2} = \frac{b+c}{a}.$$

100.  $a, b, c$  ガ等差級數ヲナストキハ

$$\cos \frac{B-C}{2} = 2 \sin \frac{A}{2}, \quad \tan 2A = \frac{2ab}{b^2 - a^2}.$$

101. 角  $A$  及其ノ外角ノ二等分線ノ長サハ夫夫

$$\frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c} \text{ 及 } \frac{2bc \sin \frac{A}{2}}{b-c} = \text{等シ}.$$

102. 邊  $BC$  ノ中點ヲ  $M$  トスレバ

$$\tan \angle AMB = \frac{2bc \sin A}{b^2 - c^2}.$$

103. 邊  $a$  ニ切スル傍切圓ガ外接圓ニ等シキトキハ

$$\cos A = \cos B + \cos C.$$

104.  $a, b, A$  ガ與ヘラレタルトキ兩意ノ場合ニ於ケル第三邊ヲ  $c_1, c_2$  トシ、内接圓ノ半徑ヲ夫夫  $r_1, r_2$  トスレバ

$$\left( \frac{c_1}{r_1} - \cot \frac{A}{2} \right) \left( \frac{c_2}{r_2} - \cot \frac{A}{2} \right) = 1, \quad r_1 r_2 = b(b-a) \sin^2 \frac{A}{2}.$$

105. 或湖岸ニ立ラル人前方ニ出現セル輕氣球ノ高度ト同時ニ其湖面ニ映ゼル像ノ俯角トヲ測リ夫夫  $\beta, \alpha$  ヲ得タリ、觀測者ハ湖面ヨリ  $h$  尺ノ高サニアリトスレバ其輕氣球ノ高サ何程ナルカ。

106. 或人眞直ナル道路ヲ進行中或處ニテ道路ト同平面上ニアル或二物體ヲ最大角ノ内ニ見込ミ、夫ヨリ其道ヲ  $a$  尺進ミタル處ニテハ其二物體ヲ同一直線上ニ望見スルニ至レリト云フ。其二物體ノ距離ヲ求ム。

107. 或塔アリ、其ノ正南  $A$  地ニ於ケル其ノ高度  $30^\circ$ 、 $A$  ノ正西  $a$  米ノ  $B$  地ニ於ケル其ノ高度ハ  $18^\circ$  ナリト云フ。  $A, B$  ハ塔ノ基點ト同一水平面上ニアリトスレバ塔ノ高サハ  $\frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{5+2}}$  米ナルコトヲ證明セヨ。

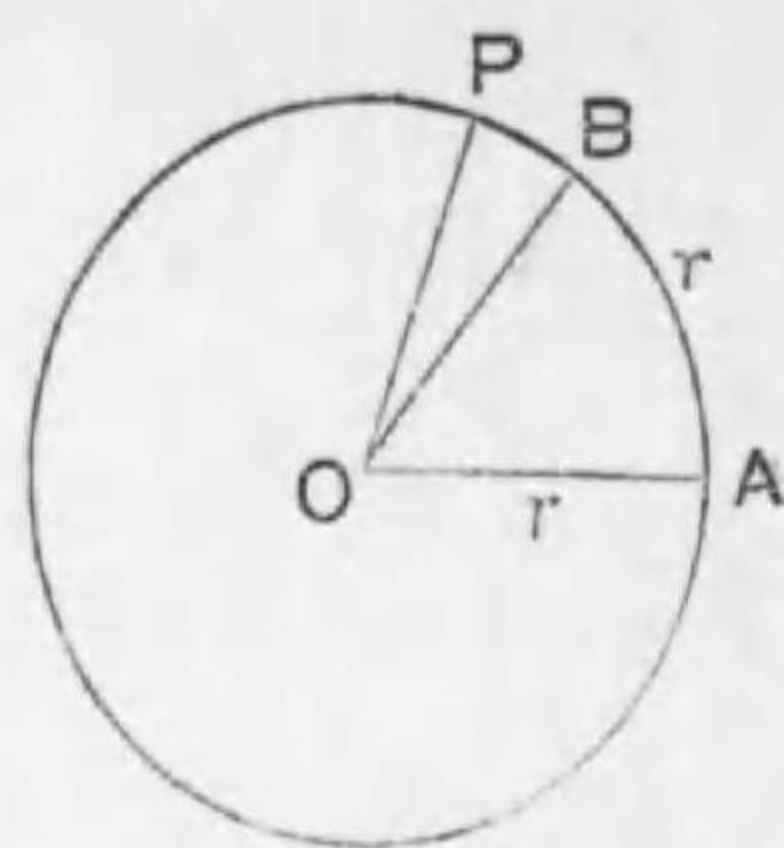
108. 眞直ナル道路ヲ進行セル人アリ、其道ハ北  $30^\circ$  東ニ向ヒ、其人ガ或塔ノ正南ニ來リタル地點ヨリ 1 里進ミタル處ニテ其塔ヲ正西ニ望ミ、又或大樹ヲ北東ノ方向ニ見タリ、夫ヨリ尙 3 里進ミタル處ニテハ其大樹ノ正北ニ來レリト云フ。其塔ト大樹トノ距離ヲ求ム。

## II. 弧 度 法

1. 定義. 任意ノ圓ニ於テ半徑ト等シキ長サノ弧ノ上ニ立ツ中心角ヲ **れいちあん** (Radian) ト云フ.

此角ノ大サハ半徑ノ如何ニ拘ラズ一定ナリ.

圖ニ於テ  $\widehat{AB} = OA$  トスレバ明ニ



$$\frac{\angle AOB}{4 \text{ 直角}} = \frac{\widehat{AB}}{\text{圓周}} = \frac{r}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{れいちあん} &= \frac{1}{\pi} \text{ (2 直角)} \\ &= 57^\circ 17' 44''.8 \dots\dots \\ &= 57.2957795 \dots\dots \end{aligned}$$

れいちあんヲ單位トシテ角ヲ測ルコトアリ. 此測角法ヲ **弧度法** ト云フ.

或角ヲ弧度法ニテ測リタルトキノ數値ガ  $\theta$  ナルトキハ其角ノ大サハ  $\theta$  れいちあんナリトモ或ハ其ノ **弧度** ハ  $\theta$  ナリトモ云フ.

注意.  $180^\circ$  ノ弧度ハ  $\pi$  ナリ. 從テ直角ノ弧度ハ  $\frac{\pi}{2}$ , 四直角ノ弧度ハ  $2\pi$  ナリ.

又半徑  $r$  ナル圓ニ於テ中心角ノ弧度ガ  $\theta$  ナル角ニ對スル弧ノ長サハ  $r\theta$  ニ等シ.

## 2. 弧度法ト六十分法トノ關係.

或角ノ弧度ヲ  $\theta$ , 度數ヲ  $D$  トスルトキハ明ニ

$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{D}{180}$$

ナル關係アリ. 之ニヨリ任意ノ角ノ弧度及度數ノ方ヲ知リテ他ヲ求ムルコトヲ得.

### 例 題

1.  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  ノ弧度ヲ求ム.
2.  $53^\circ 28'$  ノ弧度ヲ求ム.
3.  $\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{15}, \frac{3\pi}{14}$  ヲ夫夫度數ニ直セ.
4. 地球ノ半徑ハ太陽ノ中心ニ於テ  $8''.80$  ノ角ヲ張ルト云フ. 此角ノ弧度ヲ求メ, 且太陽ノ距離ハ地球ノ半徑ノ何倍ナルカヲ計算セヨ.

### III. 三角方程式

1. 三角方程式 未知數ニ關スル三角函數ヲ含ム方程式ヲ三角方程式ト云フ.

斯ノ如キ方程式ノ解法ニツキテハ既ニ本書中ニ掲ゲ置キタル問題ニヨリ其ノ一斑ハ之ヲ學ビ居ルトコロナリ. 故ニ茲ニハ尙一層詳細ニ之ヲ學バント欲スルモノノ爲ニ少シク其ノ補遺ヲ掲グルコトトシタリ.

先ヅ三角函數ノ値ガ與ヘラレタル場合ニ於テル角ヲ求ムルコトヲ示サン.

但次ノ各節ニ於テハ角ヲ測ルニ弧度法ヲ用ヒタリトス.

#### 2. 與ヘラレタル正弦ヲ有スル角.

或角  $x$  ノ正弦ガ與ヘラレタル數  $a$  ニ等シトス. 即チ

$$\sin x = a \dots\dots (1)$$

先ヅ此方程式ニ於テ  $a$  ノ絶對値ガ1ヨリモ大ナルトキハ之ヲ満足スル角  $x$  ハ存在セズ. 故ニ  $a$  ノ絶對値ハ1ヨリモ大ナラズトスベシ.

一般ニ  $a$  ノ絶對値ガ1ヨリモ小ナルトキハ第

41節ニヨレバ方程式(1)ヲ満足スル  $x$  ノ値ノ中0ト  $2\pi$  トノ間ニアルモノハ二ツアリ, 而シテ其他ノ値ハ此二ツノ値ノ各ニ  $2\pi$  ノ整數倍ヲ加ヘ或ハ其各ヨリ之ヲ減ジタルモノナリ. 即チ

$0 < a < 1$  ナル場合ニハ  $x$  ハ第一及第二象限内ノ角ニシテ  $2\pi$  以下ノ正ナル値ノ小ナル方ヲ  $\alpha$  トスレバ他ハ  $\pi - \alpha$  ニ等シ. 從テ  $n$  ヲ以テ零或ハ正負ノ任意ノ整數トスレバ此場合ニハ一般ニ

$$x = 2n\pi + \alpha \text{ 或ハ } (2n+1)\pi - \alpha \dots (2)$$

$-1 < a < 0$  ナル場合ニハ  $x$  ハ第三及第四象限内ノ角ニシテ  $2\pi$  以下ノ正ナル値ノ小ナル方ヲ  $\alpha$  トスレバ他ハ  $2\pi - (\alpha - \pi)$  即チ  $3\pi - \alpha$  ニ等シ. 從テ一般ニ

$$x = 2n\pi + \alpha \text{ 或ハ } (2n+3)\pi - \alpha \dots (3)$$

倍  $n$  ガ變化スルニ從テ  $2n$  ハ如何ナル偶數トモナリ,  $2n+1$  及  $2n+3$  ハ如何ナル奇數トモナル.

故ニ改メテ  $n$  ヲ以テ零或ハ正負ノ任意ノ整數トスレバ(2)及(3)ノ  $x$  ノ値ハ纏メテ

$$x = n\pi + (-1)^n \alpha \dots\dots (4)$$

ニテ表スコトヲ得. 茲ニ  $\alpha$  ハ方程式(1)ヲ満足ス

ル最小ナル正角トス。

此等式(4)ガ與ヘラレタル正弦ヲ有スル角ノ公式ナリ。

**注意.**  $a = \pm 1$  ナル場合ノ  $x$  ノ値モ亦明ニ(4)ノ中ニ包含セラル。又  $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$  ナルヲ以テ餘割ガ與ヘラレタル場合ハ正弦ガ與ヘラレタル場合ニ歸ス。從テ  $\operatorname{cosec} x$  ガ與ヘラレタル場合ニ於ケル角  $x$  ノ公式ハ(4)ト全然同様ナリ。

### 3. 與ヘラレタル餘弦ヲ有スル角.

或角  $x$  ノ餘弦ガ與ヘラレタル數  $a$  ニ等シトス。即チ

$$\cos x = a \dots\dots (1)$$

先ヅ  $a$  ノ絶對値ガ1ヨリモ大ナルトキハ  $x$  ノ値ハ存在セズ。故ニ  $a$  ノ絶對値ハ1ヨリモ大ナラズトスベシ。

第41節ニヨレバ次ノ如シ。

$0 < a < 1$  ナル場合ニハ  $x$  ハ第一及第四象限内ノ角ニシテ  $2\pi$  以下ノ正ナル値ノ小ナル方ヲ  $\alpha$  トスレバ他ハ  $2\pi - \alpha$  ニ等シ。

$-1 < a < 0$  ナル場合ニハ  $x$  ハ第二及第三象限内

ノ角ニシテ  $2\pi$  以下ノ正ナル値ノ小ナル方ヲ  $\alpha$  トスレバ他ハ  $2\pi - \alpha$  ニ等シ。

故ニ何レノ場合ニ於テモ  $n$  ヲ以テ零或正負ノ任意ノ整數トスレバ一般ニ

$$x = 2n\pi + \alpha \quad \text{或ハ} \quad (2n+2)\pi - \alpha.$$

倍  $n$  ガ變化スルニ從テ  $2n$  及  $2n+2$  ノ何レモ如何ナル偶數トモナル。

故ニ改メテ  $n$  ヲ以テ零或ハ正負ノ任意ノ整數トスレバ上記ノ  $x$  ノ値ハ纏メテ

$$x = 2n\pi \pm \alpha \dots\dots (2)$$

ニテ表スコトヲ得。茲ニ  $\alpha$  ハ方程式(1)ヲ満足スル最小ナル正角トス。

此等式(2)ガ與ヘラレタル餘弦ヲ有スル角ノ公式ナリ。

**注意.**  $a = \pm 1$  ナル場合ノ  $x$  ノ値モ又明ニ(2)ノ中ニ包含セラル。

又  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$  ナルヲ以テ  $\sec x$  ガ與ヘラレタル場合ニ於ケル角  $x$  ノ公式ハ(2)ト全然同様ナリ。

### 4. 與ヘラレタル正切ヲ有スル角.

或角  $x$  ノ正切ガ與ヘラレタル數  $a$  ニ等シトス。

即チ  $\tan x = a \dots\dots\dots (1)$

第41節ニヨリ上記二節ノ場合ニ於ケルト同様ニ考究スレバ所要ノ角  $x$  ノ値ノ公式トシテ

$$x = n\pi + \alpha \dots\dots\dots (2)$$

ヲ得ベシ。茲ニ  $\alpha$  ハ方程式(1)ヲ満足スル最小ナル正角ニシテ  $n$  ハ零或ハ正負ノ任意ノ整數ナリ。

注意.  $\cot x$  ガ與ヘラレタル場合ニ於ケル角  $x$  ノ公式ハ全然(2)ト同様ナリ。

### 5. 方程式解法ノ例.

例 1.  $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$  ヲ解ケ.

解 兩邊ヲ2ニテ除スレバ

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

即チ  $\cos \frac{\pi}{3}\sin x + \sin \frac{\pi}{3}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}},$

即チ  $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$   
 $= \sin \frac{\pi}{4},$

$$\therefore x + \frac{\pi}{3} = n\pi \pm (-1)^n \frac{\pi}{4},$$

$$\therefore x = n\pi \pm (-1)^n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \quad \text{答.}$$

例 2.  $\cos x - \cos 3x + \cos 5x = 0$  ヲ解ケ.

解  $\cos x - \cos 3x + \cos 5x = 2\cos 3x \cos 2x - \cos 3x$   
 $= \cos 3x (2\cos 2x - 1),$

故ニ方程式ハ  $\cos 3x (2\cos 2x - 1) = 0,$

$\therefore \cos 3x = 0$  或ハ  $2\cos 2x - 1 = 0.$

$$\cos 3x = 0 \text{ ナルトキハ } 3x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$2\cos 2x - 1 = 0$  ナルトキハ

$$\cos 2x = \frac{1}{2},$$

之ヲ満足スル  $2x$  ノ値ノ中正ニシテ最小ナルモ

ノハ明ニ  $\frac{\pi}{3}$  ナリ.

$$\therefore 2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \dots\dots\dots (2)$$

(1) 及 (2) ニヨレバ

$$x = \frac{1}{3}\left(2n\pi \pm \frac{\pi}{2}\right) \text{ 或ハ } n\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad \text{答.}$$

### 問 題

次ノ方程式ヲ解ケ.

1.  $2\sin^2 x + \cos^2 x = 2 - \sin^2 x.$

2.  $\tan x - \cot x = 0.$       3.  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x.$

4.  $2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x.$  5.  $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 1.$   
 6.  $\sin 5x + \sin 3x = \cos x.$   
 7.  $\tan \theta - \cot \theta = \operatorname{cosec} \theta - \sec \theta.$   
 8.  $\sin 2\theta - \cos \theta = 0.$

## IV. 希臘文字

文 字	發 音	文 字	發 音
Α α	Alpha	Ν ν	Nu
Β β	Beta	Ξ ξ	Xi
Γ γ	Gamma	Ο ο	Omicrom
Δ δ	Delta	Π π ϖ	Pi
Ε ε	Epsilon	Ρ ρ ς	Rho
Ζ ζ	Zeta	Σ σ ς	Sigma
Η η	Eta	Τ τ	Tau
Θ θ ϑ	Theta	Υ υ	Upsilon
Ι ι	Iota	Φ φ ϕ	Phi
Κ κ	Kappa	Χ χ	Chi
Λ λ	Lambda	Ψ ψ	Psi
Μ μ	Mu	Ω ω	Omega

## 復習雜問題(三角法)

(次ニ掲グルハ諸官立學校入學試驗問題ナリ)

次ノ式ヲ簡單ニセヨ. (1-8)

1.  $(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A)(\tan A + \cot A)$ .  
(商船)

2.  $\frac{(a+b)\tan(90^\circ - A)}{\cot(180^\circ - A)} + \frac{(a-b)\tan(90^\circ + A)}{\cot(180^\circ + A)}$ .  
(海軍機關)

3.  $\frac{\sin(-A)}{\sin(180^\circ + A)} - \frac{\tan(90^\circ + A)}{\cot A} + \frac{\cos A \cos 0^\circ}{\sin(90^\circ + A)}$ .  
(海軍經理)

4.  $\sin(x + 60^\circ) + 2 \sin(x - 60^\circ) - \sqrt{3} \cos(120^\circ - x)$ .  
(海軍機關)

5.  $\frac{\sec(-120^\circ)\sin(60^\circ - A) - \cos(A - 30^\circ)}{2 \tan A + \cot \frac{A}{2} - \tan \frac{A}{2}}$ .  
(海軍兵)

6.  $\frac{1}{1 + \sin^2 x} + \frac{1}{1 + \cos^2 x} + \frac{1}{1 + \sec^2 x} + \frac{1}{1 + \operatorname{cosec}^2 x}$ .  
(海軍兵)

7.  $\frac{\cos(\alpha - 30^\circ)}{\cos \alpha} - \frac{\sin(\alpha - 30^\circ)}{\sin \alpha}$ . (海軍機關)

8.  $\frac{\cos A + \cos(120^\circ + B) + \cos(120^\circ - B)}{\sin B + \sin(120^\circ + A) - \sin(120^\circ - A)}$ .  
(大學豫科)



次ノ恒等式ヲ證明セヨ。(9-24)

9.  $\sin A (1 + \tan A) + \cos A (1 + \cot A)$   
 $= \sec A + \operatorname{cosec} A.$  (醫學専門)
10.  $\frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} = \tan 2A + \sec 2A.$  (東北農大豫科)
11.  $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta + \sin \theta}{1 + \cos \theta + \sin \theta}.$  (盛岡高農)
12.  $\cos^2 A - \cos A \cos (60^\circ + A) + \sin^2 (30^\circ - A) = \frac{3}{4}.$   
 (大學豫科)
13.  $\sec^2(\alpha + 45^\circ) - \sec^2(\alpha - 45^\circ) = 4 \tan 2\alpha \sec 2\alpha.$   
 (商船)
14.  $\cos^2 \alpha + \cos^2(120^\circ + \alpha) + \cos^2(120^\circ - \alpha) = \frac{3}{2}.$   
 (海軍經理)
15.  $\tan(45^\circ + \alpha) - \tan(45^\circ - \alpha) = 2 \tan 2\alpha.$  (東京高師)
16.  $\frac{1 - \tan^2(45^\circ - A)}{1 + \tan^2(45^\circ - A)} = \sin 2A.$  (鹿島高農)
17.  $\cos 4\theta - 4 \cos 2\theta + 3 = 8 \sin^4 \theta.$  (海軍機關)
18.  $2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + 2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi - \cos 2\theta \cos 2\phi = 1.$   
 (盛岡高農)
19.  $\frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\sin 2\alpha - 1} \div \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cot \alpha - 1} = \operatorname{cosec} \alpha.$   
 (醫學専門)
20.  $\frac{\sec 8A - 1}{\sec 4A - 1} = \frac{\tan 8A}{\tan 2A}.$  (陸軍士官)

21.  $\frac{\sin A + \sin 3A + \sin 5A + \sin 7A}{\cos A + \cos 3A + \cos 5A + \cos 7A} = \tan 4A.$   
 (商船)
22.  $\cos(A + B + C) + \cos(B + C - A)$   
 $+ \cos(C + A - B) + \cos(A + B - C)$   
 $= 4 \cos A \cos B \cos C.$  (醫學専門)
23.  $\sin A \sin B \sin(A - B) + \sin B \sin C \sin(B - C)$   
 $+ \sin C \sin A \sin(C - A)$   
 $+ \sin(A - B) \sin(B - C) \sin(C - A)$   
 $= 0.$  (仙臺高工)
24.  $\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin A \cos A - \sin B \cos B} = \tan(A + B).$  (大學豫科)
25.  $\sec x = 8$  ナルコトヲ知リテ  $\sin x, \cos x, \tan x,$   
 $\cot x$  ヲ求メヨ.  
 (盛岡高農)
26.  $p \cot A = \sqrt{q^2 - p^2}$  ナルコトヲ知リテ  $\sin A,$   
 $\cos A, \tan A$  ヲ求ム.  
 (海軍經理)
27.  $A$  ハ  $0^\circ$  ト  $180^\circ$  トノ間ノ角ナリ.  $\tan A = \frac{4}{3}$   
 ナルコトヨリ  $\tan \frac{A}{2}$  ノ値ヲ求ム.  
 (東京高師)
28.  $\sin A + \cos A = a$  ナルトキ  $\tan A + \cot A$  ノ値  
 如何.  
 (東京高商)
29.  $\sin 15^\circ$  ノ値ヲ求ム.  
 (商船)

30.  $\sin 67.5^\circ$  の値ヲ求ム. (小數第二位迄)

(陸軍士官)

31.  $x^2 + ax + b = 0$  ノ二根ヲ  $\tan \theta, \tan \phi$  トシテ  
 $\cos^2(\theta + \phi)$  ヲ  $a, b$  ニテ表セ. (海軍兵)

32.  $\tan A = \sqrt{3}$  且  $\cos A = -\frac{1}{2}$  ナルトキ  $\sin \frac{A}{2}$ ,  
 $\cos \frac{A}{2}$  ヲ求ム. (海軍兵)

33.  $\tan \theta = \frac{2ab}{a-b}$  ナルトキ  $\sin 2\theta$  ノ値如何.

(仙臺高商)

34.  $\sin \theta + \sin \phi = a, \cos \theta + \cos \phi = b$  ナラバ  
 $\sin \frac{1}{2}(\theta + \phi)$  ノ値如何. (海軍兵)

35.  $\sin A + \sin B = a, \cos A + \cos B = b$  ナルトキ  
ハ  $\sin(A + B) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$  ナルコトヲ證セヨ.

(盛岡高農)

36.  $\sin A + \cos A = 1.2$  ヲ與ヘテ下ノ二式ノ値  
ヲ求メヨ.

(i)  $\sin 2A.$  (ii)  $\sin^3 A + \cos^3 A.$  (海軍機關)

37.  $\tan \theta = \frac{A}{B}$  ナルトキハ

$$A \cos \omega + B \sin \omega = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\theta + \omega)$$

ナルコトヲ證明セヨ.

(東京高工)

38. 次ノ無限級數ノ和ヲ最モ簡單ナル形ニテ  
アラハセ. (仙臺高工)

$$a \sin \theta, a \sin \theta \cos \theta, a \sin \theta \cos^2 \theta, a \sin \theta \cos^3 \theta, \dots$$

39.  $\frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$  ハ  $\theta$  ノ如何ナル時最大ナル値ヲ  
有スルカ. (商船)

40.  $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta$  ヲ積ニ直セ.

(海軍兵)

41.  $\cos 138^\circ + \cos 102^\circ + \cos 18^\circ$  ノ値ヲ求ム.

(陸軍士官)

42.  $\alpha = 24^\circ$  ナルトキ

$$\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 8\alpha$$

ノ値ヲ求メヨ.

(醫學専門)

43.  $\sin A + \sin B$  ト  $\sin(A + B)$  トノ大小ヲ次ノ  
四ツノ場合ニ於テ比較セヨ. (大阪高工)

甲  $A, B$  共ニ第一象限ノ角ナルトキ

乙  $A, B$  共ニ第二象限ノ角ナルトキ

丙  $A, B$  共ニ第三象限ノ角ナルトキ

丁  $A, B$  共ニ第四象限ノ角ナルトキ

44.  $\cos(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha)$  ヲ變形シテ

$\sin(45^\circ - \alpha)$  トナシ  $k$  ノ値ヲ小數點以下二位マデ

算出セヨ.

(大阪高工)

45. 次ノ等式ヲ證明セヨ.

$$\cos^2 27.5^\circ + \cos^2 32.5^\circ + \cos^2 37.5^\circ = \frac{2}{3}. \quad (\text{陸軍士官})$$

46.  $\sin 50^\circ + \sin 10^\circ - \cos 20^\circ = 0$  ヲ證明セヨ.

(農大實科)

47.  $\sin 95^\circ - \sin 25^\circ - \sin 35^\circ = 0$  ヲ證明セヨ.

(海軍兵)

48.  $\tan z = \frac{\sin x}{\sin y}$  ナルトキハ

$$\tan(z - 45^\circ) = \frac{\tan \frac{1}{2}(x - y)}{\tan \frac{1}{2}(x + y)}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

(東北農大豫科)

49.  $\cos \theta = \frac{\cos \phi}{\cos \beta}$  ナレバ

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \tan \frac{1}{2}(\phi - \beta) \tan \frac{1}{2}(\phi + \beta)$$

ナルコトヲ證明セヨ.

(商船)

50.  $0^\circ$  ト  $180^\circ$  トノ間ニ於テ  $\sin x$  ガ  $\cos 50^\circ$  ヲリ  
小ナルタメノ  $x$  ノ範圍ヲ求メヨ. (海軍兵)51.  $A + B + C = 180^\circ$  ナルトキ

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A$$

ナルコトヲ證明セヨ.

(仙臺高工)

52.  $A + B + C = 90^\circ$  トナラバ

$$\frac{\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} = 8 \sin A \sin C.$$

(陸軍士官)

53.  $A + B + C = 90^\circ$  ナルトキハ

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1 - 2 \sin A \sin B \sin C$$

ナルコトヲ證セヨ.

(水産)

54.  $\tan \theta = \frac{b}{a}$  ナルトキ  $a \cos 2\theta + b \sin 2\theta = a$  ナル

コトヲ證セヨ.

(大學豫科)

55.  $A$  ハ正ノ銳角ニシテ  $\sec A > \operatorname{cosec} A$  ナラバ  
 $A > 45^\circ$  ナルコトヲ證セヨ. (海軍兵)56.  $\tan^2 A = 1 + 2 \tan^2 B$  ナルトキハ $\cos^2 B = 1 + \cos 2A$  ナルコトヲ證セヨ. (醫學専門)57.  $\sec A = \sqrt{2}$  ノトキ  $\sqrt{\frac{1 + \cos A}{1 - \sin A}}$  ノ一ツノ値  
ハ  $\sqrt{2} + 1$  ナルコトヲ證セヨ. (陸軍士官)58.  $a \cos A + b \sin A = a \cos B + b \sin B = c$  ナラバ

$$\frac{a}{\cos \frac{A+B}{2}} = \frac{b}{\sin \frac{A+B}{2}} = \frac{c}{\sin \frac{A-B}{2}}$$

ナルコトヲ證セヨ.

(大學豫科)

59. 三角形ノ三邊ヲ  $m^2 + m + 1$ ,  $2m + 1$ ,  $m^2 - 1$   
トセバ最大ナル角ハ  $120^\circ$  ナルコトヲ證セヨ.

(大學豫科)

60. 三角形ノ三邊ヲ  $a, b, c$  トシ對頂ヨリ此等  
へ下セル垂線ヲ夫々  $p_1, p_2, p_3$  トスレバ  $\tan A = 1,$   
 $\tan B = 2, \tan C = 3$  ナルトキハ  $5p_1p_2p_3 = 3abc$  ナルコ  
トヲ證セヨ. (東北農大豫科)

次ノ方程式ヲ解ケ. (61—68)

61.  $\sin \theta + \cos \theta = -1. (0 < \theta < 360^\circ)$  (海軍兵)

62.  $2 \sin^3 \theta = \cos \theta. (0 < \theta < 180^\circ)$  (海軍機關)

63.  $\cos \theta \sec 60^\circ - \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}.$  (東北農大豫科)

64.  $\tan x + \tan 2x = \tan 3x.$  (大學豫科)

65.  $\cos 1' - \cos 59^\circ 59' = \cos x.$  (海軍經理)

66.  $6 \cot^2 \theta - 4 \cos^2 \theta = 1.$  (盛岡高農)

67.  $\sin 5\theta + \sin 2\theta - \sin \theta = 0. (0 < \theta < 90^\circ)$   
(海軍兵)

68.  $\sec 4\theta - \sec 2\theta = 2.$  (商船)

69. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$x + y = 150^\circ, \tan x + \tan y = -\frac{2}{\sqrt{3}}. \text{(東京高工)}$$

70. 方程式  $x + y = 90^\circ, \sin(3x - y) = \frac{1}{2}$  = 適合  
スル  $180^\circ$  ヨリ小ナル總テノ角  $x$  及ビ  $y$  ヲ求ム.  
(大阪高工)

71. 次ノ乗積ヲ和(或ハ差)ニ變形シ然ル後此乘

積ヲ最大ナラシムル  $\alpha$  ノ値ヲ決定セヨ.

$$2 \sin(\alpha - 30^\circ) \cos \alpha. \quad \text{(海軍兵)}$$

72.  $x \cos \varphi = a, y = b \tan \varphi$  ヨリ  $\varphi$  ヲ消去セヨ.

(商船)

73.  $\tan A + \sin A = m, \tan A - \sin A = n$  ナルトキ  
 $m^2 - n^2 = 24 \sqrt{mn}$  ヲ誘導シ且ツ其ノ符號ヲ決定セ  
ヨ. (仙臺高工)

$\triangle ABC$  = 於テ次ノ關係ヲ證明セヨ. (74—87)

74.  $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$   
(海軍經理)

75.  $\tan \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2} \sec \frac{B}{2} \sec \frac{C}{2}$   
 $= \tan \frac{B}{2} + \cos \frac{B}{2} \sec \frac{C}{2} \sec \frac{A}{2}.$  (商船)

76.  $\frac{a^2}{b^2 - c^2} = \frac{\sin(B+C)}{\sin(B-C)}.$  (水産)

77.  $b \cos A - a \cos B = \frac{b^2 - a^2}{c}.$  (商船)

78.  $C = 60^\circ$  ナルトキ,  $a + b = 2c \cos \frac{A-B}{2}.$  (陸軍士官)

79.  $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 2a \sin B \sin C.$  (商船)

80.  $c(\cos A + \cos B) = 2(a+b) \cos \frac{1}{2}C.$

(東北帝大工学専門)

$$81. \frac{a+b+c}{a+b-c} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2}. \quad (\text{盛岡高農})$$

$$82. \tan B = 1, \tan C = 2, b = 100 \text{ ナル ト キ } a = 60\sqrt{3}, \quad (\text{水産})$$

$$83. \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\frac{a-b}{a+c}} = \frac{2 \sin A}{\sqrt{\cos 2B}}. \quad (\text{醫學専門})$$

$$84. b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B = 2bc \sin A. \quad (\text{名古屋高工})$$

$$85. \cos B = \frac{\sin A}{2 \sin C} \text{ ナル ト キ ハ 三角形ハ直角三} \\ \text{角形ナリ.} \quad (\text{鹿島高農})$$

$$86. \cos A = \cos B \cos C \text{ ナル ト キ ハ } \cot B \cot C = \frac{1}{2} \\ \text{ナリ.} \quad (\text{仙臺高工})$$

$$87. a \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{3b}{2} \text{ ナル ト キ ハ}$$

$$a + b + c = 3b. \quad (\text{海軍兵})$$

$$88. \text{ 三角形 } ABC = \text{ 於テ} \\ \sin(180^\circ - A) = \sqrt{2} \cos(B - 90^\circ) \\ \sqrt{3} \cos A = -\sqrt{2} \cos(180^\circ + B) \\ \text{ナルトキ } A, B, C \text{ 各角ノ値如何.} \quad (\text{海軍兵})$$

$$89. \text{ 三角形 } ABC = \text{ 於テ} \\ a = 520, b = 320, C = 34^\circ 22' \\ \text{ナルコトヲ知リテ角 } A, B \text{ ヲ計算セヨ. 但シ} \\ \log \tan 72^\circ 49' = 0.50971, \log 1.01 = 0.00432,$$

$$\log \cot 52^\circ 11' 44'' = 1.88975, \log 4.21 = 0.62428.$$

(大學豫科)

90. 三角形ノ地面アリ其ノ三邊ハ 24 間, 35 間, 17 間ナリ. 此地積何坪何合何勺ナルカ.

(醫學専門)

91. 三角形 ABC ノ邊 AB ト邊 AC トノ比ハ  $\sqrt{3}:2$  ニシテ角 B ハ角 C ヨリモ  $30^\circ$  大ナリ. 此三角形ノ三ツノ角ヲ求メヨ.

(海軍機關)

92. ABC 三角形アリ AB = 10 呎, AC = 17 呎, BC = 21 呎ナリ, 今角 A ヲ二等分スル直線 AE ヲ引ケバ  $\triangle ABE$  及ビ  $\triangle ACE$  ノ面積幾何ナルカ.

(大阪高工)

93. 三角形 ABC = 於テ  $\tan B = 1, \tan C = 2, b = 100$  ナルトキハ  $a = 60\sqrt{3}$  ナルコトヲ證セヨ. (水産)

94. 三角形ノ二邊 45 及ビ 35 尺ニシテ其夾角ハ  $120^\circ$  ナルトキ他ノ一邊ノ長サヲ求ム. 但シ小數二位マデ計算セヨ.

(鹿島高農)

95. 平行四邊形アリ, 其ノ一角ハ六十度ニシテ二邊ハ夫々四寸, 三寸ナリ, 兩對角線ノ長サヲ求ム.

(海軍兵)

96. 平行四邊形ノ相隣レル二邊ヲ  $a, b$  トシ其  
夾角ヲ  $\theta$  トセバ其對角線ノ長サハ

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta} \quad \text{及} \quad \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$$

ナルコトヲ證セヨ.

(海軍經理)

97. 三角形ノ三邊ヲ三, 五及六トスルトキ此三  
角形ノ内接圓及ビ外接圓ノ半徑ヲ求メヨ. (陸軍士官)

98. 一邊ノ長サ  $a$  尺ナル正多角形アリ, 其邊數  
ガ  $n$  ナルトキハ此多角形ノ面積幾何ナルカ.

(海軍機關)

99. 錐體アリ底面ハ一邊ノ長サ 2 尺ナル正方  
形ヲナシ且ツ斜稜ハ何レモ 3 尺ナルトキ各斜面  
ガ底面トナス角ノ正弦, 餘弦及ビ正切ヲ求メヨ.

又次ノ表ヨリ其角ヲ分ノ位マデ算出セヨ.

(海軍機關)

$$\log 2 = 0.3010.$$

角	log sin	
20° 1'	1.5341	70° 0'
10'	1.5375	50'
20'	1.5409	40'
30'	1.5443	30'
40'	1.5477	20'
50'	1.5510	10'
21° 0'	1.5543	69° 0'
	log cos	角

100. 毎時 12 哩ノ速サニテ正東ニ航行スル船ア  
リ, 或人正午ニ此船ヲ南ヨリ 30° 東ニ見, 午後零時  
40 分ニ南東ニ見タリ, 正午ニ於テ此人ヨリ此船マ  
デノ距離如何(小數第二位マデ) (東北農大豫科)

101. 或人山麓ノ一點ニテ山頂ノ仰角ヲ測リテ  
45° ヲ得タリ, 此所ヨリ山頂ニ向ヒ眞直ニ傾斜 15°  
ノ坂路ヲ上ルコト 160 尺ニシテ再ビ山頂ノ仰角  
ヲ測リタルニ 60° ヲ得タリ. 山ノ高サヲ求ム.

(大學豫科)

102. 東西ノ一哩ヲ距ツル二地 A, B ニ於テ二人  
ノ觀測者空中飛行機ヲ望ミタルニ其方位ハ北西  
及北東ニ當リ仰角ハ各々四十五度ナルコトヲ知  
リタリ飛行機ノ高サ如何.

(海軍經理)

103. 平野ヲ東西ニ貫ケル直線狀ノ道路 ABC ア  
リ, A ノ正北ニ立テル塔ノ頂ノ仰角ヲ A, B 及ビ C  
ノ三所ニ於テ測リシニ夫々 60°, 45° 及ビ 30° ヲ得タ  
リ. 之ニヨリテ B ハ AC ノ中央ナルコトヲ證セヨ.

(陸軍士官)

104. 半徑  $r$  尺ノ球狀輕氣球ノ上昇セルヲ見ル  
ニ球ガ眼ニ開ク角  $\alpha$  ニシテ其ノ中心ノ仰角  $\beta$  ナ

リト云フ。眼ノ高サ地上  $h$  尺ナリトセバ氣球ノ中心ノ高サ地上何尺ナルカ。 (海軍兵)

105. 坂路ノ頂上ヨリ平地上ニアル一點ヲ觀測シ俯角  $30^\circ$  ヲ得夫レヨリ坂路ヲ其四分ノ三下リテ同一ノ點ヲ觀測シ俯角  $15^\circ$  ヲ得タリ。其坂路ノ傾斜ヲ  $\alpha$  トセバ

$$\tan \alpha = \frac{5}{3\sqrt{3}-2}$$

ナルコトヲ證明セヨ。 (名古屋高工)

106. 烟突ノ頂點ヲ  $D$ , 其基底ヲ  $C$  トシ,  $A$  及  $B$  ヲ  $C$  ト同ジ水平面上ノ二點トス, 而シテ觀測ニヨリ  $\angle CAB = 105^\circ$ ,  $\angle CBA = 30^\circ$ ,  $\angle DAC = 60^\circ$ ,  $AB = 30$  間ナル値ヲ得タリ。烟突ノ高サ何程ナルカ。間ノ小數二位マデ計算セヨ。 (大學豫科)

107. 塔ノ頂上ニ鉛直ニ立テル旗竿アリ塔ノ基礎ト同水平ニシテ且ツ之ヨリ同方向ニ  $23$  尺及ビ  $77$  尺距リタル二點ニ於テ旗竿ニ對スル角ヲ測リシニ何レモ  $6^\circ 20'$  ヲ得タリ。旗竿ノ高サヲ求メヨ。但シ  $\tan 6^\circ 20' = 0.1110$ 。 (米澤高工)

108. 水平面上ニ直角三角形  $ABC$  アリ  $\angle C$  ヲ直角トス。今  $A$  ニ直立スル塔ノ  $B$  及  $C$  ヲリノ仰角ヲ

夫々  $15^\circ$  及  $45^\circ$  トスルトキハ

$$\tan B = \frac{1}{2}(3^{\frac{1}{4}} - 3^{-\frac{1}{4}})$$

ナルコトヲ證セヨ。 (名古屋高工)

109. 或人燈臺  $L$  ヲリ南西及ビ南ヨリ十五度東ノ方向ニ二艘ノ船  $A$  及ビ  $B$  ヲ見タリ  $AB$  ノ方向ハ南東ニシテ  $AL$  ノ距離ハ四哩アリト云フ。二艘ノ距離如何。 (海軍經理)

110. 三角形  $ABC$  ノ邊  $BC$  ノ中點  $D$  ニ於テ之ニ垂線ヲ作り, 之レト他ノ邊(又ハ其延長)トノ交點ヲ  $E$  及  $F$  トスレバ三角形  $AEF$  ノ各邊ノ長サヲ三邊ノ長サ  $a, b, c$  ニテ表セ。 (盛岡高農)

111. 同一水平面上ニアリテ相距ルコト  $2000$  米ナル甲乙二點ニ於テ同時ニ飛行船ノ方位及仰角ヲ測リタルニ甲ニ於テハ方位ハ北, 仰角ハ  $30^\circ$ , 乙ニ於テハ方位ハ東, 仰角ハ  $60^\circ$  ヲ得タリ。飛行船ノ高サヲ米ノ位マデ計算セヨ。 (醫學專門)

112. 東西  $2\sqrt{3}$  哩ヲ距テタル  $A, B$  ノ二小島アリ, 燈臺  $C$  ヲリ  $A$  島ハ南西ニ,  $B$  島ハ南東ニ見ユ,  $A$  ヲリ  $(\sqrt{3}-1)$  哩ニシテ  $AB$  ノ中間ニアル暗礁  $D$  ハ燈臺ヨリ何ノ方向ニアルカ。 (海軍兵)

113. 高サ  $h$  尺ナル山上ニ居ル人其正西ニ當リ一船ヲ望見セシニ俯角  $\theta$  ナリシガ或時間ヲ經テ船ハ西ヨリ  $60^\circ$  南ニ當リ俯角  $\theta'$  トナレリ. 此舟ノ前後兩位置ノ距離如何. (海軍兵)

114. 水平ナル地面ニ東西ニ亘リ長サ  $l$  高サ  $h$  ナル板塀アリ. 太陽ノ方位ガ南  $\theta$  西ニシテ其高度ガ  $\alpha$  ナル時板塀ノ影ノ面積如何. (陸軍士官)

115. 碇泊セル一汽船アリ, 海岸ニ沿ヒタル一直線上ノ一點ヨリ之ヲ測レバ方向ハ此直線ト  $30^\circ$  ノ角ヲナシ, 此線ニ沿ヒテ 180 間進ミテ再ビ其方向ヲ測レバ  $60^\circ$  ノ角ヲナスト云フ. 然ラバ船ト直線トノ距離如何. (商船)

116. 碇泊セル一船ヨリ二ツノ燈臺ヲ望ミシニ此船ト二ツノ燈臺トハ一直線上ニアリテ其方向ハ  $N15^\circ E$  ナルコトヲ知レリ今此船ガ北西ノ方向ニ五哩進ミテ再ビ此ノ燈臺ヲ望ミシニ一ハ正東ニ他ハ北東ニアルヲ知レリ, 燈臺間ノ距離ヲ求ム.

(大阪高工)

## 答

(容易ナルモノハ省略ス)

### 問題 一

$$2. \sin A = \frac{15}{17}, \cos A = \frac{8}{17}, \tan A = \frac{15}{8}.$$

$$3. \text{正弦} \frac{6}{13}, \text{餘弦} \frac{\sqrt{133}}{13}, \frac{6}{\sqrt{133}}.$$

$$5. \sin \alpha = \frac{7}{\sqrt{65}}, \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{65}}.$$

### 問題 二

$$1. \cos A = \frac{\sqrt{21}}{5}, \tan A = \frac{2}{\sqrt{21}}.$$

$$2. \sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}, \sec \alpha = \frac{5}{3}.$$

$$6. \sin \alpha = \frac{1}{2}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

### 問題 四

$$1. \frac{\sqrt{2}-1}{2} \quad 2. 3. \quad 3. \frac{9}{4} \quad 4. 30^\circ.$$

$$5. 6^\circ \quad 6. 45^\circ \quad 7. 90^\circ, 30^\circ \quad 8. 45^\circ.$$



9.  $0^\circ, 90^\circ$ . 10.  $60^\circ$ . 11.  $0^\circ, 30^\circ$ .  
 12.  $x=60^\circ, y=30^\circ$ . 13.  $x=52^\circ.5, y=7^\circ.5$ .  
 14.  $x=45^\circ, y=15^\circ$ .

## 問題 五

1. 0.5060. 3. 0.9464. 5. 2.2425.  
 6. 2.2745. 7.  $39^\circ 26'.1$ . 8.  $60^\circ 55'.8$ .  
 9.  $41^\circ 50'.8$ . 10.  $44^\circ 17'.8$ .

## 問題 六

1.  $a = 134.8$  米,  $b = 246.0$  米,  $B = 61^\circ 17'$ .  
 2.  $c = 80.11$  尺,  $a = 75.49$  尺,  $B = 19^\circ 33'.6$ .  
 3.  $c = 1035.5$  間,  $a = 657.4$  間,  $A = 39^\circ 24'.6$ .  
 4.  $b = 518.8$  尺,  $A = 38^\circ 10'.9$ ,  $B = 51^\circ 49'.1$ .  
 5.  $a = 734.8$  米,  $A = 47^\circ 17'.3$ ,  $B = 42^\circ 42'.7$ .  
 6.  $c = 90.48$  間,  $A = 60^\circ 8'.2$ ,  $B = 29^\circ 51'.8$ .

## 問題 七

1. 13.6 間. 2. 261.1 米. 3. 46.8 尺. 4. 98.73 尺.  
 5. 約 147 尺,  $59^\circ 58'.9$ . 6. 約 34.6 米. 7. 246.2 尺.

8.  $\frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)}$  間. 9. 186.6 尺.  
 10. 2.21 間.  
 11. 高  $\text{サ}(40\sqrt{6}+4)$  尺, 距離  $40(\sqrt{14}+\sqrt{2})$  尺.

## 問題 八

3. 正弦、餘弦ダケヲ示セバ次ノ如シ.

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 120^\circ = -\frac{1}{2},$$

$$\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 210^\circ = -\frac{1}{2},$$

$$\sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 240^\circ = -\frac{1}{2},$$

$$\sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 300^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\sin 690^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \cos 690^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin (-495^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos (-495^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin (-510^\circ) = -\frac{1}{2}, \quad \cos (-510^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin (-585^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos (-585^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin (-780^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos (-78^\circ) = \frac{1}{2}.$$

## 問題九

7.  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ , 1.  
 9. (一)  $\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1$ . (二)  $\frac{\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{2}$ .  
 10. (一)  $225^\circ$ ,  $315^\circ$ . (二)  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $300^\circ$ .  
 (三)  $30^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $270^\circ$ . (四)  $45^\circ$ ,  $225^\circ$ .  
 (五)  $30^\circ$ ,  $130^\circ$ ,  $180^\circ$ .

## 問題十

14.  $\frac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{35}$ ,  $\frac{1 + 24\sqrt{2}}{35}$ ,  $\frac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{24\sqrt{2} - 1}$ .  
 15.  $\frac{10 + 2\sqrt{30}}{21}$ ,  $-\frac{4\sqrt{6} + 5\sqrt{5}}{21}$ ,  $\frac{10 + 2\sqrt{30}}{5\sqrt{5} - 4\sqrt{6}}$ .

## 問題十一

1.  $\frac{4\sqrt{6}}{25}$ ,  $\frac{23}{25}$ . 2.  $\pm 4\sqrt{5}$ . 3.  $\frac{117}{125}$ .  
 4.  $\frac{23}{27}$  20.  $\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ ,  $(3 - \sqrt{5})\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ .

## 問題十二

1.  $\sin 3A + \sin A$ . 2.  $\cos(\alpha + 2\beta) + \cos(\alpha - 2\beta)$ .

3.  $\frac{1}{2}(\sin 4\alpha - \sin 2\alpha)$ . 4.  $\cos \alpha - \cos 5\alpha$ .  
 5.  $\sin 30^\circ - \sin 60^\circ$ . 6.  $\cos 1^\circ - \cos 11^\circ$ .  
 7.  $2 \sin \frac{7}{2} A \cos \frac{1}{2} A$ . 8.  $2 \sin \theta \cos 2\theta$ .  
 9.  $2 \cos \frac{9}{2} \theta \cos \frac{3}{2} \theta$ . 10.  $-2 \sin \alpha \sin 9\alpha$ .  
 11.  $2 \sin 50^\circ \cos 20^\circ$ . 12.  $2 \sin 15^\circ \cos 55^\circ$ .  
 13.  $2 \cos 15^\circ \cos 45^\circ$ . 14.  $-2 \sin 90^\circ \sin 35^\circ$ .  
 33.  $255^\circ$ ,  $345^\circ$ .  
 34.  $45^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $225^\circ$ ,  $315^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $240^\circ$ .

## 問題十三

5. 0.9327. 6. 1.3620. 7. 3.0492.  
 8. 0.7146. 9. 513.9. 10. 0.001267.  
 11. 0.00002675. 12. 378.5. 13. 1.104.  
 14. 1.355.

## 問題十四

1. 9.6465. 2. 9.8785. 3. 0.5065.  
 4. 9.9206. 5. 8.5997. 6. 8.3011.  
 7.  $14^\circ 38'.2$ . 8.  $72^\circ 45'.8$ . 9.  $49^\circ 18'.7$ .  
 10.  $75^\circ 12'.9$ . 11.  $11'.71$ . 12.  $43'.75$ .

## 問題 十五

1.  $a = 301.0$  米,  $b = 408.4$  米,  $B = 53^{\circ}36'.6$ .
2.  $b = 10310$  米,  $c = 12780$  米,  $A = 36^{\circ}12'.4$ .
3.  $b = 12.76$  間,  $c = 16.73$  間,  $B = 49^{\circ}42'.8$ .
4.  $b = 41.96$  米,  $A = 34^{\circ}0'$ ,  $B = 56^{\circ}0'$ .
5.  $c = 626.3$  尺,  $A = 21^{\circ}36'.5$ ,  $B = 68^{\circ}23'.5$ .

## 問題 十七

1.  $b = 360.5$  米,  $c = 294.1$  米,  $A = 59^{\circ}11'.1$ .  
面積 = 45530 平方米.
  2.  $a = 17.45$  尺,  $c = 16.31$  尺,  $A = 41^{\circ}40'.5$ .
  3.  $a = 90.56$  尺,  $B = 63^{\circ}4'.3$ ,  $C = 38^{\circ}19'.3$ .  
面積 = 2312 平方尺.
  4.  $c = 4.158$  籽,  $A = 42^{\circ}40'.2$ ,  $B = 24^{\circ}34'.2$ .
  5.  $a = 0.3885$  哩,  $B = 68^{\circ}20'.2$ ,  $C = 47^{\circ}16'.0$ .
  6.  $c = 0.3386$  哩,  $B = 42^{\circ}11'.4$ ,  $C = 25^{\circ}10'.6$ .
  7.  $a = 1.553$  籽,  $A = 86^{\circ}21'.4$ ,  $C = 42^{\circ}50'.0$ .
  8.  $c = 82.18$  尺,  $B = 52^{\circ}57'.8$ ,  $C = 95^{\circ}7'.7$ .
- 或  $c = 29.64$  尺,  $B = 127^{\circ}2'.2$ ,  $C = 21^{\circ}3'.3$ .

9.  $A = 46^{\circ}34'.2$ ,  $B = 57^{\circ}54'.6$ ,  $C = 75^{\circ}31'.6$ .  
面積 = 5040 平方尺.
10.  $A = 113^{\circ}51'.4$ ,  $B = 53^{\circ}34'.8$ ,  $C = 12^{\circ}35'.0$ .

## 問題 十八

1. 116.1 尺.      2. 37.18 間.      3. 2556 尺.
4. 438.9 米.      5. 68.30 間.      6. 94.6 尺.
8.  $\frac{AB \tan \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$ .      9.  $\frac{a \cos \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha + \beta)}$ ,  $\frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$ .
10. 250 米.      11. 約 18.4 節.      12. 約 9.2 哩.
13. 約 3.94 哩.      14. 約 44.7 間, 85.3 間, 74.5 間.

## 公 式

次ニ掲グルハ平面三角法ニ於ケル公式ノ主ナルモノナリ。

### 三角函數ノ關係

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} & \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} & \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \operatorname{cosec} \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha \sec \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan \alpha \cot \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \cot^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha \end{cases}$$

### $n \cdot 360^\circ + \alpha$ ノ三角函數

$$\begin{cases} \sin (n \cdot 360^\circ + \alpha) = \sin \alpha \\ \cos (n \cdot 360^\circ + \alpha) = \cos \alpha \\ \tan (n \cdot 360^\circ + \alpha) = \tan \alpha \\ \cot (n \cdot 360^\circ + \alpha) = \cot \alpha \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sec(n \cdot 360^\circ + \alpha) = \sec \alpha \\ \operatorname{cosec}(n \cdot 360^\circ + \alpha) = \operatorname{cosec} \alpha \end{array} \right.$$

## 負角ノ三角函數

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) = -\tan \alpha \\ \cot(-\alpha) = -\cot \alpha \\ \sec(-\alpha) = \sec \alpha \\ \operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec} \alpha \end{array} \right.$$

## 補角ノ三角函數

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \\ \tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha \\ \cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha \\ \sec(180^\circ - \alpha) = -\sec \alpha \\ \operatorname{cosec}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{cosec} \alpha \end{array} \right.$$

 $180^\circ \pm \alpha$ ノ三角函數

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha \\ \cot(180^\circ + \alpha) = \cot \alpha \\ \sec(180^\circ + \alpha) = -\sec \alpha \\ \operatorname{cosec}(180^\circ + \alpha) = -\operatorname{cosec} \alpha \end{array} \right.$$

## 餘角ノ三角函數

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \\ \tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha \\ \cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha \\ \sec(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cosec} \alpha \\ \operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha) = \sec \alpha \end{array} \right.$$

## 二角ノ和及差ノ三角函數

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \\ \cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \\ \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \sin(A+B) \sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B \\ \cos(A+B) \cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B \end{cases}$$

## 二倍角ノ三角函數

$$\begin{cases} \sin 2A = 2 \sin A \cos A \\ \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A \\ \quad = 2 \cos^2 A - 1 \\ \quad = 1 - 2 \sin^2 A \\ \tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \end{cases}$$

## 三倍角ノ三角函數

$$\begin{cases} \sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A \\ \cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A \end{cases}$$

## 半角ノ三角函數

$$\begin{cases} \sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \\ \cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \\ \tan \frac{A}{2} = \frac{\sin A}{1 + \cos A} = \frac{1 - \cos A}{\sin A} \\ \quad = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} \end{cases}$$

## 正弦餘弦ノ積ヲ和或ハ差ノ形ニ變ズル公式

$$\begin{cases} 2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B) \\ 2 \cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B) \\ 2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B) \\ 2 \sin A \sin B = -\cos(A+B) + \cos(A-B) \end{cases}$$

## 正弦餘弦ノ和或ハ差ヲ積ノ形ニ變ズル公式

$$\begin{cases} \sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \\ \sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \\ \cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \\ \cos C - \cos D = -2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \end{cases}$$

## 三角形ニ關スル公式

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} (=2R)$$

$$\begin{cases} a = b \cos C + c \cos B \\ b = c \cos A + a \cos C \\ c = a \cos B + b \cos A \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \sin \frac{B-C}{2} = (b-c) \cos \frac{A}{2} \\ a \cos \frac{B-C}{2} = (b+c) \sin \frac{A}{2} \\ \tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = \frac{1}{2}(a+b+c) \\ \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \\ \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \\ \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \\ \tan \frac{A}{2} = \frac{r}{s-a} \\ \tan \frac{B}{2} = \frac{r}{s-b} \\ \tan \frac{C}{2} = \frac{r}{s-c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} bc \sin A \\ = \frac{1}{2} ca \sin B \\ = \frac{1}{2} ab \sin C \\ = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \end{cases}$$

數及三角函數ノ

對數表

及

三角函數ノ眞數表



數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	<b>48 42 41 39</b>
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	1 4.3 4.2 4.1 3.9
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	2 8.6 8.4 8.2 7.8
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3 12.9 12.6 12.3 11.7
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	4 17.2 16.8 16.4 15.6
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	5 21.5 21.0 20.5 19.5
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	6 25.8 25.2 24.6 23.4
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	7 30.1 29.4 28.7 27.3
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	8 34.4 33.6 32.8 31.2
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	9 38.7 37.8 36.9 35.1
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	<b>38 37 36 35</b>
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	1 3.8 3.7 3.6 3.5
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2 7.6 7.4 7.2 7.0
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	3 11.4 11.1 10.8 10.5
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	4 15.2 14.8 14.4 14.0
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	5 19.0 18.5 18.0 17.5
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	6 22.8 22.2 21.6 21.0
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	7 26.6 25.9 25.2 24.5
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	8 30.4 29.6 28.8 28.0
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	9 34.2 33.3 32.4 31.5
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	<b>34 33 32 31</b>
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1 3.4 3.3 3.2 3.1
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	2 6.8 6.6 6.4 6.2
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	3 10.2 9.9 9.6 9.3
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	4 13.6 13.2 12.8 12.4
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	5 17.0 16.5 16.0 15.5
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	6 20.4 19.8 19.2 18.6
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	7 23.8 23.1 22.4 21.7
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	8 27.2 26.4 25.6 24.8
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	9 30.6 29.7 28.8 27.9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	<b>29 28 27</b>
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1 2.9 2.8 2.7
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	2 5.8 5.6 5.4
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	3 8.7 8.4 8.1
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	4 11.6 11.2 10.8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	5 14.5 14.0 13.5
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	6 17.4 16.8 16.2
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	7 20.3 19.6 18.9
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	8 23.2 22.4 21.6
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	9 26.1 25.2 24.3

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	<b>26 25 24 23</b>
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1 2.6 2.5 2.4 2.3
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	2 5.2 5.0 4.8 4.6
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	3 7.8 7.5 7.2 6.9
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	4 10.4 10.0 9.6 9.2
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	5 13.0 12.5 12.0 11.5
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	6 15.6 15.0 14.4 13.8
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	7 18.2 17.5 16.8 16.1
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	8 20.8 20.0 19.2 18.4
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	9 23.4 22.5 21.6 20.7
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	<b>22 21 19 18</b>
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1 2.2 2.1 1.9 1.8
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	2 4.4 4.2 3.8 3.6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	3 6.6 6.3 5.7 5.4
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	4 8.8 8.4 7.6 7.2
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	5 11.0 10.5 9.5 9.0
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	6 13.2 12.6 11.4 10.8
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	7 15.4 14.7 13.3 12.6
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	8 17.6 16.8 15.2 14.4
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	9 19.8 18.9 17.1 16.2
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	<b>17 16 15 14</b>
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1 1.7 1.6 1.5 1.4
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	2 3.4 3.2 3.0 2.8
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	3 5.1 4.8 4.5 4.2
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	4 6.8 6.4 6.0 5.6
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	5 8.5 8.0 7.5 7.0
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	6 10.2 9.6 9.0 8.4
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	7 11.9 11.2 10.5 9.8
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	8 13.6 12.8 12.0 11.2
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	9 15.3 14.4 13.5 12.6
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	<b>13 12 11</b>
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	1 1.3 1.2 1.1
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	2 2.6 2.4 2.2
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	3 3.9 3.6 3.3
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	4 5.2 4.8 4.4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	5 6.5 6.0 5.5
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	6 7.8 7.2 6.6
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	7 9.1 8.4 7.7
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	8 10.4 9.6 8.8
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	9 11.7 10.8 9.9

Lsin

角	0'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'	
0° 0'	—	6.4637	6.7648	6.9408	7.0658	7.1627	7.2419	7.3088	7.3668	7.4180	50'
10'	7.4637	7.5051	7.5429	7.5777	7.6099	7.6398	7.6678	7.6942	7.7190	7.7425	40'
20'	7.7648	7.7859	7.8061	7.8255	7.8439	7.8617	7.8787	7.8951	7.9109	7.9261	30'
30'	7.9408	7.9551	7.9689	7.9822	7.9952	8.0078	8.0200	8.0319	8.0435	8.0548	20'
40'	8.0658	8.0765	8.0870	8.0972	8.1072	8.1169	8.1265	8.1358	8.1450	8.1539	10'
50'	8.1627	8.1713	8.1797	8.1880	8.1961	8.2041	8.2119	8.2196	8.2271	8.2346	0' 89°
1° 0'	8.2419	8.2490	8.2561	8.2630	8.2699	8.2766	8.2832	8.2898	8.2962	8.3025	50'
10'	8.3088	8.3150	8.3210	8.3270	8.3329	8.3388	8.3445	8.3502	8.3558	8.3613	40'
20'	8.3668	8.3722	8.3775	8.3828	8.3880	8.3931	8.3982	8.4032	8.4082	8.4131	30'
30'	8.4179	8.4227	8.4275	8.4322	8.4368	8.4414	8.4459	8.4504	8.4549	8.4593	20'
40'	8.4637	8.4680	8.4723	8.4765	8.4807	8.4848	8.4890	8.4930	8.4971	8.5011	10'
50'	8.5050	8.5090	8.5129	8.5167	8.5206	8.5243	8.5281	8.5318	8.5355	8.5392	0' 88°
2° 0'	8.5428	8.5464	8.5500	8.5535	8.5571	8.5605	8.5640	8.5674	8.5708	8.5742	50'
10'	8.5776	8.5809	8.5842	8.5875	8.5907	8.5939	8.5972	8.6003	8.6035	8.6066	40'
20'	8.6097	8.6128	8.6159	8.6189	8.6220	8.6250	8.6279	8.6309	8.6339	8.6368	30'
30'	8.6397	8.6426	8.6454	8.6483	8.6511	8.6539	8.6567	8.6595	8.6622	8.6650	20'
40'	8.6677	8.6704	8.6731	8.6758	8.6784	8.6810	8.6837	8.6863	8.6889	8.6914	10'
50'	8.6940	8.6965	8.6991	8.7016	8.7041	8.7066	8.7090	8.7115	8.7140	8.7164	0' 87°
3° 0'	8.7188	8.7212	8.7236	8.7260	8.7283	8.7307	8.7330	8.7354	8.7377	8.7400	50'
10'	8.7423	8.7445	8.7468	8.7491	8.7513	8.7535	8.7557	8.7580	8.7602	8.7623	40'
20'	8.7645	8.7667	8.7688	8.7710	8.7731	8.7752	8.7773	8.7794	8.7815	8.7836	30'
30'	8.7857	8.7877	8.7898	8.7918	8.7939	8.7959	8.7979	8.7999	8.8019	8.8039	20'
40'	8.8059	8.8078	8.8098	8.8117	8.8137	8.8156	8.8175	8.8194	8.8213	8.8232	10'
50'	8.8251	8.8270	8.8289	8.8308	8.8326	8.8345	8.8363	8.8381	8.8400	8.8418	0' 86°
4° 0'	8.8436	8.8454	8.8472	8.8490	8.8508	8.8525	8.8543	8.8560	8.8578	8.8595	50'
10'	8.8613	8.8630	8.8647	8.8665	8.8682	8.8699	8.8716	8.8733	8.8749	8.8766	40'
20'	8.8783	8.8799	8.8816	8.8833	8.8849	8.8865	8.8882	8.8898	8.8914	8.8930	30'
30'	8.8946	8.8962	8.8978	8.8994	8.9010	8.9026	8.9042	8.9057	8.9073	8.9089	20'
40'	8.9104	8.9119	8.9135	8.9150	8.9166	8.9181	8.9196	8.9211	8.9226	8.9241	10'
50'	8.9256	8.9271	8.9286	8.9301	8.9315	8.9330	8.9345	8.9359	8.9374	8.9388	0' 85°
5° 0'	8.9403	8.9417	8.9432	8.9446	8.9460	8.9475	8.9489	8.9503	8.9517	8.9531	50'
10'	8.9545	8.9559	8.9573	8.9587	8.9601	8.9614	8.9628	8.9642	8.9655	8.9669	40'
20'	8.9682	8.9696	8.9709	8.9723	8.9736	8.9750	8.9763	8.9776	8.9789	8.9803	30'
30'	8.9816	8.9829	8.9842	8.9855	8.9868	8.9881	8.9894	8.9907	8.9919	8.9932	20'
40'	8.9945	8.9958	8.9970	8.9983	8.9996	9.0008	9.0021	9.0033	9.0046	9.0058	10'
50'	9.0070	9.0083	9.0095	9.0107	9.0120	9.0132	9.0144	9.0156	9.0168	9.0180	0' 84°
6° 0'	9.0192	9.0204	9.0216	9.0228	9.0240	9.0252	9.0264	9.0276	9.0287	9.0299	50'
10'	9.0311	9.0323	9.0334	9.0346	9.0357	9.0369	9.0380	9.0392	9.0403	9.0415	40'
20'	9.0426	9.0438	9.0449	9.0460	9.0472	9.0483	9.0494	9.0505	9.0516	9.0527	30'
30'	9.0539	9.0550	9.0561	9.0572	9.0583	9.0594	9.0605	9.0616	9.0626	9.0637	20'
40'	9.0648	9.0659	9.0670	9.0680	9.0691	9.0702	9.0712	9.0723	9.0734	9.0744	10'
50'	9.0755	9.0765	9.0776	9.0786	9.0797	9.0807	9.0818	9.0828	9.0838	9.0849	0' 83°
7° 0'	9.0859	9.0869	9.0879	9.0890	9.0900	9.0910	9.0920	9.0930	9.0940	9.0951	50'
10'	9.0961	9.0971	9.0981	9.0991	9.1001	9.1011	9.1020	9.1030	9.1040	9.1050	40'
20'	9.1060	9.1070	9.1080	9.1089	9.1099	9.1109	9.1118	9.1128	9.1138	9.1147	30'
30'	9.1157	9.1167	9.1176	9.1186	9.1195	9.1205	9.1214	9.1224	9.1233	9.1242	20'
40'	9.1252	9.1261	9.1271	9.1280	9.1289	9.1299	9.1308	9.1317	9.1326	9.1336	10'
50'	9.1345	9.1354	9.1363	9.1372	9.1381	9.1390	9.1399	9.1409	9.1418	9.1427	0' 82°
8° 0'	9.1436	9.1445	9.1453	9.1462	9.1471	9.1480	9.1489	9.1498	9.1507	9.1516	50'
10'	9.1525	9.1533	9.1542	9.1551	9.1560	9.1568	9.1577	9.1586	9.1594	9.1603	40'
20'	9.1612	9.1620	9.1629	9.1637	9.1646	9.1655	9.1663	9.1672	9.1680	9.1689	30'
30'	9.1697	9.1705	9.1714	9.1722	9.1731	9.1739	9.1747	9.1756	9.1764	9.1772	20'
40'	9.1781	9.1789	9.1797	9.1806	9.1814	9.1822	9.1830	9.1838	9.1847	9.1855	10'
50'	9.1863	9.1871	9.1879	9.1887	9.1895	9.1903	9.1911	9.1919	9.1927	9.1935	0' 81°
	10'	9'	8'	7'	6'	5'	4'	3'	2'	1'	角

Lcos

Ltan

角	0'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'	
0° 0'	—	6.4637	6.7648	6.9408	7.0658	7.1627	7.2419	7.3088	7.3668	7.4180	50'
10'	7.4637	7.5051	7.5429	7.5777	7.6099	7.6398	7.6678	7.6942	7.7190	7.7425	40'
20'	7.7648	7.7860	7.8062	7.8255	7.8439	7.8617	7.8787	7.8951	7.9109	7.9261	30'
30'	7.9408	7.9551	7.9689	7.9823	7.9952	8.0078	8.0200	8.0319	8.0435	8.0548	20'
40'	8.0658	8.0765	8.0870	8.0972	8.1072	8.1170	8.1265	8.1359	8.1450	8.1540	10'
50'	8.1627	8.1713	8.1798	8.1880	8.1962	8.2041	8.2119	8.2196	8.2272	8.2346	0' 89°
1° 0'	8.2419	8.2491	8.2562	8.2631	8.2700	8.2767	8.2833	8.2899	8.2963	8.3026	50'
10'	8.3089	8.3150	8.3211	8.3271	8.3330	8.3389	8.3446	8.3503	8.3559	8.3614	40'
20'	8.3669	8.3723	8.3776	8.3829	8.3881	8.3932	8.3983	8.4033	8.4083	8.4132	30'
30'	8.4181	8.4229	8.4276	8.4323	8.4370	8.4416	8.4461	8.4506	8.4551	8.4595	20'
40'	8.4638	8.4682	8.4725	8.4767	8.4809	8.4851	8.4892	8.4933	8.4973	8.5013	10'
50'	8.5053	8.5092	8.5131	8.5170	8.5208	8.5246	8.5283	8.5321	8.5358	8.5394	0' 88°
2° 0'	8.5431	8.5467	8.5503	8.5538	8.5573	8.5608	8.5643	8.5677	8.5711	8.5745	50'
10'	8.5779	8.5812	8.5845	8.5878	8.5911	8.5943	8.5975	8.6007	8.6038	8.6070	40'
20'	8.6101	8.6132	8.6163	8.6193	8.6223	8.6254	8.6283	8.6313	8.6343	8.6372	30'
30'	8.6401	8.6430	8.6459	8.6487	8.6515	8.6544	8.6571	8.6599	8.6627	8.6654	20'
40'	8.6682	8.6709	8.6736	8.6762	8.6789	8.6815	8.6842	8.6868	8.6894	8.6920	10'
50'	8.6945	8.6971	8.6996	8.7021	8.7046	8.7071	8.7096	8.7121	8.7145	8.7170	0' 87°
3° 0'	8.7194	8.7218	8.7242	8.7266	8.7290	8.7313	8.7337	8.7360	8.7383	8.7406	50'
10'	8.7429	8.7452	8.7475	8.7497	8.7520	8.7542	8.7565	8.7587	8.7609	8.7631	40'
20'	8.7652	8.7674	8.7696	8.7717	8.7739	8.7760	8.7781	8.7802	8.7823	8.7844	30'
30'	8.7865	8.7886	8.7906	8.7927	8.7947	8.7967	8.7988	8.8008	8.8028	8.8048	20'
40'	8.8067	8.8087	8.8107	8.8126	8.8146	8.8165	8.8185	8.8204	8.8223	8.8242	10'
50'	8.8261	8.8280	8.8299	8.8317	8.8336	8.8355	8.8373	8.8392	8.8410	8.8428	0' 86°
4° 0'	8.8446	8.8465	8.8483	8.8501	8.8518	8.8536	8.8554	8.8572	8.8589	8.8607	50'
10'	8.8624	8.8642	8.8659	8.8676	8.8694	8.8711	8.8728	8.8745	8.8762	8.8778	40'
20'	8.8795	8.8812	8.8829	8.8845	8.8862	8.8878	8.8895	8.8911	8.8927	8.8944	30'
30'	8.8960	8.8976	8.8992	8.9008	8.9024	8.9040	8.9056	8.9071	8.9087	8.9103	20'
40'	8.9118	8.9134									

角	L sin	S	L tan	T	L cot	L cos	比例部分
0° 0'	-∞		-∞		+∞	0.0000	0' 90°
10'	7.4637	6.4637	7.4637	6.4637	2.5363	0.0000	50'
20'	7.7648	6.4637	7.7648	6.4637	2.2352	0.0000	40'
30'	7.9408	6.4637	7.9409	6.4637	2.0591	0.0000	30'
40'	8.0658	6.4637	8.0658	6.4637	1.9342	0.0000	20'
50'	8.1627	6.4637	8.1627	6.4638	1.8373	0.0000	10'
1° 0'	8.2419	6.4637	8.2419	6.4638	1.7581	9.9999	0' 89°
10'	8.3088	6.4637	8.3089	6.4638	1.6911	9.9999	50'
20'	8.3668	6.4637	8.3669	6.4638	1.6331	9.9999	40'
30'	8.4179	6.4637	8.4181	6.4638	1.5819	9.9999	30'
40'	8.4637	6.4637	8.4638	6.4638	1.5362	9.9998	20'
50'	8.5050	6.4637	8.5053	6.4639	1.4947	9.9998	10'
2° 0'	8.5428	6.4636	8.5431	6.4639	1.4569	9.9997	0' 88°
10'	8.5776	6.4636	8.5779	6.4639	1.4221	9.9997	50'
20'	8.6097	6.4636	8.6101	6.4640	1.3899	9.9996	40'
30'	8.6397	6.4636	8.6401	6.4640	1.3599	9.9996	30'
40'	8.6677	6.4636	8.6682	6.4640	1.3318	9.9995	20'
50'	8.6940	6.4635	8.6945	6.4641	1.3055	9.9995	10'
3° 0'	8.7188	6.4635	8.7194	6.4641	1.2806	9.9994	0' 87°
10'	8.7423	6.4635	8.7429	6.4642	1.2571	9.9993	50'
20'	8.7645	6.4635	8.7652	6.4642	1.2348	9.9993	40'
30'	8.7857	6.4635	8.7865	6.4642	1.2135	9.9992	30'
40'	8.8059	6.4634	8.8067	6.4643	1.1933	9.9991	20'
50'	8.8251	6.4634	8.8261	6.4644	1.1739	9.9990	10'
4° 0'	8.8436	6.4634	8.8446	6.4644	1.1554	9.9989	0' 86°
10'	8.8613	6.4633	8.8624	6.4645	1.1376	9.9989	50'
20'	8.8783	6.4633	8.8795	6.4646	1.1205	9.9988	40'
30'	8.8946	6.4633	8.8960	6.4646	1.1040	9.9987	30'
40'	8.9104	6.4632	8.9118	6.4647	1.0882	9.9986	20'
50'	8.9256	6.4632	8.9272	6.4647	1.0728	9.9985	10'
5° 0'	8.9403	6.4632	8.9420	6.4648	1.0580	9.9983	0' 85°
10'	8.9545	6.4631	8.9563	6.4649	1.0437	9.9982	50'
20'	8.9682	6.4631	8.9701	6.4650	1.0299	9.9981	40'
30'	8.9816	6.4630	8.9836	6.4650	1.0164	9.9980	30'
40'	8.9945	6.4630	8.9966	6.4651	1.0034	9.9979	20'
50'	9.0070	6.4630	9.0093	6.4652	0.9907	9.9977	10'
6° 0'	9.0192	6.4629	9.0216	6.4653	0.9784	9.9976	0' 84°
10'	9.0311	6.4629	9.0336	6.4654	0.9664	9.9975	50'
20'	9.0426	6.4628	9.0453	6.4655	0.9547	9.9973	40'
30'	9.0539	6.4628	9.0567	6.4656	0.9433	9.9972	30'
40'	9.0648	6.4627	9.0678	6.4657	0.9322	9.9971	20'
50'	9.0755	6.4627	9.0786	6.4658	0.9214	9.9969	10'
7° 0'	9.0859	6.4626	9.0891	6.4659	0.9109	9.9968	0' 83°
10'	9.0961	6.4626	9.0995	6.4660	0.9005	9.9966	50'
20'	9.1060	6.4625	9.1096	6.4661	0.8904	9.9964	40'
30'	9.1157	6.4625	9.1194	6.4662	0.8806	9.9963	30'
40'	9.1252	6.4624	9.1291	6.4663	0.8709	9.9961	20'
50'	9.1345	6.4624	9.1385	6.4664	0.8615	9.9959	10'
8° 0'	9.1436	6.4624	9.1478	6.4666	0.8522	9.9958	0' 82°
	L cos	S	L cot	T	L tan	L sin	角

比例部分

93 91 89

1	9.3	9.1	8.9
2	18.6	18.2	17.8
3	27.9	27.3	26.7
4	37.2	36.4	35.6
5	46.5	45.5	44.5
6	55.8	54.6	53.4
7	65.1	63.7	62.3
8	74.4	72.8	71.2
9	83.7	81.9	80.1

87 86 85

1	8.7	8.6	8.5
2	17.4	17.2	17.0
3	26.1	25.8	25.5
4	34.8	34.4	34.0
5	43.5	43.0	42.5
6	52.2	51.6	51.0
7	60.9	60.2	59.5
8	69.6	68.8	68.0
9	78.3	77.4	76.5

84 82 81

1	8.4	8.2	8.1
2	16.8	16.4	16.2
3	25.2	24.6	24.3
4	33.6	32.8	32.4
5	42.0	41.0	40.5
6	50.4	49.2	48.6
7	58.8	57.4	56.7
8	67.2	65.6	64.8
9	75.6	73.8	72.9

79 78 77

1	7.9	7.8	7.7
2	15.8	15.6	15.4
3	23.7	23.4	23.1
4	31.6	31.2	30.8
5	39.5	39.0	38.5
6	47.4	46.8	46.2
7	55.3	54.6	53.9
8	63.2	62.4	61.6
9	71.1	70.2	69.3

比例部分

76 75 74

1	7.6	7.5	7.4
2	15.2	15.0	14.8
3	22.8	22.5	22.2
4	30.4	30.0	29.6
5	38.0	37.5	37.0
6	45.6	45.0	44.4
7	53.2	52.5	51.8
8	60.8	60.0	59.2
9	68.4	67.5	66.6

73 71 69

1	7.3	7.1	6.9
2	14.6	14.2	13.8
3	21.9	21.3	20.7
4	29.2	28.4	27.6
5	36.5	35.5	34.5
6	43.8	42.6	41.4
7	51.1	49.7	48.3
8	58.4	56.8	55.2
9	65.7	63.9	62.1

68 67 66

1	6.8	6.7	6.6
2	13.6	13.4	13.2
3	20.4	20.1	19.8
4	27.2	26.8	26.4
5	34.0	33.5	33.0
6	40.8	40.2	39.6
7	47.6	46.9	46.2
8	54.4	53.6	52.8
9	61.2	60.3	59.4

比例部分

65 64 63

1	6.5	6.4	6.3
2	13.0	12.8	12.6
3	19.5	19.2	18.9
4	26.0	25.6	25.2
5	32.5	32.0	31.5
6	39.0	38.4	37.8
7	45.5	44.8	44.1
8	52.0	51.2	50.4
9	58.5	57.6	56.7

61 59 58

1	6.1	5.9	5.8
2	12.2	11.8	11.6
3	18.3	17.7	17.4
4	24.4	23.6	23.2
5	30.5	29.5	29.0
6	36.6	35.4	34.8
7	42.7	41.3	40.6
8	48.8	47.2	46.4
9	54.9	53.1	52.2

57 56 55

1	5.7	5.6	5.5
2	11.4	11.2	11.0
3	17.1	16.8	16.5
4	22.8	22.4	22.0
5	28.5	28.0	27.5
6	34.2	33.6	33.0
7	39.9	39.2	38.5
8	45.6	44.8	44.0
9	51.3	50.4	49.5

比例部分	角	L sin	差	L tan	通差	L cot	差	L cos	角
	8° 0'	9.1436	91	9.1478	93	0.8522	1	9.9958	0' 82°
	10'	9.1525	89	9.1569	91	0.8431	2	9.9956	50'
	20'	9.1612	87	9.1658	89	0.8342	2	9.9954	40'
	30'	9.1697	85	9.1745	87	0.8255	2	9.9952	30'
	40'	9.1781	84	9.1831	86	0.8169	2	9.9950	20'
	50'	9.1863	82	9.1915	84	0.8085	2	9.9948	10'
	9° 0'	9.1943	80	9.1997	82	0.8003	2	9.9946	0' 81°
	10'	9.2022	79	9.2078	81	0.7922	2	9.9944	50'
	20'	9.2100	78	9.2158	80	0.7842	2	9.9942	40'
	30'	9.2176	76	9.2236	78	0.7764	2	9.9940	30'
	40'	9.2251	75	9.2313	77	0.7687	2	9.9938	20'
	50'	9.2324	73	9.2389	76	0.7611	2	9.9936	10'
	10° 0'	9.2397	73	9.2463	74	0.7537	2	9.9934	0' 80°
	10'	9.2468	71	9.2536	73	0.7464	3	9.9931	50'
	20'	9.2538	70	9.2609	73	0.7391	2	9.9929	40'
	30'	9.2606	68	9.2680	71	0.7320	2	9.9927	30'
	40'	9.2674	68	9.2750	70	0.7250	3	9.9924	20'
	50'	9.2740	66	9.2819	69	0.7181	2	9.9922	10'
	11° 0'	9.2806	66	9.2887	68	0.7113	3	9.9919	0' 79°
	10'	9.2870	64	9.2953	66	0.7047	2	9.9917	50'
	20'	9.2934	64	9.3020	67	0.6980	3	9.9914	40'
	30'	9.2997	63	9.3085	65	0.6915	2	9.9912	30'
	40'	9.3058	61	9.3149	64	0.6851	3	9.9909	20'
	50'	9.3119	61	9.3212	63	0.6788	2	9.9907	10'
	12° 0'	9.3179	60	9.3275	63	0.6725	3	9.9904	0' 78°
	10'	9.3238	59	9.3336	61	0.6664	3	9.9901	50'
	20'	9.3296	58	9.3397	61	0.6603	2	9.9899	40'
	30'	9.3353	57	9.3458	61	0.6542	3	9.9896	30'
	40'	9.3410	57	9.3517	59	0.6483	3	9.989	

角	L sin	差	L tan	通差	L cot	差	L cos	角	比例部分
13° 0'	9.3521		9.3634		0.6366		9.9887	0' 77°	
10'	9.3575	54	9.3691	57	0.6309	3	9.9884	50'	
20'	9.3629	53	9.3748	56	0.6252	3	9.9881	40'	57 56 55 54
30'	9.3682	52	9.3804	55	0.6196	3	9.9878	30'	1 5.7 5.6 5.5 5.4
40'	9.3734	52	9.3859	55	0.6141	3	9.9875	20'	2 11.4 11.2 11.0 10.8
50'	9.3786	51	9.3914	54	0.6086	3	9.9872	10'	3 17.1 16.8 16.5 16.2
14° 0'	9.3837		9.3968		0.6032		9.9869	0' 76°	4 22.8 22.4 22.0 21.6
10'	9.3887	50	9.4021	53	0.5979	3	9.9866	50'	5 28.5 28.0 27.5 27.0
20'	9.3937	49	9.4074	53	0.5926	4	9.9863	40'	6 34.2 33.6 33.0 32.4
30'	9.3986	49	9.4127	51	0.5873	3	9.9859	30'	7 39.9 39.2 38.5 37.8
40'	9.4035	48	9.4178	52	0.5822	3	9.9856	20'	8 45.6 44.8 44.0 43.2
50'	9.4083	47	9.4230	51	0.5770	4	9.9853	10'	9 51.3 50.4 49.5 48.6
15° 0'	9.4130		9.4281		0.5719		9.9849	0' 75°	
10'	9.4177	47	9.4331	50	0.5669	3	9.9846	50'	
20'	9.4223	46	9.4381	50	0.5619	3	9.9843	40'	58 52 51 49
30'	9.4269	46	9.4430	49	0.5570	4	9.9839	30'	1 5.3 5.2 5.1 4.9
40'	9.4314	45	9.4479	49	0.5521	3	9.9836	20'	2 10.6 10.4 10.2 9.8
50'	9.4359	44	9.4527	48	0.5473	4	9.9832	10'	3 15.9 15.6 15.3 14.7
16° 0'	9.4403		9.4575		0.5425		9.9828	0' 74°	4 21.2 20.8 20.4 19.6
10'	9.4447	44	9.4622	47	0.5378	3	9.9825	50'	5 26.5 26.0 25.5 24.5
20'	9.4491	44	9.4669	47	0.5331	4	9.9821	40'	6 31.8 31.2 30.6 29.4
30'	9.4533	42	9.4716	47	0.5284	4	9.9817	30'	7 37.1 36.4 35.7 34.3
40'	9.4576	43	9.4762	46	0.5238	3	9.9814	20'	8 42.4 41.6 40.8 39.2
50'	9.4618	42	9.4808	46	0.5192	4	9.9810	10'	9 47.7 46.8 45.9 44.1
17° 0'	9.4659		9.4853		0.5147		9.9806	0' 73°	
10'	9.4700	41	9.4898	45	0.5102	4	9.9802	50'	48 47 46 45
20'	9.4741	41	9.4943	45	0.5057	4	9.9798	40'	1 4.8 4.7 4.6 4.5
30'	9.4781	40	9.4987	44	0.5013	4	9.9794	30'	2 9.6 9.4 9.2 9.0
40'	9.4821	40	9.5031	44	0.4969	4	9.9790	20'	3 14.4 14.1 13.8 13.5
50'	9.4861	40	9.5075	44	0.4925	4	9.9786	10'	4 19.2 18.8 18.4 18.0
18° 0'	9.4900		9.5118		0.4882		9.9782	0' 72°	5 24.0 23.5 23.0 22.5
10'	9.4939	39	9.5161	43	0.4839	4	9.9778	50'	6 28.8 28.2 27.6 27.0
20'	9.4977	38	9.5203	42	0.4797	4	9.9774	40'	7 33.6 32.9 32.2 31.5
30'	9.5015	38	9.5245	42	0.4755	4	9.9770	30'	8 38.4 37.6 36.8 36.0
40'	9.5052	37	9.5287	42	0.4713	5	9.9765	20'	9 43.2 42.3 41.4 40.5
50'	9.5090	36	9.5329	42	0.4671	4	9.9761	10'	
19° 0'	9.5126		9.5370		0.4630		9.9757	0' 71°	
10'	9.5163	37	9.5411	41	0.4589	5	9.9752	50'	44 43 42 41
20'	9.5199	36	9.5451	40	0.4549	4	9.9748	40'	1 4.4 4.3 4.2 4.1
30'	9.5235	36	9.5491	40	0.4509	5	9.9743	30'	2 8.8 8.6 8.4 8.2
40'	9.5270	35	9.5531	40	0.4469	4	9.9739	20'	3 13.2 12.9 12.6 12.3
50'	9.5306	35	9.5571	40	0.4429	5	9.9734	10'	4 17.6 17.2 16.8 16.4
20° 0'	9.5341		9.5611		0.4389		9.9730	0' 70°	5 22.0 21.5 21.0 20.5
10'	9.5375	34	9.5650	39	0.4350	5	9.9725	50'	6 26.4 25.8 25.2 24.6
20'	9.5409	34	9.5689	39	0.4311	4	9.9721	40'	7 30.8 30.1 29.4 28.7
30'	9.5443	34	9.5727	38	0.4273	5	9.9716	30'	8 35.2 34.4 33.6 32.8
40'	9.5477	34	9.5766	39	0.4234	5	9.9711	20'	9 39.6 38.7 37.8 36.9
50'	9.5510	33	9.5804	38	0.4196	5	9.9706	10'	
21° 0'	9.5543		9.5842		0.4158		9.9702	0' 69°	
	L cos	差	L cot	通差	L tan	差	L sin	角	比例部分

比例部分	角	L sin	差	L tan	通差	L cot	差	L cos	角
	21° 0'	9.5543		9.5842		0.4158		9.9702	0' 69°
	10'	9.5576	33	9.5879	37	0.4121	5	9.9697	50'
	20'	9.5609	32	9.5917	37	0.4083	5	9.9692	40'
	30'	9.5641	32	9.5954	37	0.4046	5	9.9687	30'
	40'	9.5673	31	9.5991	37	0.4009	5	9.9682	20'
	50'	9.5704	32	9.6028	36	0.3972	5	9.9677	10'
	22° 0'	9.5736		9.6064		0.3936		9.9672	0' 68°
	10'	9.5767	31	9.6100	36	0.3900	5	9.9667	50'
	20'	9.5798	31	9.6136	36	0.3864	6	9.9661	40'
	30'	9.5828	31	9.6172	36	0.3828	5	9.9656	30'
	40'	9.5859	30	9.6208	35	0.3792	5	9.9651	20'
	50'	9.5889	30	9.6243	36	0.3757	5	9.9646	10'
	23° 0'	9.5919		9.6279		0.3721		9.9640	0' 67°
	10'	9.5948	29	9.6314	35	0.3686	5	9.9635	50'
	20'	9.5978	30	9.6348	35	0.3652	6	9.9629	40'
	30'	9.6007	29	9.6383	35	0.3617	5	9.9624	30'
	40'	9.6036	29	9.6417	34	0.3583	6	9.9618	20'
	50'	9.6065	29	9.6452	35	0.3548	5	9.9613	10'
	24° 0'	9.6093		9.6486		0.3514		9.9607	0' 66°
	10'	9.6121	28	9.6520	34	0.3480	5	9.9602	50'
	20'	9.6149	28	9.6553	33	0.3447	6	9.9602	40'
	30'	9.6177	28	9.6587	34	0.3413	6	9.9596	30'
	40'	9.6205	27	9.6620	33	0.3380	6	9.9590	20'
	50'	9.6232	27	9.6654	34	0.3346	5	9.9584	10'
	25° 0'	9.6259		9.6687		0.3313		9.9573	0' 65°
	10'	9.6286	27	9.6720	33	0.3280	6	9.9567	50'
	20'	9.6313	27	9.6752	32	0.3248	6	9.9561	40'
	30'	9.6340	26	9.6785	32	0.3215	6	9.9555	30'
	40'	9.6366	26	9.6817	33	0.3183	6	9.9549	20'
	50'	9.6392	26	9.6850	32	0.3150	6	9.9543	10'
	26° 0'	9.6418		9.6882		0.3118		9.9537	0' 64°
	10'	9.6444	26	9.6914	32	0.3086	7	9.9530	50'
	20'	9.6470	26	9.6946	32	0.3054	6	9.9524	40'
	30'	9.6495	25	9.6977	31	0.3023	6	9.9518	30'
	40'	9.6521	26	9.7009	32	0.2991	6	9.9512	20'
	50'	9.6546	25	9.7040	31	0.2960	7	9.9505	10'
	27° 0'	9.6570		9.7072		0.2928		9.9499	0' 63°
	10'	9.6595	25	9.7103	31	0.2897	7	9.9492	50'
	20'	9.6620	25	9.7134	31	0.2866	6	9.9486	40'
	30'	9.6644	24	9.7165	31	0.2835	7	9.9479	30'
	40'	9.6668	24	9.7196	31	0.2804	6	9.9473	20'
	50'	9.6692	24	9.7226	30	0.2774	7	9.9466	10'
	28° 0'	9.6716		9.7257		0.2743		9.9459	0' 62°
	10'	9.6740	24	9.7287	30	0.2713	6	9.9453	50'
	20'	9.6763	23	9.7317	30	0.2683	7	9.9446	40'
	30'	9.6787	24	9.7348	31	0.2652	7	9.9439	30'
	40'	9.6810	23	9.7378	30	0.2622	7	9.9432	20'
	50'	9.6833	23	9.7408	30	0.2592	7	9.9425	10'
	29° 0'	9.6856		9.7438		0.2562		9.9418	0' 61°
比例部分		L cos	差	L cot	通差	L tan	差	L sin	角

角	L sin	差	L tan	通差	L cot	差	L cos	比例部分
29° 0'	9.6856	22	9.7438	29	0.2562	7	9.9418	0' 61°
10'	9.6878	23	9.7467	30	0.2533	7	9.9411	50'
20'	9.6901	22	9.7497	29	0.2503	7	9.9404	40'
30'	9.6923	23	9.7526	30	0.2474	7	9.9397	30'
40'	9.6946	22	9.7556	29	0.2444	7	9.9390	20'
50'	9.6968	22	9.7585	29	0.2415	7	9.9383	10'
30° 0'	9.6990	22	9.7614	30	0.2386	8	9.9375	0' 60°
10'	9.7012	21	9.7644	29	0.2356	7	9.9368	50'
20'	9.7033	22	9.7673	28	0.2327	8	9.9361	40'
30'	9.7055	21	9.7701	29	0.2299	7	9.9353	30'
40'	9.7076	21	9.7730	29	0.2270	8	9.9346	20'
50'	9.7097	21	9.7759	29	0.2241	8	9.9338	10'
31° 0'	9.7118	21	9.7788	28	0.2212	7	9.9331	0' 59°
10'	9.7139	21	9.7816	29	0.2184	8	9.9323	50'
20'	9.7160	21	9.7845	28	0.2155	8	9.9315	40'
30'	9.7181	20	9.7873	29	0.2127	7	9.9308	30'
40'	9.7201	20	9.7902	28	0.2098	8	9.9300	20'
50'	9.7222	20	9.7930	28	0.2070	8	9.9292	10'
32° 0'	9.7242	20	9.7858	28	0.2042	8	9.9284	0' 58°
10'	9.7262	20	9.7886	28	0.2014	8	9.9276	50'
20'	9.7282	20	9.8014	28	0.1986	8	9.9268	40'
30'	9.7302	20	9.8042	28	0.1958	8	9.9260	30'
40'	9.7322	20	9.8070	27	0.1930	8	9.9252	20'
50'	9.7342	20	9.8097	27	0.1903	8	9.9244	10'
33° 0'	9.7361	19	9.8125	28	0.1875	8	9.9236	0' 57°
10'	9.7380	19	9.8153	28	0.1847	8	9.9228	50'
20'	9.7400	19	9.8180	27	0.1820	9	9.9219	40'
30'	9.7419	19	9.8208	27	0.1792	8	9.9211	30'
40'	9.7438	19	9.8235	28	0.1765	9	9.9203	20'
50'	9.7457	19	9.8263	27	0.1737	8	9.9194	10'
34° 0'	9.7476	18	9.8290	27	0.1710	8	9.9186	0' 56°
10'	9.7494	18	9.8317	27	0.1683	8	9.9177	50'
20'	9.7513	18	9.8344	27	0.1656	9	9.9169	40'
30'	9.7531	18	9.8371	27	0.1629	9	9.9160	30'
40'	9.7550	18	9.8398	27	0.1602	9	9.9151	20'
50'	9.7568	18	9.8425	27	0.1575	9	9.9142	10'
35° 0'	9.7586	18	9.8452	27	0.1548	8	9.9134	0' 55°
10'	9.7604	18	9.8479	27	0.1521	9	9.9125	50'
20'	9.7622	18	9.8506	27	0.1494	9	9.9116	40'
30'	9.7640	18	9.8533	27	0.1467	9	9.9107	30'
40'	9.7657	17	9.8559	26	0.1441	9	9.9098	20'
50'	9.7675	18	9.8586	27	0.1414	9	9.9089	10'
36° 0'	9.7692	17	9.8613	27	0.1387	9	9.9080	0' 54°
10'	9.7710	18	9.8639	26	0.1361	10	9.9070	50'
20'	9.7727	17	9.8666	27	0.1334	9	9.9061	40'
30'	9.7744	17	9.8692	26	0.1308	9	9.9052	30'
40'	9.7761	17	9.8718	26	0.1282	10	9.9042	20'
50'	9.7778	17	9.8745	27	0.1255	9	9.9033	10'
37° 0'	9.7795	17	9.8771	26	0.1229	10	9.9023	0' 53°
L cos	差	L cot	通差	L tan	差	L sin	角	比例部分

30 29 28

1	3.0	2.9	2.8
2	6.0	5.8	5.6
3	9.0	8.7	8.4
4	12.0	11.6	11.2
5	15.0	14.5	14.0
6	18.0	17.4	16.8
7	21.0	20.3	19.6
8	24.0	23.2	22.4
9	27.0	26.1	25.2

27 26 25

1	2.7	2.6	2.5
2	5.4	5.2	5.0
3	8.1	7.8	7.5
4	10.8	10.4	10.0
5	13.5	13.0	11.5
6	16.2	15.6	12.0
7	18.9	18.2	17.5
8	21.6	20.8	20.0
9	24.3	23.4	22.5

23 22 21

1	2.3	2.2	2.1
2	4.6	4.4	4.1
3	6.9	6.6	6.3
4	9.2	8.8	8.4
5	11.5	11.0	10.5
6	13.8	13.2	12.6
7	16.1	15.4	14.7
8	18.4	17.6	16.8
9	20.7	19.8	18.9

比例部分	角	L sin	差	L tan	通差	L cot	差	L cos
19 18 17	37° 0'	9.7795	16	9.8771	26	0.1229	9	9.9023
1	10'	9.7811	17	9.8797	27	0.1203	10	9.9014
2	20'	9.7828	16	9.8824	26	0.1176	9	9.9004
3	30'	9.7844	17	9.8850	26	0.1150	10	9.8995
4	40'	9.7861	16	9.8876	26	0.1124	10	9.8985
5	50'	9.7877	16	9.8902	26	0.1098	10	9.8975
19 18 17	38° 0'	9.7893	17	9.8928	26	0.1072	10	9.8965
1	10'	9.7910	16	9.8954	26	0.1046	10	9.8955
2	20'	9.7926	15	9.8980	26	0.1020	10	9.8945
3	30'	9.7941	16	9.9006	26	0.0994	10	9.8935
4	40'	9.7957	16	9.9032	26	0.0968	10	9.8925
5	50'	9.7973	16	9.9058	26	0.0942	10	9.8915
19 18 17	39° 0'	9.7989	15	9.9084	25	0.0916	10	9.8905
1	10'	9.8004	16	9.9110	25	0.0890	11	9.8895
2	20'	9.8020	15	9.9135	25	0.0865	11	9.8884
3	30'	9.8035	15	9.9161	26	0.0839	10	9.8874
4	40'	9.8050	16	9.9187	25	0.0813	11	9.8864
5	50'	9.8066	15	9.9212	26	0.0788	10	9.8853
16 15 14	40° 0'	9.8081	15	9.9238	26	0.0762	11	9.8843
1	10'	9.8096	15	9.9264	25	0.0736	11	9.8832
2	20'	9.8111	14	9.9289	26	0.0711	11	9.8821
3	30'	9.8125	15	9.9315	26	0.0685	10	9.8810
4	40'	9.8140	15	9.9341	25	0.0659	11	9.8800
5	50'	9.8155	14	9.9366	26	0.0634	11	9.8789
16 15 14	41° 0'	9.8169	15	9.9392	25	0.0608	11	9.8778
1	10'	9.8184	14	9.9417	26	0.0583	11	9.8767
2	20'	9.8198	15	9.9443	25	0.0557	11	9.8756
3	30'	9.8213	14	9.9468	26	0.0532	12	9.8745
4	40'	9.8227	14	9.9494	25	0.0506	11	9.8733
5	50'	9.8241	14	9.9519	25	0.0481	11	9.8722
16 15 14	42° 0'	9.8255	14	9.9544	25	0.0456	11	9.8711
1	10'	9.8269	14	9.9570	26	0.0430	12	9.8699
2	20'	9.8283	14	9.9595	25	0.0405	11	9.8688
3	30'	9.8297	14	9.9621	26	0.0379	12	9.8676
4	40'	9.8311	14	9.9646	25	0.0354	11	9.8665
5	50'	9.8324	13	9.9671	25	0.0329	12	9.8653
13 12 11	43° 0'	9.8338	14	9.9697	26	0.0303	12	9.8641
1	10'	9.8351	13	9.9722	25	0.0278	12	9.8629
2	20'	9.8365	14	9.9747	25	0.0253	11	9.8618
3	30'	9.8378	13	9.9772	25	0.0228	12	9.8606
4	40'	9.8391	13	9.9798	26	0.0202	12	9.8594
5	50'	9.8405	14	9.9823	25	0.0177	12	9.8582
13 12 11	44° 0'	9.8418	13	9.9848	25	0.0152	13	9.8569
1	10'	9.8431	13	9.9874	26	0.0126	12	9.8557
2	20'	9.8444	13	9.9899	25	0.0101	12	9.8545
3	30'	9.8457	12	9.9924	25	0.0076	13	9.8532
4	40'	9.8469	12	9.9949	25	0.0051	12	9.8520
5	50'	9.8482	13	9.9675	26	0.0025	13	9.8507
13 12 11	45° 0'	9.8495	13	10.0000	25	0.0000	12	9.8495
比例部分	L cos	差	L cot	通差	L tan	差	L sin	角

角						角					
角	sin	tan	cot	cos	角	角	sin	tan	cot	cos	角
0° 0'	0.0000	0.0000	∞	1.0000	0° 90°	7° 0'	0.1219	0.1228	8.1443	0.9925	0° 83°
10'	0.0029	0.0029	343.7737	1.0000	50'	10'	0.1248	0.1257	7.9530	0.9922	50'
20'	0.0058	0.0058	171.8854	1.0000	40'	20'	0.1276	0.1287	7.7704	0.9918	40'
30'	0.0087	0.0087	114.5887	1.0000	30'	30'	0.1305	0.1317	7.5958	0.9914	30'
40'	0.0116	0.0116	85.9398	0.9999	20'	40'	0.1334	0.1346	7.4287	0.9911	20'
50'	0.0145	0.0145	68.7501	0.9999	10'	50'	0.1363	0.1376	7.2687	0.9907	10'
1° 0'	0.0175	0.0175	57.2900	0.9998	0° 89°	8° 0'	0.1392	0.1405	7.1154	0.9903	0° 82°
	cos	cot	tan	sin	角	10'	0.1421	0.1435	6.9682	0.9899	50'
1° 0'	0.0175	0.0175	57.2900	0.9998	0° 89°	20'	0.1449	0.1465	6.8269	0.9894	40'
10'	0.0204	0.0204	49.1039	0.9998	50'	30'	0.1478	0.1495	6.6912	0.9890	30'
20'	0.0233	0.0233	42.9641	0.9997	40'	40'	0.1507	0.1524	6.5606	0.9886	20'
30'	0.0262	0.0262	38.1885	0.9997	30'	50'	0.1536	0.1554	6.4348	0.9881	10'
40'	0.0291	0.0291	34.3678	0.9996	20'	9° 0'	0.1564	0.1584	6.3138	0.9877	0° 81°
50'	0.0320	0.0320	31.2416	0.9995	10'	10'	0.1593	0.1614	6.1970	0.9872	50'
2° 0'	0.0349	0.0349	28.6363	0.9994	0° 88°	20'	0.1622	0.1644	6.0844	0.9868	40'
10'	0.0378	0.0378	26.4316	0.9993	50'	30'	0.1650	0.1673	5.9758	0.9863	30'
20'	0.0407	0.0407	24.5418	0.9992	40'	40'	0.1679	0.1703	5.8708	0.9858	20'
30'	0.0436	0.0437	22.9038	0.9990	30'	50'	0.1708	0.1733	5.7694	0.9853	10'
40'	0.0465	0.0466	21.4704	0.9989	20'	10° 0'	0.1736	0.1763	5.6713	0.9848	0° 80°
50'	0.0494	0.0495	20.2056	0.9988	10'	10'	0.1765	0.1793	5.5764	0.9843	50'
3° 0'	0.0523	0.0524	19.0811	0.9986	0° 87°	20'	0.1794	0.1823	5.4845	0.9838	40'
10'	0.0552	0.0553	18.0750	0.9985	50'	30'	0.1822	0.1853	5.3955	0.9833	30'
20'	0.0581	0.0582	17.1693	0.9983	40'	40'	0.1851	0.1883	5.3093	0.9827	20'
30'	0.0610	0.0612	16.3499	0.9981	30'	50'	0.1880	0.1914	5.2257	0.9822	10'
40'	0.0640	0.0641	15.6048	0.9980	20'	11° 0'	0.1908	0.1944	5.1446	0.9816	0° 79°
50'	0.0669	0.0670	14.9244	0.9978	10'	10'	0.1937	0.1974	5.0658	0.9811	50'
4° 0'	0.0698	0.0699	14.3007	0.9976	0° 86°	20'	0.1965	0.2004	4.9894	0.9805	40'
10'	0.0727	0.0729	13.7267	0.9974	50'	30'	0.1994	0.2035	4.9152	0.9799	30'
20'	0.0756	0.0758	13.1969	0.9971	40'	40'	0.2022	0.2065	4.8430	0.9793	20'
30'	0.0785	0.0787	12.7062	0.9969	30'	50'	0.2051	0.2095	4.7729	0.9787	10'
40'	0.0814	0.0816	12.2505	0.9967	20'	12° 0'	0.2079	0.2126	4.7046	0.9781	0° 78°
50'	0.0843	0.0846	11.8262	0.9964	10'	10'	0.2108	0.2156	4.6382	0.9775	50'
5° 0'	0.0872	0.0875	11.4301	0.9962	0° 85°	20'	0.2136	0.2186	4.5736	0.9769	40'
10'	0.0901	0.0904	11.0594	0.9959	50'	30'	0.2164	0.2217	4.5107	0.9763	30'
20'	0.0929	0.0934	10.7119	0.9957	40'	40'	0.2193	0.2247	4.4494	0.9757	20'
30'	0.0958	0.0963	10.3854	0.9954	30'	50'	0.2221	0.2278	4.3897	0.9750	10'
40'	0.0987	0.0992	10.0780	0.9951	20'						
50'	0.1016	0.1022	9.7882	0.9948	10'						
6° 0'	0.1045	0.1051	9.5144	0.9945	0° 84°						
10'	0.1074	0.1080	9.2553	0.9942	50'						
20'	0.1103	0.1110	9.0098	0.9939	40'						
30'	0.1132	0.1139	8.7769	0.9936	30'						
40'	0.1161	0.1169	8.5555	0.9932	20'						
50'	0.1190	0.1198	8.3450	0.9929	10'						
7° 0'	0.1219	0.1228	8.1443	0.9925	0° 83°						
	cos	cot	tan	sin	角						

角						角					
角	sin	tan	cot	cos	角	角	sin	tan	cot	cos	角
13° 0'	0.2250	0.2309	4.3315	0.9744	0° 77°	21° 0'	0.3584	0.3839	2.6051	0.9336	0° 69°
10'	0.2278	0.2339	4.2747	0.9737	50'	10'	0.3611	0.3872	2.5826	0.9325	50'
20'	0.2306	0.2370	4.2193	0.9730	40'	20'	0.3638	0.3906	2.5605	0.9315	40'
30'	0.2334	0.2401	4.1653	0.9724	30'	30'	0.3665	0.3939	2.5386	0.9304	30'
40'	0.2363	0.2432	4.1126	0.9717	20'	40'	0.3692	0.3973	2.5172	0.9293	20'
50'	0.2391	0.2462	4.0611	0.9710	10'	50'	0.3719	0.4006	2.4960	0.9283	10'
14° 0'	0.2419	0.2493	4.0108	0.9703	0° 76°	22° 0'	0.3740	0.4040	2.4751	0.9272	0° 68°
10'	0.2447	0.2524	3.9617	0.9696	50'	10'	0.3773	0.4077	2.4545	0.9261	50'
20'	0.2476	0.2555	3.9136	0.9689	40'	20'	0.3800	0.4108	2.4342	0.9250	40'
30'	0.2504	0.2586	3.8667	0.9681	30'	30'	0.3827	0.4142	2.4142	0.9239	30'
40'	0.2532	0.2617	3.8208	0.9674	20'	40'	0.3854	0.4176	2.3945	0.9228	20'
50'	0.2560	0.2648	3.7760	0.9667	10'	50'	0.3881	0.4210	2.3750	0.9216	10'
15° 0'	0.2588	0.2679	3.7321	0.9659	0° 75°	23° 0'	0.3907	0.4245	2.3559	0.9205	0° 67°
10'	0.2616	0.2711	3.6891	0.9652	50'	10'	0.3934	0.4279	2.3369	0.9194	50'
20'	0.2644	0.2742	3.6470	0.9644	40'	20'	0.3961	0.4314	2.3183	0.9182	40'
30'	0.2672	0.2773	3.6059	0.9636	30'	30'	0.3987	0.4348	2.2998	0.9171	30'
40'	0.2700	0.2805	3.5656	0.9628	20'	40'	0.4014	0.4383	2.2817	0.9159	20'
50'	0.2728	0.2836	3.5261	0.9621	10'	50'	0.4041	0.4417	2.2637	0.9147	10'
16° 0'	0.2756	0.2867	3.4874	0.9613	0° 74°	24° 0'	0.4067	0.4452	2.2460	0.9135	0° 66°
10'	0.2784	0.2899	3.4495	0.9605	50'	10'	0.4094	0.4487	2.2286	0.9124	50'
20'	0.2812	0.2931	3.4124	0.9596	40'	20'	0.4120	0.4522	2.2113	0.9112	40'
30'	0.2840	0.2962	3.3759	0.9588	30'	30'	0.4147	0.4557	2.1943	0.9100	30'
40'	0.2868	0.2994	3.3402	0.9580	20'	40'	0.4173	0.4592	2.1775	0.9088	20'
50'	0.2896	0.3026	3.3052	0.9572	10'	50'	0.4200	0.4628	2.1609	0.9075	10'
17° 0'	0.2924	0.3057	3.2709	0.9563	0° 73°	25° 0'	0.4226	0.4663	2.1445	0.9063	0° 65°
10'	0.2952	0.3089	3.2371	0.9555	50'	10'	0.4253	0.4699	2.1283	0.9051	50'
20'	0.2979	0.3121	3.2041	0.9546	40'	20'	0.4279	0.4734	2.1123	0.9038	40'
30'	0.3007	0.3153	3.1716	0.9537	30'	30'	0.4305	0.4770	2.0965	0.9026	30'
40'	0.3035	0.3185	3.1397	0.9528	20'	40'	0.4331	0.4806	2.0809	0.9013	20'
50'	0.3062	0.3217	3.1084	0.9520	10'	50'	0.4358	0.4841	2.0655	0.9001	10'
18° 0'	0.3090	0.3249	3.0777	0.9511	0° 72°	26° 0'	0.4384	0.4877	2.0503	0.8988	0° 64°
10'	0.3118	0.3281	3.0475	0.9502	50'	10'	0.4410	0.4913	2.0353	0.8975	50'
20'	0.3145	0.3314	3.0178	0.9492	40'	20'	0.4436	0.4950	2.0204	0.8962	40'
30'	0.3173	0.3346	2.9887	0.9483	30'	30'	0.4462	0.4986	2.0057	0.8949	30'
40'	0.3201	0.3378	2.9600	0.9474	20'	40'	0.4488	0.5022	1.9912	0.8936	20'
50'	0.3228	0.3411	2.9319	0.9465	10'	50'	0.4514	0.5059	1.9768	0.8923	10'
19° 0'	0.3256	0.3443	2.9042	0.9455	0° 71°	27° 0'	0.4540	0.5095	1.9626	0.8910	0° 63°
10'	0.3283	0.3476	2.8770	0.9446	50'	10'	0.4566	0.5132	1.9486	0.8897	50'
20'	0.3311	0.3508	2.8502	0.9436	40'	20'	0.4592	0.5169	1.9347	0.8884	40'
30'	0.3338	0.3541	2.8239	0.9426	30'	30'	0.4617	0.5206	1.9210	0.8870	30'
40'	0.3365	0.3574	2.7980	0.9417	20'	40'	0.4643	0.5243	1.9074	0.8857	20'
50'	0.3393	0.3607	2.7725	0.9407	10'	50'	0.4669	0.5280	1.8940	0.8843	10'
20° 0'	0.3420	0.3640	2.7475	0.9397	0° 70°	28° 0'	0.4695	0.5317	1.8807	0.8829	0° 62°
10'	0.3448	0.3673	2.7228	0.9387	50'	10'	0.4720	0.5354	1.8676	0.8816	50'
20'	0.3475	0.3706	2.6985	0.9377	40'	20'	0.4746	0.5392	1.8546	0.8802	40'
30'	0.3502	0.3739	2.6746	0.9367	30'	30'	0.4772	0.5430	1.8418	0.8788	30'
40'	0.3529	0.3772	2.6511	0.9356	20'	40'	0.4797	0.5467	1.8291	0.8774	20'
50'	0.3557	0.3805	2.6279	0.9346	10'	50'	0.4823	0.5505	1.8165	0.8760	10'
21° 0'	0.3584	0.3839	2.6051	0.9336	0° 69°	29° 0'	0.4848	0.5543	1.8040	0.8746	0° 61°
	cos	cot	tan	sin	角		cos	cot	tan	sin	角

角	sin	tan	cot	cos	角	sin	tan	cot	cos		
29° 0'	0.4848	0.5543	1.8040	0.8746	0° 61'	37° 0'	0.6018	0.7536	1.3270	0.7986	0° 53'
10'	0.4874	0.5581	1.7917	0.8732	50'	10'	0.6041	0.7581	1.3190	0.7969	50'
20'	0.4899	0.5619	1.7796	0.8718	40'	20'	0.6065	0.7627	1.3111	0.7951	40'
30'	0.4924	0.5658	1.7675	0.8704	30'	30'	0.6088	0.7673	1.3032	0.7934	30'
40'	0.4950	0.5696	1.7556	0.8689	20'	40'	0.6111	0.7720	1.2954	0.7916	20'
50'	0.4975	0.5735	1.7437	0.8675	10'	50'	0.6134	0.7766	1.2876	0.7898	10'
30° 0'	0.5000	0.5774	1.7321	0.8660	0° 60'	38° 0'	0.6157	0.7813	1.2799	0.7880	0° 52'
10'	0.5025	0.5812	1.7205	0.8646	50'	10'	0.6180	0.7860	1.2723	0.7862	50'
20'	0.5050	0.5851	1.7090	0.8631	40'	20'	0.6202	0.7907	1.2647	0.7844	40'
30'	0.5075	0.5890	1.6977	0.8616	30'	30'	0.6225	0.7954	1.2572	0.7826	30'
40'	0.5100	0.5930	1.6864	0.8601	20'	40'	0.6248	0.8002	1.2497	0.7808	20'
50'	0.5125	0.5969	1.6753	0.8587	10'	50'	0.6271	0.8050	1.2423	0.7790	10'
31° 0'	0.5150	0.6009	1.6643	0.8572	0° 59'	39° 0'	0.6293	0.8098	1.2349	0.7771	0° 51'
10'	0.5175	0.6048	1.6534	0.8557	50'	10'	0.6316	0.8146	1.2276	0.7753	50'
20'	0.5200	0.6088	1.6426	0.8542	40'	20'	0.6338	0.8195	1.2203	0.7735	40'
30'	0.5225	0.6128	1.6319	0.8526	30'	30'	0.6361	0.8243	1.2131	0.7716	30'
40'	0.5250	0.6168	1.6212	0.8511	20'	40'	0.6383	0.8292	1.2059	0.7698	20'
50'	0.5275	0.6208	1.6107	0.8496	10'	50'	0.6406	0.8342	1.1988	0.7679	10'
32° 0'	0.5299	0.6249	1.6003	0.8484	0° 58'	40° 0'	0.6428	0.8391	1.1918	0.7660	0° 50'
10'	0.5324	0.6289	1.5900	0.8465	50'	10'	0.6450	0.8441	1.1847	0.7642	50'
20'	0.5348	0.6330	1.5798	0.8450	40'	20'	0.6472	0.8491	1.1778	0.7623	40'
30'	0.5373	0.6371	1.5697	0.8434	30'	30'	0.6494	0.8541	1.1708	0.7604	30'
40'	0.5398	0.6412	1.5597	0.8418	20'	40'	0.6517	0.8591	1.1640	0.7585	20'
50'	0.5422	0.6453	1.5497	0.8403	10'	50'	0.6539	0.8642	1.1571	0.7566	10'
33° 0'	0.5446	0.6494	1.5399	0.8387	0° 57'	41° 0'	0.6561	0.8693	1.1504	0.7547	0° 49'
10'	0.5471	0.6536	1.5301	0.8371	50'	10'	0.6583	0.8744	1.1436	0.7528	50'
20'	0.5495	0.6577	1.5204	0.8355	40'	20'	0.6604	0.8796	1.1369	0.7509	40'
30'	0.5519	0.6619	1.5108	0.8339	30'	30'	0.6626	0.8847	1.1303	0.7490	30'
40'	0.5544	0.6661	1.5013	0.8323	20'	40'	0.6648	0.8899	1.1237	0.7470	20'
50'	0.5568	0.6703	1.4919	0.8307	10'	50'	0.6670	0.8952	1.1171	0.7451	10'
34° 0'	0.5592	0.6745	1.4826	0.8290	0° 56'	42° 0'	0.6691	0.9004	1.1106	0.7431	0° 48'
10'	0.5616	0.6787	1.4733	0.8274	50'	10'	0.6713	0.9057	1.1041	0.7412	50'
20'	0.5640	0.6830	1.4641	0.8258	40'	20'	0.6734	0.9110	1.0977	0.7392	40'
30'	0.5664	0.6873	1.4550	0.8241	30'	30'	0.6756	0.9163	1.0913	0.7373	30'
40'	0.5688	0.6916	1.4460	0.8225	20'	40'	0.6777	0.9217	1.0850	0.7353	20'
50'	0.5712	0.6959	1.4370	0.8208	10'	50'	0.6799	0.9271	1.0786	0.7333	10'
35° 0'	0.5736	0.7002	1.4281	0.8192	0° 55'	43° 0'	0.6820	0.9325	1.0724	0.7314	0° 47'
10'	0.5760	0.7046	1.4193	0.8175	50'	10'	0.6841	0.9380	1.0661	0.7294	50'
20'	0.5783	0.7089	1.4106	0.8158	40'	20'	0.6862	0.9435	1.0599	0.7274	40'
30'	0.5807	0.7133	1.4019	0.8141	30'	30'	0.6884	0.9490	1.0538	0.7254	30'
40'	0.5831	0.7177	1.3934	0.8124	20'	40'	0.6905	0.9545	1.0477	0.7234	20'
50'	0.5854	0.7221	1.3848	0.8107	10'	50'	0.6926	0.9601	1.0416	0.7214	10'
36° 0'	0.5878	0.7265	1.3764	0.8090	0° 54'	44° 0'	0.6947	0.9657	1.0355	0.7193	0° 46'
10'	0.5901	0.7310	1.3680	0.8073	50'	10'	0.6967	0.9713	1.0295	0.7173	50'
20'	0.5925	0.7355	1.3597	0.8056	40'	20'	0.6988	0.9770	1.0235	0.7153	40'
30'	0.5948	0.7400	1.3514	0.8039	30'	30'	0.7009	0.9827	1.0176	0.7133	30'
40'	0.5972	0.7445	1.3432	0.8021	20'	40'	0.7030	0.9884	1.0117	0.7112	20'
50'	0.5995	0.7490	1.3351	0.8004	10'	50'	0.7050	0.9942	1.0058	0.7092	10'
37° 0'	0.6018	0.7536	1.3270	0.7986	0° 53'	45° 0'	0.7071	1.0000	1.0000	0.7071	0° 45'
	cos	cot	tan	sin	角		cos	cot	tan	sin	角



發行所 東京市日本橋區本石町三丁目二八〇番東京寶文館  
 關西專賣 大阪府東區淡路町四丁目三番會社大阪寶文館

編纂者 國枝元治  
 發行者 大葉久吉  
 印刷者 青柳十一郎

大正二年十一月十四日印刷  
 大正二年十一月十七日發行

定價金參拾九錢

中學 數學教科書 角 平面三之部 法之部



終