Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

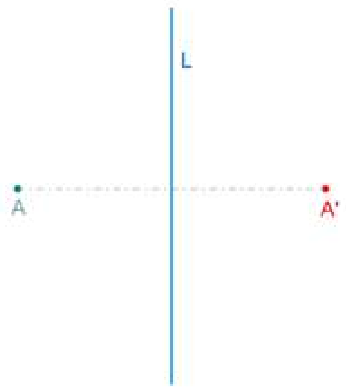
Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Vorlesung 21

Ein guter Schüler lernt auch
bei einem schlechten Lehrer ...

Eigentheorie

Unter einer Achsenspiegelung in der Ebene verhalten sich gewisse Vektoren besonders einfach. Die Vektoren auf der Spiegelungsachse werden auf sich selbst abgebildet, und die dazu senkrechten Vektoren werden auf ihr Negatives abgebildet. Beiden Vektoren ist gemeinsam, dass ihr Bild unter der linearen Abbildung in dem von diesem Vektor aufgespannten eindimensionalen Unterraum bleibt. In der Theorie der Eigenwerte und Eigenvektoren untersucht man, ob es zu einer linearen Abbildung Geraden (also eindimensionale Unterräume) gibt, die unter der Abbildung auf sich selbst abgebildet werden.



Eine *Achsenspiegelung* besitzt zwei Eigengeraden, die Spiegelungsachse zum Eigenwert 1 und die dazu senkrechte Gerade zum Eigenwert -1.

Definition 21.1. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

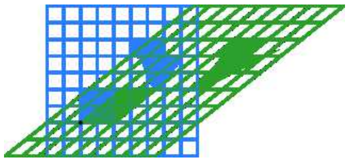
$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt ein Element $v \in V$, $v \neq 0$, ein *Eigenvektor* von φ (zum Eigenwert λ), wenn

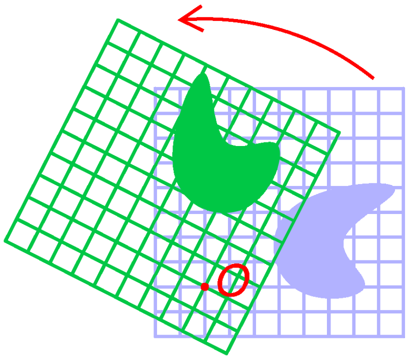
$$\varphi(v) = \lambda v$$

mit einem $\lambda \in K$ gilt.

Ein Eigenvektor ist also ein Vektor $v \neq 0$, der zu $\varphi(v)$ linear abhängig ist.



Eine *Scherung* hat eine Eigengerade zum Eigenwert 1 und keine weiteren Eigenwerte.



Bei einer Drehung der Ebene um 0 gibt es keine Eigenvektoren, außer bei einer Halbdrehung oder einer Volldrehung.

Definition 21.2. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt ein Element $\lambda \in K$ ein *Eigenwert* zu φ, wenn es einen von 0 verschiedenen Vektor $v \in V$ mit

$$\varphi(v) = \lambda v$$

gibt.

Die Menge aller Eigenwerte zu φ nennt man, vor allem im funktionalanalytischen Kontext, das *Spektrum* von φ.

Definition 21.3. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zu $\lambda \in K$ nennt man

$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi) := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$$

den *Eigenraum* von φ zum Wert λ.

Wir erlauben also beliebige Werte in der Definition der Eigenräume. Wir werden gleich zeigen, dass es sich dabei um Untervektorräume handelt. Einen eindimensionalen Eigenraum nennen wir auch *Eigengerade*. Für die meisten (nämlich alle bis auf endlich viele) λ ist der Eigenraum einfach der Nullraum.

Für Matrizen verwenden wir die entsprechenden Begriffe, die von der zugehörigen linearen Abbildung auf dem K^n nahegelegt werden. Ein n-Tupel $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ heißt Eigenvektor zur $n \times n$-Matrix M, wenn

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

gilt, und λ heißt dann Eigenwert der Matrix.

Bei einer Streckung mit dem Streckungsfaktor a ist jeder Vektor $v \neq 0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert a. Der Eigenraum zum Eigenwert a ist der Gesamtraum. Umgekehrt kann man einen Endomorphismus auf einen Eigenraum (vorne und hinten) einschränken, nämlich die Abbildung

$$\varphi|_{\mathrm{Eig}_\lambda(\varphi)} \colon \mathrm{Eig}_\lambda(\varphi) \longrightarrow \mathrm{Eig}_\lambda(\varphi)$$

betrachten. Diese Abbildung ist einfach die Streckung mit dem Faktor λ.

Beispiel 21.4. Wir betrachten die durch eine Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung

$$\varphi \colon K^n \longrightarrow K^n, \, e_i \longmapsto d_i e_i .$$

Die Diagonaleinträge d_i sind Eigenwerte von φ, und zwar ist e_i ein zugehöriger Eigenvektor. Die Eigenräume sind

$$\begin{aligned} & \mathrm{Eig}_d(\varphi) \\ = \ & \{ v \in K^n \mid v \text{ ist Linearkombination von solchen } e_i, \text{ für die } d = d_i \text{ ist} \} . \end{aligned}$$

Diese Räume sind genau dann von 0 verschieden, wenn d mit einem Diagonaleintrag übereinstimmt. Die Dimension der Eigenräume ist gegeben durch die Anzahl, wie oft der Wert d in der Diagonalen vorkommt. Die Summe dieser Dimensionen ergibt n.

Beispiel 21.5. Wir betrachten die durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y \\ x \end{pmatrix}.$$

Die Frage, ob diese Abbildung Eigenwerte besitzt, führt zur Frage, ob es $\lambda \in \mathbb{Q}$ derart gibt, dass die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

eine nichtriviale Lösung $(x, y) \neq (0, 0)$ besitzt. Bei gegebenem λ kann dies auf ein lineares Problem zurückgeführt werden, das mit dem Eliminationsalgorithmus einfach gelöst werden kann. Die Frage aber, ob es Eigenwerte überhaupt gibt, führt wegen des variablen „Eigenwertparameters" λ zu einem nichtlinearen Problem. Das obige Gleichungssystem bedeutet ausgeschrieben

$$5y = \lambda x \text{ und } x = \lambda y\,.$$

Bei $y = 0$ ist auch $x = 0$, der Nullvektor ist aber kein Eigenvektor. Sei also $y \neq 0$. Aus den beiden Gleichungen erhält man die Bedingung

$$5y\ =\ \lambda x\ =\ \lambda^2 y,$$

woraus

$$5 = \lambda^2$$

folgt. Da in $\mathbb{Q}$ die Zahl 5 keine Quadratwurzel besitzt, gibt es keine Lösung und das bedeutet, dass φ keine Eigenwerte und damit auch keine Eigenvektoren besitzt.

Wir fassen nun die Matrix M als eine reelle Matrix auf und untersuchen die zugehörige Abbildung

$$\psi\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y \\ x \end{pmatrix}.$$

Die gleichen Rechnungen führen auf die notwendige Lösungsbedingung $5 = \lambda^2$, die jetzt von den beiden reellen Zahlen

$$\lambda_1 = \sqrt{5} \text{ und } \lambda_2 = -\sqrt{5}$$

erfüllt wird. Für diese beiden Werte kann man unabhängig voneinander nach Eigenvektoren suchen. Wir betrachten zuerst den Fall $\lambda = \sqrt{5}$, was zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

führt. Dies schreibt man als

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

bzw. als lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & -5 \\ -1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses ist einfach lösbar, der Lösungsraum ist eindimensional und

$$v = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Basislösung.

Für $\lambda = -\sqrt{5}$ führen dieselben Umformungen zu einem weiteren linearen Gleichungssystem, für das der Vektor

$$w = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basislösung ist. Über $\mathbb{R}$ sind also $\sqrt{5}$ und $-\sqrt{5}$ Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume sind

$$\operatorname{Eig}_{\sqrt{5}}(\psi) = \left\{ s \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } \operatorname{Eig}_{-\sqrt{5}}(\psi) = \left\{ s \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

LEMMA 21.6. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum,*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Der Eigenraum*

$$\operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi)$$

ist ein Untervektorraum von V.

(2) *λ ist genau dann ein Eigenwert zu φ, wenn der Eigenraum $\operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi)$ nicht der Nullraum ist.*

(3) *Ein Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, ist genau dann ein Eigenvektor zu λ, wenn $v \in \operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi)$ ist.*

Beweis. (1). Seien $u, v \in \operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi)$ und sei $w = au + bv$. Dann ist

$$\varphi(w) = a\varphi(u) + b\varphi(v) = a\lambda u + b\lambda v = \lambda(au + bv) = \lambda w.$$

(2) und (3) folgen direkt aus den Definitionen. □

Kern und Fixraum

LEMMA 21.7. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann ist

$$\operatorname{kern} \varphi = \operatorname{Eig}_0(\varphi).$$

Insbesondere ist 0 *genau dann ein Eigenwert von* φ*, wenn* φ *nicht injektiv ist.*

Beweis. Siehe Aufgabe 21.9. □

Bemerkung 21.8. Neben dem Eigenraum zu $0 \in K$, der der Kern der linearen Abbildung ist, sind die Eigenwerte 1 und -1 besonders interessant. Der Eigenraum zu 1 besteht aus allen Vektoren, die auf sich selbst abgebildet werden. Auf diesem Unterraum wirkt also die Abbildung wie die Identität. Der Eigenraum zu -1 besteht aus allen Vektoren, die auf ihr Negatives abgebildet werden. Auf diesem Unterraum wirkt die Abbildung wie eine Punktspiegelung.

Definition 21.9. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Unter dem *Fixraum* zu φ versteht man den Eigenraum zum Eigenwert 1, also die Menge $\{v \in V \mid \varphi(v) = v\}$.

Eigenwerte bei Basiswechseln

Lemma 21.10. *Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus auf dem K*-Vektorraum* V *und es sei*

$$f \colon V \longrightarrow W$$

ein Isomorphismus von K*-Vektorräumen. Es sei*

$$\psi = f \circ \varphi \circ f^{-1}.$$

Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Ein Vektor* $v \in V$ *ist genau dann Eigenvektor zu* φ *zum Eigenwert* $a \in K$*, wenn* $f(v)$ *ein Eigenvektor zu* ψ *zum Eigenwert* a *ist.*
(2) φ *und* ψ *besitzen die gleichen Eigenwerte.*
(3) *Die Abbildung* f *induziert für jedes* $a \in K$ *einen Isomorphismus*

$$f \colon \operatorname{Eig}_a(\varphi) \longrightarrow \operatorname{Eig}_a(\psi).$$

Beweis. (1). Sei $v \in V$ ein Eigenvektor zu φ zum Eigenwert a. Sei

$$w := f(v).$$

Dann ist

$$\psi(w) = (f \circ \varphi \circ f^{-1})(f(v)) = (f \circ \varphi)(v) = f(\varphi(v)) = f(av) = af(v) = aw.$$

Die Umkehrung gilt genauso. (2) und (3) folgen direkt aus (1). □

Wenn ein Endomorphismus auf einem endlichdimensionalen Vektorraum vorliegt, der bezüglich einer Basis durch die Matrix M beschrieben wird, so entsprechen sich Eigenwerte und Eigenvektoren. Das Eigenvektortupel der Matrix ist das Koordinatentupel des entsprechenden Eigenvektors bezüglich der Basis. Die Eigenwerte hängen nicht von der gewählten Basis ab, die Eigentupel schon.

KOROLLAR 21.11. *Es sei $\varphi\colon V \to V$ ein Endomorphismus auf dem endlichdimensionalen K-Vektorraum V und es sei $\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_n$ eine Basis von V. Es sei $M = M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{u}}$ die beschreibende Matrix zu φ bezüglich dieser Basis. Dann ist $v \in V$ genau dann ein Eigenvektor zu φ zum Eigenwert a, wenn das Koordinatentupel zu v bezüglich der Basis ein Eigenvektor zu M zum Eigenwert a ist. Insbesondere besitzen φ und M die gleichen Eigenwerte.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 21.10 (1) unter Verwendung des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & V \\ \psi_{\mathfrak{u}}^{-1} \downarrow & & \downarrow \psi_{\mathfrak{u}}^{-1} \\ K^n & \xrightarrow{M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{u}}(\varphi)} & K^n \end{array}$$

□

KOROLLAR 21.12. *Es sei M eine $n \times n$-Matrix über einem Körper K und es sei B eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Es sei $a \in K$. Dann ist ein n-Tupel $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ genau dann ein Eigenvektor von M zum Eigenwert a, wenn*

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zur Matrix BMB^{-1} zum Eigenwert a ist. Insbesondere besitzen M und BMB^{-1} die gleichen Eigenwerte.

Beweis. Dies folgt aus Lemma 21.10. □

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Simetria axial.png , Autor = Benutzer Rovnet auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 1
Quelle = Rotation illustration2.svg , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 2