

## Elemente der Algebra

### Arbeitsblatt 2

### Übungsaufgaben

AUFGABE 2.1.\*

Zeige, dass ein Ring mit  $0 = 1$  der Nullring ist.

AUFGABE 2.2. Zeige, dass es keinen echten Zwischenring zwischen  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  gibt.

AUFGABE 2.3. Formuliere und beweise das allgemeine Distributivitätsgesetz für einen Ring.

AUFGABE 2.4. Es sei  $R$  ein Ring und seien  $\spadesuit, \heartsuit$  und  $\clubsuit$  Elemente in  $R$ . Berechne das Produkt

$$(\spadesuit^2 - 3\heartsuit\clubsuit\heartsuit - 2\clubsuit\heartsuit^2 + 4\spadesuit\heartsuit^2)(2\spadesuit\heartsuit^3\spadesuit - \clubsuit^2\spadesuit\heartsuit\spadesuit)(1 - 3\clubsuit\heartsuit\spadesuit\clubsuit^2\heartsuit).$$

Wie lautet das Ergebnis, wenn der Ring kommutativ ist?

AUFGABE 2.5. Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $f, a_i, b_j \in R$ . Zeige die folgenden Gleichungen:

$$\sum_{i=0}^n a_i f^i + \sum_{j=0}^m b_j f^j = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) f^k$$

und

$$\left( \sum_{i=0}^n a_i f^i \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^m b_j f^j \right) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k f^k \text{ mit } c_k = \sum_{r=0}^k a_r b_{k-r}.$$

AUFGABE 2.6. Formuliere die *binomischen Formeln* für zwei reelle Zahlen und beweise die Formeln mit Hilfe des Distributivgesetzes.

2

AUFGABE 2.7.\*

Zeige, dass die Binomialkoeffizienten die rekursive Beziehung

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

erfüllen.

Man mache sich dies auch für  $k < 0$  und  $k \geq n$  klar.

AUFGABE 2.8.\*

Es sei  $M$  eine  $n$ -elementige Menge. Zeige, dass die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen von  $M$  gleich dem Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k}$$

ist.

AUFGABE 2.9. Es sei  $R$  ein Ring und  $M$  eine Menge. Definiere auf der Abbildungsmenge

$$A = \{f : M \rightarrow R \mid f \text{ Abbildung}\}$$

eine Ringstruktur.

AUFGABE 2.10. Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und seien  $f, g$  Nichtnullteiler in  $R$ . Zeige, dass das Produkt  $fg$  ebenfalls ein Nichtnullteiler ist.

AUFGABE 2.11. Es sei  $R$  ein Ring und seien  $S_i \subseteq R$ ,  $i \in I$ , Unterringe. Zeige, dass dann auch der Durchschnitt  $\bigcap_{i \in I} S_i$  ein Unterring von  $R$  ist.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 2.12. (3 Punkte)

Es sei  $M$  eine Menge. Zeige, dass die Potenzmenge  $\mathfrak{P}(M)$  mit dem Durchschnitt  $\cap$  als Multiplikation und der symmetrischen Differenz

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

als Addition (mit welchen neutralen Elementen?) ein kommutativer Ring ist.

AUFGABE 2.13. (4 Punkte)

Beweise die Formel

$$n2^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}.$$

AUFGABE 2.14. (3 Punkte)

Bestimme die Nullteiler und die Nichtnullteiler in  $\mathbb{Z}/(12)$ .

Die nächste Aufgabe verwendet den Begriff des *nilpotenten* Elementes in einem Ring.

Ein Element  $a$  eines Ringes  $R$  heißt *nilpotent*, wenn  $a^n = 0$  ist für eine natürliche Zahl  $n$ .

AUFGABE 2.15. (2 Punkte)

Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und es seien  $f, g \in R$  nilpotente Elemente. Zeige, dass dann die Summe  $f + g$  ebenfalls nilpotent ist.

AUFGABE 2.16. (2 Punkte)

Es sei  $n \in \mathbb{N}_+$  eine fixierte positive natürliche Zahl. Zeige, dass die Menge aller rationalen Zahlen, die man mit einer Potenz von  $n$  als Nenner schreiben kann, einen Unterring von  $\mathbb{Q}$  bildet.

AUFGABE 2.17. (3 Punkte)

Es sei  $R = \mathbb{Z}[\frac{2}{3}]$  der von  $\mathbb{Z}$  und  $2/3$  erzeugte Unterring von  $\mathbb{Q}$ . Zeige, dass  $R$  alle rationalen Zahlen enthält, die sich mit einer Potenz von 3 im Nenner schreiben lassen.



## Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5