Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2024/2025**

Elemente der Algebra

Arbeitsblatt 3

Übungsaufgaben

AUFGABE 3.1. Es sei R ein kommutativer Ring mit Elementen $x, y, z, w \in R$, wobei z und w Einheiten seien. Beweise die folgenden Bruchrechenregeln.

(1)
$$\frac{x}{1} = x,$$

(2)
$$\frac{1}{x} = x^{-1},$$

(3)
$$\frac{1}{-1} = -1,$$

(4)
$$\frac{0}{z} = 0,$$

(5)
$$\frac{z}{z} = 1,$$

(6)
$$\frac{x}{z} = \frac{xw}{zw},$$

(7)
$$\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw},$$

(8)
$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{xw + yz}{zw}.$$

Gilt die zu (8) analoge Formel, die entsteht, wenn man die Addition mit der Multiplikation vertauscht, also
$$(x - z) \cdot (y - w) = (x + w)(y + z) - (z + w)?$$
Zeige, dass die „beliebte Formel“
$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{x + y}{z + w}$$
nicht gilt, außer im Nullring.

Aufgabe 3.2.*

Es sei R ein kommutativer Ring und $f \in R$. Charakterisiere mit Hilfe der Multiplikationsabbildung

$$\mu_f \colon R \longrightarrow R,\, g \longmapsto fg,$$

wann f ein Nichtnullteiler und wann f eine Einheit ist.

Aufgabe 3.3. Zeige, dass ein Unterring eines Körpers ein Integritätsbereich ist.

Aufgabe 3.4. Zeige, dass in einem Körper das „umgekehrte Distributivgesetz“, also

$$a + (bc) = (a+b)\cdot(a+c),$$

nicht gilt.

Aufgabe 3.5. Es sei K ein Körper mit $2 \neq 0$. Zeige, dass für $f, g \in K$ die Beziehung

$$fg = \frac{1}{4}\big((f+g)^2 - (f-g)^2\big)$$

gilt.

Aufgabe 3.6. Zeige für einen Körper K die folgenden Eigenschaften. (1) Für jedes $a \in K$ ist die Abbildung

$$\alpha_a \colon K \longrightarrow K,\, x \longmapsto x + a,$$

bijektiv. (2) Für jedes $b \in K$, $b \neq 0$, ist die Abbildung

$$\mu_b \colon K \longrightarrow K,\, x \longmapsto bx,$$

bijektiv.

Aufgabe 3.7. Zeige, dass die einelementige Menge $\{0\}$ alle Körperaxiome erfüllt mit der einzigen Ausnahme, dass $0 = 1$ ist.

Bei den Rechenaufgaben zu den komplexen Zahlen muss das Ergebnis immer in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit reellen Zahlen a, b angegeben werden, wobei diese so einfach wie möglich sein sollen.

Aufgabe 3.8. Berechne die folgenden Ausdrücke innerhalb der komplexen Zahlen.

(1) $(5+4\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})$.
(2) $(2+3\mathrm{i})(2-4\mathrm{i}) + 3(1-\mathrm{i})$.

(3) $(2\mathrm{i}+3)^2$.
(4) i^{1011}.
(5) $(-2+5\mathrm{i})^{-1}$.
(6) $\frac{4-3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$.

Aufgabe 3.9.*

Bestimme die inversen Elemente der folgenden komplexen Zahlen.

(1) 3.
(2) $5\mathrm{i}$.
(3) $3+5\mathrm{i}$.

Aufgabe 3.10. Zeige, dass für reelle Zahlen die Addition und die Multiplikation als reelle Zahlen und als komplexe Zahlen übereinstimmen.

Aufgabe 3.11.*

Zeige, dass die komplexen Zahlen einen Körper bilden.

Aufgabe 3.12. Zeige, dass es keinen echten Zwischenring zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ gibt.

Aufgabe 3.13. Zeige, dass $P = \mathbb{R}^2$ mit der komponentenweisen Addition und der komponentenweisen Multiplikation kein Körper ist.

Aufgabe 3.14. Skizziere die folgenden Teilmengen.

(1) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(z) \geq -3\}$,
(2) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,(z) \leq 2\}$,
(3) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 5\}$.

Aufgabe 3.15.*

a) Berechne

$$(4-7\mathrm{i})(5+3\mathrm{i})\,.$$

b) Bestimme das inverse Element z^{-1} zu

$$z = 3+4\mathrm{i}.$$

c) Welchen Abstand hat z^{-1} aus Teil (b) zum Nullpunkt?

Aufgabe 3.16.*

Löse die lineare Gleichung

$$(2+5\mathrm{i})z = (3-7\mathrm{i})$$

über $\mathbb{C}$ und berechne den Betrag der Lösung.

Aufgabe 3.17.*

Beweise die folgenden Aussagen zu Real- und Imaginärteil von komplexen Zahlen.

(1) Es ist $z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)\mathrm{i}$.
(2) Es ist $\operatorname{Re}(z+w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w)$.
(3) Es ist $\operatorname{Im}(z+w) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w)$.
(4) Für $r \in \mathbb{R}$ ist
$$\operatorname{Re}(rz) = r\operatorname{Re}(z) \text{ und } \operatorname{Im}(rz) = r\operatorname{Im}(z).$$
(5) Es ist $z = \operatorname{Re}(z)$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn $\operatorname{Im}(z) = 0$ ist.

Aufgabe 3.18.*

Zeige, dass für eine komplexe Zahl z die folgenden Beziehungen gelten.

(1) Es ist $\overline{z} = \operatorname{Re}(z) - \mathrm{i}\operatorname{Im}(z)$.
(2) Es ist $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$.
(3) Es ist $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$.

Aufgabe 3.19. Zeige die folgenden Regeln für den Betrag von komplexen Zahlen.

(1) Es ist $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$.
(2) Für reelles z stimmen reeller und komplexer Betrag überein.
(3) Es ist $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$ ist.
(4)
$$|z| = |\overline{z}|.$$
(5)
$$|zw| = |z|\,|w|.$$
(6) Für $z \neq 0$ ist $|1/z| = 1/|z|$.
(7)
$$|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|.$$

Unter dem *Ring der Gaußschen Zahlen* versteht man alle Zahlen der Form

$$\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{a+b\mathrm{i} \mid a,b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Aufgabe 3.20. Zeige, dass der Ring der Gaußschen Zahlen $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ ein Unterring der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 3.21. (2 Punkte)

Bestimme die Einheiten (einschließlich ihrer inversen Elemente) von $\mathbb{Z}/(20)$.

Aufgabe 3.22. (3 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring mit endlich vielen Elementen. Zeige, dass R genau dann ein Integritätsbereich ist, wenn R ein Körper ist.

Aufgabe 3.23. (2 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring und $f \in R$ ein nilpotentes Element. Zeige, dass $1 + f$ eine Einheit ist.

Aufgabe 3.24. (3 Punkte)

Berechne die komplexen Zahlen

$$(1 + \mathrm{i})^n$$

für $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Aufgabe 3.25. (2 Punkte)

Löse die lineare Gleichung

$$(4 - \mathrm{i})z = (6 + 5\mathrm{i})$$

über $\mathbb{C}$ und berechne den Betrag der Lösung.

Aufgabe 3.26. (3 Punkte)

Zeige, dass für die komplexe Konjugation die folgenden Rechenregeln gelten.

(1) Es ist $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
(2) Es ist $\overline{-z} = -\overline{z}$.
(3) Es ist $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
(4) Für $z \neq 0$ ist $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$.
(5) Es ist $\overline{\overline{z}} = z$.
(6) Es ist $\overline{z} = z$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist.

AUFGABE 3.27. (2 Punkte)

Bestimme die Einheiten im Ring der Gaußschen Zahlen $\mathbb{Z}[i]$.

Tipp: Verwende den komplexen Betrag.

Abbildungsverzeichnis