程式〔I〕′ ヲ利用スルノデアル。

GO （イ） $x=2$ ナルトキ〔I〕′ ヨリ　$8y^2-16y+8=0$

$$\therefore\quad 8(y-1)^2=0 \qquad \therefore\quad y=1$$

（ロ） $x=-2$ ナルトキ〔I〕′ ヨリ　$8y^2+16y+8=0$　$\therefore\ y=-1$

コレラノ値ハ何レモ實數ナル故題意ニ適スル。

答　$x=2,\ y=1;\ \ x=-2,\ y=-1$

指導總括　解法 2 ニ依ル場合ハ本問ニ限ラズ　判別式 $\geqq 0$ ヲ整頓スルト（實數）$^2 \leqq 0$ ノ形ニナルカラ（實數）$^2$ ハ負ニナラナイ事ヲ述ベテ（　）$^2=0$ ヲ解ケバヨイ。

【試練問題】 $5x^2+9y^2+12xy+4x+4=0$ ヲ滿足スル $x$ 及ビ $y$ ノ實數値ヲ決定セヨ。　（海　經）

答　$x=-2,\ y=\dfrac{4}{3}$

**例 224.** $2x^2+2xy+y^2-10x-6y+13=0$ ヲ滿足スル $x, y$ ノ實數値ヲ求メヨ。

方針　與式ノ左邊ヲ完全平方式ノ和ノ形ニ變形シタイト考ヘテ左邊$=(y^2-6y+9)+(x^2-10x+25)+(x^2+2xy-21)$ ト組合セルト，第三式ガ完全平方式ニナラヌ。尙二三組合セヲ變ヘテ見テモ容易ニ完全平方式ノミノ和ノ形ニナラヌ。コンナ場合ハ躊躇ナク解法 (2) ヲ用ヒナケレバナラヌ。

【解】 與式ヲ $x$ ニツイテノ二次方程式ト考ヘテ整頓スルト

$$2x^2+2(y-5)x+(y^2-6y+13)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots〔I〕$$

〔I〕ハ係數ガ實數（$\because$ $y$ ハ實數）ナル故，$x$ ガ實數ナルタメニハ

$$(y-5)^2-2(y^2-6y+13) \geqq 0$$ ナルヲ要ス。

之ヲ整頓シテ $-1$ デ割レバ

$$y^2-2y+1 \leqq 0 \quad \therefore\ (y-1)^2 \leqq 0$$

$y$ ノ實數値ニ對シテハ $(y-1)^2<0$ ハ成立シナイ。

$$\therefore\quad (y-1)^2=0 \qquad \therefore\quad y=1$$

$y=1$ ヲ〔I〕ニ代入スルト　$2x^2-8x+8=0$



$$\therefore\quad 2(x-2)^2=0 \qquad \therefore\quad x=2$$

コレラノ値ハ共ニ實數ナル故題意ニ適スル。

答　$x=2,\ y=1$

指導總括　コノ場合モ $(y-1)^2 \leqq 0$ ヨリ $y \leqq 1$ ト誤ルモノガアル。尙實數ト有理數トヲ混同スル爲カ，「判別式ガ完全平方デナケレバナラヌ」トカ，「實數ナル故判別式ガ 0 ナルヲ要ス」等ト誤ルモノガアル。與式ノ左邊ヲ完全平方式ノ和ノ形ニ直ス事ハ容易デハナイガ不可能デハナク次ノ樣ニヤレバ出來ル。

【別解】　〔I〕ノ左邊ヲ $y$ ニツイテ整頓スルト

$$y^2-2(x-3)y+2x^2-10x+13=0$$

STOP　$y$ ヲ含ム項ヲ完全平方式ニ導ク方針デ $y$ ノ係數ノ半分 $(x-3)$ ノ平方ヲ第三項ニ補ヒ

$$y^2-2(x-3)y+(x^2-6x+9)+(x^2-4x+4)=0$$

$$\therefore\quad \{y-(x-3)\}^2+(x-2)^2=0$$

以下ハ易イカラ省略スル。

【試練問題】 $x^2-2xy+2y^2=4x-10y-13$ ヲ滿足スル $x, y$ ノ實數値如何。　（日醫豫）

答　$x=-1,\ y=-3$

## 未知數ガ三ツアル場合

**例 225.** $3x^2+4y^2+5z^2=10,\ xy+2xz+3yz=5$ ナル二條件ヲ滿足セシムル $x, y, z$ ノ實數値ヲ求メヨ。

方針　未知數ガ三ツニ對シテ方程式ガ二ツデアルカラ一般ニハ（實數條件ガナケレバ）根ハ不定デアル（幾組デモアル）ソコデ實數條件ヲ如何ニ活用スベキカト考ヘ與式ノ未知項ガ悉ク二次ナル事ニ着眼シ常數項ヲ消去スレバ完全平方式ノ和ノ形ヲ導キ得ルデアラウト考ヘル。（モシ出來ナケレバ判別式 $\geqq 0$ ヲ用ヒル）

【解】

$$\begin{cases} 3x^2+4y^2+5z^2=10 \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ xy+2xz+3yz=5 \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

①−②×2 ヨリ

$$3x^2+4y^2+5z^2-2xy-4xz-6yz=0 \cdots\cdots ③$$

STOP コノ左邊ヲ完全平方式ノ和ノ形ニ導ク方針デ，先ヅ $-2xy$ ニ着眼シテ $(x^2-2xy+y^2)$ ヲ組合セ，③ニ於ケル $3x^2$ ヲ $x^2$ ト $2x^2$, $4y^2$ ヲ $y^2$ ト $3y^2$ トニ分ケテ $-4xz$, $-6yz$ 等ト組合セル。

GO ③ヨリ $(x^2-2xy+y^2)+(2x^2-4xz+2z^2)+(3y^2-6yz+3z^2)=0$

∴ $(x-y)^2+2(x-z)^2+3(y-z)^2=0 \cdots\cdots ③'$

$x$, $y$, $z$ ノ實數値ニ對シテハ

$(x-y)^2\geqq0$, $2(x-z)^2\geqq0$, $3(y-z)^2\geqq0$

從ツテ ③' ガ成立スルタメニハ

$(x-y)^2=0$, $2(x-z)^2=0$, $3(y-z)^2=0 \cdots\cdots ④$

ガ同時ニ成立スルコトガ必要デ且十分デアル。

④ヨリ $x=y=z \cdots\cdots ⑤$

⑤ヲ①ニ代入シテ $12x^2=10$ ∴ $x^2=\frac{5}{6}$ ∴ $x=\pm\frac{\sqrt{30}}{6}$

コノ値ヲ⑤ニ代入シテ $x=y=z=\pm\frac{\sqrt{30}}{6} \cdots\cdots$ ■

[illegible] ③ヨリ ③' ヲ導ク事ハ左程困難デハナイカラ，コレ位ノ式ノ變形ハ出來ル實力ヲ養ツテ置カネバナラヌガ，ウマク組合セガ見當ラナカツタラ，コノ樣ニ三文字ヲ含ム場合デモソノ中ノ或一文字ニ就テノ二次方程式ト考ヘテ躊躇ナク判別式ヲ用ヒレバヨイ。次ノ樣ニ無難ニ解決出來ル。

【別解】 ③ヲ $x$ ニツイテ整頓スルト

$$3x^2-2(y+2z)x+(4y^2-6yz+5z^2)=0 \cdots\cdots ④$$

④ハ係數實數ナル二次方程式ナル故 $x$ ガ實數ナルタメニハ

判別式 $\geqq0$ 即 $(y+2z)^2-3(4y^2-6yz+5z^2)\geqq0$

∴ $-11y^2+22yz-11z^2\geqq0$

$-11$ デ割リ ∴ $(y-z)^2\leqq0$

$y$, $z$ ノ實數値ニ對シテハ $(y-z)^2<0$ ハ成立セヌ

∴ $y=z$, 之ヲ④ニ代入シテ $x=z$ ヲ得ル。

以下ハ前解ト同樣ニナル。



【試練問題】 次ノ二ツノ方程式ヲ共ニ滿足スル $x$, $y$, $z$ ノ實數値ヲ求メヨ。 $5x^2+4y^2+3z^2=2yz+4zx+6xy$, $x^2+y^2+z^2=1$

（京 醫）

■ $x=y=z=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

【難 例】

例 226. 聯立方程式

$$\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{1}{(y-1)^2}=1 \cdots\cdots ① \qquad x^2+y^2=2y-1 \cdots\cdots ②$$

ヲ同時ニ滿足スル $x$, $y$ ノ實數値ハ存在セザルコトヲ證明シ然ル後ニ之ヲ解ケ。

圖 コレハ不定方程式ノ問題デハナイガ，實數條件ニ對スル取扱ヒニ共通點ガアルノデコヽニ引用シタ。②ガ完全平方式ノ和 $=0$ ナル形ニ變形出來ルコトニ着眼シテ先ヅ②ヲ滿足スル實根ヲ求メテ證明スル。

【解】 ②ヨリ $x^2+y^2-2y+1=0$

即チ $x^2+(y-1)^2=0 \cdots\cdots ②'$

$x,y$ ノ實數値ニ對シテハ $x^2\geqq0$, $(y-1)^2\geqq0$ ナル故

$x,y$ ノ實數値ニ對シテ ②' ガ成立スルタメニハ

$x=0$, 且 $y=1$ デナケレバナラヌ。

然ルニ $y=1$ ハ①ノ分母ヲ 0 ナラシメルカラ，①ヲ滿足セズ

依テ ①,②ヲ同時ニ滿足スル $x,y$ ノ實數値ハ存在セズ。

STOP 次ニ ①,②ヲ滿足スル根ヲ求メナケレバナラヌ。①ト②'トヲ比較シテ $(y-1)^2$ ヲ消去スレバ $x$ ノミノ方程式ヲ得ルト考ヘテ

GO ②'ヨリ $(y-1)^2=-x^2 \cdots\cdots ③$

③ヲ①ニ代入シテ $\frac{x^2}{x^2+1}-\frac{1}{x^2}=1$

$x^2(x^2+1)\neq0$ トシテ分母ヲ拂ヘバ

$x^4-x^2-1=x^4+x^2$ ∴ $2x^2=-1$

∴ $x=\pm\sqrt{-\frac{1}{2}}=\pm\frac{i\sqrt{2}}{2} \cdots\cdots ④$

③ニ代入シテ　$(y-1)^2=-\dfrac{1}{2}$

$$\therefore\ y-1=\pm\frac{i\sqrt{2}}{2}\quad \therefore\ y=1\pm\frac{i\sqrt{2}}{2}\cdots\cdots\cdots⑤$$

STOP　コヽデ　$x=\pm\dfrac{i\sqrt{2}}{2}$, $y=1\pm\dfrac{i\sqrt{2}}{2}$（複號同順）ト答ヘル者ガ多イ。$x=\pm\dfrac{i\sqrt{2}}{2}$ ノ何レノ場合ニ對シテモ⑤ヲ得ルノデアルカラ

GO　④,⑤ヲ組合セテ次ノ四組ノ根ヲ得，且コレラノ値ハ何レモ①ノ分母ヲ 0 ナラシメザル故所要ノ根デアル。

答 $\begin{cases}x=\dfrac{i\sqrt{2}}{2}\\ y=1+\dfrac{i\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{i\sqrt{2}}{2}\\ y=1-\dfrac{i\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{i\sqrt{2}}{2}\\ y=1+\dfrac{i\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{i\sqrt{2}}{2}\\ y=1-\dfrac{i\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

### 3. 不定方程式ノ整數解

不定方程式ノ**整數解**ハ不定方程式ノ實數解ノ樣ニ其**解法ガ單純デハナク**，整數ノ性質ヤ約數倍數ノ性質ヲ應用シタリ，時ニハ不等式ノ解法ヲ引用シテ解カネバナラヌノデ，今迄ノ問題トハ全然ソノ解法ノ趣ヲ異ニスル。次ノ諸例ニ就テソノ解法ノ要領ヲ會得シテ貰ヒ度イ。

#### (1) 一次方程式ノ場合

**（一般方針）一ツノ未知數ヲ他ノ未知數ヲ含ム式デ表ハシテ見テソレガ整數トナルタメノ條件**ヲ考究シテ解決スル。

| |
|---|
| 例 227. 次ノ方程式ヲ滿足スル $x$, $y$ ノ正整數値ヲ求メヨ。<br>$8x+13y=138$ |

方針　$x$ ヲ $y$ デ表ハス式ヲ作ツテ考ヘル

【解】　$8x+13y=138\quad \therefore\ x=\dfrac{138-13y}{8}\cdots\cdots\cdots①$



**$x$ ガ正ノ整數ナルタメニハ $138-13y$ ガ 8 ノ倍數デナケレバナラヌ。**
且 $y$ ハ正ノ整數ナル故　$138-13y\leqq125$（$y=1$ ノトキ 125 トナル）
依テ 125 ヨリ小ナル 8 ノ倍數ヲ順次ニ考ヘテ

$138-13y=8$　ノトキ　$y=\dfrac{130}{13}=10$, ① ヨリ $x=1$

$138-13y=16$　ノトキ　$y=\dfrac{122}{13}\neq$ 整數

$138-13y=24$　ノトキ　$y=\dfrac{114}{13}\neq$ 整數

以下同樣ニ　$138-13y$ ガ 32, 40, 48, …… 96, 104 ノトキ $y$ ハ何レモ整數トナラヌ。

$138-13y=112$ ノトキ　$y=\dfrac{26}{13}=2$,　$x=\dfrac{112}{8}=14$

$138-13y=120$　ノトキ　$y=\dfrac{18}{13}\neq$ 整數

依テ求ムル値ハ　$x=1$, $y=10$; $x=14$, $y=2$ ノ二組デアル。答

STOP　コレデ所要ノ根ハ得ラレタガ 8 ノ倍數ヲ 15 通リ考ヘテ，驗シヲシテ見ナケレバナラヌノデ，今少シ簡單ニ出來ヌカト工夫シテ見ル。

GO　$x\geqq1$ ナルベキ故 ①ヨリ　$\dfrac{138-13y}{8}\geqq1$

兩邊ニ 8 ヲ乘ジ（不等號ノ向ハ不變）$138-13y\geqq8$

$$\therefore\quad 13y\leqq130\qquad \therefore\quad y\leqq10$$

且 $y$ ガ奇數ノトキハ $138-13y$ ハ奇數トナル故明ラカニ 8 ノ倍數ニハナラヌ。依テ $y$ ハ 10 以下ノ偶數デナケレバナラヌ。

$y=10$ ノトキ　$x=\dfrac{138-130}{8}=1$　適ス。

$y=8$　ノトキ　$x=\dfrac{138-104}{8}=\dfrac{34}{8}\neq$ 整數

$y=6$　ノトキ　$x=\dfrac{138-78}{8}=\dfrac{60}{8}\neq$ 整頓

$y=4$　ノトキ　$x=\dfrac{138-52}{8}=\dfrac{86}{8}\neq$ 整數

$y=2$　ノトキ　$x=\dfrac{138-26}{8}=\dfrac{112}{8}=14$　適ス。

依テ求ムル根ハ　$x=1,\ y=10;\ x=14,\ y=2$ ……答

指導講話　コノ樣ニ不定方程式ノ整數解ハ種々ナル場合ヲ驗シテ題意ニ適スル根ヲ選バネバナラヌ事ガ多イガ，與式（コノ問題デハ①式）ニ對スル觀察，推理ヲ深メル事ニ依リ別解ニ示シタ樣ニ取扱フ數ノ範圍ヲ縮小シテ解答ヲ簡明ナラシメルコトヲ心懸ケネバナラヌ。

【試練問題】 次ノ方程式ヲ滿足スル $x,y$ ノ正整數値ヲ求ム。

$$7x+9y=100$$

答　$x=13,\ y=1;\ x=4,\ y=8$

例 228. 5 圓，10 圓，20 圓ノ紙幣合セテ 30 枚アリテ其ノ全額 470 圓ナリ。各紙幣ノ枚數ヲ求ム。

【解】 5 圓，10 圓，20 圓ノ紙幣ノ枚數ヲ夫々 $x$ 枚，$y$ 枚，$z$ 枚 トスルト，枚數合計 30 ナル故

$$x+y+z=30 \cdots\cdots ①$$

全額 470 圓ナル故

$$5x+10y+20z=470 \cdots\cdots ②$$

STOP　未知數ガ三ツニ對シテ方程式ガ二ツシカナイカラ一般ニハ根ハ不定（幾組デモアル）。所ガ $x,y,z$ ハ紙幣ノ枚數デ正ノ整數ナルベキ事ヲ考慮シコノ不定方程式ノ整數解ヲ求ムレバヨイ。

GO　②ヨリ　$x+2y+4z=94 \cdots\cdots ②'$

②′－①ヨリ　$y+3z=64$

$$\therefore \quad z=\frac{64-y}{3} \cdots\cdots ③$$

STOP　③ヨリ $z$ ガ正ノ整數ナルタメニハ $64-y$ ガ 64 ヨリ小ナル 3 ノ倍數デナケレバナラヌ。ト述ベテ $64-y=63$，$64-y=60$，…… ヲ順次ニ解キ，$x,y,z$ ガ共ニ正ノ整數トナルモノヲ選ベバ所要ノ根ヲ得ルガ，21 通リモ驗サネバナラヌノデ，今少シ簡單ナ解法ヲ工夫シテ見ヨウ。

【別解】（イ）
$$\begin{cases} x+y+z=30 \cdots\cdots ① \\ x+2y+4z=94 \cdots\cdots ②' \end{cases}$$



②′－①ヨリ　$y+3z=64 \quad \therefore \quad y=64-3z \cdots\cdots ③$

①×2－②′ヨリ　$x-2z=-34 \quad \therefore \quad x=2z-34 \cdots\cdots ④$

STOP　$x,y$ ヲ $z$ ヲ用ヒテ表ハシタカラ，$x,y$ ガ正ノ整數ナル條件ヲ利用シテ $z$ ノ範圍ヲ縮小スル事ヲ考ヘル。

GO　$x,y$ ハ紙幣ノ枚數ナル故 $x\geqq1,\ y\geqq1$ ナルヲ要ス。依テ

$$\left.\begin{array}{ll} ③ヨリ & 64-3z\geqq1 \quad \therefore \ z\leqq21 \\ ④ヨリ & 2z-34\geqq1 \quad \therefore \ z\geqq17\frac{1}{2} \end{array}\right\} \therefore \ 17\frac{1}{2}\leqq z\leqq21 \cdots\cdots ⑤$$

⑤ヲ滿足スル $z$ ノ正ノ整數値ハ 18，19，20，21 ノ四ツデアル。

コレラヲ③，④ニ代入シテ

$$\begin{cases} z=18 \ ノトキ & y=10 & x=2 \\ z=19 \ ノトキ & y=7 & x=4 \\ z=20 \ ノトキ & y=4 & x=6 \\ z=21 \ ノトキ & y=1 & x=8 \end{cases}$$

コレラノ値ハ何レモ題意ニ適スル。

答 $\begin{cases} 5\ 圓紙幣 & 2\ 枚 \\ 10\ 圓紙幣 & 10\ 枚 \\ 20\ 圓紙幣 & 18\ 枚 \end{cases}$ 又ハ $\begin{cases} 4\ 枚 \\ 7\ 枚 \\ 19\ 枚 \end{cases}$ $\begin{cases} 6\ 枚 \\ 4\ 枚 \\ 20\ 枚 \end{cases}$ $\begin{cases} 8\ 枚 \\ 1\ 枚 \\ 21\ 枚 \end{cases}$

【別解】（ロ）①×4－②′ヨリ $3x+2y=26$

$$\therefore \quad y=13-\frac{3}{2}x \cdots\cdots ⑤$$

$y$ ガ整數ナルタメニハ $\frac{3}{2}x$ ガ整數ナルヲ要スル。然ルニ 2 ト 3 トハ互ニ素デアルカラ，之ガ整數ナルタメニハ $x$ ハ偶數ナルヲ要ス。

且 $y$ ハ正ナルベキ故 $13-\frac{3}{2}x>0 \quad \therefore \ x<\frac{26}{3}=8.6\cdots\cdots$

依テ　$x=8$ 又ハ 6 又ハ 4 又ハ 2 デナケレバナラヌ。

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x=8$ ノトキ | ⑤ヨリ $y=1$ | ①ヨリ $z=21$ | |
| $x=6$ ノトキ | $y=4$ | $z=20$ | |
| $x=4$ ノトキ | $y=7$ | $z=19$ | |
| $x=2$ ノトキ | $y=10$ | $z=18$ | |

指導講話　初メノ解法ハ誤リデハナイガ考ヘ方ガ少シ幼稚デアル（三四年ノ生徒ニハコノ程度デヨイ）別解（ロ）ニ依ル者ハ⑤ヨリ $x$ ガ偶

數デナケレバナラヌ理由ヲ明確ニスル事ガ要點デ，同ジ答ハ出テキテモ，此點ニ對スル説明ノ如何ニヨリ夫々ソノ實力ニ差異ヲ認メルコトガ出來ル。

【試練問題】 50 錢銀貨，10 錢白銅貨，5 錢白銅貨取交ゼ 45 個其金額合計 10 圓 60 錢ナルトキ，各貨幣ノ個數ノ總テノ組ヲ求メヨ。

---

答 50 錢，10 錢，5 錢ノ順＝ (16,23,6)(17,14,14)(18,5,22)

### (2) 二次ノ不定方程式ノ整數解

二次ノ不定方程式ノ整數解ハ大別シテ次ノ三ツノヤリ方ガアル。

（イ） 二ツノ一次因數ニ分解出來テ，一次方程式ノ解法ニ歸スルモノ

（ロ） 一ツノ未知數ヲ他ノ未知數ヲ含ム有理式（分數式ニナルコトガ多イ）デ表ハシテ解決出來ルモノ。

（ハ） 上記何レニモナラナイデ根ノ公式ヲ用ヒルモノ。

> **例 229.** 二位ノ正ノ整數アリ。ソノ一位，二位ノ數字ヲ夫々 $x, y$ トス。然ラバコノ $x, y$ ハ方程式
> $6x^2-11xy+3y^2+x+2y-1=0$ ヲ滿足スルト云フ。コノ方程式ノ左邊ヲ因數ニ分解シテ以テコノ整數ヲ定メヨ。

着眼 二次方程式デハアルガ題意ノ樣ニ左邊ガ二ツノ一次因數ニ分解サレルカラ一次ノ不定方程式ノ解法ニ歸着スル。

尙左邊ハ二文字ヲ含ムカラ何レカ一文字ニツイテ整頓シテ因數ニ分解スルノガ原則デアル。

【解】 左邊 $=6x^2-(11y-1)x+(3y^2+2y-1)$

$=6x^2-(11y-1)x+(3y-1)(y+1)$　　$\begin{array}{l} 2 \quad -(3y-1) \\ 3 \quad -(y+1) \end{array}$

$=\{2x-(3y-1)\}\{3x-(y+1)\}$

$=(2x-3y+1)(3x-y-1)$

依テ與ヘラレタ方程式ハ　$(2x-3y+1)(3x-y-1)=0$

$\therefore \quad x=\dfrac{3y-1}{2}$　又ハ　$x=\dfrac{y+1}{3}$



（イ）　$x=\dfrac{3y-1}{2}$ …………① ナルトキ

$x$ ハ正ノ整數又ハ 0 ナルヲ要スル故 $3y-1$ ハ 2 ノ倍數，從ッテ $y$ ハ奇數デナケレバナラヌ。

STOP $x, y$ ハ各位ノ數字デアルカラ一桁ノ整數又ハ 0 ナルベキコトヲ考慮シテ

GO 且 $x$ ハ一位ノ數字ナル故　$9 \geqq x \geqq 0$　　$\therefore 9 \geqq \dfrac{3y-1}{2} \geqq 0$

$\therefore \quad 18 \geqq 3y-1 \geqq 0$　　$\therefore \quad 6\dfrac{1}{3} \geqq y \geqq \dfrac{1}{3}$

之ヲ滿足スル奇數ハ　$y=1$ 又ハ 3 又ハ 5

$y=1$ ナルトキ ①ヨリ $x=1$ 原數ハ 11

$y=3$ ナルトキ ①ヨリ $x=4$ 原數ハ 34

$y=5$ ナルトキ ①ヨリ $x=7$ 原數ハ 57

（ロ）　$x=\dfrac{y+1}{3}$ ナルトキ

$x$ ハ正ノ整數ナルベキ故 $y+1$ ハ 3 ノ倍數デナケレバナラヌ。

シカルニ　$9 \geqq y \geqq 1$　$\therefore \quad 10 \geqq y+1 \geqq 2$

$\therefore$ $y+1$ ハ 3 又ハ 6 又ハ 9 ノ何レカデアル。

$y+1=3$ ナルトキ $y=2, x=1$ 原數ハ 21

$y+1=6$ ナルトキ $y=5, x=2$ 原數ハ 52

$y+1=9$ ナルトキ $y=8, x=3$ 原數ハ 83

答 11, 34, 57, 21, 52, 83

【試練問題】 二位ノ整數アリ。十位ノ數字ヲ $x$，一位ノ數字ヲ $y$ トスルトキ $6x^2-3y^2=7xy$ ナル關係ヲ滿足スル $x, y$ ノ値ハ幾組アルカ。

---

答 (3,2) (6,4) (9,6) ノ三組

> **例 230.** $2xy-3x+2y=9$ ヲ滿足スル $x, y$ ヲ求メヨ。
> 但シ $x, y$ ハ正ノ整數トス。

方針 未知項ガ積ト一次式ノミデアル事（$x^2$ ヤ $y^2$ ガナイ）ニ着眼シ

左邊ヲ二ツノ一次因數ノ積ニ變形スル。(例 201 參照)

【解】 $2xy-3x+2y=9$ …………①

$\therefore\ x(2y-3)+(2y-3)=9-3$

$\therefore\ (2y-3)(x+1)=6$ ………①′

STOP 積ガ 6 ナル事カラ $2y-3$, $x+1$ ノ整數値ガ定マルト考ヘテ

GO $x,y$ ガ正ノ整數ナル故 $2y-3$, $x+1$ ハ共ニ整數デ

且 $2y-3$ ハ奇數（$\because$ $2y$ ハ偶數），　$x+1\geqq 2$ （$\because$ $x\geqq 1$）

依テコレラノ二數ノ積ガ 6 トナルノハ

$\begin{cases}x+1=2\\2y-3=3\end{cases}$ 又ハ $\begin{cases}x+1=6\\2y-3=1\end{cases}$ ノ何レカデアル。

コレラヲ解イテ $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$ 又ハ $\begin{cases}x=5\\y=2\end{cases}$

答 $x=1,\ y=3,\ x=5,\ y=2$

註 因數分解ニ氣付カヌトキハ次ノ樣ニ $x$ 又ハ $y$ ヲ表ハス式ヲ作ツテ考ヘルノデアル。

【別解】 ①ヨリ　$x(2y-3)=9-2y$

$2y-3\neq 0$ トシテ　$x=\dfrac{9-2y}{2y-3}$ …………②

STOP 右邊ノ分子ハ分母ヨリ低次デナイコトニ着眼シテ

GO ②′ヨリ　$x=-1+\dfrac{6}{2y-3}$ ……③

$x$ ガ正ノ整數ナルタメニハ③ヨリ $\dfrac{6}{2y-3}$ ガ 1 ヨリ大ナル整數デナケレバナラヌ。從ツテ $2y-3$ ハ 6 ノ約數，且 $2y-3$ ハ $y$ ノ整數値ニ對シテハ奇數デアルカラ 6 ノ約數デ奇數ノモノヲ考ヘテ

| | |
|---|---|
| $2y-3=3$ | 又ハ $2y-3=1$ |
| $\therefore\ y=3$ | $y=2$ |
| ③ヨリ $x=1$ | ③ヨリ $x=5$ |

[illegible] ② ニ於テ $y$ ニ 種々ナル値ヲ 代入シテ $x$ ノ値ヲ求テモ出來ルガ餘リニ無策デアル。



【試練問題】 二整數ノ積ガ是等二數ノ和ノ4倍ニ等シトイフ。カヽル二數ヲ求メヨ。 (名 商)

答 (5,20)(6,12)(8,8)(3,−12)(2,−4)(0,0)

**例 231.** 次ノ方程式ヲ滿足スル $x,y$ ノ正ノ整數値ヲ求メヨ。

$x^2-xy+y^2=7$

[illegible] 未知項ガ一次ノ有理因數ニ分解出來ナイカラ，根ノ公式ヲ用ヒテ考ヘル。

【解】 $y$ ニツイテ整頓スルト　$y^2-xy+(x^2-7)=0$ …………〔I〕

公式ニヨリ　$y=\dfrac{x\pm\sqrt{x^2-4(x^2-7)}}{2}=\dfrac{x\pm\sqrt{28-3x^2}}{2}$ ‥ ①

STOP $y$ ハ正ノ整數ナル故勿論實數デナケレバナラヌト考ヘテ，根號內ノ式（即チ〔I〕ノ判別式）ガ正又ハ 0 ナルベキ事ヲ用ヒテ $x$ ノ範圍ヲ定メル。

GO $y$ ハ實數ナルヲ要スル故　$28-3x^2\geqq 0$　$\therefore\ x^2\leqq\dfrac{28}{3}$

シカルニ $x>0$　$\therefore\ 0<x\leqq\sqrt{\dfrac{28}{3}}=\sqrt{9.33\cdots\cdots}$

$\therefore\ 0<x\leqq 3.05\cdots\cdots$

之ヲ滿足スル $x$ ノ整數値ハ　$x=1$ 又ハ 2 又ハ 3

$x=1$ ナルトキ ①ヨリ $y=\dfrac{1\pm5}{2}=3$ 又ハ $-2$

$x=2$ ナルトキ ①ヨリ $y=\dfrac{2\pm4}{2}=3$ 又ハ $-1$

$x=3$ ナルトキ ①ヨリ $y=\dfrac{3\pm1}{2}=2$ 又ハ $1$

コレラノ中 $x,y$ ガ共ニ正ノ整數ナルモノハ次ノ四組デアル。

$\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$ ……答

【別法】 ①ヨリ $y$ ガ整數トナルニハ根號內ガ完全平方數デナケレバナラヌト考ヘテ解決スル。

【別解】 ①ヨリ $y$ ガ整數ナルタメニハ $\dfrac{x\pm\sqrt{28-3x^2}}{2}$ ガ整數デナケレバナラヌ。依テ $28-3x^2$ ハ完全平方數デナケレバナラヌ。然ルニ $x$ ノ正ノ整數値ニ對シテハ $28-3x^2\leqq 25$ ($x=1$ ノトキ25トナル)ナル故25以下ノ完全平方數ヲ順次ニ考ヘテ

$28-3x^2=25$ ノトキ $x^2=1$ ∴ $x=\pm1$

然ルニ $x>0$ ∴ $x=1$ ∴ ①ヨリ $y=\dfrac{1\pm5}{2}=3$ 又ハ $-2$

$28-3x^2=16$ ノトキ $x^2=4$ ∴ $x=\pm2$

$x>0$ ∴ $x=2$ コノトキ ①ヨリ $y=3$ 又ハ $-1$

$28-3x^2=9$ ノトキ $x^2=\dfrac{19}{3}$ ≠整數

$28-3x^2=4$ ノトキ $x^2=8$ ∴ $x=\pm2\sqrt{2}$ ≠整數

$28-3x^2=1$ ノトキ $x^2=9$ ∴ $x=\pm3$

$x>0$ ∴ $x=3$ コノトキ ①ヨリ $y=2$ 又ハ 1,

$28-3x^2=0$ ノトキ $x^2=\dfrac{28}{3}$ ≠整數

コレラノ中 $x$, $y$ ガ共ニ正整數ナルモノヲトリ前解ト同樣ノ答ヲ得。

【試練問題】 $x^2+xy+y^2=13$ ヲ滿足スル $x$, $y$ ノ正整數値ヲ求メヨ。

答 $x=1$, $y=3$; $x=3$, $y=1$

### (3) 三次ノ不定方程式ノ整數解

**例 232.** $x^3-y^3=26$ ニ適スル $x, y$ ノ正ノ整數値ヲ求メヨ。

方針 左邊ヲ因數ニ分解シテ二次ノ場合ニ倣ツテ解ク。

【解】 左邊ヲ因數ニ分解スルト

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=26 \quad\cdots\cdots①$$

$x,y$ ノ正ノ整數値ニ對シテハ $x-y$ ハ正又ハ負ノ整數又ハ 0 デアルガ $x^2+xy+y^2$ ガ正ノ整數デナケレバナラヌカラ①ヲ滿足スルタメニハ $x-y$ モ亦正ノ整數デナケレバナラヌ。且其積ガ 26 ナル故



$$\begin{cases}x-y=26\\x^2+xy+y^2=1\end{cases}\quad\begin{cases}x-y=1\\x^2+xy+y^2=26\end{cases}\quad\begin{cases}x-y=13\\x^2+xy+y^2=2\end{cases}\quad\begin{cases}x-y=2\\x^2+xy+y^2=13\end{cases}$$

STOP コノ四組ノ聯立方程式ヲ解イテ $x$, $y$ ガ共ニ正ノ整數トナルモノヲ答トスレバヨイガ, $x-y$ ヤ $x^2+xy+y^2$ ニ對スル考察ヲ今少シ深メテ組合セノ數ヲヘラセナイカト考ヘテ見ル。

GO $x,y$ ノ正ノ整數値ニ對シテハ $x^2\geqq1$, $xy\geqq1$, $y^2\geqq1$

∴ $x^2+xy+y^2\geqq3$ 〔但 $x=y=1$ ナルトキ 3 トナル〕

依テ上記ノ四ツノ組合セノ中第一及ビ第三ハ明ラカニ適シナイ。

依テ I $\begin{cases}x-y=1 & \cdots\cdots②\\x^2+xy+y^2=26 & \cdots\cdots③\end{cases}$ 又ハ II $\begin{cases}x-y=2 & \cdots\cdots④\\x^2+xy+y^2=13 & \cdots\cdots⑤\end{cases}$

I ナルトキ ②ヨリ $x=y+1$ ……②′

之ヲ③ニ代入 $3y^2+3y-25=0$ ∴ $y=\dfrac{-3\pm\sqrt{309}}{6}$ ≠整數

II ナルトキ ④ヨリ $x=y+2$ ……④′

④′ヲ⑤ニ代入シテ $3y^2+6y-9=0$ ∴ $y^2+2y-3=0$

∴ $(y+3)(y-1)=0$

シカルニ $y>0$ ∴ $y+3\neq0$ ∴ $y=1$

之ヲ④′ニ代入シテ $x=3$

依テ求ムル整數値ハ $x=3$, $y=1$ ノミ 答

【試練問題】 $x^3-y^3=56$ ニ適スル $x,y$ ノ正整數値ヲ求ム。

答 $x=4$, $y=2$

## 鍛錬問題 十五

**163.** 次ノ方程式ヲ滿足スル $x$, $y$, $z$ ノ實數値ヲ求メヨ。

$$\{yz-a(y+z)\}^2+\{zx-b(z+x)\}^2+\{xy-c(x+y)\}^2=0$$

但シ $a$, $b$, $c$ ハ零ニアラザル實數トス。

**164.** $x,y$ ガ共ニ實數デ次ノ方程式ヲ滿足スルナラバ $x,y$ ノ値如何。 $5x^2-12xy+10y^2-6x-4y+13=0$ (二 高)

**165.** $x, y$ ガ共ニ實數ニシテ $\left(x^2+\dfrac{1}{y^2}-a\right)^2+\left(x+\dfrac{1}{y}-b\right)^2=0$ ヲ滿足スルモノトス。コノトキ實定數 $a$, $b$ ガ滿足セネバナラヌ條件ヲ求メ，求メ得タ條件ノモトニ $x$, $y$ ノ値ヲモ求メヨ。

**166.** $2x+3y=1234$ ヲ滿足スル正ノ整數 $x$, $y$ ノ組ノ中，ソノ差ノ最小トナル組ヲ求メヨ。 （五 高）

**167.** $x$, $y$ ガ正ノ整數ニシテ $(2x-y)(x-2y)=5$ ナルトキ $x, y$ ノ値ヲ求メヨ。

**168.** $xy-2x+y=10$ ヲ滿足スル $x, y$ ノ値ヲ求メヨ。但シ $x$, $y$ ハ正ノ整數トス。

**169.** $x, y, z$ ハ方程式 $x+3y-2z=0$ 及ビ $2x^2-3y^2+z^2=0$ ヲ滿足スル正整數ニシテ共ノ最小公倍數ハ 300 ナリトイフ。$x$, $y$, $z$ ノ値ヲ求メヨ。

**170.** $x^3+3ax+b$ ト $2x^2+a$ トガ一次ノ公約數ヲ有スルトキハ $\left(\dfrac{a}{2}\right)^3+\left(\dfrac{b}{5}\right)^2=0$ ナルコトヲ證明シ且 $a+b$ ノ絶對値ガ 100 ヲ越エザル範圍ニテ之ニ適當スル $a$ ト $b$ トノ整數値ヲ求メヨ。 （海 機）

---

**答** 163. $x=\dfrac{2abc}{ca+ab-bc}$, $y=\dfrac{2abc}{ab+bc-ca}$, $z=\dfrac{abc}{bc+ca-ab}$
$x=y=z=0$,
但 $(ca+ab-bc)(ab+bc-ca)(bc+ca-ab)\neq0$ トス

164. $x=3$, $y=2$ 165. 條件 $b^2-a\neq0$, $2a-b^2\geqq0$

根ハ $x=\dfrac{b\pm\sqrt{2a-b^2}}{2}$, $y=\dfrac{b\pm\sqrt{2a-b^2}}{b^2-a}$, （但 $b^2-a\neq0$ トス）

$b^2-a=0$ ノトキハ $x=0$, $y=\dfrac{1}{b}$ （但 $b\neq0$ トス）

166. $x=248$, $y=246$ 167. $x=3$, $y=1$; $x=1$, $y=3$
168. $x=7$, $y=3$; $x=3$, $y=4$; $x=1$, $y=6$
169. $x=20$, $y=60$, $z=100$,
170. $a=-2$, $b=\pm5$; $a=-8$, $b=\pm40$



# 第六編 等式ノ證明ト消去法

## 第二十九章 等式ノ證明

### 1. 恒等式ノ證明問題

恒等式ナルコトヲ證明スルニハ一般ニ次ノ如キ方法ニヨル。

1. 左邊（又ハ右邊）ヲ變形シテ右邊（又ハ左邊）ニ等シキコトヲ示ス。
2. 兩邊ヲ變形シテ同一ノ式トナルコトヲ示ス。
3. 公式又ハ既知ノ等式ヲ變形シテ證明スベキ式ヲ導キ出ス。

**例 233.** 次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$\frac{x}{ax-a^2}+\frac{y}{ay-a^2}+\frac{z}{az-a^2}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{y-a}+\frac{1}{z-a}+\frac{3}{a}$$

**着眼** 左邊ノ各分數式ノ分母ガ二因數ノ積ニ分解セラレ分子ガソノ二因數ノ和ニ等シキコトニ着眼シテ**部分分數**ニ直ス。

**證明** $\dfrac{x}{ax-a^2}=\dfrac{x}{a(x-a)}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{x-a}$

同様ニ $\dfrac{y}{ay-a^2}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{y-a}$, $\dfrac{z}{az-a^2}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{z-a}$

依テ 左邊 $=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{y-a}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{z-a}$

$=\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{y-a}+\dfrac{1}{z-a}+\dfrac{3}{a}=$ 右邊

**【別法】** 右邊ノ初メノ三ツノ分數式ガ同一型デ最後ノ分數式ノミノ形ガ異ナルコトニ着眼シ，之ヲ三等分シテ初メノ各々ト組合セテ見ル。

**證明** 右邊 $=\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{y-a}+\dfrac{1}{z-a}+\dfrac{3}{a}$

$=\left(\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{a}\right)+\left(\dfrac{1}{y-a}+\dfrac{1}{a}\right)+\left(\dfrac{1}{z-a}+\dfrac{1}{a}\right)$

$=\dfrac{x}{a(x-a)}+\dfrac{y}{a(y-a)}+\dfrac{z}{a(z-a)}=$ 左邊

**【試練問題】** $a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)+abc(a+b+c)$
$=(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)$ ナルコトヲ證明セヨ。

## 2. 條件附證明問題

或條件ガ與ヘラレテ，ソノ條件ノモトニ或等式ガ成立スルコトヲ證明スル問題デ，之ハ恒等式ノ證明ヨリハ一般ニ面倒デアル。ソシテコノ種ノ問題ノ證明ニハ種々ノ方法ヲ用ヒルガソノ根柢トナルノハ次ニ示ス代入法デアル。

### (1) 代入法ニヨル例

假定式ヲ其儘又ハ適當ニ變形シタ後ニ證明スベキ式ノ一邊又ハ兩邊ニ代入シテ兩邊ノ相等シイコトヲ證明スル方法デ，**假定式ガ或文字ニツイテ一次式デアル場合ニ用ヒテ最モ有效確實**ナ證明法デアル。

#### (イ) 直接代入スル例

> **例 234.** $X=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $Y=\dfrac{ay+b}{cy+d}$, $Z=\dfrac{az+b}{cz+d}$, $T=\dfrac{at+b}{ct+d}$
>
> デアルト　$\dfrac{X-Z}{Y-Z}\cdot\dfrac{Y-T}{X-T}=\dfrac{x-z}{y-z}\cdot\dfrac{y-t}{x-t}$　デアルコトヲ示セ。但シ　$ad-bc\neq0$　トス。

**方針**　X,Y,Z,T ノ値ヲ證明スベキ式ノ左邊ニ代入シテ右邊ヲ導ク。尙全部一度ニ代入スルト複雜ニナルカラ，各式ノ分母，分子ヲ別々ニ計算スル。

**證明**　$X=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $Z=\dfrac{az+b}{cz+d}$　ナル故

$$X-Z=\frac{ax+b}{cx+d}-\frac{az+b}{cz+d}=\frac{(ax+b)(cz+d)-(az+b)(cx+d)}{(cx+d)(cz+d)}$$

$$分子=acxz+bcz+adx+bd-acxz-bcx-adz-bd$$

$$=ad(x-z)-bc(x-z)=(ad-bc)(x-z)$$

$$\therefore\ X-Z=\frac{(ad-bc)(x-z)}{(cx+d)(cz+d)}\quad 同様ニ\quad Y-Z=\frac{(ad-bc)(y-z)}{(cy+d)(cz+d)}$$

$$\therefore\ \frac{X-Z}{Y-Z}=\frac{\dfrac{(ad-bc)(x-z)}{(cx+d)(cz+d)}}{\dfrac{(ad-bc)(y-z)}{(cy+d)(cz+d)}}=\frac{(x-z)(cy+d)}{(y-z)(cx+d)}$$



同様ニシテ　$\dfrac{Y-T}{X-T}=\dfrac{(y-t)(cx+d)}{(x-t)(cy+d)}$

$$\therefore\ \frac{X-Z}{Y-Z}\cdot\frac{Y-T}{X-T}=\frac{(x-z)(cy+d)}{(y-z)(cx+d)}\cdot\frac{(y-t)(cx+d)}{(x-t)(cy+d)}$$

$$=\frac{x-z}{y-z}\cdot\frac{y-t}{x-t}=右邊$$

依テ證明シ得タリ。

**[illegible]**　假定式ノ四ツガ何レモ同一ノ形デアルコトニ着眼スルト X－Z ヲ計算スレバ同様ノ計算ニヨリ Y－Z, Y－T, X－T ヲ得ルノデアルカラ，直チニ計算ノ結果ヲ書キ下シ得ル筈デアル。

**【試練問題】**　$x=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{A}{a}\right)$, $y=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{A}{x}\right)$　ナルトキ次式ヲ證明セヨ。但シ $a$ ト A トハ共ニ正數ナリトス。

$$\frac{y-\sqrt{A}}{y+\sqrt{A}}=\left(\frac{a-\sqrt{A}}{a+\sqrt{A}}\right)^4\qquad(陸　士)$$

#### (ロ) 一次式ニ着眼シテ代入スル例

> **例 235.** $xyz=1$　ナルトキ，次ノ式ノ値モ亦 1 ニ等シキコトヲ證セヨ。　$\dfrac{x}{xy+x+1}+\dfrac{y}{yz+y+1}+\dfrac{z}{zx+z+1}$

**着眼**　假定式ハ三次式デアルガ，$x,y,z$ ノ何レカ一ツニ着眼スルト一次式デアルカラ，何レカ一ツヲ他ノ文字デ表ハシテ代入スル。

**證明**　$xyz=1$　$\therefore\ z=\dfrac{1}{xy}$　之ヲ代入スルト

$$\frac{x}{xy+x+1}+\frac{y}{yz+y+1}+\frac{z}{zx+z+1}$$

$$=\frac{x}{xy+x+1}+\frac{y}{\dfrac{1}{x}+y+1}+\frac{\dfrac{1}{xy}}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{xy}+1}$$

$$=\frac{x}{xy+x+1}+\frac{xy}{1+xy+x}+\frac{1}{x+1+xy}$$

$$=\frac{x+xy+1}{xy+x+1}=1$$

依テ證明シ得タリ。

【試煉問題】 $abcd=1$ ナルトキ

$$\frac{a}{abc+ab+a+1}+\frac{b}{bcd+bc+b+1}+\frac{c}{acd+cd+c+1}+\frac{d}{abd+ad+d+1}$$

ノ値ヲ求ム。 (東商豫)　　答 1

**例 236.** $x=a+\frac{1}{y},\ y=b+\frac{1}{z},\ z=c+\frac{1}{x}$ ナルトキ

$(bc+1)x+b=(ca+1)y+c=(ab+1)z+a$

ナルコトヲ證セ。

**着眼** 假定式ハ $x,y,z$ ニ關シテハ分數式デアルガ, $a,b,c$ ニ關シテハ一次式デアルコトニ着眼シテ $a,b,c$ ヲ表ハス式ヲ作ツテ代入スル。

**證明** 假定式ヨリ

$$a=x-\frac{1}{y},\quad b=y-\frac{1}{z},\quad c=z-\frac{1}{x}$$

$$\therefore\ (bc+1)x+b=\left\{\left(y-\frac{1}{z}\right)\left(z-\frac{1}{x}\right)+1\right\}x+y-\frac{1}{z}$$

$$=\left(yz-1-\frac{y}{x}+\frac{1}{xz}+1\right)x+y-\frac{1}{z}$$

$$=xyz-y+\frac{1}{z}+y-\frac{1}{z}=xyz$$

同樣ニ $(ca+1)y+c=\left(xz-\frac{z}{y}-1+\frac{1}{xy}+1\right)y+z-\frac{1}{x}=xyz$

$$(ab+1)z+a=\left(xy-\frac{x}{z}-1+\frac{1}{yz}+1\right)z+x-\frac{1}{y}=xyz$$

$$\therefore\ (bc+1)x+b=(ca+1)y+c=(ab+1)z+a$$

【試煉問題】 $a(y+z)=x,\ b(z+x)=y,\ c(x+y)=z$ ナルトキ

$$\frac{x^2}{a(1-bc)}=\frac{y^2}{b(1-ca)}=\frac{z^2}{c(1-ab)}$$ ナルコトヲ證セ。

但シ $x,\ y,\ z$ 及ビ $x+y+z$ ハ何レモ零ナラズトス。



**例 237.** $x^2=b+c,\ y^2=c+a,\ z^2=a+b,\ x=y+z$ ナルトキ

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ ナルコトヲ證セヨ。

**着眼** 假定式ノ初メノ三ツハ $a,b,c$ ニ關シテ一次ナルコトニ着眼シコレヨリ $a,b,c$ ヲ表ハス式ヲ導イテ終結式ノ左邊ニ代入スル。

**證明** $x^2=b+c$ ……①　　$y^2=c+a$ ……②

$z^2=a+b$ ……③　　$x=y+z$ ……④

①+②+③ヨリ　$a+b+c=\frac{x^2+y^2+z^2}{2}$ ……⑤

⑤−①ヨリ　$a=\frac{y^2+z^2-x^2}{2}$

⑤−②ヨリ　$b=\frac{x^2-y^2+z^2}{2}$,　⑤−③ヨリ　$c=\frac{x^2+y^2-z^2}{2}$

**STOP** コレラノ値ヲ終結式ノ左邊ニ代入シテモ出來ルガ, 假定式④ヲコレラノ式ニ代入スルト $a,b,c$ ノ値ガ $y$ ト $z$ ノミデ表ハサレテ簡單ニナルト考ヘテ

**GO** ④ヲ代入スルト　$a=\frac{y^2+z^2-(y+z)^2}{2}=-yz$ ……⑥

$b=\frac{(y+z)^2-y^2+z^2}{2}=z(y+z)$ ……⑦

$c=\frac{(y+z)^2+y^2-z^2}{2}=y(y+z)$ ……⑧

$$\therefore\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{-yz}+\frac{1}{z(y+z)}+\frac{1}{y(y+z)}$$

$$=\frac{-(y+z)+y+z}{yz(y+z)}=0$$

依テ證明セラレタ。

【試煉問題】 $x^2+yz=a,\ y^2+zx=b,\ z^2+xy=c,\ x+y+z=0$

ナルトキ　$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}=0$ ヲ導キ出セ。

但シ $(b+c)(c+a)(a+b)\neq 0$ トス。　(長崎)

## (2) 實數條件ヤ，不等條件ガ與ヘラレタ場合ノ證明

### (イ) 實數條件ガ與ヘラレタ場合ハ

1. (實數)$^2 \geqq 0$ ナル性質ヲ應用スル方針デ　**完全平方式ノ和＝0** ナル形ヲ導イテ證明スルカ，
2. 一元二次方程式（但シ係數ノ實數ナル）ノ根ガ實數ナルタメノ條件　判別式$\geqq 0$ ヲ用ヒル方針デ或一文字＝關スル**二次方程式**ヲ導イテ證明スル。

注　コノ方針ハ不定方程式ノ實數解＝於ケル方針ト全ク同一デ，如何ナル場合デモ「**實數**」ナル條件ガ與ヘラレタトキハ上記ノ考ヘ方ガ解法ノ根柢トナル。

---

**例 238.** $x,\ y,\ z$ ガ何レモ實數＝シテ

$$6(x^2+2y^2+3z^2)=(x+2y+3z)^2$$

ナルトキハ　$x=y=z$

ナルコトヲ證セヨ。

---

**方針** 1. 實數條件＝着眼シテ完全平方式ノ和＝0 ナル形ヲ導ク。

**證明**　$6(x^2+2y^2+3z^2)=(x+2y+3z)^2$

移項シテ　$6(x^2+2y^2+3z^2)-(x+2y+3z)^2=0$ …………①

①ノ左邊$=5x^2+8y^2+9z^2-4xy-12yz-6xz$

**STOP**　コレヲ完全平方式ノ和＝直シ度イト考ヘ，積 $-4xy$ ＝着眼シテ　$x^2-4xy+4y^2$，$4x^2-4xy+y^2$，$2x^2-4xy+2y^2$　等ノ組合セヲ試ミテ

**GO**　左邊$=(2x^2-4xy+2y^2)+(3x^2-6xz+3z^2)+(6y^2-12yz+6z^2)$ …②

$=2(x-y)^2+3(x-z)^2+6(y-z)^2$

依テ①ハ　$2(x-y)^2+3(x-z)^2+6(y-z)^2=0$ ………………①′

シカル＝ $x,y\ z$ ハ實數ナル故 $2(x-y)^2\geqq 0$，$3(x-z)^2\geqq 0$，$6(y-z)^2\geqq 0$

依テ ①′ ガ成立スルタメ＝ハ

$2(x-y)^2=0$，　$3(x-z)^2=0$，　$6(y-z)^2=0$

ガ同時＝成立スルヲ要ス　　∴ $x=y=z$　ナリ。



**方針** 2. ①ヨリ②ヲ導ク組合セガウマク見付カラヌトキハ躊躇スルコトナク確實ナ第二方針＝轉向シテ次ノ如ク證明ヲスル。

**證明**　①ノ左邊ヲ $x$ ＝就テ整頓スルト

$5x^2-2(2y+3z)x+(8y^2-12yz+9z^2)=0$ …………③

$x$ ＝ツイテノ二次方程式デ係數ガ何レモ實數ナル故，$x$ ガ實數ナルタメ＝ハ　$(2y+3z)^2-5(8y^2-12yz+9z^2)\geqq 0$　ナルヲ要ス。

コレヲ整頓スルト　$-36(y-z)^2\geqq 0$　∴ $(y-z)^2\leqq 0$

シカル＝ $y,\ z$ ハ實數ナル故　$(y-z)^2<0$　ハ成立シナイ。

依テ　$(y-z)^2=0$　　∴ $y=z$ ……………………④

之ヲ③＝代入スルト　$5x^2-10xz+5z^2=0$　∴ $5(x-z)^2=0$

∴ $x=z$ ……………………⑤

④,⑤ヨリ　　$x=y=z$　ナリ。

**指導總括**　一般＝此種ノ問題ヲ（方針 1）ノミ＝依ツテ解決セントシ之＝失敗スレバ問題ヲ放棄スル者ガ多イ。中＝ハ①ノ如キ二次ノ同次式ハ常＝必ズ ①′ ノ如キ形＝變ジ得ルモノト考ヘテ居ル者モアルガ，コノ様＝變形出來ルノハ初メノ同次式ノ係數間＝或特殊關係ガ存在スルトキ＝限ルノデアル。

實數條件ノ問題＝ハ地味デハアルガ確實ナ（方針 2）ノアル事ヲ忘レテハナラヌ。

**【試練問題】** $a,\ b,\ c$ ガ實數＝シテ　$3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2$　ナルトキハ $a=b=c$ ナルコトヲ證セヨ。

---

**例 239.** $a,\ b,\ c$ 及 $d$ ハ何レモ零ナラザル實數＝シテ，且

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$$

ナル時ハ，此等四數ハ等比級數ヲナスコトヲ證明セヨ。

---

**着眼**　實數條件＝着眼シテ方針①又ハ②＝ヨルノデアルガ，コノ假定式ハ移項シテ整頓スルト必ズ完全平方式三ツノ和＝0 ナル形＝變形出來ル事ヲ覺エテ置イテ貰ヒタイ。

**證明**　$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$ ……①

移項シテ　$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)-(ab+bc+cd)^2=0$

$\therefore$　$a^2b^2+b^4+b^2c^2+a^2c^2+b^2c^2+c^4+a^2d^2+b^2d^2+c^2d^2$
$-a^2b^2-b^2c^2-c^2d^2-2ab^2c-2bc^2d-2abcd=0$

$\therefore$　$b^4+c^4+b^2c^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2d^2-2ab^2c-2bc^2d-2abcd=0$

$(b^4-2ab^2c+a^2c^2)+(c^4-2bc^2d+b^2d^2)+(a^2d^2-2abcd+b^2c^2)=0$

$\therefore$　$(b^2-ac)^2+(c^2-bd)^2+(ad-bc)^2=0$ …………②

$a,b,c,d$ ハ何レモ實數ナル故 $(b^2-ac)^2\geqq 0$, $(c^2-bd)^2\geqq 0$, $(ad-bc)^2\geqq 0$

依テ　②ガ成立スルタメニハ

$b^2-ac=0$ ……③　$c^2-bd=0$ ……④　$ad-bc=0$ ……⑤

ノ三式ガ同時ニ成立スルヲ要ス。且 $a,b,c,d$ ハ何レモ 0 ナラザル故

③ヨリ　$b^2=ac$　$\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$　④ヨリ $\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}$,　⑤ヨリ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$

$\therefore$　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}$　即チ　$a$, $b$, $c$, $d$ ハ等比級數ヲナス。

**註意**　單ニ「公式ニヨリ」ト書イテ①ヨリ直チニ②ヲ示ス者アリ。勿論此程度ノ公式ヲ覺エテ居ルト式ノ變形ニ見通シガツイテ便利デハアルガ，結果ノミヲ書カナイデ途中ノ變形ヲ示シテ置カネバナラヌ。

【公式】　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$
$=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2$

**【試棟問題】**　$x$, $y$, $z$ ハ實數ニシテ

$x^4+y^4+z^4+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2=2xyz(x+y+z)$　ナルトキ

$x=y=z$ ナルコトヲ證明セヨ。　（京醫豫）

**例 240.**　$x$, $y$, $z$ ハ實數ニシテ　$x+y+z=5$, $x^2+y^2+z^2=9$ ナルトキハ $x$, $y$, $z$ ハイヅレモ1ヨリ小ナラズ, $2\frac{1}{3}$ ヨリ大ナラザルコトヲ證明セヨ。

**着眼**　先ヅ實數條件ニ着眼シ（方針 1）ニヨル變形ヲ試ミテモウマク出來ナイカラ，（方針 2）ニ依ル。



**證明**　題意ヨリ　$x+y+z=5$ ……①　$x^2+y^2+z^2=9$ ……②

**STOP**　コノマヽデハ判別式ガ用ヒラレヌ。ソコデ①ガ一次式ナルコトニ着眼シテ $x$, $y$, $z$ ノ何レカ一ツヲ他ノ文字デ表ハシテ②ニ代入シ二元二次方程式ヲ導ク。

**GO**　①ヨリ　$z=5-(x+y)$ ……………………①′

①′ヲ②ニ代入シテ　$x^2+y^2+25-10(x+y)+(x+y)^2=9$

$x$ ニツイテ整頓スルト　$2x^2+2(y-5)x+(2y^2-10y+16)=0$

$\therefore$　$x^2+(y-5)x+(y^2-5y+8)=0$

係數ガ實數（$\because$ $y$ ハ實數）ナル故 $x$ ガ實數ナルタメニハ

$(y-5)^2-4(y^2-5y+8)\geqq 0$

$\therefore$　$-3y^2+10y-7\geqq 0$　$\therefore$ $3y^2-10y+7\leqq 0$

即チ　$(3y-7)(y-1)\leqq 0$　$\therefore$ $1\leqq y\leqq 2\frac{1}{3}$

全ク同様ニシテ　$1\leqq x\leqq 2\frac{1}{3}$,　$1\leqq z\leqq 2\frac{1}{3}$

依テ　$x$, $y$, $z$ ハ何レモ 1 ヨリ小ナラズ, $2\frac{1}{3}$ ヨリ大デハナイ。

**【試棟問題】**　$x+y+z=5$ 及ビ $yz+zx+xy=8$ ヲ同時ニ滿足スル $x$, $y$ 及ビ $z$ ノ何レモガ1ヨリモ小ナラズ又 $2\frac{1}{3}$ ヨリモ大ナラザルコトヲ證明セヨ。但シ $x,y,z$ ハ實數ナリトス。（米・工）

## （ロ）　相等シカラザル數ナル條件ガ與ヘラレタ場合

$a\neq b$ ナル條件ガ與ヘラレタ場合ハ

1. $a-b\neq 0$ ナル故兩邊ヲ $a-b$ デ割ッテ證明シナケレバナラヌ問題ガ多イ。ソコデ假定式ヲ變形シテ（$a-b$）ナル因數ヲ導キ出ス方針デ證明ヲ進メルカ
2. 假定式ヲ變形シテ得ル式ガ $a\neq b$ ナル假定ニ反スルヤ否ヤヲ吟味シテ適シナイモノヲ捨テヽ所要ノ終結條件ヲ導ク。（例 248 別法參照）

**註**　此種ノ問題ハ（方針 1）ニ依テ解決シ得ル問題ガ大部分デアルカラ先ヅ（方針 1）ニ依テ證明ヲ進メ失敗スレバ（方針 2）ニ依ルガヨイ。

**例 241.** $a$ ト $b$ トハ相等シカラズ，又 $c$ ト $d$ トモ相等シカラズシテ $\dfrac{ac-bd}{a-b+c-d}=\dfrac{ad-bc}{a-b-c+d}$ ナルトキハ $a+b=c+d$ ナルコトヲ證セ。

**着眼** $a\neq b$, $c\neq d$ ニ着眼シテ $(a-b)$ ヤ $(c-d)$ ナル因數ヲ括リ出ス方針デ因數分解ヲ試ミル。

**證明** $(a-b+c-d)$, $(a-b-c+d)$ ハ何レモ 0 デハナイ。
（コレラガ 0 ナラバ假定式ノ分母ガ 0 トナリ無意味ニナルカラ）
依テ $(a-b+c-d)(a-b-c+d)$ ヲ兩邊ニ乘ジテ分母ヲ拂フト

$$a^2c-abc-ac^2+acd-abd+b^2d+bcd-bd^2$$
$$=a^2d-abd+acd-ad^2-abc+b^2c-bc^2+bcd$$

移項シテ $a$ ニツイテ整頓スルト

$$a^2(c-d)-a(c^2-d^2)-b^2(c-d)+b(c^2-d^2)=0$$

シカルニ $c\neq d$ ナル故 $(c-d)\neq 0$

$$\therefore\quad a^2-a(c+d)-b^2+b(c+d)=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

**STOP** 次ニ $a\neq b$ ナル條件ニ着眼シテ $(a-b)$ ナル因數ガ括リ出セル樣ニ項ヲ組合セテ

**GO** ①ヨリ $(a^2-b^2)-(c+d)(a-b)=0$
シカルニ $a\neq b$ ナル故 $a-b\neq 0$
$\therefore\ (a+b)-(c+d)=0$ 即 $a+b=c+d$
依テ證明シ得タリ。

**[illegible]** 證明ノ途中デ兩邊ヲ $a-b$ ヤ $c-d$ デ割ルトキ，$a\neq b$ ヤ $c\neq d$ ナル條件ヲ明示セズニ無斷デ割ルモノガアル。

**【試練問題】** 方程式 $x^3-3b^2x+2c^3=0$ ガ相異ナル二根 $a$ 及ビ $b$ ヲ有スルトキハ $a=-2b=-2c$ ナルコトヲ證明セヨ。但シ $b$, $c$ ハ實數トス。



**例 242.** $\dfrac{(ax+by)^2}{a^2+b^2}=\dfrac{(\alpha x+\beta y)^2}{\alpha^2+\beta^2}$ ナルトキハ $\dfrac{x^2-y^2}{a\alpha-b\beta}=\dfrac{2xy}{a\beta+b\alpha}$ ナルコトヲ證明セヨ。
但シ $ab\alpha\beta\neq 0$, $\dfrac{b}{a}\neq\dfrac{\beta}{\alpha}$, $\dfrac{a^2-b^2}{ab}\neq\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta\alpha}$ トス。

**方針** 但書ノ條件ノ分母ヲ拂フト $b\alpha-a\beta\neq 0$, $\beta\alpha(a^2-b^2)\neq ab(\beta^2-\alpha^2)$ ヲ得ル故假定式ヲ變形シ，コレラノ條件ヲ活用シテ終結式ヲ導ク。

**證明** $(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)\neq 0$ （假定式ノ分母）ナル故之ヲ兩邊ニ乘ジテ分母ヲ拂ヘバ $(\alpha^2+\beta^2)(ax+by)^2=(a^2+b^2)(\alpha x+\beta y)^2\cdots\cdots ①$
$\therefore\ (\alpha^2+\beta^2)(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)=(a^2+b^2)(\alpha^2x^2+2\alpha\beta xy+\beta^2y^2)$

**STOP** サテコレヲ如何ニ變形スルカ？ ト考ヘテ終結式ヲ觀察スルト左邊ノ分子ガ $x^2$ ト $y^2$，右邊ノ分子ハ $2xy$ ナルコトニ着眼シテ $x^2$, $y^2$ ヲ含ム項ヲ左邊ニ，$xy$ ヲ含ム項ヲ右邊ニ集メテ見ル。

**GO** 移項スルト $(a^2\beta^2-b^2\alpha^2)(x^2-y^2)=2(\alpha\beta a^2+\alpha\beta b^2-ab\alpha^2-ab\beta^2)xy$
$\therefore\ (a\beta-b\alpha)(a\beta+b\alpha)(x^2-y^2)=2\{a\alpha(a\beta-b\alpha)-b\beta(a\beta-b\alpha)\}xy$
シカルニ題意ニヨリ $\dfrac{b}{a}\neq\dfrac{\beta}{\alpha}$ H. $a\alpha\neq 0$ ナル故 $b\alpha\neq a\beta$
$\therefore\ a\beta-b\alpha\neq 0$ 故ニ $a\beta-b\alpha$ デ兩邊ヲ割レバ

$$(a\beta+b\alpha)(x^2-y^2)=2(a\alpha-b\beta)xy\ \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

**STOP** サテコノ兩邊ヲ $(a\beta+b\alpha)(a\alpha-b\beta)$ デ割レバ終結式ヲ得ルカラ之ガ零ナラザル事ヲ確カメ度イト考ヘテ但書ノ第三式ヲ引用スル。

**GO** シカルニ $\dfrac{a^2-b^2}{ab}\neq\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta\alpha}$ デ $ab\alpha\beta\neq 0$ ナル故分母ヲ拂ヘバ

$$a^2\alpha\beta-b^2\alpha\beta-ab\beta^2+ab\alpha^2\neq 0$$
$$\therefore\quad a\beta(a\alpha-b\beta)+b\alpha(a\alpha-b\beta)\neq 0$$

$\therefore\quad (a\alpha-b\beta)(a\beta+b\alpha)\neq 0$ コノ式デ②ノ兩邊ヲ割レバ

$$\frac{x^2-y^2}{a\alpha-b\beta}=\frac{2xy}{a\beta+b\alpha}$$

依ツテ證明シ得タリ。

[illegible] 證明ノ途中デ割ルベキ式 $(a\alpha-b\beta)(a\beta+b\alpha)$ ガ 0 ナラザルコトヲ確カメ得ナイ者ガ多イ。

一般ニ兩邊ヲ割ルベキ式ハ零ナラザル事ヲ確カメタ上デナケレバナラヌガ，モシ確カメ得ナイトキハ少クトモ「$\neq 0$ トシテ」ト斷ツテ置カネバナラヌ。

**【試練問題】** $\dfrac{x}{1-x^2}=\dfrac{y+z}{m+nyz}$，$\dfrac{y}{1-y^2}=\dfrac{z+x}{m+nzx}$ ナルトキ

$\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}+\dfrac{1}{xy}=n-1$ ナルコトヲ證明セヨ。

但シ $x\neq y$ ニシテ $x, y, z$ ハ 0 ナラズトス。　（山形高）

### (3) 假定式ノ形ニ着眼シテ證明方針ノ定マル例

**(イ) $a+b+c=0$ ナル假定式ガ與ヘラレタトキ**

何レノ文字ニ就テモ一次式デアルカラ $a=-(b+c)$ 又ハ $b=-(c+a)$ 又ハ $c=-(a+b)$ 等ヲ代入シテ證明出來ルガ，更ニコノ式ヲ變形シテ得ル次ノ如キ式ヲ覺エテ置イテ之ヲ活用スルト證明ガ簡單ニナルコトガアル。

$a+b+c=0$ ナルトキ

(イ) 一次式ノ場合　$a+b=-c,\quad c+a=-b,\quad a+b=-c$

(ロ) 二次式ノ場合　$a^2+b^2-c^2=-2ab$

〔∵ $a+b=-c$ ノ兩邊ヲ平方スルト
$a^2+2ab+b^2=c^2$　∴ $a^2+b^2-c^2=-2ab$ ヲ得ル〕

同樣ニ　$b^2+c^2-a^2=-2bc,\quad c^2+a^2-b^2=-2ca$

又　$a^2+b^2+c^2=-2(bc+ca+ab)$　等

(ハ) 三次式ノ場合　$a^3+b^3+c^3=3abc$

〔∵ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=0$〕

等ト變形シテ代入スル。

**例 243.** $a+b+c=0$ ナルトキ次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=9$$

但シ $a, b, c$ ハ悉ク不等ニシテ零ナラズトス。



[illegible] $a+b+c=0$ ナル條件式ノ變形ヲ念頭ニ置キ臨機應變之ヲ代入スル。尚證明スベキ式ハ $a, b, c$ ノ三文字ニ關スル輪環式デアルカラ各括弧内ノ式ヲ同時ニ通分（例 97 參照）シテ整頓スル。

證明 $$\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}=\frac{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}{abc}$$

分子ハ輪環式因數分解ノ準公式ニヨリ $-(b-c)(c-a)(a-b)$ トナル

$$\therefore\ \frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}=\frac{-(b-c)(c-a)(a-b)}{abc}\cdots\cdots①$$

次ニ $$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}$$
$$=\frac{a(c-a)(a-b)+b(b-c)(a-b)+c(b-c)(c-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

STOP 分子ノ各式ヲ順次 $a, b, c$ ニツイテ降冪ノ順ニ整頓シテ取扱フ方針デ

GO 分子 $=-a(a-c)(a-b)-b(b-c)(b-a)-c(c-b)(c-a)$
$=-a\{a^2-(b+c)a+bc\}-b\{b^2-(c+a)b+ca\}$
$-c\{c^2-(a+b)c+ab\}$

シカルニ　$a+b+c=0$　∴ $b+c=-a,\ c+a=-b,\ a+b=-c$

∴ 分子 $=-a(2a^2+bc)-b(2b^2+ca)-c(2c^2+ab)$
$=-2(a^3+b^3+c^3)-3abc$

シカルニ　$a+b+c=0$　∴ $a^3+b^3+c^3=3abc$

〔∵ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=0$〕

∴ 分子 $=-9abc$

$$\therefore\ \frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=\frac{-9abc}{(b-c)(c-a)(a-b)}\cdots\cdots②$$

①×②ヨリ $$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)$$
$$=\frac{-(b-c)(c-a)(a-b)}{abc}\times\frac{-9abc}{(b-c)(c-a)(a-b)}=9$$

〔$a, b, c$ ハ不等デ 0 ナラザル故 $abc(b-c)(c-a)(a-b)\neq 0$〕

依テ證明セラレタ。

[illegible] $a+b+c=0$ ナルトキ $a^3+b^3+c^3=3abc$ ヲ用ヒル場合ハ其理由ヲ上記ノ如ク簡明ニ示シテオクガヨイ。

【試練問題】 $a+b+c=0$ ナルトキ

(i) $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-3$

ナルコトヲ證明セヨ。 (三高, 高岡商)

(ii) $$\frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)+\frac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2)$$
$$+\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)=0$$

ナルコトヲ證明セヨ。

## (ロ) 假定式ガ三文字ニ關スル三次ノ對稱式デアル場合

【標準型】 (1) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1$

(2) $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$

(3) $(a+b+c)(bc+ca+ab)=abc$

(4) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc=0$

コレラノ式ガ與ヘラレタ場合ハ何レノ式カラモ

$(a+b)(b+c)(c+a)=0$ 從ツテ「$a+b=0$ 又ハ $b+c=0$ 又ハ $c+a=0$」ナル條件式ヲ導キ得ル事ヲ覺エテ置イテ終結式ノ如何ニ拘ラズ一應コノ條件式ヲ導キ，之ヲ活用シテ證明スル。

註 (1) ダケハ分數式デアルガ，分母ヲ拂フト (3) ト同ジ三次ノ對稱式ニナル。

【基本問題】 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)=1$ ナルトキハ $a$, $b$, $c$ ノ何レカ二ツノ和ハ 0 ナルコトヲ證明セヨ。 (水高. 横專. 宮農)

證明　假定式ヨリ $\left(\frac{bc+ca+ab}{abc}\right)(a+b+c)=1$

分母ヲ拂ヘバ　$(bc+ca+ab)(a+b+c)-abc=0$ 〔但 $abc\neq0$〕

$a$ ニツイテ整頓スルト　$a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)=0$

$\therefore\ (b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}=0$



$\therefore\ (b+c)(a+b)(a+c)=0$

$\therefore\ b+c=0$ 又ハ $a+b=0$ 又ハ $a+c=0$

即チ $a$, $b$, $c$ ノ何レカ二ツノ和ハ 0 ナリ。

例 244.　$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$ ナルトキハ

$(a+b+c)^m=a^m+b^m+c^m$

ナルコトヲ證明セヨ。但シ $m$ ハ奇數ナリトス。

着眼　假定式ガ三次ノ對稱式ノ標準型デアルカラ之ヨリ ( )( )( )=0 ナル形ノ式ヲ導イテ證明スル。

證明　$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$ ……………… ①

移項シテ　$\{(a+b+c)^3-a^3\}-(b^3+c^3)=0$

$\therefore \{(a+b+c)-a\}\{(a+b+c)^2+(a+b+c)a+a^2\}-(b+c)(b^2-bc+c^2)=0$

$\therefore\ (b+c)\{(a+b+c)^2+(a+b+c)a+a^2-(b^2-bc+c^2)\}=0$

$(b+c)\{3a^2+3ab+3bc+3ca\}=0$ ……… ②

$\therefore\ 3(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}=0$

$\therefore\ 3(b+c)(a+b)(a+c)=0$ ……………… ③

$\therefore\ b+c=0$　又ハ　$c+a=0$　又ハ　$a+b=0$

STOP　一次關係ヲ導キ出シタカラ，後ハ代入法ニヨル。

GO　(イ) $b+c=0$ ナルトキハ $b=-c$

$\therefore\ (a+b+c)^m=(a-c+c)^m=a^m$

$a^m+b^m+c^m=a^m+(-c)^m+c^m=a^m$ ……… ④

($\because$ $m$ ガ奇數ナル故 $(-c)^m=-c^m$ トナルカラ)

依テ　$(a+b+c)^m=a^m+b^m+c^m$ デアル。

(ロ) $c+a=0$, $a+b=0$ ナル場合モ同樣ニ證明スルコトヲ得ル。

指導總括　假定式①ヲ變形スレバ③ヲ得ル。トイフ見通シガツカヌ樣デハコノ問題ハ解決出來ナイ。倘③ヲ導ク途中デ $b+c$ ヲ約シテ $(a+c)(a+b)=0$ ダケヲ導キ $b+c=0$ ナル場合ヲ考慮シナイモノヤ④ニ於テ $m$ ガ奇數ナルコトヲ明示セズニ $(-c)^m$ ヲ $-c^m$ ト書キ直スモノガアル。

【試練問題】 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ ナルトキハ

$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3+b^3+c^3}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3$ ナルコトヲ證セヨ。 (阪大醫. 米工)

**例 245.** 三數 $a, b, c$ ノ和トソレラノ逆數ノ和トガイヅレモ 1 ＝等シキトキハ $a, b, c$ ノウチ＝ハ少クトモ一ツ 1 ＝等シキモノガアルベキコトヲ示セ。

**證明**　題意＝ヨリ　$a+b+c=1$……①　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$……②

**STOP**　①,②ノ左邊ガ基本問題（標準型(1)）ノ左邊ノ括弧内ノ式ト同一式デアルコト＝着眼シテ①,②ヲ邊々乘ジテ（　)(　)(　)＝0 ヲ導ク。

**GO**　①×②ヨリ　$(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=1$

分母ヲ拂ッテ　$(a+b+c)(bc+ca+ab)=abc$

之ヲ整頓スルト（コノ計算ハ基本問題ト同一ナル故コヽ＝ハ省略スル）

$$(b+c)(c+a)(a+b)=0$$

$\therefore$　$b+c=0$ 又ハ $c+a=0$ 又ハ $a+b=0$

㋑　$b+c=0$ ナルトキハ　①ヨリ　$a=1$

㋺　$c+a=0$ ナルトキハ　①ヨリ　$b=1$

㋩　$a+b=0$ ナルトキハ　①ヨリ　$c=1$

依テ　$a, b, c$ ノ中少クトモ一ツハ 1 ＝等シイ。

**【試練問題】**　$x, y, z$ ガ何レモ 1 ＝等シカラザルトキ次ノ二式ハ兩立シ得ルカ。　$x+y+z=1,\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$

**答**　兩立スルコトヲ得ズ

## （ハ）　假定式ガ三文字＝關スル輪環式ナル場合

例へバ　$\overset{\text{第一式}}{y^2+z^2+ayz}=\overset{\text{第二式}}{z^2+x^2+azx}=\overset{\text{第三式}}{x^2+y^2+axy}$

ノ如キ假定式ハ $x, y, z$, ＝關スル輪環式デ，第一式＝ハ $y$ ト $z$，第二式＝ハ $z$ ト $x$，第三式＝ハ $x$ ト $y$ トヲ含ミ，三文字ヲ輪環的＝（$x$ ヲ $y$ ＝，$y$ ヲ $z$ ＝，$z$ ヲ $x$ ＝）置キ換ヘルト順次＝次ノ式ガ得ラレル（即チ第一式中ノ $y$ ヲ $z$ ＝，$z$ ヲ $x$ ＝置キ換ヘルト第二式ヲ得，第二式＝於テ同樣ノ置換ヲスルト第三式ヲ得ル）

コノ樣ナ形ノ假定式ガ與ヘラレタ場合ハ次ノ方針デ證明スル。



**〔輪環式ガ與ヘラレタ場合ノ證明方針〕**

1. 假定式＝$k$ ト置キ　第一式＝$k$，第二式＝$k$，第三式＝$k$ ヲ作リ，之ヲ利用シテ證明スル。
2. 上記ノ三式ヲ邊々減ジルト $(x-y)$，$(y-z)$，$(z-x)$ ナル形ノ因數ガ括リ出サレルコトヲ利用シテ證明スル。

**例 246.** $y^3+z^3+m(y+z)=z^3+x^3+m(z+x)=x^3+y^3+m(x+y)$ ナルトキハ　$x+y+z=0$　ヲ證シ依リテ $y^3+z^3+m(y+z)=2xyz$　ナルコトヲ證明セヨ。但シ $x, y, z$ ハ何レノ二ツモ相等シカラズトス。

**着眼**　條件式（假定式）ガ $x, y, z$ ＝關スル輪環式デアルカラ ＝$k$ ト置ク。尙 $x, y, z$ ハ何レノ二ツモ不等ナル但書ヲ見落サナイデ之ヲ利用スル。

**證明**　條件式 ＝$k$ ト置クト　$y^3+z^3+m(y+z)=k$…………①

$z^3+x^3+m(z+x)=k$…………②

$x^3+y^3+m(x+y)=k$…………③

**STOP**　終結式ノ $x+y+z=0$ ＝釣ラレテ邊々加ヘル者ガアルガ之ハイケナイ。$x\neq y$ ナル但書＝着眼シテ差ヲ作ルノデアル。

**GO**　②－①ヨリ　$x^3-y^3+m(x-y)=0$

シカル＝ $x\neq y$ ナル故 $x-y\neq 0$　故＝ $x-y$ デ兩邊ヲ割ルト

$x^2+xy+y^2+m=0$…………④

③－②ヨリ同樣＝シテ　$y^2+yz+z^2+m=0$…………⑤

**STOP**　コヽデ亦④＋⑤ヲ作ルモノガアルガ，矢張リ邊々減ジテ差ノ形ヲ導ク。

**GO**　④－⑤ヨリ　$x^2-z^2+y(x-z)=0$

$x\neq z$　ナル故　$x-z\neq 0$　$\therefore$ $x+y+z=0$……〔終結式ノ一〕……⑥

**STOP**　次＝第二ノ終結式 $y^3+z^3+m(y+z)=2xyz$ ノ右邊ト①,②,③ノ左邊 $x^3, y^3, z^3$ ト＝着眼スルトおいれるノ公式ガ連想サレルカラ

**GO** ①＋②＋③ヨリ $3k=2(x^3+y^3+z^3)+2m(x+y+z)\cdots\cdots$⑦

シカルニ ⑥ヨリ $x+y+z=0$ 從ツテ $x^3+y^3+z^3=3xyz$

（∵ おいれるノ公式ニヨリ $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$）

コレラヲ⑦ニ代入シテ $3k=6xyz$ ∴ $k=2xyz$

依テ ①ヨリ $y^3+z^3+m(y+z)=2xyz\cdots\cdots$〔終結式ノ二〕

依ツテ證明シ得タリ。

**[illegible]** 「$x$, $y$, $z$ ガ何レノ二ツモ相等シカラズ」トノ條件ヲ利用スルコトヲ忘レテ邊々加ヘルモノハ殆ド失敗ニ終ル。

**【試練問題】** $x$, $y$, $z$ ガ相等シカラズシテ

$x^3+y^3+axy=y^3+z^3+ayz=z^3+x^3+azx=k$ ナルトキハ

$x+y+z=a$ ニシテ又 $x^3+y^3+z^3+xyz=2k$ ナルコトヲ證明セヨ。 （松江高，大商）

**例 247.** $a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c}=c+\dfrac{1}{a}$ ナルトキハ $a=b=c$ ナルカ，或ハ $a^2b^2c^2=1$ ナルコトヲ證明セヨ。

**着眼** 矢張リ假定式ガ $a$, $b$, $c$ ニ關スル輪環式ナル事ニ着眼シテ $=k$ ト置キ差ヲ作ル。

**證明** $a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c}=c+\dfrac{1}{a}=k$ ト置クト

$$a+\frac{1}{b}=k\cdots\cdots① \quad b+\frac{1}{c}=k\cdots\cdots② \quad c+\frac{1}{a}=k\cdots\cdots③$$

①－②ヨリ $a-b+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}=0$ ∴ $a-b=\dfrac{b-c}{bc}\cdots\cdots$④

同様ニ ②－③ヨリ $b-c=\dfrac{c-a}{ca}\cdots\cdots$⑤

**STOP** ④,⑤ニハ $a-b$, $b-c$, $c-a$ ナル因數ガアルガ，兩邊ノ因數ガ揃ツテキナイカラ前例ノ樣ニ約セナイ。亦④,⑤ヲ邊々減ジテ見テモ終結式ガ得ラレナイノデ，③－①ヨリ④,⑤ト同一型ノ式ヲモウ一ツ作ツテ見ル。



**GO** ③－①ヨリ $c-a+\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=0$ ∴ $c-a=\dfrac{a-b}{ab}\cdots\cdots$⑥

④,⑤,⑥ヲ邊々乘ジルト $(a-b)(b-c)(c-a)=\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{a^2b^2c^2}$

$abc\neq0$〔假定式ノ分母〕ナル故兩邊ニ $a^2b^2c^2$ ヲ乘ジルト

$$(a-b)(b-c)(c-a)(a^2b^2c^2-1)=0\cdots\cdots⑦$$

依テ $a=b$ 又ハ $b=c$ 又ハ $c=a$ 又ハ $a^2b^2c^2-1=0$

（イ） $a=b$ ナルトキハ ⑥ヨリ $c=a$ ∴ $a=b=c$

（ロ） $b=c$ ナルトキハ ④ヨリ $a=b$ ∴ $a=b=c$

（ハ） $c=a$ ナルトキハ ⑤ヨリ $b=c$ ∴ $a=b=c$

（ニ） $a^2b^2c^2-1=0$ ナルトキハ $a^2b^2c^2=1$

依テ $a=b=c$ ナルカ或ハ $a^2b^2c^2=1$ ナリ。

**[illegible]** ⑦ヨリ $a=b$ 又ハ $b=c$ 又ハ $c=a$ 又ハ $a^2b^2c^2=1$ トスベキ所ヲ「又ハ」ヲ無視シテ⑦ヨリ直チニ「$a=b=c$ 又ハ $a^2b^2c^2=1$ ナリ」ト斷定スルモノガアル。

**【試練問題】** $a+\dfrac{1}{a}=b+\dfrac{1}{b}=c+\dfrac{1}{c}$ ナルトキハ

$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=0$ ナルコトヲ證セヨ。

**例 248.** $x+\dfrac{1}{y}=y+\dfrac{1}{z}=z+\dfrac{1}{x}=a$ ニシテ $x$, $y$, $z$ ハ何レノ二ツモ相等シカラザルトキハ $a^2=1$ ナルコトヲ證明セヨ

**方針** 1. 假定式ガ $x$, $y$, $z$ ニ關スル輪環式デアルカラ前例ニ倣フ。

**證明** $x+\dfrac{1}{y}=a\cdots\cdots$① $y+\dfrac{1}{z}=a\cdots\cdots$② $z+\dfrac{1}{x}=a\cdots\cdots$③

①－②，②－③，③－①ヲ邊々乘ジ（前例ト全ク同一ナル故途中ハ省略スル）

$$(x-y)(y-z)(z-x)=\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{x^2y^2z^2}\cdots\cdots④$$

$x$, $y$, $z$ ハ何レノ二ツモ相等シカラザル故 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq0$

∴ $x^2y^2z^2=1\cdots\cdots$⑤

**STOP** 簡單ナ式ヲ導キ得タガ，終結式ニハ $a$ ガ含マレテキル事ニ着眼シテ $a$ ヲ含ム式ヲ導キ度イト考へ

**GO** ①,②,③ノ分母ヲ拂ヘバ

$$xy+1=ay \cdots\cdots ①' \quad yz+1=az \cdots\cdots ②' \quad xz+1=ax \cdots\cdots ③'$$

①′−②′ ヨリ $y(x-z)=a(y-z)$　②′−③′ ヨリ $z(y-x)=a(z-x)$

③′−①′ ヨリ $x(z-y)=a(x-y)$　コレラノ式ヲ邊々乘ジルト

$$xyz(x-z)(y-x)(z-y)=a^3(y-z)(z-x)(x-y)$$

$(y-z)(z-x)(x-y)\neq 0$　$\therefore\ xyz=-a^3 \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$

⑥ヲ⑤ニ代入シテ　$a^6=1$　$\therefore\ a^2=1$（但 $a$ ハ實數トス）

**[illegible]** コレデ證明スル事ガ出來タガ少シ技巧的デアルカラ，地味ナ代入法ニヨル別法ヲ示ス事ニスル。

**方針** 2. 終結式ガ $a$ ノミヲ含ム式ナルコトニ着眼シ $y$ ヤ $z$ ヲ $a$ デ表ハシテ代入スル。

**證明** ①ヨリ　$\dfrac{1}{y}=a-x$　$\therefore\ y=\dfrac{1}{a-x} \cdots\cdots\cdots\cdots ①'$

③ヨリ　$z=a-\dfrac{1}{x}$　$\therefore\ z=\dfrac{ax-1}{x} \cdots\cdots\cdots\cdots ③'$

①′, ③′ ヲ②ニ代入スルト　$\dfrac{1}{a-x}+\dfrac{x}{ax-1}=a \cdots\cdots ④$

$(a-x)(ax-1)\neq 0$ トシテ分母ヲ拂ヒ整頓スレバ

$$(a^2-1)x^2-a(a^2-1)x+(a^2-1)=0$$

$$\therefore\quad (a^2-1)(x^2-ax+1)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

**STOP** コヽデ $x^2-ax+1\neq 0$ ナルコトガ證明出來タラ終結式 $a^2=1$ ヲ得ル。ト考ヘテ

**GO** $x^2-ax+1=0$　トスレバ　$ax=x^2+1$

シカルニ $x\neq 0$（假定式ノ分母）$\therefore\ a=\dfrac{x^2+1}{x}=x+\dfrac{1}{x} \cdots\cdots ⑥$

①ト⑥ヨリ　$x+\dfrac{1}{y}=x+\dfrac{1}{x}$　$\therefore\ x=y$ トナリテ假定$(x\neq y)$ニ反ス

依テ $x^2-ax+1\neq 0$　從ツテ　⑤ヨリ　$a^2-1=0$　$\therefore\ a^2=1$

依テ證明シ得タリ。



**[illegible]** 折角⑤ヲ得ナガラ只漫然ト $a^2-1=0$ ノミヲ考ヘ $x^2-ax+1=0$ ノ場合ニツイテ一顧ヲモ拂ハヌモノガ非常ニ多イ。コレデハ $x$, $y$, $z$ ノ何レノ二ツモ相等シカラズ，トイフ條件ガ全ク無視セラレタコトニナリ，解答ガ骨拔キニナル。尙本例ノ樣ニ特殊ナ假定式ガ與ヘラレタ場合ニモ地味ナ代入法ニ依ツテ解決出來タ點ヲ味フベキデアル。

【試練問題】 $x(1-y)$, $y(1-z)$, $z(1-x)$ ノ値皆相等シキトキハ是等ハ何レモ1ニ等シキコトヲ證明セヨ。但シ $x$, $y$, $z$ ハ互ニ相等シカラズトス。

**例 249.** $x$, $y$, $z$ ガ相等シカラズシテ

$$2a-3y=\frac{(z-x)^2}{y},\quad 2a-3z=\frac{(x-y)^2}{z}$$

ナルトキハ $2a-3x=\dfrac{(y-z)^2}{x}$ ナルコトヲ證明セヨ。

**着眼** 矢張リ三文字 $x$, $y$, $z$ ニ關シテ輪環式デアルガ，前ノ三題ト異ナル點ハ**輪環式ノ一ツガ終結式**ニナツテキル事デアル（前ノ三題ハ輪環式三ツガ假定式デアツタ）ソコデ假定式ヲ變形シテ終結式ヲ導キ出ス方針デ證明ヲ進メル。

**證明** $2a-3y=\dfrac{(z-x)^2}{y} \cdots\cdots ①$　$2a-3z=\dfrac{(x-y)^2}{z} \cdots\cdots ②$

①,② ノ分母ヲ拂ヘバ $\begin{cases} 2ay-3y^2=(z-x)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots ①' \\ 2az-3z^2=(x-y)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots ②' \end{cases}$

①′−②′ ヨリ　$2a(y-z)-3(y^2-z^2)=2x(y-z)-(y^2-z^2)$

$$\therefore\quad 2a(y-z)=2x(y-z)+2(y^2-z^2) \cdots\cdots ③$$

シカルニ　$y\neq z$　ナル故兩邊ヲ　$2(y-z)\neq 0$　デ割レバ

$$a=x+y+z \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

**STOP** サテコレカラ如何ニシテ終結式ヲ導クカ？ト考ヘテ終結式ノ分母ヲ拂ツテ見ルト　$2ax-3x^2=(y-z)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$

⑤ト①′トヲ比較シ，⑤ハ①′ニ於ケル **$y$** ガ **$x$** ニ置キ換ヘラレタ式デアルコトニ着眼シ，①′ヨリ④ヲ得ル變形ノ逆ヲ **$y$** ノ代リニ **$x$** ヲ置キ

換ヘテ行ヘバ⑤ヲ導キ得ル筈ト考ヘテ,

GO　④ノ兩邊ニ $2(x-z)$ ヲ乘ジルト ($x\neq z$ ナル故 $x-z\neq 0$)

$$2a(x-z)=2y(x-z)+2(x^2-z^2)$$

$$\therefore\quad 2a(x-z)-3(x^2-z^2)=2y(x-z)-(x^2-z^2)\ \cdots\cdots⑥$$

⑥+②′ ヨリ　$2ax-3x^2=y^2-2yz+z^2$

$$\therefore\quad x(2a-3x)=(y-z)^2$$

$x\neq 0$ トシテ兩邊ヲ割レバ　$2a-3x=\dfrac{(y-z)^2}{x}$　コレ終結式デアル。

依テ證明シ得タリ。

【試練問題】 $x,\ y,\ z$ ハ何レモ零ナラズシテ　$x^2+yz=z^2$,

$y^2+zx=x^2$ ナルトキハ $z^2+xy=y^2$ ナルコトヲ證セ。

## (ニ) 比例式ガ與ヘラレタ場合

$\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}=\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{F}}$ ナル形ノ條件式ガ與ヘラレタトキハ，コレラノ値ヲ $k$ ト置イテ分母ヲ拂ツテ證明スル。(分母ヲ拂ハズニ加比ノ理等ヲ用ヒテ證明スル問題モアルガ，ソレラハ比例ノ章ニ讓ルコトトシ，コヽニハ分母ヲ拂ツテ證明スル一例ヲ示スコトニスル)

**例 250.** $abc(p+q+r)\neq 0$ ニシテ且ツ

$$\frac{x-y}{ap+bq+cr}=\frac{y-z}{bp+cq+ar}=\frac{z-x}{cp+aq+br}$$

ナルトキ，次ノ式ヲ證明セヨ。

$$\frac{x-y}{ab}(a^2+b^2-c^2)+\frac{y-z}{bc}(b^2+c^2-a^2)$$
$$+\frac{z-x}{ca}(c^2+a^2-b^2)=0$$

着眼　比例式ガ與ヘラレテヰルカラニ$k$ト置キ分母ヲ拂ツテ見ル。

證明　$abc(p+q+r)\neq 0\ \cdots\cdots\cdots\cdots①$

$$\frac{x-y}{ap+bq+cr}=\frac{y-z}{bp+cq+ar}=\frac{z-x}{cp+aq+br}\ \cdots\cdots②$$



②ノ値ヲ $k$ ト置キ分母ヲ拂フト

$$x-y=(ap+bq+cr)k\ \cdots\cdots\cdots\cdots③$$
$$y-z=(bp+cq+ar)k\ \cdots\cdots\cdots\cdots④$$
$$z-x=(cp+aq+br)k\ \cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

STOP　$p,\ q,\ r$ ノ係數ガ何レモ $a,\ b,\ c$ ナル事ニ着眼シテ

GO　③+④+⑤ヨリ　$0=(a+b+c)(p+q+r)k$

シカルニ①ヨリ　$p+q+r\neq 0$ ナル故

$a+b+c=0$ 又ハ $k=0$ ナリ

(イ) $a+b+c=0$ ナルトキハ

STOP　$a=-(b+c)$ トナル故コレヲ終結式ノ左邊ニ代入シテモ出來ルガ終結式ノ括弧内ノ式 $a^2+b^2-c^2$ ニ着眼シテ $a+b+c=0$ ノ變形ヲ活用シテ見ル。

GO　$a+b+c=0$ ノトキハ　$a+b=-c$

兩邊ヲ平方スルト　$a^2+b^2+2ab=c^2$

$$\therefore\quad a^2+b^2-c^2=-2ab$$

同様ニシテ　$b^2+c^2-a^2=-2bc$　　$c^2+a^2-b^2=-2ca$

依テ　終結式ノ左邊 $=\dfrac{x-y}{ab}(-2ab)+\dfrac{y-z}{bc}(-2bc)+\dfrac{z-x}{ca}(-2ca)$

$abc\neq 0$ ナル故　$=-2(x-y)-2(y-z)-2(z-x)=0$

(ロ) $k=0$ ナルトキハ　③，④，⑤ヨリ

$$x-y=0,\quad y-z=0,\quad z-x=0$$

依テ　證明式ノ左邊 $=0+0+0=0$

何レノ場合ニ於テモ終結式ハ成立ス。依テ證明セラレタ。

【試練問題】 $abc(p+q+r)\neq 0$ ニシテ

$$\frac{ap+bq+cr}{x-y}=\frac{bp+cq+ar}{y-z}=\frac{cp+aq+br}{z-x}\ \text{ナルトキ}$$

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}=\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}=\frac{c^2+a^2-b^2}{ca}$$

ナルコトヲ證明セヨ。　　(愛醫)

### (4) 終結式ノ形ニ着眼シテ證明方針ノ定マル例

**(イ) 終結條件ガ「何々ナルカ又ハ何々ナリ」ノ形ノ場合**

終結式ガ「A=B ナルカ又ハ C=D」ナル形ノトキハ，假定式ヲ變形シテ　$(A-B)(C-D)=0$　ヲ導ク方針デ證明スレバヨイ。

**例 251.** $\dfrac{ab}{b+x}-\dfrac{cd}{d+y}=\dfrac{bc}{x}-\dfrac{ad}{y}=z$ ナラバ

$$\frac{x}{b}+\frac{y}{d}+1=0 \text{ カ或ハ } z=a-c$$

ナルコトヲ證明セヨ。

**着眼** 終結ノ「カ或ハ」ニ着眼シテ $\left(\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{d}+1\right)(z-a+c)=0$ …㋑

或ハコノ分母ヲ拂ツタ式　$(dx+by+bd)(z-a+c)=0$ ……㋺

ヲ導ク方針デ證明ヲ進メル。

**證明** 假定式ヨリ $\dfrac{ab}{b+x}-\dfrac{cd}{d+y}=z$ ……………①

$\dfrac{bc}{x}-\dfrac{ad}{y}=z$ ……………②

假定式ノ分母ハ何レモ 0 デハナイカラ分母ヲ拂フト

①ヨリ　$abd+aby-bcd-cdx=(bd+dx+by+xy)z$ …………①′

②ヨリ　$bcy-adx=xyz$ ……………②′

**STOP** ①′ノ右邊ト㋺式ニ於ケル左邊ノ括弧內ノ式トヲ比較シテ①′ニ於ケル最後ノ項 $xyz$ ヲ消去スル。

**GO** ①′－②′ ヨリ $abd+aby-bcd-cdx-bcy+adx=(bd+dx+by)z$

$\therefore\ dx(a-c)+by(a-c)+bd(a-c)=(bd+dx+by)z$

$\therefore\ (a-c)(dx+by+bd)=(bd+dx+by)z$

$\therefore\ (dx+by+bd)(a-c-z)=0$

$\therefore\ dx+by+bd=0$ 又ハ $a-c-z=0$

$bd\neq 0$ トシテ兩邊ヲ割レバ

$$\frac{x}{b}+\frac{y}{d}+1=0 \text{ 又ハ } z=a-c$$

依テ證明シ得タリ。



**【試練問題】** $a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)+3=0$

ナルトキハ $a+b+c=0$ 又ハ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$ ナルコトヲ證明セヨ。

**例 252.** $a^2b^2c^2\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$　ナルトキハ

$a, b, c$ ノ中何レカ二ツノ積ハ他ノ一ツノ平方ニ等シキコトヲ示セ。

**着眼** 終結條件ノ「$a,\ b,\ c$ ノ中何レカ二ツノ積」ニ着眼シテ

$(bc-a^2)(ca-b^2)(ab-c^2)=0$ ……………㋑

ナル形ノ式ヲ導キ出ス方針デ證明ヲ進メル。

**證明** 假定式ヨリ $\dfrac{b^2c^2}{a}+\dfrac{c^2a^2}{b}+\dfrac{a^2b^2}{c}=a^3+b^3+c^3$

$a,\ b,\ c$ ハ何レモ與ヘラレタ關係式ノ分母ニアル故零ナラズ，

依テ　$abc\neq 0$　之ヲ兩邊ニ乘ジテ分母ヲ拂フト

$a^4bc+b^4ca+c^4ab-b^3c^3-c^3a^3-a^3b^3=0$ …………①

此ノ左邊ヲ $a$ ニツイテ整頓スルト

左邊 $=a^4bc-a^3(b^3+c^3)+abc(b^3+c^3)-b^3c^3$

$=bc(a^4-b^2c^2)-a(b^3+c^3)(a^2-bc)$

$=(a^2-bc)\{bc(a^2+bc)-a(b^3+c^3)\}$

$=(a^2-bc)\{a^2bc+b^2c^2-ab^3-ac^3\}$

**STOP** ㋑式ノ左邊ニ着眼シ乍ラ { } 內ヲ二項宛組合セ

**GO** $=(a^2-bc)\{b^2(c^2-ab)-ca(c^2-ab)\}$

$=(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)$

故ニ①ヨリ　$(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)=0$

$\therefore\ a^2=bc$ 又ハ $b^2=ca$ 又ハ $c^2=ab$

依テ　$a,\ b,\ c$ ノ中何レカ二ツノ積ハ他ノ一ツノ平方ニ等シイ。

**[illegible]** ①ヲ變形シテ

$$bc(a^2+bc)(a^2-bc)+ca(b^2+ca)(b^2-ca)+ab(c^2+ab)(c^2-ab)=0$$

ヲ導キ，之ヨリ「$a,b,c$ ハ實數ナル故」トカ又ハ何等カノ理由ヲ附シテ $a^2-bc=0$, $b^2-ca=0$, $c^2-ab=0$ ナリト誤魔化ス者ガアル。コノ誤リハ「ノ中何レカ」ニ着眼シテ方針④ヲ確立スルコトヲセズ只漫然ト假定式ヲ變形シタ事ニ起因スル。

【試練問題】 $\dfrac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+\dfrac{z^2+x^2-y^2}{2zx}+\dfrac{x^2+y^2-z^2}{2xy}=1$ ナルトキハ，$x=y+z$ ナルカ，$y=z+x$ ナルカ，$z=x+y$ ナルカナリ。之ヲ證明セヨ。

### (ロ) 終結式ガ或文字ヲ含マヌ事ニ着眼シテ證明スル例

**方針** 終結式ニ含マレヌ文字ヲ假定式ヨリ消去スル。

> **例 253.** $x=cy+bz$, $y=az+cx$, $z=bx+ay$ ナルトキ，
>
> $\dfrac{x^2}{1-a^2}=\dfrac{y^2}{1-b^2}=\dfrac{z^2}{1-c^2}$ ナルコトヲ證セヨ。
>
> 但シ $a$, $b$, $c$ ハ何レモ $\pm1$ ニ等シカラズトス。

**着眼** 終結式ノ前半 $\dfrac{x^2}{1-a^2}=\dfrac{y^2}{1-b^2}$ ニハ $z$ ト $c$ トガナイ事ニ着眼シテ假定式カラ $z$ ト $c$ トヲ消去スル。

**證明**

$$x=cy+bz \cdots\cdots ①$$
$$y=az+cx \cdots\cdots ②$$
$$z=bx+ay \cdots\cdots ③$$

①×$x$－②×$y$ ヨリ 〔$c$ ヲ消去スル〕

$$x^2-y^2=(bx-ay)z$$

之ニ③ヲ代入スルト $x^2-y^2=(bx-ay)(bx+ay)$

$$\therefore\ x^2(1-b^2)=y^2(1-a^2) \cdots\cdots ④$$



シカルニ $a$, $b$, ハ何レモ $\pm1$ ニ等シクナイカラ $(1-a^2)(1-b^2)\neq0$

依テ④ノ兩邊ヲ $(1-a^2)(1-b^2)$ デ割レバ $\dfrac{x^2}{1-a^2}=\dfrac{y^2}{1-b^2}$

全ク同樣ニ $x$ ト $a$ トヲ消去スルト $\dfrac{y^2}{1-b^2}=\dfrac{z^2}{1-c^2}$ ヲ得ル。

依テ $\dfrac{x^2}{1-a^2}=\dfrac{y^2}{1-b^2}=\dfrac{z^2}{1-c^2}$ ナリ。

【試練問題】 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{x-a}$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{y-a}$,

$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=0$ ナルトキハ $a+b+c=0$

ナルコトヲ證明セヨ。

> **例 254.** $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\dfrac{1-s^2}{1+s^2}=\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1-t^2}{2t}+\dfrac{1-s^2}{2s}=\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}$,
>
> $\dfrac{1+t^2}{2t}+\dfrac{1+s^2}{2s}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ ナルトキ
>
> $2a(b^2-c^2)+(b-c)^2+4=0$ ヲ證明セヨ。

**着眼** 終結式ガ $s$ ト $t$ トヲ含マヌコトニ着眼シテ $s$ ト $t$ トヲ消去スル。

**證明**

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{1-s^2}{1+s^2}=\frac{1}{a} \cdots\cdots ①$$
$$\frac{1-t^2}{2t}+\frac{1-s^2}{2s}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c} \cdots\cdots ②$$
$$\frac{1+t^2}{2t}+\frac{1+s^2}{2s}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \cdots\cdots ③$$

**STOP** $s$, $t$ ヲ消去スル目的デ ①, ②, ③ ノ形ヲ觀察スルトコレラノ式ハ何レモ $s$ ト $t$ トニ關シテ對稱デアルコトニ氣ガ付ク，ソコデ二文字對稱ノ場合ノ常則「$s+t$ ト $st$ トヲ束ニシテ」ト考ヘテ

**GO** ②+③ヨリ $\dfrac{2}{2t}+\dfrac{2}{2s}=\dfrac{2}{b}$ $\quad\therefore\ \dfrac{s+t}{st}=\dfrac{2}{b} \cdots\cdots ④$

③－②ヨリ $\dfrac{2t^2}{2t}+\dfrac{2s^2}{2s}=\dfrac{2}{c}$ $\quad\therefore\ s+t=\dfrac{2}{c} \cdots\cdots ⑤$

⑤ヲ④ニ代入シテ $\quad st=\dfrac{b}{c} \cdots\cdots ⑥$

①ノ分母ヲ拂フト　$a\{(1-t^2)(1+s^2)+(1+t^2)(1-s^2)\}=(1+t^2)(1+s^2)$

整頓スルト　$2a(1-s^2t^2)=1+(s^2+t^2)+s^2t^2$

即チ　$2a\{1-(st)^2\}=1+(s+t)^2-2st+(st)^2$

之ニ⑤, ⑥ヲ代入スルト　$2a\left\{1-\dfrac{b^2}{c^2}\right\}=1+\dfrac{4}{c^2}-\dfrac{2b}{c}+\dfrac{b^2}{c^2}$

$c\neq 0$ ナル故分母ヲ拂フト　$2a(c^2-b^2)=c^2+4-2bc+b^2$

$$\therefore\quad 2a(b^2-c^2)+(b-c)^2+4=0$$

依テ證明セラレタ。

**指導綱指** 假定式ガ $s$, $t$ ニ關シテ對稱ナルコト、②, ③ノ分母ガ同一デアルコトニ着眼スル事ガ解決ノ急所デアル。

**【試練問題】** $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=m\left(1+\dfrac{z}{c}\right)$, $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{m}\left(1-\dfrac{z}{c}\right)$,

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=n\left(1-\dfrac{z}{c}\right)$ ナル聯立方程式ノ根ハ

$\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{z}{c}\right)$ ヲモ滿足スルコトヲ證明セヨ。

**ヒント** $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$ ト $m$ トヲ消去スレバヨイ。

### (ハ) 假定式ガ無理式デ終結式ガ有理式ナル場合

**例 255.** $x=\dfrac{\sqrt[3]{a+1}-\sqrt[3]{a-1}}{\sqrt[3]{a+1}+\sqrt[3]{a-1}}$ ナルトキ

$ax^3-3x^2+3ax-1=0$ ナルコトヲ證明セヨ。

**着眼** 假定式ガ三乘根ヲ含ム無理式デ，終結式ガ有理式デアルコトニ着眼シテ假定式ヲ三乘シテ見ル。

**證明**　$x=\dfrac{\sqrt[3]{a+1}-\sqrt[3]{a-1}}{\sqrt[3]{a+1}+\sqrt[3]{a-1}}$ ………………①

兩邊ヲ三乘スルト

$$x^3=\frac{(a+1)-(a-1)-3\sqrt[3]{a+1}\sqrt[3]{a-1}(\sqrt[3]{a+1}-\sqrt[3]{a-1})}{(a+1)+(a-1)+3\sqrt[3]{a+1}\sqrt[3]{a-1}(\sqrt[3]{a+1}+\sqrt[3]{a-1})}$$



**STOP** コレデハ三乘シタ結果ガ有理式ニナラナイバカリデナク①ヨリモ複雜ナ無理式ニナツタ。之デハ面白クナイ。ソコデ①ノ分母，分子ニ同類根式ガアルコトニ着眼シテ之ヲ簡約スルコトヲ工夫シテ見ル。

**GO** ①ヨリ $\sqrt[3]{a+1}+\sqrt[3]{a-1}\neq 0$（∵ 假定式ノ分母）ナル故

分母ヲ拂ヘバ　$x\sqrt[3]{a+1}+x\sqrt[3]{a-1}=\sqrt[3]{a+1}-\sqrt[3]{a-1}$

同類根式ヲ一邊ニ集メ　$(x-1)\sqrt[3]{a+1}=-(x+1)\sqrt[3]{a-1}$

兩邊ヲ三乘スルト　$(x^3-3x^2+3x-1)(a+1)=-(x^3+3x^2+3x+1)(a-1)$

移項シテ整頓スルト　$ax^3-3x^2+3ax-1=0$

依テ證明シ得タリ。

**指導綱指** $x$ ノ値ヲ直接證明スベキ式ノ左邊ニ代入シテ不必要ナル計算ニ紙面ヲ費シ肝要ナル計算ヲ省略シテ「之ヲ整頓スレバソノ値ガ零トナル」ト誤魔化スモノガアル。

更ニ甚シキ誤リヲ擧グレバ「①ノ分母ノ有理化」ト稱シテ分母子ニ$(\sqrt[3]{a+1}-\sqrt[3]{a-1})$ヲ乘ジ分母ヲ2トシ，立方根ト平方根トヲ混同スルガ如キ其一例デアル。（文部時報ヨリ轉載）

**【附言】** ①ノ分母ヲ拂フ代リニ右邊ノ分母子ガ和ト差ノ形デアル事ニ着眼シ，合除比ノ理ヲ用ヒテ $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{\sqrt[3]{a+1}}{\sqrt[3]{a-1}}$ ヲ導キ，コノ兩邊ヲ三乘シテモヨイ。

**【試練問題】** $a>b>0$ ニシテ

$\sqrt{(x+\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2}+\sqrt{(x-\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2}=2a$ ナルトキ

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ナルコトヲ證明セヨ。

### (5) 假定式ヲ變形シテ終結式ヲ導キ出ス例

#### (イ) 終結式ガ假定式中ニ含マレル文字ノ平方又ハ立方ヲ含ム場合

**例 256.** $ax+by+cz=1$, $x+y+z=0$ ナルトキ

$(a-b)(a-c)x^2+(b-c)(b-a)y^2+(c-a)(c-b)z^2=1$ ナルコトヲ示セ。

**着眼** 假定式ハ $x, y, z$ ニ關シテ一次デ終結式ガ二次ナル事ニ着眼シテ假定式ヲ平方シテ終結式ヲ導キ出ス。

**證明** $ax+by+cz=1 \cdots\cdots ①$　$x+y+z=0 \cdots\cdots ②$ トス。

①ノ兩邊ヲ平方スルト

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2bcyz+2cazx=1 \cdots\cdots ①'$$

**STOP** コレト終結式トヲ比較シ，終結式ニハ積ノ項ヲ含マヌ事ニ着眼シ積ノ項ヲ消去スル事ヲ考ヘテ，②ノ變形ヲ活用スル。

**GO** ②ヨリ　$x+y=-z$　$\therefore\ x^2+2xy+y^2=z^2$

$$\left.\begin{array}{rl} \therefore & 2xy=z^2-x^2-y^2 \\ \text{同樣ニ} & 2yz=x^2-y^2-z^2 \\ & 2zx=y^2-z^2-x^2 \end{array}\right\} \cdots\cdots ②'$$

②′ヲ①′ニ代入スルト

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+ab(z^2-x^2-y^2)+bc(x^2-y^2-z^2)+ca(y^2-z^2-x^2)=1$$

$$\therefore\ (a^2-ab-ca+bc)x^2+(b^2-ab-bc+ca)y^2+(c^2-bc-ca+ab)z^2=1$$

即チ　$(a-b)(a-c)x^2+(b-c)(b-a)y^2+(c-a)(c-b)z^2=1$

依テ證明シ得タリ。

【試練問題】 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,\ \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$ ナルトキハ

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ナルコトヲ證明セヨ。

**例 257.** $a+b+c+d=0$ ニシテ且 $ad=bc$ ナルトキハ
$a^3+b^3+c^3+d^3=0$ ナルコトヲ證明セヨ。

**着眼** 假定式ガ一次式デアルカラ一文字ヲ他ノモノデ表ハシテ代入シテモ出來ルガ，終結式ガ三次式ナルコトニ着眼シ，假定式ヲ適當ニ移項シテ三乘シテ見ル。

**證明** $a+b+c+d=0 \cdots\cdots ①$　$ad=bc \cdots\cdots ②$

**STOP** ①ヲ移項スル場合，②ノ左邊ニハ $a$ ト $d$，右邊ニハ $b$ ト $c$ トガアルコトニ着眼シテ $b$ ト $c$ トヲ右邊ニ移項スル。



**GO** ①ヨリ　$a+d=-(b+c) \cdots\cdots ①'$

兩邊ヲ三乘スルト　$a^3+d^3+3ad(a+d)=-b^3-c^3-3bc(b+c)$

②及ビ①′ヲ代入シテ　$a^3+d^3-3bc(b+c)=-b^3-c^3-3bc(b+c)$

$$\therefore\ a^3+b^3+c^3+d^3=0$$

依テ證明シ得タリ。

【試練問題】 $a+b+c+d=0$ ナルトキ
$a^3+b^3+c^3+d^3=3(a+d)(b+d)(c+d)$ ナルコトヲ證明セヨ。

**例 258.** $y+z-x$ ト $\dfrac{(x+y-z)(x+z-y)}{yz}$ トノ値ガ夫々一定ナルトキハ $\dfrac{x+y+z}{yz}$ ノ値モ亦一定ナルコトヲ證セヨ。

**着眼** 終結式ノ分子 $x+y+z$ ニ着眼シテ之ヲ導キ出ス方針デ假定式ヲ變形スル。

**證明** $y+z-x=p \cdots\cdots ①$，　$\dfrac{(x+y-z)(x+z-y)}{yz}=q \cdots\cdots ②$

ト置ケバ題意ニヨリ $p, q$ ハ夫々一定デアル。

②ヨリ　$yz \neq 0$　$\therefore\ \{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\}=qyz$

$$\therefore\ x^2-(y-z)^2=qyz \cdots\cdots ③$$

**STOP** $x+y+z$ ヲ得ルニハ左邊ノ $(y-z)^2$ ガ $(y+z)^2$ ニナレバヨイト考ヘ $(y+z)^2=(y-z)^2+4yz$ ナルコトニ着眼シテ

**GO** ③ノ兩邊ヨリ $4yz$ ヲ引ケバ

$$x^2-(y+z)^2=(q-4)yz$$

$$\therefore\ (x+y+z)(x-y-z)=(q-4)yz$$

①ヲ代入　$(x+y+z)(-p)=(q-4)yz$

兩邊÷$(-pyz)$　$\dfrac{x+y+z}{yz}=\dfrac{4-q}{p}$ 〔但 $p \neq 0$ トス〕

シカルニ $p, q$ ハ共ニ一定ナル故 $\dfrac{4-q}{p}$ モ亦一定デアル。

依テ $\dfrac{x+y+z}{yz}$ ノ値モ亦一定デアル。

**指導講話** 題意ノ「夫々」ナル條件ヲ無視シテ

$$y+z-x=\frac{(x+y-z)(x+z-y)}{yz}=k(\text{一定})$$ ト誤ル者ガ多イ。

**【試練問題】** $\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z}+2=0$ ナルトキハ

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$$ ナリ。 (東藥，松山高)

**註** 終結式ノ兩邊ニ $x+y+z$ ヲ掛ケタ式ト假定式トヲ比較シテ見ヨ。

**【別法】** 假定式ノ分母ヲ拂フト三次ノ對稱式ヲ得ル事ニ着眼シテ例244ニ倣ヘ。

### (6) 可逆算法ニヨリ終結式ヲ變形シテ證明スル例

**假定式ヲ變形**シテ**終結式ノ成立スルコトヲ示スノガ正道**デアルガ問題ニ依ツテハ假定式ヨリ終結式ヲ導ク變形ガ困難デ逆ニ終結式ヨリ假定式ヲ導ク變形ノ方ガ**遙カニ容易**ナ場合ガアル。コンナ場合ニ**便宜上終結式ノ變形ヲ答案ニ示ス**證明法ヲ用ヒル事ガアルガ，之ハドコマデモ正道デハナクテ逆ノ道ヲ歩ンデ居ルノデアルカラ，**終結式ノ變形ニ用ヒル計算ハ悉ク逆ノ可能**ナモノ（**可逆算法**）デナケレバナラナイ。

**【可逆算法ニ就テ】**

或計算ノ逆計算ガ可能デアル場合ニ，ソノ計算ハ**可逆算法**デアルトイフ。等式ノ**兩邊ニ零ナラザル數又ハ式ヲ乘除**シタリ，等式中ノ或項ヲ**移項**シタリ，適當ナ**項ヲ組合**セタリ，**括弧ノアル式ヲ展開**スル等ノ計算ハ何レモ可逆算法デ，**兩邊ニ 0 ヲ乘除**シタリ，**兩邊ヲ平方又ハ立方**スル**計算ハ可逆算法**デハナイ。

> **例 259.** $x, y, z$ ヲ三ツノ相異ナル數トシ，且ツ
>
> $a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0$ ナルトキハ
>
> $$\frac{cy-bz}{y-z}=\frac{az-cx}{z-x}=\frac{bx-ay}{x-y}$$ ナルコトヲ證セヨ。

**方針** 假定式ヲ變形シテ終結式ヲ導キ出ス方針デ變形ヲ試ミテモ容易ニ目的ヲ達シナイカラ，**終結式ヲ可逆算法ニヨツテ變形**シテ見ル。



**證明** 終結式 $\dfrac{cy-bz}{y-z}=\dfrac{az-cx}{z-x}$ ……①

ノ兩邊ニ $(y-z)(z-x)$ ヲ乘ジルト

$$(cy-bz)(z-x)=(az-cx)(y-z) \quad \cdots\cdots②$$

括弧ヲ去レバ $cyz-bz^2-cxy+bxz=ayz-cxy-az^2+cxz$ ……③

移項シテ $az(y-z)+bz(z-x)+cz(x-y)=0$

$\therefore$ $z\{a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)\}=0$ ……④

シカルニ假定式ヨリ $a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0$ ナル故④ハ明ラカニ成立スル。

**STOP** コレデ證明ヲ打切リ，證明サレタ心算デ居ルモノガアルガ，之ダケデハ逆ヲ證明シタニ過ギズ「**逆ハ必ズシモ眞デハナイ**」カラ全ク價値ノナイ答案デ**逆計算ノ可能ナ事ヲ述ベナケレバナラヌ**。

**GO** シカルニ②ヨリ④ヲ導ク計算ハ括弧ヲ去ツテ整頓シタニ過ギナイカラ，逆ニ④ヨリ②ヲ導ク變形ハ可能デアル。且題意ニヨリ $x, y, z$ ハ相異ナル三數ナル故 $(y-z)(z-x)$ ハ零デハナイ。依テ①ヨリ②ヲ導ク計算ノ逆（即チ②ノ兩邊ヲ $(y-z)(z-x)$ デ割ツテ①ヲ導ク事）モ可能デアル。依テ $a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0$ ナルトキハ終結式①ハ成立スル。全ク同様ニシテ $\dfrac{az-cx}{z-x}=\dfrac{bx-ay}{x-y}$ モ成立スル。依テ證明シ得タリ。

**指導講話** 終結式ノ變形ヲ答案ニ示ス代リニ①ヨリ④マデノ計算ヲ他ノ紙デ行ヒ，解答トシテハ「假定式ノ兩邊ニ $z$ ヲ乘ジテ」ト述べテ④ヲ書キ，順次逆ノ順ニ③，②，①ヘノ變形ヲ示シテモヨイガ，之ハ④ヨリ③ヘノ變形（兩邊ヨリ $cxy$ ヲ引ク所）ガ不自然デアルカラ，素直ニ①ヨリ④ヘノ變形ヲ示シタ後逆計算ノ可能ナル理由ヲ述ベル方ガヨイ。

**【試練問題】** $a, b, c$ ガ相異ナル三數ニシテ

$a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0$ ナルトキハ

$$\frac{x-y}{a-b}=\frac{y-z}{b-c}=\frac{z-x}{c-a}$$ ナルコトヲ證明セヨ。

## 7. 雑例

**例 260.** $a+b+c=1,\ ax+by+cz=0$ ナルトキ，次式ノ値ハ $x,\ y,\ z$ ノ値如何ニ拘ハラズ恒ニ一定ナルコトヲ證セヨ。

$$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{ab(x-y)^2+bc(y-z)^2+ca(z-x)^2}$$

**方針** 「$x, y, z$ ノ値如何ニ拘ラズ一定」ナルタメニハコノ分數式ヲ整頓シタ結果 $x, y, z$ ヲ含ム項ガ約サレテ $x,\ y,\ z$ ヲ含マヌ式ニナレバヨイト考ヘ，分母ガ分子ヨリモ複雑デアル事ニ着眼シテ分母ノ整頓カラ着手スル。

**證明** $a+b+c=1 \cdots\cdots ①$ $\quad ax+by+cz=0 \cdots\cdots ②$

$\dfrac{ax^2+by^2+cz^2}{ab(x-y)^2+bc(y-z)^2+ca(z-x)^2}$ ヲ P ト呼ブ。

P ノ分母 $=ab(x^2-2xy+y^2)+bc(y^2-2yz+z^2)+ca(z^2-2zx+x^2)$

$=ax^2(b+c)+by^2(c+a)+cz^2(a+b)$

$\quad -2(abxy+bcyz+cazx) \cdots\cdots ③$

**STOP** P ノ分子ハ $x^2,\ y^2,\ z^2$ ノ項ノミデ積ノ項ガナイコトニ着眼シ③ヨリ積ノ項 ($xy,\ yz,\ zx$ 等) ヲ消去シタイト考ヘテ②ヲ變形シテ代入スル。

**GO** $②^2$ ヨリ $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2(abxy+bcyz+cazx)=0$

$\therefore\ 2(abxy+bcyz+cazx)=-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2) \cdots\cdots ④$

④ヲ③ニ代入スルト

P ノ分母 $=ax^2(b+c)+by^2(c+a)+cz^2(a+b)+a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$

$=ax^2(a+b+c)+by^2(c+a+b)+cz^2(a+b+c)$

$=(a+b+c)(ax^2+by^2+cz^2)$

$=ax^2+by^2+cz^2$ 〔$\because$ ①ヨリ $a+b+c=1$〕

$\therefore\quad P=\dfrac{ax^2+by^2+cz^2}{ax^2+by^2+cz^2}=1$

依テ P 即チ與ヘラレタ分數式ハ $x,\ y,\ z$ ノ値ニ關セズ一定デアル。



**[illegible]** $a+b+c=1$ ナル條件ガナクテモ $P=\dfrac{1}{a+b+c}$ トナリ $x,\ y,\ z$ ノ値ニ關セズ一定ナリト斷定出來ルカラ條件式 ① ハ不要デアルガ，折角與ヘラレテキルカラ用ヒテ置イタ。

**例 261.*** $\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{1}{ab}=\dfrac{1}{bc+ca+ab}>0$ ニシテ且ツ $x\neq a+b+c$ ナルトキハ，$(x-a)(x-b)(x-c)$ ハ $x$ ノ如何ナル實數値ニ對シテモ零トナラザルコトヲ證明セヨ

**方針** 1. $x$ ノ實數値ニ對シテ $(x-a)(x-b)(x-c)\neq 0$ ヲ證明スルノデアルカラ $x\neq a+b+c$ 即チ $x-(a+b+c)\neq 0$ ナル條件ニ着眼シ，之ヲ利用スル方針デ $(x-a)(x-b)(x-c)$ ヲ變形シテ見ル。

**證明** $\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{1}{ab}=\dfrac{1}{bc+ca+ab}>0 \cdots\cdots\cdots\cdots ①$

$x\neq a+b+c \cdots\cdots\cdots\cdots ②$

今 $(x-a)(x-b)(x-c)=P$ トスルト

$P=x^3-(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x-abc$

$=x^2\{x-(a+b+c)\}+(bc+ca+ab)x-abc \cdots\cdots\cdots ③$

**STOP** コノ第一項ハ②ガ適用出來ル形ニナツタカラ，$(bc+ca+ab)x-abc$ ヲ處理スル方針ヲ立テ，①ノ左邊ヲ通分スルトコノ式ノ係數間ノ關係式ガ得ラレル事ニ着眼シテ

**GO** ①ヨリ $\dfrac{a+b+c}{abc}=\dfrac{1}{bc+ca+ab}$

$\therefore\quad abc=(a+b+c)(bc+ca+ab) \cdots\cdots ①'$

①′ヲ③ニ代入スレバ

$P=x^2\{x-(a+b+c)\}+(bc+ca+ab)x-(a+b+c)(bc+ca+ab)$

$=x^2\{x-(a+b+c)\}+(bc+ca+ab)\{x-(a+b+c)\}$

$=\{x-(a+b+c)\}\{x^2+(bc+ca+ab)\} \cdots\cdots\cdots ④$

シカルニ ②ヨリ $x\neq a+b+c$ $\therefore \{x-(a+b+c)\}\neq 0$

次ニ $x$ ノ實數値ニ對シテハ $x^2\geqq 0$ デ ①ヨリ $bc+ca+ab>0$ ナル故

$x$ ノ實數値ニ對シテハ $\{x^2+(bc+ca+ab)\}\neq 0$

依テ ④ヨリ $x$ ノ實數値ニ對シテハ P 即チ $(x-a)(x-b)(x-c)$ ハ零トナラヌ。依テ題意ノ如シ。

**【試練問題】*** 三ツノ實數 $x, y, z$ ガ $xy+yz+zx=1$ ナル關係ヲ有スルトキハ $x+y+z \neq xyz$ ナルコトヲ證明セヨ。

ヒント　$x+y+z-xyz=P$ ト置キ $P \neq 0$ ヲ導ケ。

## 鍛錬問題十六

**171.** $x=a(y+z),\ y=b(z+x),\ z=c(x+y)$ ナルトキハ

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1$$ ナルコトヲ證セ。　(高岡商)

**172.*** $a=1+\sqrt{5},\ b=1-\sqrt{5}$ ナルトキハ

$$4(a^n-b^n)^2+(a^{n+1}-b^{n+1})^2=2\sqrt{5}\,(a^{2n+1}-b^{2n+1})$$

ナルコトヲ證明セヨ。

**173.** $a, b, c, d$ ハ正數ニシテ, 且ツ $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$ ナルトキハ $a=b=c=d$ ナルコトヲ證明セヨ。

**174.*** $x, y, z$ ガ實數ニシテ $z+xy \neq 0$, $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ ナルトキハ, $x$ ト $y$ トノ絶對値ハ共ニ 1 ヨリ大ナルカ又ハ共ニ1ヨリ小ナルコトヲ證セヨ。　(富高)

**175.** $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$ ナルトキハ

$$\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{2n+1}.$$

ナルコトヲ證セヨ。但シ $n$ ハ正整數ナリトス。

**176.** 零ナラザル四數 $x, y, z, a$ ノ間ニ

$$x+y+z=a,\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$$ ナルコトアレバ,

$x, y, z$ ノ内何レカ一ツハ $a$ ニ等シキコトヲ證明セヨ。



**177.** $x, y, z$ ハ何レモ相等シカラズシテ

$y^2+z^2+ayz=z^2+x^2+azx=x^2+y^2+axy$ ナルトキハ

$x^3+y^3+z^3=3xyz$ ナルコトヲ證セヨ。　(三高. 山口高)

**178.** $x(1-y)=y(1-z)=z(1-x)$ ナルトキ $xyz=-1$ ナルコトヲ證明セヨ。但シ $x, y, z$ ハ互ニ相等シカラザルモノトス。　(七高)

**179.*** $a^2+b^2-ab=c^2,\ b^2+c^2-bc=a^2$ ナル時ハ必ズ

$c^2+a^2-ca=b^2$ ナリヤ。　(名大醫)

**180.** $\dfrac{bz-cy}{b-c}=\dfrac{cx-az}{c-a}$ ニシテ且ツ $c \neq 0$ ナラバ各々ハ

$\dfrac{ay-bx}{a-b}$ ニ等シク, 且ツ次ノ等式ガ成立スルコトヲ證セヨ。

$$a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0$$　(大同工專)

**181.**

$$\left(\frac{x}{x+y}\right)^2+\left(\frac{y}{y+z}\right)^2+\left(\frac{z}{z+x}\right)^2=\left(\frac{y}{x+y}\right)^2+\left(\frac{z}{y+z}\right)^2+\left(\frac{x}{z+x}\right)^2$$

ナラバ, 少クトモ $x, y, z$ ノ中ノ二ツハ相等シキコトヲ證明セヨ。

**182.*** $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1$ ナルトキハ

此ノ左邊ノ分數式ノウチノ二ツハ何レモ1ニ等シク, 他ノ一ツハ $-1$ ニ等シキコトヲ證明セヨ。　(富高)

**183.** $y+\dfrac{a^2}{z}=z+\dfrac{a^2}{x}=a$ ナルトキ $x+\dfrac{a^2}{y}=a$ ニシテ且

$xyz+a^3=0$ ナルコトヲ證明セヨ。

**184.** $x=\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2+b^3}}$ ナルトキ次式ヲ證明セヨ。

$$x^3+3bx-2a=0$$　(松山高)

185. $xy+yz+zx=1$ ナルトキ，次ノ等式ヲ證セ。

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$

（慶應. 東外. 金醫）

186. $a^2+b^2=1,\ c^2+d^2=1,\ ac+bd=0$ ナラバ
$a^2+c^2=1,\ b^2+d^2=1,\ ab+cd=0$ ナルコトヲ證明セヨ。

187. $x^2+xy+y^2+2z=4,\quad x+y+z=2$ ナルトキ
$yz+zx+xy=0$ ヲ證セ。（大 商）

188. $\dfrac{a-b}{1+ab}=\dfrac{c-d}{1+cd}$ ナルトキハ $\dfrac{a+d}{1-ad}=\dfrac{b+c}{1-bc}$ ナルコトヲ證明セヨ。但シ $ad,\ bc$ ハ何レモ 1 ニ等シカラズトス。

189. 定數 $a$ ニ等シカラザル二數 $x, y$ ガ $\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{a+y}=\dfrac{1}{a}$ ヲ滿足スルトキ，$\dfrac{1}{a-x}+\dfrac{1}{a-y}$ ノ値ハ一定ナルコトヲ證明セヨ。（三 高）

190. $x+\dfrac{yz-x^2}{x^2+y^2+z^2}$ ニ於テ $x$ ト $y$ トヲ交換スルトキ其ノ値ニ變化ナキトキハ $x$ ト $z$ トヲ交換スルトキニモ其ノ値ハ變化セザルコトヲ示セ。又此ノ場合ニ $x+y+z=1$ ナルトキハ各式ノ値ハ 0 ナルコトヲ示セ。但シ $x \neq y$ トス。

---

**指針**　172. $a^n, b^n$ ヲ束ニシテ取扱ヘ。174. $z$ ニツイテ整頓シテ判別式ヲ考ヘヨ。179. $a=b=c$ ナルトキノミ成立ス。182. 假定式ヨリ $b+c=a$ 又ハ $c+a=b$ 又ハ $a+b=c$ ヲ得ル。186. $d=-\dfrac{ac}{b}$ ヲ代入セヨ。189. $\dfrac{1}{a-x}+\dfrac{1}{a-y}=\dfrac{1}{a}$ トナル。
190. $x+\dfrac{yz-x^2}{x^2+y^2+z^2}=y+\dfrac{xz-y^2}{x^2+y^2+z^2}$ ヨリ $x^2+y^2+z^2=x+y+z$ ヲ得ル。



# 第三十章　求値問題ト消去問題

## 1. 求値問題

代數式ノ値ヲ求ムル簡單ナ問題（主トシテ數値代入法ニヨルモノ）ハ第十六章ニ於テ取扱ツタガ，求値問題ニハ**方程式ノ解法ヤ證明問題ヲ應用シテ解決**シナケレバナラヌ問題ガアルノデ，コヽニ再ビ此種ノ求値問題ヲ研究スル事ニスル。

### （イ） 方程式ノ解法ヲ主トセルモノ

**例 262.** $\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{20}{3},\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+y}=1$ ヨリ $\dfrac{1}{x+y}$ ノ値ヲ求メヨ。

**方針**　與式ヲ $x, y$ ニ關スル聯立方程式ト考ヘテ $x, y$ ノ値ヲ求メテ代入スル。

【解】　$\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{20}{3}$ ……①　　$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+y}=1$ ……②

①ヨリ　$x-y=\dfrac{3}{20}$　　$\therefore\ y=x-\dfrac{3}{20}$ ……①′

①′ヲ②ニ代入シテ　$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x-\dfrac{3}{20}}=1$

$\therefore\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{20}{40x-3}=1$

分母ヲ拂ヒ整頓スレバ　$40x^2-23x+3=0$

$\therefore\ (5x-1)(8x-3)=0$　$\therefore\ x=\dfrac{1}{5}$ 又ハ $\dfrac{3}{8}$

$x=\dfrac{1}{5}$ ノトキ①′ヨリ $y=\dfrac{1}{20}$;　$x=\dfrac{3}{8}$ ノトキ $y=\dfrac{9}{40}$

コレラノ値ハ共ニ①,②ノ分母ヲ 0 ナラシメナイ。

依テ　$\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{20}}=\dfrac{20}{5}=4$　又ハ　$\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{\dfrac{3}{8}+\dfrac{9}{40}}=\dfrac{5}{3}$

**答**　4 又ハ $\dfrac{5}{3}$

[illegible] ①，②ヲ解イテ得タル $x$, $y$ ノ値ヲ直チ＝求値式＝代入シ之ガ①，②ノ分母ヲ 0 ナラシムルヤ否ヤ＝言及スル事ヲ忘レルモノガ非常＝多イ。

【試練問題】 $x+y^2=x^2+y=xy$ ナルトキ $x^2+y^2$ ノ値ヲ求メヨ。

(陸　士)

**答** 0

## （ロ） 同次方程式ガ與ヘラレタトキ

**例 263.** $x$, $y$ ハ相異ナル符號ヲ有スル數＝シテ

$$\frac{x^2+2y^2}{x^2-2y^2}=\frac{267}{71}$$ ナルトキ $\frac{x+2y}{x-2y}$ ノ値如何。

**着眼** 假定式ノ分母ヲ拂フト二次ノ同次方程式ヲ得ルカラ，コレヨリ $x$, $y$ ノ比ヲ求メルカ $x$ ヲ $y$ デ，又ハ $y$ ヲ $x$ デ表ハシテ代入スル

【解】 $x^2-2y^2\neq0$ トシテ分母ヲ拂フト $71x^2+142y^2=267x^2-534y^2$

$\therefore\quad 676y^2=196x^2 \qquad \therefore\quad 169y^2=49x^2$

$\therefore\quad 13y=\pm7x$

シカル＝ $x$, $y$ ハ異符號ノ數ナル故　$y=-\frac{7}{13}x$

コノ値ハ與式ノ分母ヲ 0 ナラシメナイ。

依テ $$\frac{x+2y}{x-2y}=\frac{x-\frac{14}{13}x}{x+\frac{14}{13}x}=\frac{-x}{27x}=-\frac{1}{27}$$ **答**

[illegible] $x$ ト $y$ トガ異符號ナルコト＝注意セズ $y=\pm\frac{7}{13}x$ ノ兩方ヲ用ヒルモノガアル。

【別法】 與式ノ左邊＝着眼シ，合除比ノ理ヲ用ヒテ $\frac{2x^2}{4y^2}=\frac{267+71}{267-71}$

$\therefore\ \frac{x^2}{y^2}=\frac{169}{49}\quad \therefore\frac{x}{y}=\pm\frac{13}{7}$ ヲ導キ之ヲ利用シテモヨイ。

【試練問題】 $\frac{x-y}{x+2y}=\frac{x+y}{2x-y}$ ナルトキ各分數ノ數値ヲ求ム。

(東商豫)

**答** $\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$



**例 264.** $x+y+z=0$, $\frac{x^2}{b-c}+\frac{y^2}{c-a}+\frac{z^2}{a-b}=0$ ノトキ次式ヲ簡單＝セヨ。 $\frac{a^2x+b^2y+c^2z}{bcx+cay+abz}$

**着眼** 假定式ハ共＝ $x$, $y$, $z$ ＝關スル一次及ビ二次ノ同次方程式ナルコト＝着眼シテ $x:y:z$ ヲ求メテ代入スル。

【解】 $x+y+z=0\cdots\cdots①\qquad \frac{x^2}{b-c}+\frac{y^2}{c-a}+\frac{z^2}{a-b}=0\cdots\cdots②$

①ヨリ　$z=-(x+y)\cdots\cdots①'$

①′ヲ②＝代入　$\frac{x^2}{b-c}+\frac{y^2}{c-a}+\frac{(x+y)^2}{a-b}=0$

分母ヲ拂ツテ整頓スルト $(c-a)^2x^2-2(c-a)(b-c)xy+(b-c)^2y^2=0$

$\therefore\quad \{(c-a)x-(b-c)y\}^2=0$

$\therefore\quad (c-a)x=(b-c)y$

**STOP** コレヨリ $x$, $y$ ノ比ガ定マルト考ヘテ

**GO** $(c-a)(b-c)\neq0$〔②式ノ分母〕ナル故兩邊ヲ $(c-a)(b-c)$ デ割ルト

$$\frac{x}{b-c}=\frac{y}{c-a}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{コノ値ヲ } k \text{ ト置ケバ} & x=(b-c)k,\quad y=(c-a)k\\ \text{①′＝代入シテ} & z=-\{(b-c)+(c-a)\}k=(a-b)k\end{array}\right\}③$$

$$\therefore\quad \text{求値式}=\frac{a^2(b-c)k+b^2(c-a)k+c^2(a-b)k}{bc(b-c)k+ca(c-a)k+ab(a-b)k}$$

$$=\frac{-(b-c)(c-a)(a-b)k}{-(b-c)(c-a)(a-b)k}=1\quad〔k\neq0 \text{ トス}〕$$

$k=0$ ノトキハ③ヨリ $x=y=z=0$ トナリ，求値式ノ分母，分子ハ共＝ 0 トナルカラ一定ノ値ヲ有シナイ。(即チ不定)

**答** 1. (但 $x,y,z$ ハ 0 ナラズトス)

【試練問題】 $x+y+z=0$, $ax+by+cz=0$, $a^2x+b^2y+c^2z=abc$ ナルトキハ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}$ ノ値如何。但シ $a$, $b$, $c$ ハ相異＝シテ何レモ零＝アラズトス。

(富高文)

**答** 1

## (ハ) 求値式ガ對稱式ナル場合

**例 265.** $x^2=2-y$, $y^2=2-x$ ニシテ $x \neq y$ ナルトキ
$x^4+y^4-x^2y^2$ ノ値ヲ見出セ。

**着眼** 求値式ガ $x$, $y$ ニ關シテ對稱式デアルカラ, 條件式カラ $x+y$ ト $xy$ トヲ求メテ代入スル

**【解】**　$x^2=2-y$ ……①　　$y^2=2-x$ ……②

求値式ヲ P トスルト　$P=(x^2+y^2)^2-3x^2y^2$ ……③

①+②ヨリ　$x^2+y^2=4-(x+y)$ ……④

①−②ヨリ　$x^2-y^2=x-y$

シカルニ $x \neq y$ ナル故　$x-y \neq 0$

$\therefore$　$x+y=1$ ……⑤

④ニ代入シテ　$x^2+y^2=3$ ……⑥

**STOP** 次ニ $xy$ ヲ求メ度イト考ヘテ

**GO** ⑤$^2$−⑥ヨリ　$2xy=-2$　$\therefore xy=-1$ ……⑦

⑥,⑦ヲ③ニ代入シテ　$P=3^2-3(-1)^2=6$　　**答** 6

**[illegible]** $x$, $y$ ノ對稱ニ着眼シテヤルベキ形ノ問題デハアルガ, ①,② ヲ聯立方程式トシテ解キ $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $y=\dfrac{1\mp\sqrt{5}}{2}$ ヲ求メ, 之ヲ代入シテモ勿論出來ル (計算ハヤヽ複雜ニナル) 最モ陥リ易イ誤リハ積 $xy$ ヲ求メルニ際シ①×②ヨリ $x^2y^2=(2-y)(2-x)$ トシコレヨリ $xy=-1$ 又ハ $xy=2$ ヲ得ルコトデ, コノ場合ハ上記ノ答 6 ノ外ニ $-3$ トイフ餘分ノ答ガ出ル。

**【附言】** コノ餘分ノ答ハ方程式①,② ヲ邊々乘ジタ爲ニ導入セラレタモノデ一般ニ聯立方程式 $\begin{cases}A=0\\B=0\end{cases}$ ト $\begin{cases}A+B=0\\AB=0\end{cases}$ トハ同値デハナイ。

例ヘバ I $\begin{cases}x=6\\y=4\end{cases}$ ト II $\begin{cases}x+y=10\\xy=24\end{cases}$ トハ同値デハナイ。

($\because$ II ハ $x=6$, $y=4$ ナル根即チ I ノ根ノ外ニ $x=4$, $y=6$ ナル根ヲ餘分ニ含ムカラ)



**【試練問題】** $x$, $y$ ハ互ニ等シカラズシテ $x^2+ay=y^2+ax=b$ ナルトキ $x^3+y^3$ ヲ $a$ ト $b$ トニテ表ハセ。

**答** $-a(2a^2-3b)$

**例 266.** $x=a+\dfrac{1}{a}$, $y=b+\dfrac{1}{b}$, $z=ab+\dfrac{1}{ab}$ ナルトキ
$x^2+z^2+2y^2+2xy+2yz=0$
ガ成リ立ツヤウニ $a,b$ ノ値ヲ定メヨ。但シ $a,b$ ハ實數ナリトス。

**着眼** 「$a$, $b$ ハ實數」ナル但書ヨリ $x$, $y$, $z$ モ實數ナル事及ビ第四式ノ左邊ガ完全平方式ノ和ニ導キ得ル式ナル事ニ着眼シテ, 實數ノ性質ヲ活用シテ $a$, $b$ ノ値ヲ定メル。

**【解】**　$x=a+\dfrac{1}{a}$ ……①　$y=b+\dfrac{1}{b}$ ……②　$z=ab+\dfrac{1}{ab}$ ……③

$x^2+z^2+2y^2+2xy+2yz=0$ ……④

④ヨリ　$(x+y)^2+(y+z)^2=0$ ……④′

題意ニヨリ $a$, $b$ ハ實數ナル故, ①, ②, ③ ヨリ $x$, $y$, $z$ モ亦實數デアル。從ッテ④′ガ成立スルタメニハ

$x+y=0$ ……⑤,　$y+z=0$ ……⑥

ガ同時ニ成立スルヲ要ス。⑤, ⑥ニ①, ②ヲ代入シテ

$$\begin{cases} a+\dfrac{1}{a}+b+\dfrac{1}{b}=0 & \cdots\cdots⑤' \\ b+\dfrac{1}{b}+ab+\dfrac{1}{ab}=0 & \cdots\cdots⑥' \end{cases}$$

**STOP** ⑤′, ⑥′ ヲ解イテ $a$, $b$ ノ値ヲ求ムレバヨイ。ト考ヘ⑤′ガ $a$, $b$ ニ關シテ對稱ナルコトニ着眼シテ

**GO** ⑤′ヨリ　$a+b+\dfrac{a+b}{ab}=0$　　$\therefore (a+b)\left(1+\dfrac{1}{ab}\right)=0$

$\therefore$　$a=-b$ 又ハ $ab=-1$

（イ）　$a=-b$ ナルトキハ ⑥′ヨリ　$b+\dfrac{1}{b}-b^2-\dfrac{1}{b^2}=0$

$b\neq0$　　$\therefore\quad b^3+b-b^4-1=0$

$$(b-1)-b^3(b-1)=0$$

$$\therefore\quad (b-1)^2(b^2+b+1)=0$$

$$\therefore\quad b=1 \quad \text{又ハ} \quad b=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

シカルニ $b$ ハ實數　$\therefore\ b=1$　從ツテ　$a=-1$

（ロ）　$ab=-1$ ナルトキハ⑥′ヨリ　$b+\dfrac{1}{b}-2=0$

$b\neq0\quad \therefore\ b^2-2b+1=0\quad \therefore\ b=1\quad \therefore\ a=-1$

$a=-1,\ b=1$ ハ①，②，③ノ分母ヲ 0 ナラシメズ且共ニ實數ナル故題意ニ適スル。

■ $a=-1,\ b=1$

【試練問題】　$x+\dfrac{1}{x}=y+\dfrac{1}{y}=k$ ニシテ $x^3+y^3=0$ ナルトキ $k$ ノ値ヲ求メヨ。　（成城理）

■ 0 又ハ $\pm\sqrt{3}$

## （ニ）　求値式ノ値ヲ $k$ ト置ク特殊解

例 267．次ノ聯立方程式ヲ滿足スル $x, y, z$ ノ値ノ和ヲ求メヨ。　$(a+1)x+y+z=p,\ (b+1)y+z+x=q,$ $(c+1)z+x+y=r$

着眼　與式ハ $x, y, z$ ニ關スル聯立一次方程式デアルカラ普通ニ之ヲ解イテ $x, y, z$ ノ値ヲ求メ，其ノ和ヲ求メル一般解法デモ勿論出來ルガ，第一式ガ $ax+x+y+z=p$ ナル特殊形（他ノ二式モ同樣）ナルコトニ着眼シテ特殊解ヲ試ミル。



【解】　與ヘラレタ方程式ハ $\begin{cases} ax+x+y+z=p \cdots\cdots ① \\ by+x+y+z=q \cdots\cdots ② \\ cz+x+y+z=r \cdots\cdots ③ \end{cases}$

今　$x+y+z=k \cdots\cdots ④$

ト置ケバ　①ハ　$ax+k=p \cdots\cdots ①'$

②ハ　$by+k=q \cdots\cdots ②'$

③ハ　$cz+k=r \cdots\cdots ③'$

STOP　④ト①′②′③′ノ四式ヨリ $x, y, z$ ヲ消去シテ $k$ ノミノ方程式ヲ導ケバ $k$ 即チ $x+y+z$ ノ値ヲ得ル答ト考ヘテ

GO　①′②′③′ヨリ　$x=\dfrac{p-k}{a},\ y=\dfrac{q-k}{b},\ z=\dfrac{r-k}{c}$

〔但 $abc\neq0$ トス〕

コレラヲ④ニ代入スルト　$\dfrac{p-k}{a}+\dfrac{q-k}{b}+\dfrac{r-k}{c}=k$

分母ヲ拂ヒ整頓スルト　$pbc+qca+rab=(abc+bc+ca+ab)k$

$abc+bc+ca+ab\neq0$ トシテ　$k=\dfrac{pbc+qca+rab}{abc+bc+ca+ab}$

即チ　$x+y+z=\dfrac{pbc+qca+rab}{abc+bc+ca+ab}$ ……■

但シ $abc(abc+bc+ca+ab)\neq0$ トス

【別法】　①，②，③ノ各式ノ第一項ノ係數ヲ揃ヘル方針デ

①×$bc$＋②×$ca$＋③×$ab$ ヨリ

$$abc(x+y+z)+(bc+ca+ab)(x+y+z)=pbc+qca+rab$$

コレヨリ直チニ $x+y+z$ ノ値ヲ求メルコトガ出來ル。

[illegible]　與ヘラレタ方程式ガ特殊ナ形デアツタカラ參考迄ニコノ樣ナ特殊解ヲ示シタガ $x, y, z$ ノ値ヲ求メル正攻法ノアルコトヲ忘レテハナラヌ。

【試練問題】　$x+\dfrac{2x}{x+1}=3$ ナルトキ $\dfrac{2x}{x+1}$ ノ値ヲ小數第二位マデ計算セヨ。

■ 4.73……又ハ 1.26……

## 雜　例

**例 268.*** $\dfrac{(y+z)^2}{x}+\dfrac{(z+x)^2}{y}+\dfrac{(x+y)^2}{z}=3(x+y+z)$ ナルトキハ $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$ ノ値如何。

**着眼** 一寸方針ノ立テ難イ問題デアルガ，條件式ノ左邊ノ三ツノ分數式ガ同一型デ右邊ノミ形ガ異ナル事ニ着眼シ，左邊ニ移項シタ上適當ニ組合セテ共通因數ヲ得ル樣ニ工夫シテ見ル。

【解】 $\dfrac{(y+z)^2}{x}+\dfrac{(z+x)^2}{y}+\dfrac{(x+y)^2}{z}=3(x+y+z)$ ……①

$$\therefore \left\{\frac{(y+z)^2}{x}-x\right\}+\left\{\frac{(z+x)^2}{y}-y\right\}+\left\{\frac{(x+y)^2}{z}-z\right\}-2(x+y+z)=0$$

$$\therefore \frac{(y+z)^2-x^2}{x}+\frac{(z+x)^2-y^2}{y}+\frac{(x+y)^2-z^2}{z}-2(x+y+z)=0$$

$$\therefore (x+y+z)\left\{\frac{y+z-x}{x}+\frac{z+x-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}-2\right\}=0$$

$\therefore$ $x+y+z=0$ 又ハ $\dfrac{y+z-x}{x}+\dfrac{z+x-y}{y}+\dfrac{x+y-z}{z}=2$

(イ) $x+y+z=0$ ナルトキ 求値式 $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=0$

(ロ) $\dfrac{y+z-x}{x}+\dfrac{z+x-y}{y}+\dfrac{x+y-z}{z}=2$ ナルトキ

$xyz \neq 0$ ($\because$ 假定式ノ分母) ナル故，分母ヲ拂ツテ整頓スルト

$$y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+x^2y+xy^2=5xyz \quad \cdots ②$$

$$求値式=\frac{(x+y+z)(yz+zx+xy)}{xyz}$$

$$=\frac{y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+x^2y+xy^2+3xyz}{xyz}$$

②ヲ代入シテ $=\dfrac{8xyz}{xyz}=8$

答 0 又ハ 8

【試練問題】 $z(kx-y)=x+ky$ ナルトキ

$\{(1+kz)(kx-y)-(x+ky)(k-z)\}\dfrac{kx-y}{x^2+y^2}$ ヲ $k$ ニテ表ハセ。 (早一醫)

答 $k^3+1$



## 2. 消 去 法

**【定義】 未知數ノ個數ヨリ方程式ノ個數ノ方ガ一ツ多イトキ，** コレラノ方程式ガ**同時ニ成立**スルタメノ**係數間ノ關係式ヲ求メルコトヲ未知數ヲ消去**スルトイヒ，ソノ解法ヲ**消去法**トイフ。

註 未知數ノ個數ヨリ方程式ノ個數ノ方ガ多イトキハ，一般ニハソレラヲ同時ニ滿足スル根ハ存在シナイノデアルガ，**係數間ニ特殊關係**ガ存在スルトキニ限ツテソレラガ同時ニ成立スルノデ，ソノ**係數間ノ特殊關係**ヲ求メルノガ消去法ノ目的デアル。

**【消去法ノ解法】** $n$ 個ノ未知數ニ對シテ $n+1$ 個ノ方程式ガ與ヘラレテヰルノデアルカラ，其中ノ**何レカノ** $n$ **個ヲ聯立方程式トシテ解イテ根ヲ求メ，**ソノ根ヲ**殘リノ一方程式ニ代入**スルトコレヲモ**同時ニ滿足スルタメノ係數間ノ關係式即チ所要ノ關係式ヲ得ル**筈デアルガ，實際ニハ $n$ 個ノ聯立方程式ヲ解イテ根ヲ求メルコトガ容易デナイ場合ガ多ク，**特殊ナ工夫**ヲシテ（**根ヲ求メナイ儘デ**）**未知數ヲ消去**シナケレバナラヌコトガ多イ。

註 消去法ノ定義カラ云ヘバ消去問題ハ聯立方程式ノ解法ニ歸着スルノデ，聯立方程式ノ應用トシテ取扱フベキモノデアルガ，ソノ解法ガ上ニ述ベタ樣ニ聯立方程式ノ解法ヲ用ヒルコトヨリモ，證明問題ノ解法ト共通ナ點ガ多ク，證明問題ニ於ケル終結式（證明スベキ式）ヲ與ヘナイデ之ヲ導キ出スコトヲ要求サレタモノト解スルコトモ出來ルノデコヽデ取扱フコトニシタ。例ヘバ證明問題

(1) $\dfrac{x}{y+z}=a$, $\dfrac{y}{z+x}=b$, $\dfrac{z}{x+y}=c$ ナラバ

$\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}=1$ ナルコトヲ證明セヨ。 (8. 山口商)

ガ消去問題トシテ出題サレルト，次ノ樣ニナル

(2) $\dfrac{x}{y+z}=a$, $\dfrac{y}{z+x}=b$, $\dfrac{z}{x+y}=c$ ヨリ $x,y,z$ ヲ消去セヨ。

(10. 宮　農)

【附言】 (1) (2) ノ内容ハ同一デアルガ，(1) ノ場合ハ $a, b, c$ ノ値ヲ終結式ノ左邊ニ代入スル事ニヨリ容易ニ證明シ得ルニ對シ，(2) ノ場合ハ終結式ガ與ヘラレテキナイカラ（1）ニ比シテ遙ニ困難デアル。（例272 參照）コノ樣ニ證明問題ニ於テハ終結式ニ着眼シテ證明方針ヲ定メル事ガ出來ルガ消去問題ニ於テハ終結式ガナイタメ解ノ方針ヲ決定スル事ガ容易デナク，中等學校ニ於ケル代數ノ最難關デアル。消去問題解決ノ方針ハ專ラ與ヘラレタ方程式ノ形カラ判斷シナケレバナラヌカラ，次ノ諸例ニ就テ，其形トソレニ應ズル方針トヲ會得セラレタイ。

## (イ) 根ヲ求メテ消去スル例

與ヘラレタ $n$ 個ノ方程式ノ中何レカ $(n-1)$ 個ノ方程式カラ容易ニ根ヲ求メ得ル場合ニハ，ソノ根ヲ求メテ殘リノ一ツノ方程式ニ代入スレバヨイ。

**例 269.** $a, b, c$ ガ實數ニシテ悉クハ相等シカラザルトキ，次ノ三ツノ方程式ガ同時ニ成立ツタメニハ，$a, b, c$ ニツキ如何ナル條件ガ必要ナルカ。又コノ時ノ $x, y$ ノ値ヲ求メヨ。

$$bx+cy+a=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$
$$cx+ay+b=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$
$$ax+by+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

**着眼** 與ヘラレタ方程式ガ何レモ一次方程式デアルカラ，何レカ二ツ例ヘバ①ト②ヲ聯立セシメテ $x, y$ ノ値ヲ容易ニ求メ得ル事ニ着眼シコノ値ヲ求メテ③ニ代入スル。

【解】 ②×$c$－①×$a$ ヨリ $(c^2-ab)x+bc-a^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots$〔I〕

$c^2-ab \neq 0$ トシテ $\qquad x=\dfrac{a^2-bc}{c^2-ab} \cdots\cdots\cdots\cdots ④$

①×$c$－②×$b$ ヨリ 同樣ニ

$$y=\frac{b^2-ac}{c^2-ab} \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

①，②，③ガ同時ニ成立スルタメニハ④，⑤ガ③ヲモ同時ニ滿足スルコトガ必要デ且十分デアル。依テ④，⑤ヲ③ニ代入スルト



$$\frac{a(a^2-bc)}{c^2-ab}+\frac{b(b^2-ca)}{c^2-ab}+c=0$$

$c^2-ab \neq 0$ トシタカラ $\quad a(a^2-bc)+b(b^2-ca)+c(c^2-ab)=0$

$$\therefore \quad a^3+b^3+c^3-3abc=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

**STOP** コレガ所要ノ關係式ナリ，ト斷定シテモ全然誤リデハナイガ，題意ノ「$a,b,c$ ガ實數ニシテ悉クハ相等シカラズ」ナル條件ヲ一度モ用ヒナカツタ事ニ氣付クト，之デハ不完全デ，コノ條件ヲ考慮シテ更ニ一歩ヲ進メル。

**GO** ⑥ヨリ $\quad (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=0$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$$

題意ニヨリ $a,b,c$ ハ實數デ悉クハ相等シカラザル故{ }内ハ 0 ナル事ナシ。依テ $a+b+c=0$ コレ所要ノ條件デアル。

次ニ $a+b+c=0$ ナルトキハ $c=-(a+b)$ トナル故

④ヨリ $\qquad x=\dfrac{a^2+b(a+b)}{(a+b)^2-ab}=\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2+ab+b^2}=1$

⑤ヨリ $\qquad y=\dfrac{b^2+a(a+b)}{(a+b)^2-ab}=\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2+ab+b^2}=1$

**答** 條件 $a+b+c=0, \ x=y=1$

**[illegible]** 先ヅ諸君トシテハコノ程度デヨイガ，餘裕ノアル者ハ更ニ $c^2-ab=0$ ノ場合ヲ吟味スル。

**吟味** $c^2-ab=0$ ノトキ〔I〕ハ $0x=a^2-bc$ トナルカラ

（イ） $a^2-bc \neq 0$ ナルトキハ〔I〕ヲ滿足スル $x$ ノ値ハナイ。依テ不能

（ロ） $a^2-bc=0$ ナルトキハ〔I〕ヲ滿足スル $x$ ノ値ハ無數ニアリ。

コノトキ $\quad c^2=ab, \ a^2=bc \quad \therefore \dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{a}$ 且 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{a}{b}$

$\therefore \qquad \dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{a}$ コノ値ヲ $k$ トスレバ

$$c=ak, \quad b=ck=ak^2, \quad a=bk=ak^3 \cdots\cdots\cdots ⑦$$

⑦ヨリ $\quad a=ak^3$

$$\therefore \begin{cases} a \neq 0 \text{ トスルト } \ k^3=1 \ \therefore k=1 \text{（實數ノミヲトル）} \\ \qquad\qquad \therefore a=b=c \text{ トナリ假定ニ反ス。} \\ a=0 \text{ トスルト } \ b=0, \ c=0 \ \therefore a=b=c \text{ トナリ假定ニ反ス。} \end{cases}$$

何レノ場合モ題意ニ適シナイカラ $c^2-ab=0$ ナル事ハ出來ナイ。

【試練問題】 $x=cy+b$, $y=a+cx$, $bx+ay=1$ ナルトキ $a$, $b$, $c$ 間ノ關係式ヲ求ム。　(和 商)

答 $a^2+b^2+c^2+2abc=1$

### (ロ) 根ヲ求メズニ消去スル例

例 270. 次式ノ成立スル時 $a$, $b$, $c$, $d$ 間ノ關係ヲ求メヨ。

$x+y+z=a$ ……① $x^2+y^2+z^2=b^2$ ……②

$x^3+y^3+z^3=c^3$ …③ $xyz=d^3$ …………④

方針 何レカ三ツヲ聯立方程式トシテ解ク事ハ不可能デハナイガ，未知項ガ悉ク $x, y, z$ ニ關スル對稱式デアル事ニ着眼シおいれるノ公式ヲ引用シテ根ヲ求メズニ $x$, $y$, $z$ ヲ消去スル。

【解】 おいれるノ公式ニヨリ

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\{(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)\}$$

之ニ①,②,③,④ヲ代入スルト

$$c^3-3d^3=a\{b^2-(xy+yz+zx)\} \cdots\cdots⑤$$

STOP 次ニ $(xy+yz+zx)$ ヲ消去スレバヨイト考ヘ，與ヘラレタ方程式カラ $(xy+yz+zx)$ ヲ求メル方針デ

GO ①$^2$−②ヨリ　$xy+yz+zx=\dfrac{a^2-b^2}{2}$ …………⑥

⑥ヲ⑤ニ代入シテ　$c^3-3d^3=a\left\{b^2-\dfrac{a^2-b^2}{2}\right\}$

整頓スルト　$a^3-3ab^2+2c^3-6d^3=0$

コレ所要ノ關係デアル。

【試練問題】 $x+y+z=a$, $x^2+y^2+z^2=b^2$, $x^3+y^3+z^3-3xyz=c^3$ ヨリ $x$, $y$, $z$ ヲ消去セヨ。　(慶應.セブランス)

答 $2a^3-3ab^2+2c^3=0$



例 271. $x^2+xy=a^2$, $y^2+xy=b^2$, $x^2+y^2=c^2$ ヨリ $x$, $y$ ヲ消去セヨ。

着眼 未知項ガ $x^2$, $xy$, $y^2$ ノミデアルカラ之ヲ束ニシテ消去スル。

【解】 $x^2+xy=a^2$ ……① $y^2+xy=b^2$ ……② $x^2+y^2=c^2$ ……③

①+②ヨリ　$x^2+y^2+2xy=a^2+b^2$

③ヲ代入スルト　$2xy=a^2+b^2-c^2$ ………………⑥

①−②ヨリ　$x^2-y^2=a^2-b^2$ ………………⑦

③+⑦ヨリ　$2x^2=a^2-b^2+c^2$

③−⑦ヨリ　$2y^2=c^2-a^2+b^2$

邊々乘シテ　$(2xy)^2=(a^2-b^2+c^2)(c^2-a^2+b^2)$

之ニ⑥ヲ代入スルト　$(a^2+b^2-c^2)^2=(a^2-b^2+c^2)(c^2-a^2+b^2)$

之ヲ整頓スルト　$a^4+b^4=c^2(a^2+b^2)$ ……答

【別法】 初メノ二式カラ $x, y$ ヲ求メテ第三式ニ代入シテ見ル。

【別解】 $x^2+xy=a^2$ ……① $y^2+xy=b^2$ ……② $x^2+y^2=c^2$ ……③

①ヨリ　$x(x+y)=a^2$ ……①′　②ヨリ　$y(x+y)=b^2$ ……②′

①′+②′ヨリ　$(x+y)^2=a^2+b^2$

$\therefore$ $x+y=\pm\sqrt{a^2+b^2}$ ………④

④ヲ①′ニ代入　$x=\pm\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ………⑤

④ヲ②′ニ代入　$y=\pm\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ………⑥

⑤⑥ヲ③ニ代入シテ　$\dfrac{a^4}{a^2+b^2}+\dfrac{b^4}{a^2+b^2}=c^2$

$\therefore$ $a^4+b^4=c^2(a^2+b^2)$ 答

【試練問題】 $x^2+xy+zx=a$, $xy+y^2+yz=b$, $zx+yz+z^2=c$, $ax+by+cz=d$ ヨリ $x$, $y$, $z$ ヲ消去セヨ。　(大同工專)

答 $(a^2+b^2+c^2)^2=(a+b+c)d^2$

注 別解ニ倣ヘ。

### (ハ) 同次方程式ガ與ヘラレタ場合

同次方程式ガ與ヘラレタ場合ハ未知數間ノ比ヲ求メルコトニヨリ未知數ト同數個ノ方程式カラ未知數ガ消去出來ル。

**例 272.** $\dfrac{x}{y+z}=a,\quad \dfrac{y}{z+x}=b,\quad \dfrac{z}{x+y}=c$ ヨリ $x,\ y,\ z$ ヲ消去セヨ。

**着眼** 分母ヲ拂フト $x,\ y,\ z$ ニ關スル一次ノ同次方程式ヲ得ル事ニ着眼シテ $x:y:z$ ヲ求メテ消去スル。

**【解】** $(y+z)(z+x)(x+y)\neq 0$ トシテ分母ヲ拂フト

$$x-ay-az=0\cdots\cdots①$$
$$bx-y+bz=0\cdots\cdots②$$
$$cx+cy-z=0\cdots\cdots③$$

①ト②ヨリ $x,\ y,\ z$ ノ比ヲ求メルト

$$\frac{x}{-ab-a}=\frac{y}{-ab-b}=\frac{z}{-1+ab}$$

$$\therefore\quad \frac{x}{a(b+1)}=\frac{y}{b(a+1)}=\frac{z}{1-ab}=k \quad \text{ト置ケバ}$$

$$x=a(b+1)k,\ y=b(a+1)k,\ z=(1-ab)k\cdots\cdots④$$

④ヲ③ニ代入スルト $ac(b+1)k+bc(a+1)k-(1-ab)k=0$

$k\neq 0$ トシテ　$2abc+ac+bc+ab=1\cdots\cdots〔\mathrm{I}〕$

$k=0$ トスルト ④ヨリ、$x=y=z=0$ トナリ原方程式ノ分母ヲ 0 ナラシメルカラ $k=0$ デハナイ。

**答** $2abc+bc+ca+ab=1$

**【別法】** 與ヘラレタ三ツノ式ノ左邊ニ於ケル分母子ノ和ガ何レモ $x+y+z$ ナル事ニ着眼シ，比例ノ定理ヲ應用シテ之ヲ變形シ，$x,\ y,\ z$ ノ比ヲ求メズニ消去シテ見ル。

**【別解】** $\dfrac{x}{y+z}=\dfrac{a}{1}\cdots\cdots①\quad \dfrac{y}{z+x}=\dfrac{b}{1}\cdots\cdots②\quad \dfrac{z}{x+y}=\dfrac{c}{1}\cdots\cdots③$

①ヨリ合比ノ理ニヨリ　$\dfrac{x}{x+y+z}=\dfrac{a}{a+1}$

(但シ $(x+y+z)(a+1)\neq 0$ トス)



同樣ニ②ヨリ　$\dfrac{y}{x+y+z}=\dfrac{b}{b+1}$　$(b+1\neq 0$ トス$)$

③ヨリ　$\dfrac{z}{x+y+z}=\dfrac{c}{c+1}$　$(c+1\neq 0$ トス$)$

邊々加ヘルト　$\dfrac{x+y+z}{x+y+z}=\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}$

$x+y+z\neq 0$ トスルト　$\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}=1\cdots\cdots〔\mathrm{II}〕$

**STOP** コノ關係式ヲ答トシテモヨイガ前ノ結果ト形ガ違フカラ分母ヲ拂ツテ整頓シテ見ル。

**GO** 〔II〕ノ分母ヲ拂フト

$$a(b+1)(c+1)+b(a+1)(c+1)+c(a+1)(b+1)=(a+1)(b+1)(c+1)$$

整頓スルト　$2abc+bc+ca+ab=1$ **答**

**吟味** $x+y+z=0$ ノトキハ $y+z=-x$ トナルカラ

①ヨリ $a=-1$，同樣ニ ②,③ヨリ $b=-1,\ c=-1$,

コノトキ〔I〕ノ左邊$=-2+1+1+1=1=$右邊 トナリ矢張リ〔I〕ハ成立スル。

**指導總括** 合比ノ理ハ「$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ナルトキ $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$」デアルガ

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ヨリ $\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$　$\therefore\ \dfrac{a+b}{a}=\dfrac{c+d}{c}$　$\therefore\ \dfrac{a}{a+b}=\dfrac{c}{c+d}$ ヲ得。

**【試練問題】** $\dfrac{y+z}{x}=a,\quad \dfrac{z+x}{y}=b,\quad \dfrac{x+y}{z}=c$ ナルトキハ $a,\ b,\ c$ ノ間ニ如何ナル關係アリヤ。

**答** $a+b+c+2=abc$

**例 273.** $\dfrac{y-z}{y+z}=a,\quad \dfrac{z-x}{z+x}=b,\quad \dfrac{x-y}{x+y}=c$ ヨリ $x,\ y,\ z$ ヲ消去セヨ。

**着眼** 矢張リ分母ヲ拂フト $x,\ y,\ z$ ノ同次方程式ニナルカラコレカラ $x,\ y,\ z$ ノ比ヲ求メルコトガ出來ルガ，與式ノ形ガ合除比ノ理ヲ暗示シテ居ルノデ，合除比ノ理ヲ用ヒテ見ル。

【解】 與式ヨリ $\dfrac{y-z}{y+z}=\dfrac{a}{1}\cdots\cdots①$　$\dfrac{z-x}{z+x}=\dfrac{b}{1}\cdots\cdots②$

$\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{c}{1}\cdots\cdots③$

①ヨリ合除比ノ理ニヨリ

$$\frac{(y+z)+(y-z)}{(y+z)-(y-z)}=\frac{1+a}{1-a}\quad\therefore\ \frac{y}{z}=\frac{1+a}{1-a}\cdots\cdots④$$

同樣ニ②,③ヨリ $\dfrac{z}{x}=\dfrac{1+b}{1-b}\cdots\cdots⑤$　$\dfrac{x}{y}=\dfrac{1+c}{1-c}\cdots\cdots⑥$

〔但シ $(1-a)(1-b)(1-c)\neq 0$ トス〕

シカルニ $\dfrac{y}{z}\times\dfrac{z}{x}\times\dfrac{x}{y}=1$ ナル故

④,⑤,⑥ ヲ代入スルト $\dfrac{(1+a)}{(1-a)}\times\dfrac{(1+b)}{(1-b)}\times\dfrac{(1+c)}{(1-c)}=1\cdots\cdots⑦$

分母ヲ拂ヘバ

$$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc$$

$$\therefore\quad abc+a+b+c=0\cdots\cdots\cdots\cdots〔\mathrm{I}〕$$

**註** 諸君トシテハ此程度デ充分デアルガ更ニ $(1-a)(1-b)(1-c)=0$ ノ場合ヲ吟味シテ見ル。

【吟味】 $1-a=0$ トスルト $a=1$ 依テ ①ヨリ $y-z=y+z$

$\therefore\ z=0$, 從ツテ ⑤ヨリ $b=-1$

$\therefore$ 〔I〕ノ左邊$=-c+1-1+c=0=$右邊トナリ，コノトキモ〔I〕ハ成立スル。同樣ニ $1-b=0$, $1-c=0$ ノトキモ〔I〕ハ成立スル。

**答** $abc+a+b+c=0$

**注意** ⑦ハ④×⑤×⑥ヨリ導イテモヨイ。尙⑦ハ $x, y, z$ ヲ含マヌ式デアルカラ之ヲ答トシテモ誤リデハナイガ消去問題ノ答ハ「ナルベク簡單ナ有理式」ニスルノガ原則デアル。

【附言】 消去問題ハ所要ノ關係式ヲ得ル事デサヘ諸君ニトツテハ相當ノ重荷デアルカラ，ソノ吟味迄モ完全ニヤル事ヲ望ムノハ無理デアロウ。勿論出來ルニ越シタ事ハナイカラ，餘裕ノアル者ハ附記スルガヨイ。

【試練問題】 次ノ三方程式ガ同時ニ成立スルタメニハ $a, b, c$ ノ間ニ如何ナル關係アルベキカ。

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{z}=a,\quad \frac{z}{y}+\frac{y}{x}=b,\quad \frac{x}{z}+\frac{z}{y}=c$$

**答** $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=8$



## (二) 逆對關係ノ方程式ガ與ヘラレタ場合

未知數ニ關スル逆數ノ和ノ形ノ式ガ三ツ與ヘラレタ場合ハ「邊々乘ズル」ト云フ特殊解ノアルコトヲ知ツテキナイト，一般方針デハ中々容易デハナイ。

【標準型】

**例 274.** $\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}=2a,\ \dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}=2b,\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2c$ ヨリ $x, y, z$ ヲ消去セヨ。

**着眼** 逆數ノ和ノ形三ツノ標準型デアルカラ直チニ邊々乘ジテ見ル。

【解】 $\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}=2a\cdots\cdots①$　$\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}=2b\cdots\cdots②$

$\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2c\cdots\cdots③$

①×②×③ヨリ $\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\right)\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}\right)\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)=8abc\cdots\cdots④$

左邊ヲ展開スルト $\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{z^2}{xy}+\dfrac{xy}{z^2}+\dfrac{x}{y}\right)\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)=8abc$

$$\therefore\ 1+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^2}{z^2}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^2}{x^2}+\frac{y^2}{z^2}+1=8abc$$

**STOP** 左邊ノ中央ニアル六ノツ項ハ①,②,③ノ左邊ニアル各項ノ平方ニ等シイコトニ着眼シテ二ツ宛組合セ

**GO** $\left(\dfrac{y^2}{z^2}+\dfrac{z^2}{y^2}\right)+\left(\dfrac{z^2}{x^2}+\dfrac{x^2}{z^2}\right)+\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)+2=8abc\cdots\cdots⑤$

シカルニ①ヨリ $\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}=2a$　$\therefore\ \dfrac{y^2}{z^2}+\dfrac{z^2}{y^2}=4a^2-2$

同樣ニ②², ③³ヨリ $\dfrac{z^2}{x^2}+\dfrac{x^2}{z^2}=4b^2-2,\ \dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}=4c^2-2$

コレラヲ⑤ニ代入シテ $(4a^2-2)+(4b^2-2)+(4c^2-2)+2=8abc$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2-2abc=1\cdots\cdots$**答**

**注意** 逆數ノ和ノ形ノ式三ツヲ邊々乘ジルト必ズ各項ノ平方ノ和ノ形（コノ問題ニ於ケル⑤ノ式）ヲ導キ得ル事ガ特徵デ，コノ特徵ヲ利用シテ消去ノ目的ヲ達シ得ルノデアル。

【試練問題】 $x+\dfrac{1}{y}=a,\ y+\dfrac{1}{x}=b,\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=c$ ナルトキ $a,\ b,\ c$ 間ノ關係式ヲ求メヨ。 (早二, 佐高)

答 $a^2+b^2=abc$

【應 用】

例 275.* $ax+yz=bc,\ by+zx=ca,\ cz+xy=ab$ 及ビ $xyz=abc$ ヨリ $x,\ y,\ z$ ヲ消去セヨ。

着眼 コノマヽデハ逆數ノ形デハナイガ, 第四ノ條件式ヨリ $yz=\dfrac{abc}{x},\ zx=\dfrac{abc}{y}$ 等ヲ導イテ代入スルト各式ノ左邊ガ $x,\ y,\ z$ ニツイテ逆數ノ和ノ形ニナル事ニ着眼シ, 標準型ノ式ヲ導ク。

【解】 $ax+yz=bc\cdots\cdots①$ $by+zx=ca\cdots\cdots②$

$cz+xy=ab\cdots\cdots③$ $xyz=abc\cdots\cdots\cdots④$

④ヨリ $xyz\neq0$ トシテ $yz=\dfrac{abc}{x},\ zx=\dfrac{abc}{y},\ xy=\dfrac{abc}{z}\cdots④'$

コレラヲ①, ②, ③ ニ代入スルト

①ヨリ $ax+\dfrac{abc}{x}=bc$ 兩邊÷$a$ $x+\dfrac{bc}{x}=\dfrac{bc}{a}\cdots\cdots⑤$

②ヨリ $by+\dfrac{abc}{y}=ca$ 兩邊÷$b$ $y+\dfrac{ca}{y}=\dfrac{ca}{b}\cdots\cdots⑥$

③ヨリ $cz+\dfrac{abc}{z}=ab$ 兩邊÷$c$ $z+\dfrac{ab}{z}=\dfrac{ab}{c}\cdots\cdots⑦$

〔$xyz\neq0$ トシタカラ④ヨリ $abc\neq0$ デアル〕

⑤×⑥×⑦ヨリ $\left(x+\dfrac{bc}{x}\right)\left(y+\dfrac{ca}{y}\right)\left(z+\dfrac{ab}{z}\right)=abc\cdots\cdots⑧$

⑧ノ左邊$=\left(xy+\dfrac{bcy}{x}+\dfrac{cax}{y}+\dfrac{abc^2}{xy}\right)\left(z+\dfrac{ab}{z}\right)$

$$=xyz+\frac{bcyz}{x}+\frac{cazx}{y}+\frac{abc^2z}{xy}+\frac{abxy}{z}+\frac{ab^2cy}{xz}+\frac{a^2bcx}{yz}+\frac{a^2b^2c^2}{xyz}$$



STOP 前例ノ樣ニコノ式ヲ⑤, ⑥, ⑦ノ左邊ノ各項ノ平方ノ和ノ形ニ導キ度イト考ヘテ④及ビ④′ヲ代入スル。

GO 上式ニ於ケル $xyz,\ yz,\ zx,\ xy$ ニ夫々④及ビ④′ヲ代入スルト

$$=abc+\frac{ab^2c^2}{x^2}+\frac{a^2bc^2}{y^2}+cz^2+\frac{a^2b^2c}{z^2}+by^2+ax^2+abc$$

$$=2abc+a\left(x^2+\frac{b^2c^2}{x^2}\right)+b\left(y^2+\frac{c^2a^2}{y^2}\right)+c\left(z^2+\frac{a^2b^2}{z^2}\right)$$

シカルニ ⑤ヨリ $x^2+\dfrac{b^2c^2}{x^2}=\dfrac{b^2c^2}{a^2}-2bc$

⑥ヨリ $y^2+\dfrac{c^2a^2}{y^2}=\dfrac{c^2a^2}{b^2}-2ca$

⑦ヨリ $z^2+\dfrac{a^2b^2}{z^2}=\dfrac{a^2b^2}{c^2}-2ab$

∴ ⑧ノ左邊$=2abc+a\left(\dfrac{b^2c^2}{a^2}-2bc\right)+b\left(\dfrac{c^2a^2}{b^2}-2ca\right)+c\left(\dfrac{a^2b^2}{c^2}-2ab\right)$

$$=\frac{b^2c^2}{a}+\frac{c^2a^2}{b}+\frac{a^2b^2}{c}-4abc$$

依テ⑧ハ $\dfrac{b^2c^2}{a}+\dfrac{c^2a^2}{b}+\dfrac{a^2b^2}{c}-4abc=abc$

∴ $b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3=5a^2b^2c^2$

コレ所要ノ關係式デアル。

指導總括 相當ナ難問デ, 諸君トシテハコノ程度ノ問題ガコナセル樣ニナレバ十分デアル。

【試練問題】 $bx^2+lx+c=0,\ cy^2+my+a=0,\ az^2+nz+b=0,$ $xyz=1$ ヨリ $x,\ y,\ z$ ヲ消去セヨ。

答 $al^2+bm^2+cn^2+lmn=4abc$

ヒント 第一式ヲ $x$ デ割レ。

以上デ諸君ノ取扱フ程度ノ消去問題ノ型ヲ一通リヤツタ。次ニ雜例ヲ一題示シテ消去問題ヲ終ルコトニスル。

【雜　例】

**例 276.** 次ノ聯立方程式ヨリ $x,\ y,\ z$ 及ビ $u$ ヲ消去セヨ。

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1\cdots\cdots①\qquad xy=c\cdots\cdots②$$

$$\frac{a^2}{x^3z}+\frac{b^2}{y^3u}=0\cdots\cdots③\qquad \frac{x}{u}+\frac{y}{z}=0\cdots\cdots④$$

**着眼** $z$ ト $u$ トガ③ト④ノミニ含マレ且共ニ $\frac{1}{z},\ \frac{1}{u}$ ニ就テ一次ノ同次方程式ナルコトニ着眼シ，コレラヨリ $u:z$ ヲ求メテ先ヅ $u$ ト $z$ トヲ消去スル。

【解】
$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1\cdots\cdots①\qquad xy=c\cdots\cdots②$$

$$\frac{a^2}{x^3z}+\frac{b^2}{y^3u}=0\cdots\cdots③\qquad \frac{x}{u}+\frac{y}{z}=0\cdots\cdots④$$

③ヨリ　$a^2y^3u=-b^2x^3z$　$\therefore\ \frac{u}{z}=\frac{-b^2x^3}{a^2y^3}\cdots\cdots③'$

④ヨリ　$xz=-yu$　$\therefore\ \frac{u}{z}=\frac{-x}{y}\cdots\cdots④'$

③′ト④′トヲ等置シテ　$\frac{b^2x^3}{a^2y^3}=\frac{x}{y}$

$xy\neq0$ (∵ ①ノ分母)　$\therefore\ \frac{b^2x^2}{a^2y^2}=1\cdots\cdots⑤$

**STOP** $z$ ト $u$ トガ消去セラレタカラ①,②,⑤ヨリ $x,\ y$ ヲ消去スレバヨイト考ヘテ

**GO** ⑤ヨリ　$\frac{b^2}{y^2}=\frac{a^2}{x^2}\cdots\cdots⑤'$ 之ヲ①ニ代入シテ　$2\left(\frac{a^2}{x^2}\right)=1$

$\therefore\ \frac{a^2}{x^2}=\frac{1}{2}$　從ツテ⑤′ヨリ　$\frac{b^2}{y^2}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ x^2=2a^2,\qquad y^2=2b^2$

$\therefore\ x^2y^2=4a^2b^2$

之ヲ②ニ代入シテ　$c^2=4a^2b^2$　　■ $4a^2b^2=c^2$



**[illegible]** 消去スベキ文字ガ四ツデ然モ方程式モ四ツデアル（方程式ノ個數ガ多クナイ）ガ其中③,④ガ共ニ $\frac{1}{z},\ \frac{1}{u}$ ニ就イテ同次方程式デアルタメニ消去ノ目的ヲ達スルコトガ出來ルノデ，コレニ氣付クコトガ本問解決ノ急所デアル。

**【試練問題】** 次ノ二式ヨリ $p$ ヲ消去セバ $x$ 及ビ $y$ ニ就テノ二次ノ關係式ヲ得ルト言フ。ソノ式ヲ求メヨ。

$$y=xp+a\sqrt{1+p^2},\quad x+\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}=0$$
（米　工）

■ $x^2+y^2=a^2$

## 鍛　練　問　題　十　七

**191.** $4x-6y+3z=3x+8y-2z=12y-3x$ ナルトキ $\frac{z}{x+y+z}$ ノ値ヲ求メヨ。（和　商）

**192.** $\frac{y}{z}+\frac{z}{y}=3,\ \frac{z}{x}+\frac{x}{z}=4$ ナルトキ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-6$ ノ値ヲ求メヨ。（倉　商）

**193.** $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1$ ナルトキ $x^2+y^2$ ノ値ヲ問フ。

**194.** $(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)=k^2+1,\ (x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)=k^2-1$, 及ビ $yz+zx+xy=0$ ナルトキ $x+y+z$ ノ値ヲ求メヨ。

**195.** $x^2+\sqrt{2}\,y=y^2+\sqrt{2}\,x=\sqrt{3}$ ナルトキ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ ノ値ヲ小數第四位マデ求メヨ。但シ $x,y$ ハ相等シカラズトス。（東　高）

**196.** $x+y=a,\ x^2-y^2=b,\ xy=c$ ヨリ $x,\ y$ ヲ消去セヨ。（福島商）

**197.**
$$\begin{cases} x+by+cz+du=0 \\ ax+y+cz+du=0 \\ ax+by+z+du=0 \\ ax+by+cz+u=0 \end{cases}$$

$x, y, z, u$ ニ關スル上ノ四ツノ聯立方程式ガ $x=y=z=u=0$ 以外ノ解ヲ有スルモノトセバ常數 $a, b, c, d$ ノ間ニ如何ナル關係アルベキカ。但シ $a, b, c, d$ ハ何レモ 1 ニ等シカラザルモノトス。 (靜 高)

**198.** 三ツノ方程式

$y-\beta=-\dfrac{\beta}{2}(x-a)$, $a=\dfrac{\beta^2}{4}$, $y=\dfrac{2}{\beta}(x-1)$ ヨリ $\alpha, \beta$ ヲ消去シ之ヲ簡單ニセヨ。但シ各文字ハ何レモ0ナラザル實數ヲ表ハスモノトス。 (二 高)

**199.*** $\dfrac{by}{z}+\dfrac{cz}{y}=a$, $\dfrac{cz}{x}+\dfrac{ax}{z}=b$, $\dfrac{ax}{y}+\dfrac{by}{x}=c$ ナルトキハ $a^3+b^3+c^3=5abc$ ナルコトヲ示セ。 (臺 商)

**200.** 次ノ式ヨリ $x, y, z$ ヲ消去セヨ。

$$\frac{x^2(y+z)}{a^3}=\frac{y^2(z+x)}{b^3}=\frac{z^2(x+y)}{c^3}=\frac{xyz}{abc}=1$$ (富高. 理)

---

答 191. $\dfrac{1}{2}$　192. $\pm\sqrt{15}$　193. 1.　194. 0 又ハ $\pm k$,
註 假定式二ツヲ邊々加減セヨ。　195. 5.4641……
196. $a^2(a^2+4c)=b^2$
197. $\dfrac{a}{1-a}+\dfrac{b}{1-b}+\dfrac{c}{1-c}+\dfrac{d}{1-d}+1=0$ 註 $y, z, u$ ヲ $x$ デ表ハシテ代入　198. $y^2=x-1$ 註 假定式①,③ヨリ $\alpha, \beta$ ヲ求メテ②ニ代入スルト $y^4+(x-2)(x-1)y^2-(x-1)^3=0$ 之ヲ因數ニ分解シテ實數條件ヲ用ヒル。
200. $a^3+b^3+c^3+abc=0$ 註 $\dfrac{x^2(y+z)}{a^3}=\dfrac{xyz}{abc}$ ヲ $\dfrac{x}{z}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{a^2}{bc}$ ト變形。



# 第七編　方程式應用問題

## 第三十一章　應用問題ノ解法

今迄ニ習得シタ代數ノ知識ヲ總動員シテ，實際問題，所謂應用問題ヲ解決スルノデ，應用問題ハ諸君ノ思考力推理力ヲ錬磨スル上ニ於テモ，又諸君ノ實力ヲ檢ス上ニ於テモ極メテ重要デアル。然ルニ，極端ニ之ヲ忌避シ，初メカラ全ク手ヲ下サウトモシナイ者ノ多イ事ハ誠ニ遺憾デアル。折角習ツタ代數ガ實際問題ニ應用出來ナイ様デハ進ンデ高等教育ヲ受ケテ社會ノ指導者トナル資格ハナイ者ト云ハネバナラヌ。是非本章ヲ征服シテ，應用問題ニ對スル思考力ヲ錬磨シ解決ノ自信ヲ養ナハレ度イ。

### 1. 應用問題解決ノ要點

(1)　**未知數ヲ適當ニ選定スルコト。**
(2)　**方程式（又ハ不等式）ヲ作ルコト。**
(簡單ナ場合ノ外ハ，ソノ成立スル**理由ヲ述ベテ**)。
(3)　**ソノ方程式ヲ解イテ根ヲ求メ。**
(4)　**得タル根ガ題意ニ適スルヤ否ヤヲ吟味シテ**カラ答トスルコト。

### (1)　未知數ノ選定ニツイテ

問題ノ要求シテ居ルモノヲ直接未知數トシテ方程式ヲ作ルコトガ多イガ，問題ニ依ツテハ，所要ノモノヲ直接未知數トスルヨリモ，之ニ關係アル他ノ數ヲ未知數ニ選定シタリ，又他ノ數ヲ補助ノ未知數ニ選定スルコトニ依リ，方程式モ作リ易ク，解キ易イコトガアル。例ヘバ

| |
|---|
| 六桁ノ整數アリ。其ノ左端ノ數字ハ1＝シテ，之ヲ右端＝移ストキハ元ノ數ノ三倍ノ數ヲ得ベシトイフ。此數ヲ求ム。 |

＝於テ所要ノ數ヲ直接未知數トスルト左端ノ數字ノ1ヲ右端＝移シテ得ル數ヲ表ハスコトガ困難デアル。ソコデ左端ノ數字ガ1ナルコトヲ考慮シテ次ノ樣＝未知數ヲ定メル。

**【解】** 元數ノ左端ノ數字1ヲ取リ去ツテ得ル數ヲ $x$ トスルト
元數ハ　$100000+x$　デ表ハサレ（例ヘバ原數ガ 175324 デアルトキ 75324 ヲ $x$ トスルト　$175324=100000+75324=100000+x$）
又1ヲ右端＝移シテ得ル數ハ $10x+1$（$\because$ 175324 ノ1ヲ右端＝移シテ得ル數 $753241=75324\times 10+1=10x+1$）デ表ハサレ，コレガ元數ノ三倍＝等シイカラ，次ノ方程式ガ成立スル。

$$10x+1=3(100000+x)$$

之ヨリ　$7x=299999$　$\therefore\ x=42857$
從ツテ元數ハ 142857 之ハ明ラカ＝六桁ノ整數デ題意＝適スル。

**答** 142857

## (2) 方程式ノ作成＝ツイテ

未知數ヲ選定スルト次＝ソノ未知數ヲ用ヒテ題意ヲ式デ表ハスコト＝ヨリ方程式ヤ不等式ヲ得ルノデアルガ，多クノモノハ「何々ヲ $x$，何々ヲ $y$ トスレバ次ノ方程式ヲ得」ト書イテ**直チ＝方程式ヲ書キ下サウトシ，ソノ方程式成立ノ經過ヲ述ベヨウトシナイ**。從ツテ題意ガ其儘直チ＝式化サレル平易ナ問題ハ解キ得ルガ，少シ問題ガ複雜＝ナルト全ク手ガツカナイノデアル。題意ヲ順次式デ表ハシ，方程式ノ成立スル理由ヲ述ベルコトガ，應用問題ノ解法ヲ容易ナラシメ，ソノ解答ヲ完全ナラシムル要訣デアル。參考ノタメ＝應用問題＝對スル文部時報ノ講評ヲ二三列擧シテ置ク。

**【講評】** 1. 方程式應用問題＝於テ，ソノ方程式ヲ得ベキ理由ヲ全ク記述セザルモノアリ，此ノ如キハ宜シカラズ。



2. 極メテ簡單ナモノ＝於テハ「何々ヲ $x$，何々ヲ $y$ トセルダケデ直チ＝題意＝ヨリ方程式ヲ書キ下シ，何人モヨク其方程式ノ意味從ツテ其ノ正否ヲ判斷シ得ルガ，或程度ノ思考ノ後＝非ザレバ，直チ＝其儘ヲ式化シ得ザル如キモノ＝於テハ，$x$，$y$ 等ヲ組合セシ式ガ一々問題ノ如何ナル意味ヲ表ハセルモノナルカヲ明記シ〔之ガ方程式デ應用問題ヲ解ク骨子デ，換言スレバ $x$，$y$ 等ノ記號デ「言葉デ表ハサレタ問題ノ意味」ヲ翻譯シ「題意ヲ式化」シテ方程式＝歸セシムルノデアル〕最後＝至リ，問題ノ意味ヨリ，二ツノ式ヲ相等シト置キテ玆＝始メテ方程式ヲ得ルコトヲ記述スベキデ，中等學校＝於テ此ノ根本ヲ能ク理解練習セシメラレンコトヲ希望スル。

## (3) 方程式ヲ解クコト

得タル方程式ガ未知數ノ個數ト同數個（未知數ガ三ツアルトキハ方程式モ三ツ）デアル場合＝ハ普通＝之ヲ解イテ根ヲ求メレバヨイガ，方程式ノ個數ガ未知數ノ個數ヨリ少ナイトキハ，題意ヨリ，ソノ未知數ガ正ノ整數（例ヘバ人數，年齢等）デアルコトヤ，實數ナルベキ條件ヲ考慮シテ不定方程式ノ解法＝依ラネバナラヌ。

## (4) 根ノ吟味＝ツイテ

方程式ヲ解イテ得タル根ガ，ソノ方程式ヲ滿足シテモ，實際問題トシテ不適當ナモノハ之ヲ捨テナケレバナラヌ。

例ヘバ人數ガ分數ノ如キハ明ラカ＝不適當デ之ヲ捨テル事ハ誰シモ氣付ク事デアルガ或日ノ氣溫ヲ求ムル如キ問題＝於テ「求ムル溫度ヲ攝氏 $x$ 度トスレバ」トシテ $x$ ヲ求メ $x=100$ ヲ得テ答＝攝氏 100 度ヲ平氣デ採用スルモノヤ，（攝氏 100 度ハ沸騰點デアルカラ，氣溫ガ攝氏100度デハ明ラカ＝不適當）汽船ノ速サ毎時 150 浬（之モ現在デハ不可能）等ヲ不注意＝採用スル者ガアル。

尙コノ樣ナ不適當ナモノヲ捨テル場合＝ハ，ソノ捨テル理由ヲ簡明＝記載シテ置クベキデアル。

> **例**　凸多角形アリ。內角ハ順次ニ等差級數ヲナシ，最小角ハ $120°$ ニシテ公差ハ $5°$ ナリトイフ，邊數ヲ求ム。

**【解】** 求ムル邊數ヲ $n$ トスレバ，等差級數ノ和ノ公式ニヨリ，內角ノ總和ハ

$$\frac{n}{2}\{120\times2+(n-1)\times5\}\text{度}\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

又凸 $n$ 角形ノ內角ノ總和ハ $(2n-4)$∟R ナル故

$$90(2n-4)\text{度}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

①,②ヲ等置シテ次ノ方程式ヲ得ル。

$$\frac{n}{2}\{120\times2+5(n-1)\}=90(2n-4)$$

コレヲ解クト　$240n+5n^2-5n=360n-720$

$\therefore\ n^2-25n+144=0$

$(n-9)(n-16)=0$　　$\therefore\ n=9$ 又ハ $n=16$

**【吟味】**（イ）$n=9$ ノトキ 最大角 $=120°+5°(9-1)=160°<2$∟R
依テ $n=9$ ノトキハ凸多角形トナリ題意ニ適ス。
（ロ）$n=16$ ノトキ最大角 $=120°+5°(16-1)=195°>2$∟R
依テ $n=16$ ノトキハ凹多角形トナツテ題意ニ適セズ。

**答**　邊數 9

**註**　コノ樣ニ正ノ整數デモ題意ニ適セヌモノガアリ，又反對ニ分數ヤ負數等デモ適當ニ解釋シテ題意ニ適スルコトガアル（例ヘバ $-5$ 人ヲ 5 人ノ不足ト解釋スル如キ）



# 第三十二章　數ニ關スル問題

## 1. 整數問題

1. 例ヘバ三桁ノ整數ノ百位，十位，一位ノ數字ヲ夫々 $x$, $y$, $z$ トスルト原數ハ $100x+10y+z$ デ表ハサレ，コノトキ $x$, $y$, $z$ ハ $9\geqq x\geqq1$,　$9\geqq y\geqq0$,　$9\geqq z\geqq0$ ナル範圍ノ整數デナケレバナラヌ。
2. 5 ノ倍數ハ一位ノ數字ガ 0 又ハ 5；9 ノ倍數ハ數字ノ和ガ 9 デ割リ切レル事等，整數ニ關スル性質ヲ活用シナケレバナラヌ。
3. 不定方程式ノ整數解ニ依ツテ解カネバナラヌ問題ガ多イ。

> **例 277.** 一ノ位ト小數第一位トノ二桁ヨリ成ル帶小數アリ。コノ數ト數字ノ位置ヲ交換シテ得ル數トノ和ハ 11 ニシテ，各位ノ數字ノ平方ノ差ハ 20 ナリト云フ，原ノ數ヲ求ム。

[illegible]　原數ヲ $x$ トシタノデハ數字ノ位置ヲ交換スル條件ガ式化シ得ナイカラ，各位ノ數字ヲ未知數トスル。倘所要ノ數ハ 3.7 ノ如キ形ノ數デ 3.7 ハ $3+\frac{7}{10}$ ナル事ニ着眼シテ原數ヲ表ハス式ヲ作ル。

**【解】** 原數ノ一ノ位ノ數字ヲ $x$，小數第一位ノ數字ヲ $y$ トスルト原數ハ $x+\frac{y}{10}$，ソノ數字ノ位置ヲ交換シテ得ル數ハ $y+\frac{x}{10}$ デ表ハサレル。題意ニヨリコノ二數ノ和ハ 11 ナル故

$$\left(x+\frac{y}{10}\right)+\left(y+\frac{x}{10}\right)=11\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

數字ノ平方ノ差ハ 20 ナル故　$x^2\sim y^2=20\cdots\cdots\cdots\cdots②$

**STOP**　②ヲ $x^2-y^2=20$ ト誤ル者ガ多イ。$x^2$ ト $y^2$ トハ何レガ大カワカラヌカラ $x^2\sim y^2$ トシテ置イテ $x^2>y^2$ ノ場合ト $y^2>x^2$ ノ場合トノ二ツヲ考ヘナケレバナラヌ。

GO　(イ)　$x^2>y^2$ ナルトキ

②ヨリ　$x^2-y^2=20$ ……③

①×10ヨリ　$11x+11y=110$

$\therefore\ x+y=10$ ……④

③÷④ヨリ $x+y\neq 0$ ナル故

$x-y=2$ ……⑤

④,⑤ヨリ　$x=6,\quad y=4$

依テ　原數 $x+\dfrac{y}{10}=6.4$　コノ値ハ題意ニ適スル。

(ロ)　$y^2>x^2$ ナルトキ

②ヨリ　$y^2-x^2=20$ ……⑥

①ヨリ　$x+y=10$ ……⑦

$\therefore\ y-x=2$ ……⑧

⑦ト⑧ヨリ　$x=4,\quad y=6$

依テ　原數 $x+\dfrac{y}{10}=4.6$　コノ値モ題意ニ適スル。

答　6.4 又ハ 4.6

[illegible]　二數ノ差ノ取扱ヒハ特ニ注意ヲ要スル。②ノ代リニ $x^2-y^2=\pm 20$ ヲ用ヒテモヨイ。倘原數ヲ $x.y$ トスルモノガアルガ，$x.y$ ハ $x$ ト $y$ トノ積ヲ表ハシ，題意ノ如キ小數ヲ表ハサナイ。原數ヲ $x+0.1y$ トスルノハ誤リデハナイ。

【試練問題】　三位ノ數アリ。ソノ數字ノ和ハ 6 ニシテ，一位ノ數ト十位ノ數トノ差ハ百位ノ數ノ平方ニ等シク，轉倒數ハ原數ノ 2 倍ヨリ 6 少ナシ。原數ヲ求ム。（靑學商）

答　204

> 例 278.　零以外ノ數字ヨリ成ル三位ノ數アリ。其ノ數字ハ等差級數ヲナス。而シテ此ノ數ヲ其ノ數字ノ和ニテ除シタルトキハ商 15 ヲ得ベシト云フ。此ノ數ヲ求メヨ。

方針　各位ノ數字ヲ未知數ニ選定シテ方程式ヲ導ク。



【解】　原數ノ百位，十位，一位ノ數字ヲ夫々 $x,\ y,\ z$ トスレバ原數ハ $100x+10y+z$ デ表ハサレル。題意ニヨリ $x,\ y,\ z$ ハ等差級數ヲナス故　$2y=x+z$ ……①

原數ヲ數字ノ和 $(x+y+z)$ デ割リタル商ハ 15 ナル故

$100x+10y+z=15(x+y+z)$ ……②

STOP　未知數 $x,\ y,\ z$ ノ三ツニ對シテ方程式ガ二ツシカ得ラレナイカラ，$x,\ y,\ z$ ガ何レモ「1 ヨリ 9 マデノ整數」ナルベキ事ヲ考慮シテ不定方程式ノ解法ニ依ツテ解クコトヲ考ヘ

GO　題意ニヨリ $x,\ y,\ z$ ハ 1 ヨリ 9 マデノ整數 ……③

②ヨリ　$85x-5y-14z=0$ ……②′

①ヨリ　$z=2y-x$ ……①′

①′ヲ②′ニ代入スレバ

$85x-5y-28y+14x=0$

$\therefore\ 99x-33y=0\quad \therefore\ x=\dfrac{y}{3}$ ……④

$x$ ハ正ノ整數ナルベキ故④ヨリ $y$ ハ 3 ノ倍數デ且

③ヨリ　$9\geqq y\geqq 1\quad \therefore\ y=3$ 又ハ 6 又ハ 9

(イ)　$y=3$ ナルトキ　④ヨリ $x=1$,　①′ヨリ　$z=5$

コレラノ値ハ何レモ③ヲ滿足シ，原數ハ 135 デアル。

$\left.\begin{array}{ll}(\text{ロ})\ y=6 \text{ ナルトキハ} & x=2,\ z=10 \\ (\text{ハ})\ y=9 \text{ ナルトキ} & x=3,\ z=15\end{array}\right\}$ トナリ③ヲ滿足セズ。

依テ　原數ハ 135 デアル。

答　135

[illegible]　④式以下ノ說明ノ不充分ナモノヤ，$y=6$ 及ビ $y=9$ ヲ捨テル理由ヲ明示セヌモノガアル。

【試練問題】　二位ノ數アリ。其ノ 4 倍ヨリ數字ノ和ヲ減ズレバ 144 トナルト云フ。本數如何。

答　39

**例 279.** 三桁ノ數アリ。ソノ百位ノ數字ト一位ノ數字トヲ入換ヘテ又三桁ノ數ヲ得，此數ヲ原數ヨリ引クトキハソノ差 198 ナリ。而シテ原數ハ 45 ノ倍數ナリト，原數ヲ求ム。

**方針** 各位ノ數字ヲ未知數ニ選定シ，原數ハ 45 ノ倍數ナル故 5 及ビ 9 ニテ割切レル事ニ着眼シテ解ク。

**【解】** 原數ノ百位，十位，一位ノ數字ヲ順次 $x$，$y$，$z$ トスレバ原數ハ $100x+10y+z$ デ表ハサレ，百位ノ數字ト一位ノ數字トヲ入換ヘテ得ル數ハ $100z+10y+x$ デ題意ニヨリ之ガ亦三桁ノ數ナル故

$$z \neq 0 \cdots\cdots ①$$

又題意ニヨリ　$100x+10y+z-(100z+10y+x)=198 \cdots\cdots ②$

原數ハ 45 即チ $5\times9$ ノ倍數デ 5ト9 トハ互ニ素ナル故，原數ハ 5 及ビ 9 ノ倍數デナケレバナラヌ。

5 ノ倍數ナルタメニハ一位ノ數字ハ 5 又ハ 0 デナケレバナラヌガ，

①ヨリ $z \neq 0$ ナル故　$z=5 \cdots\cdots ③$

9 ノ倍數ナルタメニハ數字ノ和ガ 9 ノ倍數デナケレバナラヌ。

$\therefore$　$x+y+z=9m$〔但シ $m$ ハ整數〕$\cdots\cdots ④$

②ヲ整頓スレバ　$x-z=2 \cdots\cdots ⑤$

③ヲ代入シテ　$x=7 \cdots\cdots ⑥$

$x=7$，$z=5$ ヲ④ニ代入シテ

$$y=9m-12 \cdots\cdots ⑦$$

$m$ ハ正ノ整數ナルベキ故

$m=1$ トスレバ　$y=-3<0$ トナリ題意ニ適セズ。

$m=2$ トスレバ　$y=6$ トナリ題意ニ適ス。

$m\geqq3$ ノトキ　$y>10$ トナリ題意ニ適セズ。

$\therefore$ $x=7$，$y=6$，$z=5$ 從ツテ原數ハ 765 トナリ，コノ値ハ題意ニ適スル。

答 765

**指導要領** 5 及ビ 9 ノ倍數ナル性質ヲ活用スル事ガ本問解決ノ急所デアル。



尙 ⑦ニ於テ $m$ ニ順次 1，2，3……ヲ代入スル代リニ $9>y\geqq0$ ナルベキ故 $9>9m-12\geqq0$

$$\therefore\quad 21>9m\geqq12 \qquad \therefore\ 2\frac{1}{3}>m\geqq1\frac{1}{3}$$

之ヲ滿足スル $m$ ノ整數値ハ $m=2$ $\therefore$ $y=18-12=6$ トシテモイ。

**【試練問題】** 9 及ビ 5 ニテ整除シ得ベキ三桁ノ正ノ整數アリ。第三位ト第二位トノ數ノ和ハ第一位ノ數ノ二倍ヨリ大ナラズ且ツ第三位ノ數ハ第二位ノ數ヨリ小ナリトイフ。コノ數ヲ求ム。

答 135

## 2. 分數問題

單ニ「分數」ト云ヘバ，分母，分子ガ共ニ正ノ整數ナルモノノミヲ考ヘレバヨイ。

**例 280.** 一ツノ既約分數アリ，分母分子ハ共ニ正ノ整數ナリ。コノ分數ノ分子ヲ 8 ダケ增大スレバソノ値ハ $\frac{2}{3}$ トナリ，分子ヲ 2 ダケ減少スレバソノ値ハ $\frac{1}{3}$ ヨリ小トナルトイフ。元ノ既約分數如何。

**方針** 分子，分母ヲ未知數トシテ原分數式ヲ表ハシ，既約分數ナル故分母子ガ互ニ素ナル正整數ナルベキ事ヲ念頭ニ置イテ解ク。

**【解】** 元ノ分數ノ分子ヲ $x$，分母ヲ $y$ トスレバ求ムル分數ハ $\frac{x}{y}$ デ表ハサレ，之ガ既約分數ナルベキ故

$$x \text{ ト } y \text{ トハ互ニ素ナル正ノ整數} \cdots\cdots ①$$

題意ニヨリ　$\dfrac{x+8}{y}=\dfrac{2}{3} \cdots\cdots ②$

$\dfrac{x-2}{y}<\dfrac{1}{3} \cdots\cdots ③$

②ヨリ　$y=\dfrac{3}{2}x+12 \cdots\cdots ②'$

$y>0$ ナル故③ノ兩邊ニ $3y$ ヲ乘ジテモ不等號ノ向ハ變ラナイ。

$$\therefore\ 3(x-2)<y \cdots\cdots ③'$$

②′ヲ③′ニ代入　$3(x-2)<\frac{3}{2}x+12$

兩邊 ×2　$6x-12<3x+24$

コレヲ解キテ　$x<12 \cdots\cdots ④$

且②′ヨリ $y$ ガ整數トナルタメニハ $x$ ハ 2 ノ倍數デナケレバナラヌ

∴　$x=2$ 又ハ 4 又ハ 6 又ハ 8 又ハ 10 ノ何レカデアル。

②′ニ代入シテ $y$ ヲ求メ

$$\begin{cases}x=2\\y=15\end{cases}\quad\begin{cases}x=4\\y=18\end{cases}\quad\begin{cases}x=6\\y=21\end{cases}\quad\begin{cases}x=8\\y=24\end{cases}\quad\begin{cases}x=10\\y=27\end{cases}$$

コレラノ中 $x$ ト $y$ トガ互ニ素ナルモノハ $\begin{cases}x=2\\y=15\end{cases}$ $\begin{cases}x=10\\y=27\end{cases}$ ノ二ツデアル。依テ元ノ既約分數ハ　$\frac{2}{15}$ 又ハ $\frac{10}{27}$ ……答

[illegible]　③ノ分母ヲ拂フトキ「$3y$ ガ正ナル故不等號ノ向ハ變ラヌ」コトヲ述ベナイ者ガ多イ。尙既約分數ナル條件ヲ忘レテ $\frac{4}{18}$ ヤ $\frac{6}{21}$ 等ヲモ答トシタリ，或ハ之等ヲ既約分數ニ直シテ $\frac{2}{9}$ ヤ $\frac{2}{7}$ ヲ答ニ採用スル者ガアル。

【試練問題】 分母，分子トモニ正整數ナル既約分數アリ。其分子ニ 3 ヲ加フレバ其値ハ $\frac{1}{3}$ ヨリ大トナリ，分母ニ 3 ヲ加フレバ其値 $\frac{5}{18}$ ニ等シト云フ。モトノ分數如何。　（松江高）

答　$\frac{10}{33}$

### 3. 有理數ト無理數トニ關スル問題

「$a, b$ ガ有理數デ $\sqrt{m}$ ガ無理數ナルトキ $a+b\sqrt{m}=0$ ナルタメノ必要ニシテ且十分ナル條件ハ $a=0$ 且 $b=0$ ナリ」ヲ用ヒテ解ク。

**例 281.** 一ツノ有理數ト一ツノ二次根數ノ 3 倍トノ和ヨリナル數アリ。其ノ數ノ立方ハ，モトノ數トソノ有理數トノ和ノ 72 倍ニ等シトイフ。モトノ數如何。



【解】 一ツノ有理數ヲ $x$，一ツノ二次根數ヲ $\sqrt{y}$ トスレバ原數ハ $x+3\sqrt{y}$ デ表ハサレル。題意ニヨリ

$$(x+3\sqrt{y})^3=72\{(x+3\sqrt{y})+x\} \cdots\cdots ①$$

STOP　未知數二ツニ對シテ方程式ガ一ツシカ得ラレナイカラ，前記ノ定理ヲ應用スル方針デ（有理數）+（有理數）$\sqrt{y}=0$ ノ形ニ整頓スル。

GO　①ヨリ　$x^3+9x^2\sqrt{y}+27xy+27y\sqrt{y}=144x+216\sqrt{y}$

$$\therefore\ (x^3+27xy-144x)+9(x^2+3y-24)\sqrt{y}=0 \cdots\cdots ②$$

②ニ於テ括弧內ノ二式ハ共ニ有理數デ $\sqrt{y}$ ハ無理數ナル故②ガ成立スルタメニハ

$$\begin{cases}x^3+27xy-144x=0 \cdots\cdots ③\\x^2+3y-24=0 \cdots\cdots ④\end{cases}$$

ガ同時ニ成立スルコトガ必要デ且十分デアル。

STOP　③ハ三次方程式デハアルガ各項ニ $x$ ガ共通ナルコトニ着眼シテ③ヨリ解ク。

GO　③ヨリ　$x(x^2+27y-144)=0$

$$\therefore\ x=0 \text{ 又ハ } x^2+27y-144=0$$

（イ）$x=0$ ナルトキ　④ヨリ　$y=8$

依テ原數　$x+3\sqrt{y}=0+3\sqrt{8}$

（ロ）$x^2+27y-144=0 \cdots\cdots ⑤$ ナルトキ

⑤－④ヨリ　$24y-120=0$　∴ $y=5$

之ヲ④ニ代入シテ　$x^2=9$　∴ $x=\pm 3$

依テ原數　$x+3\sqrt{y}=\pm 3+3\sqrt{5}$

コレラノ値ハ何レモ題意ニ適スル。

答　$0+3\sqrt{8}$ 又ハ $\pm 3+3\sqrt{5}$

[illegible]　二次根數ノ負ナルモノヲ採ツテ原數ヲ $x\pm 3\sqrt{y}$ トスル說モアルガ，和ナル題意ヲ尊重シテ平方根ノ負ナルモノヲ採用セヌコトニシタ。

【試練問題】 一ツノ有理數ト一ツノ二次根數ノ和カラ成リ立ツ實數ガアル。ソノ數ノ立方ノ $\frac{1}{8}$ ハ原數トソノ有理數トノ和ニ等シイ。原數ヲ求ム。

答　$\pm 1+\sqrt{5}$　$0+\sqrt{8}$

## 4. 二ツ以上ノ數ヲ求ムル問題

**例 282.** 甲，乙，丙，丁四ツノ數アリ。甲，丙，丁ノ和ハ乙ヨリ大ナルコト 8，甲乙ノ平方ノ和ハ丙丁ノ平方ノ和ヨリ大ナルコト 36，甲乙ノ積ト丙丁ノ積トノ和ハ 42，甲ノ立方ハ乙，丙，丁ノ立方ノ和ニ等シトイフ。四ツノ數如何。

**着眼** 所要ノ四數ヲ直接未知數ニ選定スルコトニヨリ容易ニ方程式ヲ得ル。

**【解】** 甲，乙，丙，丁ノ四數ヲ順次 $x$, $y$, $z$, $w$, トスルト題意ニヨリ

$$\begin{cases} x+z+w=y+8 \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=z^2+w^2+36 \cdots\cdots\cdots ② \\ xy+zw=42 \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \\ x^3=y^3+z^3+w^3 \cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

**STOP** サテ之ヲ如何ニ解クカト考ヘ，③ノ左邊ヨリ $x$ ト $y$；$z$ ト $w$ トヲ組合セテ解ク方針ヲ立テ，①ト④ノ形カラ $x-y$ ト $z+w$ トヲ束ニシテ取扱フ。

**GO** ①ヨリ　　$x-y=8-(z+w) \cdots\cdots ①'$

②－③×2ヨリ　　$(x-y)^2=(z+w)^2-48 \cdots\cdots ⑤$

①′ヲ⑤ニ代入スルト

$$64-16(z+w)+(z+w)^2=(z+w)^2-48$$

$$\therefore\ z+w=7 \cdots\cdots\cdots ⑦$$

コレヲ①′ニ代入　　$x-y=1 \cdots\cdots\cdots ⑧$

④ヨリ　　$x^3-y^3=z^3+w^3$

$$\therefore\ (x-y)^3+3xy(x-y)=(z+w)^3-3zw(z+w)$$

⑦,⑧ヲ代入　　$1+3xy=343-21zw$

$$\therefore\ xy+7zw=114 \cdots\cdots\cdots ⑨$$

⑨－③ヨリ　　$6zw=72$

$$\therefore\ zw=12 \cdots\cdots\cdots ⑩$$

コレヲ③ニ代入シテ　　$xy=30 \cdots\cdots\cdots ⑪$



⑧ト⑪ヨリ　$\begin{cases} x-y=1 \\ xy=30 \end{cases}$　　⑦ト⑩ヨリ　$\begin{cases} z+w=7 \\ zw=12 \end{cases}$

$\therefore\ \begin{cases} x=6 \\ y=5 \end{cases}$ 又ハ $\begin{cases} x=-5 \\ y=-6 \end{cases}$　　$\begin{cases} z=3 \\ w=4 \end{cases}$ 又ハ $\begin{cases} z=4 \\ w=3 \end{cases}$

之等ヲ組合セテ次ノ四組ノ答ヲ得ル。

**答** $\begin{cases} 甲\ 6 \\ 乙\ 5 \\ 丙\ 3 \\ 丁\ 4 \end{cases}$ 又ハ $\begin{cases} 甲\ 6 \\ 乙\ 5 \\ 丙\ 4 \\ 丁\ 3 \end{cases}$ 又ハ $\begin{cases} 甲\ -5 \\ 乙\ -6 \\ 丙\ 3 \\ 丁\ 4 \end{cases}$ 又ハ $\begin{cases} 甲\ -5 \\ 乙\ -6 \\ 丙\ 4 \\ 丁\ 3 \end{cases}$

**[illegible]** ④ヲ $(x-y)(x^2+xy+y^2)=(z+w)(z^2-zw+w^2)$ ト變形シテ⑦,⑧ヲ代入シテモヨイ。尙甲ハ 6 又ハ −5，乙ハ 5 又ハ −6，丙ハ 4 又ハ 3，丁ハ 3 又ハ 4 ノ如ク組合セガ幾組出來ルカヲ考慮セズニ不徹底ナ答ヲ書クモノガアル。

**【試練問題】** 和ガ 30.9 ナル二數アリ。コノ二數ノ整數部ノ和及ビ積ハ夫々 30 及ビ 216 ニシテ，コノ二數ノ小數部ノ平方ノ和ハ 0.41 ナリトイフ。コノ二數ヲ求メヨ。

**答** 12.4 ト 18.5 又ハ 12.5 ト 18.4

**例 283.** 二ツノ正整數甲乙アリ。其ノ差ハ 24 ニシテ甲ヲ乙ニテ割リタル剩餘ハ 4 ナリト云フ。二數ヲ求ム。
但シ甲數ハ乙數ヨリモ大ナルモノトス。

**着眼** 甲ヲ乙デ割ツタトキノ剩餘ガ與ヘラレテキルコトニ着眼シ，ソノ商ヲ補助ノ未知數ニ選定シテ題意ヲ式デ表ハス。

**【解】** 甲數ヲ $x$，乙數ヲ $y$ トスルト題意ニヨリ $x>y$ デ其差ガ 24 ナ

ル故　　$x-y=24$ ……①

甲ヲ乙デ割ツタトキノ剰餘ハ 4 ナル故商ヲ $m$ トスレバ

$x=my+4$ ……②

但シ $m$ ハ正ノ整數 ……③

②ヲ①ニ代入シテ　$(m-1)y=20$ ……④

**STOP** $m$ ヤ $y$ ガ正ノ整數ナルベキ事等ヲ考慮シテ④ヨリ $m$, $y$ ノ値ヲ決定スレバヨイト考ヘテ

**GO** シカルニ $x$ ヲ $y$ デ割ツタトキノ剰餘ガ 4 ナル故 $y$ ハ 4 ヨリモ大ナル整數デ，③ヨリ $m-1$ モ亦整數ナルベキ故

④ヨリ　$\begin{cases} y=5 \\ m-1=4 \end{cases}$　又ハ $\begin{cases} y=10 \\ m-1=2 \end{cases}$　又ハ $\begin{cases} y=20 \\ m-1=1 \end{cases}$

①ニ代入シテ　$x=29$,　$x=34$,　$x=44$,

コレラノ $x$, $y$ ノ値ハ何レモ正ノ整數デ且題意ニ適スル。

**答** $\begin{cases} 甲\ 29 \\ 乙\ 5 \end{cases}$　又ハ $\begin{cases} 甲\ 34 \\ 乙\ 10 \end{cases}$　又ハ $\begin{cases} 甲\ 44 \\ 乙\ 20 \end{cases}$

**[illegible]** $y>4$ ナル條件ヲ忘レテ④ヨリ $y=4$, $y=2$, $y=1$ 等ヲモ求メテ之ヲ答トスルモノガ多イ。

**【試練問題】** 二ツノ正ノ整數 $x$, $y$ アリテ $x>y$ トス。而シテ其ノ和 22, 又 $x$ ヲ $y$ ニテ除シタルトキノ剰餘ハ 2 ナリト云フ $x$, $y$ ノ値ヲ求ム。

---

**答** $\begin{cases} x=18 \\ y=4 \end{cases}$　$\begin{cases} x=17 \\ y=5 \end{cases}$　$\begin{cases} x=12 \\ y=10 \end{cases}$

> **例 284.** 二ツノ正ノ整數アリ。何レモ二桁ニシテ，一ツノ數ノ 8 倍ト他ノ一ツノ數ノ 21 倍トノ差ハ 33 ナリ。二數ヲ求メヨ。

**方針** 求ムル二數ハ何レモ二桁デアルガ，各位ノ數字ヲ未知數ニ選定スルト未知數ガ四ツトナリ，方程式ハ一ツシカ得ラレナイカラ，所要ノ二數ヲ直接未知數トシ，整ナル條件ノ取扱ヒヲ警戒シテ解ク。



**【解】** 求ムル二數ヲ $x$, $y$ トスルト題意ニヨリ $x$, $y$ ハ何レモ二桁ノ整數ナル故

$\left.\begin{matrix} 100>x\geqq 10 \\ 100>y\geqq 10 \end{matrix}\right\}$ ……①

又　$8x\sim 21y=33$ ……②

**(イ)** $8x>21y$ ナルトキ

②ヨリ　$8x-21y=33$ ……③

**STOP** 未知數二ツニ對シテ方程式ガ一ツデアルカラ $x$, $y$ ガ①ヲ滿足スル整數ナルベキ事ヲ考慮シテ不定方程式ノ解法ニ依ル。

**GO** ③ヨリ　$x=\dfrac{3(7y+11)}{8}$ ……③′

③′ヨリ $x$ ガ正ノ整數ナルタメニハ 8 ト 3 トハ互ニ素ナル故 $7y+11$ ガ 8 ノ倍數デナケレバナラヌ。

∴　$7y+11=8k$ 〔$k$ ハ正整數〕……④

ト置ケバ　$y=\dfrac{8k-11}{7}=k-1+\dfrac{k-4}{7}$ ……⑤

$y$ ガ整數ナルタメニハ $k-4$ ガ 7 ノ倍數デナケレバナラヌ。

∴　$k-4=7m$ 〔$m$ ハ正整數〕

トオケバ　$k=7m+4$ ……⑥

⑥ヲ⑤ニ代入　$y=8m+3$ ……⑦

⑦ヲ③′ニ代入　$x=21m+12$ ……⑧

⑦⑧ヲ①ニ代入シテ

$100>21m+12\geqq 10$, 且 $100>8m+3\geqq 10$

∴　$\dfrac{88}{21}\geqq m\geqq \dfrac{-2}{21}$,　且　$\dfrac{97}{8}>m\geqq \dfrac{7}{8}$

即チ　$4\dfrac{4}{21}>m\geqq -\dfrac{2}{21}$　且 $12\dfrac{1}{8}>m\geqq \dfrac{7}{8}$

コレラヲ同時ニ滿足スル $m$ ノ整數値ハ 4, 3, 2, 1 ノ四ツデアル

⑦ト⑧ヨリ

| $m=4$ ノトキ | $m=3$ ノトキ | $m=2$ ノトキ | $m=1$ ノトキ |
|---|---|---|---|
| $\begin{cases} x=96 \\ y=35 \end{cases}$ | $\begin{cases} x=75 \\ y=27 \end{cases}$ | $\begin{cases} x=54 \\ y=19 \end{cases}$ | $\begin{cases} x=33 \\ y=11 \end{cases}$ |

(ロ) $8x<21y$ ナルトキ

②ヨリ　　$8x-21y=-33$

$$\therefore\ x=\frac{3(7y-11)}{8}$$

(イ) ト同樣ニ　　$7y-11=8k'$〔$k'$ ハ正整數〕ト置ケバ

$$y=\frac{8k'+11}{7}=k'+1+\frac{k'+4}{7}$$

$k'+4=7n$ ト置クト　$k'=7n-4$〔$n$ ハ正ノ整數〕

$\therefore\quad y=8n-3,\qquad x=21n-12$ ……………⑨

①ニ代入　　$100>8n-3\geqq10,\ 100>21n-12\geqq10$

$\therefore\quad \frac{103}{8}>n\geqq\frac{13}{8}$ 且 $\frac{112}{21}>n\geqq\frac{22}{21}$

コレラ同時ニ滿足スル $n$ ノ整數値ハ 5, 4, 3, 2 ノ四ツデアル。

⑨ニ代入シテ　$\begin{cases}x=93\\y=37\end{cases}$ $\begin{cases}x=72\\y=29\end{cases}$ $\begin{cases}x=51\\y=21\end{cases}$ $\begin{cases}x=30\\y=13\end{cases}$

コレラノ値ハ何レモ題意ニ適スル。

答 $\begin{cases}96\\35\end{cases}$ $\begin{cases}75\\27\end{cases}$ $\begin{cases}54\\19\end{cases}$ $\begin{cases}33\\11\end{cases}$ $\begin{cases}93\\37\end{cases}$ $\begin{cases}72\\29\end{cases}$ $\begin{cases}51\\21\end{cases}$ $\begin{cases}30\\13\end{cases}$

【試練問題】 共ニ 50 以上ナル二ツノ二位ノ整數アリ。ソノ差ハ 10 ニシテ，大ナル數ノ 10 倍ト小ナル數ノ 3 倍トノ和ノ $\frac{1}{20}$ ハ 11 ノ倍數ナル二位ノ整數ニナルトイフ。此ノ二整數各々幾何ナルカ。

答 70 ト 60

## 第三十三章　個數，人數，方陣問題

### 1. 個數人數ノ問題

未知數ヲ定メルトキ單位ヲ明示スルコト，及ビ個數ヤ人數等ハ一般ニハ正ノ整數ナルベキコトニ注意シテ解ク。



**例 285.** 或會合ニ於ケル入費總計ハ 28 圓 80 錢ナリ。出席總人員ノ中 2 人ハ來賓ナルガタメ出金セザリシヲ以テ，1 人前ノ實際出金額ハ出席總人員平等割 1 人前ノ金額ヨリ 20 錢增シタリトイフ。出席總人員及各 1 人實際出金幾何カ。

[illegible] 此種ノ問題ハ (一人ノ出金高)×人數＝總金額 又ハ $\frac{\text{總金額}}{\text{人數}}$ ガ一人ノ出金高ニ等シイ事ヲ用ヒテ方程式ヲ得ル。

【解】 出席總人員ヲ $x$ 人，一人ノ實際ノ出金高ヲ $y$ 圓トスルト實際ニ出金シタ人數ハ $(x-2)$ 人デ總計 28.8 圓ナル故

$$(x-2)y=28.8 \quad\cdots\cdots①$$

平等割一人前ノ金額ハ $\frac{28.8}{x}$ 圓デ實際ハコレヨリ 20 錢增シタカラ

$$y=\frac{28.8}{x}+0.2 \quad\cdots\cdots②$$

②ヲ①ニ代入シテ　$(x-2)(\frac{28.8}{x}+0.2)=28.8$

分母ヲ拂ツテ整頓スルト　$x^2-2x-288=0$

$\therefore\quad (x-18)(x+16)=0$

$x$ ハ人數ナル故 $x>0$　$\therefore\ x+16\neq0$

$\therefore\quad x-18=0\quad \therefore\ x=18$ ……③

③ヲ②ニ代入シテ　$y=1.6+0.2=1.8$

コレラノ値ハ②ノ分母ヲ 0 ナラシメズ且題意ニ適スル。

答 出席總人員 18 人，一人ノ出金高 1 圓 80 錢

[illegible] 人數ノミヲ未知數ニ選ビ次ノ樣ニ考ヘテ方程式ヲ導イテモヨイ。出席總人數ヲ $x$ 人トスルト平等割一人前ノ金額ハ $\frac{28.8}{x}$ 圓デ實際ニハ $(x-2)$ 人ガ出金シタカラ，實際ノ出金高ハ $\frac{28.8}{x-2}$ 圓デアル。題意ニヨリ　$\frac{28.8}{x-2}=\frac{28.8}{x}+0.2$　コレヲ解ケバヨイ。

【試練問題】 或ル會ノ經費ヲ會員ニ等分シテ負擔セシメントス。

今若シ會員ガ 3 名少ナカリシナラバ各會員ノ負擔額ハ 1.5 圓ヅヽ增スベク又 5 名多カリセバ 2 圓ヅツ減ズベキ筈ナリトイフ。會員數及ビ各會員ノ負擔額ヲ問フ。

---

答 35人．一人當リ 16 圓

**例 286.** 義捐金若干圓ヲ分配スルニ各戶ニ 70 圓宛與フレバ 355 圓殘リ，100 圓宛與フレバ最後ノ一戶ダケハ 90 圓未滿ノ金額ヲ受クルコトヽナルトイフ。戶數如何。

**方針** (一戶ノ分配金)×戶數ガ全分配金ニ等シイコトハ容易ニワカルカラ，最後ノ一戶ダケガ 90 圓未滿デアルコトヲ正シク解決スルコトガ本問題ノ急所デアル。ソコデ最後ノ一戶ノ分配金ヲ表ハスベキ式ヲ導キ出ス事ヲ工夫シ，不等式ノ力ヲ借リテ解決スル。

【解】 求ムル戶數ヲ $x$ 戶トシ，義捐金ノ總額ヲ $y$ 圓トスルト
70 圓宛 $x$ 戶ニ分配シテ 355 圓殘ッタカラ

$$y=70x+355\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

次ニ 100 圓宛分配シタトキ，最後ノ一戶ダケハ 90 圓未滿デアッタカラ，100 圓宛與ヘタノハ $(x-1)$ 戶デアル。
從ッテ最後ノ一戶ノ貰ッタ金額ハ $y-100(x-1)$ 圓デ，題意ニヨリ之ガ 90 圓未滿ナル故

$$0<y-100(x-1)<90\cdots\cdots ②$$

①ヲ②ニ代入　$0<70x+355-100(x-1)<90$

$$\therefore\quad 0<-30x+455<90$$

各邊ニ $(-1)$ ヲ乘ジルト（不等號ノ向ハ變ル）

$$0>30x-455>-90$$

各邊 +455　$455>30x>365$

$$\therefore\quad \frac{455}{30}>x>\frac{365}{30}$$

即チ　$15\frac{1}{6}>x>12\frac{1}{6}$

戶數 $x$ ハ正ノ整數ナルベキ故　$x=15$ 又ハ 14 又ハ 13
コノ値ハ題意ニ適スル　答 15 戶 又ハ 14 戶 又ハ 13 戶



**[illegible]** 90 圓未滿ノ金額ヲ「受クル」條件ヲ無視シテ②ニ於ケル「0<」ヲ忘レルモノガ多イ。尙②ノ代リニ $y$ 圓ハ $100(x-1)$ 圓ヨリハ多イガ $\{100(x-1)+90\}$ 圓ヨリハ少ナカッタ筈デアルト考ヘテ②ノ代リニ
$100(x-1)<y<100(x-1)+90$ ヲ用ヒテモヨイ。

**【試練問題】** 小銃彈若干發ヲ兵士ニ分ツニ，50 發宛與フレバ 320 發殘リ，80 發宛與フレバ最後ノ一人ノミハ 80 發未滿ヲ受クルコトトナルト云フ。兵士ノ人數如何。 (陸經)

---

答 11 人 又ハ 12 人 又ハ 13 人

**例 287.** 2000 個ヨク多ク 3000 個ヨリハ少ナキ數ノ碁石ヲ 10人，15 人，21 人，25 人ノ何レノ人數ニ等分スルモ 9 個ヲ殘ストイフ。ソノ數幾許ナルカ。

**方針** 何レノ場合モ 9 個殘ッタノデアルカラ，碁石ガ 9 個少ナケレバ，10 人，15 人，21 人，25 人ノ何レニモ等分サレテ一個モ殘ラナカッタ筈デアル、ト考ヘル事ガ本問題解決ノ急所デアル。

【解】 求ムル碁石ノ個數ヲ $x$ 個トスルト，題意ニヨリ $x-9$ ハ 10，15，21，25 ノ何レデ割ルモ整除セラレナケレバナラヌ。
即チ $x-9$ ハ 10，15，21，25 ノ公倍數デナケレバナラヌ。
シカルニ　$10=2\times5$　$15=3\times5$
　　　　　$21=3\times7$　$25=5^2$
依テコレラ四數ノ最小公倍數ハ $2\times3\times5^2\times7$ 即 1050 デアル。

$$\therefore\quad x-9=1050m\ \text{〔}m\text{ハ正ノ整數〕}\cdots\cdots ①$$

$m=1$ ナルトキ　$x=1059$　$<2000$ トナリ題意ニ適セズ。
$m=2$ ナルトキ　$x=2109$　題意ニ適ス。
$m=3$ ナルトキ　$x=3159>3000$
$x\geqq3$ ナルトキ　$x>3000$ トナリ何レモ題意ニ適セズ。
依テ求ムル個數ハ　2109 個ナリ　答 2109 個

**[illegible]** 最小公倍數ヲ利用スル事ニ氣付カズ各人ノ得タル個數ヲ未知數トシテ聯立方程式ノ解法ニ依ラントスル者ハ殆ンド失敗ニ終ル。

尙①ヨリ $x=1050m+9$ トシ，以後ハ不等式

$$3000>1050m+9>2000$$

ヲ解イテ $m$ ノ整數値ハ 2 ノミナルコトヲ導イテモヨイ。

【試練問題】 面積 1260 平方米ニシテ其間口ハ奥行ヨリ大ニシテ奥行ノ二倍ヨリ小ナル矩形ノ土地アリ。今此土地ノ四隅ニ杭ヲ立テ更ニ其間ニ等間隔ニ杭ヲ立テ、柵ヲ作ランニハ，杭ト杭トノ間隔ヲ 2 米宛トモ又ハ 3 米宛トモナシ得ルト云フ。此土地ノ間口ト奥行トノ長サヲ求メヨ。（浦　高）

答　間口 42 米，奥行 30 米

**例 288.** 日曜日ガ5回アル月ハ一ケ年間ニ何ケ月アルカ。

方針　一寸手ノツケ難イ問題デアルガ，落付イテ考ヘレバ案外容易デアル。先ヅ一ケ年及ビ一ケ月ニ日曜日ガ何回アルカヲ考ヘル事，及ビ平年ト閏年トヲ區別シテ取扱フ事ガ急所デアル。

【解】（イ）平年ノトキ　一年ハ 365 日デ

365 日＝7日×52＋1日　ナル故

一月一日ガ日曜日ナラバ一ケ年ニ日曜日ハ 53 回

一月一日ガ日曜日デナケレバ　日曜日ハ 52 回

又一ケ月ハ 28 日 又ハ 30 日 又ハ 31 日デアルカラ，

一ケ月ニ日曜日ハ 4 回カ又ハ 5 回カノ何レカデアル。

依テ日曜日ガ 5 回アル月ヲ一ケ年間ニ $x$ ケ月トスルト

日曜日ガ 4 回アル月ハ $(12-x)$ ケ月デ

一ケ年間ノ日曜日ノ回數ハ　$5x+4(12-x)$ 回トナル。

依テ一月一日ガ日曜日ノトキ　$5x+4(12-4)=53$

之ヲ解イテ　$x=5$

一月一日ガ日曜日デナイトキ　$5x+4(12-x)=52$

$\therefore\quad x=4$

（ロ）閏年ノトキ　366日＝7日×52＋2日

依テ一月一日又ハ一月二日ガ日曜日ノトキハ日曜日ハ 53 回

其他ノトキハ　52 回



以下（イ）ノ場合ト同樣ニシテ　$x=5$，$x=4$ ヲ得ル。

答　平年ノトキ｛一月一日ガ日曜日ナラバ　5 ケ月｝｛其他ノトキハ　4 ケ月｝

閏年ノトキ｛一月一日又ハ二日ガ日曜日ナラバ　5 ケ月｝｛其他ノトキハ　4 ケ月｝

【試練問題】 各學年 4 組ヨリナル 3 學年制ノ學校ニ於テ各組ヨリ 4 名乃至 5 名ノ優等生ヲ選定スル規定ナリ。全校ニテ 52 名ノ優等生ヲ選定センニハ 4 名ノ優等生ヲ出ス組ハ幾組アルカ。（名　商）

答　8 組

**例 289.** 50 錢銀貨，10 錢ニツケル貨ノ混ジタ一山ガアツテ 126 圓 40 錢アル筈デアル。今ソノ各ノ枚數ヲ知ルタメニ全體ノ目方ヲ計ツテ見タラ 2076$g$ アツタ。銀貨，ニツケル貨夫々何枚アルト考ヘラレルカ。但シ法規デ 50 錢銀貨，10 錢ニツケル貨ノ重サハ夫々 4.95$g$，4$g$ ト定メラレテキル。

方針　50 錢銀貨，10 錢ニツケル貨ノ個數ヲ未知數トシ，金額及ビ重サヲ考ヘテ二ツノ方程式ヲ得ル。

【解】 50 錢銀貨 $x$ 個，10 錢ニツケル貨 $y$ 個アリトスレバ

金高ヨリ　$50x+10y=12640$ ……①

重サヨリ　$4.95x+4y=2076$ ……②

①ヨリ　$5x+y=1264$ ……①′

①′×4－②ヨリ　$15.05x=2980$

$$\therefore\quad x=\frac{2980}{15.05}=198\frac{2}{301}$$

STOP　$x$ ハ銀貨ノ個數ナル故正ノ整數デナケレバナラヌカラコノ $x$ ノ値ハ題意ニ適セズ「依テ解ナシ」トヤル者ガアルガ，之ハヨクナイ。

題意ノ但書ニ「法規デ……ト定メラレテキル」ニ着眼シ，法規デハ定メラレテキルガ實際問題トシテハ貨幣ノ磨滅等ノ爲ニソノ目方ニハ多少ノ增減ガアル答ト考ヘテ

GO 銀貨ノ個數 $x$ ハ整數デナケレバナラヌカラ，$x=198\frac{2}{301}$ ハ題意ニ適シナイガ，貨幣ノ重サハ法規ノ重サニ比シ多少ノ增減ハアルモノト考ヘラレルカラ，之ニ最モ近イ整數値ヲトリ　$x=198$

從ッテ①′ヨリ　　$y=1264-5(198)=274$

依テ　**銀貨 198 枚，ニッケル貨 274 枚アルト考ヘ得ル。** 答

[illegible]　方程式ノ根ヲ實際問題ニ當嵌メテ適當ニ解釋スルコトガ本問ノ狙ヒ所デアル。【試驗官評】 $x=198\frac{2}{301}$ ニ於ケル端數ノ處分ノ仕方ガ非常ニ出來ガ悪イ。「此問題ハ不能デアル」ト解答シタモノガ大分アリ，少數ノモノハ $198\frac{2}{301}$ 枚ト答ヘテキタ。（文部時報ヨリ）

**【試練問題】** 約500人ノ生徒ヲ二組ニ分ケタトコロ一方ノ人數ハ他方ノソレノ丁度平方ニナッタト云フ，然ラバ正確ナ人數ハ幾ラデアルカ。　（水　高）

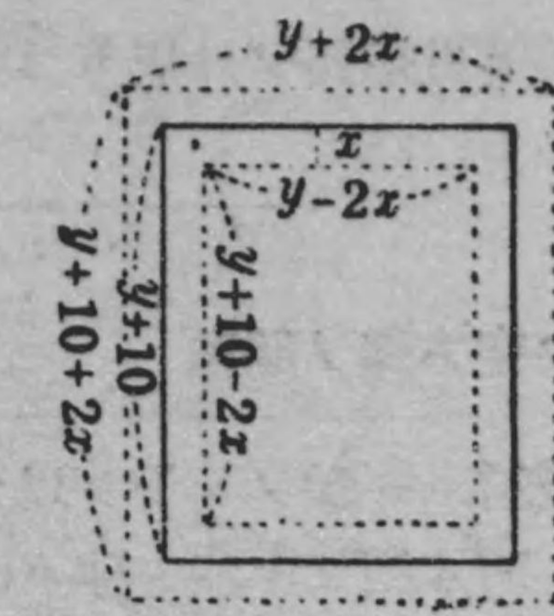
答　506 人

## 2. 矩形ノ問題

**例 290.** 縱横ノ長サノ差 10 米ナル矩形ノ地面アリ。此矩形内ニ於テ四邊ニ沿ヒテ或ル幅ノ道路ヲ作ルトキハ道路ノ面積ハ 575 平方米トナリ，マタ矩形外ニ於テ四邊ニ沿ヒテ上ト等シキ幅ノ道路ヲ作ルトキハ其外周ハ 260 米トナルト云フ。道路ノ幅ヲ問フ。

方針　道路ノ幅ヲ未知數トシ，尙矩形ノ地面ノ縱又ハ横ノ長サヲ補助ノ未知數ニ選定シテ方程式ヲ作ル。






**【解】** 道路ノ幅ヲ $x$ 米トシ，
矩形ノ短邊ノ長サヲ $y$ 米トスレバ
長邊ノ長サハ $(y+10)$ 米トナル。
從ッテ矩形ノ面積ハ $y(y+10)$ 平方米
矩形内ニ作ッタ道路内ニ出來ル矩形ノ面積ハ $(y-2x)(y+10-2x)$ 平方米デコノ兩者ノ差ガ道路ノ面積ニ等シイ。

$$\therefore \quad y(y+10)-(y-2x)(y+10-2x)=575 \quad \cdots\cdots ①$$

矩形外ニ道路ヲ作ッタトキノ外周ハ 260 米ナル故

$$2\{(y+2x)+(y+10+2x)\}=260 \quad \cdots\cdots ②$$

②ヨリ　$y=60-2x \quad \cdots\cdots ③$

③ヲ①ニ代入　$(60-2x)(70-2x)-(60-4x)(70-4x)=575$

整頓スレバ　$12x^2-260x+575=0$

$$\therefore \quad x=\frac{130\pm100}{12}=19\frac{1}{6} \text{ 又ハ } 2\frac{1}{2}$$

STOP　コノ値ハ共ニ正ナル故題意ニ適スト早合點シテハナラヌ。

GO　$x=19\frac{1}{6}$ ナルトキ　③ヨリ　$y=60-38\frac{1}{3}=21\frac{2}{3}$

即チ矩形ノ短邊ノ長サハ $21\frac{2}{3}$ 米トナリ，此ノ矩形内ニ幅 $19\frac{1}{6}$ 米ノ道路ヲ四邊ニ沿ヒテ作ル事ハ出來ナイカラ題意ニ適シナイ。
$x=2\frac{1}{2}$ ナルトキ　$y=60-5=55$，コノトキハ幅 $2\frac{1}{2}$ 米ナル道路ヲ題意ノ如ク作リ得ル。依テ求ムル道路ノ幅ハ 2.5 米デアル。

答　2.5 米

[illegible]　道幅 $19\frac{1}{6}$ 米ヲ捨テルコトニ氣付カヌ者ガ非常ニ多イ。應用問題ノ答ハ常ニ實際問題ニ當嵌メテ吟味シテ見ナケレバナラヌ。

**【試練問題】** 長サガ幅ヨリモ 10 米長キ矩形ノ地所ニ縱横ニ貫通シテ一様ナル幅ノ十字形ノ道路ヲ設ケタルニ道路ノ面積ガ，6000 平方米トナリ，又此地所ノ外側ニ前ト同ジ幅ノ道路ヲ設ケ

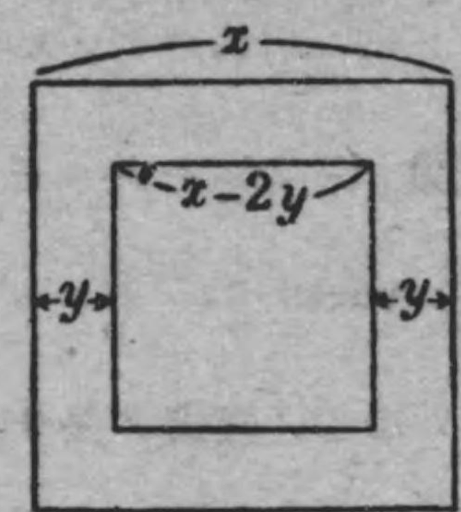
タル＝此道路ノ外周ガ 1300 米トナリシトイフ。道路ノ幅幾米ナルカ。

答 10 米

### 3. 中空方陣ノ問題

**例 291.** 一隊ノ兵士ヲ以テ中空方陣ヲ作ルアリ。若シコレヲ各面 4 列ノ中空方陣ニ直セバソノ外側一邊ノ人數ハ前ノ方陣ノ外側一邊ノ人數ヨリモ 16 人增ストイフ。コノ一隊ノ兵數ハ幾何ナリヤ。

**方針** 一隊ノ兵數ヲ未知數ニ選ンデハ各面ノ列數ノ變化ヤ，外側一邊ノ人數ノ變化ヲ表ハス式ガ得ラレナイカラ，中空方陣ノ問題ハ外側一邊ノ人數及ビ厚サヲ未知數ニ選ビ之ヲ用ヒテ總數ヲ表ハス式ヲ作ル。




【解】初メノ中空方陣ノ外側一邊ノ人數ヲ $x$ 人トシ，厚サヲ $y$ 列トスルト，中空ノ部分ハ一邊ガ $(x-2y)$ 人ナル正方形トナルカラ兵士ノ總數ハ

$x^2-(x-2y)^2$ 人即 $4y(x-y)$ 人……①

後ノ中空方陣ノ外側一邊ノ人數ハ題意ニヨリ $(x+16)$ 人デ厚サハ 4 列ナル故中空ノ部分ハ一邊 $(x+16-4\times2)$ 人ナル正方形トナル。

依テ兵士ノ總數ハ $(x+16)^2-(x+8)^2$ 人 即チ $16(x+12)$ 人……②

①，②ヲ等置シテ次ノ方程式ヲ得ル。

$$4y(x-y)=16(x+12) \cdots\cdots〔\mathrm{I}〕$$

**STOP** 未知數ガ $x$, $y$ ノ二ツニ對シテ方程式ガ一ツシカ得ラレナイカラ $x$, $y$ ガ正ノ整數ナルベキ事ヲ考慮シテ不定方程式ノ解法ニ依ル。尙〔I〕ハ $y$ ニ關シテハ二次，$x$ ニ關シテハ一次ナルコトニ着眼シ，$x$ ヲ表ハス式ヲ導イテ解ク。

**GO** 〔I〕ヨリ　$xy-y^2=4x+48$　∴ $x(y-4)=y^2+48$

$y-4\neq0$ トシテ　$x=\dfrac{y^2+48}{y-4}$……③



**STOP** 分子ガ分母ヨリ高次ナル事ニ着眼シテ分子ヲ分母デ割リ

**GO** $x=\dfrac{y^2+48}{y-4}=y+4+\dfrac{64}{y-4}$……④

$x$ ガ正ノ整數ナルベキ故④ヨリ $y-4$ ハ 64 ノ約數デナケレバナラヌ

∴ $y-4=\pm1,\ \pm2,\ \pm4,\ \pm8,\ \pm16,\ \pm32,\ \pm64$，ノ何レカデアル

**STOP** コレラノ $y$ ノ値ニ對スル $x$ ノ値ヲ求メタル後，題意ニ適スルヤ否ヤヲ吟味シテモヨイガ，$x$ ヤ $y$ ニ就テノ性質ヲ今少シ考慮シテ $y-4$ ノ取リ得ル範圍ヲ縮少スル事ヲ工夫シテ見ル。

**GO** 各面ヲ 4 列ニ直シタ爲ニ外側一邊ノ兵數ガ增シタノデアルカラ初メノ方陣ノ列數 $y$ ハ 4 ヨリ大デナケレバナラヌ。

∴ $y>4$　從ツテ $y-4>0$……⑤

尙中空ナルタメニハ一邊ノ人數 $x$ ハ厚サノ二倍即チ $2y$ ヨリ大デナケレバナラヌ　∴ $x>2y$……⑥

③ヲ⑥ニ代入シテ　$\dfrac{y^2+48}{y-4}>2y$

$y-4>0$ ナル故之ヲ兩邊ニ乘ジテモ不等號ノ向ハ變ラナイ。

∴ $y^2+48>2y^2-8y$

∴ $y^2-8y-48<0$

∴ $(y-12)(y+4)<0$

$y+4>0$　∴ $y-12<0$　∴ $y<12$　∴ $y-4<8$

且④ヨリ $y-4$ ハ 64 ノ約數デナケレバナラヌカラ

$y-4=1$ 又ハ $y-4=2$ 又ハ $y-4=4$

∴ $y=5$ 又ハ $y=6$ 又ハ $y=8$

(イ) $y=5$ ナルトキ ④ヨリ $x=73$，總數 $16(x+12)=1360$

(ロ) $y=6$ ナルトキ ④ヨリ $x=42$ 總數 $16(x+12)=864$

(ハ) $y=8$ ナルトキ ④ヨリ $x=23$ 總數 $16(x+12)=640$

コレラノ値ハ何レモ $x>2y$ ナル故題意ニ適スル。

答 1360人 又ハ 864人 又ハ 640人

**指導綱要** 中空方陣ノ問題ハ外側一邊ノ人數(個數)ヲ $x$ 人，厚サヲ $y$ 列トスルトキ總數ハ $x^2-(x-2y)^2$ デ表ハサレ，$x>2y>0$ ナル條件ガ成立シナケレバナラヌ事ヲ忘レテハナラヌ。

**【試練問題】** 兵卒 360 人ヲ並ベテ中空方陣ヲ作ルニ其ノ仕方幾通リアルカ。

答 6 通リ

# 第三十四章　賣買，賃金問題

## 1. 賣買問題

單價×個數＝總額 又ハ $\dfrac{\text{總額}}{\text{個數}}$＝單價，$\dfrac{\text{總額}}{\text{單價}}$＝個數

ナルコトヲ用ヒテ方程式ヲ作ル。

## 2. 賃金問題

日給×日數＝總賃金 又ハ $\dfrac{\text{總賃金}}{\text{日數}}$＝日給，$\dfrac{\text{總賃金}}{\text{日給}}$＝日數

ナルコトヲ用ヒテ方程式ヲ作ル。

**例 292.** 或人陶器若干個ヲ 23 圓ニテ買ヒ，一個ニツキ 5 錢ノ利ヲ得テ賣リタレドモ 6 個破損シテ廢物トナリタルタメ 56 錢ヲ損セリト云フ。一個何程ニテ買ヒシヤ。

**方針** 一個ノ買價ヲ未知數トシ，更ニ買入レ個數ヲ補助ノ未知數ニ用ヒルト方程式ガ作リ易イ。

**【解】** 一個ノ買價ヲ $x$ 錢トシ，買入個數ヲ $y$ 個トスルト買入總額ハ $xy$ 錢トナル故　$xy=2300$ ……①

一個ニツキ 5 錢ノ利ヲ得テ $(y-6)$ 個ヲ賣リ 56 錢ノ損トナレル故

$(x+5)(y-6)=2300-56$ ……②

**STOP** $y$ ヲ消去シテ $x$ ヲ求メレバ所要ノ買價ガ得ラレルト考ヘテ

**GO** ①ヨリ $x\neq0$ ナル故 $y=\dfrac{2300}{x}$ ……③

③ヲ②ニ代入シテ　$(x+5)\left(\dfrac{2300}{x}-6\right)=2244$

分母ヲ拂ヒ整頓スレバ　$3x^2-13x-5750=0$

$\therefore\quad x=\dfrac{13\pm\sqrt{169+12\times5750}}{6}=\dfrac{13\pm268}{6}$

$x>0$ ナルベキ故　$x=\dfrac{276}{6}=46$

コノ値ハ題意ニ適スル。　　**答** 一個ノ買價 46 錢



**指導練習** ②ヨリ　$xy-6x+5y-30=2300-56$ ……②′

①－②′ヨリ　$6x-5y=26$　$\therefore\ y=\dfrac{6x-26}{5}$　之ヲ①ニ代入シテモヨイ。

**【試練問題】** 或人借地料金 540 圓ヲ以テ若平坪ノ土地ヲ借リ受ケ，其ノ内 1200 坪ヲ自ラ使用シ，其ノ餘ヲ 1 坪ニツキ 12 錢高ク貸シタルニ，賃貸料ト借地料トガ丁度相等シカリシトイフ。借地ノ坪數如何。

**答** 3000 坪

**例 293.** 靴下 1 ダースニ付 20 錢方下落スルトキハ 2 圓 40 錢ニテ 2 足多ク購ヒ得ベシト云フ。1 ダースノ初メノ値段何程ナルカ。

**方針** 求ムルモノハ 1 ダースノ値デアルガ，「2 足多ク購ヒ得ル」條件ニ着眼シテ，一足ノ値ヲ未知數ニ選定シテ方程式ヲ作ル。

**【解】** 初メノ一足ノ値ヲ $x$ 錢トスルト，一打ニツキ 20 錢下落シタトキノ一足ノ價ハ $\left(x-\dfrac{20}{12}\right)$錢トナル。

2 圓 40 錢デ買ヒ得ル足數ハ夫々 $\dfrac{240}{x}$足，$\dfrac{240}{x-\dfrac{20}{12}}$足トナルカラ

題意ニヨリ　$\dfrac{240}{x-\dfrac{20}{12}}=\dfrac{240}{x}+2$ ……①

$\therefore\quad \dfrac{120}{x-\dfrac{5}{3}}-\dfrac{120}{x}=1$

分母ヲ拂ヘバ　$120x-120\left(x-\dfrac{5}{3}\right)=x^2-\dfrac{5}{3}x$

$3x^2-5x-600=0$

$(x-15)(3x+40)=0$

$x>0$ ナルベキ故　$3x+40\neq0$　$\therefore\ x=15$

$x=15$ ハ①ノ分母ヲ 0 ナラシメズ 且題意ニ適スル。
依テ 1 ダースノ値ハ 15錢×12＝180錢

**答** 1 圓 80 錢

**指導總括** 1 ダースノ初メノ値ヲ $x$ 錢トスルト一足ノ値ハ夫々$\dfrac{x}{12}$錢，$\dfrac{x-20}{12}$錢トナル故，方程式ハ $\dfrac{240}{\frac{x-20}{12}}=\dfrac{240}{\frac{x}{12}}+2$ トナル。

【試練問題】 米ヲ 2 圓ダケ買ヒタルニ袋漏レニヨリ途中ニテ 2 瓩ヲ失ヒタルガタメ，結局 3 瓩ニツキ 10 錢方高價ナルモノヲ購ヒタルコトトナレリト云フ。1 瓩ノ相場幾何ナリシカ。

**答** $16\frac{2}{3}$錢

**例 294.** 正方形ノ蔬菜畑ヲ買ヒ入レ且ツ其ノ周圍ニ垣根ヲ作ラントス。面積 3600 坪トスレバ畑及垣根ノ費用ヲ合セテ 18720 圓ヲ要シ，面積 900 坪トスレバ 4860 圓ヲ要ス。畑及垣根ノ費用ヲ合セテ 13100 圓ヲ支拂フトスレバ幾坪ノ畑ヲ購入シ得可キカ。

**方針** 一坪トハ一邊ガ一間ナル正方形ノ面積デアル。所要ノモノハ畑ノ坪數デアルガ，垣根ノ費用ハ周圍ノ長サニ依ツテ定マルカラ，正方形ノ一邊ノ長サヲ未知數トシ，一坪ノ價及ビ垣根一間分ノ費用ヲ補助ノ未知數ニ用ヒテ方程式ヲ作ル。

【解】 購入スベキ正方形ノ畑ノ一邊ノ長サヲ $x$ 間トシ，畑一坪ノ價ヲ $a$ 圓，垣根一間分ノ費用ヲ $b$ 圓トスルト
面積ハ $x^2$ 坪，周圍ノ長サハ $4x$ 間トナル故總費用ハ $ax^2+4bx$ 圓

$$\therefore \quad ax^2+4bx=13100 \cdots\cdots①$$

面積 3600 坪ノトキ一邊ノ長サハ 60 間，周圍ハ 240 間トナル故

$$3600a+240b=18720 \cdots\cdots②$$

面積 900 坪ノトキ $900a+120b=4860 \cdots\cdots③$

**STOP** ②，③ハ $a$，$b$ ニ關シテ一次デアルカラ之ヨリ $a$，$b$ ノ値ヲ求メ①ニ代入スルト $x$ ニ就テノ二次方程式ヲ得ルト考ヘテ



**GO** ②－③×2 ヨリ $1800a=9000$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} a=5 \\ b=3 \end{array}\right\} \cdots\cdots④$$

③ニ代入シテ

④ヲ①ニ代入シテ $5x^2+12x-13100=0$

$$\therefore \quad x=\frac{-6\pm\sqrt{65536}}{5}=\frac{-6\pm256}{5}$$

$x$ ハ一邊ノ長サナル故負ハ適セズ $\therefore$ $x=50$
依テ求ムル面積ハ $50^2$ 坪 即 2500 坪デアル。

**答** 2500 坪

**指導總括** 未知數ノ選定ヲ誤マラナケレバ案外容易ナ問題デアルガ，垣根ノ長サニ對スル考ヘ方ヲ誤ルモノガ多イ。

【試練問題】 或家デ，毎月消費スル木炭代ヲ，1 俵ニツキ 50 錢騰貴シタル後ニ於テモ，騰貴前ト同額ナラシメントセバ，ソノ消費量ヲ 1 俵半ダケ減ズルヲ要シ，又木炭ヲ最初ノ消費量ヨリモ 3 俵半ダケ減ジソノ代リニ瓦斯ヲ 50 立方米併用スルコトトセバ，費用ハ騰貴前ヨリモ 1 圓 50 錢節約シ得ルトイフ。最初コノ家ノ木炭使用量ハ一ケ月幾俵デアツタカ。又木炭 1 俵ノ代價ハ何程デアツタカ。但シ騰貴前ニ於ケル木炭 1 俵ノ價ハ瓦斯 30 立方米ノ價ヨリモ 10 錢安イモノトス。 (長 工)

**答** 7.5 俵，一俵ノ價 2 圓

**例 295.** 邦貨 100 圓ガ米貨 $42\frac{2}{3}$ 弗ニ換算セラルヽトキ 37 圓 50 錢ニテ買入ルル事ヲ得ル米國ノ叢書ヲ購フノニ，邦貨 100 圓ガ米貨 31 弗ニ換算セラルヽトキ，ソノ一部分ヲ購ヒ，邦貨 100 圓ガ米貨 $48\frac{1}{2}$ 弗ニ換算セラルヽトキソノ殘部ヲ購フモ，購入額合セテ 37 圓 50 錢ナルヤウニスルニハ，第一回及ビ第二回ノ購入額ヲ邦貨ニテ各何程トスベキカ。

**方針**　諸君ノ苦手ノ問題デ手ノツカナイ者ガ多イ。此ノ種ノ問題ハ先ヅ毎回ノ邦貨ヲ米貨ニ換算シテ考ヘル事ガ第一歩デアル。

【解】 邦貨 100 圓ガ米貨 $42\frac{2}{3}$ 弗ニ換算セラルルトキ，邦貨 37 圓 50 錢ヲ米貨ニ換算スルト　$42\frac{2}{3}$弗$\times\frac{37.5}{100}=16$ 弗　トナル。

依テコノ叢書ノ定價ハ米貨 16 弗デアル。

今第一回及ビ第二回ノ購入額ヲ邦貨ニテ $x$ 圓及ビ $y$ 圓トスルト

題意ニヨリ合計 37 圓 50 錢ナルベキ故

$$x+y=37.5\cdots\cdots①$$

第一回ノ $x$ 圓ヲ米貨ニ換算スルト　31弗$\times\frac{x}{100}$　即チ　$\frac{31}{100}x$ 弗

第二回ノ $y$ 圓ヲ米貨ニ換算スルト　$48\frac{1}{2}$弗$\times\frac{y}{100}$　即チ　$\frac{97}{200}y$ 弗

コノ和ガ本ノ定價ニ等シクナケレバナラヌカラ

$$\frac{31}{100}x+\frac{97}{200}y=16\cdots\cdots②$$

②ヨリ　　$62x+97y=3200\cdots\cdots②'$

②'－①×62 ヨリ　　$35y=875$

$\therefore$　　$y=25$

①ニ代入シテ　　$x=12.5$

コレラノ値ハ何レモ 37.5 圓ヨリモ小ナル正數ナル故題意ニ適スル。

**答**　第一回 12.5 圓，第二回 25 圓

**[illegible]**　換算ノ概念サヘ確立シテ居レバ容易ニ解決シ得ルノデアルガ換算ヲナシ得ナイ者ノ多イコトハ誠ニ遺憾デアル。

**【試練問題】**（i） 某日邦貨 1 圓ハ佛貨 4.47 法ニ換算セラレシガ其ノ後佛國經濟界ノ變動ノタメ 5.22 法トナリタリ。其間佛國ニ於ケル物價ガ 1 割方騰貴シタルモノトスレバ同國品ヲ本邦ニ輸入スル場合ノ價格ノ增減如何。

（ii） 金 S 圓デ A 米(マイ)ヲ買ヘバ $m$ 瓩買ヘル。又 B 米(マイ)ヲ買ヘバ $n$ 瓩買ヘル。然ラバ此金額ヲ以テ A 米ト B 米トヲ合セテ $l$ 瓩買ヘルヤウニスルニハ各々幾瓩買ヘバヨイカ。又本問題ニ答數ガアル爲ニハ $m$, $n$, $l$ ノ間ニ如何ナル制限ガ必要デアルカ。　　　　(宇農)



**答**　（i） 價格ハ減ズル

（ii） A 米 $\frac{m(l-n)}{m-n}$ 瓩，　B 米 $\frac{n(m-l)}{m-n}$ 瓩

答數アルタメニハ $m>l>n$ 或ハ $m<l<n$ ナルヲ要スル。

> **例 296.** 甲乙二人合セテ 44 日作業シタル賃金合計 73 圓 20 錢ニシテ甲ハ乙ヨリ 13 圓 20 錢多ク受取リタリ。若シ甲乙ノ一日ノ賃金ヲ取リ換ヘテ計算スレバ兩人ノ受取ル金額ハ等シクナルト云フ。各ノ作業日數及ビ一日ノ賃金何程ナルカ。

**方針**　各ノ作業日數及ビ一日ノ賃金ヲ未知數トシテ容易ニ方程式ヲ作リ得ル。

【解】 甲ノ作業日數ヲ $x$ 日，一日ノ賃金ヲ $a$ 圓トシ

乙ノ作業日數ヲ $y$ 日，一日ノ賃金ヲ $b$ 圓トスレバ

日數合計ヨリ　　$x+y=44\cdots\cdots①$

賃金合計ヨリ　　$ax+by=73.2\cdots\cdots②$

甲乙ノ差ヨリ　　$ax-by=13.2\cdots\cdots③$

一日ノ賃金ヲ取リ換ヘテ計算スレバ兩人ノ受取金額相等シキ故

$$ay=bx\cdots\cdots④$$

**STOP**　コヽマデハ容易デアルガ，本問解決ノ分岐點ハコレヲ如何ニ解クカノ方針ヲ定メル點ニアル。②ト③トノ未知項ガ $ax$ ト $by$ ノミナル事ニ着眼シテ先ヅ $ax$ ト $by$ トヲ決定スル。

**GO**　②＋③ヨリ　　$2ax=86.4$　　$\therefore$　$ax=43.2\cdots\cdots⑤$

②－③ヨリ　　$2by=60$　　$\therefore$　$by=30\cdots\cdots⑥$

**STOP**　⑤，⑥ヨリ $a$, $b$ ヲ $x$, $y$ デ表ハシテ④ニ代入スルト $x$, $y$ ノミノ方程式ヲ導キ得ルト考ヘテ

**GO**　⑤，⑥ヨリ　　$a=\frac{43.2}{x}$，$b=\frac{30}{y}\cdots\cdots⑦$

⑦ヲ④ニ代入　　$\frac{43.2y}{x}=\frac{30x}{y}$

$xy \neq 0$ $\quad\therefore\quad 432y^2=300x^2$ ……………… ⑧

$\therefore\quad y^2=\frac{100}{144}x^2 \qquad \therefore\quad y=\pm\frac{5}{6}x$

題意ニヨリ $x$, $y$ ハ作業日數ナル故 $x>0$, $y>0$

$\therefore\quad y=-\frac{5}{6}x$ ハ題意ニ適セズ $\quad\therefore\quad y=\frac{5}{6}x$ …⑨

⑨ヲ①ニ代入シテ $\quad \frac{11}{6}x=44 \quad\therefore\quad x=24 \quad\therefore\quad y=20$

⑦ニ代入シテ $\quad a=\frac{43.2}{24}=1.8 \qquad b=\frac{30}{20}=1.5$

コレラノ値ハ何レモ題意ニ適スル。

答 $\begin{cases} \text{甲, 作業日數 24 日 一日ノ賃金 1 圓 80 錢} \\ \text{乙, 作業日數 20 日 一日ノ賃金 1 圓 50 錢} \end{cases}$

【注意】 折角⑧ヲ導キ乍ラ之ヨリ⑨ヲ導キ得ナイ者ガアル。

【試練問題】 甲乙二人ノ職工ヲ相異ナル日給ニテ或日數間使役セシニ, 甲ハ皆勤ニツキ之ニ 16 圓ヲ拂ヒ, 乙ハ其ノ日數ノ内 5 日缺勤シタルニツキ之ニ 9 圓ヲ拂ヘリ。若シ乙ハ皆勤シ甲ハ 15 日缺勤シタリトセバ, 乙ハ甲ヨリ 8 圓多ク得ベシト云フ。使役日數並ニ甲, 乙ノ日給各幾何ナルカ。

答 使役日數 20 日, 甲ノ日給 80 錢, 乙 60 錢

**例 297.** 鐵道ニテハ, 旅客ノ手荷物若干斤マデハ無賃ニテ託送ス。此ノ一定斤量ヲ超過スル時ニハ, 超過斤量ニ對シテ一定ノ割合ニテ運賃ヲ請求スルモノトス。甲, 乙二人ノ旅客手荷物合セテ 195 斤ニシテ, 其運賃甲ハ 69 錢ヲ, 乙ハ 96錢ヲ支拂ヘリ。若シ全部ノ手荷物ガ一人ノモノナラバ運賃 3 圓 75 錢ヲ要スベシト云フ。手荷物幾斤マデ無賃託送シ得ルカ。

【方針】 所要ノ斤數ヲ未知數トシタダケデハ方程式ガ作リ難イカラ超過斤量一斤ニ對スル運賃ヲ補助ノ未知數ニ用ヒル。



【解】 無賃ニテ託送シ得ル手荷物ヲ $x$ 斤マデトシ, $x$ 斤ヲ超過セル量ニ對スル運賃ヲ一斤ニツキ $y$ 錢トスルト

二人ノ手荷物トシテ託スルトキハ 195 斤ノ内 $2x$ 斤ダケガ無賃ニナリ $(195-2x)$ 斤ニ對スル運賃ガ 69 錢+96 錢ニ當ル故

$(195-2x)y=69+96$ ……………… ①

一人ノモノトシテ託スルト $x$ 斤ノミガ無賃ニナルカラ

$(195-x)y=375$ ……………… ③

①ノ左邊ハ題意ニヨリ零ナラザル故

②÷①ヨリ $\quad \frac{195-x}{195-2x}=\frac{375}{165} \quad\therefore\quad \frac{195-x}{195-2x}=\frac{25}{11}$

分母ヲ拂ツテ整頓スレバ $\quad 39x=195\times14 \quad\therefore\quad x=70$

コノ値ニ對シテ $195-2x$, $195-x$ ハ何レモ正ナル故題意ニ適スル。

答 70 斤マデ

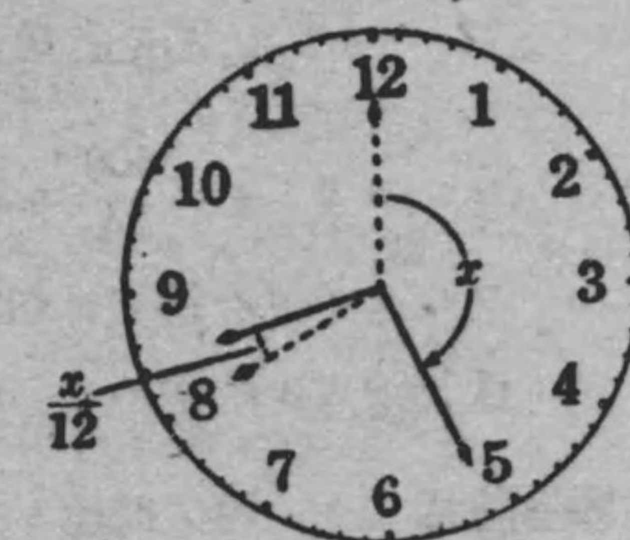
【試練問題】 一ケ年働カバ給料トシテ金 98 圓ト外ニ衣服一着トヲ與フル約束ニテ下婢ヲ雇ヒ入レシニ 7 ケ月後ニ金 53 圓ト衣服一着トヲ與ヘテ解雇セリ。衣服一着ノ代價何程ナルカ。

答 10 圓

## 第三十五章 時計, 寒暖計ノ問題

### 1. 時計ノ問題

#### (イ) 時計ノ文字盤上ニ於ケル兩針ノ位置ニ關スル問題




文字盤上ニ於ケル目盛一分劃ヲ單位トシテ考ヘ, $\begin{cases}\text{分針ガ 60 分劃進ム間ニ} \\ \text{時針ハ 5 分劃進ミ}\end{cases}$

$\begin{cases}\text{秒針ガ 60 分劃進ム間ニ} \\ \text{分針ハ 1 分劃進ム}\end{cases}$

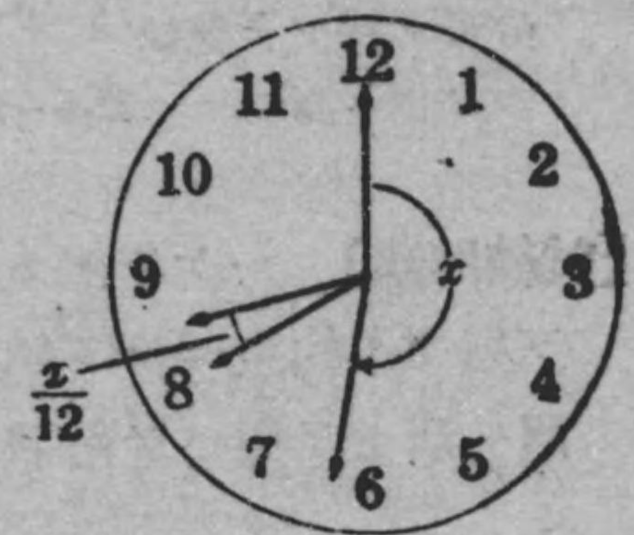
從ツテ $\begin{cases}\text{分針ガ } x \text{ 分劃進ム間ニハ} \\ \text{時針ハ } \frac{x}{12} \text{ 分劃進ミ}\end{cases}$

$\begin{cases}\text{秒針ガ } x \text{ 分劃進ム間ニハ} \\ \text{分針ハ } \frac{x}{60} \text{ 分劃進ム。}\end{cases}$ コノ關係ヲ用ヒテ方程式ヲ作ル。

**例 298.** 8 時ト 9 時トノ間ニ於テ時計ノ兩針ガ互ニ 60 度ノ角度ヲ示ス時刻ヲ求ム。

**方針** 時計ノ文字盤ヲ畫イテ考ヘ，丁度 8 時ノ時ヨリ，所要ノ時刻マデニ兩針ノ動イタ目盛ノ數（一分劃ヲ單位トシテ）ヲ表ハス式ヲ考ヘテ方程式ヲ作ル。尙兩針ガ互ニ 60° ノ角度ヲナス時刻ガ二度アル故，二ツノ場合ヲ考ヘル。

【解】（イ） 8 時以後ニ於テ兩針ガ初メテ互ニ 60° ノ角ヲナス時刻ヲ 8 時 $x$ 分トスルト丁度 8 時ノトキヨリ其時刻マデニ分針ハ $x$ 分劃動キ，時針ハ $\frac{x}{12}$ 分劃動ク故，時針ハ $(40+\frac{x}{12})$ 分ノ位置ニアリ。




兩針ノナス角 60° ハ 10 分劃ニ當ル故次ノ方程式ヲ得ル。

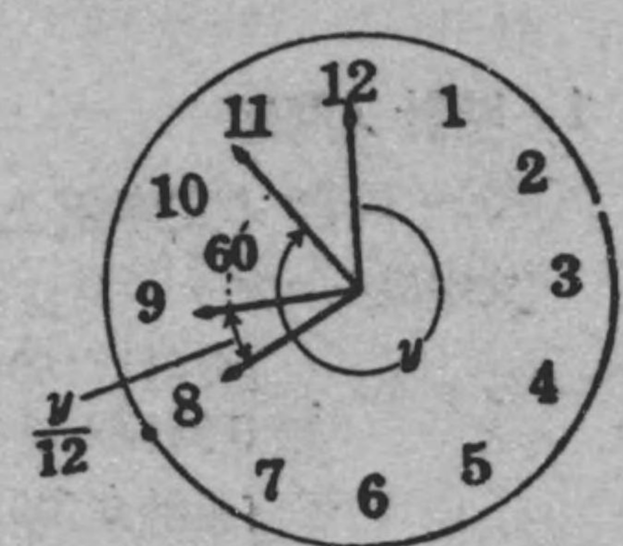
$$x+10=40+\frac{x}{12}$$

コレヨリ　$\frac{11}{12}x=30$　　$\therefore\ x=\frac{360}{11}=32\frac{8}{11}$　（分）

（ロ） 再ビ兩針ガ 60° ノ角ヲナス時刻ヲ 8 時 $y$ 分トスルト

コノトキ分針ハ $y$ 分ノ位置ニアリ

時針ハ $(40+\frac{y}{12})$ 分ノ位置ニアリ




ソノ差ガ 10 分劃ニ等シイカラ

$$y=(40+\frac{y}{12})+10$$

コレヨリ　$y=\frac{600}{11}=54\frac{6}{11}$

コレラノ値ハ何レモ題意ニ適スル。

依テ求ムル時刻ハ　8 時 $32\frac{8}{11}$ 分 ト 8 時 $54\frac{6}{11}$ 分……**答**

**[illegible]** コノ種ノ問題ハ丁度 $n$ 時（コノ問題デハ丁度 8 時）ノトキノ兩針ノ位置ト，所要ノ時刻ニ於ケル兩針ノ位置トヲ圖示シテ考ヘル事ガ解決ノ急所デアル。

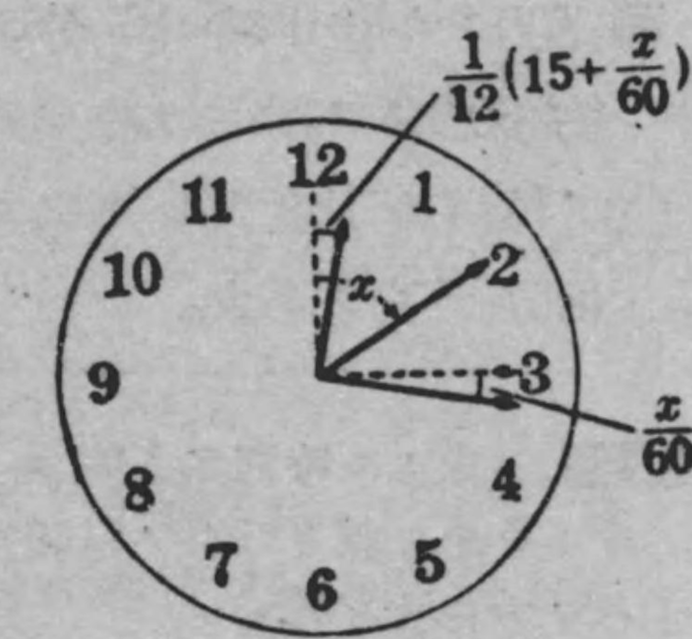


**【試練問題】** 五時ト六時トノ間ニ於テ時計ノ時針ト分針トガ直角ヲナス時刻ヲ問フ。

**答** 5 時 $10\frac{10}{11}$ 分ト　5 時 $43\frac{7}{11}$ 分

**例 299.** 時計ノ時分秒三針ヲ同ジ軸ニ裝置セルモノアリ。コノ三針ハ正午ニ於テ相重ナル。然ラバ零時十五分ノ後ニ於テ初メテ秒針ガ時分兩針間ノ角ヲ二等分スベキ時刻ヲ求メヨ。

**方針** 秒針，分針，時針ノ廻轉ノ速サノ比ハ $60:1:\frac{1}{12}$ ナルコトヲ用ヒテ方程式ヲ作ル。




【解】 求ムル時刻ヲ 0 時 15 分 $x$ 秒トスルト 0 時 15 分以後ニ秒針ノ動イタ目盛ノ數ハ $x$ 分劃デ，ソノ間ニ分針ハ $\frac{x}{60}$ 分劃動クカラ，

分針ハ $(15+\frac{x}{60})$ 分ノ位置ニアリ。

分針ガ $(15+\frac{x}{60})$ 分ノ位置ニアルトキ，時針ハ $\frac{1}{12}(15+\frac{x}{60})$ 分ノ位置ニアル。

從ッテ　分針ト秒針トノ夾ム角ハ $\{(15+\frac{x}{60})-x\}$ 分劃デ

秒針ト時針トノ夾ム角ハ $\{x-\frac{1}{12}(15+\frac{x}{60})\}$ 分劃デアル。

秒針ガ時分兩針間ノ角ヲ二等分スルタメニハコノ二角ガ相等シクナケレバナラヌ。　$\therefore\ (15+\frac{x}{60})-x=x-\frac{1}{12}(15+\frac{x}{60})$

$$\therefore\ \frac{13}{12}(15+\frac{x}{60})=2x$$

兩邊×12　　$24x-\frac{13}{60}x=195$

$$\therefore\ x=195\times\frac{60}{1427}=8.19\cdots\cdots$$

コノ値ハ題意ニ適スル　　答　0時15分8.2秒弱

[illegible]　丁度12ノ位置カラ各針ガ動イタ目盛ノ數ヲ考ヘテ方程式ヲ導クコトハコノ問題ノ樣ニ秒針ガ與ヘラレタ場合モ同樣デアル。

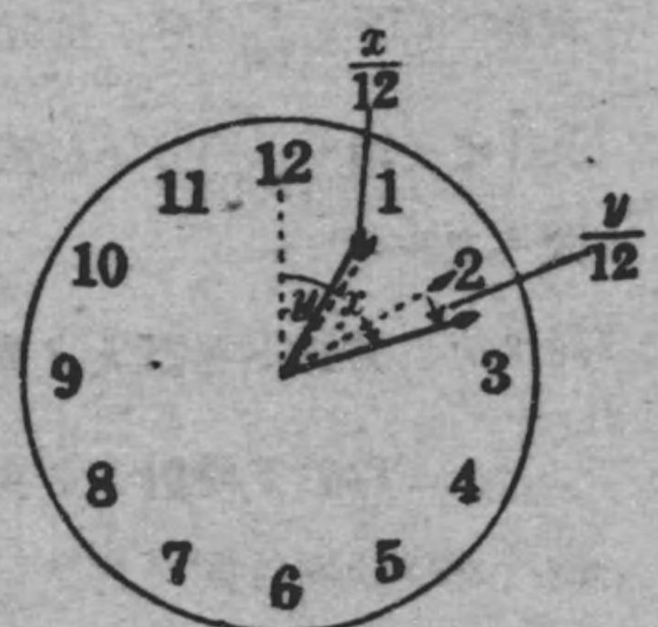
【試練問題】　7時ト8時トノ間ニ於テ時計ノ兩針ガ6ノ字ヲ中央ニハサム時刻ヲ問フ。（東商專）

答　7時23分$4\frac{8}{13}$秒

**例 300.** 午後1時10分頃始業ノ鐘ガ鳴ツタトキ時計ヲ見，約50分ノ授業ガ終ツテ再ビ時計ヲ見タノニ長針ト短針トノ位置ガ丁度入レ換ツテ居タ。始メ時計ヲ見タ時刻ハ1時何分デアツタカ。

[illegible]　求ムル時刻ヲ1時$x$分，兩針ノ位置ノ入換ツタ時刻ヲ2時$y$分トシテ矢張リ12ノ位置カラ各針ノ動イタ目盛ノ數ヲ表ハス式ヲ考ヘテ方程式ヲ作ル。

【解】始メテ時計ヲ見タ時刻ヲ1時$x$分トシ，兩針ノ位置ノ入レ換ツタ時刻ヲ2時$y$分トスル。




1時$x$分ノトキ

$$\begin{cases}\text{分針ハ }x\text{ 分ノ位置ニアリ}\cdots\cdots\text{①}\\ \text{時針ハ }(5+\frac{x}{12})\text{分ノ位置ニアリ}\cdots\text{②}\end{cases}$$

2時$y$分ノトキ

$$\begin{cases}\text{分針ハ }y\text{ 分ノ位置ニアリ}\cdots\cdots\text{③}\\ \text{時針ハ }(10+\frac{y}{12})\text{分ノ位置ニアリ}\cdots\text{④}\end{cases}$$

題意ニヨリ兩針ノ位置ガ入レ換ツタノデアルカラ①ト④；②ト③トハ夫々相等シクナケレバナラヌ。



$$\therefore\ \begin{cases}x=10+\frac{y}{12}\cdots\cdots\cdots\text{〔I〕}\\ y=5+\frac{x}{12}\cdots\cdots\cdots\text{〔II〕}\end{cases}$$

STOP　$x$ヲ求ムレバ所要ノ時刻ヲ得ルノデアルカラ，$y$ヲ消去スル方針デ

GO　〔II〕ヲ〔I〕ニ代入スルト　$x=10+\frac{1}{12}(5+\frac{x}{12})$

$$\therefore\ 12x=120+5+\frac{x}{12}$$

$$\therefore\ \frac{143}{12}x=125\qquad\therefore\ x=\frac{125\times12}{143}=10\frac{70}{143}$$

コノ値ハ題意ニ適スル。　　答　1時$10\frac{70}{143}$分

[illegible]　2時$y$分ヲ用ヒナイデ次ノ樣ニ考ヘテモヨイ。

始メノ時刻ヲ1時$x$分トスルト2時以後分針ガ$(5+\frac{x}{12})$分割動ク間ニ時針ハ$(x-10)$分割動イタコトニナル。$\therefore\ 5+\frac{x}{12}=12(x-10)$　コレヲ解ケバヨイ

【試練問題】　現在時計ハ五時ト六時トノ間ノ或時刻ヲ示ス。九時ト十時トノ間ニ於テ短針ハ現在ノ長針ノ位置ヲ占メ，長針ハ現在ノ短針ノ位置ヲ占ムル瞬間アリ。現在時計ノ示ス時刻ヲ求ム　但シ四捨五入法ニヨリ秒位マデ求メヨ。

答　5時47分25秒弱

### （ロ）不正確ナ時計ニ關スル問題

進ム時計ヤ遲レル時計ニ關スル問題ハ文字盤上ニ於ケル目盛ニヨツテハ解決出來ナイノデ，算術ニ於ケル正比例ノ考ヘ方デ解ク。

例ヘバ一晝夜ニ5分進ム時計ハ二晝夜ニハ10分進ミ，正シイ時計トノ速サ（時計ノ針ノ廻轉ノ速サ）ノ比ハ$24\frac{5}{60}:24$デアル。

**例 301.** 一日ニ十分遲レル時計ヲ土曜日ノ正午ニ正シイ時刻ニ合セテオケバ，次ノ月曜日ノ朝，此時計ガ八時ヲ示ス時ハ，正シイ時刻ハ何時何分カ。

**方針** 1. コノ時計ト正シイ時計トノ針ノ廻轉ノ速サノ比ヲ考ヘテ解ク

【解】 題意ニヨリコノ時計ハ一日ニ十分遅レルカラ

正シイ時間ガ 24 時間刻ム間ニコノ時計ハ $23\frac{50}{60}$ 時間刻ム。土曜日ノ正午カラ月曜日ノ朝コノ時計ガ八時ヲ示ス時マデニ

コノ時計ハ (24+12+8) 時間 即チ 44 時間刻ムカラ，ソノ間ニ正シイ時計ガ $x$ 時間刻ンダモノトスルト次ノ比例式ガ成立スル。

$$23\frac{5}{6} : 24 = 44 : x$$

$$\therefore \quad x = \frac{24\times 44}{23\frac{5}{6}} = \frac{24\times 44\times 6}{143} = 44\frac{44}{143}\ (\text{時間})$$

$$\frac{44}{143}\text{時間} = 60\text{分}\times\frac{44}{143} = 18\frac{6}{13}\text{分}$$

依テ正シイ時刻ハ午前 8 時 $18\frac{6}{13}$ 分デアル……■

**方針** 2. 正シイ時計トノ時間ノ差ノミヲ考ヘテ比例式ヲ作ル。

【解】 コノ時計ハ一日ニ十分遅レルカラ，コノ時計ガ $23\frac{50}{60}$ 時間刻ム間ニ正シイ時計ヨリ 10 分遅レル筈デアル。月曜日ノ朝コノ時計ガ八時ヲ示ス時マデニコノ時計ハ (24+12+8) 時間刻ンダコトニナルカラソノ時刻ニ正シイ時計ニ比ベテ $x$ 分遅レテ居ルモノトスルト

$$23\frac{50}{60} : 44 = 10 : x$$

コレヨリ　$$x = \frac{440}{23\frac{5}{6}} = \frac{440\times 6}{143} = 18\frac{6}{13}$$

依テ正シイ時刻ハ午前 8 時 $18\frac{6}{13}$ 分デアル……■

**[illegible]** 解 2. ノ方ガ計算ガ簡單デアルガ，コノ場合ニ 44 時間ヲ正シイ時計ノ 44 時間ト混同シテ $24:10=44:x$ ヨリ $x=\frac{440}{24}=18\frac{1}{3}$ ヲ求メ，8 時 $18\frac{1}{3}$ 分ヲ答トスル誤リガ多イ。倘折角正シク解キ乍ラ答ヲ「約 8 時 18 分」トスルモノガアルガ，コノ問題ノ樣ニ時間ノ僅カノ誤差ヲ考ヘルベキ問題ニ於テ近似値ヲ答トスルノハヨクナイ。



【試錬問題】 一晝夜ニ 10 分進ム時計ヲ或ル日ノ正午ニ正シキ時刻ニ合セオキタリトスレバ，此時計ガ翌日ノ午後 10 時ヲ示ストキ正シキ時刻ハ何時ナルカ。

■ 午後 9 時 $45\frac{27}{29}$ 分

**例 302.** *柱時計ヲ晩ノ 9 時 30 分ノ時報ニ合セ置キ翌朝見ルト柱時計モ懐中時計モ 7 時ヲ指シテ居タ。出勤シテ懐中時計ガ正午ノ時報ニ丁度合ツテ居ルノヲ確カメ，歸リテ見レバ柱時計ハ 4 時 30 分ヲ，懐中時計ハ 4 時 25 分ヲ指シテ居ル。此時ノ正シイ時刻ヲ求メヨ。但シ時報ハ正シイトシ分未滿ハ分數デ答ヘヨ。

**方針** 柱時計，懐中時計，正シイ時計ノ三ツニ就テ考ヘナケレバナラヌノデ，一寸手ノツケ難イ問題デアルカラ，先ヅ相互ノ關係ヲ表示シテ考ヘル。

【解】 題意ヲ表示スルト次ノ樣ニナル。

| | 晩ノ時報 | | 翌朝 | | 正午 | | 歸宅ノ時 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 柱 | 9 時30分 | ←7時間半→ | 7 時 | ←7時間半→ | | | 4 時30分 |
| 懐 | | | 7 時 | | 12時 | | 4 時25分 |
| 正 | 9 時30分 | ←14時間半→ | | | 12時 | ←$x$→ | ? 時 |

先ヅ柱時計ト懐中時計トヲ比較スルト，朝見タトキハ共ニ 7 時ヲ指シテ居タノニ，歸宅ノトキハ柱時計ハ 4 時 30 分ヲ，懐中時計ハ 4 時 25 分ヲ指シテ居タカラ，柱時計ガ 9 時間 30 分（朝七時カラ午後四時半マデ）刻ム間ニ懐中時計ハ 9 時間 25 分刻ム。シカルニ前晩九時半ノ時報カラ，朝七時ヲ指スマデニ柱時計ハ丁度 9 時間 30 分刻ンデ居ルカラ，其間ニ懐中時計ハ 9 時間 25 分刻ンダ筈デアル。

依テ 9 時半ノ時報ノトキ，懐中時計ハ 9 時 35 分ヲ指シテキタコトガワカル。

次ニ懐中時計ト正シイ時計トヲ比較スルト前晩ノ 9 時半ノ時報ノトキ

5分進ンデキタ懐中時計ガ翌日ノ正午ニハ丁度合ツテキタカラ，

**懐中時計ガ $14\frac{25}{60}$ 時間刻ム間ニ正シイ時計ハ $14\frac{1}{2}$ 時間刻ム**

依テ　正午カラ，歸宅ノ時(懐中時計ガ午後4時 25分ヲ示ス時刻)マデニ**正シイ時計ガ $x$ 時間刻ンダモノトスル**ト

$$14\frac{25}{60} : 14\frac{1}{2} = 4\frac{25}{60} : x \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\therefore \quad x = \frac{14\frac{1}{2} \times 4\frac{5}{12}}{14\frac{5}{12}} = \frac{1537}{346} = 4\frac{153}{346}(\text{時間})$$

$$\frac{153}{346}\text{時間} = 60 \times \frac{153}{346}\text{分} = 26\frac{92}{173}\text{分}$$

依テ　　**正シイ時刻ハ午後4時 $26\frac{92}{173}$ 分 デアル**…………答

[illegible]　比例式①ノ代リニ，懐中時計ト正シイ時計トノ時間ノ差ノミヲ考ヘテ比例式ヲ導イテ見ル。

**懐中時計ガ** 14 時間 25 分 (前晩ノ時報カラ翌日ノ正午マデ) 刻ム間ニ正シイ時計ハ 14 時間 30 分刻ムカラ，**懐中時計ガ 14 時間 25 分刻ム間ニ正シイ時計ヨリ5分遲レル**筈デアル。依テ正午カラ，歸宅ノ時マデニ**正シイ時計ヨリ $x$ 分遲レタモノトスル**ト

$$14\frac{25}{60} : 4\frac{25}{60} = 5 : x$$

コレヨリ　$$x = \frac{4\frac{25}{60} \times 5}{14\frac{25}{60}} = 1\frac{92}{173}(\text{分})$$

依テ正シイ時刻ハ午後 4 時 25 分 $+1\frac{92}{173}$ 分 $=4$ 時 $26\frac{92}{173}$ 分 答

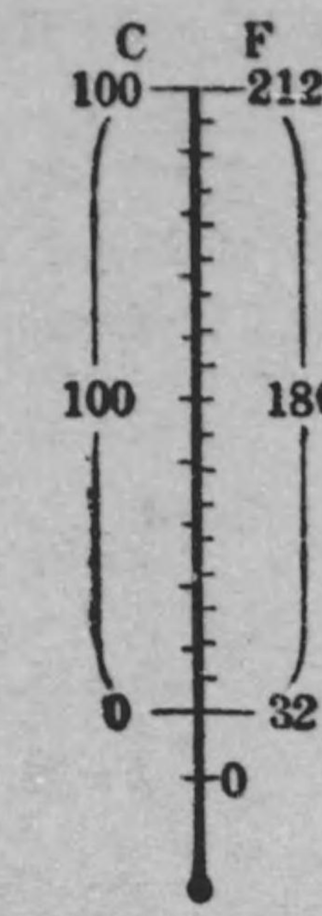
【評】 時計ガ三ツアルノデドノ時計ニツイテノ時間ヲ考ヘテ居ルノカ，又ドノ時計ニ比ベテ何分進ムカ遲レルカヲ明瞭ニ書キ表ハスコトガ大切デアル。

**【試練問題】** 甲ナル時計ハ 23 時間ニ 6 分進ミ，乙ナル時計ハ 20 時間ニ 3 分後ル，或ル日ノ正午ニ双方ヲ正時ニ合セ置カバ翌日午前中ニ於テ甲ガ 10 時ヲ指ストキ乙ハ何時ヲ指スカ。

答　9時 51分



## 2. 寒暖計ノ問題




攝氏 (C) ト華氏 (F) トノ目盛ノ關係ヲ明確ニ知ツテ置クコトガ解決ノ根本デアル。即チ

**攝氏 0°** (氷點) ハ**華氏 32°** ニ當リ

**攝氏 100°** (沸騰點) ハ**華氏 212°** ニ當ルカラ

目盛ハ攝氏 100 ニ對シ華氏 180

即チ **攝氏 5 ニ對シテ華氏 9** ノ割合デアル。

依テ **攝氏 $x°$** ハ**華氏ニ直スト** $\left(\frac{9}{5}x+32\right)°$

**華氏 $y°$** ハ**攝氏ニ直スト** $\frac{5}{9}(y-32)°$ ニナル

> **例 303.** 或日ノ氣溫ヲ檢セシニ攝氏5度ヨリモ高ク，華氏ノ示度ハ攝氏ノ示度ノ整數倍ニシテ，兩者ノ示度モ亦整數ナリキト云フ。氣溫ハ攝氏何度ナリシカ。

方針　求ムル氣溫ヲ攝氏 $x$ 度トシ，之ヲ華氏ニ直シタ式ヲ考ヘテ方程式ヲ作ル。

**【解】** 求ムル氣溫ヲ**攝氏 $x$ 度**トスルト**華氏デハ** $(\frac{9}{5}x+32)$ 度デアル

題意ニヨリ　　$x>5$…………………………………①

華氏ノ示度ハ攝氏ノ示度ノ整數倍ナル故

$$\frac{9}{5}x+32=mx \ [m\text{ハ整數}]\cdots\cdots②$$

又　　$x$ 及ビ $\frac{9}{5}x+32$ ハ共ニ整數 …③

STUP　未知數ガ $x$，$m$ ノ二ツニ對シテ方程式ガ②ノミデアルカラ，①及ビ③ヲ考慮シテ不定方程式ノ解法ニ依ル。

GO　③ヨリ $\frac{9}{5}x+32$ ガ整數デ 5 ト 9 トハ互ニ素デアルカラ，$x$ ハ 5 ノ倍數デナケレバナラヌ。

依テ　　$x=5k$ ($k$ ハ整數)…………………④

④ヲ②＝代入スレバ　$9k+32=5mk$

$\therefore$　$k(5m-9)=32$ ……………⑤

④ヲ①＝代入シテ　$5k>5$　$\therefore$　$k>1$

且 $k$ 及ビ $5m-9$ ハ共＝整數デ⑤ヨリ其積ガ 32 ナル故

$k=2$, $5m-9=16$ ノトキ $m=5$, ④ヨリ $x=10$

$k=4$, $5m-9=8$ ノトキ $m=\frac{17}{5}$ ＋整數ナル故適セズ

$k=8$, $5m-9=4$ ノトキ $m=\frac{13}{5}$ ＋整數ナル故適セズ

$k=16$, $5m-9=2$ ノトキ $m=\frac{11}{5}$ ＋整數ナル故適セズ

$k=32$, $5m-9=1$ ノトキ $m=2$, ④ヨリ $x=160$

依テ ①, ②, ③ヲ同時＝滿足スル $x$ ノ整數値ハ 10 ト 160 トノ二ツアル。攝氏 10 度ハ氣温トシテ適スルガ，攝氏 160 度ハ氣温トシテハ適シナイ。依テ求ムル氣温ハ攝氏 10 度デアル。

■ 攝氏 10 度

[illegible] 折角正シク解キ乍ラ攝氏160度ヲモ答トスル非常識ナモノガアル。

【試練問題】 攝氏華氏兩様ノ度盛＝テ同ジ度數ヲ有スル溫度ハ何度ナルカ。

---

■ 零下 40 度

## 鍛錬問題十八

201. 三位ノ數アリ。其ノ數字ハ等差級數ヲナシ，其ノ數字ノ和＝テ之ヲ除スレバ商ハ 15 トナル。又之＝ 396 ヲ加フレバ數位轉倒ストイフ。原數ヲ求メヨ。

202. 三ツノ數字ヨリ成ル自然數アリ。左ノ二ツノ數字ノ表ハス數ノ和ハ右ノ端ノ數字ノ表ハス數＝等シク，且ツ原數ハ 9 ＝テ割リ切レ其商モ亦 9 ＝テ割リ切レルト云フ，原數ヲ求ム。



203. 六桁ノ整數アリ。ソノ左端ノ數字ヲ右端＝移ストキハ原數ノ三倍トナルトイフ，原數如何。　（五　高）

204.* 七進法＝テ表ハサレタル三位ノ數アリ。コレヲ十一進法＝テアラハセバ亦三位ノ數トナリテ，前ノモノトハ全ク逆ノ順序＝アル數トナルトイフ。コノ數ハ十進法＝テ表ハセバ如何ナル數ナルカ。　（[illegible]　高）

205. $\frac{4}{7}$ ＝等シイ分數ガアル。其分母ト分子トハ共＝二桁ノ數デ且ツ其ノ數字ノ順序ガ互＝反對＝ナツテ居ル。コノ分數ヲ求ム。　（長　商）

206. $a+b\sqrt{5}$ ガ $1+\sqrt{5}$ ト $16+8\sqrt{5}$ トノ比例中項ナルトキ $a$, $b$ ノ有理數値ヲ求ム。

207. 二數ノ和＝其ノ大ナル數ヲ乘ズレバ 144 トナリ，大ナル數ヨリ小ナル數ヲ減ジ之＝小ナル數ヲ乘ズレバ 14 トナル。各數ヲ求ム。　（製工，霽商）

208. 甲乙丙三人射的ヲナシタル＝，甲ハ 9 發中 5 發，乙ハ 3 發中 2 發，丙ハ 5 發中 4 發ノ割合＝テ的中シ，其ノ的中セザリシ數ハ丙ハ乙ノ $\frac{3}{7}$，乙ハ甲ノ $\frac{7}{8}$ ＝等シク的中數ノ合計ハ 36 發ナリシトイフ。各自ノ發射數如何。

209.* 林檎，柿，梨合セテ 100 個＝充タザル果物アリ。甲乙丙三人ガ各一種ヲ選ビテソノ全部ヲ取リタル＝，甲ノ取リタル數ハ林檎ノ個數ノ $\frac{3}{5}$ ヨリモ 7 個多ク，乙ノ取リタル數ハ柿ノ個數ノ $\frac{5}{7}$ ヨリモ 3 個多シトイフ。甲乙丙ハ各ドノ果物ヲ幾個取リタルカ。　（海兵. 機. 經）

210. 或ル會合ノ費用ヲ出席者カラ徵集スルノ＝，一人カラ 4 圓 50 錢ヅツ集メルトスレバ 46 圓不足シ，5 圓ヅツ集メルトスレ

バ最後ノ一人ダケハ5圓未滿デヨイコトニナルトイフ。出席者ハ幾人デアルカ。（廣 高）

211. 或原稿用紙ノ縱ノ割リヲ 3 行減ジ，ソノ代リニ橫ノ割リヲ 3 行增シテモ目ノ數ニハ變化ガナカツタ。最初ノ割リ方ヲ改メ，縱カ橫カノ一方カラ若干行ヲ減ジコレト同數ノ行數ヲ他ニ增シテ目ノ數ヲ 10 ダケ減ジタイ。何行ノ增減ヲシタラヨイカ。但シ其ノ增減ノ行數ハ成ルベク少イノガ好都合デアル。（廣 師）

212. 東西ニ走レル直線狀ノ道路ノ兩側ニ ソレゾレ等間隔ニ樹木ヲ植エシニ，南側ノ最初及ビ 101 本目ハソレゾレ北側ノ 32 本目及ビ 212 本目ノ正面ニアリトイフ。然ラバ此ノ間ニアリテ正面ニ向キ合ヘルモノ尙ホ幾組アリヤ，但シ樹木ハ兩側トモ東ヨリ數ヘシモノトス。

213. 或人金若干ヲ以テ生糸若干斤ヲ仕入レ，ソノ後相場百斤ニツキ 25 圓低落セルヲ以テ半數ヲ賣却シ，ソノ後最初ノ仕入値ヨリ 78 圓騰貴セルヲ以テ 500 斤ヲ殘シ，手持全部ヲ賣却シ，結局 2790 圓剩餘金ヲ生ジタリトイフ。最初ノ仕入數量如何。

214. 或金高ニテ穀物若干瓩ヲ購ヒタリ。若シ此ノ金高ニテ 5 瓩多ク買ヒ得タリシナラバ 1 瓩ニ付キ 5 錢低廉ニナリ，又 3 瓩少ナカリシナラバ 1 瓩ニ付キ 5 錢高價トナルベシト云フ。最初ノ金高ヲ問フ。（東商豫）

215. 資金若干圓ヲ以テ吳服若干反ヲ仕入レントシタル商人アリ。一反ニツキ 9 圓ノ上等品ヲ仕入レンニハ 13 圓不足スルコトヲ知リタルタメ一反ニツキ 7 圓ノ普通品ヲ仕入レタリ。但シコノ資金ニテハ普通品ニテモナホ一反多クハ仕入レ得ザリシトイフ資金及ビ反數ヲ求メヨ。

216. 或人每日出勤スルニ，往路ハ自動車又ハ人力車ノ何レカニ乘リ，歸路ハ步行スルコトヽセリ。月末ニ，出勤日數 27 日分ノ



（出勤ノタメノ）乘物費トシテ，合計 14 圓 50 錢ヲ支拂ヘリ。今假リニ，自動車ニ乘レル日ニハ人力車ニテ出勤シ，又人力車ニ乘レル日ニハ自動車ニテ出勤セルモノトスレバ，自動車屋ヘハ 10 圓 20 錢ヲ，車屋ヘハ 5 圓ヲ支拂フベキ筈ナリシトイフ。自動車ニテ出勤セル日數及ビ一回ノ自動車賃ヲ求ム。

217. 時計ヲ見タルニ時針ハ 11 ト 12 トノ間ニアリテ， 分針ハ 12 ト 1 トノ間ニアリシガ，若干時ノ後兩針ガ丁度共ノ位置ヲ交換スルニ至レリト云フ。初メノ時刻ヲ問フ。（岐 農）

218. 今ノ時刻ハ 10 時ト 11 時トノ間ニシテ今ヨリ 6 分後ノ分針ト今ヨリ 3 分前ノ時針トハ一直線ヲナストイフ。今ノ時刻ヲ問フ。

219. $n$ 時ノ後幾分ニシテ時計ノ時針ト分針トハ初メテ互ニ垂直トナルカ。但シ $n$ ハ 0, 1, 2, ……, 11 ノ何レカナリトス。（六 高）

220.* 時計ノ時針ト分針ガ $65\frac{1}{2}$ 分每ニ相重ナルトキ，此ノ時計ハ一日ニ幾分進ムカ又ハ遲レルカ。（東商專）

---

答 201. 135　202. 729　203. 142857 又ハ 285714
204. 190 又ハ 247　註 $7^2x+7y+z=11^2z+11y+x$
205. $\frac{12}{21}$ 又ハ $\frac{24}{42}$，$\frac{36}{63}$，$\frac{48}{84}$　206. $a=\pm6$，$b=\pm2$（複號同順）
207. 9 ト 7 又ハ $8\sqrt{2}$ ト $\sqrt{2}$　208. 甲 18 發，乙 21 發，丙 15 發
209. 甲ハ柿 28 個，乙ハ梨 23 個，丙ハ林檎 35 個
註 題意カラ甲ハ林檎ヲ取ラナカツタ事ガワカル。
210. 93 人，94 人，……，100 人，又ハ 101 人　211. 縱ヲ 2 行增シテ橫ヲ 2 行減ズレバヨイ。　212. 19 組　213. 12000 斤
214. 3 圓，　215. 50 圓，7 反 又ハ 59 圓，8 反又ハ 68 圓，9 反
216. 10 日，一回ノ自動車賃 60 錢　217. 11 時 $4\frac{8}{13}$ 分
218. 10 時 15 分（但シ兩針ハ反對方向ニ一直線ニナリタルモノトス）
219. $n>3$ ナルトキ $\frac{60}{11}(n-3)$ 分，$n\leqq3$ ナルトキ $\frac{60}{11}(n+3)$ 分

220. 一日＝$\frac{1440}{1441}$分遲レル。正シイ時計ノ兩針ハ何分毎ニ重ナルカヲ考ヘ，コレト比較シテコノ時計ガ進ム時計カ遲レル時計カヲ判定セヨ。

## 第三十六章　仕事，水管ノ問題

### 1. 仕事ノ問題

仕事ノ問題ハ，單位時間ニナス仕事ノ量ヲ未知數トスルカ，或ハ全業ヲナスニ要スル時間數（又ハ日數）ヲ未知數トシ，次ノ何レカノ考ヘ方デ方程式ヲ作ル。

(1)　(單位時間ノ仕事ノ量)×(所要時間)＝全業

(2)　(全業)÷(單位時間ノ仕事ノ量)＝所要時間

(3)　(全業)÷(所要時間)＝單位時間ノ仕事ノ量

全業ヲナスニ要スル日數ヲ $x$ 日トシタ場合ハ，一日ニハ全業ノ$\frac{1}{x}$ダケノ仕事ヲスル筈ト考ヘヨ。

例 304. 若干ノ人夫アリ。甲地ヨリ乙地ヘ往復8回ニテ若干個ノ箱ヲ運搬スル事ヲ得。若シ人夫2人ヲ増シ，1人毎ニ6個宛少ナク運搬スルトキハ9回往復シテ猶ホ79個殘リ，又若シ人夫3人ヲ減ジ1人毎ニ9個宛多ク運搬スルトキハ7回往復シテ猶ホ104個殘ルベシトイフ。人夫及箱ノ數ヲ求メヨ。

此種ノ問題ハ箱ノ總數ヲ未知數トスルト分數方程式トナルカラ一人ガ一回ニ運搬スル箱數ヲ未知數トシテ方程式ヲ作ル。

【解】人夫ノ數ヲ $x$ 人，一人ガ一回ニ運搬スル箱數ヲ $y$ 個トスルト題意ニヨリ箱ノ總數ハ $8xy$ 個トナル。

又人夫 $(x+2)$ 人デ一人毎ニ $(y-6)$ 個宛運搬スルト 9 回往復シテ猶ホ 79 個殘ル故，總數ハ $9(x+2)(y-6)+79$ 個デアル。

依テ　　$9(x+2)(y-6)+79=8xy$ ……………①

同様ニ　　$7(x-3)(y+9)+104=8xy$ ……………②



①ヨリ　　$xy-54x+18y-29=0$ ……………①′

②ヨリ　　$xy-63x+21y+85=0$ ……………②′

STOP　①′ト②′トヲ比較シテ $xy$ ノミガ二次デアルカラ之ヲ消去スルト一次方程式ヲ得ルト考ヘテ

GO　①′－②′ヨリ　　$9x-3y-114=0$

$\therefore$　　$y=3x-38$ ……………③

③ヲ①′ニ代入シテ整頓スレバ　$3x^2-38x-713=0$

$\therefore$　　$x=\frac{19\pm\sqrt{19^2+3\times713}}{3}=23$ 又ハ $-\frac{31}{3}$

$x$ ハ人夫ノ人數ナル故 $x=-\frac{31}{3}$ ハ適セズ　$\therefore$ $x=23$ ……④

④ヲ③ニ代入シテ　　$y=31$ ……⑤

依テ　　箱ノ總數 $8xy=8\times23\times31=5704$

コレラノ値ハ何レモ題意ニ適スル。

人夫 23 人，箱ノ數 5704 個

箱ノ總數ヲ S 個，人夫ノ數ヲ $x$ 人トシタ場合ニハ，毎回一人ノ運搬量ヲ表ハス式ヲ考ヘテ

$$\frac{S-79}{9(x+2)}=\frac{S}{8x}-6,\quad \frac{S-104}{7(x-3)}=\frac{S}{8x}+9$$

ナル方程式ヲ得ルカラ，之ヲ解ケバ所要ノ答ヲ得ルガ，コノ方ガ考ヘ難ク解キ難イ。

【試練問題】某地ヨリ某地ニ若干臺ノ車輛ヲモツテ7回ノ往復ニテ若干箱ノ○○ヲ運搬セル輸送部隊アリ。後日再ビ同量ノ○○ヲ運搬セントスルニ車輛7臺破損セル爲メ1車輛毎ニ2箱宛多クスルモ8回ノ往復ヲ要ス。然ルニ夜半來ノ雨ニ輸送ヤヽ困難トナリシ爲メ1車輛毎ニ4箱宛減ジ且ツ6回ノ往復ニテ運搬セントスル爲メニ新ニ車輛 28 臺ヲ加ヘタリト言フ。車輛ノ數及○○ノ數如何。　（東　商）

車輛 28 臺，○○ノ數 2352 箱

**例 305.** 甲乙共ニ働クトキハ6日間デ或仕事ヲ仕上ゲ，各一人デナストキハ甲ハ乙ヨリモ5日多クカヽルトイフ。甲一人デハ幾日デ仕上ゲルカ。

**方針**　此種ノ問題ハ所要ノ日數ヲ未知數トシ，一日ニハ全業ノ $\frac{1}{日數}$ ダケ仕事ヲスルト考ヘテ方程式ヲ作ル。

**【解】** 甲一人デ仕上ゲルニ要スル日數ヲ $x$ 日トスルト，題意ニヨリ乙一人デ仕上ゲルニハ $(x-5)$ 日カヽル。

依テ甲乙ガ一日ニナス仕事ノ量ハ夫々全業ノ $\frac{1}{x}$ 及ビ $\frac{1}{x-5}$ デ甲乙共ニ働クトキハ一日ニ $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-5}$ ダケ仕事ヲスル。然ルニ兩人共ニ働クトキ6日デ仕上ゲルカラ，一日ニハ全業ノ $\frac{1}{6}$ ダケ仕事ヲスル筈デアル。依テ

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-5}=\frac{1}{6}\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

分母ヲ拂ヘバ　$6x-30+6x=x^2-5x$

$\therefore$　$x^2-17x+30=0$

$\therefore$　$x=2$ 又ハ $x=15$

$x=2$ ノトキ　乙ノ日數 $x-5$ ガ負數トナルカラ題意ニ適シナイ。

$x=15$ ノトキ　乙ノ日數 $x-5=10$ トナリ且 ①ノ分母ヲ0ナラシメナイカラ題意ニ適スル。

**答** 15日

**注意總括**　平易ナ問題デアルガ，$x+(x-5)=6$ トカ $\frac{1}{x+(x-5)}=\frac{1}{6}$ 等ト誤ル者ガアル。

尙仕事ノ全量ヲ A トシ，甲，乙ガ夫々一人デ仕上ゲルニ要スル日數ヲ $x$ 日，$y$ 日トスルト，一日ニナス仕事ノ量ハ夫々 $\frac{A}{x}$，$\frac{A}{y}$ トナル故

題意ニヨリ　$\dfrac{A}{\frac{A}{x}+\frac{A}{y}}=6$,　$x=y+5$,　之ヲ解イテモヨイ。

**【試練問題】** 甲乙二人同時ニ働カバ或日數ニテ成就スル仕事アリ今其ノ仕事ノ半分ヲ甲ノミニテナサバ1日早ク，乙ノミニテナサバ2日後ルベシト云フ。乙一人ニテ全量ヲ完了スルニハ幾日



ヲ要スルカ。　(東商專)

**答** 12日

**例 306.** 甲乙二人共力シテ或仕事ヲ 12 日間ニ成就スル約束ニテ6日間働キタルニ期限內ニ成就シ得ザルヲ知リ更ニ丙ニ依賴シ7日目ヨリ三人共同シテ働キ豫定ノ如ク成就セリ而シテ三人ノ能力ヲ比較スルニ甲乙別々ニ働キ同ジ仕事ヲ成就スルニ要スル日數ハ 2：3 ノ割合ニシテ又甲丙共同ニテ或仕事ヲ成就スルニ要スル日數ト乙丙共同ニテ同ジ仕事ヲ成就スルニ要スル日數トハ 7：8 ノ割合ナリ。若シ最初ヨリ三人共同シテ働ケバ幾日ニテ約束ノ仕事ヲ成就スベキヤ。

**方針**　所要ノモノハ三人共同デ仕事ヲ成就スルニ要スル日數デアルガ各人ノ一日ノ仕事ノ量ヲ未知數トスルカ，各人ガ一人デ全業ヲナスニ要スル日數ヲ未知數ニ選定スル。

**【解】** I. 甲，乙，丙ノ一日ニナス仕事ノ量ヲ夫々 $a$, $b$, $c$ トシ，仕事ノ全量ヲ A トスルト，甲乙ガ共同デ6日間働キ，更ニ甲乙丙ノ三人ガ6日間働イテ仕事ヲ成就シタカラ

$$A=6(a+b)+6(a+b+c)\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

一日ニナス仕事ノ量ハ，全業ヲナスニ要スル日數ニ反比例スルカラ

$$a:b=3:2\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

同樣ニ　$(a+c):(b+c)=8:7$ $\cdots\cdots\cdots$③

**STOP**　未知數 $a$, $b$, $c$, A ノ四ツニ對シテ方程式（比例式）ガ三ツデアルカラ，$a$, $b$, $c$, A ノ値ヲ決定スル事ハ出來ナイガ，所要ノ日數ハ $A\div(a+b+c)$ デ表ハサレルカラ，$a$, $b$, $c$, A ヲ或一文字（例ヘバ $a$）デ表ハシ得レバヨイト考ヘテ

**GO**　②ヨリ　$b=\frac{2}{3}a$ $\cdots\cdots\cdots$②′

③ヨリ　$7a+7c=8b+8c$

$\therefore$　$c=7a-8b$

②′ ヲ代入シテ　　$c=\frac{5}{3}a$ ……④

②′ ト④トヲ①ニ代入シテ　$A=30a$ ……⑤

最初ヨリ三人共同シテ働ケバ $\frac{A}{a+b+c}$ 日ヲ要スルカラ

$$\text{求ムル日數}=\frac{30a}{a+\frac{2}{3}a+\frac{5}{3}a}=\frac{90a}{3a+2a+5a}=9$$

答　9日

[illegible]　$a$, $b$, $c$ ヲ A デ表ハス方針デヤレバ

⑤ヨリ　$a=\frac{A}{30}$，②′ニ代入　$b=\frac{A}{45}$，④ヨリ　$c=\frac{A}{18}$

$$\text{依テ求ムル日數}\quad \frac{A}{a+b+c}=\frac{A}{\frac{A}{30}+\frac{A}{45}+\frac{A}{18}}=9$$

【解】II.（日數ヲ未知數トシテ見ル）

甲，乙，丙ガ各一人デ仕事ヲ成就スルニ要スル日數ヲ夫々 $x$ 日，$y$ 日 $z$ 日トスレバ 甲，乙，丙 ガ一人デ一日ニスル仕事ノ量ハ夫々全業ノ $\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$，$\frac{1}{z}$ デアル。

$$\therefore\quad 6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1 \cdots\cdots ①$$

甲乙ガ別々ニ同ジ仕事ヲ成就スルニ要スル日數ノ比ハ 2：3

$$\therefore\quad x:y=2:3 \cdots\cdots ②$$

甲，丙ガ共同ニテ成就スルニ要スル日數ハ $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}$ 日

乙丙ガ共同ニテ成就スルニ要スル日數ハ $\frac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ 日デソノ比ガ 7：8

$$\therefore\quad \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}:\frac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=7:8 \cdots\cdots ③$$

STOP　①ノ分母ヲ拂フト三次方程式ニナルカラ $\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$，$\frac{1}{z}$ ヲ束ニシテ取扱フ方針デ

GO　①ヨリ　$\frac{12}{x}+\frac{12}{y}+\frac{6}{z}=1$ ……①′

②ヨリ　$3x=2y$　∴ $\frac{2}{x}=\frac{3}{y}$ ……②′



③ヨリ　$7\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)=8\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

$$\therefore\quad \frac{7}{x}-\frac{8}{y}-\frac{1}{z}=0 \cdots\cdots ③'$$

$\frac{1}{x}=X$，$\frac{1}{y}=Y$，$\frac{1}{z}=Z$ ト置キテ①′，②′，③′ ヲ解キ

$X=\frac{1}{30}$，$Y=\frac{1}{45}$，$Z=\frac{1}{18}$　∴ $x=30$，$y=45$，$z=18$

$$\text{求ムル日數}=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{1}{\frac{1}{30}+\frac{1}{45}+\frac{1}{18}}=\frac{90}{3+2+5}=9$$

答　9日

[illegible]　前者ノ解法ガ簡單デアル。尙日數ヲ未知數トシタ場合ハ必ズ一日ニナス仕事ノ量 $\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$，$\frac{1}{z}$ 等ヲ明示シテ，方程式ヲ導ク事ガ大切デアル。

【試練問題】　三ケ小隊ヨリ成ル甲部隊ガ或交通壕ヲ掘開シ始メシヨリ2時間ニシテ，一ケ小隊ヨリ成ル乙部隊ノ增援ヲ得タルヲ以テ，豫定時間ヨリ5時間早ク作業ヲ終了セリト云フ。若シ乙部隊ノミニテ擔當セバ何時間ニテコノ作業ヲ完成スルカ。但シ兵員ノ作業能力ハ，土1立方米ヲ掘開スルニ甲部隊ニアリテハ一人2時間，乙部隊ニアリテハ一人 1.2時間ヲ要シ，甲，乙兩部隊ノ各小隊ノ兵員數ハ相等シキモノトス。（陸士）

答　28.8時間

例 307. 或ル仕事ヲ成就スルニ A ノミニテ之ヲナセバ，B ト C トガ共同シテ爲シ遂グルニ要スル日數ノ $m$ 倍ノ日數ヲ要シ，B ノミノ場合ハ A ト C ト共同ノ場合ノ日數ノ $n$ 倍，C ノミノ場合ハ，A ト B ト共同ノ場合ノ日數ノ $p$ 倍ノ日數ヲ要スト云フ。然ラバ此ノ三人ガ各一人ニテ爲ストキニ要スル日數ノ比ハ

$(m+1):(n+1):(p+1)$ ナルコトヲ證シ，

且ツ　$\frac{m}{m+1}+\frac{n}{n+1}+\frac{p}{p+1}=2$

ナルコトヲ證明セヨ。

[illegible] 各一人ガ單獨デ仕事ヲ成就スルニ要スル日數ヲ用ヒテ題意ヲ式デ表ハシ，終結式ヲ導ク。

【解】 A, B, C ガ各一人ニテコノ仕事ヲ成就スルニ要スル日數ヲ夫々 $x$ 日，$y$ 日，$z$ 日トスルト，一日ニハ夫々全業ノ $\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$，$\frac{1}{z}$ ノ仕事ヲナス故，

B ト C ガ共同シテ爲シ遂グルニ要スル日數ハ $\dfrac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ 日デアル。

依テ題意ニヨリ $\quad x=m\left(\dfrac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\right)$

STOP 題意ヲ其儘式化スルト上記ノ如キ式ヲ得ルガ，一日ノ仕事ノ量 $\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$，$\frac{1}{z}$ ヲ束ニシテ取扱フ方針デ次ノ樣ニ考ヘル方ガ簡單。

GO B ト C トガ共同シタ場合ニ一日ニナス仕事ノ量ハ $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ デ題意ニヨリ之ガ A ガ一人デ一日ニナス仕事ノ量 $\frac{1}{x}$ ノ $m$ 倍デナケレバナラヌカラ

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{m}{x}\quad\cdots\cdots ①$$

同樣ニ

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{n}{y}\quad\cdots\cdots ②$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{p}{z}\quad\cdots\cdots ③$$

STOP 先ヅ $x:y$ ヲ求メル方針デ $z$ ヲ消去スル。

GO ①－②ヨリ $\quad \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{m}{x}-\frac{n}{y}$

$$\therefore \frac{m+1}{x}=\frac{n+1}{y} \qquad \therefore x:y=m+1:n+1\cdots ④$$

②－③ヨリ 同樣ニシテ $\quad y:z=n+1:p+1\cdots ⑤$

$$\therefore \quad x:y:z=m+1:n+1:p+1\cdots\cdots(\text{終結式ノ一})$$

次ニ①ヨリ $\quad m=\frac{x}{y}+\frac{x}{z}=\frac{xz+xy}{yz}$

$$\therefore \frac{m}{m+1}=\frac{\frac{zx+xy}{yz}}{\frac{xz+xy}{yz}+1}=\frac{xy+zx}{xy+yz+zx}\cdots ⑥$$



同樣ニ②ヨリ $\quad n=\frac{xy+yz}{zx} \quad \therefore \frac{n}{n+1}=\frac{xy+yz}{xy+yz+zx}\cdots\cdots ⑦$

③ヨリ $\quad p=\frac{yz+xz}{xy} \quad \therefore \frac{p}{p+1}=\frac{yz+zx}{xy+yz+zx}\cdots\cdots ⑧$

⑥＋⑦＋⑧ヨリ $\quad \frac{m}{m+1}+\frac{n}{n+1}+\frac{p}{p+1}=\frac{2(xy+yz+zx)}{xy+yz+zx}=2$

依テ證明シ得タリ。

[illegible] 前半ノ證明ニ於テ ①，②，③ ノ左邊ヲ揃ヘル方針デ ①ノ兩邊＋$\frac{1}{x}$，②ノ兩邊＋$\frac{1}{y}$，③ノ兩邊＋$\frac{1}{z}$ ヲ作リ，

コレヨリ $\quad \frac{m+1}{x}=\frac{n+1}{y}=\frac{p+1}{z}$ ヲ導イテモヨイ。

【試練問題】 甲乙丙ノ三人ノ職工ガ居ル。或ル仕事ヲ甲一人デ完成スルニ要スル日數ハ，乙丙協同デ完成スルニ要スル日數ノ $l$ 倍，又乙一人デハ甲丙協同デ成ストキノ $m$ 倍，丙一人デハ甲乙協同デナストキノ $n$ 倍ノ日數ヲ要スル。然ルトキハ

$$\frac{1}{l+1}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+1}=1 \quad デアルコトヲ證明セヨ。$$

（高商部．長崎）

## 2. 水管ノ問題

水管ノ問題ハ水ヲ注入シタリ，排出シタリスル仕事ト考ヘレバヨイカラ考ヘ方ヤ方程式ノ作リ方ハ仕事ノ問題ト全ク同一デアル。

**例 308.** 水槽アリ。甲乙二管ヲ以テ之ニ水ヲ滿タサントスルニ，先ヅ乙管ノミニテ此ノ水槽ヲ滿タス場合ニ要スル時間ノ $\frac{3}{5}$ ダケ甲管ノミヲ以テ注入シ，而ル後甲管ヲ閉ヂ乙管ヲ開キテ其ノ殘リヲ滿タセリ。今若シ初メヨリ甲乙二管ヲ開キテ此ノ水槽ヲ滿タストキハ前ノ方法ニ依リ滿タス總時間ヨリ速キコト6時間ニシテ，又此ノ時甲管ニテ注入スル量ハ乙管ニテ注入スル量ノ $\frac{2}{3}$ ナリト言フ。依ツテ甲乙各一管ニテ此ノ水槽ヲ滿タスニ要スル時間ヲ問フ。

**方針** 所要ノ時間ヲ未知數トシテ各管ガ一時間ニ注入スル水量ヲ表ハス式ヲ考ヘテ方程式ヲ導ク。

【解】 甲乙各一管ニテ此ノ水槽ヲ滿タスニ要スル時間ヲ夫々 $x$ 時間, $y$ 時間トシ，コノ水槽ノ容量ヲ A 立トスルト

甲管ヨリ注入サレル水量ハ每時 $\frac{A}{x}$ 立，乙管ヨリハ每時 $\frac{A}{y}$ 立デアル。最初ニ甲管ノミデ $\frac{3}{5}y$ 時間注入シタカラ，コノトキ注入サレタ水量ハ $\frac{A}{x}\times\frac{3}{5}y$ 立從ツテ其ノ殘量ハ $\left(A-\frac{3y}{5x}A\right)$ 立デ，之ヲ乙管ノミデ滿スニ要スル時間ハ $\dfrac{A-\frac{3y}{5x}A}{\frac{A}{y}}$ 時間 即チ $\dfrac{1-\frac{3y}{5x}}{\frac{1}{y}}$ 時間デアル。

依テコノ場合ニ要スル總時間ハ $\frac{3}{5}y+\dfrac{1-\frac{3y}{5x}}{\frac{1}{y}}$ 時間デ，之ガ甲乙二管ヲ同時ニ開キテ滿水スルニ要スル時間ヨリ6時間多イカラ

$$\frac{3}{5}y+\frac{1-\frac{3y}{5x}}{\frac{1}{y}}=\frac{A}{\frac{A}{x}+\frac{A}{y}}+6\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

後ノ場合ニ甲管カラ注入サレタ水量ハ乙管カラ注入サレタ水量ノ $\frac{2}{3}$ ナル故

$$\frac{A}{x}=\frac{2}{3}\left(\frac{A}{y}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

$A\neq 0$ 又 $xy\neq 0$　∴ ②ヨリ $x=\frac{3}{2}y\cdots\cdots\cdots\cdots②'$

②′ヲ①ニ代入シテ $\frac{3}{5}y+y\left(1-\frac{6}{15}\right)=\dfrac{1}{\frac{2}{3y}+\frac{1}{y}}+6$

$$\therefore\quad \frac{3}{5}y+\frac{3}{5}y=\frac{3}{5}y+6$$

∴ $y=10$　∴ ②′ヨリ $x=15$

コノ値ハ①，②ノ分母ヲ 0 ナラシメズ且題意ニ適スル。

**答** 甲管 15 時間，乙管 10 時間



**[illegible]** 未知數ヲ選定シタル後直チニ方程式ヲ書キ下ソウトスルモノニハ手ノツカナイ問題デ，問題ヲ精讀シテ順次題意ヲ式化シテ方程式ヲ導キ出ス方針デ進メバ自ラ解決シ得ルノデアル。

**【試練問題】** 或水槽ニ水ヲ滿スニ甲管ヨリ水ヲ注ゲバ乙管ノ場合ヨリモ時間ヲ 32 分多ク要シ，甲乙兩管ヲ同時ニ使用スル場合ヨリモ1時間 21 分多ク要スルトイフ。甲管ノミ或ハ乙管ノミヲ使用シテコノ水槽ニ水ヲ滿スニ要スル時間ヲ問フ。（二 高）

**答** 甲管ノミデハ 2 時間 24 分，乙管ノミデハ 1 時間 52 分

**例 309.** 或ル井戸ノ水ヲ同ジ力ノ「ポンプ」ニテ汲ミ盡スニ3臺ヲ使用セバ9時間ヲ要シ，4臺ヲ使用セバ6時間ヲ要ストイフ。然ラバ6臺ヲ使用セバ幾時間ニテ汲ミ盡スカ。但シコノ井戸ニハ初メ一定量ノ水アリ，汲ミ出スニ從ツテ每時一定ノ水ヲ湧出スルモノトス。

**方針** 汲ミ出スニ從ツテ湧出スル水量ヲ如何ニ取扱フカヾ此問題解決ノ急所デ，所要ノモノハ汲ミ盡スニ要スル時間デアルガ，ポンプノ能力ヤ每時ノ湧出量，初メニ井戸ニアリシ水量等ヲ補助ノ未知數ニ選ンデ題意ヲ式化スル事ヲ考ヘル。

【解】 初メ井戸ニアリシ一定量ノ水量ヲ A 立，ポンプ一臺ガ汲ミ出ス水量ヲ每時 $a$ 立，湧出スル水量ヲ每時 $b$ 立トスルト

ポンプ三臺ヲ使用スルトキハ，每時 $3a$ 立宛排水シ，每時 $b$ 立宛湧出スルカラ井戸水ハ每時ソノ差 $(3a-b)$ 立宛減水スル。從ツテ汲ミ盡スニ要スル時間ハ $\frac{A}{3a-b}$ 時間デ，題意ニヨリコレガ9時間ニ等シイ故

$$\frac{A}{3a-b}=9\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

**STOP** コノ場合ニ湧出スル水量ヲ無視シテ $\frac{A}{3a}=9$ ト誤ルモノガ多イ。尙 ①ノ代リニ每時ノ減水量 $(3a-b)$ 立ノ 9 倍ガ最初井戸ニアリシ水量ニ等シイ筈デアルト考ヘテ $9(3a-b)=A$ ヲ用ヒテモヨイ。

(GO) ポンプ四臺ヲ使用スレバ毎時 $(4a-b)$ 立宛減水シ，6 時間ヲ要スル故

$$\frac{A}{4a-b}=6 \cdots\cdots ②$$

ポンプ 6 臺ヲ使用スレバ毎時 $(6a-b)$ 立宛減水スルカラ汲ミ盡スニ要スル時間ヲ $x$ 時間トスレバ

$$x=\frac{A}{6a-b} \cdots\cdots ③$$

[illegible] 未知數 $a$, $b$, A, $x$ ノ四ツニ對シテ方程式ハ三ツデアルガ，$a$ $b$ ヲ A デ表ハシテ③ニ代入スルコトニヨリ所要ノ $x$ ヲ求メ得ル筈ト考ヘテ

(GO) ①ヨリ　$3a-b=\frac{A}{9} \cdots\cdots ①'$

②ヨリ　$4a-b=\frac{A}{6} \cdots\cdots ②'$

②′−①′ヨリ　$a=\frac{A}{18} \cdots\cdots ④$

④ヲ①′ニ代入シテ　$b=\frac{3A}{18}-\frac{A}{9}=\frac{A}{18} \cdots\cdots ⑤$

④,⑤ヲ③ニ代入シテ　$x=\frac{A}{\frac{6A}{18}-\frac{A}{18}}=\frac{18}{5}=3\frac{3}{5}$ (時間)

④,⑤ノ値ハ①,②ノ分母ヲ 0 ナラシメズ，且 $x=3\frac{3}{5}$ ハ題意ニ適スル。　　答 3 時間 36 分

指導總括 ポンプノ汲ミ出ス水量ト湧出スル水量トノ差ダケ井戸水ガ減水スル事ヲ理解シテ解ク事ガ急所デアル。尙一時間ノ減水量 $3a-b$, $4a-b$ ハ夫々全量 A ノ $\frac{1}{9}$ 及ビ $\frac{1}{6}$ デナケレバナラヌ事ヲ述べテ①,②ノ代リニ①′, ②′ヲ用ヒテモヨイ。

【試練問題】 漏ル桶アリ。之ニ水ヲ滿サントスルニハ，漏ラザル時ヨリ 4 時間長クカヽリ又滿ツルヲ待チテ注入ヲ止メナバ 3 時間ニテ干クト云フ。漏ラザル時ハ幾時間ニテ滿ツルカ。

(東商專)

答 2 時間



例 310. 絶エズ一様ニ水ノ流入シツヽアル水槽アリ。二個ノ「ポンプ」ヲ用ヒテ若干時間排水セシニ排水開始時ノ水量ノ $\frac{3}{4}$ ヲ殘セリ。其時「ポンプ」ヲ二個增加シ排水ヲ繼續セシニ，前回費セシ時間ノ半ニシテソノ殘留量ハ前回ノ殘留量ノ半ニ減少セリ。更ニ排水シテ初回ノ排水時間ノ $\frac{1}{3}$ 以內ニ此ノ水槽ヲ空虛ニナサシメンニハ少クトモ倘幾個ノ「ポンプ」ヲ增スベキカ。但シ「ポンプ」ハ何レモ皆等シキモノトス。

[illegible] 未知數ノ選ビ方及ビ考ヘ方ハ前問ト全ク同一デアルガ最後ニ「$\frac{1}{3}$ 以內」ナル條件ガアルカラ不等式ノ解法ヲ引用シナケレバナラナイ。

【解】 排水開始ノ時ニ於ケル水槽內ニアリシ水量ヲ A 立トシ，一個ノポンプガ一時間ニ排水スル水量ヲ $a$ 立，流入スル水量ヲ毎時 $b$ 立トスレバ，二個ノポンプヲ用ヒルトキハ毎時 $(2a-b)$ 立宛減水スル。今二個ノポンプヲ使用セシ時間ヲ $t$ 時間トスレバ $t$ 時間後ニ水量ハ $\frac{3}{4}$A 立ニナツタカラ

$$(2a-b)t=\frac{1}{4}A \cdots\cdots ①$$

次ニポンプ 2 個ヲ增シテ $\frac{t}{2}$ 時間後ニソノ殘留量ハ前回ノ半分ニナツタカラ

$$(4a-b)\times\frac{t}{2}=\frac{3}{4}A\times\frac{1}{2} \cdots\cdots ②$$

更ニ殘留量 $\frac{3}{4}A\times\frac{1}{2}$ 立ヲ $\frac{1}{3}t$ 時間以內ニ排水シ盡スタメニ增スベキ「ポンプ」ノ個數ヲ $x$ 個トスレバ，毎時 $\{(4+x)a-b\}$ 立宛減水スルカラ，$\frac{t}{3}$ 時間以內ニ空虛トナルタメニハ

$$\{(4+x)a-b\}\times\frac{t}{3}\geqq\frac{3}{4}A\times\frac{1}{2} \cdots\cdots ③$$

[illegible] ③式ニ於ケル不等式ノ意味ノ理解シ得ナイモノハ指導總括ヲ參照セヨ。尙未知數ガ $a$, $b$, A, $t$, $x$ ノ五ツニ對シテ方程式ガ二ツ，

不等式ガ一ツシカナイカラ $at$, $bt$ ヲ束ニシテ①②ヲ解キ，之ヲ③ニ代入スル。

GO　①ヨリ　　$2at-bt=\frac{1}{4}A$ ……………… ①′

②ヨリ　　$4at-bt=\frac{3}{4}A$ ……………… ②′

②′−①′ヨリ　　$2at=\frac{1}{2}A$　∴ $\left.\begin{aligned} at&=\frac{A}{4} \\ bt&=\frac{A}{4} \end{aligned}\right\}$ …④

之ヲ①′ニ代入シテ

④ヲ③ニ代入シテ　　$(4+x)\frac{A}{12}-\frac{A}{12}\geqq\frac{3}{8}A$

兩邊 $\times 24(>0)$ ヨリ　　$2(4+x)A-2A\geqq 9A$

$A>0$ ナル故　　$8+2x-2\geqq 9$　∴ $x\geqq\frac{3}{2}$ …… ⑤

$x$ ハポンプノ個數ナル故正ノ整數デナケレバナラヌ。

依テ　⑤ヲ滿足スル $x$ ノ整數値ハ　$x\geqq 2$

答　少クトモ 2 個

[illegible]　③ノ代リニ「ポンプ $(4+x)$ 個ヲ用ヒルトキハ毎時 $\{(4+x)a-b\}$ 立宛減水スルカラ，$\frac{3}{4}A\times\frac{1}{2}$ 立ヲ排水シ盡スニ要スル時間ハ $\dfrac{\frac{3}{4}A\times\frac{1}{2}}{(4+x)a-b}$ 時間デ，之ガ $\frac{t}{3}$ 時間以内ナルタメニハ

$$\frac{\frac{3}{4}A\times\frac{1}{2}}{(4+x)a-b}\leqq\frac{t}{3}$$

ナルヲ要ス。」トシテモヨイ。

【試練問題】 一定ノ水量ガ絶ヘズ流入スル貯水池アリ。滿水ノ時3臺ノポンプニテ排水ヲ始メ 18 時間ヲ費シテ水ヲ排除シ盡シタリ。而シテ再ビ滿水ニ復スルニ2晝夜ト 17 時間ヲ要セリト云フ。然ラバ滿水ノ貯水池ヲ5時間以内ニテ排水シ盡スニハ少クトモ幾臺ノポンプヲ使用スベキカ。

答　少クトモ 10 臺



# 第三十七章　距離，速度ノ問題

距離速度ニ關スル問題ハ

時速×所要時間＝全距離，　$\dfrac{\text{全距離}}{\text{時速}}$＝所要時間，　$\dfrac{\text{全距離}}{\text{所要時間}}$＝時速

ヲ用ヒテ方程式ヲ作ル。尙速サヲ表ハスニハ毎時何粁（又ハ毎分何米等）ノ如ク，時間ノ單位ト長サノ單位トヲ明記シナケレバナラヌ。

## 1. 水流，音響ノ問題

上行ノ速サ＝(靜水ニ於ケル速サ)−(水流ノ速サ)
下行ノ速サ＝(靜水ニ於ケル速サ)＋(水流ノ速サ)

例 311. 一水夫或河流ヲ溯ルニ9時間ヲ要シ，又靜水ノ時ニ同距離ヲ漕グニ要スル時間ハ同ジ河流ヲ水流ニ從ヒテ漕ガズニ下ルニ要スル時間ヨリモ 12 時間ダケ少シトイフ。此ノ水夫ガ此ノ河流ノ同距離ヲ漕ギ下ルニ要スル時間如何。

方針　所要ノモノハ漕ギ下ルニ要スル時間デアルガ，水夫ノ漕力，流速等ヲ補助ノ未知數トシテ方程式ヲ作ル。

【解】 コノ水夫ガ靜水中ヲ漕グ速サヲ毎時 $x$ 粁，河流ノ速サヲ毎時 $y$ 粁トシ，コノ河流ノ長サヲ $s$ 粁，コノ水夫ガ $s$ 粁ヲ漕ギ下ルニ要スル時間ヲ $t$ 時間トスルト

コノ河流ヲ溯ルニハ毎時 $(x-y)$ 粁宛進ミ9時間ヲ要スルカラ

$$\frac{s}{x-y}=9 \quad\cdots\cdots①$$

靜水ノ時ニ同距離ヲ漕グニ要スル時間ハ $\frac{s}{x}$ 時間，同ジ河流ヲ流レニ從ヒテ漕ガズニ下ルトキハ毎時 $y$ 粁宛進ムカラ所要時間ハ $\frac{s}{y}$ 時間，題意ニヨリ　$\frac{s}{x}=\frac{s}{y}-12$ ……………… ②

此ノ河流ヲ漕ギ下ルトキハ毎時 $(x+y)$ 粁宛進ムカラ

$$t=\frac{s}{x+y} \cdots\cdots ③$$

STOP ①, ②ヨリ $x+y$ ヲ $s$ デ表ハシテ③ニ代入スレバ所要ノ $t$ ヲ得ルト考ヘテ

GO ①ヨリ　$x-y=\frac{s}{9} \cdots\cdots ①'$,　②ヨリ　$xy=\frac{(x-y)}{12}s \cdots\cdots ②'$

①'ヲ②'ニ代入シテ　$xy=\frac{s^2}{108} \cdots\cdots ④$

①'²+④×4 ヨリ　$(x+y)^2=\frac{4}{81}s^2$,　$x+y>0$　$\therefore\ x+y=\frac{2}{9}s \cdots ⑤$

⑤ヲ③ニ代入シテ　$t=\dfrac{s}{\frac{2}{9}s}=4.5$　　答 4 時間半

[illegible] ①'ト④ヨリ $x$ ト $y$ トヲ求メテ③ニ代入シテモヨイ。

【試練問題】 或水夫甲村ヲ發シ 7500 米上流ノ乙村ニ漕ギ上リタルニ 2 時間 5 分ヲ要セリ。歸途ソノ $\frac{2}{5}$ ヲ漕ギ下リ後ハ流レニ任セテ下リタルニ乙村出發後 2 時間ニテ甲村ニ歸レリ。コノ水夫ノ靜水ヲ漕グ毎時ノ速サ及ビ水流ノ毎時ノ速サヲ求メヨ。

答 靜水ヲ漕グ速サ毎時 6.3 粁，流速毎時 2.7 粁

**例 312.** 河ニ沿フ二地點ヲ航行スル甲，乙二汽船アリ。平常コノ二地點ヲ往復スルニ甲ハ 52 時間，乙ハ 72 時間ヲ要ス。而シテ靜水ニ於ケル乙ノ速度ハ甲ノ速度ノ $\frac{3}{4}$ ナリ。今增水時ノ往復ニ甲ガ 64 時間ヲ要シタリトスレバ，コノトキ乙ガ往復ニ要スル時間幾何ナルカ。但シ河流ハ上記二地點ノ間ヲソレゾレノ場合ニ於ケル一定速度ニテ流ルヽモノトス。

[illegible] 甲乙兩船ノ靜水ニ於ケル速サ及ビ流速等ヲ用ヒテ題意ヲ式化シテ見ル。



【解】 靜水ニ於ケル甲船ノ速サヲ毎時 $4a$ 粁トスルト乙船ノ速サハ毎時 $3a$ 粁，平常時ニ於ケル流速ヲ毎時 $x$ 粁，增水時ニ於ケル流速ヲ毎時 $y$ 粁トシ，二地點間ノ距離ヲ A 粁トスルト，平常時ニ於テ甲船ガ往復ニ要スル時間ハ 52 時間ナル故

$$\frac{A}{4a+x}+\frac{A}{4a-x}=52 \cdots\cdots ①$$

乙船ハ 72 時間ヲ要スル故

$$\frac{A}{3a+x}+\frac{A}{3a-x}=72 \cdots\cdots ②$$

增水時ニ於ケル甲船ノ所要時間ハ 64 時間ナル故

$$\frac{A}{4a+y}+\frac{A}{4a-y}=64 \cdots\cdots ③$$

今增水時ニ於テ乙ガ往復スルニ要スル時間ヲ $t$ 時間トスレバ

$$t=\frac{A}{3a+y}+\frac{A}{3a-y}=\frac{6aA}{9a^2-y^2} \cdots\cdots ④$$

STOP 未知數ガ $a$, A, $x$, $y$, $t$ ノ五ツニ對シテ方程式ハ四ツデアルカラ $a^2$ 及ビ $y^2$ ヲ $a$A デ表ハシテ④ニ代入スル方針デ

GO ①ヨリ　$\frac{8aA}{16a^2-x^2}=52$　$\therefore\ 16a^2-x^2=\frac{2aA}{13} \cdots\cdots ①'$

②ヨリ　$\frac{6aA}{9a^2-x^2}=72$　$\therefore\ 9a^2-x^2=\frac{aA}{12} \cdots\cdots ②'$

③ヨリ　$\frac{8aA}{16a^2-y^2}=64$　$\therefore\ 16a^2-y^2=\frac{aA}{8} \cdots\cdots ③'$

①'−②'ヨリ　$7a^2=\frac{11aA}{13\times 12}$　$\therefore\ a^2=\frac{11aA}{7\times 13\times 12} \cdots\cdots ⑤$

⑤ヲ③'ニ代入シテ　$y^2=\frac{16\times 11aA}{7\times 13\times 12}-\frac{aA}{8}=\frac{79aA}{7\times 13\times 24} \cdots\cdots ⑥$

⑤, ⑥ヲ④ニ代入　$t=\dfrac{6aA}{\frac{99aA}{7\times 13\times 12}-\frac{79aA}{7\times 13\times 24}}=\frac{1872}{17}=110\frac{2}{17}$

コノ値ハ題意ニ適スル　　答 $110\frac{2}{17}$ 時間

[illegible] 方程式ハ比較的容易ニ得ラレルガ，之ヲ解キ得ナイ者ガ多イ $a^2$ ト $y^2$ ヲ東ニシテ取扱ツタ點ヲ味フベキデアル。

【試練問題】 河流ノ或區間ヲ上下スル汽船アリ。平時上ルニ要スル時間ハ下ルニ要スル時間ノ五分ノ六ナリ。或時増水ニヨリ水流ノ速サガ平時ノ二倍トナリタルタメ上リニ二時十分間ヲ要シタリ。然ラバ其時ノ下リニハ何時間ヲ要スベキカ。

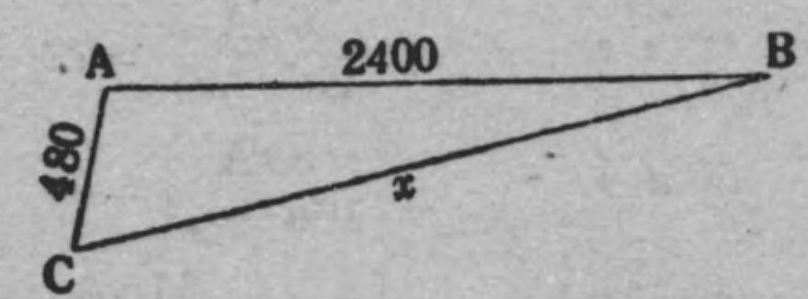
(明　爾)

答 一時間半

**例 313.** 砲兵ノ演習ニ於テ 2400 米ノ射距離ヲ以テ發射セシニ砲手ハ 10.5 秒ニテ其命中爆發セル音ヲ聞ケリ。而シテ砲手ヨリ 480 米ノ距離ニアル觀測所ニテハ，發火ヲ見テヨリ 1.5 秒ニシテ其發射音ヲ聞キ，更ニ 10 秒ノ後命中爆發音ヲ聞ケリ。觀測所ト目標トノ間ノ距離及ビ砲彈ノ平均ノ速サ如何。

方針　所要ノモノ以外ニ音響ノ速サヲ補助ノ未知數トシテ題意ヲ式デ表ハシテ考ヘル。

【解】 砲手，目標，觀測所ノ位置ヲ夫々 A, B 及ビ C トシ，
BC$=x$ (米)
砲彈ノ平均ノ速サヲ每秒 $y$ 米




音ノ傳ハル速サヲ每秒 $z$ 米トスルト，音ハ AC 間ヲ 1.5 秒デ傳ハツタカラ

$$\frac{480}{z}=1.5 \qquad \therefore \quad z=320 \cdots\cdots\cdots① $$

砲手ハ 10.5 秒後ニ命中爆發音ヲ聞イタカラ

$$\frac{2400}{y}+\frac{2400}{z}=10.5 \cdots\cdots\cdots②$$

觀測所デハ發砲後 (1.5+10) 秒後ニ爆發音ヲ聞イタカラ

$$\frac{2400}{y}+\frac{x}{z}=11.5 \cdots\cdots\cdots③$$



STOP ②,③ノ左邊ニ $\frac{2400}{y}$ ガ共通ナルコトニ着眼シテ，$y$ ヲ消去スル方針デ

GO ③－②ヨリ　$\frac{x-2400}{z}=1$

①ヲ代入シテ　$x-2400=320 \qquad \therefore \quad x=2720$

①ヲ②ニ代入シテ　$\frac{2400}{y}+\frac{2400}{320}=10.5 \qquad \therefore \quad \frac{2400}{y}=3$

$\therefore \quad y=800$

コレラノ値ハ何レモ分母ヲ 0 ナラシメズ題意ヲ滿足スル。

答 ｛觀測所ト目標トノ距離 2720 米
　　砲彈ノ平均ノ速サ 每秒 800 米

補遺總括 ③ノ代リニ $\left(\frac{2400}{y}+\frac{x}{z}\right)-\frac{480}{z}=10$ ヲ用ヒテモヨイ。

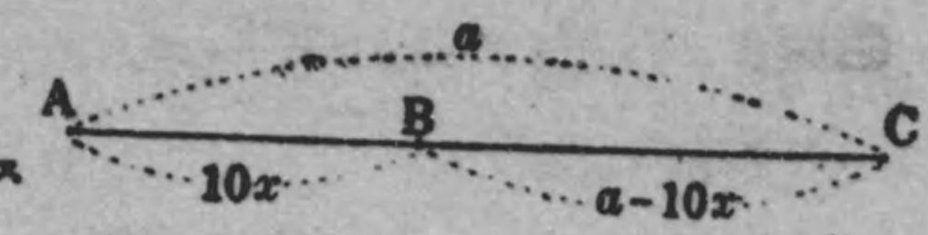
【試練問題】 甲ナル人 500 米ヲ距リタル的ニ發砲シ $4\frac{1}{3}$ 秒ヲ經テ彈丸ガ的ニ中リタル音ヲ聽キタリ。然ルニ甲ヨリハ 60 米，的ヨリハ 400 米距リタル乙ナル人ハ甲ノ發砲シタル音ヲ聞キタル後 $2\frac{1}{3}$ 秒ヲ經テ彈丸ガ的ニ中リタル音ヲ聞キタリトセバ彈丸及ビ音ノ速サ各幾何ナルカ。

答 彈丸ノ速サ每秒 $166\frac{2}{3}$ 米，音ノ速サ每秒 375 米

**例 314.** アル驛ニ向ツテ等速度デ進行シテ來ル汽車ガ 10 秒間汽笛ヲ鳴ラシ續ケタ所コノ驛デハソノ音ガ $9\frac{3}{5}$ 秒間聞エタ。ソノトキノ汽車ノ每時ノ速サヲ問フ。但シ音ノ速サハ每秒 340 米トシテ計算セヨ。

方針　中々考へ難イ問題デアル。汽車ノ位置ヤ驛ノ位置ヲ圖示シテ考ヘ，音ノ速サガ秒速デアルカラ，汽車ノ速サモ每秒 $x$ 米トシテ方程式ヲ作ル。

【解】 A ハ汽笛ヲ鳴ラシ始メタ位置
B ハ汽笛ヲ鳴ラシ終ツタ位置
C ハ停車場ノ位置
} トス




AC 間ノ距離ヲ $a$ 米，汽車ノ毎秒ノ速サヲ $x$ 米トスルト
AB 間ノ距離ハ $10x$ 米，從ツテ BC 間ノ距離ハ$(a-10x)$米トナル。

音ノ速サハ毎秒 340 米デアルカラ音ガ AC 間ヲ傳ハルニハ$\frac{a}{340}$秒，

音ガ BC 間ヲ傳ハルニハ $\frac{a-10x}{340}$ 秒ヲ要スル。

從ツテ驛デハ汽車ガ汽笛ヲ鳴ラシ初メタ瞬間カラ $\frac{a}{340}$ 秒後ニ聞エ始メ，$\left(10+\frac{a-10x}{340}\right)$秒後ニ聞エナクナル。ソノ間ノ時間ガ $9\frac{3}{5}$ 秒ニ當ルカラ次ノ方程式ヲ得ル。

$$\left(10+\frac{a-10x}{340}\right)-\frac{a}{340}=9\frac{3}{5}$$

整頓スルト　$\frac{10x}{340}=\frac{2}{5}$　$\therefore\ x=\frac{68}{5}=13.6$……秒速

毎時ノ速サハ　13.6米 $\times 60 \times 60=48.96$粁　　48.96 粁

【試練問題】 北ニ向ヒテ進航中ノ甲汽船ガソノ北1690「メートル」ノ海上ヲ西ニ向ヒテ進ム乙船ノ汽笛ノ白煙ヲ認メテヨリ5秒後ニ至リ其ノ笛聲ヲ聞キタリ。甲船ガ乙船ノ始メノ位置マデ來リシトキ，乙船ハ甲船ノ西 845「メートル」ノ所ニアリタリ。而シテ最初甲船ガ汽笛ヲ聞キテヨリ5分 25 秒後ニ再ビ乙船ノ汽笛ノ白煙ヲ認メ，ソレヨリ5秒ノ後ニ其ノ笛聲ヲ聞キタリ。然ラバ甲，乙兩船及ビ音ノ速サハ毎秒幾「メートル」ナルカ。

甲船毎秒 8 米，乙船 4 米，音 330 米

**2. 速度變更問題**

矢張リ時速×所要時間＝全距離，$\frac{全距離}{所要時間}$＝時速，$\frac{全距離}{時速}$＝所要時間ヲ用ヒテ方程式ヲ作ル。



**例 315.** A 地ト B 地ヲ結ブ二ツノ電車線路アリ。甲線路ノ距離ハ 36 哩ニシテ，乙線路ノ距離ハ 40 哩ナリ。甲線路ノ電車ガ途中無停車ニテ走行スルニ要スル時間ヲ現在ヨリ更ニ 3 分短縮スル爲メニハソノ平均時速ヲ 3 哩丈増大スルヲ要ストイフ。乙線路ノ電車ガ途中無停車ニテ甲ノ現在ノ所要時間ヲ以テ走行セシニハソノ平均時速ヲ幾何哩トスベキカ。

所要ノモノハ乙線路ノ電車ノ平均時速デアルガ，甲線ノ現在ノ所要時間ヲ求メルコトガ先決問題デアルカラ，コレヲ未知數トシテ方程式ヲ作ル。

【解】 甲線路ノ現在ノ所要時間ヲ $x$ 時間トスレバ，現在ノ平均時速ハ$\frac{36}{x}$哩デ，所要時間ヲ 3 分短縮シタトキノ平均時速ハ$\dfrac{36}{x-\frac{3}{60}}$時間デアル。


題意ニヨリ　$\dfrac{36}{x-\frac{3}{60}}=\dfrac{36}{x}+3$……………………①

分母ヲ拂ヘバ　$36x=36\left(x-\frac{1}{20}\right)+3x\left(x-\frac{1}{20}\right)$

整頓スレバ　$20x^2-x-12=0$　$\therefore\ (5x-4)(4x+3)=0$

所要時間 $x$ ハ正ナルベキ故　$4x+3\neq 0$　$\therefore\ x=\frac{4}{5}$

コノ値ハ①ノ分母ヲ 0 ナラシメズ

依テ甲線ノ現在ノ所要時間ハ $\frac{4}{5}$ 時間デアル。

乙線路ノ距離ハ 40 哩デアルカラ，之ヲ $\frac{4}{5}$ 時間デ走行スルタメノ

平均時速ヲ $v$ 哩トスレバ　$v=\dfrac{40}{\frac{4}{5}}=50$

時速 50 哩ハ實際問題トシテ適當デアル。

答 平均時速 50 哩

[illegible] 甲線ノ現在ノ所要時間 $x$ 時間ノ他ニ，現在ノ平均時速 $v$ 哩ヲ補助ノ未知數ニ用ヒルト方程式ハ $vx=36$ ……①

$$(v+3)\left(x-\frac{3}{60}\right)=36 \quad\cdots\cdots②$$

コレヲ解イテ $v$, $x$ ヲ求ムレバヨイ。

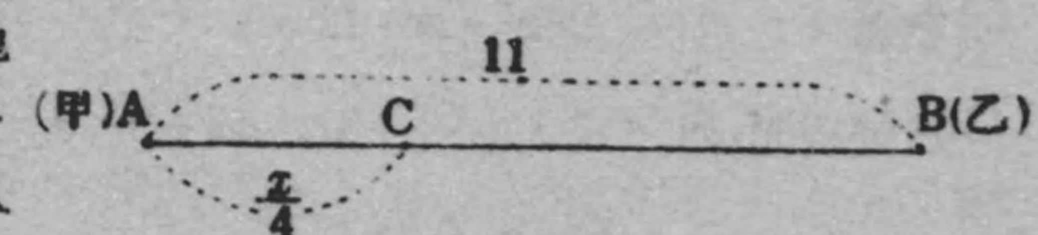
**【試練問題】** 某地ヨリ自動車ニテ停車場ニ行クニ，毎時 20 粁ノ速サナラバ發車後 12 分ニ達スベク，又 24 粁ノ速サナラバ發車ト同時ニ達スベシトイフ。10 分前ニ到着セントスルニハ毎時幾粁ノ速サトスベキカ。 (東築. 松山高)

答 28.8 粁

**例 316.** 或人甲地ヲ發シテ乙地ニ向ヒシガ出發後 15 分ニシテ忘レ物ヲナセルコトニ氣付キタルニヨリ速サヲ毎時半粁ダケ増シテ甲地ニ戻リ直チニ其ノ速サデ再ビ乙地ニ向ヒ豫定ヨリ 10 分遅レテ同地ニ到着シタリ。此ノ人ノ初メノ速サヲ求ム。但シ兩地間ノ距離ハ 11 粁ナリトス。

考ヘ方 途中デ速度ヲ變更スル問題ハ變更地點ヲ圖示シテ解ケバ考ヘ方モ説明モ容易ニナル。

**【解】** 甲地ヲ A，乙地ヲ B，忘レ物ニ氣付キタル點ヲ C トシ，此人ノ初メノ速サヲ毎時 $x$ 粁トスレバ




$AB=11$, $AC=\frac{x}{4}$ (AC 間ヲ 15 分デ歩イタカラ)

コノ人ノ豫定ノ所要時間ハ $\frac{11}{x}$ 時間デ，實際ニ要シタ時間ハ初メノ 15 分ト，其後 AC+AB 間ヲ時速 $\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 粁デ行クニ要スル時間



トノ和 $\frac{1}{4}+\frac{\frac{x}{4}+11}{x+\frac{1}{2}}$ 時間デ，之ガ豫定ノ時間ヨリ 10 分多キ故

$$\frac{1}{4}+\frac{\frac{x}{4}+11}{x+\frac{1}{2}}=\frac{11}{x}+\frac{10}{60} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

整頓シテ $\frac{1}{4}+\frac{x+44}{4x+2}=\frac{11}{x}+\frac{1}{6}$

分母ヲ拂ツテ整頓スレバ $(x-4)(8x+33)=0$

$x>0$ ナルベキ故 $8x+33\neq0$ ∴ $x=4$

$x=4$ ハ①ノ分母ヲ 0 ナラシメズ，且時速 4 粁ハ實際問題トシテ適當デアル。

答 毎時 4 粁

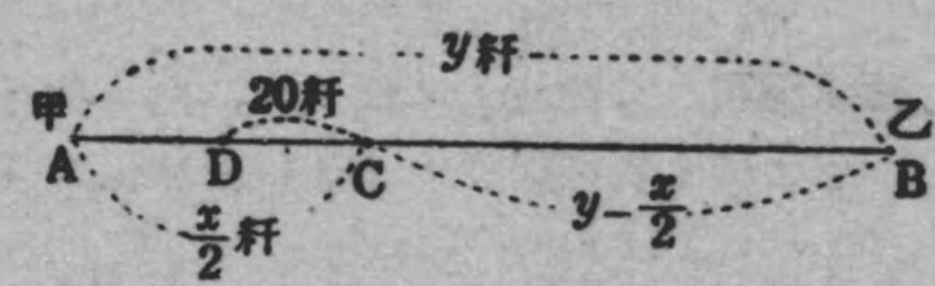
[illegible] 方程式①ノ代リニ，忘レ物ニ氣付イタ時ヨリ後ノ所要時間ノミヲ考ヘテ「忘レモノヲシナケレバ BC 間ヲ毎時 $x$ 粁ノ速サデ行クカラ $\frac{11-\frac{x}{4}}{x}$ 時間，實際ニハ AC+AB 間ヲ時速 $\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 粁デ歩イタカラ $\frac{\frac{x}{4}+11}{x+\frac{1}{2}}$ 時間ヲ要シ，ソノ差ガ 10 分デアル」ト考ヘテモヨイ。

**【試練問題】** 或人若干キロメートルヲ旅行セシニ，其内 56 キロメートルヲ汽車ニテ，殘リヲ馬車ニテ行ケリ。然ルニ若シ殘路ヲ馬車ニテ行カズシテ，汽車ニテ續ケ行クトスレバ，馬車ガ到着セシ時汽車ハ 35 キロメートル先ニ行キ過ギ，又馬車ガ 5 キロメートルヲ行ク間ニ汽車ハ全距離ノ四分ノ一ノ所ニ達スルト云フ。然ラバ汽車ト馬車トノ速サノ比及ビ殘路ノ道程如何。 (廣島)

答 速サノ比 7 : 2，殘路 14 粁

**例 317.** 甲地ヨリ乙地ニ向ヘル自轉車ガ出發後 30 分ノ後ニ故障ヲ生ジ 35 分間滯留シテ修繕シタル後，前ノ$\dfrac{5}{4}$ノ速サニテ走リシニ豫定ノ時刻ヨリ 20 分遲レテ乙地ニ到着セリ。若シ此ノ故障ガ前ヨリ $20km$ ダケ甲地ニ近キ所ニテ起リ，修繕ニ要セシ時間モソノ後ノ速サモ前述ノ通リナリトスレバ前ノ時刻ヨリ 5 分早ク乙地ニ到着スベシト云フ。自轉車ノ初メノ速サ及ビ甲乙兩地間ノ距離如何。

所要ノモノヲ未知數トシ，豫定ノ所要時間ヲ表ハス式ト實際ノ所要時間ヲ表ハス式トヲ比較シテ方程式ヲ導ク。




【解】 自轉車ノ初メノ速サヲ毎時 $x$ 粁，兩地間ノ距離ヲ $y$ 粁トスルト豫定ノ所要時間ハ $\dfrac{y}{x}$ 時間デアル。今甲地ヲ A，乙地ヲ B，故障ヲ生ジタ地點ヲ C トスルト

$$AC=\frac{x}{2}(\text{粁})\qquad BC=y-\frac{x}{2}(\text{粁})\quad \text{トナル。}$$

實際ノ所要時間ハ，最初ノ 30 分ト修繕ノタメノ 35 分ト CB 間ヲ毎時 $\dfrac{5}{4}x$ 粁ノ速サデ行クニ要スル時間トノ和デ之ガ豫定ノ時間ヨリ 20 分遲レタカラ

$$\frac{30}{60}+\frac{35}{60}+\frac{y-\dfrac{x}{2}}{\dfrac{5}{4}x}=\frac{y}{x}+\frac{20}{60}\ \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

次ニ第二ノ場合ニ故障ヲ生ジタ地點ヲ D トスルト

$$AD=\frac{x}{2}-20,\qquad BD=y-\frac{x}{2}+20\quad \text{トナリ，}$$

前ノ場合ヨリ 5 分早ク着イタカラ



$$\frac{\dfrac{x}{2}-20}{x}+\frac{35}{60}+\frac{y-\dfrac{x}{2}+20}{\dfrac{5}{4}x}=\frac{y}{x}+\frac{20}{60}-\frac{5}{60}\cdots\cdots ②$$

STOP ①，②ヲ整頓シテカラ解イテモ出來ルガ，①，②ノ左邊及ビ右邊ニハ夫々共通ナモノガアルカラ，コノマヽ邊々減ジルト簡單ナ方程式ヲ導キ得ルト考ヘテ

GO ①－②ヨリ
$$\frac{20}{x}-\frac{20}{\dfrac{5}{4}x}=\frac{5}{60}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

$$\therefore\ \frac{20}{x}-\frac{16}{x}=\frac{5}{60}$$

$$\therefore\ \frac{4}{x}=\frac{1}{12}\qquad \therefore\ x=48\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

④ヲ①ニ代入シテ $\dfrac{65}{60}+\dfrac{y-24}{60}=\dfrac{y}{48}+\dfrac{20}{60}$

コレヲ解イテ $y=84$

コレラノ値ハ①，②ノ分母ヲ 0 ナラシメズ且題意ニ適スル。

**答** 自轉車ノ初メノ速サ毎時 48 粁，甲乙間ノ距離 84 粁

問題中ノ「前ノ時刻ヨリ」ヲ「豫定ノ時刻ヨリ」ト誤解スル者ガアル。尙方程式②ノ代リニ「5 分早ク乙地ニ到着スル原因ハ CD 間即チ 20 粁ヲ初メノ場合ニハ毎時 $x$ 粁ノ速サデ走リ，後ノ場合ニハ毎時$\dfrac{5}{4}x$ 粁ノ速サデ走ツタ爲デアル」ト述ベテ直チニ③ヲ導イテモヨイ。

【試練問題】 A地點ヨリB地點ニ向フ飛行機アリ。今A地點ヨリ $300km$ 距リタル地點ニテ故障ノタメ不時着陸シ，2 時間ニテ修理ヲ完了シ，然ル後前ノ速サノ $\dfrac{2}{3}$ ヲ以テ B 地點ニ到着シタ

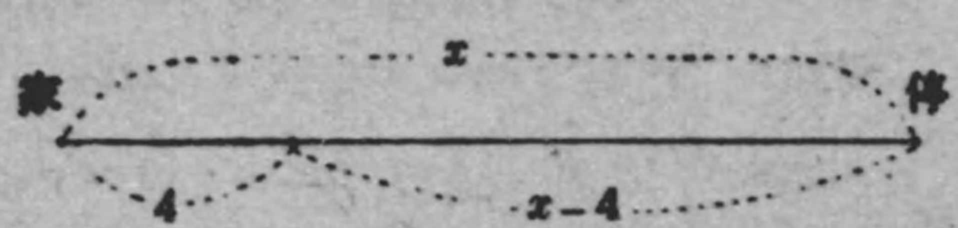
ル=定刻ヨリ4時間遲延セリ。若シ此故障ガ出發ヨリ3時間後ニ起ラバ，定刻ヨリ3時間遲延スルト云フ。A，B間ノ距離如何。　　(横專. 工)

■ 1500 粁

**例 318.** 或人停車場ヨリ出迎ヘノ自動車ニテ歸宅スル豫定ナリシニ，汽車ガ 20 分延着シ且ツ自動車ガ見當ラザリシタメ徒歩ニテ家路ヲ急ギシニ，家ヨリ4粁手前ニテ停車場ニ向フ自動車ニ會ヒ，ソレニ乘リテ豫定ヨリ1時間 10 分後レテ歸宅セリ。自動車ハ1時間 30 分後レテ着ク汽車ニ丁度間ニ合フヤウ，出迎ヘニ行ク途中ナリシトイフ。ソノ人毎時4粁ノ速サニテ歩キシモノトシテ停車場ト家トノ距離ヲ求メヨ。

[illegible]　相當條件ガ複雜デ，題意ソノマヽガ直チニ式ニナラヌカラ，題意ヲ圖示シテ考ヘ，汽車ガ驛ヘツク豫定ノ時刻ヲ基準ニシテ歸宅ノ時刻，自動車ノ家ヲ出タ時刻等ヲ表ハス式ヲ考ヘテ方程式ヲ導ク。

【解】 家ト停車場トノ距離ヲ $x$ 粁，自動車ノ速サヲ毎時 $y$ 粁，汽車ガ停車場




ニツク豫定ノ時刻ヲ $t$ 時トスルト，自動車ハ停車場カラ家マデニ $\frac{x}{y}$ 時間ヲ要スルカラ家ヘ着ク豫定ノ時刻ハ $\left(t+\frac{x}{y}\right)$ 時デアル。

實際ニハ汽車ハ $\left(t+\frac{20}{60}\right)$ 時ニ驛ヘツキ，其後 $x-4$ 粁ヲ歩キ，4 粁ヲ自動車ニ乘ツテ歸宅シタカラ



歸宅シタ時刻ハ $\left(t+\frac{20}{60}+\frac{x-4}{4}+\frac{4}{y}\right)$ 時デ，之ガ豫定ノ時刻ヨリ 1 時間 10 分遲レタノデアルカラ

$$t+\frac{20}{60}+\frac{x-4}{4}+\frac{4}{y}=t+\frac{x}{y}+1\frac{10}{60}$$

整頓スレバ　$$\frac{x-4}{4}=\frac{x-4}{y}+\frac{5}{6}\cdots\cdots①$$

自動車ハ $\left(t+1\frac{1}{2}\right)$ 時ニ丁度驛ヘ着ク豫定デ家ヲ出タノデアルカラ，

自動車ガ家ヲ出發シタノハ $\left(t+1\frac{1}{2}-\frac{x}{y}\right)$ 時デ，其後 4 粁ヲ往復シテ家ヘハ矢張リ豫定ノ時刻ヨリ 1 時間 10 分遲レテ着イタカラ

$$\left(t+1\frac{1}{2}-\frac{x}{y}\right)+\frac{4}{y}\times 2=t+\frac{x}{y}+1\frac{10}{60}$$

整頓スレバ　$$\frac{2(x-4)}{y}=\frac{2}{6}\qquad\therefore\quad\frac{x-4}{y}=\frac{1}{6}\cdots\cdots②$$

②ヲ①ニ代入シテ　$$\frac{x-4}{4}=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\qquad\therefore\quad x=8$$

$x=8$ ハ①，②ノ分母ヲ 0 ナラシメズ，且 4 粁ヨリモ大デアルカラ題意ニ適スル。

■ 8 粁

【別法】 延着ノ原因ノミヲ考ヘテ方程式ヲ作ツテ見ル。

【解】 家ヘ 1 時間 10 分遲レテ着イタ原因ハ，汽車ノ延着シタ 20 分ト，$(x-4)$ 粁ヲ自動車デ走ル代リニ，毎時 4 粁ノ速サデ歩イタタメニ生ズル時間ノ差ニ依ル。

$$\therefore\quad\frac{20}{60}+\left(\frac{x-4}{4}-\frac{x-4}{y}\right)=1\frac{10}{60}\cdots\cdots①$$

自動車ガ人ト出會ツテカラ，家ヘ歸ラズニ直チニ驛ヘ向ヘバ 1 時間 30 分遲レテ驛ヘ着クカラ

$$\frac{20}{60}+\frac{x-4}{4}+\frac{x-4}{y}=1\frac{30}{60}\cdots\cdots②$$

①+②ヨリ　$$\frac{4}{6}+\frac{2(x-4)}{4}=2\frac{4}{6}\qquad\therefore\quad\frac{x-4}{4}=1\qquad\therefore\quad x=8$$

■ 8 粁

何レノ解法ニ依ルモ，①式ハ比較的容易ニ得ラレルガ；②式ヲ導キ得ナイ者ガ多イ。延着シタノハ何ニ較ベテカ，又ソノ原因ハ何ニヨルカヲハツキリト考ヘル事ガ大切デアル。

【試練問題】 或ル汽車ニ乘ラウトスル人ガ，ソノ汽車ノ發車時刻ヨリ5分前ニ驛ニ着ク豫定デ家ヲ出タ。1粁歩イテカラ，自宅ノ時計ガ 35 分遅レテ居タコトヲ知ツテ，直チニ自動車ニ乘ツタトコロガ，列車延着ノタメ5分ダケ發車時刻ガ延ビタノデ，丁度間ニ合ツタ。若シ初メカラ自動車デ行ケバ，此ノ列車ノ發車シタ時刻ヨリ 12.5 分前ニ驛ニ着イタ筈デアルトイフ。

此ノ人ノ歩ク速サヲ毎時4粁トシテ，其ノ家ヨリ驛マデノ道程（ミチノリ）ヲ求メヨ。　（多　工）

3粁

### 3. 出遇ヒ，追越問題

出遇ヒ，追越問題ハ出發點，出遇ヒ點，追越點等ヲ圖示シ，兩地點間ノ距離ヲ表ハス式ヲ考ヘテ方程式ヲ得ルコトガ多イ。

**例 319.** 甲乙兩港間ノ距離ハ 147 浬ナリ。今A汽船ガ甲港ヲ出發シテ乙港ニ向ヒタル後1時間ヲ經テB汽船ガ乙港ヲ出發シテ甲港ニ向ヘリ。而シテ途中ニ於テ出會ヒソノ後A汽船ハ4時間 48 分ニテ乙港ニ着シ，B汽船ハ4時間 10 分ニテ甲港ニ着セリトイフ。兩汽船ノ速サハ各々毎時幾浬ナルカ。

兩船ノ速サヲ用ヒテ出合ヒ點ト兩港間ノ距離ヲ表ハス式ヲ導イテ方程式ヲ作ル。


【解】 A，B 兩汽船ノ速サヲ夫々毎時 $x$ 浬，$y$ 浬トシ，兩船ノ出會ヒシ地點ヲ丙トスレバ，

A 船ハ丙乙間ヲ航行スルニ 4時間 48 分ヲ要シタカラ



丙，乙間ノ距離ハ $4\frac{48}{60}x$ 浬

同樣ニ甲丙間ノ距離ハ $4\frac{10}{60}y$ 浬デ表ハサレル。

題意ニヨリ甲乙間ノ距離ハ 147 浬ナル故

$$4\frac{48}{60}x+4\frac{10}{60}y=147 \cdots\cdots ①$$

兩船ノ出發後出會フ迄ニ要スル時間ヲ比較シテ

$$\frac{4\frac{10}{60}y}{x}=\frac{4\frac{48}{60}x}{y}+1 \cdots\cdots ②$$

STOP ②ノ分母ヲ拂ヘバ $x$，$y$ ニ關スル二次ノ同次方程式ヲ得ルコトニ着眼シテ

GO $xy \neq 0$ ナル故②ヨリ $4\frac{1}{6}y^2=4\frac{4}{5}x^2+xy$

$$\therefore\ 144x^2+30xy-125y^2=0$$

$$\therefore\ (6x-5y)(24x+25y)=0$$

$x>0$，$y>0$ ナルベキ故 $24x+25y \neq 0$ 　$\therefore\ x=\frac{5}{6}y \cdots\cdots ③$

③ヲ①ニ代入シテ $\frac{24}{5}\left(\frac{5}{6}y\right)+\frac{25}{6}y=147$

$\frac{49}{6}y=147$ 　$\therefore\ y=18$ 　$\therefore\ x=15$

コレラノ値ハ何レモ②ノ分母ヲ 0 ナラシメズ且題意ニ適スル。

A 船毎時 15 浬，B 船毎時 18 浬

方程式②カラ同次方程式ヲ導キ得ルコトヲ見逃シテハ計算ガ複雜ニナル。②ノ右邊ニ於ケル「+1」ヲ「−1」ト誤ルモノガ多イ。

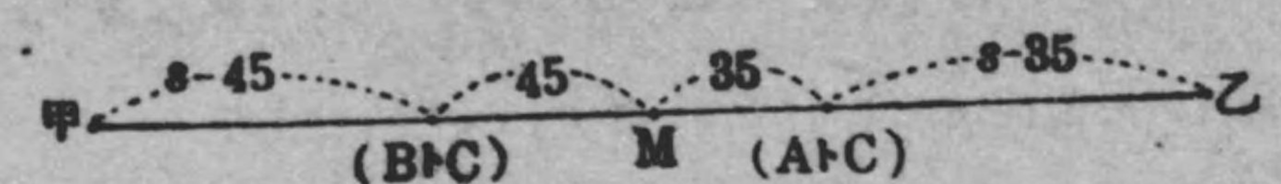
【試練問題】 甲船ハA港ヲ發シテB港ニ向ヒ，之ト同時ニ乙船ハB港ヲ發シテA港ニ向ヒタルニ，兩船ノ出會ヒタルトキ其ノ航程ノ差 63 粁ナリシトイフ。ソレヨリ甲船ハ4時間ヲ經テB港ニ着シ，乙船ハ9時間ヲ經テA港ニ着セリトイフ。A，B兩港間ノ距離及ビ各船ノ速サヲ求メヨ。　（高商商）

A，B 間ノ距離 315 粁
甲船ノ速サ毎時 31.5 粁，乙船，毎時 21 粁

**例 320.** A，B兩飛行機ハ乙地ニ向ケ甲地ヲ，C飛行機ハ甲地ニ向ケ乙地ヲ，何レモ同時ニ出發セリ。Cハ甲乙兩地ノ中央ヨリ 35 粁乙地ノ方ヘ寄リタル所ト，45 粁甲地ノ方ヘ寄リタル所トニ於テ夫々AトBトニ行違ヘリ。而シテAガ乙地ニ到着シタルトキ，Bハ尚兩地ノ中央ヨリ兩地間ノ距離ノ $\frac{1}{10}$ ダケ乙地ニ寄リタル所ニアリシトイフ。甲乙兩地間ノ距離及ビ各飛行機ノ速力ノ比ヲ求メヨ。

[illegible]　飛行機ノ行違ヒシ地點ガ兩地ノ中央ノ地點ヲ基準ニシテ與ヘラレテヰルカラ，兩地間ノ距離ヲ $2s$ 粁トスル方ガ出合點マデノ距離ヲ表ハスノニ都合ガヨイ。

【解】 甲，乙兩地間ノ距離ヲ $2s$ 粁トシ，A，B，C 各機ノ速サヲ毎時 $x$ 粁，$y$ 粁，$z$ 粁トス。C機トA機トガ出合フ迄ニA機ハ $(s+35)$




粁，C機ハ $(s-35)$ 粁ヲ飛行シ，兩機ハ同時ニ出發シタノデアルカラ，出會フ迄ノ所要時間ハ相等シイ。

$$\therefore\quad \frac{s+35}{x}=\frac{s-35}{z}\quad\cdots\cdots①$$

同樣ニBトCトノ所要時間ヨリ

$$\frac{s-45}{y}=\frac{s+45}{z}\quad\cdots\cdots②$$

Aガ乙地ニ到着スル迄ニBハ　$s+2s\times\frac{1}{10}$ 即 $\frac{6}{5}s$ 粁飛行シタカラ

$$\frac{2s}{x}=\frac{\frac{6}{5}s}{y}\quad\cdots\cdots③$$

[illegible]　未知數ガ $x$，$y$，$z$，$s$ ノ四ツニ對シテ方程式ガ三ツデアルカラ $x$，$y$，$z$ ノ各値ヲ決定スルコトハ出來ナイガ，①ヨリハ $x:z$，②ヨリハ $y:z$ 等ガ $s$ ヲ用ヒテ表ハシ得ルコトニ着眼シテ $x:y:z$ ヲ求メル。



GO　①ヨリ　$\frac{x}{z}=\frac{s+35}{s-35}$ $\cdots\cdots①'$

②ヨリ　$\frac{y}{z}=\frac{s-45}{s+45}$ $\cdots\cdots②'$

③ヨリ　$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{5}{3}$ $\cdots\cdots③'$

①′÷②′ヨリ　$\frac{x}{y}=\frac{(s+35)(s+45)}{(s-35)(s-45)}$ $\cdots\cdots④$

③′ト④ヨリ　$\frac{(s+35)(s+45)}{(s-35)(s-45)}=\frac{5}{3}$

分母ヲ拂ツテ整頓スレバ　$s^2-320s+1575=0$

之ヲ解キテ　$s=5$ 又ハ $s=315$

題意ニヨリ $s>45$ ナルベキ故 $s=315$　依テ兩地間ノ距離 $2s=630$

$s=315$ ヲ②′ニ代入シテ　$\frac{y}{z}=\frac{270}{360}=\frac{3}{4}$ $\cdots\cdots⑤$

③′ト⑤トヨリ　$x:y:z=5:3:4$

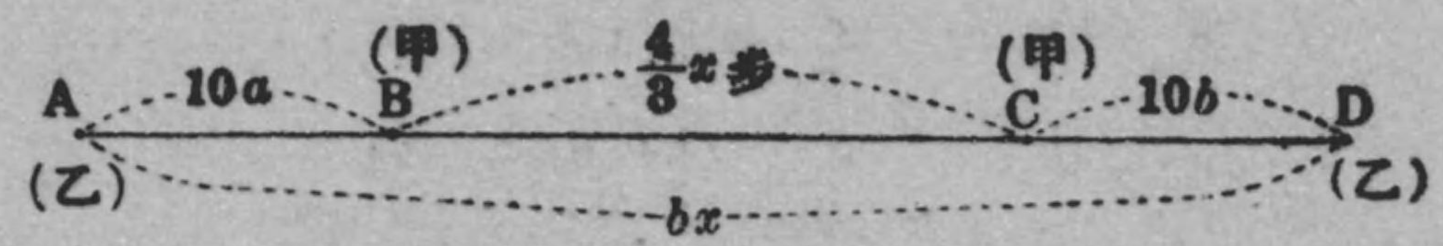
答 兩地間ノ距離 630 粁，速サノ比 5：3：4

**【試練問題】** 200 粁以上隔リタル甲乙兩地アリ。A，Bナル二臺ノ自動車ガ乙地ニ向ヒ甲地ヲ出發スルト同時ニC，Dナル二臺ノ自動車ガ甲地ニ向ヒテ乙地ヲ出發セリ。AトCトハ甲地ヲ距ツル 120 粁ノ地點ニテ出會ヒ，AトDトハ甲地ヲ距ツル 140 粁ノ地點ニテ出會ヒ，又BトCトハ乙地ヲ距ツル 126 粁ノ地點ニテ出會ヒ，BトDトハ甲地ト乙地トノ中央ノ地點ニテ出會ヘリ。甲乙兩地間ノ距離ハ幾何ナルカ。

答 210 粁

**例 321.** 甲ガ 10 歩先キニ出懸ケタル後ヲ乙ガ追ヒ行クニ，甲ノ4歩スル間ニ乙ハ3歩シ，甲ガ3歩ニテ行ク距離ヲ乙ハ2歩ニテ行クトイフ。乙ハ追ヒ付キテヨリ自己ノ歩幅ニテ 10 歩ダケ甲ヲ追ヒ拔カントスルニハ最初ヨリ幾歩ノ後ナルカ。

**方針**　諸君ノ苦手ノ問題デ，手ヲ下シ得ナイ者ガ多イ。矢張リ出發點追越點等ヲ圖示シ甲，乙ノ一歩ノ步幅ヲ補助ノ未知數ニ選ンデ步行距離ヲ表ハス式ヲ作ツテ方程式ヲ導ク。




【解】 甲，乙ノ一步ノ步幅ヲ夫々 $a$ 米，$b$ 米トスルト甲ガ 3 步デ行ク距離ヲ乙ハ 2 步デ行クカラ

$$3a=2b\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

求ムル步數ヲ $x$ 步トスルト乙ガ步イタ距離 AD ハ $bx$ 米，

甲ガ 4 步スル間ニ乙ハ 3 步步クカラ，乙ガ $x$ 步步ク間ニ甲ハ $\frac{4}{3}x$ 步步ク，乙ガ出發ノトキ甲ハ前方 $10a$ 米ノ位置ニアリ，其後 $\frac{4}{3}x$ 步，步イテ C 點ニ達セシトキ，乙ハ $10b$ 米ダケ追ヒ拔イテキタノデアルカラ

$$10a+\frac{4}{3}ax+10b=bx\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

①ヨリ　$b=\frac{3}{2}a$　之ヲ②ニ代入シテ

$$10a+\frac{4}{3}ax+15a=\frac{3}{2}ax$$

$a\neq0$ ナル故　$60+8x+90=9x$　　$\therefore\ x=150$

コノ値ハ題意ニ適スル。　　　　**答**　150 步ノ後

**指導綱要**　各々ガ步イタ步數ヲ用ヒテ步行距離ヲ表ハス式ヲ考ヘルコトガ解決ノ急所デアル。

**【試練問題】** 兎ヲ追ヒツツアル犬アリ。兎ガ 2 步行ク間ニ犬ハ 3 步行キ兎ノ 5 步ニテ行ク距離ヲ犬ハ 3 步ニテ行クト云フ。今兎ト犬トハ犬ノ步幅ニテ 20 步距リ居ルトセバ，犬ガ何步走リテ兎ニ追付クベキカ。　　　（上 農）

---

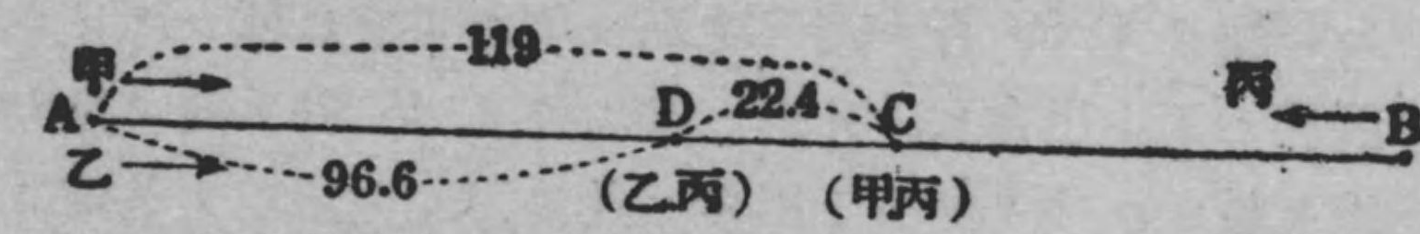
**答**　$33\frac{1}{3}$ 步



**例 322.*** 甲列車ハ午前 6 時 55 分ニ，乙列車ハ午前 7 時 40 分ニ何レモA驛ヲ出發シテB驛ニ向ヒ進行シタルニ，甲列車ハ午前 10 時 25 分ニ，マタ乙列車ハ午前 11 時 7 分ニ B驛ヨリ進行シ來レル丙列車ニ出會ヘリ。丙列車ガ甲列車ト乙列車トヨリ等シキ距離ニアリシハ何時カ。但シ，甲乙兩列車ノ速度ハ每時夫々 34 粁，28 粁ナリ。

**方針**　先ヅ丙ノ時速ヲ決定スルコトガ先決問題デ，然ル後，甲，乙，丙各列車ノ位置ヲ圖示シテ所要ノ時刻ヲ求メル。

【解】




甲ト丙トノ出會ヒ點ヲ C，乙ト丙トノ出會點ヲ D トスルト

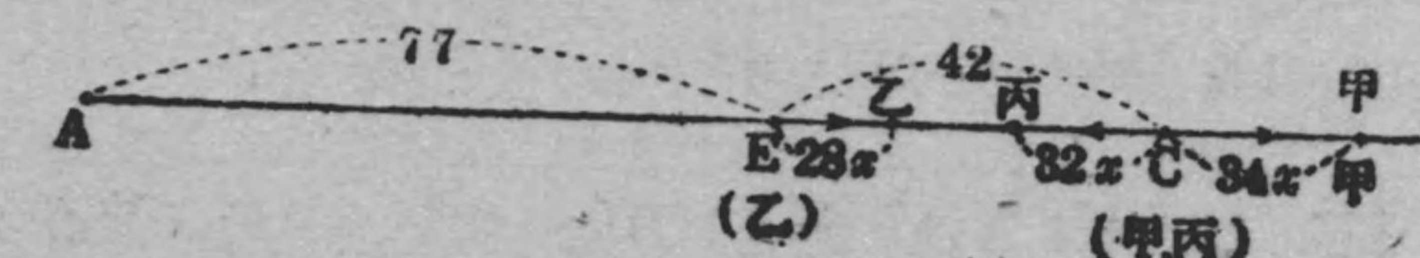
甲列車ハ AC 間ヲ 3 時間 30 分（6 時 55 分カラ 10 時 25 分マデ）デ走ツタカラ　$AC=34\times3\frac{1}{2}=119$（粁）

乙列車ハ AD 間ヲ 3 時間 27 分デ走ツタカラ

$$AD=28\times3\frac{27}{60}=96.6\ (\text{粁})$$

從ツテ　　$CD=119-96.6=22.4$（粁）

丙ハ CD 間ヲ行クニ 10 時 25 分カラ 11 時 7 分マデ即チ 42 分ヲ要シタカラ丙ノ時速ヲ $v$ 粁トスレバ　$\frac{42}{60}v=22.4$　　$\therefore\ v=32$




次ニ午前 10 時 25 分ニ乙列車ノアリシ位置ヲ E トスレバ，AE 間ヲ乙列車ハ 10 時 25 分−7 時 40 分 即 2 時間 45 分デ走ツタカラ

$AE=28\times2\frac{3}{4}=77$（粁）　$\therefore$ $CE=119-77=42$（粁）

所要ノ時刻ヲ 10 時 25 分ヨリ $x$ 時間ノ後トスレバソノ時刻ニ於ケル

甲丙間ノ距離ハ $(34x+32x)$ 粁，

乙丙間ノ距離ハ $\{42-(28x+32x)\}$ 粁デコレガ相等シクナケレバ

ナラヌカラ　$34x+32x=42-(28x+32x)$

$\therefore\quad 126x=42 \quad \therefore\quad x=\frac{1}{3}$ （時間）

依テ求ムル時刻ハ午前 10 時 25 分＋20 分 ＝ 10 時 45 分

コノ時刻ハ 10 時 25 分ト 11 時 7 分トノ間デアルカラ題意ニ適スル

答 午前 10 時 45 分

【試練問題】 甲ガB地ニ向ヒA地ヲ出發シタル後若干時間ヲ經テ乙モA地ヲ出發シ，甲ト同ジ速度ニテB地ニ向ヒ進行セリ。甲ハB地ヨリ 50 粁手前ノ地點ニテ丙ヲ追ヒ越シ，ソレヨリ2時間後ニ丁ト出會ヒ，又乙ハB地ヨリ 45 粁手前ノ地點ニテ丙ヲ追ヒ越シ，次イデ丁ト出會ヒ其後 40 分ニシテB地ヨリ 31 粁手前ノ地點ヲ通過シタリト云フ。甲ガB地ニ到着シタル時乙ハ如何ナル地點ニ在リシカ。但シ丙ハA地ヨリB地ニ向ヒ，丁ハB地ヨリA地ニ向ヒ，速度ハ毎時夫々 1.5 粁，2.25 粁ヲ以テ進行中ナリ。（大商豫）

答 B 地ヨリ 25 粁手前

ヒント 甲ト乙トハ等速デアルカラ，甲乙間ノ距離ハ常ニ一定ナルコトニ着眼シ，之ヲ求ムレバ所要ノ答ヲ得ル。

## 4. 折返シ運動ノ問題

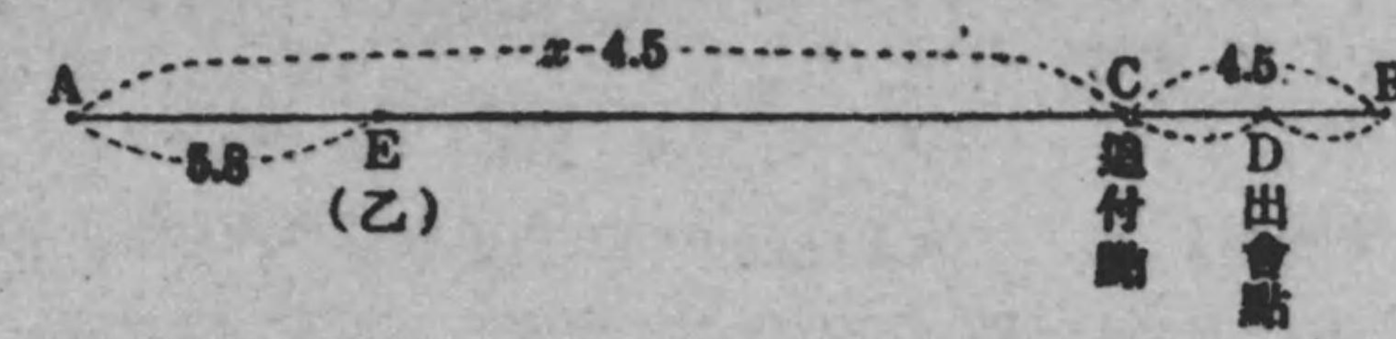
矢張リ往復ノ道程ヲ圖示シテ考ヘル。

**例 323.** 甲乙兩人A地ヲ發シテB地ニ向ヒ，B地ニ到着スルヤ直ニ引返スモノトス。今甲ハ乙ヨリ1時間遲レテ出發セシモB地ヨリ 4.5 粁ノ所ニテ乙ニ追付キ，其後一時間ヲ經テ甲，乙相會シ，甲ガA地ニ歸着セルトキ乙ハ尚 A 地ヨリ 5.8 粁ノ所ニアリト云フ。A，B兩地間ノ距離如何。



追付點，出會點等ヲ圖示シテ方程式ヲ導ク。

【解】




A，B 兩地間ノ距離ヲ $x$ 粁，甲乙ノ時速ヲ夫々 $a$ 粁，$b$ 粁トス。追付點ヲ C，出會點ヲ D，甲ガ歸着ノトキ乙ノアリシ位置ヲEトスルト題意ニヨリ　BC＝4.5，　AE＝5.8（粁）

甲ハ乙ヨリ 1 時間遲レテ出發シ，點 C デ甲ニ追付イタカラ，AC間ヲ歩クニ要スル時間ハ乙ヨリ 1 時間少ナイ。

$$\therefore\quad \frac{x-4.5}{a}=\frac{x-4.5}{b}-1 \cdots\cdots ①$$

兩人ガ再ビ出會フ迄ニ，一時間ヲ要シ其間ニ兩人ノ歩イタ距離ノ和ハ 2BC ニ等シイ　$\therefore\quad a+b=9$ ⋯⋯ ②

甲ガ A 地ニ歸着セルトキ乙ハ E（但シ復路トス）ニアリシ故，甲ガ C ヨリ B ヲ經テ A ニ歸ル間ニ乙ハ C ヨリ B ヲ經テ E マデ歩イタコトニナル。

$$\therefore\quad \frac{4.5+x}{a}=\frac{4.5+(x-5.8)}{b} \cdots\cdots ③$$

STOP ①，③ヲ比較シ，邊々減ズレバ $x$ ガ消去サレル事ニ着眼シテ

GO ③－①ヨリ　$\frac{9}{a}=\frac{3.2}{b}+1$ ⋯⋯ ④

②ヨリ　$b=9-a \quad \therefore\quad \frac{9}{a}=\frac{3.2}{9-a}+1$

分母ヲ拂ツテ整頓スルト　$a^2-21.2a+81=0$

$$\therefore\quad a=10.6\pm\sqrt{31.36}=10.6\pm5.6=16.2 \text{ 又ハ } 5$$

(イ)　$a=16.2$ ノトキ ②ヨリ $b=9-16.2<0$ トナル故題意ニ適セズ。

(ロ)　$a=5$ ノトキ ②ヨリ $b=4$ コノ値ハ分母ヲ 0 ナラシメズ且題意ニ適スル。①ニ代入シテ　$\frac{x-4.5}{5}=\frac{x-4.5}{4}-1$

$$\therefore\quad x-4.5=20 \quad \therefore\quad x=24.5$$

24.5 ハ 4.5 及ビ 5.8 ヨリモ大デアルカラ題意ニ適スル。

答 24.5 粁（但シ甲ガ歸着ノトキ乙ハ歸路ニアリシモノトス）

**指導總括** 方程式③ノ代リニ甲ガ D カラ A マデ歸ル間ニ乙ハ D カラ B ヲ經テ E マデ歩イタコトヲ用ヒテ方程式ヲ作ルコトモ出來ルガ，ソレニハ點 D ノ位置ヲ先ヅ求メナケレバナラヌカラ，點 C 又ハ出發點ヲ基準ニシテ兩人ノ歩行距離ヲ比較スル方ガ簡單デアル。

**【試練問題】** 甲乙二人東西兩市間ヲ自動車ニテ往復ス。甲ガ東市ヲ出發スルト同時ニ乙ハ西市ヲ出發シタルニ初メ往路ニテハ西市ヨリ 20 粁ノ地點ニテ出會ヒ復路ニテハソレヨリ 1 時間 45 分後ニ東市ヨリ 17 粁ノ地點ニテ兩者出會ヘリ。毎時間ニ於ケル各自動車ノ速度及ビ兩市間ノ距離ヲ求メヨ。但シ往路ニテ兩者出會ヒタル後再ビ出會フマデニ甲ノ自動車ハ故障ニテ 9 分間停車セリ。　(山形高)

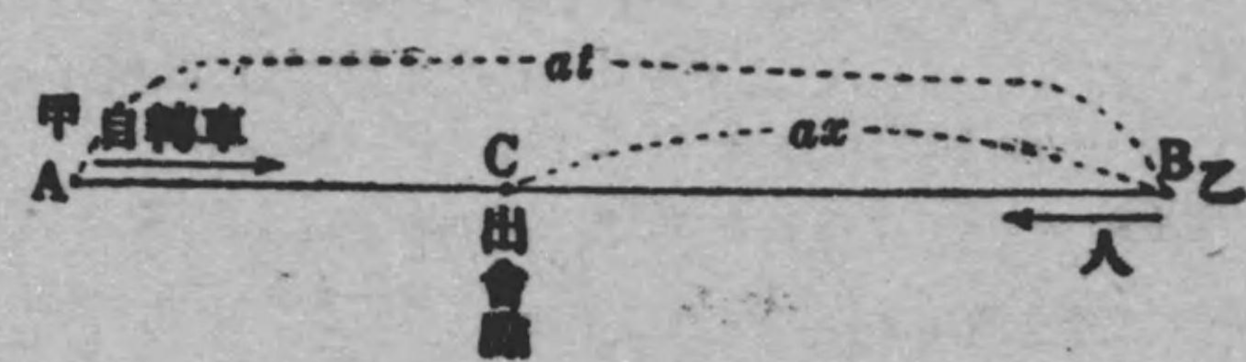
---

**答** 甲ノ時速 30 粁，乙ノ時速 24 粁，兩地間ノ距離 45 粁

**例 324.** 甲地ヨリ乙地ニ向ヒタル自轉車ト乙地ヨリ甲地ニ向ヒタル徒歩者トアリ。若シ自轉車ガ乙地ニ着シテ直チニ甲地ニ引返スモノトスレバ徒歩者ガ自轉車ヨリ早ク甲地ニ着スルタメニハ徒歩者ハ乙地出發後少ナクトモ幾分ニシテ自轉車ト出會ウベキカ。但シ自轉車ノ速サハ徒歩者ノ速サノ $n$ 倍ニシテ甲乙兩地間ヲ徒歩ニテ $t$ 分ヲ要スルモノトス。

**方針** 兩者ガ出會ヒタル時ヨリ甲地ニ列着スル迄ノ時間ヲ比較シテ解決スル。

**【解】** 甲地ヲ A，乙地ヲ B 兩者ノ出會ヒ點ヲ C トス。徒歩者ノ




速サヲ毎分 $a$ 米トスレバ題意ニヨリ自轉車ノ速サハ毎分 $na$ 米，AB 間ノ距離ハ $at$ 米トナル。今徒歩者ガ出發後自轉者ニ出會フ迄ノ時間ヲ $x$ 時間トスレバ BC 間ノ距離ハ $ax$ 米トナリ



出會ヒタル後，人ガ A 地ニ到着スル迄ノ時間ハ $(t-x)$ 分デ自轉車ハ人ニ出會ツテカラ A 地ニ到着スル迄ニハ $(ax+at)$ 米走ラネバナラヌカラ $\dfrac{ax+at}{na}$ 分ヲ要スル。依ツテ徒歩者ガ自轉者ヨリモ早ク甲地ニ着スルタメニハ　$t-x<\dfrac{ax+at}{na}$

$$na>0 \quad \therefore \quad n(t-x)< x+t$$
$$\therefore \quad x(n+1)> t(n-1)$$
$$n+1>0 \quad \therefore \quad x>\frac{n-1}{n+1}t$$

$\dfrac{n-1}{n+1}t$ ハ $t$ ヨリモ小ナル正數ナル故題意ニ適スル。

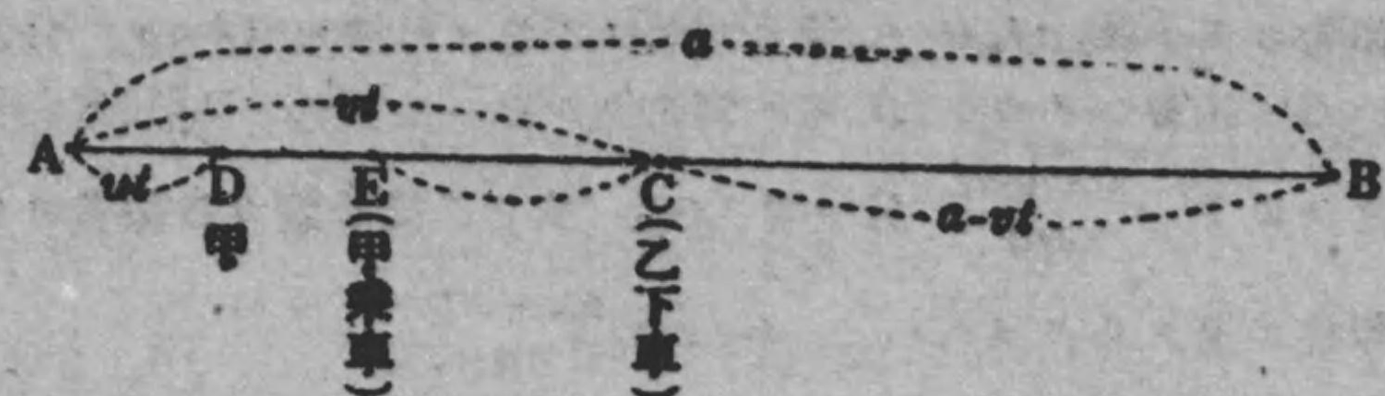
**答** 出發後少クトモ $\dfrac{n-1}{n+1}t$ 分ヨリ後

**指導總括** 出會ヒタル後自轉者ガ A 地ニ歸着スル迄ニ要スル時間ヲ表ハス式ヲ導クコトガ解決ノ急所デアル。

**例 325.*** $a$ 粁離レタル A，B 二市ヲ結ブ直線道路アリ。甲乙丙三人同時ニ A 市ヲ出發シ，此ノ道路ヲ經テ B 市ニ向ヒシニ，最初甲ハ徒歩ニテ進ミ，乙丙ハ自動車ヲ走ラセタリ。或ル時間後乙ハ下車シテ直チニ徒歩ニテ前進ヲ續ケ，丙ハ其場ヨリ直チニ自動車ヲ引キ返シテ甲ニ出會ヒ直チニ甲ヲ同車セシメ再ビ目的地ニ向ツテ進ミシニ，三者同時ニ B 市ニ到着セリト云フ。各人ノ徒歩ノ速サヲ毎時 $u$ 粁，自動車ノ速サヲ毎時 $v$ 粁トセバ，各人ガ此ノ旅行ニ要セシ時間ハ $\dfrac{a}{v}\cdot\dfrac{3v+u}{3u+v}$ 時間ナルコトヲ證明セヨ。

**方針** 矢張リ乙ノ下車セシ地點，甲丙ノ出會ヒ點等ヲ圖示シ，出發後乙ガ下車セシ時刻マデノ時間ヲ補助ノ未知數トシテ方程式ヲ導ク。

**【解】** 三人ガ出發シテヨリ $t$ 時間後ニ乙ガ下車シタモノトシ，乙ガ下車シタ地點ヲ C，ソノトキノ甲ノ位置ヲ D，甲丙ガ出會ヒシ地點ヲ E トスルト　$AC=vt$，$AD=ut$ 從ツテ $CD=(v-u)t$，$BC=a-vt$




依テ乙ガ AB 間ニ要シタ時間ハ

$$t+\frac{a-vt}{u}\text{時間}\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

STOP 次ニ終結式ニハ $t$ ガナイコトニ着眼シ，$t$ ヲ $a$, $u$, $v$ デ表ハス式ヲ導キ之ヲ①ニ代入スレバ所要ノ終結式ヲ得ル筈ト考ヘテ

GO 丙ガ C ヨリ引キ返シテ甲ニ出會フ迄ノ時間ヲ $x$ 時間トスルト CD$=(v-u)t$ 粁，甲，丙ノ速サハ每時 $u$ 粁及ビ $v$ 粁ナル故

$$x=\frac{(v-u)t}{u+v}\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

乙ガ下車シテカラ B ニ到着スル迄ニ丙ハ自動車デ CE 間ヲ往復シ更ニ CB 間ヲ走ラネバナラヌカラソノ所要時間ハ　$2x+\dfrac{a-vt}{v}$時間デ，題意ニヨリ之ガ CB 間ヲ乙ガ徒歩スルニ要セシ時間ニ等シイ。

$$\therefore\quad 2x+\frac{a-vt}{v}=\frac{a-vt}{u}\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

②ヲ③ニ代入シテ　$\dfrac{2(v-u)t}{u+v}+\dfrac{a-vt}{v}=\dfrac{a-vt}{u}$

$$\therefore\quad \frac{2(v-u)t}{u+v}=\frac{(a-vt)(v-u)}{uv}$$

$v-u\neq 0$ ナル故兩邊ヲ $v-u$ デ割リ，分母ヲ拂ツテ整頓スレバ

$$(3u+v)vt=a(u+v)$$

$$\therefore\quad t=\frac{a(u+v)}{(3u+v)v}\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

④ヲ①ニ代入シテ

$$\text{所要時間}=\frac{a(u+v)}{(3u+v)v}+\frac{a-\dfrac{a(u+v)}{(3u+v)}}{u}$$

$$=\frac{a(u+v)}{v(3u+v)}+\frac{2a}{3u+v}=\frac{a}{v}\cdot\frac{3v+u}{3u+v}$$

依テ證明シ得タリ。



【試練問題】 甲地ヨリ乙地ニ行カントスル團體ガアル。其ノ半數ハ初メ自動車ニ乘リ途中ヨリハ徒歩ニテ進ミ自動車ハ直チニ返スコトトシ，殘リノ半數ハ前半ト同時ニ出發シ，初メハ徒歩シ引返シ來レル自動車ニ出會フヤ直チニ之ニ乘リテ進ムコトトシタ。全員同時ニ午後六時ニ乙地ニ到着スルニハ出發時刻ヲ何時トスベキカ。但甲乙兩地間ノ距離ハ 100 粁ニシテ徒歩ノ速サハ每時 4 粁，自動車ノ速サハ每時 20 粁トスル。 (東 師)

答 午前 8 時

## 5. 擦レ違ヒ問題

擦レ違ヒ問題モ出會，追越問題ト殆ンド同ジ考ヘ方デ相互間ノ關係ヲ圖示シテ解決シ得ルコトガ多イガ，中ニハ圖示スル事ガ困難デ，最初ノ兩者間ノ距離ヲ $d$ 米，兩者ノ速サヲ每分 $a$ 米，$b$ 米 $(a>b)$ トスレバ

$$\left.\begin{array}{l}\text{出會フ迄ノ所要時間}=\dfrac{d}{a+b}\text{分}\\[2ex]\text{追付ク迄ノ所要時間}=\dfrac{d}{a-b}\text{分}\end{array}\right\}\text{ト考ヘテ方程式ヲ得ルコトガアル。}$$

**例 326.** 電車道ニ沿ヘル道路アリ。此道路ヲ走ル自動車內ノ一乘客ガ反對ノ方向ニ走ル電車ニ出會ヒタル時ヨリ互ニ相離ルヽ迄ニ要セシ時間ハ 2 秒ニシテ又同方向ニ走ル電車ニ追ヒ付キタルトキヨリ追越ス迄ニ要セシ時間ハ，此ノ間ニ於テ自動車ガ 3 秒間ノ急停車ヲナシタルタメニ，30 秒ナリシトイフ。電車ノ長サヲ 18 米トシテ自動車ノ速サヲ求メヨ。

方針 所要ノモノハ自動車ノ速サデアルガ，電車ノ速サヲ補助ノ未知數ニ選ンデ方程式ヲ作ル。

【解】 自動車ノ速サヲ每秒 $x$ 米，電車ノ速サヲ每秒 $y$ 米トスルト反對方向ノ場合ハ每秒 $(x+y)$ 米宛接近シ，出會ヒタルトキヨリ互ニ相離ルヽ迄ニ 2 秒ヲ要シタカラ　$\dfrac{18}{x+y}=2\cdots\cdots\cdots①$

STOP 次ニ同方向ノ場合ハ毎秒 $(x-y)$ 米宛電車ニ追付クカラ，長サ 18 米ノ電車ヲ追越スニ要スル時間ハ $\dfrac{18}{x-y}$ 秒デアルガ，コノ問題デハ途中デ自動車ガ 3 秒間ノ停車ヲシタカラ此式ハ用ヒラレナイ。コノ 3 秒ノ取扱ヒガコノ問題ノ急所デアル。

GO 同方向ノ場合ハ自動車ガ電車ニ追ヒ付イタトキカラ，追越スマデニ 30 秒ヲ要シタカラ，其間ニ電車ノ走ツタ距離ハ $30y$ 米，
自動車ハ途中デ 3 秒間停車シタカラ，實際ニ走ツタ距離ハ $27x$ 米デ之ガ電車ノ走ツタ距離ヨリ電車ノ長サダケ多クナケレバナラヌ。

依テ　$27x=30y+18$ ……………②

①ヨリ　$x+y=9 \quad \therefore \ y=9-x$ ……③

③ヲ②ニ代入シテ　$27x=270-30x+18$

$$\therefore \quad x=\frac{288}{57}=\frac{96}{19}=5\frac{1}{19}$$

コノトキ　$y=3\dfrac{18}{19}$ トナリ，①ノ分母ヲ 0 ナラシメズ且 $x>y$ ナル故題意ニ適スル。

答 每秒 $5\dfrac{1}{19}$ 米

方程式①モ②ト同樣ニ考ヘテ，2 秒間ニ兩者ノ走ツタ距離ノ和ガ電車ノ長サニ等シクナケレバナラヌト述ベテ $2x+2y=18$ トシテモヨイ。

【試練問題】 長サ 264 米ノ通常列車ト急行列車トガ行キ會ツテカラ行キ違ウマデニ七秒經ツタ。又通常列車中ノ人ハ急行列車ガ其ノ面前ヲ三秒デ行キ過ギルノヲ見タ。急行列車，通常列車ノ速サノ比ハ 5 : 4 デアル。各々一時間ノ速サハ幾粁カ，又急行列車ノ長サハ幾米カ。 (山口高，文)

答 急行列車ノ速サ　每時 132 粁，長サ 198 米
普通列車ノ速サ　每時 105.6 粁

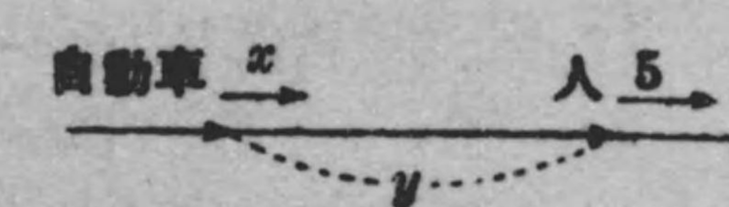


**例 327.** 甲乙兩市ヨリ一定時間每ニ發車シ，一定ノ速サヲ以テ途中無停車ニテ客ヲ輸送セル乘合自動車アリ。其ノ自動車道ニ沿ヒテ每時 5 粁ノ速サニテ步メル人ガ，此等ノ自動車ニ 15 分每ニ追越サレ，又 10 分每ニ行キ違フト云フ。然ラバ自動車ハ甲乙兩市ヨリ何分每ニ發車スルコトヽナルカ。又其ノ速サ如何。

自動車ハ一定時間每ニ發車シテ，一定ノ速サデ進ムカラ自動車ハ一定ノ間隔ヲ保ツテ走ツテキルコトニ着眼シ，之ヲ利用シテ方程式ヲ導ク。

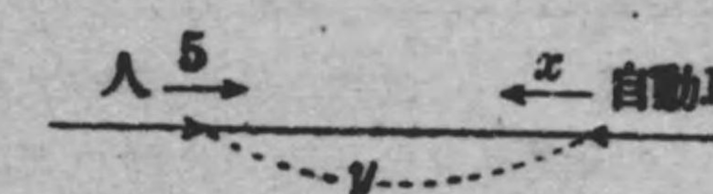
【解】 自動車ノ速サヲ每時 $x$ 粁，兩市ヨリ $t$ 分每ニ發車スルモノトスレバ或自動車ガ發車後 $\dfrac{x}{60}t$ 粁進ンダトキニ次ノ自動車ガ發車スルカラ自動車間ノ間隔ヲ $y$ 粁トスレバ　$y=\dfrac{xt}{60}$ ……………①

或自動車ニ追ヒ越サレタ瞬間ニ次ノ自動車ハ $y$ 粁後方ニアリ，每時ノ速サノ差ハ $(x-5)$ 粁デ，15 分後ニ追付カレルカラ




$$\frac{y}{x-5}=\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

次ニ或自動車ト行キ違ヒタル瞬間ニ次ノ自動車ハ $y$ 粁前方ニアリ，每時 $(x+5)$ 粁宛接近シテ，出會フ迄ニ 10 分ヲ要スルカラ




$$\frac{y}{x+5}=\frac{1}{6} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

STOP ②，③ノ左邊ニ $y \neq 0$ ナル共通因數ノアルコトニ着眼シテ

GO ②÷③ヨリ　$y \neq 0$ ナル故　$\dfrac{x+5}{x-5}=\dfrac{3}{2}$

コレヲ解キテ　$x=25$　コノ値ハ②，③ノ分母ヲ 0 ナラシメズ

コレヲ③ニ代入シテ　$y=5$ ……………④

①ニ代入シテ　$5=\dfrac{25t}{60} \quad \therefore \ t=12$

コレラノ値ハ何レモ題意ニ適スル。

答 速サ每時 25 粁，12 分每ニ發車ス

**着眼點** 或自動車ニ出會ツタリ追越サレタ瞬間ニ於ケル次ノ自動車トノ間隔ヲ考ヘル事ガ解決ノ急所デアル。

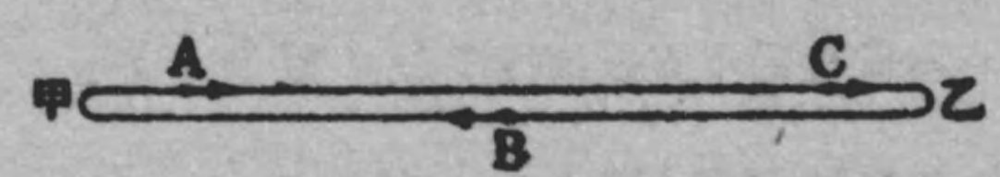
**【試練問題】** 甲乙兩地間ニ5分間隔デ運轉サレテヰルバス（乘合自動車）ガアル。今甲地カラ乙地ニ向ツテ歩ム人ガ 300 米ヲ歩ム毎ニ甲地行バスニ出會ヒ，420 米ヲ歩ム毎ニ乙地行バスニ追越サレルトイフ。バス及ビ人ノ速サ毎時夫々何粁ナルカ。

（二早高）

---

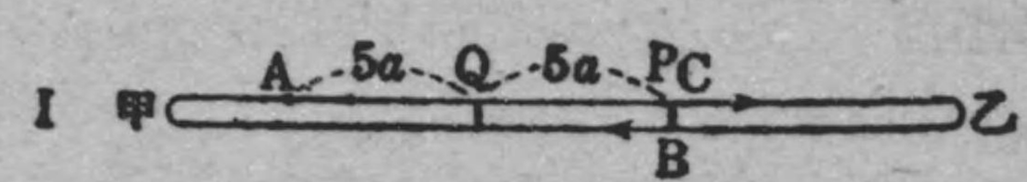
**答** バスノ速サ毎時 25.2 粁，人ノ速サ毎時 4.2 粁

**例 328.** 3 臺ノ自動車 A, B, C ガ甲乙兩地間ヲ互ニ相等シキ一定ノ速サニテ休ムコトナク往復シツツアリ。此等ノ自動車ノ擦レ違ヒハ5分，6 分，7 分，5 分，6 分，7分，…………ノ間隔ヲ以テ起ルト云フ。然ラバ兩地間ノ一定地點ヲ一定ノ方向ヘ何分ノ間隔ヲ以テ自動車ハ通過シ居ルカ。




**方針** 一寸風變リナ問題デアルガ，矢張リ或二ツノ自動車ガ擦レ違ツタ瞬間ニ於テ其次ノ自動車ガ前方又ハ後方幾許ノ距離ニアルカヲ考ヘテ解決スル。

**【解】** 各自動車ノ速サハ相等シク一定デアルカラコノ一定ノ速サヲ毎分 $a$ 米トス。先ヅ第 I 圖ノ如ク B, C ガ一地點 P ニ於テ擦レ違ツタ後 5 分デ A, B ガ點 Q デ擦レ違フモノトスルト

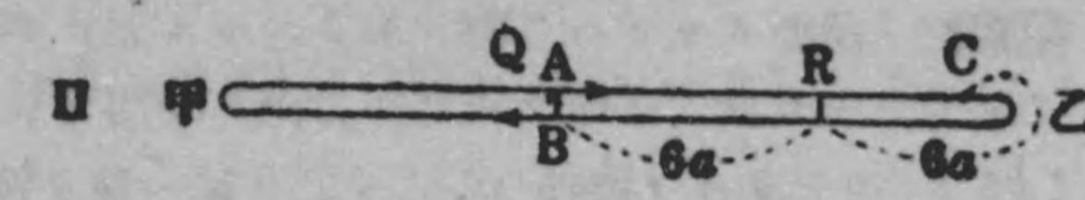



$AQ=5a$ (米)，$PQ=5a$(米) 依テ A ハ C ノ後方 $10a$ 米ノ位置ヲ C ト同方向ニ走ツテ居ルコトガワカル。

依テ一地點ヲ C ガ通過後 10 分ヲ經テ A ガ同方向ニ通過スル。



次ニ第 II 圖ノ如ク A, B ガ點 Q デ擦レ違ツタ後 6 分ニシテ A ト C ガ點 R デ擦レ違フモノトスルト〔I〕ト同樣ニ考ヘテ C ハ B ノ後方 $12a$ 米ノ位置ヲ走ツテキルコトガワカル。同樣ニシテ第 III 圖ヨリ B ハ A ノ後方 $14a$ 米ノ位置ヲ走ツテ居ルコトヲ知ル。故ニ兩地間ノ一地點ヲ





A ガ通過後 14 分ヲ經テ B ガ通過シ，其後 12 分ヲ經テ C ガ通過シ其後 10 分ヲ經テ A ガ再ビ通過シ以下之ヲ繰返スコトニナル。

**答** 14 分，12 分，10 分，14 分，12 分，10 分……ノ間隔

**【試練問題】** 各等速ニテ二定點 A, B 間ヲ休ムコトナク往復スル甲乙二點アリ。一往復ニ要スル時間ハ甲ハ 30 秒ニシテ乙ハ 40 秒ナリ。今甲，乙ガ同時ニ夫々 A, B 點ヲ出發シテ運動ヲ開始シ再ビ同時ニ夫々 A, B ニ歸着スルマデニ幾秒ヲ要スルカ。尙ソノ時間內ニ乙ガ甲ニ出會フ時刻及追越サレル時刻ヲ求メヨ。

---

**答** 同時ニ歸着スルマデニ　120 秒

出會フ時刻ハ出發後 $8\frac{4}{7}$ 秒後及ビソノ後 $17\frac{1}{7}$ 秒毎

追ヒ越サレル時刻ハ出發後　60 秒ノ後

## 6. 周線上ノ運動問題

**例 329.** 甲乙二人ガ一周 500 米ノとらつくデ 1500 米ノ競走ヲシタ處，甲ハ一樣ノ速サデ走ツタガ，乙ハ第一周ヲ最モ早ク第二，三周ヲ夫々第一周ノ $\frac{9}{10}$，$\frac{17}{18}$ ノ速サデ走ツタ。ソシテ乙ガ第一周ヲ終ツタ時甲ハ $9\frac{8}{13}$ 米遲レテ居タガ，結局甲ガ 8.5 秒勝ツタトイフ。甲ハ何分何秒デ 1500 米ヲ走ツタカ。

**方針** 所要ノモノハ 1500 米ヲ走ルニ要シタ時間デアルガ秒速ヲ未知數トシテ方程式ヲ作ツテ見ル。(後デ時間ヲ未知數トシタ別法ヲ示ス)

**【解】** 甲ノ速サヲ毎秒 $x$ 米，乙ノ第一周ノ速サヲ毎秒 $y$ 米トスルト題意ニヨリ乙ノ第二周，第三周ノ速サハ夫々毎秒 $\frac{9}{10}y$ 米，$\frac{17}{18}y$ 米トナル。乙ガ第一周ヲ終ツタ時甲ハ $9\frac{8}{13}$ 米遲レテキタカラ

$$\frac{500-9\frac{8}{13}}{x}=\frac{500}{y}\cdots\cdots\text{①}$$

甲ガ 1500 米ヲ走ルニ要スル時間ハ $\frac{1500}{x}$ 秒デ，乙ハ第一周ニ $\frac{500}{y}$ 秒第二周ニハ $\frac{500}{\frac{9}{10}y}$ 秒，第三周ニハ $\frac{500}{\frac{17}{18}y}$ 秒ヲ要シ，甲ガ 8.5 秒勝ツタカラ

$$\frac{1500}{x}=\frac{500}{y}+\frac{500}{\frac{9}{10}y}+\frac{500}{\frac{17}{18}y}-8.5\cdots\cdots\text{②}$$

①ヨリ　$\frac{6375}{13}y=500x$　$\therefore\ y=\frac{52}{51}x\cdots\cdots\text{③}$

③ヲ②ニ代入シテ　$\frac{1500}{x}=\frac{500\times51}{52x}+\frac{500\times510}{9\times52x}+\frac{500\times18\times51}{17\times52x}-8.5$

$$\therefore\ \frac{500}{x}\left(\frac{51}{52}+\frac{170}{3\times52}+\frac{18\times3}{52}-3\right)=8.5$$

コレヲ解クト　$x=\frac{250}{39}$　コノ値ハ①ノ分母ヲ 0 ナラシメズ

依テ　求ムル時間 $=\frac{1500}{\frac{250}{39}}=234$ (秒) $=3$ 分 54 秒……**答**

**【別解】** 甲ガ一周スルニ要スル時間ヲ $x$ 秒トスルト 1500 米ヲ走ルニ要スル時間ハ $3x$ 秒，乙ガ第一周ニ要シタ時間ヲ $y$ 秒トスルト，第二周ニハ $\frac{10}{9}y$ 秒，第三周ニハ $\frac{18}{17}y$ 秒ヲ要シ，8.5 秒負ケタカラ

$$3x=y+\frac{y}{9}+\frac{18}{17}y-8.5\cdots\cdots\text{①}$$

一周スルニ要スル時間ハ速サニ反比例スルカラ

$$x:y=500:\left(500-9\frac{8}{13}\right)\cdots\cdots\text{②}$$

(①②) コレヲ解ケ。



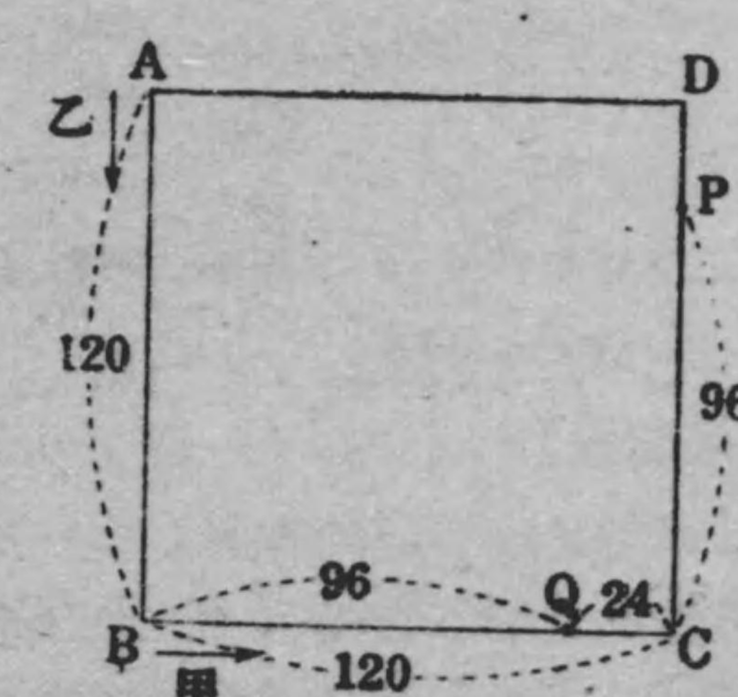
**【試練問題】** 甲乙丙三人アリ。アル運動場ヲ一周セントス。甲ガ一周スル間ニ乙ハ 6 秒遲レ，丙ハ 500 米走ル。又丙ガ一周スル間ニ，甲ハ 720 米走リ，乙ハ一周ト 75 米走ル。コノ運動場ノ周圍及ビ甲，乙，丙毎秒ノ速サ如何。　(明　專)

**答** 周 600 米，速サ甲 $6\frac{2}{3}$ 米，乙 $6\frac{1}{4}$ 米，丙 $5\frac{5}{9}$ 米 (毎秒)

**例 330.** 甲乙二人正方形ノ周圍ヲ廻ルニ，甲ガ出發點ナル一ツノ頂點ヲ發シテ次ノ頂點ニ達シタルトキ，乙ハ甲ト同ジ出發點ヲ發シテ甲ト同方向ニ廻ルモノトス。乙ノ出發後兩人ガ始メテ正方形ノ同一邊上ニ來ルマデノ時間ヲ求メヨ。但シ甲乙ノ速サハ毎分夫々 144 米及ビ 134 米ニシテ，正方形ノ一邊ノ長サハ 120 米ナリ。

**方針** 甲ノ速サガ乙ノ速サヨリモ速イカラ甲ガ乙ヲ追フモノト考へ，同一邊上ニクルタメニハ甲ガ乙ノ後方 120 米以内ニ接近シナケレバナラヌト考へテ解ク。

**【解】** 正方形ヲ ABCD トシ甲ガ頂點 A ヲ發シテ次ノ頂點 B ニ達シタルトキ，乙ガ A ヲ出發シテ同方向ニ廻ルモノトス。乙ガ出發ノ時，甲ハ乙ノ後方 BC＋CD＋DA 即チ 360 米ノ位置ニアリ，毎分 (144－134) 米宛乙ニ接近シテ行クカラ，乙ノ後方 120 米ノ位置ニ達スル迄ノ時間ヲ $t$ 分トスレバ




$$t=\frac{360-120}{144-134}=24\ (\text{分})$$

**STOP** コノ 24 分ヲ所要ノ答ト早合點スル者ガ多イ。甲ガ乙ノ後方 120 米ノ位置ニ達シテモ，同一邊上ニ居ルトハ限ラナイ。(一頂點ヲ夾ムニ隣邊上ニアツテ，距離ガ 120 米ナルコトガアルカラ) ソコデ 24

分後ニ甲乙ガ如何ナル位置ニ居ルカヲ驗サナケレバナラヌ。

GO 乙ガ出發後 24 分間ニ歩イタ距離ハ

134 米×24=3216 米=120 米×26+96 米 依テ乙ハ第 27 邊目 即チ邊 C D 上 C ヨリ 96 米ノ位置 P ニアリ，甲ハソノ後方 120 米，即チ 邊 B C 上 C ヨリ 24 米ノ位置 Q ニアリ。

依テ甲ガ更ニ 24 米歩イテ頂點 C ニ達シタトキ，甲，乙ガ初メテ同一ノ邊 C D 上ニ來ル。

依テ求ムル時間ハ $24$ 分 $+\frac{24}{144}$ 分 $=24\frac{1}{6}$ 分

答 24 分 10 秒

[illegible] 初メテ同一邊上ニ來ル迄ニ甲ノ通過スベキ邊數ヲ未知數ニ選ビ次ノ如ク不等式ノ解法ヲ應用シテ解ク事モ出來ル。

**【別解】** 甲ハ乙ヨリモ速イカラ，兩人ガ初メテ同一邊上ニ來ルノハ，甲ガ乙ノ後方 120 米以内ニ接近シテ或頂點ニ達シタトキデアル。コノトキ迄ニ甲ノ通過セシ邊數ヲ $n$ トスルト，ソノトキ迄ニ要スル時間ハ $\frac{120n}{144}$ 分デ，ソノ間ニ乙ノ歩イタ距離ハ $134\times\frac{120n}{144}$ 米，

乙ガ出發ノ時甲ハ乙ノ後方 360 米ノ位置ニアルカラ，ソノ距離ガ初メテ 120 米以下トナルタメニハ甲ハ乙ヨリ (360－120) 米以上多ク歩マネバナラヌ

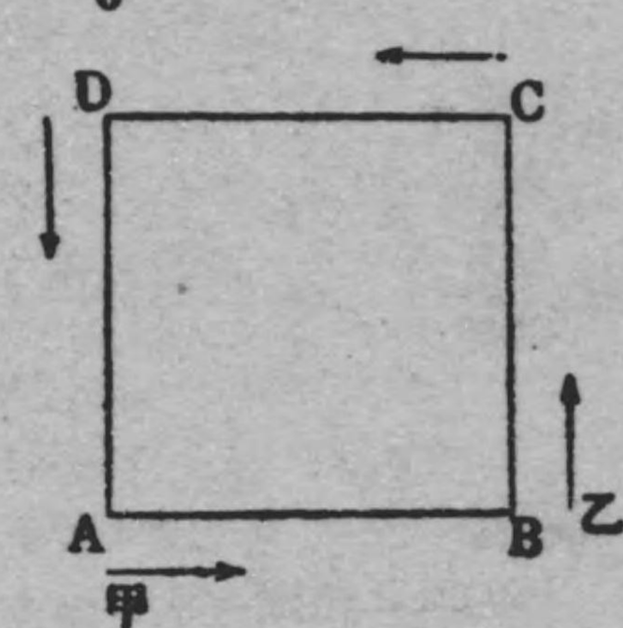
$$\therefore\quad 120n-134\times\frac{120n}{144}\geqq 360-120$$

コレヲ解クト $\frac{1200}{144}n\geqq 240 \quad \therefore\ x\geqq\frac{144}{5}=28\frac{4}{5}$

之ヲ滿足スル $n$ ノ最小ノ整數値ハ 29 デアル。

依テ求ムル時間ハ $\frac{120\times 29}{144}=\frac{5\times 29}{6}=24\frac{1}{6}$ (分)

**【試練問題】** 圖ノ如キ一邊 180 米ナル正方形ヲ成ス道路ＡＢＣＤアリ。此道路上ヲ甲ハA點ヨリ，乙ハB點ヨリ矢ノ向キニ各一分間ニ夫々 132 米 155 米ノ速サニテ同時ニ駈ケ出スモノトス。然ラバ甲，乙ガ初メテ同一邊上ヲ駈ケルハ何レノ邊ナルカ。



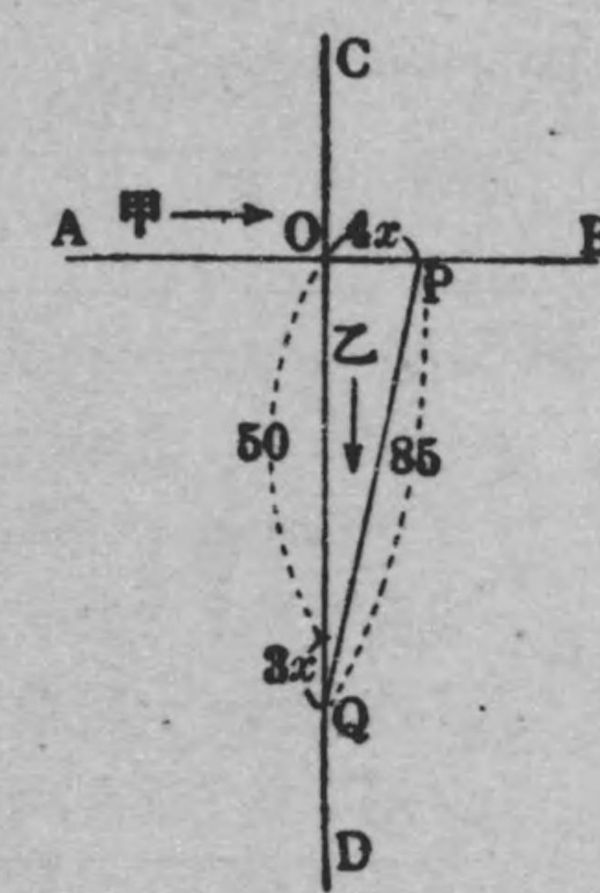

答 邊 DA 上



## 7. 相交ル二直線上ノ運動問題

**例 331.** O ニテ直交スル二直線AB，CD アリ。甲ハ AB 上ヲ毎秒 4 米ノ速サニテ，乙ハ CD 上ヲ毎秒 3 米ノ速サニテ走リ，兩人ノ距離ガ 85 米トナル時兩人ハ各如何ナル位置ニアルカ。但シ乙ガ O 點ヲ通過シ 50 米進ミタル時甲ガ O 點ヲ通過スルモノトス。

方針 求ムルモノハ兩人ノ位置デアルガ，ソノ時マデノ所要時間ヲ未知數ニ選ビ二直線ガ直交スルカラ，ぴたごらすノ定理ヲ用ヒテ方程式ヲ導ク。




**【解】** 兩人ノ距離ガ 85 米トナル時刻ヲ甲ガ O 點通過後 $x$ 秒ノ後トシ，ソノトキノ兩人ノ位置ヲ夫々 P，Q トスレバ

$OP=4x$ (米)

$OQ=50+3x$ (米)

$PQ=85$ (米)

$\triangle OPQ$ ニ於テ $\angle POQ=$∟R ナル故ぴたごらすノ定理ニヨリ

$$(4x)^2+(50+3x)^2=85^2$$

括弧ヲ去リテ整頓スレバ

$$x^2+12x-189=0$$

$$\therefore\ (x+21)(x-9)=0$$

$$\therefore\ x=-21 \quad 又ハ \quad x=9.$$

STOP コヽデ $x=-21$ ハ題意ニ適セズト早合點シテ之ヲ捨テルモノガ多イガ，「$-21$ 秒ノ後」ハ 21 秒前ト解釋スルト題意ニ適スルカラ

GO $x=-21$ ノトキ (即チ甲ガ O 點通過前 21 秒ノトキ)

$\left.\begin{array}{l}4x=-84\\50+3x=-13\end{array}\right\}$ ∴ 甲ハ O 點ノ手前 84 米ノ位置／乙ハ O 點ノ手前 13 米ノ位置 ニアリ

$x=9$ ナルトキ

$\left.\begin{array}{l}4x=36\\50+3x=77\end{array}\right\}$ ∴ 甲ハ O 通過後 O ヨリ 36 米ノ位置／乙ハ O 通過後 O ヨリ 77 米ノ位置 ニアリ

答

[illegible] 負根ヲ適當ニ解釋スルコトガ本問ノ急所デ，負根ヲ捨テヽ答ヲ一ツダケ書クモノヤ，亦 $x$ 秒後トシテ負根ヲ捨テタ後，別ニ $x$ 秒前トシテ方程式ヲ作リ，ソノ正根ヲトツテ答ヲ出スモノガアル（後者ハ誤リデハナイガ拙イ）

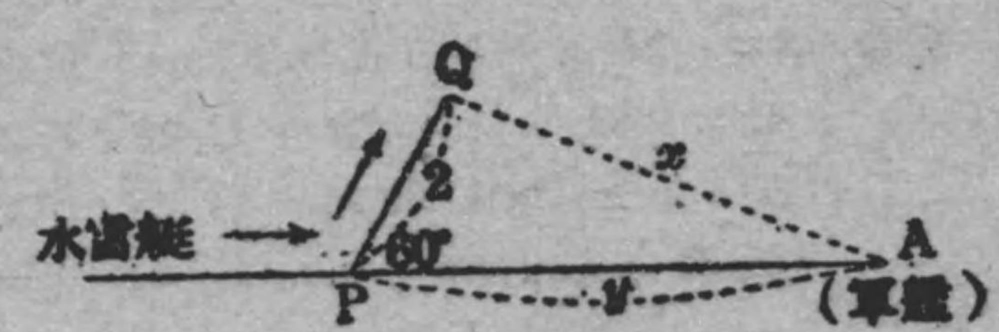
**【試練問題】** 一直線ヲナセル海岸線ニ三ツノ地點 A，B，C ガ此ノ順ニアリ。A，C 間ノ距離ハ既知ニシテ 19 粁，B，C 間ノ距離ハ未知ナリトス。今 A ヨリ海岸線ニ垂直ナル方向 12 粁隔ル海面上ノ點 P ニアル人ガ毎時 10 粁ノ速サノ船ニテ P ヲ發シ B マデ直航シ，B ニ着クヤ直ニ B ヲ發シ毎時 5 粁ノ速サニテ海岸線ニ沿ヒ步行シテ C ニ到着セリ。而シテ P ヲ發シテヨリ C ニ着クマデニ要シタル時間ハ 3 時間半ナリトイフ。B，C 間ノ距離如何。（七 高）

■ 10 粁

**例 332.** 碇泊セル軍艦ガコレニ向ヒテ襲撃シツツアル水雷艇ニ發砲セリ。此瞬間水雷艇ハ進路ヲ 60 度變更シテ進ミタルニ砲彈ハ恰モ水雷艇ガ進路ヲ變ジタル點ニ落チ，水雷艇ハ進路ヲ變ジテヨリ既ニ 2 粁進ミキタリ。此時ニ於ケル軍艦ト水雷艇トノ距離ハ幾粁ナリヤ。但シ水雷艇ハ毎時 60 粁ノ速サニテ進ミ，砲彈ノ平均速度ハ毎秒 400 米ナリトス。

方針　求ムル距離ハ 60° ノ對邊ノ長サナル故，60° ノ對邊ノ長サニ關スル幾何ノ定理ヲ用ヒテ方程式ヲ導ク。尙水雷艇ノ速サハ毎時，砲彈ノ平均速度ハ毎秒ナル故，單位ヲ揃ヘテ共ニ毎分ノ速サヲ考ヘル。

**【解】** 軍艦ノ位置ヲ A トシ，水雷艇ガ進路ヲ變ジタル地點ヲ P トスレバ，砲彈ノ落チタル地點ハ P デ，其ノ時ニ於ケル水雷艇ノ位置ヲ Q トスルト






題意ニヨリ PQ=2（粁），∠APQ=60° ナリ。

今 AQ=$x$（粁），AP=$y$（粁）トスレバ

△ APQ ニ於テ　∠APQ=60° ナル故

$$AQ^2=AP^2+PQ^2-AP\cdot PQ \cdots\cdots\cdots\cdots〔\mathrm{I}〕$$

$$\therefore\quad x^2=y^2+2^2-2y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

水雷艇ノ速サハ毎時 60 粁ナル故毎分 1 粁，

砲彈ノ平均速度ハ毎秒 400 米ナル故毎分 24 粁デアル。

水雷艇ガ PQ 間ヲ行ク間ニ砲彈ハ AP 間ヲ飛ンダカラ

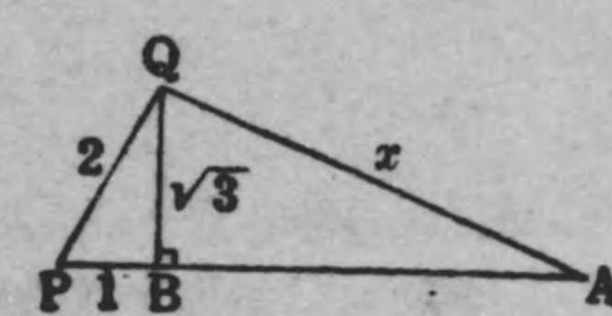
$$\frac{2}{1}=\frac{y}{24}\qquad \therefore\quad y=48 \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

②ヲ①ニ代入シテ　$x^2=48^2+4-96=2212$　且 $x>0$

$$\therefore\quad x=\sqrt{2212}=47.0\cdots\cdots$$

■ 47 粁强

[illegible] 60° ノ對邊ノ長サニ關スル定理〔I〕ハ數學ノ常識トシテ心得テ置イテ貰ヒ度イガ，之ヲ忘レタトキハ〔I〕ノ代リニ QB⊥AP ナラシメ ∠QPB=60°，PQ=2 ナル故 PB=1，QB=$\sqrt{3}$　從ツテ AB=$y-1$，ヲ導キ，△ABQ ニ於テぴたごらすノ定理ヲ用ヒテモヨイ。




**【試練問題】** 1 分 30 秒每ニ大砲ヲ發射シツツ等速ニテ直進スル軍艦ヲ海岸ノ一點ニ立チテ見ルニ，第一發第二發及第三發ノ閃光ヲ認メタル後夫々 20 秒，19 秒及 18.5 秒ニシテソノ轟音ヲ聞ケリ。軍艦ノ速サハ每時幾「キロメートル」ナルカ。小數第一位マデ求メヨ。但シ音ノ速サヲ每秒 340「メートル」トシ，光ノ到達時間ヲ無視スルモノトス。（海兵．機．經）

■ 每時 43.27……粁

**例 333.** A港ノ東9浬ノトコロ＝B港アリ。正午＝甲，乙二汽船ガ何レモ毎時 15 浬ノ速サ＝テA港ヲ出發シ，甲ハ北ヨリ 60° 東ノ方向＝，乙ハ北ヨリ 30° 東ノ方向＝進ムモノトスル。丙汽船ガB港ヨリ北進シテ甲，乙兩汽船ト出會フタメ＝ハ丙汽船ハ何時如何ナル速サ＝テB港ヲ出發シタラヨイカ(速サハ浬ノ小數第二位マデ，時刻ハ分マデ求メヨ)

先ヅ甲，乙兩船ガ丙船ト出會フベキ位置及ビ時刻ヲ求メタ後，所要ノ速サ及ビ出發時刻ヲ考究スル。

【解】 丙船ガ甲，乙兩汽船ト出會フベキ地點ヲ夫々 C, D トスレバ　題意＝ヨリ

$\angle CAB=30^\circ$, $\angle ABC=\angle R$, $AB=9$ (浬)

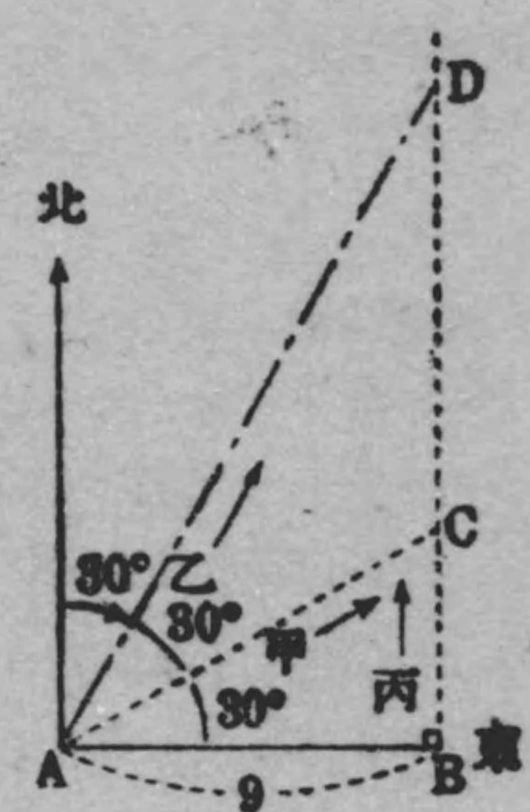
$\therefore\ BC=AB\ \tan 30^\circ=\dfrac{9}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$ (浬)

同樣＝ $BD=AB\ \tan 60^\circ=9\sqrt{3}$ (浬)

$\therefore\ CD=6\sqrt{3}$ (浬)

又 $AC=2BC=6\sqrt{3}$ (浬)

$AD=2AB=18$ (浬)




甲，乙兩船ノ速サハ毎時 15 浬ナル故

甲船ガ C 地點ヲ通過スル時刻ハ正午ヨリ

$\dfrac{6\sqrt{3}}{15}$ 時間後即チ　午後 $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ 時

乙船ガ D 地點ヲ通過スル時刻ハ午後 $\dfrac{18}{15}$ 時即チ午後 $\dfrac{6}{5}$ 時

依テ丙船ハ CD 間 (即チ $6\sqrt{3}$ 浬) ヲ $\left(\dfrac{6}{5}-\dfrac{2\sqrt{3}}{5}\right)$ 時間デ走ラネバナラヌ。依テ

$$\text{丙船ノ時速}=\frac{6\sqrt{3}}{\dfrac{6}{5}-\dfrac{2\sqrt{3}}{5}}=\frac{15\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{15(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$=20.49\cdots\cdots(\text{浬})$$

次＝丙船ガ BC 間ヲ行ク＝要スル時間ハ



$$\frac{3\sqrt{3}}{\dfrac{15(\sqrt{3}+1)}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{5(\sqrt{3}+1)}=\frac{3-\sqrt{3}}{5}\ (\text{時間})$$

且丙船ハ午後 $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ 時＝ C 點ヲ通過シナケレバナラヌカラ

丙船ガ B 港ヲ出發スベキ時刻ハ

$$\text{午後}\frac{2\sqrt{3}}{5}\text{時}-\frac{3-\sqrt{3}}{5}\text{時}=\frac{3(\sqrt{3}-1)}{5}\text{時}$$

$$=60\text{分}\times\frac{3(\sqrt{3}-1)}{5}=36(\sqrt{3}-1)\text{分}=26.35\cdots\text{分}$$

■ 丙船ノ時速 20.49 浬，出發時刻午後零時 26 分過

【試練問題】 東＝進航中ノ汽船上ノ人ソノ正南海上ヲ東北ノ方向＝航行中ノ一驅逐艦ヲ觀測セシ＝2分後＝ハ東南方＝認メ，ソレヨリ 40 秒後＝汽船ノ前方 400「メートル」ノ所ヲ横切リタリ。汽船及驅逐艦ノ速サ毎秒何「メートル」ナルカ。「メートル」以下二位マデ求メテ四捨五入セヨ。　(海兵・經)

■ 汽船ノ速サ毎秒 5 米，驅逐艦ノ速サ毎秒 10.6 米强

## 鍛錬問題十九

221. 木炭若干俵ヲ荷馬車若干臺＝テ某地ヘ運ブ＝各車毎回同俵ヅツ運ビ往復4回ヲ要スルモノトス。若シ毎回ノ運搬俵數ヲ 4 俵減ジ往復回數ヲ5回トスレバ車臺數ヲ1臺減ジ得ベク，又毎回ノ運搬俵數ヲ 4 俵增シ往復回數ヲ3回トスレバ車臺數ヲ2臺增スヲ要スト云フ。車臺數及ビ木炭俵數ヲ求メヨ。　(宇　農)

222. 甲乙二人＝テ或仕事ヲナス＝初日＝ハ甲ノミ働キ第二日ヨリハ兩人共＝働キテ若干日ノ後成就セリ。毎日ノ規定勞働時間ハ9時間ナレドモ最後ノ日ノミ特＝ 10 時間働ケリ。而シテ甲

ノナシタル仕事ハ乙ノ8日ト8時間分ニ當リ，乙ノナシタル仕事ハ甲ノ4日ト8時間分ニ當ルトイフ。初メヨリ兩人共ニ働カバ何日ト何時間ヲ要スベキカ。

223. 甲乙兩人ニテ或ル仕事ヲナスニ午前七時ニ取リカヽリ，晝一時間ノ休憩ヲナシ午後三時ニ之ヲ仕上ゲル豫定ナリシトコロ事故ノタメ乙ガ遲刻セルニヨリ甲ノミ豫定通リニ仕事ヲ開始シ乙ハ 35 分ノ後之ニ參加セリ。而シテ休憩時間ヲ 10 分間短縮セルモ尙豫定ヨリ5分後レテ其ノ仕事ヲ完了セリト云フ。兩人ガ別々ニソノ仕事ヲナストキハ夫々幾時間ヲ要スベキカ。

224. 甲乙二臺ノ石油發動機アリ。一日ニ甲ハ乙ノ二倍量ノ石油ヲ消費ス。今兩機同時ニ同量入ノ石油罐ヲ各一個宛使用シ始メ，或日數ノ後殘量ヲ互ニ交換シタルニ，初メヨリ2週間ノ終リニ於テ甲ハ全ク消費シ，乙ハ全量ノ4分ノ1ヲ殘セリトイフ。罐ヲ交換シタルハ初メヨリ何日後ナルカ。　(海兵經)

225. 貯水池アリ。注水管一本ト甲，乙二本ノ排水管トヲ備フ。空ニシタル貯水池ニ注水管及ビ二本ノ排水管ヲ開キツツ水ヲ滿サンニハ二本ノ排水管ヲ閉ヂ注水管ノミヲ開キテ水ヲ滿ス時ヨリモ 75 時間多ク要ス。次ニ滿水シタル貯水池ヨリ注水管ヲ閉ヂ甲排水管ノミヲ開キテ排水スレバ 30 時間ニテ空トナリ，同樣ニ注水管ヲ閉ヂ甲，乙兩排水管ヲ共ニ開キテ排水スレバ 18 時間ニテ空ニナルト云フ。空ニシタル貯水池ニ甲，乙兩排水管ヲ閉ヂ注水管ノミヲ開キテ水ヲ滿サンニハ何時間ヲ要スルカ。

226. 一ツノ河ニ臨メル二港 A，B ノ間ヲ往復スルニ每時 14 粁ノ速サヲ有スル甲船ハ 3.5 時間ヲ要シ，每時 10 粁ノ速サヲ有スル乙船ハ5時間ヲ要スト云フ。河流ノ每時ノ速サ及ビ A，B 間ノ距離各如何。　(橫高審)

227.* アル驛ニ向ヒ等速度ニテ進行スル汽車ガ 10 秒間汽笛ヲ鳴ラシ續ケタルニ此ノ驛ニテハ 9.4 秒間聞エタリ。若シ反對ニ此ノ



驛ニ於テ 10 秒間汽笛ヲ鳴ラシ續ケタラバ此ノ進行中ノ汽車ノ乘客ガ何秒間其ノ音ヲ聞クカ。小數第二位マデ計算セヨ。音ノ速サハ每秒 340 米トス。　(四高)

228. アル人ガ甲乙兩地間ヲ自動車デ往復スルニ，往キニハ每時 50 粁デ走ツタガ歸リニハ同ジ路ヲ每時 60 粁デ走ツタト云フ。然ラバ平均每時何粁デ走ツタコトニナルカ。　(水高)

229. 甲地ヨリ乙地ニ至ル間ニ幾ツカノ坂ガアリ之ヲ往復スルニ自動車バカリ自轉車バカリ徒歩バカリナル三方法ダケ考ヘル。各方法ニヨリ速サハ上リ坂下リ坂平地夫々一定ダトスル時ハ各方法ニヨル要スル時間ノ往キト歸リトノ差三ツノ比ハ兩地ノ距離及ビ坂ノ分量排置ニ關係ノナイコトヲ示セ。　(八高)

230. 甲ハ乙ヲ追ツテ同ジ道ヲ步イテ居ル。或ル瞬間ニ乙ガ居タ所マデ行クノニ甲ハ其ノ時居タ場所カラ 360 步步イタガコノ時乙ハ前方 $270m$ ノ所ニ達シテ居タ。再ビ甲ガ其ノ地點ニ到着スルノニ 2 分 30 秒ヲ要シタガ其ノ間ニ乙ハ 375 步步イテ居タ。斯クシテ遂ニ甲ガ乙ニ追付イタノハ始メノ瞬間カラ 18 分後デアツタ。兩人ノ速サハ每分幾米カ。　(東農)

231. A港ヨリB港ニ向ツテ出帆セル汽船ガ航程ノ $\frac{3}{5}$ ヲ進ミシトキ機關ニ故障ヲ生ジタルタメ速サヲ最初ノ速サヨリモ每時 10 浬減ジ豫定ヨリ二時間半遲レテB港ニ到着シタルニ，平均ノ速サハ最初ノ速サヨリモ每時6浬小ナルヲ見タリトイフ。航程及ビ最初ノ速サハ何程ナリシカ。　(神船)

232. 其ノ距離 60 粁ナル相隣レル甲乙二驛アリ。每時 45 粁ノ速サノ列車Aト每時 40 粁ノ速サノ列車Bトガ相前後シテ甲驛ヨリ乙驛ニ向ヒシニ，豫定ノ時刻ヨリ列車Aハ 24 分 40 秒，列車Bハ 24 分遲レテ夫々乙驛ニ到着シタリ。其ノ延着ノ理由ヲ問ヒタルニ甲乙二驛間ノ線路ノ一區域ニ水害ガアリタルニ依リ

其ノ區域ノミヲ兩列車トモ＝相等シキ速サ＝テ徐行シタルタメナリシトイフ。其ノ水害區域ノ長サ及ビ徐行ノ速サヲ問フ。

(滿醫豫)

233. A地ヨリB地＝向フ甲，乙，丙三人アリ。乙ハ甲ヨリ5分遲レテ出發シ，25 分ノ後甲＝追ヒ付キ，丙ハ乙ヨリ更＝ 10 分遲レテ出發シ 25 分ノ後甲＝追ヒ付キタリトイフ。丙ガ甲＝追ヒ付キタル時ヨリ幾分ノ後丙ハ乙＝追ヒ付クカ。

234. 甲乙二人東西兩地間ヲ往復スルアリ。 甲ハ東地ヲ出發シテヨリ 15 分後ノ時刻＝乙ハ西地ヲ出發セリ。往路＝テ西地ヲ距ル 5.6 粁ノ地點＝テ兩人出會ヒ，ソレヨリ4時 30 分後ノ時刻復路＝テ東地ヨリ 6.6 粁ノ地點＝テ再ビ兩人出會ヒタリ。而シテ甲ハ西地＝テ1時 30 分間休ミ，乙ハ東地＝テ 30 分間休ミタリト云フ。各人ノ速度何程ナルカ。又東西兩地間ノ距離何程ナルカ。

(横商)

235.* 或ル人ガ汽車＝乘ラウトシテA驛＝出掛ケタ所僅カ 30 秒前＝發車シテキタノデ直＝自動車ヲ驅リ鐵道＝沿ツタ道路ヲ追跡シ，4 分後＝ハ汽車＝追ツキ，ソノ後「A驛ヨリ4粁」ト記シタ里程標ヲ眺メテカラ尙4分間走ツテ次ノB驛＝着イタ。此ノ時汽車ハB驛ノ手前何粁ノ所ヲ走ツテキルカ。但シ汽車，自動車共＝始終一様ノ速サデ走ルモノトス。

236. 甲乙兩人東西兩村間ヲ休ムコトナク繰返シ往復ス。初メ甲ハ東村ヲ出發シテ西村＝向ヒ，乙ハ西村ヲ出發シテ東村＝向ヒ，且ツ兩人同時＝出發スルモノトス。出發後東村ヨリ 1500 米ノ地點＝テ兩人初メテ出會ヒタル後目的地＝達シテ直チ＝引返シ西村ヨリ 1700 米ノ地點＝テ再ビ出會ヘリト云フ。東西兩村間ノ距離及ビ甲乙兩人ノ速度ノ比ヲ求メヨ。尙第十回目＝出會フ地點ヲ求メヨ。

(山形高)

237. 甲乙二地點間ノ軌道アリ。電車ハ初發午前 5 時8分＝シテ



10 分間置キ＝發車シ速サハ毎時 20 粁ナリトス。 或人毎時 4 粁ノ速サ＝テ軌道＝沿ヒ乙地點＝行ク＝甲地點ヲ距ル $15\frac{1}{3}$ 粁ノ丙地點ヲ午後0時 23 分＝出發セリ。此人ヲ第一＝追越シテ行ク電車ノ丙地點通過ノ時刻ヲ求メヨ。又此人ガ乙地點＝到着スルマデ＝ 11 臺ノ電車＝追越サレ，而シテ最後＝追越サレタル地點ハ乙地點ノ手前 $\frac{1}{4}$ 粁ナリトスレバ甲乙二地點間ノ軌道ハ何粁ナルカ。

(横商)

238. 一直線ヲナス海岸＝ 18 粁ヲ隔テテ A，B ナル漁村アリ。A，B 兩村ノ間＝ C ナル漁村アリ。甲ハ B 村ノ沖合 8 粁ノ海上ヨリ毎時5粁ノ速サ＝テ舟ヲ漕ギテ C 村＝向ヒ，C 村＝上陸後直チ＝徒歩＝テ毎時4粁ノ速サ＝テ A 村＝向ヘリ。一方甲ガ沖合ヲ出發スルト同時＝，乙ハ徒歩＝テ毎時4粁ノ速サ＝テ，A 村ヨリ海岸＝沿ヒテ B 村＝向ヒ，A 村ヲ去ル 10 粁ノ地點＝テ甲ト相會シタリ。B，C 兩村ノ距離ヲ求ム。

239. 甲乙二船アリ。甲ハ東＝向ヒ，乙ハ東北＝向ヒテ進行スル＝初メ甲ガ東南＝乙ヲ認メテヨリ，15 分＝シテ，乙ヲ東＝望ミ，更＝其後 10 分＝シテ東北＝望ミタリトイフ。然ラバ更＝何分ノ後甲ハ乙ヲ北＝望ム＝至ルカ。

(松本高)

240. 周圍 2160 米ノ圓形ノ池アリ。ソノ池邊＝立テル甲乙二人同時＝同一地點ヲ出發シテ同一ノ方向＝コレヲ廻ル。甲ノ速度ハ毎分 60 米，乙ノ速度ハ毎分 33 米＝シテ幾回カノ後初メテ甲ヲソノ出發點＝見ルト同時＝乙ヲ正確＝ソノ對岸＝見ルヲ得タリ。ソノ出發ノ時ヨリコノ時＝至ルマデ＝經過シタル時間ヲ問フ。

(分商)

コレデ應用問題ヲ終ル。尙混合，割合，利率，歩合＝關スル應用問題ハ下卷ノ「比例ノ應用問題」ノ所デ取扱フコトニスル。

答 221. 車臺數 10 臺，俵數 1440 俵，　222. 6 日ト 6 時間
223. 甲 12 時間 15 分，乙 16 時間 20 分，　224. 4 日後
225. 15 時間　226. 河流毎時 2 粁，A, B 間ノ距離 24 粁
227. 9.43 秒　228. 毎時 $54\frac{6}{11}$ 粁　230. 甲ノ速サ毎分 108 米
乙ノ速サ毎分 90 米（註 乙ノ速サ毎分18米ハ不適）
231. 航程 90 浬，最初ノ速サ毎時 18 浬　232. 水害區域ノ長サ 4 粁，徐行ノ速サ毎時 8 粁　233. 5 分ノ後　234. 甲ノ速サ毎時 4 粁，乙ノ速サ毎時 3.5 粁，兩地間ノ距離 13 粁
235. $\frac{4}{9}$ 粁　236. 東西兩地間ノ距離 2800 米，甲乙ノ速度ノ比 15 : 13，第十回目ニ出合フ地點ハ東地ヨリ 500 米ノ地點
237. 午後 0 時 24 分，軌道 24 粁　238. 6 粁　239. 50 分
240. 6 時間

上　卷　終　リ


昭和16年9月10日 印刷
昭和16年9月20日 發行

禁複製

新體制の代數(上)

定價貳圓貳拾錢
送料 十八錢

著作者　大道英昌（オホミチエイショウ）

發行兼印刷者　大阪市南區横堀七ノ一九
前田勘次

印刷所　大阪市西區阿波座中通二丁目四番地
井下書籍印刷所

日本出版文化協會員番號 123066 番

發行所　文進堂

本店　大阪市南區横堀七ノ一九
振替大阪 12472 番
電話船場 1999 番
（讀書通信 中部・西部 書店用）

支店　東京市神田區錦町二ノ一五
電話神田 1543 番
（關東以北 書店用）

東京市神田區淡路町二ノ九
配給元　日本出版配給株式會社