Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Riemannsche Flächen

Vorlesung 29

Das Residuum einer Kohomologieklasse

Es sei X eine kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche. Nach Satz 16.15 gibt es eine exakte kurze Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow \mathcal{E}^{(1,0)} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)} \longrightarrow 0\,.$$

Eine Kohomologieklasse $c \in H^1(X, \Omega_X)$ wird wegen $H^1(X, \mathcal{E}^{(1,0)}) = 0$ über den verbindenden Homomorphismus von einer Flächenform $\sigma \in H^0(X, \mathcal{E}^{(2)})$ repräsentiert. Diese ist bis auf das Bild einer differenzierbaren $(1,0)$-Form, also $d\omega$, eindeutig bestimmt. Nach Satz 89.2 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)) ist

$$\int_X d\omega \,=\, 0.$$

Wir definieren das *Residuum* zur Kohomologieklasse c durch

$$\operatorname{Res}(c) \,:=\, \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_X \sigma,$$

und dies ist unabhängig von der gewählten Flächenform σ, die c realisiert. Dies definiert einen Homomorphismus

$$H^1(X, \Omega_X) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Dieser ist surjektiv, da es auf X nach Satz 88.10 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)) reelle überall positive Flächenformen gibt, deren Gesamtintegral somit positiv ist.

Beispiel 29.1. Wir betrachten auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ die Flächenform $\frac{1}{1+|z|^4} dz \wedge d\,\overline{z}$ bzw. $\frac{1}{1+|z^{-1}|^4} dz^{-1} \wedge d\,\overline{z^{-1}}$ auf der affinen Standardüberdeckung U bzw. auf V. Wegen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+|z^{-1}|^4} dz^{-1} \wedge d\,\overline{z^{-1}} &= \frac{1}{1+|z^{-1}|^4} \cdot \frac{-1}{z^2} dz \wedge \overline{dz^{-1}} \\
&= \frac{1}{1+|z^{-1}|^4} \cdot \frac{-1}{z^2} dz \wedge \frac{-1}{\overline{z}^2} d\,\overline{z} \\
&= \frac{1}{1+|z^{-1}|^4} \cdot \frac{-1}{z^2} \cdot \frac{-1}{\overline{z}^2} dz \wedge d\,\overline{z} \\
&= \frac{1}{1+|z^{-1}|^4} \cdot \frac{1}{z^2\overline{z}^2} dz \wedge d\,\overline{z} \\
&= \frac{1}{1+|z^{-1}|^4} \cdot \frac{1}{|z|^4} dz \wedge d\,\overline{z}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1+|z|^4} dz \wedge d\,\overline{z}$$

stimmen die Flächenformen auf dem Durchschnitt überein, es handelt sich also um eine wohldefinierte positive Flächenform σ auf der projektiven Geraden.

Wir verfolgen diese Form in der langen exakten Kohomologiesequenz zur kurzen exakten Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} \longrightarrow \mathcal{E}^{(1,0)} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)} \longrightarrow 0$$

aus Satz 16.15. Auf den beiden offenen Mengen ist die Flächenform σ die äußere Ableitung einer 1-Form. Auf U ist nach Aufgabe 1.15

$$-\frac{1}{z} \arctan\left(z\overline{z}\right) dz$$

ein Urbild und auf V entsprechend

$$\begin{aligned} -\frac{1}{w} \arctan\left(w\overline{w}\right) dw &= -z \arctan\left((z\overline{z})^{-1}\right) dz^{-1} \\ &= \frac{1}{z} \arctan\left((z\overline{z})^{-1}\right) dz. \end{aligned}$$

Aufgrund der Potenzreihenentwicklung sind diese 1-Formen jeweils auf U bzw. auf V definiert. Die Differenz der beiden Formen ist unter Verwendung von Aufgabe 21.8 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) gleich

$$\frac{1}{z}\left(\arctan\left(z\overline{z}\right) + \arctan\left((z\overline{z})^{-1}\right)\right) dz = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{dz}{z}.$$

In dieser Form beschreibt diese Differenz, aufgefasst als holomorphe Differentialform auf $U \cap V$ eine nichttriviale Kohomologieklasse in $H^1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \Omega_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}})$.

Unter Verwendung von Aufgabe 74.13 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} \sigma &= \int_U \frac{1}{1+|z|^4} dz \wedge d\,\overline{z} \\ &= -2\mathrm{i} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2} dx \wedge dy \\ &= -\mathrm{i}\pi^2. \end{aligned}$$

Das Residuum der zugehörigen Kohomologieklasse ist somit

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(-\mathrm{i}\pi^2\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Nach Lemma 18.15 gibt es auch die kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow \mathcal{M}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{T}^{(1)} \longrightarrow 0\,,$$

mit der man ebenfalls die erste Kohomologie der holomorphen Differentialformen beschreiben kann. Auch in dieser Situation definieren wir das Residuum.

Definition 29.2. Es sei X eine kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche und $\tau \in \Gamma\big(X, \mathcal{T}^{(1)}\big)$ eine Hauptteilverteilung von meromorphen Differentialformen. Man nennt

$$\operatorname{Res}(\tau) := \sum_{P \in X} \operatorname{Res}_P(\tau)$$

das *Residuum* (oder *Gesamtresiduum*) von τ.

Dabei ist $\operatorname{Res}_P(\tau)$ einfach der Koeffizient von f zu z^{-1}, wenn die Hauptteilverteilung im Punkt P durch die meromorphe Differentialform fdz mit einem lokalen Parameter z um P beschrieben wird. Wir zeigen, dass die beiden Definitionen miteinander kompatibel sind.

Lemma 29.3. *Es sei X eine kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche und $\tau \in \Gamma\big(X, \mathcal{T}^{(1)}\big)$ eine Hauptteilverteilung von meromorphen Differentialformen. Dann ist*

$$\operatorname{Res}(\tau) = \operatorname{Res}(\delta(\tau)),$$

wobei δ den verbindenden Homomorphismus zur kurzen exakten Garbensequenz aus Lemma 18.15 bezeichnet.

Beweis. Jede Hauptteilverteilung besitzt endlich viele Trägerpunkte. Da der verbindende Homomorphismus und die Residuenabbildung $\mathbb{C}$-linear sind, können wir davon ausgehen, das die Hauptteilverteilung in einem einzigen Punkt P konzentriert ist. Die Hauptteilverteilung wird dann durch eine meromorphe Differentialform τ auf einer offenen Kreisscheibenumgebung U, wobei τ auf $U \setminus \{P\}$ holomorph sei, und durch die Nullform auf $V = X \setminus \{P\}$ repräsentiert. Der erste ?ech-Kozykel in Ω_X, also $\delta\tau$, wird dann durch die holomorphe Differentialform τ auf

$$U \cap V = U \setminus \{P\}$$

repräsentiert. Für diesen gibt es wiederum 1-Formen $\omega_1 \in \Gamma\big(U, \mathcal{E}^{(1,0)}\big)$ und $\omega_2 \in \Gamma\big(V, \mathcal{E}^{(1,0)}\big)$ mit

$$\tau = \omega_1 - \omega_2$$

auf $U \setminus \{P\}$. Da τ holomorph ist, ist

$$d\tau = 0$$

nach Satz 16.15. Somit legen diese 1-Formen die 2-Form $\sigma \in H^0(X, \mathcal{E}^{(2)})$ fest, wobei lokal

$$d\omega_1 = \sigma = d\omega_2$$

gilt. Ferner gilt

$$\delta\tau = \delta\sigma$$

in $H^1(X, \Omega_X)$, wobei die beiden δ verbindende Homomorphismen zu unterschiedlichen Garbensequenzen bezeichnen. Nach der Definition des Residuums für eine holomorphe Kohomologieklasse muss man σ über der Fläche intergrieren.

Es seien $P \in U' \subset U'' \subset U$ offene Kreisumgebungen (in der Karte) mit unterschiedlichen Radien. Es sei f eine reellwertige unendlich oft differenzierbare Funktion auf X, die auf U' den konstanten Wert 1 und außerhalb von U'' den konstanten Wert 0 besitzt, was es nach Satz 25.3 gibt. Wir setzen $g := 1 - f$. Die Form $g\omega_2$ ist auf V definiert, da sie aber auf U' den Wert 0 hat, kann man sie zu einer globalen Form aus $\mathcal{E}^{(1,0)}$ fortsetzen. Ferner besitzt $f\omega_2$ auf $U' \setminus \{P\}$ die Eigenschaft

$$d(f\omega_2) \,=\, d\omega_2 \,=\, d(\omega_1 - \tau) \,=\, d\omega_1,$$

da τ holomorph ist. Dies sichert, dass man die Form $d(f\omega_2)$ als globale Form auffassen kann. Insgesamt gilt

$$\sigma \,=\, dg\omega_2 + df\omega_2,$$

wobei dies auf V unmittelbar wegen $g + f \,=\, 1$ gilt und auf U' ebenso aufgrund der konstruierten Fortsetzungen. Nach dem Satz von Stokes (ohne Rand) ist

$$\int_X d(g\omega_2) \,=\, 0.$$

Also ist unter Verwendung des Satzes von Stokes (mit Rand)

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(\delta(\tau)) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_X \sigma \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_X dg\omega_2 + df\omega_2 \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_X df\omega_2 \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_U df\omega_2 \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_U d(f\omega_1 - f\tau) \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f\omega_1 - f\tau \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma -f\tau \\
&= \operatorname{Res}_P(f\tau) \\
&= \operatorname{Res}_P(\tau),
\end{aligned}$$

wobei γ eine einfache Umrundung mit dem Uhrzeigersinn von P in $U \setminus U''$ ist und worauf $f\omega_1$ gleich 0 ist. $\square$

Abbildungsverzeichnis