始

# 高等力學

東京高等工學校編

東京 有文閣 發行

# 力學目次

## 第一編

## 運動學及び運動の定律

# 第三編
# 動力學

# 力 學

## 第一編

## 運動學及運動の定律

## 第一章 單 位

### 1. 基本單位 Fundamental units

種々の量を測るには、單位を用ひるが、その内で基本になるものは、長さ、質量、時間の單位で、これを**基本單位**と云ふ。

(1) **長さの基本單位** 我國では**米**(Meter)及び**尺**で、米は商工省に保管してある原器の二標線間の攝氏 0.15° に於ける距離で、尺は米の$\frac{10}{33}$である。米法は歐洲に始まつたもので現在ドイツ、フランス等で用ひられてゐるが、イギリスやアメリカでは**英法**(British system)を採用してゐる。英法では**碼**(Yard)が基本單位で之は 3 呎(Foot)である。

(2) **質量の基本單位** 我國では**瓩** (Kilogramme) 及び

貫で、瓩は商工省に保管してある分銅の質量で、貫は瓩の$\frac{15}{4}$である。比較的少量のものには瓩を用ひず、その$\frac{1}{1000}$の**瓦**(Gramme 又は Gram)を使ふことがある。攝氏4°の水1立方糎の質量は0.99996瓦であるが、實用上之を1瓦としてゐる。英法の質量の單位は**封度**(Pound)である。

(3) **時間の基本單位** 時間の單位は各國同一で**平均太陽日**(Mean solar day)を基本とし、之を時、分、秒の諸單位に細分して用ふ。平均太陽日とは太陽が一度南中して再び南中するまでの時間を一年間に平均したものである。又恒星が一度南中して次に再び南中する迄の時間卽ち地球の一廻轉の時間を**恒星日**(Sidereal day)と云ふ。恒星日は平均太陽時の23時56分4.09秒に當る。

### 2. 誘導單位 Derived units

總て物理學的量の單位は、上述の基本單位から誘導することが出來るもので、夫等の量の單位は**誘導單位**と云ふ。物理學上では主として**糎**(Centimeter) **瓦**(Gramme)及び秒(Second)を基本單位とし、之から諸種の單位を誘導構成する。例へば面積の單位には1糎$^2$(cm$^2$)を用ひ、容積の單位には1糎$^3$を用ふ。斯樣な方法で構成した單位



を、各基本單位の頭字をとつて **C.G.S. 單位**と云ふ。同樣に英法では呎、封度、秒から組立て **F.P.S 單位**なるものを用ふ。

### 3. ヂメンション Dimension

誘導單位と基本單位との關係は、之を或る式で表はすことが出來る。此誘導單位の式に於て基本單位の羃數を、此單位の**ヂメンション**と云ひ、式そのものを**ヂメンション式**(Dimensional formura)と云ふ。此場合基本單位は[L](長さ)[M](質量)[T](時間)によつて表はすのが普通である。

今長さのみに關するヂメンションに就て考へて見ると、線の長さ、表面積及び容積は其式が如何に複雜であつても常に夫々[L] [L$^2$]及び[L$^3$]なるヂメンションを有しなければならぬ。卽ちヂメンション式を書いて見ると、

線の長さ……[$l$]=[L]

面積…………[A]=[L$^2$]

容積…………[V]=[L$^3$]

となり、既知の公式を例にとつて檢して見ると、

圓周$=2\pi r$。

矩形の面積$=ab$,　圓の面積$=\pi r^2$,

球の表面積＝$4\pi r^2$。

矩形の容積＝abc,　球の容積＝$\frac{4}{3}\pi r^3$。

總てヂメンションの正しいことが分る。力學上の方程式の各項は同一ヂメンションを有しなければならぬ故、上述の樣にヂメンションを檢して其計算に誤りの有無を知ることが出來る。又このヂメンションを用ふれば、後述の如く單位の換算が便利であり、且つ誘導單位間の關係が明かになるの利益がある。

或る點が或る線に沿ふて運動する場合には、長さと云ふ一つのヂメンションに限られてゐる故、(一のヂメンションの運動をする) と云ひ、或る面上では二つのヂメンションに限られる故、(二のヂメンションの運動をする) と云ひ同樣に空間で任意の運動をする場合には、(三のヂメンションの運動をする) と云ふ。

## 第二章　ベクトル

### 4. ベクトル　Vector

或る一點の位置を表はすに、**ベクトル**なるものを用ふると便利である。卽ち第1圖に示す如く標準となる原點

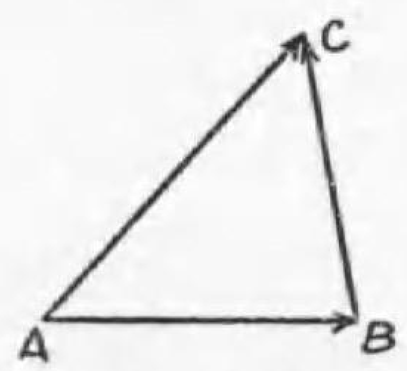



第 1 圖

OからP點に直線OPを引き、其長さ、**方向**(Direction)及び**向き**(Sense)によつてP點の原點に對する位置を定めるのである。斯の如く直線OPが長さの外に方向及び向きを示すことを表はすのに $\overline{OP}$ と云ふ符號を用ふ。

一般に**大さ**(Magnitude)の外に方向及び向きを有する量を**ベクトル**と云ひ、大さのみを有する量を**スケラー**(Scaler) と云ふ。上記の如く位置を示すベクトルは之を位置ベクトルと云ふ。後述する變位、速度、加速度、力等はベクトルで、質量、容積、エネルギー等はスケラーである。

### 5. 變位　Displacement




第 2 圖

第2圖に於て、或る一點Aが或る時間の後C點に移つたとすると、ACを結ぶ直線は位置の變化を示すことになる。之を**變位**と云ふ。此場合只最初と最後の位置のみを考へればよいのであつて、其經路、速さ等は問題ではない。

此變位のベクトルは $\overline{AC}$ で表はされ、其大さはACで

あるから變位のヂメンションは次の如く表はされる。

〔變位〕=〔L〕

### 6. ベクトルの加法 Addition of vectors

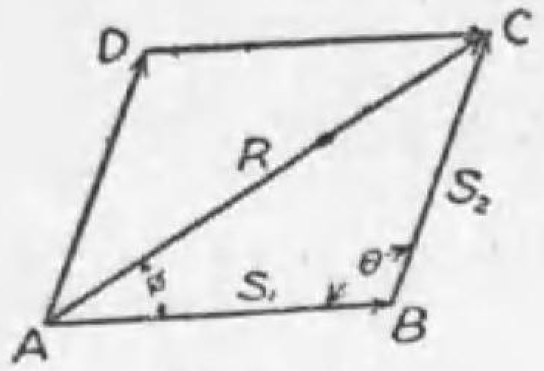
一點Aが變位 $\overline{AB}$ を受けてB點に移り、次に $\overline{BC}$ なる變位を受けてB點よりC點に移つたものとする。即ち一點が順次に二變位 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ を受けたとすると、結局A點よりC點に達することになる。又A點が變位 $\overline{AB}$ を受けると同時に直線ABが自身に平行に $\overline{BC}$ 變位を受けたとすると、A點は前と同じくC點に達し $\overline{AC}$ 變位を受けることになる。即ち兩者何れにしても變位の性質上前後の位置のみを考へればよいから、二つの變位 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ の和は一つの變位 $\overline{AC}$ に等しい。(第2圖參照)

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

これは一つの**ベクトル方程式**(Vector equation)であつて、スケラーの方程式と異ることは注意を要する。以上の方法を**ベクトル三角形**(Triangle of vectors)の方法と云ふ。而してベクトル $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ を**分ベクトル**(Component vector)と云ひ、和のベクトル $\overline{AC}$ を**合ベクトル**(Resultant vector)と云ふ。

又二つのベクトルを加へるには、原點Aより二つのベ






第 3 圖

クトル $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ を引き、平行四邊形ABCDを作り、その對角線となるベクトル $\overline{AC}$ を求めてもよい。之を**ベクトル平行四邊形**(Parallelogram of vectors)と云ふ。今之をスケラー方程式で計算して見ると、

$$\left.\begin{aligned} R^2&=S_1^2+S_2^2-2S_1S_2\cos\theta \\ \sin\phi&=\frac{S_2}{R}\sin\theta \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

玆に R, $S_1$, $S_2$ は夫々 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ の大さ

$\theta=\angle ABC$

$\Phi=\overline{AC}$ の方向を定める角

結局二つのスケラー方程式(2)は一つのベクトル方程式(1)に等しいこととなる。

### 7. ベクトルの減法 Subtraction of vectors

一つのベクトル $\overline{AC}$ とベクトル $\overline{BC}$ との差即ち $\overline{AC}-\overline{BC}$ を求めて見る。ベクトルの加法により

$$\overline{BC}+\overline{CB}=\overline{BB}=0$$

$$\therefore\quad -\overline{BC}=\overline{CB}$$

即ちベクトルに負號を附すれば、其向きを反對にすることを意味する。從つて

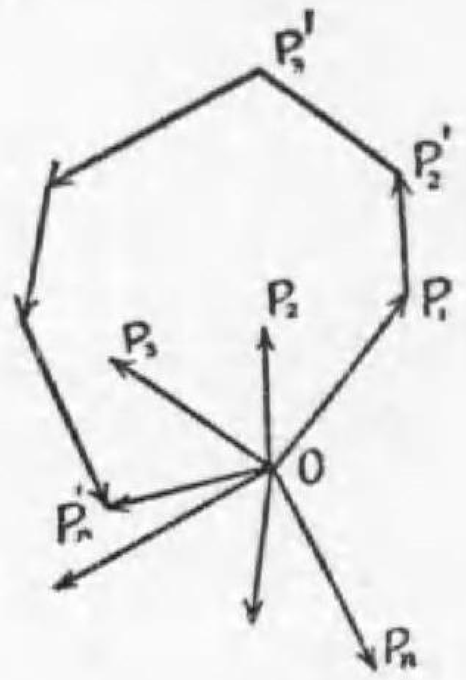
$$\overline{AC}-\overline{BC}=\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

故に一つのベクトルより他のベクトルを減ずるには、第二のベクトルの向きを反對にして第一のベクトルに加へればよい。

## 8. 數多のベクトルの合成 Composition of many vectors

n個のベクトル $\overline{OP_1}, \overline{OP_2}, \cdots\cdots\overline{OP_n}$ を與へて其合ベクトルを求める圖法を述べやう。

任意の點Oを原點としてベクトル $\overline{OP_1}$ を引き、次に $\overline{OP_2}$ に等しく（即ち $OP_2$ と同じ大さで同じ方向、同じ向きに）$P_1$ 點から $\overline{P_1P'_2}$ を引けば、$\overline{OP'_2}$ は $\overline{OP_1}$ と $\overline{OP_2}$ の合ベクトルである。次に $\overline{OP_3}$ に等しく $P'_2$ から $\overline{P'_2P'_3}$ を引けば、$\overline{OP'_3}$ は $\overline{OP_3}$ と $\overline{OP'_2}$ との和即ち $\overline{OP_1}, \overline{OP_2}, \overline{OP_3}$ の和となる。順次同様に總てのベクトルを接續的に引けば、終りに $P'_n$ を得る。$\overline{OP'_n}$ は即ち總てのベクトルの總和である。方程式で示すと



第 4 圖

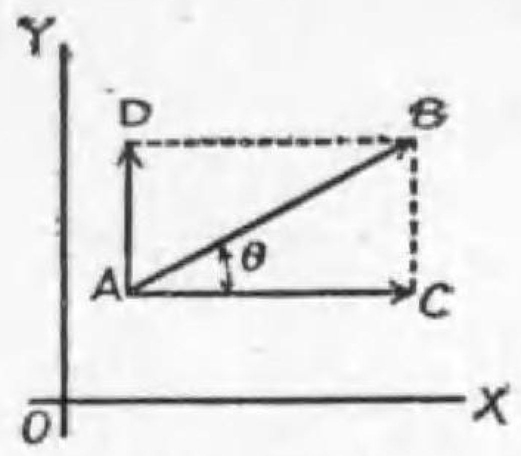
$$\overline{OP_1}+\overline{OP_2}+\cdots+\overline{OP_n}=\overline{OP'_n} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

數多のベクトルの和を求めるには、是等のベクトルを



接續的に引いて、原點から終點に到るベクトル即ち多角形を閉ぢるベクトルを引けばよい。之を**ベクトル多角形** (Polygon of vectors) と云ふ。此場合ベクトルを加へる順序は結果に於て無關係である。

次に直角坐標を使つて數多のベクトルを合成する方法を述べやう。第5圖に於て OX, OY が二つの直角方向で、$\overline{AB}$ なるベクトルを OXの方向と OYの方向とに分けると、OX の方向には $\overline{AC}$, OY の方向には $\overline{AD}$ を得ることは前述の理によつて明かである。之を式で表はすと

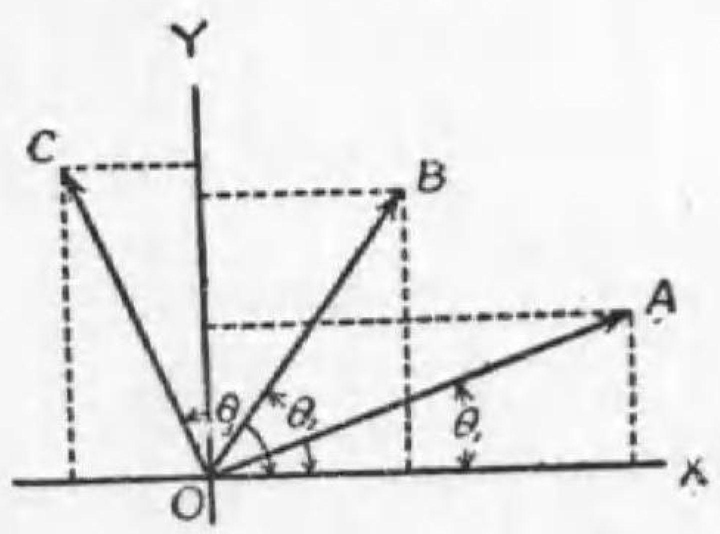


第 5 圖

$$AC=AB\cos\theta$$

$$AD=AB\sin\theta$$

今數多のベクトルを合成する場合、各ベクトルを先づ OX, OY の兩方向に分解し、次に OXの方向の分ベクトルの和と、OY の方向の分ベクトルの和とを求めて、兩者を合成しても同じことである。今第6圖に就いて數多のベクトル



第 6 圖

を合成して見やう。$\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \cdots\cdots$のベクトルが、一平面内で OX 軸に對して $\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3 \cdots\cdots$の角度をなすとする。先づ OX に沿ふて分解し分ベクトルの和を $\overline{X}$ とすると、

$$\overline{X}=\overline{OA}\cos\theta_1+\overline{OB}\cos\theta_2+\overline{OC}\cos\theta_3+\cdots\cdots$$

同様に OY 方向に分解した分ベクトルの和を $\overline{Y}$ とすると

$$\overline{Y}=\overline{OA}\sin\theta_1+\overline{OB}\sin\theta_2+\overline{OC}\sin\theta_3+\cdots\cdots$$

茲に $\overline{X}, \overline{Y}$ は夫々 OX, OY 方向にあることは明かであるから、第5圖の $\overline{AC}, \overline{AD}$ を合成して $\overline{AB}$ を得ると同様にして、全部のベクトルを合成することが出來る譯である。即ち總和ベクトルを $\overline{R}$ とすれば。

$$\overline{R}=\sqrt{\overline{X}^2+\overline{Y}^2}$$

又 R が OX 方向となす角を $\theta$ とすれば、

$$\tan\theta=\frac{Y}{X}$$

例へば、水平方向と夫々 30°, 60°, 90°, 120° の角をなす 3, 4, 2 及び 6 の大さを有つベクトルの合成ベクトルを求めて見ると次の樣になる。

$$X=3\cos30°+4\cos60°+2\cos90°+6\cos210°$$

$$=\frac{3}{2}\times\sqrt{3}+4\times\frac{1}{2}+2\times0+6\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=-0.598$$

$$Y=3\sin30°+4\sin60°+2\sin90°+6\sin210°$$

$$=\frac{3}{2}+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times1+6\left(-\frac{1}{2}\right)=3.964$$

$$R=\sqrt{3.964^2+(-0.598)^2}=4\ (約)$$

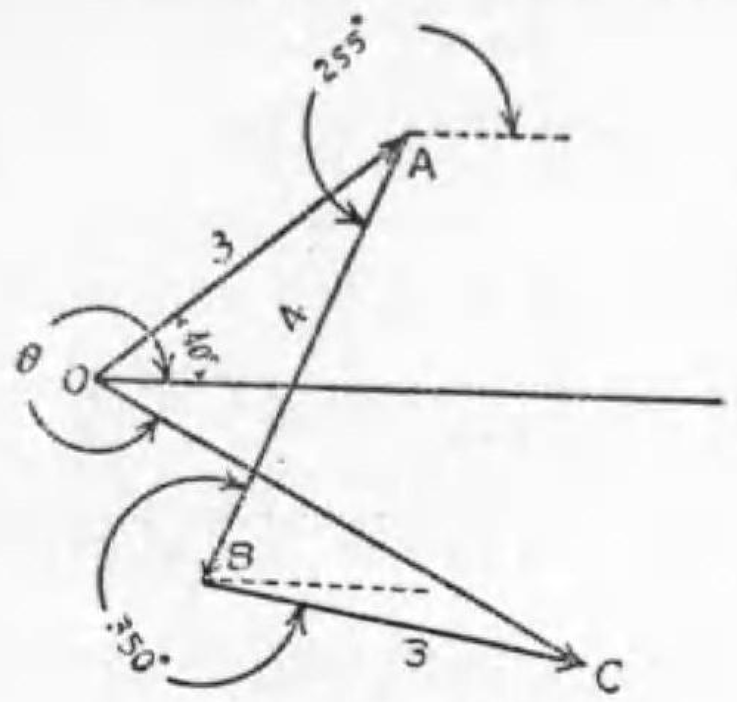


$$\tan\theta=\frac{Y}{X}=\frac{3.964}{-0.598}=-6.629 \qquad \therefore\ \theta=261.5°$$

## 問 題

(1) $\overline{3}_{160°}+\overline{4}_{230°}+\overline{3}_{350°}$ を求む。

註 茲に示した角度は、其前のベクトルの端から右に引いた水平線を基準として時計の廻轉と反對の方向に測ることゝする。詳細は第7圖に示す通りである。




第 7 圖

答 $\overline{OC}=4.89_{130°}$

(2) $\overline{6}_{30°}-\overline{4}_0$ を求む。

答 $3.23_{38°15'}$

(3) 或る汽船が最初東北に3粁行き、次に南30°東の方向に3粁行き、其後北に5粁行き最後に南30°東の方向に2粁行つたとすると、最後の位置は出發點より何れの方向に幾何の距離にあるか。

答 5.39粁　　北58°50′東

(4) 三角形 ABC の各頂點から對邊の中點 DEF に引いたベクトル $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ の合ベクトルは零であることを證明せよ。

(5) 與へられたベクトルを二つのベクトルに分解するときの決定條件如何。

(6) 三角形內任意の一點から頂點に引いた三つのベクトルの和は、其點から邊の中心に引いた三つのベクトルの和に等しいことを證明せよ。

# 第三章 速度及び加速度

### 9. 運動 Motion

玆に一つの物體があつて時間の經過するに從つて其位置を變ずる時は、此物體は**運動**してゐると云ひ、其位置を變じないときは**靜止**してゐると云ふ。

或る物體の運動は、此物體の位置と其周圍に在つて靜止してゐると見做す他の物體の位置とを比較することに依つて定めるものである。例へば汽車が運動してゐると云へば、地球を固定せるものとして其地面又は其表面上に固定してゐる種々の物體に對して位置を變じつゝあるのであり、靜止してゐると云へば、其周圍にある地球に固着してゐる諸物體に對して位置を變じないと云ふのである。實際には地球は夫自身廻轉しつゝ太陽の周りに公轉するものであるから、汽車が靜止してゐると云つても絕對に靜止してゐるのではなく、唯地球を不動と見做してのことである。

今或る質量を有する物體があつて、其各部分間の距離が非常に小なる場合には之を**質點** (Material particle or Particle)と云ふ。本章では物體の運動夫自身にのみ就い



考へるのであるから、其大さの如何に係はらず總て質點と見做して其運動を考究することとする。

質點が其運動中に通過した線路 (Path) は直線の場合もあり曲線の場合もある。前者は**直線運動** (Rectilinear motion) と云ひ、後者は**曲線運動** (Curvilinear motion) と云ふ。**圓運動** (Circular motion) は後者の一種である。

### 10. 速さ Speed


第 8 圖

運動點がその線路を通過する場合の遲速の度を**速さ**と云ひ、單位時間に通過する道程を以つて其大さを測る。運動點が任意の相等しい時間に相等しい道程を通過するときは、其運動を**等速運動**(Motion of constant speed) と云ふ。此場合には通過した道程を通過に要した時間で除すれば速さが分る。即ち第8圖に於て t 時間に OA=s 丈けの道程を通過したとすれば、速さ v は次式で與へられる。

$$v=\frac{s}{t}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

この速さが一定でない場合には、$\frac{s}{t}$ は t 時間に運動した平均の速さ (Mean speed) を示す。之を**不等速運動** (Motion of variable speed) と云ふ。此場合 t 時間の後に

極めて僅少の時間 $\Delta t$ をとると、その時間に通過する距離 AB$=\Delta s$ は非常に小さくなり、其間に於ては運動點の速さが一定に近くなる。今 $\Delta t$ を充分小さくしたときの $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ の極限は、A 點卽ち t 時刻に於ける速さ V となる。

$$V=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt} \qquad \cdots\cdots(6)$$

速さの單位は單位の道程を單位時間に通過する運動點の速さである。デメンション式で表はせば

$$〔速さ〕=\left[\frac{L}{T}\right]=〔L.T^{-1}〕$$

速さの C.G.S 單位は每秒一糎、F.P.S 單位は每秒一呎の速さである。之を $\left[\frac{cm}{sec}\right]\left[\frac{ft}{sec}\right]$ 又は〔糎秒$^{-1}$〕〔呎秒$^{-1}$〕等で表はす。

## 例　題

(1) 每時 80 粁の速さを每時哩及び每分米にて表はせ。

解　求める値を $x$ で表はせば、

$$x\left[\frac{哩}{時}\right]=80\left[\frac{粁}{時}\right] \qquad 1粁=0.62\ 哩である故$$

$$x=\frac{80粁}{哩}=\frac{80\times0.62\ 哩}{哩}=49.6 \qquad 答\ 49.6\left[\frac{哩}{時}\right]$$

同樣に

$$y\left[\frac{米}{分}\right]=80\left[\frac{粁}{時}\right]$$

$$y=\frac{80粁、分}{米、時}=\frac{80\times1000米、分}{米、60分}=1333 \qquad 答\ 1333\left[\frac{米}{分}\right]$$



(2) 落下體の降下する道程 s と時間 t との關係は、$s=\frac{1}{2}gt^2$ で與へられる。任意の時刻に於ける速さ如何。

解　時刻 t より $\Delta t$ 時の後の道程の增加を求めると、

$$\Delta s=\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore\ \frac{\Delta s}{\Delta t}=gt+\frac{1}{2}g\Delta t$$

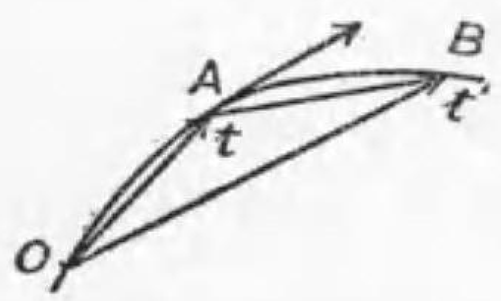
$$\therefore\ v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=gt$$

(3) 半徑 2 粁の圓形トラックを競走用自動車が二周半走るに 10 分を要したとすれば、每時の速さ及び每秒の速さ如何。

$$答\ 188.4\frac{粁}{時} \qquad 52\frac{米}{秒}$$

## 11. 速度　Velocity

運動點の變位の變化する割合を速度と云ひ、其大さは單位時間に質點の受ける變位を以て之を測る。故に速度は方向、向き及び大さを有するベクトル量である。



第 9 圖

第 9 圖に於て、運動點が t 時刻に A 點にあり、$t'$ 時刻に B 點に移つたとする。原點 O をとれば $t'-t$ 時間に生じた變位の變化は $\overline{OB}-\overline{OA}$ で、これはベクトルの減法により、

$$\overline{OB}-\overline{OA}=\overline{OB}+\overline{AO}=\overline{AB}$$

である。$t'-t$ 時間內の變化の割合は $\frac{\overline{AB}}{t'-t}$ で、之を $t'-t$ 時間內の平均速度 (Mean velocity) と云ふ。今 B 點を十

分A點に近づけ $\overline{AB}$ を通過するに要する時間を $\Delta t$ とし、$\overline{AB}$ を $\Delta p$ で表はすと、$\Delta t$ 間の平均速度は $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ となる。

$\Delta t$ を極小にすると $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ はA點の速度となることは、速さの節に於て述べたと同じである。そしてその方向はA點に於て運動の線路に引いた切線によつて示される。

今弧 $AB=\Delta s$ とすれば、$\Delta t$ が非常に小さい場合には $\Delta p=\Delta s$ となるからA點に於ける速度の大さは

$$V=\lim_{\Delta t=0}\frac{\Delta p}{\Delta t}=\lim_{\Delta t=0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}$$

で與へられる。

故に運動點の任意の一點に於ける速度の大さは、其點に於ける速さに等しく、其方向は其點に於て運動の線路に引いた切線によつて示される。

注意：—速さはスケラーであり速度はベクトルであるから、速さの一定である等速運動では線路は曲線であつても差支ないが、速度一定なる**等速度運動** (Motion of constant velocity) では、速さの一定なる直線運動でなければならない。

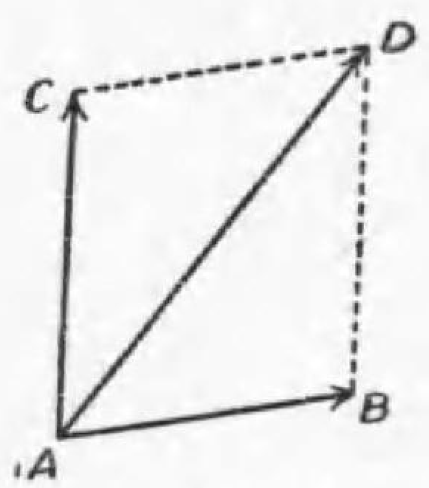
速度の大さは單位時間內に生じた變位で表はされる故ヂメンションは $\left[\frac{L}{T}\right]$ で速さの場合と同じである。

### 12. 速度の合成及び分解 Composition and decomposition of velocities



速度は變位の如くベクトルとして合成し、又は分解することが出來る。

運動點に二つ或ひは夫れ以上の速度を同時に加へることが出來ることは、次の例に依つても明かである。即ち進行中の汽車の中で人が步くとすれば、其人は汽車に對する速度の外に汽車が地面に對して有する速度をも受けて、その合成された一定の速度を受けることになる。第10圖に就いて說明して見ると、$\overline{AB}$, $\overline{AC}$ を同時に運動點に與へた速度とする。若し速度 $\overline{AB}$ のみとすれば、單位時間後には其點はB點に達する筈であるが、同時に $\overline{AC}$ と云ふ速度が與へられてゐるから、直線ABが自身に平行に $\overline{AC}$ 速度で運動し、平行四邊形ABDC を作る。即ち此點は對角線ADに沿ふて進み、單位時間後にはD點に達する。故に $\overline{AD}$ は二つの**分速度**(Component velocity) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ の**合速度** (Resultant velocity) である。



第 10 圖

速度の分解は以上の方法の逆であるから別に述べない。

以上の如く速度は變位と同様に取扱ふことが出來るか

ら、變位及びベクトルに就いて述べた事項は其儘速度に適用することが出來る。

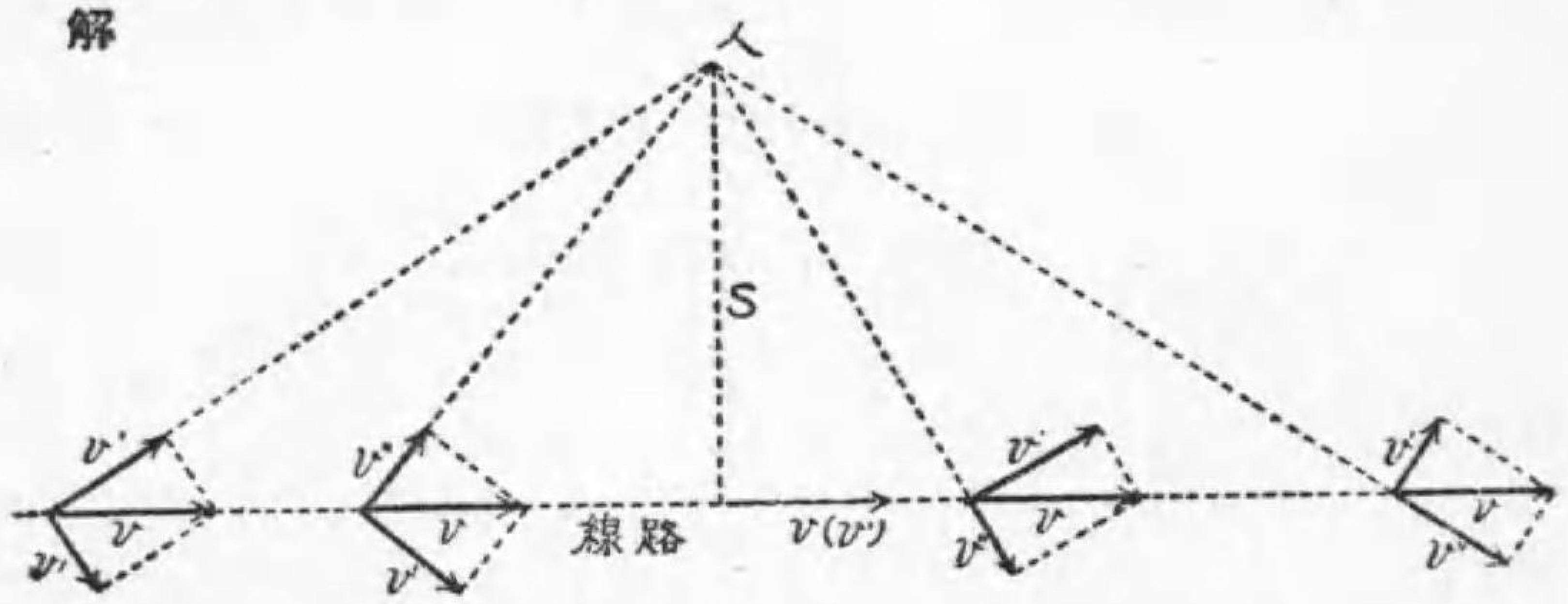
### 例　　題

(1) 静水で 8 米秒$^{-1}$の速さの船を 4 米秒$^{-1}$の速さの河流に直角に漕ぐには如何なる方向に船を漕げばよいか、又河幅を 180 米とすれば河を渡るに要する時間は何程であるか。

答　河岸に 60° の方向。　約 26 秒。

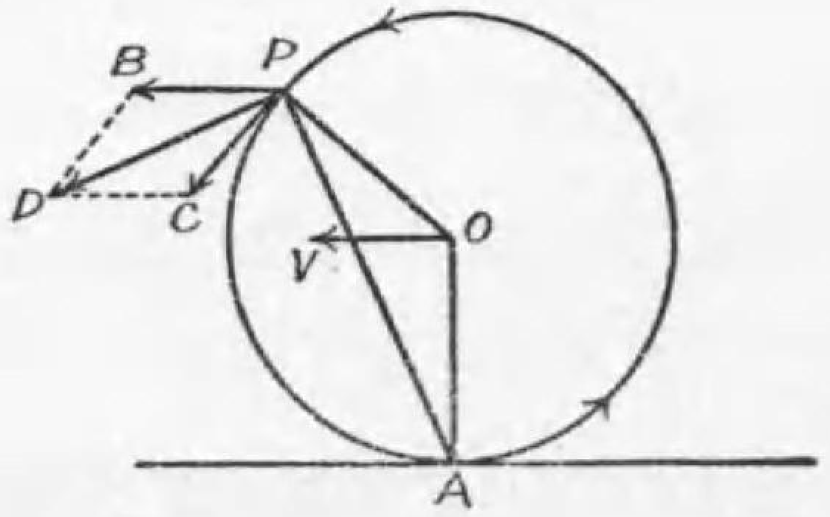
(2) 人が直線鐵道線路から s 米の距離に立つて、等速度 v 米秒$^{-1}$で走つて來る汽車を注目してゐる場合、目に感ずる汽車の速度を種々なる汽車の位置に就いて圖示せよ。

解




(3) 車輪が水平速度 V にて辷ることなく水平面上に沿ふて廻轉するとき車輪上任意の點の速度を求む。

解　車輪は水平面に對し V 速度で前進す故、O の水平面に對する速度は V である。車輪上の任意の點 P は、O の周りに V なる速度で廻轉す






る筈であるから、$\overline{\mathrm{PC}}$（O 圓ノ切線方向）$=\overline{\mathrm{V}}$ 同時に水平にも V の速度で進む故 $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{V}}$ この二つの速度 $\overline{\mathrm{PC}}, \overline{\mathrm{PB}}$ の合成速度 $\overline{\mathrm{PD}}$ が、P 點の水平面に對する速度である。

△POA と △PCD とを比較して、簡單な幾何學的考察により PD⊥PA なることが分る。即ち任意の點 P は、接觸點 A を中心として半徑 PA なる圓運動をすることが分る。この A 點は時間と共に移動する故、之れを**瞬時中心**（Instantaneous center）と云ふ。

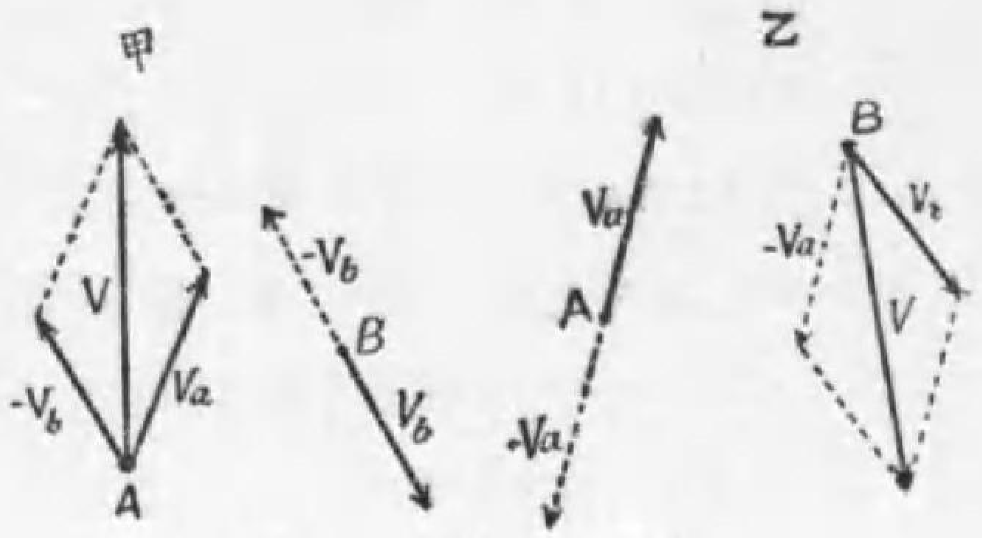
## 13.　相對速度　(Relative velocity)

A 物體の B 物體に對する速度とは、B 物體と共に動く B 物體上の觀測者が A 物體を見たときの A 物體の速度で、これを**相對速度**と云ふ。最も普通に見られるのは兩者が平行して進む場合で、A が毎時 40 粁、B が 30 粁の速度であるときは、B から見れば A は毎時 10 粁の速度で走つてゐる樣に見え、A から見れば B は毎時 10 粁の速度で逆行してゐる樣に見える。又兩者の速度が同じであれば、全然靜止してゐる樣に見える。

今ベクトルに依つて相對速度を決める方法を述べる。第11圖甲で A が $\overline{\mathrm{V}}_a$, B が $\overline{\mathrm{V}}_b$ の速度を有つてゐるとする。今假りに AB 兩者に $-\overline{\mathrm{V}}_b$ を與へたとすると、相對速度に關しては全然變化がない筈である。然し各々の速度は變化して A の方は $\overline{\mathrm{V}}_a-\overline{\mathrm{V}}_b$ となり、B の方は $\overline{\mathrm{V}}_b-\overline{\mathrm{V}}_b$

$=0$ となる。

即ちBは靜止してゐることになり、Aは速度の合成によりVなる速度を得る。相對速度の定義から考へると、Bに對するAの速度とは、Bが靜止してゐると假定したときのAの速度であるから、このVがBから見たAの相對速度である。次にAに對するBの相對速度は乙の通りであつて、此場合には前と向きが反對で大さが同じ速度を得る。



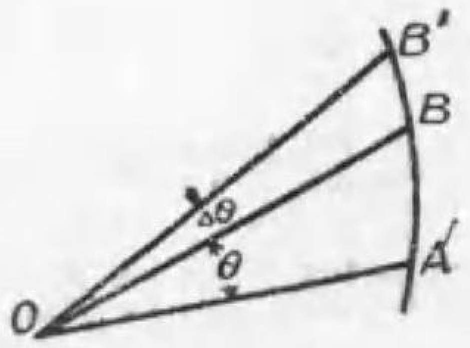

第 11 圖

## 例 題

(1) 汽車が東に向つて毎時 15 粁の速度で走つてゐる時、雨が東風を受けて 30° 傾斜して降つてゐるとし、汽車の乘客は雨が 45° 傾斜して降つてゐる如く見えたとすれば雨の實際速度如何。　答 11.4米秒$^{-1}$

### 14. 角速度 Angular velocity

第12圖の如く任意の直線 OA 上の一點 O の周りに其直線が一定平面上で廻轉するとき、直線が畫く角度$\theta$は時間と共に變化す




第 12 圖



る。**此角度の時間に對する變化の割合を角速度と云ひ、單位時間に廻轉する角度で測る。**この角度の向きを區別する爲め時計の廻轉と反對の向き (Counterclockwise) を正とし、その反對を負とする。

角速度の單位は毎秒一**ラディアン**(Radian)(ラディアン秒$^{-1}$)である。運動點が一定角速度で t 秒時間に$\theta$丈け廻轉したとすれば、角速度の値$\omega$は次の樣になる。

$$\omega=\frac{\theta}{t},\ \theta=\omega t \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

若し角速度の値が一定でない場合には、B點に近く B′ 點をとり $\angle BOB'=\Delta\theta$ とし、BB′ を進むに要する時間を $\Delta t$ として其極小値を求めれば

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{d\theta}{dt} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

即ち B 點の角速度である。

**弧度法**(Circular measure)に於ける角度の單位は**ラディアン**であつて、之は半徑の長さに等しい圓弧が圓心に張る角である。故に弧度法の角度の値は、圓周の長さと半徑の長さとの比で表はされる。

例へば 360°, 90° は弧度法に依ると

$$360°=\frac{2\pi r}{r}=2\pi \text{ ラディアン}$$

$$90°=\frac{2\pi r}{4r}=\frac{\pi}{2}\text{ ラディアン}$$

となる。ラディアンのヂメンションは上述のことにより

$$\theta[\text{ラディアン}]=\left[\frac{L}{L}\right]=[L^\circ]$$

即ち基本單位には無關係でそのヂメンションは零である。

角速度は角度を時間で割つたものであるから、そのヂメンションは次の通りである。

$$[\omega]=\left[\frac{1}{T}\right]=[T^{-1}]$$

圓運動に就いて考へて見るに運動點が t 時間に長さ s なる弧を畫くとし、夫れに對する中心角を $\theta$,圓の半徑を r とすれば、

$$s=r.\theta \quad (\theta\text{はラディアンで測つたもの})$$

$$\therefore \quad \frac{s}{t}=\frac{r.\theta}{t}$$

茲に$\frac{s}{t}$は速度の大さを示す。之を v とし角速度を $\omega$ とすれば、

$$v=r.\omega \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

角速度に對して通常の速度を**線速度**(Linear velocity)と云ふ。(9)式は即ち線速度と角速度との關係を示すものである。

## 例　題

(1) 1 ラディアンは何度に當るか。



答 $\frac{180^\circ}{\pi}=57.^\circ 3$ (約)

(2) 直徑 70 粍の廻轉軸がある。1 分間の廻轉數が 310 であるとすれば角速度及び外周の線速度如何。

解　角速度 $\omega=\frac{2\pi rN}{r\times 60}=\frac{\pi N}{30}$ ラディアン秒$^{-1}$

答 32.45ラディアン秒$^{-1}$

線速度 $v=r.\omega=0.035\times\frac{\pi N}{30}$

答 1.14米、秒$^{-1}$

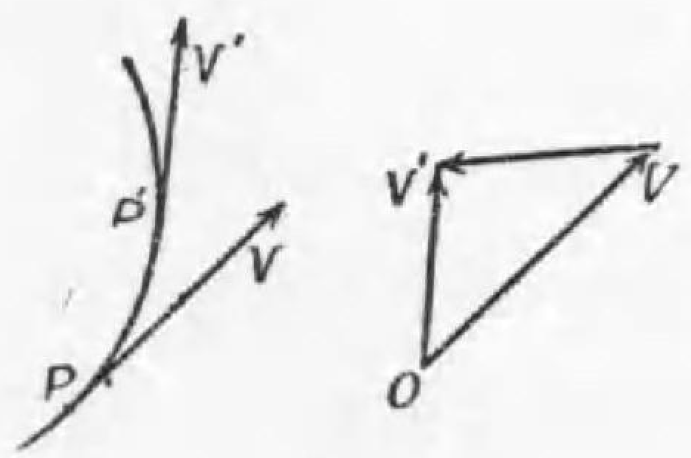
## 15. 加速度 Acceleration

運動點の速度が變化する場合時間に對して速度の變化する割合を加速度と云ひ、單位時間に變化する速度で測る。

即ち加速度は單位時間の速度で測る故、速度と同樣に方向及び大さを有つたベクトルである。其ヂメンションは

$$[a]=\left[\frac{L}{T^2}\right]=[L.T^{-2}]$$

加速度の單位は單位時間に單位の速度丈け變化する加速度である。C. G. S 單位では一秒につき、(毎秒一糎)即ち毎秒毎秒一糎の加速度を用ひ、之を糎秒$^{-2}$,$\frac{cm}{sec^2}$等で表はす。




第 13 圖

運動點が t 時刻に P 點に於て $\overline{PV}$ なる速度を、t' 時刻に P' 點に於て $\overline{P'V'}$ なる速度を得たとする。任意の點 O を原點として $\overline{PV}$ と $\overline{P'V'}$ とに等しく $\overline{OV}, \overline{OV'}$ をひくと其ベクトル差

$$\overline{P'V'}-\overline{PV}=\overline{OV'}-\overline{OV}=\overline{VV'}$$

は $t'-t$ 時間卽ち PP' 間の速度の變化を示す。之を $t'-t$ で割つたものを**平均加速度**(Mean acceleration) と云ふ。卽ち

$$平均加速度=\frac{\overline{VV'}}{t'-t}$$

次に P'點を十分 P 點に近くとり、$t'-t=\Delta t$, $\overline{VV'}=\Delta\overline{V}$ と置けば、$\frac{\Delta\overline{V}}{\Delta t}$ は $\Delta t$ 時間の平均加速度となる。今此極小値をとれば P 點の加速度が得られる。

$$\bar{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overline{V}}{\Delta t}=\frac{d\overline{V}}{dt}\text{..........................}(10)$$

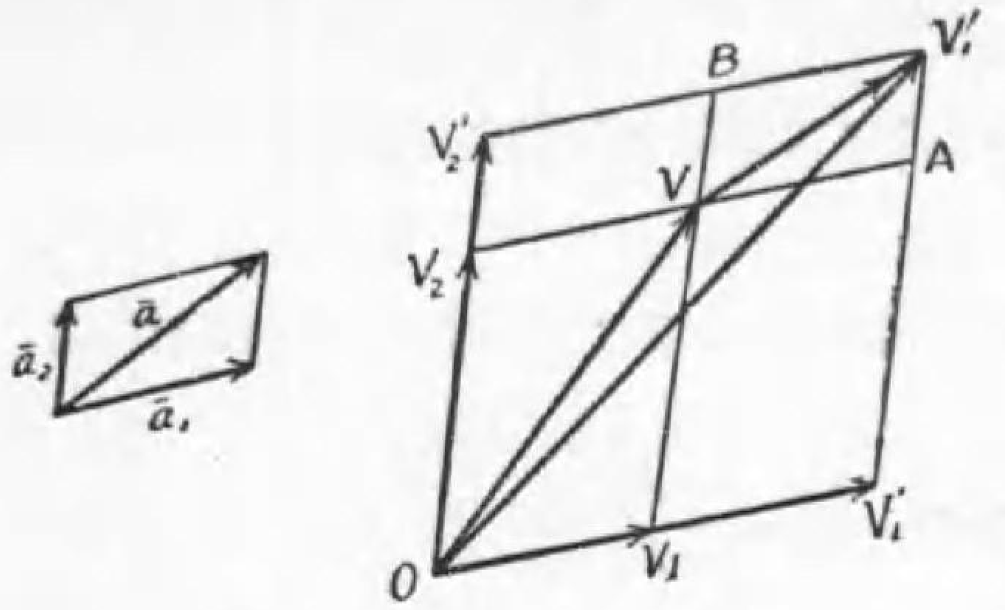
速度が變化する割合卽ち加速度には終始相等しいものと等しくないものとがある。前者は**等加速度** (Uniform acceleration) と云ひ、後者は**不等加速度**(Variable acceleration)と云ふ。自由落體の如きは等加速度であつて、常に g なる値を有つてゐることは後述の通りである。不等加速度の例は汽車の停車場發着の際等に見られる。後に述べる事であるが、一定不變の力が其物體に加はる時は、



必ず等加速度をとり、力が一定しないときには不等加速度を有つのである。

### 16. 加速度の合成及び分解 Composition and decomposition of acceleration

加速度は單位時間に變化する速度で測る故、ベクトルとして合成又は分解することが出來る譯である。今之を證明して見やう。




第 14 圖

第 14 圖に於て O 點にある運動點が、或る時刻に $\overline{V}$ と云ふ速度を有つて居り、其時左圖の樣な $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ と云ふ加速度を與へられたとする。$\overline{OV}$ を $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ の方向に分解して $\overline{OV_1}, \overline{OV_2}$ を得、之を夫々延長して $V_1V'_1=a_1$, $V_2V'_2=a_2$ とすれば、$\overline{OV'_1}, \overline{OV'_2}$ は一秒後の分速度で、夫れを合成した $\overline{OV'}$ は、此運動點が一秒後に得る速度である。故に一秒の間に速度が

$$\overline{OV'}-\overline{OV}=\overline{VV'}$$

丈け變化したことになる。卽ち $\overline{VV'}$ が**合加速度**(Resultant acceleration)である。今 V 點から $OV'_1$ 及び $OV'_2$ に平行に $V_2A$ 及び $V_1B$ を引けば、平行四邊形 VAV'B の二邊 $\overline{VA}$, $\overline{VB}$ は夫々 $\bar{a}_1$ 及び $\bar{a}_2$ に等しい。故に加速度の合成及び分解は、前述の變位及びベクトルの項に述べたことを其儘適用することが出來る。

## 例　　題

(1) 運動點が一定の速さ v で半徑 r の半圓を畫いたとすれば平均加速度の大さ如何。

解　半圓を畫いた時の速度の全變化は 2v で夫れに要した時間は $\frac{\pi r}{v}$ であるから

$$\text{平均加速度}=\frac{2v}{\frac{\pi r}{v}}=\frac{2v^2}{\pi r}$$

(2) 直線運動の場合の加速度を求む。

解　直線運動では速度の變化の方向は直線の方向と一致し一定であるから、速さのみの變化に就いて加速度を考へればよい。或る點の速度を $v_0$, 次の點での速度を v とし、其間に要した時間を t とすれば、加速度の定義から次の式が得られる。

$$\left.\begin{array}{l}\text{加速度 } a=\dfrac{v-v_0}{t}\\ v=v_0+at\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

速度の變化が一定でない場合には上式は平均加速度を示す。

## 問　　題

(1) 自動車が毎時 20 粁で走つてゐるとき、車輪は毎分 122 廻轉してゐるとすれば、車輪の直徑は幾何であるか。　　答　87 糎

(2) 地球自轉の角速度如何。　　答　$\frac{\pi}{43200}$〔ラデイアン秒$^{-1}$〕



(3) 地球の赤道上の直徑を 12754 粁とすれば、赤道上の一地點の速度如何。　　答　毎秒 462 米

(4) 鑄鐵を削る平均速度は毎分 5 乃至 4 米を適當としてある。今プレーニング、マシンの往復距離を 80 糎とし、削る時間は還る時間の二倍を要するとすれば、一分間の往復回數は幾何にすればよいか。

答　$4\frac{1}{6}$乃至$3\frac{1}{3}$回

(5) 汽車が毎時 16 粁の速度で傾斜$\frac{1}{60}$の線路を昇つてゐるとすれば 1 分間に幾米の高さに達するか。　　答　4·44米

(6) 毎時 3 哩の速度で東に向つて歩む人がある。風が正北から吹く樣に感じたが、速度を二倍にすると風が東北から吹く樣に感じた。風の地面に對する速度を求む。　　答　西北より $3\sqrt{2}$〔哩時$^{-1}$〕

(7) 汽車が 100〔粁、時$^{-1}$〕の速度で進行してゐるとき、窓に當る雨滴の跡が垂直に 30° 傾いてゐたと云ふ。雨が垂直に降つてゐるとすれば其速度如何。　　答　48〔米秒$^{-1}$〕

(8) 10〔米秒$^{-1}$〕の初速度を有つ運動點が、直線に沿ふて進み、30秒の後 23〔米秒$^{-1}$〕の速度を得たとすれば、同時間内の平均加速度は幾何であるか。　　答　$\frac{1.3}{3}$〔米秒$^{-1}$〕

(9) 落下體の落下距離は $s=v_0t+\frac{1}{2}gt^2$ で與へられる。任意の時刻に於ける加速度を求む。　　答　g

(10) 毎秒 10 米の速度で東に向つて運動してゐる質點が、$\frac{1}{20}$秒を經て毎秒 4 米の速度で東南に向つて運動したとすれば、$\frac{1}{20}$秒間の平均加速度の大さ方向如何。　　答　154〔米秒$^{-2}$〕西南21.°5

# 第四章　運動の定律

### 17. 運動の第一定律　First law of motion

今迄に述べたことは總て運動學に屬するもので、物體の有つてゐる質量なるものを考へに入れず、質點なるものを假想してその運動を論じたのである。然し乍ら力學に於て其根本をなす力及び質量を考へなければ實際問題を完全に論ずることは出來ない。有名なニュートンの運動の定律は經驗と實驗から得られたものであつて、力學の基礎をなすものである。

**運動の第一定律**は次の通りである。

「總ての物體は外力の作用を受けぬ限り、靜止或ひは直線上に等速運動の狀態を保つ」

玆に示された**力**(Force)なるものは、通俗的にはよく了解されてゐるが力學上より定義すれば

力とは靜止せる物體を運動させ、運動せる物體の運動の方向或ひは速さを變ずるものである。

力は適當の單位を定めて測ることが出來、且つ方向を有つてゐるから一種のベクトルである。

此定律で分る如く、物體に力が働かなければ、靜止せるものは永久に靜止し、運動せるものは常速度運動を保持するものであるが、此性質を物體の**慣性**(Inertia)と云ふ。



此定律は總ての物體が慣性を有つてゐることを示してゐる故、**慣性の定律**(Law of inertia)とも云ふ。斯の如く自然の物象は總て靜止又は常速度運動の狀態にあるべきであつて、其有樣が變化する場合には何等かの力が作用してゐることが分る。例へば汽車の發進、速さの增加、停止等に於ても總て力の作用によるものである。

### 18. 運動の第二定律　Second law of motion

力が物體に作用すれば物體の速度は如何に變化するか卽ち力の物體に及ぼす結果如何の問題が第二定律で定められる。

**第二定律**　運動量の變化は力積に正比例し、其方向は力の方向と一致する。

**運動量** (Momentum) とは速度と質量とを併せ考へたものであつて、其大さは質量 m と速度 v との積卽ち mv である。v がベクトルであるから運動量も亦ベクトルである。

運動量のヂメンションは〔$MLT^{-1}$〕で其單位は單位質量

の物體が單位の速度を有するときの運動量である。故に運動量のC. G. S. 單位は、質量1瓦の物體が1〔糎秒$^{-1}$〕の速度を有するときの運動量即〔瓦、糎、秒$^{-1}$〕で F. P. S. 單位では1〔封度、呎、秒$^{-1}$〕である。

**力積** (Inpulse)とは力の大さとその力の働く時間とを併せ考へたものであつて、即ち力の物體に對する效果を示すものである。其大さは力と時間との積で測る。即ち $\overline{F}$ と云ふ力が t 時間働けば、力積は $\overline{F}.t$ である。力はベクトル量であるから力積は一つのベクトルで、その方向は、力の方向と一致する。力積のデメンションに就いては、力の性質を明かにしてから述べることにする。

偖て第二定律を考へて見るに、運動量の變化は力積に正比例する故、次の式が成立する。

$$m.\overline{v}-m.\overline{v'}\propto\overline{F}.t$$

$$m.\overline{v}-m.\overline{v'}=k\overline{F}.t$$

茲にkは力の單位の定め方によつて定まる常數である。

上式を時間 t で割ると

$$\frac{m.\overline{v}-m.\overline{v'}}{t}=k.\overline{F}$$

上式は運動量の變化する割合を示す故、質點に力が働く時は運動量の變化する割合は力に正比例することを知



る。

$$m\frac{\overline{v}-\overline{v'}}{t}=k.\overline{F}$$

$\frac{v-v'}{t}$ は加速度を示すことは前述の通りであるから、上式は次の如く書き換へられる。

$$m.\bar{a}=k.\overline{F}$$

即ち「質量と加速度との積は力に正比例し、且つ加速度の方向は力の方向と一致する」ことを知る。

茲にkなる常數は單位の質量に働いて單位の加速度を生ずる力を以て力の單位とすれば

$$1\times1=k\times1$$

となる。斯の如く單位を定めると

$$F=m.a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

この式は力と質量加速度との關係を示す最も重要な式で、これによつて力のデメンションも分つて來る。

即ち　$[a]=\left[\frac{L}{T^2}\right]$

であるから　$[F]=[MLT^{-2}]$

從つて力積のデメンションは

$$〔力積〕=[F.T]=[MLT^{-1}]$$

即ち前述の運動量のデメンション$[MLT^{-1}]$と一致してゐる。

## 19. 力の單位 Units of force

力の單位には二種類ある。一つは重力單位で他は絕對單位である。今此單位を述べる前に、質量と重量との區別を明かにして置かう。

物體の質量も重力の量卽ち重量も同じく1瓩とか1封度とか稱せられる故、普通之を混同するものが多い。然し質量は物體內に含む實質の量で慣性を測る基礎の量であるから、その位置の如何に關せず一定不易である。然し物體に働く地球の引力が之を支持する力、卽ち重量は場所に依つて異る。尤も物體の質量を測るには、之に加はる重力と、原器の代表をなす分銅に加はる重力とを比較して計ることが出來る。何となれば同一場所に於ては地球の引力が物體に加へる加速度は相等しいから第二定律から次の比例式が成立する。

$$F = ma, \quad F' = m'a$$

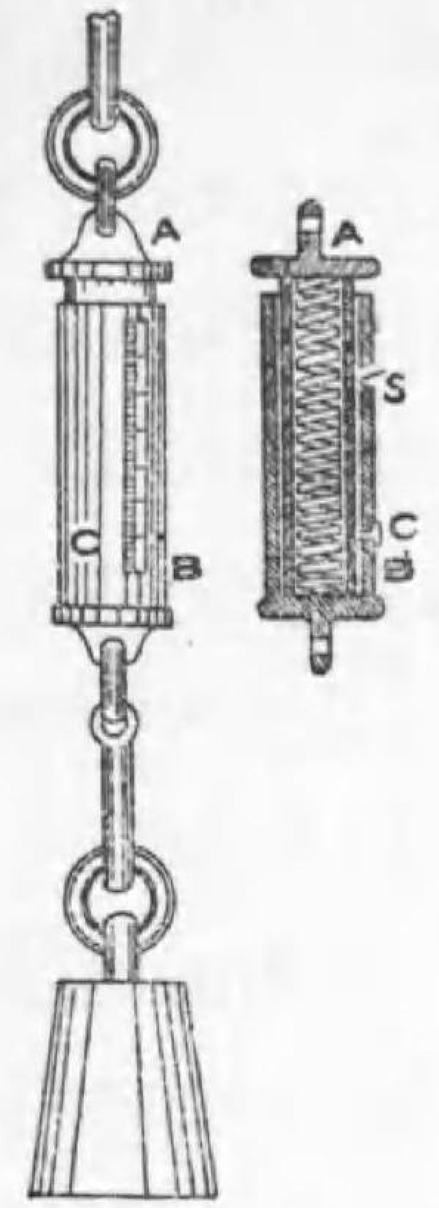
$$\therefore \quad \frac{F}{F'} = \frac{m}{m'}$$

故に重力相等しければ、質量も亦等しいことになり、天秤が或る分銅で平準すれば測るべき物體の質量は分銅の質量に等しい、卽ち其物體の質量が分ることになる。

從つて天秤なるものは重量を測るものではなく、質量



を測るものであると云へる。何となれば質量1瓩に働く重力は場所に依つて異るも、天秤で測れば何れの場所で測つても1瓩であるからである。物體の重量を正しく測るには發條秤(Spring balance)に依らなければならぬ。發條秤の一例を示すと第15圖の通りである。Sは螺狀發條で、上端はAの圓筒に固定せられ下端はBの圓筒に固定してある。Aの下部に指針Cを取付け發條の伸縮に從つてB圓筒にある溝の中を昇降し、溝の側に尺度を劃して重量を示す樣になつてゐる。此秤は發條の伸縮に依つて測るのであるから、地球の引力の異るに從つて示す重量に差異がある。卽ち重量を測ることが出來る譯である。



第 15 圖

### I 絕對單位 Absolute units

(12)式に依り三種の基本單位から導いた力の單位を絕對單位と云ふ。

(イ) C.G.S 絕對單位 1瓦の質量に働いて1[糎秒$^{-2}$]の加速度を生ずる力を單位とし、之をダイン(Dyne)と云

ふ。

地球上の物體は之を支へるものがなければ、引力の爲めに g〔糎秒$^{-2}$〕の加速度を得る。故に m 瓦の質量の物體に働く重力は mg ダインで、これを物體の重量と云ふ。卽ちこの重量を W とすれば

W＝m〔瓦重〕＝mg ダイン

この g の値は前に述べたことにより明かである如く場所に依つて違ふが、略々 980〔糎秒$^{-2}$〕である。

（ロ）**F.P.S 絕對單位**　1 封度の質量に働いて 1〔呎秒$^{-2}$〕の加速度を生ずる力を單位とし、之を**パウンダル**(Poundal) と云ふ。

此の場合の g の値は 32〔呎秒$^{-2}$〕で、m 封度の質量の物體の重さは

mg パウンダル＝32×m パウンダル

である。

**II 重力單位** Gravitational units

力の重力單位とは一定の質量を有する物體が、地球に引かれる力卽ち其重量を基準としたもので、單位質量例へば 1 瓦, 1 瓩, 1 封度等の質量を有する重量を以て其單位とし、之を〔瓦重〕,〔瓩重〕,〔封度重〕等と云ふ。是等の



單位は通常工業上に用ふのであるが、場所に依つて異る故、精確な單位ではないが實用上には何等差支はない。

（イ）**M.K.S 重力單位**　1 瓩の重さを以て力の單位とする。1 瓩の重さに等しい力が 1 瓩の質量に作用する時は 9.8〔米秒$^{-2}$〕の加速度を生ずる故、同じ力が 9.8 瓩の質量に働けば 1〔米秒$^{-2}$〕の加速度を生ずる。故に此法に於ける質量の單位は 9.8 瓩の質量である。從つて P 瓩の重さの物體の質量 m は、

$$m=\frac{P}{9.8}\text{單位}=\frac{P}{g}\text{單位}$$

である。

（ロ）**F.P.S 重力單位**　1 封度の重さを以て力の單位とする。

前と同樣に此法に於ける質量の單位は g 封度卽ち 32 封度の質量である。

**20. 運動の第三定律** Third law of motion

力は單獨に一つの物體にのみ働くものではなく、一つの物體に力が作用するときは、この物體と共に互ひに作用する他の物體があつて、その相互作用によつて一物體に働くことになるのである。であるから一物體に力が働くときは、之と互に作用する第二の物體にも必ず力が作

用してゐるのである。この事は吾々が兩手で互に押し合ふ時、兩手は互に相反する力を感ずることに依つても明かである。又手で壁面を押す場合にも、同様の事を知ることが出來る。只この場合には他の手の代りに壁がある丈けで、夫れに及ぼす力を直接吾々が感じない丈けである。

斯の如く二物體の相互作用に就いて運動の第三定律は次の如く示されてある。

**第三定律**　作用あれば必ず之に等しくて相反する作用がある。換言すれば二物體間の相互の作用は常に等しくて相反するものである。

二物體が相互に作用するとき、一つの物體に働く力を**作用** (Action) と云ひ、他の物體に働く力を**反作用** (Reaction) と云ふ。

### 例　　題

（1）　15〔瓩重〕を絶對單位で表はせ。

解　15〔瓩重〕=15000〔瓦重〕

1〔瓦重〕=980 ダイン　　であるから

15〔瓩重〕=15000〔瓦重〕=15000×980 ダイン

（2）　25パウンダルの力を重力單位で表はせ。

解　1〔封度重〕=32 パウンダル　　であるから



1 パウンダル$=\frac{1}{32}$〔封度重〕

∴　20パウンダル$=\frac{20}{32}$〔封度重〕

（3）　重量50瓩の物體が15〔米秒$^{-1}$〕の速度を有つてゐるとし、今外力が之に働いて4.5秒の間に22〔米秒$^{-1}$〕の速度に達したとすれば外力は幾何であるか。

解　第二定律より

$$\frac{mv-mv'}{t}=F$$

$$\frac{50}{9.8}\times\frac{22-15}{4.5}=7.9$$　　答　7.9〔瓩重〕

### 問　　題

（1）　1 パウンダルは幾ダインであるか。　答　13847 ダイン

（2）　重量80封度の物體が5〔呎秒$^{-1}$〕の速度を有つてゐる。今之に9封度の力を加へると、或る時間を經て50〔呎秒$^{-1}$〕の速度を得ると云ふ。この時間を求む。　答　12.4 秒

（3）　重量 560 瓩の物體に毎秒毎秒 3.5 米の加速度を與へるには幾〔瓩重〕の力を要するか。　答　200 瓩重

（4）　毎分 1500 回轉する機關があつて、その往復運動をする部分の重量が 1.5 瓩あるとする。今ピストンが上死點からクランクの角度で 55° 回轉した位置に降つたとき、毎秒 8.3 米の速度を得たとすれば、此時のピストンの平均慣性力は幾何であるか。　答　208 瓩重

（5）　或る物體が毎秒 15 米の速度を有つてゐるとき、之に 20〔瓩重〕の力を反對方向に與へたところ3秒の後毎秒2米の速度に減つたと云ふ。この物體の重量は幾何。　答　45.2 瓩

# 第五章　各種の運動

## 21. 直線運動 Rectilinear motion

運動の最も簡單なものは、直線運動である。加速度がなければ、毎秒 v 糎で動く故、t 秒間に動いた距離 s 糎は次の式で與へられる。

$$s=v.t \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

次に等加速度毎秒毎秒、a 糎を有つ運動では、初速度を $v_0$ 運動時間を t 秒とすれば前述の如く

$$v=v_0+at \text{ 又は } v-v_0=at \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

然して t 秒間に運動した距離は、其間の平均速度に時間を掛けたものであるから

$$s=\frac{v_0+v}{2}t=\frac{v_0+v_0+at}{2}t=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \cdots (13)$$

(11)式を二乘すると

$$v^2=v_0^2+2av_0t+a^2t^2=v_0^2+2a(v_0t+\frac{1}{2}at^2)$$

$$=v_0^2+2as$$

$$\therefore\ v^2-v_0^2=2as \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

以上が直線運動の重要公式である。

### 例　　題

(1) 質量200瓲の汽車を 1.5瓲重の力で水平に牽くとき、之に働く



抵抗を1瓲重とすれば、汽車が毎時 16 粁の速度を得る迄には幾時間を要するか。

解　實際の牽引力は

$$1.5-1=0.5 \text{瓲重}$$

公式 $F=m.a$ により加速度を求めると、

$$a=\frac{F}{m}=\frac{0.5\times1000\times9.8}{200\times1000}=0.0245 \text{米秒}^{-2}$$

(11)式に於て $v_0=0$ であるから

$$v=at \qquad \therefore\ t=\frac{v}{a}$$

即ち $t=\dfrac{16000}{3600}\times\dfrac{1}{0.0245}=181.4$秒　　答 3分1.4秒

## 22. 重力作用を受ける垂直運動 Vertical motion under gravity

空氣の抵抗を無視すれば、地上の一局所では總ての物體は一定の加速度 g=980[糎秒$^{-2}$]を以て降下する。本節に述べる垂直運動も直線運動に外ならないから、前節の公式に a=g と置けば垂直方向に於ける落下運動の公式が得られる。即ち

$$\left.\begin{aligned} v&=v_0+gt \\ s&=v_0t+\frac{1}{2}gt^2 \\ v^2&=v_0^2+2gs \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

物體を初速度 $v_0$ で直上に抛げ上げる場合に、上方に向ふ方向を速度 v, 距離 s の正の方向とすれば、上式の g は

$-g$ となる。

$$\left.\begin{aligned} v&=v_0-gt \\ s&=v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \\ v^2&=v_0^2-2gs \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

今直上に物體を抛げ上げた時、或る高さに達すれば速度 $v=0$ となつて降下し始める。卽ち

$$v_0=gt,\quad \therefore\quad t=\frac{v_0}{g}$$

これは**上昇時間**(Time of ascent)を示す。次に

$$s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

から $t=0$ 又は $t=\frac{2v_0}{g}$ の時、$s=0$ を得る。$t=0$ の場合は抛げ上げないときの距離が零なる常識的意味を表はし、後者の $t=\frac{2v_0}{g}$ の場合は一度上昇して後降下したとき卽ち $s+(-s)$ が零なることを示す。この時の時間は上昇時間の二倍であるところから、**降下時間**(Time of descent)は上昇時間に等しいことが分る。

最後に $v^2=v_0^2-2gs$

で $v=0$ なる條件を入れると

$$v_0^2=2gs$$

卽ち $$s=\frac{v_0^2}{2g}$$

これは**上昇距離**(Height of ascent)を示す。



## 例　題

（1） 5〔米秒$^{-1}$〕の速度で上方に抛げ上げた石が1米の高さに達する時間を求む。

解 $s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$ から $1=5t-\frac{1}{2}\times9.8t^2$ 之れを解いて $t=0.34$ 秒又は 0.74 秒、前者は上昇のとき、後者は降下のとき1米の高さを通過する時間である。

（2） 斷崖に立つて足下の水面に石を落した時、5.5 秒を經て水面に到達したと云ふ。斷崖の水面上よりの高さを求む。

解 $s=v_0t+\frac{1}{2}gt^2$ の公式で $v_0=0$ であるから

$$s=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}\times9.8\times5.5^2=148.225\text{米}$$

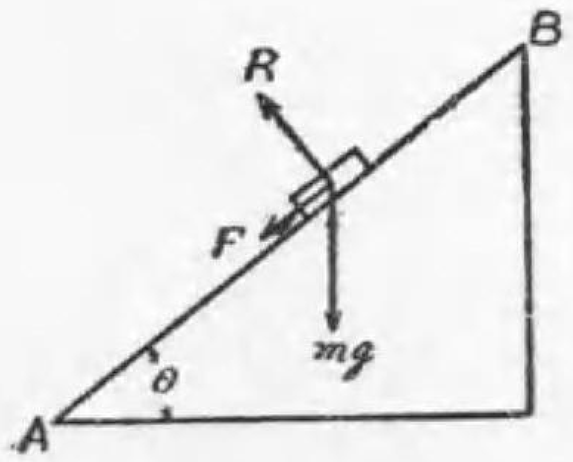
（3） 花火を打ちあげたとき、その高さが 100 米であつたとすれば、最初の速度は幾何。

解 $v^2=v_0^2-2gs$ の公式で $v=0$ であるから

$$v_0^2=2gs$$
$$=2\times9.8\times100=1960$$
$$v_0=44.3\text{〔米秒}^{-1}\text{〕}$$

**23. 斜面上の運動** Motion on an inclined plane

斜面 AB は平滑で、その上にある物體との間に何等の摩擦抵抗がないものとすれば、此物體の質量 m に働く力 mg は、斜面に垂直な力と斜面に沿ふ力とに分たれる。前者は斜面の反作用Rと釣合つて居り、其



第 16 圖

値は mg $\cos\theta$（$\theta$ は斜面と水平面とが作る角度）である。後者は斜面に沿ふて此物體を運動させる力で、其値は mg $\sin\theta$ である。從つて傾角 $\theta$ の斜面上の物體の加速度は g $\sin\theta$ で、前節の公式の g の代りに g $\sin\theta$ を置けば斜面上の運動の公式が得られる。

### 例　　題

（1） 或る一定の高さ s より任意の斜面に沿ふて物體が落下するときは、終速度は同一で s の高さより自由落下するときの終速度に等しいことを證せよ。

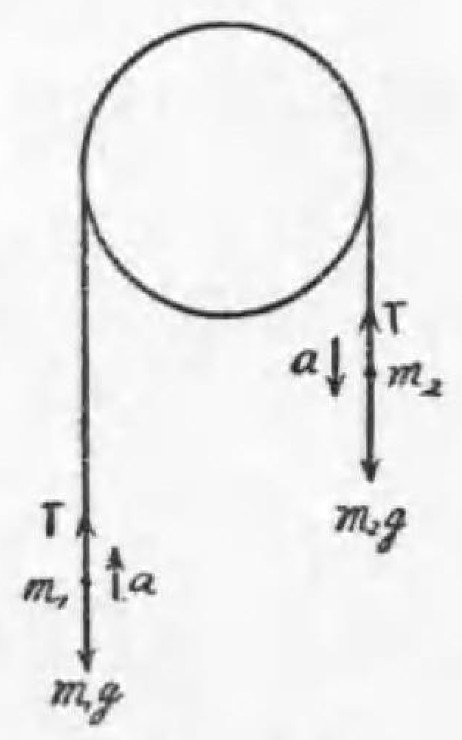
解　任意の傾斜角を $\theta$ とすれば

$$v^2=2g\sin\theta\frac{s}{\sin\theta}\qquad \text{但し}\frac{s}{\sin\theta}\text{は斜面の長さ。}$$
$$=2gs$$

卽ち $\theta$ の如何に係らず常に自由落下の終速度に等しいことを知る

## 24. アトウードの裝置　Atwood's apparatus

落下體の降下は餘りに急速で、之を實驗して g の値を測定すると云ふことがむづかしい。アトウードは落下の加速度を隨意に小ならしめて、測定を容易にした。卽ち第17圖にその概要を示して見ると、先づ滑車に絲をかけ其兩端に $m_1 m_2$ なる錘をつ



第 17 圖



ける。今滑車は摩擦抵抗なく廻轉するものとし、且つその質量を無視する。$m_2>m_1$ とすれば $m_2$ は降下し $m_1$ は上昇する。今絲が延びないものと假定すると $m_2$ と $m_1$ との運動に於て、その加速度は等しい故、之を a とし、絲の**張力**(Tension) を T とすれば

$$\left.\begin{aligned}T-m_1g&=m_1a\\ m_2g-T&=m_2a\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

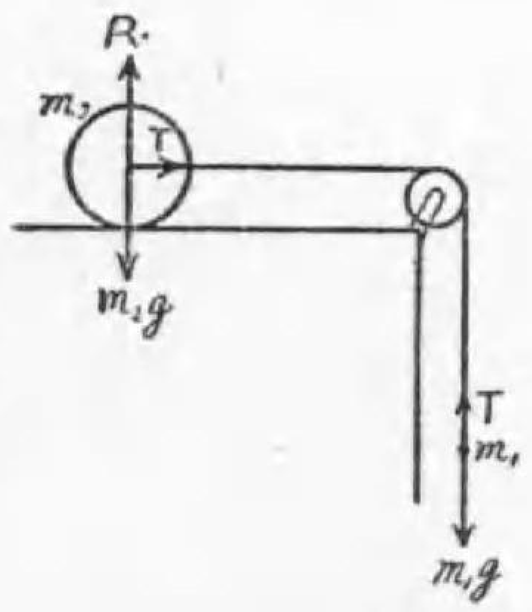
上式から T を消去すれば加速度 a が得られる。

$$a=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}g\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

之れを(17)式の何れかに代入して絲の張力が得られる。

$$T=\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

### 例　　題



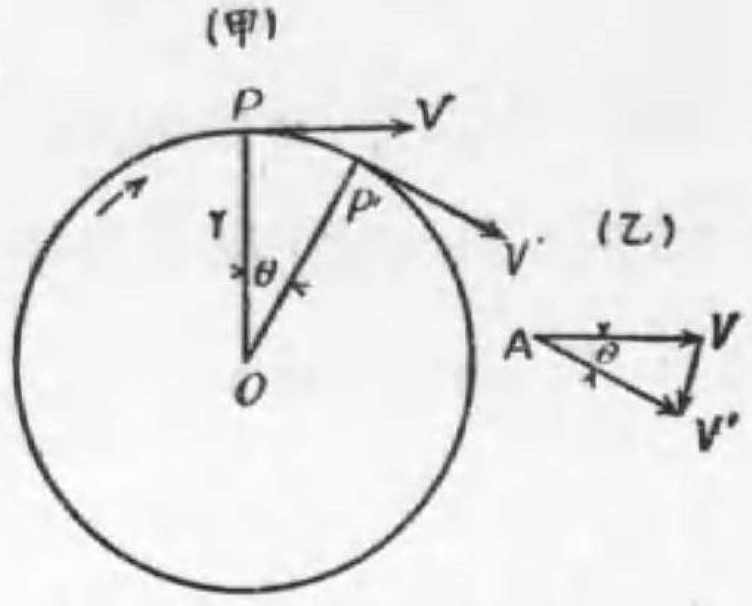

（1） 平滑水平面上に物體（質量 $m_2$）を載せ、之を摩擦なく廻轉する滑車（質量を無視す）を經て絲の一端に結んだ錘（質量 $m_1$）で引くときの加速度と絲の張力とを求む。

解　$m_2$ が $m_1$ の爲めに引かれて運動を起した場合の共通加速度を a とすれば $m_1$, $m_2$ 夫々に關する運動式は、

$$m_1g-T=m_1a$$
$$m_2a=T$$

$$\therefore\ a=\frac{m_1 g}{m_1+m_2} \qquad T=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}g$$

## 25. 圓運動 Circular motion




第 18 圖

茲には等速圓運動に就いて述べる。

今速さを v〔糎秒⁻¹〕とすると、P から P' に移る間の速度の變化は(乙)圖の $\overline{VV'}$ である。卽ち加速度は

$$\bar{a}=\underset{\Delta t\to 0}{\mathrm{Lim}}\frac{\overline{VV'}}{\Delta t}$$

である。

$\angle VAV'=\angle POP'=\Delta\theta$, $AV=AV'=v$ であり且つ $\Delta\theta$ は極めて小さいとすれば、

$$VV'=\Delta\theta . v, \quad PP'=\Delta\theta . r \text{ 卽ち } \Delta\theta=\frac{PP'}{r}$$

$$\therefore\ VV'=\frac{PP'}{r}.v$$

故に PP' 間の速度の變化の割合卽ち加速度は

$$\bar{a}=\underset{\Delta t=0}{\mathrm{Lim}}\frac{\overline{VV'}}{\Delta t}=\frac{v}{r}.\underset{\Delta t\to 0}{\mathrm{Lim}}\frac{PP'}{\Delta t}=\frac{v}{r}.v$$

$$\therefore\ a=\frac{v^2}{r} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

而して $\overline{VV'}$ の方向は $\angle POP'$ の二等分線の方向で中心に向つてゐる。卽ち等速圓運動(Circular motion of con-



stant speed) では、加速度は中心に向ひ、大さは $\frac{v^2}{r}$ で與へられる。角速度との關係を示すと $v=\omega r$ であるから

$$a=r\omega^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

## 26. 向心力 Centripetal force

前節で述べた事柄は質量を無視した理論であるが、今質量 m の物體が上記の圓運動をした場合を考へて見やう。

等速圓運動では各點に於ける速度の方向は其點の切線方向であるから、若し此物體に力が働いてゐなければ、運動の第一定律により其物體は切線方向に等速度直線運動をする筈である。然るに圓運動を保つてゐるのは必ず或る力が何れかの方向に働いてゐるのである。力が働けば加速度を生ずるが、前述の如く圓運動では中心に向ふ加速度 $\frac{v^2}{r}$ があるから卽ち $m\frac{v^2}{r}$ なる力が働いて圓運動を保つてゐることが分る。この力を**向心力** (Centripetal force) と云ふ。卽ち

$$f=m.\frac{v^2}{r}=m.r.\omega^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

運動の第三定律により、向心力に反する大さの等しい力が同時に作用する筈で、この力は物體を中心より遠ざけんとするものである。之を**遠心力** (Centrifugal force) と

云ふ。

この力は絲の一端に石を結んで廻轉させたときとか、或ひは水を容れた器を廻轉させたときに、容易に知ることが出來る。工業的にも各種の器械に利用されてゐる。卽ち遠心脫水器、遠心式廻轉調節機構等之である。

## 例　　題

（1）5瓦重の物體を1米の紐に附けて廻轉させるとき、遠心力をこの物體の重さ20倍ならしめるには、1秒間幾回轉させればよいか、

解　$v=2\pi rN$　　r は紐の長さ　N は1秒間の廻轉數

$$\therefore\quad v=2\pi\times100\times N$$

$$f=m\frac{v^2}{r}\text{ から}$$

$$5\times20=\frac{5}{980}\times\frac{4\pi^2\times100^2\times N^2}{100}$$

之より N=22 を得る。

（2）地球表面の實際の引力（自轉しない場合）を赤道に於て g′ とし、地球自轉の速さを ω とすれば、自轉の速さが ω の何倍になれば地面にある物體が地球を飛び出すか。但し地球の半徑を赤道で 6377 粁とし、g の値を 978.1〔糎秒⁻²〕とする。

解　1 自轉に要する時間卽ち**周期**(Period)は恒星日卽ち23日56分4秒=86164秒であるから

$$\omega=\frac{2\pi}{86164}\text{〔秒}^{-1}\text{〕}$$

$$\therefore\quad r.\omega^2=6377000\times\left(\frac{2\pi}{86164}\right)^2=0.034\text{〔米秒}^{-2}\text{〕}$$

今物體の質量を m とすれば

$$m.g=m.g'-m.r.\omega^2$$



$$g=g'-r.\omega^2$$

$$g'=g+r.\omega^2=978.1+3.4=981.5\text{〔糎秒}^{-2}\text{〕}$$

$g'=r.\omega^2$ の時　$g=0$　となり物體に働く重力が零となる。

其時の角速度を $\omega_1$ とする。

$$r.\omega^2=\frac{g'}{289}\qquad\left(289=\frac{981.5}{3.4}\right)$$

$$r.\omega^2_1=g'$$

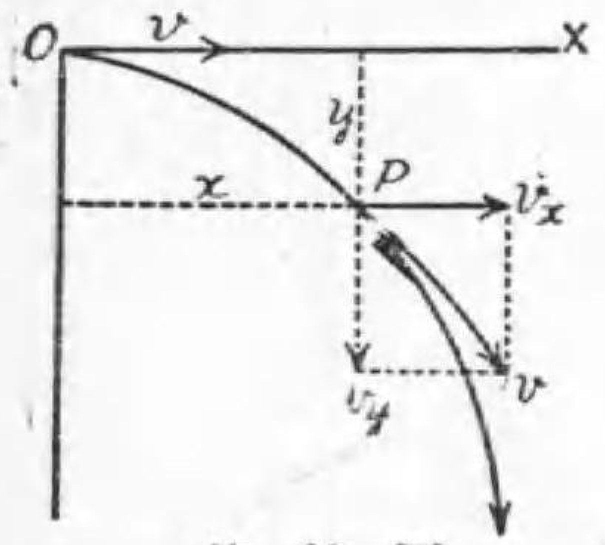
上の兩式から

$$\frac{\omega_1}{\omega}=\sqrt{289}=17$$

故に ω が 17 倍になれば地上の物體は地球を飛び去ることになる。

## 27. 水平拋射　Horizontal projection

一點 O から水平に初速度 v で質點を投射した場合を考へて見る。先づ O を原點として直角軸 OX, OY を引き、t 時間後の拋射點の位置を P とし、其坐標を $x, y$ とする。




第 19 圖

今この v なる速度を X,Y 兩軸の方向に分解して $v_x$, $v_y$ とすれば、$v_x$ は v なる等速度運動であり、$v_y$ は初速度のない落下運動である。故に

$$v_x=v\ ,\quad v_y=gt\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

$$x=vt\ ,\quad y=\frac{1}{2}gt^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

(24)の t を消去すれば

$$x^2=\frac{2v^2}{g}y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

茲に $\frac{2v^2}{g}$ は常數であるから、$y$ は $x^2$ に比例する。卽ち此曲線は抛物線 (Parabola) であることを示す。

又(23)式から $v_y=g\frac{x}{v}$ を得、依つて

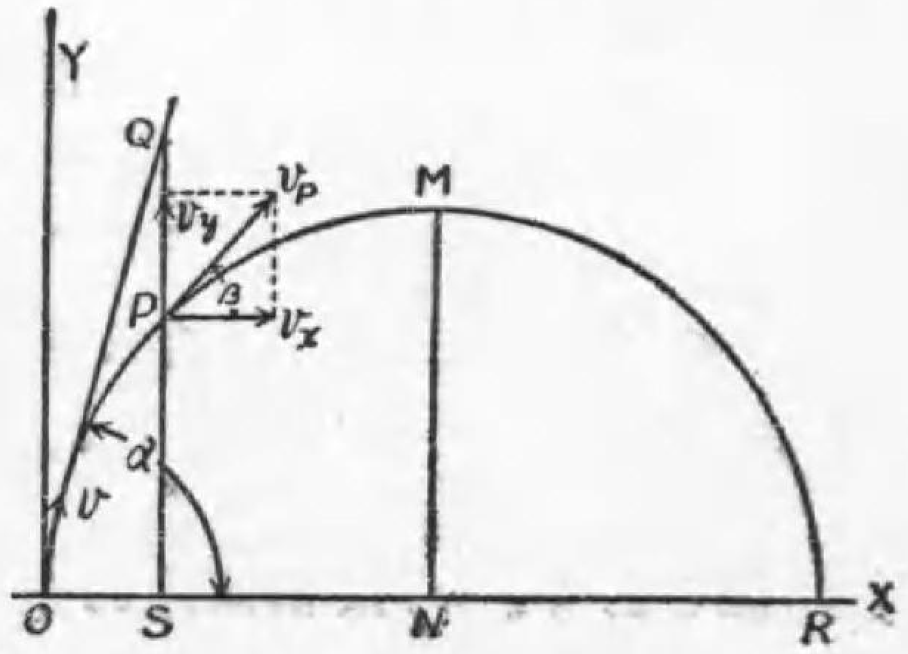
$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{v^2+g^2\frac{x^2}{v^2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

又　$$\cot\beta=\frac{v_x}{v_y}=\frac{v_0}{gt}=\frac{v_0^2}{gx} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

以上の三式に依り任意の初速度に對する抛物線を決定することが出來る。

**28.　任意の方向の抛射**　Projectin in any direction

地上の一點から任意の方向に物體を抛射すると、物體は一種の曲線を描いて運動するものである。之を**抛射體** (Projectile) の運動と云ひ、其曲線を**彈道** (Trajectory) と云ふ。



第　20　圖

茲には勿論空氣の抵抗を無視する。從つて物體が若し廻轉し乍ら進行しても質點の運動と見做し得る譯である。投射點Oから $\alpha$ の角度で初速度 v で投射することと



する。Oを原點として水平垂直の方向にX, Y軸をとり彈道上任意の一點Pに於ける位置を坐標 $x, y$ で表はし、その時の水平、垂直分速度を $v_x$, $v_y$ とする。そうすると、$v_x$ は $v\cos\alpha$ と云ふ常速度運動で、$v_y$ は初速度 $v\sin\alpha$ の抛げ上げ運動であるから

$$\left.\begin{aligned} v_x&=v\cos\alpha \\ v_y&=v\sin\alpha-gt \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

從つて

$$\left.\begin{aligned} x&=v\cos\alpha.t \\ y&=v\sin\alpha.t-\frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

$y$ を求めるのに次の樣に考へてもよい。卽ち重力が働かないと假定すると、t 秒後には $OQ=v.t$ なるQ點にある筈である。然るに重力によつて $QP=\frac{1}{2}gt^2$ 丈け降下してP點に達するのであるから

$$y=QS-QP=v\sin\alpha.t-\frac{1}{2}gt^2$$

今(29)式から t を消去すると

$$y=x\tan\alpha-\frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

を得る。これは $x$ と $y$ との關係を示す式で、抛物線であることが分る。これに依れば一定點$(x, y)$を通過せしむる爲めに抛射角 $\alpha$, 速度 v を如何に決定したらよいかと云ふことも分つて來る。

I **飛行時間** (Time of flight) 拋射點が O なる原點から同一水平線上の R 點に達する迄の時間を飛行時間と云ふ。

先づ最高點 M に達する迄の時間を考へて見ると、此點は $v_y$ が零になるときであるから、(28)式で $v_y=0$ と置けばよい。卽ち M に達する迄の上昇時間 $t_a$ は

$$t_a=\frac{v\sin\alpha}{g} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

次に飛行時間 $t_f$ は圖に依つて分る如く、$y=0$ の場合であるから、(29)式で $y=0$ と置いて

$$t_f=\frac{2v\sin\alpha}{g} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

之によつて見ると $t_f=2t_a$ であることが分る。卽ち降下時間は上昇時間に等しいことを知る。

II **最高距離及び着彈距離** (Maximum height & Range) 拋射點の達し得る最高距離 MN は(29) $y$ の式へ $t_a=\dfrac{v\sin\alpha}{g}$ を代入すればよい譯である。卽ち

$$MN=\frac{v^2\sin^2\alpha}{2g} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

又着彈距離 OR を求むるには、(29) $x$ の式に $t_f=\dfrac{2v\sin\alpha}{g}$ を代入すればよい。卽ち

$$OR=\frac{2v^2\sin\alpha.\cos\alpha}{g}=\frac{v^2\sin2\alpha}{g} \cdots\cdots\cdots(34)$$

拋射速度 v が與へられた時、着彈距離を最大とする爲



には、(33)式で $\sin2\alpha$ を最大にすればよい。卽ち $2\alpha=90°$, $\alpha=45°$ のときが最大となる。

III **任意の點の速度** 任意の點 P の速度を $v_p$ とすればこれは(28)式で與へられた互に直角な分速度 $v_x$, $v_y$ の合成速度でなければならぬ。依つて

$$v_p=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(v\cos\alpha)^2+(v\sin\alpha-gt)^2}$$
$$=\sqrt{v^2-2g(v\sin\alpha.\,t-\frac{1}{2}gt)^2}$$
$$=\sqrt{v^2-2gy} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

卽ち任意の點の速度の大さは其高さによつて決るのであつて、高ささへ同じなれば上昇降下の如何に係らず速度の大さは等しいことになる。

この速度の方向は水平線となす角 $\beta$ が分ればよい。

$$\tan\beta=\frac{v_y}{v_x}=\frac{v\sin\alpha-gt}{v\cos\alpha} \cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

今 $\alpha$ が零であるとすると、前節水平拋射の場合となつて(27)式と一致する。但し符號が正負反對になるが、これは $y$ の正負が反對になつてゐるからである。

## 例 題

(1) 水槽の垂直壁の小孔から水が毎秒 8 米の速度で水平に放出する。2 秒後の合速度を求む。

解 $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$

茲に　$v_x=v=8$ 米秒$^{-1}$

$v_y=gt=9.80\times2=19.6$ 米秒$^{-1}$

∴　$v=\sqrt{8^2+19.6^2}=21.2$ 米秒$^{-1}$

（2）　空氣銃を40°上方に向けて發射した處、彈が90米先の地面に落ちたと云ふ。發射速度を求む。

解　着彈距離の公式 $OR=\dfrac{v^2\sin2\alpha}{g}$ から

$$v^2=\frac{OR\times g}{\sin2\alpha}$$

$OR=90$米, $\sin\alpha=\sin80^\circ=0.9848$ であるから

$$v^2=\frac{90\times9.8}{0.9848}=895.4$$　答　每秒29.9米

## 問　　題

（1）　長さ24呎の斜面を自然に降下して得た速度を12呎秒$^{-1}$とすれば、斜面の傾斜は何度なるか。　　答　5°23′

（2）　質量15瓩の物體を水平面に置き、之に8瓩重の力を何秒働かせれば50米を進み得るか。　　答　4.4秒

（3）　水平線に對し $\theta=\tan^{-1}\dfrac{3}{4}$ なる傾きを有つた面を、靜止の狀態から滑り下りた物體が、10秒後に得る速度、其水平垂直速度及び運動した距離を求む。

答 $\begin{cases}58.8\text{米秒}^{-1},\ \text{水平速度}\ 47.04\text{米秒}^{-1},\ \text{垂直速度}\ 35.28\text{米秒}^{-1}\\ \text{距離}\ 294\text{米}\end{cases}$

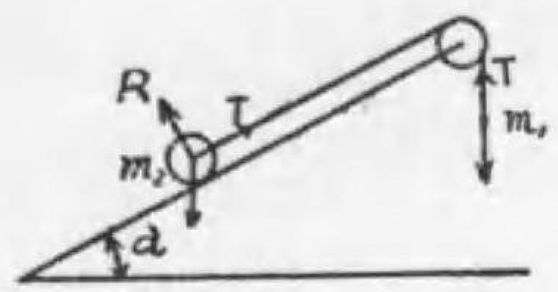
（4）　石を井戸に落した時、5秒で水面に落ちた音を聞いたと云ふ。井戸の深さを求む。但し音の速度は每秒333米とす。　答　約108米

（5）　3米秒$^{-1}$の速度で垂直に上昇してある氣球から石を落したるに20秒で地面に達したと云ふ。石が地面に達した瞬間の氣球の高さを求む。　　答　1960米

（6）　圖に示す樣な傾角 a の斜面上に物體を載せ、之を滑かな滑車に



懸けた絲の一端に結んだ錘で引き上げるときの加速度と絲の張力とを求む。　　答　$a=\dfrac{m_1-m_2\sin\alpha}{m_1+m_2}g.$　$T=\dfrac{m_1m_2g(1+\sin\alpha)}{m_1+m_2}$




（7）　100瓦の物體を發條秤に載せ、之を上方に持ち上げるとき、秤の示度が101瓦であるとすれば、持ち上げる加速度は幾何か。　　答　$\dfrac{g}{100}$

（8）　彈丸が700米秒$^{-1}$の速度で30°の傾きを以て發射した時の着彈距離、飛行時間、最大高度を求む。　　答　43.2粁, 1分11.4秒, 6.25粁

（9）　初速度 $v_0$ で距離 d 丈け離れた所の高さ h の點を射擊する爲には角度を幾何にすればよいか。

$$\text{答}\quad \tan\alpha=\frac{v_0^2}{gd}\pm\sqrt{\frac{v_0^4}{g^2d^2}-\frac{2v_0^2h}{gd^2}-1}$$

（10）　地上より拋射した物體が任意の一點 P に達する迄の時間を t とし、P 點から再び地上に落ちる迄の時間を t′ とすれば、P 點の高さは $\dfrac{1}{2}gtt'$ なることを證明せよ。

# 第二編
# 靜力學

## 第一章　質點に働く力

### 29. 質點の平衡 Equilibrium of a particle

質點に唯一つの力が働く場合には、其質點は力の方向に運動し静止するを得ない。然し質點に二つ又は二つ以上の力が同時に作用すると、各力の與へる加速度が合成されて零となり、従つて質點が靜止するか又は常速度運動をなす場合がある。斯様な場合、質點に働く力の一團卽ち**力系** (System of forces) は**平衡** (Equilibrium) を保つと云ふ。

質點に働く力系が平衡を保つために必要且つ十分な條件は、力系の合成力が零となることである。何となれば、この條件が滿足されなければ、質點は合成力の方向に加速度運動をすることになるから、此條件は必要である。又此條件が滿足せられる場合には、合成加速度は零となつて平衡を保つことが出來るから、此條件は十分な條件



と云へる。

故に逆に質點が平衡を保つてゐる場合には、之に働く力系の合成力は零となることを斷定し得る。

前述の如く質點が平衡を保つに二つの場合がある。卽ち質點が靜止するか、或ひは又質點が等速度運動をするかである。前者は**靜的平衡** (Static equilibrium) と云ひ、後者は**動的平衡** (Kinetic or dynamic equilibrium) と稱せられる。玆には主として前者を研究することゝする。

### 30. 同一直線上にある力

數多の力が同時に同一質點に働く場合に、此等の力と同じ影響を與へる一つの力を、此等の力の**合力** (Resultant) と云ふ。

今同一直線上に大さ等しく向きが反對の二力を一質點に働かしめると、その合力は零である。卽ち此二力は平衡してゐる。若し大さが異るときは、合力は二力の差に等しく、向きは大きい力の向きと同じになる。又向きが同じである數多の力の合力は、その和に等しく向きも同じである。反對方向に働く力に就いても同じことが云へる。故に一直線上にある多くの力の合力は、一つの向きを正にとり、他の向きを負とすれば、之等の力の代數和

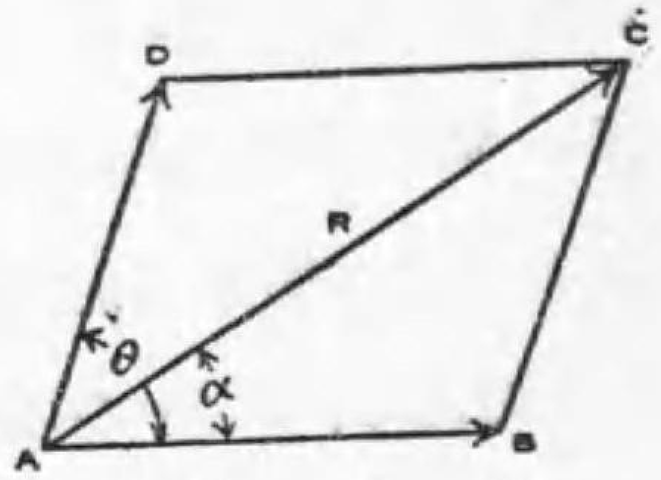
に等しく、その符號により向きを決定する。即ち與へられた力を $P_1 P_2 P_3 \cdots\cdots P_n$ とすれば、その合力は、

$$R=P_1+P_2+P_3+\cdots\cdots+P_n=\Sigma P\cdots\cdots\cdots\cdots(37)$$

之等の力が平衡する爲には其合力は零でなければならぬ。即ち　$R=0$　又は　$\Sigma P=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(38)$

### 31. 同一平面上にあつて一點に會する三力

二つの力が一質點に働く場合その合力を求めるには、各々の力をベクトルで表はし $\overline{AB}, \overline{AD}$ とすれば、平行四邊形ABCDの對角線 $\overline{AC}$ が合力を示す。これを**力の平行四邊形** (Parallelogram of force) と云ふ。



第　21　圖

計算から合力を求めると、

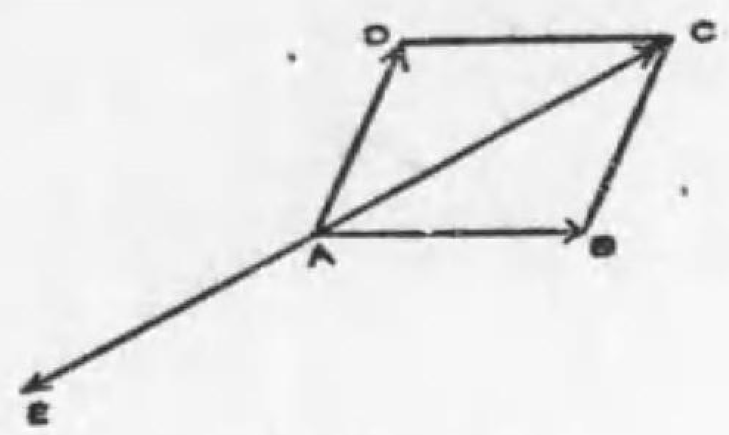
$$\left.\begin{aligned}&\overline{AC}=R=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+2\overline{AB}.\overline{AD}\cos\theta}\\&\tan\alpha=\frac{AD\sin\theta}{AB+AD\cos\theta}\end{aligned}\right\}\cdots(39)$$

即ちベクトルの平行四邊形と同じ理であることが分る。

次に三つの力が一つの質點に働く場合に、之が平衡を保つ場合を考へて見るに、第21圖の二力 $\overline{AB}, \overline{AD}$ の外に若し $\overline{AC}$ と大さ等しく向きが反對の力 $\overline{AE}$ がA點に

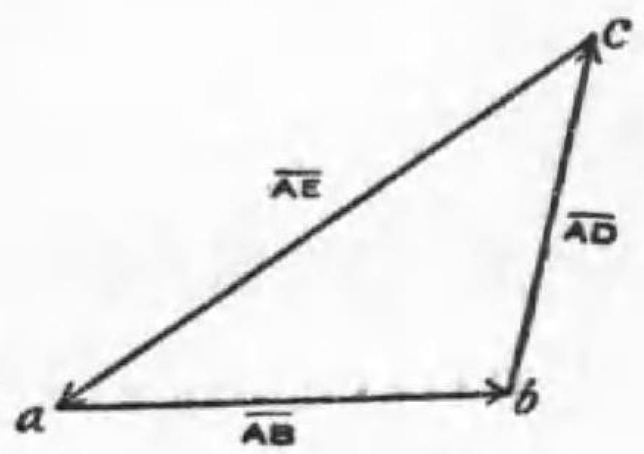


働くと假定すれば、第22圖に示す如く $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE}$ の三力は結局 $\overline{AC}, \overline{AE}$ の二力と等しい影響をA點に與へることになる。且つ $\overline{AC}, \overline{AE}$ 二力は大さ等しく向きが反對であるから平衡することになる。



第　22　圖

今此三力のベクトル和を求めて見ると第23圖の様に三角形を形成してベクトル和が零となる。この三角形を**力の三角形** (Triangle of force) と云ふ。三力の平衡に就いては次の如く述べることが出來る。



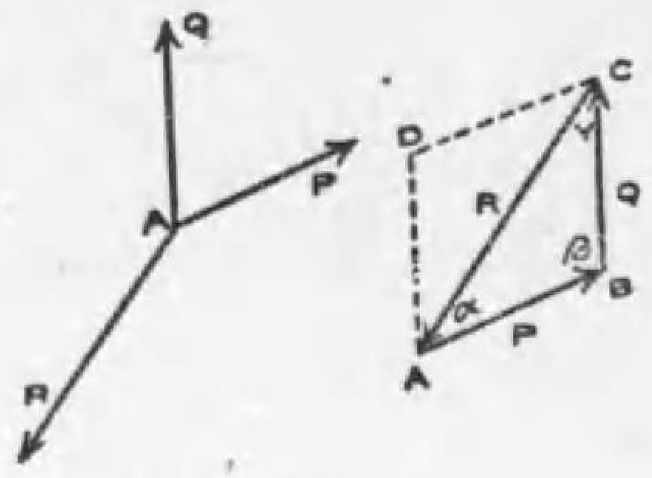
第　23　圖

三力が一點に働くとき、其大さ及び向きが三角形の各邊を同じ順にとつたものに依つて表はされるときは、之等の三力は平衡をなす。

之を**ラミーの定理** (Lami's theorem) と云ひ、此逆も亦正しい。

今 A に働く三力を P, Q, R とし、その大さと向きが ABC なる三角形の各邊を AB, BC, CA の順にとつたも

ので表はされるとする。假りにD點をとつて ABCD を平行四邊形を作つて見ると $\overline{AD}$ はQを表はす。依つて P, Q の合力は $\overline{AC}$ で表はされることは前述の通りである。然るに第三のRは $\overline{CA}$ であるから



第 24 圖

$$\overline{AC}+\overline{CA}=0$$

即ち三力 P, Q, R は平衡することが證明される。

次に此三力の間の關係は、三角法の公式により

$$P:Q:R=\sin\gamma:\sin\alpha:\sin\beta$$

故に三力が平衡するときは、各力は他の二力の挾む角の正弦に比例することが分る。

## 例　　題

(1) 3 瓩と 5 瓩との二力が 70° をなして或る質點に働いてゐるとき、何瓩の力をどの向きに働かせれば平衡を保ち得るか。

解　合成力を R 瓩とすれば(39)式から

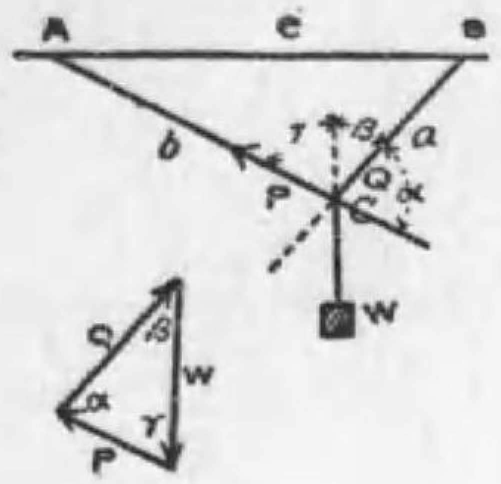
$$R=\sqrt{3^2+5^2+2\times3\times5\cos70^\circ}=9.65\text{瓩}$$

$$\tan\alpha=\frac{5+3\cos70^\circ}{3\sin70^\circ}=0.467 \qquad \therefore\ \alpha=25^\circ$$

即ち 6.65瓩の大さを 5 瓩の力に對し 155° の向きに働かせればよい。



(2) 圖に示す樣に W の重さの物體が、a 及び b なる長さの紐で固定點 A 及び B に結ばれて靜止してゐる。A B=c とすれば a 及び b の紐の張力を求めよ。




解　a, b の張力を夫々 Q, P とし、W, P, Q 三力の三角形を作り、その挾む角を圖の如く α, β, γ とする。然らば

$$\frac{P}{W}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},\quad \frac{Q}{W}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

玆に　$\sin\alpha=\sin C$，$\sin\beta=\cos B$，$\sin\gamma=\cos A$ であるから、

$$\frac{P}{W}=\frac{\cos B}{\sin C},\quad \frac{Q}{W}=\frac{\cos A}{\sin C}$$

三角法の公式から

$$\sin C=\frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

であるから、之を代入して次の張力を得る。

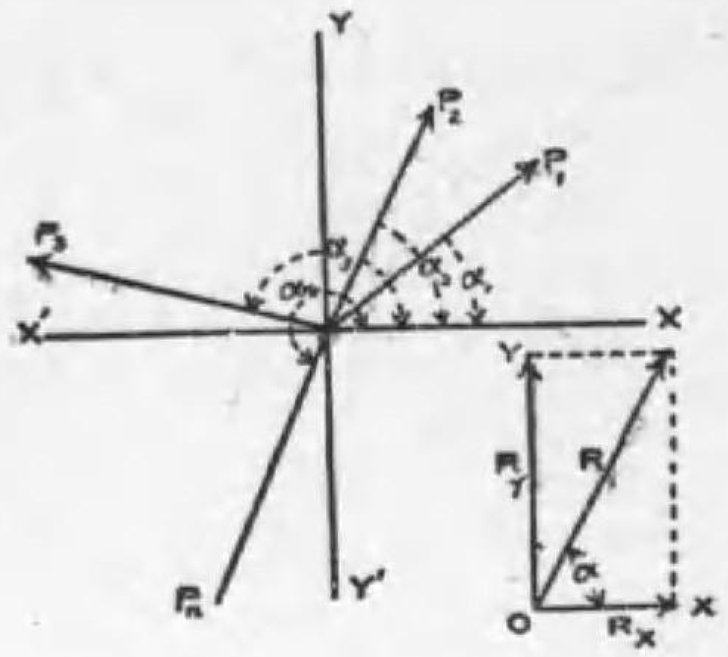
$$P=\frac{(a^2+c^2-b^2)b}{4C\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}\cdot W$$

$$Q=\frac{(b^2+c^2-a^2)a}{4C\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}\cdot W$$

## 32. 同一平面上にあつて一點に會する數多の力

第25圖に於て $P_1, P_2, P_3\cdots\cdots P_n$ を一點Oに會する n 個の力とする。但し之等の力は同一平面上にあることゝする。今之等の力の合力を求めて見やう。

任意の直交軸 XX′, YY′ を O を過つて假定し、OX と各力のなす角度を $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ ……$\alpha_n$ とする。各力は總て ox oy 軸上に分解することが出來る。各分力の和を $R_x\,R_y$ とすると



第　25　圖

$$R_x=P_1\mathrm{cns}\alpha_1+P_2\cos\alpha_2+P_3\cos\alpha_3+\cdots\cdots+P_n\cos\alpha_n$$

$$R_y=P_1\sin\alpha_1+P_2\sin\alpha_2+P_3\sin\alpha_3+\cdots\cdots+P_n\sin\alpha_n$$

卽ち
$$\left.\begin{array}{l}R_x=\Sigma P\cos\alpha\\ R_y=\Sigma P\sin\alpha\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

此 $R_x$ と $R_y$ とを合成すれば、合力 R が得られる。

$$\left.\begin{array}{l}R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}\\ \tan\alpha=\dfrac{R_y}{R_x}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

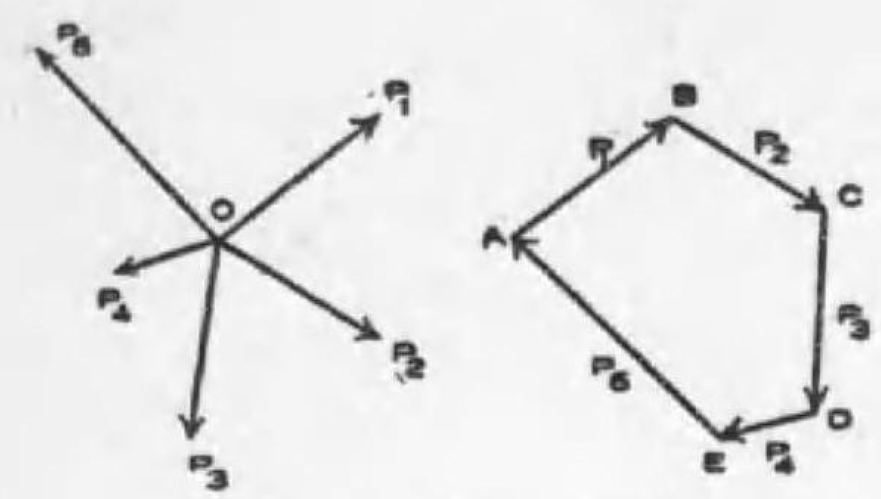
若し之等の力系が平衡してゐる爲めには、

$$R=0$$

卽ち
$$\left.\begin{array}{l}R_x=\Sigma P\cos\alpha=0\\ R_y=\Sigma P\sin\alpha=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(42)$$

數多の力が一點に働いてゐる場合、其大さ及び方向が閉ぢられた多角形の各邊を同じ順にとつたもので表は



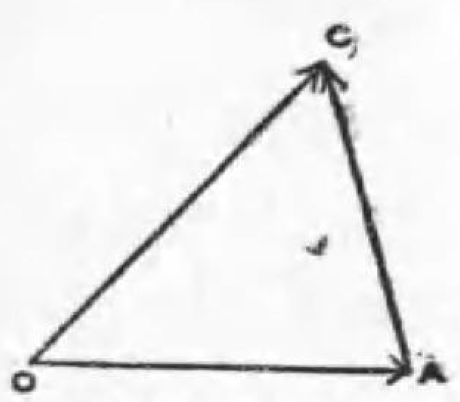


第　26　圖

されるときは、之等の力は平衡してゐる。この事を**力の多角形**(Polygon of forces)と云ひ、此逆も亦眞である。證明は略すもベクトルの合成の節と第26圖を參照すれば容易に了解することが出來やう。

## 33.　力の分解

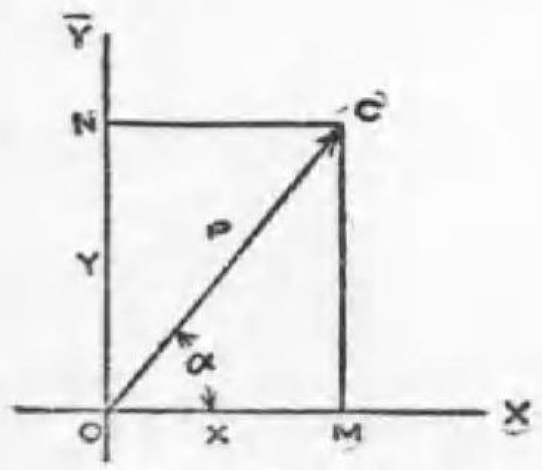
與へられた力を $\overline{OC}$ とし、O 及び C を過ぎ任意の點 A に會する樣な二線を引くときは、$\overline{OA}$, $\overline{AC}$ は $\overline{OC}$ なる力の二つの分力を表はす。



第　27　圖

玆に A 點は任意にとつたもので解法は無限にあり一定してゐない。

但し適當な條件を定めると一定の分力を得る。最も普通に力學上で用ひられるのは、與へられた力を二つの互に直角な分力に分解することである。



第　28　圖

第28圖の如く與へられた力 $\overline{OC}=\overline{P}$ が x 軸となす角を $\alpha$ と

する。Cから二軸に CM, CN を下し $OM=x$, $ON=y$ とすれば

$$OM=x=P\cos\alpha$$

$$ON=y=P\sin\alpha$$

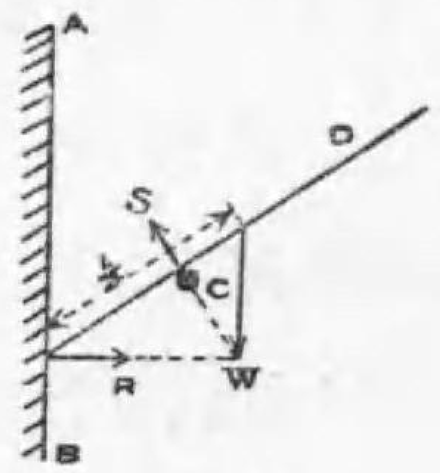
この事は前節に於て述べた通りである。

### 問　題

（1） 同一平面上にあつて一點に會する二力の合力は、其挾む角の大小に依つて變化する。この變化を檢べよ。

（2） 一つの柱を垂直に立てる爲めに、五つの綱が同一水平面に張られてゐる。第一の綱は北に、第二は北 75° 西に、第三は南 75° 西に、第四は南 30° 東に張られ、その張力は夫々 25瓩, 15瓩, 20瓩, 及び 30 瓩である。第五の綱の張力と方向を求む。　　答　18.96瓩　北 83°6′ 東

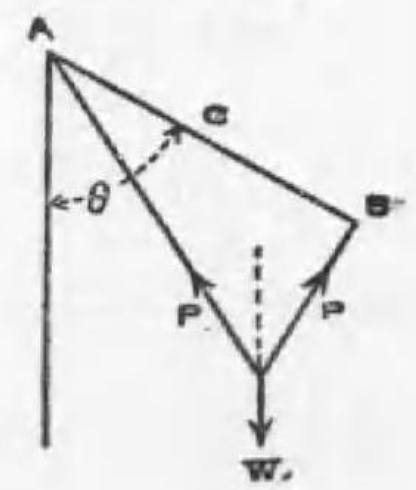
（3） 圖に示す樣な垂直の壁 AB があり、b 丈け隔つた位置に壁に平行に水平棒 C がある。今圖に示す樣に長さ $l$ の棒 D を之に載せ、其一端を壁に支へさせると、如何なる位置で靜止するか。但し相接觸する各部は平滑で抵抗がないものとし、棒 D の重さは $\frac{l}{2}$ の點にかゝり、且つその點は C の外にあるものとする。



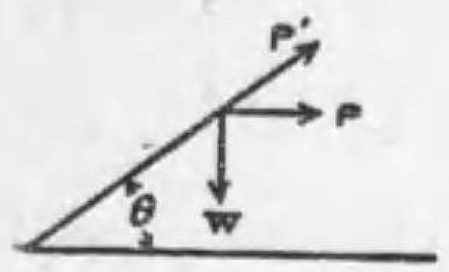

答　$\theta=\cos^{-3}\frac{2b}{l}$

（4） 圖に示す樣に AB 二點に結びつけた長さ $l$ の紐に、抵抗の無い鉤にかけた錘 W を吊した時の紐の張力を求む。

但し AB 二點の距離を c とし、AB が垂線となす角を θ とする。　答　$P=\frac{W.\,l}{2\sqrt{l^2-c^2\sin^2\theta}}$

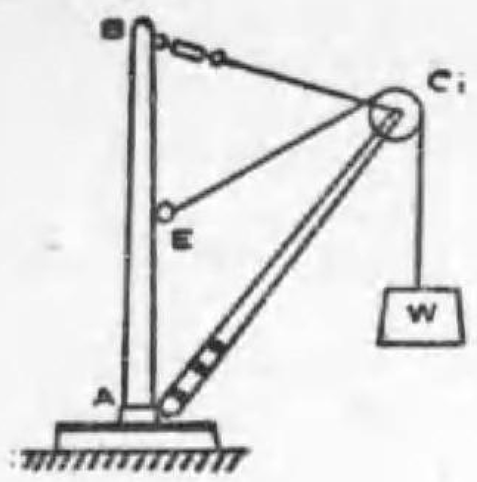





（5） 圖の樣な平滑な斜面上に重さ W を置き、之を水平力で支へる時と、斜面に沿ふた力で支へる時との力の大さ及び斜面の反作用を求む。　　答　略す

（6） デリック、クレーン。此起重機は、地盤に固定するか或ひは充分の重量を持たした基礎を有する柱 AB の下端に臂(Jib)を附け、其末端 C と柱の先 B とを結線 (Tie) AC で結びつけ、C 端の滑車に ECW なる綱を渡し、重量 W を綱によつて昇降せしめる裝置である。




此機構の各部に生ずる力の多角形を求む。

## 第二章　剛體に働く力

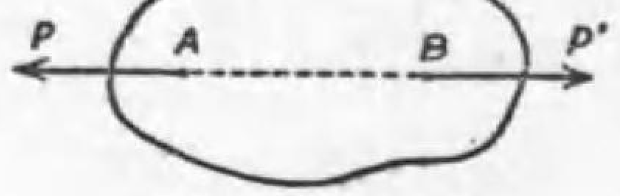
### 34. 剛體に働く力 Forces acting ona rigid body

質點に働く力は大さと方向及び向きで確定するが、大さを無視することが出來ない物體に力が働く場合には、力の働く位置により物體の運動の狀況が變つて來る。故に物體に働く力を定めるには、以上の外に力の作用する點卽ち**着力點** (Point of application) を與へなければならぬ。着力點を通して力の方向に引いた直線を、**作用線** (Line of action) と云ふ。

固體 (Solid body) は總て彈性を有し、之れを固定して

外力を與へると、固體は歪 (Strain) を生ずる。力學上では便宜上外力を受けても歪を生じないものとし、之を剛體 (Rigid body) と云ふ。剛體の定義から次の二定理が得られる。

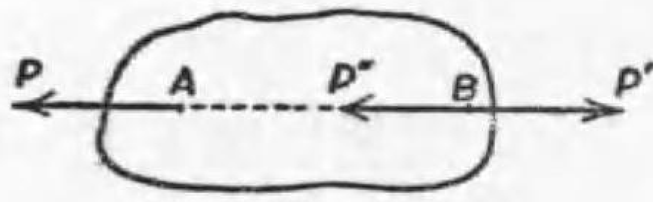
I　同一作用線上に於て剛體に働く大さ等しく方向反對の二力の合力は零である。



第　29　圖

此二力は物體内 AB の間を遠け樣とする傾向を有てゐるが、二點間の距離は一定不變であるから、結局その合力は零となる。

II　剛體に働く力の着力點は、其作用線上の任意の一點に移すことが出來る。



第　30　圖

A 點に $\overline{AP}$ が働くとし、其作用線上の任意の點 B に $\overline{BP'}$, $\overline{BP''}$ なる大さ AP に等しく方向反對の二力を作用せしめると、$\overline{AP}$ と $\overline{BP'}$ は前定理により合力零である。結局 $\overline{BP''}$ が三力の合力となり、$\overline{AP}$ は $\overline{BP''}$ に移つたことになる。即ちこの定理は正しいことを知る。

以上の定理により

I　作用線が一點に交る場合には、着力點を交點に持ち來し、質點に働く力として合力を求めることが出來る。

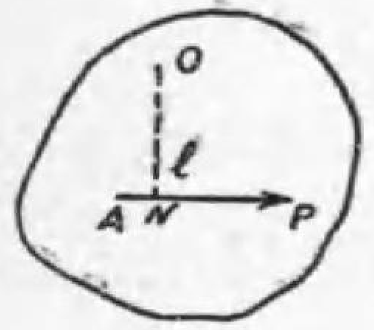


II　作用線が共通なる場合には、着力點を一點に移して力の代數和を求めればよい。

III　平行しない一平面上の力の場合には、二力の作用線を交らしめてIの方法をとり、その合力と他の力とを同樣の方法で合成し、順次同樣にして總合力を求める。但し或る合力と一力とが平行する場合は後に讓る。

### 35. モーメント Moment

第31圖に於て O を或る物體の紙面に直角な軸とし、$\overline{AP}$ と云ふ力が働いてゐるとすると、$\overline{AP}$ は此物體を O 軸の周りに廻はさうとする作用を生ずる。斯樣な能力を力の**モーメント**と云ふ。其大さは力とその作用線への垂線の長さとの積で表はされる。即ち O 點に關する力のモーメントは、



第　31　圖

$$\overline{AP}\times ON=\overline{AP}\times l$$

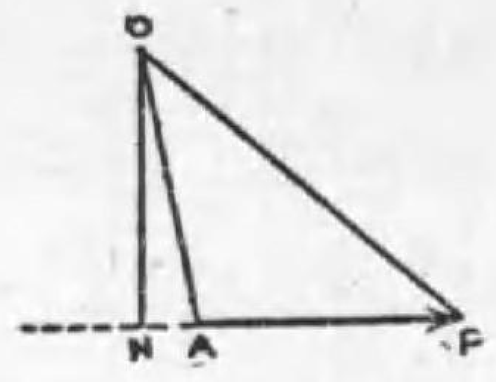
ヂメンションは力と長さとの積であるから、

$$[\text{モーメント}]=\left[\frac{ML}{T^2}\times L\right]=\left[ML^2T^{-2}\right]$$

であつて、モーメントの單位は單位の力が單位の長さの垂線距離に於てなすモーメントで、〔ダイン糎〕,〔瓩米〕等

を用ふ。

モーメントの向きは、その廻轉方向卽ち左廻りと右廻りとによつて正負を區別する。普通左廻りを正とし、右廻りを負とする。モーメントの大さは前述のことにより、與へられた點を頂點とし、力の大さを底邊とする三角形の面積の二倍に等しいと云ふことが出來る。

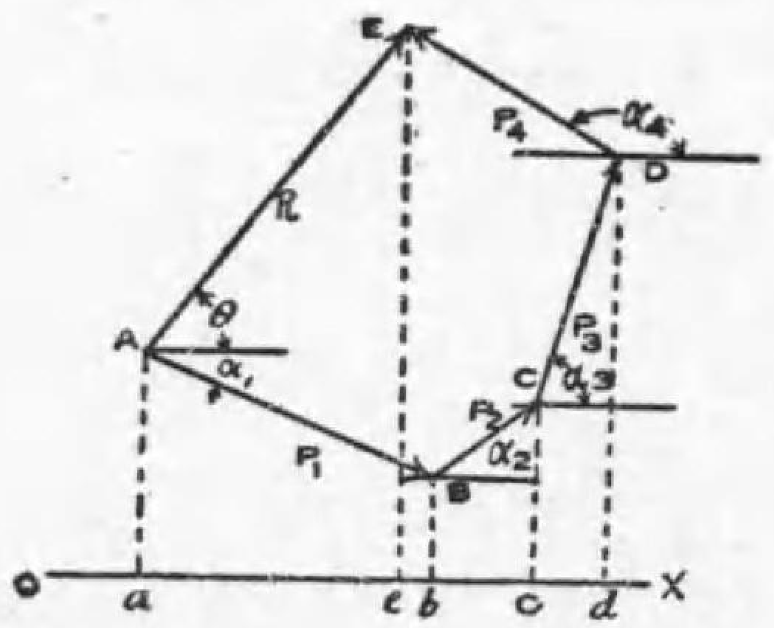


第 32 圖

定理　剛體の一點に働く數多の力の一定軸に對するモーメントの代數和は、其合力のモーメントに等し。之を Varignon（バリグノン）の定理と云ふ。

今之を證明する前に次の問題を解決して置かう。

一點に働く多くの力を任意の直線上に投影したものの代數和は、其合力を投影したものに等しい。



第 33 圖

第33圖に示す樣に一點に働く力 $P_1$ 乃至 $P_4$ を順次にとり、その合力をPとし、之をOX直線上に投影する。今O點をOX上にとり、之等の力の投影の代數和をとると、



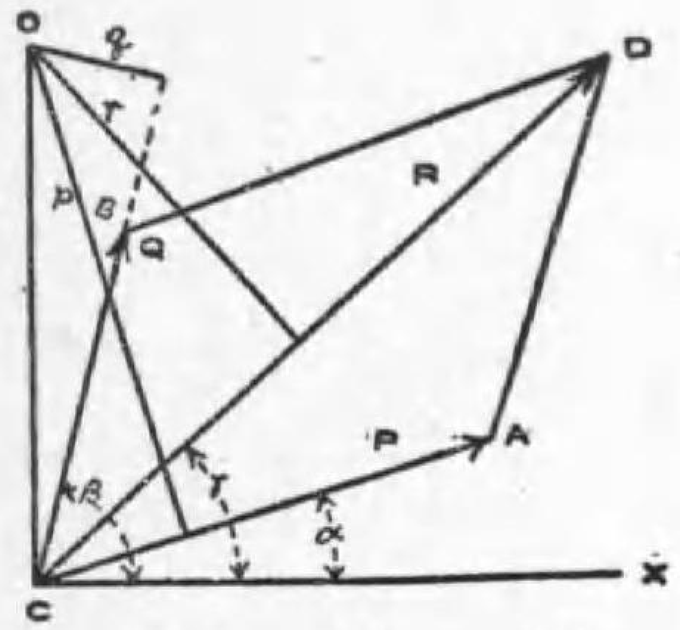
$$(Ob-Oa)+(Oc-Ob)+(Od-Oc)+(Oe-Od)$$
$$=Oe-Oa$$

卽ちRの投影 Oe−Oa に等しい。之を式で表はすと、

$$P_1\cos\alpha_1+P_2\cos\alpha_2+P_3\cos\alpha_3+P_4\cos\alpha_4=R\cos\theta$$

卽ち　$\Sigma P\cos\alpha=R\cos\theta$

扨てバリグノンの定理を證明しやう。先づモーメントが同方向の場合を考へて見る。二力 P, Q とその合力 R との O 點に對するモーメントを P.p, Q.q, R.r とする。第34圖に示す樣に着力點CからCx⊥OCになる樣に直線Cxを引き、P, Q, R が Cx となす角を $\alpha, \beta, \gamma$ とすると、前問題に依り



第 34 圖

$$P\cos\alpha+Q\cos\beta=R\cos\gamma$$

之に OC をかけると

$$P.\,OC\cos\alpha+Q.\,OC\cos\beta=R.\,OC\cos\gamma$$

$$\therefore\ P.p+Q.q=R.r$$

次にモーメントが反對方向の場合でも同樣に（圖は略す）

$$P\cos\alpha+Q\cos\beta=R\cos\gamma$$

$$P.\,OC\cos\alpha+Q.\,OC\cos\beta=R.\,OC\cos\gamma$$

$$\therefore\quad P.\,p-Q.\,q=R.\,r$$

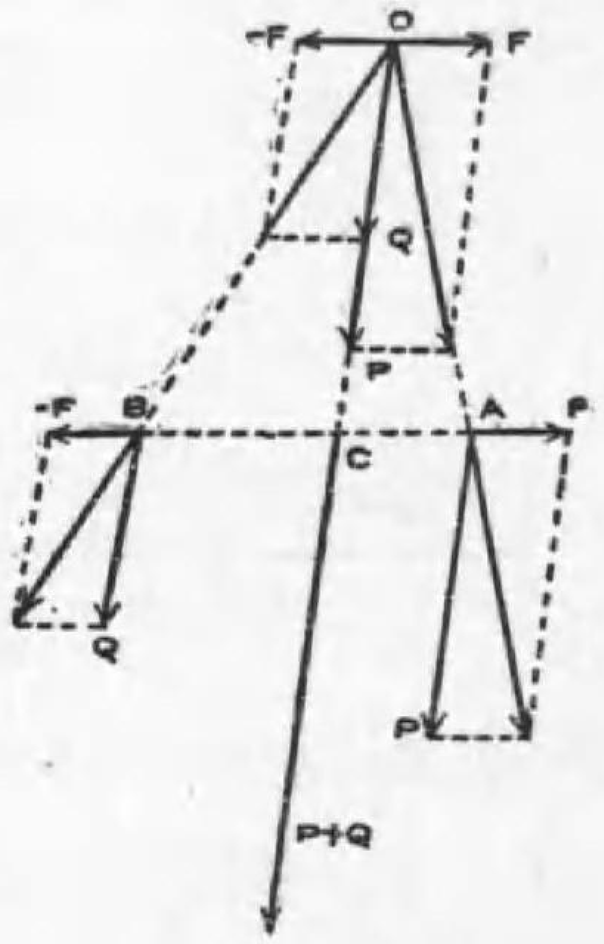
此證明は幾何學的にも出來るが省略する。

## 36. 二つの平行力の合成 Composition of two parallel forces

剛體內の二點A,Bを着力點とする二つの平行力P,Qの合力を求める。

I 同方向の場合

A,Bを連結する直線上に等大、方向反對の二力F,−Fを働かせると、PとF,Qと−Fとの合力が得られる。之をR,Sとする。その作用線の交點Oに之等の力を移し、更にP,F,Q,−Fに分解すれば、Fと−Fは打消して結局求める合力はP+Qとなる。其着力點をCに移せば、C點を着力點とし、P,Qに平行なP+Qが求める力である。C點の位置を求めんに、相似三角形の定理により



第 35 圖

$$\frac{AC}{CO}=\frac{F}{P},\quad \frac{BC}{CO}=\frac{F}{Q}.$$



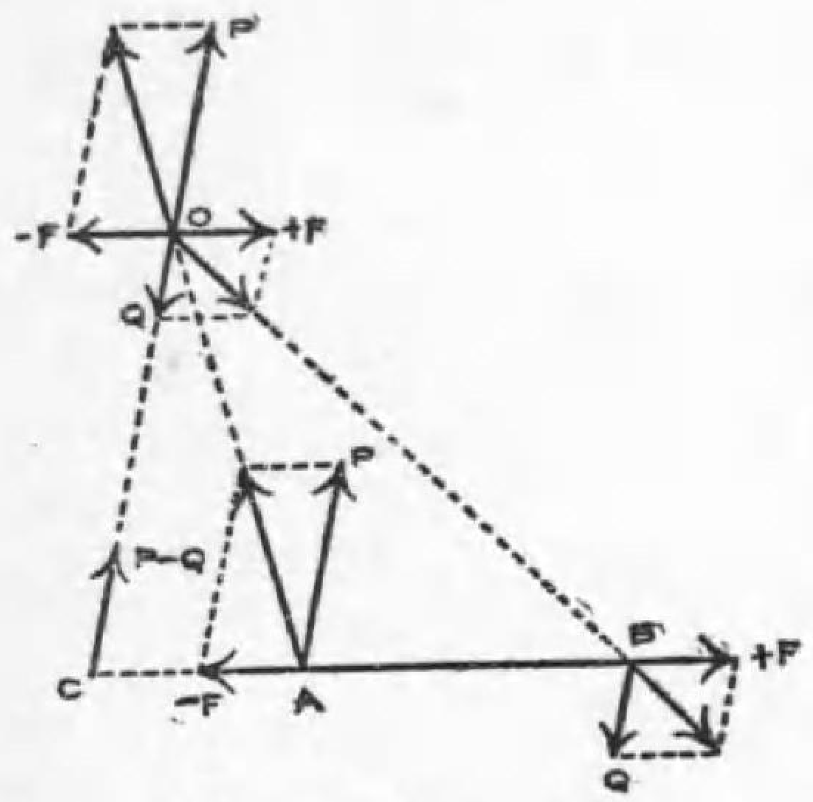
$$\therefore\quad AC.\,P=CO.\,F\ ,\quad BC.\,Q=CO.\,F$$

$$\therefore\quad CA.\,P=CB.\,Q$$

故に剛體の二點に平行且つ同方向に働く二力の合力は、其着力點を結ぶ直線を二力の逆比に內分する點に働き、その大さは二力の和で、二力と同じ方向をとる。

II 逆方向の場合

今P>Qと假定しIの場合と同樣に作圖すると、合力としてAB線上大きい方の力の外側の一定點Cに働くP−Qを得る。C點の位置は前と同樣にして



第 36 圖

$$CA.\,P=CB.\,Q$$

即ち平行で方向反對の二力の合力は、着力點を連結する直線を二力の逆比に外分する點に働き、大さは二力の差に等しく、大きい方の力と同じ方向をとる。

以上の理論から次のことが云へる。即ち二力P,Qが共に如何に方向を變じても、二力の大さ不變で平行なる間は、C點の位置は變らない。依つてC點をP,Q二平行

力の中心と云ふ。同樣に多數の平行力の場合も其合力の着力點を平行力の中心と云ふ。

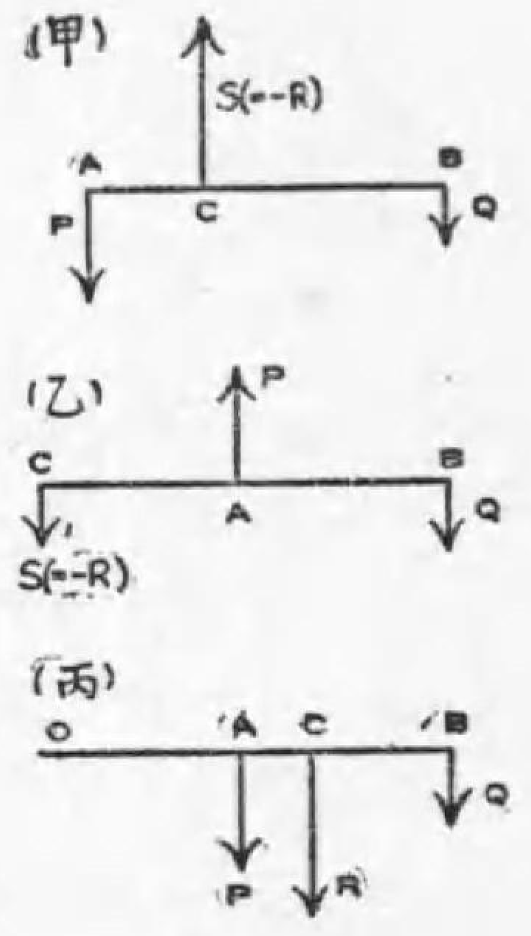
### 37. 平行力のモーメント Moment of two parallel forces

第37圖に示す樣に一つの棒にP,Q二力が働くと、モーメントの中心に於てその合力と大さ等しく方向反對の力を加へると、この三力は平衡する筈である。

前述の通り(甲)(乙)何れの場合でも、

$$P.AC=Q.BC$$

であるから、Pによる左廻りのモーメントとQによる右廻りのモーメントとが釣合ふことを示してゐる。今棒の中の任意の一點Oをとり、合力をRとしてモーメントをとると、((M)をモーメントとする。)



第 37 圖

$$(M)R=R(OA+AC)$$

$$(M)P=P.OA$$

$$(M)Q=Q(OA+AC+CB)$$



故に
$$\begin{aligned}(M)P+(M)Q&=P.OA+Q(OA+AC+CB)\\&=(P+Q)OA+Q.AC+Q.CB\\&=(P+Q)OA+Q.AC+P.AC\\&=(P+Q)(OA+AC)\\&=R.(OA+AC)\end{aligned}$$

即ち $(M)P+(M)Q=(M)R$

一般に任意の點の廻りの各平行力のモーメントの代數和は、合力のモーメントに等しいと云ふことが出來る。

以上は二力に就いて述べたのであるが、これを擴張して多數の平行力に就いて考へても同樣のことが云へる。

即ち合力をRとし、任意の一點Oからの距離をrとすると、

$$R=\Sigma P$$

$$R.r=\Sigma P.r \qquad \text{(證明略す)}$$

これが平衡を保つ爲めには、次の條件が生ずる。

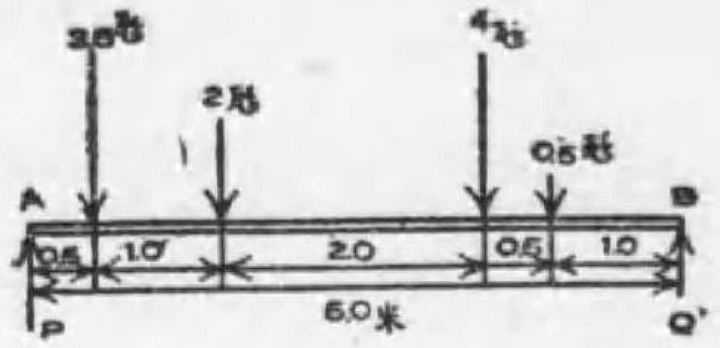
$$\Sigma P=0 \qquad \Sigma P.r=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(43)$$

若し $\Sigma P=0$ $\Sigma P.r\neq 0$ であれば、向きが反對で大さの等しい二力に合成せられる場合で、之は後に讓る。

又 $\Sigma P\neq 0$ $\Sigma P.r=0$ の場合は、O點が合力Rの位置と一致した時である。

以上の平衡條件は次の様な問題に應用せられる。

**例** 長さ5米の棒ABの上に圖に示す様な位置に荷重が掛つてゐる時、支點P, Qの抗力を求む。




**解** 平衡を保つてゐる故

$$P+Q-3.5-2-4-0.5=0 \quad \therefore \quad P+Q=10$$

B點に對するモーメントを求めると、Qのモーメントは零であるから

$$P\times5=(3.5\times4.5)+(2\times3.5)+(4\times1.5)+(0.5\times1)$$

$$\therefore \quad P=5.85$$

同樣にして

$$Q\times5=(0.5\times4)+(4\times3.5)+(2\times1.5)+(3.5\times0.5)$$

$$\therefore \quad Q=4.15$$

$P+Q=5.85+4.15=10$　卽ち $\Sigma P=0$ を滿足する。

## 38. 偶力 Couple

大さ相等しく平行で方向反對の二力を**偶力**と云ふ。偶力を合成すると合力は零となり、着力點は無限大の距離にあることになる。卽ち偶力は有限の位置に於て、合力を求めることが出來ない。換言すれば偶力は一つの力に合成し得ないのである。

第 38 圖

今偶力の平面內任意の點 O をとり、O から二力に垂線 OA, OB を下すと、O が二力の間にあれば



$$P.OA+P.OB=P.AB$$

Oが二力の外にあれば、

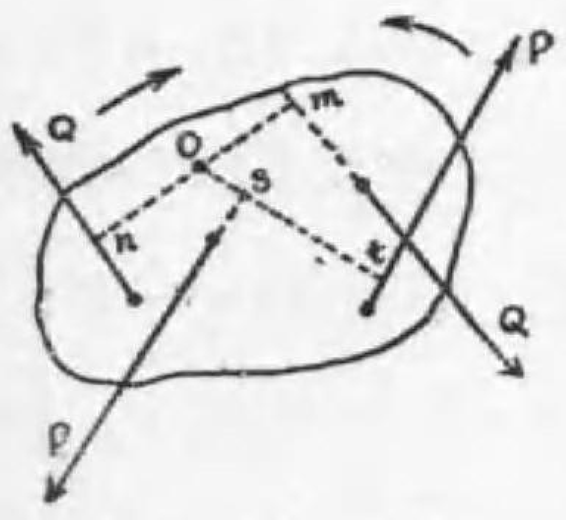
$$P.OB-P.OA=P.AB$$

卽ちOの位置如何に係らず二力のモーメントの和は一定で、一つの力と二力の垂直距離との積に等しい。これを**偶力のモーメント**と云ふ。

この二力の垂直距離卽ちABは偶力の臂(Arm)と云ふ。

偶力も力のモーメントと同じく、物體に働いて之を回轉させる能力を有つてゐる。故に右廻りと左廻りとに依つて正負の區別をつけて置く。普通左廻りを正とすること力のモーメントの場合と同じである。

偶力は合力を求め得ない故、從つて之を平衡せしめるには、單一の力に依ることは出來ない。與へられた偶力と等しくして反對のモーメントを有つた偶力を以てすればよい。



第 39 圖

第39圖に於て

$$P.st=Q.mn$$

とする。卽ち此兩偶力はモーメント等しく方向反對である。今此兩偶力が平衡することを證明

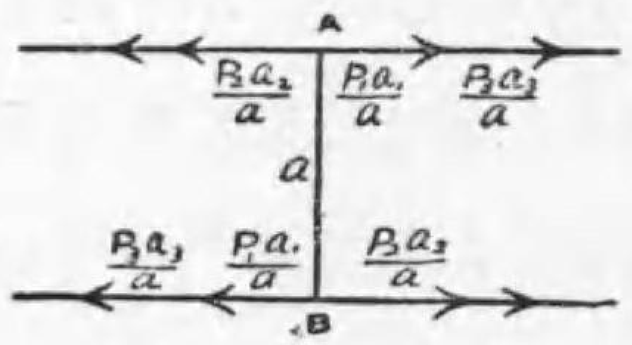
しやう。任意の一點 O をとり、P, Q へ垂線を引き此四力 P, P, Q, Q のモーメントをとつてその代數和を求めると、

$$P.ot-P.os-Q.on-Q.om=P.st-Q.mn=0$$

故にモーメントの等しい方向反對の偶力は平衡することを知る。

### 39. 偶力の合成及び置換

上述の理を一面から考へると、モーメントさへ等しければ一つの偶力は、他の臂の異る偶力に置換することが出來ることを示す。故に一平面内の多數の偶力を合成するには、臂の共通な偶力に變更して、その力の代數和を求めればよい。




第 40 圖

與へられた偶力の力を $P_1$, $P_2$, $P_3$……とし、臂を $a_1$, $a_2$, $a_3$……とすれば、偶力は $P_1a_1$, $P_2a_2$, $P_3a_3$……である。共通臂を a とすれば、力 $P_1$, $P_2$, $P_3$……は $\frac{P_1a_1}{a}$, $\frac{P_2a_2}{a}$, $\frac{P_3a_3}{a}$……と變つて來る。これ等の力は A, B 二點に於て互に反對に働く。此際モーメントの方向の正負を間違へない樣にしなければならぬ。是等の力は力の合成法により、A, B 二點に於て夫々代數和に



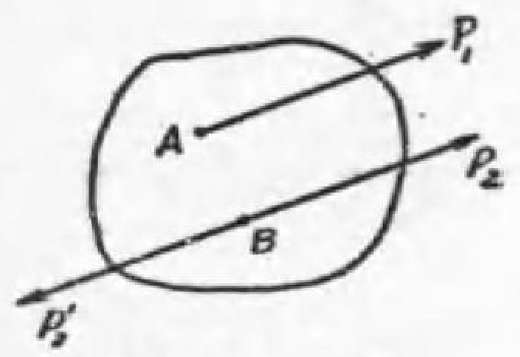
よつて合成される。此場合 A, B 二點に働く合力は、大さ等しく方向反對であるから、一つの偶力である。其モーメントは、

$$\left(\frac{P_1a_1}{a}+\frac{P_2a_2}{a}+\frac{P_3a_3}{a}+\cdots\right)\times a$$

卽ち $P_1a_1+P_2a_2+P_3a_3+\cdots$

であつて、與へられた偶力は之等の偶力のモーメントの代數和に等しいモーメントを有つ一つの偶力に合成されたことを示す。

次に力を偶力と力とで置換することを述べやう。




第 41 圖

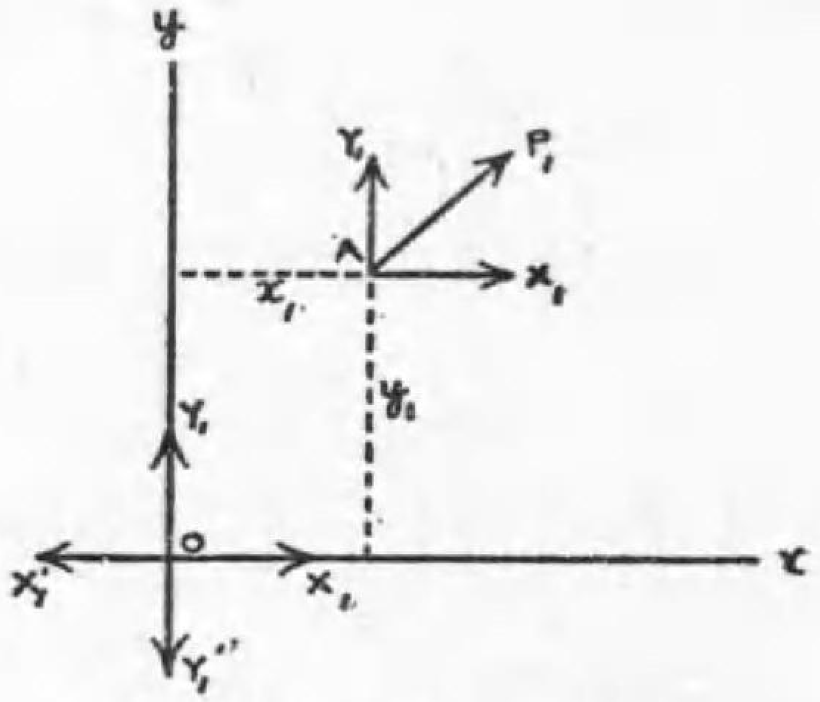
第 41 圖に於て $P_1$ なる力が物體に A 點に働いてゐるとし、$P_2$ 及び $P'_2$ なる大さ $P_1$ に等しく平行で互に反對方向の二力を B 點に加へても何等變化はない。$P_1$ と $P_2$ との距離を d とすると、$P_1$ と $P'_2$ とは偶力をなしそのモーメントは $P_1d$ であり、その他に B 點に $P_2$ なる力が働くことになる。卽ち物體内に働く一力は他の任意の點に働く大さ等しい一平行力と、一つの偶力とに置換することが出來る。

逆に一つの力と偶力とが物體に作用してゐるとき、之を一つの力に置換することは、前述の逆に相當するもの

で、與へられた偶力の力を與へられた力と等しく平行に變更し、(本節の始めに述べた) その偶力の力の一つを與へられた力の着力點に反對方向に移せば、全然前の逆となり只一つの力に變換せられる。

## 40.　一平面内の任意の力系

$P_1, P_2, P_3\cdots$が一平面内任意の點$A_1, A_2, A_3\cdots$に働く力系とする。$A_1, A_2, A_3\cdots$の坐標を $(x_1y_1)(x_2y_2)(x_3y_3)\cdots$ とし、$P_1, P_2, P_3\cdots$ の水平及垂直分力を $X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3\cdots$とする。今簡單の爲めに $A_1$のみに就いて述べると、前節置換の理



第　42　圖

により、$X_1, Y_1$ はO點に働く $X_1, Y_1$と偶力$-X_1.y_1, Y_1.x_1$とに置換し得る。(玆に負號を付したのは右廻りであるからである) この偶力を合成すれば、そのモーメントは $Y_1x_1-X_1y_1$ なることは前述の通りである。之を要するに $A_1$ に働く $P_1$ は、O に働く $X_1, Y_1$ とモーメントが $Y_1x_1-X_1y_1$ なる偶力との三つに等しいことになる。$A_2, A_3\cdots$等に働く $P_2, P_3\cdots$等に就いても同樣である。故に



O に働く力は

$$X_1+X_2+X_3+\cdots\cdots=\Sigma X \quad \text{及び}$$

$$Y_1+Y_2+Y_3+\cdots\cdots=\Sigma Y$$

此合力をRとして、その$x$軸となす角度を$\alpha$とすれば

$$R=\sqrt{(\Sigma X)^2+(\Sigma Y)^2}, \quad \tan\alpha=\frac{\Sigma Y}{\Sigma X} \cdots\cdots(44)$$

合成偶力のモーメントGは

$$(Y_1x_1-X_1y_1)+(Y_2x_2-X_2y_2)+(Y_3x_3-X_3y_3)+\cdots$$

$$=\Sigma(Yx-Xy) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(45)$$

今是等の力系の平衡を考へるに、Rなる一つの力とモーメント$\Sigma(Yx-Xy)$なる偶力とは平衡し得ないから、與へられた力が平衡するためには、兩者が單獨に零でなければならぬ。

卽ち　　$R=0$　　偶力の和　$G=0$

換言すれば　$\Sigma X=0$, $\Sigma Y=0$, $\Sigma(Yx-Xy)=0\cdots(46)$

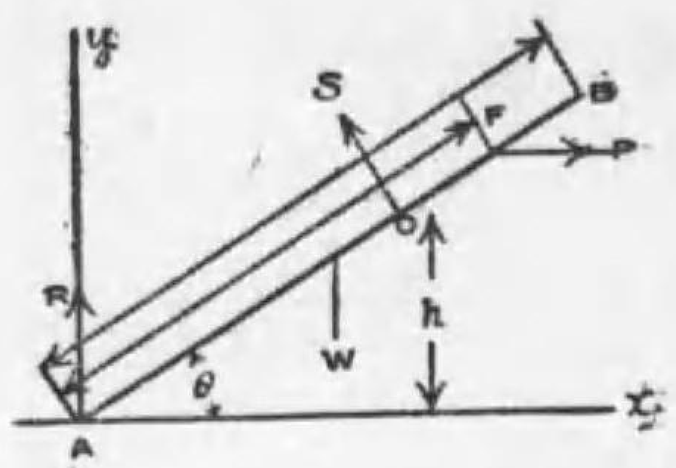
之が一平面にある力系の平衡條件である。

此逆も亦眞である。

### 例　　題

(1) 長さ $2l$ の棒を圖に示す樣に水平面に一端を置き、高さhの釘に支へしめ、棒の中央に W なる錘を吊したとする。F點に幾何の水平力を與へれば、棒は $\theta$ の角度を保つて辷らないで居るか。但し各部は平

滑で摩擦抵抗がないものとする。




解　此棒に働く諸力は、圖に示す樣に W, P, S 及び R である。平衡を保つ爲めには、(46)式が成立しなければならない。

$$\Sigma X = P - S\sin\theta = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\Sigma Y = R - W + S\cos\theta = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$G = S.\frac{h}{\sin\theta} - W.l\cos\theta - P.f\sin\theta = 0 \qquad \text{(c)}$$

(a)より　$P = S\sin\theta$

(c)に代入して

$$S = \frac{W.l\cos\theta}{\dfrac{h}{\sin\theta} - f\sin^2\theta}$$

(b)に代入して

$$R = W\left(1 - \frac{l\cos^2\theta}{\dfrac{h}{\sin\theta} - f\sin^2\theta}\right)$$

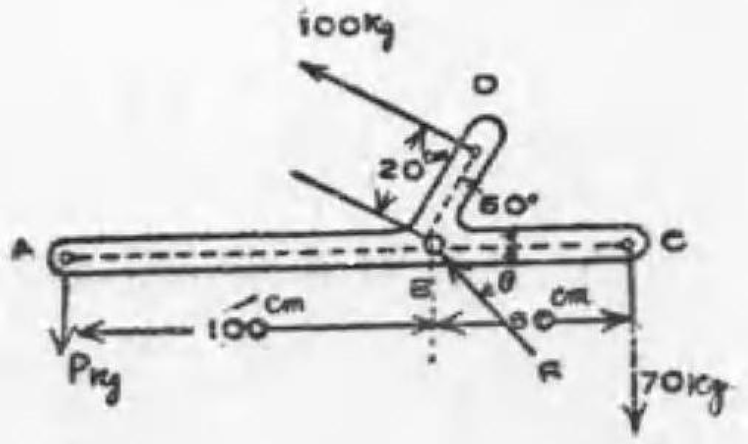
(a)に代入して求むる P の價を得る。卽ち

$$P = \frac{l\cos\theta\sin\theta}{\dfrac{h}{\sin\theta} - f\sin^2\theta}$$

## 問　　題

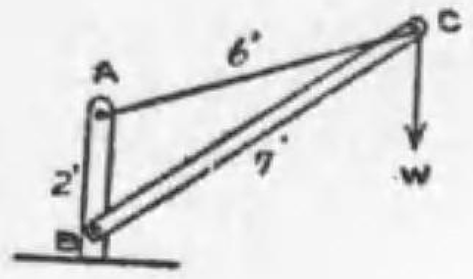
(1)　7, 2, 8, 4, 6 瓩の同向平行力が等距離に一直線上にある五點に順次に働いてゐるときの平行力の中心を求む。　答　8瓩の着力點

(2)　圖に示す樣な二叉の棒 ABCD を AC を水平にして支點 B で支へ、C 點に 70 瓩をかけ、D 點を BD に直角に 100 瓩の力で引張るとき、A, B 二點に働く力を求む。





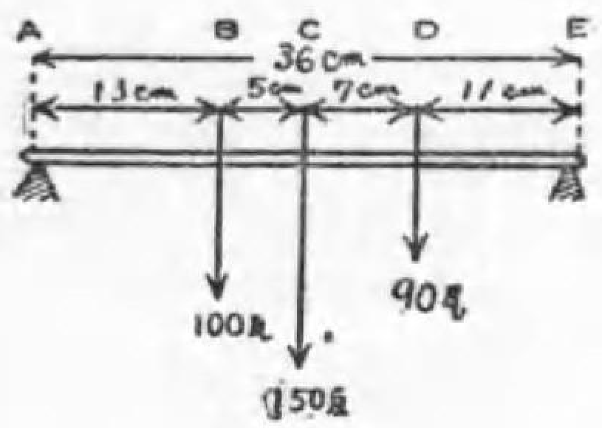

答　P=22瓩, R=81.45瓩, θ=20°




(3)　AB は直立せる固定柱にして、BC は臂、AC は結線である。其長さを夫々 2', 7', 6' とし、C 端に 1 噸の荷重をかけたとすれば、AC, BC に加はる力は夫々幾何であるか。　答　AC の張力 3 噸, CB の壓力 3.5噸

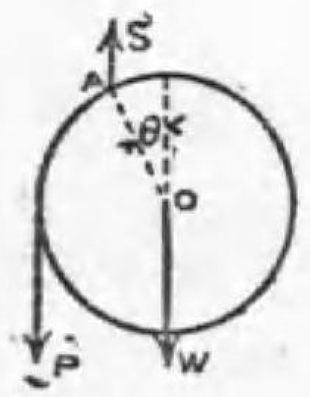
(4)　152 封度の重量を二人の肩で荷ふとし、重量の位置を兩人の肩から 1:3 の比に分つ點に持ち來れば、兩人の負擔量は幾何になるか。

答　114 封度, 38 封度



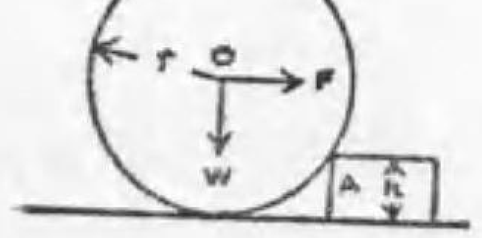

(5)　圖の如く兩端を支へた棒に一端から 13糎, 5糎, 7糎 の位置に 100瓦, 150瓦, 90瓦 の重量を吊したとすれば、兩端の支持力は夫々幾何。但し兩端間の距離は 36 糎とする。

答　A 166.4瓦　E 173.6瓦



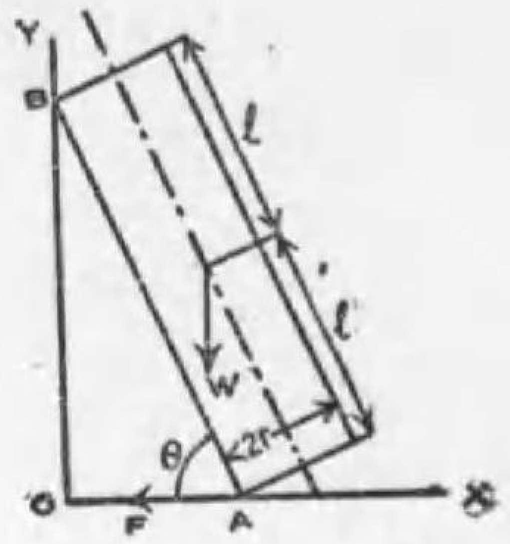

(6)　圓板の周圍の一點 A を紐で吊し、中心 O に W, A から圓周に沿ふ紐に P なる重量を懸けたとき、A 點は WO 垂線から或る角度丈け廻り、圖に示す位置に平衡したと云ふ。此角度を求む。

答　$\sin\theta = \dfrac{P}{P+W}$



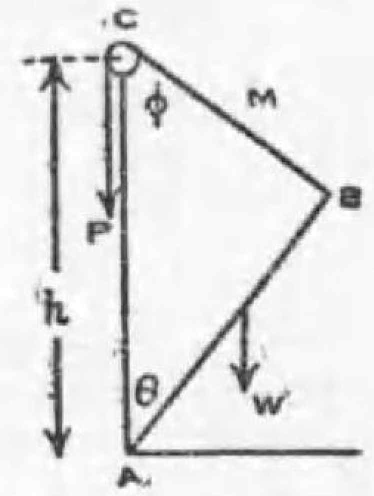

(7)　重量 W の車輪 (重量は中心 O にあると假定する) が、高さ h の障害物を越える爲めに要する水平力を求む。但し車輪の半徑は r とする。　答　$\dfrac{W\sqrt{2rh-h^2}}{r-h}$

（8） 水平面 Ox に垂直なる壁 Oy があつて、長さ $2l$ 半徑 r の圓壔が凭れてゐる。水平面及び垂直面に摩擦抵抗がないものとすれば、A 點に幾何の水平力を働かせばよいか。但し重量は圓壔の中央にあるものとする。又水平力が不用になる角度を求めよ。




$$F=\frac{W}{2}\left(\cos\theta-\frac{r}{l}\right),\quad \tan\theta=\frac{l}{r}$$

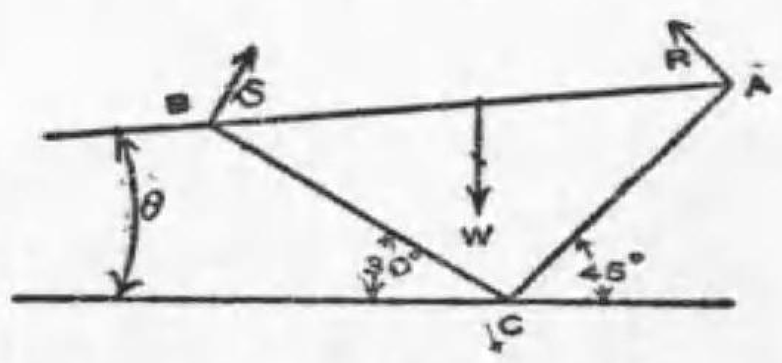
（9） 重さ W（中央にあるものとする。）長さ $2l$ の棒 AB の下端は水平面上に蝶番で支へあり、上端は紐で小滑車を越えて重錘 P に結ぶ。この棒の平衡する位置及び A 端の抗力を求む。




答 $BC=2h\dfrac{W}{P}$　$F=\sqrt{W^2+P^2-WP\cos\phi}$

F の方向は BC の中點 M と A を結ぶ AM の方向。

（10） 水平に對して傾角夫々 45°, 30° なる平滑複斜面 ACB 上に AB なる棒（その重量は中央に懸つてゐるとする）を支へるとき、平衡の位置及び兩端に働く抗力 R, S を見出せ。

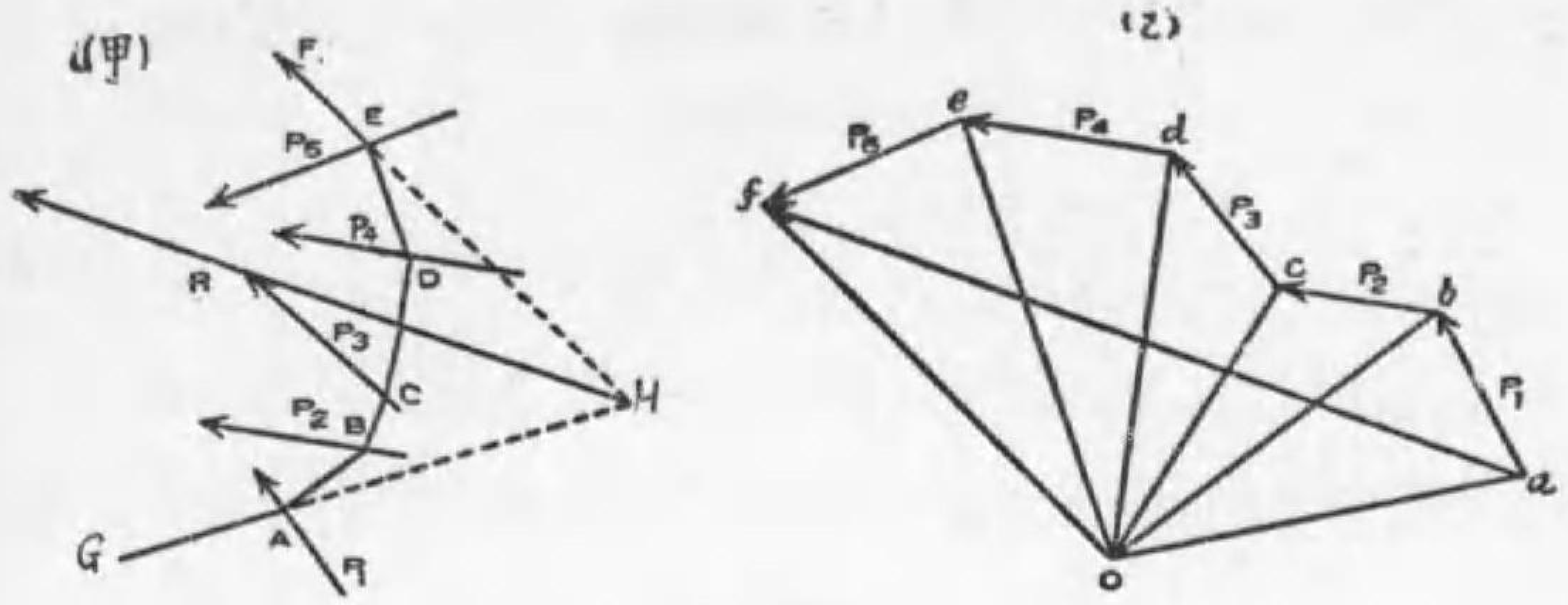



答 $R=0.52W$, $S=0.37W$, $\theta=20°6'$

# 第三章　圖式靜力學

## 41. 力の多角形及索多角形の定義 Definitions of force polygon and funicular polygon






第 43 圖

$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ を一平面に働く五力とする。此平面内に任意の a 點をとり、ab を $P_1$ に等しく平行に、bc を $P_2$ に等しく平行に、同様に cd を $P_3$ に、de を $P_4$ に、ef を $P_5$ に等しく平行にひく。次に任意の點 o をとり、oa, ob, oc, od, oe, of を結べば、abcdef なる多角形の各邊は各與へられた力の大さ及び方向を示すもので、之を力の多角形と云ふことは既に述べた通りである。

次に G なる任意の點を此平面上にとり、G を通し oa に平行に GA をひき、GA と力 $P_1$ の作用線との交點を A とする。次に A 點を通し ob に平行に AB を引き、AB と力 $P_2$ の作用線との交點を B とする。同様にして BC, CD, DE, EF 等の直線を引く。茲に得た GABCD…なる多角形を與へられた力の**索多角形** (Funicular polygon) と云ひ、o 點を索多角形の**極** (Pole) と云ひ、oa, ob, oc…を

**極徑** (Polar radii)、GA, AB, BC 等を**ストリング** (String) と云ふ。

以上のことから力の索多角形は與へられた力の作用線中に頂點を有し、數多の極徑に平行な邊を有つ多角形と云ふことが出來る。從つて與へられた力の索多角形は澤山出來る。何となれば o 點の擇び方は吾人の自由であり又 o を決定したとするも G の選び方で異るからである。

若し與へられた諸力が平行なときは、乙圖の力の多角形の各邊は一直線上にあることになる。此場合には索多角形の極からこの直線までの垂直距離を、此索多角形の**極距離** (Polar distance) と云ふ。

注意(1) 索多角形の起點 G の位置に就いて云ふと、此作圖が可能なる爲めには、GA が力 $P_1$ の作用線と交り、又 AB は力 $P_2$ の作用線と交り、順次斯樣な關係が必要である。故に o 點が力の多角形の任意の邊の延長線中にない限りは常に可能である。故に o 點の選び方は自由であるから、常に之を力の多角形の邊の延長線上にない樣にとるを要す。然し若し o を ab 線上に取つたとすると、起點 G を任意の點にとれば、此作圖は失敗である。何となれば力 $P_1$ は oa に平行なるからである。然し此場合 G を力 $P_1$ の作用線中にとれば、此作圖は成功する。此時 GA は力 $P_1$ の作用線と一致し、且つ ob は oa と一致する。故に索多角形の邊 AB は GB と一致し、共に $P_1$ の作用線と一致する。卽ち B 點は $P_1$ の作用線と $P_2$ の作用線との交點になる。此場合其次の BC は力 $P_1P_2$ の交點から引けばよい。以後は前同樣である。



注意(2) 全部の與へられた力を考へる代りに只其內の引續きの數個の力を考へるとき、例へば前例の五力の代りに $P_2$, $P_3$, $P_4$ の三力が與へられたとき、ABCDE は此三力に屬する索多角形となるので、此多角形の兩端の邊は AB, DE で、其極徑は ob, oe となる故、次の結果が得られる。

索多角形の端の邊に屬する一般の性質は此の索多角形の任意の二邊にも適用せられる。何となれば任意の二邊は其間に含まれた力に關しての索多角形の端の邊と考へることが出來るからである。

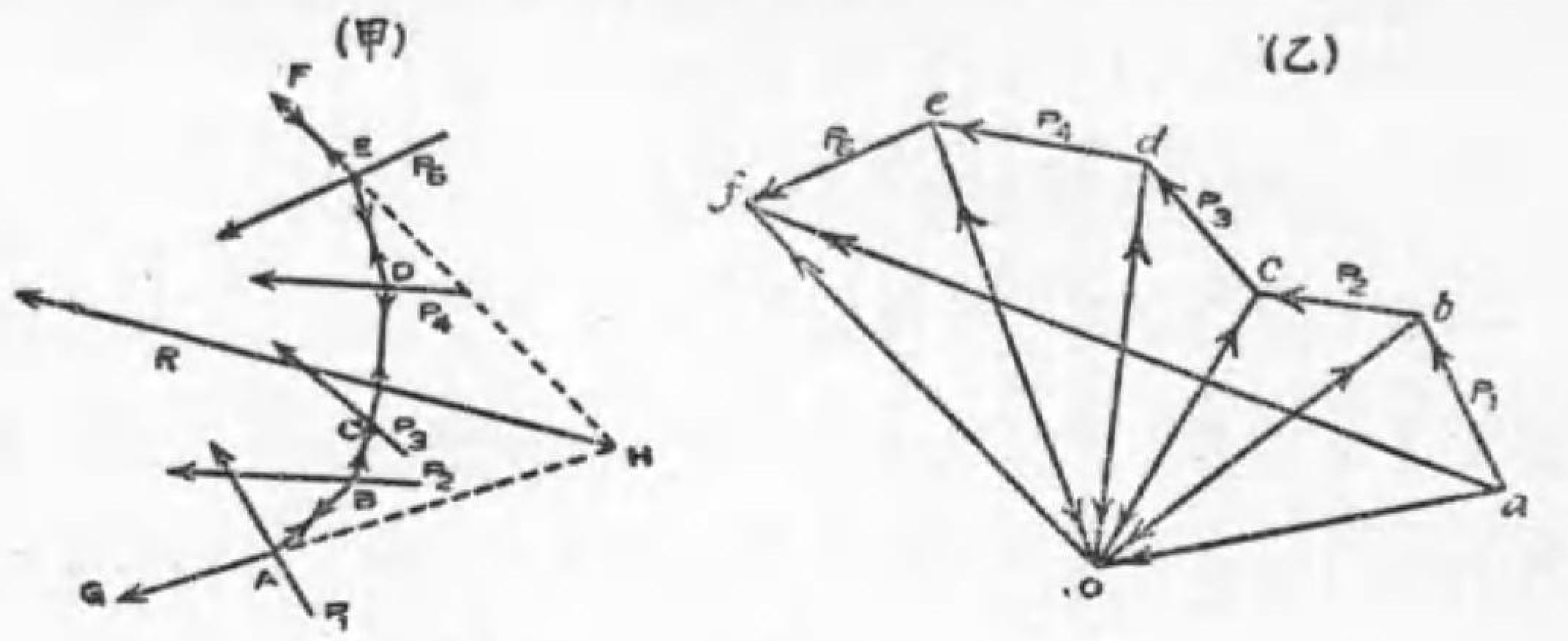
## 42. 基本的豫備定理 Fundamental lemma

一定平面內に働く數多の力は、常に之を二つの力に引直すことが出來る。其二力の作用線は與へられた力の索多角形の兩端の邊にあつて、其大さは兩端の極徑によつて表すことが出來、其向きは力の多角形の原點(極ではない)から之等の極徑に沿ふて力の多角形の他端に至る方向にある。例へば前の五力の場合に適用すると、此索多角形の兩端にある邊 GA, EF 線中に作用線を有つ二力に引直すことが出來、且つ二力の大さは oa, of なる極徑で表はされ、其方向は $\overline{ao}$, $\overline{of}$ の方向にあるのである。之を證明するために與へられた力に對して次の如き二方法を施す。

第一、與へられた力の着力點を夫々索多角形の頂點に持ち來す。

第二、與へられた力を其頂點に於て索多角形の二邊の方向に分解すること。

例へば $P_1$ の作用點を A に移し、其力を GA, AB 二方向の分力に分解する。其二分力は ao, ob によつて表はされる。同樣に $P_2$ の着力點を B に移し、AB, BC の方




第　44　圖

向に分つときは、分力は bo, oc で表はし得る。順次同樣にして五力を索多角形の各邊の方向に於ける分力に分つと、索多角形の中間の邊に沿ふ分力は相殺される。例へば BC に沿ふて働く二力の內一つは B に働き其大さ方向は $\overline{oc}$ で、他は C に働き $\overline{co}$ であるから互に打消すことになる。故に與へられた五力は AG, EF を作用線として、$\overline{ao}$, $\overline{of}$ に依つて大さ方向を表はす二力に引直すことが出來るのである。

**注意**　前圖にある樣に若し索多角形の兩端の邊 AG, EF が平行でなければ、其二線を延長して會點 H を通して af に平行な線を引けば、五力はこの線を作用線とし、$\overline{af}$ に依つて大さ方向を示す單一の力に引直すことが出來る。



## 43. 一平面內に働く諸力の平衡の圖式條件

**定理**　一平面內に於て剛體に働く諸力が平衡にある爲に必要にして充分な條件は

第一、此等の力の多角形が閉ぢること。

第二、索多角形の任意の一つが閉ぢること。

前述のことにより、與へられた五力が AG, EF を作用線とし $\overline{ao}$, $\overline{of}$ によつて大さ方向を表はし得る二力に引直すことが出來ることを知つてゐる。この二力が平衡にあるための必要にして充分な條件は、之等二力が同一作用線を有し、且つ等しく相反することである。故に

第一條件として、索多角形の二極端邊 AG, EF が一致しなければならぬ。卽ち之等の二線が同時に A 及び E を通過しなければならぬ、卽ち索多角形が閉ぢることが必要である。

第二條件として、AE, EF に平行な二極徑 ao, of が同じ幾何學的方向を有つてゐなければならぬ。卽ち之等二極徑で表はされる二力が等しくて相反することを要する

故、a, f が一致し卽ち力の多角形が閉ぢなければならぬ。

卽ち之等二條件は必要なるのみならず充分である。何となれば索多角形が閉ぢれば二つの合力は同じ作用線を有し、一方に於て力の多角形が閉ぢれば、之等二つの合力は等しくて相反することになるからである。

力の多角形が閉ぢることは $\Sigma X=0$, $\Sigma Y=0$ に相當し、索多角形が閉ぢることは $\Sigma(Y.x-X.y)=0$ に相當する。

若し與へられた力が全部一點に作用するならば、平衡條件としては、力の多角形が閉ぢることである。何となれば此場合には偶力がないからである。

### 44. 多角形的結桁の應用

今緊張せられた糸が釣合ふためには兩方向に引き伸す樣な方向に大さ等しく方向反對の力が作用する。斯樣な力を**張力**と云ひ、屈撓しない棒が釣合ふためには張力でもよいが棒の兩端から壓縮する樣な大さ等しく方向反對の力が作用してもよい。斯樣な力を**推力**と云ふ。張力又は推力の樣に大さ等しく方向反對の一對の力を**應力** (Stress) と云ふ。

屋根又は橋梁等に用ひられる**骨組** (Truss) は一般に三角形か對角線の入つた四角形から成つてゐる。斯樣な骨組

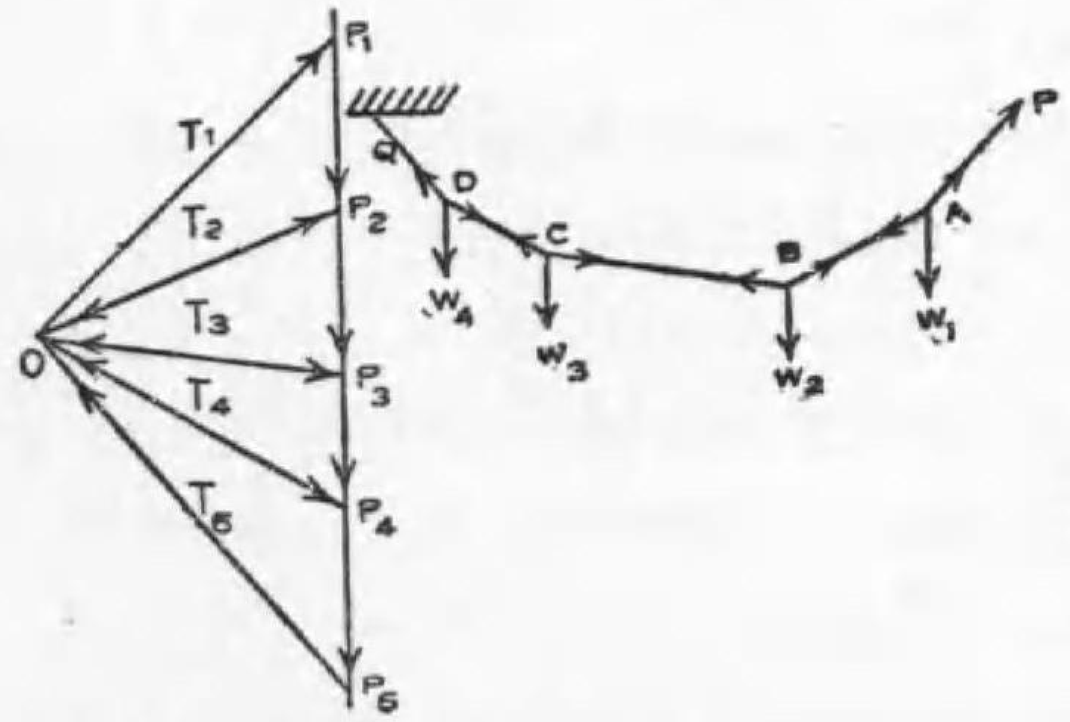


の任意の棒は、其方向に於ける二つの等しくて相反する力卽ち應力に依つて働かれてゐる。但し棒の重さの樣な直接に外部から棒に働く力は、棒の兩端の接手に働く二分力に分ち考へるのである。之等の應力が張力である場合卽ちその棒に沿ふて働く力が棒を引伸さうとする場合には、之を**繫木** (Tie) と云ひ、反對に推力の場合には**支桿** (Strut) と云ふ。

斯樣な各部に起る應力を圖式的に求めることは、一般に簡單に出來るので、此方法は工業家に廣く採用されてゐる。

## 例　題

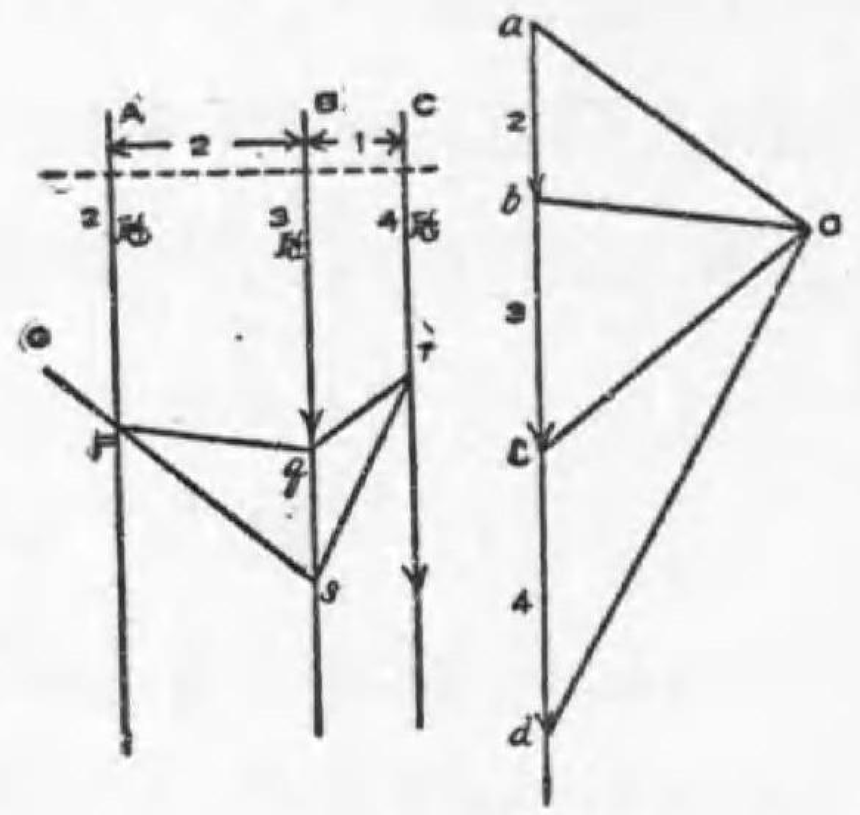
（1） ABCD 等の質點が絲で連結され、其終りの點 D は Q 點に連結せられ、且つ始の質點 A に連結した絲を AP の方向に或る力で引いたとする。而して PA, AB 等の絲が水平に對して或る角度をなす如くすると、此等の質點の重さを幾何にすればよいか。




解　任意の一點 O をとり、AP, AB…に平行に直線 $OP_1$, $OP_2$…を引

き、$OP_1$ で $T_1$ なる AP の絲の張力を表はすとすれば、$P_1$ から垂線をひきそれと $OP_2$, $OP_3$… との交點を $P_2$, $P_3$… とすれば、$OP_2$, $OP_3$…は AB, BC…の絲の張力を示す。今 A を考へると $T_1$ で上方に $T_2$ で B の方へ、$W_1$ で下方に引かれる。卽ち A は三力で平衡してゐることになるから、$OP_1P_2$ は力の三角形を表はす。故に $P_1P_2$ は $W_1$ を表はす。卽ち尺度で $P_1P_2$, $P_2P_3$ 等の長さから $W_1$, $W_2$, $W_3$…の値を定めることが出來る。

（2） 2, 3, 4 瓩の重量が水平距離 2 米 1 米をおいて垂直に働く時、その合成力の大さ及び位置を求む。

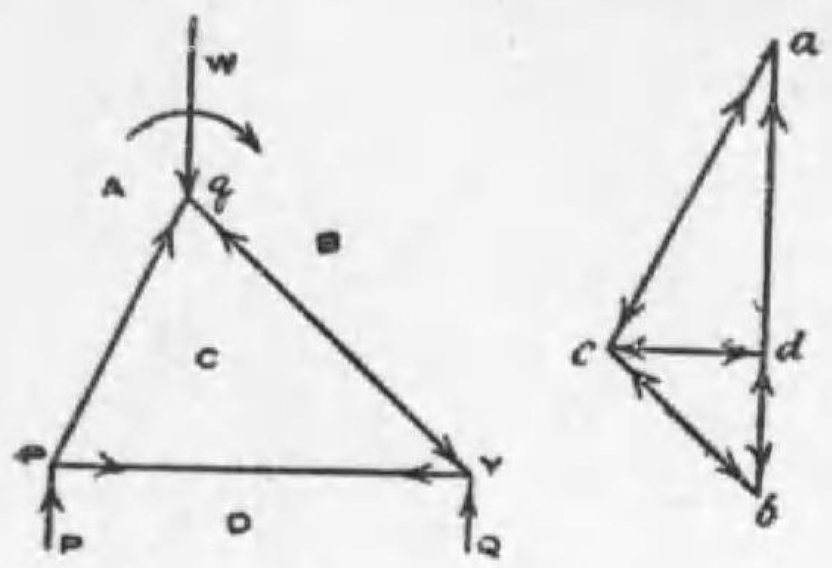



解　力の多角形は abcd である。o 點から oa, ob, oc, od を引く。索多角形を作るために任意の一點 G をとり、G から oa に平行に Gp を引く。2 瓩の線との交點を p とし、ob に平行に pq を引き、同様にして qr を引く。od に平行に rs を引き Gp の延長線との交點を s とすれば、s を通して垂直線をひけば卽ち合力の作用線である。合力の大さは、ad 卽ち 2+3+4=9 瓩であることは勿論である。此場合には、合力の作用線と 3 瓩の作用線が一致することは、力のモーメントを檢べて見れば分る。

（3） 三角形の枠 pqr の q 頂點に W なる力が加はるとき、各部に働く應力を求む。且つ應力の種類を吟味せよ。

解　此場合には p, q, r 各點に働く力は各々一點に働くのであるから





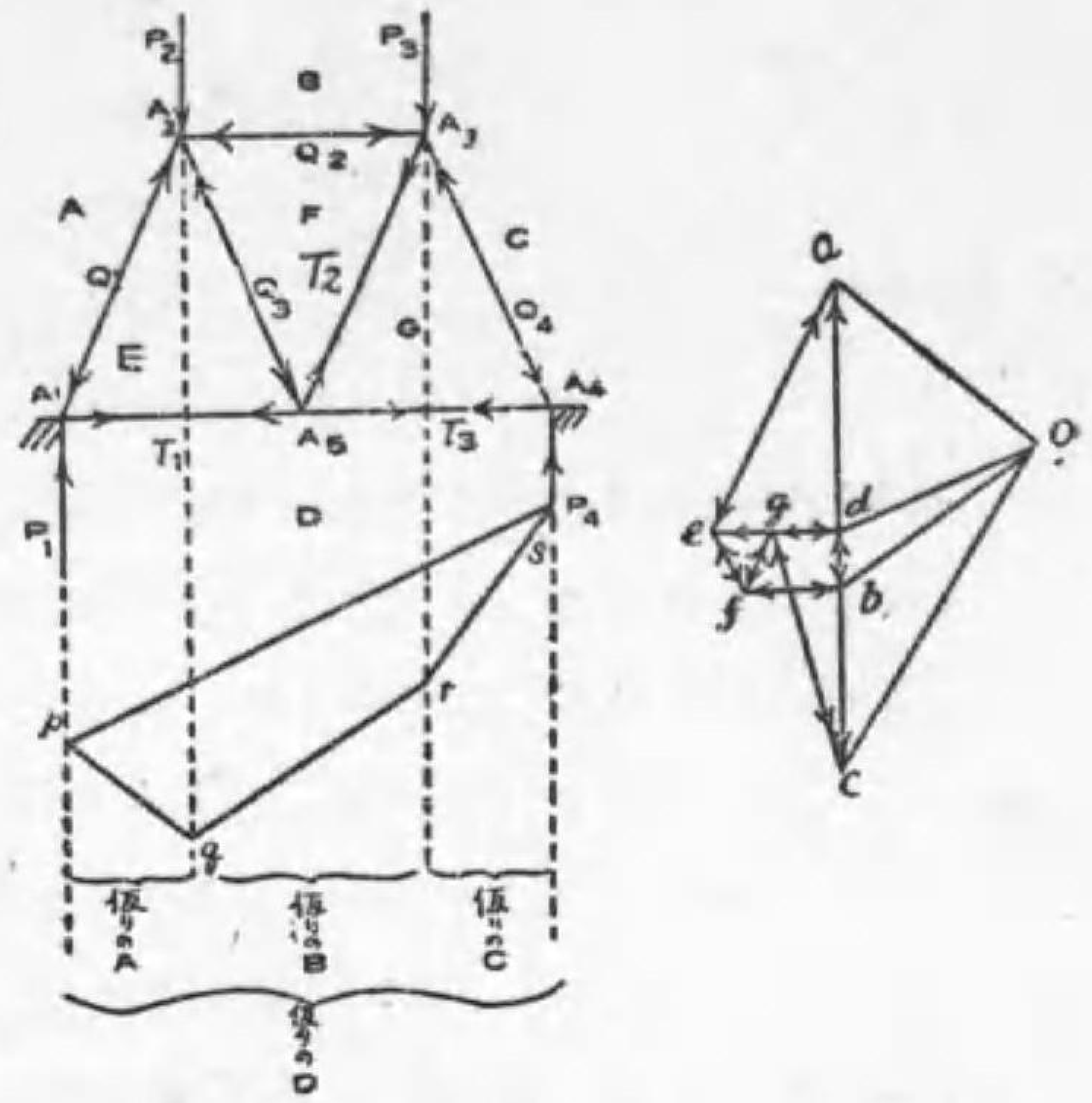

前述のことにより力の多角形が閉ぢればよい。今便宜上各力を限界とする空間を考へ圖の如く A, B, C, D とし、各點に就いて力の平衡を考へるに當り、矢印の様に右廻りに順次に力をとることゝする。先づ W は既知であるから q 點の平衡から考へる。空間 A 及び B の間にある力 W を、$\overline{ab}$ で大さ及び方向を表はすことゝする。次は約束により B, C 空間の境にある qr 方向の力を bc ととり、次にこの力の三角形が閉づる様に、C, A の間の pq 方向の力を ca とされば abca が q 點に關する力の多角形で、從つて qr, pq の方向の力の大さが分る。次に P 點に就いて考へると、pq の方向の力が分つてゐるから、第一に A, C の間の ac をとり、ついで C, D 間の水平力 cd、D, A 間の da をとれば、acda で力の三角形が閉づる。之によつて P=da も分つて來た。終りに r 點に就いても同様に C, B 間の cb、B, D 間の ba、D, C 間の dc により cbdc なる力の三角形を閉づる。以上のことにより pq, qr, rp 三方向の力の大さ及び P, Q 二力の大さが、力の多角形 adbca の各邊の寸度によつて分る譯である。

次に各部の應力の種類は、pqr 各邊及 P, Q につけた矢印で分る。卽ち pq 及び qr は ←→ 卽ち推力で rp は →← 張力である。P, Q 二力は上に向つて垂直に働くことを知る。

（4） ワーレン、ガーダー。(Warren girder) 圖に示す如く $A_2$, $A_3$ に $P_1$, $P_2$ なる既知の荷重がかゝつてゐる場合、此二點には各々四力が働いてゐて然かも只一力のみ分つてゐるのであるから、力の多角形を確

定することが出來ぬ。故に三力の働いてゐる $A_1$ 又は $A_4$ の $P_1$ 又は $P_4$ を求めて、$A_1$ 又は $A_4$ 點から解決してゆかなければならぬ。

先づ力の多角形を作る。卽ち A, B 間の $P_2$ に等しく ab をとり、BC 間の $P_3$ に等しく bc をとり、oa, ob, oc をひき、oa に平行に假りの A 空間に pq を引く、同樣に ob, oc に平行に假りの B



假りの C に qr, rs を夫々引く。sp を結び之に平行に od を引けば、$\overline{cd}$ は C, D 間の $P_4$ を表はし、$\overline{da}$ は $P_1$ を表はす。卽ち $P_1$, $P_4$ が分つたから

$A_1$……daed

$A_2$……abfea

$A_3$……bcgfb

$A_4$……cdgc

$A_5$……defgd

$A_1A_5$, $A_5A_4$, $A_3A_5$ の三つの棒は張力を受け、其の外は推力を受ける。

以上の多角形によつて、$P_1$, $P_4$ 及び $Q_1$ 乃至 $Q_4$, $T_1$ 乃至 $T_3$ の力を圖上から求めることが出來る。



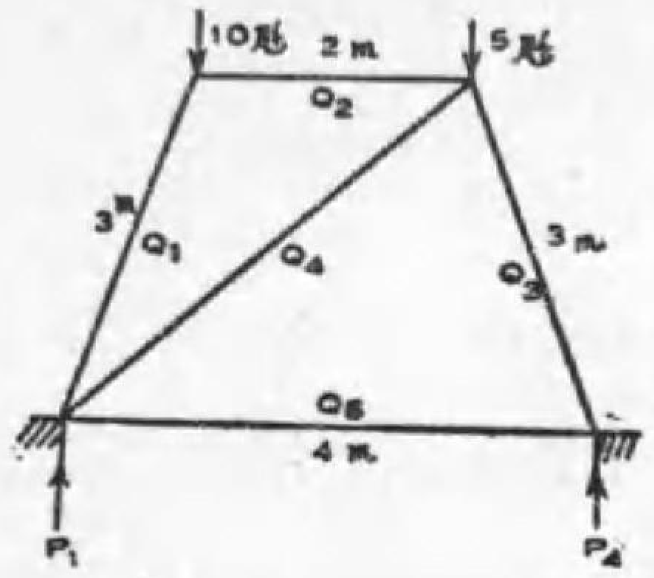
## 問　　題

（1） 例題（4）に於てガーダーを形成してゐる各三角形が正三角形であるとし、$P_2$, $P_3$ が夫々 2瓲、1瓲であるとすれば各部に働く力は幾何。

答　$P_1$=1.75瓲　$P_4$=1.25瓲

$Q_1$=2.02瓲　$Q_2$=0.87瓲　$Q_3$=0.26瓲　$Q_4$=1.44瓲

$T_1$=1.01瓲　$T_2$=0.29瓲　$T_3$=0.72瓲



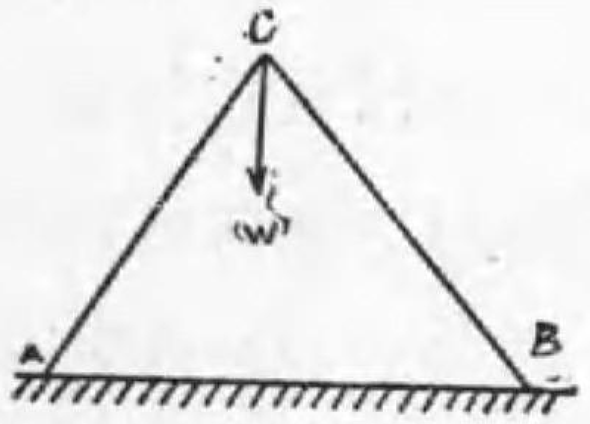
（2） 圖に示す樣な結桁の各部應力及び支點の反作用を求む。

答　$P_1$=8.75瓲　$P_4$=6.25瓲

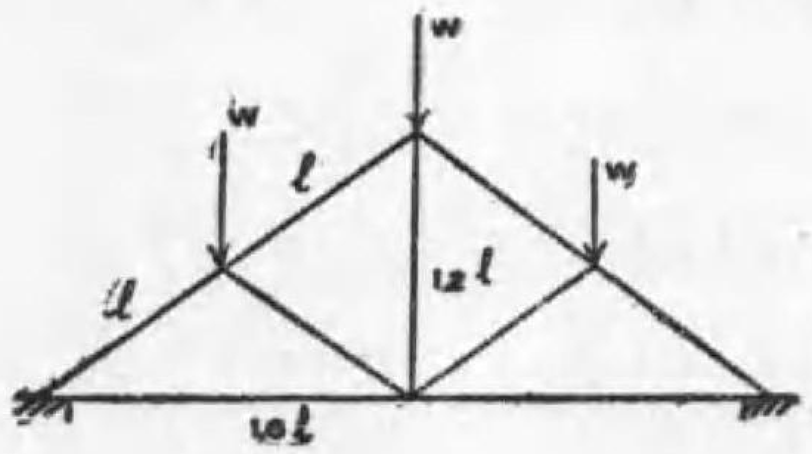
$Q_1$=10.60瓲　$Q_2$=3.54瓲

$Q_3$=6.62瓲　$Q_4$=1.82瓲

$Q_5$=2.20瓲



（3） 圖に示す樣に AC, BC 二棒が蝶番で C で結ばれ、水平面上に立つてゐるとき、棒の應力と AB 二點の反作用を求む。但し荷重は C 點にあり、棒の重さはないものとする。

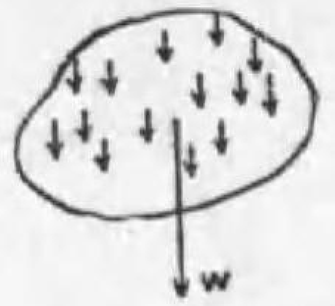


（4） 圖に示す屋根の結桁の應力を求める作圖をせよ。

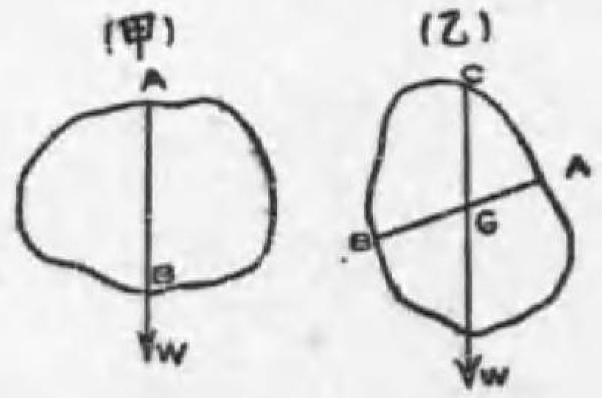
# 第四章 重 心

## 45. 重心 Centre of gravity

物體は總て地球の中心に向つて重力作用を受けてゐるが、この物體は無數の質點の集りであつて、各質點は夫々地球の中心に向つて重力作用を受けてゐる。その作用線は總て平行と見做すことが出來る故、之等平行力の合力が物體の重量であり、此合力は重力が變らない限りは物體を如何に傾けても變化しない。且つ之等平行力の中心は第 36 節に述べた如く變化しない。故に物體の重量は平行力の中心に集中して此物體に作用すると考へられる。此點を重心と云ふ。第 46 圖甲に於て、Wを此物體の各質點に働く重力の合力とし、AB を其作用線とする。次に(乙)の如く傾けたとき重力の合力の作用線が CD となつたとすれば、平行力の中心が不變であることから、AB, CD の交點 G が平行力の中心卽ち重心でなければならぬ。此事から不規則な




第 45 圖



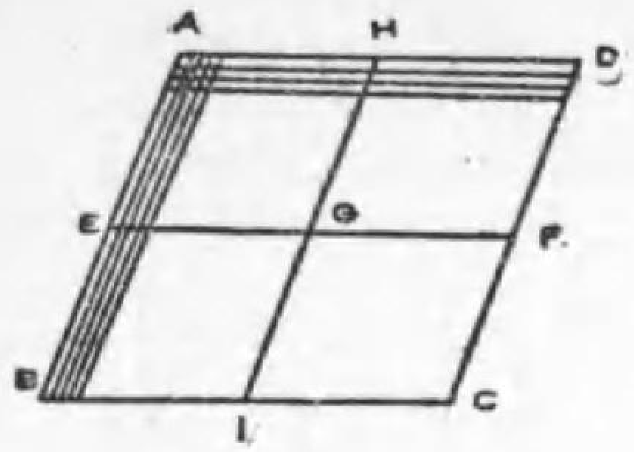

第 46 圖



平板の重心は任意の二點で糸で吊して簡單に求めることが出來る。

## 46. 簡單な物體の重心の求め方

物體が簡單な場合には、多く觀察に依つて重心を求めることが出來る。




第 47 圖

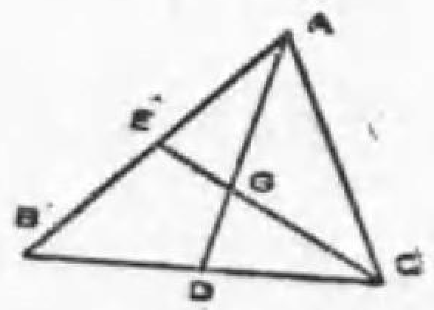
(a)棒又は針金。長さの中心。

(b)矩形板。對角線の交點。

(c)圓板。中心。

(d)平行四邊形板。第 47 圖に示す如く邊 AB に平行に細條に分けると、各片の重心はその中央にあり、依つて全體の重心は中心線 EF 線上にある。同樣に AD に平行に細條片に分けると、HI 線上にあることになるから結局交點Gが求める重心と云ふことになる。

(e)三角形板。(d)の場合と同樣に AB, BC に平行な細條片に分けて見ると、AB, BC の中點を各頂點と結ぶ AD, CE の交點Gが重心である。




第 48 圖

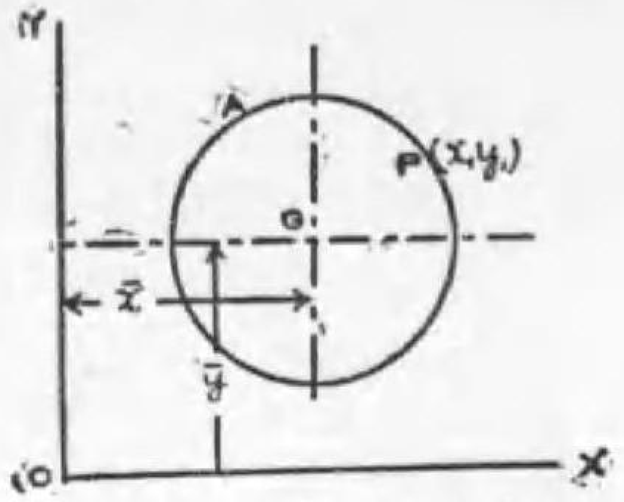
(f)正圓柱、正多角柱。中心線の中央。

(g)球。中心。

## 47. 一般物體の重心位置の求め方

重心を求めるには平行力の中心を求めればよいことは、前述の重心の意義によつて明かである。

第 49 圖に於て A を紙面に平行な薄板とする。同平面上に XY 軸をとり、此物體の任意の質點 P の坐標を $(x_1y_1)$ とし、同樣に他の質點に就いても $(x_2y_2)$, $(x_3y_3)\cdots$ を其坐標とする。又之等質點の重量を $w_1, w_2, w_3\cdots$ とすれば、重心にかゝる重量即ち物體の全重量 W は、



第 49 圖

$$W=w_1+w_2+w_3+\cdots\cdots=\Sigma w$$

次にモーメントを考へて見る。今重力が紙面に直角に働いてゐるとし、重心 G の坐標を $(\bar{x},\bar{y})$ とする。先づ OY 軸の周りのモーメントは、$W\bar{x}$ で各質點に就いて考へると $w_1x_1$, $w_2x_2$, $w_3x_3\cdots$ である。各質點のモーメントの總和は全重量のモーメントに等しい故、

$$W\bar{x}=w_1x_1+w_2x_2+w_3x_3+\cdots=\Sigma wx$$

$$\therefore\quad \bar{x}=\frac{\Sigma wx}{W}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(47)$$

同樣にして OX 軸のモーメントを考へれば

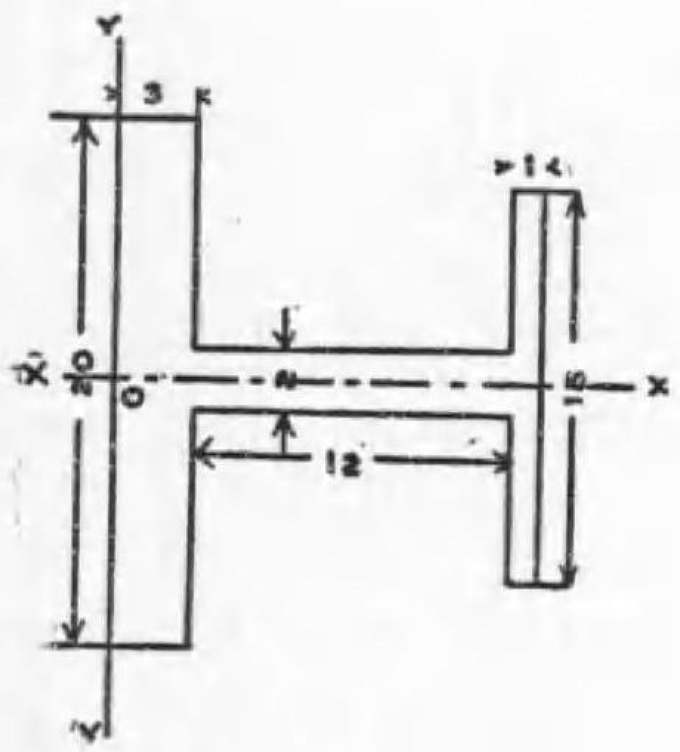


$$W\bar{y}=w_1y_1+w_2y_2+w_3y_3+\cdots=\Sigma wy$$

$$\therefore\quad \bar{y}=\frac{\Sigma wy}{W}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(48)$$

實際には質點の代りに物體を重心位置の容易に見出せる形狀に分け、其各々を質點と同樣に取扱ふことによつて簡單に其物體の重心を求めることが出來る。

### 例　題




(1) 圖に示す樣な形狀の厚さ一樣な板の重心を求めよ。

解 圖に依つて分る樣に XX 軸を上下端の中央にとれば、XX 軸に對しては對稱であるから、重心は XX 線上にあることは明かである。從つて YY 軸に對するモーメント丈けを考へて $\bar{x}$ を求めればよい。

$$W.\bar{x}=\{(1\times15)w+(2\times12)w+(3\times20)w\}\bar{x}$$
$$=99W.\bar{x}$$

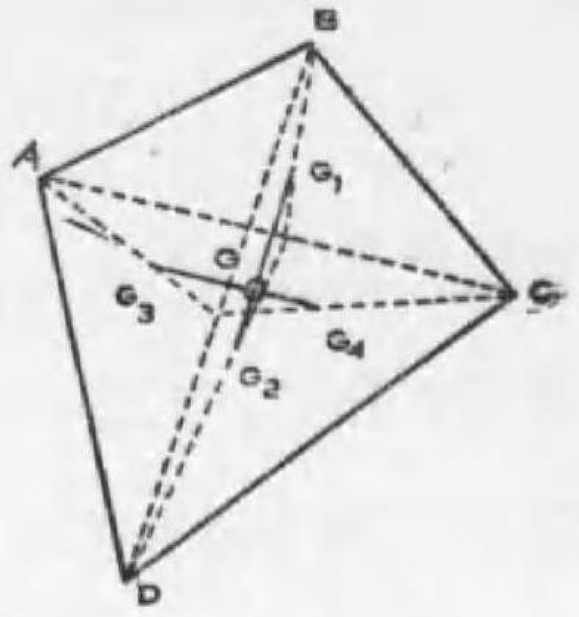
茲に w は單位體積の重量。

$$\Sigma w.x=(1\times15)w\times15.5+(2\times12)w\times9+(3\times20)w\times1.5$$
$$=538.5w$$

$$\therefore\quad \bar{x}=\frac{538.5w}{99.w}=5.44$$

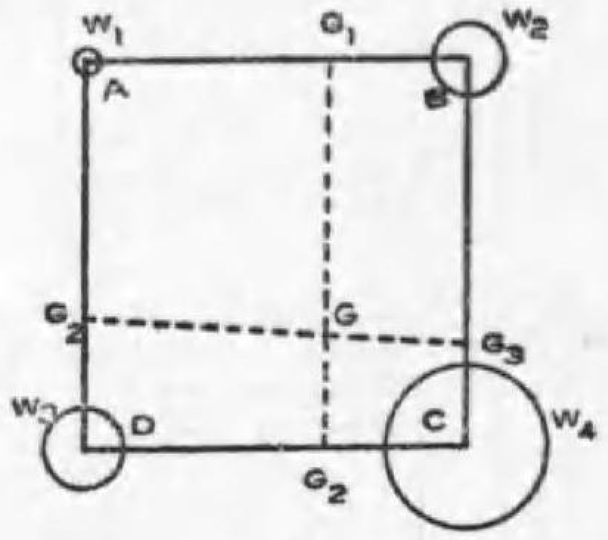
(2) 任意の四邊形板の重心を求めよ。

解 四邊形を ABCD とする。△ABC, △ADC の二つに分ければ、




各の重心は前述の如くして求められる。之を $G_1G_2$ とする。同樣に $\triangle ABD$, $\triangle BCD$ の重心を $G_3$, $G_4$ とすれば、求める重心は $G_1G_2$ と $G_3G_4$ との交點 G である。何となれば四邊形 ABCD の重心は $G_1G_2$ 線上にあるべく、又 $G_3G_4$ 線上にあるべきであるから其交點が重心となるのである。

（3） 圖に示す樣に正方形の各頂點に $w_1w_2w_3w_4$ を配置したときの重心を求む。




解　$w_1$, $w_2$ 丈けを考へると

$$\frac{AG_1}{BG_1}=\frac{w_2}{w_1}$$

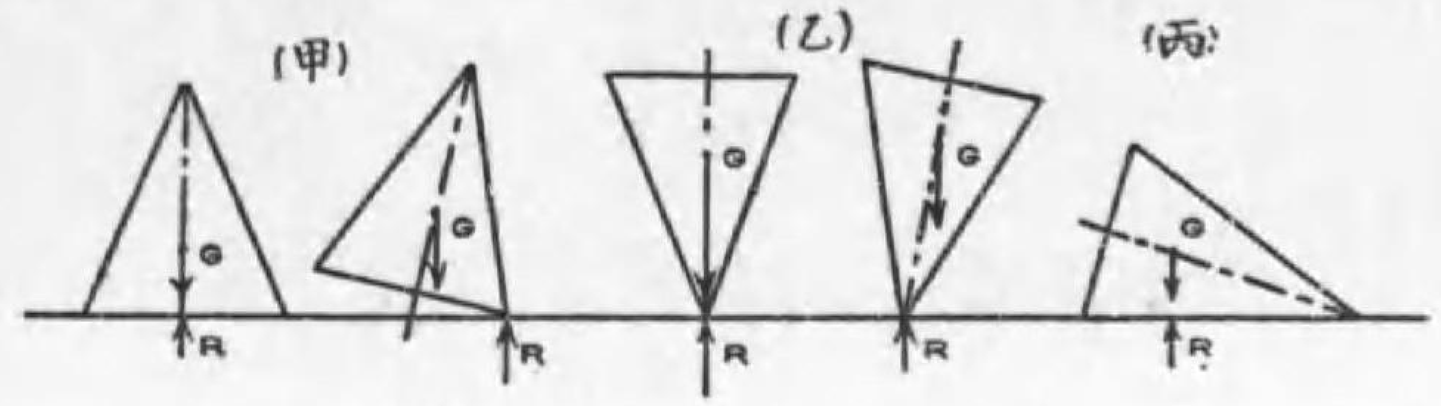
なる $G_1$ が重心である。同樣に $w_3$, $w_4$ に就いては $G_2$ が重心となる。故に $G_1$ に $w_1w_2$ の合力が働き、$G_2$ に $w_3$, $w_4$ の合力が働くと同樣である。故に全體の重心は $G_1G_2$ 線上にあるべきである。同樣に $w_1$, $w_3$ と $w_2$, $w_4$ とを考へると、$G_2$ $G_3$ 線上にあるべきである。即ち此の二直線の交點 G が全體の重心である。

## 48. 物體の平衡狀態

物體が力を受けて靜止してゐる即ち平衡してゐて、此狀態から僅か動かしても元の平衡の狀態に戻らうとする時は、物體は**安定** (Stable) の平衡狀態にあると云ひ、元の狀態に戻り得ない場合には**不安定** (Unstable) の平衡狀態にあると云ひ、如何なる狀態に置いても靜止し得るときは**中立** (Neutral) の平衡狀態にあると云ふ。



今圓錐體を例にとつて見るに、第 50 圖（甲）の樣に底



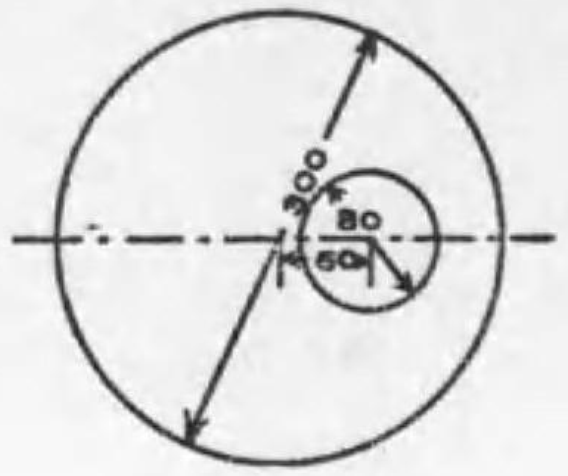

第　50　圖

面で立つてゐる場合には、重力 W と平面の反作用 R とが働いて元の狀態に歸らうとする。即ち安定平衡狀態である。次に（乙）の樣に頂點で立つとすれば僅かな外力を與へても元の位置には戻らない。故に不安定な平衡である。最後に（丙）の樣な場合には常に何れの點に於ても靜止し得る故、中立の平衡狀態にあることを知る。

安定と不安定との限界を考へて見るに、甲圖右の如く段々傾けてゆくと重力の作用線は元の作用線となす角を次第に大きくし、R なる反作用線に近づき、遂に W と R との作用線が一致するに至る。此點が安定不安定の限界で W が R の外に出ると忽ち不安定になるのである。即ち一般に重心を通る重力の作用線が底面內を通過する間は其物體は倒れないが、底面外に出ると不安定になる

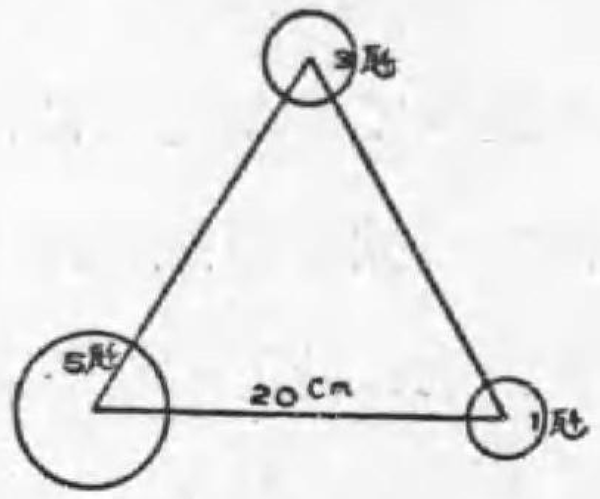
のである。以上の事を物體の三平衡狀態と云ふ。

## 問　　題

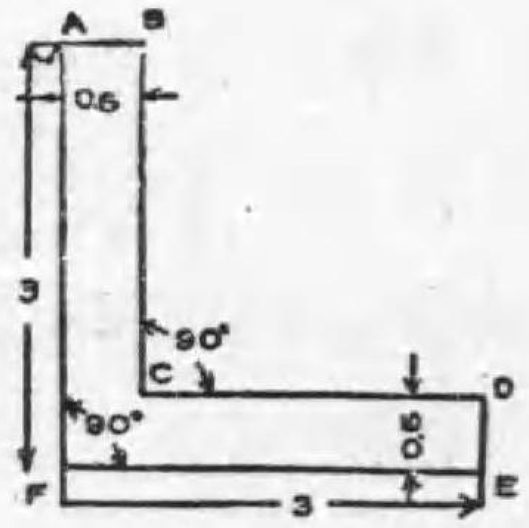



（1） 左圖の如く直徑300粍の圓板があつて、その中心から 50 粍の距離を中心とした直徑 80 粍の孔があるとき、重心の位置を求む。

答　中心より4粍



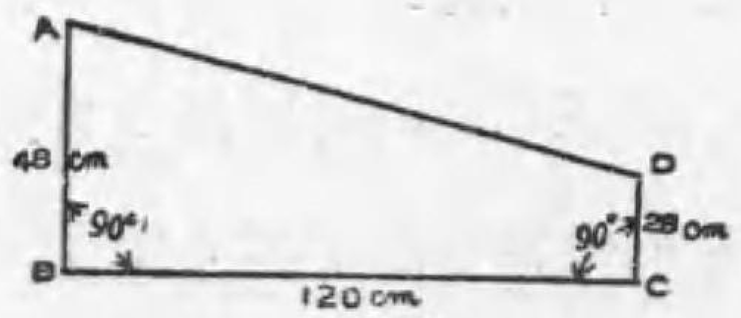

（2） 正三角形板があり、その三頂點に 5, 3, 1 瓩の重量を載せたときの重心位置を求む。但し一邊の長さは20糎とし、板の重さは無視する。




（3） 圖の様なL型の薄板の重心を求む。

答　AF, EF より各 0.932

（4） 下圖の様な板の重心を求む。




答　ABから54.7糎、BCから19.4糎



# 第三編

# 動　力　學

## 第一章　仕事及びエネルギー

### 49. 仕事 Work

力が物體に働いて其作用した點即ち着力點が力の方向に動くときは、力又は力を動かす者が仕事をしたと云ふ。而して仕事の大さは、力の大さと力の方向に於ける變位との積で測る。例へば手を以て荷を揚げるときは手の力が仕事をなし、物體が落下するときは引力が仕事をするのである。

今Fなる力が物體に働いて、着力點Pを力の方向にS丈け動かしたとすると、仕事Wは

$$W=F.S \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(49)$$

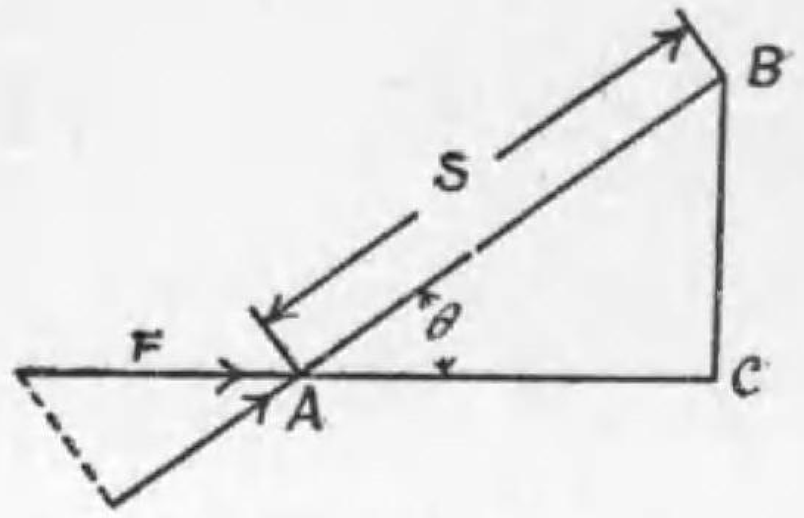
從つて仕事のヂメンションは

$$[W]=[F.L]=[ML^2T^{-2}]$$

力及び變位は共に方向及び大さを有するベクトルであるが、その積は方向を有たず大さのみで表はされるから

仕事はスケラー量である。

今物體に多くの力が働く場合其内の一力を考へると、其力の方向に物體が動かず他の方向に動くことがある。例へば第51圖に示す如くFとSとは$\theta$の角度をなしてゐる。此場合のFのなす仕事は、



第 51 圖

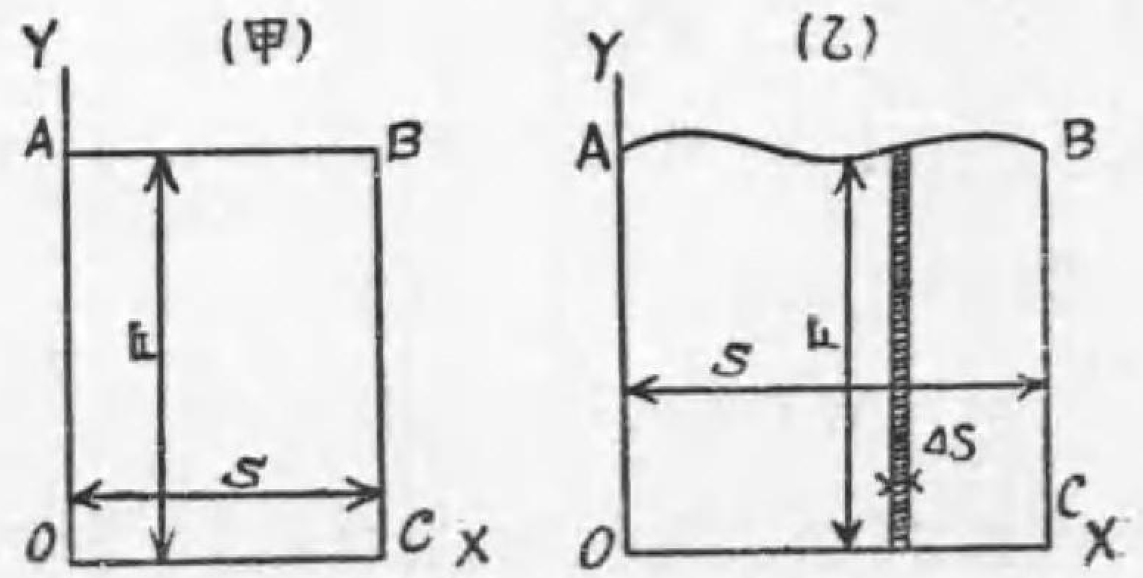
$$W=F\times AC=F.AB.\cos\theta$$
$$=F.S.\cos\theta$$

又FのAB方向の分力をとつて仕事を計算してもよい。

$$W=F\cos\theta\times AB=F.S.\cos\theta$$

即ち何れにしても同一結果を得る。

仕事は前述の如く力と距離との積で表はされる故、直交坐標軸の横軸に距離縦軸に力をとると、力が變位Sの間一定なれば(甲)の如



第 52 圖



く矩形ABCOの面積が仕事量を示す。然し變位Sの間に力の大さが變化する場合には、或る小變位$\Delta s$を考へると、其間は力が一定であると見做されるから、其間の仕事は$F.\Delta s$で表はし得る。故にS全體に就いては、この小變位の間の仕事を寄せ合したもので

$$W=\Sigma F\Delta s=\int F ds$$

即ち矢張りABCOの面積で表はすことが出來る。

**50. 仕事の單位** Units of work

C.G.S絕對單位。一ダインの力が物體を一糎丈け動かす仕事を單位とし、之を**エルグ**(Erg)といふ。即ち

$$\text{エルグ}=\text{ダイン}\times\text{糎}=\text{瓦、糎}^2\text{秒}^{-2}$$

この單位は餘りに小さい故、時に**ジュール**(Joule)なる單位を用ふ。

$$1\ \text{ジュール}=10^7\ \text{エルグ}$$

F.P.S 絕對單位。一パウンダルの力が物體を一呎丈け動かす仕事を單位とし、之を**フート、パウンダル**と云ふ。即ち

$$\text{フート、パウンダル}=\text{パウンダル}\times\text{呎}=\text{封度、呎}^2\text{、秒}^{-2}$$

M.K.S 重力單位。一瓩重の力が物體に働いて一米丈け動かす仕事を單位とし、**瓩米**(Kilogram-metre)と云ふ。

F. P. S 重力單位。一封度重の力が物體に働いて一呎丈け動かす仕事を單位とし、**呎封度**(Foot pound) と云ふ。

**51.　工率**　Power

仕事量は仕事をした時間の長短の如何に係らず力と變位の積が等しければ常に等しいが、例へば1秒間に1瓩を1米動かす場合と、1分間に1瓩を1米動かす場合とはその能力に相違がある。故に時間に對して仕事をなす割合を決める必要が生ずる。此割合を工率と云ひ、單位時間になすべき仕事を以て測る。

今 F なる力が物體に働いて、それを t 時間に s なる距離丈け動かしたとすると、此時間內の平均工率 P は

$$P=\frac{W}{t}=F\frac{s}{t}$$

$$\therefore\quad P=F.v \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(50)$$

玆に v は平均速度を示す。自由に動き得る物體に力が働けば、漸次物體は速度を增すから、P は其時間內の平均工率となる。若し空氣摩擦等の抵抗があつて常速運動となれば、上式は眞の工率となるのである。

工率のヂメンションは〔$ML^2T^{-3}$〕である。

**52.　工率の單位**　Units of power

工率の單位は單位時間に單位の仕事をする工率である。



C.G.S 絕對單位。毎秒1エルグの仕事をする工率で、即ち瓦、糎、$^2$秒$^{-3}$

F. P. S 絕對單位。毎秒1呎、パウンダルの仕事をする工率、即ち封度、呎、$^2$秒$^{-3}$

M. K. S 重力單位。毎秒、1瓩、米の仕事をする工率、即ち瓩、米、$^2$秒$^{-1}$

F. P. S 重力單位。毎秒、1呎、封度の仕事をする工率、即ち封度、呎、$^2$秒$^{-1}$

工業上では**馬力**なる工率を用ふ。之に二種あり、一つは**佛式馬力**(Force de cheval)他は**英式馬力** (Horse power)である。即ち前者は米法後者は英法の馬力で、其値は夫々毎秒 75 瓩米の仕事をする工率及び毎秒 550 呎封度即ち毎分 33000 呎封度の仕事をする工率である。玆には主として米法を用ふるから、單に馬力と云へば前者を意味することゝする。

此外**ワツト**(Watt) なる工率が主として電氣方面に用ひられる。ワツトは毎秒1ジュール即ち毎秒 $10^7$ エルグの工率である。1000ワツトは之を**キロワツト**と云ふ。

之等諸單位の關係を示すと次の通りである。

1佛馬力＝0.986 英馬力＝735ワット＝735ジュール/秒

1英馬力＝1.014 佛馬力＝746 ワット＝746 ジュール/秒

1キロワット＝1.340佛馬力＝1.359英馬力

＝1000 ジュール/秒

### 例　題

（1） 汽車が一定の工率で動くとき、抵抗がなければ次第に速さを増して止ることがない譯であるが、實際には空氣抵抗とか摩擦抵抗により或る速さに達すれば夫れ以上の速さになり得ない。卽ち抵抗が牽引力に等しくなる迄は加速度を得るが、等しくなれば常速度で運行することになる。工率と最高速度との關係を檢べて見やう。

今牽引力を F, 抵抗を R とすれば、加速度を得る迄は

$$ma = F - R$$

玆に m は汽車の質量、a は加速度である。工率 P は Fv であるから上式に v を乘すれば、

$$P = F.v = ma.v + Rv$$

R が F に等しくなれば a は零となり、終速度を得る。

$$P = RV$$

### 53. エネルギー Energy

仕事をなし得る能を**エネルギー**と云ふ。故に物體が力を働かして仕事をなし得る狀態にあるときは、此物體はエネルギーを有つてゐると云ふ。エネルギーの量は物體が其狀態を失ふ迄になし得る仕事量で測る故、單位及びヂメンションは仕事と同一である。



力學上取扱ふエネルギーには二種類ある。一つは運動のエネルギーで、他は位置のエネルギーである。

此外に熱、光、電氣、磁氣等のエネルギーがあるが力學の範圍外であるから玆には述べない。

### 54. 運動のエネルギー Kinetic energy

運動してゐる物體、例へば飛行せる彈丸は重力に抗して上昇し、又障壁の抵抗に打勝つて之を貫通する等の仕事をなし得る故エネルギーを有つてゐる。之等運動に基くエネルギーを**運動のエネルギー**と云ひ、その物體が靜止する迄になし得る仕事量で之を測る。

今質量 m 速度 v なる運動體のエネルギーを求める。此物體が距離 s を運動して靜止したとすると、(14)式から

$$0 = v^2 - 2as$$
$$= v^2 - 2\frac{F}{m}s$$

從つて物體が靜止する迄の仕事卽ち運動のエネルギーは

$$F.s = \frac{1}{2}mv^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(51)$$

### 55. 位置のエネルギー Potential energy

物體は或る位置にあるが爲に仕事をなし得る場合がある。例へば高處にある物體は若し糸で下にある他の小物

體と結び滑車にかければ、之を引き揚げる仕事をなすことが出來る。斯の如く位置に關するエネルギーを**位置のエネルギー**と云ふ。

地上hの高さにある質量mなる物體を、前述の如く同質量の物體に結びつけて引揚げると重力に抗してmghなる仕事をすることが出來る譯である。又之を地面に自由降下させると、(14)式から

$$v^2=2gh$$

で與へられる速度を得る。從つて地面につく瞬間には、

$$\frac{1}{2}mv^2=mgh$$

なる運動のエネルギーを得る。依つて此物體の有つて居た位置のエネルギーは、mgh なることが分る。卽ち

$$\text{位置のエネルギー}=mgh \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(52)$$

卽ちこの物體は落下することによつて位置のエネルギーを失ひ、其代り運動のエネルギーを得たのである。今途中 s の距離迄落下したときを考へると、

$$v^2=2gs$$

故に運動のエネルギーは

$$\frac{1}{2}mv^2=2gs$$

この時の位置のエネルギーは mg(h－s)で、兩者の和は



$$\frac{1}{2}mv^2+mg(h-s)=mgs+mg(h-s)=mgh$$

で一定である。上方に投げ上げた時は同樣にして

$$\frac{1}{2}mv^2+mgs=\frac{1}{2}mv_0^2 \qquad (v_0\text{ は初速度})$$

卽ち任意の時刻に於けるエネルギーの和は最初の運動のエネルギーに等しく一定なることが分る。

### 56. エネルギー不滅律 Principle of the conservation of energy

上述の運動及位置のエネルギーの總和を**全エネルギー** (Total energy)と云ふ。此全エネルギーに就いて、**エネルギー不滅律**と云ふ定律がある。

保存力のみに作用せられる質點の全エネルギーは常に不變である。

卽ち質量 m なる質點が、保存力に抗して A 點から B 點に移り、其速度が $v_A$ から $v_B$ に變り、位置のエネルギーが $W_A$ から $W_B$ に變つた時は、常に

$$W_A+\frac{1}{2}mv_A^2=W_B+\frac{1}{2}mv_B^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(53)$$

なる式が成立することになる。

茲に**保存力** (Conservative force) とは物體が力に逆つて仕事をした場合、元の位置に戻せば、全體としての仕事量が零になる樣な力の謂で、重力、發條の彈力等は之に

屬す。卽ち重力に逆つて物體を持ち上げたと假定し、之を元の位置に戻せば

$$mgh+(-mgh)=0$$

となり、保存力なることが分る。之に反して空氣抵抗とか摩擦抵抗の如き力は、元の位置に戻しても仕事の總和は零にならず却つて倍加される。斯樣な力を**非保存力**(Non-conservative force)と云ふ。

**注意** 玆に述べた不滅律は、物理學上で云ふ不滅律とは異り、唯保存力に就いてのみ云ふたものであるから、物理學上熱、光、電氣等のエネルギーに就いて云ふ非保存力を含む不滅律とは異ることに注意しなければならぬ。

## 問　　題

(1) 瓩米は幾エルグであるか。　答 $9.8\times10^7$ エルグ

(2) 質量 100 瓲の汽車が 352 馬力で走つてゐるとき、最高速度が 110 粁時$^{-1}$になつたと云ふ。1 瓲當りの列車抵抗は幾何であるか。

答 8.64瓩

(3) 30° の傾斜面を 15 瓩の荷を持つて上る人がある。高さ 35 米に達する迄に幾何の仕事をするか。又之を 2 分で運び終つたとすれば、この人の平均工率は幾何であるか。馬力及びワットで答へよ。

答 525瓩米 0.058馬力 42.85ワット

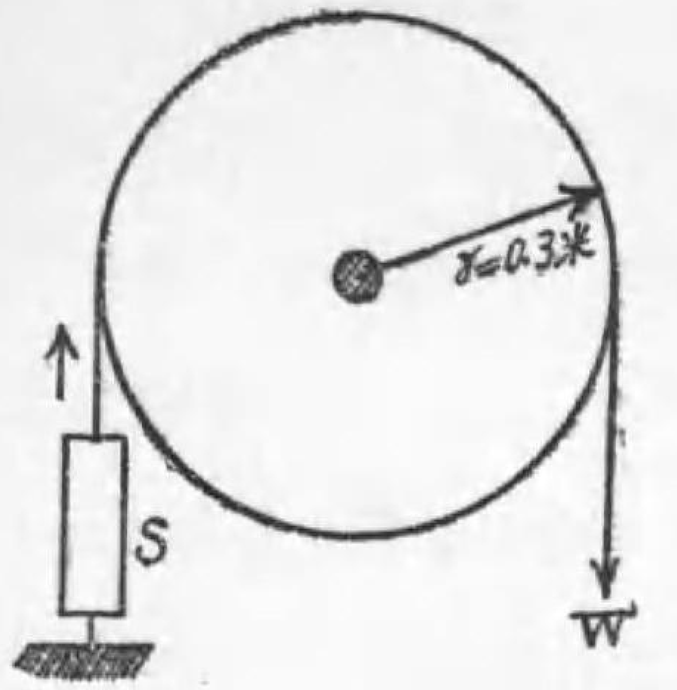
(4) 機關で荷物 5 瓩を揚げるとき、5 馬力で揚げると毎秒 3 米の速度になると云ふ。この時の加速度を求む。　答 235米秒$^{-2}$

(5) 高さ 18 米の坂を自轉車で毎時 20 粁の速度で下りたとすれば坂



下では毎時幾粁の速度を得るか。　答 70.6 粁時$^{-1}$

(6) 長さ $l$ の糸に錘をつけて振子を作り、之を垂直に $\beta$ 丈け傾けたときに放した場合、$\theta$ の角度を有つときの速度は、$v^2=2gl(\cos\theta-\cos\beta)$ なることを證明せよ。




(7) 摩擦による馬力測定裝置。機關の軸に固定した調車Aにバンドを卷き、一端を發條秤Sに、他端を重錘Wに結ぶ。機關が右廻轉すればバンドは矢印の方向に引張られ秤の指度とWとの差丈けの摩擦力を機關が消耗することになる。この時廻轉數を測れば機關の馬力が分る譯である。今機關が左に毎分 1000 廻轉して 15 馬力を出してゐるとし、重錘の重さ 60 瓩であれば、秤の指度は幾何であるか。　答 24.2瓩

(8) 二個の調車に掛けた調革で 32 馬力を傳達するとき、革の速さが毎分 30 米のとき、調革の兩側に於ける張力の差は幾何であるか。

答 4800瓩重

(9) 重量 m 瓩の金屬球を h 米の高さから降下して泥土に衝突し、深さ s 米丈け沒入して靜止したとすれば、泥土の抗力 P は幾何か。

答 $P=\dfrac{m(h+s)}{s}$

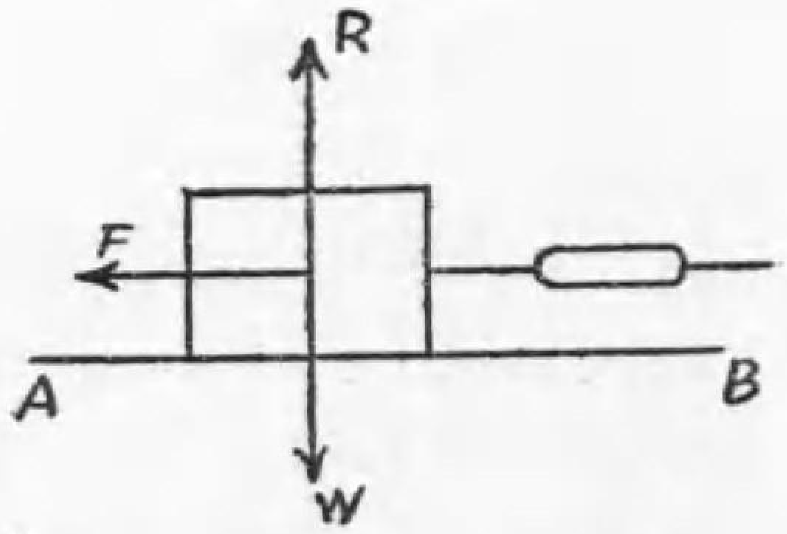
(10) 400 米秒$^{-1}$の速度で彈丸が鐵板に當つて 5 糎丈け沒入したとする。今同一速度で厚さ 2 糎の同質鐵板を貫通するとき、板を出るときの速度は幾何になるか。　答 310米秒$^{-1}$

# 第二章 摩 擦

### 57. 摩擦力 Frictional force

二物體の接觸面が完全に平滑である場合には、水平の力を與へれば直ちに滑り出すが、實際には接觸面に於て動かうとする方向と反對に一種の力が働いて、斷えず運動を阻止しやうとするものである。この力を**摩擦力**と云ひ、物體が未だ運動しない時の摩擦力を**靜止摩擦力**(Statical friction)運動中の夫れを**運動摩擦力**(Kinetic friction)と云ふ。後者の中一物體が他の物體の表面を滑る場合は**滑動摩擦力**(Sliding friction) 廻轉する場合は**轉動摩擦力**(Rolling friction) と云ふ。實驗に依れば、滑動摩擦力の方が轉動摩擦力より大きい。

水平面 AB 上に一つの物體を載せれば、其重量 W と抗力 R とは平衡する。今發條秤を附して水平に引けば、最初引く力が小い間は物體は滑り動かないが、力を次第に大くすると遂に滑り始める。此時




第 53 圖



發條秤に依つて最大摩擦力が分る。之は又極限摩擦力とも云ふ。

### 58. 摩擦係數 Coefficient of friction

極限摩擦力を $F_s$ 運動中の摩擦力を $F_k$ 二物體間に働く**法抗力**(Normal reaction) を W とすれば

$$\mu=\frac{F_s}{W}\ ;\quad F_s=\mu W \cdots\cdots\cdots(54)$$

$$\nu=\frac{F_k}{W}\ ;\quad F_k=\nu W \cdots\cdots\cdots(55)$$

なる關係がある。此 $\mu$ を**靜止摩擦係數** (Coefficient of static friction) と云ひ、$\nu$ を**滑動摩擦係數** (Coefficent of sliding friction) と云ふ。上式を言ひ換へれば、

<u>摩擦力の大さは二物體間に働く法抗力に正比例する。</u>

之等 $\mu, \nu$ は相接觸する二面の種類性質等に依つて異る。次に其數例を示す。

| 摩擦物體 | 纖維狀態 | 面の狀態 | μ | ν |
|---|---|---|---|---|
| 鑄鐵上鑄鐵 | 平面 | 少量のグリース | 0.16 | 0.15 |
| 〃 | 〃 | 水 | — | 0.31 |
| 鑄鐵上青銅 | 〃 | 乾燥 | — | 0.21 |
| 鑄鐵又は青銅上錬鐵 | 〃 | 〃 | 0.19 | 0.18 |
| 錬鐵上錬鐵 | 〃 | 〃 | — | 0.44 |
| 〃 | 〃 | 少量のグリース | 0.13 | — |
| 錬鐵上青銅 | 〃 | 〃 | — | 0.16 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 青銅上青銅 | 〃 | 乾燥 | —— | 0.20 |
| 槲上鑄鐵 | 纖維方向 | 〃 | —— | 0.49 |
| 〃 | 〃 | 水 | 0.65 | 0.22 |
| 槲上錬鐵 | 〃 | 〃 | 0.65 | 0.26 |
| 槲上槲 | 互ひに纖維直角に | 乾燥 | 0.54 | 0.34 |
| 〃 | 立目に横目 | 〃 | 0.43 | 0.19 |
| 槲上皮 | 平面 | 〃 | 0.61 | —— |
| 槲製車上皮 | 纖維方向 | 〃 | 0.47 | 0.27 |
| 鑄鐵上皮 | 平面 | 〃 | 0.28 | 0.56 |
| 鋼上鋼 | 平面 | 〃 | 0.15 | —— |

次に法抗力が一定ならば、摩擦力は接觸面積の廣さに無關係である。即ち面積が大きくなれば、單位面積上の法抗力は反比例して小さくなるから、全體としての摩擦力は一定である譯である。

### 59. 摩擦角　Friction angle

平面上に物體を置くときは、重力と之に等しく方向反對の反作用とによつて平衡することは前に述べた。今水平力 f を此物體に加へたとすると、W, f 及び兩者の合力と大さ等しく方向反對の R なる力との三力で平衡する。

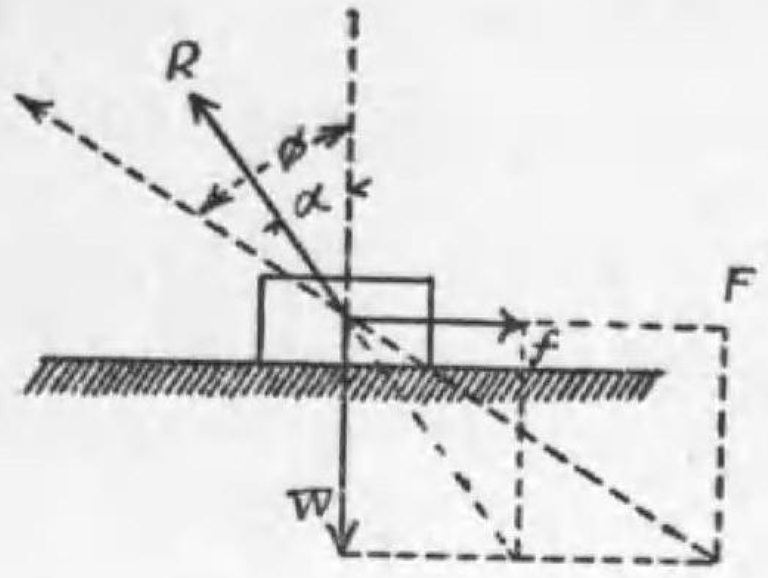
R が垂線となす角を $\alpha$ とすると

$$R=\sqrt{W^2+f^2}\ ,\quad R=\frac{W}{\cos\alpha}$$

今 f を次第に大きくすれば、$\alpha$ は夫れに連れて大きくなり、將に滑り出さうとするときに $\alpha$ は最大となる。即ち



極限摩擦力 F のとき $\alpha$ が最大となる。この時の $\alpha$ の値を $\phi$ とすると



第 54 圖

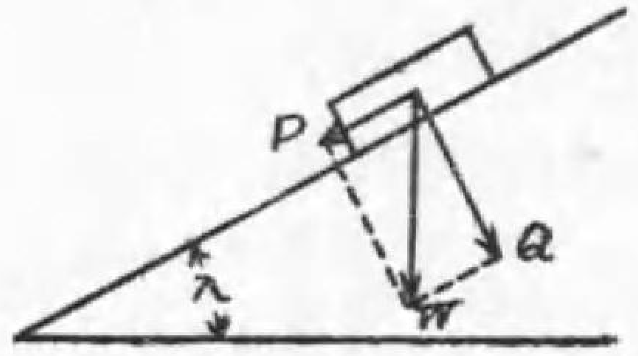
$$\tan\phi=\frac{F}{W}$$

此式の右邊は靜止摩擦係數であるから

$$\tan\phi=\mu \quad\cdots\cdots\cdots(56)$$

此 $\phi$ を稱して摩擦角と云ふ。

次に自由に傾斜度を加減し得る斜面を作り、其上に重量 W の物體を置き、次第に傾斜角を增すと、最初は物體は斜面上に靜止してゐるが、傾斜角が大になるに從ひ遂に運動するに至る。此時の傾斜角を $\lambda$ とし、斜面に垂直なる分力を Q、斜面に沿ふ分力を P とすれば、



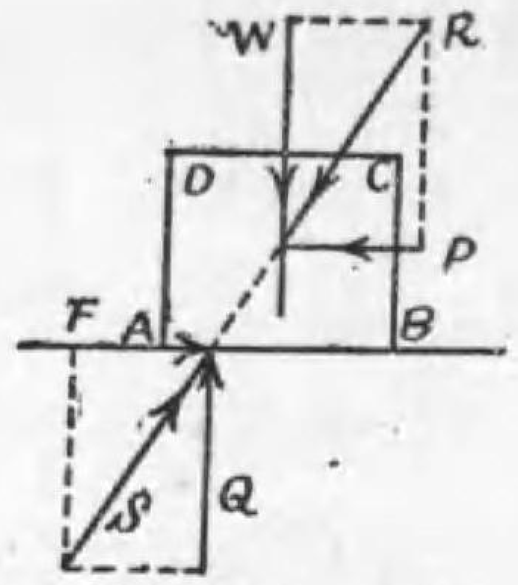
第 55 圖

$$Q=W\cos\lambda\ ;\quad P=W\sin\lambda$$

而して物體は P によつて運動を始める故、此場合の極限摩擦力は P に等しく反對である。極限摩擦力と垂直分力との比は、摩擦係數に等しい故

$$\mu=\frac{P}{Q}=\frac{W\sin\lambda}{W\cos\lambda}=\tan\lambda\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(57)$$

即ち此方法に依つて$\lambda$を求むれば、摩擦係數を知ることが出來る。$\lambda$も$\phi$も共に摩擦角で、$\lambda$は物體が斜面に靜止し得る最大傾斜角であるから、**一名靜止角** (Angle of repose) とも云ふ。



第 56 圖

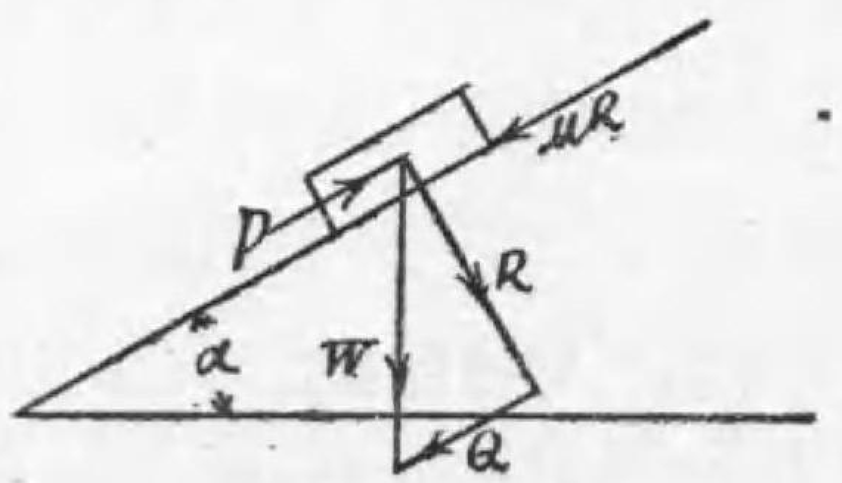
**注意** 今迄は物體に働く着力點を一點として取扱つたが、實際には第56圖に示す樣に摩擦力と外力とは作用線が違つてゐるのが普通である。此場合にはWとQ PとFは各々反對の向きの偶力をなして平衡してゐる。Pが小さくなればQは次第にWの作用線に近づき、P=0でWとQとは作用線が一致する。反對にPが大きくなればQは物體のA端に近づき、若し$\mu$が大きくてQの作用線言ひ換へればRの作用線がAに來ても滑らない場合にはPの作る偶力がWの偶力に打勝つて轉倒する。

## 60. 摩擦斜面上にある物體

重量Wなる物體を$\alpha$角の傾斜を有する斜面上に置き外力Pで動かす場合のPの値を求めて見やう。

I　Pが斜面に平行に物を押上げる場合。

Wの爲めに圖に示す如く斜面に直角な抗力Rと、物體を押し下げ



第 57 圖



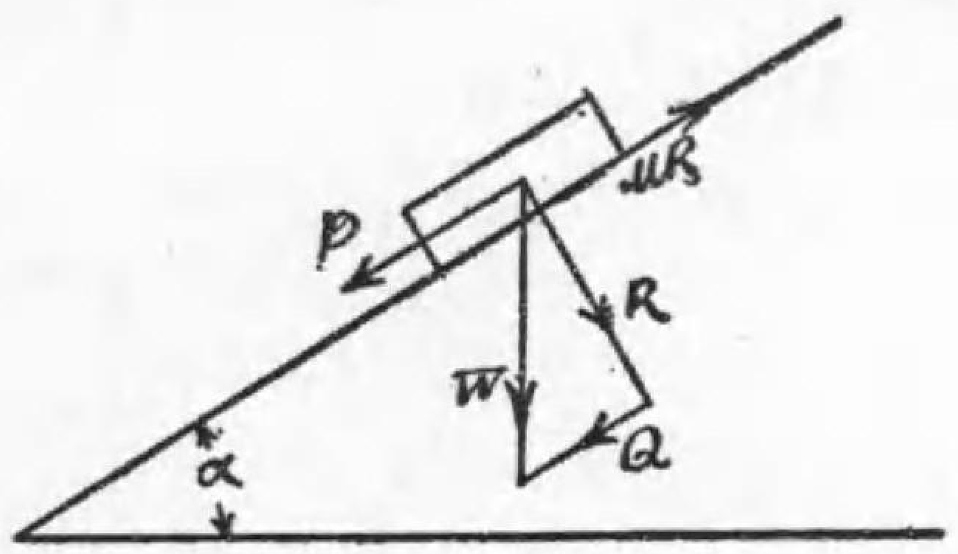
樣とする斜面に平行なQを生ずる。此場合摩擦力は$\mu$Rで表はされ、外力Pと反對に働く。故に

$$P=\mu R+Q$$

然るに　$R=W\cos\alpha;\quad Q=W\sin\alpha$

$$\therefore\ P=(\mu\cos\alpha+\sin\alpha)W \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(58)$$

II　Pが斜面に平行に物體を引下げる場合。



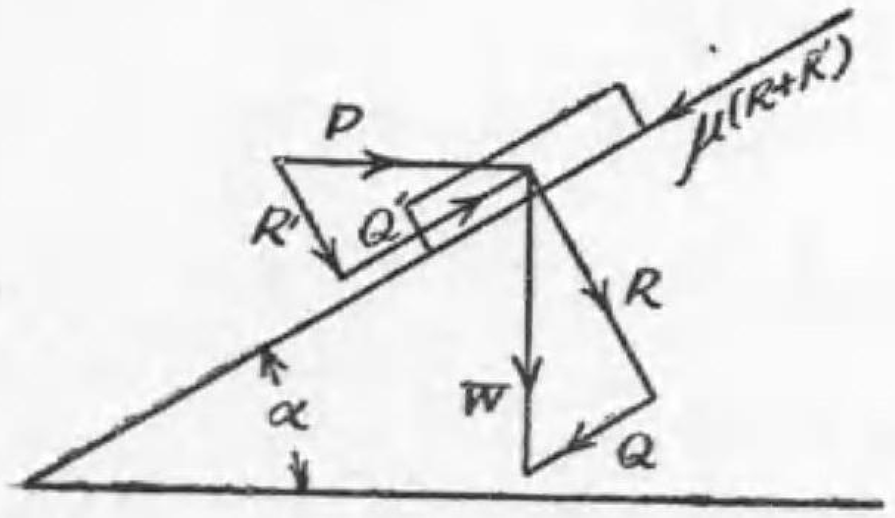
第 58 圖

前と同樣に考へて

$$P=\mu R-Q$$
$$=(\mu\cos\alpha-\sin\alpha)\times W\cdots(59)$$

此場合若し$\alpha$が大きくて摩擦角より大になれば、換言すればQが$\mu$Rより大になれば、Pを加へなくても滑り落ちることになる。

III　Pが水平に物體を押上げる場合。



第 59 圖

此場合には第59圖に示す樣に、Pは斜面に水平及び垂直に分つことが出來る。此場合には法抗力は

R+R′ になるから、摩擦力は $\mu(R+R')$ で向きは Q′ に反對である。平衡條件から

$$Q'=\mu(R+R')+Q$$

$$\therefore\quad P\cos\alpha=\mu(W\cos\alpha+P\sin\alpha)+W\sin\alpha$$

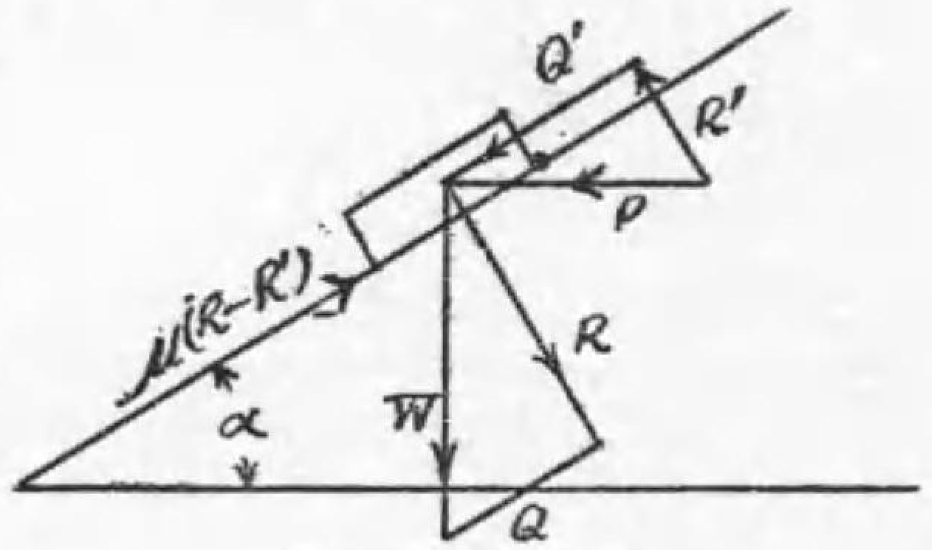
$$P=\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}W=\frac{\tan\alpha+\mu}{1-\mu\tan\alpha}W\cdots\cdots(60)$$

(56)式で $\mu$ を置換すれば

$$P=\frac{\tan\alpha+\tan\phi}{1-\tan\phi\tan\alpha}W=\tan(\alpha+\phi).W\quad\cdots(60')$$

III　P が水平に物體を引下げる場合。

前同樣にして P の分力 Q′, R′ を求めると、Q′ は物體を引下げる力となり、R′ は R に反對に働き法抗力を減ずることになる。從つて摩擦力は $\mu(R-R')$ となる。卽ち平衡式は



第　60　圖

$$Q+Q'=\mu(R-R')$$

$$W\sin\alpha+P\cos\alpha=\mu(W\cos\alpha-P\sin\alpha)$$

$$\therefore\quad P=\frac{\mu-\tan\alpha}{1+\mu\tan\alpha}W\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(61)$$

$\mu=\tan\phi$ を代入すれば

$$P=\tan(\phi-\alpha).W\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(61')$$



**注意**　玆に用ひた $\mu$ は運動摩擦係數 $\nu$ で置換しても成立する。其場合には物體が運動しつゝある場合の所要外力となる。

## 問　　題

（1）　水平と 30° の角をなす斜面上に、重量 15 瓩の物體がある。之を押し上げるに要する力は、水平力のときと斜面に沿ふ力の時と幾何の差があるか。但し物體と斜面との摩擦係數を 0.25 とする。

答　8·1 瓩重丈け水平力大

（2）　重量 10 瓩の物體を水平面上で每秒 10 米の初速度で運動させた時、2 秒で靜止したと云ふ。物體と水平面との摩擦係數を求む。

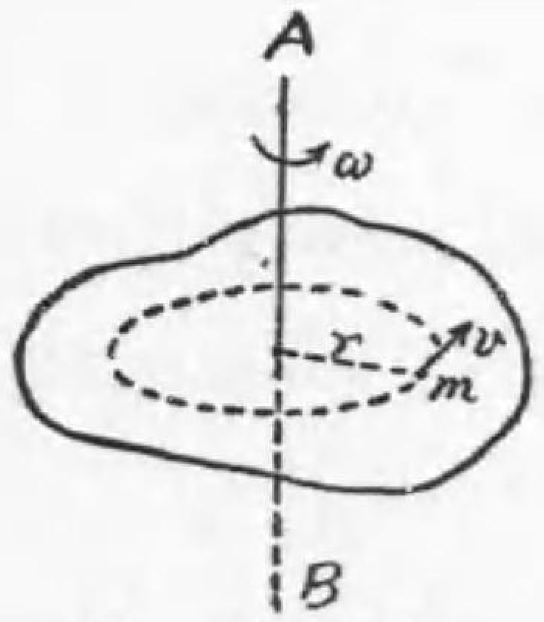
答　0.51

（3）　上記 III に於て外力 P が斜面と θ の角度をなす場合の P の値を求めよ。　　答　$P=\dfrac{\mu\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\theta-\mu\sin\theta}W$

# 第三章　慣性モーメント

### 61.　慣性モーメント　Moment of inertia

第61圖に於て AB を剛體の廻轉軸とする。卽ち此剛體は AB を軸として矢の方向に角速度 $\omega$ で廻轉してゐるとする。この剛體を質量が $m_1, m_2, m_3 \cdots$ なる質點の集りと見做し、是等の軸 AB



第　61　圖

からの距離を $r_1, r_2, r_3\cdots$ とすれば、線速度は $\omega r_1, \omega r_2, \omega r_3 \cdots$ である。E を此剛體の運動のエネルギーとすれば

$$E=\frac{1}{2}m_1(\omega r_1)^2+\frac{1}{2}m_2(\omega r_2)^2\cdots\cdots$$
$$=\frac{1}{2}\omega^2(m_1 r_1{}^2+m_2 r_2{}^2+\cdots\cdots)$$
$$=\frac{1}{2}\omega^2\Sigma mr^2$$

玆に $\Sigma mr^2$ は剛體の各質點の質量と、廻轉軸からの距離の自乘との積の總和であつて、之を剛體の其軸に對する**慣性モーメント**と云ふ。之を I で表はせば

$$E=\frac{1}{2}I\omega^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(62)$$

k を各質點への平均距離とすれば

$$\Sigma mr^2=k^2\Sigma m$$
$$I=k^2M \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(63)$$

玆に M は剛體の全質量を示す。k を**廻轉半徑** (Radius of gyration) と云ふ。(62),(63) 兩式から

$$E=\frac{1}{2}M(k\omega)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(64)$$

即ち廻轉體の運動のエネルギーは、軸から廻轉半徑の距離にある一點に物體の全質量を集中した一質點の運動のエネルギーに等しい。

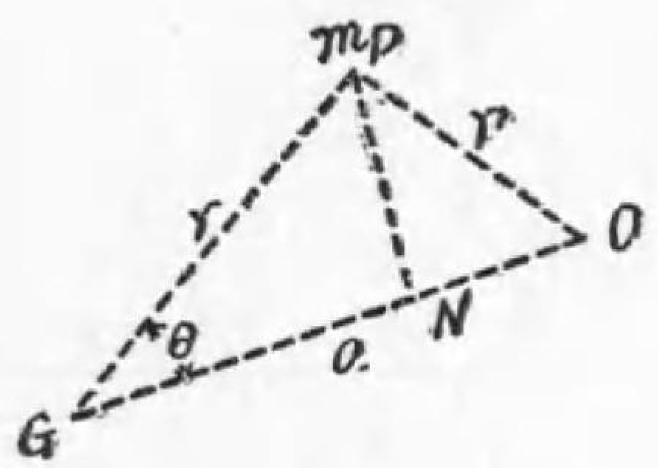
質量 M,速度 v なる運動體の運動のエネルギー $\frac{1}{2}Mv^2$ は



慣性モーメント I, 角速度 $\omega$ なる廻轉體の運動のエネルギー $\frac{1}{2}I\omega^2$ に類似し、從つて廻轉運動の慣性モーメントは、線運動の質量に相當し、廻轉運動の運動量のモーメント $I\omega(=Mr.r\omega=Mv.r)$ は、線運動の運動量 Mv に相當することを知る。依つて $I\omega$ を**角運動量** (Angular momentum) と云ふことがある。

### 62. 慣性モーメントに關する定理

I　剛體の任意の軸に對する慣性モーメント I は、重心を通して此軸に平行な軸に對する慣性モーメント $I_G$ と、重心に全質量 M を集中せしめた質點が、前の軸に對する慣性モーメント $Ma^2$ との和に等しい。但し a は兩軸間の距離である。




第　62　圖

證明。第62圖に於て O, G を任意の軸、及び重心を通して任意の軸に平行な軸の切口とする。剛體內に質量 M なる任意の質點 P を考へ、兩軸より P 迄の距離 OP, GP を夫々 r', r とすると

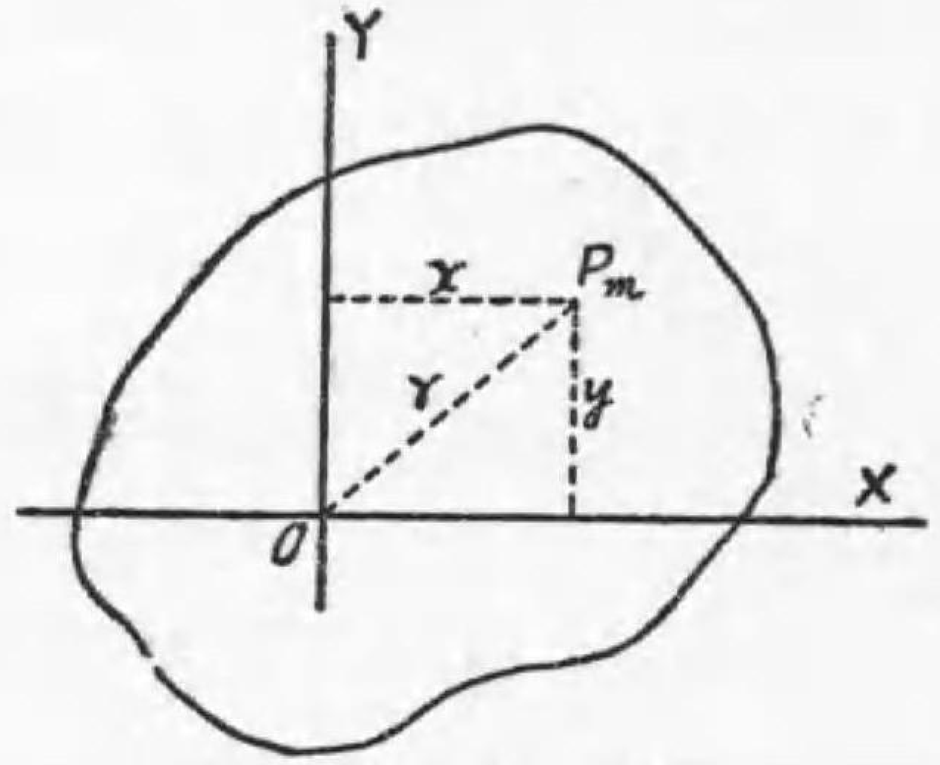
$$I=\Sigma mr'^2=\Sigma m(r^2+a^2-2ar\cos\theta)$$
$$=I_G+M.a^2-2a\Sigma m.GN$$

玆に GN は GP の GO 線上の正射影である。G は重心なるによりモーメントは零である筈であるから $\Sigma$m. GN $=0$ 故に

$$\mathrm{I}=\mathrm{I_G}+\mathrm{Ma}^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(65)$$

II 任意の平面板内にあつて互に直角なる二軸に對する慣性モーメントの和は、二軸の交點に於て板面に直角なる軸の周りの慣性モーメントに等しい。

證明。平面板上の任意の一點Oを原點として互に直角の二軸 OX, OY を引き、之に對する板の慣性モーメントを夫々 $\mathrm{I}_x, \mathrm{I}_y$ とする。板を質點の集合と見做し、坐標 $(x, y)$ の P 點に質量 m なる質點を考へ OP$=$r とすれば




第 63 圖

$$\mathrm{r}^2=x^2+y^2$$

之に質量 m を乘じ、平面板全體に就て加へ合せると、

$$\Sigma\mathrm{mr}^2=\Sigma\mathrm{m}x^2+\Sigma\mathrm{m}y^2$$

玆に $\Sigma\mathrm{mr}^2$ は O を通して板に直角の軸に對する板の慣性モーメント I で、$\Sigma\mathrm{m}y^2, \Sigma\mathrm{m}x^2$ は夫々 OX 軸、OY 軸に對する板の慣性モーメントである。故に

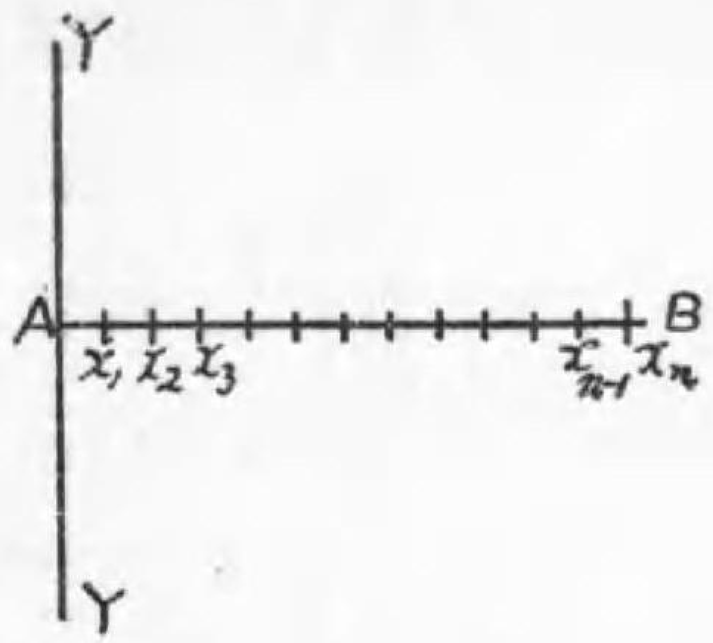


$$\mathrm{I}=\mathrm{I}x+\mathrm{I}y \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(66)$$

## 63. 簡單な物體の慣性モーメント

I 一樣な細棒

第64圖に於て、AB を一樣な細い棒とし、全長を $l$, 質量を M、單位の長さの質量卽ち線密度を $\rho$ とすると




第 64 圖

$$\mathrm{M}=l\rho$$

今此棒の一端 A に於て棒に直角の軸に對するモーメントを見出さう。AB を n 箇の微小部分に分け、A 點から各分點迄の距離を夫々 $x_0, x_1, x_2, \cdots x_n$ とすると、$x_0$ は A 點、$x_n$ は B 點迄卽ち…AB の長さ $l$ を示す。各部分の質量は夫々 $\rho(x_1-x_0)$; $\rho(x_2-x_1)$; $\cdots\rho(x_n-x_{n-1})$ で、平均距離を夫々 $\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2 \cdots \mathrm{r}_n$ とすると、各分點の距離は極接近してゐるから、

$$\mathrm{r}_1{}^2=x_1{}^2=x_0{}^2=x_1x_0$$

と見做し得べく、從つて

$$3r_1^2=x_1^2+x_1x_0+x_0^2 \quad 即ち \quad r_1^2=\frac{1}{3}(x_1^2+x_1x_0+x_0^2)$$

と云ふことが出來る。同様にして

$$r_2^2=\frac{1}{3}(x_2^2+x\,x_1+x_1^2),$$

............

$$r_n^2=\frac{1}{3}(x_n^2+x_nx_{n-1}+x_{n-1}^2)$$

今各部分のＹＹ軸の廻りの慣性モーメントを夫々 $I_1, I_2, \cdots I_n$ とし、之等の總和を求めれば、AB線の YY 軸に對する慣性モーメント $I_y$ を求めることが出來る。即ち

$$I_1=\rho(x_1-x_0)\frac{1}{3}(x_1^2+x_1x_0+x_0^2)=\frac{\rho}{3}(x_1^3-x_0^3),$$

$$I_2=\rho(x_2-x_1)\frac{1}{3}(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)=\frac{\rho}{3}(x_2^3-x_1^3),$$

..................

$$I_n=\rho(x_n-x_{n-1})\frac{1}{3}(x_n^2+x_nx_{n-1}+x_{n-1}^2)$$
$$=\frac{\rho}{3}(x_n^3-x_{n-1}^3)$$

上式を邊々相加へれば、

$$I_1+I_2+\cdots I_n=\frac{\rho}{3}(x_n^3-x_0^3)=\frac{\rho}{3}l^3$$

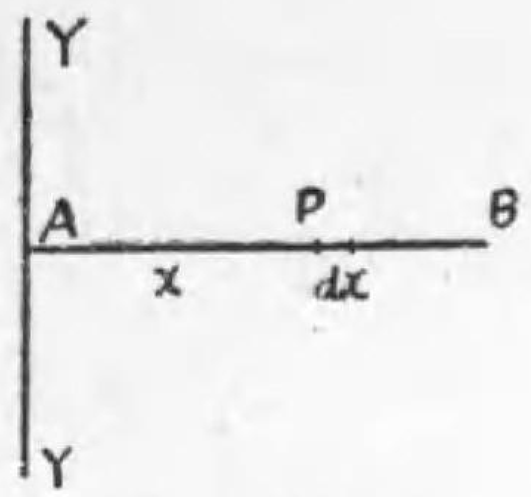
$$\therefore \quad I_y=\frac{1}{3}Ml^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(67)$$

上記の結果は微積分學に依れば容易に求め得られる。即ち、A點から AB 線中の一點 P 迄の距離を $x$, P 點に接近して微小部分 $dx$ をとると、此部分の YY 軸に對す



る慣性モーメントは $\rho dx.x^2$ である。之を A 點から B 點まで即ち零から $l$ 迄積分すれば、AB 線の YY 軸の廻りの慣性モーメント $I_y$ を求めることが出來る。即ち

$$I_y=\int_0^l \rho dx.x^2=\rho\int_0^l x^2 dx$$
$$=\rho\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l=\rho\frac{l^3}{3}$$
$$=\frac{1}{3}M.l^2$$




第　65　圖

今 YY 軸を AB 線の重心の位置に移して AB 線に直角に假定すれば、其軸に對する慣性モーメント $I_g$ は前述定理 I により

$$I_y=I_g+M\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$\therefore \quad I_g=I_y-M\left(\frac{l}{2}\right)^2=\frac{Ml^2}{3}-\frac{Ml^2}{4}$$
$$=\frac{1}{12}Ml^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(68)$$

II　矩形板　Rectangular lamina

矩形板 ABCD の AB=a, AD=b とし、AB, AD 兩邊を軸とする慣性モーメント $I_{AB}, I_{AD}$ を求めやう。

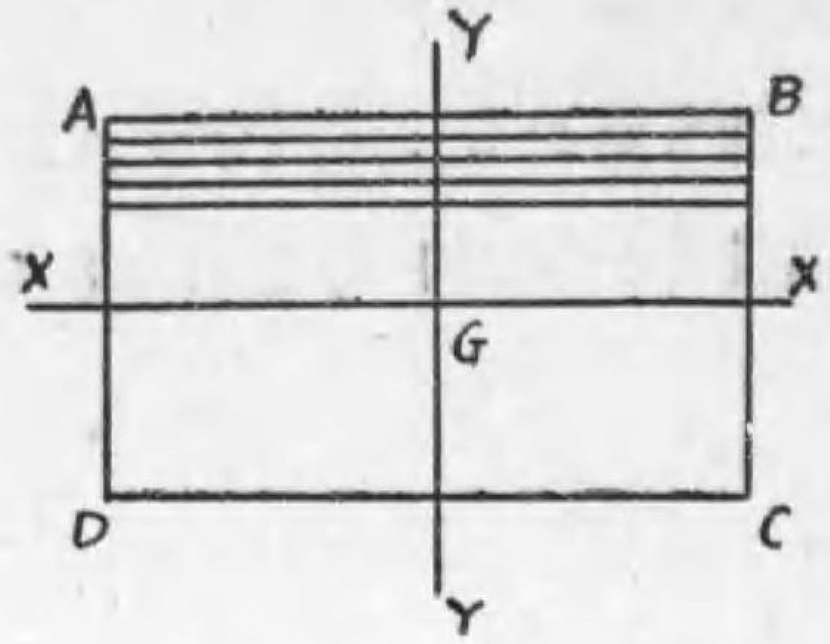
先づ AB に平行な n 箇の細線に分ち、各細線の質量を $m_1, m_2, \cdots m_n$, AD の廻りのモーメントを $I_1, I_2, \cdots I_n$ とすれば、(67) 式から

$$I_1=\frac{1}{3}m_1 a^2,$$

$$I_2=\frac{1}{3}m_2 a^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$I_n=\frac{1}{3}m_n a^2$$




第 66 圖

故に

$$I_1+I_2+\cdots I_n=\frac{a^2}{3}(m_1+m_2+\cdots+m_n)$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\quad I_{AD}&=\frac{1}{3}Ma^2 \\ \text{同様にして}\quad I_{AB}&=\frac{1}{3}Mb^2 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(69)$$

次に矩形の重心Gを通し、邊AD, ABに平行なるYY, XX軸の周りの慣性モーメント$I_y$及び$I_x$は、定理Iに依り

$$\left.\begin{aligned} I_y&=I_{AD}-M\left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ &=\frac{1}{3}Ma^2-\frac{1}{4}Ma^2=\frac{1}{12}Ma^2 \\ \text{同様にして}\quad I_x&=\frac{M}{12}b^2 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(70)$$

次に又Gを通して紙面に直角なる軸の周りの慣性モーメント$I_z$は、定理IIから

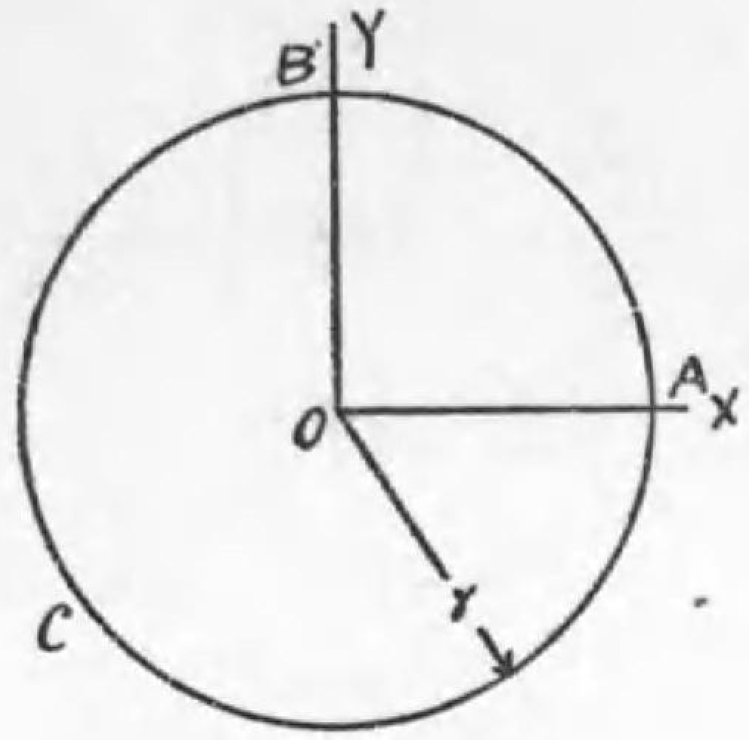
$$I_z=I_x+I_y=\frac{Mb^2}{12}+\frac{Ma^2}{12}$$

$$=\frac{1}{12}M(a^2+b^2)\cdots\cdots\cdots(71)$$



## III 圓輪 Circular ring

ABCを圓輪、Oを其中心とする。Oを通して圓輪面に垂直なるOZ軸及び同面上の直角軸OX, OYに對する慣性モーメント$I_z$, 及び$I_x$, $I_y$を求める。




第 67 圖

圓輪の微小部分の質量を$m$とすると何れの部分に對しても中心からの距離は一定値rであるから

$$I_z=\Sigma mr^2=r^2\Sigma m=Mr^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(72)$$

尙$I_x$, $I_y$は相等しい故、定理IIから

$$I_z=2I_x=2I_y$$

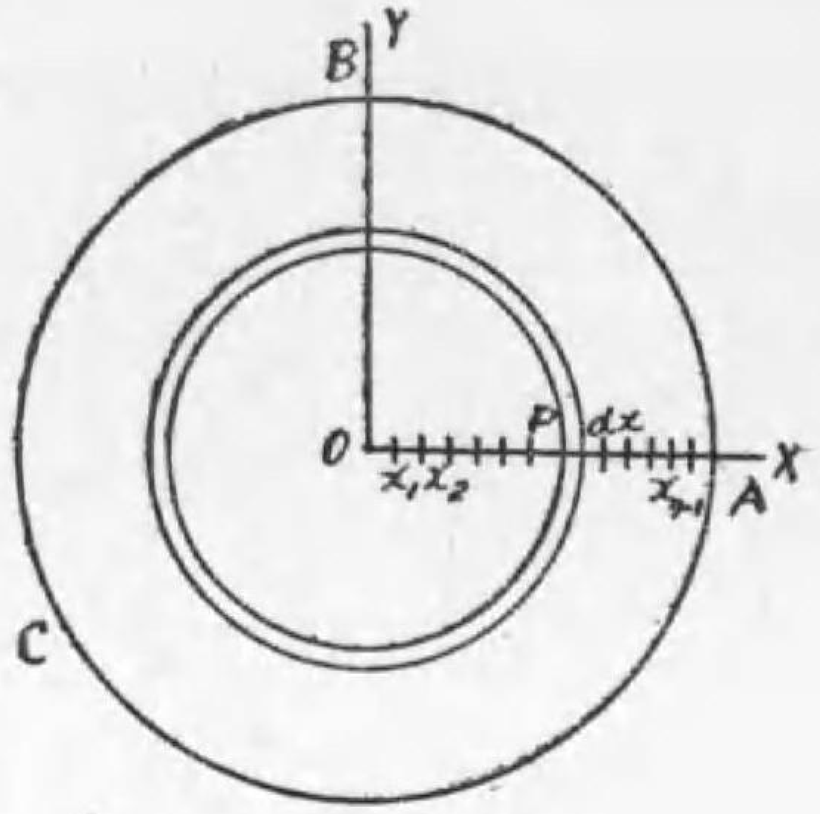
$$\therefore\quad I_x=\frac{I_z}{2}=\frac{1}{2}Mr^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(73)$$

## IIII 圓板 Circular plate

ABCを圓板、Oを其中心とし、前同樣三直角軸OZ, OX, OYに就いての慣性モーメント$I_z$, $I_x$, $I_y$を求めて見やう。

半徑をr, 單位面積の質量を$\rho$とすると、圓板の質量Mは

$$M=\pi r^2 . \rho$$




第 68 圖

OA線をn箇の微小部分に分け、Oから各分點迄の距離を夫々$x_0$, $x_1, x_2, \cdots x_n$とする。((I)の場合と同樣) 之等の各分點を過り同心圓を書き、圓板を圓輪の集合と見做して各圓輪への平均距離を夫々$r_1, r_2, r_3 \cdots r_n$とすると、各圓輪の質量は $2\pi r_1(x_1-x_0)\rho$; $2\pi r_2(x_2-x_1)\rho, \cdots 2\pi r_n(x_n-x_{n-1})\rho$ であるから、各圓輪の OZ軸の周りの慣性モーメント$I_1, I_2, I_3, \cdots I_n$は夫々

$$I_1=2\pi r_1(x_1-x_0)\rho r_1^2=2\pi r_1^3(x_1-x_0)\rho$$

$$I_2=2\pi r_2^3(x_2-x_1)\rho$$

............

$$I_n=2\pi r_n^3(x_n-x_{n-1})\rho$$

直線の場合に述べた樣に、各分點の距離が極く接近してゐる場合には

$$r_1^3=\frac{1}{4}(x_1^3+x_1^2x_0+x_0^2x_1+x_0^3)$$

$$r_2^3=\frac{1}{4}(x_2^3+x_2^2x_1+x_1^2x_2+x_1^3)$$



............

$$r_n^3=\frac{1}{4}(x_n^3+x_n^2x_{n-1}+x_{n-1}^2x_n+x_{n-1}^3)$$

と見做すことが出來る故

$$I_1=\frac{2}{4}\pi\rho(x_1-x_0)(x_1^3+x_1^2x_0+x_0^2x_1+x_0^3)$$

$$=\frac{1}{2}\pi\rho(x_1^4-x_0^4)$$

$$I_2=\frac{1}{2}\pi\rho(x_2^4-x_1^4)$$

............

$$I_n=\frac{1}{2}\pi\rho(x_n^4-x_{n-1}^4)$$

$$I_1+I_2+\cdots\cdots+I_n=\frac{1}{2}\pi\rho(x_n^4-x_0^4)$$

$$\therefore\quad I_z=\frac{1}{2}\pi\rho r^4=\frac{1}{2}Mr^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(74)$$

之を微積分學から求めると簡單である。

OA線上に一點Pを取り、O點からの距離をr, Pに接近して微小部分 dr をとり一つの圓輪を考へると、此圓輪の質量は

$$2\pi r.\, dr\rho$$

O點からの距離はrであるから、OZ軸の周りの慣性モーメントは

$$2\pi r.\, dr.\, \rho r^2=2\pi r^3 dr.\, \rho$$

依つて半徑零からr迄積分すれば$I_z$を得る。

$$I_z=\int_0^r 2\pi r^3 dr\rho=2\pi\rho\int_0^r r^3dr=2\pi\rho\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^r$$

$$=2\pi\rho\frac{r^4}{4}$$

$$=\frac{M}{2}r^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (74)$$

尚 $I_x, I_y$ を求めるに、$I_x=I_y$ であるから、慣性モーメントに關する定理 II から

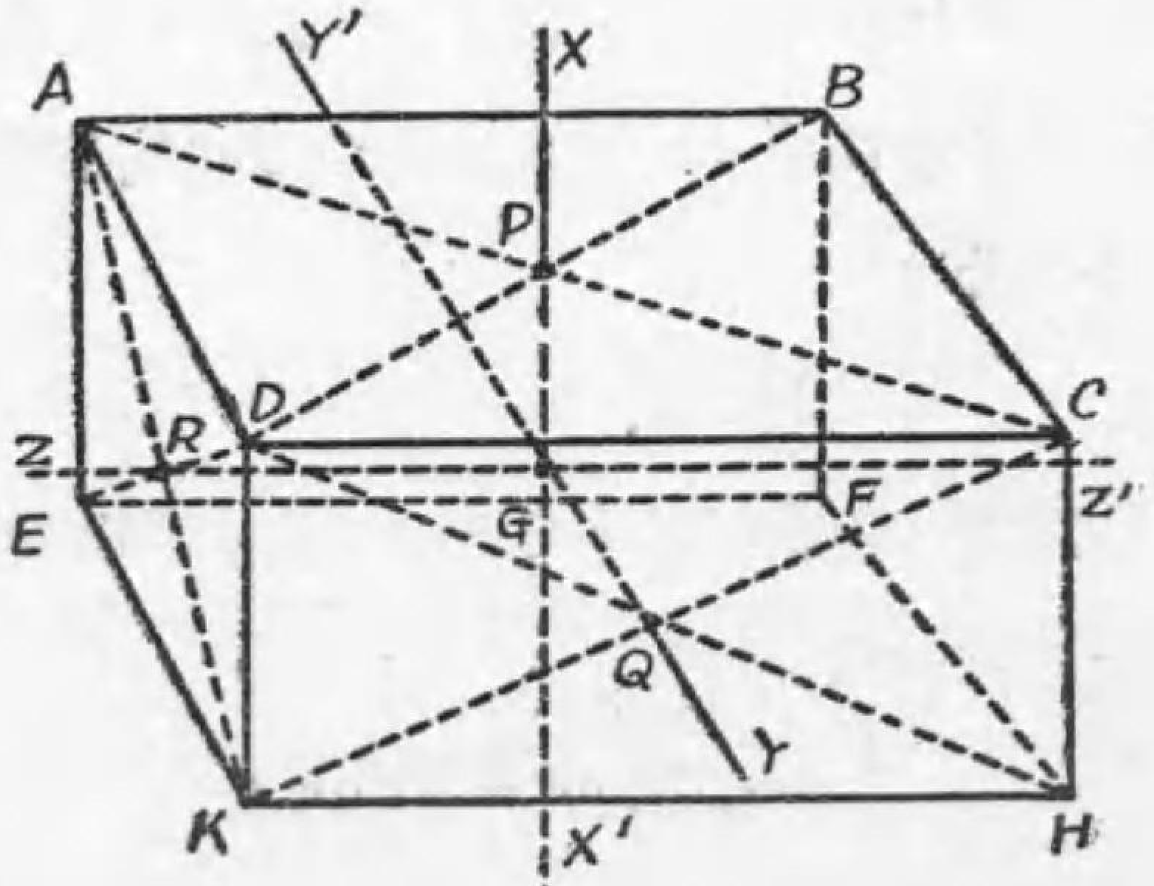
$$I_z=2I_x$$

$$\therefore\quad I_x=\frac{I_z}{2}=\frac{M}{4}r^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (75)$$

V 矩形柱 Rectangular parallelopiped

ABCDEFHK を矩形柱とし、對角線 AC 及び BD; DH 及び CK; AK 及び DE の交點 P, Q, R を通り、AE, AD, AB 邊に平行の XGX′; YGY′, ZGZ′ 軸の廻りの慣性モーメント $I_x, I_y, I_z$ を求める。

AB = a, AD=b, AE=c とし、面ABCDに平行の面で




第 69 圖



n 個の薄層に分け、各層を夫々 $m_1, m_2\cdots m_n$, $x$ 軸の周りの慣性モーメントを夫々 $I_1, I_2\cdots I_n$ とすると (71) 式から

$$I_1=\frac{m_1}{12}(a^2+b^2)$$

同樣にして $I_2=\frac{m_2}{12}(a^2+b^2)$

…………

$$I_n=\frac{m_n}{12}(a^2+b^2)$$

$$\therefore\quad I_1+I_2+\cdots+I_n=\frac{a^2+b^2}{12}(m_1+m_2+\cdots+m_n)$$

從つて $I_x=\frac{M}{12}(a^2+b^2)$

同樣に $I_y=\frac{M}{12}(a^2+c^2)$

$$\left.\begin{aligned} I_x&=\frac{M}{12}(a^2+b^2)\\ I_y&=\frac{M}{12}(a^2+c^2)\\ I_z&=\frac{M}{12}(c^2+b^2)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (76)$$

若し立方體であると、a=b=c であるから

$$I_x=I_y=I_z=\frac{1}{6}Ma^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (77)$$

VI. 圓柱 Circular cylinder

ABCD を圓柱とし、OO を中心線とする。今此軸に對する慣性モーメント $I_0$ を求めて見やう。OO 軸に直角の面で n 箇の薄層に分け、各層の質量を夫々 $m_1, m_2\cdots\cdots m_n$, OO 軸の周りの慣性モーメントを夫々 $I_1, I_2\cdots I_n$ とすれば (74) 式から

$$I_1=\frac{m_1}{2}r^2$$

$$I_2=\frac{m_2}{2}r^2$$

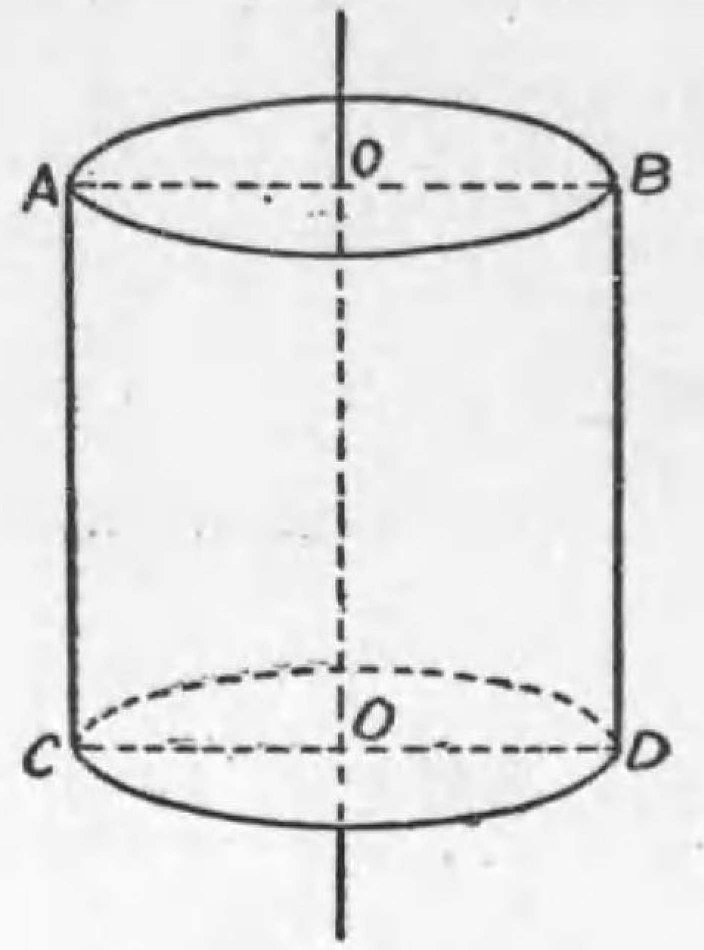
......

$$I_n=\frac{m_n}{2}r^2$$

依つて $I_1+I_2\cdots+I_n$

$$=\frac{r^2}{2}(m_1+m_2+\cdots+m_n)$$

$$\therefore\ I_0=\frac{M}{2}r^2\cdots(78)$$




第 70 圖

**64. 幾何學的慣性モーメント** Geometrical moment of inertia

一平面上に於て、平面形を構成してゐる各微小部分の面積と、其部分への一軸からの平均距離の自乘との積の總和を、其軸の周りの**幾何學的慣性モーメント**と云ふ。即ち力學上の慣性モーメントを質量 M の代りに面積 A を以て置換したものである。從つて今迄述べた總ての事項は此場合にも適用出來る。

例へば(70)式 $I_x=\frac{M}{12}b^2$ に於て M の代りに $a\times b$ を置けば、

$$I_x=\frac{ab}{12}b^2=\frac{1}{12}ab^3$$



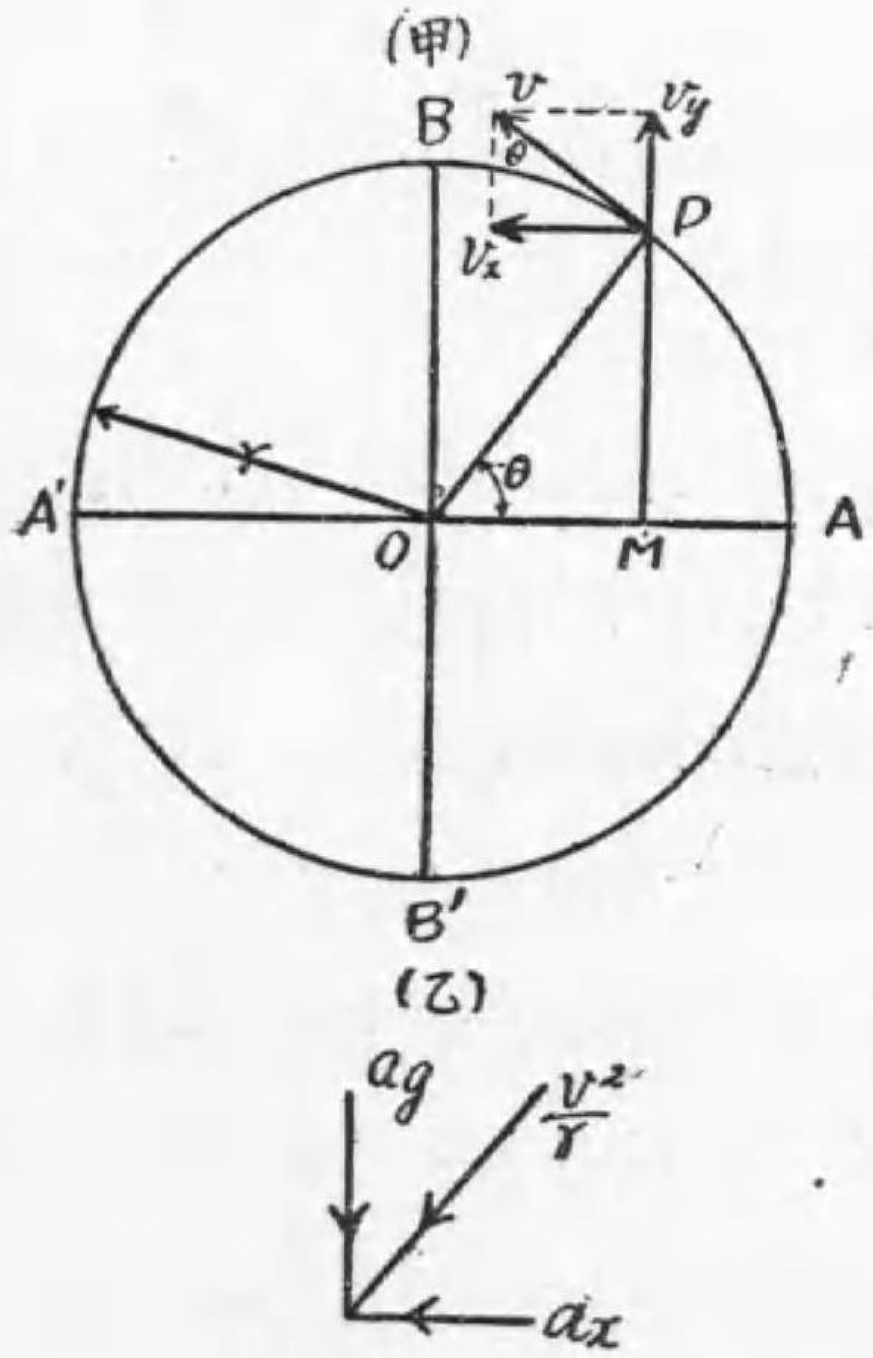
となり、(74)式 $I_z=\frac{1}{2}Mr^2$ は M の代りに $\pi r^2$ を置いて

$$I_z=\frac{1}{2}.\pi r^2.r^2=\frac{1}{2}\pi r^4$$

となる。

## 第四章　振　動

**65. 單弦運動** Simple harmonic motion




第 71 圖

半徑 r の圓周上を P 點が一定速さで運動する時、直徑 AA′ 上に下した垂線の足を M とすると、M が AA′ 上に於ける運動を**單弦運動**と云ふ。此場合 M は P が圓運動をするに係らず往復直線運動をする。斯樣に同一の途を一定時間に往復する運動を**振動**(Oscillation)と云ひ、O 點を**振動の中心**(Centre of oscillation）と呼ぶ。又振動する質點の最大變位 OA 又は OA′ を振幅（Amplitude），M點の位置を定める角 POM を位相（Phase）、一つの振動を完結する時間即ちM點が AB, BA を動く時間換言すればP點が一廻轉する時間を週期（Period）、週期の逆數即ち單位時間の往復回數を振動數（Frequency）と云ふ。次に變位、速度、加速度等に就いて述べやう。

I. 變位　Pの角速度をωとし、t 秒間に θ ラヂイアン丈け廻轉すれば

$$\theta=\omega t$$

今Oを原點とした時Mの變位は

$$X=OM=r\cos\theta=r\cos\omega t \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(79)$$

II. 速度　Pの速度 v を AA′ に平行及び直角に分解すると $v_y$ の方は、M の速度に無關係である。依つて

$$V=v_x=v\sin\theta=\omega r\sin\omega t \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(80)$$

玆に $\sin\theta=\frac{PM}{OP}=\frac{PM}{r}$，r は一定故、Mの速度は PM に比例する。即ちMがA又は A′ にある時は速度零で、Oに在るとき最大になる。其値は

$$V_{max}=v\sin\frac{\pi}{2}=v$$

即ちPの速度に等しい。Vの向きは sin θ の正負により、



正ならばAからBに、負ならばBからAに向ふ。

III. 加速度　第71圖（乙）の如く、Pの向心加速度 $\frac{v^2}{r}$ を AA′ に平行及び直角に分解して各々を $a_x$ $a_y$ とすると、速度の場合と同樣に $a_y$ は M の運動に無關係であるから、Mの加速度は

$$a=a_x=\frac{v^2}{r}\cos\theta=\omega^2 r\cos\omega t=\omega^2 X\cdots(81)$$

故に加速度は Oからの變位に比例する。cosθ が正ならば、加速度はAからOに向ひ、負ならば A′ からOに向ふ。即ち加速度は常にOに向つてゐる。其最大値は

$$a_{max}=\pm\frac{v^2}{r}=\pm\omega^2 r$$

中心Oに於ては加速度が零になる。

IIII. 週期、振動數　週期をT、振動數をnとすれば、

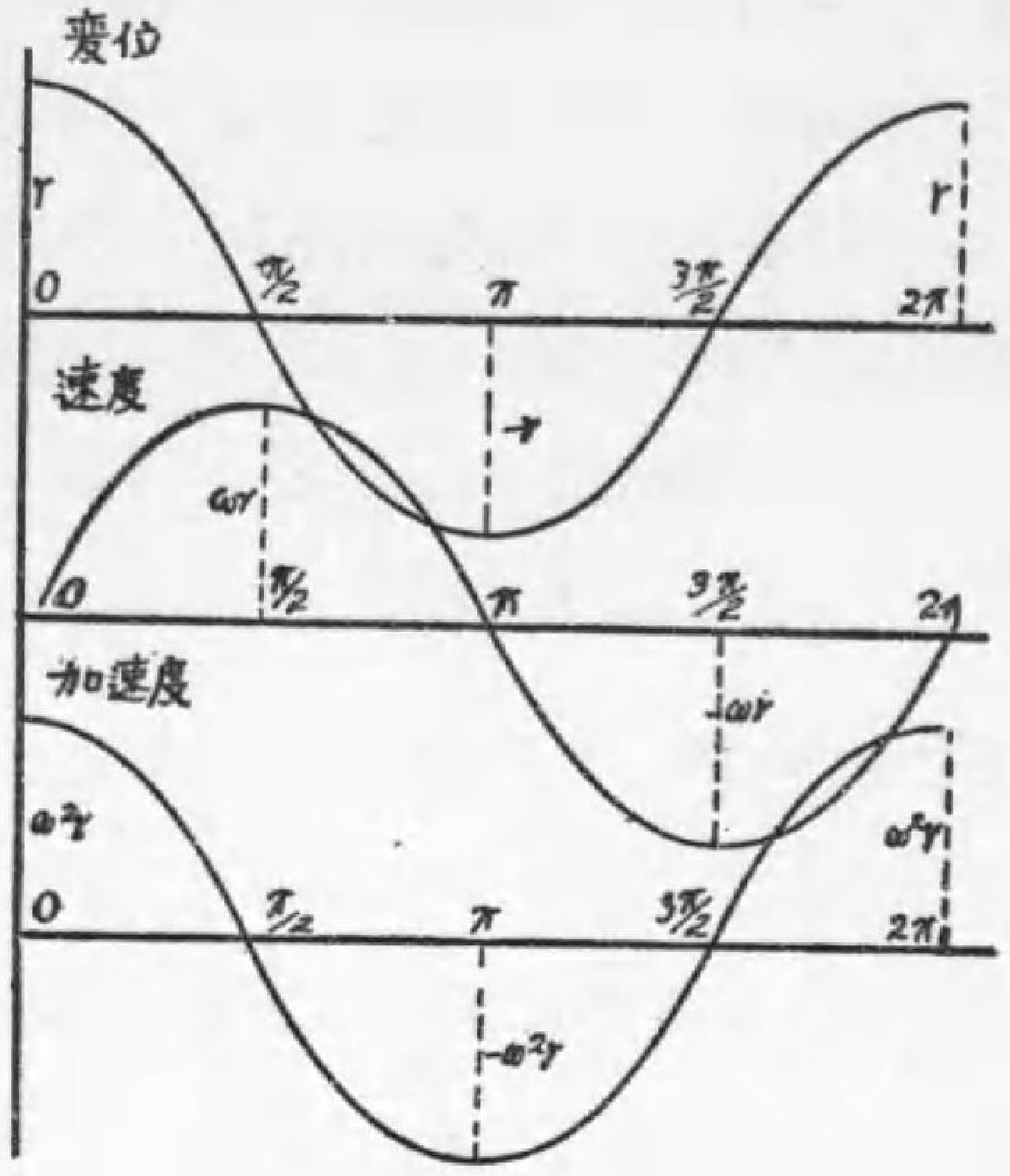
$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi r}{v} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(82)$$

$$n=\frac{\omega}{2\pi} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(83)$$

單弦運動の變位、速度及び加速度を夫々縱軸に、位相を橫軸にとつて線圖を表はすと第72圖の樣になる。即ち變位と加速度とは餘弦、速度は正弦の曲線になることは各式から明かである。

單弦運動をする簡單な例はゼンマイに錘をつけて、之

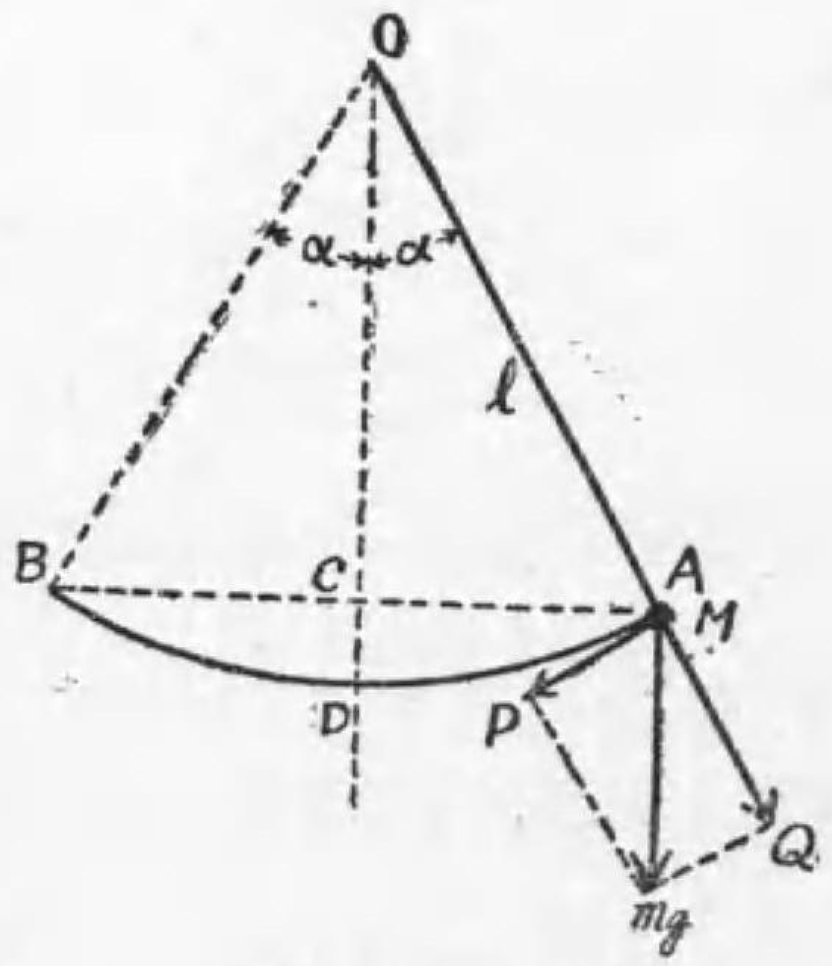
を引下げて放したときの振動運動や、次に述べる振子運動等である。




第 72 圖

### 66. 單振子 Simple pendulum

第73圖に示す樣に、O から糸(但し糸の重量を無視する)を下げて其先端に質量 M の錘をつけ、垂直位置から一方に引いて放すと、A は D を中心にして圓弧を描きつゝ左右に振動する。此裝置を單振子と云ふ。前と同樣にして、M が AB を一




第 73 圖



往復する時間を振子の週期と云ひ、M が D から一番離れた時の角度 $\alpha$ を振子の振幅と云ふ。糸の長さ OM を $l$、M の角速度を $\omega$、切線加速度を a とする。mg を P,Q 方向に分解すると、M の運動には P のみが關係するから

$$P = mg \sin\alpha = m\,a = m\,l\,\omega$$

$$\therefore\quad a = l\omega = g\sin\alpha$$

今振幅 $\alpha$ が極く小い時には

$$\frac{AC}{AO} \fallingdotseq \frac{\overset{\frown}{AD}}{AO} \quad 即ち \quad \sin\alpha \fallingdotseq \alpha$$

と見做し得るから、$\overset{\frown}{AD}=x$ と置けば

$$a = l\omega \fallingdotseq g\frac{\overset{\frown}{AD}}{AO} = \frac{g}{l}x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(84)$$

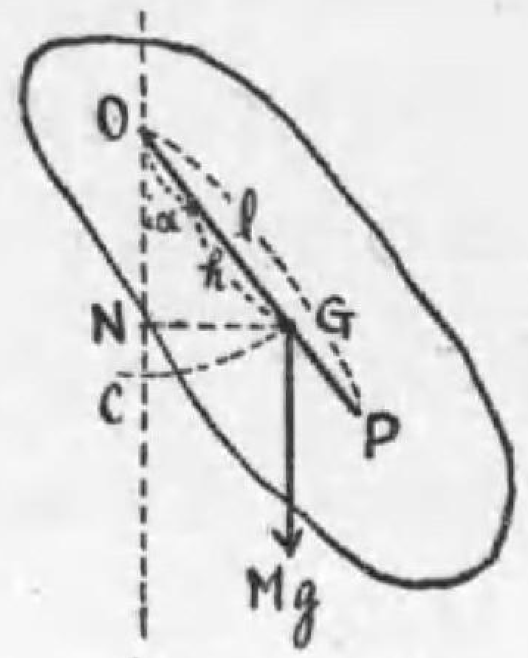
之を單弦運動の場合の加速度 (81) 式と比較すると、何れも加速度が變位に比例することが分る。故に振幅の小い振子の運動は單弦運動である。兩式を比較すると (84)式の $\frac{g}{l}$ は (81) 式の $\omega^2$ に相當するから

$$週期\ T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \cdots\cdots\cdots(85)$$

即ち週期は振幅の大小に無關係で、$\sqrt{l}$ に比例することが分る。週期が振幅の大小に無關係の性質を**等時性** (Isochronism) と云ふ。

### 67. 複振子 Compound pendulum

單振子は想像的のもので、實際には之を作ることが出來ない。依つて實際に用ふ振子は或る大さの物體から成り、之が或る水平軸の周りに振動する様にしてある。之を**複振子**と云ふ。



第　74　圖

此物體の全質量を M、その重心をGとすると、此物體に働く力は、(廻轉軸 O の摩擦は無視する) 重心に働く Mg である。

今 $l'$ なる長さの單振子を考へる。其週期 $T'$ は

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}$$

で與へられる。此振子の球の質量を m とすると、上式から

$$\frac{T'^2}{4\pi^2}=\frac{l'}{g}=\frac{ml'^2}{ml'g}$$

此分子は慣性モーメントであるから

$$\frac{T'^2}{4\pi^2}=\frac{\text{慣性モーメント}I'}{ml'g}$$

之と同様にして此複振子の週期を T, OG＝h とすると

$$\frac{T^2}{4\pi^2}=\frac{I}{Mgh}=\frac{Mk^2}{Mgh}=\frac{k^2}{gh}=\frac{l}{g}$$

卽ち　$l=\frac{k^2}{h}$ ……………………………………(86)

の關係がある。之で見ると複振子の週期は、長さ $l$ の單振子の週期に等しい。斯様な單振子を複振子の**相當單振子** (Equivalent simple pendulum) と云ふ。複振子の週期は



$$T=2\pi\sqrt{\frac{k^2}{gh}} \text{ ……………………………(87)}$$

複振子に於て、軸から OG 線に沿ふて相當單振子の長さ $l=\frac{k^2}{h}$ に等しい距離に P をとると、P 點を振子の**振動の中心** (Centre of oscillation) と云ふ。振動の中心と振子の懸點 O とは互に置換し得る。卽ち P 點を懸點とすれば、O 點が振動の中心となる。

g の測定。上述の理により、實驗から O, P 二點を決定することが出來たとすれば、其二點間の距離が $l$ であるから、週期 T を實測して g の値を求めることが出來る。

# 第五章　衝　　突

## 68. 衝突 Collision or impact

相對的に運動してゐる二物體が接觸するに至つた際、二物體は**衝突**したと云ふ。而して衝突の際の二物體の接觸點に於ける共通法線が各々の重心を通る場合には、**向心衝突** (Central collision) と云ひ、然らざるときは**斜衝**

突 (Oblique collision) と云ふ。

二物體が衝突する場合とか、物體を打擊する場合には力が物體に作用する時間は通常極めて短い。斯樣に短時間に力を加へる場合には此力を**衝擊力** (Impulsive force) と云ふ。この場合には任意の時間の力を測ることは困難であるから、運動量の變化に依つて其時間中の平均力を求める方法をとる。即ち

$$F=\frac{mv-mv_0}{t} \quad \text{（運動の第二定律參照）}$$

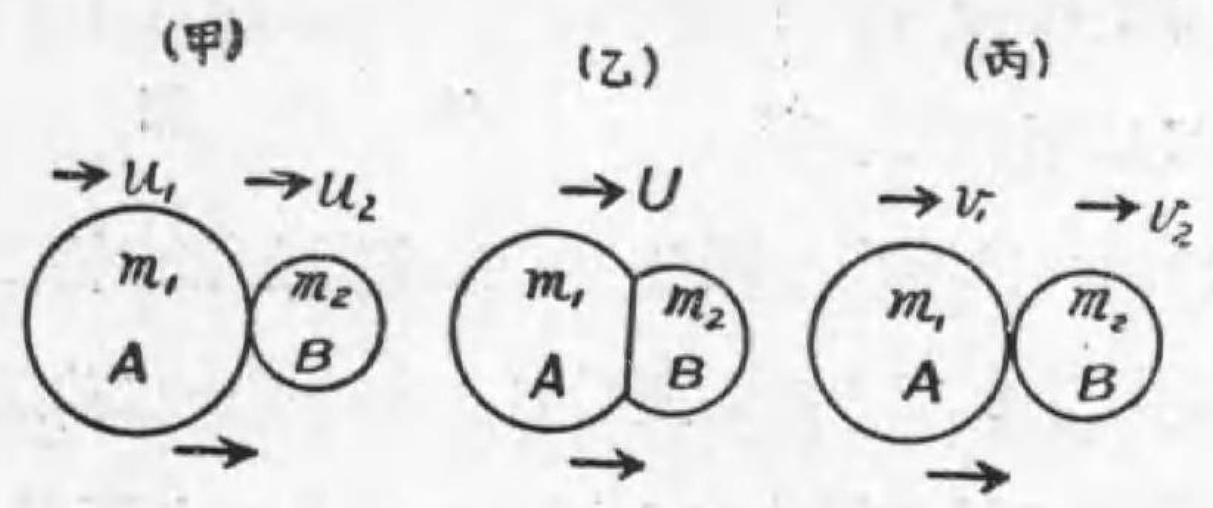
二物體が衝突する場合の力は前述の如く測定困難であるが、運動の第三定律から、甲が乙に與へる力と乙が甲に與へる反作用とは相等しく反對である。故に力と時間とを掛けた力積も等しい、從つて甲乙夫々の運動量の變化が等しくなければならぬ。即ち「衝突の前と後とに係らず運動量の總和は等しい」と云ふことが出來る。然し衝突の際に運動のエネルギーは、一部を熱音響等のエネルギーに變化させられるから、運動のエネルギーは衝突の前後相等しいとは云へない。

物體が衝突後如何なる運動をするかと云ふことは、其物體の彈性の多寡に依つて違ふ。彈性が全くなければ、之を**非彈性體** (Inelastic body) と云ひ、衝突した二物體



は一緒になつて一體として運動をする。

次に**彈性體** (Elastic body) であると、衝突後離れて別々の運動をする。此場合は衝突を二行程に分けることが出來る。例へば二つの球 A,B が夫々 $u_1, u_2$ の速度で運動して居たものが、向心衝突したとする。




第 75 圖

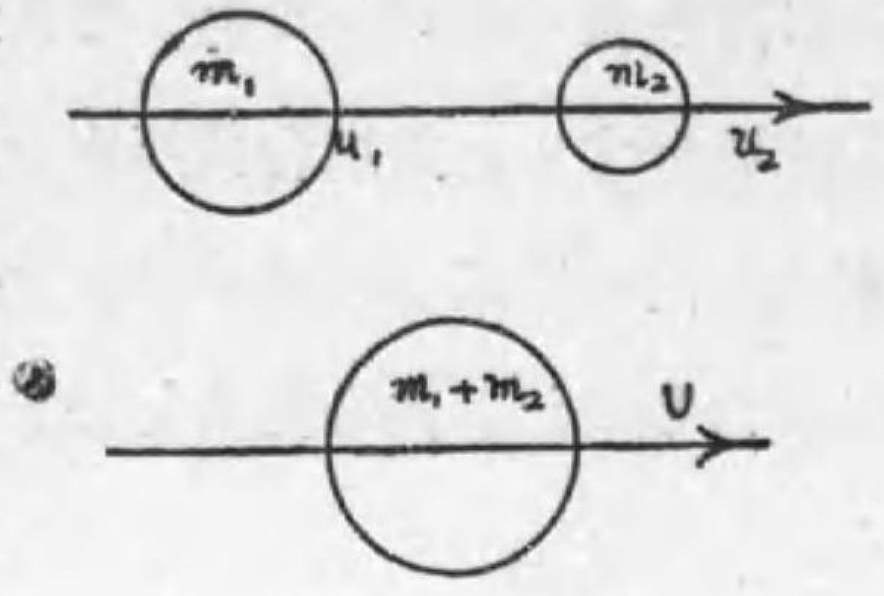
先づ A,B が接觸し(甲)、此時は接觸面の壓力は零であるが、次第に壓を增し幾分變形して(乙)の樣になる。最大壓を得ると其瞬間兩者は共通速度 U を得る。是迄の行程を壓縮行程と云ふ。次に球は彈力によつて原形を回復し樣として壓を減じ遂に壓は零となる(丙)。此後A,Bは夫々 $v_1, v_2$ の速度で離れてゆく。此行程を反撥行程と云ふ。

非彈性體では、第一行程のみで反撥行程を有たないことは前述の通りである。

### 69. 非彈性體の向心衝突

簡單の爲めに非彈性球に就いて考へる。

今 A,B 二球の質量を $m_1, m_2$ とし、速度を $u_1, u_2$ とする。衝突すれば一體となり速度は U となる。此 場合 $u_1>u_2$ なることは明かで、衝




第 76 圖

突に依り $m_1$ は速度を減じ $m_2$ は速度を增す筈であるから、$u_1>U>u_2$ である。運動のエネルギーは前述の如く衝突の前後に於て變化するが、$m_1$ の失つた運動量は $m_2$ の得た運動量に等しい。何となれば衝突中の任意の時間に於て、二球に働く力は運動の第三定律に依り等しく反對で、時間は同一であるから力積が等しく反對である。即ち運動量の變化は等しい。今力積を I とすれば

$$m_1u_1-m_1U=I=m_2U-m_2u_2$$

$$\therefore\quad m_1u_1+m_2u_2=(m_1+m_2)U$$

$$U=\frac{m_1u_1+m_2u_2}{m_1+m_2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(88)$$

$m_2$ の速度 $u_2$ が反對方向のときは

$$U=\frac{m_1u_1-m_2u_2}{m_1+m_2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(88')$$

此場合 $m_1u_1>m_2u_2$ なれば U は $u_1$ と同方向、$m_1u_1<m_2u_2$



なれば、U は $u_2$ と同方向となることは明かである。

衝突の爲めに生ずる運動のエネルギーの損失は次の如くなる。$E_1$ $E_2$ を夫々衝突前後の運動のエネルギーとすると、

$$E_1=\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2$$

$$E_2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)U^2$$

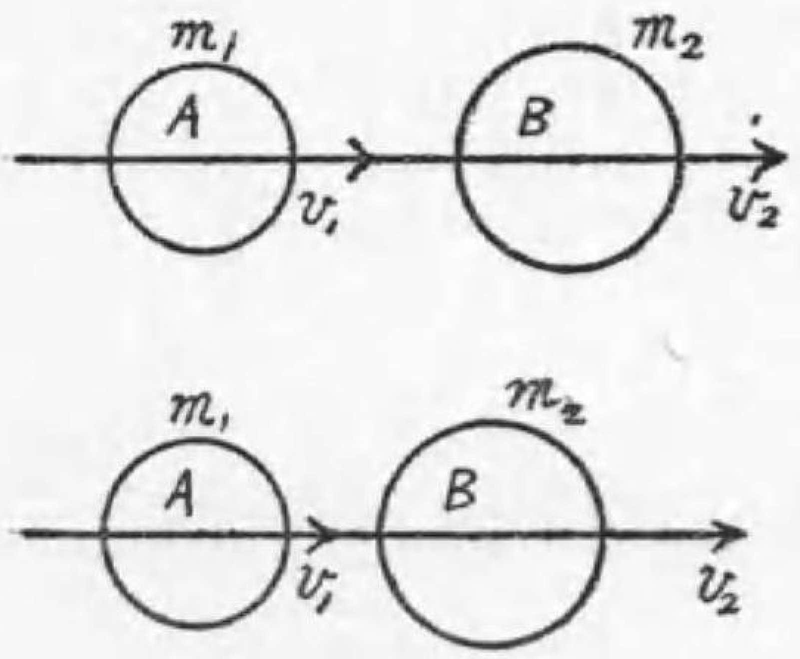
損失エネルギーを E とし、U の代りに (88) 式又は (88′) 式を代入すれば

$$E=E_1-E_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(u_1\mp u_2)^2\quad\cdots\cdots(89)$$

即ち損失エネルギーは常に正である。換言すれば、二つの非彈性球が衝突した場合には、必ず運動のエネルギーが失はれることを示す。此エネルギーは前述の如く熱音響等のエネルギーに變化するのである。

## 70. 彈性體の向心衝突

象牙金屬球等が互に衝突する場合には彈性體であるから前述の如く二球は合一せず前と異る速度で分離する。




第 77 圖

質量 $m_1, m_2$ の二個の彈性球が夫々 $u_1, u_2$ の速度

で運動して衝突したとする。衝突後は夫々 $v_1, v_2$ の速度に變化する。衝突の間に二球の受ける力積の大さは等しい故、運動量の變化は相等しい筈である。故に

$$m_1u_1-m_1v_1=I=m_2v_2-m_2u_2$$

$$\therefore\quad m_1u_1+m_2u_2=m_1v_1+m_2v_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(90)$$

即ち衝突の前後の運動量の和は不變である。換言すれば、運動量の和は衝突に依つて變じない。

ニュートンは衝突に關して次の定律を實驗から見出した。即ち、衝突後二球が遠かる相對速度即ち**分離速度** (Velocity of separation) と衝突前の二球が相近づく相對速度即ち**接近速度** (Velocity of approach) との比は、速度の値に關係なく球の種類に特有の常數である。式で表はすと、分離速度は $v_2-v_1$ で接近速度は $u_1-u_2$ であるから

$$e=\frac{u_2-v_1}{u_1-u_2}$$

$$\therefore\quad v_2-v_1=e(u_1-u_2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(91)$$

此常數即ち e を**反撥係數** (Coefficient of restitution) と云ふ。

次に反撥係數の表を示さう。



反　撥　係　數　表

| | | | |
|---|---|---|---|
| 硝子球と硝子球 | 0.94 | 鉛球と鉛球 | 0.20 |
| 象牙球と象牙球 | 0.81 | 鐵球と鉛球 | 0.13 |
| 鐵球と鐵球 | 0.66 | | |

完全彈性球では $e=1$、完全非彈性球では $e=0$、實際のものは $1>e>0$

(90)(91)兩式から $v_1, v_2$ を求めると

$$v_1=\frac{(m_1-em_2)u_1+(1+e)m_2u_2}{m_1+m_2}$$

$$=u_1-\frac{m_2(1+e)}{m_1+m_2}(u_1-u_2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(92)$$

$$v_2=\frac{(m_2-em_1)u_2+(1+e)m_1u_1}{m_1+m_2}$$

$$=u_2+\frac{m_1(1+e)}{m_1+m_2}(u_1-u_2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(93)$$

上式に於て $u_1>u_2$ であるから第二項は正である。從つて(92)式から $v_1<u_1$ (93)式から $v_2>u_2$ であることが分る。即ち衝突後の速度は、衝突前と反對に A の方が B より小くなる。

兩式中 $e=1$, $m_1=m_2=m$ と置けば $v_1=u_2$, $v_2=u_1$ となる。即ち同質量の完全彈性球が衝突すると、速度を交換し合ふことを知る。

$e=o$ と置けば (88) 式と一致して非彈性球の場合とな

る。

AとBとが反對方向の速度を有つてゐたとすれば、$u_2$ の代りに $-u_2$ を用ふればよい。此時の結果の正負により、衝突後の球の動く方向が分る。

前同樣運動のエネルギーを計算して見やう。

$$E_1=\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2;$$

$$E_2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$E=E_1-E_2$$

$$=\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2-\left(\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2\right)$$

$v_1, v_2$ の値を代入して計算すれば

$$E=\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(u_1-u_2)^2 \quad \cdots(94)$$

實際の場合は $e<1$ であるから常に正である。即ち常にエネルギーの損失があることになる。$e=1$ の完全彈性球の場合には、損失エネルギーがないことになり、$e=o$ なれば非彈性球の場合になる。

### 71. 彈性球と固定壁との向心衝突

第68節に述べた壓縮行程に働く力積を**壓縮力積**（Impulse of compression）と云ひ、反撥行程の夫れを**反撥力積**（Impulse of restitution）と云ふ。前者を $I_c$ 後者を $I_r$ とすれば、全力積 I は



$$I=I_c+I_r \quad \cdots\cdots(95)$$

兩行程の中間の共通速度を U とすれば、（第75圖參照）力積は運動量の變化に等しい故

$$I_c=m_1(u_1-U)=m_2(U-u_2) \quad \cdots\cdots(96)$$

$$I_r=m_1(U-v_1)=m_2(v_2-U) \quad \cdots\cdots(97)$$

兩式から共通速度 U を求めると

$$U=\frac{m_1u_1+m_2u_2}{m_1+m_2}, \qquad U=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$$

之を代入して $I_c, I_r$ を求めると

$$I_c=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(u_1-u_2) \quad \cdots\cdots(98)$$

$$I_r=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_2-v_1) \quad \cdots\cdots(99)$$

(99)式と(98)式の比を求めると

$$\frac{I_r}{I_c}=\frac{v_2-v_1}{u_1-u_2}=e$$

$$\therefore\ I_r=e.I_c \quad \cdots\cdots(100)$$

彈性球の質量を m とし、之が固定面に直角に u の速度で衝突したとする。玆に兩物體の間の反撥係數を e とする。此場合壓縮行程の力積を求めると

$$I_c=mu$$

次に反撥の速度を v とすると、反撥力積は

$$I_r = mv$$

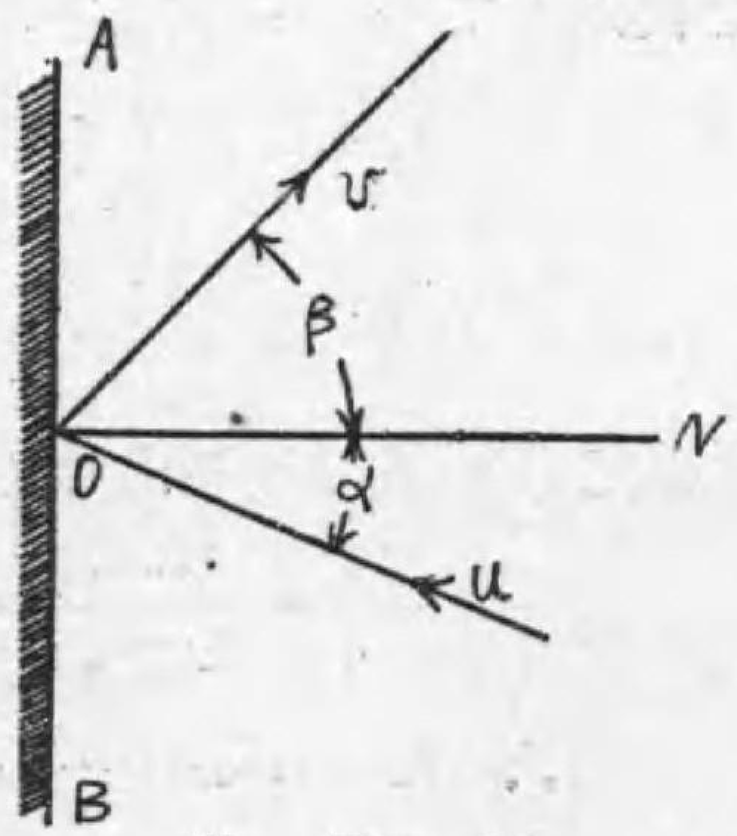
(100)式により　$I_r = e.I_c$　であるから、反撥の速度は

$$v = eu \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (101)$$

即ち u なる速度で衝突すれば、反撥係數を乘じた速度で反撥することを知る。若し兩者が完全彈性體であれば $e=1$ であるから、投射速度と反撥速度とは等しい譯である。

### 72. 球と固定壁との斜衝突

質量 m の彈性球が反撥係數 e の固定壁に圖に示す樣に $\alpha$ の角度で投射するものとし、反撥した球は $\beta$ の角度をとるものとする。其速度を各々 u, v とし、之を壁面の方向と、夫れに直角の方向とに分けると、壁面方向には $u\sin\alpha, v\sin\beta$ 直角方向には $u\cos\alpha$, $v\cos\beta$ を得る。前節により



第　78　圖

$$v\cos\beta = e\,u\cos\alpha$$



壁面が平滑であると假定すると、壁面には何等の力も働かないから

$$u\sin\alpha = v\sin\beta$$

兩式から u, v を消去すれば

$$\tan\beta = \frac{1}{e}\tan\alpha \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (102)$$

又

$$v = \sqrt{(v\sin\beta)^2 + (v\cos\beta)^2}$$
$$= \sqrt{(u\sin\alpha)^2 + (e\,u\cos\alpha)^2}$$
$$= u\sqrt{\sin^2\alpha + e^2\cos^2\alpha} \cdots\cdots\cdots\cdots (103)$$

普通 $e<1$ であるから $\beta>\alpha, v<u$, であるが、完全な彈性體の場合には $e=1$ 從て $\alpha=\beta$, $u=v$ である。又非彈性體のときには $e=0$ 從つて $\beta=\frac{\pi}{2}$ 即ち球は壁面に沿ふて $u\sin\alpha$ の速度で運動する。

## 例　　題

(1) 質量 m 瓩の杭を、h 米の高さから質量 M 瓩の槌を落して、n 回打擊して地中に深さ a 米丈け打ち込んだと云ふ。地の平均抵抗を求めよ。

**解**　v を槌が杭に衝突後の共通速度とすると、運動量不變の理に依り

$$M\sqrt{2gh} = (M+m)v$$

R を地の平均抵抗とすれば、杭と槌との重量卽ち $(M+m)g$ は R に反對方向に働くことになる故、其差 $R-(M+m)g$ の力が杭に反對する。　故に一回に $\frac{a}{n}$ 米丈け沒入せしめるには、{R−

$(M+m)g\}\dfrac{a}{n}$ の仕事が費されゝばよい。この仕事は槌と杭との運動のエネルギーでなされる故

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2=\{R-(M+m)g\}\frac{a}{n}$$

之に v の値を代入すれば

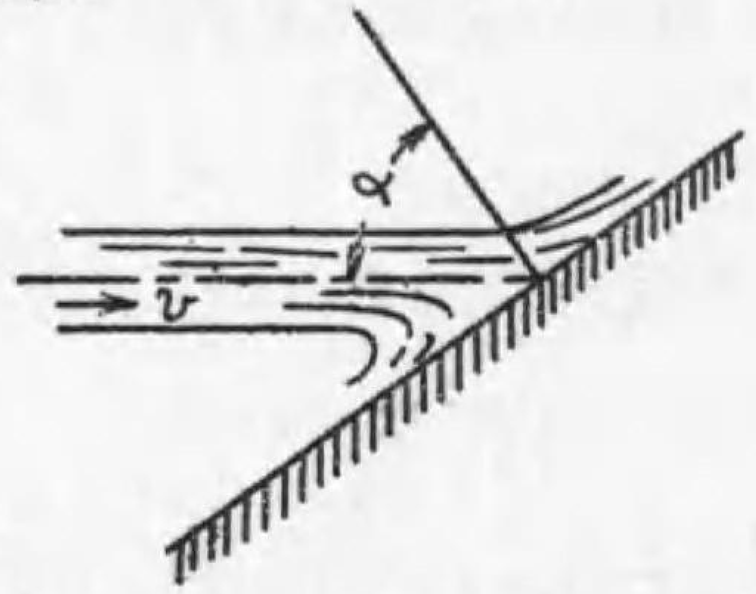
$$R=(M+m)g+\frac{ngh}{a}\cdot\frac{M^2}{M+m}$$

重力單位で表はす爲に g で割り

$$R=M+m+\frac{nh}{a}\cdot\frac{M^2}{M+m}$$

即ち杭の上に $M+\dfrac{nh}{a}\cdot\dfrac{M^2}{M+m}$ 瓩の錘を載せると、杭は靜かに地中に沒入する筈である。

(2) 圖の樣に固定壁に水流が衝突する場合の壓力を求む。




**解** 水流は固定壁の垂直線に α の角度で v の速度で衝突するものとし、m を毎秒壁面に衝突する水量、水流の斷面積を A, 水の密度を ρ とする。實際には水は完全な非彈性體ではないが、先づ非彈性體と見做して差支ない。故に壁面に沿ふ分速度丈けで流れ去る。壁面に壓力を與へるのは垂直分速度によるのであつて衝突の瞬間此分速度は零となるから運動の第二定律から

壁面の壓力 $=m.v.\cos\alpha=$ 毎秒の運動量の變化。$m=vA\rho$ であるから

壁面に働く壓力 $=A\rho v^2\cos\alpha$

重力單位で表はせば $\dfrac{A\rho v^2\cos\alpha}{g}$

## 問　　題

(1) 50瓦の彈丸が毎秒 400 米の速度で、固定した板に衝突して $\dfrac{1}{100}$



秒で靜止したとすれば、衝突の平均の力如何。

答 $2\times10^8$ダイン

(2) 質量 m の彈丸を質量 M の大砲で水平に發射するとき、大砲が自由に反作用で後退出來る場合と、之を固定した場合との彈丸の初速度の比は $\sqrt{\dfrac{M}{M+m}}$ なることを證せよ。但し火薬の質量は無視する。

(3) 3米秒$^{-1}$ の速度を有する重さ 30 瓩の非彈性球が、同質の 50 瓩の球に向心衝突をして 5.5 米秒$^{-1}$ の速度になつたと云ふ。50瓩の方の最初の速度如何。 答 同方向に 7米秒$^{-1}$

(4) 完全彈性を有する甲乙二球があつて、甲は 10 瓩で 12米秒$^{-1}$ の速度を有し、乙は 30 瓩で正反對の方向に 8 米秒$^{-1}$ の速度を有す。衝突後の速度如何。

答 甲は乙の最初の速度の方向に 18 米秒$^{-1}$
乙は甲の最初の速度の方向に 2 米秒$^{-1}$

(5) 甲の彈性球が乙の彈性球に衝突したとき、前者が靜止したとすれば、兩者の最初の速度の比は $\dfrac{k}{k-1}$ で表はされることを證明せよ。

(6) 速度 8 米秒$^{-1}$ で斷面 1 平方米の鐵管内を流れる水がある。之に直角な壁面に對する壓力は幾何であるか。又壁を 30° 傾ければ幾何になるか。但し水の密度は 1 立方米に付き 1000 瓩とする。

答 6531 瓩重、 5649 瓩重

(7) 第 72 節に述べた球と固定壁との斜衝突に於ける運動のエネルギーの損失を計算せよ 答 $\dfrac{1}{2}mu^2\cos^2\alpha(1-e^2)$

# 第六章　簡單な機械

## 73. 機械 Machine

機械とは物體の組合せによつて構成せられ、與へられたエネルギーを變化して、適當な仕事をなさしめる裝置である。

機械の內槓桿、滑車等の簡單な機構を有するものを**單一機械** (Simple machine) と云ふ。普通機械と稱せられるものは、單一機械の組合せからなつてゐると考へることが出來る。

內燃機關、蒸氣機關、電動機等は熱、電氣等のエネルギーを機械的の仕事に變化するもので、之等を特に**原動機** (Prime mover) と云ふ。

**74. 機械の效率** Efficiency of a machine

一般にエネルギー不滅律から云ふと、機械に與へられたエネルギーは、其機械がなす仕事の量に等しくなければならない。之を**仕事の原理** (Principle of work) と云ふ。然し實際には摩擦抵抗等が働くから、吾人が機械に要求する丈けの仕事はなし得ない。卽ち機械に與へられたエネルギーは、有效な仕事の外に摩擦其他に打勝つ爲の仕事に費される譯である。今機械に與へたエネルギーを W、機械のなした有效な仕事を w とすれば、

$$\eta=\frac{w}{W}$$



此 $\eta$ を機械の**效率** (Efficiency) と云ふ。效率は 1 より小さい數であるから、普通百分率(%)で示す。

二つ若くは二つ以上の機械を組合せた機械の效率は、各機械の效率の積に等しい。卽ち第一第二の機械の效率を $\eta_1, \eta_2$ とすれは、組合せた機械の效率 $\eta$ は

$$\eta=\eta_1\times\eta_2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(105)$$

何となれば、第一の機械に與へられたエネルギーを $W_1$、之れがなした仕事を $w_1$ とすれば、$\eta_1=\frac{w_1}{W_1}$ で、第二の機械に與へられたエネルギーは $w_1$ でなければならぬ。第二の機械がなした仕事 $w_2$ は卽ち組合せた機械のなした仕事で、$\eta=\frac{w_2}{W_1}$ であるべきである。第二の機械の效率は $\eta_2=\frac{w_2}{w_1}$ であるから

$$\eta_1\times\eta_2=\frac{w_1}{W_1}\times\frac{w_2}{w_1}=\frac{w_2}{W_1}=\eta.$$

機械が二つ以上組合せられた場合でも同樣のことが言へる。

**例** 齒車が 4 個連續して嚙合つて廻轉してゐるとき、齒車 $A_1$ と齒車 $A_2$ との嚙合せの效率を 90%, $A_2$ と $A_3$ との夫れを 93%, $A_3$ と $A_4$ との效率を 90% とすれば、全體の效率は

$$\eta=0.90\times0.93\times0.90\times100\,\%=75.33\,\%$$

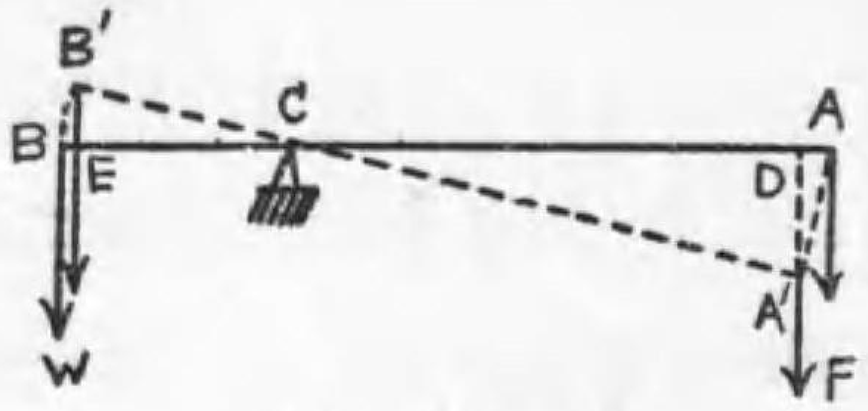
となる。

以下簡單な機械の二三に就いて說明しやう。

### 75. 槓桿　Lever

槓桿は單なる一本の棒で、其一點を支へ、一點に力を加へて他の一點にある重量と釣合はせるものである。此等の點を夫々**支點**（Fulcram)、**力點**（Point of application)、**重點**（Point of exertion）と云ふ。

第79圖に於てCを支點、Aを力點、Bを重點とし、Fの力でWを支へて平衡してゐるとする。仕



第　79　圖

事の原理から、今槓桿が水平の位置から僅かに動いて、A′CB′となつたとすると、Fのなした仕事は F×A′D, Wの上に加へられた仕事は W×B′E である。エネルギーの損失がないとすれば

$$F\times A'D=W\times B'E$$

然るに相似三角形の理により

$$A'D:B'E=A'C:B'C=AC:BC$$

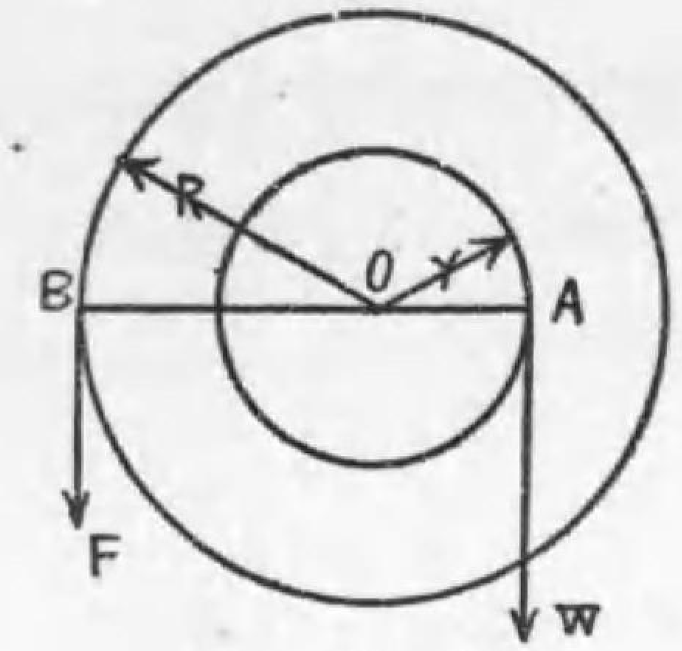
$$\therefore\quad F\times AC=W\times BC$$

即ちモーメントの項で述べたことは、槓桿の場合にも應用されることが分る。ACをBCに比して大きくすれば、



僅かな力で重い物體を揚げることが出來る。

### 76. 輪軸　Wheel and axle



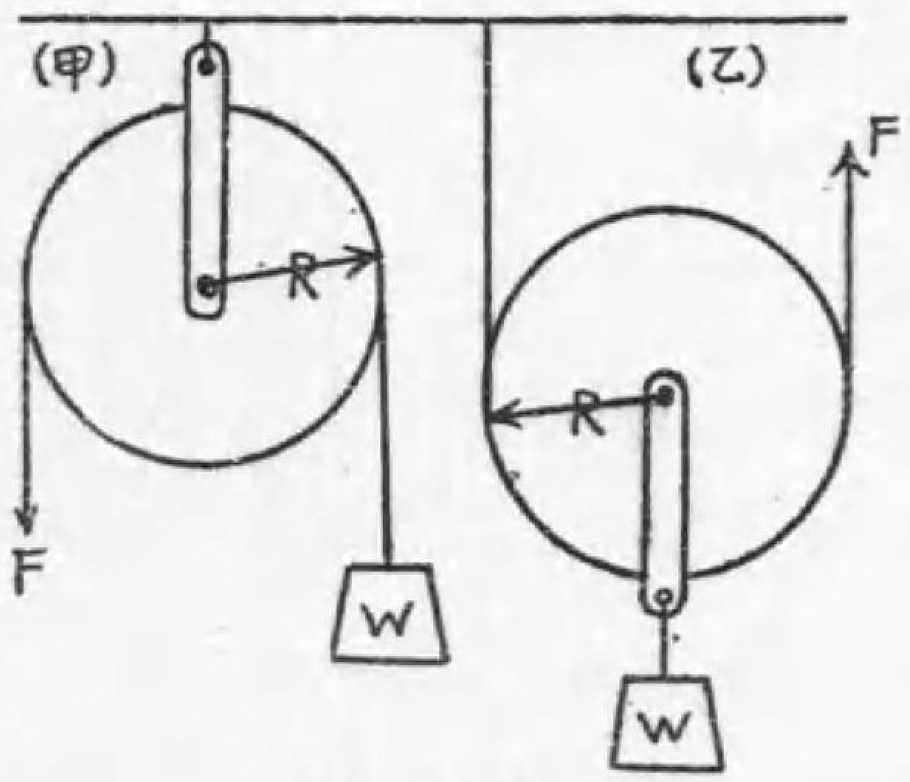
第　80　圖

輪軸とは圖の如く、大小二個の輪が一軸に固定されたもので、大なる輪に綱を巻きつけ、之を引くときは、小なる輪に巻きつけられた綱によつて物體を巻き上げることが出來る裝置である。

大輪の半徑をR、小輪の半徑をrとし、荷の重量をW、引く力をFとすれば、槓桿の理によつて

$$F.R=W.r$$

即ちRがrに比して大なる程、Wに比して小なるFで物體を揚げることが出來る。



第　81　圖

### 77. 滑車　Pulley

第81圖に示すものは滑車であつて、(甲)は**靜滑車**(Fixed pulley)、(乙)は**動滑**

車 (Movable pulley) である。前者は單に方向を變ずるのみであることは、W と F とのモーメントが相等しいことから明である。後者は中央が重點、左端が支點右端が力點になるから、支點に對してモーメントをとれば

$$W.R = F.2R$$

$$\therefore\ F = \frac{W}{2}$$

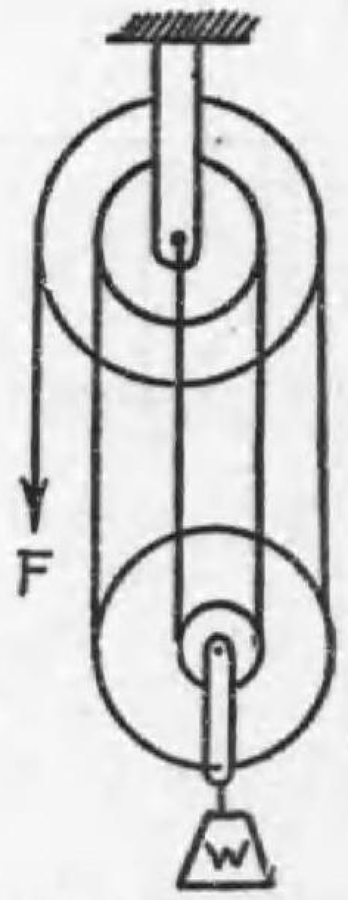
卽ち W の半分の力で支へることが出來る。

今仕事量を考へて見ると、F が滑車に與へた仕事量を F.H とし、滑車がなした仕事を W.h とすれば、仕事の原理から　$FH = W.h$　$F = \frac{W}{2}$ であるから

$$h = \frac{H}{2}$$

卽ち F の働く距離は W の上る距離の二倍である。

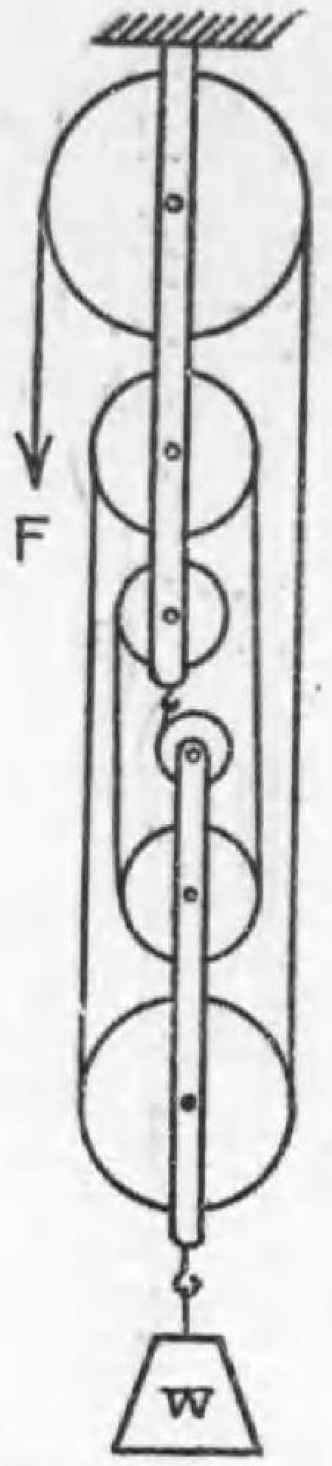
第82圖及び第83圖に示すものは、一本の綱で總ての滑車が連結されてゐるもので、綱の各部の張力は相等しい。下端に W なる重量を掛け、之を F なる力で釣合せると、第82圖のものでは、W を 4 本の綱で支へてゐるから 1 本の綱は $\frac{W}{4}$ の力を受ける。卽ち $F = \frac{W}{4}$ となる。第 83 圖の場合には、同様に



第 82 圖



$F = \frac{W}{6}$ でよいことになる。



第 83 圖

一般に上下の滑車を連ねる綱が n 本あれば $\frac{W}{n}$ 丈けの力を加へれば、W を支へることが出來る。然し W を揚げる高さは前と同様にして

$$Wh = \frac{W}{n} \times H \qquad \therefore\ h = \frac{H}{n}$$

卽ち H に比して h は極僅かになる。

### 78. 捲上機械

I　ディフアレンシヤル、チェーン、ブロック (Differential chain block)

第84圖に示す如く滑車に鎖を用ひて重いものを揚げる裝置をチェーン、ブロックと云ふ。此型の原理は第 85 圖に示す如く、半徑の僅か異つた二個の滑車が固定されて居り、下に一個の滑車があつて圖に示す様に鎖が切目無しに掛けてある。尤も鎖が滑らない樣に滑車に鎖型の溝がつけてある。今 P の力で a 滑車を一回轉させると、鎖は D 側で卷き付くと同時に E 側で外れ、結局 a と b との車周の差丈け卷き付くことになり、荷物は其半分丈けの高さを上ることになる。

摩擦がないものとすれば、力の釣合から

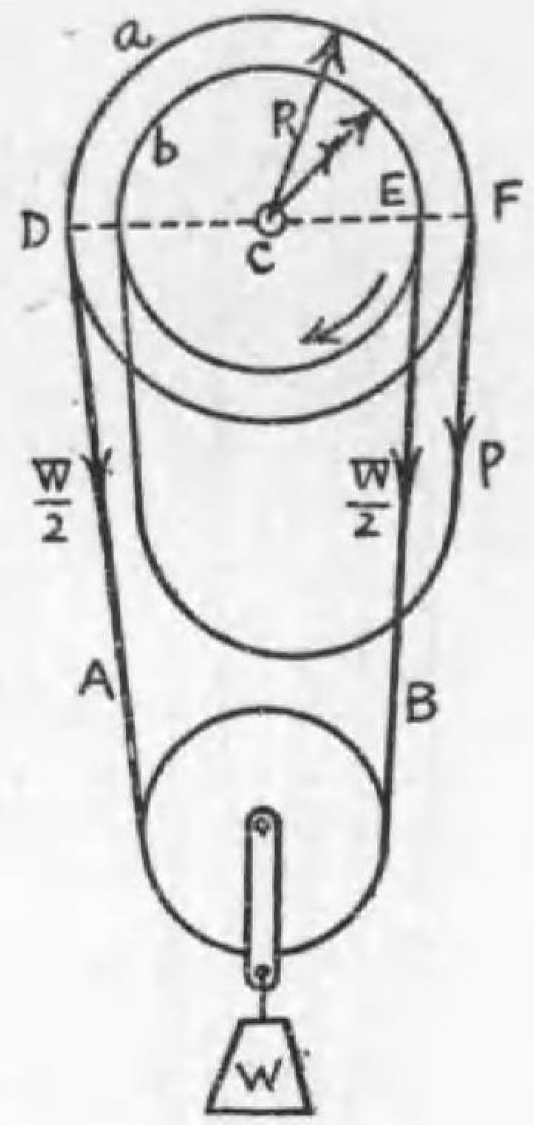
$$\frac{1}{2}W\times CD$$
$$=\frac{1}{2}W\times CE+P\times CF$$

上部の滑車の半徑を夫々 R,r とすれば、CF=CD=R, CE=r であるから、

$$\frac{1}{2}W(R-r)$$
$$=P\times R$$

$$\therefore\quad P=\frac{1}{2}W\frac{R-r}{R}$$

第 84 圖



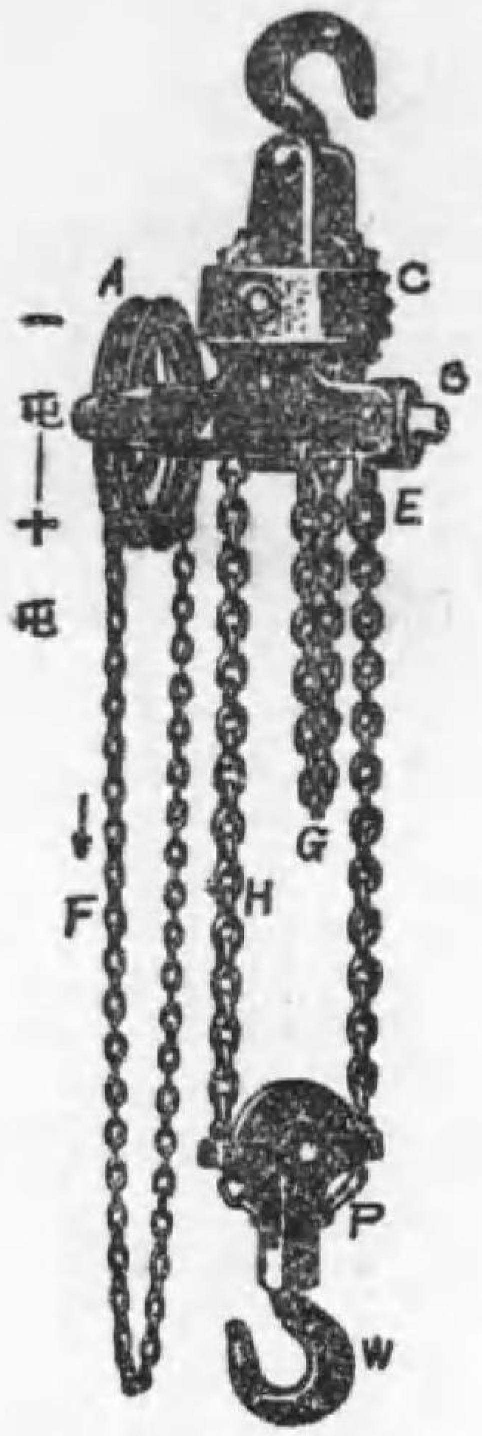
第 85 圖

R−r は R に比して小であるから、P は W より遙かに小くてよい譯である。

II　ウオーム、ギヤー、チェンブロック (Worm gear chain block)

之はねぢ齒桿 (Worm) と齒車 (Wormwheel) とを利用したものである。A は鎖車で、之に固定してあるねぢ齒桿 B と齒車 C とが嚙合つてゐる。今鎖を引張つて A 車を一回轉させると、B が一回轉する。今齒車 C の齒數を n とすれば、之が一回轉する爲には B が n 回轉し





第 86 圖

なければならぬ。A 車を一回轉するに鎖を長さ L 丈け引張らなければならないとすれば、齒車 C を一廻轉させるには nL 丈け引張ることになる。C には鎖車が同軸に固定してあつて、之に EPHG (E は枠に固定してある) なる別の鎖が卷いてある。今 C が一廻轉 (卽ち A が n 廻轉) して EPHG が $l$ 丈け卷かれるものとすれば、荷 W は其時 $\frac{l}{2}$ 丈け上る。依つて仕事の原理から

$$W\times\frac{l}{2}=F\times nL$$

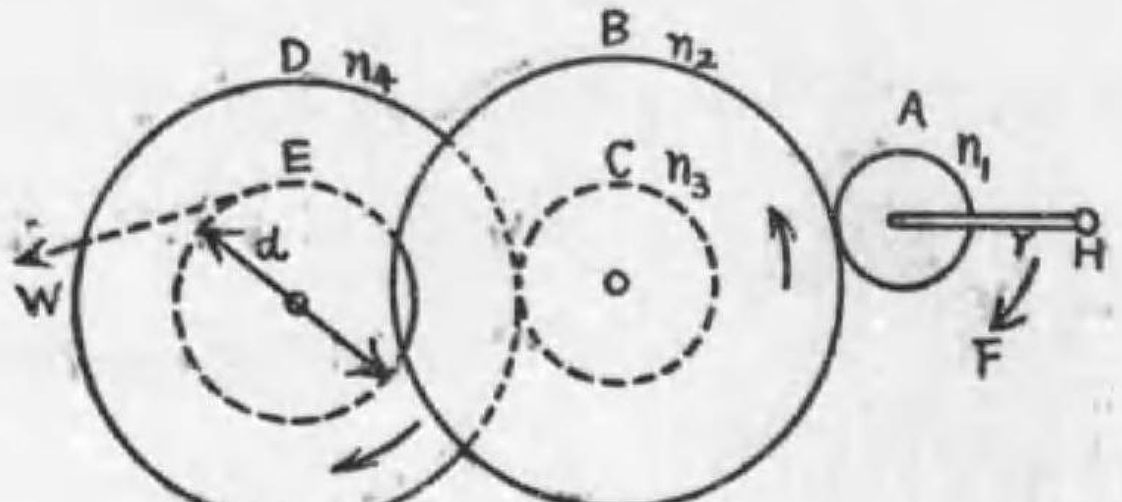
$$\therefore\quad F=\frac{W}{2}\times\frac{l}{nL}$$

$l$ は nL に比して極めて小いから、僅少な力で荷を揚げることが出來る。

**79.　齒車の組合せ**

第87圖に於て、A, B, C, D を齒車とし、齒數を夫々 $n_1, n_2, n_3, n_4$ とする。A と B が嚙合ひ、C は B と同軸で互に固定され、D と嚙合つてゐる。D には鼓胴 (Drum) E

(直徑 d) が固定されてゐる、之に綱を捲きつけて荷を引張るものとする。



第 87 圖

Aを廻すにはハンドルH (長さr) が取付けてある。

Aを一廻轉させるとB及びCは $\frac{n_1}{n_2}$ 廻轉する。又Cが一廻轉すれば、D及びEは $\frac{n_3}{n_4}$ 廻轉する故、A一廻轉でD及びEは $\frac{n_1}{n_2}\times\frac{n_3}{n_4}$ 廻轉する譯である。依つてA一廻轉で鼓胴に卷き付く綱の長さは $\pi d\times\frac{n_1}{n_2}\times\frac{n_3}{n_4}$ である。今仕事の原理から考へて見るに、Aを一廻轉卽ちハンドルを一廻轉させるには $F\times 2\pi r$ 丈けの仕事をする。之に對して荷Wを引張る仕事は $W\times\pi d\times\frac{n_1}{n_2}\times\frac{n_3}{n_4}$ であるから次の式が成立つ。(但し各部の摩擦等の損失はないものとする。)

$$F\times 2\pi r=W\times\pi d\times\frac{n_1}{n_2}\times\frac{n_3}{n_4}$$

$$\therefore\ F=\frac{d}{2r}\times\frac{n_1}{n_2}\times\frac{n_3}{n_4}\times W$$

卽ち $n_1, n_3$ を $n_2, n_4$ に比して小くし、ハンドルの腕を相當

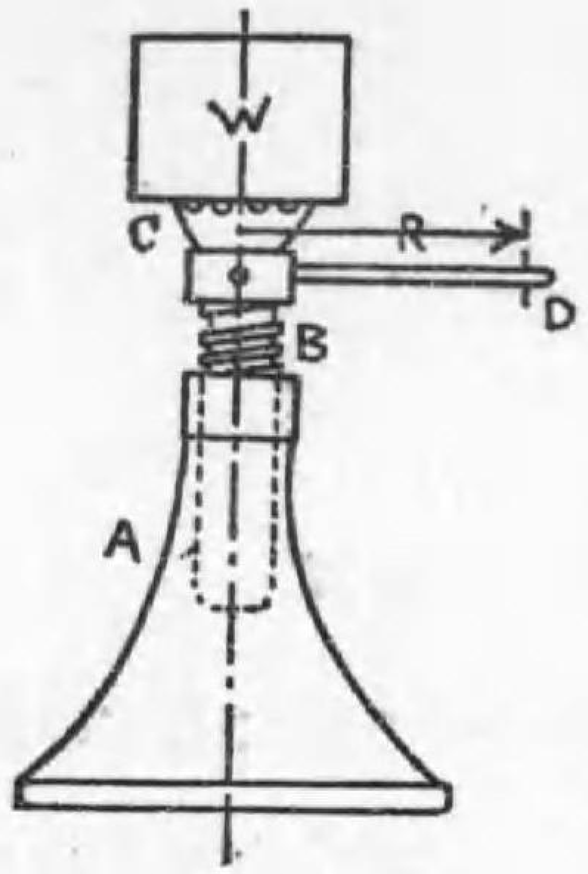


長くすれば、僅かな力で重い荷を動かすことが出來る。

此理はウインチ (Winch) 起重機 (Crane) 等多くの機械に應用されてゐる。

## 80. ねぢヂヤツキ

(Screw jack)



第 88 圖

これは第88圖に示す樣な構造になつてゐて、重い荷例へば鐵道車輛、自動車等を扛上させるに使はれる。Bはをねぢで Aの中のめねぢに嵌つて居り、Cは荷の臺でBに緩く取付けてあり、荷がねぢと一緒に廻らぬ樣にしてある。Dはハンドルで、之を廻せばBが廻り從つてAから拔け出して荷を揚げることになる。

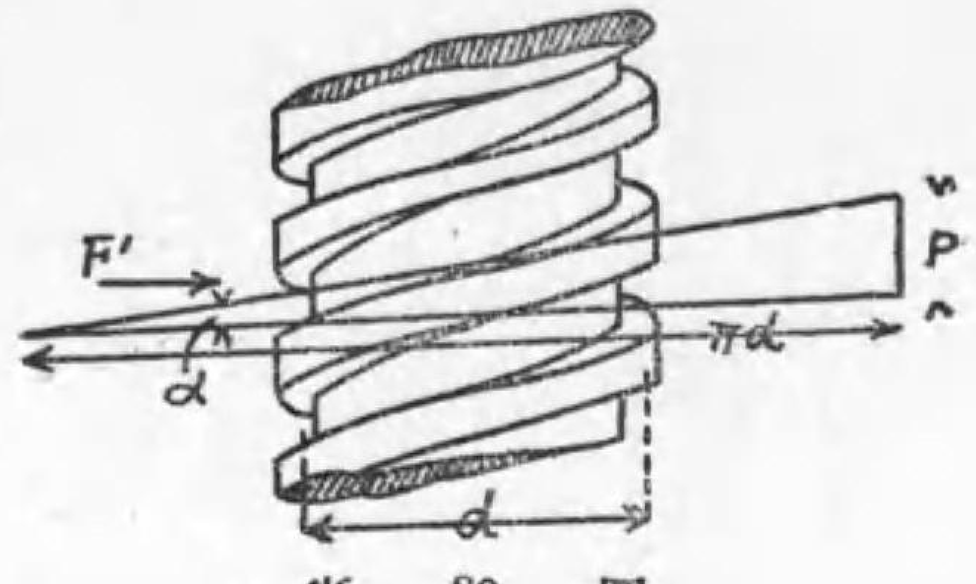
今ハンドルの長さRのところに力をかけるとすると、ねぢを一廻轉させる仕事は $F\times 2\pi R$ である。ねぢのピッチをpとすると、ねぢが一廻轉すればp丈け上ることになる故、荷の受けた仕事は $W\times p$ である。故に摩擦がないものとすれば

$$W\times p=F\times 2\pi R$$

$$\therefore\ F=\frac{p}{2\pi R}W$$

pはRに比し極めて小さいから、FはWより遙かに小さい力でよいことになる。

然し實際には摩擦がある故、Fの値は上式のものより大きくなる筈である。



第89圖

Wなる垂直の荷を受けて之を水平力F'で一廻轉させることは、第89圖で分る樣にねぢの傾きαに相當する斜面を水平力F'でWを押し上げるのと同じ理である。故に第60節(60)式が適用されることになる。

$$F'=\frac{\tan\alpha+\mu}{1-\mu\tan\alpha}.W$$

今ねぢの平均直徑をd,傾きをαとすると、ピツチpとの間に次の關係がある。

$$\tan\alpha=\frac{p}{\pi d}$$

$$\therefore\ F'=\frac{\mu\pi d+p}{\pi d-\mu p}.W$$

茲にμはをねぢとめねぢとの間の摩擦係數である。今



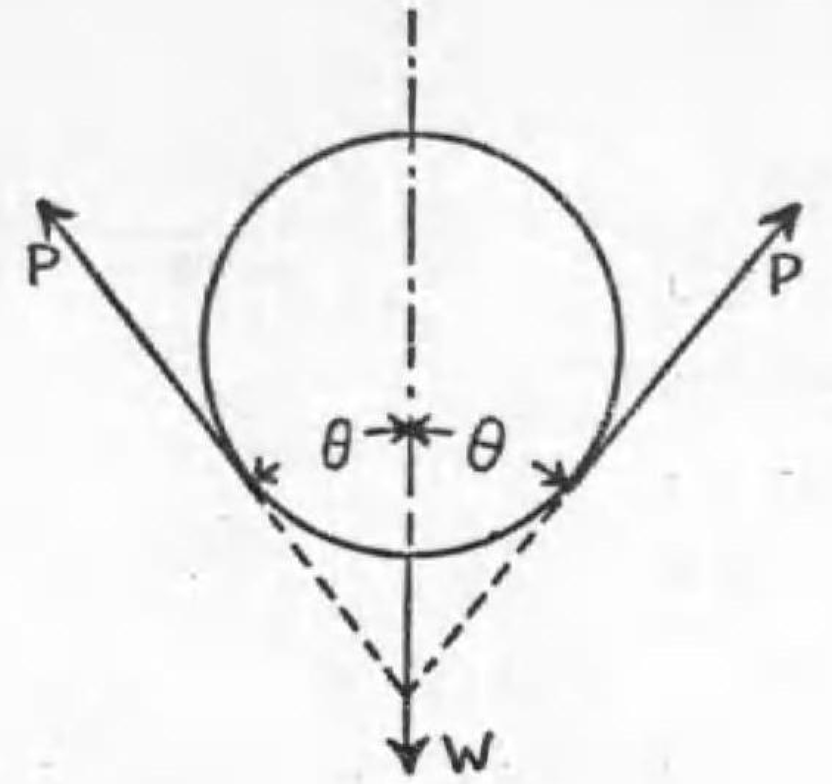
$\mu=0$とすれば、卽ち摩擦がないとすれば、

$$F=\frac{p}{\pi d}W$$

となつて前に述べた式と一致する。

## 問　題

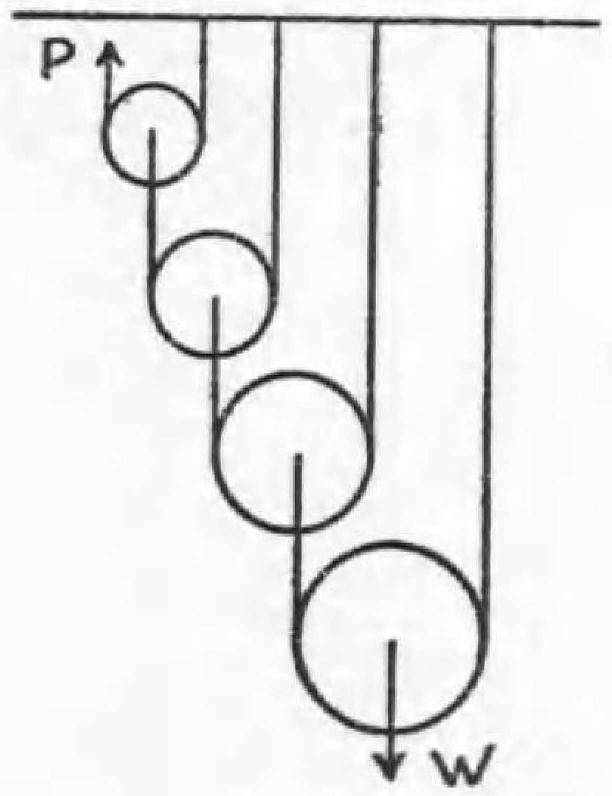
(1) 動滑車に於て、綱の方向が垂直と2θの角度をなすものとすれば、之を支へる力と荷との關係如何。又滑車の重量をwとすれば如何。



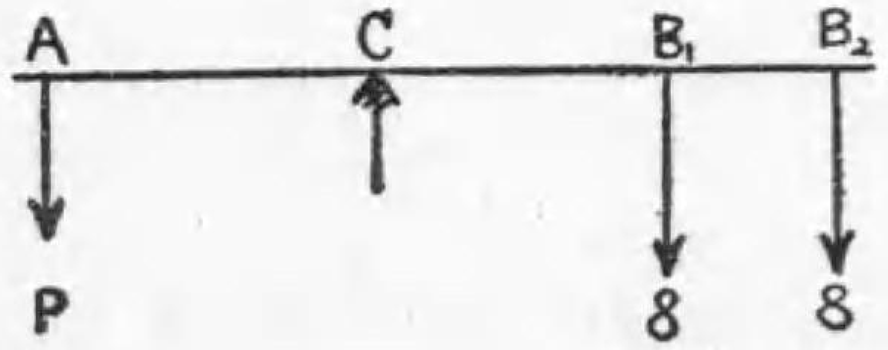

答 $\frac{W}{P}=2\cos\theta$,

$\frac{W}{P}=2\cos\theta-\frac{w}{P}$

(2) 左に示す樣に動滑車の一端を固定し、他端を他の動滑車の中心に結ぶ樣にしてn個の滑車を連れたとすれば、之を支へる力は$\frac{W}{2^n}$なることを證せよ。



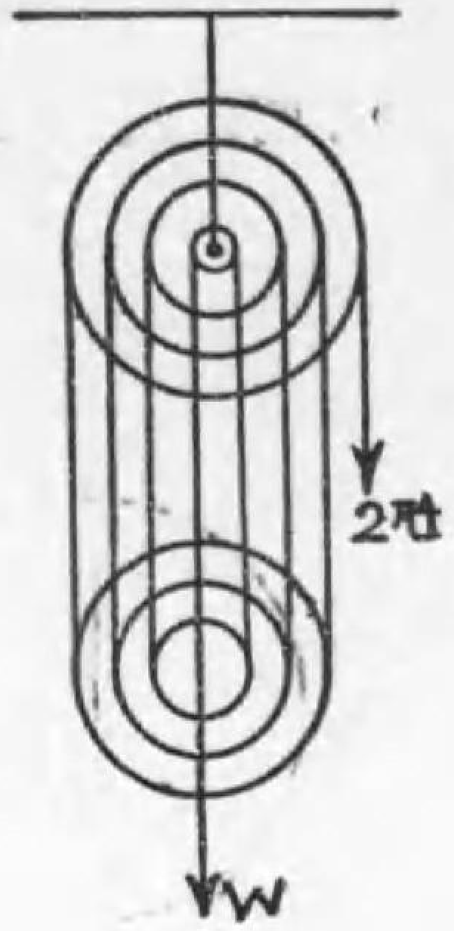

(3) 一つの槓桿があつて支點Cから右側に12糎,18糎の$B_1$ $B_2$點に重量8瓩宛を吊したとすると、支點から左に16糎の點Aに幾何の力を加へれば支へることが出來るか。




答 15瓩重

（4） 第85圖に示す差動滑車で車軸を 2.5 廻轉せしめると、動滑車は幾何の距離を上るか。

答 2.5π (R−r)




（5） 右圖の如き滑車があつて、或る重量 W を吊したところ、2 瓩重の力で釣合つたと云ふ。動滑車の重量が 8 瓩であるとすれば、W の値幾何。

答 6 瓩

（6） ねぢジヤツキがあつて、二個のハンドルが附けてある。ハンドルの長さを各々 12 吋とし、其端に各 10 封度の力を加へ 0.5 英噸の重量と釣合つてゐるとすれば、ねぢのピッチは幾何であるか。 答 1.346 吋

（7） 第87圖に於て A, B, C, D の齒車の齒數を夫々 18, 50, 26, 47 とし、鼓胴の直徑を 20 糎とすれば、重さ 800 瓩の荷を摩擦係數 0.6 の水平面上を引張るにハンドルの長さを幾何にすればよいか。但しハンドルを廻す人力は二人で 20 瓩とする。 答 36.8 糎

—(終)—

# 索 引

昭和六年四月十日　印刷
昭和六年四月廿二日　發行



高等力學

定價 金壹圓八拾錢

編纂東京高等工學校

編輯兼發行者　北村一郎
東京市本郷區追分町五十七

印刷者　小川義一
東京市牛込區市谷台町廿二

印刷所　成武堂印刷所
東京市牛込區市谷台町廿二

發行所　（東京市本郷區追分町五七）　有文閣

終