Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Arbeitsblatt 29

Aufgabe 29.1. Zeige, dass die folgenden Daten bzw. Konstruktionen den gleichen Morphismus

$$\mathbb{P}^1_K \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$$

von der projektiven Geraden in sich festlegen (dabei seien $(a,b),(c,d) \in K^2$ linear unabhängig).

(1) Der induzierte Morphismus im Sinne von Satz 12.11 zum homogenen Ringhomomorphismus $K[X,Y] \to K[S,T]$ mit $X \mapsto aS+bT$, $Y \mapsto cS+dT$.
(2) Der Morphismus zu den beiden Schnitten

$$as+bt, cs+dt \in \Gamma\left(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}(1)\right)$$

im Sinne von Lemma 28.1.
(3) Der Morphismus im Sinne von Lemma 29.7 zur rationalen Funktion $\frac{as+bt}{cs+dt} \in K\left(\frac{s}{t}\right)$.

Aufgabe 29.2. Zeige, dass es einen Morphismus

$$V(X^2-Y^3) \supseteq U = V(X^2-Y^3) \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{A}^1$$

gibt, den man nicht auf $V(X^2-Y^3)$ ausdehnen kann.

Aufgabe 29.3. Es sei K ein Körper und sei $C \subset \mathbb{P}^2_K$ eine ebene projektive Kurve. Es sei $P \in C$ ein Punkt der Kurve und sei

$$\varphi\colon C \setminus \{P\} \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$$

der durch die Projektion weg vom Punkt definierte Morphismus. Bei dieser Abbildung wird also ein Punkt $Q \in C$, $Q \neq P$, auf die durch Q und P gegebene *Sekante* abgebildet.

(1) Sei $K = \mathbb{C}$ und sei Q_n eine Folge auf C, die in der komplexen Topologie gegen P konvergiert. Konvergiert $\varphi(Q_n)$?
(2) Besitzt $\varphi(Q_n)$ einen Häufungspunkt?
(3) Sei P ein glatter Punkt. Zeige, dass es eine Fortsetzung des Morphismus auf ganz C gibt.

AUFGABE 29.4. Diskutiere die Situation aus Aufgabe 29.3 für das Achsenkreuz

$$V_+(YZ) \subset \mathbb{P}^2$$

und den Kreuzungspunkt $(1,0,0)$.

AUFGABE 29.5.*

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0 und sei $C \subset \mathbb{P}^2_K$ eine irreduzible ebene projektive Kurve vom Grad d und sei

$$\varphi \colon C \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$$

der durch eine Projektion weg von einem Punkt $P \notin C$ definierte Morphismus. Zeige, dass bis auf endlich viele Ausnahmen die Faser zu jedem Punkt $t \in \mathbb{P}^1_K$ aus genau d Punkten besteht.

AUFGABE 29.6. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $C \subset \mathbb{P}^2_K$ eine glatte Kurve vom Grad $d \geq 2$. Zeige, dass es einen Morphismus $C \to \mathbb{P}^1_K$ derart gibt, dass jede Faser aus maximal $d-1$ Punkten besteht.

AUFGABE 29.7. Es sei $C = V_+(X^3 + Y^3 + Z^3) \subset \mathbb{P}^2_K$ die *Fermat-Kubik* über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik $\neq 3$. Beschreibe explizit einen Morphismus $C \to \mathbb{P}^1_K$, bei dem über jedem Punkt maximal zwei Punkte liegen.

AUFGABE 29.8. Es sei C eine irreduzible glatte projektive Kurve mit Funktionenkörper $Q(C) =$ und $q \in Q(C)$ mit zugehörigem Morphismus

$$q \colon C \longrightarrow \mathbb{P}^1_K.$$

Sei $a \in K$. Zeige, dass es einen Automorphismus

$$\theta \colon \mathbb{P}^1_K \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$$

derart gibt, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{q} & \mathbb{P}^1_K \\ & q-a \searrow & \downarrow \theta \\ & & \mathbb{P}^1_K \end{array}$$

kommutiert.

Aufgabe 29.9. Es sei C eine irreduzible glatte projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und sei $q \in Q(C)$ ein nichtkonstantes Element im Funktionenkörper $Q(C)$ mit dem zugehörigen Morphismus

$$q\colon C \longrightarrow \mathbb{P}^1_K.$$

Zeige, dass zu jedem Punkt $P \in \mathbb{P}^1_K$ die zurückgezogenen Divisoren $q^*(P)$ untereinander linear äquivalent sind.

Verwende Aufgabe 29.8.

Aufgabe 29.10. Es sei $\mathbb{P}^1_K = \operatorname{Proj}(K[X,Y])$ die projektive Gerade mit Funktionenkörper $K(t)$, $t = \frac{Y}{X}$. Beschreibe den zugehörigen Schemamorphismus

$$\mathbb{P}^1_K \longrightarrow \mathbb{P}^1_K,\, t \longmapsto t^n$$

für $n \in \mathbb{N}_+$. Was ist das Urbild des Nullpunktes, was ist das Urbild des unendlich fernen Punktes, wie sehen die Verzweigungsordnungen aus?

Aufgabe 29.11. Es sei $\mathbb{P}^1_K = \operatorname{Proj}(K[X,Y])$ die projektive Gerade mit Funktionenkörper $K(t)$, $t = \frac{Y}{X}$, und sei $P \in K[t]$ ein Polynom vom Grad $e \geq 1$. Beschreibe die Verzweigungsordnung in ∞ für den zugehörigen Schemamorphismus

$$\mathbb{P}^1_K \longrightarrow \mathbb{P}^1_K,\, t \longmapsto P.$$

Aufgabe 29.12.*

Es seien $\mathbb{P}^1_K = \operatorname{Proj}(K[X,Y])$ und $\mathbb{P}^1_K = \operatorname{Proj}(K[W,Z])$ projektive Geraden mit den Funktionenkörpern $K(t)$, $t = \frac{Y}{X}$ bzw. $K(u)$, $u = \frac{Z}{W}$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik $\neq 2$. Wir betrachten auf der zweiten projektiven Geraden das durch $WZ, W^2 + Z^2 \in \Gamma\left(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}(2)\right)$ gegebene lineare System mit der zugehörigen Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{P}^1_K \longrightarrow \mathbb{P}^1_K,\, (w,z) \longmapsto (wz, w^2 + z^2).$$

(1) Handelt es sich um ein volles lineares System?
(2) Bestimme die Urbilder zu $D_+(X)$ und $D_+(Y)$ und beschreibe die induzierten Abbildungen zwischen den affinen offenen Teilmengen.
(3) Handelt es sich um ein basispunktfreies lineares System?
(4) Beschreibe die zugehörige Körpererweiterung

$$K(t) \subseteq K(u)$$

der Funktionenkörper. Welchen Grad besitzt sie?
(5) Bestimme für jeden Punkt $(x,y) \in \mathbb{P}^1_K$ das Urbild unter φ sowie die jeweilige Verzweigungsordnung.
(6) Beschreibe den zurückgezogenen Divisor $\varphi^*(0 - \infty) = \varphi^*((Y) - (X))$.

Aufgabe 29.13. Es sei X ein normales noethersches integres Schema über einem Körper K und sei $q \in Q(X)$ ein Element des Funktionenkörpers von X. Zeige, dass q auf einer offenen Menge $U \subseteq X$ einen Morphismus

$$q\colon U \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

definiert, wobei die Kodimension von $X \setminus U$ zumindest 2 ist.

Aufgabe 29.14. Es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe von negativem Grad auf einer irreduziblen glatten projektiven Kurve C über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Zeige

$$\Gamma(C, \mathcal{L}) = 0.$$

Aufgabe 29.15. Zeige, dass für eine glatte projektive Kurve C über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Grad von invertierbaren Garben ein surjektiver Gruppenhomomorphismus

$$\operatorname{Pic}(C) \longrightarrow \mathbb{Z},\ \mathcal{L} \longmapsto \deg(\mathcal{L}),$$

ist.

Abbildungsverzeichnis