

御製數理精蘊

卷三上

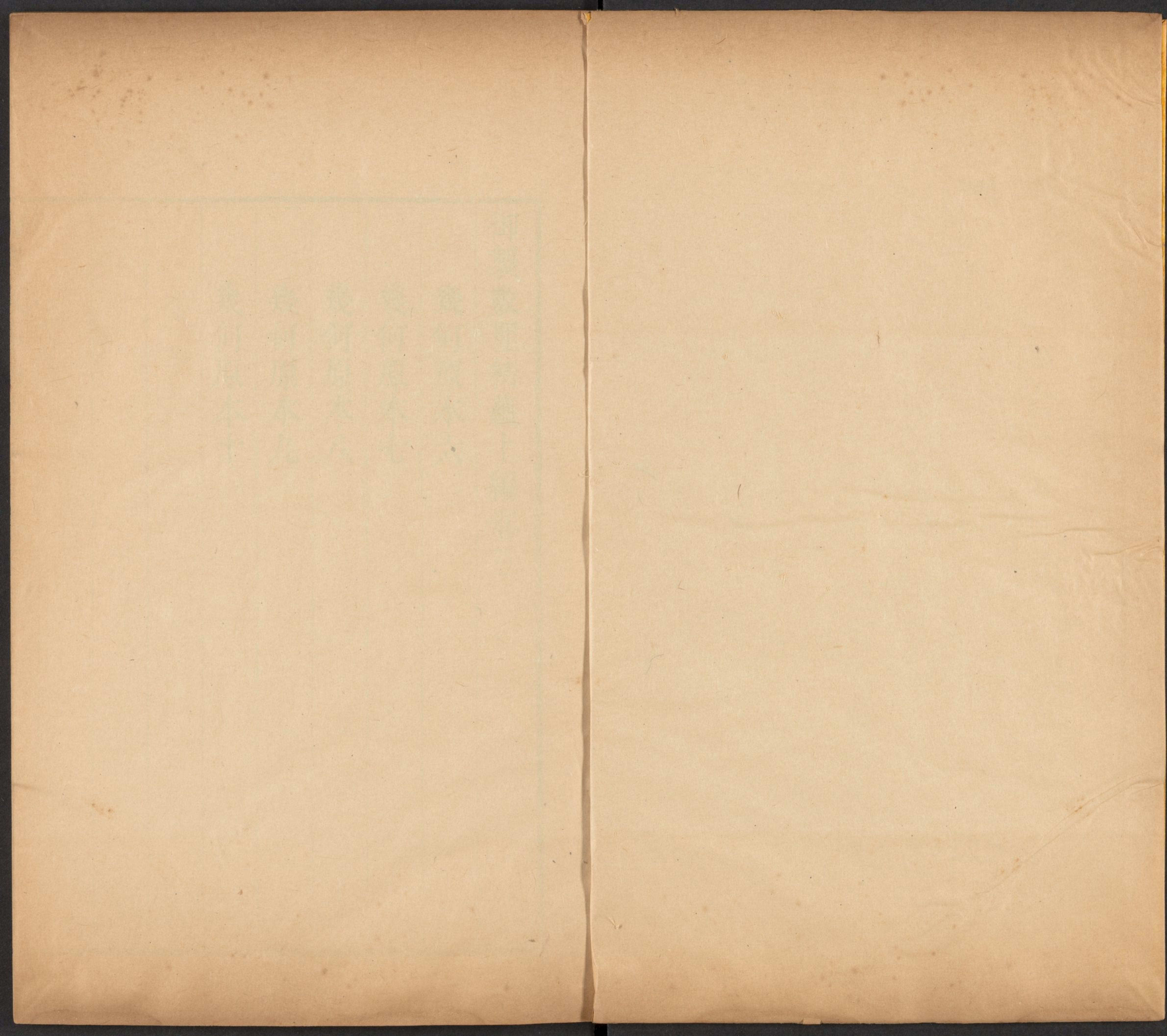
CHINESE-JAPANESE LIBRARY OF
HARVARD-YENCHING INSTITUTE
AT HARVARD UNIVERSITY
AUG 11 1936

幾何原本六之十

47

7103.2733





御製數理精蘊上編卷三

幾何原本六

幾何原本七

幾何原本八

幾何原本九

幾何原本十



斐理米系

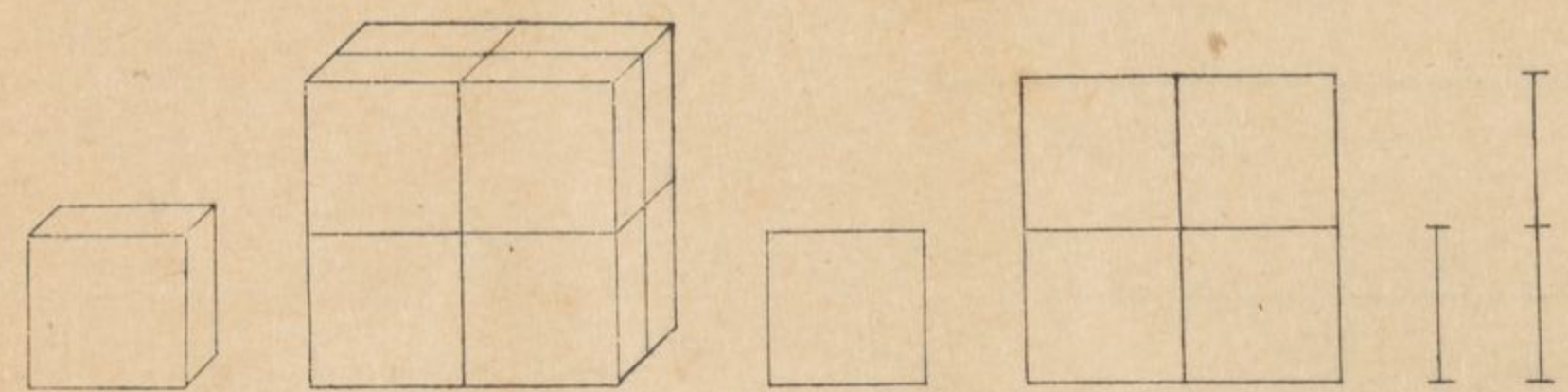
斐理米系

斐理米系

斐理米系

斐理米系

斐理米系



幾何原本六

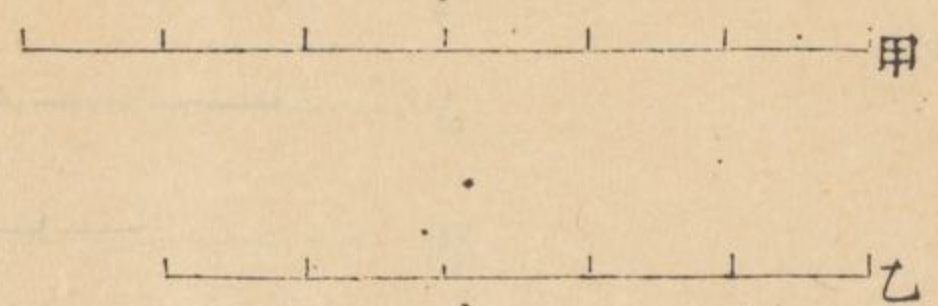
第一

大凡欲論諸物之不齊。必借同類之物
 以比之。始可以得其不齊之度數。如一
 線與他線相比。其度之或長或短。其數
 之或多或少。自能見之。如一面與他面
 相比。其面度之或大或小。其積數之或
 多或少。自能見之。又如一體與他體相
 比。其體度之或厚或薄。其積數之或多

或少亦自能見之。若將一線與一面相
比。或一面與一體相比。既不同類。又不
同形。則線之長短。面之大小。體之厚薄。
俱不可辯矣。故曰欲論諸物之不齊。必
借同類之物以比之也。

第二

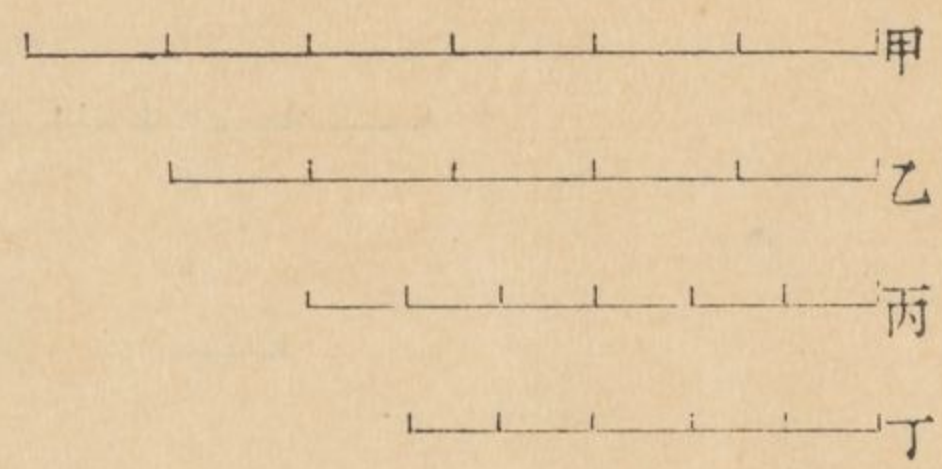
將兩數相比。其度互為大小。則謂之比
例。其比者與所比者俱謂之率。率者法也。矩也。
以數互相準之之謂也。其比之數為前率。其所比



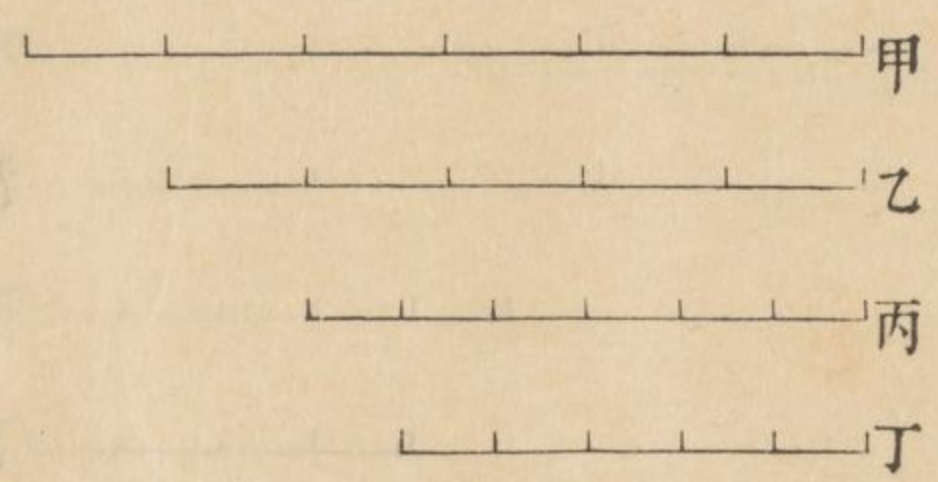
之數為後率。如甲乙二數互相為比。其
相較之分。甲數之度為長。其分為多。乙
數之度為短。其分為少。如是以比之。故
謂之二率。甲為比之之數。故謂之前率。
乙為所比之數。故謂之後率焉。

第三

有四率兩兩相比。其一率與二率之比。
同於三率與四率之比。則謂之同理比
例也。如甲乙丙丁四數。甲與乙比。丙與



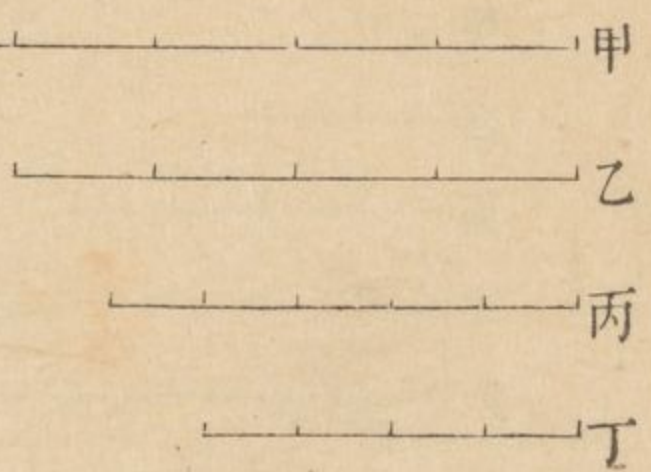
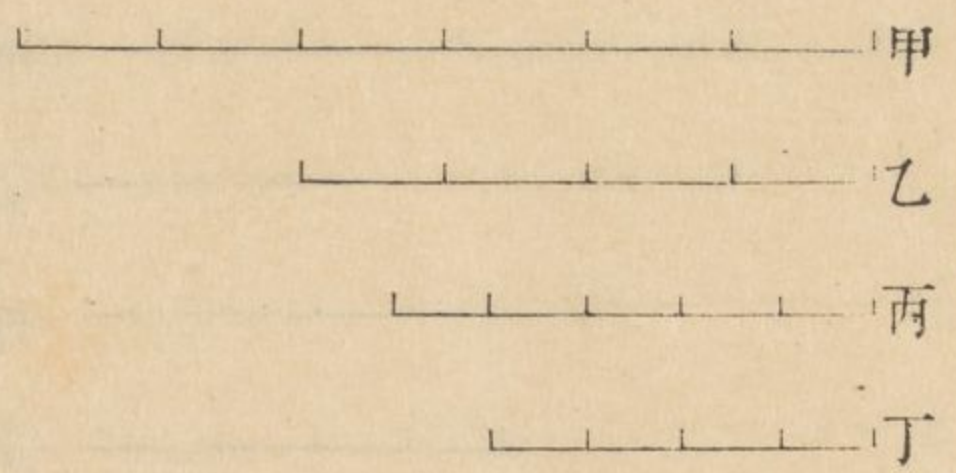
丁比。苟乙為甲六分之五。丁為丙六分之五。則甲與乙之比例。丙與丁之比例。此兩比例相同。而乙有甲幾分之數。即可知丁有丙幾分之數矣。故凡四率內。將一率與三率分數定為相等。二率與四率分數亦定為相等。其度之長短。雖有不同。苟分數定準。則一率與二率之比。即如三率與四率之比也。夫甲乙丙丁。四線內。甲第一線與丙第三線俱各



定為六分。乙第二線與丁第四線俱各定為五分。則甲度之長。雖大於丙度之長。其分數則俱為六。而乙度之長。雖大於丁度之長。其分數亦俱為五。故知乙第二線度與甲第一線度之六分之五分相等。丁第四線度亦與丙第三線度之六分之五分相等。所以甲線之比乙線。即如丙線之比丁線。而謂之同理比例也。

第四

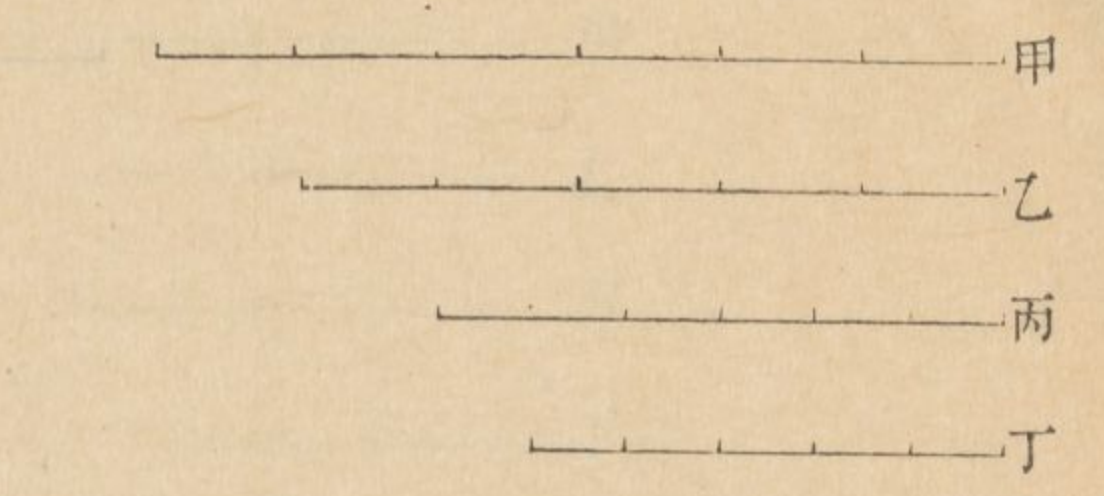
凡四率兩兩相比。其一率與二率相比之分。若大於三率與四率相比之分。則為不同理之比例。而比例不得行也。如有甲乙丙丁四數。甲與乙丙與丁各互相為比。苟甲第一數與乙第二數相比之分為六與四。其丙第三數與丁第四數相比之分為五與四。則此甲與乙之比。大於彼丙與丁之比矣。故凡如此例



者。以一率二率相比之分為準。則三率四率相比之分為小。若依三率四率相比之分為準。則一率二率相比之分又大。故謂之不同理之比例。而比例四率不能行也。

第五

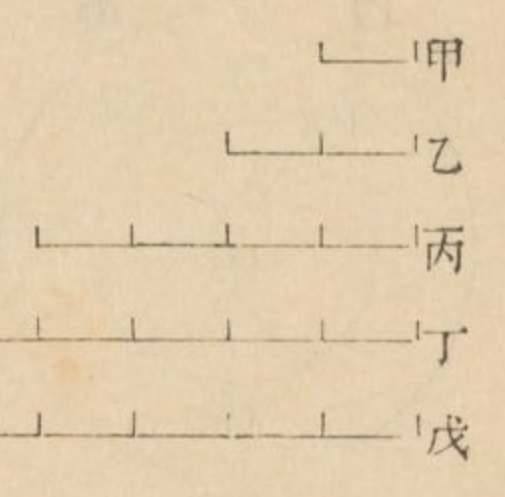
凡有四率。一率之度與二率之度相比。分數若同於三率之度與四率之度相比。則此四率。又謂之相當比例。四



率焉。如甲乙丙丁四線。苟甲線與乙線相比之度。與丙線與丁線相比之度。其分數同。則此四線謂之各相當線。而每兩率相比。其每度之分數同。故又謂之相當比例四率也。

第六

凡三率互相為比。其一率與二率之比。同於二率與三率之比。則謂之相連比例率也。如甲乙丙三數互相為比。苟甲

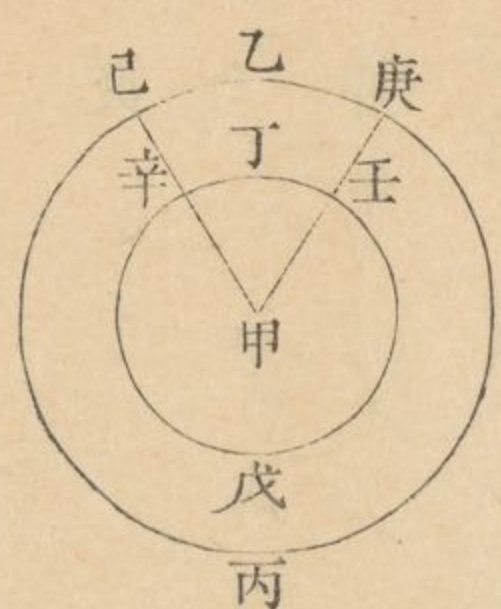
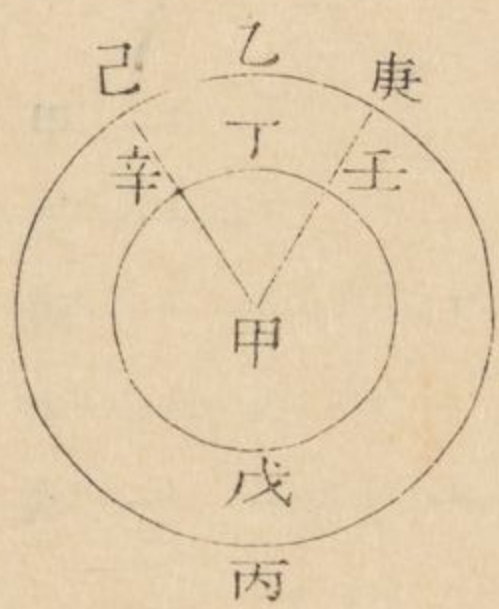


數與乙數之比。同於乙數與丙數之比。則此甲乙丙三數。謂之相連比例率矣。若相連比例率內。將一率與三率比之。則為隔一位加一倍之比例。或有相連比例四率。將一率與四率比之。則為隔二位加二倍之比例。大凡有幾率隔幾位以比者。皆以隔幾位而為加幾倍之比例也。如甲乙丙相連比例率內。其甲與丙之比。為隔一位加一倍之比例。又

或甲乙丙丁戊五數俱為相連比例率。其甲與丁之比即為隔二位加二倍之比例。而甲與戊之比則又為隔三位加三倍之比例矣。

第七

相當比例四率為數學之要。因其理之所該最廣。故設為雙圓圖以申明之。立甲點為心。作乙丙一大圓。丁戊一小圓。此二圓界各具三百六十度。故皆可以



為三百六十分。

首卷第十七節云。凡圓無論大小。俱定為三百

六十度。於是自圓之甲心。過小圓界之辛

壬二處。至大圓已庚二處作二線。則大

圓之已甲庚。小圓之辛甲壬。俱同一甲

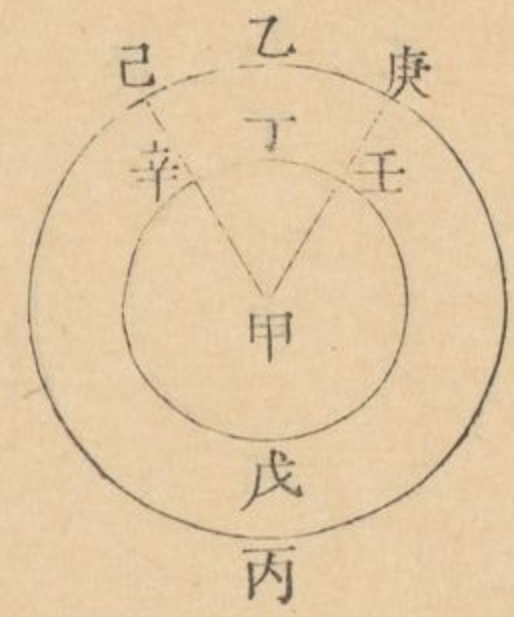
角。此甲角相對之已庚弧界。設為六十

度。則為乙丙大圓三百六十分中之六

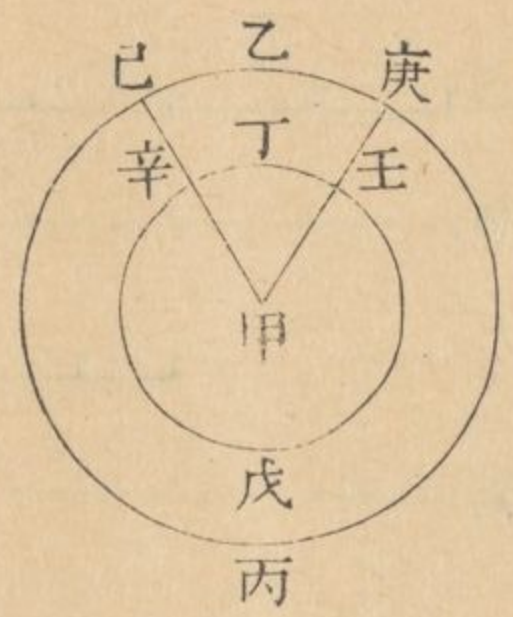
十分矣。乙丙大圓之已庚弧界度。既為

六十分。則丁戊小圓之辛壬弧界度。亦

為六十分矣。大凡角度。俱定於相對之



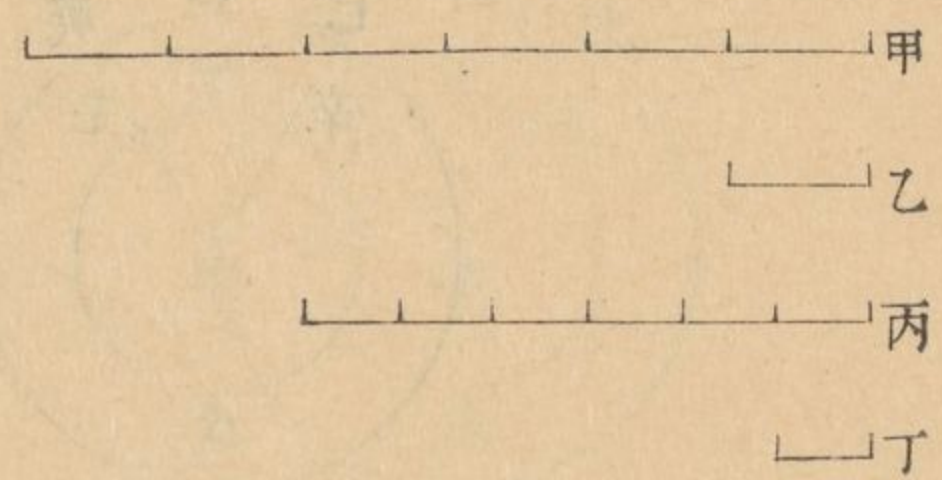
園界。見首卷第九節。今此大園之已庚弧界。小園之辛壬弧界。俱與一甲角相對。其度雖依園之大小不同。而分數則等。分數既等。則大園小園大弧小弧兩兩互相為比。即如四率之兩兩相比。為同理比例矣。是以大園之三百六十分為一率。自大園所分之已庚弧之六十分為二率。小園之三百六十分為三率。自小園所分之辛壬弧之六十分為四率。其乙



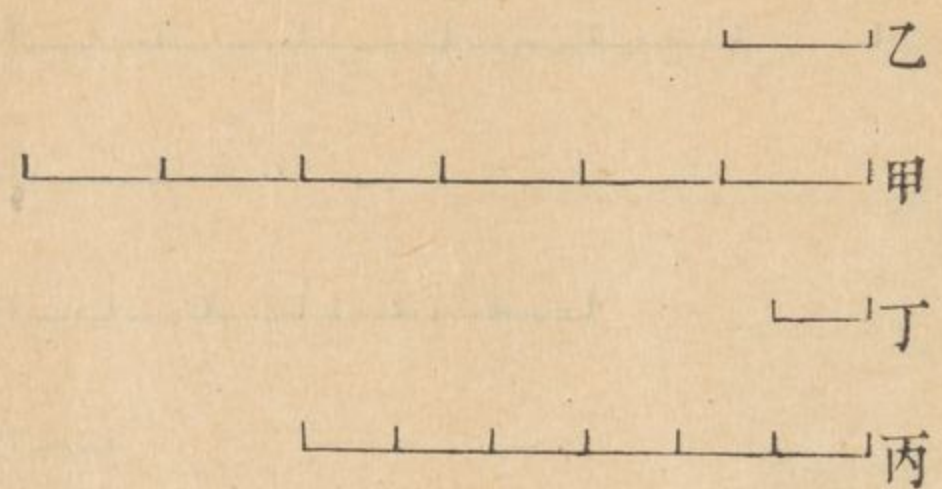
丙大全園。與本園已庚分之比。即同於丁戊小全園。與本園辛壬分之比也。故凡各率各度雖異。相當之分數若同。則一率與二率之比。必同於三率與四率之比。而俱謂之順推比例矣。要之分合加減各率之法。總不越此圖之互轉相較之理也。

第八

一種反推比例。將一率與二率之比。同



於三率與四率之比者反推之。以二率與一率爲比。四率與三率爲比。其所比之例仍同。故亦謂之相當比例率也。如甲。乙。丙。丁。四數。將甲與乙之比。同於丙與丁之比。反推之。以乙與甲爲比。丁與丙爲比。則所比之例。仍同於相當比例率焉。以前雙圓圖解之。蓋甲數與乙數之比例。卽乙丙大圓全界與所分己庚弧界之比例。丙數與丁數之比例。卽丁



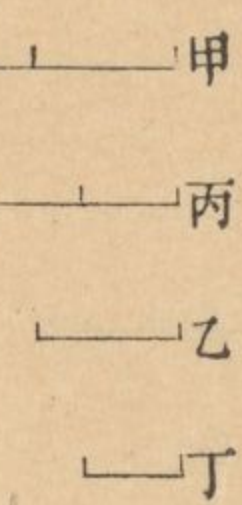
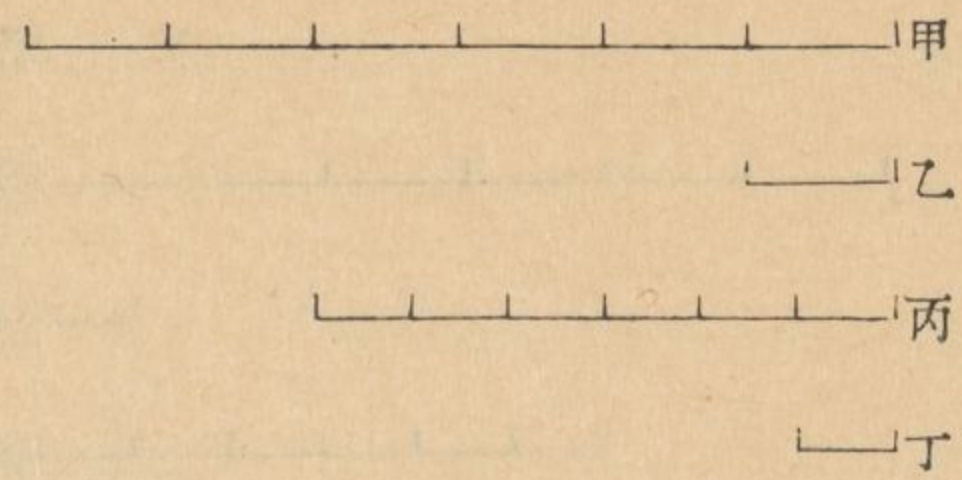
戊小圓全界與所分辛壬弧界之比例也。今反以乙與甲爲比。丁與丙爲比。卽如以乙丙大圓所分之己庚弧界與乙丙大圓全界爲比。丁戊小圓所分之辛壬弧界與丁戊小圓全界爲比也。因其以二率爲一率。以三率爲四率。前後互移。故謂之反推比例。然名雖爲反推比例。而相當比例之率。仍與順推比例相同也。

第九

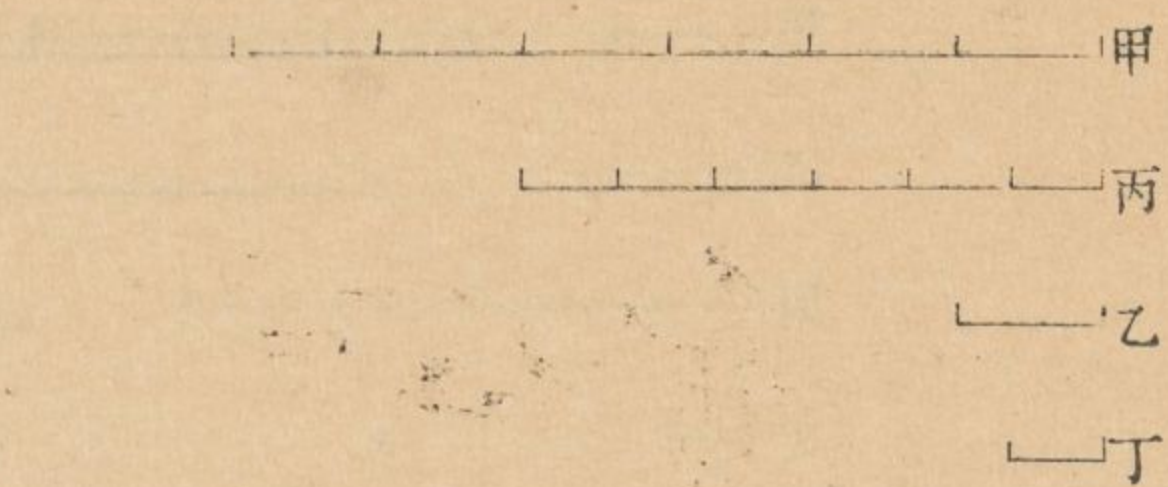
一種遞轉比例。將一率與二率之比。同於三率與四率之比者。轉較之。以一率與三率為比。二率與四率為比。其所比之例。仍為相當比例率也。如甲乙丙丁四數。將甲與乙之比。同於丙與丁之比。轉較之。以甲與丙為比。乙與丁為比。則所比之例。仍同於相當比例率也。如前雙園圖



乙丙大園全界一率與所



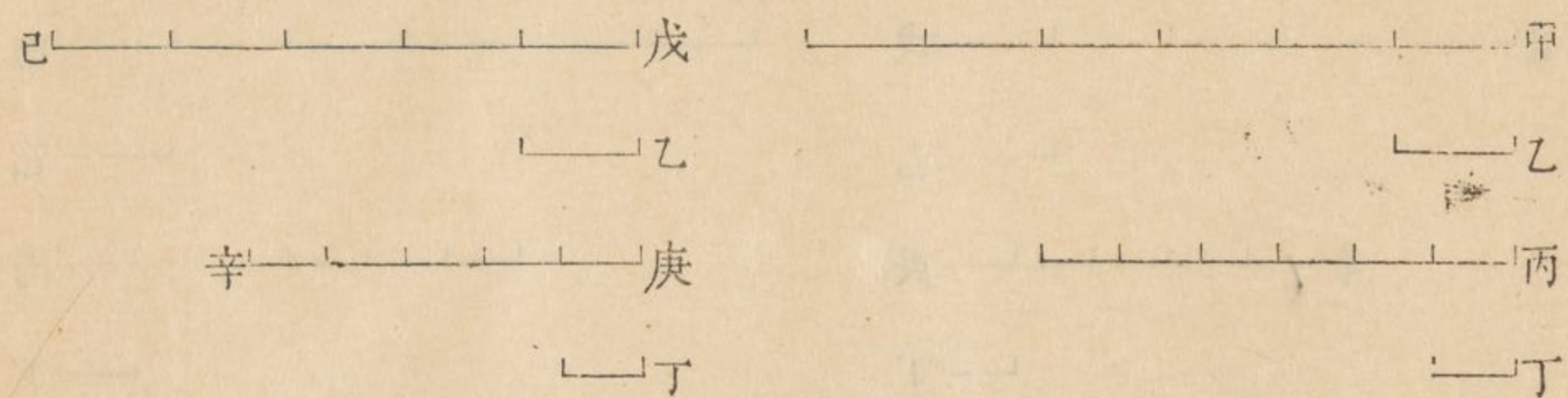
分已庚弧界二率之比。同於丁戊小園全界三率與所分辛壬弧界四率之比。若轉較之。以乙丙大園之一率與丁戊小園之三率為比。大園所分之己庚弧界二率與小園所分之辛壬弧界四率為比。其度雖依園之大小有異。而分數則同。其比例仍同於原比例。故甲乙丙丁之四數。亦如大小二園為互相比例之率。而甲一率與丙三率之比。即大園



與小園之比。乙二率與丁四率之比。即大園所分弧界。與小園所分弧界之比也。蓋以三率為二率。以二率為三率。遞轉相較。故謂之遞轉比例。其相當比例之四率。雖遞轉以較之。亦仍為相當比例之四率也。

第十

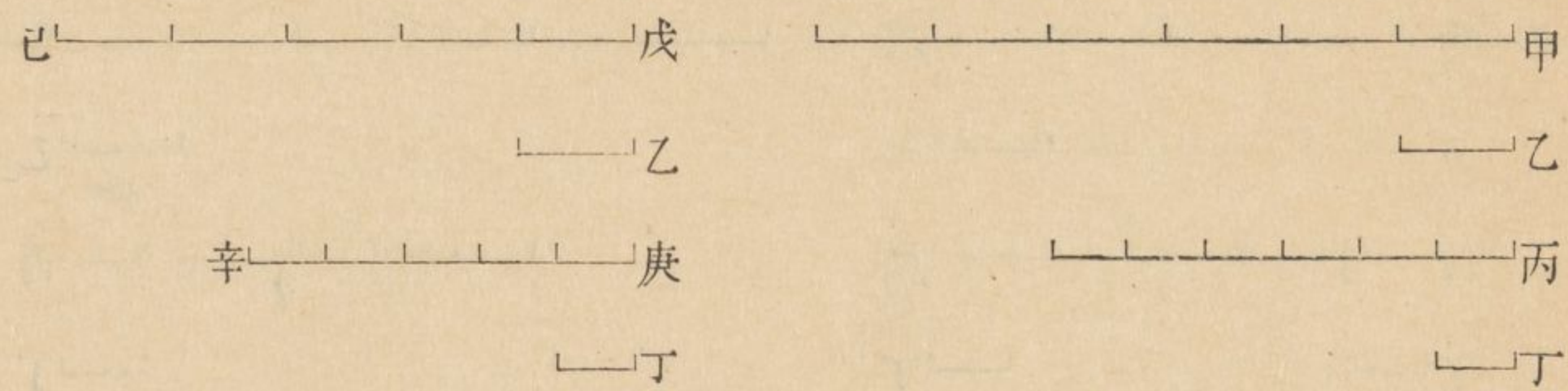
一種分數比例。彼四率之中。以一率與二率之比。同於三率與四率之比矣。若



將此相比之。率所較之分。截開。以一率與二率之較。為一率。與二率為比。以三率與四率之較。為三率。與四率為比。則其所比之例。仍為相當比例率也。如甲乙丙丁四數。於甲數內減去乙數之分。為戊己丙數。內減去丁數之分。為庚辛。乃以戊己易甲與乙線為比。以庚辛易丙與丁線為比。則所比之例。仍同於相當比例率也。如前雙園圖。



於乙丙

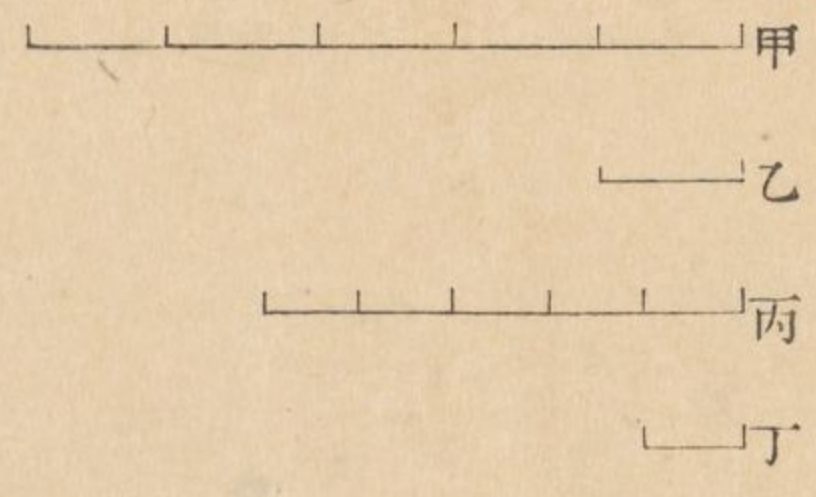


大園全界內。減去所分已庚弧界一段。仍與已庚弧界爲比。丁戊小園全界內。減去所分辛壬弧界一段。仍與辛壬弧界爲比。亦與大園全界與大園所分弧界。小園全界與小園所分弧界相比之理同。故此甲線內。截去乙所成戊己。仍與乙相比。卽如乙丙大園全分。截去己庚弧界一段。仍與已庚弧界相比。而丙線內。截去丁所成庚辛。仍與丁相比。卽

如丁戊小園全分。截去辛壬弧界一段。仍與辛壬弧界相比也。其比例仍同於相當比例四率。但因其各分內有分開相減之故。所以謂之分數比例也。

第十一

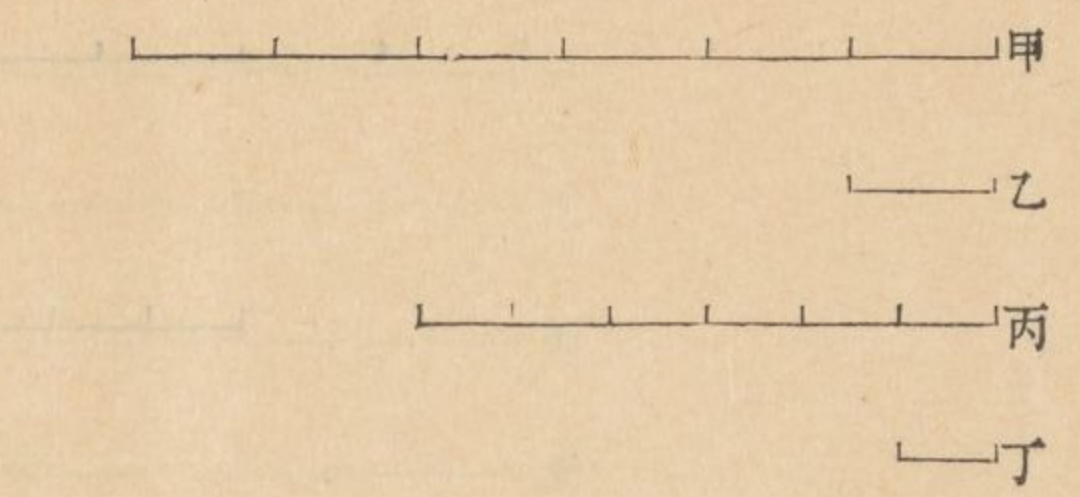
一種合數比例。有四率。以一率與二率之比。同於三率與四率之比矣。若將此相比之率併之。以一率與二率相加爲一率。仍與二率爲比。以三率與四率相



加為三率。仍與四率為比。其所比之例。亦仍同於相當比例之四率也。如甲乙丙丁四數。以甲數與乙數相加。共為一率。與乙數為比。丙數與丁數相加。共為三率。與丁數為比。則所比之例。仍同於相當比例四率也。此合數比例。與分數比例之理。互相對待。彼分數比例。以雙圓圖

庚壬
乙丁
甲戊
丙
辛

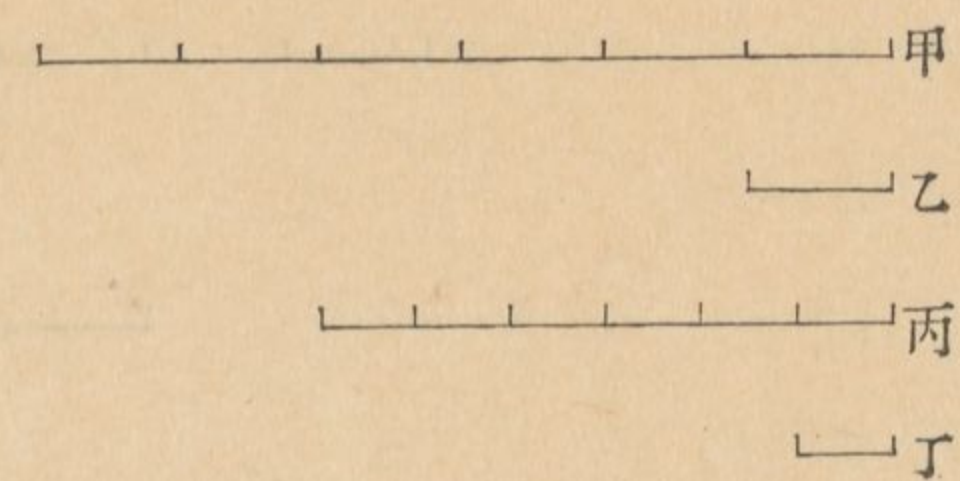
二圓全界內。減去所分弧界一段。仍與所分弧界一段為比。今此合



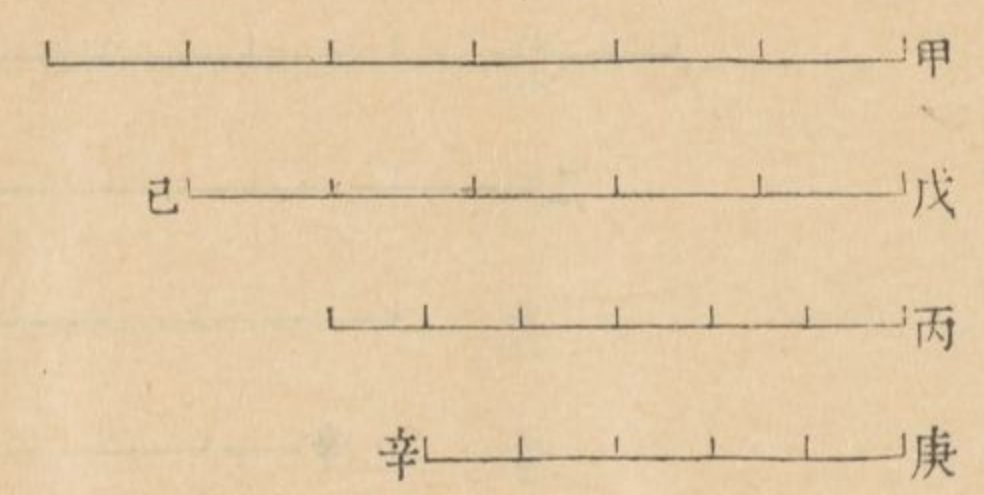
數比例。即如二圓全界內所分大段。加入所分弧界一小段。即是全界。而與所分弧界一段為比也。其所比之理。仍同於相當比例四率。但因有相加之分。故謂之合數比例焉。

第十二

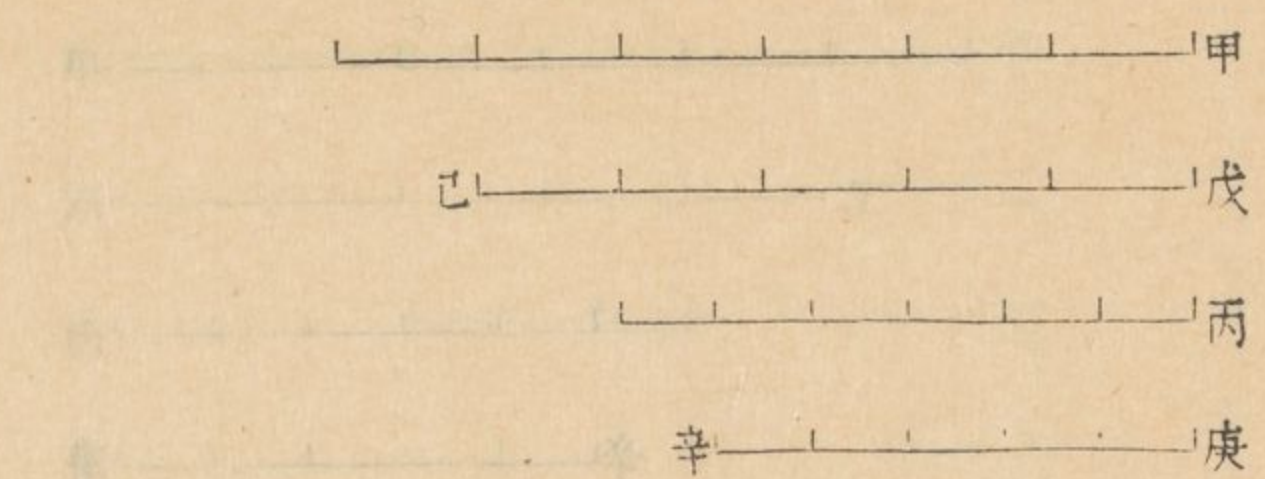
一種更數比例。以一率與二率之比。同於三率與四率之比者。更之。將一率與二率相減。用其餘分為二率。仍與一率



爲比。又將三率與四率相減。用其餘分爲四率。仍與三率爲比。則其比例之理。仍同於相當比例四率也。如甲乙丙丁四數。於甲第一率內。減去乙第二率。所餘爲戊己。乃以戊己立乙第二率之位。而以甲與戊己爲比。復於丙第三率內。減去丁第四率。所餘爲庚辛。乃以庚辛立丁第四率之位。而以丙與庚辛爲比。其所比之理。仍同於四率之比例。故亦



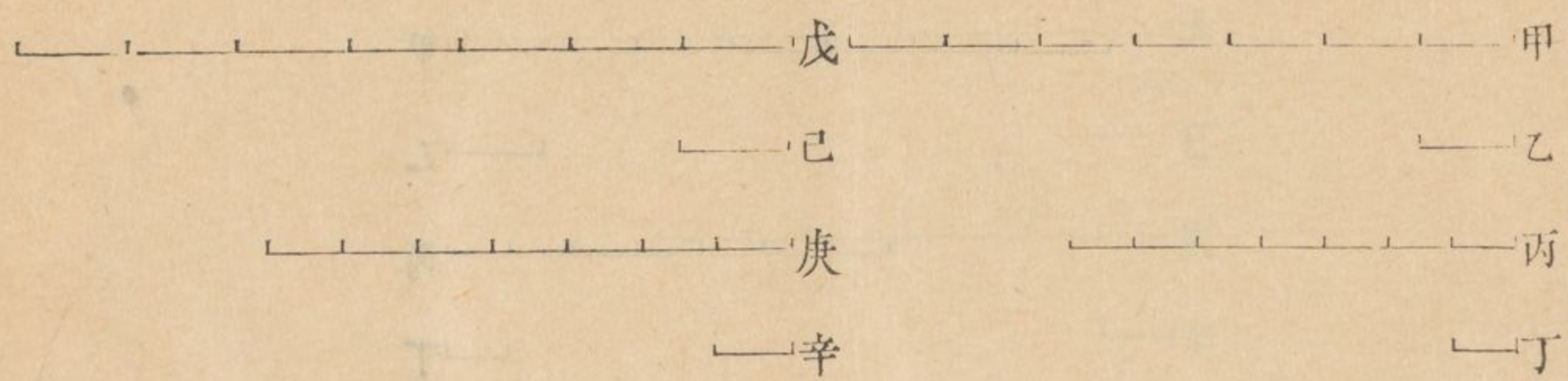
爲相當比例之四率也。今以雙圓圖解之。庚壬 乙丁 甲戊 丙辛乙丙大圓三百六十度之全界。乙仍爲一率。全界內減去所分之己庚弧界六十度一段。餘己丙庚三百度一大段。己 庚爲二率。丁戊小圓三百六十度之全界。丁 戊仍爲三率。全界內減去所分之辛壬弧界六十度一段。餘辛戊壬三百度一大段。辛 壬 戊爲四率。則乙丙大圓三百六十度之全界如甲。所更



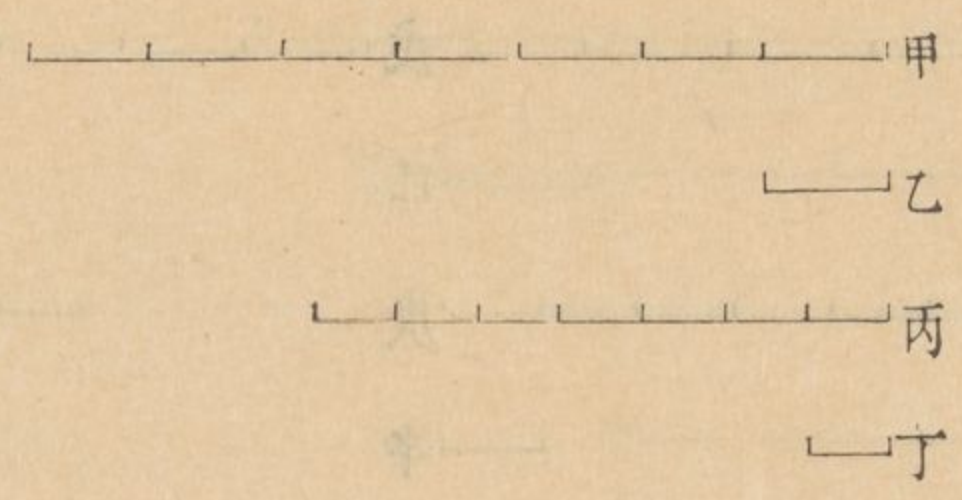
之己丙庚三百度如戊己。而丁戊小圓三百六十度之全界如丙。所更之辛戊壬三百度如庚辛。故其四率之兩相比例。亦同為相當比例率也。凡四率之內。前後之相差。雖更入比之。仍與相當比例之理同。但以其數有更入之故。所以謂之更數比例也。

第十三

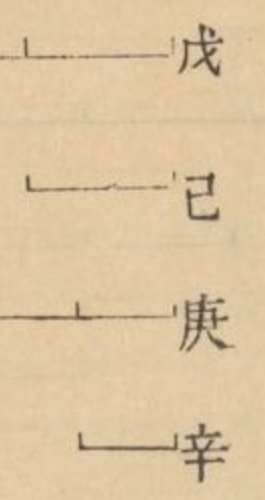
一種隔位比例。有兩相比例四率。將此



一邊四率內。一率與末率為比。彼一邊四率內。一率與末率為比。則其所比之例。仍同於相當比例四率也。如此一邊有甲乙丙丁四數。彼一邊有戊己庚辛四數。此甲與乙之比。同於彼戊與己之比。此乙與丙之比。同於彼己與庚之比。此丙與丁之比。同於彼庚與辛之比。若將此四率隔位比之。使此一邊之甲與丁為比。以彼一邊之戊與辛為比。則其



比例仍同於相當比例四率也。試以雙
 圓圖之大小圓所分各弧界之兩線引
 長。庚壬子寅
乙丁甲戌丙
己辛癸丑自庚壬過甲至癸丑作一全徑
 線。復自己辛過甲至子寅作一全徑線。
 則分大圓為庚己己丑丑寅寅庚四段。
 分小圓為壬辛辛癸癸子子壬四段。其
 大圓之庚己己丑丑寅寅庚四段為相
 當四率。而小圓之壬辛辛癸癸子子壬
 四段亦為相當四率。此二圓之所分四

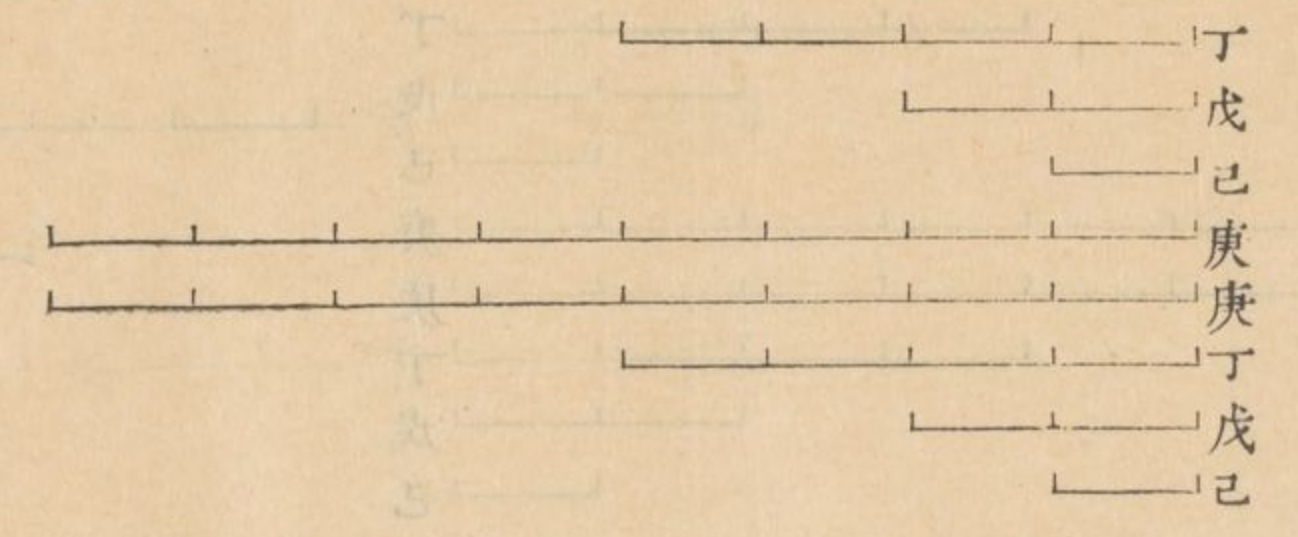
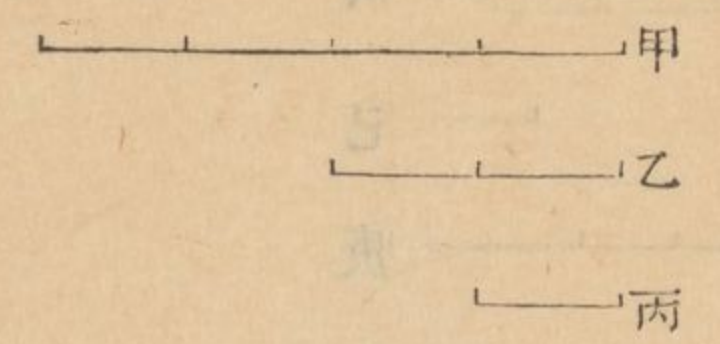


段。既俱為相當四率。則其各相比例。度
 之大小雖異。而分數相同。故大圓之庚
 己一段與己丑一段之比。同於小圓之
 壬辛一段與辛癸一段之比。大圓之己
 丑一段與丑寅一段之比。同於小圓之
 辛癸一段與癸子一段之比。大圓之丑
 寅一段與寅庚一段之比。同於小圓之
 癸子一段與子壬一段之比也。若以此
 各相當四率隔位以比之。其大圓之庚

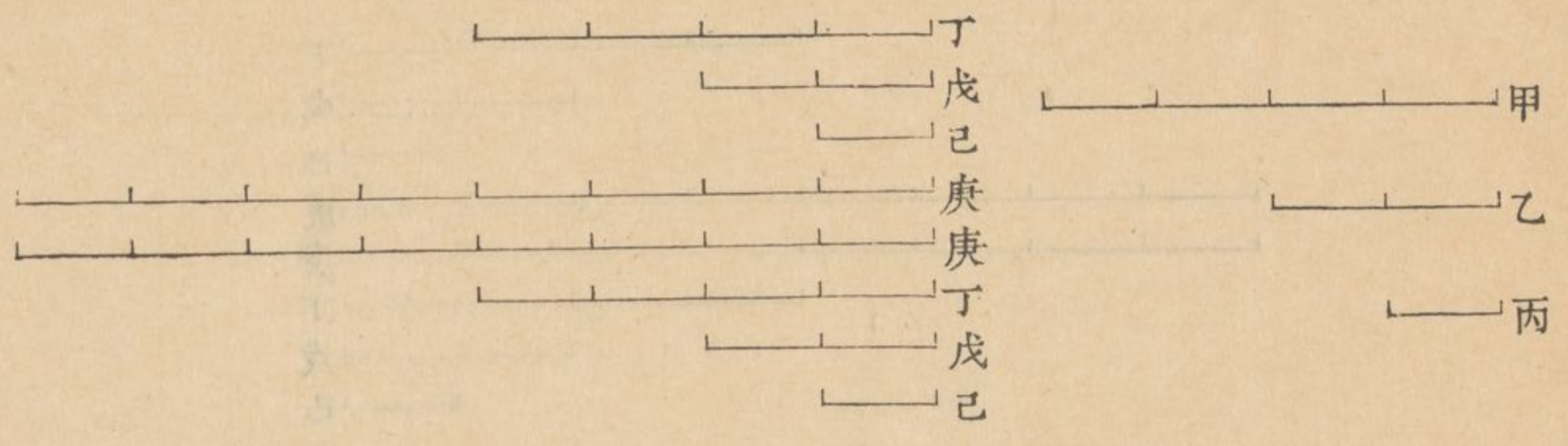
已一段與寅庚一段為比。而小圓之壬辛一段與子壬一段為比。其比例仍同於相當比例四率。但以其兩邊各相比例四率內。各取兩率隔位以比之。故謂之隔位比例耳。

第十四

一種錯綜比例。有兩連比例三率。此一邊三率內中率與末率之比。同於彼一邊三率內中率與末率之比。則為相當



比例之四率。苟錯綜其位分。以此一邊首率與末率隔位為比。復取另一數與彼一邊中率為比。而成同理之四率。則此另一數必與彼邊三率為連比例四率矣。如此一邊有甲乙丙連比例三數。彼一邊有丁戊己連比例三數。將此一邊中率乙數與末率丙數之比。同於彼一邊中率戊數與末率己數之比。今錯綜其

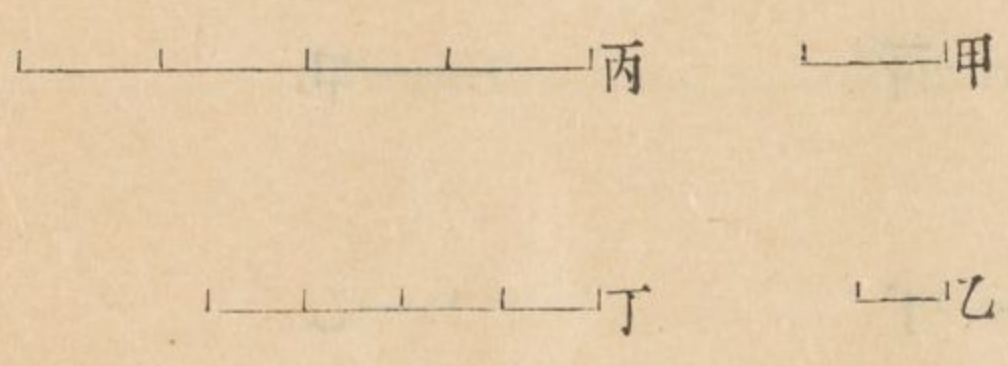


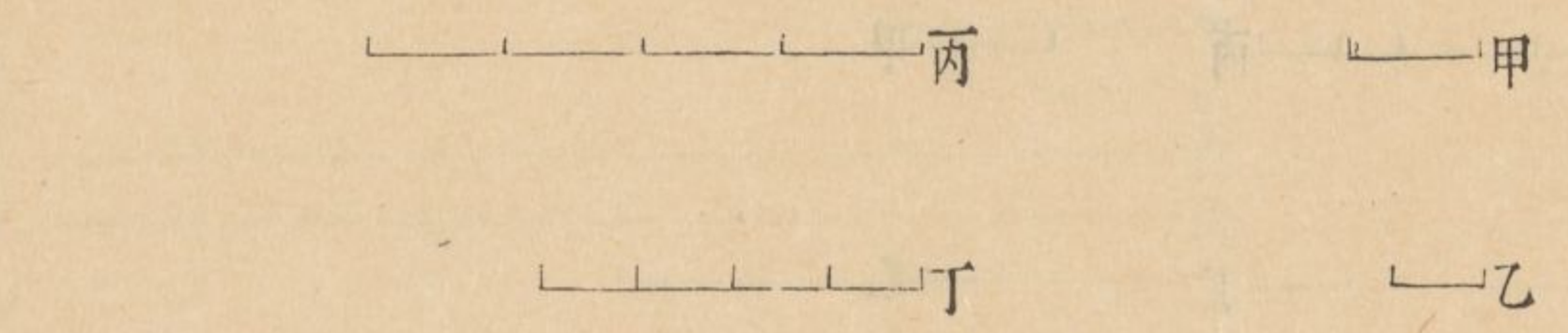
位分。使此一邊所有之首率甲數。與所
 有之末率丙數隔位為比。復另取一庚
 數。與彼一邊所有之中率戊數為比。則
 其比例亦同於相當比例四率。而此庚
 數與彼邊丁。戊。己。三率為連比例之數
 矣。何也。試以庚數置於彼一邊丁首率
 之上。則庚為首率。而丁移而為中率。戊
 又易而為末率。是故此一邊甲首率與
 丙末率之比。同於彼一邊所取庚首率

與所易戊末率之比。但以兩連比例率
 互相易位增入比之之不同。故名之為
 錯綜比例耳。

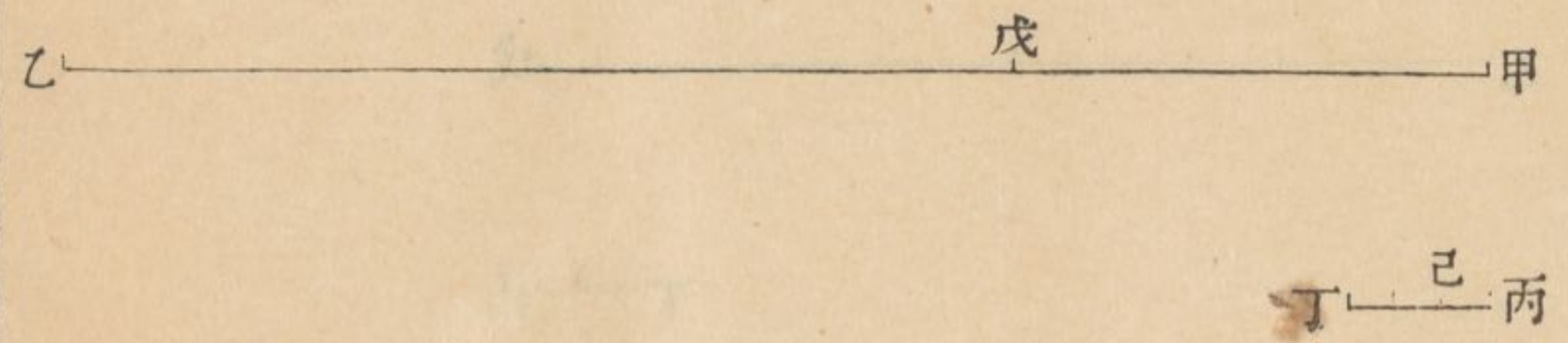
第十五

一種加分比例。凡有二率。依本度各加
 幾倍。所加之分數若等。則所成之二率
 互相為比。仍同於原二率之互相為比。
 謂之等倍相加之比例也。如甲。乙。二數。
 於甲數依本度加三倍為丙。於乙數依



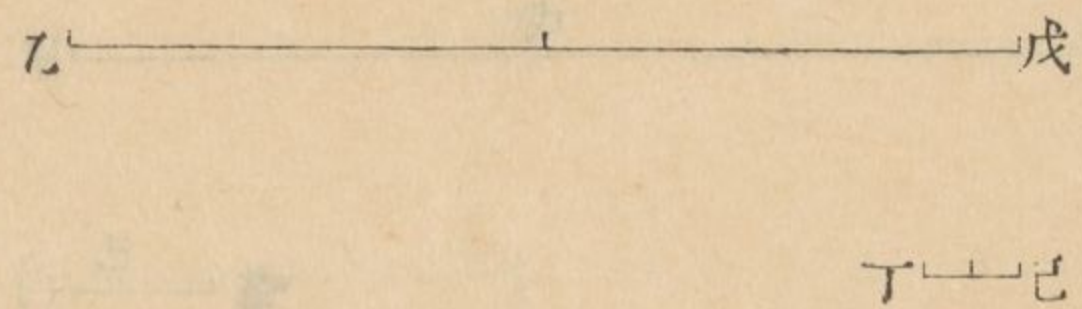


本度加三倍為丁。則此丙丁二數互相為比。仍同於甲乙二數之互相為比也。假若甲度為一大分。乙度為一小分。則甲加三倍成四大分之丙。乙加三倍成四小分之丁。以四大分之丙比四小分之丁。以一大分之甲比一小分之乙。其相當之分數既等。固為同理比例可知矣。見本卷第三節故凡二率依本度各加幾倍。其所加之分數若等。其加分之率互相



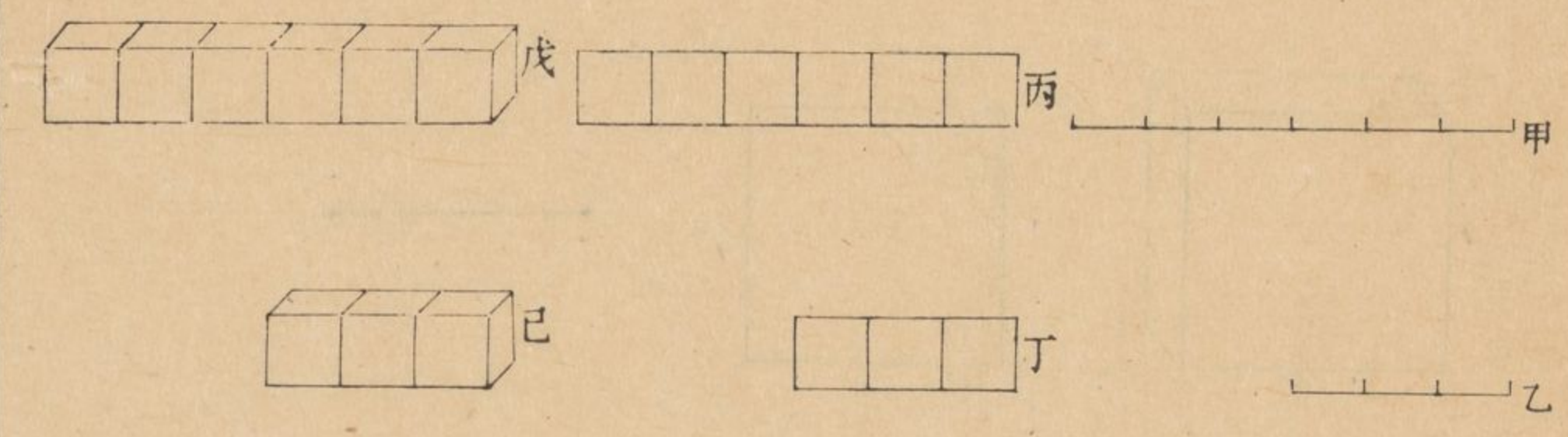
為比。必同於原率之互相為比。因於原數有相加之分。故謂之加分比例也。
第十六

一種減分比例。凡有二率。依本度各減幾倍。所減之分數若俱等。則所成之二率互相為比。仍同於原二率之互相為比。謂之等分相減之比例也。如有甲乙丙丁二數。其甲乙之三分內。減去甲戊一分。丙丁之三分內。減去丙己一分。則

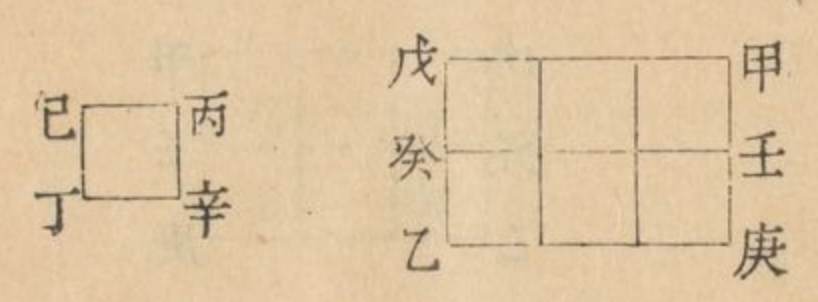


戊乙己丁互相為比。仍同於原甲乙丙丁全數之互相為比也。何也。夫甲乙度為三尺。丙丁度為三寸。自甲乙度內減去一尺。則為戊乙。自丙丁度內減去一寸。則為己丁。以所餘之戊乙二尺。與所餘之己丁二寸為比。以甲乙之全三尺。與丙丁之全三寸為比。其相當之分數必等。故亦為同理比例矣。凡二率之內。無論減幾分。其所減之分數若等。則相

比之理。必同於原數之比例。因於原數內減之。故又謂之減分比例也。



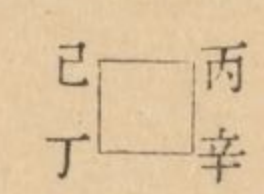
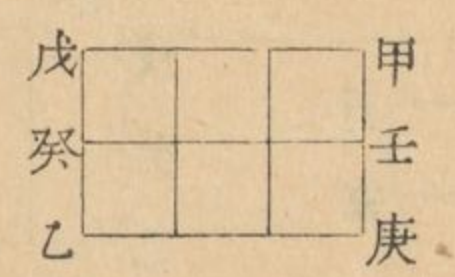
前各種比例之法。線之比例若同。則為相當比例。線。面之比例若同。則為相當比例。面。體之比例若同。則為相當比例。體矣。夫線面體為類不同。雖不能互相為比。假使線面體之每相當分數若等。則按其各類相當分數比之。亦為同理。比例率也。如甲之六分線。與乙之三分線相比。丙之六分面。與丁之三分面相比。戊之六分體。與己之三分體相比。此



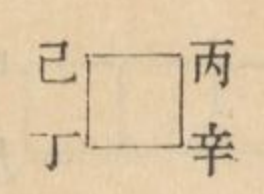
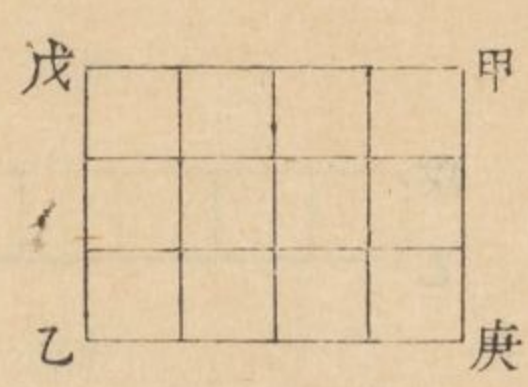
三種每相當分數既俱相等。故其比例亦俱相等。而六率互為同理。比例可知矣。

第二

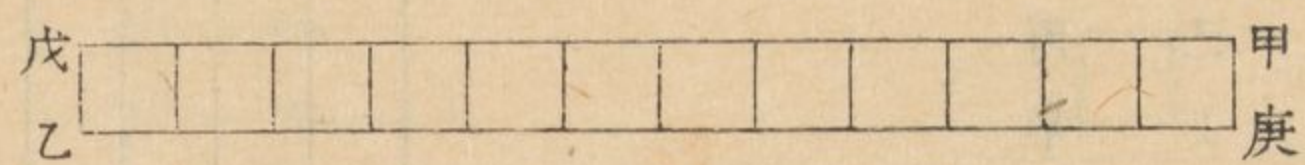
大凡直角平方面積。皆生於二線之度。故欲知方面所生比例之分。將其二形之縱橫線分考之。即可得而知矣。如甲乙丙丁。直角平方之二面。欲知其所生比例之分。則視甲乙大形之甲戊橫線



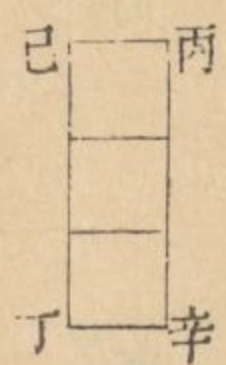
長度得彼丙丁小形之丙己橫線長度為三倍。而甲乙大形之甲庚縱線寬度得彼丙丁小形之丙辛縱線寬度為二倍。假若將甲乙大形自中線平分為甲癸壬乙二形。其甲癸形之甲壬寬度。丙丁形之丙辛寬度。必俱相等。其甲戊橫線長度。既仍與丙己橫線長度為三倍。其所分之甲癸形。必與丙丁三形相等。再彼壬乙形。亦與丙丁三形相等。則此



二形相合之甲乙一全形。比之丙丁小形為六分可知矣。又或甲乙大形之甲戊橫線長度。得丙丁小形之丙己橫線長度為四倍。甲乙大形之甲庚縱線寬度。得丙丁小形之丙辛縱線寬度為三倍。則大形與小形四倍者有三。而大形比小形為十二分可知矣。再或甲乙大形之甲戊橫線。比丙丁小形之丙己橫線為十二倍。丙丁小形之丙辛縱線。反



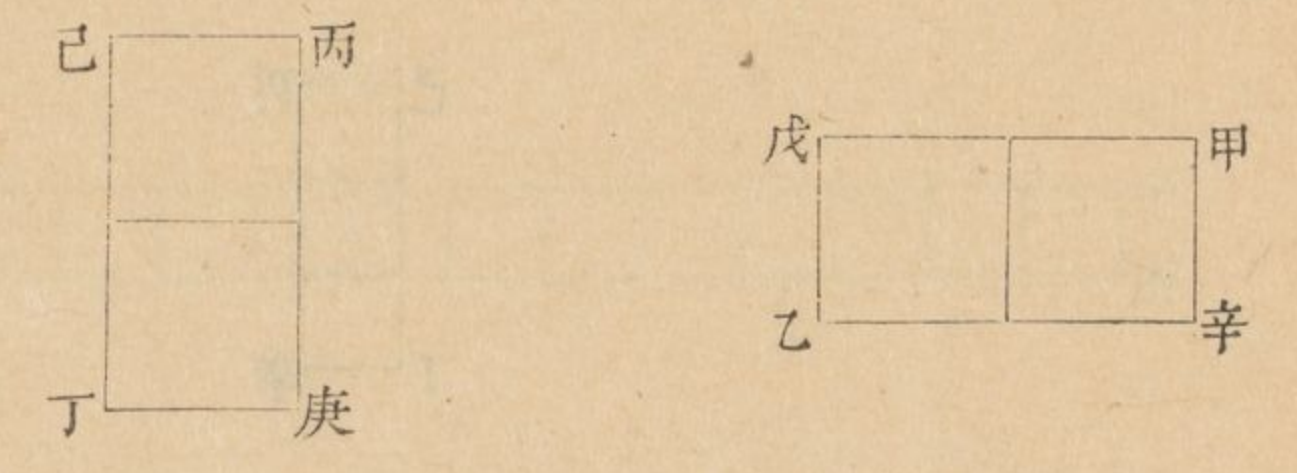
比甲乙大形之甲庚縱線為三倍。則甲乙大形之甲戊橫線之長。雖比丙丁小形之丙己橫線之長多十一倍。而甲乙大形之甲庚縱線之寬。又比丙丁小形之丙辛縱線之寬少二倍矣。將此縱橫二線之多少較之。甲乙大形。比丙丁小形為四倍。而丙丁小形。為甲乙大形之四分之一。於是以二形之縱橫多少互相較對以比例之。始得知此形與彼形



之比例焉。故凡直角平方面形。與他形相比。其比例有二。以此形之長。與他形之長比之。為一比例。以此形之寬。與他形之寬比之。為一比例。兩形相比之間。而兼兩比例者。正以平面之積。自二線之度生之之故也。

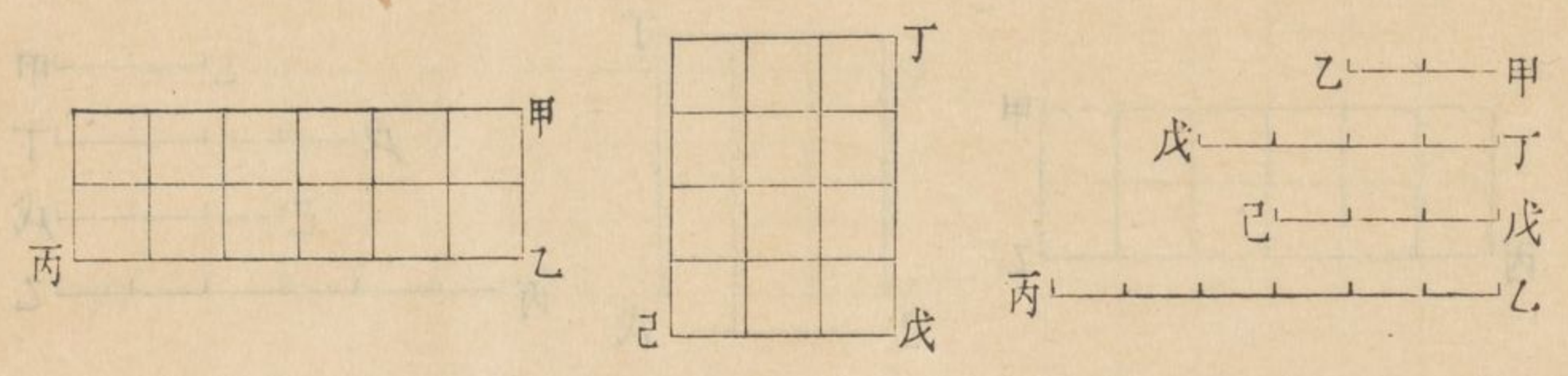
第三

有兩直角平方面形。若將此方面橫界。與他方面橫界為比。又將他方面縱界。與

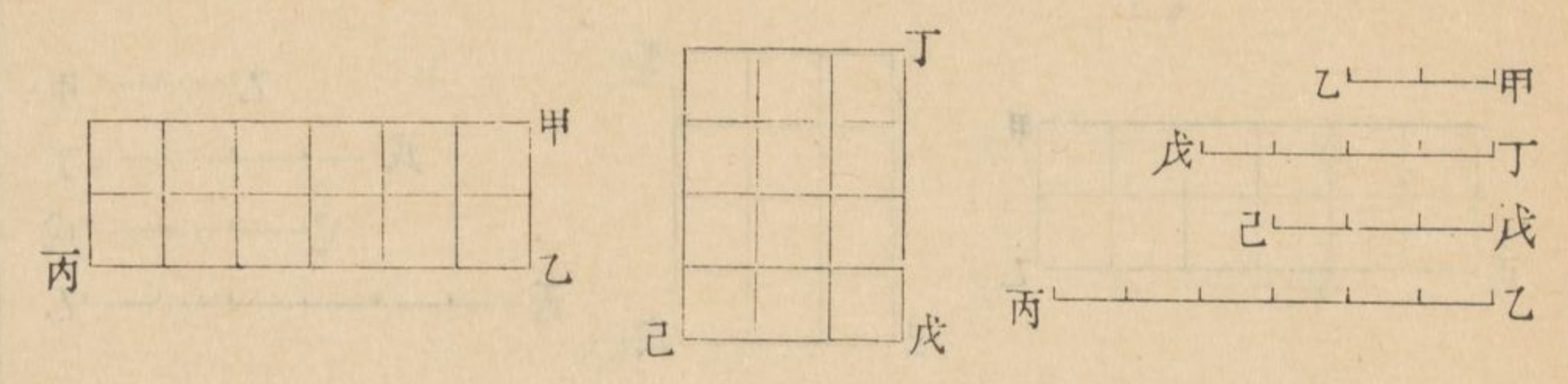


此方面縱界為比。其比例若同。則此兩方面必相等也。如甲乙丙丁兩方面形。甲乙形之甲戊橫界。比丙丁形之丙己橫界大一倍。而丙丁形之丙庚縱界。比甲乙形之甲辛縱界亦大一倍。則甲乙丙丁兩形之分必相等。是知兩方面形縱橫之分。互相較對。則兩方面之積可知矣。

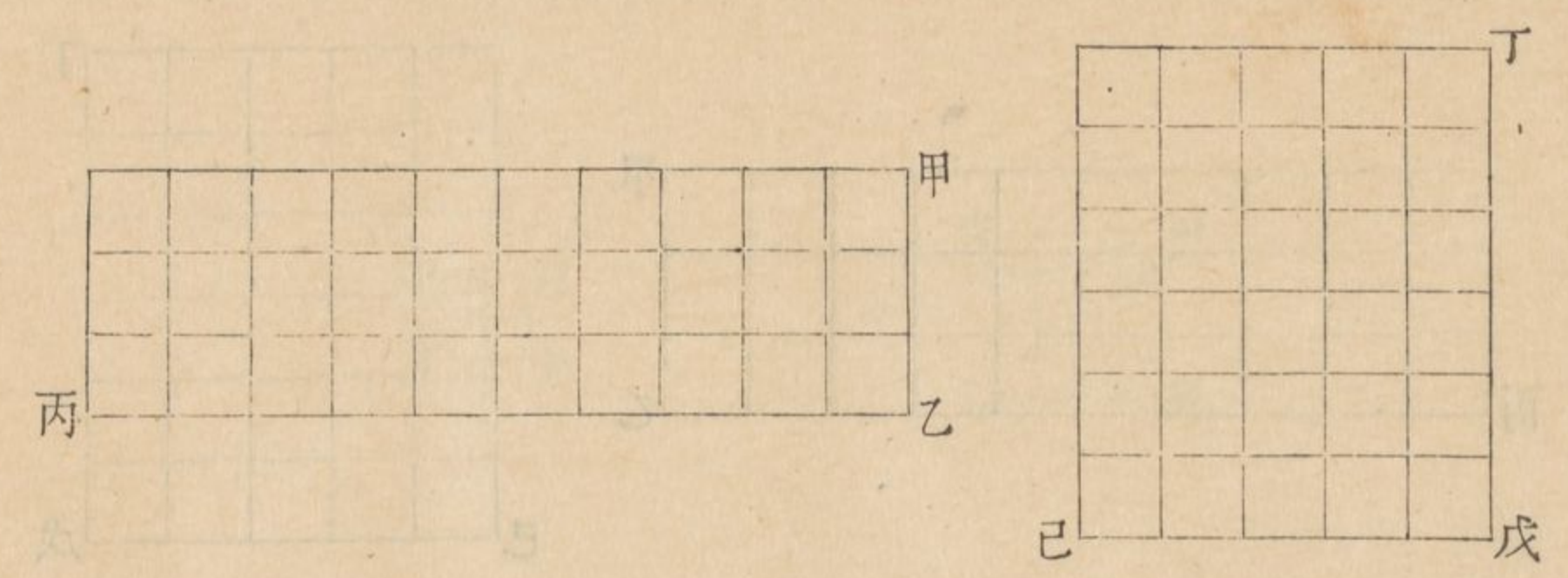
第四



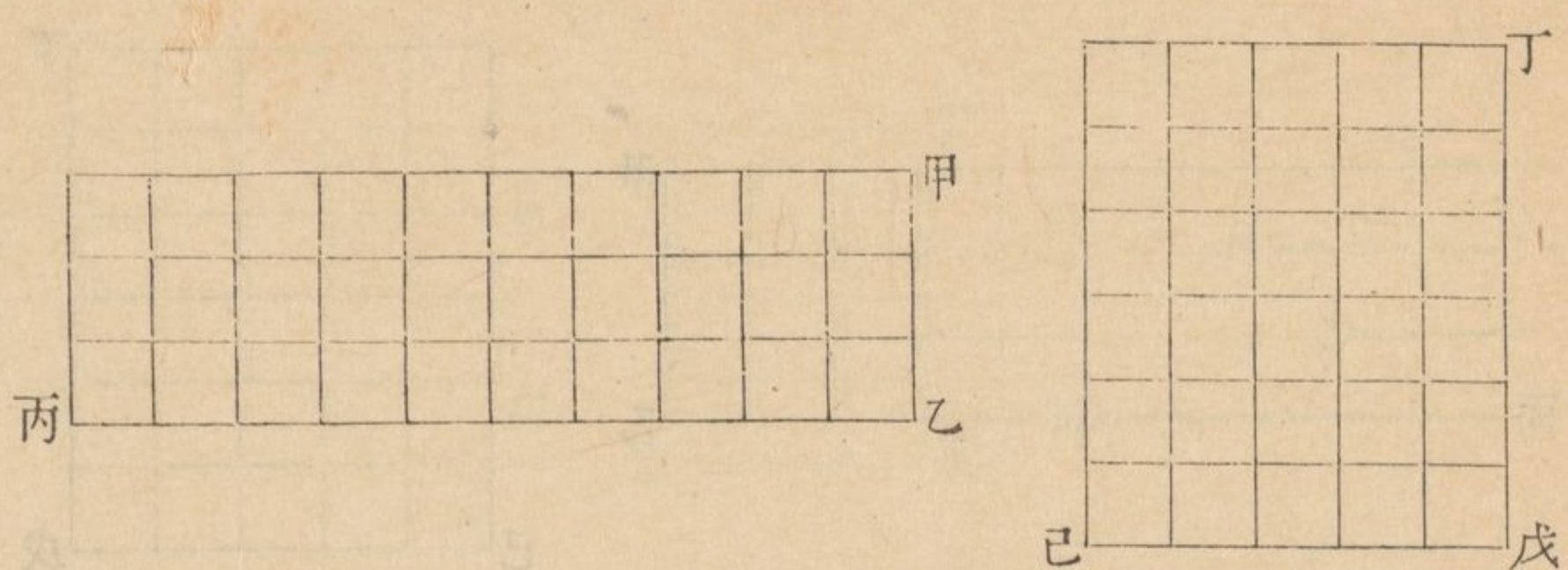
凡有相比例四率。其二率與三率相乘。一率與四率相乘。則所得之分數俱相等也。如甲乙丁戊。戊己乙丙。相比例四率。甲乙一率為二分。丁戊二率為四分。戊己三率為三分。乙丙四率為六分。將丁戊二率為縱線。戊己三率為橫線。以之相乘。又將甲乙一率為縱線。乙丙四率為橫線。以之相乘。其所得之丁己一方面形。甲丙一方面形。其分數俱是十



二。互相等矣。然則丁己形之丁戊縱度。雖比甲丙形之甲乙縱度大一半。而丁己形之戊己橫度。復比甲丙形之乙丙橫度少一半。故其縱橫互較之分相等。而其積亦等也。是故四率中凡有三率。欲求其不知之一率。將兩率之分相乘。所得之數。以一率之分除之。即得其一率矣。設如甲乙三分為一率。丁戊六分為二率。戊己五分為三率。乙丙十分為四率。則以丁戊六分二率。與戊己五分三率相乘。為丁己三十分。乃以甲乙三分一率除之。即得乙丙十分四率矣。此以小分為首率者也。或知乙丙戊己。丁戊之三率。而推甲乙之一率。則以乙丙十分為一率。戊己五分為二率。丁戊六分為三率。二率與三率相乘。一率除之。即得甲乙之四率矣。此以大分為首率



四率。今只知一率二率三率之分。欲推四率。則以丁戊六分二率。與戊己五分三率相乘。為丁己三十分。乃以甲乙三分一率除之。即得乙丙十分四率矣。此以小分為首率者也。或知乙丙戊己。丁戊之三率。而推甲乙之一率。則以乙丙十分為一率。戊己五分為二率。丁戊六分為三率。二率與三率相乘。一率除之。即得甲乙之四率矣。此以大分為首率

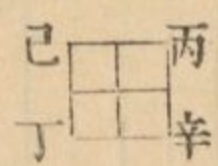
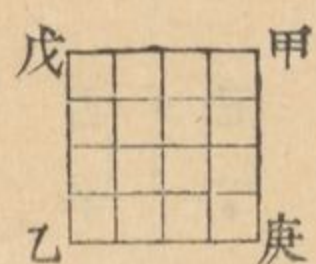


者也。又或知甲乙丁戊乙丙之三率。而推戊己之一率。則以丁戊為一率。甲乙為二率。乙丙為三率。二率與三率相乘。一率除之。即得戊己之四率矣。此即反推比例之理也。又或知戊己乙丙甲乙之三率。而推丁戊之一率。則以戊己為一率。甲乙為二率。乙丙為三率。二率與三率相乘。一率除之。即得丁戊之四率矣。此即遞轉比例之理也。

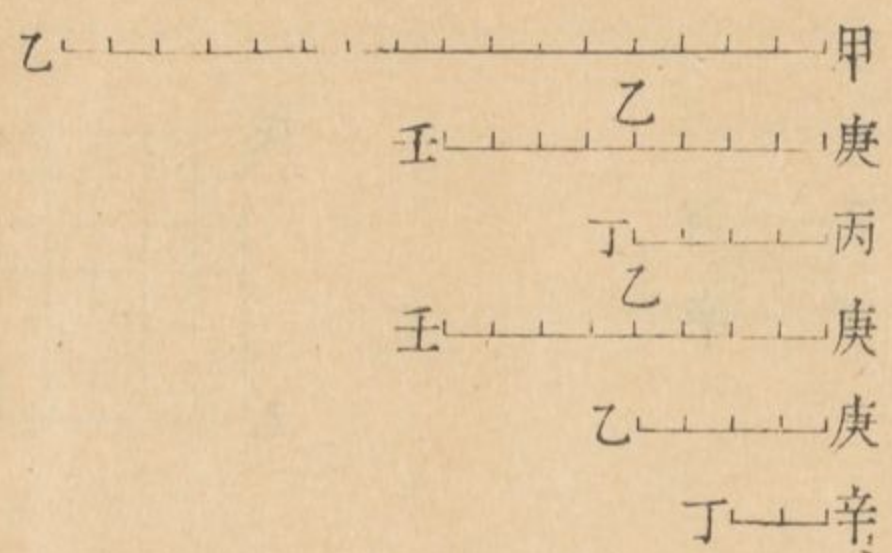
第五

凡有兩直角方面形。此一方面之橫界。與他一方面橫界為比。此一方面之縱界。與他一方面縱界為比。其比例若等。則此兩方面之比例。比之兩界之比例。為連比例隔一位相加之比例也。如甲乙丙丁同式二方面形。其甲乙形之甲戊橫界。為丙丁形丙己橫界之二倍。而甲乙形之甲庚縱界。亦為丙丁形丙辛

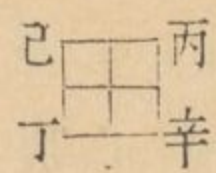
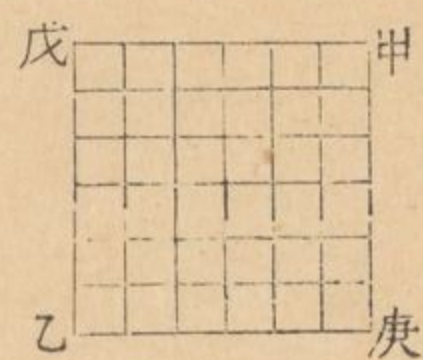




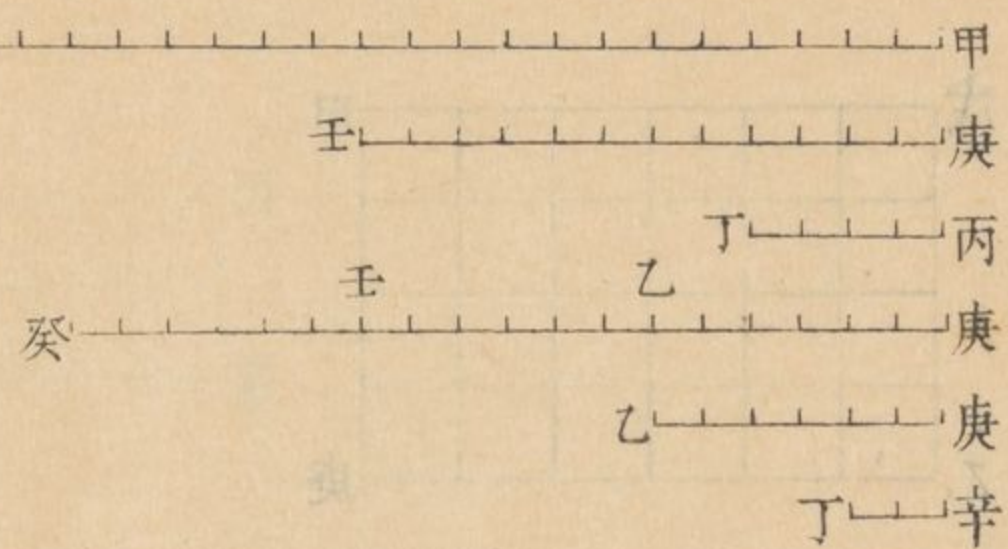
縱界之二倍。則甲乙形面積。與丙丁形面積之比。比之甲乙形之一界。與丙丁形之一界之比者。即如連比例三率隔一位相加之比例矣。蓋甲乙方面之縱橫界。既為丙丁方面縱橫界之二倍。則甲乙方面內。如丙丁方面之二倍者有二。二其二為四。故甲乙方面積。比丙丁方面積為四倍。今甲乙方面積為一十六分。與丙丁方面積之四分相比。較之



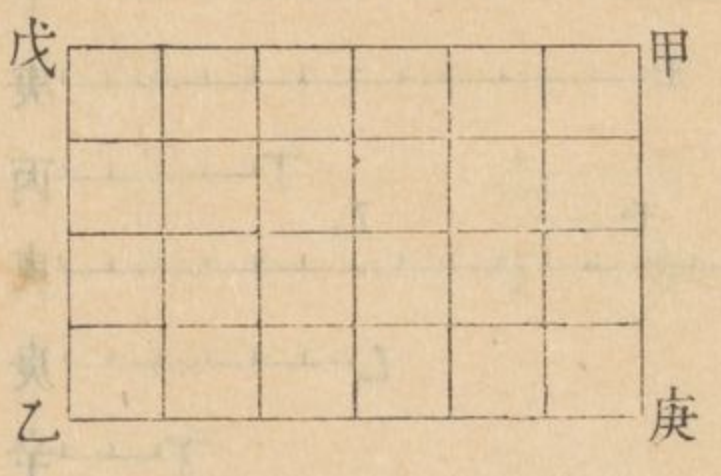
甲乙方面積之四分。與丙丁方面積之二分相比者不同。蓋丙丁四。得甲乙十六之四分之一。而辛丁二。得庚乙四之二分之一。以四分比一分。較之二分比一分。不為二倍乎。故欲求其比例相連之率。則於甲乙形之界二倍之。得八分。與丙丁方界二分為比。即如甲乙方面積十六。與丙丁方面積四分之比矣。夫八與十六。四與八。二與四。皆二分之一之比。



例。而十六隔八與四比。八隔四與二比。則皆成四分之一之比例。故十六與四。較之四與二。為兩界上連比例。隔一位。相加之比例也。又如甲乙方面之縱橫。界。為丙丁方面縱橫界之三倍。則甲乙方面內。如丙丁方面之三倍者有三。三其三為九。故甲乙之面積。比丙丁面積。為九倍。今甲乙之積。為三十六分。與丙丁方面積四分相比。較之甲乙方面界之

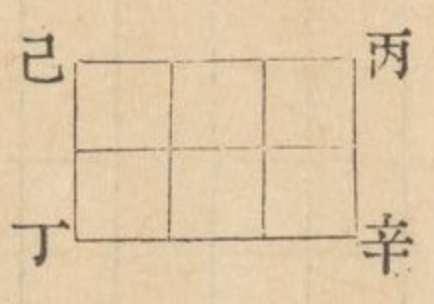


六分。與丙丁方界之二分相比者不同。蓋丙丁四。得甲乙三十六之九分之一。而辛丁二。得庚乙六之三分之一。以九分比一分。較之三分比一分。不為三倍乎。故欲求其比例相連之率。則於甲乙形之界三倍之得十八。與丙丁方界二分為比。即如甲乙方面積三十六。與丙丁方面積四之比例矣。蓋十八與六。六與二。皆三分之一之比例。而三十六隔

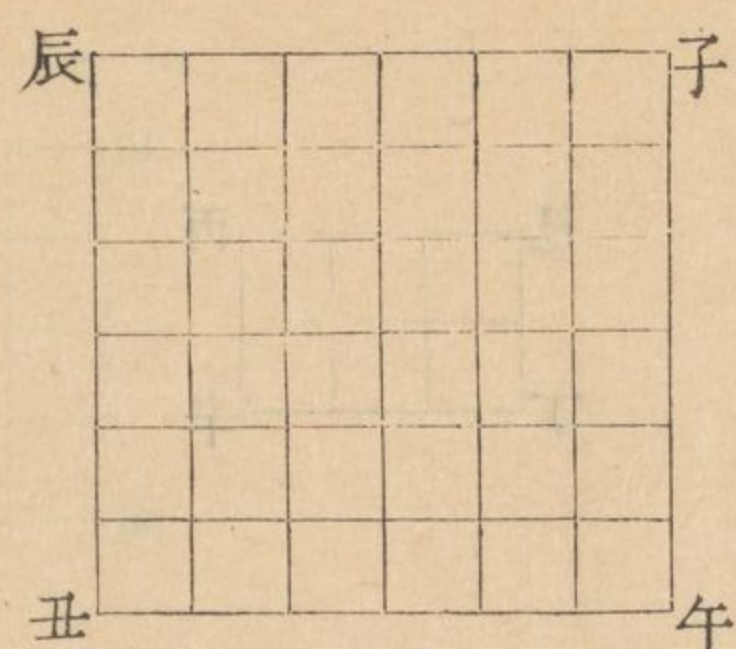


十二與四比。十八隔六與二比。則皆為九分之一之比例。故三十六與四。較之六與二。亦為兩界上連比例。隔一位相加之比例也。

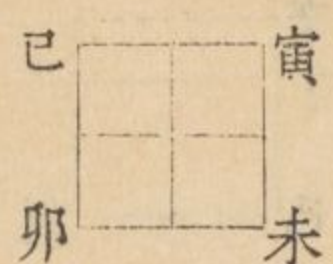
第六海末共九國。其數之率。與甲乙。凡直角方面形有二種。一為長方。一為正方形。因其縱橫界之比例各異。故其所生之形不同。而積不得互相為比也。如欲比之。必以長方與長方為比。正方與



正方為比。其比例始行。如甲乙。丙丁。兩長方面形。其甲乙形之甲戊橫界。與丙丁形之丙己橫界。為大一倍。甲乙形之甲庚縱界。與丙丁形之丙辛縱界。亦為大一倍。其比例相同。若以甲乙形之甲戊橫界。與丙丁形之丙辛縱界。為比。則大三倍。而甲乙形之甲庚縱界。與丙丁形之丙己橫界。為比。止大一分。猶不得形之丙己橫界為比。止大一分。猶不得大一倍。其比例則異。故甲乙形所生之



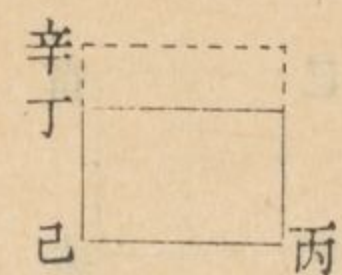
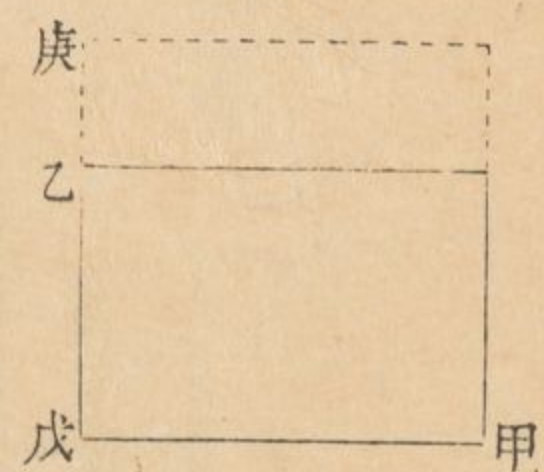
積爲二十四。而丙丁形所生之積爲六。俱爲長方形焉。又如子丑寅卯兩正方形。其子丑形之子辰橫界。與寅卯形之寅巳橫界之比。子丑形之子午縱界。與寅卯形之寅未縱界之比。俱爲大三倍。而比例相同。復以子丑形之子辰橫界。與寅卯形之寅未縱界爲比。子丑形之子午縱界。與寅卯形之寅巳橫界爲比。亦各大三倍。而比例相同。故子丑形所



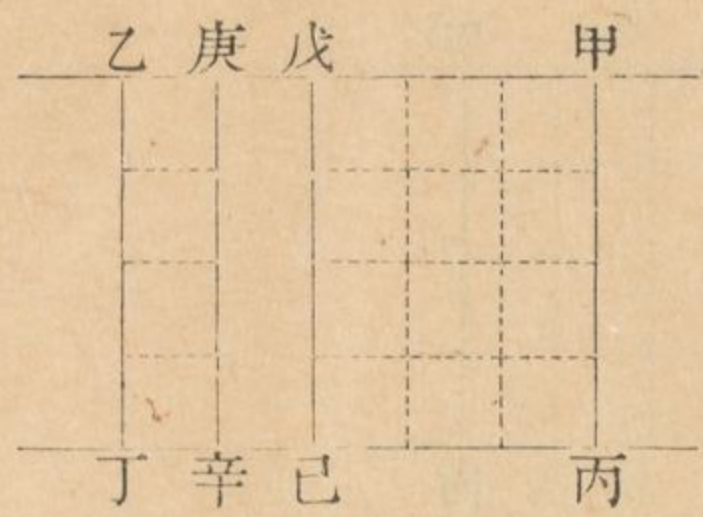
生之積爲三十六。而寅卯形所生之積爲四。俱爲正方形焉。以此四形兩兩相比。則甲乙長方形。與丙丁長方形爲比。而子丑正方形。與寅卯正方形爲比。各爲相當比例之四方面也。

第七

有兩同式長方面。於兩形相當之二界。各作兩正方面。互相爲比。卽同原兩長方面之互相爲比也。如甲乙丙丁兩直



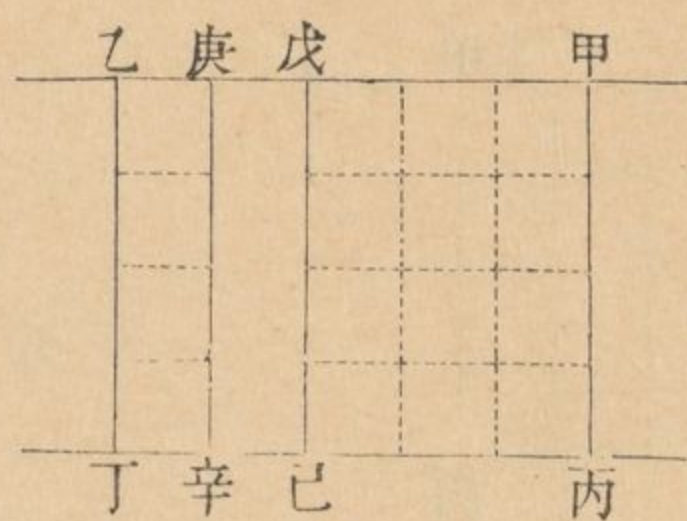
角長方面。在甲戊丙己相當二橫界。各作甲庚丙辛兩正方面。則所作甲庚丙辛兩正方面互相為比。即同於原有之甲乙丙丁相同之兩長方面之互相為比也。夫甲乙丙丁同式之兩長方面積。既為隔一位相加之比例。則所作甲庚丙辛同式之正方面積。亦必為隔一位相加之比例。然則甲乙丙丁原有之兩面互相為比。與所作甲庚丙辛之正方面



面之互相為比。其為同理之比例無疑矣。

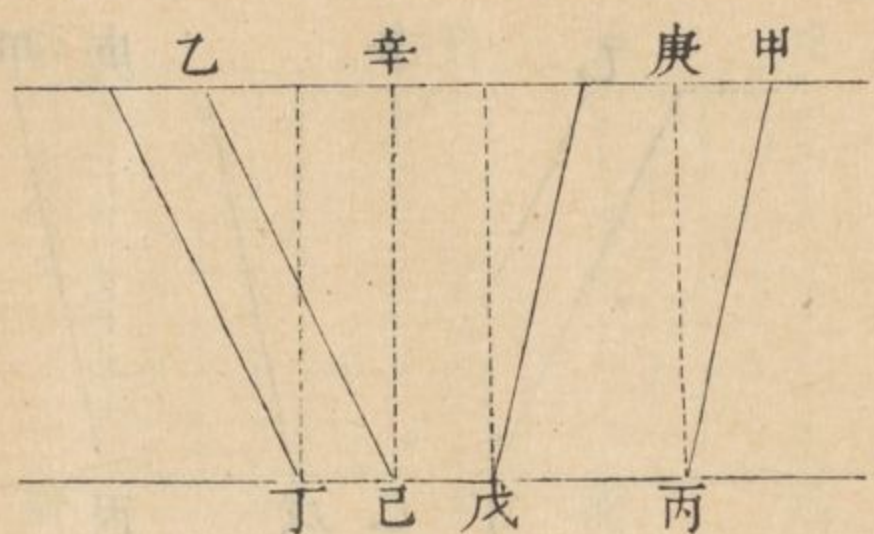
第八

大凡二平行線內。所有直角方面互相為比。同於其底之互相為比也。如甲乙丙丁二平行線內。有甲己庚丁兩直角方面。其甲己面與庚丁面之比。即同於甲己面之丙己底線。與庚丁面之辛丁底線之比也。蓋甲己面之丙己底線。與

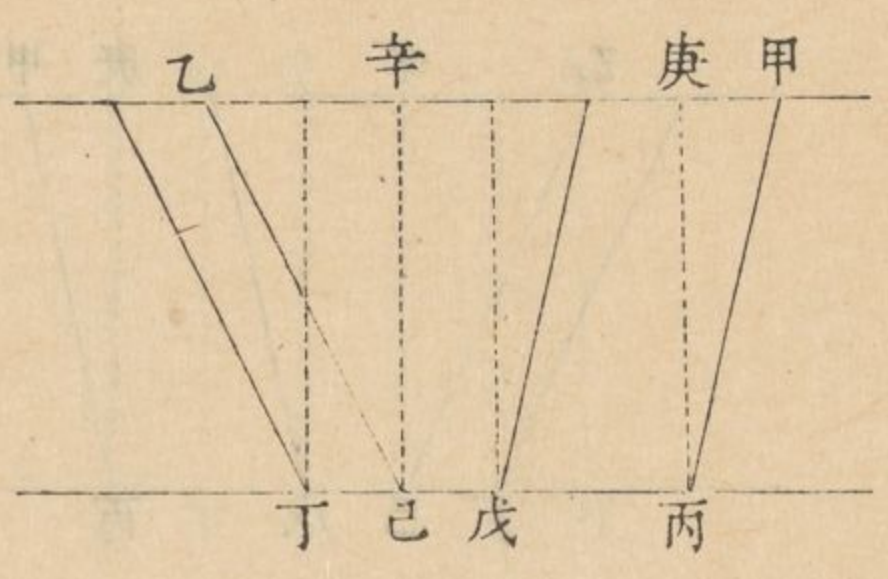


庚丁面之辛丁底線為三倍。而甲己面之甲丙縱線。與庚丁面之庚辛縱線。因同在二平行線內。其度固同。今以二面縱線。俱依庚丁面之庚辛分數分之。皆為四倍。則甲己面為一十二分。而庚丁面為四分矣。以甲己面之十二分。與庚丁面之四分為比。即如甲己面之丙己底三分。與庚丁面之辛丁底一分之比。故其比例相同也。

第九

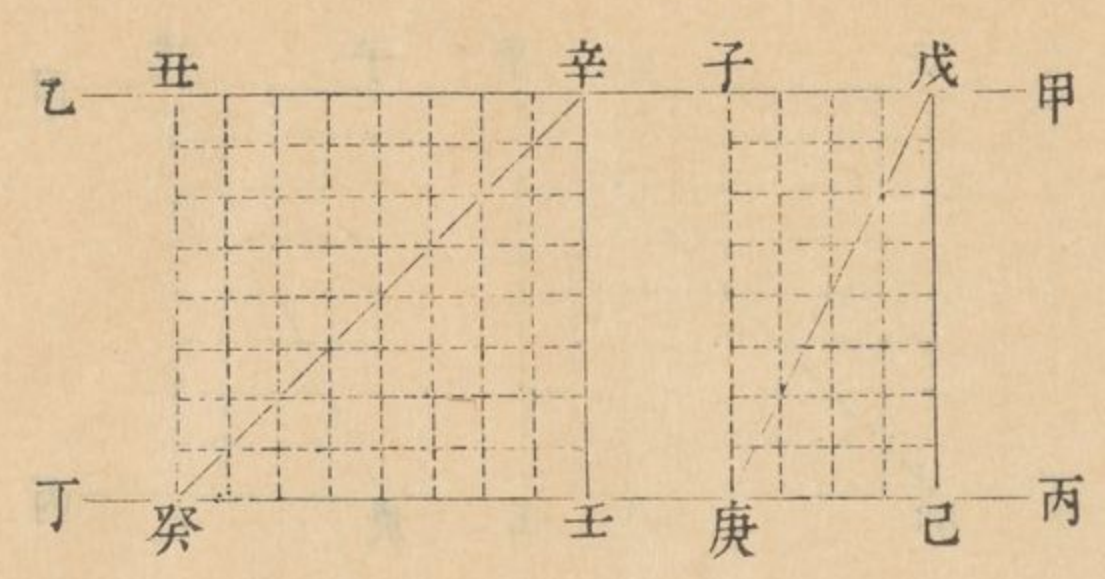


凡二平行線內。所有二界平行斜方面。互相為比。同於其底界度之互相為比也。如甲乙丙丁。二平行線內。有甲戊乙丁。兩斜方面積。互相為比。即同於丙戊己丁。兩底界之互相為比也。試將甲戊乙丁。兩斜方面之丙戊己丁。兩底界上。立庚戊辛丁。兩直角面。則此兩直角面。因與兩斜方面同底同高。其積必等。見三

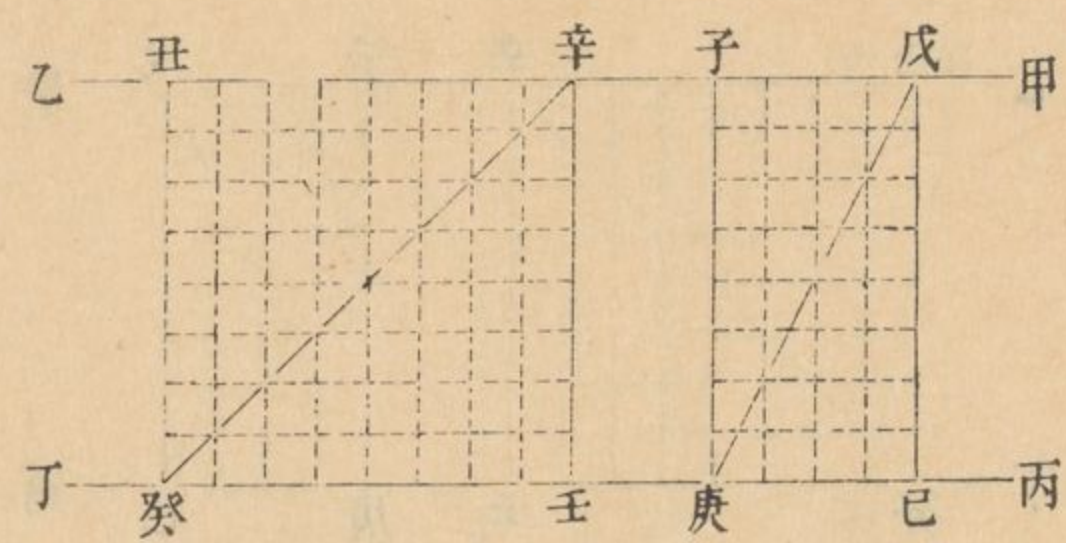


卷第八節。前節言凡二平行線內所有直角方面互相為比。同於其底之互相為比。此甲戊乙丁。兩斜方面。既與同底所立庚戊辛丁。兩直角面相相等。則甲戊乙丁。兩斜方面互相為比。必同於丙戊己丁。兩底界之互相為比可知矣。故凡二平行線內所有面積相比之分數。必與底界相比之分數同也。

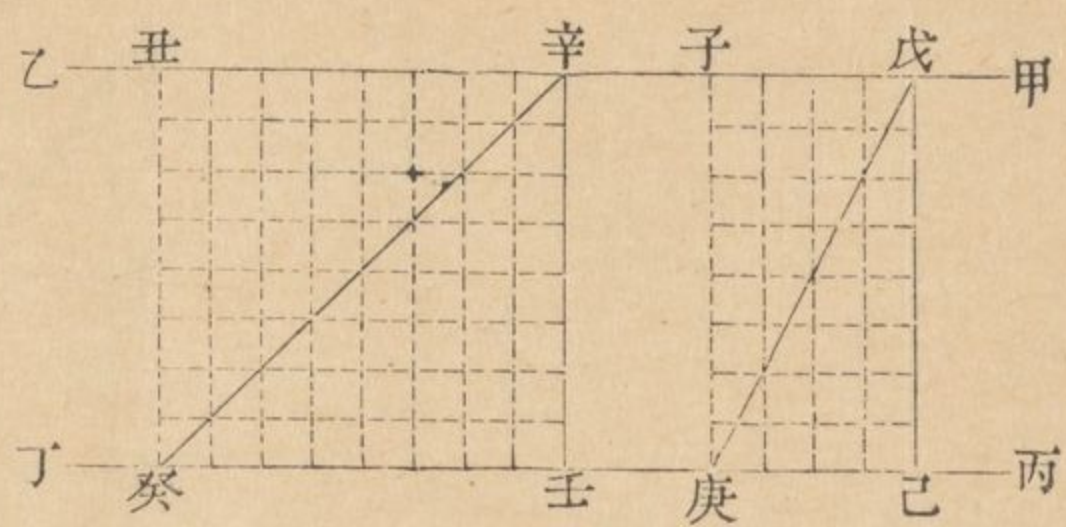
第十



凡二平行線內所有三角形面積互相為比。亦同於其底界度之互相為比也。如甲乙丙丁。二平行線內有戊己庚辛壬癸。兩三角形。其內所函面積互相為比。即同於己庚壬癸。兩底界之互相為比也。何也。凡二平行線內所有三角形。得其同底所立四邊形之一半。今以甲乙丙丁。二平行線內之戊己庚三角形。同底立一戊己庚壬癸四邊形。辛壬癸三

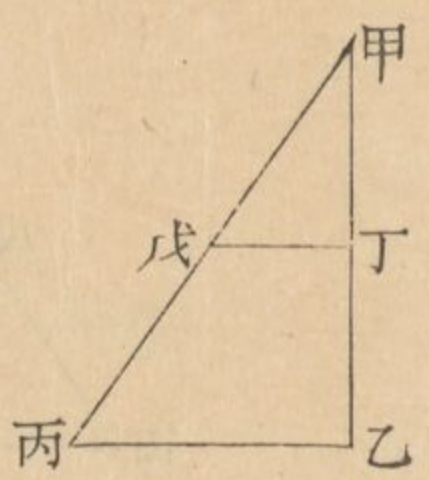


角形。同底立一辛壬癸丑四邊形。則戊己庚三角形。為戊己庚子四邊形之一半。而辛壬癸三角形。為辛壬癸丑四邊形之半。如以兩三角形面積。互相為比。即同於兩四邊形面積之互相為比。而為相當比例四率矣。其面積既互相為比。則其兩三角形面積相比。同於兩三角形底之相比者。亦如兩四邊形相比。同於兩四邊形底之相比矣。然則戊



己庚辛壬癸兩三角形面積互相為比。必同於己庚壬癸兩底界互相為比者可知也。今壬癸底界。既比己庚底界大一倍。故辛壬癸三角形面積。必比戊己庚三角形面積亦大一倍也。

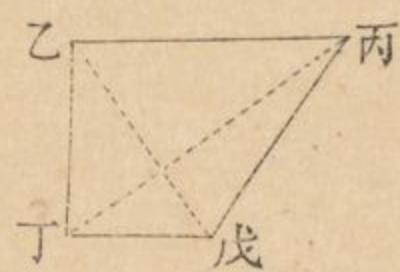
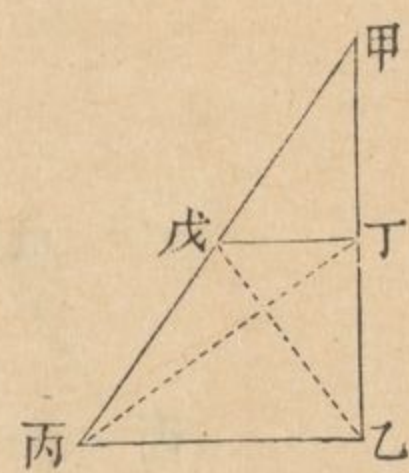
Blank area with faint bleed-through text from the reverse side of the page.



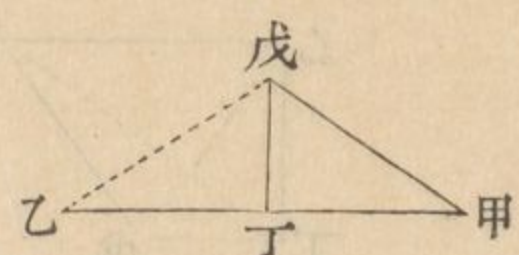
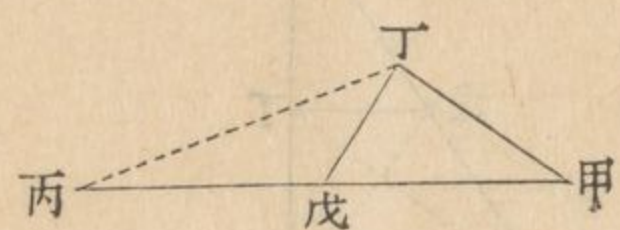
幾何原本八

第一

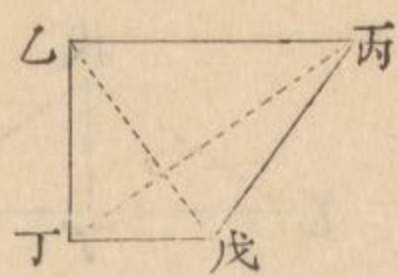
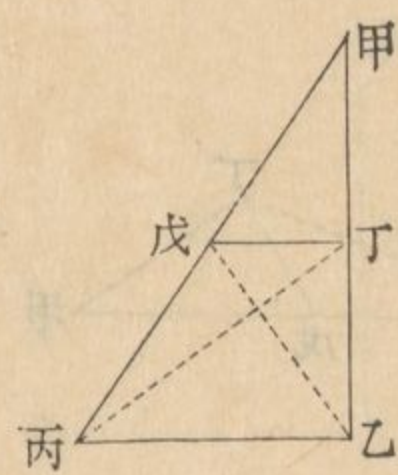
凡三角形內。與其底線平行。作一直線。則所截三角形之兩邊線。互相為比例線。其兩邊線所分各二段互相為比。為相當比例四率。而每邊所截之一段。與本全線比之。亦為相當比例四率也。如甲乙丙三角形內。與乙丙底線平行。作一丁戊線。則分甲乙一邊為甲丁。丁乙。



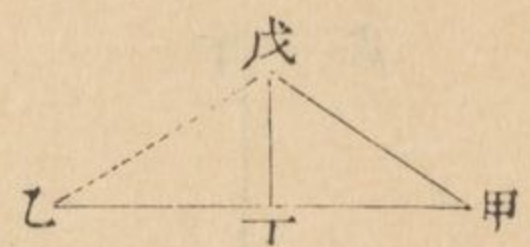
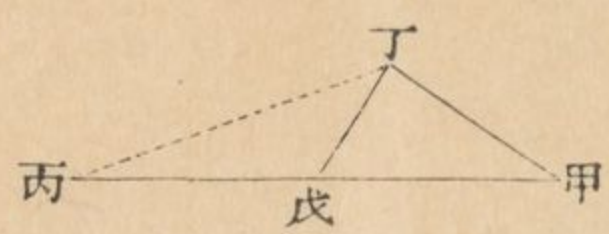
二段。分甲丙一邊為甲戊。戊丙二段。其
 甲乙一邊之甲丁。丁乙二段。互相為比。
 甲丙一邊之甲戊。戊丙二段。互相為比。
 其比例俱同為相當比例四率矣。又如
 甲乙一邊之甲丁一段。與本邊甲乙全
 線為比。甲丙一邊之甲戊一段。與本邊
 甲丙全線為比。其比例亦俱同為相當
 比例四率矣。今以三角形。按所截分。分
 為各式。以各式面積互相比者考之。自



丁戊線之丁戊二端。作丁丙。戊乙二線。
 則甲乙丙一三角形。分為四三角形。此
 四三角形內所有之乙戊丁。丙丁戊。兩
 三角形。既在乙丙。丁戊二平行線之間。
 又共立於一丁戊之底。其二形之積必
 等。見三卷第十節。於此二形各加一所截甲丁
 戊小三角形。即成甲戊乙。甲丁丙。兩三
 角形。其積亦必相等。又如甲丁戊。乙丁
 戊。兩三角形之底。俱在甲乙一直線上。



而兩三角形之戊角。又共在一戊處。其兩形必在二平行線之間。而甲丁戊。丙丁戊。兩三角形之底。俱在甲丙一直線上。而兩三角形之丁角。又共在一丁處。其兩形亦在二平行線之間。見三卷第十二節。因各三角形。兩兩俱為二平行線所限。故其面積互相為比。必同於其底界之互相為比也。見七卷第十節。此所以甲丁戊。丙丁戊。兩三角形積互相為比。與其甲戊。

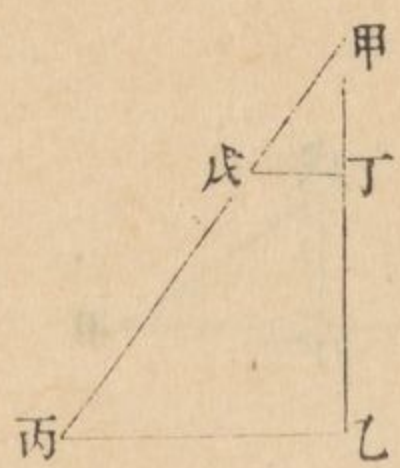


戊丙。兩底線之互相為比同。其甲丁戊。乙丁戊。兩三角形積互相為比。與其甲丁丁乙。兩底線之互相為比亦同也。再甲乙戊三角形之積。既與甲丙丁三角形之積相等。則以甲乙丙之全形。與所分之甲乙戊三角形。或與所分之甲丙丁三角形相比。其比例必俱相同。而甲丙丁三角形之甲丁底。與甲丙乙全形之甲乙底。互相為比。甲乙戊三角形之

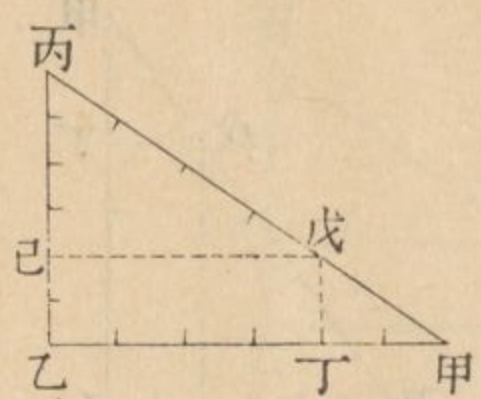
甲戊底。與甲乙丙全形之甲丙底。互相為比。亦必俱相同矣。因其各三角形。得互相為比例。故其所截兩邊線。兩兩為相當比例率也。

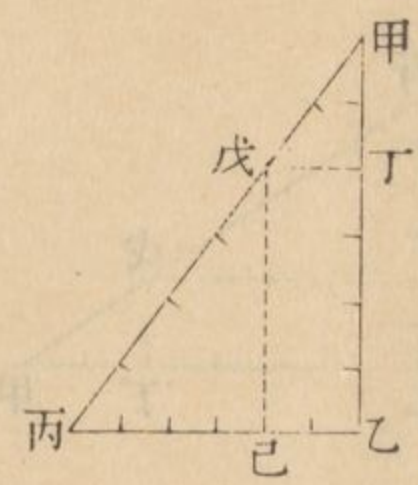
第二

凡三角形內。與底平行作一直線。其所截兩邊線之每一段。與各邊全線之比。即同於所作線與底線之比也。如甲乙丙三角形內。與乙丙底平行作一丁戊

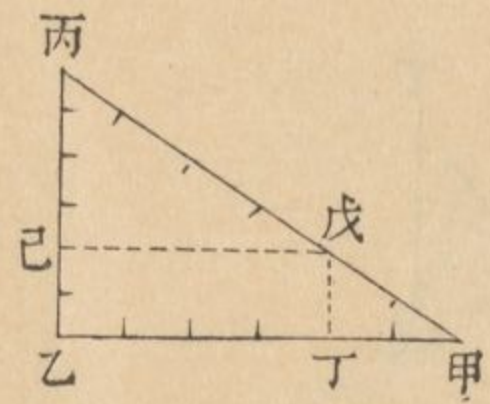


線。此丁戊線所截甲丁一段。與甲乙全線之比。甲戊一段。與甲丙全線之比。皆如丁戊線與乙丙底線之相比也。假若將甲乙丙三角形之甲乙邊線為底。而與甲乙底線平行。作一戊己線。即成戊己乙丁四邊長方形。其兩兩平行線之度。俱各相等。然三角形之兩邊。與所截之每段。既互相為比。如前節所云。則此乙丙邊之乙己一段。與乙丙邊全線之比。即





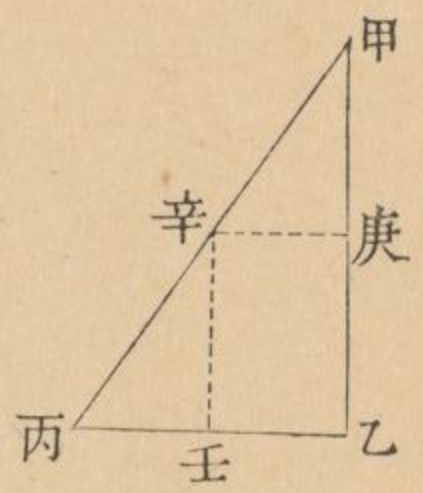
同於彼甲丙邊之甲戊一段。與甲丙邊全線之比。而丁戊之平行線。既與乙己平行線度相等。則此丁戊平行線。與原底乙丙線之比。亦必同於彼甲丙邊之甲戊一段。與甲丙邊全線之比矣。故甲戊段為一率。甲丙邊全線為二率。丁戊平行線為三率。乙丙底線為四率。為相當比例四率也。又如甲乙邊之甲丁一段。與甲乙邊全線之比。既同於丁戊平



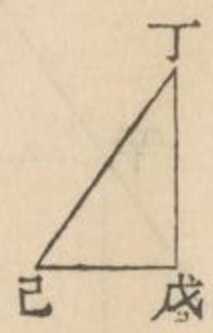
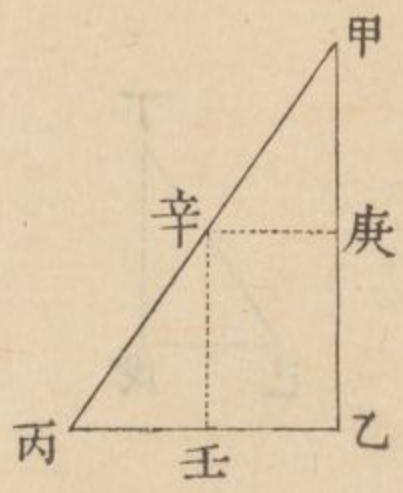
行線與乙丙底線之比。則甲丁段為一率。甲乙邊全線為二率。丁戊平行線為三率。乙丙底線為四率。亦為相當比例四率也。苟甲乙邊全線為六分。則甲丁段得其六分之二分。乙丙邊全線為六分。則丁戊段亦得其六分之二分。所以成兩兩相當比例之率也。

第三

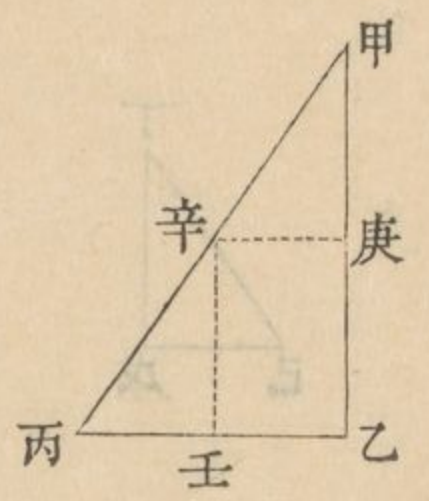
凡大小兩三角形。其相當之二角度。若



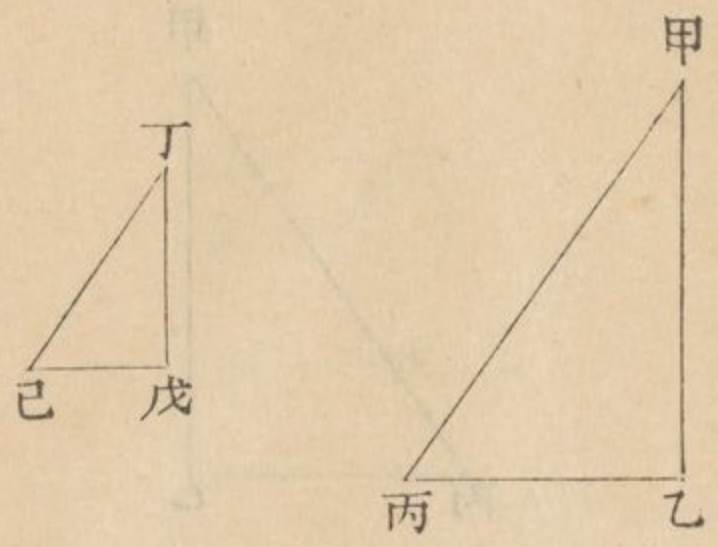
兩兩相等。則其餘一角亦必相等。如此類兩三角形。謂之同式三角形也。雖其內容積分不同。而其相當各界互相為比。俱為相當比例之率焉。如甲乙丙丁戊己大小兩三角形。其甲角與丁角等。乙角與戊角等。則所餘丙角必與己角等。而為同式三角形也。二卷第三節。言凡三角形之三角相併。與二直角等。則此大小兩三角形之各三角相併。亦俱為二直角。於二直角中。減去大形之甲角乙角。餘為丙角。減去小形之丁角戊角。餘為己角。其所減之數既等。則所餘之數亦必等矣。若於大形內。與乙丙平行作庚辛線。與甲乙平行作辛壬線。則成甲庚辛。辛壬丙兩小三角形。此兩小形之相當角度。與大形之相當角度亦必俱等。故皆謂之同式形也。凡同式之形。其容積雖不一。而其各界互相為比。皆為相當比例之四率。是故以大三角形之甲乙全線。與所截甲庚一段之比。即如大三角形之甲乙一邊。與小



所減之數既等。則所餘之數亦必等矣。若於大形內。與乙丙平行作庚辛線。與甲乙平行作辛壬線。則成甲庚辛。辛壬丙兩小三角形。此兩小形之相當角度。與大形之相當角度亦必俱等。故皆謂之同式形也。凡同式之形。其容積雖不一。而其各界互相為比。皆為相當比例之四率。是故以大三角形之甲乙全線。與所截甲庚一段之比。即如大三角形之甲乙一邊。與小



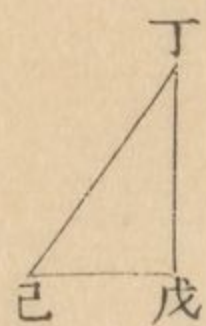
三角形之相當丁戊一邊之比也。大三角形之甲丙全線與所截甲辛一段之比。即如大三角形之甲丙一邊與小三角形之相當丁己一邊之比也。大三角形之乙丙底線與所截庚辛底線之比。即如大三角形之乙丙底線與小三角形之戊己底線之比也。至於甲乙丙大三角形與所截辛壬丙小三角形相當各界之比。亦如甲乙丙大三角形與丁



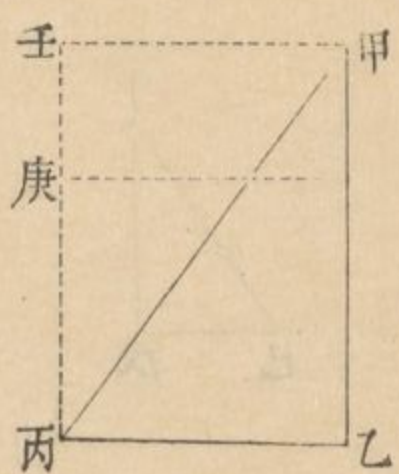
戊己小三角形相當各界之比也。由此推之。凡同式之形。其相當各界互相為比。皆為相當比例之率可知矣。

第四

同式直角三角形面積互相為比。同於三角形各相當界所作方形之互相為比。而同式三角形面積互相為比者。比之各相當界互相為比。則為連比例內隔一位相加之比例也。如甲乙丙丁戊



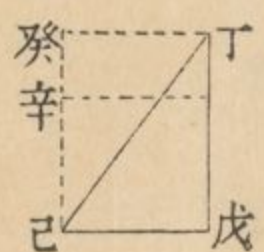
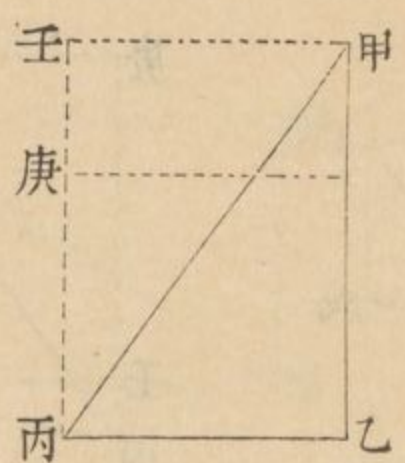
己。兩同式直角三角形。其面積互相爲比。卽同於此兩三角形之乙丙戊己。相當二界所作庚乙辛戊。兩方形互相爲比。比之乙丙戊己。相當二界互相爲比。比之比例。而此兩三角形之面積互相爲比。比之乙丙戊己。相當二界互相爲比。比之比例。則爲連比例內隔一位相加之比例矣。蓋兩三角形之乙戊二角。俱爲直角。若與乙丙戊己。二線平行。作甲壬丁癸。二線。又與甲乙丁戊。二線平行。



作壬丙癸己。二線。卽成壬乙癸戊。兩直角長方形。此甲乙丙丁戊己。兩三角形。因與所作壬乙癸戊。兩直角長方形。在二平行線內。同爲一底。其積爲一半。將半與半相比者。卽同於全與全之相比。故甲乙丙丁戊己。兩三角形互相爲比。必同於壬乙癸戊。兩直角長方形互相爲比之比例矣。夫依乙丙戊己。甲乙丁戊。各相當二界所作壬乙癸戊。兩長方



形互相為比之比例。既與甲乙丙丁戊
己兩三角形互相為比之比例同。則依
乙丙戊己相當二界所作庚乙辛戊兩
正方形互相為比之比例。亦與壬乙癸
戊兩長方形與甲乙丙丁戊己兩三角
形互相為比之比例同矣。又凡直角兩
方形。其兩界互相為比之比例若俱同。
則兩形面積互相為比之比例。較之兩
界互相為比之比例。為隔一位相加之

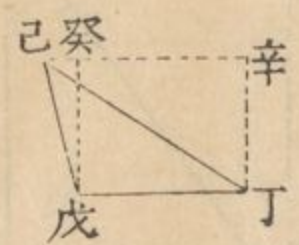
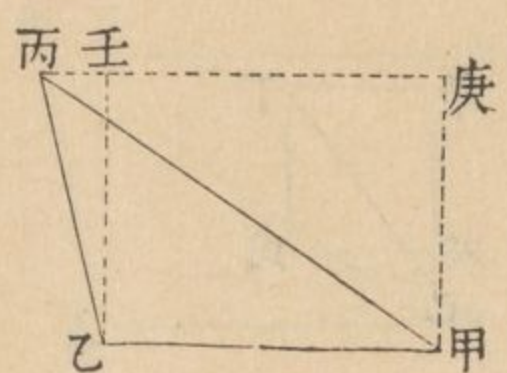
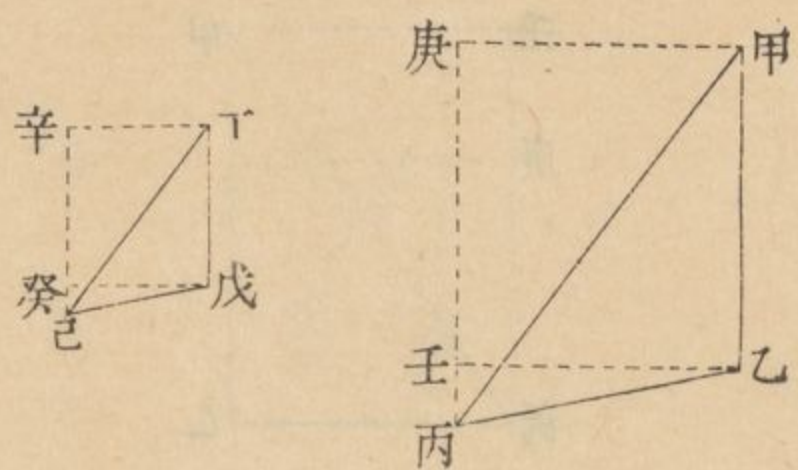


比例。見七卷第五節。今甲乙丙丁戊己兩三角
形之各依底線所作正方形互相為比。
較之二底線互相為比之比例。即為隔
一位相加之比例。夫甲乙丙丁戊己兩
三角形之面積互相為比者。既與所作
庚乙辛戊兩正方形面積互相為比之
比例同。則此所作兩正方形面積相比。
較之兩底相比。為隔一位相加之比例。
而甲乙丙丁戊己兩三角形面積互相

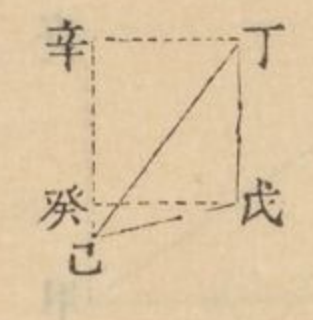
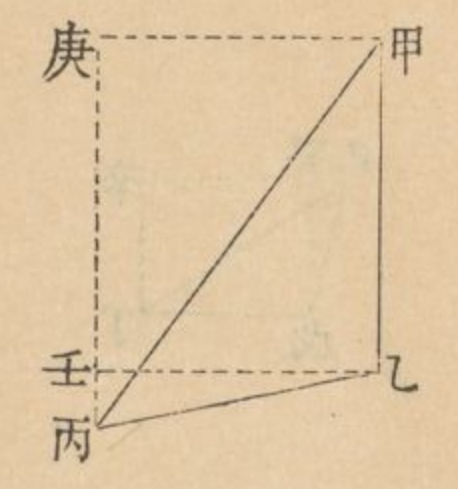
爲比。較之乙丙戊己。相當二界互相爲比之比例。亦爲隔一位相加之比例。可知矣。

第五

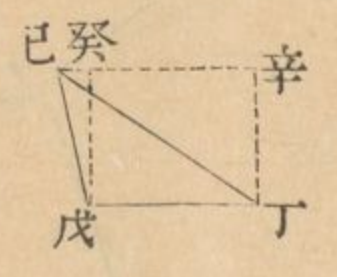
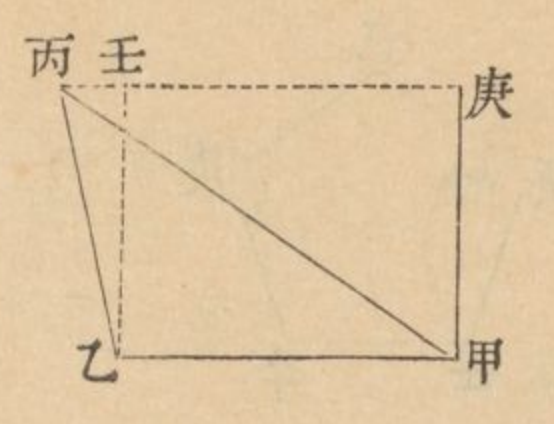
同式無直角三角形面積互相爲比。同於三角形各相當界所作方形之互相爲比。而三角形面積互相爲比者。比之各相當界互相爲比。則爲連比例內隔一位相加之比例也。如甲乙丙丁戊己。



兩同式三角形。雖無直角。然其相當各角俱等。則此兩形面積互相爲比。同於在此兩形之甲乙丁戊。相當二界所作方形互相爲比之比例。而兩形之面積互相爲比者。比之甲乙丁戊。相當二界互相爲比之比例。則爲連比例內隔一位相加之比例矣。試自兩形之丙己二角。與甲乙丁戊。二界平行。作丙庚己辛。各一線。又自甲丁二角。至庚辛二線之



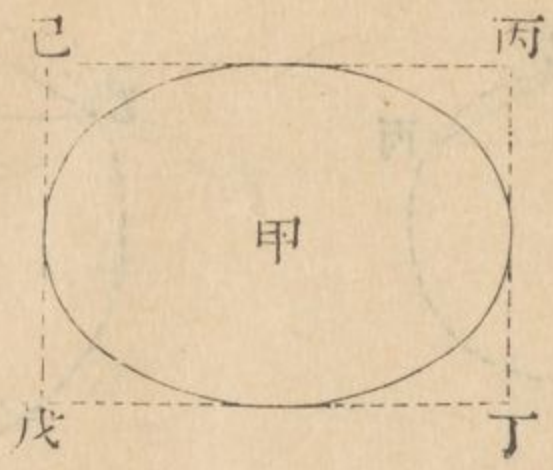
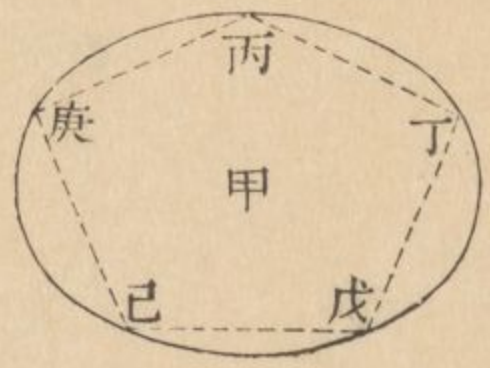
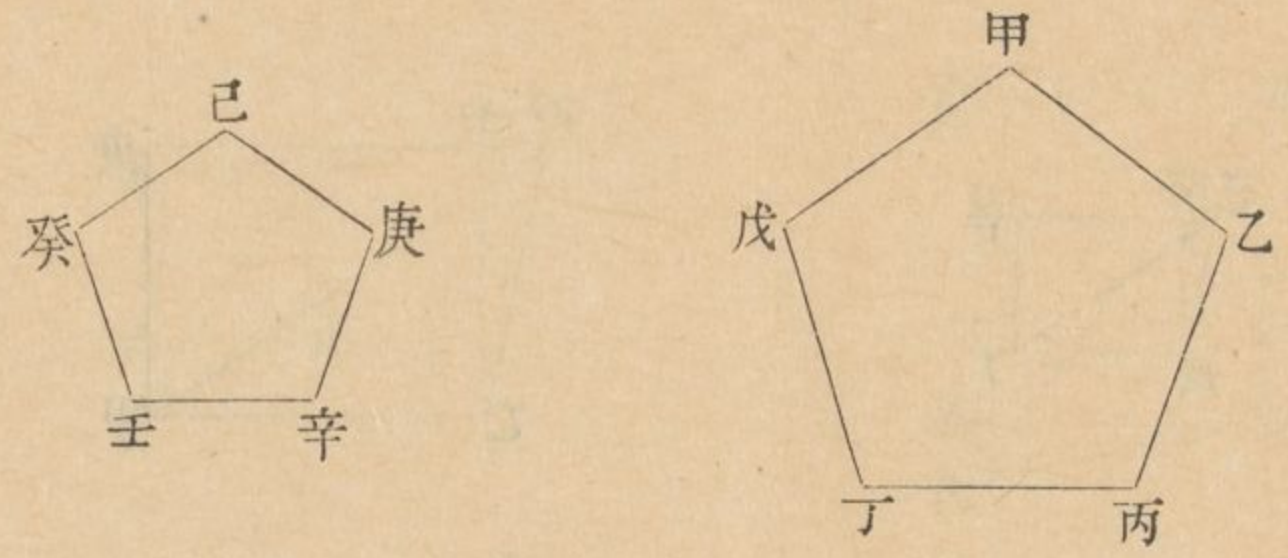
末。作甲庚丁辛二線。又與此二線平行。自乙戊二角。至壬癸二處。作乙壬戊癸二線。成庚乙辛戊兩直角長方形。此兩長方形。與甲乙丙丁戊己兩三角形。俱在兩平行線內。又同為一底。則此兩三角形面積。為彼庚乙辛戊兩長方形之半。將半與半相比者。同於全與全之相比。故甲乙丙丁戊己兩三角形面積之比例。必同於庚乙辛戊兩長方形之



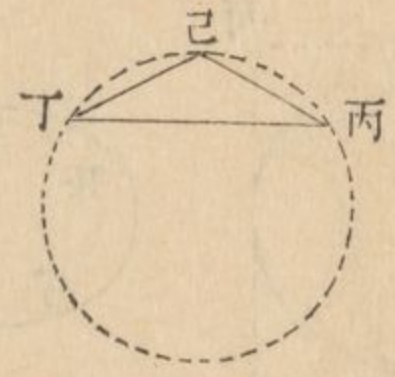
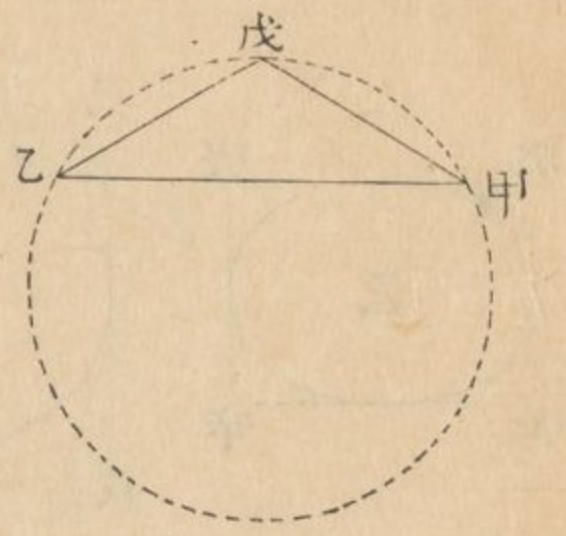
比例矣。夫同式兩長方形之比例。同於相當界所立正方形之比例。而同式正方形之比例。比之各相當界之比例。為連比例隔一位相加之比例。今此兩三角形面積之比例。既同於庚乙辛戊兩長方之比例。亦必同於兩正方形之比例。則兩三角形面積之比例。比之兩界之比例。為連比例隔一位相加之比例。可知矣。

第六

有衆多邊形。其邊數同。相當各角俱等。而相當界之比例又同。則謂之同式形也。如有甲乙丙丁戊己庚辛壬癸。大小兩多邊形。其邊數俱爲五。其相當甲己二角。乙庚二角。丙辛二角。丁壬二角。戊癸二角。各度俱等。而甲乙邊與己庚邊之比。卽同於乙丙邊與庚辛邊之比。其相當邊互相比之俱同者。卽謂之同式



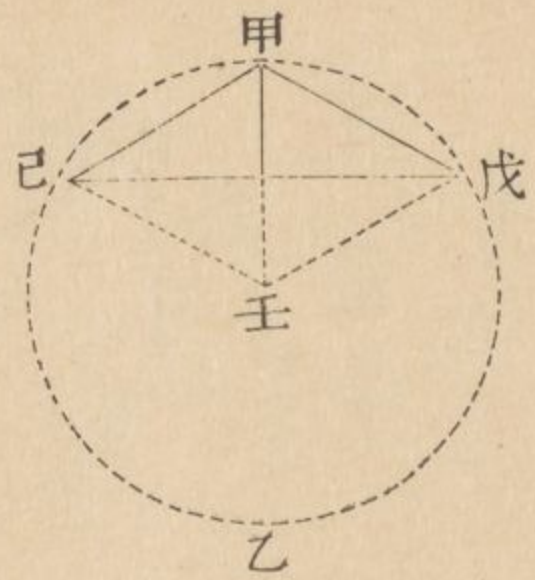
多邊形也。又如衆曲線形。於其內外作各種直界形。其式若同。則謂之同式曲線形也。假如有甲乙。大小兩曲線形。在甲大形內。作一丙丁戊己庚五邊形。在乙小形內。作一辛壬癸子丑五邊形。此所作兩五邊形之式若同。則曲線形之式必同。又如甲乙。大小兩曲線形。在甲大形外。作一丙丁戊己四邊形。在乙小形外。作一庚辛壬癸四邊形。此所作兩



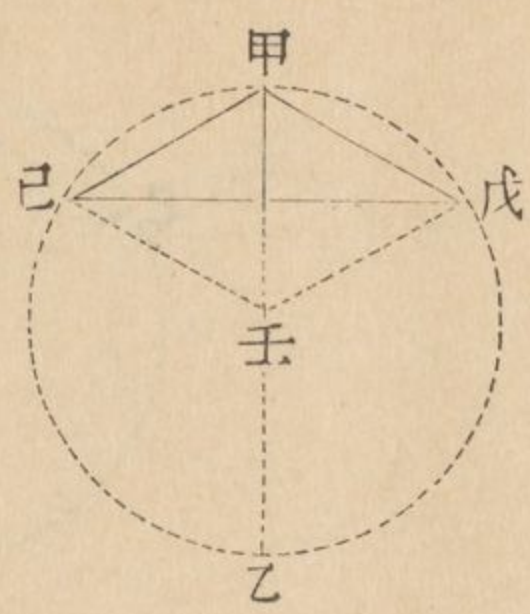
四邊形之式若同。其曲線形之式亦必同。故皆謂之同式曲線形也。或如甲乙丙丁。大小兩圓分。於大圓分內。作一戊甲乙三角形。於小圓分內。作一己丙丁三角形。此所作兩三角形之式若同。則圓分之式亦必同。故謂之同式圓分也。

第七

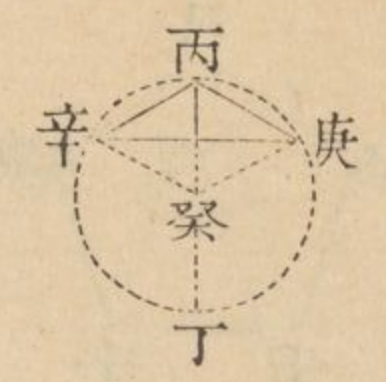
大小各圓分之式若同。則其相對之圓心角度必俱等也。如甲乙丙丁。大小兩



圓之戊甲己庚丙辛兩分之式相同。其弧雖隨圓之大小各殊。而自圓所分之度必同。其各段所對二圓之壬癸心角度亦等矣。夫戊甲己與庚丙辛兩段式既同。則此內所函甲戊己丙庚辛兩三角形之甲丙相當兩界角之度必等。若自甲丙二角。過二圓心壬癸。至對界乙丁。作甲壬乙丙癸丁二線。則成兩界角與兩心角。蓋心角大於界角一倍。故甲



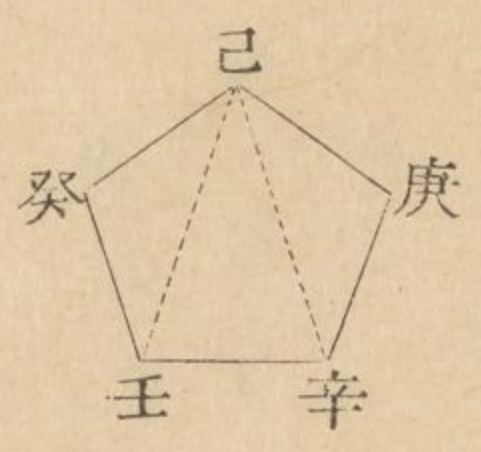
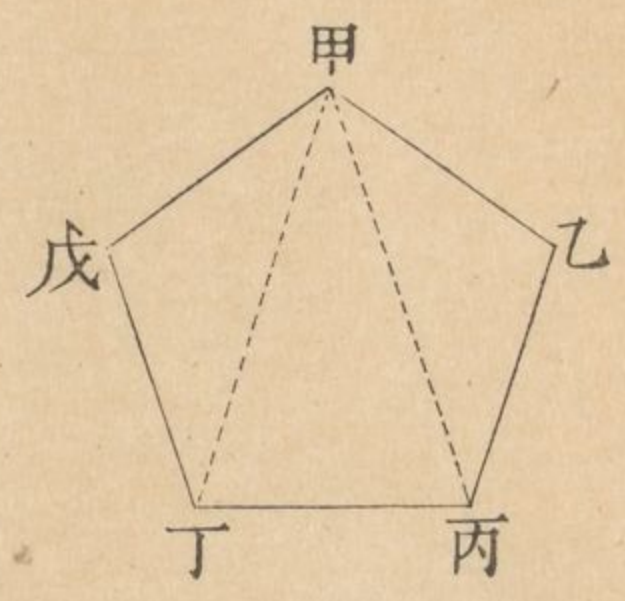
乙大圓之戊壬乙心角。比戊甲乙界角大一倍。乙壬己心角。比乙甲己界角大一倍。今將戊壬乙乙壬己兩心角併之。戊甲乙乙甲己兩界角併之。則所併之心角。亦必比所併之界角大一倍矣。而丙丁小圓之庚癸丁丁癸辛兩心角併之。亦必比庚丙丁丁丙辛所併之兩界角大一倍。夫兩圓之兩界角度既等。而兩圓之所併之心角度又等。則兩界角



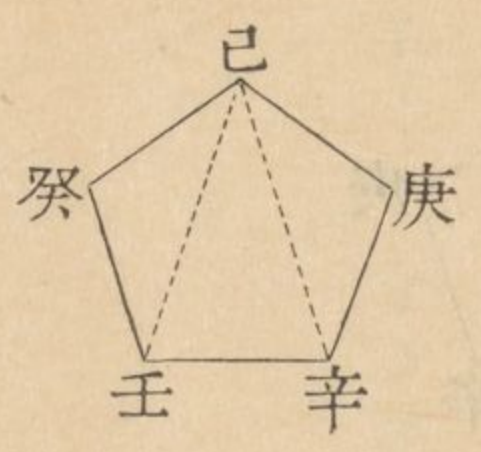
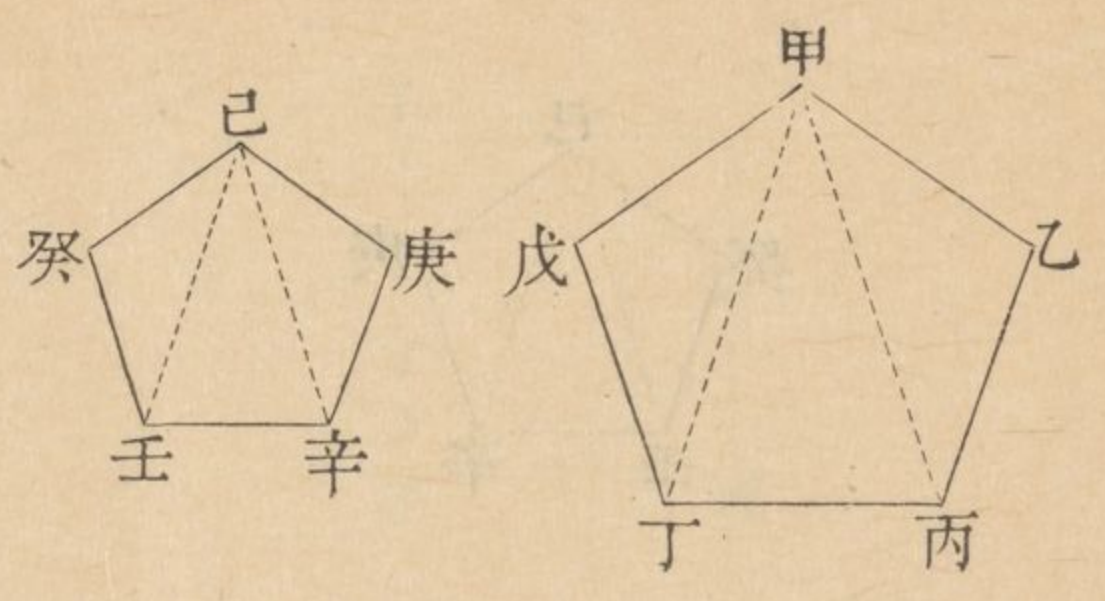
相對之戊乙己庚丁辛兩弧段之分數亦必相等。界角所對之弧分既等。則心角所對之弧分亦必相等。心角所對之弧分。即為甲丙二界角相對之壬癸二心角之度也。

第八

凡大小同式多邊形。分為眾三角形。其相當三角形之式俱相同也。如甲乙丙丁戊己庚辛壬癸兩同式五邊形。自大



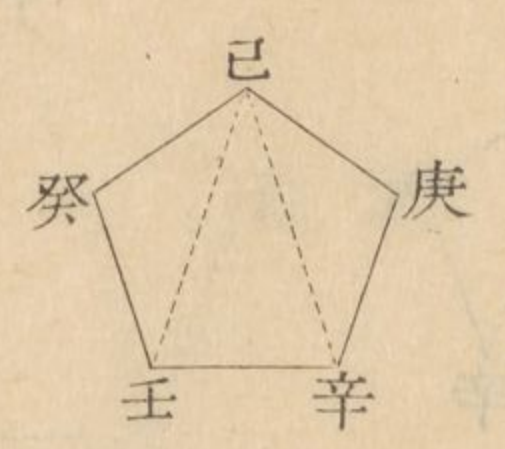
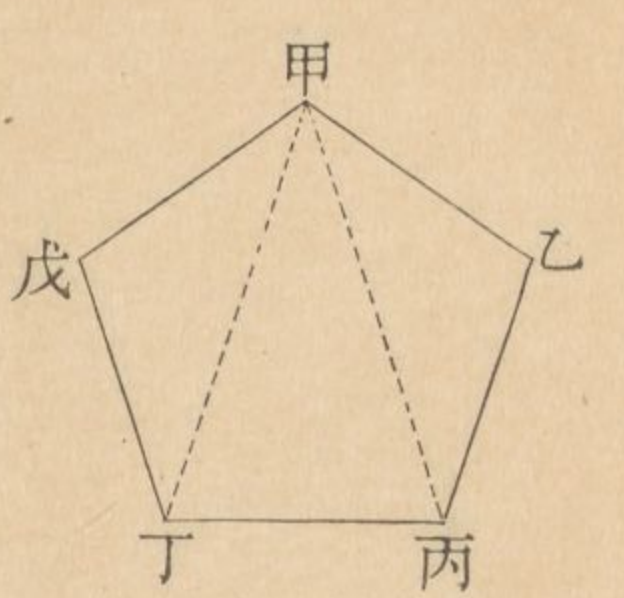
形甲角至丙丁二角。自小形己角至辛壬二角。各作二線。則大形分爲甲乙丙甲丙丁甲丁戊。三三角形。小形分爲己庚辛己辛壬己壬癸。三三角形。而甲乙丙之形。與相當己庚辛之形同式。甲丙丁之形。與相當己辛壬之形同式。甲丁戊之形。與相當己壬癸之形同式。因其所分各三角形俱爲同式。故相當各角度必等。相當各角度既等。則其相當各



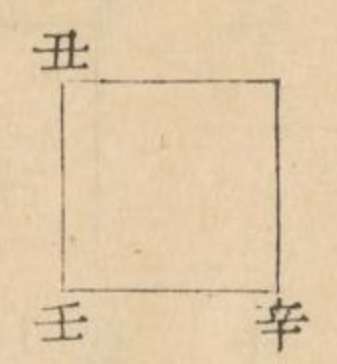
界之比例。亦必俱同。自五邊形所分之各三角形之相當界互相爲比之比例既同。則五邊形之相當各界互相爲比之比例亦必同。相當各界之比例相同。則兩形之式相同可知矣。

第九

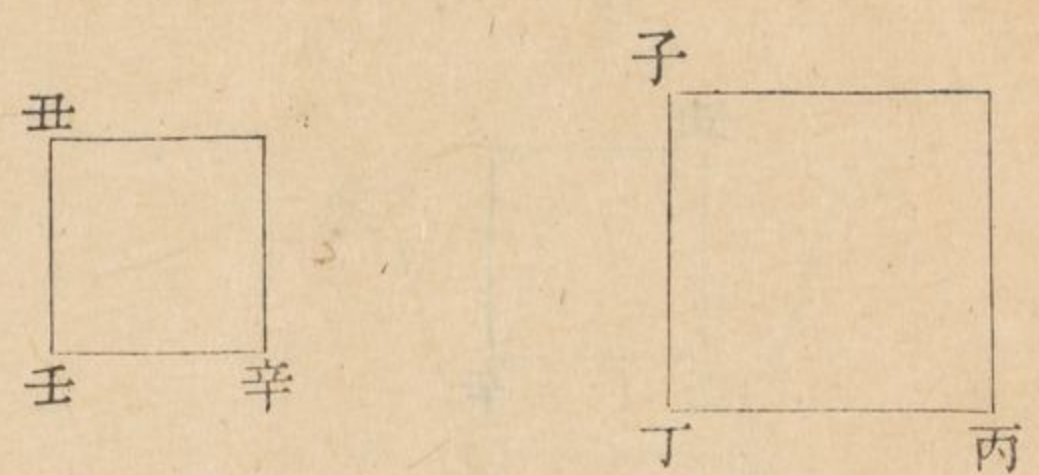
凡大小同式多邊形互相爲比。同於各形相當界所作方形之互相爲比。而比之各面相當界互相爲比之比例。爲連



比例隔一位相加之比例也。如甲乙丙
 丁戊己庚辛壬癸兩同式五邊形。於大
 形之丙丁界。小形之辛壬界。各作子丙
 丑辛。大小兩方形。其大小五邊形互相
 為比。必同於所作子丙丑辛。大小二方
 形之互相為比。大小五邊形。既同於大
 小兩方形之互相為比。則比之丙丁辛
 壬。相當二界互相為比之比例。為連比
 例。隔一位相加之比例矣。若將甲乙丙



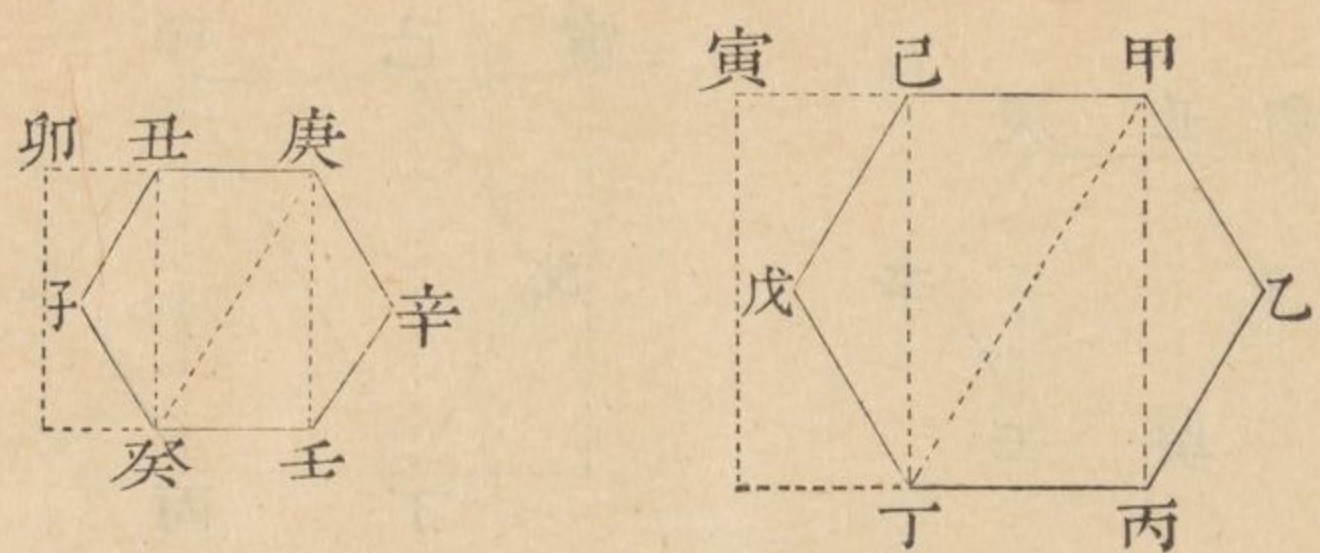
丁戊己庚辛壬癸兩形。分為眾三角形。
 則相當各三角形之式必同。相當各三
 角形之式既同。則相當各三角形互相
 為比。即同於在三角形各相當界所作
 方形之互相為比。而各三角形面積之
 互相為比。較之各相當界互相為比之
 比例。亦為連比例。隔一位相加之比例。
 夫所分眾三角形互相為比。既同於所
 作方形之互相為比。則眾三角形所合



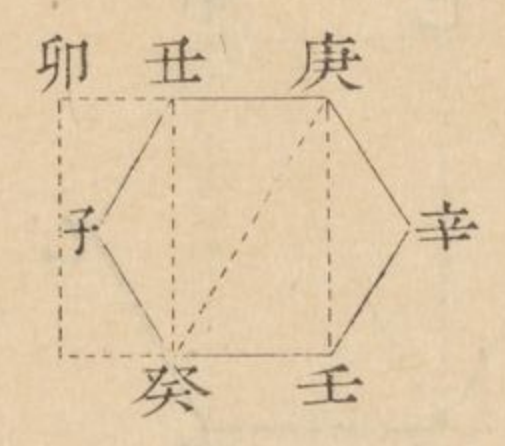
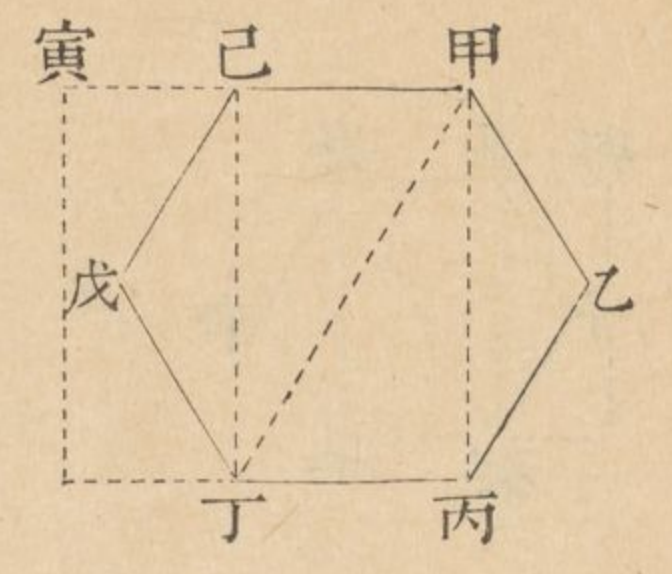
甲乙丙丁戊己庚辛壬癸之大小五邊形互相爲比。亦必同於丙丁辛壬相當界所作子丙丑辛大小兩方形之互相爲比。而比之丙丁辛壬相當界互相爲比。爲連比例隔一位相加之比例可知矣。

第十

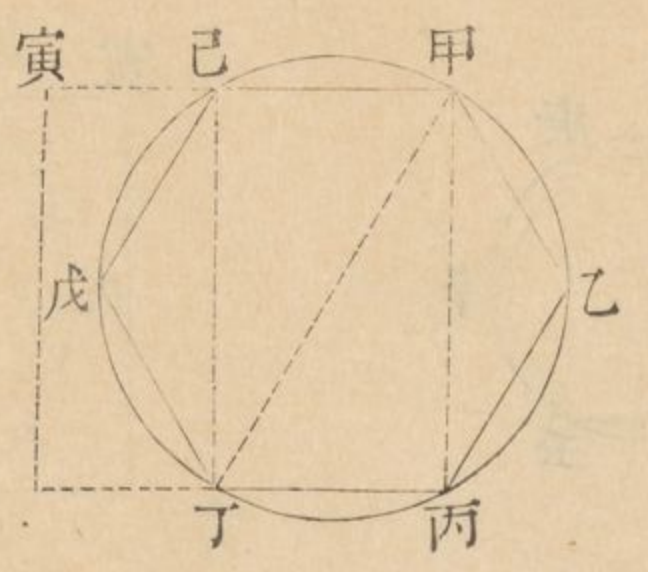
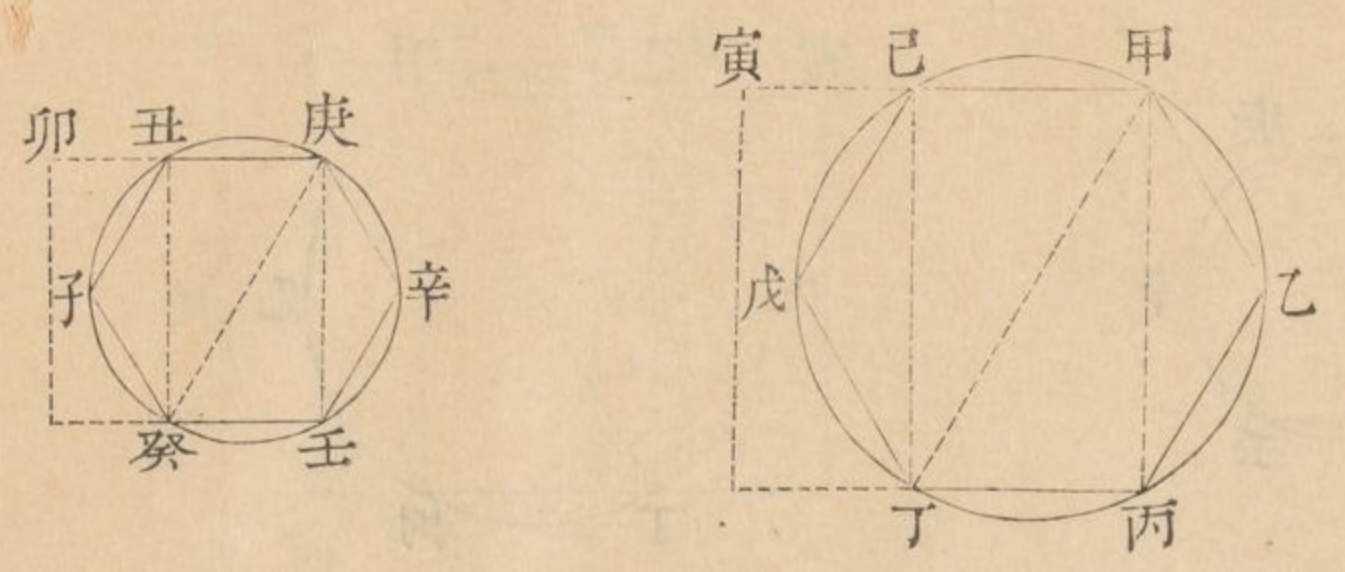
凡大小同式直界形互相爲比。同於在所比各形內外所有同式形之各相當



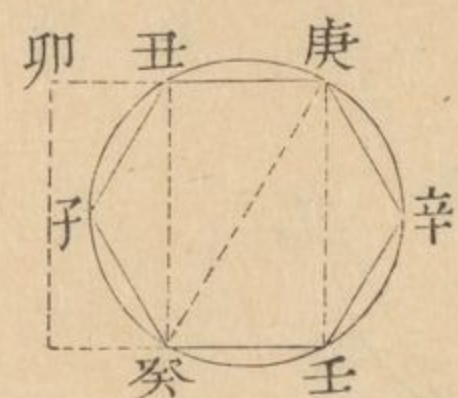
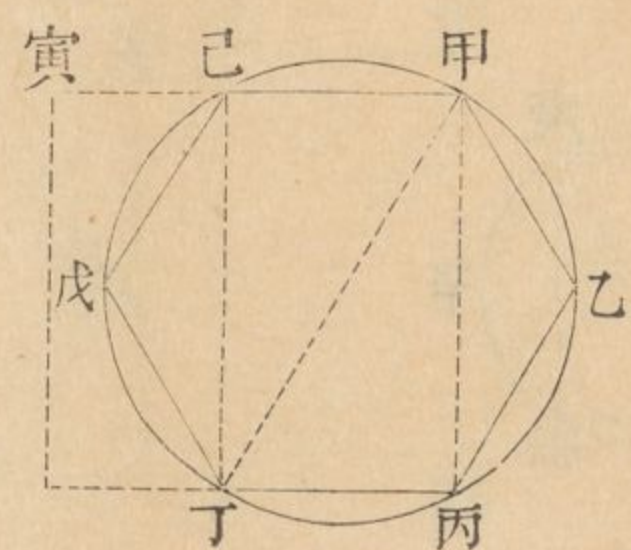
界所作正方形之互相爲比也。如甲乙丙丁戊己庚辛壬癸子丑大小兩直界形。於此二形內所函之甲丙丁己庚壬癸丑二同式四邊形之甲丙庚壬相當二界。作寅丙卯壬正方形。則兩直界形互相爲比。即同於兩正方形之互相爲比也。若將甲乙丙丁戊己庚辛壬癸子丑兩六邊形。俱分爲三角形。則其相當各三角形之式俱相同。而相當各三角



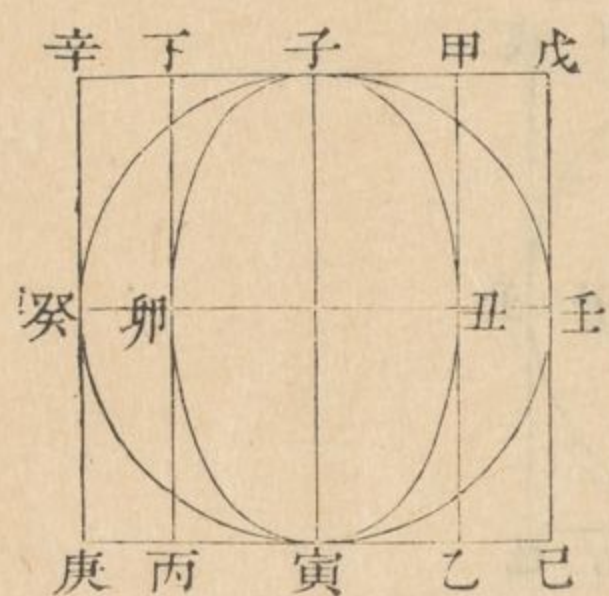
形互相為比。必同於甲丙。庚壬。相當二
 界所作寅丙。卯壬。正方形之互相為比
 矣。此所分三角形之比例。既同於所作
 正方形之比例。則大小兩形內各三角
 形之甲丙。庚壬界。又為兩四邊形之共
 界。而甲乙丙丁戊己。庚辛壬癸子丑。兩
 同式形。互相為比。亦必同於其所函之
 甲丙丁己。庚壬癸丑。兩四邊形之甲丙
 庚壬。兩相當界所作寅丙。卯壬。兩正方



形之互相為比可知矣。
 第十一
 凡大小同式曲界形互相為比。同於在
 所比各形內外所有同式形之各相當
 界所作正方形之互相為比也。如甲乙
 丙丁戊己。庚辛壬癸子丑。大小二圓。此
 二圓之中。雖各函一同式六邊形。各函
 一同式四邊形。又各函眾同式三角形。
 此大小二圓之積。互相為比。必同於在



園內所函同式形之甲丙庚壬相當二
 界所作寅丙卯壬正方形之互相為比
 也。大凡眾界形。或函園。或函於園。其界
 數愈多。愈與園界相近。而園界分為千
 萬段。即成千萬直界形。見四卷第十
 九二十等節。則
 大小兩園之比例。固與內函相當直界
 形之比例等矣。夫相當直界形之比例。
 原同於兩形之相當界所作方形之比
 例。而園界形之比例。又同於相當直界

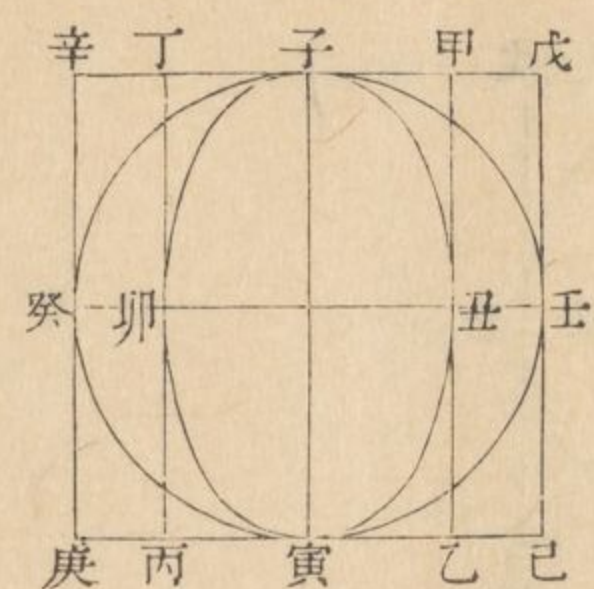


形之比例。則此大小二園互相為比之
 比例。同於此二園之輻線或徑線所作
 正方形互相為比之比例可知矣。

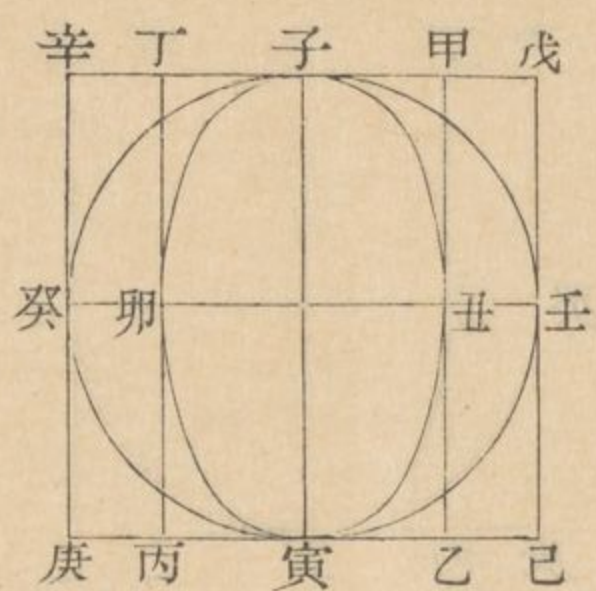
第十二

凡圓面徑與橢圓面一名鴨蛋形。高度等者。

其面積互相為比之比例。即同於函兩
 形各作切方形互相為比之比例。而圓
 形面積與橢圓形面積互相為比之比
 例。又同於圓形徑與橢圓形小徑互相



爲比之比例也。如子壬寅癸之圓面。子丑寅卯之橢圓面。其子寅高度俱同。圓徑。即橢圓大徑。其面積互相爲比之比例。必同於圓面外所作切圓。戊己庚辛正方形。與橢圓面外所作切圓。甲乙丙丁長方形互相爲比之比例。而子壬寅癸圓面。又同於圓面之壬癸徑。與橢圓面之丑卯小徑互相爲比之比例也。蓋平行線



內兩面形互相爲比之比例。同於其底界互相爲比之比例。見七卷第八節。今戊己庚

辛正方形。與甲乙丙丁長方形。皆在戊

辛己庚平行線內。故戊己庚辛正方形

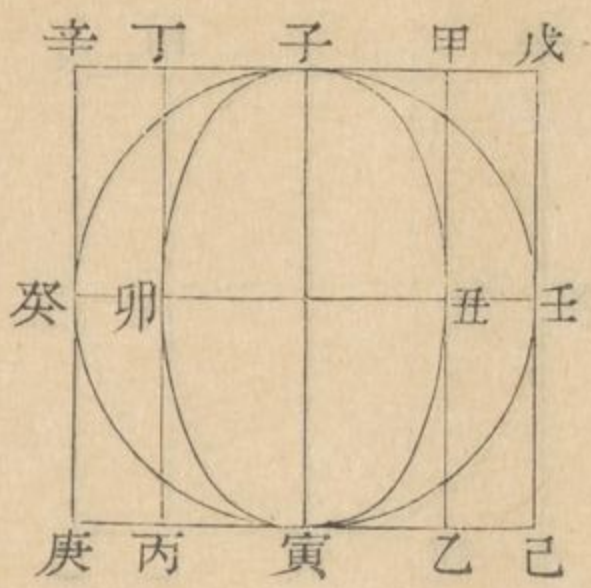
與甲乙丙丁長方形互相爲比之比例。

同於己庚底與乙丙底互相爲比之比

例。而子壬寅癸圓面。與子丑寅卯橢圓

面。亦在戊辛己庚平行線內。則子壬寅

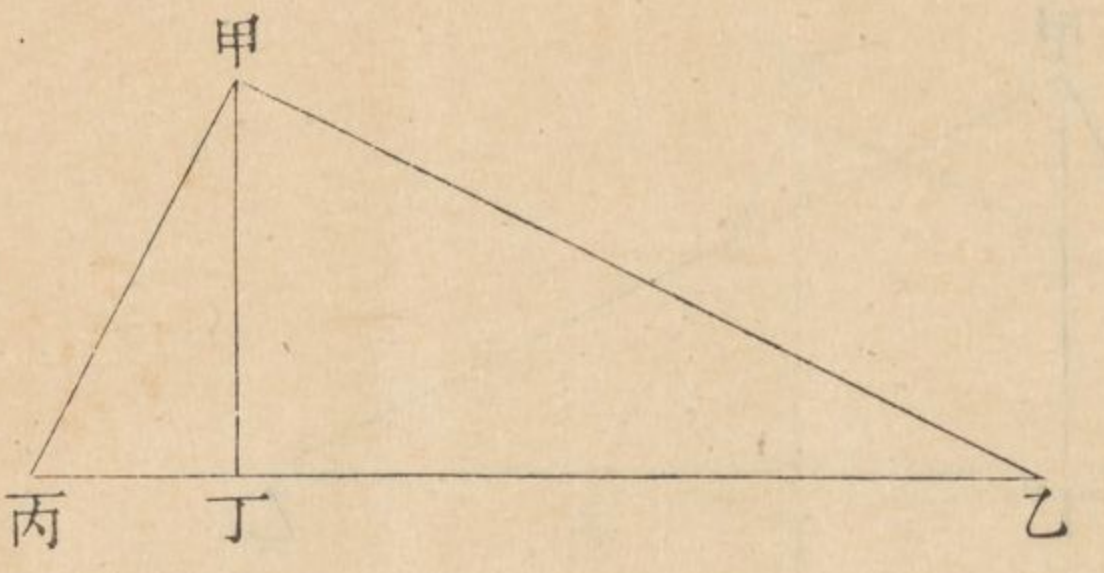
癸圓面。與子丑寅卯橢圓面互相爲比



之比例。必同於戊己庚辛正方形。與甲乙丙丁長方形互相為比之比例矣。然戊己庚辛正方形之己庚底。即圓面壬癸徑度。而甲乙丙丁長方形之乙丙底。又即橢圓面之丑卯徑度也。夫平圓與橢圓之比例。既同於正方形與長方形之比例。而正方形與長方形之比例。又同於己庚底與乙丙底之比例。則圓面與橢圓面之比例。同於圓面之壬癸徑

與橢圓面之丑卯徑之比例可知矣。

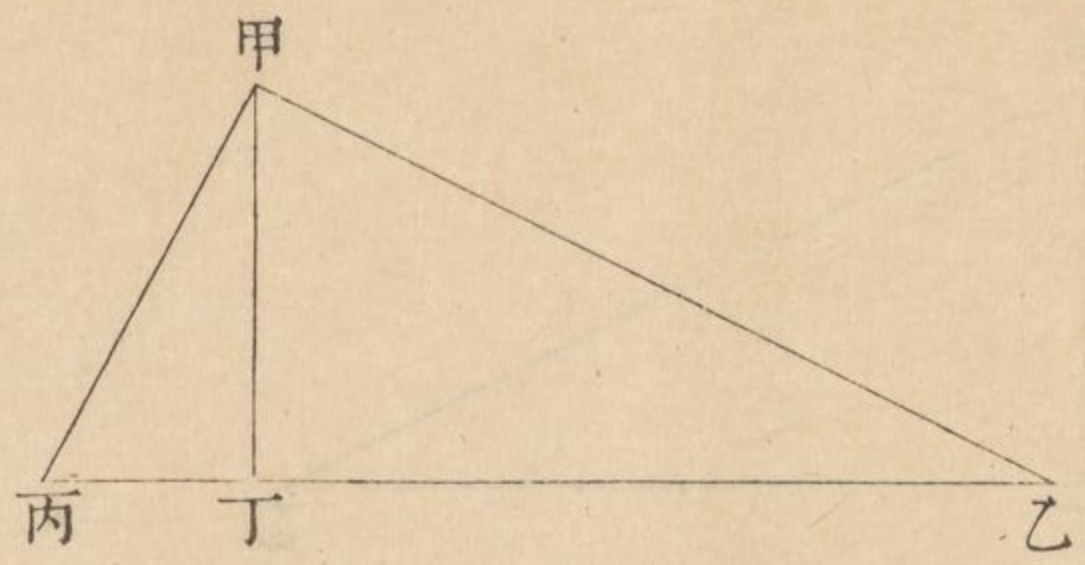
與諸國面之正與否之此論可成矣



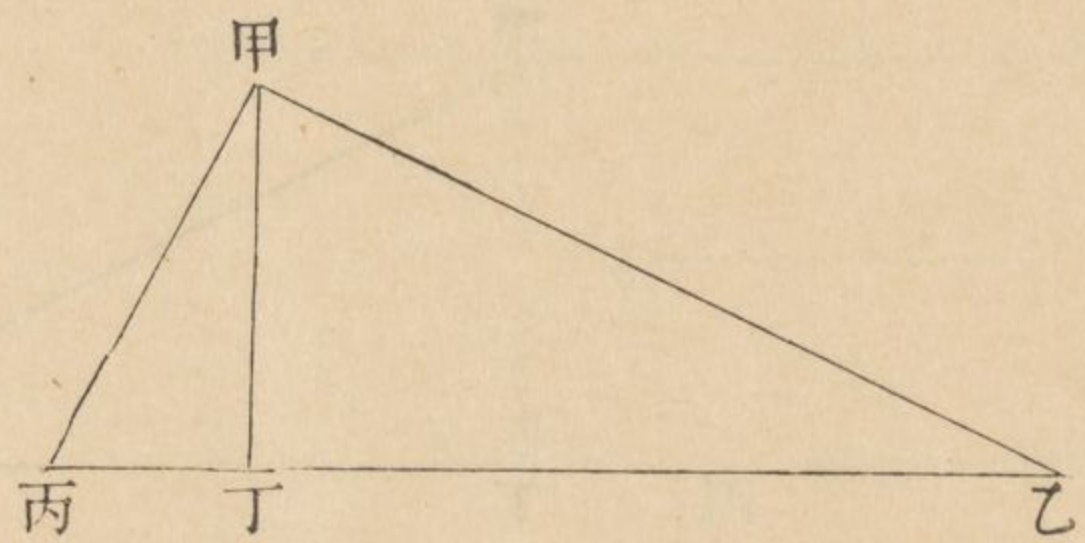
幾何原本九

第一

凡直角三角形。自直角至相對界。作一垂線。則一形分爲兩形。與原形共爲三同式直角三角形。而其比例俱相同也。如甲乙丙直角三角形。自甲直角至相對乙丙界。作一甲丁垂線。則甲乙丙一形。分爲甲丁乙。甲丁丙。兩形。此所分兩形。與原有甲乙丙形之式俱相同。而皆



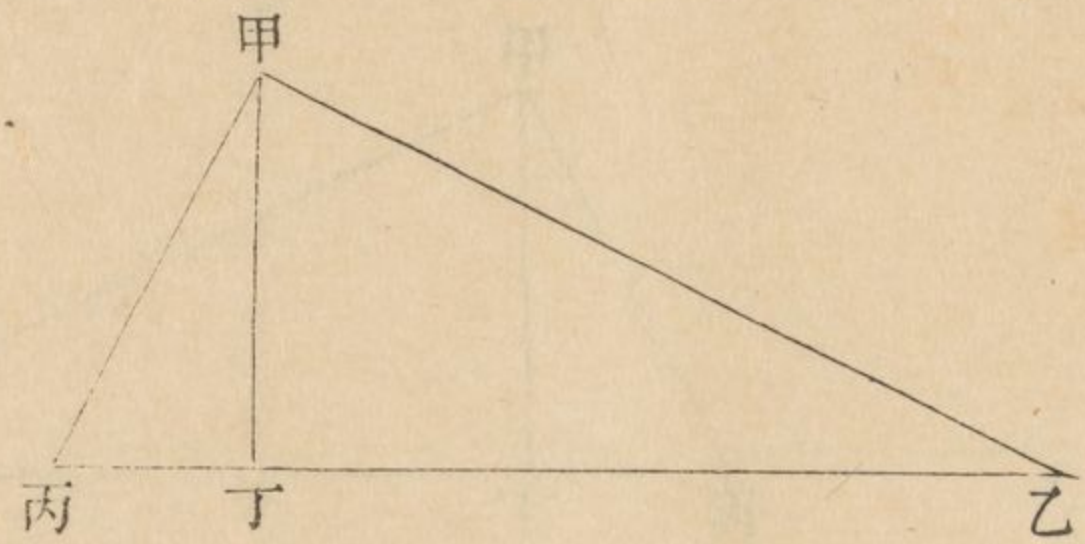
為直角三角形。其三形每相當各界之比例。亦俱相同也。蓋甲丁線既為垂線。則兩傍所分甲丁乙。甲丁丙。二角。必俱為直角。見首卷第十節。是故甲乙丙三角形之甲角。甲丁乙三角形之丁角。其度相等。而兩三角形。又共一乙角。其相當二角度既等。則所餘各一角度自等。見八卷第三節。故甲乙丙之丙角。與甲丁乙之甲角。其度相等也。而甲乙丙之甲角。亦與甲丁



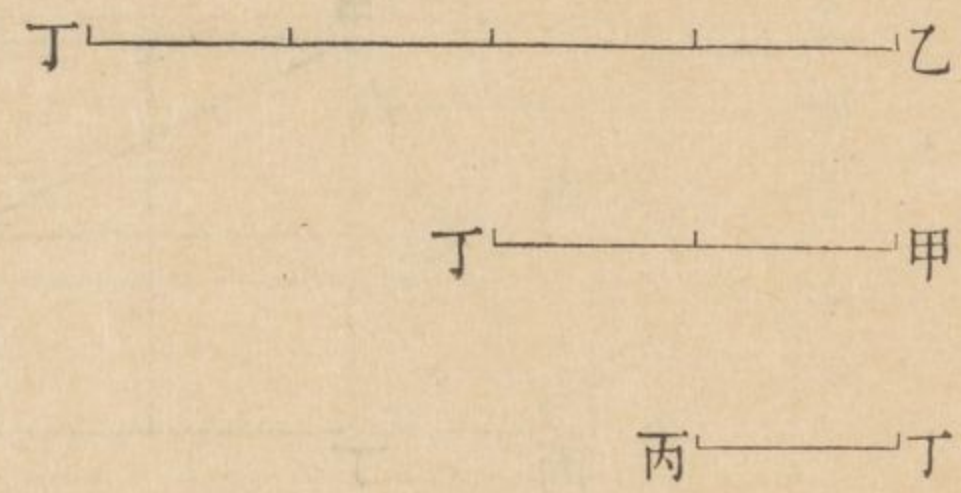
丙之丁角相等。此兩三角形。又共一丙角。故所餘之甲乙丙之乙角。與甲丁丙之甲角。其度亦等。三三角形之每相當各角之度既等。則三三角形之式必同。三三角形之式既同。則其每相當各界之比例亦俱相同可知矣。

第二

凡直角三角形。自直角至相對界作一垂線。則所截之兩段。一為一率。一為三



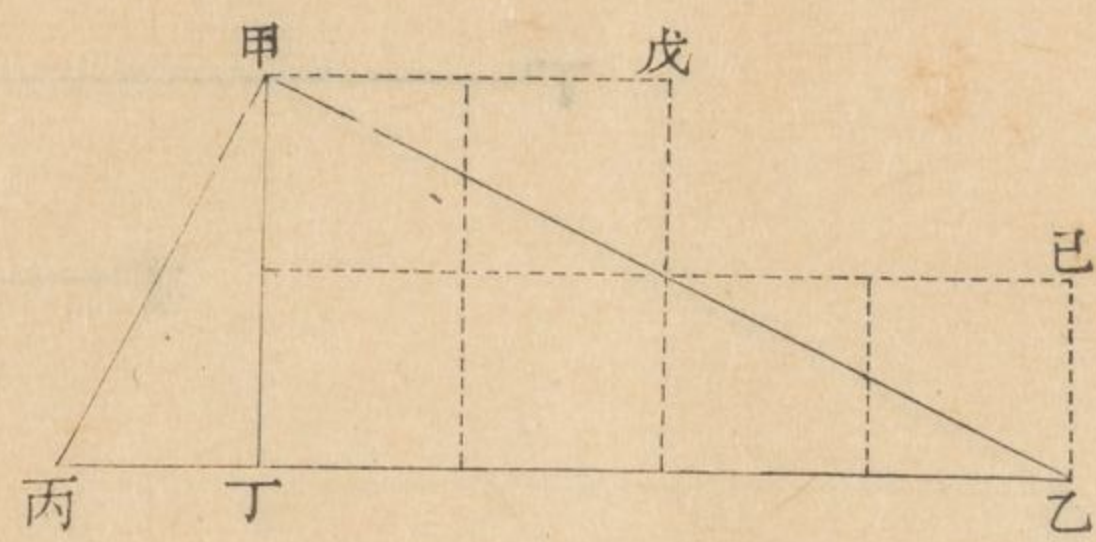
率。而所作之垂線為中率。此三率即為相連比例率也。如甲乙丙直角三角形。自甲直角至相對乙丙界作一甲丁垂線。則截乙丙界為兩段。其所截之乙丁段為一率。則丁丙段為三率。若丁丙段為一率。則乙丁段為三率。而所作甲丁垂線總為中率。故此乙丁。甲丁。丁丙。三線互為相連比例三率也。蓋甲乙丁。甲丁丙。兩三角形為同式。故其相當之乙



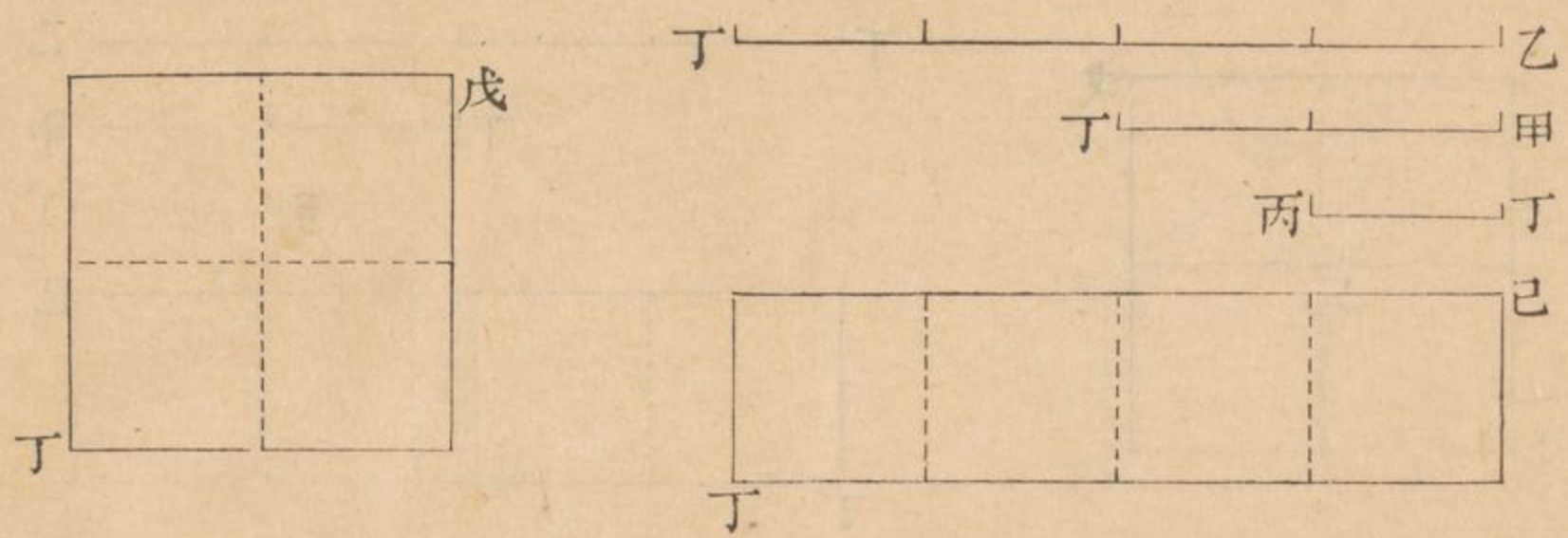
丁。甲丁。二界互相為比。即同於甲丁。丁丙。二界之互相為比也。今以乙丁線為四分。丁丙線為一分。則甲丁線必得二分。因四分與二分之比。必同於二分與一分之比。故為相連比例三率也。

第三

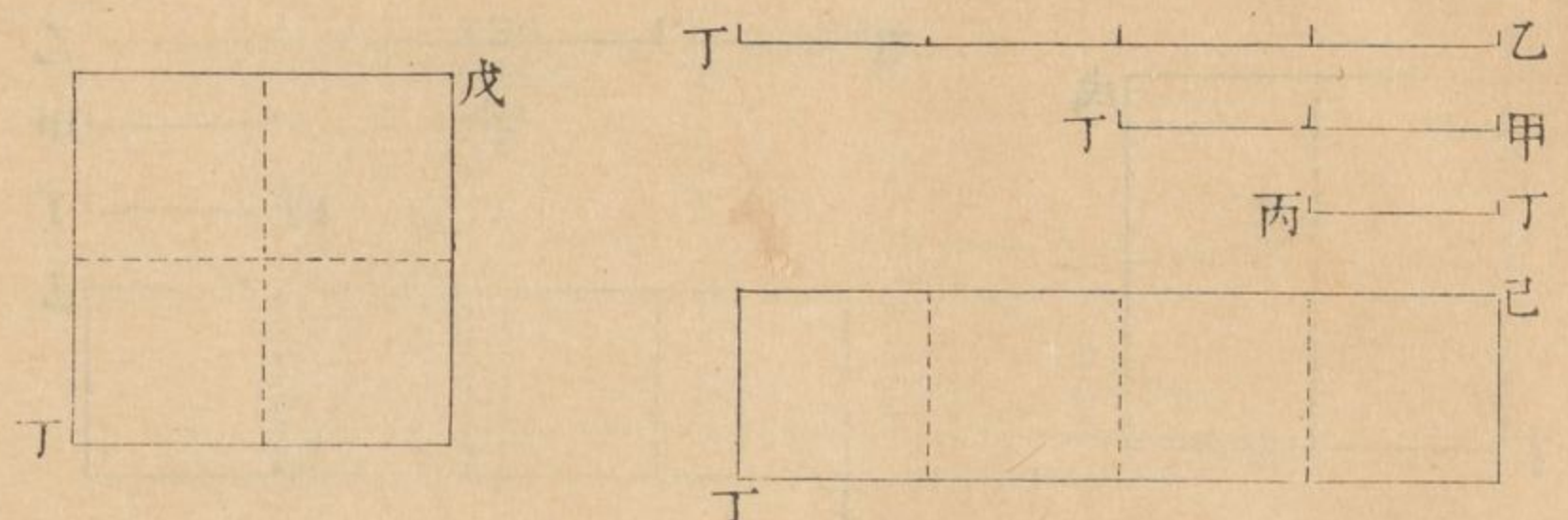
直角三角形。自直角至相對界所作垂線。與所分二段。固為相連比例三率。如依垂線度作一方形。則與所分二段一



爲寬度一爲長度所作長方形之積相等也。如甲乙丙直角三角形。自甲直角至相對乙丙界作一甲丁垂線。截乙丙界爲兩段。遂成乙丁。甲丁。丁丙之連比例三率。今依甲丁垂線度。作一戊丁正方形。即爲中率以甲丁垂線所截丁丙一段爲寬度。乙丁一段爲長度。作一己丁長方形。即爲首率末率相乘之數其戊丁正方形之積。必與己丁長方形之積相等也。何



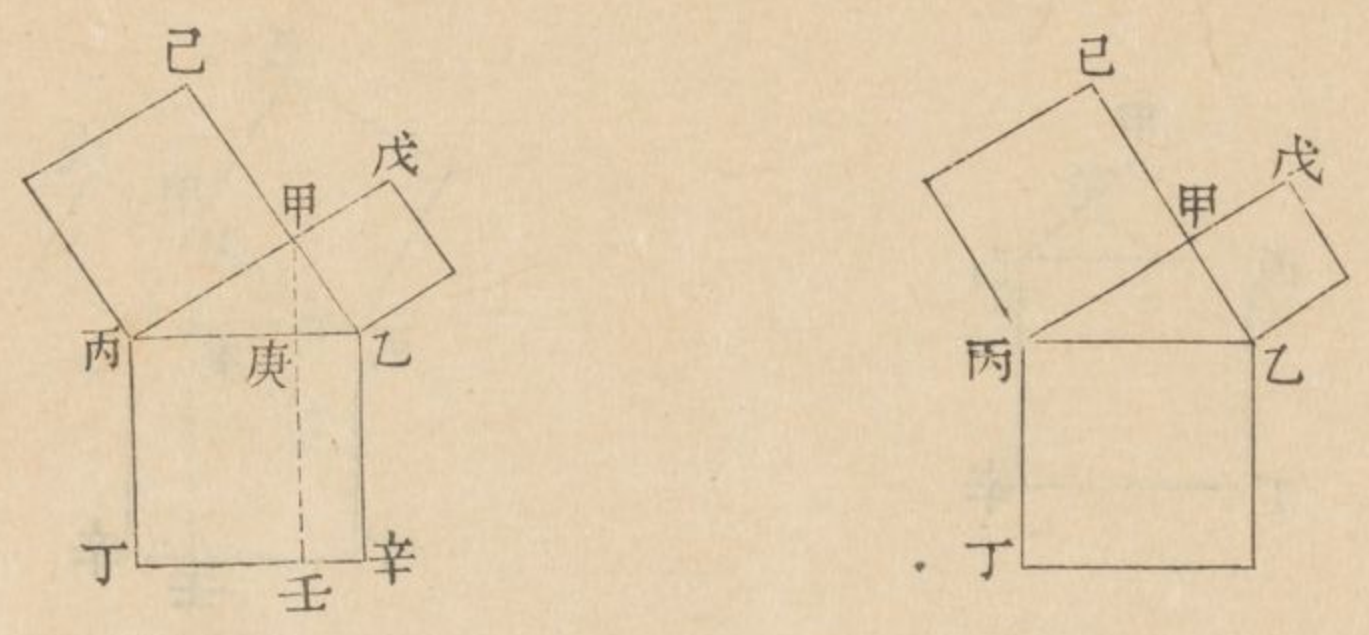
也。蓋同式兩三角之相當界互相爲比之比例同。故此乙丁界與甲丁界之比。即同於甲丁界與丙丁界之比。乙丁線既爲一率。則甲丁線爲二率。甲丁線復爲三率。則丙丁線爲四率。然則此相連比例三率。又爲相當比例四率矣。因其可爲相當比例四率。故二率與三率相乘。一率與四率相乘。所得之分數相同。見七卷第四節今既以甲丁爲二率。又爲三率。

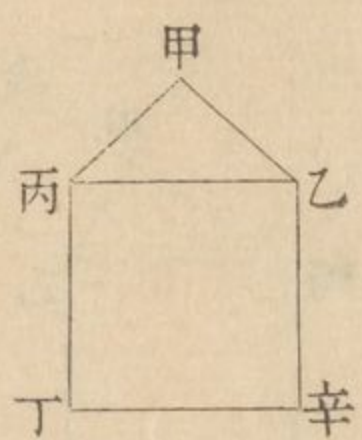
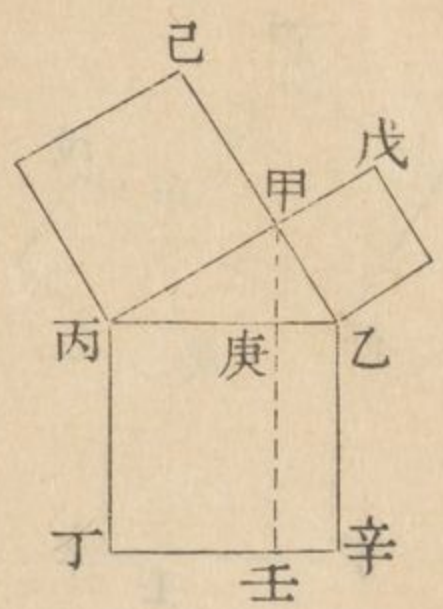


則甲丁自乘之數。即是二率三率相乘之數。而乙丁一率。與丙丁三率相乘。所得已丁長方形。即與甲丁二率三率自乘之正方形相等可知矣。此乃首率末率求中率之法也。要之首率末率相乘。中率相乘。中率相乘者。中率自乘。或二率三率相乘。俱在首率末率之中。故云。其所成之二式雖異。因俱自相連比。例四率而生。故其積相等而得以為準也。

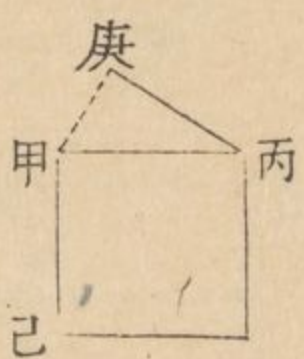
第四

凡有直角三角形。其直角相對界所作方形之積。必與兩傍界所作兩方形之積相等也。如甲乙丙直角三角形。其甲直角相對乙丙界作一乙丁方形。其積必與甲乙丙之兩傍線所作戊乙己丙兩方形之積相等也。試自甲直角過壬垂線。則甲乙丙三角形。分爲甲乙庚相對乙丙界至方形辛丁界。作一甲庚

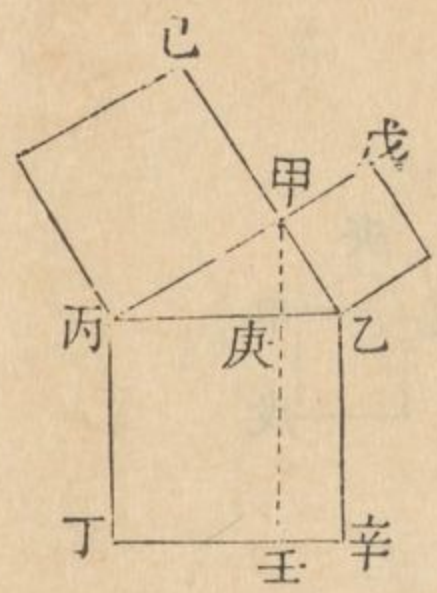




甲庚丙兩三角形。而乙丁正方形。分爲乙壬庚丁兩長方形。此所分甲乙庚甲庚丙兩三角形。與甲乙丙原三角形爲同式。則其每相當界之互相比例必同矣。是以甲庚丙小三角形之庚丙小界與丙甲大界之比。卽同於甲乙丙大三角形之甲丙小界與乙丙大界之比。而爲相當比例四率也。然丙甲甲丙之二率三率。原爲一線。則庚丙丙甲乙丙又



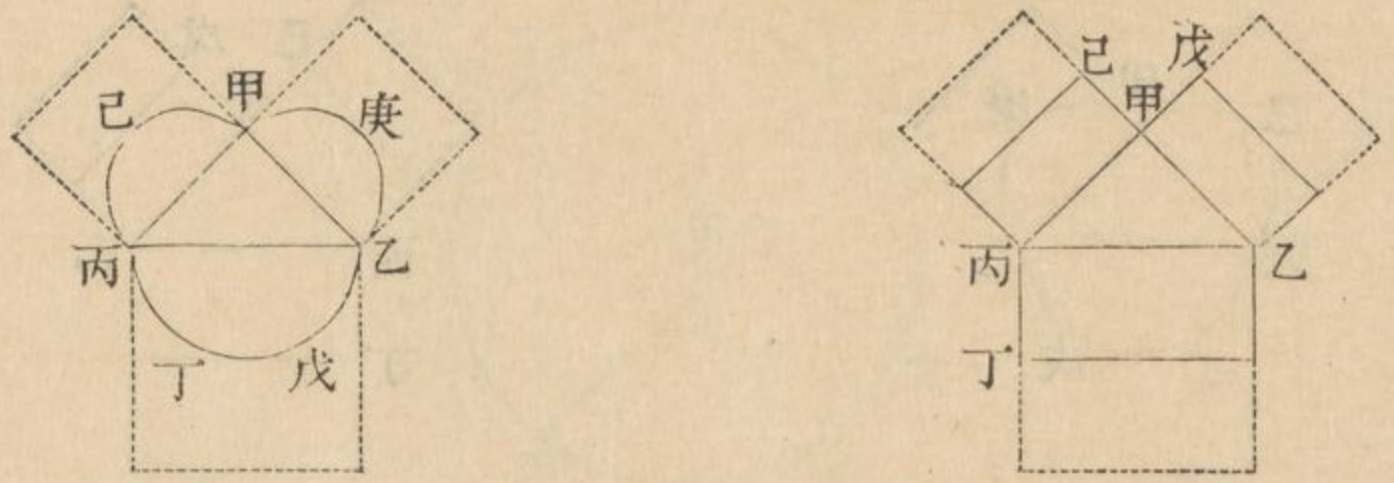
爲相連比例三率矣。故丙甲中率所作己丙方形之積。與庚丙一率爲寬乙丙三率爲長所作庚丁長方形之積相等也。乙丁旣爲正方形。則庚壬度必與方界乙丙各度等。故庚丁長方。卽同庚丙爲寬乙丙爲長所作之長方也。又如甲乙庚甲乙丙兩三角之乙庚甲乙乙甲乙丙四界。爲相當比例四率。又爲相連比例三率。故甲乙中率所作戊乙方形



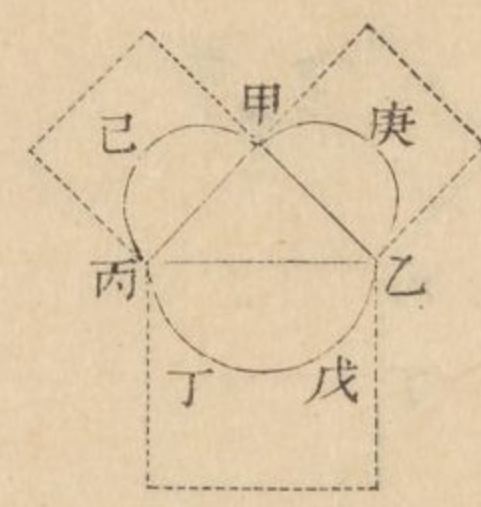
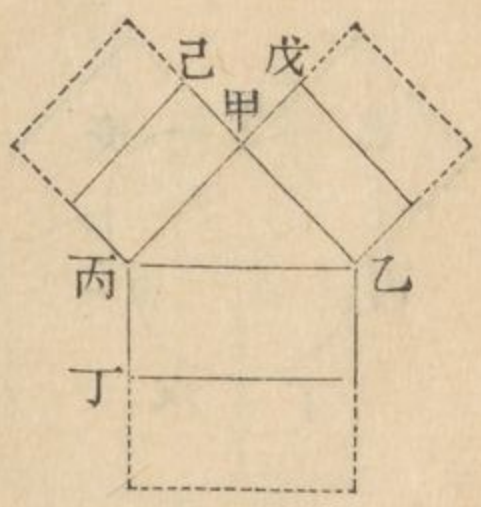
之積亦與乙庚一率為寬乙丙三率為長所作乙壬長方形之積相等也。今庚丁乙壬之兩長方形既與己丙戊乙兩正方形等則兩形相合之乙丁正方形亦必與己丙戊乙兩正方形相等可知矣。

第五

凡直角三角形之三界所作同式三形其一大界所作一形之積必與二小界



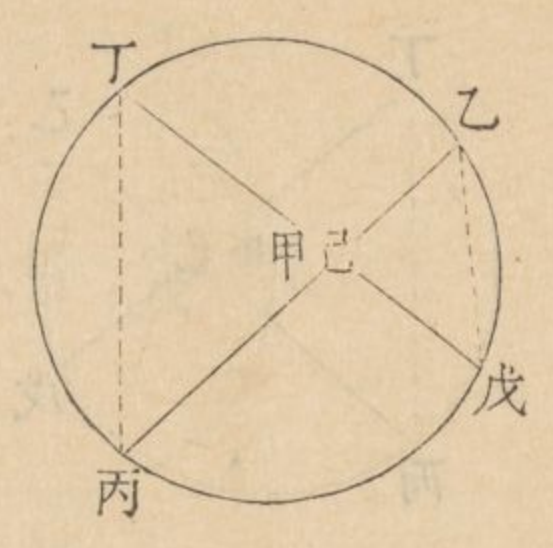
所作二形之積等也。如在甲乙丙直角三角形之乙丙甲乙甲丙三界作乙丁戊乙己丙三同式長方形則乙丙大界所作乙丁一形之積必與甲乙甲丙二小界所作戊乙己丙二形之積等也。又如如甲乙丙直角三角形於乙丙大界作乙戊丁丙一半圓於甲乙甲丙二小界作甲庚乙甲己丙二半圓則乙丙大界所作乙戊丁丙一半圓之積必與甲

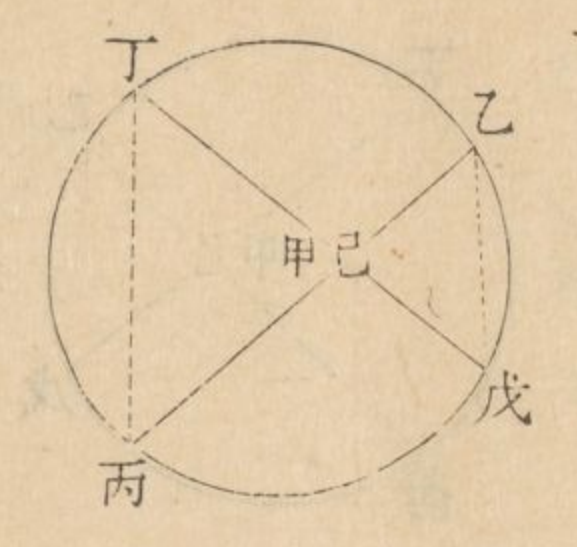


乙。甲丙。二小界所作甲庚乙。甲己丙。二半圓之積等也。蓋依三界所作三形之式既同。故同式衆形互相爲比。卽同於相當界所作正方形之互相爲比也。要之一大界所作一大形內。減一小界所作一小形。卽餘一小界所作一小形。而作一小形。卽餘一小界所作一小形。而一小界所作一小形內。再加入一小界所作一小形。則爲一大界所作一大形矣。

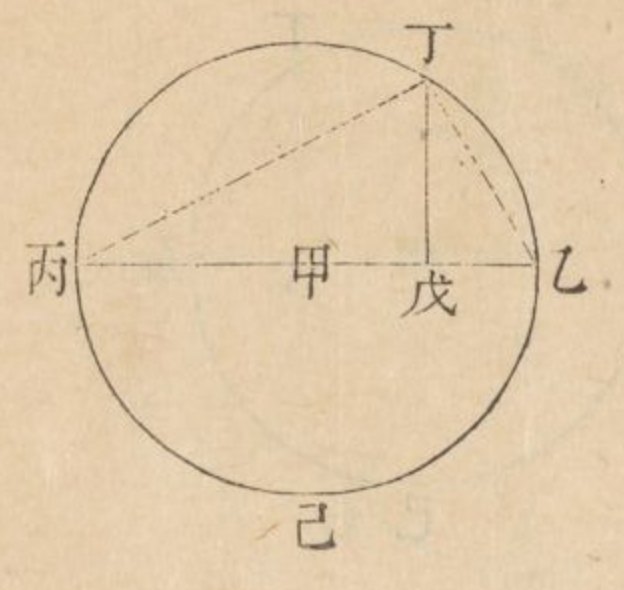
第六

一圓之內。二絃線相交。所截之段。遞轉比之。其比例俱同。而爲相當比例四率也。如甲圓內乙丙丁戊。二絃線相交於己。其所截之戊己一段。與己丙一段之比例。卽同於乙己一段。與己丁一段之比例。故戊己己丙乙己己丁。四段爲相當比例之四率也。何以見之。若自乙至戊。自丁至丙。復作二絃線。卽成乙己戊。



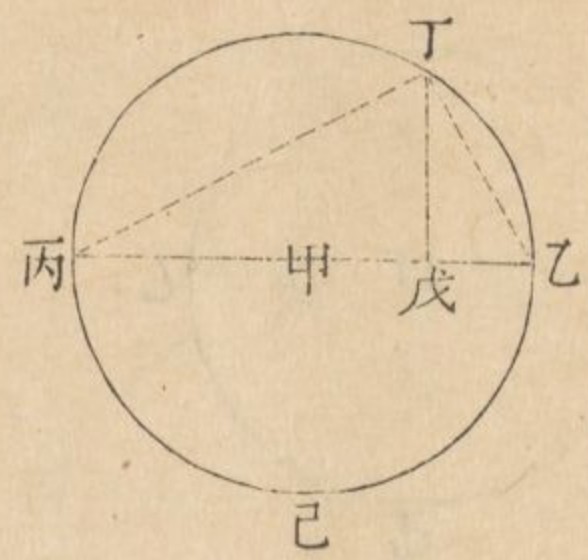


丁己丙兩三角形。此兩三角形之乙角。丁角。俱切於甲圓之戊丙弧段。其度相等。見四卷第十二節。再乙己戊之己角。丁己丙之己角。又為二尖相對之角。其度亦相等。今乙丁二角之度既等。而兩己角之度又等。則所餘戊丙二角亦自等。兩三角形之相當各角既等。則其式必同。其式既同。則每相當各二線互相為比之比例俱同。而戊己己丙乙己己丁四段。



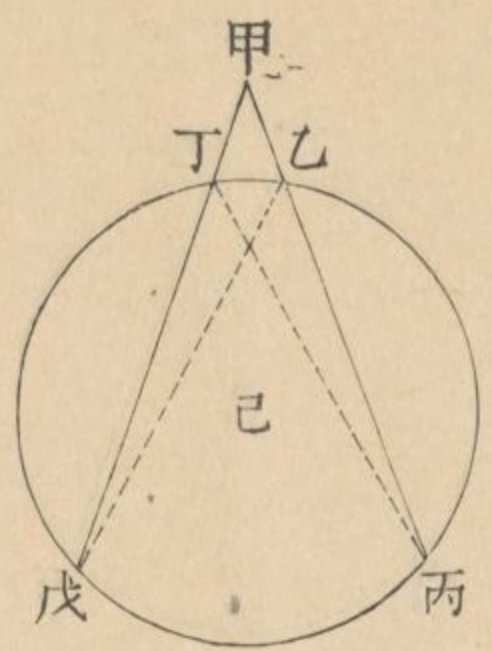
互相為比例四率可知矣。
第七

圓之徑線不拘何處作一垂線。則所截之兩段。一為一率。一為三率。而垂線為中率。即為相連比例三率也。如甲圓自丁界至乙丙徑線戊處作一丁戊垂線。將乙丙徑線截為兩段。其所截乙戊一段為一率。戊丙一段為三率。而丁戊垂線為中率。此乙戊丁戊戊丙三線為相

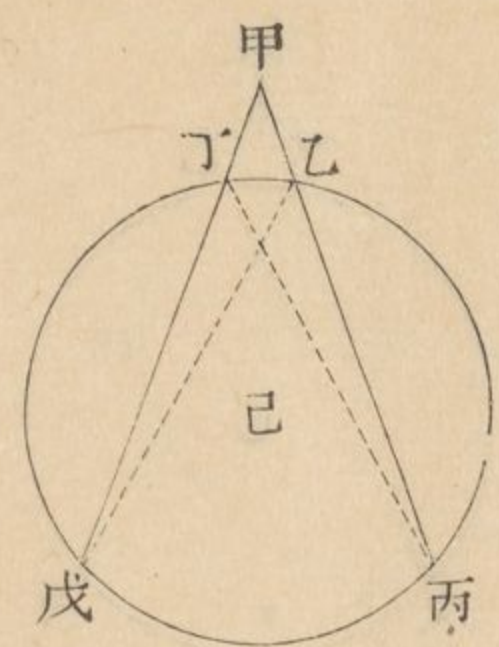


連比例三率也。試自園界丁至乙丙二處。作丁乙丁丙二線。則成一乙丙丁三角形。其丁角既立於園之乙己丙半界。故為直角。見四卷第十四節。而丁戊垂線。乃自直角至相對乙丙底界所作之垂線。故所截乙戊一段為一率。戊丙一段為三率。而丁戊垂線為中率。為相連比例三率也。

第八



自園外一點。過園界二處。至相對界作二線。以此兩全線互相為比。即同於園界外所截之二段。遞轉為比之比例。而為相當比例四率也。如己園。自園外甲點。過園界乙丁二處。至相對界丙戊二處。作二線。則甲丙甲戊兩全線互相為比。必同於園界外所截甲乙甲丁二段之遞轉相比。而為相當比例四率也。試自園界乙丁二處。至相對界丙戊二處。



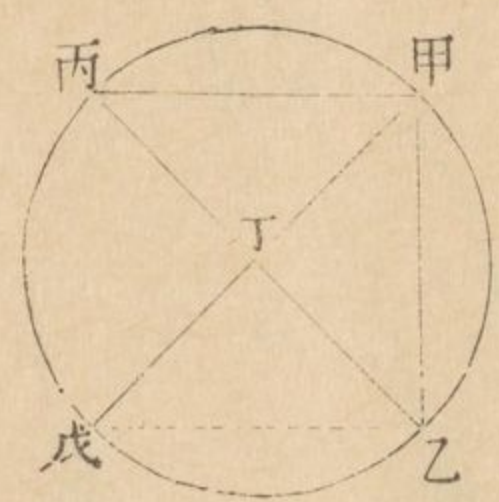
作乙戊丁丙二線。則成甲丙丁甲戊乙兩三角形。此兩三角形之丙戊二角。既切於一圓之乙丁弧界。其二角之度必等。見四卷第十二節。再甲丙丁之甲角。甲戊乙之甲角。既共為一角。其度自等。兩三角形各二角度俱等。則兩三角形必為同式矣。故甲丙甲戊。相當二界。互相為比之比例。即同於甲丁甲乙。相當二界。互相為比之比例。是以甲丙與甲戊之比。

同於甲丁與甲乙之比。將甲丙全線為一率。甲戊全線為二率。甲乙甲丁。遞轉移之。而以甲丁一段為三率。甲乙一段為四率。為相當比例之四率也。

第九

凡函於圓內之三角形。以其一角平分為二。過相對底界至相對界。作一直線。則所分角之小邊線。與所作線之在三角形內一段之比。即同於所作線之全





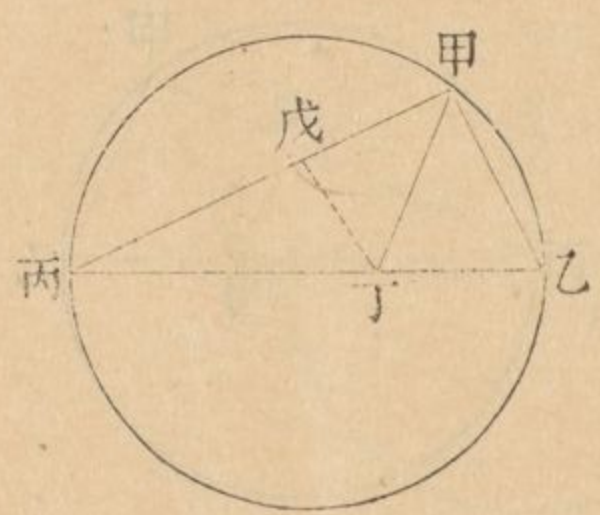
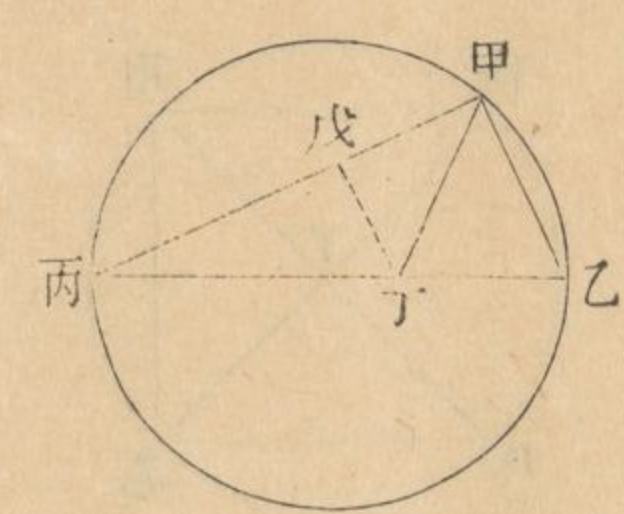
分與所分角之大邊線之比也。如函於
 園內有甲乙丙三角形。以甲角平分為
 二分。過所對乙丙底界至相對界。作一
 直線。即成甲丁戊一全線。以三角形之
 甲乙小邊。與所作甲丁戊線之甲丁一
 段之比。即同於所作甲丁戊全線。與三
 角形之甲丙大邊之比也。何以言之。若
 自園界乙至戊。作乙戊弦線。即成甲乙
 戊。甲丁丙。兩三角形。此兩三角形之戊



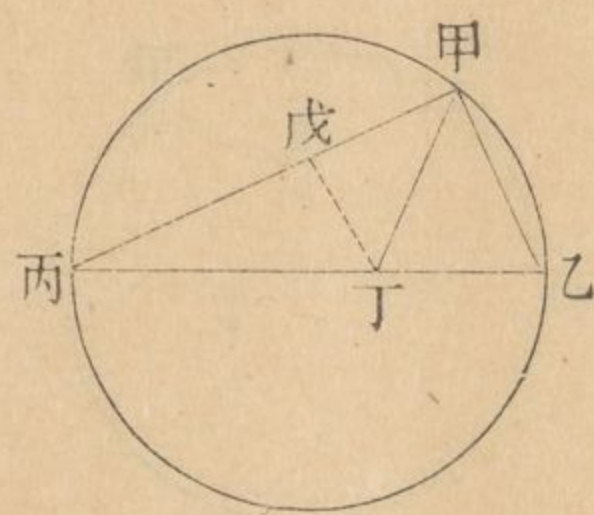
丙二角。俱切於園界甲乙弧之一段。其
 度必等。而甲乙戊三角形之甲角。甲丁
 丙三角形之甲角。又為一角所平分。之
 兩角。其度亦必等。因此兩三角形各二
 角之度等。故兩形為同式。兩三角形之
 式既同。則兩形之相當二界。互相為比
 之比例俱同。是以甲乙小分。與甲丁小
 分之比。即同於甲戊大分。與甲丙大分
 之比也。

第十

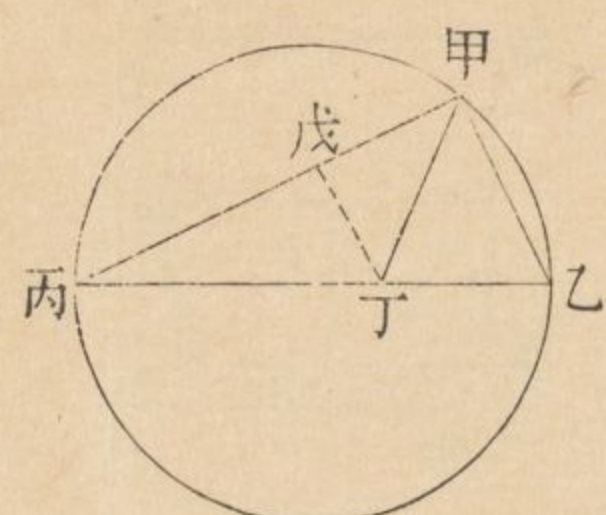
凡函於園內之三角形。以其一角為兩
 平分。自角至底作一線。則所分底線兩
 段互相為比。即同於所分角之兩傍兩
 邊線之互相為比也。如函於園內有甲
 乙丙三角形。以甲角平分為二分。至乙
 丙底。作甲丁一線。則分乙丙底線為乙
 丁。丁丙兩段。以乙丁與丁丙之比。即同
 於以甲乙小邊線與甲丙大邊線之比。



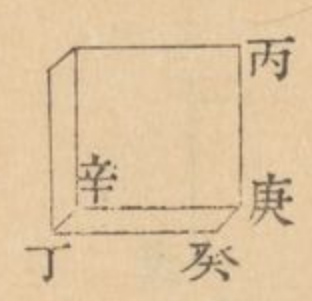
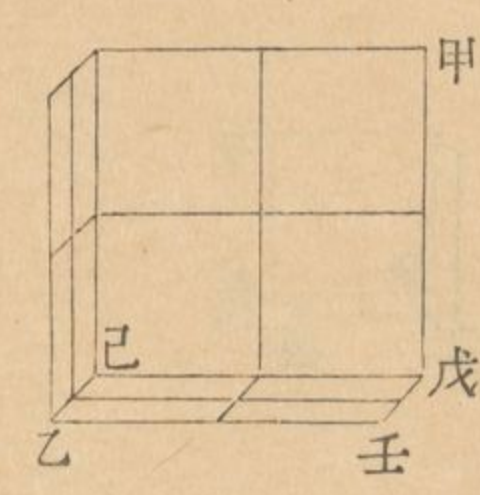
也。試自所分底線之丁至甲丙線。與甲
 乙平行作丁戊一線。即成戊丁丙一小
 三角形。蓋甲乙丙大三角形之乙角。戊
 丁丙小三角形之丁角。既為乙甲丁戊
 平行線一邊之內外角。其度必等。見首
卷第
 二十節。而甲乙丙。戊丁丙。兩三角形。又共
 一丙角。故此兩三角形之各二角度等。
 為同式兩三角形也。再甲丁戊之丁角。
 乙甲丁之甲角。因為平行線內二尖交



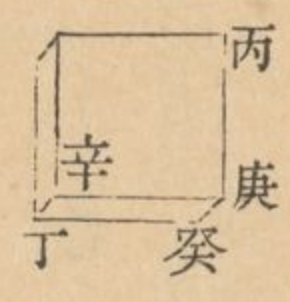
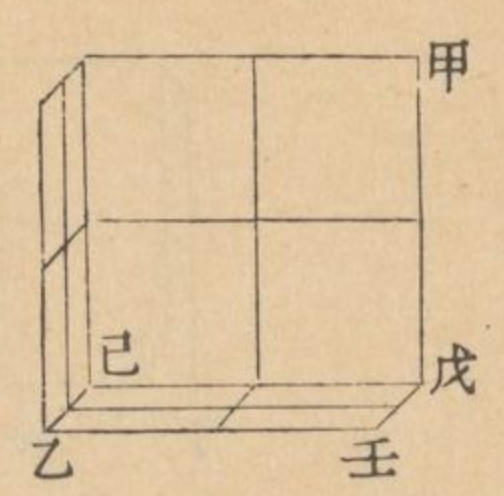
錯之角。其度亦等。然則乙甲丁之甲角。既為甲乙丙之甲角之兩平分。則甲丁戊之丁角。亦與甲丁戊之甲角度等矣。甲丁戊三角形之丁角甲角既等。則二角所對之丁戊。甲戊。二線。亦必等矣。甲乙丙。戊丁丙。兩三角形。既為同式。而三角之度又俱等。則其甲乙丙大三角形之甲乙。甲丙。二線。互相為比。即同於戊丁丙小三角形之戊丁。戊丙。二線。互相



為比之比例也。今戊丁。甲戊。二線。其度既等。則甲乙線與甲丙線之比。又同於以甲戊線與戊丙線之比。至於丁戊平行線所截乙丁一段。與丁丙一段之比。則又同於甲戊一段。與戊丙一段之比矣。是故甲乙線與甲丙線之比。為同於乙丁線與丁丙線之比也。



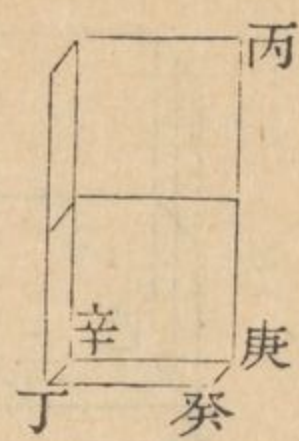
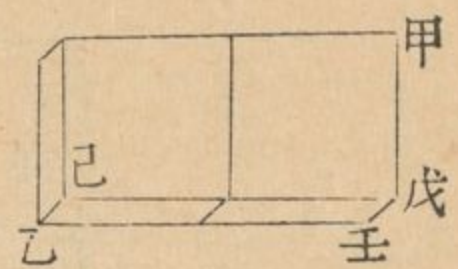
之丙庚厚。俱為大一倍。其甲乙大形之戊乙底面積。與丙丁小形之庚丁底面積之比。將縱橫二線之長寬度分考之。即得。見七卷第二節。既得二體底積之比例。乃以二形之厚度。復與底積比之。即可知甲乙丙丁二體之比例矣。蓋甲乙大體之戊己。戊壬長寬之度。既比丙丁小體之庚辛。庚癸長寬之度大一倍。則戊乙平面底形之內。如庚丁平面底



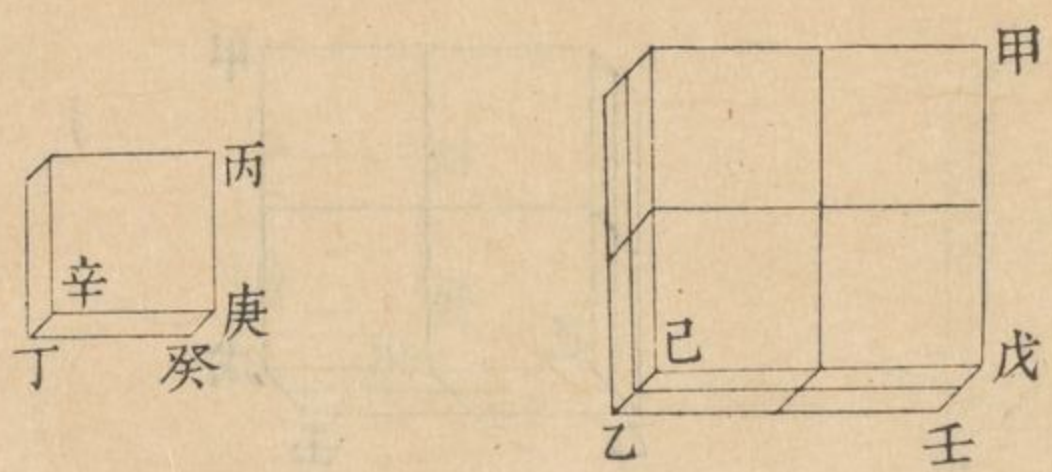
形二倍者有二矣。然則甲乙大形甲戊之厚度。既比丙丁小形丙庚之厚度大一倍。則甲乙體形之內。如丙丁體形四倍者有二可知矣。是故欲知直角方體之比例。以本體之長寬與厚。互相比例以較之。即得直角方體互相為比之比例也。

第二

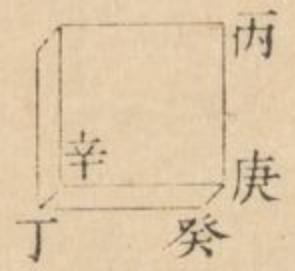
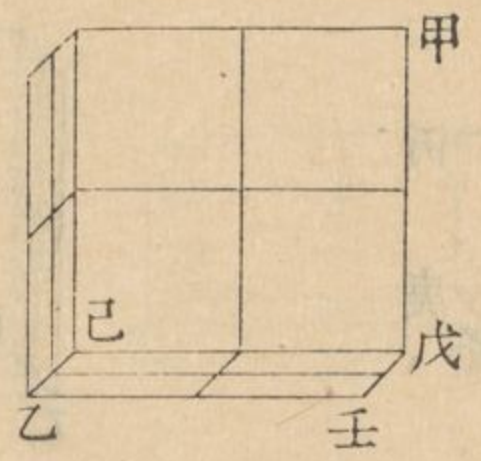
有兩直角長方體。若將此一體之底度



與他一體之底度。又將他一體之厚度。與此一體之厚度為比。其比例若同。則此二體之積必等也。如甲乙丙丁兩直角長方體。甲乙體之戊己底度。比丙丁體之庚丁底度大一倍。而丙丁體之丙庚厚度。比甲乙體之甲戊厚度亦大一倍。則甲乙丙丁二體之積必相等。是故兩體之底積與厚度相較。則兩體之積可知矣。蓋體積之比例。視其面線。今兩

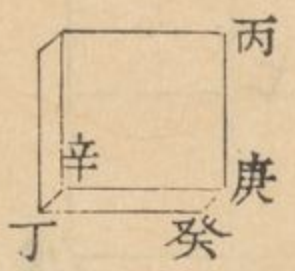
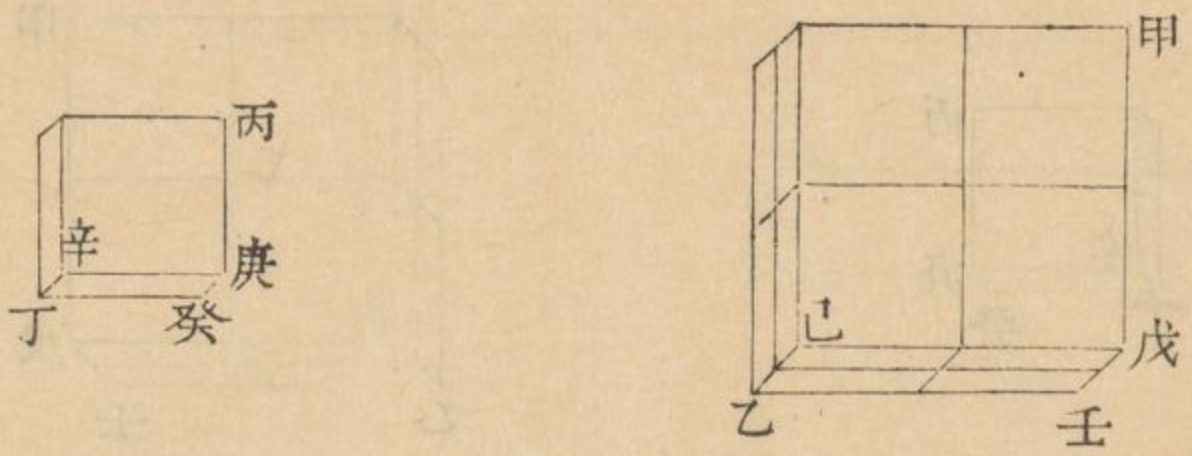


體之底面厚度交互相等如此。其體積不得不等也。
第三。有兩直角方體。其底面積之縱橫二界。相比之比例。與厚度面積之縱橫二界。相比之比例若俱同。則此兩體為直角正方形同式體也。如甲乙丙丁兩直角方體。其甲乙體之戊己底面之戊己橫界。比丙丁體之庚丁底面之庚辛橫界大

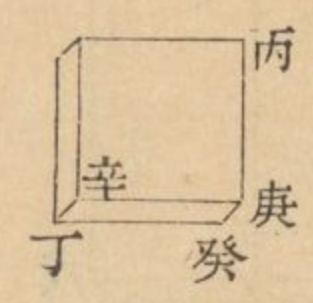
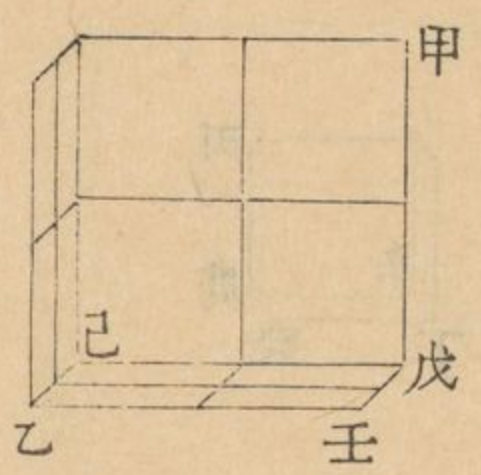


一倍。甲乙體之戊乙底面之戊壬縱界。比丙丁體之庚丁底面之庚癸縱界大一倍。甲乙體之甲己厚面之甲戊直界。比丙丁體之丙辛厚面之丙庚直界亦大一倍。則甲乙丙丁之兩體。俱為直角。正方同式體也。至於兩體所有之戊己庚辛二界。戊壬庚癸二界。甲戊丙庚二界。俱為相當之界。而可互相為比例矣。

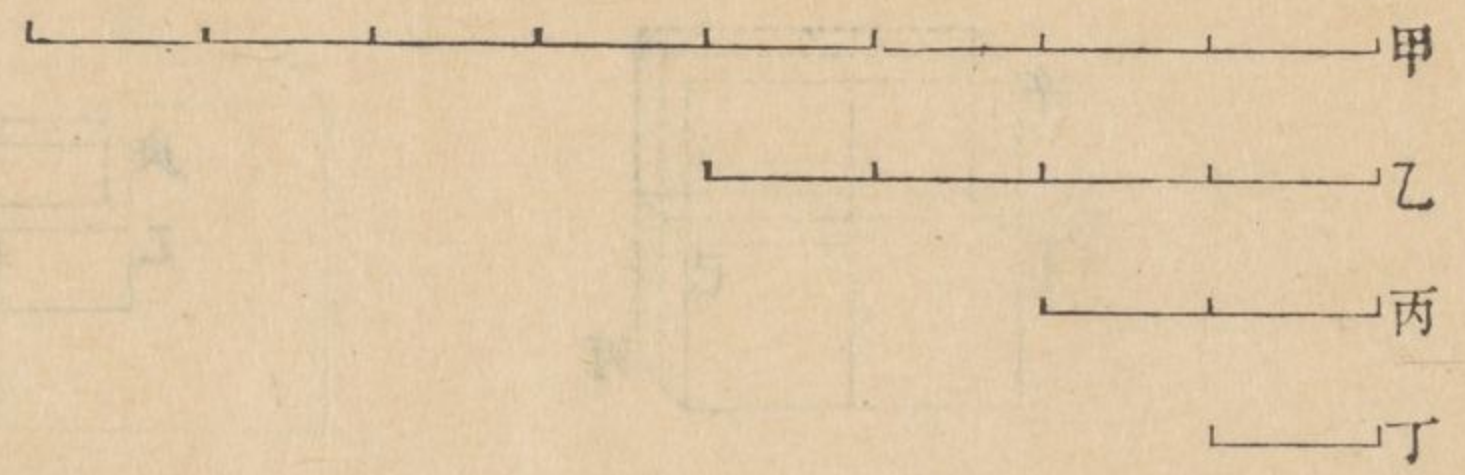
第四



凡同式直角正方體。其體積之比例。比之兩界線之比例。為連比例隔二位相加之比例也。如甲乙丙丁兩同式直角正方體。其相當之戊己庚辛二界。戊壬庚癸二界。甲戊丙庚二界。互相為比之比例。俱各大一倍。則此甲乙體積與丙丁體積之比。比之甲乙體之界線與丙丁體之界線之比者。即如連比例四率內隔二位相加之比例矣。蓋甲乙體之



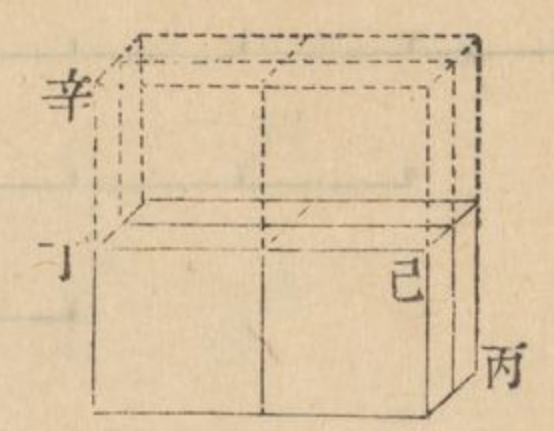
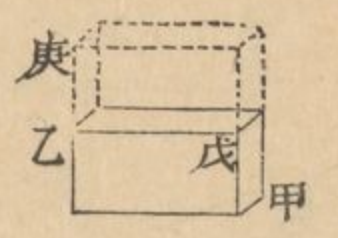
各界既為丙丁體之各界之二倍。則甲乙體內如丙丁體之二倍者有四。二其四為八。故甲乙體積。比丙丁體積大八倍。夫以甲乙體積八。與丙丁體積一相比。為八分之一。甲乙體界二。與丙丁體界一相比。為二分之一。其比例不同。蓋以八分比一分。較之二分比一分。為四倍也。如欲求其相連比例之率。則於甲乙體之界四倍之。得八分。與丙丁體界



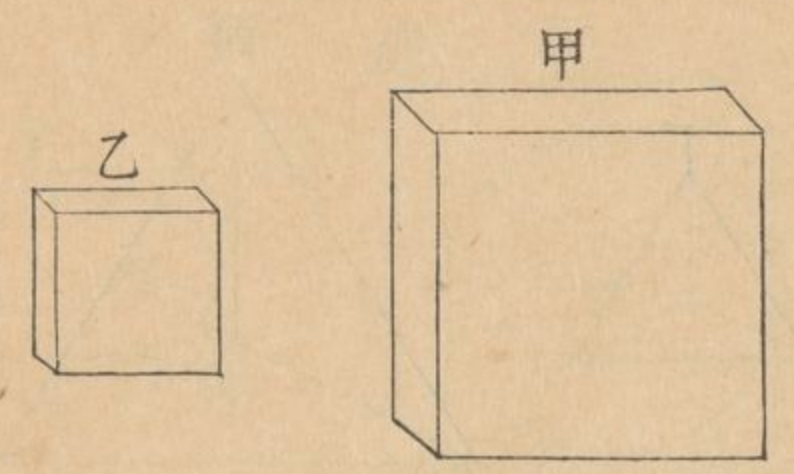
一分為比。即如甲乙體積與丙丁體積之比例矣。夫八與四。四與二。二與一。皆為連比例二分之一之比例。今以八與一為比。其間隔四與二之兩位。故曰同式兩體積之比例。為兩界上連比例隔二位相加之比例也。若邊為三倍。則面為九倍。體為二十七倍。亦為隔二位相加之比例也。

第五

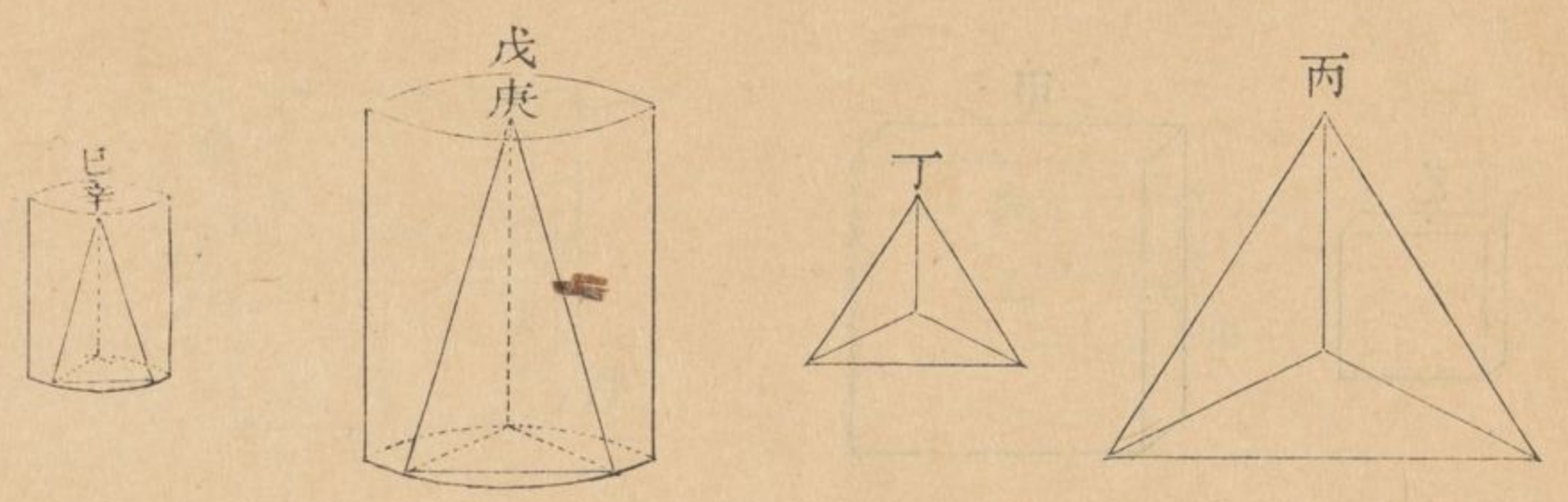
有兩同式直角長方體。於兩體相當之



二界各作兩正方體。互相為比。即同於原兩長方體之互相為比也。如甲乙丙丁兩直角長方體。在戊乙己丁相當二橫界。各作甲庚丙辛二正方體。則所作之甲庚丙辛兩正方體互相為比之比例。仍同於原有之甲乙丙丁兩長方體互相為比之比例也。夫甲乙丙丁同式之兩長方體。既為隔二位相加之比例。則所作甲庚丙辛同式之兩正方體。亦



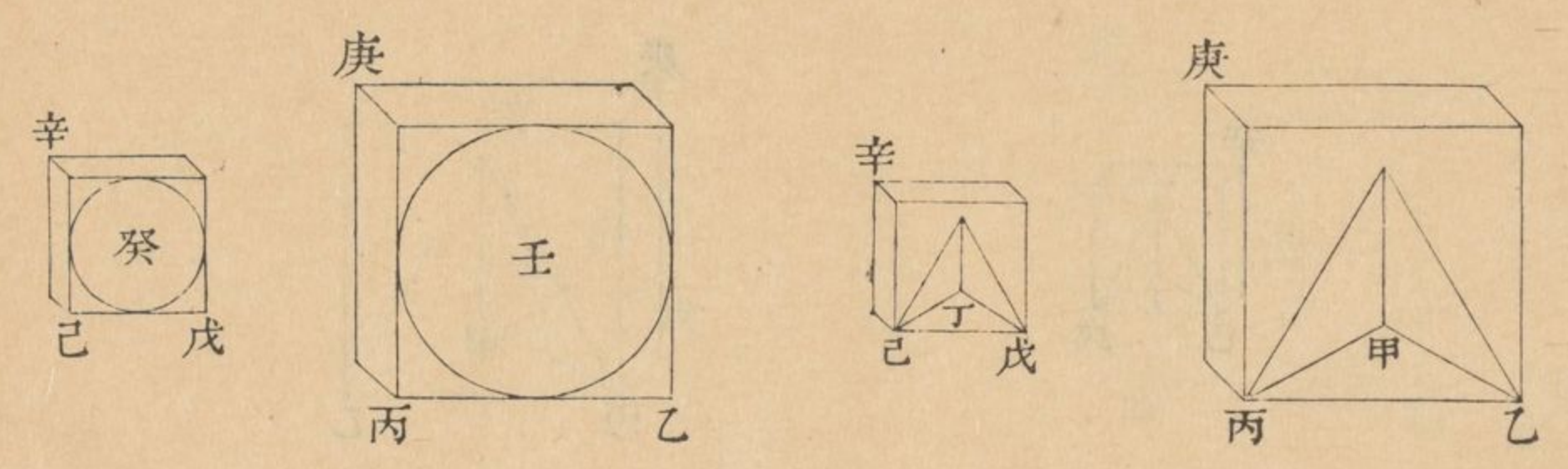
必為隔二位相加之比例矣。然則原有之甲乙長方體。為原有之丙丁長方體之八分之一。其所作甲庚正方體。亦為所作丙辛正方體之八分之一可知矣。
第六
凡有大小平面體。其相當角度俱等。而相當界之比例又同。則謂之同式體也。如甲乙大小兩平面體。其相當各角之度俱等。而相當各界之比例又同。則甲



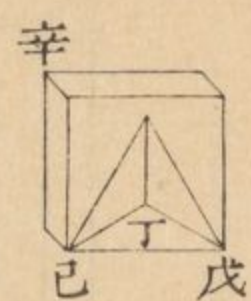
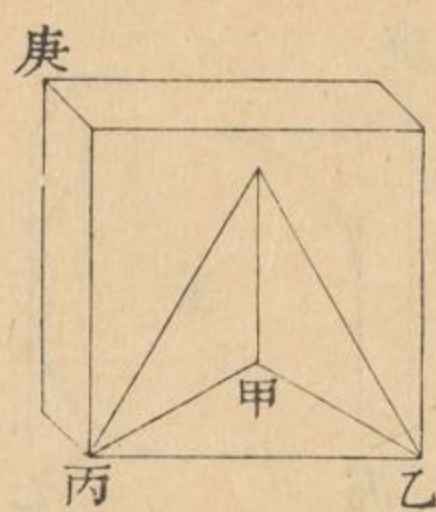
乙。二體。謂之同式平面正方體也。如丙。丁。大小兩四瓣體。其相當各角之度俱等。而相當各界之比例又同。則丙。丁。二體。謂之同式四瓣體也。又如大小圓面體。於其內外作各種平面體。其平面體之式若同。則圓面體亦謂之同式體。如戊。己。大小兩圓體所函之庚。辛。尖瓣等體是也。

第七

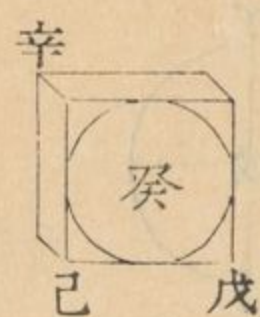
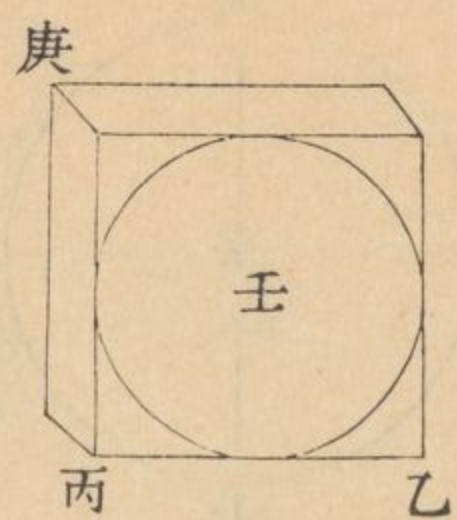
同式各種體之比例。同於在各體相當



界所作正方體之比例也。如甲。乙。丙。丁。戊。己。大小兩三角尖瓣體。互相為比。即同於乙。丙。戊。己。相當二界所作庚。乙。辛。戊。兩正方體之互相為比。又如壬。癸。兩圓球體。其互相為比之比例。亦同於圓球徑相當之乙。丙。戊。己。二界所作庚。乙。辛。戊。兩正方體互相為比之比例也。蓋同式平面形互相為比之比例。同於各



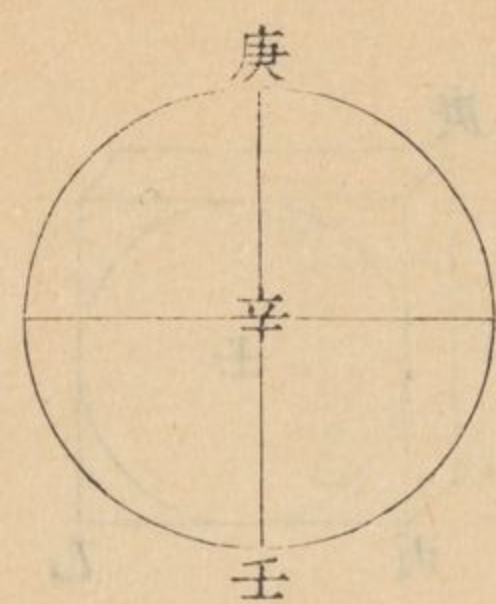
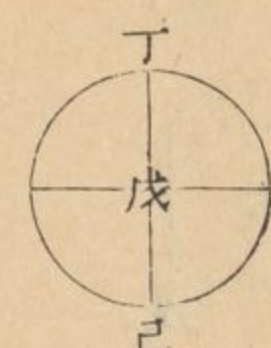
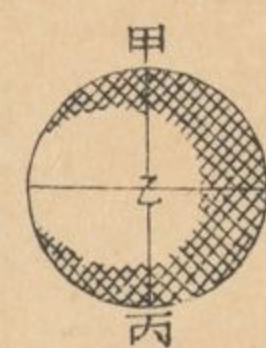
相當二界所作正方面形互相為比之比例矣。今各種體之式既同。故其相當面互相為比之比例必同。相當面互相為比之比例同者。緣相當面之各相當界互相為比之比例同也。故凡同類兩體。知此一體之度。而不知彼一體之度。欲求知之。則在同式兩體相當二界。各作一正方體。此所作之二體。一為一率。一為二率。所知之體為三率。推得四率。



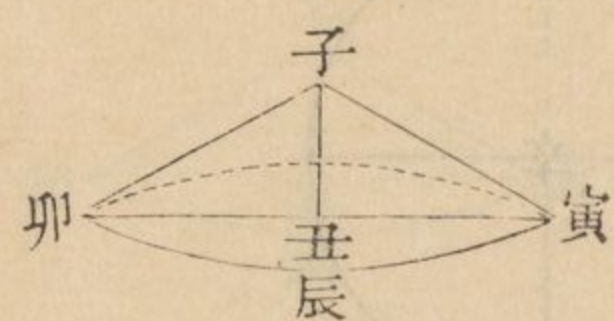
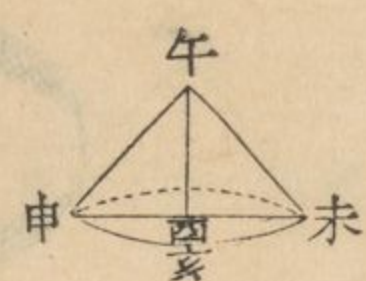
即其未知之體矣。或有同類兩體。知此一體之界。而不知彼一體之界。則依所知一體之界。作一正方體。其兩體一為一率。一為二率。所作正方體為三率。推得四率。即是彼一體界數所作之正方體矣。故曰同式兩體之比例。與相當界所作正方體之比例相同也。

第八

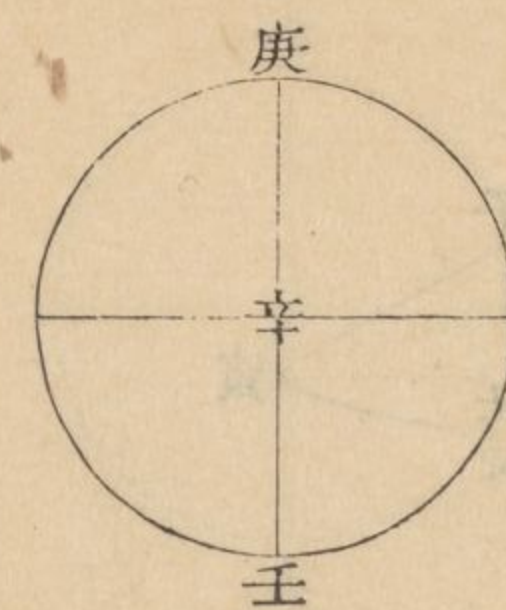
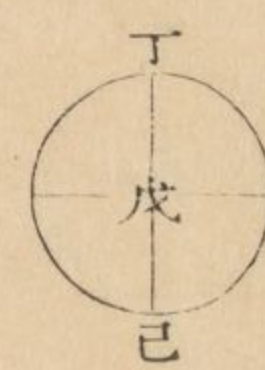
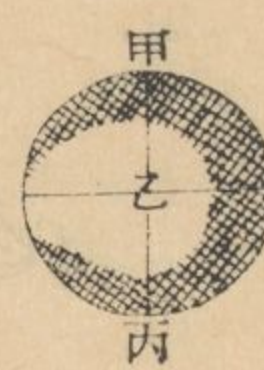
凡圓面半徑與球體半徑等者。其圓面



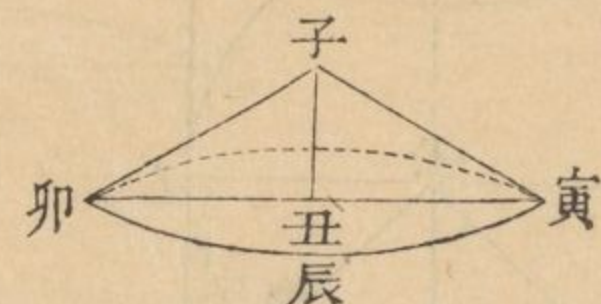
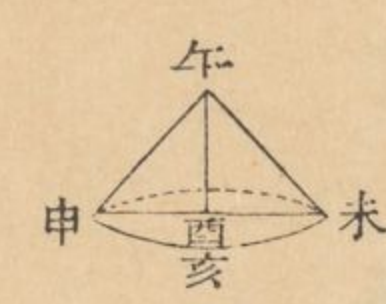
積為球體外面積之四分之一。而圓面半徑與球體全徑等者。其圓面積與球體外面積等也。如丁己圓面之丁戊半徑與甲丙球體之甲乙半徑等。則丁己圓面積為甲丙球體外面積之四分之一。又如庚壬圓面之庚辛半徑與甲丙球體之甲丙全徑等。則庚壬圓面積與甲丙球體外面積等也。試作子寅卯一尖圓體。使其寅辰卯之底面積與甲丙



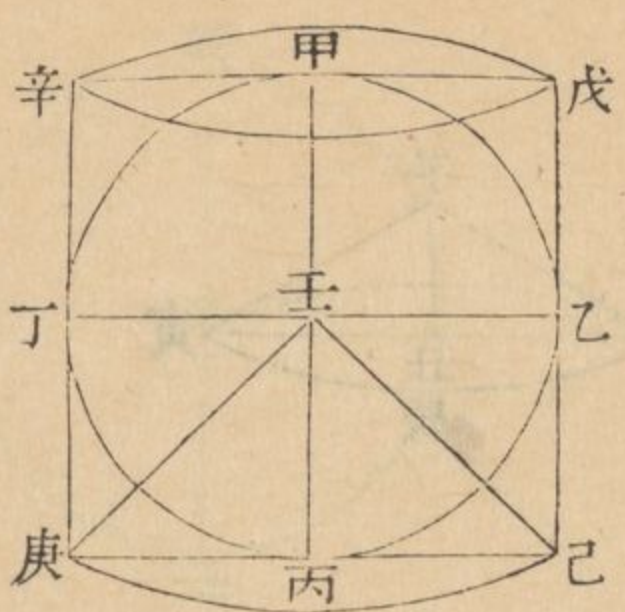
球體外面積等。其子丑高度與甲丙球體之甲乙半徑等。則此尖圓體積與球體積相等。見五卷第二十五節又作午未申一小尖圓體。使其未申底徑與甲丙球體之全徑等。亦與大尖圓體之寅丑半徑等。其午酉高度與甲丙球體之甲乙半徑等。亦與大尖圓體之子丑高度等。則此小尖圓體積為球體積之四分之一。亦即為大尖圓體積之四分之一。何以見



之。蓋大小兩面之比例。同於相當界所
 生連比例隔一位加一倍之比例。今大
 尖圓體之寅卯底徑。比小尖圓體之未
 申底徑大一倍。則大尖圓體底積。比小
 尖圓體底積。必又大一倍。而小尖圓體
 底積。為大尖圓體底積之四分之一矣。
 又兩體同高者。其體積之比例。同於其
 底面之比例。今小尖圓體底積。既為大
 尖圓體底積之四分之一。則其體積。必



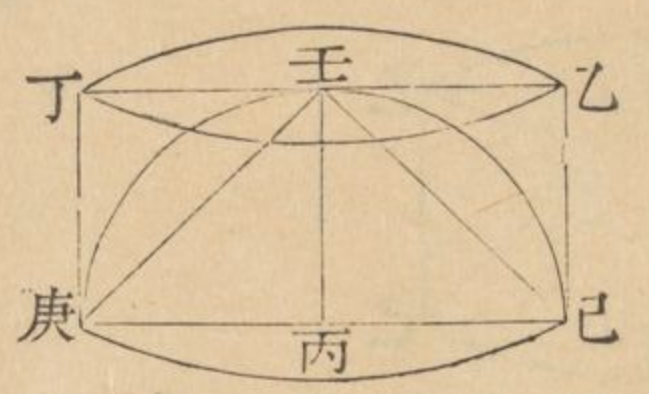
為大尖圓體積之四分之一。而亦為球
 體之四分之一矣。球體原與大尖圓相等。夫大尖
 圓體之底積。原與球體之外面積等。小
 尖圓體底積。既為大尖圓體底積之四
 分之一。亦必為球體外面積之四分之
 一。而丁己圓面。固與小尖圓之底積等。
 則為球體外面積之四分之一無疑矣。
 至於庚壬圓面之徑。原比丁己圓面之
 徑大一倍。則其面積必大四倍。今丁己



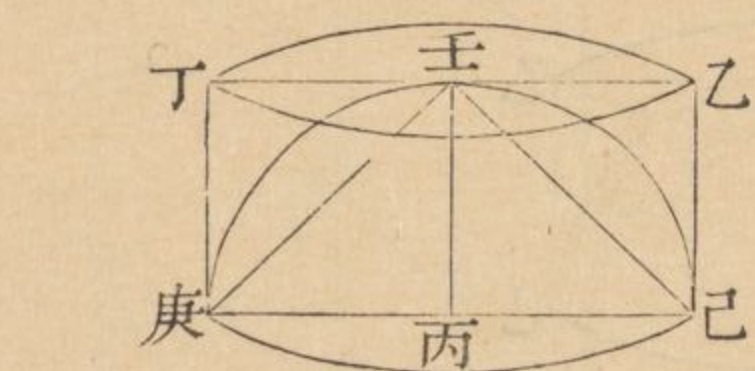
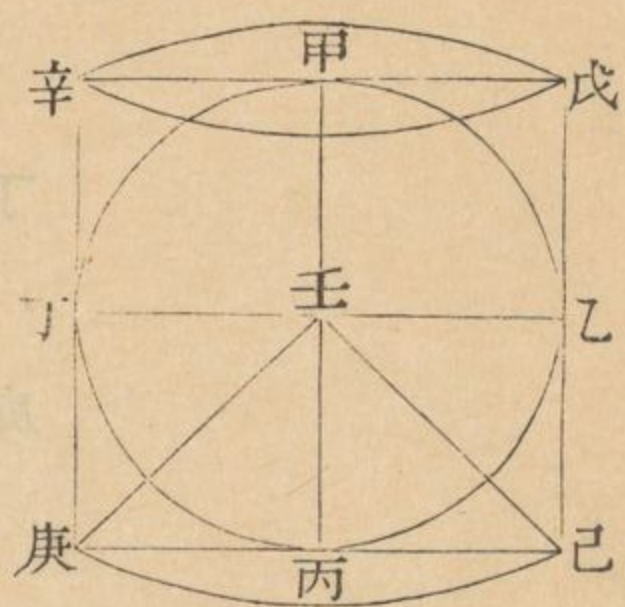
圓面既為甲丙球體外面積之四分之一。則庚壬圓面積比丁己圓面積大四倍者。安得不與球體外面積相等乎。

第九

凡球體全徑與上下面平行長圓體底徑高度相等。則球體為長圓體之三分之一也。如甲乙丙丁一球體。戊己庚辛一長圓體。此球體之乙丁全徑與長圓體之己庚底徑度等。而球體之甲丙全體之

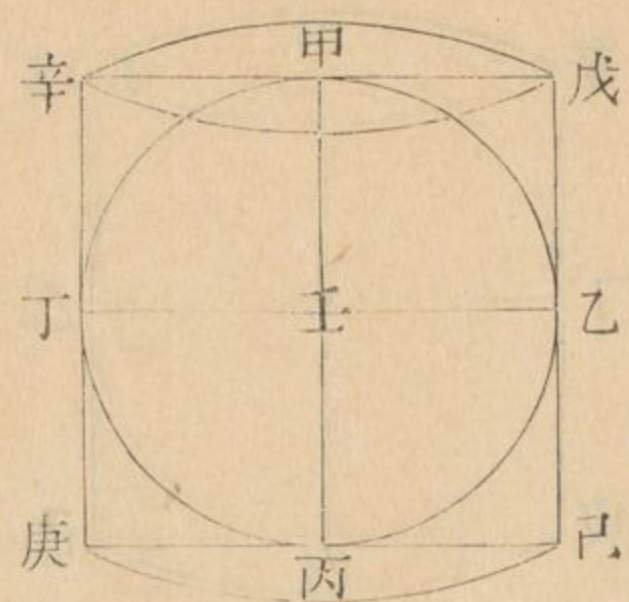


徑與長圓體之戊己高度等。則球體積為長圓體積之三分之一也。蓋長圓體與尖圓體同底同高。則其比例為三分之一。五卷第二十三節言平底尖體與上下面平行體同底同高。則尖體為平行體三分之一。尖圓體之底徑與球之全徑等。高與球之半徑等者。尖圓體積為球體積之四分之一。而尖圓體又為半球體之二分之一矣。說見前節。今於乙己庚丁半長圓體內作己壬庚半球體。又作一

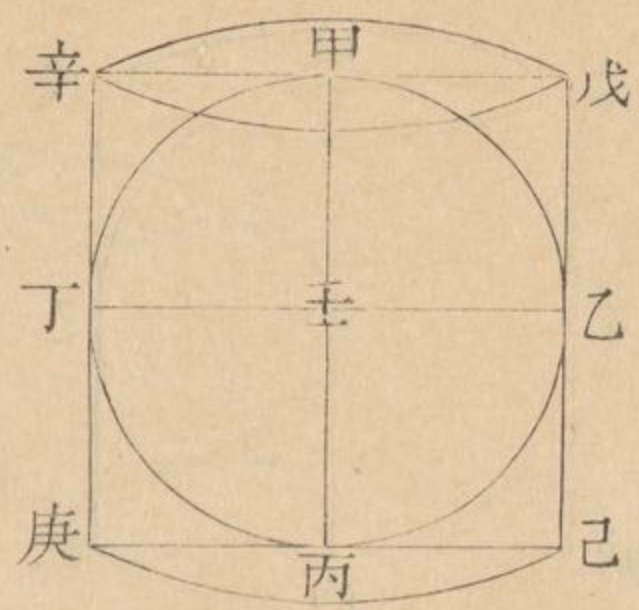


壬己庚尖圓體。則此尖圓體。為半球體之二分之一。尖圓體既為半球體之二分之一。又為半長圓體之三分之一。則半球體豈非長圓體之三分之二乎。夫全與全之比例。即若半與半之比例。今半長圓與半球之比例。為三分之二。則全長圓體與全球體之比例。亦為三分之二。可知矣。

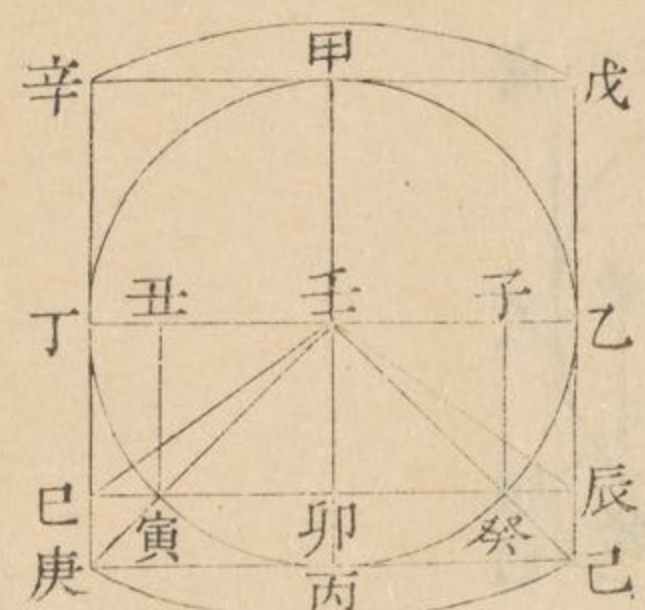
第十



凡球體全徑。與長圓體底徑高度相等者。其球體外面積。與長圓體周圍面積等也。如甲乙丙丁一球體。戊己庚辛一長圓體。其球體之乙丁全徑。與長圓體之己庚底徑等。而球體之甲丙全徑。與長圓體之戊己高度等。則此球體外面積。必與長圓體之周圍面積等也。大凡體之面積相等者。其體積之比例。同於其高之比例。而體積之比例。與高之比



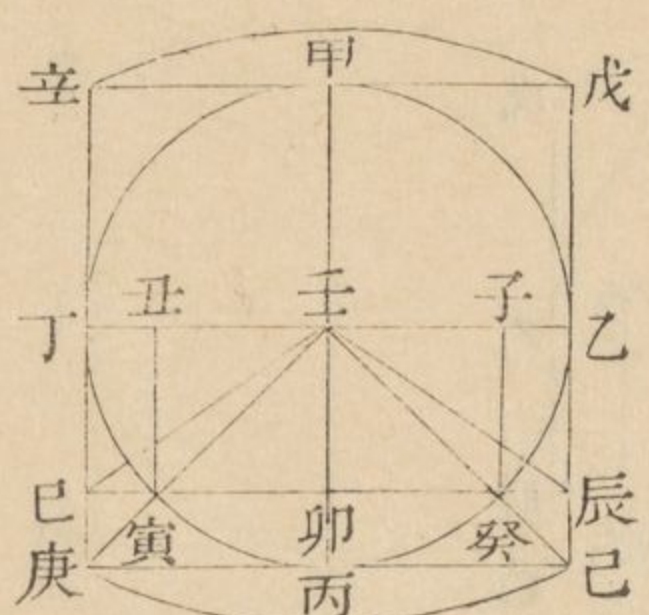
例同者。其面積必相等。試將球體乙壬半徑分爲六分。取其三分爲高。以長圓周圍面積爲底。所成之體積。必與長圓體積等。取半徑之二分爲高。以球體外面積爲底。所成之體積。必與球體之積等。蓋長圓體與球體之比例。原爲三與二之比例。此所成之二體。亦必爲三與二之比例。一體之高爲三分。一體之高爲二分。是積之比例。與高之比例同矣。



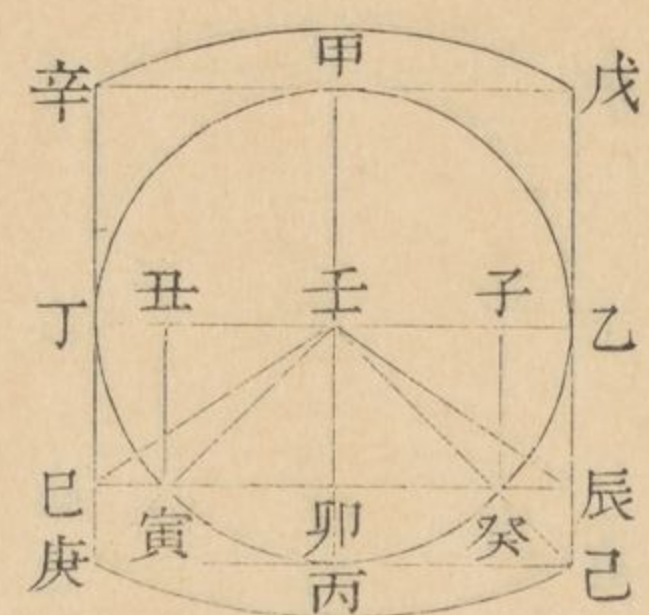
非因其面積相等之故乎。由是觀之。球體外面積。與長圓體周圍面積相等也。明矣。

第十一

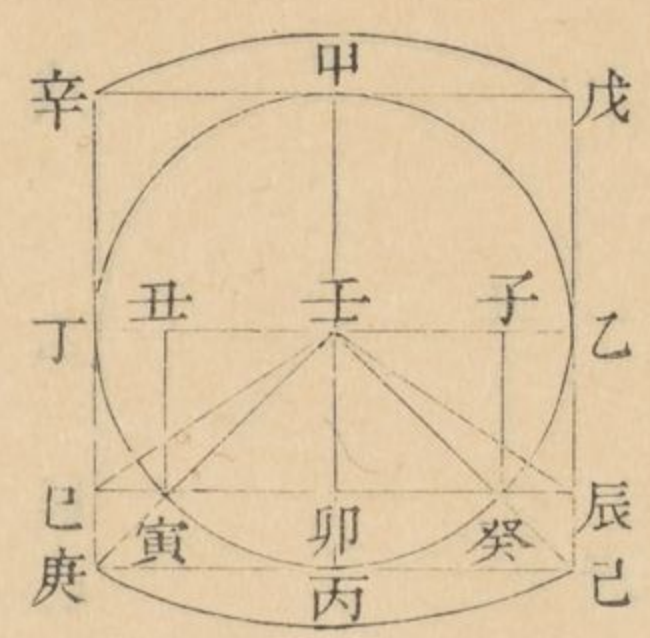
凡球體全徑。與上下面平行長圓體底徑高度相等者。其相當每段之外面積皆相等也。如甲乙丙丁一球體。戊己庚辛一長圓體。此球體之乙丁全徑。與長圓體之己庚底徑等。球體之甲丙全徑。



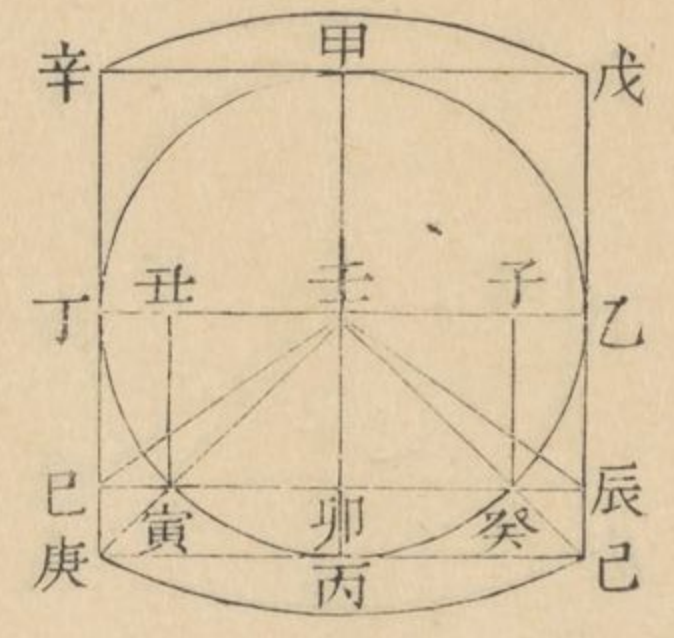
與長圓體之戊己高度等。則球體之癸丙寅一段凸面積。必與相當長圓體之辰己庚巳一段周圍外面積等也。夫乙辰巳丁一段長圓體內。分出子癸寅丑一小長圓體。餘癸子乙辰巳丁丑寅空心體。此空心體與子癸寅丑長圓體之積必等。何以知之。蓋壬癸為大圓面之半徑。而所截卯癸。又為小圓面之半徑。其壬卯與卯癸之度又等。故壬癸壬卯



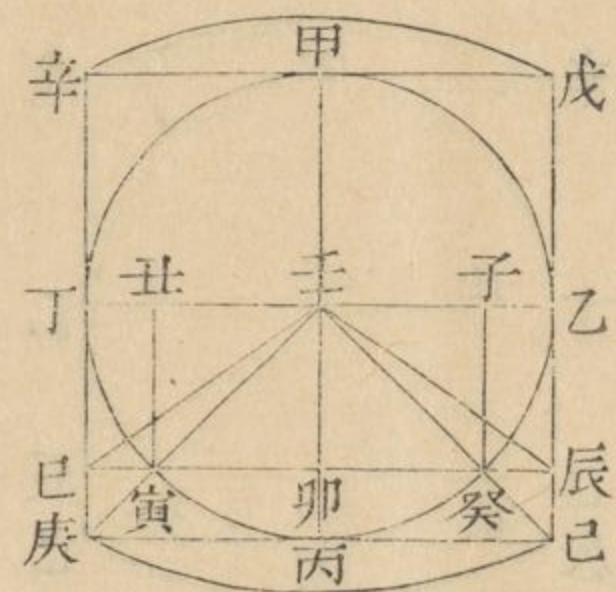
卯癸三線。成一壬癸卯直角三角形。而壬癸半徑所作圓面。必與壬卯卯癸兩線為半徑所作兩圓面等。見九卷第六節又壬癸與壬乙皆一圓之輻線。其度必等。而卯辰原與壬乙相等。故卯辰為半徑所作之圓面。即壬癸為半徑所作之圓面。於卯辰為半徑所作圓面內。減去卯癸為半徑所作圓面。即餘辰癸環面。與壬卯為半徑所作之圓面等。而壬卯與卯



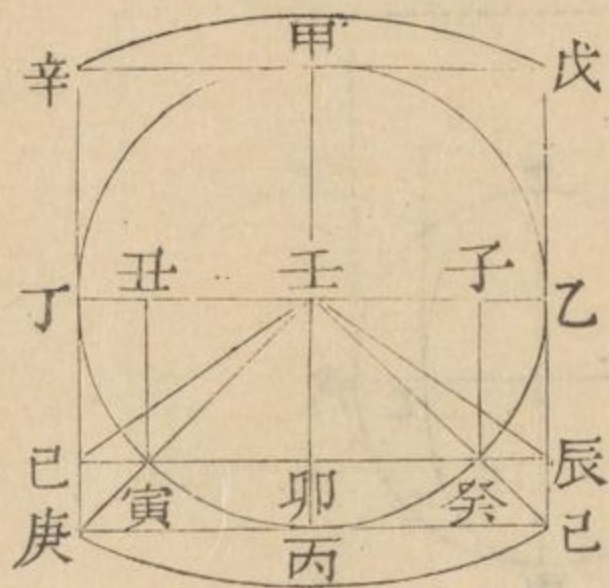
癸原相等。然則辰癸環面。既與壬卯半
 徑所作之圓面等。亦必與卯癸為半徑
 所作之圓面等矣。夫卯癸即小長圓底
 之半徑。而辰癸又為空心體底之環徑。
 其兩面積既等。則其兩體積必等無疑
 矣。又壬癸寅小尖圓體。原與癸乙辰巳
 丁寅曲凹體等。乙丙丁半球體。為半長
 圓體。三分之二。則癸乙
 已丙庚丁寅曲凹體。為長圓體三分之
 一。與壬己庚尖圓體相等。故壬癸寅一
 段尖圓體。與相當癸乙辰巳丁
 寅一段曲凹體。亦必相等也。而壬癸



寅小尖圓體。為子癸寅丑小長圓體三
 分之一。則癸乙辰巳丁寅曲凹體。亦為
 辰癸空心體之三分之一矣。於乙辰巳
 丁長圓體內。減去壬癸寅小尖圓體。又
 減去癸乙辰巳丁寅曲凹體。則餘乙癸
 壬寅丁一段空心球體。必與乙辰壬巳
 丁一段空心長圓體等。如以乙辰巳丁
 一段長圓體作
 六分。則子癸寅丑小長圓為三分。壬癸
 寅小尖圓體為一分。與小尖圓體相等
 之癸乙辰巳丁寅曲凹體亦為一分。今
 既減去小尖圓體及曲凹體。是於六分



內減去二分。而存一段空心球體為四分也。而壬辰巳大尖圓體亦為乙辰巳丁長圓體三分之一。於長圓體內減去大尖圓體。則餘乙辰壬巳丁空心長圓體為三分之四也。三分之四之比例。固同於六分之四之比例。則此一段空心長圓體。與一段空心球體。相等無疑。若將此兩空心體。從壬心至外面剖為千萬尖體。俱以乙壬以兩空心體。則空心球體所分之各尖體。與空心長圓體所分之各尖體。其積既等。其高又等。則其底不得_{同底}不等。者。其積既等。則同高。同積者。其底必等。此各尖體之底既

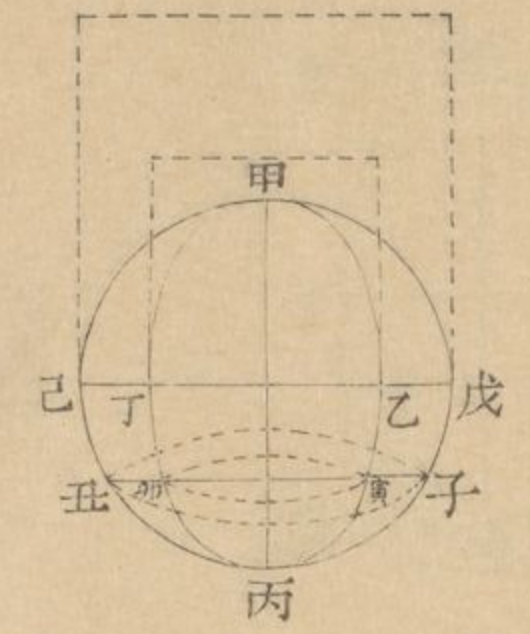
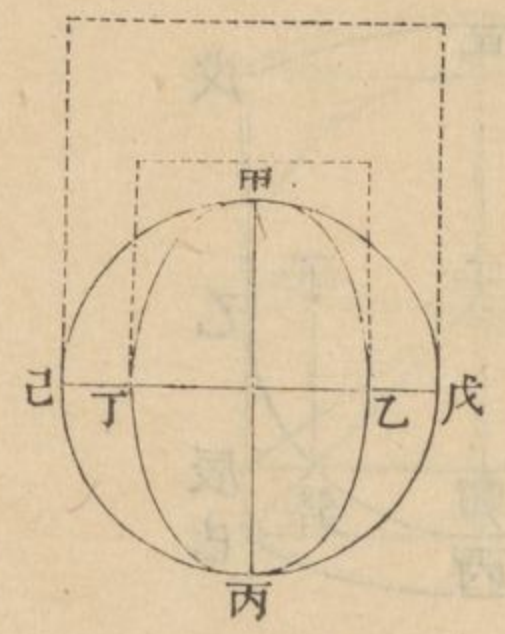


等。則兩空心體之外面積相等可知矣。
 千萬尖體之底。即兩空心體之面也。夫乙丙丁半球體外面積。原與乙巳庚丁半長圓體周圍外面積等。於半球體內。減去乙癸寅丁一段。餘癸丙寅一段球體。於半長圓體內。減去乙辰巳丁一段。餘辰巳庚巳一段長圓體。其減去之各段外面積既相等。則所餘之球體癸丙寅一段凸面。與長圓體辰巳庚巳一段周圍外面積相等。

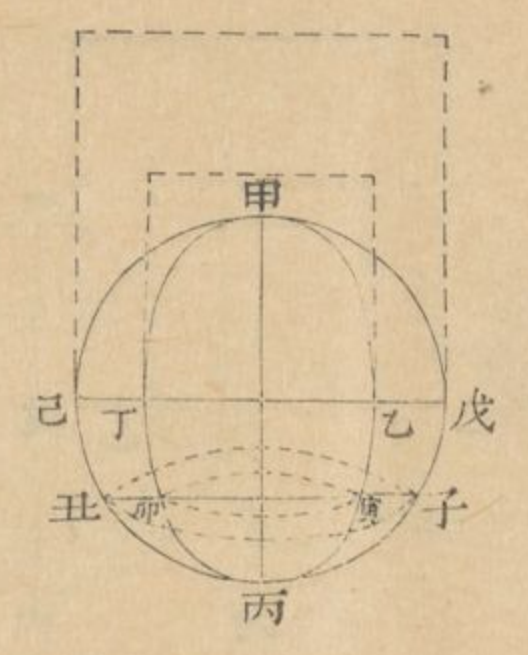
也明矣。

第十二

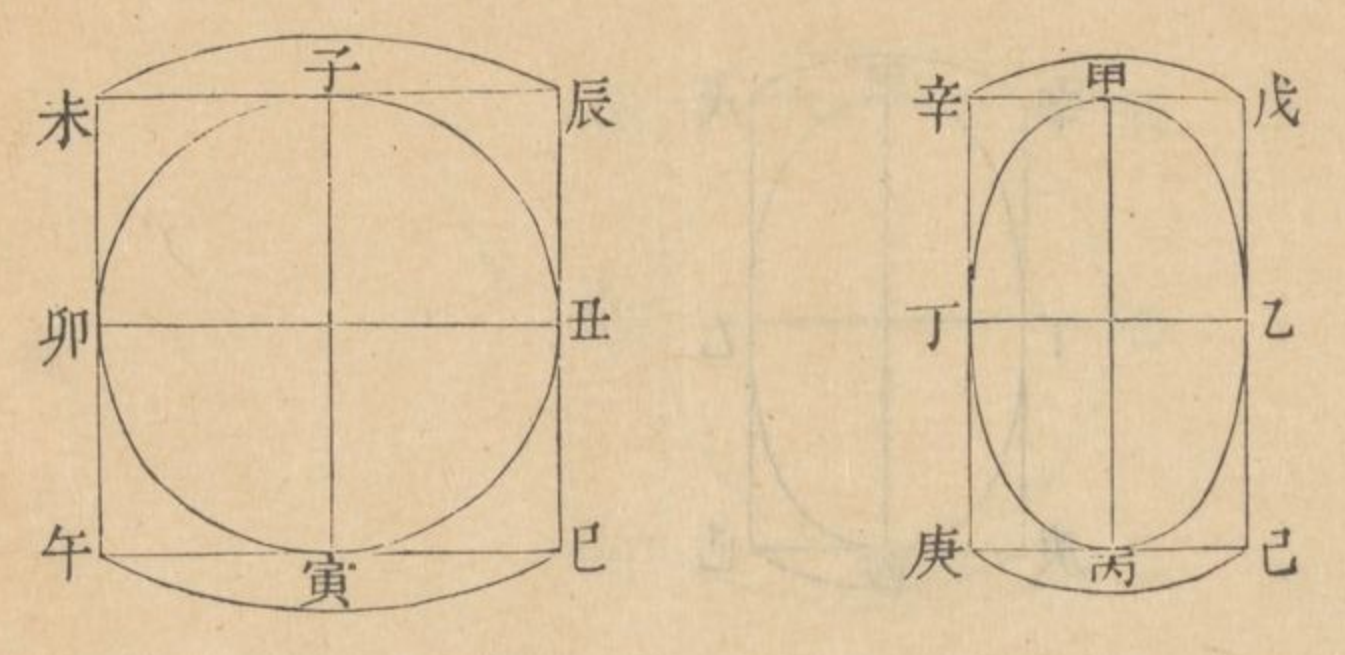
凡橢圓體大徑與圓球體徑相等者。其二體積之比例。即同於橢圓體小徑所作方面與圓球體徑所作方面之比例也。如甲乙丙丁橢圓體之甲丙大徑與甲戊丙己圓球徑等。則橢圓體積與球體積之比例。即同於橢圓乙丁小徑所作方面與球體戊己徑所作方面之比



例也。試將橢圓體與球體。任意依徑線平行分之。其所分之大小平圓面。如子丑乃球體大圓面之徑。寅卯乃橢圓體小圓面之徑。此大小兩平圓面之比例。同於其相當子丑寅卯二徑所作二方面之比例。見八卷第十一節。而子丑徑與寅卯徑之比例。又同於戊己徑與乙丁徑之比例。故此所分之大小圓面之比例。亦必同於戊己方面與乙丁方面之比例。



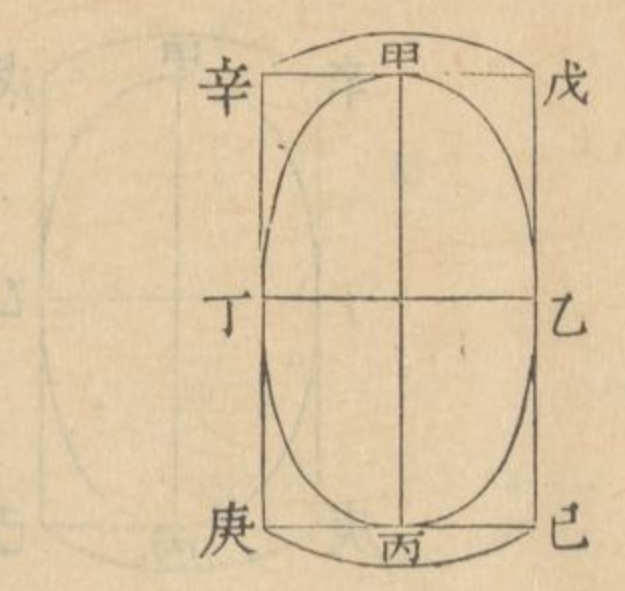
矣。若將此兩體與戊己徑平行。任意分爲幾何面。其相當大小兩面之比例。皆如戊己方面與乙丁方面之比例。此所分各面之比例。既皆同於乙丁與戊己所作方面之比例。則橢圓體與圓球體之比例。必同於乙丁所作方面與戊己丙卯橢圓體之一段。與子丙丑圓球體之一段。其比例亦必同於乙丁所作方



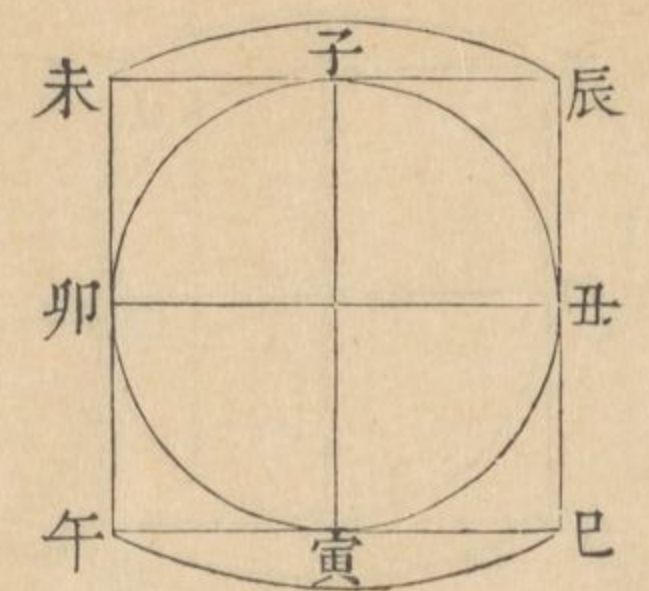
面。與戊己所作方面之比例矣。

第十三

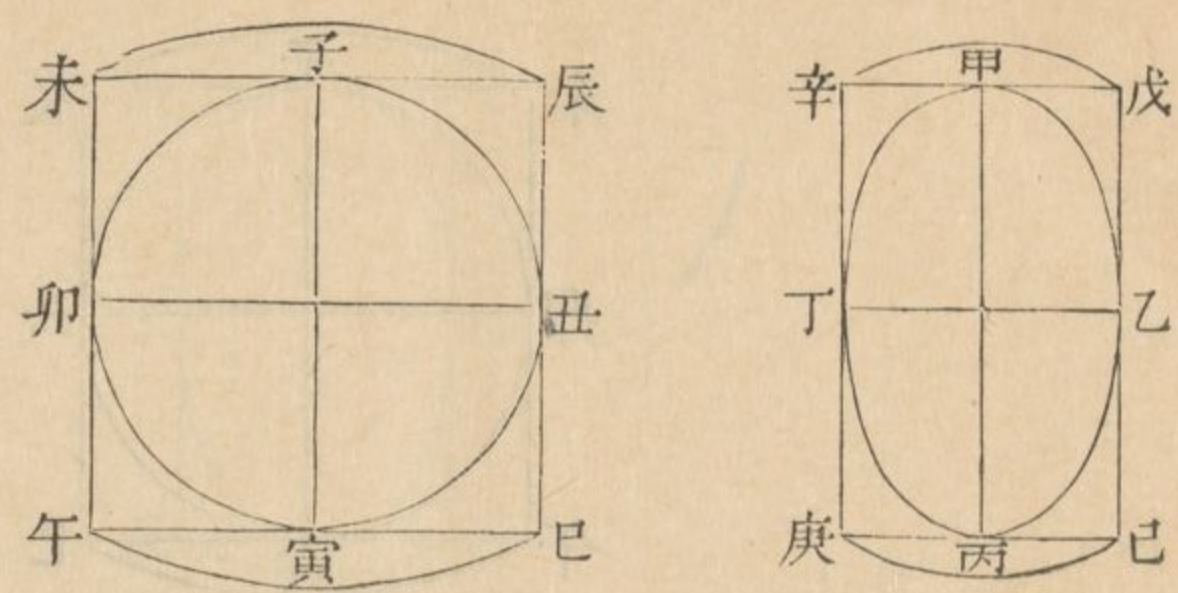
凡橢圓體大徑。與長圓體高度等。而橢圓體小徑。與長圓體底徑等。則橢圓體爲長圓體之三分之二。亦如圓球體與同徑同高長圓體之比例也。如甲乙丙丁一橢圓體。戊己庚辛一長圓體。其橢圓體之甲丙大徑。與長圓體之戊己高度等。而橢圓體之乙丁小徑。亦與長圓



體之已庚底徑等。則橢圓體為長圓體之三分之二。其比例即如子丑寅卯球體與辰巳午未長圓體之比例也。蓋戊已庚辛長圓體之戊已高度與辰巳午未長圓體之辰巳高度等。故兩長圓體之比例。即同於已庚底積與巳午底積之比。至於戊已庚辛長圓體之已庚底積。與橢圓體之乙丁小徑所作圓面積等。而辰巳午未長圓體之巳午底積。



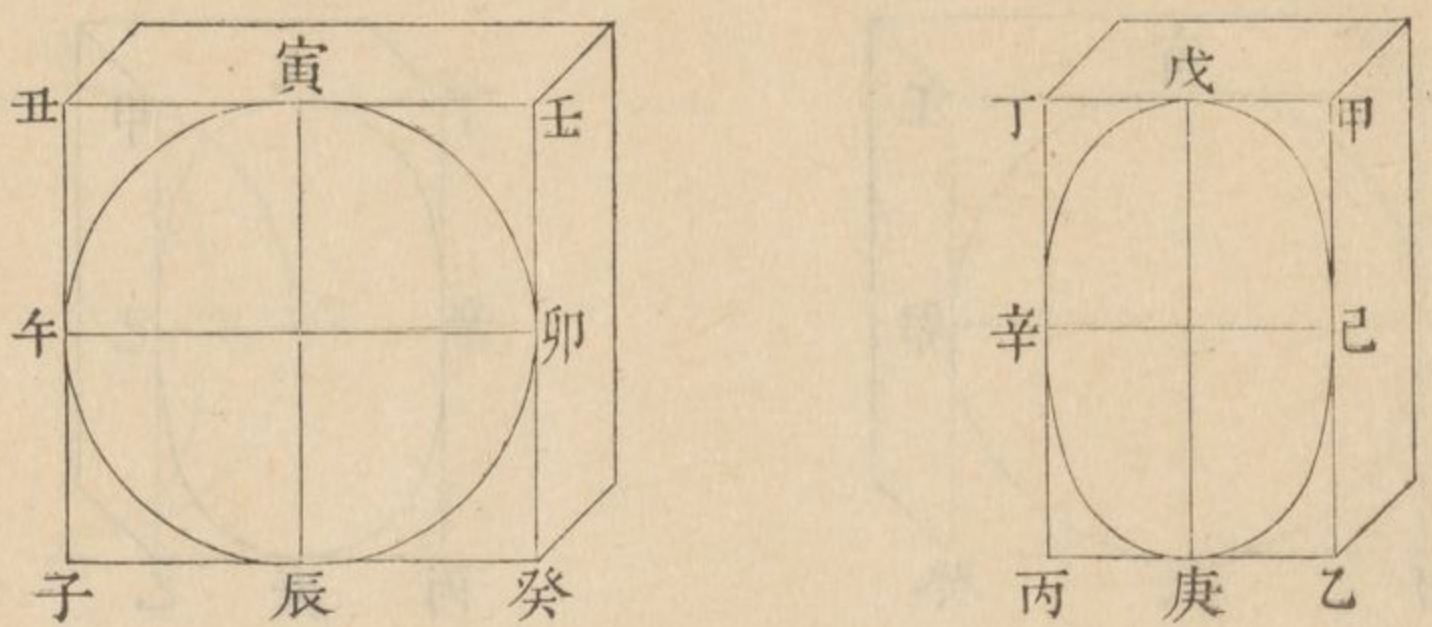
又與球體丑卯全徑所作圓面積等。則戊已庚辛長圓體積。與辰巳午未長圓體積之比例。即同於橢圓體之乙丁小徑所作圓面。與球體丑卯全徑所作圓面之比例矣。夫橢圓體與球體之比例。原同於橢圓體小徑所作圓面。與球體全徑所作圓面之比例。故橢圓體與球體之比例。亦同於橢圓體同徑同高之長圓體。與球體同徑同高之長圓體之



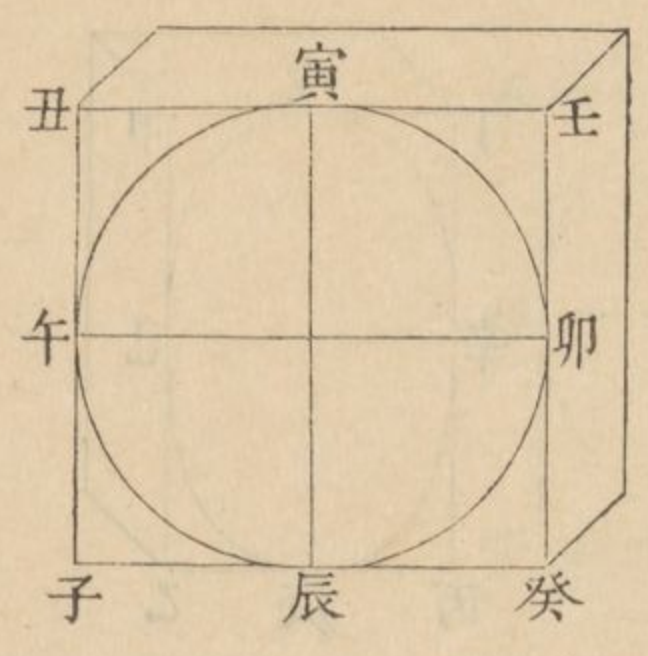
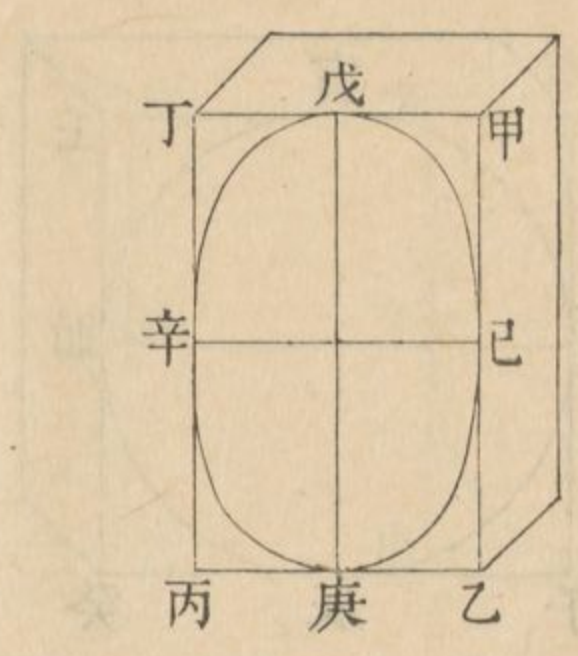
比例也。若轉比之。即戊己庚辛長圓體與甲乙丙丁橢圓體之比例。亦同於辰巳午未長圓體與子丑寅卯球體之比例矣。夫球體既為同徑同高長圓體之三分之二。則橢圓體亦必為同徑同高長圓體之三分之二可知矣。

第十四

凡函橢圓之長方體。與所函橢圓體之比例。同於函球之正方體。與所函球體



之比例也。如甲乙丙丁長方體。函一戊己庚辛橢圓體。其長方體之甲乙高度。與橢圓體之戊庚大徑等。長方體之乙丙底度。與橢圓體之己辛小徑等。則此甲乙丙丁長方體。與所函戊己庚辛橢圓體之比例。同於壬癸子丑正方體。與所函寅卯辰午球體之比例也。蓋甲乙丙丁長方體之甲乙高度。與壬癸子丑正方體之壬癸高度等。故長方體與正

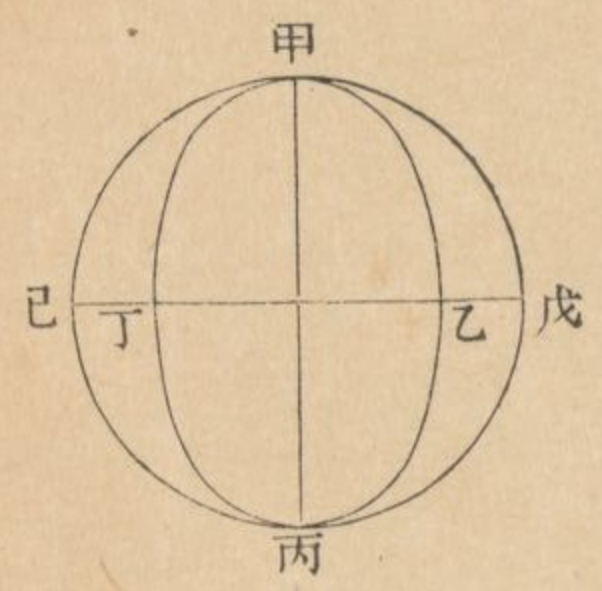


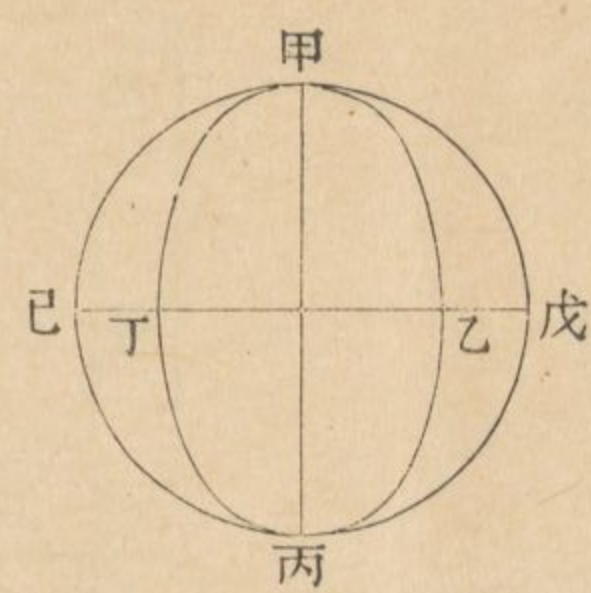
方體之比例。同於兩體底積之比例。今此長方體之底積。與所函橢圓體之己辛小徑所作方面等。而正方體之底積。與所函球體之卯午全徑所作方面等矣。然則此長方體與正方體之比例。不同於橢圓體小徑所作方面。與球體全徑所作方面之比例乎。夫橢圓體與球體之比例。原同於橢圓體小徑所作方面。與球體全徑所作方面之比例。則橢

圓體與球體之比例。同於函橢圓體之長方體。與函球體之正方體之比例可知矣。若轉比之。則長方體與所函橢圓體之比例。亦必同於正方體與所函球體之比例矣。

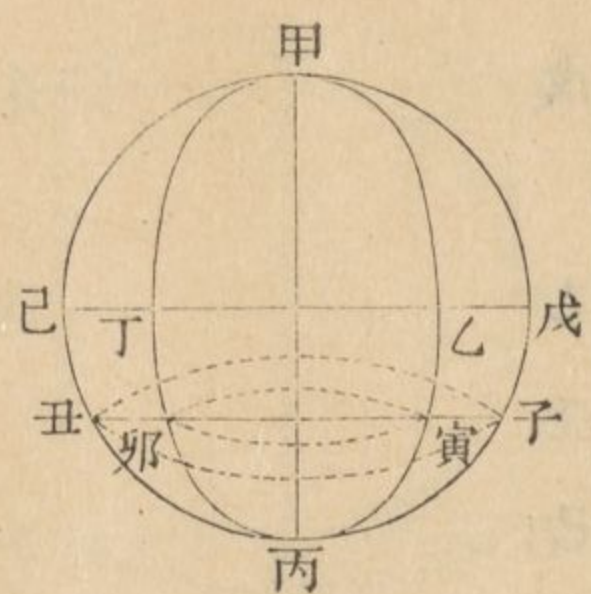
第十五

凡橢圓體大徑。與圓球體之徑等者。其橢圓體外面積。與球體外面積之比例。即同於橢圓體小徑。與球體全徑之比



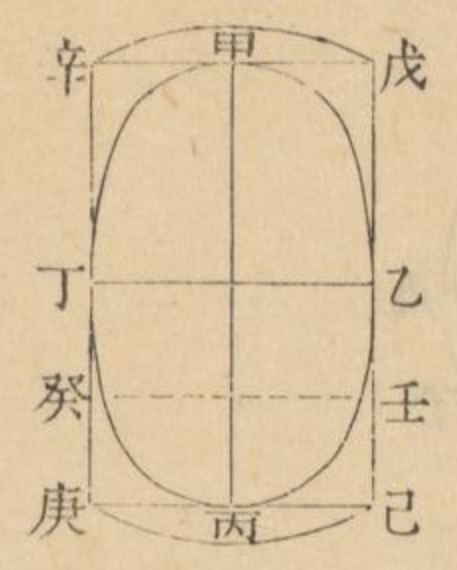


例。即任分一段。其相當一段外面積之比例。亦無不同也。如甲乙丙丁橢圓體之甲丙大徑。與甲戊丙己球體全徑等。則此橢圓體外面積。與球體外面積之比例。必同於橢圓體之乙丁小徑。與球體之戊己全徑之比例也。即任分寅卯一段。橢圓體外面積。與子丙丑一段。球體外面積之比例。亦仍同於乙丁小徑。與戊己全徑之比例也。蓋兩體所分

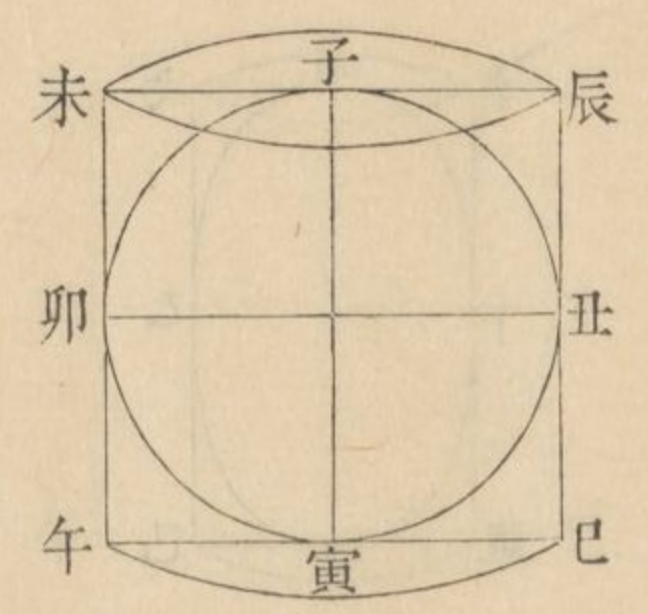


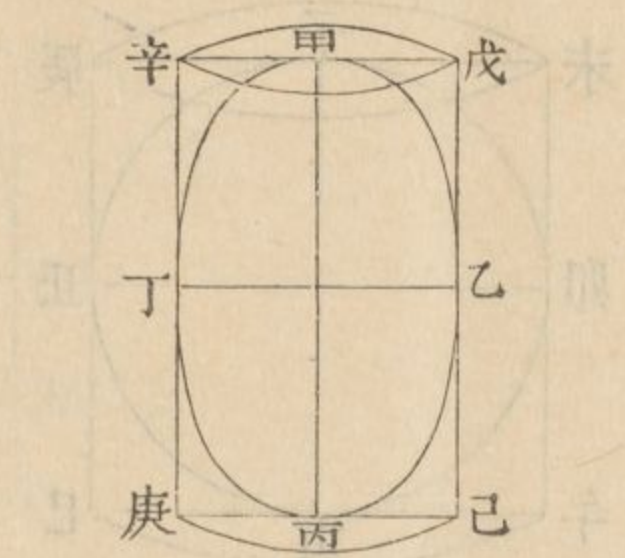
寅卯子丑平圓面。皆與乙丁戊己徑線平行。故寅卯圓界。與子丑圓界之比。同於寅卯圓徑。與子丑圓徑之比。而寅卯徑與子丑徑之比。又同於乙丁徑與戊己徑之比也。然此兩體依徑平分。可為無數平圓界。其相當各圓界之比例。既皆同於乙丁徑與戊己徑之比例。則全體外面積之比例。豈不同於乙丁徑與戊己徑之比例乎。至於所分之寅卯卯

一段橢圓體與子丙丑一段球體俱可
 分爲平圓以比之。則一段與一段之比
 例。無異於全體與全體之比例也明矣。
 第十六
 凡橢圓體大徑與長圓體高度等。而橢
 圓體小徑與長圓體底徑等。則橢圓體
 外面積與長圓體周圍外面積等。即任
 分一段。其相當一段之外面積亦無不
 等也。如甲乙丙丁一橢圓體。戊己庚辛

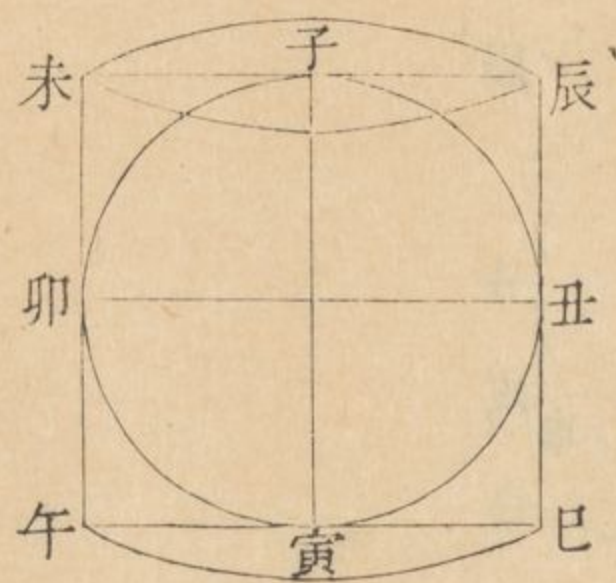


一長圓體。其橢圓體之甲丙大徑與長
 圓體之戊己高度等。而橢圓體之乙丁
 小徑與長圓體之己庚底徑等。則橢圓
 體之外面積與長圓體周圍之面積等。
 即任分壬丙癸一段橢圓體外面積亦
 與相當壬己庚癸一段長圓體之外面
 積等也。試依橢圓體甲丙大徑度。作子
 丑寅卯一球體。并作與球體同高同徑
 辰巳午未一長圓體。則此兩長圓體之

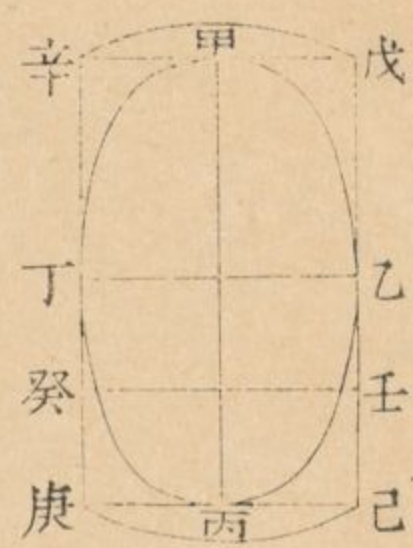




高度等。其二體周圍面積之比例。必同於二體底徑之比例。二長圓體底徑之比例。卽是橢圓體之乙丁小徑。與球體之丑卯全徑之比例也。橢圓體外面積與球體外面積之比例。原同於橢圓體乙丁徑。與球體丑卯徑之比例。則戊己庚辛長圓體外面積。與橢圓體外面積之比。亦同於辰巳午未長圓體外面積。與球體外面積之比例也。夫球體外



面積。原與辰巳午未長圓體外面積等。而橢圓體外面積。與戊己庚辛長圓體外面積之比例。既與球體外面積與辰巳午未長圓體外面積之比例相同。則此橢圓體外面積。與戊己庚辛長圓體外面積相等無疑矣。至於橢圓體所分一段。與球體所分一段之比例。與其全體之比例亦相同。今橢圓體外面全積。與戊己庚辛長圓體周圍外面全積之



比例。既同於球體外面全積。與辰巳午未長圓體周圍外面全積之比例。則所分橢圓體之壬丙癸一段外面積。與長圓體之壬己庚癸一段外面積之比例。亦必同於所分球體之申寅酉一段外面積。與長圓體之戌巳午亥一段外面積。既與長圓體之戌巳午亥一段外面積相等。則此橢圓體之壬丙癸一段

外面積。與長圓體之壬己庚癸一段外面積相等也明矣。

