

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 4

Übungsaufgaben

AUFGABE 4.1. Es sei $\Gamma = \{p, \neg q, r \rightarrow s\} \subseteq L^V$ (p, q, r, s seien Aussagenvariablen). Welche der folgenden Aussagen lassen sich aus Γ ableiten?

$$p \rightarrow q, \neg p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q, \neg p \rightarrow \neg q, r \rightarrow q, (r \rightarrow q) \rightarrow \neg p, \\ (s \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow \neg q), (\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow s.$$

AUFGABE 4.2. Zeige, dass man aus $\Gamma = \{p\}$ unendlich viele Aussagen ableiten kann, die keine Tautologien sind.

AUFGABE 4.3. Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine Ausdrucksmenge in der Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagenvariablenmenge V . Zeige die folgenden Regeln für die Ableitungsbeziehung (dabei seien $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_i$ Aussagen).

- (1) Modus Ponens: Wenn $\Gamma \vdash \alpha$ und $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, dann ist auch $\Gamma \vdash \beta$.
- (2) Wenn $\Gamma \vdash \alpha$, so auch $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \alpha$.
- (3) Wenn $\Gamma \vdash \alpha_1, \dots, \Gamma \vdash \alpha_n$ und $\Gamma \vdash \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$, dann auch $\Gamma \vdash \beta$.
- (4) Kettenschlussregel: Wenn $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ und $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma$, dann auch $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$.
- (5) Widerspruchsregel: Wenn $\Gamma \vdash \alpha$ und $\Gamma \vdash \neg \alpha$, dann auch $\Gamma \vdash \beta$.
- (6) Fallunterscheidungsregel: Wenn $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ und $\Gamma \vdash \neg \alpha \rightarrow \beta$, dann auch $\Gamma \vdash \beta$.
- (7) Konjunktionsregel: $\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta$ genau dann, wenn $\Gamma \vdash \alpha$ und $\Gamma \vdash \beta$.

AUFGABE 4.4.*

Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine Ausdrucksmenge in der Sprache der Aussagenlogik über einer Aussagenvariablenmenge V und es seien $\alpha, \beta \in L^V$. Zeige, dass

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$$

zu

$$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

äquivalent ist.

AUFGABE 4.5.*

Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine Ausdrucksmenge in der Sprache der Aussagenlogik über einer Aussagenvariablenmenge V und es sei $\alpha \in L^V$. Es gelte

$$\Gamma \not\vdash \alpha.$$

Zeige, dass dann

$$\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$$

widerspruchsfrei ist.

AUFGABE 4.6. Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine Ausdrucksmenge in der Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagenvariablenmenge V . Zeige, dass die Ableitungsbeziehung $\Gamma \vdash \alpha$ die Folgerungsbeziehung $\Gamma \models \alpha$ impliziert.

AUFGABE 4.7. Es sei $V = \{p, q, r\}$ eine Aussagenvariablenmenge. Welche der folgenden Aussagen aus L^V lassen sich aus $\Gamma = V$ ableiten?

(1)

$$p,$$

(2)

$$p \wedge q \rightarrow r,$$

(3)

$$\neg p \wedge q \rightarrow r,$$

(4)

$$\neg p \wedge \neg q \rightarrow \neg r,$$

(5)

$$p \rightarrow (q \rightarrow r),$$

(6)

$$p \rightarrow (q \rightarrow \neg r),$$

(7)

$$\neg q.$$

AUFGABE 4.8. Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine Ausdrucksmenge in der Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagenvariablenmenge V und $\alpha \in L^V$. Es gelte $\Gamma \vdash \alpha$. Zeige, dass es dann auch eine endliche Teilmenge $\Delta = \Gamma$ mit $\Delta \vdash \alpha$ gibt.

AUFGABE 4.9. Es sei L^V die Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagenvariablenmenge V und es sei λ eine Wahrheitsbelegung der Variablen mit zugehöriger Interpretation I . Zeige, dass I^\models maximal widerspruchsfrei ist.

AUFGABE 4.10. Führe die Einzelheiten im Beweis zu Lemma 4.7 für die Implikation durch.

AUFGABE 4.11. Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine widerspruchsfreie, aber nicht maximal widerspruchsfreie Aussagenmenge, die unter Ableitungen abgeschlossen sei. Zeige, dass Γ nicht durch die Hinzunahme von endlich vielen Aussagen zu einer maximal widerspruchsfreien Aussagenmenge aufgefüllt werden kann.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 4.12. (3 Punkte)

Es sei $\Gamma = \{p, \neg q \rightarrow r\} \subseteq L^V$ (p, q, r seien Aussagenvariablen). Welche der folgenden Aussagen lassen sich aus Γ ableiten?

$$p \rightarrow q, \neg q \rightarrow p, \neg p \rightarrow r, \neg q \rightarrow r \wedge p, \neg r \rightarrow q, r \rightarrow (q \rightarrow \neg p) .$$

AUFGABE 4.13. (3 Punkte)

Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine Ausdrucksmenge in der Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagenvariablenmenge V . Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

- (1) Γ ist widersprüchlich.
- (2) Für jedes $\beta \in L^V$ ist $\Gamma \vdash \beta$ und $\Gamma \vdash \neg\beta$.
- (3) Es ist $\Gamma^+ = L^V$.

AUFGABE 4.14. (4 Punkte)

Es sei p eine Aussagenvariable und $\alpha \in L^V$ eine Aussage, in der die Variable p nicht vorkommt. Es gelte

$$\{p\} \vdash \alpha .$$

Zeige, dass bereits

$$\vdash \alpha$$

gilt.

AUFGABE 4.15. (3 Punkte)

Es sei V eine Aussagenvariablenmenge. Konstruiere eine Ausdrucksmenge $\Gamma \subseteq L^V$, die abgeschlossen unter Ableitungen und nicht maximal widerspruchsfrei ist, die aber die Eigenschaft besitzt, dass für jede Aussagenvariable p sowohl $(\Gamma \cup \{p\})^+$ als auch $(\Gamma \cup \{\neg p\})^+$ maximal widerspruchsfrei ist.