

# Lineare Algebra und analytische Geometrie I

## Vorlesung 25

J'ai décidé d'être heureux  
parce que c'est bon pour la  
santé

---

Voltaire

### Trigonalisierbare Abbildungen

DEFINITION 25.1. Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Eine lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  heißt *trigonalisierbar*, wenn sie bezüglich einer geeigneten Basis durch eine obere Dreiecksmatrix beschrieben wird.

Diagonalisierbare lineare Abbildungen sind insbesondere trigonalisierbar. Die Umkehrung gilt nicht, wie eine Scherungsmatrix zeigt (siehe Beispiel 22.9). Wir werden in Satz 25.10 sehen, dass eine lineare Abbildung genau dann trigonalisierbar ist, wenn das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Eine quadratische Matrix  $M$  heißt *trigonalisierbar*, wenn die dadurch definierte lineare Abbildung  $K^n \rightarrow K^n$  trigonalisierbar ist. Dies bedeutet, dass es eine Basis gibt, bezüglich der die Abbildung durch eine obere Dreiecksmatrix beschrieben wird, bzw., dass es eine invertierbare Matrix  $B$  (die Basiswechselmatrix) derart gibt, dass

$$BMB^{-1}$$

eine obere Dreiecksmatrix ist. Somit ist eine Matrix genau dann trigonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist. Das Auffinden einer Basis, bezüglich der obere Dreiecksgestalt vorliegt bzw. die Durchführung des Basiswechsels nennt man *Trigonalisierung*.

BEISPIEL 25.2. Wir behaupten, dass die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar ist. Die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist invertierbar mit der inversen Matrix

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Eine direkte Rechnung zeigt

$$BMB^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bei diesem Nachweis der Trigonalisierbarkeit taucht die Übergangsmatrix  $B$  aus dem Nichts auf. Ein einsichtigerer Trigonalisierbarkeitsnachweis ergibt sich mit Hilfe des charakteristischen Polynoms und Satz 25.10. Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_M = \det \begin{pmatrix} X-3 & -1 \\ 1 & X-1 \end{pmatrix} = (X-3)(X-1)+1 = X^2-4X+4 = (X-2)^2,$$

zerfällt also in Linearfaktoren.

LEMMA 25.3. *Es seien  $V_1, \dots, V_n$  endlichdimensionale Vektorräume über dem Körper  $K$  und*

$$\varphi_i: V_i \longrightarrow V_i$$

*lineare Abbildungen und es sei*

$$\varphi = \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n: V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \times \cdots \times V_n$$

*die Produktabbildung. Dann ist  $\varphi$  genau dann trigonalisierbar, wenn dies für alle  $\varphi_i$  gilt.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 25.5. □

Die vorstehende Aussage gilt insbesondere, wenn

$$V = \bigoplus_{i \in I} V_i$$

eine direkte Summe von  $\varphi$ -invarianten Untervektorräumen ist.

### Invariante Untervektorräume

Ein trigonalisierbarer Endomorphismus besitzt bezüglich einer geeigneten Basis die Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & a_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Eigenschaften, die für eine solche obere Dreiecksmatrix gelten und die als eine Eigenschaft der linearen Abbildung beschreibbar, also unabhängig von einer gewählten Basis sind, müssen für eine trigonalisierbare Abbildung gelten. Solche Eigenschaften wollen wir verstehen. Durch eine obere Dreiecksmatrix wird der  $j$ -te Standardvektor  $e_j$  auf

$$Me_j = a_{1j}e_1 + \cdots + a_{jj}e_j$$

abgebildet. Insbesondere ist  $e_1$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $a_{11}$ . Charakteristisch für trigonalisierbare Abbildungen ist, dass der Untervektorraum

$$V_j = \langle e_1, \dots, e_j \rangle$$

durch  $M$  in sich selbst hinein abgebildet wird, d.h. die  $V_j$  sind  $M$ -invariante Untervektorräume, die ineinander enthalten sind und deren Dimension gleich  $j$  ist. Wir werden nach einigen Vorbereitungen zeigen, dass diese Eigenschaft trigonalisierbare Abbildungen charakterisiert.

LEMMA 25.4. *Es sei  $K$  ein Körper und es sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum. Es sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*eine lineare Abbildung und es sei  $\lambda \in K$  ein Eigenwert von  $\varphi$ . Dann gibt es einen  $\varphi$ -invarianten Untervektorraum  $U \subset V$  der Dimension  $n - 1$ .*

*Beweis.* Nach Voraussetzung und nach Lemma 22.1 besitzt die Abbildung  $\varphi - \lambda \text{Id}_V$  einen nichttrivialen Kern. Sie ist also nicht injektiv und nach Korollar 11.9 auch nicht surjektiv. Daher ist

$$B := \text{bild}(\varphi - \lambda \text{Id}_V) \subset V$$

ein echter Unterraum von  $V$ . Es gibt dann auch einen Untervektorraum  $U \subset V$  der Dimension  $n - 1$ , der  $B$  enthält. Zu  $u \in U$  gehört wegen

$$\varphi(u) = \lambda u + (\varphi - \lambda \text{Id}_V)u \in U + B \subseteq U$$

das Bild zu  $U$ , d.h.  $U$  ist  $\varphi$ -invariant.  $\square$

Wenn  $U \subseteq V$  ein  $\varphi$ -invarianter Untervektorraum und  $P \in K[X]$  ein Polynom ist, so ist  $U$  auch  $P(\varphi)$ -invariant, siehe Aufgabe 23.28. In dieser Situation gilt die folgende Gleichheit.

LEMMA 25.5. *Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*eine lineare Abbildung. Es sei*

$$U \subseteq V$$

*ein  $\varphi$ -invarianter Untervektorraum. Dann gilt zu jedem Polynom  $P \in K[X]$  die Beziehung*

$$P(\varphi|_U) = (P(\varphi))|_U,$$

*wobei hier  $\varphi|_U$  die im Definitionsbereich und auch im Bildbereich eingeschränkte Abbildung bezeichnet.*

*Beweis.* Dies überprüft man direkt für die Potenzen  $X^n$  und für Linearkombinationen davon.  $\square$

KOROLLAR 25.6. *Es sei  $K$  ein Körper und es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Es sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*eine lineare Abbildung. Es sei*

$$U \subseteq V$$

*ein  $\varphi$ -invarianter Untervektorraum und*

$$\varphi|_U: U \longrightarrow U$$

*die Einschränkung auf  $U$  (auch im Bildbereich). Dann ist das Minimalpolynom zu  $\varphi$  ein Vielfaches des Minimalpolynoms von  $\varphi|_U$ .*

*Beweis.* Es sei  $\mu$  das Minimalpolynom zu  $\varphi$ . Für  $u \in U$  ist nach Lemma 25.5

$$\mu(\varphi|_U)(u) = \mu(\varphi)(u) = 0.$$

Daher annulliert  $\mu$  den eingeschränkten Endomorphismus  $\varphi|_U$  und daher ist  $\mu$  ein Vielfaches des Minimalpolynoms von  $\varphi|_U$ .  $\square$

BEISPIEL 25.7. Wir betrachten die Permutationsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist  $K \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  der Eigenraum zum Eigenwert 1, ferner ist

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

ein invarianter Untervektorraum (der sich über  $\mathbb{C}$  gemäß Lemma 24.11 in weitere Eigenräume zerlegen lässt). Bezüglich der angegebenen Basis besitzt die Einschränkung der linearen Abbildung auf  $U$  die beschreibende Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

somit ist das charakteristische Polynom davon gleich

$$X(X+1)+1 = X^2+X+1.$$

Dies ist zugleich das Minimalpolynom der Einschränkung. Das Minimalpolynom zur Permutationsmatrix ist  $X^3-1$ , und in der Tat ist

$$X^3-1 = (X-1)(X^2+X+1)$$

in Übereinstimmung mit Korollar 25.6 (/Fakten).

## Charakterisierungen für trigonalisierbar



Eine Fahne setzt sich aus dem Fußpunkt, der Fahnenstange, dem Fahnentuch und dem Raum, in dem das Tuch weht, zusammen.

DEFINITION 25.8. Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum der Dimension  $n = \dim(V)$ . Dann heißt eine Kette von Untervektorräumen

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

eine *Fahne* in  $V$ .

Eine Fahne ist also eine Kette von ineinander enthaltenen Untervektorräumen, bei der die Dimension in jedem Schritt um 1 hochgeht.

DEFINITION 25.9. Sei  $V$  ein Vektorraum der Dimension  $n$  und

$$f: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Eine Fahne

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n$$

heißt *f-invariant*, wenn  $f(V_i) \subseteq V_i$  für alle  $i = 0, 1, \dots, n-1, n$  ist.

SATZ 25.10. Es sei  $K$  ein Körper und es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (1)  $\varphi$  ist trigonalisierbar.
- (2) Es gibt eine  $\varphi$ -invariante Fahne.
- (3) Das charakteristische Polynom  $\chi_\varphi$  zerfällt in Linearfaktoren.
- (4) Das Minimalpolynom  $\mu_\varphi$  zerfällt in Linearfaktoren.

Wenn  $\varphi$  trigonalisierbar ist und bezüglich einer Basis durch die Matrix  $M$  beschrieben wird, so gibt es eine invertierbare Matrix (es sei  $n = \dim(V)$ )  $B \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$  derart, dass  $BMB^{-1}$  eine obere Dreiecksmatrix ist.

*Beweis.* Von (1) nach (2). Es sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis, bezüglich der die beschreibende Matrix zu  $\varphi$  obere Dreiecksgestalt besitzt. Dann folgt durch direkte Interpretation der Matrix, dass die Untervektorräume

$$V_i := \langle v_1, \dots, v_i \rangle$$

$\varphi$ -invariant sind und somit eine invariante Fahne vorliegt.

Von (2) nach (1). Es sei

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

eine  $\varphi$ -invariante Fahne. Aufgrund des Basisergänzungssatzes gibt es eine Basis  $v_1, \dots, v_n$  von  $V$  mit

$$V_i = \langle v_1, \dots, v_i \rangle.$$

Da die Fahne invariant ist, gilt

$$\varphi(v_i) = b_{1i}v_1 + b_{2i}v_2 + \dots + b_{ii}v_i.$$

Bezüglich dieser Basis besitzt die beschreibende Matrix zu  $\varphi$  somit obere Dreiecksgestalt.

Von (1) nach (3). Das charakteristische Polynom von  $\varphi$  ist gleich dem charakteristischen Polynom  $\chi_M$ , wobei  $M$  eine beschreibende Matrix bezüglich einer beliebigen Basis ist. Wir können also annehmen, dass  $M$  eine obere Dreiecksmatrix ist. Dann ist nach Lemma 16.4 das charakteristische Polynom das Produkt der Linearfaktoren zu den Diagonaleinträgen.

Aus (3) folgt (4), da das Minimalpolynom nach Korollar 24.3 ein Teiler des charakteristischen Polynoms ist.

Von (4) nach (2). Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach  $n$ , wobei die Fälle

$$n = 0, 1$$

klar sind. Nach Voraussetzung und nach Korollar 24.3 und Satz 23.2 besitzt  $\varphi$  einen Eigenwert. Nach Lemma 25.4 gibt es einen  $(n - 1)$ -dimensionalen Untervektorraum

$$V_{n-1} \subset V,$$

der  $\varphi$ -invariant ist. Nach Korollar 25.6 ist das Minimalpolynom der Einschränkung  $\varphi|_{V_{n-1}}$  ein Teiler des Minimalpolynoms von  $\varphi$  und zerfällt daher wie dieses in Linearfaktoren. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine  $\varphi|_{V_{n-1}}$ -invariante Fahne

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{n-2} \subset V_{n-1},$$

und somit ist dies auch eine  $\varphi$ -invariante Fahne.

Der Zusatz ergibt sich wie folgt. Die trigonalisierbare Abbildung  $\varphi$  werde bezüglich der Basis  $\mathbf{u}$  durch die Matrix  $M$  beschrieben, und bezüglich der Basis  $\mathbf{v}$  durch die obere Dreiecksmatrix  $T$ . Dann gilt nach Korollar 11.12 die Beziehung  $T = BMB^{-1}$ , wobei  $B$  den Basiswechsel beschreibt.  $\square$

**BEMERKUNG 25.11.** Das im Beweis zur Implikation (4)  $\Rightarrow$  (2) von Satz 25.10 beschriebene Verfahren zum Auffinden einer invarianten Fahne, das auf Lemma 25.4 beruht, ist grundsätzlich konstruktiv durchführbar. Wenn die Einschränkung  $\varphi|_{U_i}$  auf einen schon konstruierten invarianten Untervektorraum  $U_i$  keinen Eigenwert besitzt, so weiß man, dass die lineare Abbildung nicht trigonalisierbar ist.

**SATZ 25.12.** *Es sei  $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$  eine quadratische Matrix mit komplexen Einträgen. Dann ist  $M$  trigonalisierbar.*

*Beweis.* Dies folgt aus Satz 25.10 und dem Fundamentalsatz der Algebra.  $\square$

**BEISPIEL 25.13.** Wir betrachten eine reelle  $2 \times 2$ -Matrix  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} \chi_M &= \det(xE_2 - M) \\ &= \det \begin{pmatrix} x - a & -b \\ -c & x - d \end{pmatrix} \\ &= (x - a)(x - d) - bc \\ &= x^2 - (a + d)x + ad - bc \\ &= \left(x - \frac{a + d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a + d}{2}\right)^2 + ad - bc \\ &= \left(x - \frac{a + d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - d}{2}\right)^2 - bc. \end{aligned}$$

Dieses Polynom zerfällt in (reelle) Linearfaktoren genau dann, wenn  $\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc \geq 0$  ist. Genau in diesem Fall ist die Matrix nach Satz 25.10 trigonalisierbar.



## Abbildungsverzeichnis

Quelle = 149px-Animation Drap Allemagne T.gif , Autor = Benutzer  
MG auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0

5