Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Einführung in die mathematische Logik

Vorlesung 12

Wir haben bisher nur von Axiomensystemen im Sinne einer beliebigen Ausdrucksmenge $\Gamma \subseteq L^S$ gesprochen, die im Allgemeinen eine Vielzahl von Modellen besitzt und aus der gewisse Ableitungen bzw. Folgerungen gezogen werden können, die für alle Modelle gelten. Es gibt aber auch Axiomensysteme, wie in der achten Vorlesung erwähnt, mit denen man ein intendiertes mathematisches Objekt wie beispielsweise die vertrauten natürlichen Zahlen charakterisieren möchte. Die natürlichen Zahlen haben wir bisher nur zum Indizieren von Aussagen- oder Termvariablen verwendet (wobei wir an einzelnen Stellen Induktion über die natürlichen Zahlen geführt haben) und als wichtige Quelle für offene mathematische Probleme erwähnt. Hier sprechen für von Axiomensystemen für die natürlichen Zahlen, und zwar sowohl von zweitstufigen als auch von erststufigen. Der Sprachgebrauch ist in der Literatur nicht einheitlich, wir werden von den (zweitstufigen) *Dedekind-Peano-Axiomen* und den erststufigen *Peano-Axiomen* sprechen.

Dedekind-Peano-Axiome

Richard Dedekind (1831 - 1916)

Giuseppe Peano (1858 - 1932)

Wir besprechen nun die Dedekind-Peano-Axiome, eine zweitstufige Axiomatik, die eine vollständige Charakterisierung der natürlichen Zahlen erlauben.

Axiom 12.1. Eine Menge N mit einem ausgezeichneten Element $0 \in N$ (die *Null*) und einer (Nachfolger)-Abbildung

$$' \colon\, N \longrightarrow N,\, n \longmapsto n',$$

heißt *natürliche Zahlen* (oder *Dedekind-Peano-Modell* für die natürlichen Zahlen), wenn die folgenden *Dedekind-Peano-Axiome* erfüllt sind.

(1) Das Element 0 ist kein Nachfolger (die Null liegt also nicht im Bild der Nachfolgerabbildung).
(2) Jedes $n \in N$ ist Nachfolger höchstens eines Elementes (d.h. die Nachfolgerabbildung ist injektiv).
(3) Für jede Teilmenge $T \subseteq N$ gilt: Wenn die beiden Eigenschaften
   - $0 \in T$,
   - mit jedem Element $n \in T$ ist auch $n' \in T$,

   gelten, so ist $T = N$.

Mit zweitstufig ist gemeint, dass nicht nur über die Elemente der Menge N, die man axiomatisch charakterisieren will, quantifiziert wird, sondern (im dritten sogenannten *Induktionsaxiom*) auch über beliebige Teilmengen dieser Menge. Eine solche Situation wird erststufig nicht (zumindest nicht unmittelbar) erfasst.[1] Mit dieser Axiomatik werden wir zeigen, dass je zwei Modelle für diese zweistufigen Dedekind-Peano-Axiome „isomorph" sind, dass es also zwischen ihnen eine strukturerhaltende Bijektion (einen *Isomorphismus*) gibt, und dass man ausgehend von der Nachfolgerfunktion die Addition und die Multiplikation rekursiv einführen kann.

Die folgende Aussage ist das *induktive Definitionsprinzip für Abbildungen.*

Satz 12.2. *Es sei* $(N, 0,')$ *ein Dedekind-Peano-Modell der natürlichen Zahlen und es sei* M *eine Menge mit einem fixierten Element* $s \in M$ *und einer Abbildung* $F \colon M \to M$. *Dann gibt es genau eine Abbildung*

$$\varphi \colon\, N \longrightarrow M,\, n \longmapsto \varphi(n),$$

die die beiden Eigenschaften

$$\varphi(0) = s \text{ und } \varphi(n') = F(\varphi(n)) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

erfüllt.

Beweis. Wir betrachten Teilmengen $S \subseteq N$ mit den Eigenschaften

(1) $0 \in S$.
(2) Für jedes $n \in S$, $n \neq 0$, gibt es ein $k \in S$ mit $n = k'$.

[1] Eine andere wichtige Frage ist, inwiefern man in der ersten Stufe zweitstufige Phänome nachbilden kann. Das ist weitgehend möglich.

(3) Es gibt eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$\varphi_S \colon S \longrightarrow M$$

mit $\varphi_S(0) = s$ und

$$\varphi_S(n') = F(\varphi_S(n))$$

für alle $n \in N$ mit $n, n' \in S$.

Wir betrachten nun die Menge

$T = \{k \in N \mid \text{Es gibt ein } S \text{ mit den beschriebenen Eigenschaften und mit } k \in S\}.$

Wir zeigen durch Induktion, dass $T = N$ ist. Für $k = 0$ können wir

$$S = \{0\}$$

wählen, wobei $\varphi_{\{0\}}$ durch die erste Abbildungseigenschaft eindeutig festgelegt ist. Sei nun $k \in T$ vorausgesetzt. Das bedeutet, dass es $k \in S$ und eine Abbildung φ_S mit den angegebenen Eigenschaften gibt. Bei $k' \in S$ sind wir fertig, sei also $k' \notin S$. Wir setzen $S' = S \cup \{k'\}$ und wir definieren

$$\varphi_{S'}(n) = \begin{cases} \varphi_S(n)\,, \text{ falls } n \in S\,, \\ F(\varphi_S(k))\,, \text{ falls } n = k'\,. \end{cases}$$

Dies erfüllt die Eigenschaften und ist auch die einzige Möglichkeit, da die Einschränkung von $\varphi_{S'}$ auf S wegen der Eindeutigkeit mit φ_S übereinstimmen muss. Also ist $T = N$.

Wir zeigen nun durch Induktion über k, dass $\varphi_S(k)$ unabhängig von der gewählten Menge $k \in S$ ist. Bei $k = 0$ ist dies klar, sei diese Aussage für ein gewisses k schon bekannt, und sei $k' \in S_1, S_2$ mit zugehörigen Abbildungen $\varphi_1 = \varphi_{S_1}, \varphi_2 = \varphi_{S_2}$. Aufgrund der zweiten Eigenschaft ist $k \in S_1, S_2$, daher ist nach Induktionsvoraussetzung

$$\varphi_1(k') = F(\varphi_1(k)) = F(\varphi_2(k)) = \varphi_2(k').$$

Damit erhält man durch

$$\varphi(k) := \varphi_S(k)$$

mit einem beliebigen $k \in S$ eine wohldefinierte Abbildung auf ganz N mit den in der Formulierung des Satzes geforderten Eigenschaften. Die Eindeutigkeit von φ ergibt sich aus der Eindeutigkeit der Einschränkungen. $\square$

Satz 12.3. *Es seien N_1 und N_2 Dedekind-Peano-Modelle für die natürlichen Zahlen. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte bijektive Abbildung*

$$\varphi \colon N_1 \longrightarrow N_2$$

mit $\varphi(0_1) = 0_2$ und

$$\varphi(n') = (\varphi(n))'$$

für alle $n \in N_1$. Insbesondere sind je zwei Dedekind-Peano-Modelle isomorph.

Beweis. Aufgrund von Satz 12.2, angewendet auf N_1 und die Nachfolgerabbildung auf N_2, gibt es genau eine Abbildung

$$\varphi\colon\ N_1 \longrightarrow N_2$$

mit den angegebenen Eigenschaften. Wenn man die Rollen vertauscht, so erhält man eine eindeutige Abbildung

$$\psi\colon\ N_2 \longrightarrow N_1$$

mit den gleichen Eigenschaften. Wir betrachten nun die Verknüpfung

$$\psi \circ \varphi\colon\ N_1 \longrightarrow N_1.$$

Diese erfüllt ebenfalls diese Eigenschaften. Da aber die Identität auf N_1 auch diese Eigenschaften erfüllt, folgt aus der Eindeutigkeitsaussage aus Satz 12.2, dass $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{N_1}$ ist. Ebenso ist $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{N_2}$ und somit sind φ und ψ invers zueinander. $\square$

Für das im Wesentlichen eindeutig bestimmte Modell der Dedekind-Peano-Axiome verwenden wir das Symbol $\mathbb{N}$ und sprechen von den *natürlichen Zahlen*.

Addition auf natürlichen Zahlen

Wir wollen die Addition auf den natürlichen Zahlen definieren, und zwar ausgehend von den Dedekind-Peano-Axiomen. Die Addition mit 0 soll dabei das Element wiedergeben - d.h. 0 soll das neutrale Element der Addition sein - und die Addition eines Elementes n mit $1 := 0'$ soll der Nachfolger von n sein. Die Grundidee ist dabei, die Summe $n + k$ dadurch zu definieren, dass man sukzessive den ersten Summanden um eins erhöht (also den Nachfolger nimmt) und den zweiten um eins vermindert (also den Vorgänger nimmt, falls $k \neq 0$ ist). Man spricht vom *Umlegungsprinzip* (oder Umlegungsmodell) für die Addition. Um dies präzise durchzuführen verwenden wir das induktive Definitionsprinzip für Abbildungen. Wir wenden dieses Prinzip für die Nachfolgerabbildung und für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ als Startglied an. Die daraus gewonnene Abbildung beschreibt das Addieren mit dieser Zahl n (es wird also die zweistellige Addition auf einstellige Operationen zurückgeführt).

Definition 12.4. Es sei $(\mathbb{N}, 0, ')$ ein Dedekind-Peano-Modell der natürlichen Zahlen und $n \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir die *Addition mit* n als diejenige aufgrund von Satz 12.2 eindeutig bestimmte Abbildung

$$\alpha_n\colon\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ k \longmapsto \alpha_n(k),$$

für die

$$\alpha_n(0) = n \text{ und } \alpha_n(k') = (\alpha_n(k))' \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

gilt.

Damit definieren wir

$$n + k := \alpha_n(k)$$

und nennen das die *Addition von natürlichen Zahlen.* Man beachte, dass hier die Addition in einer Weise definiert wird, in der die Kommutativität keineswegs offensichtlich ist.

LEMMA 12.5. *Es sei* $(\mathbb{N}, 0, ')$ *ein Dedekind-Peano-Modell der natürlichen Zahlen. Dann gibt es genau eine Verknüpfung*

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ (x, y) \longmapsto x + y,$$

mit

$$x + 0 = x \text{ für alle } x \in \mathbb{N} \text{ und } x + y' = (x + y)' \text{ für alle } x, y \in \mathbb{N}\,.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 12.10. □

LEMMA 12.6. *Es sei* $(\mathbb{N}, 0, ')$ *ein Dedekind-Peano-Modell der natürlichen Zahlen mit der in Definition 12.4 festgelegten Addition. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1)
$$n + 0 = n = 0 + n$$
für alle n*, d.h.* 0 *ist das neutrale Element für die Addition.*

(2)
$$n + k' = (n + k)' = n' + k$$
für alle $n, k \in \mathbb{N}$.

(3) *Die Addition ist kommutativ.*

(4) *Die Addition ist assoziativ.*

(5) *Aus einer Gleichung* $n + k = m + k$ *folgt*
$$n = m$$
*(*Abziehregel*).*

Beweis. (1). Die Gleichung links ergibt sich direkt aus der Definition, die rechte Gleichung, also $\alpha_0(n) = n$, folgt aus einer einfachen Induktion nach n.

(2). Die linke Gleichung folgt direkt aus der Definition, die rechte besagt $\alpha_{n'}(k) = (\alpha_n(k))'$. Wir beweisen sie für beliebiges n durch Induktion über k. Bei $k = 0$ steht beidseitig n'. Sei die Aussage nun für k schon bewiesen und betrachten wir k'. Dann ist

$$\alpha_{n'}(k') = (\alpha_{n'}(k))' = ((\alpha_n(k))')' = (\alpha_n(k'))'.$$

Für die anderen Aussagen siehe Aufgabe 12.11. □

Multiplikation auf natürlichen Zahlen

Zur Definition der Multiplikation verwenden wir erneut das Prinzip der induktiven Definition. Zu einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir den Startwert 0 und die durch die Addition mit n definierte Abbildung $\alpha_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Definition 12.7. Es sei $(\mathbb{N}, 0, ')$ ein Dedekind-Peano-Modell der natürlichen Zahlen und $n \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir die *Multiplikation mit* n als diejenige aufgrund von Satz 12.2 eindeutig bestimmte Abbildung

$$\mu_n \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\, k \longmapsto \mu_n(k),$$

für die

$$\mu_n(0) = 0 \text{ und } \mu_n(k') = \mu_n(k) + n \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

gilt.

Damit definieren wir die Multiplikation von zwei natürlichen Zahlen $n, k \in \mathbb{N}$ durch

$$n \cdot k \,:=\, \mu_n(k).$$

Es gilt also $n \cdot 0 = 0$ und $n \cdot k' = n \cdot k + n$. Diese beiden Eigenschaften legen bereits die Multiplikationsverknüpfung eindeutig fest.

Lemma 12.8. *Es sei* $(\mathbb{N}, 0, ')$ *ein Dedekind-Peano-Modell der natürlichen Zahlen. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Verknüpfung*

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\, (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

die

$$x \cdot 0 = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{N} \text{ und } x \cdot y' = x \cdot y + x \text{ für alle } x, y \in \mathbb{N}$$

erfüllt.

Beweis. Siehe Aufgabe 12.15. □

Lemma 12.9. *Es sei* $(\mathbb{N}, 0, ')$ *ein Dedekind-Peano-Modell der natürlichen Zahlen mit der in Definition 12.7 festgelegten Multiplikation. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Es gilt*
$$0 \cdot n \,=\, 0 \,=\, n \cdot 0$$
für alle n,
(2) *Es gilt*
$$1 \cdot n \,=\, n \,=\, n \cdot 1$$
für alle n, *d.h.* $1 = 0'$ *ist das neutrale Element für die Multiplikation.*
(3) *Es ist*
$$n \cdot k' \,=\, n \cdot k + n \,=\, k' \cdot n$$
für alle $n, k \in \mathbb{N}$.

(4) *Die Multiplikation ist kommutativ.*
(5) *Die Multiplikation ist assoziativ.*
(6) *Aus einer Gleichung* $n \cdot k = m \cdot k$ *mit* $k \neq 0$ *folgt* $n = m$ *(*Kürzungsregel*).*
(7) *Für beliebige* $k, m, n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$$

(Distributivgesetz).

Beweis. Siehe Aufgabe 12.25. □

Erststufige Peanoaxiome

Wir betrachten zwei erststufige Varianten der Dedekind-Peano-Axiome. Dabei wird in der ersten Variante die Nachfolgerfunktion beibehalten und das Induktionsaxiom, das oben für beliebige Teilmengen formuliert wurde, wird durch ein Induktionsaxiom für die in der Sprache erster Stufe formulierbaren Ausdrücke ersetzt. Das Induktionsaxiom gilt somit lediglich für Teilmengen, die in der gegebenen Sprache charakterisierbar sind. Man spricht vom *Induktionsschema*, da es sich nicht um ein einzelnes Axiom handelt, sondern um eine ganze Familie von Axiomen.

Axiom 12.10. Die *Peano-Axiome für die Nachfolgerfunktion in der ersten Stufe* werden (in der Sprache L zur Symbolmenge mit einer Konstanten 0 und einem einstelligen Funktionssymbol N) folgendermaßen definiert.

(1) $\forall x(\neg(Nx = 0))$.
(2) $\forall x \forall y((Nx = Ny) \to (x = y))$.
(3) Für jeden Ausdruck α von L mit einer freien Variablen x gilt

$$\alpha \frac{0}{x} \wedge \forall x \left(\alpha \to \alpha \frac{Nx}{x} \right) \to \forall x \alpha .$$

Aus der obigen zweitstufigen Formulierung der Axiomatik, die nur die Nachfolgerabbildung verwendet, kann man in jedem Modell in eindeutiger Weise eine Addition und eine Multiplikation definieren. Dafür ist das obige erststufige Axiomensystem zu schwach. Stattdessen werden wir unter der *Peano-Arithmetik* das folgende Axiomensystem verstehen, das mit zwei Konstanten 0 und 1 und zwei zweistelligen Operationen $+$ und $\cdot$ auskommt. Die Nachfolgerfunktion ist dann durch $Nx = x + 1$ definiert und es braucht dafür kein eigenes Funktionssymbol.

Axiom 12.11. Die *Peano-Axiome für Addition und Multiplikation in der ersten Stufe* werden (in der Sprache L^{Ar} zur Symbolmenge mit den beiden Konstanten 0 und 1 und zwei zweistelligen Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$) folgendermaßen definiert.

(1) $\forall x(\neg(x + 1 = 0))$.

(2) $\forall x \forall y((x+1=y+1) \rightarrow (x=y))$.
(3) $\forall x(x+0=x)$.
(4) $\forall x \forall y(x+(y+1)=(x+y)+1))$.
(5) $\forall x(x \cdot 0=0)$.
(6) $\forall x \forall y(x \cdot (y+1)=(x \cdot y)+x)$.
(7) Für jeden Ausdruck α von L^{Ar} mit einer freien Variablen x gilt

$$\alpha\frac{0}{x} \wedge \forall x\left(\alpha \rightarrow \alpha\frac{x+1}{x}\right) \rightarrow \forall x\alpha\,.$$

Die Axiome (1), (2) und (7) entsprechen dabei direkt den Nachfolgeraxiomen von oben. Die Axiome (3) und (4) spiegeln die Grundregeln in der zweistufigen Peano-Arithmetik für die rekursive Definition der Addition wider, und die Axiome (5) und (6) entsprechen den Grundregeln für die rekursive Definition der Multiplikation. Diese Axiome gelten für die (zweitstufig festgelegten) natürlichen Zahlen. Anders als bei der obigen zweitstufigen Axiomatik gibt es aber von $\mathbb{N}$ verschiedene Modelle (nicht Standard-Arithmetiken), die die erststufige Peano-Arithmetik erfüllen. Dies ist aber kein „zufälliges“ Defizit der gewählten Axiomatik, sondern dahinter verbirgt sich eine grundsätzliche Schwäche der Sprache erster Stufe, die durch die Gödelschen Unvollständigkeitssätze präzisiert werden wird.

Abbildungsverzeichnis