Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 24

Übungsaufgaben

Aufgabe 24.1. Überprüfe, um die folgenden Wörter korrekt gebildete (einschließlich Klammerung) modallogische Ausdrücke sind.

(1) $\Box((p) \wedge (q))$,
(2) $(p) \rightarrow \Box(q)$,
(3) $(p) \rightarrow (\Box(q))$,
(4) $(\Diamond(p)) \rightarrow ((\Box(q)) \rightarrow (r))$.

Aufgabe 24.2. Zeige, dass das K-Axiom äquivalent zu

$$\vdash \Diamond\alpha \rightarrow (\Diamond\neg\beta \vee \Diamond(\alpha \wedge \beta))$$

ist.

Aufgabe 24.3. Formuliere die in Bemerkung 23.7 aufgeführten Eigenschaften für das Ableitungsprädikat in der Sprache der Modallogik.

Aufgabe 24.4.*

Zeige, dass im K-System der Ausdruck

$$\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\beta)$$

ableitbar ist.

Aufgabe 24.5. Wir betrachten eine formale Modallogik, die durch das Axiomenschema

$$\vdash \Box\alpha \leftrightarrow \neg\alpha$$

gegeben sei.

(1) Erfüllt diese Modallogik das Axiomenschema K?
(2) Erfüllt diese Modallogik die Nezessisierungsregel?
(3) Erfüllt diese Modallogik das Ideologieaxiom?

Aufgabe 24.6. Es sei $p_i \quad i \in I$, eine Familie von Aussagenvariablen und sei L die zugehörige modallogische Sprache. Es sei S ein prädikatenlogisches Symbolalphabet, das unter anderem Konstanten c_i, $i \in I$, und eine fixierte Variable x enthalte.

(1) Definiere eine natürliche injektive Abbildung
$$\Psi \colon\, L \longrightarrow L^S,$$
bei der p_i auf $x = c_i$ und $\Box\alpha$ auf $\forall x \Psi(\alpha)$ abgebildet wird.
(2) Was ist $\Psi(\Diamond\alpha)$?
(3) Zeige, dass zu jeder in der K-Modallogik ableitbaren modallogischen Aussage α auch $\Psi(\alpha)$ im Prädikatenkalkül ableitbar ist.

Aufgabe 24.7. (1) Zeige, dass in einer K-Modallogik das Axiomenschema
$$\Diamond(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta$$
gilt.
(2) Zeige, dass in einer K-Modallogik das Axiomenschema
$$\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta \rightarrow \Diamond(\alpha \wedge \beta)$$
nicht gelten muss.

Aufgabe 24.8. (1) Zeige, dass in einer K-Modallogik das Axiomenschema
$$\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta \rightarrow \Diamond(\alpha \vee \beta)$$
gilt.
(2) Zeige, dass in einer K-Modallogik das Axiomenschema
$$\Diamond(\alpha \vee \beta) \rightarrow \Diamond\alpha \vee \Diamond\beta$$
nicht gelten muss.

Zur folgenden Aufgabe vergleiche auch Aufgabe 11.21.

Aufgabe 24.9. Zeige, dass in einer K-Modallogik das Axiomenschema
$$\Diamond(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\beta)$$
nicht gelten muss.

Aufgabe 24.10. Es sei Γ eine arithmetische Ausdrucksmenge und α ein einstelliges Prädikat mit
$$\Gamma \vdash \alpha(n)$$
für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es einen Satz q mit
$$\Gamma \vdash \alpha(GN(q)) \leftrightarrow q$$
gibt.

Aufgabe 24.11. Es sei Γ eine arithmetische Ausdrucksmenge und α ein einstelliges Prädikat mit

$$\Gamma \vdash \neg\alpha(n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es einen Satz q mit

$$\Gamma \vdash \alpha(GN(q)) \leftrightarrow q$$

gibt.

Aufgabe 24.12. Wir setzen

$$\alpha(x) := \exists y\,(x = y + y)$$

und es sei die Gödelisierung mit Primzahlen vorausgesetzt. Zeige (ohne den Fixpunktsatz zu verwenden), dass es einen Satz $q \in L_0^{\mathrm{Ar}}$ mit

$$PA \vdash \alpha(GN(q)) \leftrightarrow q$$

gibt.

Aufgabe 24.13. Es sei k eine fixierte positive natürliche Zahl und es sei

$$\alpha(x) := \exists y\,(x = ky)\,,$$

wobei ky als die k-fache Addition von y mit sich selbst realisiert werde. Es sei die Gödelisierung mit Primzahlen vorausgesetzt. Zeige (ohne den Fixpunktsatz zu verwenden), dass es einen Satz $q \in L_0^{\mathrm{Ar}}$ mit

$$PA \vdash \alpha(GN(q)) \leftrightarrow q$$

gibt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 24.14. (2 Punkte)

Überprüfe, um die folgenden Wörter korrekt gebildete (einschließlich Klammerung) modallogische Ausdrücke sind.

(1) $\Box((p) \wedge (q)$,
(2) $(p) \to \Diamond((q) \vee (r))$,
(3) $(\Box(\Box((p)))) \to (\Box(q))$,
(4) $((\Diamond(p)) \to ((\Box(q)) \to (r)))$.

Aufgabe 24.15. (2 Punkte)

Zeige, dass in einer K-Modallogik

$$\vdash \Diamond\neg\neg\alpha \leftrightarrow \neg\neg\Diamond\alpha$$

ableitbar ist.

AUFGABE 24.16. (2 Punkte)

Zeige, dass die K-Modallogik widerspruchsfrei ist.

AUFGABE 24.17. (4 (2+2) Punkte)

Es sei Γ eine arithmetische Ausdrucksmenge und α ein einstelliges Prädikat.

(1) Es gelte
$$\Gamma \vdash \alpha(n)$$
für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ und für alle übrigen natürlichen Zahlen gelte
$$\Gamma \vdash \neg\alpha(n)\,.$$
Zeige, dass es einen Satz q mit
$$\Gamma \vdash \alpha(GN(q)) \leftrightarrow q$$
gibt.

(2) Es gelte
$$\Gamma \vdash \neg\alpha(n)$$
für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ und für alle übrigen natürlichen Zahlen gelte
$$\Gamma \vdash \alpha(n)\,.$$
Zeige, dass es einen Satz q mit
$$\Gamma \vdash \alpha(GN(q)) \leftrightarrow q$$
gibt.