始

大正九年版

新撰
解析幾何學教科書
(平面之部)

東京帝國大學理學部教授
理學博士　中川銓吉
第一高等學校教授
理學博士　竹內端三
共著

東京　冨山房　神田

緒　言

本書は高等學校程度の諸學校に於ける解析幾何學教科用として編纂せるものなり。抑斯學の初步なる部分は古來既に完成せられ今俄かに新機軸を出すの餘地なきが如しと雖,本書は記述の順序並びに證明の方法等に於て必しも古典の舊態を墨守せず,聊か清新の氣を混へ得たりと信ず。これ著者等が過去に於ける授業の經驗と最近に於ける斯學の趨勢とに鑑みたる結果にして,なほ今後本書を實地に使用せらるゝ諸君の叱正を竢つて更に完璧たるに近からしめん事を切望す。

本書の目的は上述の如く初學用たるにあるを以て,記述は概して簡易にして,又理論のやゝ高尚に亘るものは成るべく之を載せざることゝしたり。

讀者もし本書に對する恰好の補遺を求

めんと欲せば須らく

中川銓吉著：　平面解析幾何學

を參照せらるべし。

大正九年端午　　　　著者識す

目次

第一章

一直線上ニ於ケル點ノ座標

第二章

平面上ニ於ケル點ノ座標

第三章
座標ノ變換

第四章
直線

第五章
圓

第六章
二次曲線ノ分類

第七章

楕圓及ビ双曲線

第八章

拋物線

第九章

二次曲線一般論

—(目 次 終)—

第一章

一直線上ニ於ケル點ノ座標

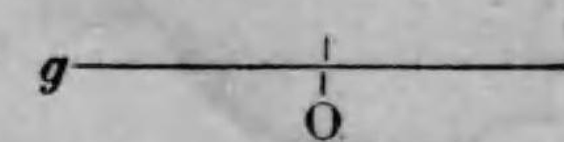
1. 線分, 半直線.

解析幾何學ニ於テ單ニ直線ト稱スルモノハ兩方ニ限リナク延ビタルモノトス. 特ニ其上ノ二點ニヨリテ限ラレタル直線ノ一部分ヲ指ス時ニハ之ヲ線分ト云ヒ, 又直線ヲ其上ノ一點ニヨリテ二ツノ部分ニ分ツ時ハソノ各ヲ半直線ト云フ.

2. 一直線上ニ於ケル點ノ位置.

一ツノ直線 g ノ上ニ任意ノ一點 O ヲ取ラバ之ニ對シテソノ直線上ノ任意ノ點ノ位置ヲ云ヒ表ハスコトヲ得ベシ. 即チソノ點ガ O ヨリ g 上ニ於テ何レノ方向ニ幾許ノ距離ニアルカヲ指定スレバ可ナリ.

第一圖



此方向ヲ示スニハ代數學ニ於テ用フル正及ビ負ノ符號ヲ以テシ, O ヨリ見テ同一ノ方向ニアル諸點ニ對シテハ同ジ符號ヲ付シ, 反對ノ方向ニアルモノニハ異ナル符號ヲ付ス. 何レノ方向ヲ正トシ, 何レヲ負トスルカハ最

初任意ニ規約シテ可ナレドモ,一度之ヲ定メタル以上ハ同一問題ノ研究ヲ續クル限リ濫リニ之ヲ變ズ可ラズ.

距離ヲ測ルニハ長サノ單位ヲ定ムルヲ要ス. 此單位ノ取リ方モ亦任意ニシテ,即チ問題ノ性質ニ應ジ適當ナル長サヲ選ビテ之ヲ單位トスルコトニ一定シ置ケバ可ナリ. 故ニ通常ハ一定セル單位ニヨリテ測リタル數値ノミヲ以テ距離ヲ表ハスコトヽシ,單位ノ稱呼ハ之ヲ略ス.

今若シOヨリ右方ニアル點ノOヨリノ距離ニハ正號ヲ付シ,左方ニアル點ノOヨリノ距離ニハ負號ヲ付スルモノトセバ,+3ナル點ハOノ右方單位ノ長サノ三倍ニ當ル距離ニアル點ヲ示シ,−10.5ナル點ハO點ノ左方Oヨリ10.5倍單位距離ノ處ニアル點ヲ表ハス. 又O點自身ハ零ナル數ニ相當スル點ナリ. 故ニモシaヲ以テ任意ノ實數トシ其中ニ正或ハ負ノ符號ヲ含メルモノトスルトキハ,aナル値ヲ知リテ直チニg直線上ノ一點ノ位置ヲ決定シ得ベク,又gノ上ニアル任意ノ一點ヲ示スベキOヨリノ距離ハ必ズ正或ハ負ノ實數ナリ. 且ツ一點ニ對シテハ唯一ツノ實數ガ之ニ相應シ,又一ツノ實數ニ對シテハ唯一ツノ點ガ之ニ相應ス.

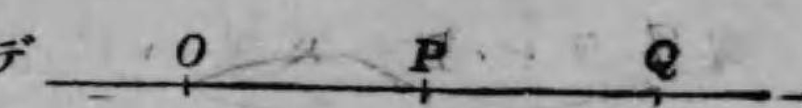
コノ定點Oヲ **原點** ト云ヒ,Oニ關シテ一點Pノ位置ヲ決定スル處ノ實數aヲP點ノ **座標** ト云フ. P點ノ

座標ガaナルコトヲ示スニハP(a)ナル記號ヲ用フ.

3. 二點間ノ距離.

一直線上ニ二點P(a)及ビQ(b)ヲ取リ, 線分PQノPヨリQマデ測リタル距離ヲPQトシ,同ジ線分ヲQヨリPマデ測リタル距離ヲQPヲ以テ示ス,然ルトキハPQトQPトハ其長サ相等シケレドモ之ヲ測レル方向異ナレリ. 之ヲ區別スル爲メニ其距離ニ正又ハ負ノ符號ヲ附スルコトヽス. 即チPヨリ見タルQノ方向ガ,原點Oヨリ見タル正ノ方向ト同一ナル時ハPQヲ正トシ,然ラザレバ之ヲ負トスベシ. 此規約ノ結果トシテ

第二圖甲



$$QP=-PQ$$

ニシテ,又第二圖ヨリ明カナル如ク

$$PQ=OQ-OP=b-a$$

ナリ. 即チ **PQノ距離ハQノ座標ヨリPノ座標ヲ減ジタルモノナリ**. 此結果ハPトQトノ位置如何ニ關セズ常ニ眞ナリ. 例ヘバ第二圖乙ノ如キ場合ニ於テハ

$$PQ=PO+OQ$$
$$=-OP+OQ$$
$$=-a+b \quad =b-a$$

第二圖乙

ニシテ矢張上ト同一ノ結果ニ達スベシ. O,P,Q三點ノア

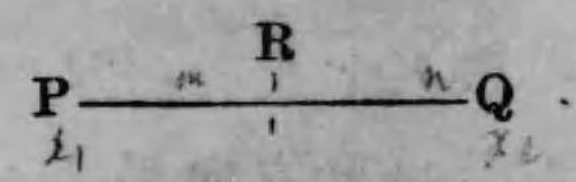
ラユル順列ヲ考フレバ此ニ擧タル外ニナホ四種ノ場合アリ. 其一々ニツイテ常ニ $PQ=b-a$ ナルコトハ讀者自ラ驗定セヨ.

4. 二點間ヲ與ヘラレタル比ニ分ツ點.

與ヘラレタル二點ヲ $P(x_1)$ 及ビ $Q(x_2)$ トシ,此ハ相異レル點ナリトス. 今直線 PQ 上ニ於テ

$$\frac{PR}{RQ}=\frac{m}{n}$$

第三圖



ナル如キ一點 R ヲ定メントス. コヽニ m 及ビ n ハ零ニアラザル實數トス. モシ m,n ガ同符號ナラバ PR ト RQ トハ同ジ方向ヲ有ス可キヲ以テ R ハ線分 PQ ヲ内分スルコトヽナルベク,之ニ反シテ m,n ガ相異レル符號ヲ有スルトキハ R ハ線分 PQ ヲ外分スルコトヽナルベシ.

何レニスルモ求ムル點 R ノ座標ヲ x トスルトキハ前節ニ述ベタル處ニヨリ

$$\frac{PR}{RQ}=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{m}{n}. \tag{1}$$

故ニ

$$n(x-x_1)=m(x_2-x),$$

從テ, $m+n=0$ ナラザル限リ,

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n} \tag{2}$$

ヲ得. 此ニヨリテ R ノ位置ハ唯一ツニ定ル.

上ニ m 及ビ n ハ何レモ零ニアラズト考ヘタレドモ,今 $m\neq 0$ トシテ n

ヲ漸次ニ限リナク零ニ近ヅカシメバ, (2) ニ於テ $m+n\neq 0$ ナル條件ハナホ保タレツヽ結局 x ハ x_2 ナル値ニ限リナク近ヅクベシ. 依テ $m\neq 0$, $n=0$ ナル場合ニハ R 點ハ Q 點ニ合スルモノト考フルコトニ規約ス. 同様ニ $m=0$, $n\neq 0$ ナルトキニハ R ハ P ニ合スルモノトス. モシ $m=0$, $n=0$ ナルトキニハ R ハ全ク不定ナリ.

次ニ m 及ビ n ハ何レモ零ニアラズシテ $m+n=0$ ナル場合ヲ考ヘンニ,先ヅ最初 $m+n\neq 0$ トシテ (2) ヲ求メタリトシ,此ニ於テ n ヲ漸次ニ限リナク $-m$ ニ近ヅカシムルトキハ,右邊ノ分母ハ限リナク零ニ近ヅクニ關ラズ,假定ニヨリ $x_1\neq x_2$ ナルニヨリ分子ハ限リナク零ニ近ヅクコトナシ. 依テ結局 x ノ値ハ正又ハ負ニシテソノ絶對値ハ限リナク增大スベク,之ニ相應スル點 R ハ直線 PQ 上ノ正又ハ負ノ方向ニ於テ限リナク遠方ニ去ルベシ. 此狀態ヲ云ヒ表ハスタメニ x ノ値ハ正又ハ負ノ無限大トナルト云ヒ,之ヲ記號ニテ $x=+\infty$ 又ハ $x=-\infty$ ト書キ,之ニ對スル點 R ハ此直線上無究遠ニアリト稱ス.

今

$$\frac{m}{n}=\lambda$$

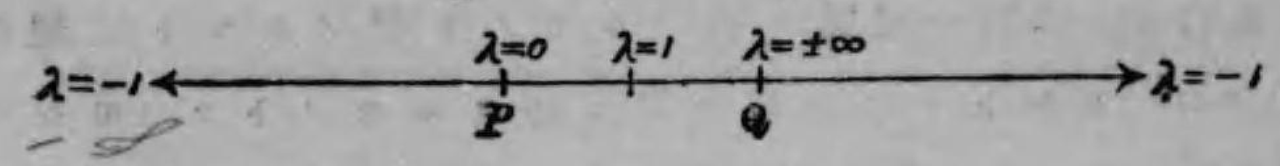
ト置キ, (2) ヲ書キ直ストキハ

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \tag{3}$$

ヲ得. 即チ一般ニ R 點ノ位置ハ λ ナル一ツノ數ニヨリテ定マルモノニシテ, λ ガ零ヨリ $+\infty$ ニ增スニ從テ, R ハ P ヨリ發シテ線分 PQ 上ヲ動キ限リナク Q ニ近ヅキ,其途中 $\lambda=1$ ナル時ニ丁度 P ト Q トノ中點ニアリ. 又 λ ガ零ヨリ -1 マデ減ズル時ハ R ハ P ヨリ發シテ PQ ト反對ノ方向ニ動キ $\lambda=-1$ ナルトキ無究遠ニ至ル. 更ニ λ ガ -1 ヨリ $-\infty$ ニ減ズル時ハ R ハ Q ニ對シテ P ト反對

ノ側ノ無究遠ヨリ來リテQニ向テ限リナク接近ス.

第四圖



問題.

1. 一直線上ニ任意ノ三點 A,B,C アルトキハ

$$AB+BC+CA=0$$

ナルコトヲ證明セヨ.

2. 四點 A,B,C,D ガ一直線上ニアルトキハ次ノ關係アルコトヲ證明セヨ.

$$AB.CD+AC.DB+AD.BC=0.$$

3. 四點 A,B,C,D ガ一直線上ニアリテ

$$\frac{2}{AC}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}$$

ナルトキハ

$$\frac{AB}{BC}=-\frac{AD}{DC}$$

ナルコトヲ證セヨ.(コノ場合ニ一對ノ點 A,C ト他ノ一對ノ點 B,D トハ各ガ他ヲ調和ニ分ツト云フ)

4. 前問ニ於テ A ト C トノ中點ヲ M トセバ

$$MB.MD=MA^2$$

ナルコトヲ證明セヨ.

5. 二點 P,Q ノ座標ヲ夫々 a,b トシ,線分 PQ ノ中點及ビ三等分點ノ座標ヲ求メヨ.

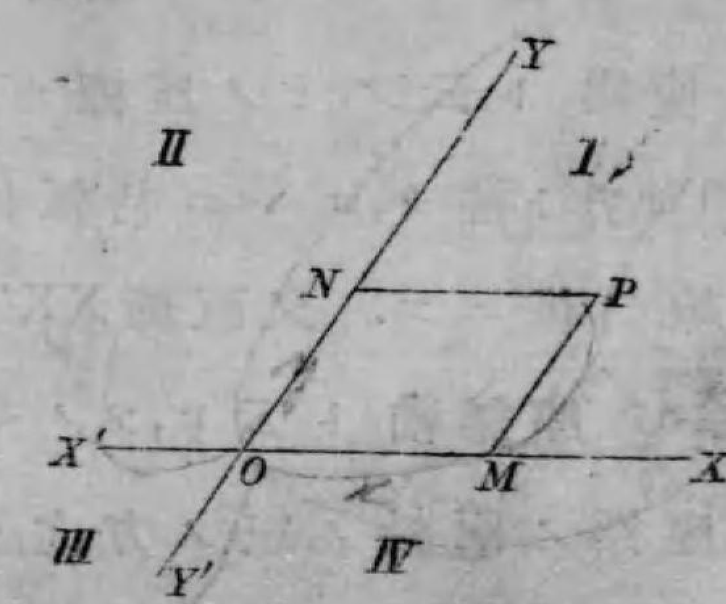
第二章

平面上ニ於ケル點ノ座標

5. 平行座標. ||ell coordinate

一ツノ平面上ニ於テ任意ノ相交ハル直線 XX′, YY′ ヲ引キ,ソノ交點ヲ O トス. 然ル時ハ此平面上ノ任意ノ一點 P ノ位置ヲ決定センニハ,先ヅ P ヨリ此二直線ニ平行ナル直線 PM,PN ヲ引キ,ソノ XX′,YY′ ト交ル點 M,N ノ位置ヲ決定セバ可ナリ. 何トナレバモシ M,N 二點ヲ知ラバ,コレラヲ通シテ夫々 YY′,XX′ ニ平行線ヲ引キソノ交點トシテ P 點ヲ唯一ニ決定シ得可ケレバナリ.

第五圖



扨一直線上ニ於ケル點ノ位置ヲ決定スルコトハ既ニ前章ニ述ベタル如クナルガ,通常XX′, YY′ 上ニ於ケル M,N ノ位置ヲ云ヒ表ハスニハ便宜上此二直線ノ交點 O ヲ共通ノ原點トシ,且兩直線上ニ於テ同一ノ長サノ單位ヲ用

フルモノトス.

今考フル處ノ平面ヲ第五圖ノ紙面ナリト假定セバ,通常XX′ハ右ヨリ左ノ方向ニ引キ, YY′ハ上ヨリ下ニ向テ引ク,前者ニアリテハX′Xノ向キヲ正トシ,後者ニアリテハY′Yノ向キヲ正ト定ム. 而シテ此符號ノ定メ方ハXX′, YY′ノミナラズ此等ニ平行ナル他ノ直線上ニ於テモ通用スルモノトス. 例ヘバMPハ正ニシテPMハ負ナリ.

直線XX′上ニ於ケルMノ座標ヲxトシ,YY′上ニ於ケルNノ座標ヲyトスルトキハ, 此平面上ニ於ケルPノ位置ハコノxトyトニヨリテ全ク決定セラル. xヲP點ノ **横線** トイヒ,yヲ **縱線** ト云フ. 兩者ヲ總稱シテP點ノ **座標** ト云フ. Pノ座標ガx及ビyナルコトヲ表ハスニハ$P(x,y)$ト書ク,コヽニ括弧內ニ於テハ常ニ横線ヲ先ニシ縱線ヲ後ニス. 又直線XX′ヲ **x軸**, YY′ヲ **y軸** ト稱シ,總稱シテ **座標軸** ト云ヒ,ソノ交點Oヲ座標ノ **原點** ト云フ.

座標ノ兩軸ノ正ノ方向ガ挾ム角即チ∠XOYヲ指シテ單ニ座標軸ノ間ノ角ト稱シ,通常ωナル文字ヲ以テ之ヲ表ハス. ωガ直角ナル時ハ其軸ヲ **直交軸** ト云ヒ,然ラザルトキハ **斜交軸** ト云フ. 而シテ直交軸ヲ用ヒタル時ハ一點ノ座標ヲ特ニ **直角座標** ト稱スルコトアリ.

XX′, YY′ハ平面ヲ四ツノ部分ニ分ツ. 今角XOY, YOX′,

X′OY′, Y′OXノ內部ヲ夫々I, II, III, IVト名付クルトキハ,點Pガ此等ノ何レカノ中ニアルトキ,ソノ横線及ビ縱線ノ取ル符號ハ次ノ如シ.

		I	II	III	IV
横線	x	+	−	−	+
縱線	y	+	+	−	−

斯ノ如ク二ツノ固定セル軸ヲ考ヘ之ニ平行ナル直線ニヨリテ一點ノ位置ヲ定ムル方法ヲ **平行座標** ノ方法ト云フ. 或ハ考案者でかるとノ名ヲ冠シテ **かるてしあん座標** トモ呼ブコトアリ.

6. 二點間ノ距離.

二ツノ與ヘラレタル點ヲ$P(x_1, y_1)$及ビ$Q(x_2, y_2)$トス. P及ビQヨリy軸ニ平行ニ直線PM及ビQNヲ引キ,x軸ト夫々M及ビNニ於テ交ラシメバ

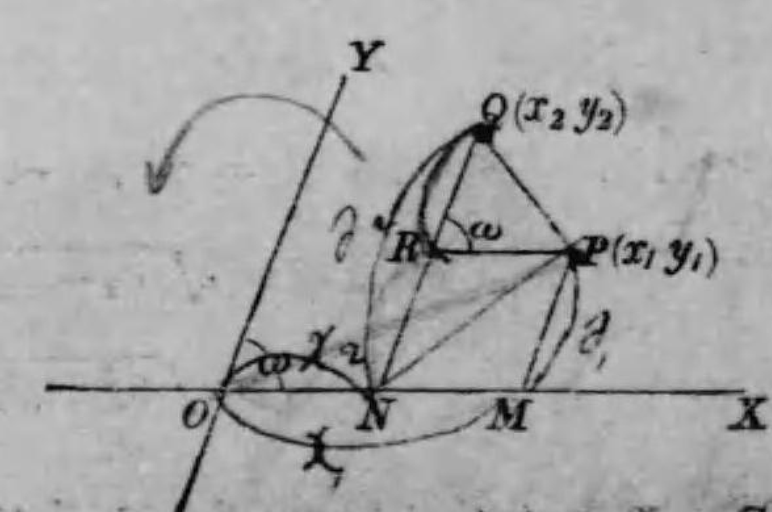
$$OM=x_1 \qquad MP=y_1$$
$$ON=x_2 \qquad NQ=y_2$$

ナリ. 又Pヨリx軸ニ平行ニ直線PRヲ引キ, QNトRニ於テ交ラシメバ

$$PR=MN=\cancel{x_1-x_2}\ x_2-x_1$$
$$RQ=y_2-y_1$$

ナリ.

第六圖



$PR=NN=x_2-x_1$
$RQ=y_2-y_1$

今 $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$, $\overline{RQ}$ ヲ以テ各其絕對値ヲ示スモノトセバ,三角法ニ於テ知レル如ク

$$\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2+\overline{RQ}^2-2\overline{PR}.\overline{RQ}\cos\angle PRQ$$

ナル關係アリ. 而シテコヽニ PR ト RQ トガ同ジ符號ヲ有スル如キ圖形ナル時ハ $\angle PRQ=180°-\omega$ ニシテ,相異ナル符號ヲ有スル如キ場合ニハ $\angle PRQ=\omega$ トナルガ故ニ,何レニシテモ

$$\overline{PR}.\overline{RQ}\cos\angle PRQ=-(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\omega$$

ナリ. 故ニ常ニ

$$\overline{PQ}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\omega$$

從テ

$$\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\cos\omega} \qquad (1)$$

ヲ得. 此結果ハ P ト Q トノ位置ノ如何ニ關ラズ常ニ眞ナリ.

モシ一點 $P(x_1, y_1)$ ノ原點ヨリノ距離ヲ求メントセバ (1) ニ於テ $x_2=0$, $y_2=0$ ト置クベシ,即チ

$$\overline{PO}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+2x_1y_1\cos\omega}. \qquad (2)$$

特ニ直交軸ノ場合ニ於テハ $\cos\omega=0$ ナルヲ以テ (1) 及ビ (2) ハ下ノ如ク簡單ニナルベシ,

$$\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}, \qquad (3)$$

$$\overline{PO}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}. \qquad (4)$$

【例】 軸ノ間ノ角ガ 60° ナル時,二點 (5, 6), (-3, 2) ノ間ノ距離ヲ求ム.

(1) ニヨリテ $\sqrt{\{5-(-3)\}^2+(6-2)^2+2\{5-(-3)\}(6-2)\cos 60°}$

$=\sqrt{8^2+4^2+2.8.4.\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{64+16+32}$

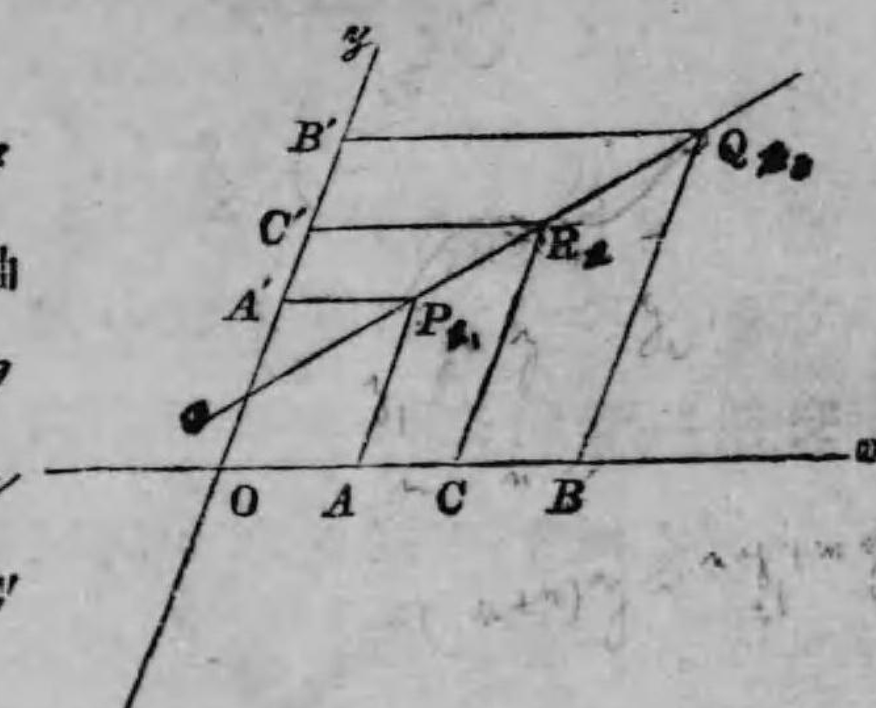
$=\sqrt{112}.$

7. 二點間ヲ與ヘラレタル比ニ分ツ點.

$P(x_1, y_1)$ 及ビ $Q(x_2, y_2)$ ヲ與ヘラレタル二點トシ,直線 PQ 上ニ一點 $R(x, y)$ ヲ取リ

$$\frac{PR}{RQ}=\frac{m}{n}=\lambda$$

ナラシメントス. コヽニ $\frac{m}{n}=\lambda$ ハ與ヘラレタル比ニシテ,R ガ P ト Q トノ間ニアル時ハ PR ト RQ トハ同ジ方向ヲ有スルヲ以テ其ノ比ハ正ナリトシ,然ラザル時ハ負トスベシ. (即チPQヲ内分セリ)



今求ムル處ノ點 R ヲ得タリトシ, P, Q, R ヨリ夫々 y 軸及ビ x 軸ニ平行ナル直線ヲ引キ, x 軸及ビ y 軸ト交ハル點ヲ夫々 A, B, C 及ビ A′, B′, C′ トス. 然ルトキハ

$$\frac{PR}{RQ}=\frac{AC}{CB}=\frac{A'C'}{C'B'}=\frac{m}{n}=\lambda. \qquad (1)$$

故ニ §4(4頁) ノ (1) ニヨリ

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{m}{n}=\lambda \qquad (2)$$

ニシテ,之ヨリ

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n}=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$
$$y=\frac{ny_1+my_2}{m+n}=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (3)$$

ヲ得ベシ.

モシ直線PQガy軸又ハx軸ニ平行ナルトキハ, A, B, C又ハA′, B′, C′ハ合シテ一點トナルニヨリ,(1)及ビ(2)ハ意味ヲ有セザル事トナレドモ,此場合ニ於テハ實際ノ結果ハ明カニ

$$x=x_1=x_2$$

又ハ

$$y=y_1=y_2$$

ナルベキニヨリ,(3)ハナホ眞ナリトイフヲ得ベシ.

特別ノ場合トシテRヲPQノ中點トスレバソノ座標ハ

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

ナリ. **スベテ此等ノ式ハ軸ノ間ノ角ニ無關係ニシテ直交軸ニモ斜交軸ニモ通用スルモノナリ.**

λノ種々ノ値ト之ニ對應スルR點ノ位置トノ關係ニツイテハ第4節ニ於ケルト同樣ノ吟味ヲ試ムルコトヲ得.

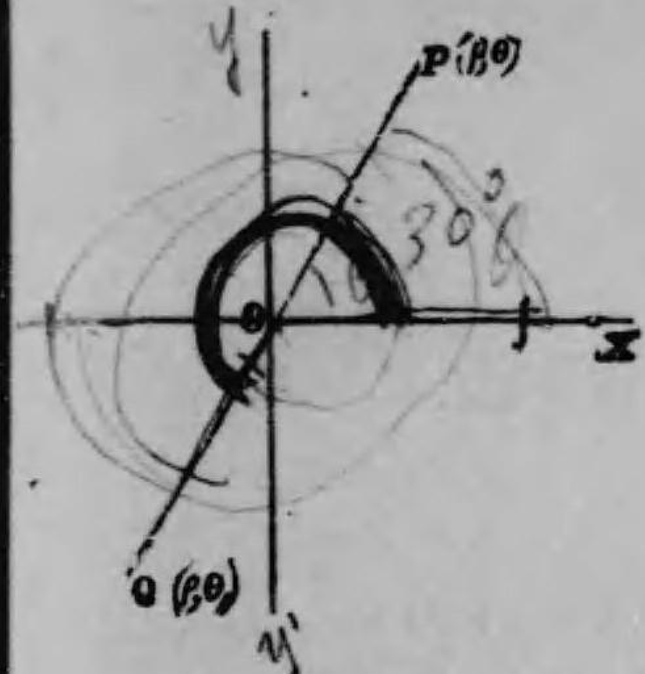
8. 極座標.

平面上ニ於ケル一點ノ位置ヲ決定スル方法トシテハ平行座標ノ他ニナホ種々ノ法アリ. 其一トシテコヽニ

更ニ極座標ナルモノヲ説カントス.

今OXヲ平面上ニ於ケル一ツノ半直線トシ,Oヲ其端トス. 然ルトキハソノ平面上ノ任意ノ一點Pノ位置ハOトPトヲ結ビ付クル線分OPノ長サ及ビOPガOXトナス角XOPノ大サニヨリテ決定セラルベシ.

第八圖



通常OPノ長サヲρニテ表ハシ,之ヲP點ノ **動徑** ト云ヒ,∠XOPヲθニテ表ハシ,之ヲPノ **傾角** ト云フ. 兩者ヲ總稱シテPノ **極座標** ト云ヒ,Pノ極座標ガρ, θナルコトヲ示スニハ$P(\rho, \theta)$ト書ク.

而シテコヽニ用ヒタルOXナル半直線ヲ **原線** ト云ヒ,Oヲ **極** ト稱ス.

傾角θノ大サハ常ニOXヨリ計ルコトヽシ, OXヨリ時計ノ針ノ進行ト逆ノ向キニ計レルモノヲ正トシ,然ラザル向キニ計レルモノヲ負ト定ム. 而シテソノ絶對値ニハ制限ヲ付セズ,四直角以上ニ至ルモ妨ナシトス.

動徑ρニモ正負ノ符號ヲ附スルコトヲ得. ソノ定メ方ハ,∠XOPガ丁度傾角θノ示ス角ニ等シキ時半直線OPノ方向ヲPノ正ノ方向トシ,之ニ反シテPOヲOヲ越エテ延長シタルOQノ方向ヲ負ト定ム. 即チρノ正負ハソレ自身ニテ定マルモノニ非ズ,之ニ伴フθニヨリテ定マ

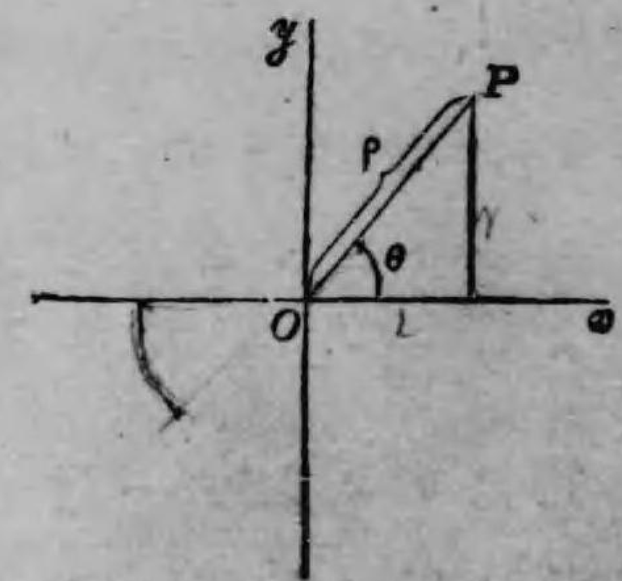
ルモノニシテ,モシ $\angle XOQ$ ヲ θ トセバ,其時ニハ OQ ノ方向ヲ正トシ OP ノ方向ヲ負トスベキナリ. 例ヘバ第八圖ニ於テ $OP=OQ=2$, $\angle XOP=30°$ トセバ P ノ極座標ハ $(2,30°)$, $(-2,210°)$, $(-2,-150°)$ 等ト云フヲ得ベク,Q ノ極座標ハ $(2,210°)$, $(2,-150°)$, $(-2,30°)$ 等ト云フヲ得ベシ.

然レドモ特ニ必要ナキ時ハ ρ ヲ正トシテ, θ ヲ $0°$ ト $360°$ トノ間又ハ $-180°$ ト $180°$ トノ間ニ取ルヲ通常トス.

9. 直角座標ト極座標トノ關係.

直交軸ニ關シ一點 P ノ座標ヲ (x,y) ナリトス. 今其原點ヲ一ツノ極座標ノ極トシ x 軸ノ正ノ部分ヲ原線トセル同一點 P ノ極座標ヲ (ρ,θ) トセバ,常ニ次ノ關係アリ.

第九圖



$$\left.\begin{aligned} x&=\rho\cos\theta \\ y&=\rho\sin\theta \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \rho&=\pm\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta&=\tan^{-1}\frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(1) ヨリシテ P ノ極座標ヲ知ラバ直チニソノ直角座標ヲ求ムルコトヲ得ベク,又 (2) ヨリシテ P ノ直角座標ヲ知ラバ其極座標ヲ求ムルコトヲ得ベシ. 但シ後者ノ場合ニ於テハ ρ 及ビ θ ノ種々ノ値ヲ得可キヲ以テ, x 及ビ y

ノ符號ニ注目シ P 點ノ存在スル象限ヲ考ヘテ適當ナル ρ 及ビ θ ノ一組ヲ選定スベシ. 例ヘバ $(-1,-1)$ ナル直角座標ヲ有スル點ノ極座標ヲ求ムレバ

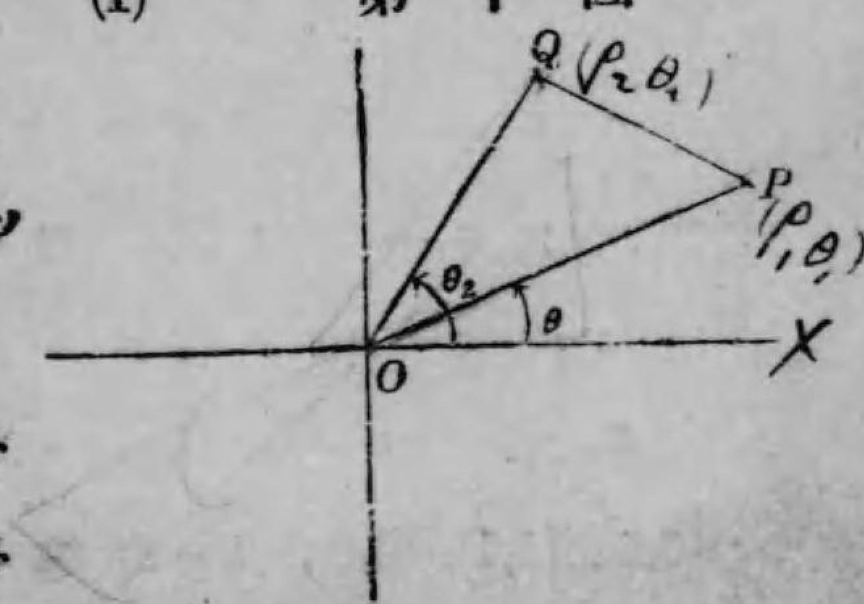
$$\rho=\pm\sqrt{2}, \qquad \theta=45°+n.180°$$

ヲ得,コヽニ n ハ任意ノ整數ナリ. 然ルニ今考フル處ノ點ハ x 及ビ y ガ共ニ負ナルヲ以テ第三象限ニアリ. 故ニ n ヲ奇數トセルトキハ ρ ノ正號ヲ取ルベク, n ヲ偶數トセルトキハ ρ ハ負號ヲ取ラザル可ラズ. モシ ρ ヲ正トシ,角ノ範圍ヲ $0°$ ト $360°$ トノ間ニ限ラバ,求ムル極座標ハ $(\sqrt{2},225°)$ ナリ.

10. 二點間ノ距離.

極ヲ O トシ,原線ヲ OX トシ,極座標ニヨリテ表ハサレタル二點 $P(\rho_1,\theta_1)$ 及ビ $Q(\rho_2,\theta_2)$ ノ間ノ距離ヲ求メントス.

第十圖



三角形 POQ ニ於テ

$$\overline{PQ}^2=\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2-2\overline{OP}.\overline{OQ}\cos POQ \qquad (1)$$

ナリ. 茲ニ $\overline{PQ},\overline{OP},\overline{OQ}$ ハ各ツノ絶對値ヲ表ハスモノトス.

今 ρ_1 及ビ ρ_2 ハ共ニ正ナリトシ,又 θ_1 及ビ θ_2 ハ何レモ $0°$ ト $360°$ トノ間ニアル角ナリトセバ,(1) ヨリ直チニ

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2&=\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_2-\theta_1) \\ &=\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1-\theta_2) \end{aligned} \qquad (2)$$

ヲ得. 然ルニ此式ニ於テ θ_1 又ハ θ_2 ガ 360° ノ整數倍ダケノ變化ヲ受クルモ $\cos(\theta_1-\theta_2)$ ハ値ヲ變ゼズ,又 ρ_1 又ハ ρ_2 ノ符號ヲ變ズルト同時ニ θ_1 又ハ θ_2 ヲ 180° ノ奇數倍ダケ變ズルトキハ矢張全體ニ於テ何等ノ變化ナシ. 故ニ PQ ノ長サハ常ニ(2)ニヨリテ計算スルコトヲ得ベシ.

公式(2)ハマタ第 6 節(3)ニ第 9 節(1)ヲ代用スルコトニヨリテモ導クコトヲ得ベシ. 即チ P,Q ノ直角座標ガ夫夫 (x_1, y_1), (x_2, y_2) ナルトキハ

$$
\begin{aligned}
\overline{PQ}^2 &= (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 \\
&= (\rho_1\cos\theta_1-\rho_2\cos\theta_2)^2+(\rho_1\sin\theta_1-\rho_2\sin\theta_2)^2 \\
&= \rho_1^2(\cos^2\theta_1+\sin^2\theta_1)+\rho_2^2(\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2) \\
&\quad -2\rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2) \\
&= \rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1-\theta_2).
\end{aligned}
$$

11. 方程式ノ軌跡.

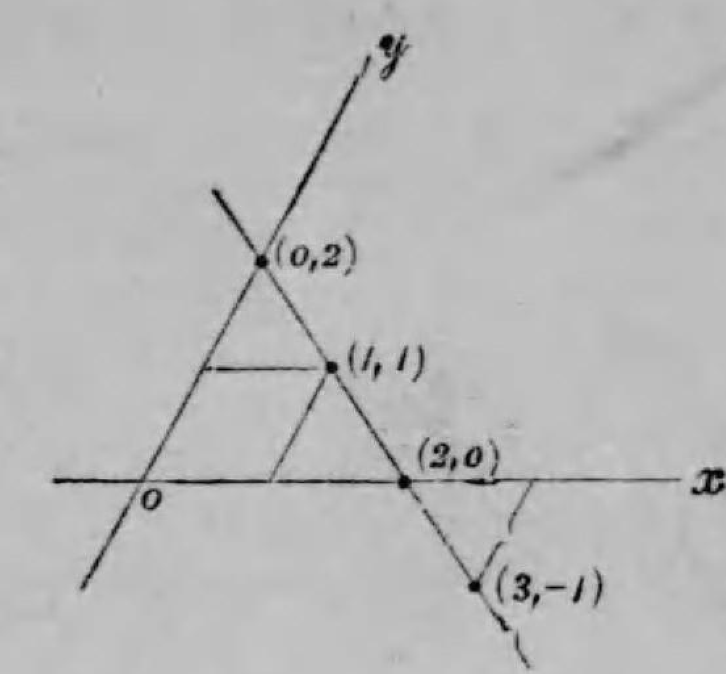
今コヽニ x 及ビ y ノ間ノ或ル關係ヲ示セル一ノ方程式アルトキ,一ツノ點ノ座標 x 及ビ y ガ丁度此方程式ヲ滿足スル如キ値ヲ有スルトキハ此點ハ其方程式ヲ滿足スト稱ス. 例ヘバ $x+y=2$ ヲ與ヘラレタル方程式トセバ (0,2), (1,1), (2,0), (3,−1) 等ハ何レモ此式ヲ滿足スル點ナリ.

一般ニ一ツノ方程式ヲ滿足スル點ハ無數ニ多クアリテ,ソレラノ點ヲ圖上ニ錄スルトキハ一ノ線上ニアルヲ見

ルベシ.

上記ノ例ニ於テ x ニ種々ノ値ヲ與ヘ,之ニ對應スル $y=2-x$ ヲ求メテ多クノ點ヲ定ムレバ,大略第十一圖ニ示スガ如キ直線上ニアルコトヲ認メラル.

第 十 一 圖



コヽニ於テ吾人ハ與ヘラレタル方程式ヲ滿足スル點ノ軌跡トイフ思想ニ達ス. 其定義次ノ如シ.

「x 及ビ y ノ間ニ一ノ方程式ガ與ヘラルヽ時,之ヲ滿足スル點ハ悉クアル圖形(直線又ハ曲線等)ノ上ニアリ,又逆ニソノ圖形ノ上ノ點ハ皆與ヘラレタル方程式ヲ滿足スル時ハ,其圖形ヲ稱シテ與ヘラレタル方程式ヲ滿足スル點ノ軌跡,或ハ略シテ,與ヘラレタル **方程式ノ軌跡** ト云フ. 此場合ニ於テ與ヘラレタル方程式ハソノ軌跡タル圖形ヲ表ハスト云フ.」

此際方程式中ニアル x 及ビ y ハ軌跡上ノ任意ノ點ノ座標ヲ代表スルモノニシテ,特ニ或ル一點ノ座標ヲ示スモノニアラズ. 依テ此ヲ名ケテ **流通座標** ト稱ス.

以上平行座標ニツイテノミ說明シタレドモ,同樣ノコトハスベテ極座標ニツイテモ定義セラルヽコト明カナ

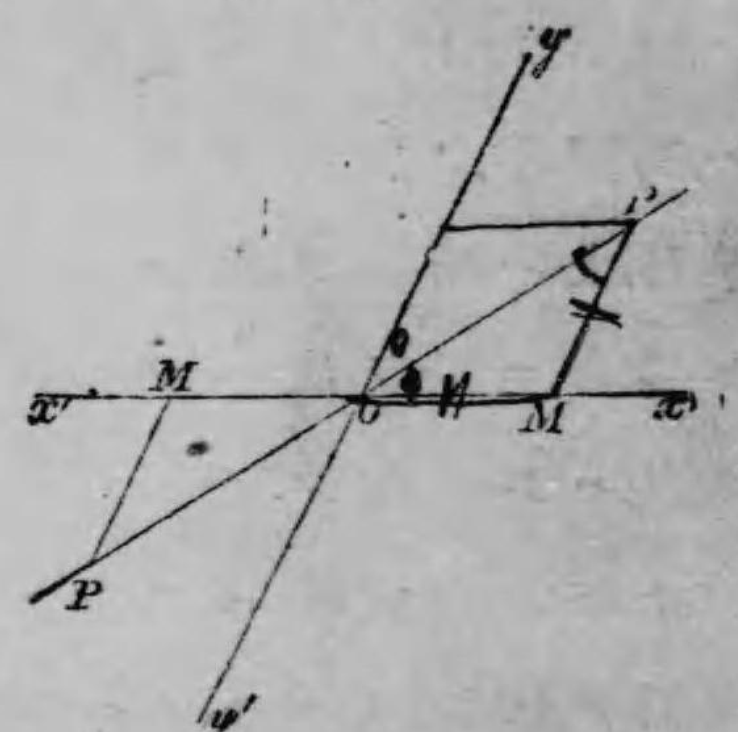
リ.

解析幾何學ノ目的ハスベテ圖形ノ性質ヲ論ズルニ當リ,悉ク之ヲ方程式ニヨリテ表ハシ,代數學的ニ研究スルニアリ. サレバ與ヘラレタル方程式ノ表ハス圖形ヲ求ムルコト,又ハ與ヘラレタル圖形ヲアラハス可キ方程式ヲ作ルコト等ハ解析幾何學ニ於テ最モ重要ナル問題ナリ.

【例】1. 方程式 $x=a$ ハ y 軸ニ平行ニシテ,且 x 軸~~ノ~~ヲ原點ヨリ a ナル距離ニテ截ル直線ヲアラハス. 何トナレバ此直線上ニ一點ヲ取ラバソノ點ノ縱線 y ハ其位置ニヨリテ種々ノ値ヲ取ル可ケレトモ,x ハ必ズ a ナラザル可ラズ. 又逆ニ $x=a$ ナル點ナラバ y ノ如何ニ關ラズ必ズ上記ノ直線上ニ在ル可ケレバナリ,

同樣ニ, $y=b$ ナル方程式ハ x 軸ニ平行ニシテ,且 y 軸ヲ原點ヨリ b ナル距離ニテ截ル直線ヲアラハスベシ.

第十二圖



【例】2. 方程式 $x=y$ ノ軌跡ヲ求メンタメニ,先ヅ一點 P ヲ此方程式ヲ滿足スル點トシ,P ヲ過ギリ y 軸ニ平行ナル直線ヲ引キ x 軸ト M ニ於テ交ラシム.然ラバ

$$OM=MP,$$

從ヒテ $\angle MOP=\angle OPM=\angle POy.$

故ニ OP ハ軸ノ間ノ角 xOy ノ二等分線ナラザル可ラズ. 卽チ與ヘラレタル方程式ヲ滿足スル點ハ必ズ軸ノ間ノ角ノ二等分線上ニアリ.

逆ニ,此二等分線上ニ一點 P ヲ取リタリトシ,前ノ如ク作圖スルトキハ

$$\angle MOP=\angle POy=\angle OPM$$

ナルヲ以テ

$$OM=MP \qquad 卽チ \qquad x=y$$

ナル關係アリ. 卽チ二等分線上ノ點ハ皆與ヘラレタル方程式ヲ滿足ス. 故ニ求ムル軌跡ハ軸ノ間ノ角ノ二等分線ナリ.

同樣ニ,方程式 $x=-y$ ノ軌跡ハ $\angle yOx'$ 及ビソノ對頂角ノ二等分線ナリ.

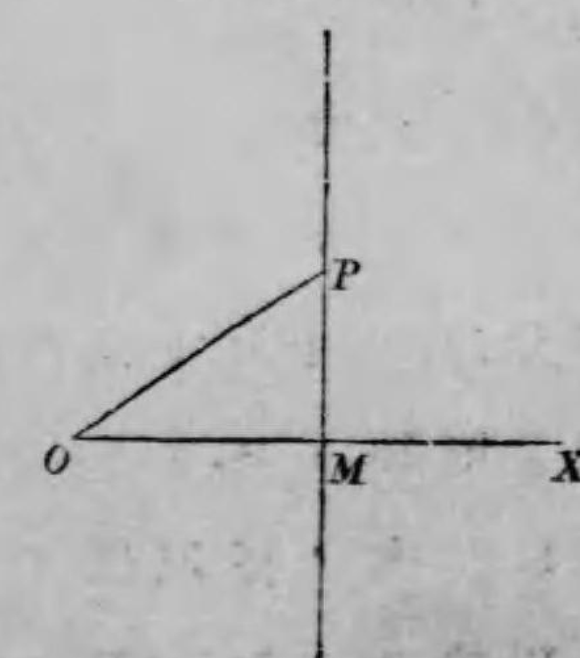
【例】3. 直交軸ニ關シテ方程式 $x^2+y^2=a^2$ ノ軌跡ハ原點ヲ中心トシ,半徑 a ($a>0$ トシテ) ナル圓周ナリ. 何トナレバ,斯ノ如キ圓周上ノ一點ノ座標ヲ (x, y) トセバ,此點ハ中心卽チ原點 $(0,0)$ ヨリ a ナル距離ニアルヲ以テ第 6 節(3)ニヨリ

$$\sqrt{x^2+y^2}=a. \tag{1}$$

故ニ此點ハ與ヘラレタル方程式ヲ滿足ス. 逆ニ又與ヘラレタル方程式ヲ滿足スル點 (x, y) ヲ取ラバ, $x^2+y^2=a^2$ ナルニヨリ此兩邊ヲ平方ニ開キ兩邊同號ヲ取ラバ(1)ヲ得. 故ニ其點ハ原點ヨリ a ナル距離ニアリ,從ヒテ上記ノ圓周上ニアル事明カナリ.

此後半ノ證明ノ代リニ,今考フル圓周上ニアラザル點ノ座標ガ與ヘラレタル方程式ヲ滿足セザルコトヲ證スルモ可ナリ. 本例ニ限ラズ,スベテ,前半ニ對スル逆ヲ證明スル代リニ却ッテソノ逆ノ對偶卽チ前半ノ裏ヲ證明スル方ガ容易ナルコト往々アリ.

第十三圖



【例】4. 極座標ニ於テ $\rho=a$ ($a>0$) ナル方程式ハ極ヲ中心トシ,半徑 a ナル圓周ヲアラハス. 又 $\theta=\alpha$ ハ極ヲ過ギリ原線ト α ナル角ヲナス直線ヲアラハス. 何レモ明白ナレバ證明ヲ略ス.

【例】5. 極座標ニ於テ $\rho\cos\theta=a$ ナル方程式ノアラハス圖形ヲ求メントス.

P (ρ, θ) ヲ此方程式ヲ滿足スル一點トス. P ヲ過ギリ原線 OX ニ垂線ヲ引キソノ足ヲ M トス,

$$\mathrm{OM}=\mathrm{OP}\cos\angle\mathrm{MOP}$$
$$=\rho\cos\theta\ =a.$$

故ニMハ定點ニシテ,PハMヲ過ギリOXニ垂直ニ引ケル定直線上ニアルコトヲ知ル. 逆ニ,コノ直線上ニ一點P (ρ,θ) ヲ取リタルトキハ

$$\rho\cos\theta=\mathrm{OP}\cos\angle\mathrm{MOP}=\mathrm{OM}=a$$

即チ與ヘラレタル方程式ヲ滿足ス. 故ニ求ムル軌跡ハ原線ヲ極ヨリaナル距離ニテ截リ,且之ニ垂直ナル直線ナリ.

モシ始メヨリ第9節ノ公式ヲ用ヒテ直角座標ニ直サバ$x=a$トナリ例1ニ歸着ス. 同樣ニ例3ノ如キハ之ヲ極座標ニ直サバ$\rho=a$トナリ,例4ニ歸着セシムルコトヲ得ベシ.

問　題

1. 一ノ直交軸ヲ取リ(2,1), (3,−2), (−4,−1)ナル三點ヲ錄シ,且此等相互ノ距離ヲ求メ,依テ此三點ヲ結ビ付ケテ得ル三角形ハ直角三角形ナルコトヲ證明セヨ.

2. 直交軸ニ於テ,與ヘラレタル三點(2,3), (−2,1), (3,−2)ヨリ等距離ナル點ノ座標ヲ求ム.

3. 三點(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)ヲ頂點トスル三角形ノ重心ノ座標ヲ求ム.

4. 三角形ABCノ二邊AB, ACヲ夫々x及ビyノ軸トセルトキ,(i) AヨリBCニ下セル垂線ノ足,(ii)角Aノ二等分線ガBCト交ル點,ノ座標ヲ求ム. 但シ三角形ノ三邊ヲ既知トス.

5. 次ノ極座標ヲ有スル點ヲ錄シ,且ソノ極ヲ原點トシ,原線ヲx軸ノ正ノ部分トセル直交軸ニ關シテノ同點

ノ直角座標ヲ求ム.

$$(2,\ 30^\circ),\qquad \left(1,\ -\frac{\pi}{4}\right)$$
$$(-2,\ -30^\circ),\qquad \left(-1,\ \frac{\pi}{4}\right)$$

6. mヲ任意ノ整數トスルトキ,$\left((-1)^m\rho,\ \theta+m\pi\right)$ハ悉ク同一ノ點ヲアラハスコトヲ示セ.

7. 直交軸ニ關シテ表ハサレタル次ノ方程式ヲ極座標ノ式ニ直セ.

$$x^2+y^2=ax,\qquad x^2-y^2=a^2.$$

8. 次ノ方程式ヲ直交軸ニ關シテノ式ニ直セ.

$$\rho\sin\theta=a\cos\theta,\qquad \rho^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\theta}{2}=a^{\frac{1}{2}}.$$

9. 軸ノ間ノ角ガωナル斜交軸ニ關シ,或ル點ノ座標ヲ(x,y)トシ,ソノ原點ヲ極トシx軸ノ正ノ部分ヲ原線トセルトキノ同點ノ極座標ヲ(ρ,θ)トスレバ,次ノ關係アルコトヲ證明セヨ.

$$x=\frac{\rho\sin(\omega-\theta)}{\sin\omega},\qquad y=\frac{\rho\sin\theta}{\sin\omega}.$$

10. 極ヲOトシ,與ヘラレタル二點ヲ$\mathrm{A}(\rho_1,\theta_1)$, $\mathrm{B}(\rho_2,\theta_2)$トス. 角AOBノ二等分線ガABト交ル點ノ極座標ヲ求ム.

第三章

座標ノ變換

12. 座標ノ變換.

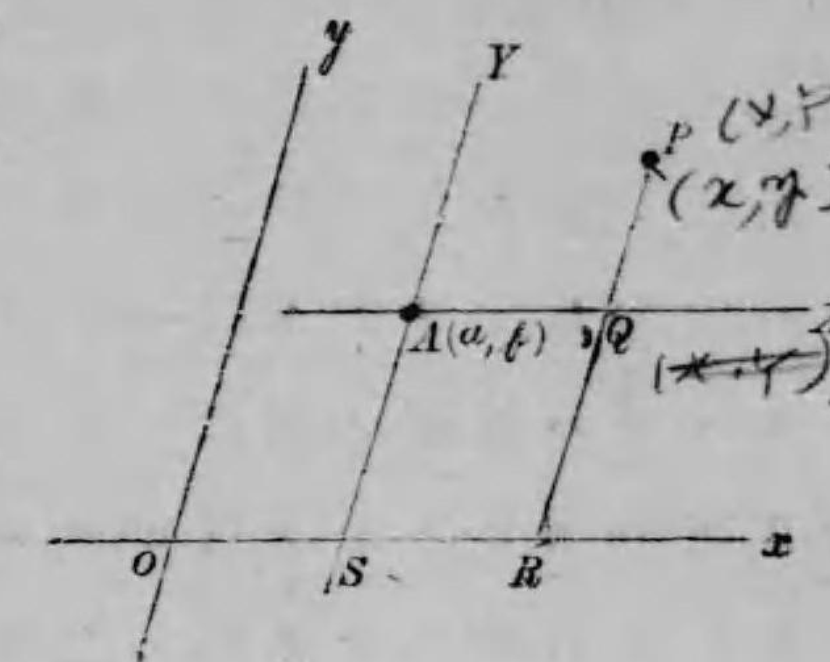
同一ノ點ノ平行座標ニテモ其軸ノ位置及ビ軸ノ間ノ角ニヨリテ種種ノ値ヲ取ルベク,又平行座標ト極座標トノ如キハモトヨリ全然ソノ種類ヲ異ニス. 故ニ平面上ノ一點ノ座標ハ座標系ノ種類ニヨリテ各相異ナル値ヲ有スルモノナリ. 本章ニ於テハソレラノ相互ノ間ニ存スル關係ヲ述ベントス. 即チ一ノ與ヘラレタル座標系ニ關シテ或ル一點ノ座標ヲ知リタルトキ,他ノ與ヘラレタル座標系ニ關スル同一點ノ座標ヲ求ムルコト是ナリ. コノ事柄ヲ稱シテ **座標ノ變換** ト云フ. 第9節(14頁)ニ述タルコトハ矢張一種ノ變換ナルガ,本章ニ於テハ專ラ一ノ平行座標ヨリ他ノ一ノ平行座標ニ移ル場合ヲ考ヘントス.

13. 平行移動.

一點Aヲ過ギリ與ヘラレタル座標系ノx軸ニ平行ナル直線ヲ引キ,之ヲ新ラシキX軸トシ,又Aヲ過ギリy軸

ニ平行ナル直線ヲ引キ,之ヲ新ラシキY軸トシ,Aヲ新ラシキ座標ノ原點トス. 又X及ビY軸ノ正ノ方向ハx及ビy軸ノ正ノ方向ト同一ナリトス.

第十四圖



新軸ノ原點Aノ舊軸ニ關シテノ座標ヲ(a,b)トシ,一點Pノ新舊兩座標ヲ夫夫(X,Y)及ビ(x,y)トス. 然ルトキハ(x,y)ヨリ(X,Y)ニ移ルコトハ,恰カモ座標軸ノ方向ヲ常ニ舊軸ノ方向ニ平行ニ保チツヽ唯ソノ原點ヲOヨリAマデ移動セシメタルコトニ當ルヲ以テ,此變換ヲ稱シテ **平行移動** ト云フ.

Pヨリy軸ニ平行ナル直線ヲ引キ,x軸及ビX軸ト交ハル點ヲ夫々R及ビQトシ,Y軸トx軸トノ交點ヲSトセヨ,

$$
\begin{aligned}
x &= OR = OS + SR \\
&= OS + AQ \\
&= a + X, \\
y &= RP = RQ + QP \\
&= SA + QP \\
&= b + Y.
\end{aligned}
$$

即チ

$$\left.\begin{aligned} x&=X+a \\ y&=Y+b \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ニシテ,換言スレバ

$$\left.\begin{aligned} X&=x-a \\ Y&=y-b \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ナリ. 此等ハ直交軸ニモ斜交軸ニモ通用ス.

新軸ニ關シテ舊軸ノ原點ノ座標ハ $(-a,-b)$ ナリ故ニ(2)ハ内容ニ於テ(1)ト同一ナリ.

コヽニハ新舊ノ座標ヲ區別センガタメニコトサラ前者ヲ表ハスニ X, Y ヲ用ヒタレドモ,既ニ變換ヲ終リテ後最早混雜スル恐ナキ時ハ之ヲ通常ノ x,y ニ書キ直シテ可ナリ.

【例】 一ノ座標軸ニ關シ $x^2+y^2-6x-4y-18=0$ ナル方程式アリ. 今平行移動ニヨリ原點ヲ(3, 2)ニ移サバ,此方程式ハ如何ニ變ズルカ.

(1)ニヨリ $x=X+3,\quad y=Y+2$

ナル關係アリ, 之ヲ與ヘラレタル方程式ニ代入スルトキハ

$$(X+3)^2+(Y+2)^2-6(X+3)-4(Y+2)-18=X^2+Y^2-31=0$$

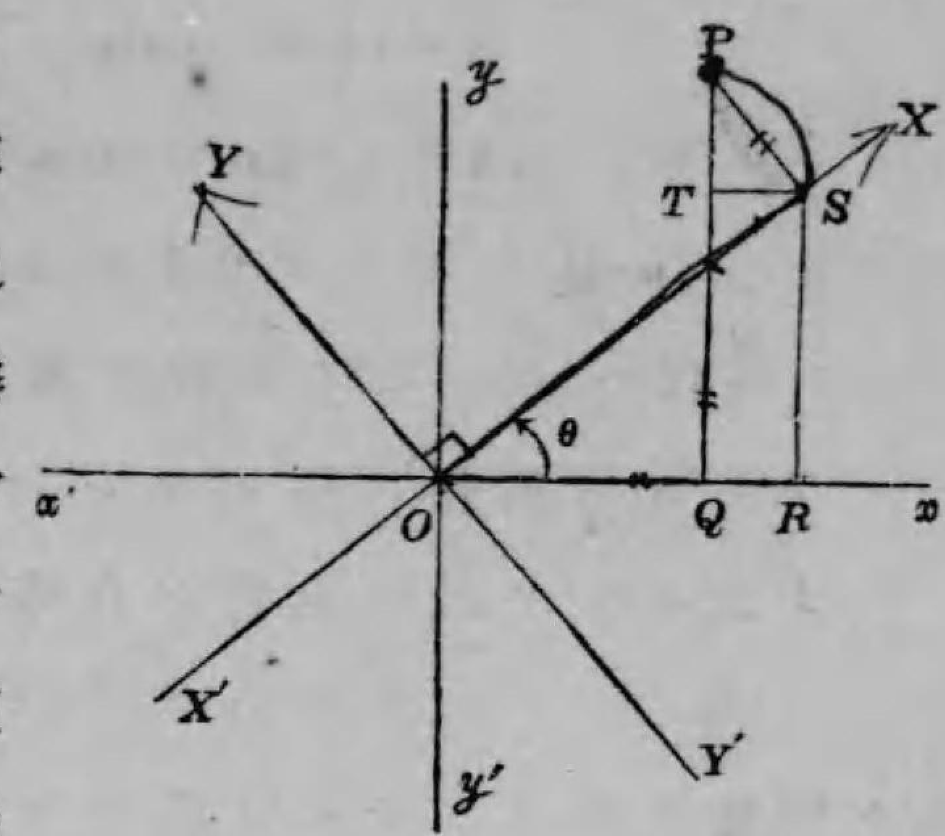
故ニ求ムル處ノ式ハ $x^2+y^2=31$ ナリ.

14. 直交軸ノ回轉.

與ヘラレタル直交軸ヲ Ox, Oy トシ,新直交軸ヲ OX,OY トシ原點 O ハ共通ナリトス. 又 X 軸ノ正ノ方向ト x 軸ノ正ノ方向トガナス角ヲ後者ノ方ヨリ計リテ θ ナリトシ,一點 P ノ新舊ノ座標ヲ夫々(X, Y), (x, y) トス. 此場合ノ

變換ハ丁度座標軸ヲ直交セルマヽニテ原點ノ回リニ θ ナル角丈回轉セルコトニ當ル,因テ之ヲ直交軸ノ 回轉 ト稱ス. 扨 P ヨリ x 軸及ビ X 軸ニ夫々垂線ヲ下シ其足ヲ Q 及ビ S トシ,更ニ S ヨリ PQ 及ビ x 軸ニ夫夫垂線ヲ下シ其足ヲ T 及ビ R トセヨ

第十五圖



$$x=OQ=OR-QR$$
$$=OR-TS,$$
$$y=QP=QT+TP$$
$$=RS+TP.$$

然ルニ

$$OR=OS\cos\theta=X\cos\theta,$$
$$RS=OS\sin\theta=X\sin\theta.$$

又 ∠TPS ハ明カニ θ ニ等シキヲ以テ

$$TS=SP\sin\theta=Y\sin\theta,$$
$$TP=SP\cos\theta=Y\cos\theta.$$

故ニ結局

$$\left.\begin{aligned} x&=X\cos\theta-Y\sin\theta \\ y&=X\sin\theta+Y\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ヲ得. 之ヲ X, Y ニツイテ解クトキハ

$$\left.\begin{aligned} X&=x\cos\theta+y\sin\theta \\ Y&=-x\sin\theta+y\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

トナル. (2) ハ (1) ニ於テ x, y ヲ夫々 X, Y ト交換シ,同時ニ θ ヲ $-\theta$ ニ代ヘタルモノニ當ル,蓋シ新軸ヲ $-\theta$ 丈回轉セバマタモトノ舊軸ヲ得可ケレバナリ.

今 (1) 或ハ (2) ニ於テ兩邊ヲ自乘シテ相加フレバ

$$x^2+y^2=X^2+Y^2$$

ナル關係ヲ得. 即チ x^2+y^2 ナル式ハ直交軸ノ回轉ニヨリテソノ値ヲ變ゼザルモノナリ. 此事ハ x^2+y^2 ガ一點 (x, y) ノ原點ヨリノ距離ノ自乘ヲアラハスコトヲ思ハバソノ當然ナルヲ知ルベシ.

【例】 直交軸ヲ原點ノ回リニ 45° 回轉スルトキ, $x^2-y^2=0$ ナル方程式ハ如何ニ變ズルカ.

(1) ニ於テ $\theta=45°$ ト置カバ

$$x=\frac{X-Y}{\sqrt{2}}, \qquad y=\frac{X+Y}{\sqrt{2}}.$$

之ヲ與ヘラレタル方程式ニ代入シテ

$$\frac{(X-Y)^2}{2}-\frac{(X+Y)^2}{2}=-2XY=0$$

ヲ得.即チ求ムル式ハ $\quad xy=0 \quad$ ナリ.

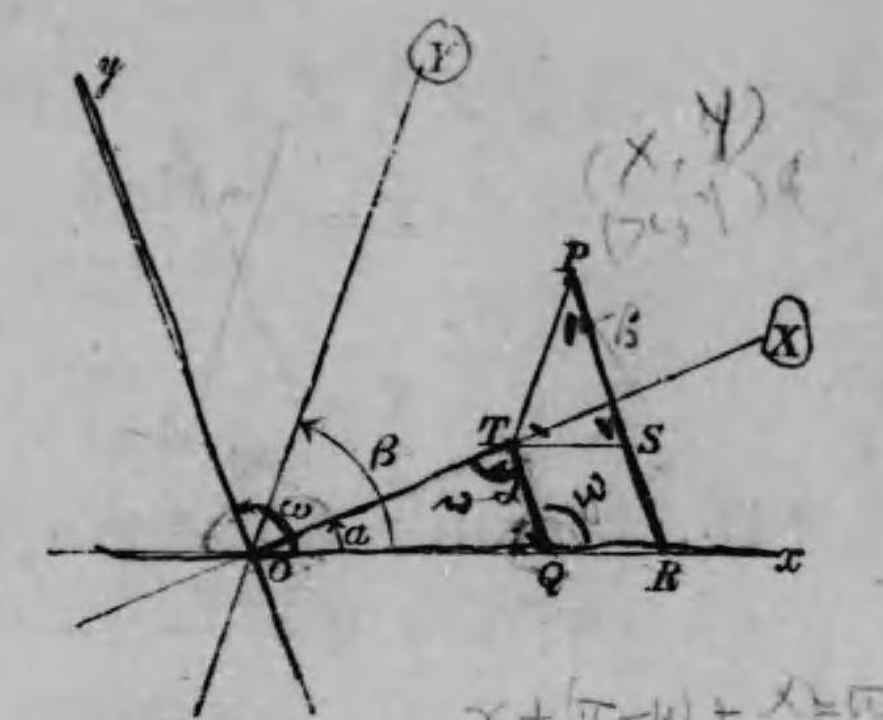
15. 一般ノ變換.

Ox, Oy ヲ一ノ座標軸トシ,軸ノ間ノ角ヲ ω トス. 又 OX, OY ヲ,之ト原點ヲ同ジクスル,他ノ一ノ座標軸トシ, OX 及

ビ OY ガ Ox トナス角ヲ,共ニ Ox ノ方ヨリ計リテ,夫夫 α 及ビ β トス. 即チ新ラシキ軸ノ間ノ角ハ $\beta-\alpha$ ナリ.

今一點 P ノ舊軸ニ關スル座標ヲ (x, y) トシ,新軸ニ關スルモノヲ (X, Y) トス. P ヲ過ギリ OY ニ平行ナル直線ガ OX ト交ル點ヲ T トシ, P 及ビ T ヨリ Oy ニ平行線ヲ引キ, Ox ト交ル點ヲ夫夫 R 及ビ Q トス. 又 T ヨリ Ox ニ平行線ヲ引キ PR ト交ル點ヲ S トセヨ

第十六圖



$$\angle OTQ=\omega-\alpha,$$

$$\angle OQT=180°-\omega,$$

$$\angle TPS=\omega-\beta, \qquad \angle TSP=180°-\omega,$$

$$\angle STP=\beta$$

ナルコト明カナリ. 因リテ

$$\frac{OT}{\sin(180-\omega)}=\frac{OQ}{\sin(\omega-\alpha)}$$

$$\begin{aligned} x&=OR=OQ+QR=OQ+TS \\ &=OT\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin(180°-\omega)}+TP\frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin(180°-\omega)} \\ &=X\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega}+Y\frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega}, \end{aligned}$$

正弦法則ニ由テ

$$\begin{aligned} y&=RP=RS+SP=QT+SP \\ &=OT\frac{\sin\alpha}{\sin(180°-\omega)}+TP\frac{\sin\beta}{\sin(180°-\omega)} \end{aligned}$$

$$=X\frac{\sin\alpha}{\sin\omega}+Y\frac{\sin\beta}{\sin\omega}.$$

故ニ求ムル變換ノ式ハ

$$\left.\begin{aligned} x&=X\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega}+Y\frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega}\\ y&=X\frac{\sin\alpha}{\sin\omega}+Y\frac{\sin\beta}{\sin\omega}\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

ニシテ,モシ之ヲ X, Y ニツイテ解クトキハ

$$\left.\begin{aligned} X&=x\frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}-y\frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}\\ Y&=-x\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}+y\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

ヲ得. (2)ハ(1)ニ於テ x,y ト X, Y トヲ交換スルト同時ニ ω,α,β ノ代リニ夫々 $\beta-\alpha,-\alpha,\omega-\alpha$ ヲ入レタルモノナルコトニ注意スベシ. 又新軸ノ間ノ角即チ $\beta-\alpha$ ヲ ω' ニテ表ハサバ,(1)又ハ(2)ヨリ

$$x^2+y^2+2xy\cos\omega=X^2+Y^2+2XY\cos\omega'$$

ナルコトヲ驗證シ得ベシ. 此兩邊ハ一點ヨリ原點マデノ距離ノ自乘ヲ示ス.

前節ニ述タル直交軸ノ回轉ノ場合ノ公式ハ此特別ノ場合トシテ容易ニ誘導スルコトヲ得ベシ. 更ニ他ノ一ノ特別ノ場合トシテ

$$\alpha=0^\circ,\qquad \beta=90^\circ$$

ト置クトキハ, 一ノ斜交軸ヨリ之ト原點及ビ x 軸ヲ共有スル直交軸ニ移ル場合,又ハソノ反對ノ場合ノ變換式

ヲ得ベシ. 即チ次ノ如シ

$$\left.\begin{aligned} x&=X-Y\cot\omega\\ y&=Y\operatorname{cosec}\omega\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

$$\left.\begin{aligned} X&=x+y\cos\omega\\ Y&=y\sin\omega\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

一ノ座標軸ヨリ之ト原點ヲ異ニスル他ノ任意ノ座標軸ニ移ランニハ,先ヅ最初平行移動ニヨリテ兩方ノ原點ヲ一致セシメ置キ,次ニ(1)又ハ(2)ニヨリテ變換ス. 此二段ノ手續ヲ組合シテ一般ニ

$$\left.\begin{aligned} x&=X\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega}+Y\frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega}+a\\ y&=X\frac{\sin\alpha}{\sin\omega}+Y\frac{\sin\beta}{\sin\omega}+b\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

又ハ

$$\left.\begin{aligned} X&=x\frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}-y\frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}+a'\\ Y&=-x\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}+y\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}+b'\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

ノ如キ形ノ變換式ヲ得ベシ. コヽニ (a,b) ハ新原點ノ舊軸ニ關スル座標ニシテ, (a',b') ハ舊原點ノ新軸ニ關スル座標ナリトス. (5)及ビ(6)ニヨリ,如何ナル座標軸ノ變換ニ際シテモ, x 及ビ y ハ常ニ X 及ビ Y ノ一次式ニヨリテ表ハサレ,又逆ニ X 及ビ Y モ x 及ビ y ノ一次式ニヨリテ表ハサルヽコトヲ知ル. 之ニヨリテ次ノ重要ナル定理

ヲ得.

x 及ビ y ヨリ成ル有理整式ノ次數ハ座標軸ノ如何ナル變換ニヨリテモ變ズルコトナシ.

何トナレバ,先ヅ次數ガ高クナルコトナキハ上述ノ理ニヨリテ明カナリ. モシ又或ル變換ニヨリテ最高次ノ項ヲ消去セシメテ式ノ次數ヲ低クスルコトヲ得トセバ,ソレヨリ逆ニ原ノ軸ニ戻ル變換ヲ考フルニ其際次數ハ復舊スベキニヨリ,コヽニ低次ヨリ高次ニ變ル一種ノ變換アルコトヽナル. コレ明カニ不合理ナリ. 依テ次數ハ不變ナラザル可ラズ.

此定理アルニヨリ,解析幾何學ニ於テハ x 及ビ y ノ間ノ有理整方程式ニヨリテ表ハサルヽ曲線即チ所謂**代數曲線**ヲ分類スルニ當リソノ次數ニ據ルコトヽシ,一次曲線,二次曲線等ト呼ブ. 例ヘバ $ax+by+c=0$ ハ一次曲線,$x^2+y^2=a^2$, $xy=k$ 等ハ二次曲線ヲ表ハスモノナリ.

與ヘラレタル方程式ガ x 及ビ y ニ就テ有理整式ナラザル場合ト雖,モシ之ヲ有理整式ニ變化シ得ルトキハ,ソノ次數ニヨリテ之ヲ分類ス. 例ヘバ

$$\frac{y}{x}=m \qquad (7), \qquad\qquad y=\sqrt{ax} \qquad (8)$$

ノ如キハ,之ヲ夫々

$$y=mx \qquad (9), \qquad\qquad y^2=ax \qquad (10)$$

ニ變化シテ見テ,ソノ一次又ハ二次曲線ナルコトヲ知ル.

但シ斯ノ如ク變化シテ得ル方程式ノ表ハス曲線ハ一般ニ與ヘラレタルマヽノ方程式ノ表ハスモノト全然同一ニハアラズ,之ヲソノ一部トシテ包含スルヲ普通トス. 例ヘバ(7)ニ於テハ原點ハ嚴密ニ云ハバ軌跡上ノ點ナリト云フヲ得ザレドモ,(9)ニ於テハ明カニソノ上ノ一點ナリ. 又(10)ノアラハス曲線ハ(8)ノアラハスモノノミナラズ,更ニ $y=-\sqrt{ax}$ ナル軌跡ヲモソノ中ニ含メリ.

與ヘラレタル方程式ガ x 及ビ y ニツイテノ有理整式ニ變化シ得ザル時,例ヘバ $y=\sin x$ ノ如キ時ハソノ表ハス曲線ヲ稱シテ **超越曲線** ト云フ. 超越曲線ニハ次數ナルモノナシ.

又極座標ニヨリテ與ヘラレタル曲線ハ之ヲ平行座標ニ變換シタル後上記ノ如ク分類スルモノトス.

問　　題

1. 平行移動ニヨリテ原點ヲ (a, b) ニ移サバ,次ノ方程式ハ如何ナル形ヲ取ルカ.

(i) $x^2-y^2-2ax+2by+a^2-b^2=0$

(ii) $x^2+y^2-2ax-2by-r^2+a^2+b^2=0$

2. 直交軸ニ關シテ

$$21x^2-10\sqrt{3}\,xy+31y^2=144$$

ナル方程式アリ. 今軸ヲ直交セルマヽ 30° 回轉セバ此方程式ハ如何ニ變ズルカ.

3. 直交軸ニ關シ,一ノ與ヘラレタル方程式ヲ

$$4xy-3x^2=a^2$$

トス. 今此直交軸ヲ $\tan\theta=2$ ナル如キ角 θ 丈回轉セバ方程式ハ如何ナル形トナルカ.

4.* 一ノ座標軸ニ關シテ一點ノ座標ヲ (x, y) トシ,他ノ一ノ座標軸ニ關シテ同シ點ノ座標ヲ (x_1, y_1) トス. モシソノ間ニ

$$x=mx_1+ny_1$$

$$y=m_1x_1+n_1y_1$$

ナル關係アラバ

$$\frac{m^2+m_1^2-1}{n^2+n_1^2-1}=\frac{mm_1}{nn_1}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

5.* 軸ノ間ノ角ガ ω ナル一ノ座標軸ヨリ之ト原點ヲ共有シ且軸ノ間ノ角ガ ω' ナル他ノ任意ノ座標軸ニ移ルトキ,

$$ax^2+2hxy+by^2$$

ナル式ガ變ジテ

$$AX^2+2HXY+BY^2$$

トナルナラバ,

$$\frac{ab-h^2}{\sin^2\omega}=\frac{AB-H^2}{\sin^2\omega'}$$

及ビ
$$\frac{a+b-2h\cos\omega}{\sin^2\omega}=\frac{A+B-2H\cos\omega'}{\sin^2\omega'}$$

ナルコトヲ證明セヨ.**

以下*ハ比較的ムヅカシキ問題ナリ.

**中川解析幾何學41頁參照.

第四章
直線

16. 一次方程式ノ軌跡.

x 及ビ y ノ間ニ於ケル一ノ一次方程式ヲ

$$ax+by+c=0 \quad a\neq 0 \quad b\neq 0 \tag{1}$$

トシ,コヽニ a 及ビ b ハ同時ニ零ナラザルモノトス. 今任意ノ座標軸ニ關シ(1)ノアラハス軌跡,即チ前節ニ述ベタル分類ニ於テ一次曲線ト稱セルモノハ常ニ直線ナルコトヲ證明セントス.

先ヅ(1)ニ於テ $a=0, b\neq 0$ ナルトキハ此方程式ハ $y=-\dfrac{c}{b}$ トナリ,コレハ x 軸ニ平行ナル直線ヲアラハスコト明カナリ. 又 $a\neq 0, b=0$ ナルトキハ $x=-\dfrac{c}{a}$ ニシテ,y 軸ニ平行ナル直線トナル. 今コレラノ特別ナル場合ヲ除キ,$a\neq 0, b\neq 0$ ナル一般ノ場合ヲ次ニ考ヘントス.

方程式(1)ニ於テ x ニ任意ノ三ツノ相異ナル値 x_1, x_2, x_3 ヲ代入シ,之ニ對スル y ノ値ヲ求メンニハ

$$y=-\frac{ax+c}{b}$$

ニ於テ x ニ順次ニ x_1, x_2, x_3 ト置ケバ可ナリ. 而シテ $a\neq 0$,

$b\neq0$ ナルニヨリ,之ヨリ得ル三ツノ値ハ常ニ有限確定ニシテ且各相異ナレリ. 之ヲ夫々 y_1, y_2, y_3 トス即チ

$$ax_1+by_1+c=0 \qquad (2)$$

$$ax_2+by_2+c=0 \qquad (3)$$

$$ax_3+by_3+c=0. \qquad (4)$$

コヽニ於テ三ツノ點 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$ ヲ考フルニ,コレ等ハ何レモ(1)ナル方程式ノ軌跡上ニアル點ニシテ且相異ナレル點ナリ.

今(3)及ビ(4)ヨリ(2)ヲ減ジテ

$$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)=0 \qquad (5)$$

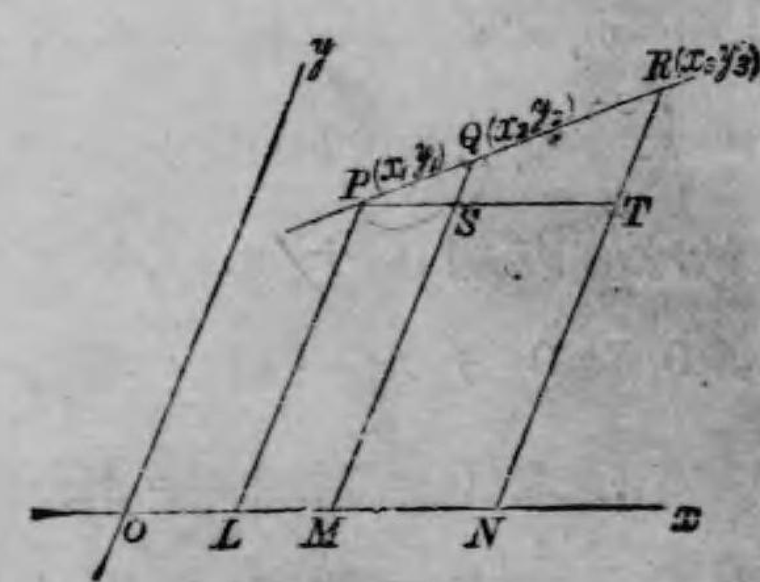
$$a(x_3-x_1)+b(y_3-y_1)=0 \qquad (6)$$

ヲ得. 從ヒテ

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1} \qquad (7)$$

ナル關係アリ. 圖ニ於テ PL, QM, RN ヲ夫々 P, Q, R ヲ過ギリ y 軸ニ平行ナル直線トシ, P ヲ過ギリ x 軸ニ平行ナル直線ガ QM, RN ト交ル點ヲ夫々 S, T トセヨ. (7)ニヨリテ

第十七圖



$$\frac{SQ}{PS}=\frac{TR}{PT} \qquad (8)$$

ナルコトヲ知ル. 故ニ PQ, PR ヲ結ビ付クルトキハ,二ツ

ノ三角形 PSQ, PTR ハ相似ナリ,從テ P, Q, R 三點ハ一直線上ニアリ. 而シテコヽニ P, Q, R ハ今考フル處ノ軌跡上ノ任意ノ三點ナルヲ以テ,結局此軌跡ハ全部直線 PQ 中ニ含マルヽモノナルコトヲ知ル.

次ニ此逆即チ(1)ヲ滿足スル二點 P, Q ガ決定スル直線上ノ凡テノ點ハ皆方程式(1)ヲ滿足スルコトヲ證明セントセバ直線 PQ 上ニ任意ニ一點 R ヲ取リ, P, Q, R ノ座標及上圖ノ諸點ヲ前ノ如ク其儘襲用スルコトヽス. 然ラバ先ヅ(8)ヨリ(7)ヲ得. 一方ニ於テ(2),(3)ハ依然トシテ成立スルニヨリ,(5)ヲ得. サテ(5)ト(7)トヨリ(6)ヲ得ベク,(6)ト(2)ニヨリテ(4)ヲ得ベシ,即チ R ハ又(1)ヲ滿足スル點トナル.

故ニ一次方程式ノ軌跡ハ直線ナリ.

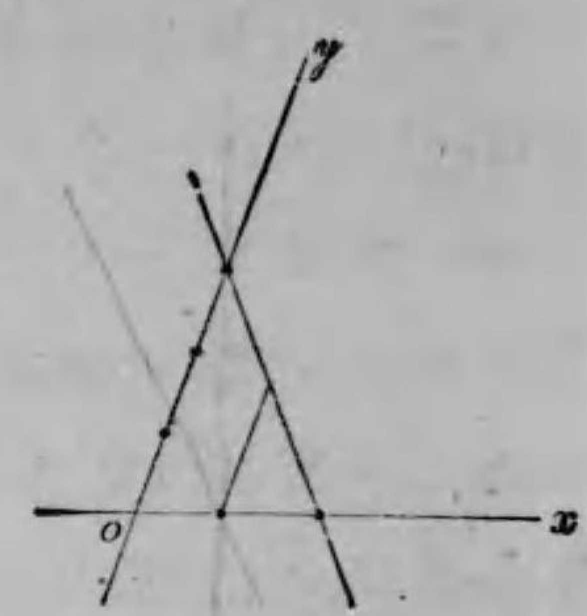
方程式(1)ノ表ハス直線ト云フベキヲ略シテ單ニ(1)ナル直線又ハ直線(1)ト呼ブコトアリ. 其直線ノ圖ヲ書カンニハソノ上ノ二點ヲ決定シ得バ足レリ. 即チ(1)ヲ滿足スル二組ノ相異ナル x, y ノ値ヲ求メ,ソレヲ座標トシテ有スル二點ヲ求メテ之ヲ結ビ付クベシ.

一般ニ點 (x', y') ガ直線 $ax+by+c=0$ ノ上ニアルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ハ $ax'+by'+c=0$ ナリ. 特ニ此直線ガ原點ヲ過ルタメノ條件ハ $c=0$ ナリ.

【例】1. $3x+2y=6$ ナル直線ヲ書ケ.

順次ニ $x=0$, $x=1$ ト置カバ,之ニ對シテ $y=3$, $y=\frac{3}{2}$ ヲ得. 依テ二點 $(0,3)$, $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ ヲ連結シテ求ムル直線ヲ得.

第十八圖

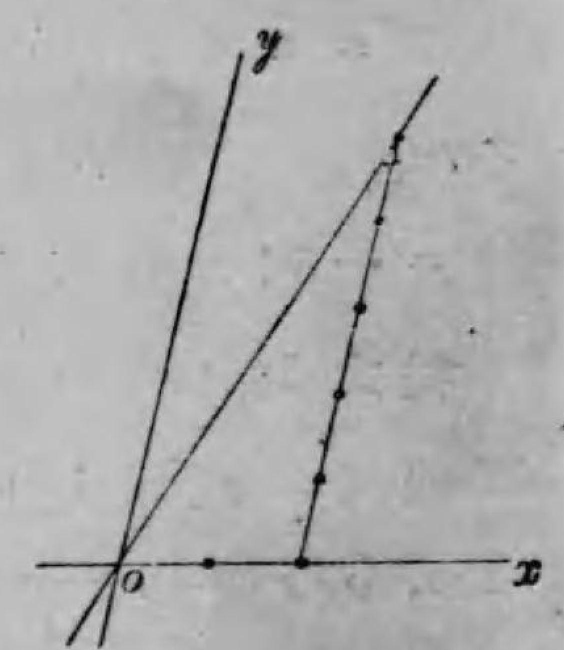


或ハ $x=0$ 及ビ $y=0$ ト置キテ夫々 $y=3$ 及ビ $x=2$ ヲ求メ二點 $(0,3)$, $(2,0)$ ヲ結ブモ可ナリ.

【例】2. $2y=5x$ ナル方程式ノ軌跡ヲ畫ケ.

此式ハ一次式ニシテ且常數項ヲ缺クヲ以テ,原點ヲ過ル直線ヲアラハスベシ,サレバ之ヲ畫カンニハ原點以外更ニ一點ヲ求ムレバ可ナリ. 依テ試ミニ $x=2$ ト置カバ, $y=5$ ヲ得. 故ニ原點ト $(2,5)$ ナル點トヲ結ビテ求ムル直線ヲ得.

第十九圖



k ガ零ニアラザル任意ノ常數ナルトキ

$$kax+kby+kc=0 \tag{9}$$

ハ方程式トシテハ全ク(1)ト同等ノモノナルニヨリ,ソノアラハス直線モ亦兩者同一ノモノナラザル可ラズ. 又逆ニ(1)ト同ジ直線ヲアラハス方程式ハ必ズ(9)ノ形ヲ有スベキコトハ次ノ如クニ證明セラル.

今 $$a'x+b'y+c'=0 \tag{10}$$

ナル方程式ガ(1)ト同ジ直線ヲアラハストシ,先ヅ最初(1)ニ於テ $a\neq0$, $b\neq0$ ナリトセヨ. 二點 $\left(0,-\frac{c}{b}\right)$ 及ビ $\left(-\frac{c}{a},0\right)$

ハ共ニ直線(1)ノ上ニアルヲ以テ,同時ニマタ直線(10)上ノ點ナラザル可ラズ. 故ニ

$$b'\left(-\frac{c}{b}\right)+c'=0,\qquad a'\left(-\frac{c}{a}\right)+c'=0.$$

此ヨリ, $c\neq0$ トセバ,

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}.$$

ヲ得. モシ $c=0$ ナラバ,從テ $c'=0$ ヲ得. 而シテ此場合ニハ上ニ取リタル二點ハ共ニ原點ト一致スルヲ以テ,更ニ他ノ一點例ヘバ $(-b,a)$ ヲ取リテ(10)ニ入レテ

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}$$

ヲ得.

次ニ,(1)ニ於テ $a=0$, $b\neq0$ ナル時ハソノ軌跡ハ x 軸ニ平行ナル直線ニシテ $y=-\frac{c}{b}$ ナル方程式ヲ有スベキニヨリ,從テ(10)ニ於テモ亦 $a'=0$ トナリ,且

$$-\frac{c'}{b'}=-\frac{c}{b}$$

即チ一般ニ $c\neq0$ ナラバ

$$\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$$

ナラザル可ラズ. モシ又 $c=0$ ナラバ, $c'=0$ ヲ得. 最後ニ $a\neq0$, $b=0$ ナル場合モ同樣ニ論ズルコトヲ得.

之ヲ要スルニ,スベテノ場合ヲ通ジテ **(10) ト (1) トガ同一ノ直線ヲアラハスタメニハ必ズヤ**

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$$

ナラザル可ラズ. 但シコヽニモシ分母ガ零ナルコトアラバ,ソレニ對スル分子モ亦零トナスベキモノト規約ス.此相等シキ分數ノ値ヲ各 k ト置カバ $a'=ka$, $b'=kb$, $c'=kc$ ニシテ, (10) ハ即チ (9) トナル. 故ニ (9) ハ (1) ト同一ノ直線ヲアラハス最モ一般ナル式ナリトイフヲ得ベシ.

之ニヨリテ見レバ,アル一次方程式ノアラハス直線ハ常ニソノ係數(常數項ヲモ含ム)ノ比 $a:b:c$ ニヨリテ決定セラルヽモノナリ.

17. 直線ノ方程式.

前節ニ於テ一次方程式ノ軌跡ハ直線ナルコトヲ知レリ. 逆ニ,任意ニ與ヘラレタル直線ハ必ズアル一次方程式ニヨリテアラハサルヽコトモ容易ニ證明セラル. 何トナレバ,今其與ヘラレタル直線ヲ新ラシキX軸トシ,之ト交ハル一ノ他ノ直線ヲ新ラシキY軸トシ,コノ新ラシキ座標軸ニ關シテ與ヘラレタル直線ノ方程式ヲ考フレバ明カニ $Y=0$ ナリ. 而シテコレヨリ座標軸ノ變換ニヨリテ舊座標軸ニ關シテノ方程式ヲ求ムルニ,第15節(6)ニヨリ,トニカク x, y ニツイテノアル一次式ヲ得. 即チ一ノ任意ノ直線ノ方程式ハ必ズ $ax+by+c=0$ ナル形ニヨリテ表ハサルベキモノナリ. 本節ニ於テハ種々ノ條件ノ

下ニ於テ與ヘラレタル直線ノ方程式ヲ求ムルコトヲ考ヘントス.

I. 與ヘラレタル直線ノ方程式ヲ

$$ax+by+c=0 \tag{1}$$

トスルトキ,此直線ガ一點 $P(x_1, y_1)$ ヲ過ルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ハ

$$ax_1+by_1+c=0 \tag{2}$$

ナリ. 此ニヨリテ (1) ニ於テ未定ナリシ係數 a, b, c ノ中何レカ一ツハ之ヲ消去スルコトヲ得ベシ. 例ヘバ (1) ヨリ (2) ヲ減ズレバ

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0 \tag{I}$$

トナリ, c ヲ除クコトヲ得. 殘レル a, b ヲ種々ニ變スレバ,**此式ハ一點 $P(x_1, y_1)$ ヲ過ル種々ノ直線ヲアラハスベシ.**

モシ $b=0$ トセバ, (I) ハ $x-x_1=0$ トナリ, P ヲ過リ y 軸ニ平行ナル直線トナル. 又 $b\neq0$ トセバ, b ニテ兩邊ヲ割リ,項ヲ移シテ

$$y-y_1=m(x-x_1) \tag{I'}$$

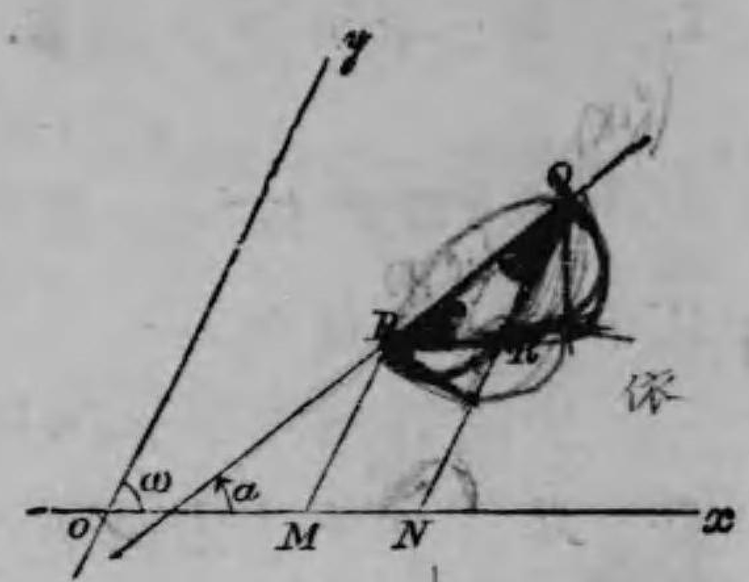
ナル形トスルコトヲ得ベシ,コヽニ $m=-\frac{a}{b}$ ナリ. (I′) ハ P ヲ過リ, y 軸ニ平行ナラザル直線ノ一般ノ式ナリ.

II. 今 (I′) ノアラハス直線ヲ PQ トシ,之ガ x 軸ノ正ノ方向トナス角ヲ Ox ノ方ヨリ計リテ α トシ,又軸ノ間ノ角ヲ ω トス. 此直線上ニ任意ノ一點 Q ヲトリ,ソノ座標ヲ (x, y) トス. PM, QN ヲ y 軸ニ平行ニ引キ,又 PR ヲ x 軸

ニ平行ニ引キ,之トQNトノ交點ヲRトセヨ.

$PR=x-x_1,\quad RQ=y-y_1,$

第二十圖



$\angle PQR=\omega-\alpha,\quad \angle RPQ=\alpha.$

故ニ

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{RQ}{PR}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}$$

ナリ. 此結果ハ,αノ計リ方ヲ常ニ上記ノ如クセバ,圖ノ形ノ如何ニ關ラズ眞ナリ. 依テ次ノ如ク云フコトヲ得.

一點$P(x_1, y_1)$ヲ過リ,且x軸トαナル角ヲナス直線ノ方程式ハ

$$y-y_1=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}(x-x_1) \tag{II}$$

ナリ. 特ニ直交軸ノ場合ニハ

$$y-y_1=\tan\alpha(x-x_1)$$

即チ

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\sin\alpha} \tag{II'}$$

ヲ得

コヽニ兩邊ノ各分數ヲlニ等シト置カバ,

$$\left\{\begin{aligned} x&=x_1+l\cos\alpha\\ y&=y_1+l\sin\alpha\end{aligned}\right. \tag{II''}$$

lハPヨリ此直線上ノ任意ノ一點(x,y)ニ至ル迄ノ距離ヲ表ハスモノニシテ,ソノ符號ハソノ線分ガPヨリx軸トαナル角ヲナス方向ニ向ヘルトキハ正ニシテ,之ニ反スルトキ,即チ$\alpha\pm180^\circ$ノ如キ角ヲナストキハ負ナリ.

前ニ(I')ニ於テ誘出セル係數mハ斯ノ如ク直線ノ方向ニ關係ヲ有スルヲ以テ,之ヲ名ケテ**方向係數**又ハ**角係數**トイフ,一般ニ斜交軸ニ於テハ

$$\left.\begin{aligned} m&=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}\\ \text{特ニ直交軸ニ於テハ}\quad m&=\tan\alpha\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ナル意義ヲ有スルモノナリ.

III. y軸ヲ原點ヨリbナル距離ニテ截リ,且x軸トαナル角ヲナス直線ノ方程式 ヲ求メンニハ,(II)ニ於テ,$x_1=0,\ y_1=b$ト置ク. 即チ

$$y=mx+b \tag{III}$$

ニシテ,コヽニmハ(3)ニテ定メタル値ヲ有スルモノトス.

此レハ(II)ノ簡單ナル特別ノ場合ニ過ギザレドモ,獨立シテ用ヒラルヽコト多ケレバ矢張一個ノ公式トナシ置クヲ便トス.

IV. 與ヘラレタル二點$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ヲ過ル直線ノ方程式ヲ求メンニハ,(I)ニ於テa及ビbヲ適當ニ選ビテ此直線ガ更ニ(x_2, y_2)ヲ過ル樣ニスレバ可ナリ. 即チ

$m=\frac{RQ}{PR}=$

$$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)=0 \qquad (4)$$

ナル如クニ a, b ヲ取レバ可ナリ.

モシコヽニ $x_2-x_1=0$ ナラバ, $b=0$ ヲ得. 從ヒテ求ムル方程式ハ $x-x_1=0$ トナル. 然ラザレバ一般ニ (4) ト (I) トヨリ a, b ヲ消去シテ

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad \text{(IV)}$$

又ハ

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad \text{(IV')}$$

ヲ得.

此式ハマタ次ノ如クニシテ求ムルコトヲ得ベシ. 先ヅ求ムル方程式ヲ

$$ax+by+c=0 \qquad (5)$$

ト假定セヨ,二點 (x_1, y_1), (x_2, y_2) ガ何レモソノ上ニアルヲ以テ

$$ax_1+by_1+c=0 \qquad (6)$$
$$ax_2+by_2+c=0 \qquad (7)$$

ナル關係アリ, (5), (6), (7) ノ間ニ a, b, c ヲ消去シテ

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad \text{(IV'')}$$

ヲ得. コレ即チ求ムル處ノ方程式ニシテ (IV) ト同一ノモノナリ.

V. 一ノ直線ガ x 軸及ビ y 軸ト夫々 A, B ニ於テ交ル

トキ,符號ヲ帶ビタル線分 OA, OB ヲ稱シテ此直線ガ夫々 x 軸及ビ y 軸ノ上ニ作ル**截片**トイフ.

截片ガ夫々 a 及ビ b ナル如キ直線ノ方程式ヲ求メンニハ,二點 $(a, 0)$, $(0, b)$ ヲ過ル直線ノ方程式ヲ作ルベシ. 即チ

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix}=0$$

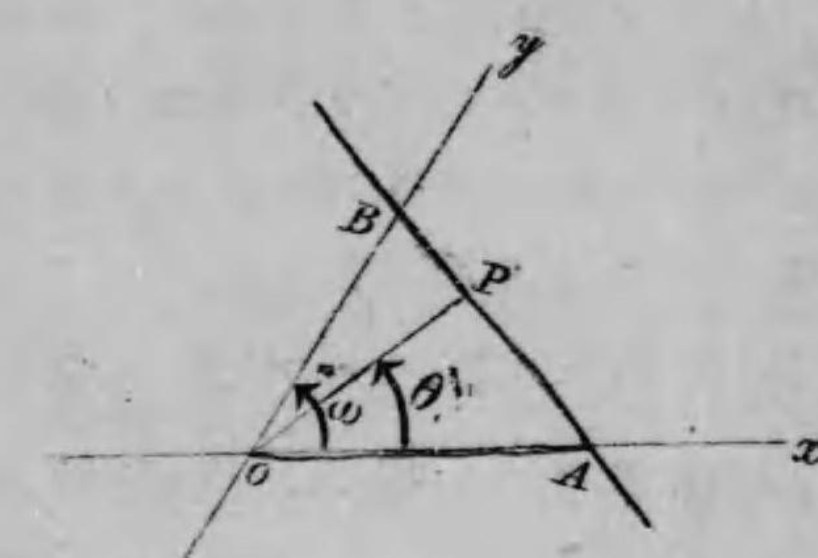
之ヲ簡單ニシテ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad \text{(V)}$$

ヲ得ベシ.

VI. 與ヘラレタル直線ガ x 軸及ビ y 軸ト交ル點ヲ夫々 A, B トシ,又原點ヨリ此直線ニ下セル垂線ノ足ヲ P トス. **今 OP=p 及ビ $\angle x$OP=θ ヲ知リテ,此直線ノ方程式ヲ求メントス.**

第二十一圖



但シ θ ノ計リ方ハ常ニ Ox ノ方ヨリ計ルモノトシ,又 p ハ正ナリトス.

先ヅ直線ノ兩軸上ニ作ル截片ヲ求ムレバ

$$\text{OA}=p\sec\theta$$

$$OB = p\sec(\omega-\theta)$$

ナリ. 故ニ求ムル方程式ハ(V)ニヨリテ

$$\frac{x}{p\sec\theta}+\frac{y}{p\sec(\omega-\theta)}=1$$

即チ

$$x\cos\theta+y\cos(\omega-\theta)-p=0 \tag{VI}$$

トナル. 特ニ直交軸ナルトキハ

$$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0 \tag{VI'}$$

ナリ.

今ハ假リニpヲ正ナリト考ヘタレドモ,必ズシモ常ニ正ト限ルヲ要セズ,極座標ノ動徑ニ正負ノ符號ヲ用ヒタルト同樣ノ規約ニヨリ,pニ正負兩樣ノ値ヲ與フルコトヲ得ベシ. 即チ∠xOP ヲθトスルトキハ,OP ノ方向ヲpノ正ノ方向トシ,PO ヲ O ヲ越エテ延長セル方向ヲ負ノ方向トス. サレバθヲ 180° ノ偶數倍ダケ變ズルトキハpハ符號ヲ變セズ,θヲ 180° ノ奇數倍ダケ變ズルトキハpハ符號ヲ變ズルコトヽナル. 然ルニ角ノ正弦及ビ餘弦ハ前者ノ場合ニ於テハ不變ニシテ,後者ノ場合ニ於テハ共ニソノ符號ヲ變ズルニヨリ,結局(VI)及ビ(VI')ノ式ハpノ負ノ値ヲ採用スル時ニモナホ眞ナルモノナリ. 然レドモ特ニ必要ナキ限リハ通常pハ正ナルモノト定ム.

直交軸ニ關シテアラハサレタル直線ノ方程式(VI')ヲソノ**標準形**ト稱ス. 直交軸ニ關シテ任意ニ與ヘラレタル直線ノ方程式ハ常ニ之ヲ標準形ニ直スコトヲ得ベシ. 即チ

$$ax+by+c=0 \tag{5}$$

ヲ與ヘラレタル方程式ナリトシ,(VI')ヲシテ之ト同一ノ直線ヲアラハサシメンニハ前節ノ終リニ述タル理ニヨリテ

$$\frac{\cos\theta}{a}=\frac{\sin\theta}{b}=\frac{-p}{c}$$

ナル如クニθ及ビpヲ定ムベシ. 此各分數ヲkニ等シト置カバ

$$\cos\theta=ka, \qquad \sin\theta=kb,$$

從テ

$$1=k^2(a^2+b^2)$$

ニシテ

$$k=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

故ニ

$$\cos\theta=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\theta=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad -p=\pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

而シテpヲ正トスルニヨリ,コヽニ複號±ハ最後ノ式ニ於テ右邊ヲ負トスル樣ニ,即チcノ値ト反對ノ符號ヲトル樣ニセザル可ラズ. 之ニ依テ下ノ如ク云フヲ得ベシ.

方程式(5)ヲ標準形ニ化センニハ,其式全體ヲ$\pm\sqrt{a^2+b^2}$ニテ除シ,而シテソノ複號ハ常數項ヲ負ナラシムル樣ニ取ルベシ.

【例】1. 軸ノ間ノ角ガ 60° ナルトキ,(−1, 3)ナル點ヲ過リ,x軸ト 120° ノ角ヲナス直線ノ方程式ヲ求ム.

公式(II)ニヨリ

$$y-3=\frac{\sin 120^\circ}{\sin(60^\circ-120^\circ)}(x+1)$$

$$=-(x+1)$$

即チ $x+y-2=0.$

【例】2. 二點 (2, 1), (4, −2) ヲ過ル直線ノ方程式ヲ作リ,其方向係數ヲ求ム.

公式 (IV) ニヨリ

$$\frac{y-1}{x-2}=\frac{-2-1}{4-2}.$$

即チ $3x+2y-8=0.$

之ヲ書キ直セバ

$$y=-\frac{3}{2}x+4$$

故ニ方向係數ハ $-\frac{3}{2}$ ナリ.

【例】3. 直線 $3x-4y+9=0$ ノ兩軸上ニ作ル截片ヲ求ム.

與ヘラレタル式ヲ書キ直シ右邊ヲ1ナラシメバ

$$\frac{3x}{-9}-\frac{4y}{-9}=1$$

即チ

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{\frac{9}{4}}=1$$

故ニ截片ハ −3 及ビ $\frac{9}{4}$ ナリ.

或ハ順次ニ $y=0$ 及ビ $x=0$ ト置キテ直チニ原式ヨリ

$$x=-3 \quad 及ビ \quad y=\frac{9}{4}$$

ヲ得ベシ.

【例】4. 直交軸ニ關シテ $2x+3y+6=0$ ナル直線アリ. 原點ヨリ之ニ下セル垂線ノ長サ,及ビソノ垂線ノ x 軸トナス角ヲ求ム.

與ヘラレタル式ヲ標準形ニ直サバ

$$\frac{2x+3y+6}{-\sqrt{2^2+3^2}}=0$$

即チ

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x-\frac{3}{\sqrt{13}}y-\frac{6}{\sqrt{13}}=0$$

故ニ求ムル垂線ノ長サヲ p トシ,ソノ x 軸トナス角ヲ θ トセバ

$$p=\frac{6}{\sqrt{13}},\quad \cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{13}},\quad \sin\theta=-\frac{3}{\sqrt{13}}$$

ニシテ,θ ハ第三象限ニアル角ナリ. (コノ直線ノ圖ヲ畫キテ見ヨ).

18. 二直線ノナス角.

二ツノ與ヘラレタル直線ガ何レモ y 軸ニ平行ナラザル時ハ,ソノ方程式ヲ常ニ

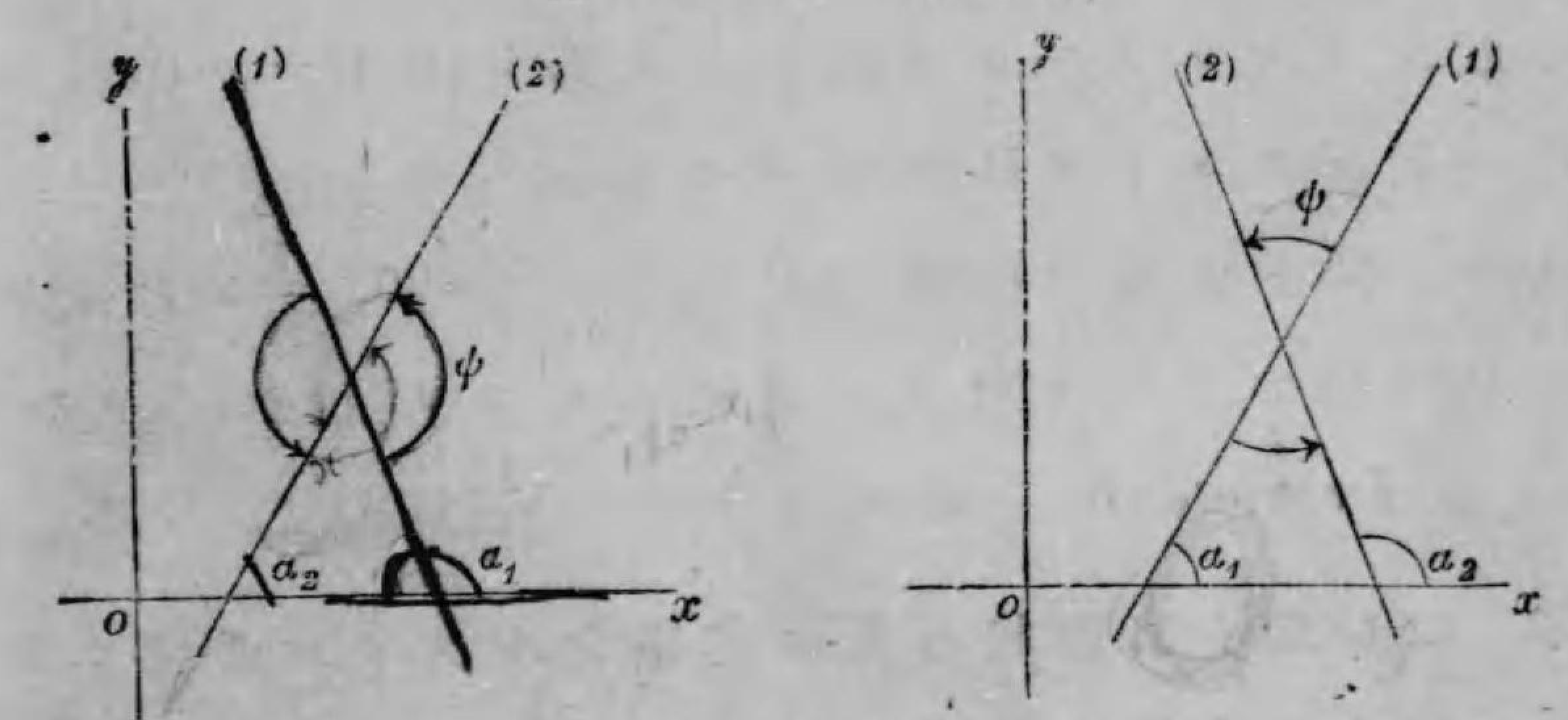
$$y=m_1x+b_1 \qquad (1)$$

$$y=m_2x+b_2 \qquad (2)$$

ナル形ニ置クコトヲ得ベシ. 特ニ今直交軸ノ場合ヲ考ヘ,此二直線ガ x 軸トナス角ヲ夫々 α_1 及ビ α_2 トセヨ,然ルトキハ

$$m_1=tan\alpha_1, \qquad m_2=tn n\alpha_2$$

第二十二圖



ナリ. 故ニ,此二直線ノナス角ヲ(1)ノ方ヨリ(2)ニ向テ時計ノ針ノ進行ト反對ノ方向ニ計リタルモノヲ ϕ トセバ一般ニ

$$\phi=\alpha_2-\alpha_1+n.180^\circ$$

ナルベシ,玆ニ n ハ任意ノ負ナラザル整數トス. 故ニ

$\phi=\alpha_2-(180-\alpha_1)$

$2\pi-\alpha_1-(\frac{180}{\pi}-\alpha_2)$

$$\tan\phi=\tan(\alpha_2-\alpha_1)$$

$$=\frac{\tan\alpha_2-\tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_1\tan\alpha_2}$$

即チ

$$\tan\phi=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2} \qquad (3)$$

ナル式ヲ得ベシ.

特ニ(1)ト(2)トガ平行ナルトキハ $m_1=m_2$ ナルヲ以テ, $\tan\phi$ ハ零トナリ,從テ ϕ ハ $0°$ 又ハ一般ニ $180°$ ノ整數倍ナル角トナルベシ. 此故ニ解析幾何學ニ於テハ平行ナル二直線ノナス角ハ常ニ $180°$ ノ倍數ナルモノト稱フルコトニ定ム. コノ規約ノ至當ナルコトハ第二十二圖ニ於テ(1)ヲソノマヽニ置キ,(2)ヲ漸々回轉シテ(1)ト平行ノ位置ニ近ヅクルコトニヨリ,角 ϕ ガ次第ニ限リナク $0°$ 又ハ $180°$ ニ近ヅクコトヲ見テ知ルベシ.

又(1)ト(2)トガ互ニ垂直ナルトキハ, $\phi=90°$ ニシテ從ヒテ $\tan\phi=\pm\infty$ ナラザル可ラズ. 故ニ(3)ヨリ

$$1+m_1m_2=0 \qquad \text{即チ} \qquad m_2=-\frac{1}{m_1}$$

ヲ得. **コレ即チ二直線ガ互ニ垂直ナルタメノ必要ニシテ且十分ナル條件ナリ**(直交軸).

コノ垂直ナル條件ハスベテ與ヘラレタル直線ガ何レモ y 軸ニ平行ナラザル場合ニハ常ニ眞ナレドモ,モシソノ一方ガ y 軸ニ平行ナルトキハ必ズシモ上ニ述タル處ニ當テ嵌ラズ. (例4ヲ見ヨ)

直交軸ニ關シ,二ツノ直線ノ方程式ガ一般ニ

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0$$

ナルトキ,此等ガ何レモ y 軸ニ平行ナラズトセヨ,然ラバ b_1, b_2 ハ0ニアラズ. 依テ夫々ノ方向係數 m_1, m_2 ハ

$$m_1=-\frac{a_1}{b_1}, \qquad m_2=-\frac{a_2}{b_2}$$

ナリ. 故ニ此二直線ノナス角ヲ ϕ トスルトキハ

$$\tan\phi=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1a_2+b_1b_2}. \qquad (4)$$

此場合ニ於テハ,二直線ノ **平行ナル條件ハ**

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$$

ニシテ, **垂直ナル條件ハ**

$$a_1a_2+b_1b_2=0$$

$-\frac{a_1}{b_1}$ $-\frac{a_2}{b_2}$ $1+\frac{a_1a_2}{b_1b_2}=0$

ナリ.

【例】1. 直交軸ニ關シ二直線 $x+3y-2=0$ 及ビ $x=2y$ ノナス角ヲ求ム.

此二直線ヲ夫々(1), (2)トシ,ソノ方向係數ヲ m_1, m_2 トシ(1)ヨリ(2)ニ向テ計リタル角ヲ ϕ トセヨ,

$$m_1=-\frac{1}{3}, \qquad m_2=\frac{1}{2}$$

ナルヲ以テ

$$\tan\phi=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}=1,$$

故ニ $\phi=45°$ ナリ.

【 】2. 直交軸ニ於テ點$(-3, 2)$ヲ過ギリ$3x-4y+2=0$ト30°ノ角ヲナス直線ノ方程式ヲ作レ.

與ヘラレタル直線ノ方向係數ハ$\frac{3}{4}$ナルヲ以テ,y軸ハ此直線ト30°ノ角ヲナサズ. 故ニ求ムル處ノ直線ハy軸ニ平行ナラズ. 依テ第17節$(1')$ニヨリ,ソノ方程式ハ

$$y-2=m(x+3)$$

ナル形ニテ表ハシ得ベク,mハ

$$\tan 30^\circ=\frac{m-\frac{3}{4}}{1+\frac{3m}{4}} \quad \text{又ハ} \quad \tan 30^\circ=\frac{\frac{3}{4}-m}{1+\frac{3m}{4}}$$

ヨリ定ムベキモノナリ. 即チ

$$m=\frac{4\pm3\sqrt{3}}{\pm4\sqrt{3}-3}$$

ト置クベキナリ. 依テ求ムル方程式ハ

$$(4\pm3\sqrt{3})x+(3\mp4\sqrt{3})y+6\pm17\sqrt{3}=0$$

ナリ

【例】3. 前問ニ於テ與ヘラレタル點ヲ過ギリ與ヘラレタル直線ニ平行ナル直線及ビ垂直ナル直線ノ方程式ヲ求ム.

求ムル直線ハ何レモy軸ニ平行ナラザルコト明カナリ. 依テ之ヲ

$$y-2=m(x+3)$$

トス. 之ガ與ヘラレタル直線ニ平行ナルニハ,

$$m=\frac{3}{4}$$

トナル.故ニ

$$3x-4y+17=0$$

ヲ得. 又垂直ナルタメニハ

$$m=-\frac{4}{3}$$

トナル可シ, 故ニ

$$4x+3y+6=0$$

トナル.

【例】4. 直交軸ニ於テ三ツノ直線

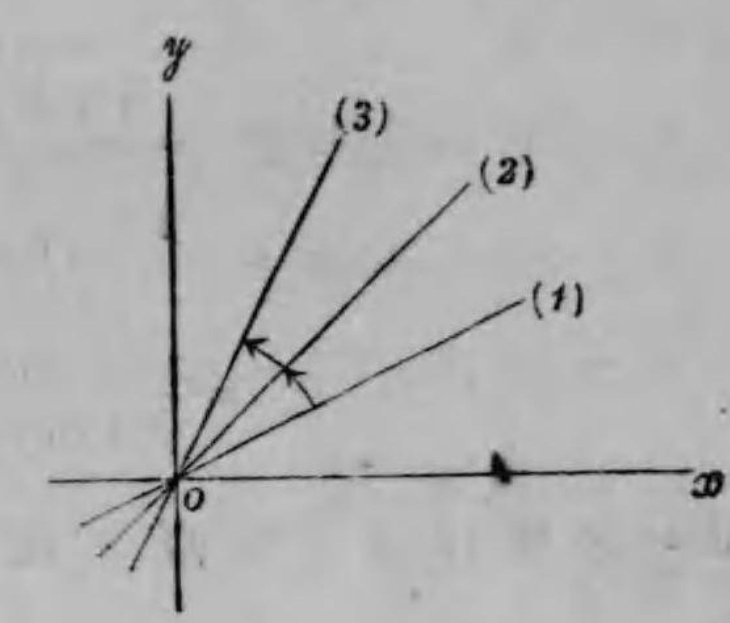
$$y=m_1x \qquad (1)$$

$$y=x \qquad (2)$$

$$y=m_2x \qquad (3)$$

アリ. 今(1)及ビ(3)ガ(2)ノ兩側ニアリテ,之ト相等シキ角ヲナスタメニハ,(1)ヨリ(2)ニ向ツテ計リタル角ト,(2)ヨリ(3)ニ向ツテ計リタル角トガ相等シカラザル可ラズ.故ニ

第二十三圖



$$\frac{1-m_1}{1+m_1}=\frac{m_2-1}{1+m_2}$$

即チ

$$m_1m_2=1$$

ナル條件ヲ得. 今此關係ヲ維持シツヽm_1ガ限リナク0ニ近ヅクトキハ,m_2ハ無限大トナルベク,遂ニ(1),(3)ハ夫々x軸及ビy軸トナルベシ, 然ルトキハ(1)ト(3)トハ相互ニ垂直トナル筈ナレドモ$1+m_1m_2=0$ニハアラズシテ却ツテ$m_1m_2=1$ナリ. 即チ,考フル處ノ直線中y軸ニ平行ナル方向ヲ有スルモノアルトキハ,先キニ得タル垂直ノ條件ハ必シモ眞ナラズ.

以上スベテ直交軸ヲトリテ論ジタレドモ,モシ斜交軸ナルトキハ方向係數ハ

$$m=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)} \qquad \text{〔41頁〕}$$

ナルニヨリ,之ヨリ

$$m=\frac{\tan\alpha}{\sin\omega-\cos\omega\tan\alpha}$$

從テ

$$\tan\alpha=\frac{m\sin\omega}{1+m\cos\omega}$$

ヲ得. 故ニ(3)ノ代リニ次ノ式ヲ得ベシ.

$$\tan\phi=\frac{\dfrac{m_2\sin\omega}{1+m_2\cos\omega}-\dfrac{m_1\sin\omega}{1+m_1\cos\omega}}{1+\dfrac{m_1m_2\sin^2\omega}{(1+m_1\cos\omega)(1+m_2\cos\omega)}}$$

$$=\frac{(m_2-m_1)\sin\omega}{1+(m_1+m_2)\cos\omega+m_1m_2} \tag{5}$$

而シテ平行及ビ垂直ノ條件ハ夫々

$$m_1=m_2$$

及ビ $$1+(m_1+m_2)\cos\omega+m_1m_2=0$$

ナリ.

19. 二直線ノ交點.

二ツノ直線ノ方程式ヲ

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \tag{1}$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \tag{2}$$

トス. 此二直線ノ交點ハ同時ニ兩直線上ニアル點ナルヲ以テ,ソノ座標ハ(1),(2)ヲ同時ニ滿足ス~~セザル可ラヌ~~. 逆ニ又(1),(2)ヲ同時ニ滿足スル x 及ビ y ノ値ヲ座標ニ有スル點ハ同時ニ兩直線上ニアルヲ以テソノ交點ナリ~~ラザル可ラズ~~. 故ニ交點ノ座標ヲ求ムルニハ(1)及ビ(2)ヲ聯立方程式トシテ解ク可シ. 即チ

$$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},\qquad y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

是ナリ.

直線(1),(2)ガ平行ナラザルトキハ,此式ニ於ケル分母ハ零ナラズ. 故ニ唯一組ノ確定セル x 及ビ y ノ値ヲ得. 從テ確定セル一個ノ交點ヲ得. モシ二直線ガ平行ニシテ相合セザルトキハ,分母ハ零トナレドモ,分子ハ一般ニ零ナラズ. 故ニ x 及ビ y ノ中少クモ一方ハ無限大トナリ,交點ハ無究遠ニアルコトヽナル. モシ二直線ガ全ク相一致スルトキハ,分母分子共ニ零トナリ,x 及ビ y ハ確定セズ.

今 m,n ヲ任意ノ常數トシテ,(1)及ビ(2)ヨリ,

$$\left.\begin{array}{ll} & m(a_1x+b_1y+c_1)+n(a_2x+b_2y+c_2)=0 \\ \text{即チ} & (ma_1+na_2)x+(mb_1+nb_2)y+(mc_1+nc_2)=0 \\ \text{或ハ單ニ略記シテ} & m(1)+n(2)=0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

ナル方程式ヲ作ラバ,(1),(2)ガ平行ナラザル限リ

$$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}\quad \text{或ハ}\quad a_1b_2\neq a_2b_1$$

1. $a_1b_2\neq a_2b_1$
2. m,n ハ同時ニ0ナラズ

ナルヲ以テ(3)ニ於テ x 及ビ y ノ係數ハ $m=0,n=0$ ノ外同時ニ零トナルコトナシ,從ヒテ(3)ハ常ニ~~或ル一定ノ~~直線ヲ表ハスベシ. 而シテ(1)ト(2)トヲ同時ニ滿足スル x,y ノ値,即チ交點ノ座標ハ~~マタ從テ~~(3)ヲ滿足~~セザル可ラザ~~スルニヨリ,(3)ハ(1)(2)ノ交點ヲ過ル直線ヲ表ハスベシ.

而シテコヽニ m,n ハ任意ノ値ヲトラシメ得ベキニヨリ,之ヲ適當ニ定ムルコトニヨリ,(3)ヲ以テ(1),(2)ノ交點ヲ過ル任意ノ直線ヲアラハシ得ベシ. モシ $m=0$ 又ハ $n=0$

ナラバ(3)ハ夫々(2)又ハ(1)ト合ス．此場合ヲ除キテ,其他ノ直線ヲアラハスニハ,(3)ノ全體ヲm又ハnノ何レカニテ除シタル形,即チ

$$(1)+k(2)=0 \quad 又ハ \quad k(1)+(2)=0$$

ニテ足レリ．

モシ(1)ト(2)トガ平行ナルトキハ

$$-\frac{n}{m}=\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$$

ナル如キm,nヲ取リタルトキニ,(3)ハx及ビyノ項ヲ失フヲ以テ,之ヲ直線ノ方程式ナリト云フヲ得ズ．然レドモソノ他ノ場合ニ於テハ矢張一ノ直線ヲアラハス,而シテ

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{ma_1+na_2}{mb_1+nb_2}$$

ナルヲ以テ,(3)ハ(1)及ビ(2)ニ平行ナルコトヽナル．

此ニ除外シタル,x及ビyノ係數ガ共ニ零トナル場合ニツイテハ或ハ次ノ如ク考フルモ可ナリ．今一ツノ直線$ax+by+c=0$ガ兩軸上ニ作ル截片ヲ考フルニ,夫々$-\frac{c}{a}$及ビ$-\frac{c}{b}$ナリ．依テ$c\neq0$トシテ,a及ビbガ共ニ零ニ限リナク近ヅクトキニ,兩截片ハ共ニ無限大トナル．故ニ$c\neq0$ナルトキ

$$0.x+0.y+c=0$$

ハ無究遠ニアル直線ヲアラハスト稱スルヲ得ベシ．

モシ更ニ$c=0$ナルトキハ全然直線ヲ表サズ．

【例】1.　二直線$2x+3y+1=0$, $x+y+1=0$ノ交點ト原點トヲ過ギル直線ノ方程式ヲ求ム．

先ヅ求ムル直線ハ二直線ノ交點ヲ通ズルガ故ニ

$$(2x+3y+1)+k(x+y+1)=0.$$

即チ

$$(2+k)x+(3+k)y+(1+k)=0$$

ナル形ノ方程式ヲ有スベシ．

而シテ更ニ(0, 0)ヲ通ズルガ故ニ

$$1+k=0 \quad 即チ \quad k=-1$$

ナラザル可ラズ．故ニ

$$x+2y=0.$$

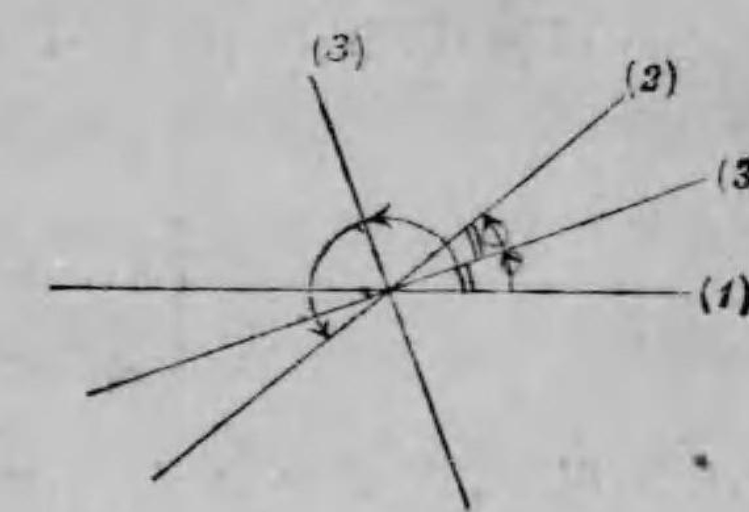
【例】2.　二直線

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \qquad (1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \qquad (2)$$

ノ間ノ角ノ二等分線ヲ求ム．

第二十四圖



求ムル二等分線ハ二ツアリ．先ヅソノ一ツニツイテ考フルニ其方程式ノ形ハ

$$(a_1x+b_1y+c_1)+k(a_2x+b_2y+c_2)=0 \quad (3)$$

ニシテ,コヽニ(3)ハ二ツノ二等分線ノ中ノ何レナリトスルモ,トニカク(1)ヨリ(3)マデ計リタル角ト,(3)ヨリ(2)マデ計リタル角トハ相等シカルベキニヨリ,第18節(4)ニヨリ

$$\frac{a_1(b_1+kb_2)-b_1(a_1+ka_2)}{a_1(a_1+ka_2)+b_1(b_1+kb_2)}=\frac{b_2(a_1+ka_2)-a_2(b_1+kb_2)}{b_2(b_1+kb_2)+a_2(a_1+kb_2)}.$$

從テ

$$\frac{(a_1b_2-a_2b_1)k}{(a_1^2+b_1^2)+(a_1a_2+b_1b_2)k}=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2^2+b_2^2)k}.$$

今(1)ト(2)トガ平行ナル場合ハ考フルヲ要セザルヲ以テ之ヲ除キ,

$a_1b_2-a_2b_1$ ハ零ナラザルモノトス. 依テ上ノ式ヨリ k ヲ求ムルニ

$$k=\pm\sqrt{\frac{a_1^2+b_1^2}{a_2^2+b_2^2}}$$

ヲ得. 之ヲ(3)ニ代入シテ,二ツノ二等分線ノ式ヲ得,即チ

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}=0.$$

但シコノ二ツノ式ノ中,何レノ式ガ何レノ二等分線ヲアラハスカニツイテハ更ニ後節ニ之ヲ説クベシ. (第21節,例2.〔65頁〕)

20. 共線ナル點, 共點ナル線.

二ツヨリ多クノ點ガ同一直線上ニアルトキハ此等ノ點ハ **共線ナリ** ト稱シ,又二ツヨリ多クノ直線ガ同一ノ點ニ於テ相交ルトキハ此等ノ直線ハ **共點ナリ** ト稱ス.

三點 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$ ガ共線ナルタメニハ,P ガ直線 QR ノ上ニアラザル可ラズ. 然ルニ直線 QR ノ方程式ハ17節(IV'')(42頁)ニヨリ

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

ナルヲ以テ,P ガソノ上ニアルタメノ條件ハ

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

ニシテ,**コレ即チ三點 P, Q, R ガ共線ナルタメノ條件ナリ.**

又三直線

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \qquad (1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \qquad (2)$$

$$a_3x+b_3y+c_3=0 \qquad (3)$$

ガ共點ナルタメニハ直線(2)ト(3)トノ交點ガ(1)ノ上ニアラザル可ラズ. 然ルニ(2)ト(3)トノ交點ノ座標ハ

$$x=\frac{b_2c_3-b_3c_2}{a_2b_3-a_3b_2}, \qquad y=\frac{c_2a_3-c_3a_2}{a_2b_3-a_3b_2}$$

ナルヲ以テ,此點ガ直線(1)ノ上ニアルタメノ條件ハ

$$a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0$$

ニシテ之ヲ行列式ノ形ニ書クトキハ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

トナル. **コレ即チ三直線(1), (2), (3)ガ共點ナルタメノ條件ナリ.**

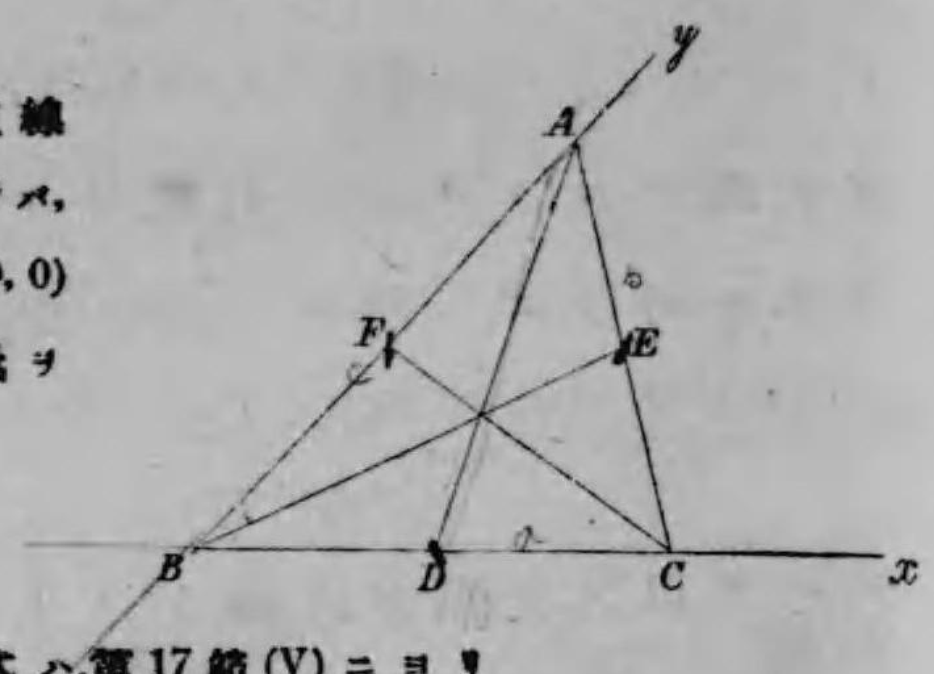
與ヘラレタル三ツノ直線ガ互ニ平行ナルトキハ,此行列式ニ於ケル第一行ト第二行トハ夫々比例スルヲ以テ,常ニ此條件ヲ滿足スベシ. サレバ平行ナル直線ハ常ニ無究遠ニ於ケル一點ヲ共有スルモノトシテ,弘義ニ於テ共點ナルモノト見做スコトヲ得.

次ニコレラノ條件ヲ應用シテ,初等幾何學ニ於ケル問題ヲ解析的ニ解ク例ヲ示サン.

【例】1. 三角形ノ三ツノ中線ハ一點ニ於テ出會フコトヲ證明セヨ.

ABC ヲ一ノ三角形トシ,

第二十五圖



$$BC=a, \qquad BA=c$$

トス. 今 B ヲ座標ノ原點トシ,直線 BC, BA ヲ夫々 x 及 y ノ軸ニ取ラバ, 頂點 A, B, C ノ座標ハ夫々$(0, c)$, $(0, 0)$ $(a, 0)$ ナリ. 邊 BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 D, E, F トセヨ,

$$BD=\frac{a}{2}, \qquad BF=\frac{c}{2}$$

ナルヲ以テ,中線 AD, CF ノ方程式ハ,第17節 (V) ニヨリ

$$\frac{2x}{a}+\frac{y}{c}-1=0 \tag{1}$$

$$\frac{x}{a}+\frac{2y}{c}-1=0 \tag{2}$$

ナリ, 又 E ハ A ト C トノ中點ナルヲ以テソノ座標ハ $\left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right)$ ナリ.
故ニ中線 BE ノ方程式ハ,第17節 (IV) ニヨリ

$$\frac{y}{x}=\frac{c}{a}$$

即チ

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{c}=0 \tag{3}$$

トナル, (1), (2), (3) ガ共點ノ條件ヲ滿足スルコト次ノ如シ.

今 $\begin{vmatrix} \frac{2}{a} & \frac{1}{c} & -1 \\ \frac{1}{a} & \frac{2}{c} & -1 \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{c} & 0 \end{vmatrix}$ ニ於テ,

第一列ヨリ第二列ト第三列トノ和ヲ減ズレバ,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{2}{c} & -1 \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{c} & 0 \end{vmatrix}=0,$$

【例】2. 三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB 又ハソノ延長ノ上ニ夫々點 D, E, F ヲ取リ,

$$\frac{AF.\ BD.\ CE}{FB.\ DC.\ EA}=-1 \tag{1}$$

ナラシム. 但シコヽニ各線分ノ符號ハ各邊ノ直線上ニ於テ夫々 AB, BC, CA ノ方向ヲ正ト定ム. 然ルトキハ三點 D, E, F ハ一直線上ニアルコトヲ證明セヨ.

B ヲ原點トシ, BC, BA ヲ夫々 x 及ビ y ノ軸トシ,

$$BC=a, \ CA=b, \ AB=c$$

トス. 然ルトキハ頂點 A, B, C ノ座標ハ夫々 $(0, c)$, $(0, 0)$, $(a, 0)$ ナリ.
又

$$\frac{BD}{DC}=\frac{m_1}{n_1}, \quad \frac{CE}{EA}=\frac{m_2}{n_2}, \quad \frac{AF}{FB}=\frac{m_3}{n_3}$$

ト置カバ,假定ニヨリ

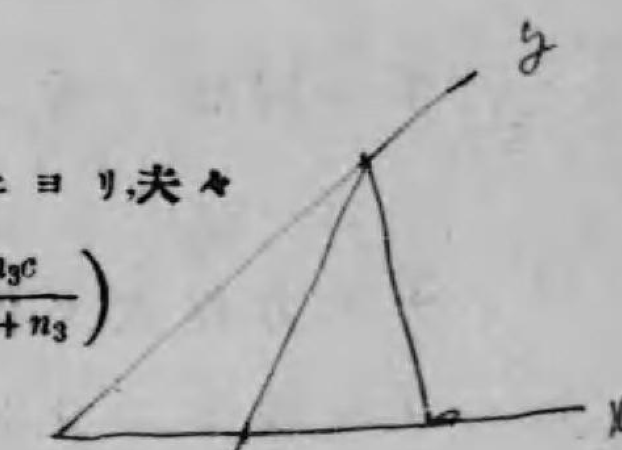
$$\frac{m_1m_2m_3}{n_1n_2n_3}=-1$$

即チ

$$m_1m_2m_3+n_1n_2n_3=0$$

ナル關係アリ. 而シテ D, E, F ノ座標ハ各第7節ニヨリ,夫々

$$\left(\frac{m_1a}{m_1+n_1}, 0\right), \ \left(\frac{n_2a}{m_2+n_2}, \ \frac{m_2c}{m_2+n_2}\right), \ \left(0, \frac{n_3c}{m_3+n_3}\right)$$



ナルヲ以テ,コレガ共線ナルコトヲ證明スルニハ

$$\begin{vmatrix} \frac{m_1a}{m_1+n_1} & 0 & 1 \\ \frac{n_2a}{m_2+n_2} & \frac{m_2c}{m_2+n_2} & 1 \\ 0 & \frac{n_3c}{m_3+n_3} & 1 \end{vmatrix}=D$$

ナル行列式ガ零ニ等シキコトヲ示セバ可ナリ. 之ヲ變形スレバ

$$D=\frac{ac}{(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)}\begin{vmatrix} m_1 & 0 & m_1+n_1 \\ n_2 & m_2 & m_2+n_2 \\ 0 & n_3 & m_3+n_3 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{ac(m_1m_2m_3+n_1n_2n_3)}{(m_1+n_1)(m_1+n_2)(m_3+n_3)}=0.$$

故ニ D, E, F ハ共線ナリ.

逆ニ三角形 ABC ノ各邊ヲ一ノ直線ニテ截ルトキハ,各ノ邊ノ上ニ作ラレタル線分ノ間ニ(1)ノ關係アルコトモ容易ニ證明セラル. 之ヲめねらうすノ定理トイフ.

三ツノ直線ガ共點ナルタメノ條件ハマタ次ノ如クニモ考フルコトヲ得. 今

$$P=a_1x+b_1y+c_1,$$
$$Q=a_2x+b_2y+c_2,$$
$$R=a_3x+b_3y+c_3.$$

ト置キ,與ヘラレタル三ツノ直線ヲ

$$P=0 \quad (1), \qquad Q=0 \quad (2), \qquad R=0 \quad (3)$$

トシ,同時ニ零ニアラザル二ツノ常數 l, m ヲトリテ

$$lP+mQ=0 \qquad (4)$$

ナル方程式ヲ作ルトキハ, (4) ニテ (1), (2) ト共點ナル任意ノ直線ヲアラハシ得ルモノナルコトハ前節ニ之ヲ述ベタリ. 故ニモシ(3)ガ(1),(2)ト共點ナラバ, l, m ノ或ル値ニ對シテ(4)ト(3)トガ全ク同一ノ直線ヲアラハスコトアルベシ. 即チ或ル零ニアラザル常數 $-n$ ヲ取リテ

$$-nR=lP+mQ$$

ヲ恒等式ナラシムルコトガ可能ナリ. 又逆ニ此ガ可能ナラバ(1),(2),(3)ハ共點ナルコト明カナリ. 依テ次ノ如ク云フコトヲ得ベシ.

三直線 $P=0$, $Q=0$, $R=0$ ガ共點ナルタメノ條件ハ,同時ニ零ナラザル三ツノ常數 l, m, n ヲ取リテ

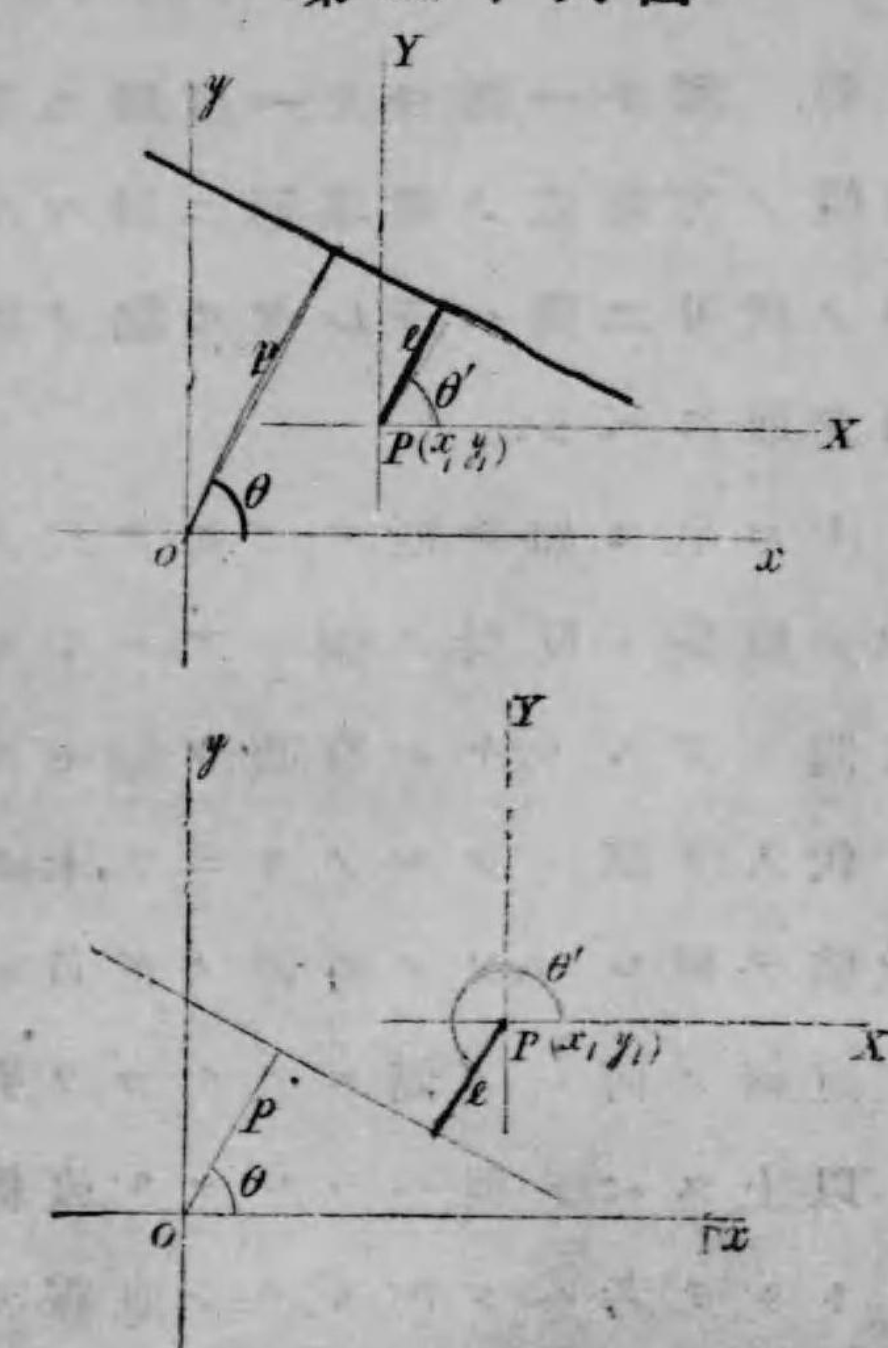
$$lP+mQ+nR=0$$

ナル恒等式ヲ成立セシメ得ルコトコレナリ.

例ヘバ上ニ述ベタル例.1.ニ於ケル(1),(2),(3)ノ場合ニハ,此三式ノ左邊ニ夫々 1, −1, −1 ヲ乘ジテ加フルニ恒等的ニ零トナル. 依テ共點ナルコトヲ知ル.

21. 一點ヨリ一直線ニ至ル距離.

第二十六圖



直交軸ニ關シ與ヘラレタル直線ノ方程式ヲ標準形ニ取リテ

$$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0 \quad (1)$$

トシ,今一點 $P(x_1, y_1)$ ヨリ此直線ニ下セル垂線ノ長サ l ヲ求メントス.

座標軸ノ平行移動ニヨリテ,原點ヲ P ニ移スキハ,直線(1)ノ方程式ハ

$$(X+x_1)\cos\theta$$
$$+(Y+y_1)\sin\theta-p=0$$

即チ

$$X\cos\theta+Y\sin\theta-(p-x_1\cos\theta-y_1\sin\theta)=0 \qquad (2)$$

トナル. 扨此新軸ニ關シテ此直線ノ方程式ノ標準形ヲ

$$X\cos\theta' + Y\sin\theta' - l = 0 \tag{3}$$

トセヨ, P ガ與ヘラレタル直線ニ對シテ舊原點 O ト同ジ側ニアラバ

$$\theta' = \theta$$

ニシテ, 反對ノ側ニアラバ

$$\theta' = \theta + 180^\circ$$

ナリ. 故ニ (2) ト (3) トノ係數ヲ比較シテ

$$l = \mp(x_1\cos\theta + y_1\sin\theta - p) \tag{4}$$

ヲ得. **即チ一點ヨリ一直線ニ至ル距離ヲ求メンニハ, 其直線ノ方程式ノ標準形ニ於ケル左邊ノ式ニ於テ, 流通座標ノ代リニ與ヘラレタル點ノ座標ヲ入レ, ソノ値ノ絕對値ヲ取ルベシ.**

(4) ニ示ス如ク, 斯クノ如ク代入セル値ハ, 點ガ直線ニ對シテ原點ト反對ノ側ニアルトキハソノマヽ正ニシテ, 同ジ側ニアルトキハ符號ヲ變ゼザル可ラズ. サレバ上記ノ代入ヲ試ミタルノミニテ, 未ダ絕對値ヲ取ラザル前ノ數値ヲ見レバ, ソノ符號ノ正負ニヨリテ, 與ヘラレタル點ガ直線ノ何レノ側ニアルカヲ判定シ得ベシ.

以上スベテ與ヘラレタル直線 (1) ハ原點ヲ過ラザルモノトシテ考ヘタルガ, モシ直線ガ原點ヲ過ルトキハ, 方程式 (1) ノ代リニ

$X\cos\theta + Y\sin\theta - (p - x_1\cos\theta - y_1\sin\theta) = 0$

$X\cos\theta' + Y\sin\theta' - l = 0$

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 0$$

ヲ用フベク, コヽニ

$$0^\circ \leqq \theta < 180^\circ$$

ト考フルコトヲ得. 之ニツイテ上ト同樣ニ論ズルコトニヨリ,

$$l = \pm(x_1\cos\theta + y_1\sin\theta)$$

ヲ得. コヽニ複號ノトリ方ハ, 直線ガ y 軸ト一致セザルトキハ, P ガ直線ヨリモ上方ニアルトキ正ニシテ, 下方ニアルトキ負トスベシ.

最モ特別ナル場合トシテ直線ガ y 軸ト一致セルトキハ頗ル簡單ナルヲ以テ別ニ論ズルヲ要セザル可シ.

トニカク凡ベテノ場合ヲ通ジテ

$$l = |x_1\cos\theta + y_1\sin\theta - p|$$

ト云フコトヲ得ベシ. コヽニ右邊ノ |…| ナル記號ハソノ中ニアル式ノ絕對値ヲ取ルベキコトヲ示ス.

直線ノ式ガ斜交軸ニ關シテ與ヘラレタルトキハ, ソノ方程式ノ標準形トシテ

$$x\cos\theta + y\cos(\omega - \theta) - p = 0 \tag{5}$$

ヲ用フレバ, スベテ上ト同樣ニシテ

$$l = |x_1\cos\theta + y_1\cos(\omega - \theta) - p|$$

ナルコトヲ證明シ得.*

モシ直線ノ方程式ガ

$$ax + by + c = 0 \tag{6}$$

*中川解析幾何 68頁 參照

$l = x_1\cos\theta + y_1\sin\theta - p$

ナル形ニテ與ヘラルヽトキハ,直交軸ノ場合ニハ第17節ノ終リニ述ベタル如ク之ヲ標準形ニ直シテ後

$$l=\left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

ナルコトハ容易ニ知リ得ベシ.

斜交軸ナル場合ニハ先ヅ(6)ヲ(5)ノ形ニ直サザル可ラズ. 依テ

$$\frac{\cos\theta}{a}=\frac{\cos(\omega-\theta)}{b}=k$$

ト置クコトニヨリ,

$$\cos\theta=ka,\qquad \cos(\omega-\theta)=kb.$$

此第二式ヨリ

$$\sin\omega\sin\theta=kb-\cos\omega\cos\theta,$$

$$\sin^2\omega(1-\cos^2\theta)=(kb-\cos\omega\cos\theta)^2.$$

コヽニ $\cos\theta$ ノ代リニ ka ヲ入レテ

$$\sin^2\omega(1-k^2a^2)=k^2(b-a\cos\omega)^2,$$

故ニ

$$\sin^2\omega=k^2\{(b-a\cos\omega)^2+a^2\sin^2\omega\}$$

$$=k^2(a^2+b^2-2ab\cos\omega),$$

即チ

$$k=\pm\frac{\sin\omega}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}}$$

ヲ得. 依テ(6)ヲ(5)ノ形ニ化セバ

$$\pm\frac{(ax+by+c)\sin\omega}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}}=0$$

ニシテ,モシ $p>0$ ト定ムルナラバ,コヽニ複號ハ常數項ヲ負ナラシムル如ク取ルモノトス. 依テ又

$$l=\left|\frac{(ax_1+by_1+c)\sin\omega}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}}\right|$$

ナル結果ヲ得ベシ.

之ヲ總括スルニ,一般ニ直線ノ方程式(6)ノ左邊ノ式ニ於テ, x,y ノ代リニ,アル點Pノ座標ヲ入ルヽ時ハ,ソノ式ノ値ハ常ニPヨリ此直線ニ下セル垂線ノ長サニ,アル常數ヲ乘ジタルモノニ等シ. Pガ直線上ノ一點ナルトキニ限リ其價ハ零トナル. 又二ツノ點P,Qノ座標ヲソレゾレ代入シテ得タル二ツノ値ガ共ニ零ナラズシテ,且ツ同ジ符號ヲ有スルトキハ,ソノ二點ハ直線ニ對シテ同ジ側ニアルベク,相異ナル符號ヲ有スルトキハ,直線ノ兩側ニ一ツ宛アルベシ.

【例】1. 直交軸ニ於テ,二點 $(-6,3)$ 及ビ $(1,0)$ ハ直線 $2x+3y+4=0$ ニ對シテ同ジ側ニアルカ否カ. 又此二點ヨリ直線マデノ距離如何.

與ヘラレタル二點ノ座標ヲ直線ノ式ノ左邊ニ代入スルトキハ,

$$2(-6)+3.3+4=1>0.$$

$$2.1+3.0+4=6>0.$$

故ニ二點ハ直線ノ同ジ側ニアリ.

直線ノ式ヲ標準形ニ直ストキハ,

$$\frac{2x+3y+4}{-\sqrt{13}}=0$$

ナルヲ以テ,二點ヨリノ距離ハ夫々

$$\left|\frac{2(-6)+3.3+4}{-\sqrt{13}}\right|=\frac{1}{\sqrt{13}}$$

及ビ

$$\left|\frac{2.1+3.0+4}{-\sqrt{13}}\right|=\frac{6}{\sqrt{13}}$$

ナリ. 且ツ二點ハ直線ニ對シ原點ノ在ル側ニアリ.

【例】2. 直交軸ニ關シ,二ツノ直線

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \qquad (1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \qquad (2)$$

ガ何レモ原點ヲ過ラザルトキ,此二直線ノ間ノ角ノ二等分線ノ方程式ヲ求ム.

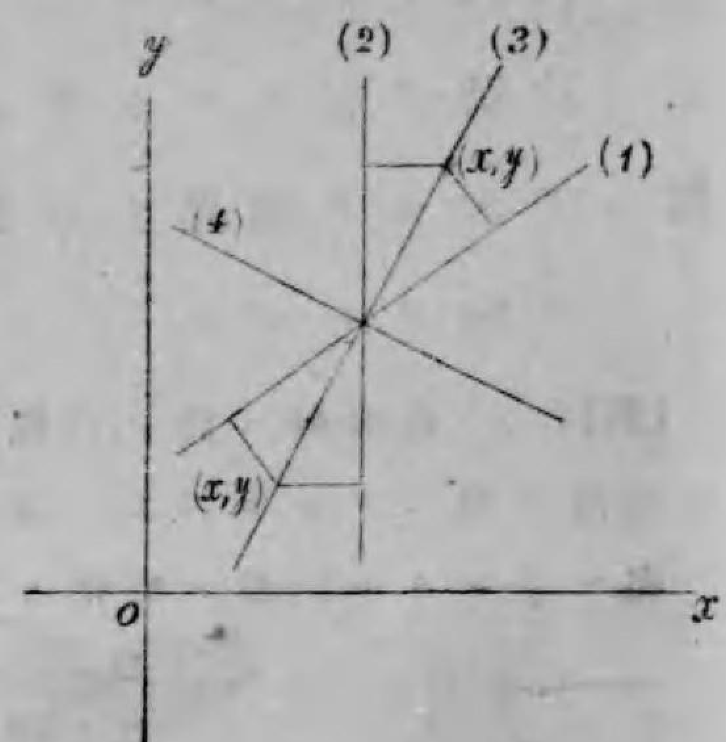
先ヅ(1)及ビ(2)ヲ標準形ニ直シテ

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\pm\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=0 \qquad (1')$$

$$\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\pm\sqrt{a_2^2+b_2^2}}=0 \qquad (2')$$

トス. コヽニ分母ノ複號ハ夫々 c_1 及ビ c_2 ト反對ノ符號ヲ取ルベキコトヲ示スモノトス.

第二十七圖



扨テ今求ムル二等分線ガ二ツアル中,原點ヲ含ム角ノ内部ヲ過ル方ヲ(3)トシ,他ノ一ヲ(4)トセヨ.(圖ヲ見ヨ) (3)ノ上ノ任意ノ一點(x, y)ハ常ニ(1)及ビ(2)ニ對シテ共ニ原點ト同ジ側ニアルカ又ハ共ニ原點ト反對ノ側ニアリ,而シテソノ點ヨリ(1)及ビ(2)ニ下セル垂線ノ長サハ相等シ. 故ニ

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\pm\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\pm\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

ナラザル可ラズ. 而シテ此關係ハ點(x, y)ガ(3)ノ上ニアルトキニ限リ眞ナルモノナレバ,コレ即チ直線(3)ノ方程式ナリ.

次ニ(4)ノ上ニ一點ヲ取リテ考フルニ,ソレヨリ(1)及ビ(2)ニ下セル垂線ノ長サハ矢張相等シケレドモ,ソノ點ノ位置ハ(1),(2)ノ中何レカ一方ニ對シテノミ原點ト同ジ側ニアリテ,他ノ一方ニ對シテハ反對ノ側ニアリ. 依テ(4)ノ方程式ハ

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\pm\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=-\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\pm\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

トナルベシ.

【例】3. 直交軸ニ關シ,三點$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$ヲ頂點トスル三角形ノ面積ヲ求ム.

先ヅ直線PQノ方程式ハ

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

即チ
$$(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y+(x_1y_2-x_2y_1)=0.$$

故ニRヨリ此直線ニ下セル垂線ノ長サハ

$$\frac{(y_1-y_2)x_3+(x_2-x_1)y_3+(x_1y_2-x_2y_1)}{\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_2-x_1)^2}}$$

ノ絶對値ニ等シ. 此ニ線分 PQ ノ長サヲ乘シ,2ニテ割ルトキハ求ムル面積ヲ得ベシ. 然ルニ線分 PQ ノ長サハ丁度上ノ式ノ分母ニ等シキヲ以テ,求ムル面積ノ數値ハ

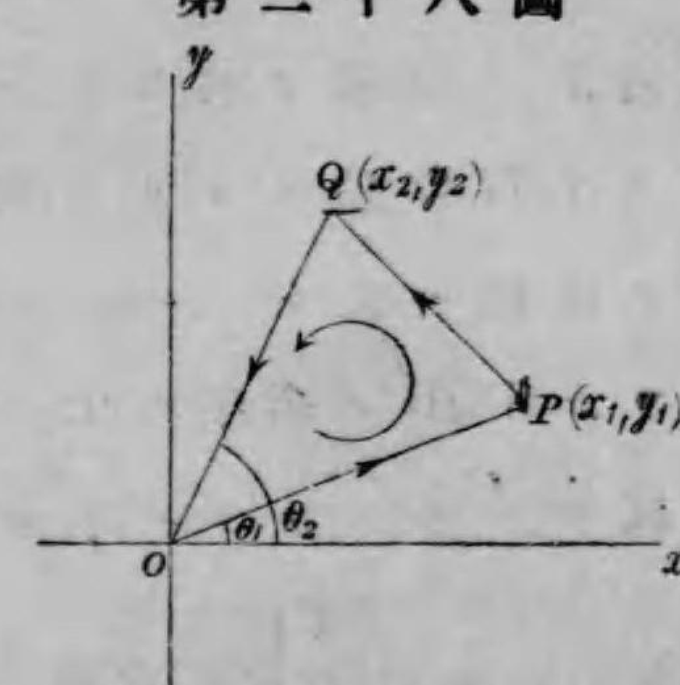
$$\frac{1}{2}\left\{(y_1-y_2)x_3+(x_2-x_1)y_3+(x_1y_2-x_2y_1)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

ノ絶對値ニ等シ.

此行列式ソノマヽノ値ガ如何ナル場合ニ正トナリ,如何ナル場合ニ負トナルカハ次ノ節ニ之ヲ説明スベシ.

22. 三角形ノ面積.

第二十八圖



直交軸ニ於テ,二點$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ヲ取リ,此二點ト原點Oトヲ頂點トスル三角形OPQノ面積ヲ求メントス. 但シコヽニ二點P,QノOニ對スル關係ハ三角形ノ周圍ヲOPQノ順序ニ回ル方向ガ恰カモ時計ノ針ノ

進行ト反對ナル如キ位置ニアリト考フベシ.

今原點ヲ極トシ, Ox ヲ原線トシテ, P,Q ノ極座標ヲ夫夫 (r_1, θ_1), (r_2, θ_2) トスルトキハ,

$$\left.\begin{array}{l} x_1=r_1\cos\theta_1 \\ y_1=r_1\sin\theta_1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x_2=r_2\cos\theta_2 \\ y_2=r_2\sin\theta_2 \end{array}\right\}$$

ニシテ,三角形 OPQ ノ面積ハ

$$\frac{1}{2}\mathrm{OP.OQ.}\sin\angle\mathrm{POQ}$$

$$=\frac{1}{2}r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)$$

$$=\frac{1}{2}r_1r_2(\sin\theta_2\cos\theta_1-\cos\theta_2\sin\theta_1)$$

$$=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$$

ナリ.

モシ P,Q 二點ノ位置ヲ交換シタリトセバ,面積ノ式ハ丁度コレノ符號ヲ變ジタルモノヲ得ベシ.

扨コレヨリ一般ニ三點 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$ ノ作ル三角形ノ面積ヲ求ムルコトハ容易ナリ. 即チ,先ヅ座標軸ノ平行移動ニヨリテ,原點ヲ R ニ移シタルトキ,P 及ビ Q ノ座標ハ夫々 (x_1-x_3, y_1-y_3), (x_2-x_3, y_2-y_3) トナルヲ以テ,假リニ PQR ノ順序ガ上ニ述タル如ク時計ノ針ノ進行ト相反スルモノトセバ,求ムル面積ハ

$$\frac{1}{2}\left\{(x_1-x_3)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_3)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

トナリ, PQR ノ順序ガ之ト反對ナラバ,ソノ符號ヲ變ジタルモノトナル.

三角形ノ面積ノ公式トシテヨク知ラレタル,三邊ノ長サニヨリテ表ハセル公式ヲ得ント欲セバ,次ノ如クニシテ之ヲ求ムルコトヲ得ベシ.

今面積ヲ S ヲ以テ表ハストキハ

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

ナルヲ以テ,之ヲ第四階ノ行列式ノ形ニ書キテ

$$2S=-\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x_1 & y_1 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix}, \qquad 2S=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ 0 & x_2 & y_2 & 1 \\ 0 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

トスルコトヲ得. 此二式ヲ相乘ジ,列ト列トヲ組合セテ行列式ノ乘算ヲ行フトキハ

$$4S^2=-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1^2+y_1^2 & x_2x_1+y_2y_1 & x_3x_1+y_3y_1 \\ 1 & x_1x_2+y_1y_2 & x_2^2+y_2^2 & x_3x_2+y_3y_2 \\ 1 & x_1x_3+y_1y_3 & x_2x_3+y_2y_3 & x_3^2+y_3^2 \end{vmatrix}$$

トナル,此行列式ノ第二,第三,第四ノ各列ニ -2 ヲ乘ジ,然ル後第一行ヨリ -2 ヲ因數トシテ出ストキハ,

$$16S^2=-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2x_1^2-2y_1^2 & -2x_2x_1-2y_2y_1 & -2x_3x_1-2y_3y_1 \\ 1 & -2x_1x_2-2y_1y_2 & -2x_2^2-2y_2^2 & -2x_3x_2-2y_3y_2 \\ 1 & -2x_1x_3-2y_1y_3 & -2x_2x_3-2y_2y_3 & -2x_3^2-2y_3^2 \end{vmatrix}$$

ヲ得. サテ第一列ニ $x_1^2+y_1^2$ ヲ乘ジテ第二列ニ加ヘ,又第一列ニ $x_2^2+y_2^2$ ヲ乘ジテ第三列ニ加ヘ,又第一列ニ $x_3^2+y_3^2$ ヲ乘ジテ第四列ニ加フ. 然ル後,更ニ第一行ニ $x_1^2+y_1^2$ ヲ乘ジテ第二行ニ加ヘ,又第一行ニ $x_2^2+y_2^2$ ヲ乘ジテ第三行ニ加ヘ,又第一行ニ $x_3^2+y_3^2$ ヲ乘ジテ第四行ニ加フベシ. 然ルトキハ主對角線ノ項ハ皆零トナリ,ソノ他ノ項ハ 1 ナルモノヽ他ハ何レモ P,Q,R ノ中ノ何レカノ二點間ノ距離ノ二乘ヲアラハス事トナル. 今

$$QR=a,\qquad RP=b,\qquad PQ=c$$

ト置クトキハ,

$$16S^2=-\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&c^2&b^2\\1&c^2&0&a^2\\1&b^2&a^2&0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&c^2&b^2\\1&0&a^2\\1&a^2&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&0&b^2\\1&c^2&a^2\\1&b^2&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0&c^2\\1&c^2&0\\1&b^2&a^2\end{vmatrix}$$

$$=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$$

$$=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$$

$$=(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)$$

$$=\{(a+b)^2-c^2\}\{c^2-(a-b)^2\}$$

$$=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

故ニ

$$s=\frac{a+b+c}{2}$$

ト置クトキハ

$$S^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$$

トナル.

上ニ於テ(1)ノ結果ハ直交軸ニツイテ得タルモノナルガ,モシ斜交軸ニ關シテ三點 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$ ノ作

ル三角形ノ面積ヲ求メントセバ,先ヅ原點ヲ通ジテ x 軸ト直交スル直線ヲ取リ,之ヲ新ラシキ Y 軸トシ,新ラシキ X 軸トシテハ以前ノ x 軸ヲソノマヽ用フルコトヽス. 而シテ P,Q,R ノ新座標ヲ夫々 (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) トス. 然ルトキハ同一點ノ新舊兩座標ノ關係ハ,第 15 節(4) (29 頁)ニヨリ,一般ニ

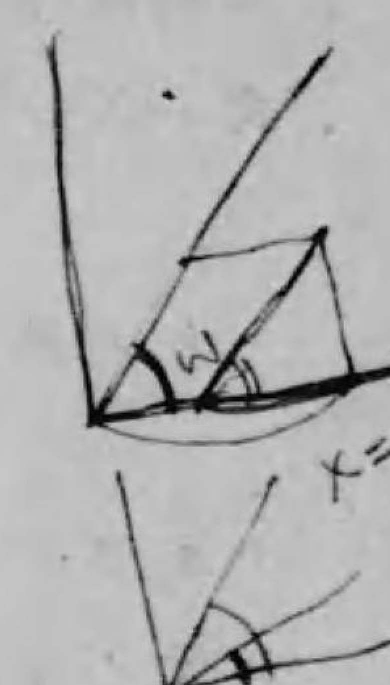
$$X=x+y\cos\omega,\qquad Y=y\sin\omega$$

ナルニヨリ,求ムル面積ハ

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}X_1&Y_1&1\\X_2&Y_2&1\\X_3&Y_3&1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1+y_1\cos\omega&y_1\sin\omega&1\\x_2+y_2\cos\omega&y_2\sin\omega&1\\x_3+y_3\cos\omega&y_3\sin\omega&1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\sin\omega}{2}\begin{vmatrix}x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\\x_3&y_3&1\end{vmatrix}$$



X = x + ycow

ナリ.

23. 二次方程式ガ二ツノ直線ヲ表ハス條件.

x ト y トニツイテノ二次方程式ノ一般ノ形ハ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \tag{1}$$

X = x + ycow

ナリ. モシコレガ一ツノ直線 l ノ上ニアルスベテノ點ニヨリテ滿足セラルヽトキハ,(1)ノ左邊ハ必ズ x ト y トノ一次式ナル二ツノ因數ニ分解スルコトヲ得ベク,且其因數ノ各ヲ零ニ等シト置キテ得ル二ツノ直線ノ中,一ツハ直線 l ヲ表ハスベシ. 何トナレバ l ヲ新ラシキ座標軸ノX軸ニ取リ,コレト交ハル他ノ任意ノ一ツノ直線ヲY軸ニ取リ,方程式(1)ノ左邊ヲ座標軸ノ變換ニヨリ,新ラシキXトYトニヨリテ表ハサバ,其形ハ

$$AX^2+2HXY+BY^2+2GX+2FY+C \qquad (2)$$

トナルベシ. サテ假定ニヨリ直線 l, 即チX軸上ニアルスベテノ點ハ(2)ヲ零ニ等シト置キテ得ル方程式ガ表ハス軌跡上ニアルベキヲ以テ,(2)ニ於テ $Y=0$ ト置カバ,此ノ式ハXノ値ノ如何ニ關ハラズ常ニ零ナルベシ. 故ニ

$$A=0, \qquad G=0, \qquad C=0$$

ニシテ,畢竟(2)ハ

$$Y(2HX+BY+2F) \qquad (3)$$

ナル形ヲ取ラザル可カラザリシモノナリ. 故ニ之ヲ再ビ元ノ x, y ニテ表ハサバ,其形ハ

$$(p_1x+q_1y+r_1)(p_2x+q_2y+r_2) \qquad (4)$$

トナル. 而シテ此ハ(1)ノ左邊ト同ジモノナラザル可ラズ. 且ツ(4)ノ二ツノ因數ノ中,一ツハYニ相當スルモノナルヲ以テ,コノ因數ヲ零ト置キテ得ル方程式ノ表ハス

モノハ即チ直線 l ニ外ナラズ.

故ニ方程式(1)ノ左邊ヲ x ト y トニ就テ二ツノ一次因數ニ分解スルコト能ハザレバ,此式ハ決シテ直線ヲアラハスコトナシ. モシ又二ツノ一次因數ニ分解セラルヽコト,例ヘバ(4)ノ如キトキニハ,二ツノ直線

$$p_1x+q_1y+r_1=0$$
$$p_2x+q_2y+r_2=0$$

ノ何レカノ上ニアル點ハトニカク方程式(1)ヲ滿足スベク,ソノ他ノ點ニテハ滿足セズ. 故ニ此場合ニハ(1)ハ二ツノ直線ヲ表ハスモノトナルベシ.

サテ然ラバ(1)ノ左邊ノ式ハ常ニ二ツノ一次因數ニ分解スルコトヲ得ルカ,或ハ係數ノ間ニ適當ナル關係アルニ非ザレバ二ツノ一次因數ニ分解セラレザルモノナルカ,下ニ之ヲ考究セントス.

今(1)ニ於テ,$b \neq 0$ ト考ヘテ,之ヲ y ニツイテ解クトキハ

$$y=\frac{-(hx+f)\pm\sqrt{(hx+f)^2-b(ax^2+2gx+c)}}{b}$$

ヲ得. 根號內ノ式ヲ單ニDニテアラハシ,

$$y=\frac{-(hx+f)\pm\sqrt{D}}{b} \qquad (5)$$

ト書クコトヲ得ベシ. モシ(1)ノ左邊ガ二ツノ一次因數ニ分解セラレ,(4)ノ如クナルモノトセバ,コレヨリ y ノ値ヲ求ムルニ

$$-\frac{p_1x+r_1}{q_1} \quad 又ハ \quad -\frac{p_2x+r_2}{q_2}$$

トナル. 何レニシテモトニカク此等ハ x ノ一次式ナレバ,假リニ之ヲ總括シテ單ニ

$$\alpha x+\beta$$

ト記スコトヲ得. サテ之ト(5)トヲ比較シテ

$$\frac{-(hx+f)\pm\sqrt{\mathrm{D}}}{b}=\alpha x+\beta,$$

之ヨリ $\quad \mathrm{D}=\{b(\alpha x+\beta)+(hx+f)\}^2$

ヲ得. 即チ D ハ x ノ或ル一次式ノ平方ニ等シカラザル可ラズ.

逆ニ D ガ x ニツイテノ或ル一次式ノ平方ニ等シキトキハ,(5)ニヨリテ y ハ x ノ一次式ニ等シキコトヽナル. 假リニ之ヲ

$$\alpha_1x+\beta_1, \qquad \alpha_2x+\beta_2$$

トスルトキハ,(1)ノ左邊ノ式ハ

$$b(y-\alpha_1x-\beta_1)(y-\alpha_2x-\beta_2)$$

ナル形ニ分解セラルヽコトヽナルベシ. 故ニ結局(1)ノ左邊ガ二ツノ一次因數ニ分解セラルヽタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ハ D ガ或ル x ノ一次式ノ完全平方ナルコトニアリ.

今 D ヲ書キ直サバ

$$\mathrm{D}=(hx+f)^2-b(ax^2+2gx+c)$$

$$=(h^2-ab)x^2+2(hf-bg)x+(f^2-bc)$$

ナルニヨリ,之ガ完全平方ナル條件ハ

$$(h^2-ab)(f^2-bc)=(hf-bg)^2$$

ナリ,此兩邊ヲ展開シ,同類項ヲ約シ,零ニアラザル b ニテ除シタル結果ハ

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$$

トナリ,更ニ之ヲ行列式ノ形ニ書クトキハ

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=0 \qquad (6)$$

トナル. **是レ即チ(1)ガ二ツノ直線ヲアラハスタメニ必要ニシテ且十分ナル條件**ニシテ,此行列式ヲ二次式(1)ノ**判別式**ト名ヅケ,△ナル記號ヲ以テ之ヲアラハス.

以上ハ $b\neq0$ ト考ヘテ論ジタルガ,モシ $b=0$ ナルモ $a\neq0$ ナラバ,(1)ヲ x ニツイテ解キテ上ト同樣ニ考フルコトヲ得ベク,結局矢張(6)ナル條件ヲ得. モシ又 $a=0$, $b=0$ ナルトキハ,(1)ハ

$$2hxy+2gx+2fy+c=0$$

トナル. コヽニ h ハ零ナラズト考ヘテ可ナリ,何トナレバ之ガ零ナラバ,此式ハ最早二次式ニ非ザレバナリ.

扨此式ヲ y ニツイテ解クトキハ

$$y=-\frac{2gx+c}{2(hx+f)}.$$

此ガxノ一次整式ト恒等ナルタメニハ,既ニ$h\neq 0$ト考フルヲ以テ,

$$\frac{g}{h}=\frac{c}{2f}$$

ナラザル可ラズ. 而シテコヽニ,モシ$f=0$ナラバ同時ニ$c=0$ナルベシトス. 或ハ換言スレバ $2fg-ch=0$ トナル. 然ルニ此ハ(6)ニ於テ $a=0, b=0$ ト置キ, h ニテ約セル形ニ相當スルヲ以テ,畢竟(6)中ニ含マルヽモノト見做スコトヲ得. 即チ凡テノ場合ヲ通ジテ,求ムル處ノ條件ハ(6)ナリト云フコトヲ得ベシ.

以上論ジ來リタル處ニ於テ(1)ノ左邊ノ式ガ分解可能ナル場合ト雖,モシ D=0 ナラバ,(1)ナル方程式ハ二本ノ直線ヲアラハサズシテ實ハ唯一本ノ直線トナルベシ. マタ或ル場合ニハ(1)ヲ分解シタル因數ニ於テソノ係數ニ虛數ヲ交ユルコトモアルベシ. 蓋シDガ完全平方ナリトイフモ,必シモ實數ノ係數ヲ有スル式ノ完全平方トハ限ラザレバナリ. 而シテ其虛因數ヲ取リテ之ヲ零ニ等シト置クモ何等ノ實在スル圖形ヲアラハサザルコト勿論ナリ. 然レドモ解析幾何學ニ於テハ代數計算ノ結果ヲナルベク普遍的ニ解釋スルタメニ,前者ノ場合ニ於テハ(1)ハ二ツノ 相合シタル直線 ヲアラハストイヒ,後者ノ場合ニハ二ツノ 虛直線 ヲアラハスト稱ス.

【例】2. $2x^2+5xy+2y^2+7x+5y+3=0$ ノ軌跡ヲ求ム.

判別式ヲ作ルニ

$$\triangle=\begin{vmatrix} 2 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & 3 \end{vmatrix}=0.$$

依テ二ツノ直線ヲアラハスベシ. 今yニツイテ解クトキハ

$$y=\frac{-(5x+5)\pm\sqrt{(5x+5)^2-8(2x^2+7x+3)}}{4}$$

$$=\frac{-(5x+5)\pm(3x-1)}{4}$$

$$=\frac{-x-3}{2} \text{ 又ハ } -2x-1$$

此レ即チ求ムル軌跡ヲ形成スル二直線ノ方程式ニシテ,與ヘラレタル式ハ

$$(x+2y+3)(2x+y+1)=0$$

トナルベキナリ.

【例】2. $x^2-xy+y^2-x-y+1=0$ ノ軌跡ヲ求ム.

判別式ヲ作レバ

$$\triangle=\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}=0.$$

故ニ二ツノ直線ヲアラハス. 與ヘラレタル式ヲyニツイテ解クトキハ

$$y=\frac{x+1\pm\sqrt{(x+1)^2-4(x^2-x+1)}}{2}$$

$$=\frac{x+1\pm\sqrt{-3}(x-1)}{2}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}x+\frac{1\mp\sqrt{-3}}{2},$$

即チ二ツノ虚直線ナリ.

サテ x 及ビ y ノ間ノ二次ノ同次式

$$ax^2+2hxy+by^2=0 \qquad (7)$$

ハ常ニ(6)ナル條件ヲ滿足シ,二ツノ直線ヲアラハス. 之ヲ解クトキハ $b\neq0$ ナルトキハ,

$$y=\frac{-h\pm\sqrt{h^2-ab}}{b}x,$$

又 $b=0$, $h\neq0$ ナルトキハ,

$$x=0 \quad 及ビ \quad y=-\frac{a}{2h}x,$$

又 $b=0$, $h=0$ $a\neq0$ ナルトキハ,

$$x=0, \qquad x=0$$

即チ何レノ場合ニ於テモ,(7)ハ常ニ原點ヲ過ル二ツノ直線ヲ表ハシ,ソノ二直線ノナス角ノ一ツヲ ϕ トセバ

$$\tan\phi=\frac{2\sqrt{h^2-ab}\,\sin\omega}{a+b-2h\cos\omega}$$

ナリ. (52頁5) 特ニ直交軸ナラバ,

$$\tan\phi=\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$$

トナル. 故ニ(7)ノアラハス二直線ガ互ニ垂直ナル條件ハ,軸ガ斜交ナルカ直交ナルカニ從テ,夫々

$$a+b-2h\cos\omega=0$$

又ハ

$$a+b=0$$

ナリ.

今計算ヲ簡單ナラシムルタメニ直交軸ヲトリテ,$b\neq0$ ト考ヘ,(7)ノアラハス二直線ガ x 軸トナス角ヲ夫々 α, β トセヨ,然ラバ,

$$\tan\alpha=\frac{-h+\sqrt{h^2-ab}}{b},$$

$$\tan\beta=\frac{-h-\sqrt{h^2-ab}}{b}.$$

故ニ

$$\tan\alpha+\tan\beta=-\frac{2h}{b}.$$

$$\tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{a}{b}.$$

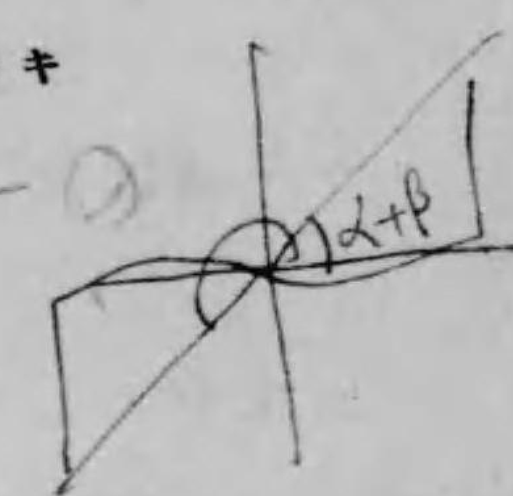
此二直線ノ間ノ角ノ二等分線ガ x 軸トナス角ヲ γ トセバ,ソノ二等分線ノ方程式ハ

$$y=\tan\gamma\,.\,x \qquad (8)$$

$y=\tan\gamma\cdot x$

ニシテ,コヽニ 2γ ノ値ハ, 360° ノ倍數ヲ除キ

$$\alpha+\beta \quad 又ハ \quad \alpha+\beta+180^\circ$$



ナルベキヲ以テ,常ニ

$$\tan2\gamma=\tan(\alpha+\beta),$$

即チ

$$\frac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{2h}{b}}{1-\frac{a}{b}}$$

$$=\frac{2h}{a-b}. \qquad (9)$$

$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ $1+(m_1+m_2)\cos\omega+m_1m_2$

(8) ト (9) トノ間ニ $\tan\gamma$ ヲ消去シテ,

$$\frac{2xy}{x^2-y^2}=\frac{2h}{a-b},$$

即チ

$$h(x^2-y^2)-(a-b)xy=0 \qquad (10)$$

ヲ得. コレ即チ(7)ガアラハス二直線ノ間ノ角ノ二等分線ノ式ニシテ,コヽニハ $b\neq0$ ト考ヘタレドモ, $b=0$ ニテモ $a\neq0$ ナラバ殆ンド同様ニ之ヲ導クヲ得ベク,モシマタ $a=0$, $b=0$ ナラバ, (7) ハ兩軸ヲアラハシ, (10) ハ $x^2-y^2=0$ 即チ

$$x-y=0, \qquad x+y=0$$

ニシテ丁度兩軸ノ間ノ角ノ二等分線ヲアラハスヲ以テ,結局(10)ハ何レノ場合ヲモソノ中ニ含有スルモノト考フルコトヲ得.

一般ナル二次式(1)ニ於テ,左邊ガ(4)ノ如ク分解シ得ルトキハ,兩因數ノ常數ナラザル項ノ積,即チ

$$(p_1x+q_1y)(p_2x+q_2y)$$

ハ,原式中ノ二次ノ部分

$$ax^2+2hxy+by^2$$

ニ等シカルベキニヨリ,(1)ノアラハス直線ノ方向丈ヲ調ブルニハ,ソノ中ノ二次ノ部分ダケヲ取リテ,コヽニ述タル同次式ニ關スル結果ヲ應用スルコトヲ得ベシ.

例ヘバ直交軸ニ關シテ

$$12x^2-7xy-12y^2+2x-11y-2=0$$

ナル方程式ヲ取ラバ,判別式ハ

$$\begin{vmatrix} 12 & -\frac{7}{2} & 1 \\ -\frac{7}{2} & -12 & -\frac{11}{2} \\ 1 & -\frac{11}{2} & -2 \end{vmatrix}=0$$

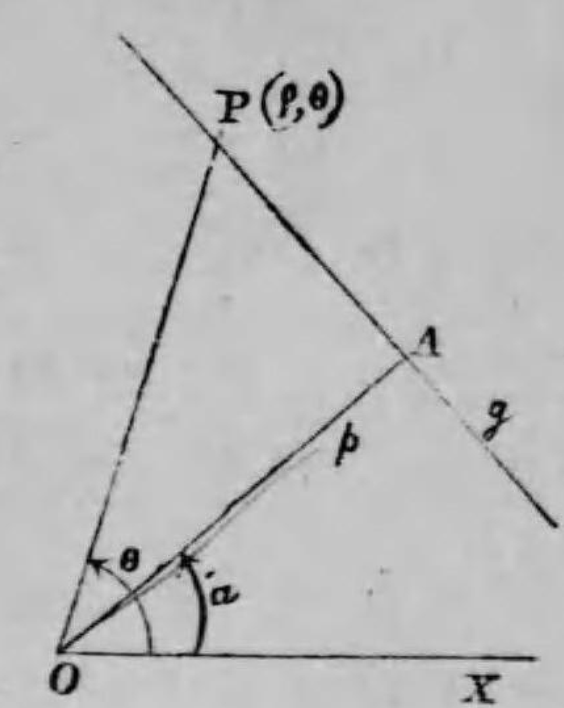
ニシテ,此ハ二本ノ直線ヲアラハスベク,而シテ

$$a+b=12-12=0$$

ナルヲ以テ,其二直線ハ互ニ垂直ナルコトヲ知ル. 而シテコノ二直線ハ $3x-4y-1=0$, $4x+3y+2=0$ ナリ.

24. 直線ノ極方程式.

第二十九圖



OX ヲ原線トシ,O ヲ極トス. 任意ノ直線 g ガ與ヘラレタルトキ,極 O ヨリコノ直線ニ下セル垂線ヲ OA トシ,其長サヲ p トス. マタ OA ガ OX トナス角ヲ α トスルトキハ,直線 g ノ位置ハ p ト α トニヨリテ全ク定マルモノナリ.

今コノ直線上ニアル任意ノ一點 P ノ極座標ヲ (ρ, θ) トセバ,明カニ

$$\rho\cos(\theta-\alpha)=p \qquad (1)$$

ニシテ,コレ即チ直線 g ノ方程式ナリ. 之ヲ直線ノ **極方程式** ト云フ. (1) ハマタ

$$\rho\cos\theta\cos\alpha+\rho\sin\theta\sin\alpha-p=0 \qquad (2)$$

ト書クコトヲ得ベク,O ヲ座標ノ原點トシ, OX ヲ x 軸ノ正ノ部分トセル直交軸ニ關シテノ P ノ座標ヲ (x,y) トスルトキハ,(2) ハ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$$

トナル. コレ即チ直線ノ方程式ノ標準形ニ外ナラズ. 依テ任意ニ與ヘラレタル直線ノ方程式ヲソノ標準形ニ化スル方法ニヨリ,マタ之ヲ極方程式ニ化スルコトヲ得ベシ.

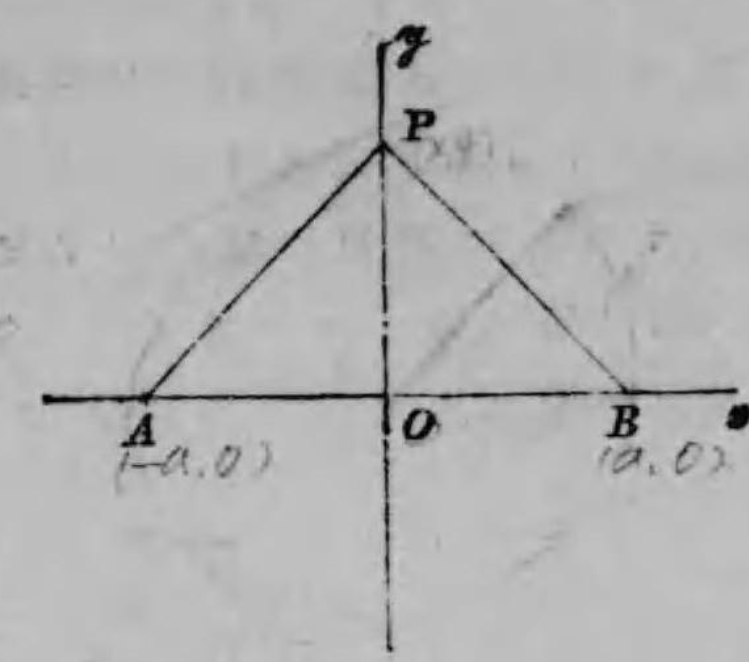
25. 軌跡問題.

解析幾何學ニ於テ,與ヘラレタル條件ニ適スル點ノ軌跡ヲ求ムルニハ,先ヅ問題ヲ解クニ最モ適當ナリト思考スル座標軸ヲ選ビ,與ヘラレタル條件ニ適スル任意ノ一點ノ座標ノ間ニ存在スベキ關係ヲ方程式ニヨリテ表ハシ,コノ中ニ於ケル點ノ座標ヲ流通座標ト見做サバ,コノ方程式ハ一般ニ或ル直線又ハ曲線等ヲ表ハスベシ. 而シテ今求ムル處ノ軌跡上ノ點ハ必ズコノ圖形ノ上ニアラザル可ラズ.

然レドモ,逆ニ此圖形上ノ點ハ必ズシモ與ヘラレタル條件ヲ滿足スルト限ラズ. 依テ更ニソノ中ニテ條件ニ適スル點ト適セザル點トヲ區別シ,其限界ヲ定ムベシ. コヽニ甫メテ問題ハ解ケタルモノトス.

【例】1. 二點 A, B ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム.

第三十圖



A, B ヲ結ビ付クル直線ヲ x 軸ニ取リ, AB ノ中點 O ニ於テ之ニ垂直ナル直線ヲ y 軸トシ, A 及ビ B ノ座標ヲ夫々 $(-a,0)$, $(a,0)$ トス. サテ條件ニ適スル任意ノ一點 P ノ座標ヲ (x,y) トスルトキハ,與ヘラレタル條件ヲ方程式ニヨリテ表ハセルモノハ

$$(x-a)^2+y^2=(x+a)^2+y^2 \qquad (1)$$

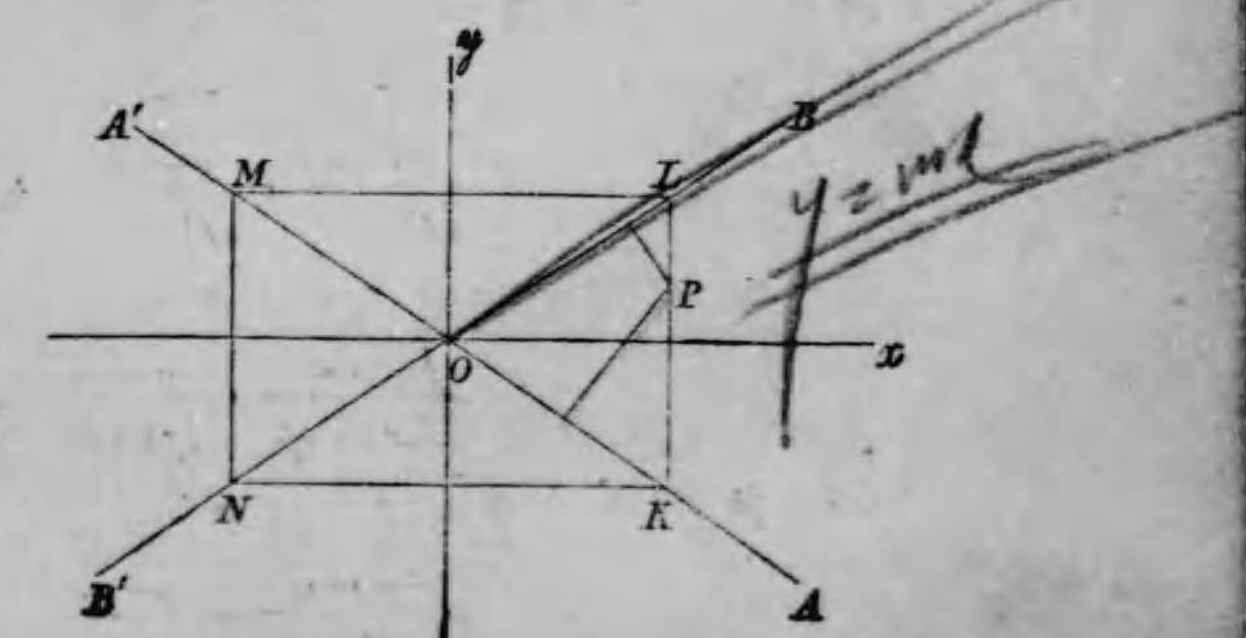
ナリ. 即チ條件ニ適スル點ノ座標 (x,y) ノ間ニハ,常ニ (1) ニヨリテ表ハサレタル關係ガ成立スベク,又方程式 (1) ニ適スル座標ヲ有スル一點ハ與ヘラレタル條件ヲ滿足ス. 故ニ x, y ヲ流通座標ト見做サバ, (1) ハ所要ノ軌跡ノ方程式ナリ. 之ヲ簡單ニシテ

$$x=0$$

トナル. コレ即チ y 軸ヲアラハスモノナリ. 故ニ求ムル軌跡ハ AB ヲ直角ニ二等分スル直線ナリ.

【例】2. 一點 O ニ於テ相交ハル二ツノ直線 AA′, BB′ アリ. 今一點 P ヨリコノ二直線ニ至ル距離ノ和ガ一定量 k ニ等シキトキ, P 點ノ軌跡ヲ求ム. 但シ距離ハ常ニ正ナルモノトス.

第三十一圖



∠AOB ヲ二等分スル直線ヲ x 軸トシ, コノ角ノ内部ニアル部分ヲ x 軸ノ正ノ部分トシ, O ニ於テ x 軸ニ垂直ナル直線ヲ y 軸トス. 然ルトキハ直線 AA′, BB′ ノ方程式ハ夫々

$$y+mx=0$$

及ビ

$$y-mx=0$$

ナル形ヲ有ス．コヽニ m ハ正ニシテ $\tan\angle AOB$ ニ等シ．サテ

$$p_1=\frac{y+mx}{\sqrt{1+m^2}},\qquad p_2=\frac{y-mx}{\sqrt{1+m^2}}\tag{1}$$

ト置クトキハ，p_1 及ビ p_2 ノ絶對値ハ點 $P(x, y)$ ヨリ夫々直線 AA' 及ビ BB' ニ下セル垂線ノ長サヲ示ス．

p_1 及ビ p_2 ノ符號ハ點 P ノ位置ニヨリテ,或ハ正トナリ或ハ負トナル．第21節ニ論ジタル處ニヨリ,今 P ノ種々ノ位置ニ對スル p_1, p_2 ノ符號ヲ吟味スルタメニ,先ヅ Ox 上ノ一點 $(1, 0)$ ヲトリ之ヲ P ト考フレバ,ソノトキハ

$$p_1=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}>0,\qquad p_2=\frac{-m}{\sqrt{1+m^2}}<0$$

ナリ．依テ一般ニ P ガ角 AOB ノ中ニアルトキハ,常ニ p_1 ハ正ニシテ p_2 ハ負ナルベシ．スベテノ角ニツイテ一々カクノ如ク考フレバ,

(i) P ガ角 AOB ノ中ニアルトキハ． $p_1>0$, $p_2<0$,

(ii) 〃 BOA′ 〃 ， $p_1>0$, $p_2>0$,

(iii) 〃 A′OB′ 〃 ， $p_1<0$, $p_2>0$,

(iv) 〃 B′OA 〃 ， $p_1<0$, $p_2<0$.

之ニヨリテ,モシ條件ニ適スル點ガ

(i) 角 AOB ノ中ニアルトキハ,ソノ點ノ座標ハ

$$\frac{y+mx}{\sqrt{1+m^2}}-\frac{y-mx}{\sqrt{1+m^2}}=k,\tag{2}$$

ヲ滿足スベク,同樣ニ

(ii) 角 BOA′ ノ中ニアルトキハ,

$$\frac{y+mx}{\sqrt{1+m^2}}+\frac{y-mx}{\sqrt{1+m^2}}=k,\tag{3}$$

(iii) 角 A′OB′ ノ中ニアルトキハ,

$$-\frac{y+mx}{\sqrt{1+m^2}}+\frac{y-mx}{\sqrt{1+m^2}}=k.\tag{4}$$

(iv) 角 B′OA ノ中ニアルトキハ,

$$-\frac{y+mx}{\sqrt{1+m^2}}-\frac{y-mx}{\sqrt{1+m^2}}=k\tag{5}$$

ナル關係ヲ各滿足スベキナリ．

(2), (3), (4), (5) ニヨリテ表ハサルヽ圖形ハ x 軸又ハ y 軸ニ平行ナル四個ノ直線ニシテ,本題ニ於テ求ムル處ノ軌跡ハソノ各相當スル角内ニアル部分ノミナリ．即チ第三十一圖ニ示セル矩形 KLMN ノ如キモノトナル．

モシ問題ノ意味ヲ變ジテ,二直線 AA', BB' ニ下セル垂線ノ長サノ和又ハ差ガ k ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求ムルモノトセバ,此軌跡ハ四個ノ無限直線

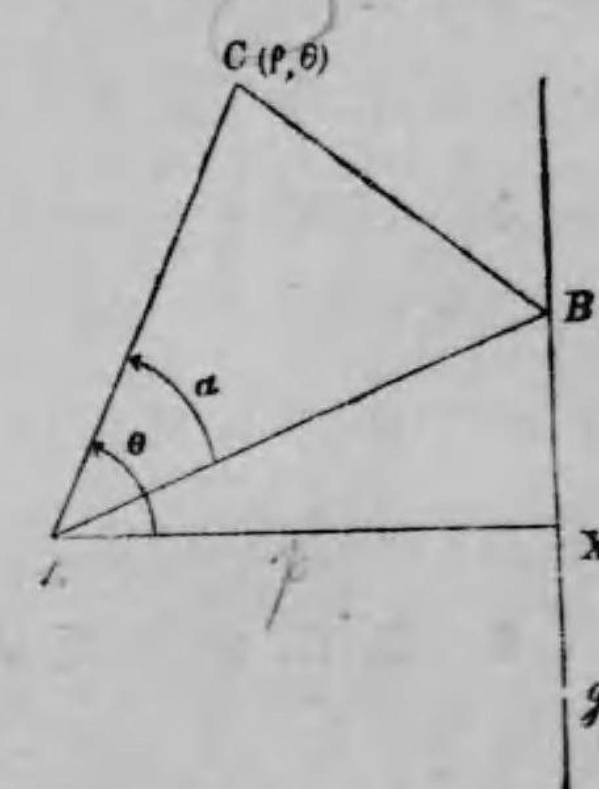
$$\left|\begin{aligned}x&=\pm\frac{k}{2m}\sqrt{1+m^2},\\ y&=\pm\frac{k}{2}\sqrt{1+m^2},\end{aligned}\right.$$

トナルベシ．

【例】3. 三角形ABC ノ三ツノ角ノ大サハ夫々與ヘラレ,且頂點 A ハ固定シ,B ハ與ヘラレタル直線ノ上ヲ動クトキ,頂點 C ノ軌跡ヲ求ム．

A ヲ極トシ,與ヘラレタル直線 g ニ A ヨリ垂線 AX ヲ引キ,コノ垂線ヲ原線トス．又角 A, B, C ノ大サヲ夫々 α, β, γ トシ，AX ノ長サヲ p トス．

第三十二圖



サテ B ガ直線 g 上ノ何レニアリトスルモ,常ニ AB ト AC トノ比ハ不易ナルヲ以テ,コノ値ヲ k トシ，C ノ座標ヲ (ρ, θ) トスルトキハ

$$AB=k\rho$$

ニシテ,マタ

$$AB\cos(\theta-\alpha)=p$$

ナルヲ以テ,結局

$$k\rho\cos(\theta-\alpha)=p\tag{1}$$

ナリ．コレ即チ條件ニ適スル C 點ノ座標 (ρ, θ) ノ間ニ存在スベキ關係ニシテ,逆ニ此關係ヲ滿足スル點 (ρ, θ) ハ必ズ一ノ C ナルコトモ容易ニ證明セラル

ベシ.

(1) ニ於ケル r, θ ヲ流通座標ト見ルトキハ,是即チ一ノ直線ノ極方程式ナリ.

邊 AB ノ一ノ位置ニ對シテ, 條件ニ適スル三角形ハソノ兩側ニ一ツヅヽアリ. 從テ C ハ AB ニ對シテ對稱ニ二個アルベク,求ムル軌跡モ二ツノ直線ヨリナルベシ. (1) ハ其一ツニシテ,他ノ一ハ

$$k\cos(\theta+\alpha)=p$$

ナリ.

問　題

1. 座標軸ノ間ノ角ヲ 60° トシ,次ノ方程式ニヨリテ表ハサレタル直線ヲ畫ケ.

(i) $y=2x+3$,　　(ii) $3y+5x=0$,

(iii) $3(x-3)+4(y-4)=0$,　　(iv) $4x+5=0$,

(v) $y-5=5x+5$.

2. 二點 $(0, -1)$, $(3, 2)$ ヲ通ズル直線ノ方程式ヲ作リ,之ヲ標準形ニ直セ. (直交軸)

3. 原點ヨリ一ノ直線ニ下セル垂線ノ長サガ 1 ニシテ,コノ垂線ハ x 軸ト y 軸トノ正ノ方向ノ間ニアリ,前者ト 45°, 後者ト 30° ノ角ヲナストセバ,其直線ノ方程式如何.

4. 點 $(1, 2)$ ヲ通ジ,直線 $3x+4y=9$ ニ垂直ナル直線ノ方程式ヲ求ム. (直交軸)

5. 點 (a, b) ヲ通ジ,x 軸及ビ y 軸ト相等シキ角ヲナス

直線ノ方程式ヲ求ム.

6. 點 $(3, 4)$ ト $(-3, 4)$ トハ直線 $3x-4y-8=0$ ノ同ジ側ニアルカ否カ. 又此各點ヨリ直線マデノ距離ヲ求ム. (直交軸)

7. 二直線 $x-y-a=0$, $x+y-a=0$ ノ交點ヲ通ジ,他ノ直線 $3x+4y-b=0$ ニ平行ナル直線ノ方程式ヲ求ム.

8. 二直線 $2x+3y-a=0$, $2x+4y-3a=0$ ノ交點ヲ通ジ,直線 $x+2y-b=0$ ニ垂直ナル直線ノ方程式ヲ求ム. (直交軸)

9. 四直線 $x=a_1$, $x=a_2$, $y=b_1$, $y=b_2$ ニヨリテ作ラレタル平行四邊形ノ對角線ノ方程式ヲ求ム.

10. 二直線 $x+\sqrt{3}y=0$, $x-\sqrt{3}y=0$ ノ間ノ角ヲ求ム. (直交軸)

11. 二直線 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ ノ交點ト點 (a, b) トヲ過ル直線ノ方程式ヲ求ム.

12. 軸ノ間ノ角ヲ ω トシテ,二直線 $my+x+a=0$ ト $y-mx=0$ トノナス角ノ正切ヲ求ム. (52頁(5)ヲ應用セヨ)

13. 三ツノ直線

$$\underset{(A)}{x+2y-5=0},\qquad \underset{(B)}{2x+y-7=0},\qquad \underset{(C)}{y-x-1=0}$$

ニヨリテ作ラレタル三角形ノ面積ヲ求ム. (直交軸)

14. 三ツノ直線

A B C

$$y=ax-\frac{bc}{2},\quad y=bx-\frac{ca}{2},\quad y=cx-\frac{ab}{2}$$

ニヨリテ作ラレタル三角形ノ面積ヲ求ム. (直交軸)

15. 二直線 $3x+4y-8=0$, $5x+12y-6=0$ ノナス角ノ二等分線ノ方程式ヲ求ム. (直交軸)

16. 一點 P ヨリ直線 $ax+by+c=0$ ニ下セル垂線ノ長サガ r ニシテ,ソノ足ノ座標ガ (x_1, y_1) ナルトキハ, P ノ座標如何. (直交軸)

17. 極座標ニ於テ,

$$\frac{1}{\rho}=a\cos\theta+b\sin\theta$$

ナル方程式ハ一ノ直線ヲ表ハスコトヲ證明シ,且ツ極ヨリ此直線ニ下セル垂線ノ長サヲ求メヨ.

18 二點 (ρ_1, θ_1), (ρ_2, θ_2) ヲ過ギル直線ノ極座標ニ於ケル方程式ヲ求ム.

19. 次ノ二次方程式ガ二ツノ直線ヲアラハスカ否カヲ決定シ,モシ直線ヲアラハストキハ,ソノ各ノ方程式ヲ求メヨ.

(i) $6x^2-5xy-6y^2+8x+27y-30=0$,

(ii) $x^2-2xy+y^2-2x-2y+1=0$,

(iii) $-3xy+3y^2+8y-3x+5=0$,

(iv) $4x^2-12xy+9y^2-4x+6y+1=0$,

(v) $x^2+y^2-1=0$,

(vi) $xy-1=0$.

20. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ガ二ツノ直線ヲアラハス場合ニハ, $ax^2+2hxy+by^2-2gx-2fy+c=0$ モ亦二ツノ直線ヲアラハスコトヲ證明シ,且兩者ノアラハス二直線ノ位置ノ關係ヲ研究セヨ.

21. 直交軸ニ於テ

$$x^2+4xy+2y^2=0$$

ノ表ハス二直線ノ間ノ角ノ二等分線ノ方程式如何.

22. 直交軸ニ關シ, $x^2-2xy\sec\theta+y^2=0$ ノアラハス二直線ノナス角,及ビソノ二等分線ノ方程式ヲ求ム. (θ = const.)

23. k ヲイカナル常數トスルモ,方程式

$$(a+ka')x+(b+kb')y+(c+kc')=0$$

ノアラハス直線ハ必ズ或ル一定點ヲ過ルコトヲ證明セヨ. 又ソノ定點ノ座標ヲ求メヨ.

24. a 及ビ b ハ各ソノ値ヲ變ズルモ, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ ハ常數ナルトキハ,方程式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ノアラハス直線ハ必ズ或ル一定點ヲ過ルコトヲ示セ. 又ソノ定點ノ座標如何.

25. 一ツノ四角形ノ對邊ノ中點ヲ結ブ二ツノ直線ト,二ツノ對角線ノ中點ヲ結ブ直線トハ同一點ニ於テ交ハルコトヲ證明セヨ.

26. 與ヘラレタル二ツノ直線ヨリ等距離ニアル點ノ

軌跡ヲ求ム.

27. 三角形ノ三ツノ內角ノ二等分線ハ共點線ナルコトヲ證明セヨ.

28. 三角形ノ各邊ヲ夫夫直角ニ二等分スル三ツノ直線ハ共點線ナルコトヲ證明セヨ.

29. 三角形ノ各頂點ヨリ對邊ニ下セル三ツノ垂線ハ共點線ナルコトヲ證明セヨ.

30. 三角形ノ垂心ト重心ト外心トハ共線點ナルコトヲ證明セヨ.

31. 四角形 ABCD ニ於テ,相對スル邊 AB, CD ガ E ニ於テ,又 BC, AD ガ F ニ於テ相交ルモノトス. 二ツノ對角線 AC, BD 及ビ線分 EF ノ各中點ハ共線點ナルコトヲ證明セヨ.

32. 三角形ノ一ツノ角ノ大サト其位置ガ與ヘラレ,且此角ヲ挾ム二邊ノ和ガ與ヘラルヽトキ,第三邊ヲ定比ニ分ツ點ノ軌跡ヲ求ム.

33. O ニ於テ相交ハル二直線アリ. 一點 P ヨリコレニ垂線 PM, PN ヲ下シタルトキ, OM+ON ガ不易ナリトセバ,P ノ軌跡如何.

34. 二點 A, B アリ. B ヲ過ル任意ノ一直線ニ A ヨリ垂線 AP ヲ下シ,ソノ足ヲ P トス. AP 上ニ一點 Q ヲトリ, AP.AQ ヲ常數ナラシムルトキ, Q ノ軌跡ヲ求ム.

35. 一點 P ヨリ,一ノ定レル三角形ノ三邊ニ下セル垂線ノ和ガ一定ナルトキ,P ノ軌跡ヲ求ム. 三角形ノ代リニ多角形ナルトキハ如何.

36. 定點 O ヲ過ル任意ノ直線 g ヲ引キ,與ヘラレタル三ツノ直線ト R_1, R_2, R_3 ニ於テ交ラシメ,g 上ニ更ニ一點 X ヲ取リテ,

$$\frac{1}{OX}=\frac{1}{OR_1}+\frac{1}{OR_2}+\frac{1}{OR_3}$$

ナラシム. X ナル點ノ軌跡如何.

37. 二直線 a, b 及ビコレラノ上ニアラザル一點 P ガ與ヘラルヽトキ,P ヲ過ル任意ノ二ツノ直線 c, d ヲ引キ, c ガ a 及ビ b ト交ハル點ヲ夫々 A, B トシ,d ガ a 及ビ b ト交ハル點ヲ A_1, B_1 トス. 直線 AB_1 及ビ A_1B ノ交點ノ軌跡ヲ求ム.

38. 與ヘラレタル三角形ニ內接スル矩形ノ對角線ノ交點ノ軌跡ヲ求ム.

39. 二ツノ相交ハル直線 LM, LN, 及ビ一直線上ニアル三點 O, P, Q アリ. 今 O ヲ過ル任意ノ一直線ガ LM, LN ト交ル點ヲ夫々 A, B トシ, AP 及ビ BQ ヲ結ビ,ソノ交點ヲ C トス. 然ルトキハ C 點ノ軌跡ハ L ヲ過ル一ノ直線ナルコトヲ證明セヨ.

40. 一點ニ於テ相交ハル三ツノ直線 OA, OB, OC アリ. 又別ニ二ツノ定點 P, Q アリ. 今 OC 上ニ任意ノ一點 R

ヲ取リ, RP, RQ ヲ結ビ,ソノ OA, OB ト交ハル點ヲ夫々 S, T トセバ,直線 ST ハ OC 上ニ於ケル R ノ位置ニ關ハラズ常ニ或ル一定點ヲ過ルコトヲ證明セヨ.

第五章

圓

26. 圓ノ方程式.

圓ノ性質ハ初等幾何學ニ於テ既ニ知ラレタル處ナリト雖,コヽニハ一般ニ解析幾何學ニ於テ,或ル曲線ノ性質ヲ如何ニシテ研究スルモノナルカヲ例示センガタメニ,唯「圓トハ平面上ニ於テ一點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ナリ」トイフ定義ノミヲ根據トシテ其諸性質ヲ演繹セントス. 但シ初等幾何學ニ於テハ,圓ト云ハバ圓周ノミヲ指サズシテ圓周ニヨリテ包マレタル平面ノ一部分ヲモ合セ考フルガ如キモ,解析幾何學ニ於テハ,單ニ圓ト云ハバ圓周ノミノコトナリト知ルベシ.

今直交軸ニ關シ,圓ノ中心ノ座標ヲ (a, b) トシ,半徑ノ長サヲ r トセバ,此圓上ノ任意ノ一點 (x, y) ヨリ中心マデノ距離ハ r ニ等シキヲ以テ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{1}$$

ナリ. 又逆ニ此關係ヲ滿足スル一點 (x, y) ハ必ズ中心 (a, b) ヨリ r ニ等シキ距離ニアルヲ以テ,今考フル處ノ圓ノ

上ノ一點ナラザル可ラズ. 故ニ(1)ハ此圓ノ方程式ナリ.

特ニ圓ノ中心ガ原點ト一致スルトキハ,其方程式ハ

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (2)$$

トナル. 此式ハ簡單ニシテ取扱ニ便ナルヲ以テ,座標軸ノ取リ方ニ關係ナキ圓ノ諸性質ヲ論ズルトキニ常ニ用ヒラル.

(1)ニヨリテ見レバ,圓ハ二次曲線ナルコトヲ知ル. 然レドモ逆ニ二次曲線ハ常ニ圓ヲ表ハスモノト云フヲ得ズ,現ニ前章ニ於テ知レル如ク二ツノ直線ヲ表ハスコトモアルベシ. 依テ今直交軸ニ關シテ一般ナル二次方程式

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \qquad (3)$$

ヲ取リ,之ガ如何ナル場合ニ圓ヲアラハスカヲ考フベシ.

(1)ヲ書キ直ストキハ,

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0 \qquad (4)$$

トナル. 故ニ(3)ガ(4)ノ如キ形ニナリ得ルタメニハ,先ヅ$a=b\neq0$ニシテ且$h=0$ナルコトヲ要スベシ. コレ必要ナル條件ナリ. モシ又此條件ガ滿足セラルルトキハ,(3)ヲ次ノ如クニ變形シ得. 即チaニテ兩邊ヲ割リテ,

$$x^2+y^2+\frac{2g}{a}x+\frac{2f}{a}y+\frac{c}{a}=0,$$

之ヲ括レバ

$$\left(x+\frac{g}{a}\right)^2+\left(y+\frac{f}{a}\right)^2=\frac{g^2+f^2-ac}{a^2}$$

トナル. コレ即チ中心ガ$\left(-\frac{g}{a},-\frac{f}{a}\right)$ニアリテ,半徑ガ$\sqrt{\frac{g^2+f^2-ac}{a^2}}$ナル圓ヲアラハス式ナリ. 然レドモコヽニ$g^2+f^2-ac$ガ零ナルカ,又ハ負ナルトキハ,半徑ノ長サタルベキモノガ零或ハ虛數トナルヲ以テ,コレラヲ除外シ,結局(3)ガ圓ヲアラハスタメノ條件ハ

$$a=b\neq0,\quad h=0,\quad g^2+f^2-ac>0$$

ナリト云フコトヲ得.

然レドモ解析幾何學ニ於テハ,代數的計算ノ結果ヲナルベク普遍的ニ解釋センガタメニ,半徑ガ零又ハ虛ナル場合ヲモ許容シテ弘義ニ於ケル圓ト考ヘ,前者ヲ **點圓**, 後者ヲ **虛圓** トイフ. カク弘義ニ解スレバ,(3)ガ圓ヲアラハスタメノ條件ハ

$$a=b\neq0,\quad h=0$$

ナリ. 依テ圓ノ一般ナル方程式ヲ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \qquad (5)$$

ナリトスルコトヲ得ベシ. コヽニイフg, f, cハ(3)ニ於テハ$\frac{g}{a}, \frac{f}{a}, \frac{c}{a}$ニ當ル.

座標軸ノ間ノ角ヲωトスルトキハ,直交軸ノ場合ト同樣ノ考ヘニヨリ,(a, b)ヲ中心トシ,rヲ半徑トスル圓ノ方程式ハ

$$(x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\omega=r^2$$

即チ

$$x^2+2xy\cos\omega+y^2-2(a+b\cos\omega)x-2(b+a\cos\omega)y$$
$$+a^2+b^2+2ab\cos\omega-r^2=0$$

ナルコトヲ知ルベシ.

以後特別ニ斷リナキトキハ,軸ハスベテ直交軸トシ,圓ハ常ニ實圓ナルモノト定メ置クベシ.*

27. 切線.

圓ノ上ニアル二ツノ相異リタル點ヲP,Qトシ,直線PQヲ引キ,次ニPヲ固定シQヲ此圓ニ沿フテ限リナクPニ近ヅカシメタルトキ,直線 PQ ガ或ル一定ノ直線ニ限リナク近ヅクトキハ,コノ一定ノ直線ヲ名ケテP點ニ於ケル圓ノ **切線** トイヒ,Pヲソノ **切點** ト云フ.

原點ヲ中心トシ,半徑ガrナル圓ノ方程式ハ

$$x^2+y^2=r^2 \tag{1}$$

ナリ. 今此圓周上ニ相異レル二點 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ヲ取ラバ,直線 PQ ノ方程式ハ

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \tag{2}$$

ニシテ,コヽニ

$$x_1^2+y_1^2=r^2, \quad x_2^2+y_2^2=r^2 \tag{3}$$

ナル關係アリ. (3)ノ兩式ヲ邊々相減ジテ,

$$(x_2^2-x_1^2)+(y_2^2-y_1^2)=0$$

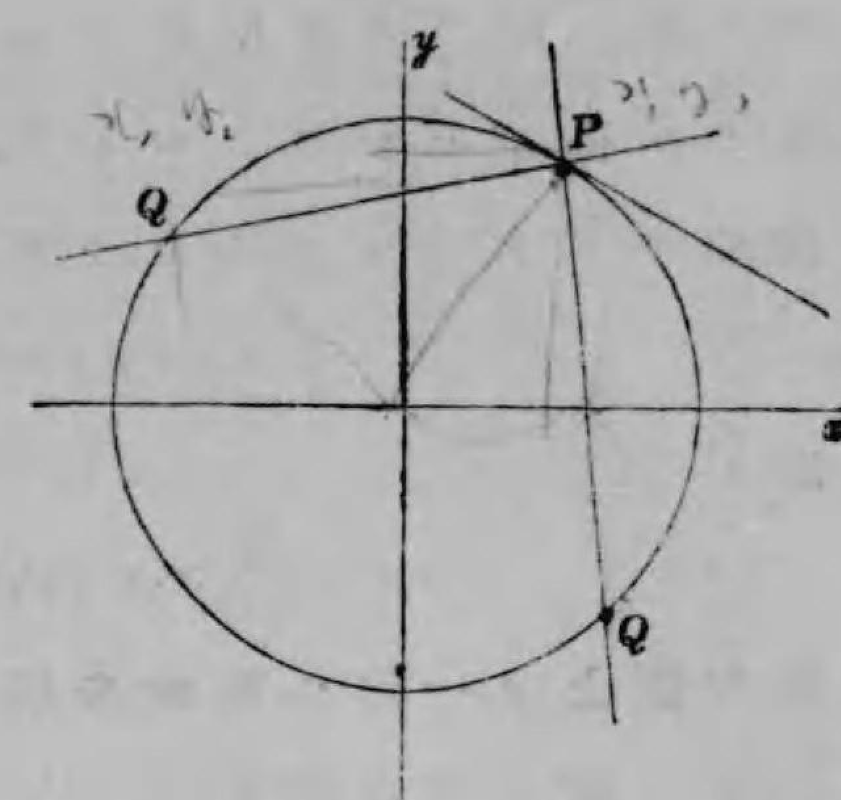
從テ

$$(x_2+x_1)(x_2-x_1)=-(y_2+y_1)(y_2-y_1)$$

* 斜交軸ノ場合ノ圓ノ方程式等ハ中川解析幾何162頁§56ヲ見ヨ.

$\frac{y-y_1}{x-x_1}=$ $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

第三十三圖



トナル. モシコヽニ

$$x_2-x_1\neq 0, \quad y_2+y_1\neq 0 \tag{4}$$

ナリトセバ,

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}$$

ヲ得. 之ヲ(2)ニ代入スルトキハ

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=-\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}$$

トナル. 因テ分母ヲ拂ヒテ一邊ニ集メテ,

$$(x_1+x_2)(x-x_1)+(y_1+y_2)(y-y_1)=0 \tag{5}$$

ヲ得. コレ即チ二點P,Qガ共ニ圓(1)ノ上ニアリトイフコトヲ考ニ入レタルトキノ直線 PQ ノ方程式ナリ. ココニハ(5)ハ(4)ナル假定ノ下ニ作リタレドモ,實ハコノ式ハ x_1+x_2 ト y_1+y_2 トガ同時ニ零ナラザル限リ,即チ PQ ガ圓ノ直徑ナラザル限リ,常ニ直線 PQ ノ方程式ナリ. 何トナレバ(5)ハx及ビyニツイテノ一次式ニシテ,x,yノ代リニx_1, y_1ヲ入ルヽモ,x_2, y_2ヲ入ルヽモ常ニ滿足セラルレバナリ.

扨(5)ニ於テ,Qガ圓ニ沿フテ漸次ニPニ限リナク近ヅキタル場合ヲ考フルニ, 此時 x_2, y_2 ハ夫々 x_1, y_1 ニ限リナク近ヅクニヨリ,(5)ハ畢竟

$$2x_1(x-x_1)+2y_1(y-y_1)=0$$

ナル形ニ限リナク近ヅクベシ. 此式ハPノ座標ノミニヨリテ確定セルモノニシテ,即チ定義ニヨリ,Pニ於ケル切線ヲアラハスモノナラザル可ラズ. 之ヲ書キ直サバ,

$$x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2$$

即チ

$$x_1x+y_1y=r^2 \tag{6}$$

此ヲ圓上ノ一點ニ於ケル切線ノ公式トス.

モシ圓ノ方程式ガ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

ナル形ニテ與ヘラルヽトキ,ソノ圓上ノ一點$P(x_1, y_1)$ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求メント欲セバ,先ヅ座標軸ノ平行移動ニヨリ,原點ヲ圓ノ中心a, bニ移ストキハ,圓ノ式ハ

$$X^2+Y^2=r^2$$

ナル形トナリ,Pノ座標ハ(x_1-a, y_1-b)トナル. コヽニ於テ(6)ニヨリテ,求ムル切線ノ新軸ニ關シテノ方程式ハ

$$(x_1-a)X+(y_1-b)Y=r^2$$

ナルヲ知ル. 之ヲ元ノ軸ニ戻ストキハ

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2 \tag{7}$$

ヲ得.

又モシ圓ノ方程式ガ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

ナル形ニテ與ヘラルヽトキ,ソノ上ノ一點(x_1, y_1)ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求メンニハ,此圓ノ方程式ヲ書キ直シテ

$$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$$

トナシ,公式(7)ヲ應用スルコトニヨリ,求ムル切線ノ方程式ハ

$$(x_1+g)(x+g)+(y_1+f)(y+f)=g^2+f^2-c$$

即チ

$$x_1x+y_1y+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0 \tag{8}$$

トナル.

28. 法線.

圓ノ上ニアル一點Pヲ通ジ,コノ點ニ於ケル圓ノ切線ニ垂直ナル直線ヲP點ニ於ケル圓ノ **法線** ト云ヒ,PヲソノI **足** ト云フ.

與ヘラレタル圓ノ方程式ヲ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{1}$$

トセバ,ソノ上ノ一點$P(x_1, y_1)$ニ於ケル法線ハ,先ヅソノ點自身ヲ過ルニヨリ,

$$\lambda(x-x_1)+\mu(y-y_1)=0 \tag{2}$$

ナル形ノ方程式ヲ有セザル可ラズ. 而シテ又Pニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2 \tag{3}$$

$2d\lambda+y_1\mu=0.$

$2d(y-y_1)+y_1(x-x_1)=0$

ニシテ,(2)ト(3)トハ互ニ垂直ナラザル可ラザルニヨリ,

$$\lambda(x_1-a)+\mu(y_1-b)=0 \qquad (4)$$

ナル關係アリ. λトμトハ同時ニ零ナルコト能ハザルモノナレバ,(2)ト(4)ヨリλ, μヲ消去スルコトニヨリ,

$$(y_1-b)(x-x_1)-(x_1-a)(y-y_1)=0$$

或ハ書キ直シテ,

$$(y_1-b)(x-a)-(x_1-a)(y-b)=0 \qquad (5)$$

ヲ得. (5)ハ即チ二點(a, b), (x_1, y_1)ヲ過ル直線ノ方程式ニ他ナラズ. 故ニ圓ニ於テハ,凡テノ法線ハ皆中心ヲ過ギルモノニシテ,換言スレバ,直徑ヲ双方ニ引キ延バシタル直線ノ別名ニ過ギズ.

29. 圓ト直線トノ交點.

圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (1)$$

トシ,其上ニアル一點P(x_1, y_1)ヲ過ル直線ノ方程式ヲ

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=\rho \qquad (2)$$

トス. コヽニθハソノ直線ガx軸トナス角,ρハPヨリソノ直線上ノ一點マデノPヨリノ距離ニシテ,x軸トθノ角ヲナス方向ヲ正トシテ計レルモノナリ.

今(1)ト(2)トノ交點ニ對應スルρノ値ヲ求メンニハ,先ヅ(2)ヨリ

$$x=x_1+\rho\cos\theta, \qquad y=y_1+\rho\sin\theta$$

ヲ出シ,之ヲ(1)ニ入レテ

$$(x_1+\rho\cos\theta)^2+(y_1+\rho\sin\theta)^2=r^2$$

即チ

$$\rho^2+2(x_1\cos\theta+y_1\sin\theta)\rho+x_1^2+y_1^2-r^2=0 \qquad (3)$$

ナル方程式ヲ作リ,之ヲ解キテρヲ求ムベシ. 然ルニ(x_1, y_1)ハ圓(1)ノ上ノ點ナルヲ以テ,此方程式ニ於ケルρヲ含マザル項ハ零トナル,從テ(3)ハ

$$\rho\{\rho+2(x_1\cos\theta+y_1\sin\theta)\}=0$$

トナリ,其一根ハ明カニ零ナリ,蓋シP點自身ガ交點ノ一ツナレバナリ.

他ノ一根ハ一般ニ零ニアラズ. 之ニ對スル交點ヲQト名ヅクベシ. 然レドモモシθナル角ヲ適當ニ選ビテ

$$x_1\cos\theta+y_1\sin\theta=0 \qquad (4)$$

ナラシムルトキハ,此根モ亦零トナリ,QハPト一致スベシ. 而シテコノ場合ニ直線(2)ハPニ於ケル切線トナルヲ見ル. 實際(2)ト(4)ヨリθヲ消去スルトキハ

$$x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)=0$$

即チ

$$x_1x+y_1y=r^2$$

トナリ,前ニ得タル切線ノ式ト一致ス.

初等幾何學ニ於テハ,圓ノ切線ハ圓ト唯一點ニ於テ交ハルモノナリト稱スレドモ,解析幾何學ニ於テハ以上ノ

理由ニヨリ,切線ハ圓ト相重レル二點ニ於テ交ハルモノト稱スベシ.

更ニ一般ニ圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \qquad (5)$$

トシ,平面上任意ノ一點$P(x_1, y_1)$ヲ過ル直線ノ方程式ヲ

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=\rho \qquad (6)$$

トシ,Pヨリコノ直線ト圓トノ交點マデノ距離ρヲ求メント欲セバ,前ノ如ク(6)ヨリx及ビyヲ出シテ(5)ニ入レ,ρニ關スル二次方程式

$$(x_1+\rho\cos\theta)^2+(y_1+\rho\sin\theta)^2+2g(x_1+\rho\cos\theta)+2f(y_1+\rho\sin\theta)+c=0,$$

即チ

$$\rho^2+2\{(x_1+g)\cos\theta+(y_1+f)\sin\theta\}\rho+x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0 \qquad (7)$$

ヲ作リ,之ヲ解ケバ可ナリ.

故ニ一般ニ一ノ直線ト圓トハ二點ニ於テ相交ハルモノナルコトヲ知ル. ソノ交點ヲQ, Rトセヨ.然ラバPQ及ビPRハ方程式(7)ノ二根ナルヲ以テ

$$PQ.PR=x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c \qquad (8)$$

ナリ. 此右邊ニアルモノハ圓ノ方程式(5)ノ左邊ノ式ニ於テx, yニx_1, y_1ヲ代入セルモノナレバ,モシ(5)ヲ略記シテ

$$f(x, y)=0$$

トスルナラバ,(8)ハ

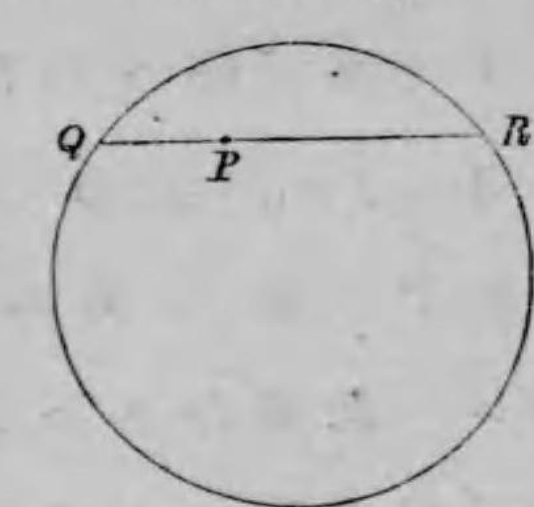
$$PQ.PR=f(x_1, y_1)$$

トスルコトヲ得ベシ. $f(x_1, y_1)$ヲ圓(5)ニ關スルP點ノ冪ト名ヅク. 此値ハ單ニPノ座標ニノミ關スルモノニシテ,直線PQRノ方向ニハ無關係ナリ. 故ニ,一點Pヲ過ギリ任意ノ直線ヲ引キ一ノ圓トQ及ビRニ於テ相交ハラシメバ, PQ.PRナル積ハ一定ナリ.

一點$P(x_1, y_1)$ノ冪ハPノ位置ニヨリテ正ナルコトアリ負ナルコトアリ又零ナルコトモアルベシ. 依テコヽニ三ツノ場合ヲ區別ス.

(1) $f(x_1, y_1)<0$ ナルトキハ點Pハ圓ノ **内ニアリ** ト稱ス. 此場合ニハ二次方程式(7)ニ於テρ^2ノ係數ハ1ニシテ常數項ガ負ナルヲ以テ,二根ハ常ニ實ニシテ且ツ反對ノ符號ヲ有ス. 故ニPヲ過ル直線ハ必ズ圓ト二ツノ點Q, Rニ於テ相交リ,且QトRトハPノ反對ノ側ニアリ. 從テQトRトハ決シテ重リ合フコトナシ. 故ニPヲ過リ如何ナル直線ヲ引クモ此圓ノ切線トナルコトナシ.

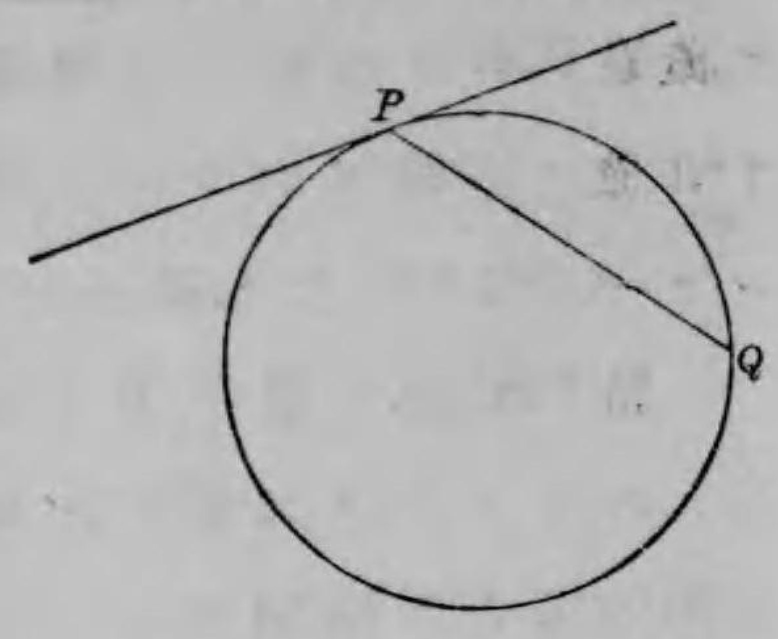
第三十四圖



(2) $f(x_1, y_1)=0$ ナルトキハ即チ點Pガ圓ノ上ニアル場合ニシテ,既ニ本節ノ冒頭ニ於テ詳論セル場合ト同ジ.

即チ此時ニハ二根ハ常ニ實ニシテ,且ソノ一方ハ必ズ零ナリ. 故ニ交點ノ中一ツハP自身ニシテ,他ノ一ツヲQトスルナラバQハ一般ニハPト異ル. 然レドモアル特別ナルθヲ取リ,

第三十五圖



$$(x_1+g)\cos\theta+(y_1+f)\sin\theta=0 \quad (9)$$

ナラシムルトキハ,Qモ亦Pト合シ,直線(6)ハPニ於ケル切線トナル. (6)ト(9)ヨリθヲ消去シテ此切線ノ式ヲ得. 即チ

$$(x_1+g)(x-x_1)+(y_1+f)(y-y_1)=0$$

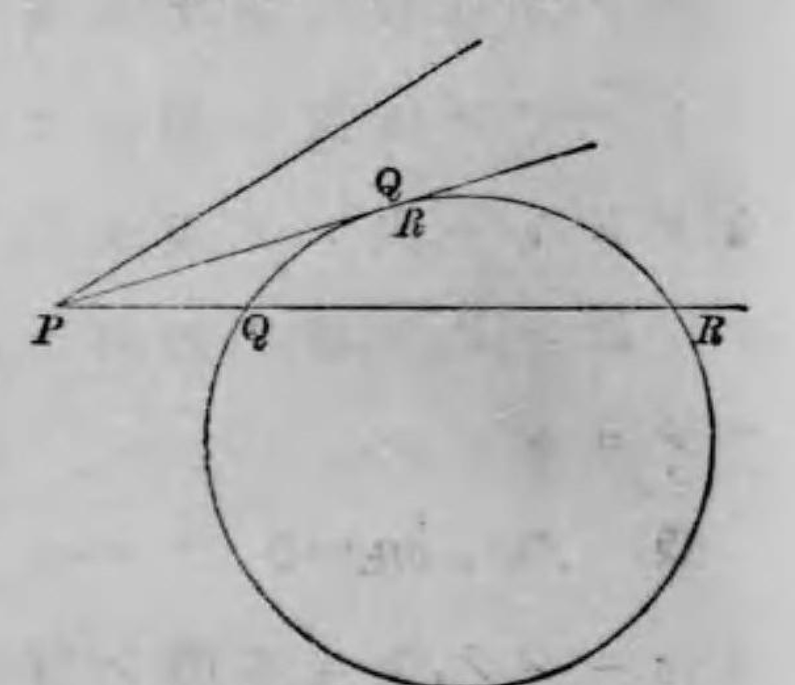
ニシテ,畢竟

$$x_1x+y_1y+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$$

トナリ,第27節(8)(99頁)ト一致ス.

(3) $f(x_1, y_1)>0$ ナルトキハ點Pハ圓ノ **外ニアリ** ト稱ス. 此場合ニハ方程式(7)ノ二根ハ,實ニシテ相異ナルコトアリ,實ニシテ相等シキコトアリ,又虛ナルコトアリ. 從テ圓ノ外ニアル一點ヲ過リテ直線ヲ引クトキハ,其直

第三十六圖



線ハ圓ト相異レル二點ニ於テ交ハルコトアリ,或ハ圓ニ切スルコトアリ,或ハ全ク圓ト相交ラザルコトアリ. 然レドモ,既ニ度々述ベタル如ク成ルベク代數的計算ノ結果ヲ普遍的ニ解釋スルタメニ,後者ノ場合ニ於テモ,相交ラズトイフ代リニ,二ツノ **虛點** ニ於テ相交ハルトイフ言ヒ表ハシ方ヲ用フルコトアリ. 虛點トハソノ座標ノ一方又ハ兩方ニ虛數ヲ含メルモノニシテ圖ノ上ニハ實在セザル點ナリ.

然レドモ交點ノ虛實ニ關ハラズ,(8)ニ得タル關係ハ常ニ成立スベシ. 一般ニ一點Pヨリ圓ニ切線ヲ引キタルトキハ,Pヨリソノ切點マデノ長サハ常ニP點ノ羃ノ平方根ニ等シキモノナリ.

30. 直線ガ圓ニ切スル條件.

圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2=r^2 \quad (1)$$

トシ,與ヘラレタル直線ハy軸ニ平行ナラザルモノトシ,ソノ方程式ヲ

$$y=mx+b \quad (2)$$

トス.

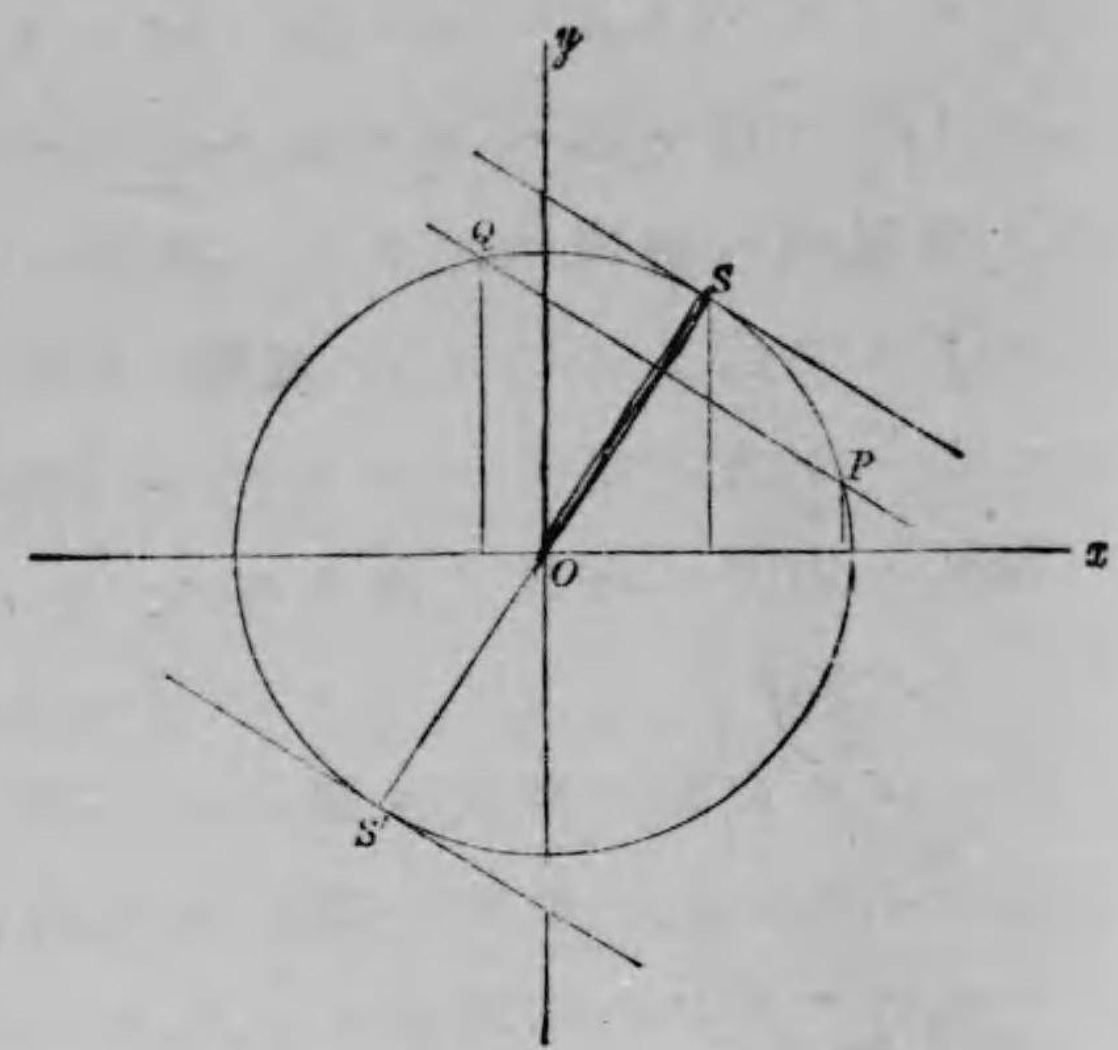
(1)ト(2)ヨリyヲ消去シテ得ルxノ二次方程式

$$x^2+(mx+b)^2=r^2$$

即チ

$$(1+m^2)x^2+2mbx+b^2-r^2=0$$

第三十七圖



ノ二根ハ,直線(2)ト圓(1)トノ交點P, Qノ横線ノ値ナルベキニヨリ,モシ(2)ガ(1)ノ切線ナルトキハ,此二根ハ相等シクナラザル可ラズ. 依テ

$m^2b^2=(1+m^2)(b^2-r^2)$

即チ

$$b=\pm r\sqrt{1+m^2} \qquad (3)$$

ナル關係アル可キナリ. 逆ニ又此關係アルトキハ,(1),(2)ノ二ツノ交點ハ相一致シ,(2)ハ(1)ノ切線トナル. 故ニ(3)ハ(2)ガ(1)ニ切スルタメノ必要ニシテ且十分ナル條件ナリ. (3)ヲ(2)ニ代入スレバ

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2} \qquad (4)$$

ヲ得. コレマタ切線ノ一ノ公式ニシテ,切線ガy軸ニ平行ナル場合ヲ除クノ他,切點ノ座標ヲ知ラズシテ單ニソノ切線ノx軸トナス角ノミヲ知ルトキニ用ヒラル. 右邊ノ複號ハ何レヲモ取リ得ルヲ以テ,x軸ト同一ノ角ヲナス切線ハ二ツアルコトヲ知ルベシ.

モシ與ヘラレタル直線ガy軸ニ平行ナルトキハ,ソノ方程式ヲ

$$x=a$$

トス. 之ト(1)トノ交點ノ縦線ハ

$$y^2=r^2-a^2$$

$r^2-a^2=y^2$
$r^2=0$

ニヨリテ定マル. コノ二根ガ相等シキタメニハ

$$a=\pm r \qquad (5)$$

ナラザル可ラズ. 依テ此場合ノ切線ノ方程式ハ

$$x=\pm r \qquad (6)$$

ナリ.

サテ(3)ニヨリテアラハサルヽ條件ハ,之ヲ書キ直サバ

$$r=\pm\frac{b}{\sqrt{1+m^2}} \qquad (7)$$

ニシテ,コノ右邊ハ丁度原點ヨリ直線(2)ニ下セル垂線ノ長サナリ. 故ニ一ノ直線ガ與ヘラレタル圓ニ切スルタメノ條件ハソノ圓ノ中心ヨリ直線マデノ距離ガ圓ノ半徑ニ等シキコトナリトイフヲ得ベシ. 斯ク云ハバ(5)モ亦ソノ中ニ含マル.

此性質ハ圓ノ幾何學的性質ニシテ,座標軸ノ取リ方ニハモトヨリ關係ナキモノナリ. ヨッテ一般ニ圓ヲ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

トシ直線ヲ

$$c_1x+c_2y+c_3=0$$

トスルナラバ,此直線ガ切線ナルタメノ條件ハ

$$r=\pm\frac{c_1a+c_2b+c_3}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$$

即チ
$$r^2(c_1^2+c_2^2)=(c_1a+c_2b+c_3)^2$$

ナルコトヲ知ルベシ.

31. 一點ヨリ引ケル切線.

圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (1)$$

トシ,今與ヘラレタル一點P(x_1, y_1)ヨリ此圓ニ引ケル切線ノ方程式ヲ求メントス.

求ムル切線ガy軸ニ平行ナル場合ハ$x_1=\pm r$ナルトキニ限リ起ル. 今暫ラク之ヲ除外シ,一般ニ求ムル切線ガx軸トナス角ノ正切ヲmトスルトキハ,前節ノ公式ニヨリ,ソノ切線ノ方程式ノ形ハ

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2} \qquad (2)$$

トナルベシ. 結局問題ハ此切線ガ與ヘラレタル點(x_1,y_1)ヲ過ル様ニmノ値ヲ定ムルコトニ歸ス. ソレガ爲メニハmヲ次ノ方程式ヨリ求ムベシ,即チ

$$y_1=mx_1\pm r\sqrt{1+m^2} \qquad (3)$$

之ヲ變形シテ,

$$(y_1-mx_1)^2=r^2(1+m^2),$$

$y_1^2-m^2x_1^2-2y_1x_1m$

即チ

$$(x_1^2-r^2)m^2-2x_1y_1m+(y_1^2-r^2)=0 \qquad (4)$$

ヲ得. コヽニ一般ニ$x_1\neq\pm r$トセバ,(4)ハmニツイテノ二次方程式ニシテ,ソノ判別式ハ

$$4x_1^2y_1^2-4(x_1^2-r^2)(y_1^2-r^2)$$
$$=4r^2(x_1^2+y_1^2-r^2)$$

トナル. コヽニ$x_1^2+y_1^2-r^2$ハ即チ點Pノ圓(1)ニ關スル冪ナルヲ以テ,Pガ圓外ニアルカ,圓上ニアルカ,圓內ニアルカニ從テ,此判別式ハ正ナルカ,零ニ等シキカ,或ハ負ナリ,從テマタ求ムル切線ハ夫々ノ場合ニ於テ,實ニシテ相異ナル二本ノ直線トナルカ,實ニシテ相合セル二本ノ直線トナルカ,或ハ虛ナル二本ノ直線トナルベシ.

トニカク,(4)ノ二根ヲm_1, m_2トセヨ,然ルトキハ此ノ各ハ(3)ノ式ノ複號ノ中ノ何レカヲ取レルモノヲ夫々滿足スベシ. 依テm_1, m_2ヲ(2)ニ代入シ,ソレソレノ場合ニ適當ナル符號ヲ取ルナラバ,求ムル處ノ切線ノ式ヲ得.

モシ$x_1=r$又ハ$x_1=-r$ナラバ,一ツノ切線ハ明カニ$x=r$又ハ$x=-r$ナリ. 而シテ此場合ニハ(4)ハmニツイテ一次ノ式トナリ,mノ値一ツヲ定ム. 之ヲ(2)ニ入レテ適當ナル符號ヲ取ラバ他ノ一ノ切線ヲ得.

【例】 一點(4, 7)ヨリ圓$x^2+y^2=1$ニ引ケル切線ノ方程式ヲ求ム.

半徑1ナルヲ以テ求ムル切線ノ方程式ヲ

$$y=mx\pm\sqrt{1+m^2}$$

トスルナラバ;(4, 7)ヲ通ルベキニヨリ

$$7=4m\pm\sqrt{1+m^2}$$

ナラザル可ラズ. 依テ

$$15m^2-56m+48=0$$

ナル方程式ヲ得. 之ヲ解ケバ,

$$m=\frac{4}{3}\quad 又ハ\quad \frac{12}{5}$$

トナル. 之ヲ自乗セザル前ノ方程式ニ入レテ試ムルニ, $\frac{4}{3}$ ハ正號ノ場合, $\frac{12}{5}$ ハ負號ノ場合ニ於テ之ヲ滿足ス. 依テ求ムル切線ノ方程式ハ

$$y=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$$

$$y=\frac{12}{5}x-\frac{13}{5}$$

ノ二ツナリ.

然レドモ既ニ m_1, m_2 ヲ得タル後ハ必ズシモ溯リテ(2)ニ代入スルヲ要セズ. 寧ロ與ヘラレタル點 (x_1, y_1) ヲ過ギリ,x軸トナス角ノ正切ガ m_1, m_2 ナル直線トシテ,直チニ次ノ如クニ求ムル切線ノ方程式ヲ作ルヲ便ナリトス.

$$\left.\begin{aligned} y-y_1&=m_1(x-x_1)\\ y-y_1&=m_2(x-x_1)\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

例ヘバ,上記ノ例ナラバ

$$y-7=\frac{4}{3}(x-4)$$

$$y-7=\frac{12}{5}(x-4)$$

トスルガ如シ.

(5)ノ表ハス二ツノ方程式ハ,之ヲ各一邊ニ集メテ後,相乘ジテ一ツノ式ニマトムルトキハ

$$\{y-y_1-m_1(x-x_1)\}\{y-y_1-m_2(x-x_1)\}=0$$

即チ

$$(y-y_1)^2-(m_1+m_2)(x-x_1)(y-y_1)+m_1m_2(x-x_1)^2=0.$$

コヽニ m_1+m_2, m_1m_2 ノ値ヲ方程式(4)ノ係數ニヨリテ表ハシテ代入スルトキハ

$$\begin{aligned}(x_1^2-r^2)(y-y_1)^2&-2x_1y_1(x-x_1)(y-y_1)\\ &+(y_1^2-r^2)(x-x_1)^2=0.\qquad(6)\end{aligned}$$

コレ求ムル切線ノ方程式ナリ. 更ニ他ノ形ニ變形スル爲メニ(6)ニ於テソノ中央項ヲ右邊ニ移シ,且兩邊ニ

$$y_1^2(y-y_1)^2+x_1^2(x-x_1)^2$$

ヲ加フレバ,

$$(x_1^2+y_1^2-r^2)\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\}=\{x_1(x-x_1)+y_1(x-y_1)\}^2.\qquad(7)$$

サテ $x_1^2+y_1^2-r^2$, $x^2+y^2-r^2$, $x_1x+y_1y-r^2$ ヲ夫々 u, v, w ニテ表ハサバ,(7)ハ

$$u(u+v-2w)=(w-u)^2$$

トナル,コレヲ計算シテ

$$uv=w^2$$

即チ

$$(x_1^2+y_1^2-r^2)(x^2+y^2-r^2)=(x_1x+y_1y-r^2)^2\qquad(8)$$

ヲ得. 是即求ムル切線ノ方程式ノ他ノ形ナリ.

扨テ特別ノ場合トシテ $x_1=\pm r$ ナルトキハ,(4),(5) ニヨリテ,求ムル切線ノ方程式ハ

$$x\mp r=0$$

及ビ
$$y-y_1=\pm\frac{y_1^2-r^2}{2ry_1}(x\mp r)$$

トナル. 之ヲマターツニマトムレバ,

$$\mp 2ry_1(x\mp r)(y-y_1)+(y_1^2-r^2)(x\mp r)^2=0$$

ニシテ,丁度(6)ニ於テ $x_1=\pm r$ ト置キタルモノニ當ル. 之ヨリ順次ニ變化スレバ矢張(8)ニ於テ $x_1=\pm r$ ト置キタルモノヲ得ベシ. サレバ(8)ハスベテノ場合ヲ通ジテ用ヒラルヽモノナリ. (6)及ビ(8)ハ屢々應用セラル.

前ニ擧ゲタル例(109頁)ニ公式(8)ヲ應用スルトキハ

$$64(x^2+y^2-1)=(4x+7y-1)^2$$

即チ
$$48x^2-56xy+15y^2+8x+14y-63=0$$

ヲ得. 之ヲ分解セバ

$$(4x-3y+5)(12x-5y-13)=0$$

トナル.

圓ノ方程式ヲ一般ニ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

トシ,一點 $P(x_1, y_1)$ ヨリ之ニ引ケル切線ノ方程式ヲ求メンニハ,先ヅ平行移動ニヨリテ原點ヲ (a, b) ニ移シ,圓ノ方程式ヲ

$$X^2+Y^2=r^2$$

トナシ,Pノ座標ヲ $(x_1-a,\ y_1-b)$ トシ,コヽニ於テ(8)ヲ應用シテ,求ムル切線ノ新軸ニ關シテノ方程式

$$\{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-r^2\}(X^2+Y^2-r^2)=\{(x_1-a)X+(y_1-b)Y-r^2\}^2$$

ヲ得. 更ニ之ヲ元ノ軸ニ戻ストキハ

$$\begin{aligned}&\{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-r^2\}\{(x-a)^2+(y-b)^2-r^2\}\\&\qquad=\{(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)-r^2\}^2\end{aligned}\tag{9}$$

トナル.

32. 極及ビ極線.

一點 $P(x_1, y_1)$ ヨリ,圓

$$x^2+y^2=r^2\tag{1}$$

ニ引ケル切線ノ方程式ハ,前節(6)ニヨリ,

$$(x_1^2+y_1^2-r^2)(x^2+y^2-r^2)=(x_1x+y_1y-r^2)^2\tag{2}$$

ナルヲ以テ,モシソノ切點ノ座標ヲ求メント欲セバ,(1)及ビ(2)ヲ聯立方程式トシテ解ク可シ. 然ルニ(2)ノ左邊ニ於テ,(1)ナル關係ヲ入ルルトキハ,

$$x_1x+y_1y=r^2\tag{3}$$

ヲ得ルニヨリ,結局(1)ト(3)トヲ組合ハシテ解キテ可ナリ.

(3)ハ x ト y トニツイテ一次式ナルヲ以テ,此 x, y ヲ流通座標ト見ルトキハ一ノ直線ノ式ト考フルコトヲ得ベク,ソノ直線ト圓(1)トノ交點ガ即チ今求メントスル切點トナルベキモノナリ. 依テ(3)ハ點Pヨリ圓(1)ニ引ケル

切線ノ切點ヲ結ビ付クル直線ノ式ナリト解釋スルコトヲ得 Pヨリ引ケル切線ガ虛ナル場合ト雖,此證明ハソノマヽ通用スベキニヨリ,假令切點ガ虛ナリトモ,之ヲ結ビ付クル直線ハ常ニ實ニシテソノ方程式ハ(3)ナリ.

但シ,コヽニ(3)ナル式ハ先ニ得タル切線ノ公式ト同一ノ形ヲ有スレドモ,切線ノ式ナルトキニハ (x_1, y_1) ハ圓ノ上ノ點ナリシニ反シ,此處ニイフ (x_1, y_1) ハ必シモ圓ノ上ノ點ニアラズ. サレバ兩者ハ一般ニハ別々ノ公式ナリ. 唯P點ガ圓(1)ノ上ニアル時ニ限リ,(3)ハソノ點ニ於ケル切線トナルベシ.

方程式(3)ハマタ下ノ如クニモ誘導セラル.

今 $P(x_1, y_1)$ ヨリ圓(1)ニ引ケル二ツノ切線ノ切點ヲ $Q(x_2, y_2)$ 及ビ $R(x_3, y_3)$ トスルナラバ,Q及ビRニ於ケル圓ノ切線ノ方程式ハ夫々

$$x_2x+y_2y=r^2$$

$$x_3x+y_3y=r^2$$

ナリ. 而シテPハ此二ツノ切線ノ交點ナルニヨリ

$$\left.\begin{array}{l} x_2x_1+y_2y_1=r^2 \\ x_3x_1+y_3y_1=r^2 \end{array}\right\} \tag{4}$$

ナル關係ガ成立ス. 扨テ今

$$x_1x+y_1y=r^2 \tag{5}$$

ナル方程式ヲ有スル一ノ直線ヲ考フルニ,(4)ニヨリテ此

直線ハ (x_2, y_2) 及ビ (x_3, y_3) ナル二點ヲ過ギルコトヲ知ル. 故ニ(5)ハ直線QRノ方程式ナリ.

點Pヨリ圓(1)ニ引ケル切線ノ實又ハ虛ナル二ツノ切點ヲ結ビ付クル直線(3)又ハ(5)ヲ稱シテ,圓(1)ニ關スル點Pノ**極線**トイヒ,PヲソノI**極**トイフ. 極ガ圓ノ上ニアルトキハ,ソノ極線ハ切線トナル. 即チ切線ハ極線ノ特別ナル場合ナリ.

次ニ一ツノ直線

$$c_1x+c_2y+c_3=0 \tag{6}$$

ガ與ヘラルヽトキ,此ハ圓(1)ニ關シテ如何ナル點ヲ極トスル極線ト見做シ得ルカヲ考ヘンニ,假リニソノ點ヲ $(x_1, y_1$ トスルトキハ,ソノ極線ハ

$$x_1x+x_1y-r^2=0$$

ナルベキナリ. 依テ(6)ガ之ト同一ノ直線ヲアラハスタメニハ

$$\frac{x_1}{c_1}=\frac{y_1}{c_2}=\frac{-r^2}{c_3}$$

ナラザル可ラズ. 之ヨリシテ

$$x_1=-\frac{c_1r^2}{c_3}, \qquad y_1=-\frac{c_2r^2}{c_3} \tag{7}$$

ヲ得. 故ニ c_3 ガ零ナラザル限リ,即チ與ヘラルタル直線(6)ガ圓ノ中心ヲ過ラザル限リ,ソレノ極ト見做スベキ點ハ必ズ唯一ツ存在ス. モシ直線ガ圓ノ中心ヲ過ルトキハ $c_3=0$ ニシテ,極ハ無究遠ニ於ケル點ト考フベシ.

以上スベテ圓ノ中心ヲ原點トシテ考ヘタレドモ,モシ圓ノ式ヲ一般ニ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

トシ,與ヘラレタル點ヲ $P(x_1, y_1)$ トスルトキハ,先ヅ座標軸ノ平行移動ニヨリテ,原點ヲ (a, b) ニ移シ,圓ノ方程式ヲ

$$X^2+Y^2=r^2$$

ナラシメ,P ノ座標ヲ $(x_1-a,\ y_1-b)$ トシテ後,前記ノ結果ヲ適用スベシ. 即チ P ノ極線ノ方程式ハ新軸ニ關シテ

$$(x_1-a)X+(y_1-b)Y=r^2$$

トナル. 依テ之ヲ元ノ軸ニ戻ストキハ

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2 \tag{8}$$

ヲ得.

又,元ノ軸ニ關シテ,與ヘラレタル直線ノ方程式ヲ

$$c_1x+c_2y+c_3=0 \tag{9}$$

トスルトキハ,平行移動ノ後ニハ此式ハ

$$c_1x+c_2y+(c_1a+c_2b+c_3)=0$$

トナルヲ以テ,新軸ニ關スル此直線ノ極ハ(7)ニヨリテ

$$X_1=-\frac{c_1r^2}{c_1a+c_2b+c_3}$$

$$Y_1=-\frac{c_2r^2}{c_1a+c_2b+c_3}$$

ナルベシ. 之ヲ元ノ軸ニ戻ストキハ直線(9)ノ極ノ座標ハ

$$\left.\begin{aligned} x_1&=a-\frac{c_1r^2}{c_1a+c_2b+c_3} \\ y_1&=b-\frac{c_2r^2}{c_1a+c_2b+c_3} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

トナル.

然レドモ極及ビ極線ノ性質ハモトヨリ座標軸ノ取リ方ニハ關係ナキモノナレバ,以下ナルベク計算ヲ簡單ニスルタメニ圓ノ中心ヲ原點トスル場合ヲ取リテ考フベシ.

33. 極及ビ極線ノ位置.

與ヘラレタル圓ヲ

$$x^2+y^2=r^2 \tag{1}$$

トスルトキハ,之ニ關スル一點 $P(x_1, y_1)$ ノ極線ハ

$$x_1x+y_1y=r^2 \tag{2}$$

ニシテ,又 P ト圓ノ中心 O トヲ結ブ直線ハ

$$y_1x-x_1y=0 \qquad m_1=-\frac{x_1}{y_1} \quad \frac{y_1}{x_1} \tag{3}$$

ナリ. (2)ト(3)トハ相互ニ垂直ナルコト明カナリ.

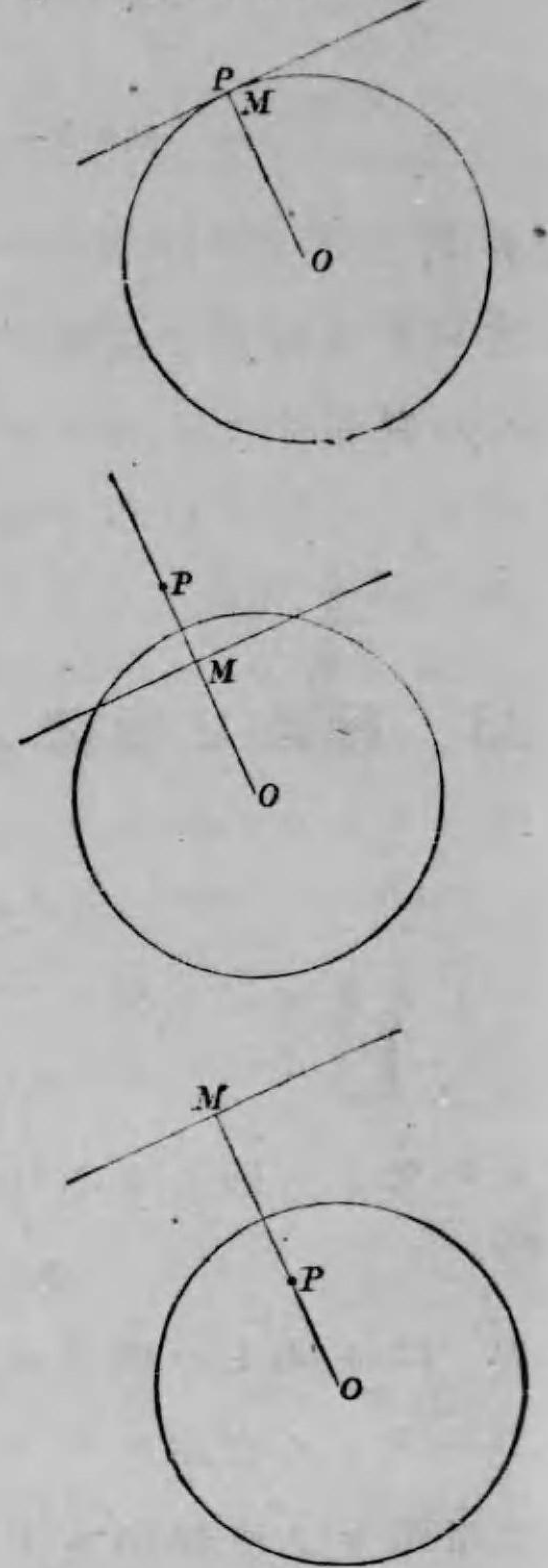
今(2)ト(3)トノ交點ヲ M トスルトキハ線分 $\overline{OM}$ ノ長サハ即チ原點ヨリ直線(2)ニ下セル垂線ノ長サナルヲ以テ

$$\overrightarrow{OM}=\frac{r^2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=\frac{r^2}{\overrightarrow{OP}}.$$

故ニ

$$\overrightarrow{OP}.\ \overrightarrow{OM}=r^2$$

第三十八圖



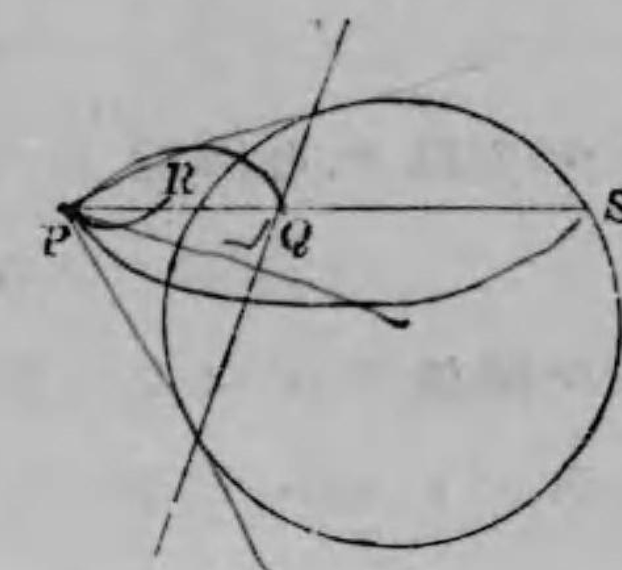
ナル關係アリ. 之ニヨリテ, Pガ與ヘラレタルトキハMノ位置ヲ決定スルコトヲ得ベク,ソノMヲ過ギリテ OPニ垂直ナル直線ハPノ極線ナリ. 又逆ニ極線ガ與ヘラレタルトキ,ソノ極ヲ見出スコトモ容易ナリ.

之ニヨリテ見レバ,點ガ圓外ニアルトキハソノ極線ハ圓ト必ズ相交ル直線ニシテ,點ガ圓內ニアルトキハソノ極線ハ圓ト交ラズ. 點ガ無究遠ヨリ來リテ遂ニ圓周ヲ越エ圓ノ中心ニ近ヅクニ從テソノ極線ハハジメ圓ノ中心ヲ過ル直線ナリシ位置ヨリ發シテ漸次ニ中心ヲ遠ザカリ,ツイニ無究遠ニ赴ク.

極及ビ極線ノ相互ノ位置ニ關シテハ更ニ次ノ定理アリ. 或ハ之ヲ以テ極及ビ極線ノ定義トナスコトアリ.

一點Pヲ過リ任意ノ直線ヲ引キ,與ヘラレタル圓ト實又ハ虛ナル二點R, Sニ於テ交ラシメ, R, Sニ對シテPノ調和共軛點ヲQトスルナ

第三十九圖



ラバ,Qノ軌跡ハ即チPノ極線ナリ.

之ヲ證明センニハ,圓ノ中心ヲ原點ニトリ,Pノ座標ヲ (x_1, y_1) トシ,之ヲ過ル直線ノ方程式ヲ

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=\rho \qquad (4)$$

取ス. 第9節(3)ニヨリ, PR, PS ハ次ノ方程式ノ二根ナリ,

$$\rho^2+2(x_1\cos\theta+y_1\sin\theta)\rho+x_1^2+y_1^2-r^2=0.$$

然ルニ假定ニヨリ, P, Q ハ R, S ニヨリ調和ニ分タルルヲ以テ,初等幾何ニ於テ知ラルヽ所ニヨリ

$$\frac{2}{PQ}=\frac{1}{PR}+\frac{1}{PS}$$
$$=\frac{PR+PS}{PR.PS}$$

ナラザル可ラズ. 故ニ

$$\frac{2}{PQ}=-\frac{2(x_1\cos\theta+y_1\sin\theta)}{x_1^2+y_1^2-r^2}.$$

此PQノ値ヲ(4)ノ ρ ニ代入シ,之ヨリQノ座標ヲ求ムルトキハ

$$\begin{cases} x=x_1-\dfrac{x_1^2+y_1^2-r^2}{x_1\cos\theta+y_1\sin\theta}\cos\theta \\ y=y_1-\dfrac{x_1^2+y_1^2-r^2}{x_1\cos\theta+y_1\sin\theta}\sin\theta \end{cases}$$

ヲ得. 即チR, Sガ虛ナルトキモ, Qハ常ニ實ナリ. コノ二式ニ夫々 x_1, y_1 ヲ乘ジテ相加フルトキハ, θ ハ消去セラレテ

$$x_1x+y_1y=r^2$$

トナル. コレ即チQノ軌跡ニシテ, Pノ極線ナリ.

34. 極及極線ノ相反性.

與ヘラレタル圓

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (1)$$

ニ關シ,一點 P(x_1, y_1) ノ極線ハ

$$x_1x+y_1y=r^2 \qquad (2)$$

ナルヲ以テ,此極線上ニ任意ノ一點 Q(x_2, y_2) ヲ取ラバ,

$$x_1x_2+y_1y_2=r^2 \qquad (3)$$

ナル關係アルベシ. 然ルニ又Q點ノ圓(1)ニ關スル極線ヲ作ルトキハ

$$x_2x+y_2y=r^2 \qquad (4)$$

ナルニヨリ,(3)ハ即チP點ガ(4)ナル直線上ニアルコトヲ示スモノナリ. 故ニ一般ニ, **一ノ圓ニ關シテ一點Pノ極線ガ他ノ一點Qヲ過ルトキハ,同ジ圓ニ關スルQノ極線ハマタPヲ過ル**. 之ヲ極ト極線ノ **相反性** トイフ. 斯クノ如キ性質ヲ有スル二點 P, Q ヲ,其圓ニ關シテ互ニ **共軛ナル點** ト云フ. (3)ハ即チ二點 (x_1, y_1), (x_2, y_2) ガ圓(1)ニ關シテ共軛ナルタメノ條件ナリ.

又一ツノ直線 p ノ圓(1)ニ關スル極ヲPトセヨ,然ルトキハPヲ過ル任意ノ直線 q ノ圓(1)ニ關スル極ハ必ズ p ノ上ニアルベシ. 何トナレバ q ノ極ヲQトスルトキハ,Qノ極線 q ハ一點Pヲ過ルニヨリ,相反性ニヨリテPノ極線 p ハマタ必ズQヲ過ラザル可ラズ. 斯クノ如キ性質ヲ有スル二直線 p, q ヲ,其圓ニ關シテ相互ニ **共軛ナル直線** ト云フ. 二ツノ直線

$$c_1x+c_2y+c_3=0$$

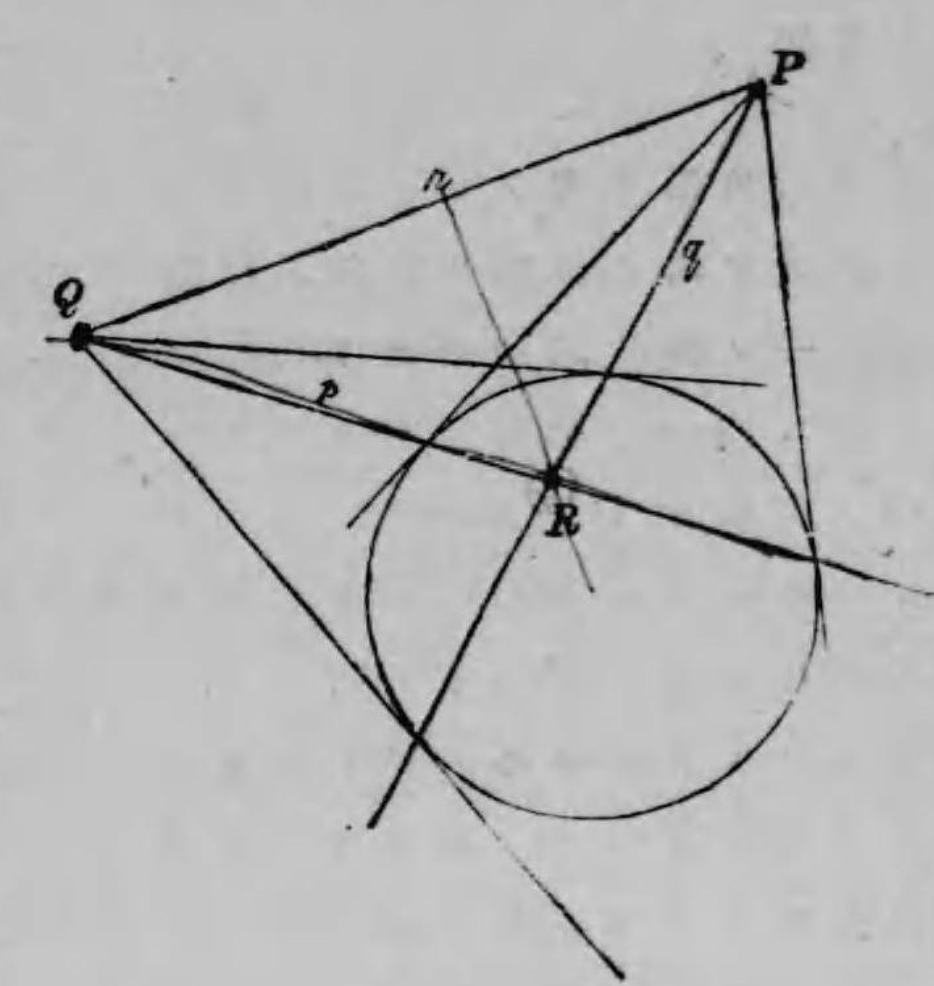
$$c_1'x+c_2'y+c_3'=0$$

ガ圓(1)ニ關シテ共軛ナルタメノ條件ハ,第32節(7)(115頁)ニヨリ

$$r^2(c_1c_1'+c_2c_2')=c_3c_3'$$

ナルコトハ容易ニ證明セラルベシ.

第四十圖



一ノ與ヘラレタル圓ニ關シ,コノ圓ノ上ニアラザル一點Pノ極線 p ハPヲ過ルコトナシ. 次ニ p ノ上ニ,p ト圓トノ交點以外ニ一點Qヲトラバ,Qノ極線 q ハマタQヲ過ルコトナシ. 然レドモPトQトハ互ニ共軛ニシテ q ハPヲ過ル. 今 p ト q トガRニ於テ交ルトキニハ,Rハ直線 PQ ノ上ニアルコトナシ, 何トナレバモシRガ PQ 上ニアルトキハ,p ハ PQ ト合シ從テ p ガPヲ過ルコトヽナレバナリ.

扨RハP及ビQノ極線タル p 及ビ q ノ何レノ上ニモアルヲ以テ,Rノ極線ハ必ズP及ビQヲ共ニ過ラザル可ラズ. 即チ直線 PQ ナラザル可ラズ.

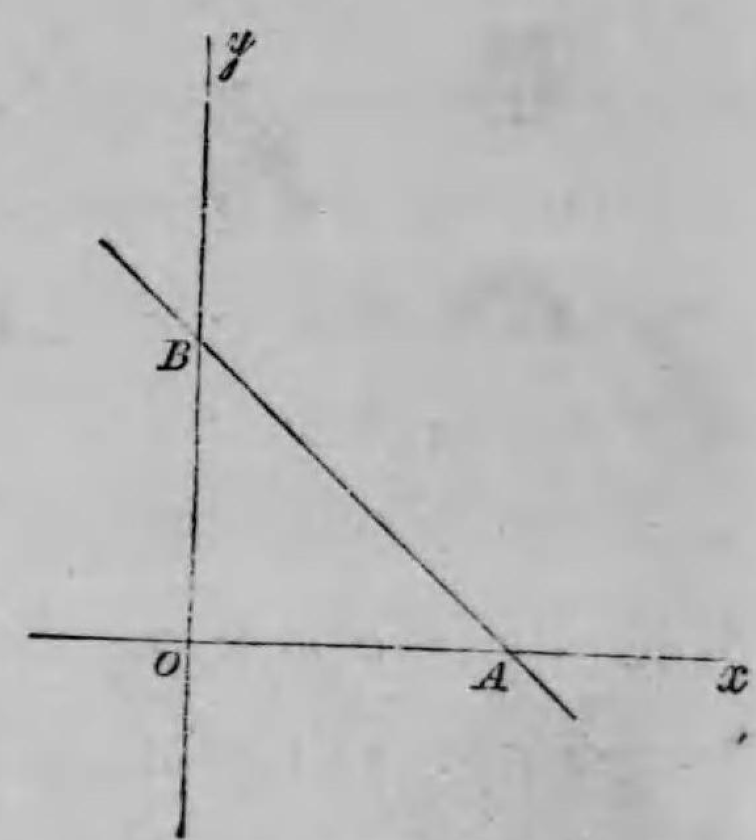
然ルトキハ與ヘラレタル圓ニ關シテ三角形PQRノ各頂點ノ極線ガ丁度各ツノ對邊トナル. カクノ如キ性質ヲ有スル三角形ヲ,其圓ニ關シテ一ノ **極三角形** ト名ヅク.*

一ツノ與ヘラレタル圓ニ關シテ極三角形ハ無限ニ多ク作ルコトヲ得ベシ,然レドモ任意ニ一ツノ三角形ヲ取ルトキ,之ヲ極三角形トシテ有スル如キ圓ハ必ズシモ常ニ存在セズ. 例ヘバ一ノ直交軸ニ關シ,三ツノ直線

$$x=0, \quad y=0, \quad x+y-1=0$$

ノ作ル三角形ヲ考フレバ,第四十一圖ニ示スガ如ク,原點ヲ直角ノ頂點トスル一ノ直角三角形ナリ. 之ガアル圓ニ關シテ極三角形ナリトセバ,Bノ極線ガOAナルヲ以テ,ソノ圓ノ中心ハBヨリOAニ下シタル垂線BOノ上ニアラザル可ラズ. 同樣ニマタソノ中心ハAOノ上ニモアラザル可ラズ. 依テ原點Oガ圓ノ中心ナラザル可ラズ. 而シテOニ對スル邊ABハ此圓ニ關スルOノ極線ニアラズ. 何トナレバ圓ノ中心ヲ極トスルトキハ極線ハ無究遠ニアル可ケレバナリ.

第四十一圖



極及ビ極線ノ性質ニヨリ,圓ガ畫キテ與ヘラレタルトキ一定點ノ極線,一定直線ノ極及ビ圓上ノ一點ニ於ケル切線ハ何レモ定規ノミヲ使用シテ求ムルコトヲ得.**

* 稀ニハ自共軛三角形トモ云フ.

** 中川解析幾何217—219頁ヲ見ヨ.

35. 三點ヲ過ル圓.

直交軸ニ關シテ與ヘラレタル三ツノ相異レル實點ヲ$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$トシ,此三點ヲ過ルベキ圓ヲ求メントス.

圓ノ方程式ハ一般ニ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \qquad (1)$$

ト置クコトヲ得ベク,之ガ與ヘラレタル三點ヲ過ルモノトセバ,g, f, cハ次ノ方程式ヲ同時ニ滿足スベキナリ,

$$\begin{aligned} x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c&=0 \\ x_2^2+y_2^2+2gx_2+2fy_2+c&=0 \qquad (2) \\ x_3^2+y_3^2+2gx_3+2fy_3+c&=0 \end{aligned}$$

此三ツノ方程式ハg, f, cニ關シテ聯立一次方程式ナレバ,係數ノ行列式

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

ガ零ナラザル限リ,即チ幾何學的ニ云ハゞ三點P, Q, Rガ一直線上ニアラザル限リ,必ズ確定セル一組ノ實根ヲ有スベシ. 而シテソノ根ヲ(1)ノg, f, cノ處ニ代入スルトキハ,求ムル圓ノ方程式ヲ得. ソノ圓ハ必ズ實圓ナルベシ,之ヲ證明スルニハ,

$$g^2+f^2-c>0$$

ナルコトヲ示セバヨシ. 然ルニ(2)ノ第一式ヨリシテ

$$(x_1+g)^2+(y_1+f)^2=g^2+f^2-c$$

ヲ得ルニヨリ, g^2+f^2-c ハ負ナルコトナシ. モシ又之ガ零ナラバ左邊ノ各項ガ別々ニ零ナラザル可ラザルニヨリ, $g=-x_1$, $f=-y_1$ ヲ得. 然ルニ同様ニ(2)ノ第二式ヲ取扱ヘバマタ $g=-x_2$, $f=-y_2$ ヲモ得ベキニヨリ P, Q ハ同一ノ點トナリ,假定ニ反ス. 故ニ結局 g^2+f^2-c ハ正ナラザル可ラズ.

故ニ一直線上ニアラザル三ツノ相異レル點ヲ過ル圓ハ常ニ一ツアリ,且一ツニ限ル. ソノ方程式ハ,(1)及ビ(2)ヨリ g, f, c ヲ消去スルコトニヨリ求メラル. 即チ

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0. \qquad (3)$$

今コヽニ於テ

$$x_1^2+y_1^2=p,\quad x_2^2+y_2^2=q,\quad x_3^2+y_3^2=r,\qquad \begin{vmatrix} p & y_1 & 1 \\ q & y_2 & 1 \\ r & y_3 & 1 \end{vmatrix}=A,$$

$$\begin{vmatrix} p & x_1 & 1 \\ q & x_2 & 1 \\ r & x_3 & 1 \end{vmatrix}=B,\quad \begin{vmatrix} p & x_1 & y_1 \\ q & x_2 & y_2 \\ r & x_3 & y_3 \end{vmatrix}=C,\quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=D$$

ト置カバ,(3)ハ

$$D(x^2+y^2)-Ax+By-C=0$$

トナル.

モシ P, Q, R ノ三點ガ一直線上ニアルトキハ, D=0 ナルヲ以テ,(3)ハ

$$-Ax+By-C=0 \qquad (4)$$

トナリ,コヽニ A 及ビ B ハ決シテ同時ニ零トナルコトナシ.*

故ニ(4)ハ x 及ビ y ニツイテノ一次式ニシテ一ノ直線ヲアラハス. 而シテ此ガ三點 P, Q, R ヲ過ルベキコトハ(3)ノ形ヨリシテ明カナリ.

次ニ四ツノ相異レル點 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, $P_4(x_4, y_4)$ ガ同一圓周上ニアリトセバ,ソノ座標ノ間ニハ,(3)ニヨリテ,次ノ關係アルベシ,

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad (5)$$

逆ニ四ツノ相異レル點ノ座標ノ間ニ(5)ナル關係ガ成立スルトキハ,ソレラノ點ハ同一圓周上ニアルカ,又ハ一直線上ニアルベシ.**

---

*中川解析幾何學194頁ヲ見ヨ.

**(5)ヲ變化シテとれみーノ定理ヲ誘導スルコトヲ得. 委シキコトハ中川解析幾何學197頁ヲ見ヨ.

36. 二點ヲ過ギル圓.

直交軸ニ關シテ相異レル二定點ヲ $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ トス. 今P及ビQヲ通ズル一ツノ圓ノ方程式ヲ

$$S=0$$

トシ,P及ビQヲ結ビ付クル直線ノ方程式ヲ

$$T=0$$

トセヨ. 然ルトキハ P,Q二點ヲ通ズル圓ノ方程式ハ必ズ

$$S-kT=0 \qquad (1)$$

ナル形ニヨリテ表ハスコトヲ得ベシ,コヽニkハ適當ナル常數ヲ示ス.

何トナレバ,(1)ニ於テx^2トy^2トノ係數ハSニ於ケルマヽナレバ互ニ相等シカルベク,又xyノ項ハ存在セザルヲ以テ,(1)ハ一ノ圓ヲアラハスベシ. 而シテP及ビQノ座標ハ同時ニ$S=0$, $T=0$ヲ滿足スルヲ以テ又(1)ヲモ滿足ス. 即チ(1)ハPトQトヲ過ル圓ナリ. 扨一般ニP及ビQヲ通ズル圓ハ直線PQ上ニアラザル他ノ一點Pヲ通ゼシムルコトニヨリテ確定ス. 然ルニkヲ適當ニ定ムルトキハ,常ニ(1)ヲシテ與ヘラレタル $R(x_3, y_3)$ ヲ通ゼシムルコトヲ得ベシ. 何トナレバ,Rハ直線PQ上ニアラザルヲ以テ,ソノ座標ヲTノ中ニ入レテ得ル値ハ零ニアラズ,依テ之ヲT'トシ,又ソノ座標ヲSニ入レタルモノヲS'トスルトキハ,

$$S'-kT'=0$$

ナル樣ニkヲ定メ得レバナリ.

故ニ(1)ハP,Q二點ヲ過ル任意ノ圓ヲアラハシ得ル方程式ナリ.

サテ線分 PQ ヲ直徑トスル圓ノ方程式ヲ考フルニ,明ラカニ

$$\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2=\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{4},$$

即チ $$x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y+x_1x_2+y_1y_2=0$$

ナリ,之ヲ $S=0$ ニ取リ,又P, Q 二點ヲ過ル直線ノ方程式

$$(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y+x_1y_2-x_2y_1=0$$

ヲ $T=0$ ニ取ルトキハ, **一般ニPトQトヲ過ル圓ノ方程式ハ**

$$x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y+x_1x_2+y_1y_2$$
$$-k\{(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y+x_1y_2-x_2y_1\}=0$$

ニヨリテ表ハサル,コヽニkハ一ノ常數ナリ.

又P,Qヲ過ル二ツノ相異レル圓ノ方程式ヲ

$$S_1=0, \qquad S_2=0$$

トスルナラバP,Q二點ヲ過ル任意ノ他ノ圓ノ方程式ハ

$$mS_1+nS_2=0 \qquad (2)$$

ナル形ニヨリテ表ハスコトヲ得,コヽニm, nハ何レモ常數ナリトス. 此ヲ證明スルニハ上ニ(1)ニ對シテ用ヒタ

ルト同様ノ論法ニヨルコトヲ得ベシ.

m 又ハ n ノ何レカヾ零ナルトキハ(2)ハ元ノ二ツノ圓ノ中ノ何レカト一致ス. ソノ他ノ場合ニハ(2)ノアラハス圓ハ單ニ m ト n トノ比ノミニヨリテ決定セラルヽニヨリ,(2)ノ代リニ或ハ

$$S_1+kS_2=0 \qquad (3)$$

トシ,コヽニ k ヲ一ノ常數トスルモ可ナリ.

(2)又ハ(3)ニ於テ, m, n 或ハ k ノ特別ノ値ニ對シテハ丁度二次ノ項 x^2 及ビ y^2 ガ消失スルコトアルベシ. ソノ時ニ限リ(2)又ハ(3)ハ一ノ直線ヲアラハスコトヽナル. 此直線ノ性質ニツイテハ次節ニ詳論セントス.

37. 根軸.

二ツノ圓ノ方程式ヲ一般ニ

$$S_1=(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2=0 \qquad (1)$$

$$S_2=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2^2=0 \qquad (2)$$

トセヨ. 然ルトキハ一般ニ

$$S_1-kS_2=0 \qquad (3)$$

ハ一ノ圓ヲアラハス方程式ニシテ,且(1)ト(2)トヲ同時ニ滿足スル x, y ノ値ハ,ソノ實ナルト虛ナルトヲ問ハズ,トニカク(3)ヲモ滿足スルニヨリ,(3)ハ(1)及ビ(2)ノ實又ハ虛ナル交點ヲ過ル圓ヲアラハスモノト考フルコトヲ得ベシ. 今特ニ $k=1$ トスルトキハ,此場合ニ(3)ハ

$$S_1-S_2=2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y$$
$$+a_1^2+b_1^2-r_1^2-a_2^2-b_2^2+r_2^2=0 \qquad (4)$$

トナリ,此ハ $a_1=a_2$, $b_1=b_2$ ナラザル限リ,即チ二ツノ圓ガ同心ナラザル限リ,一ノ直線ヲアラハス. 而シテ(1),(2)ノ交點ヲ過ルコトハ前ノ如シ.

之ニヨリテ見ルニ,二ツノ圓ガ與ヘラルヽトキハ,ソノ交點ノ實ナルト虛ナルトニ關ハラズ,ソノ二ツノ交點ヲ結ビ付クル直線ハ常ニ實在シ,(4)ナル方程式ヲ有ス. 此直線ヲ二ツノ圓ノ **根軸** ト稱ス.

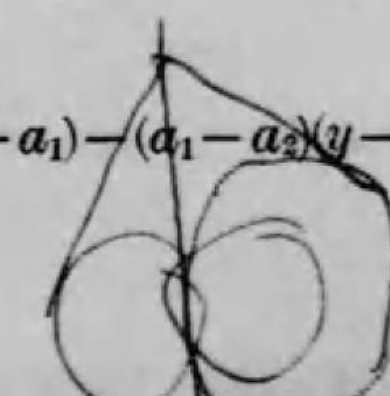
一點 M (x,y) ガ(1)ト(2)トノ根軸ノ上ニアルトキハ,(4)ニヨリテ,コノ點ノ座標ハ

$$S_1=S_2$$

ナル關係ヲ滿足ス. 即チ二ツノ圓ニ關スルM點ノ冪ハ相等シ. 又Mガ根軸上ニアラザレバ,ソノ冪ノ相等シカラザルコトモ明カナリ. 故ニ二ツノ與ヘラレタル圓ニ關シ,同ジ冪ヲ有スル點ノ軌跡ハ即チ根軸ニシテ,モシ根軸上ノ一點ヨリ一ツノ圓ニ實在セル切線ヲ引クコトヲ得バ,他ノ圓ニモ亦實在セル切線ヲ引クコトヲ得ベク,且其長サハ相等シ.

サテ圓(1)ト(2)トノ中心ヲ夫々 O_1, O_2 トシ,直線 O_1O_2 ノ方程式ヲ作ルトキハ

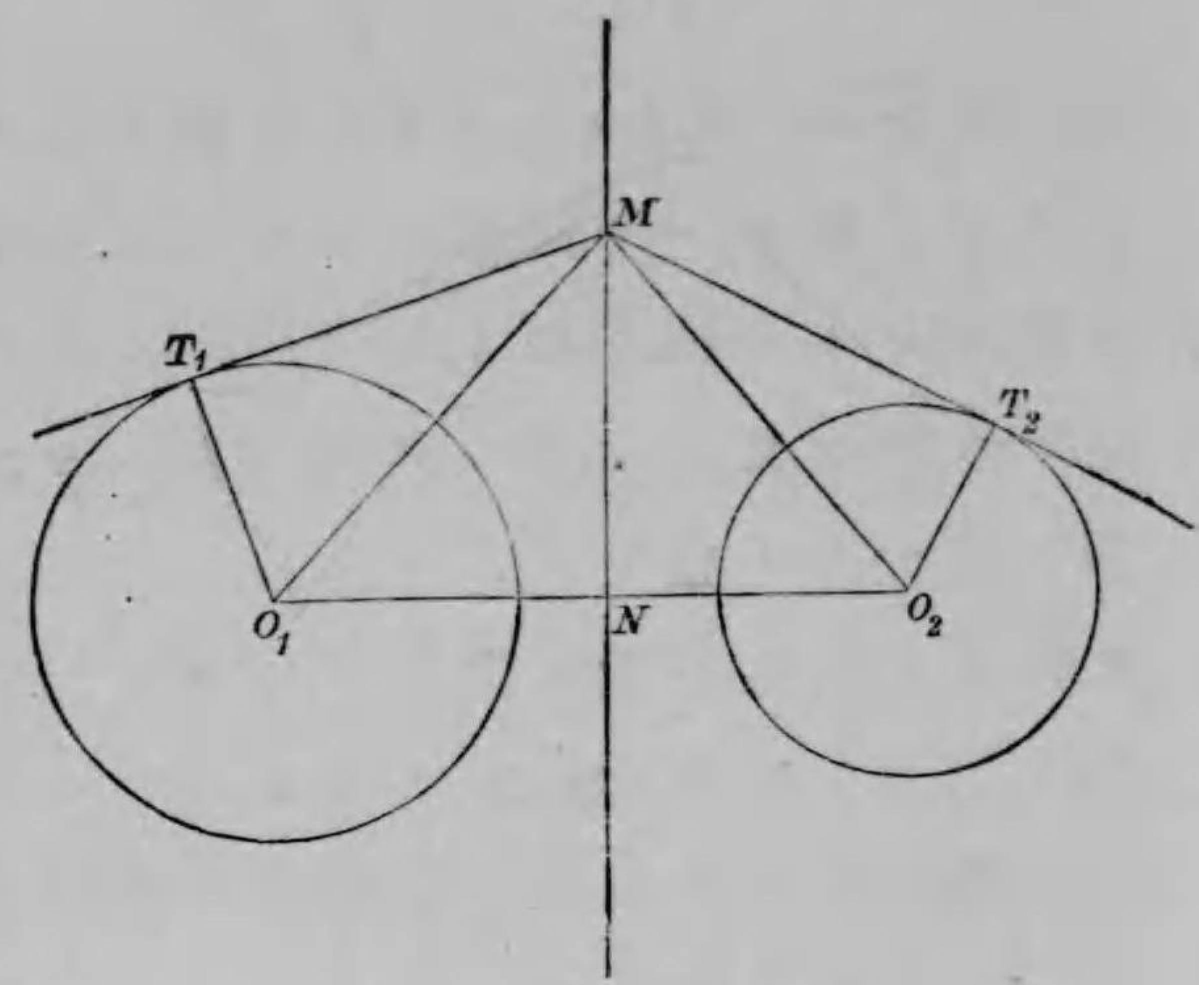
$$(b_1-b_2)(x-a_1)-(a_1-a_2)(y-b_1)=0$$



y_1-b_1

ナルヲ以テ,此ハ明カニ根軸(4)ニ垂直ナリ. コレト根軸トノ交點ヲNトス.

第四十二圖



根軸上Nヨリ十分大ナル距離ニ一點Mヲ取ルトキハ兩圓ニ對シテ何レモソノ外ニアラシムルコトヲ得ベシ. 今Mヲ斯ク取リタリトシ,之ヨリ兩圓ニ切線ヲ引キ,切點ヲT_1, T_2トセヨ. 上ニ述タル處ニヨリ

$$\overline{MT_1}^2=\overline{MT_2}^2,$$

即チ $$\overline{MO_1}^2-r_1^2=\overline{MO_2}^2-r_2^2.$$

故ニ $$\overline{MO_1}^2-\overline{MO_2}^2=r_1^2-r_2^2,$$

從テ $$\overline{NO_1}^2-\overline{NO_2}^2=r_1^2-r_2^2.$$

ヲ得. 之ニヨリテN點ノ位置ガ決定セラレ,從テ根軸ノ位置モ幾何學的ニ決定セラルベシ.

(1)及ビ(2)ノ他ニ更ニ第三ノ圓

$$S_3=(x-a_3)^2+(y-b_3)^2-r_3^2=0$$

ヲ考フルトキ,コレラノ三ツノ圓ノ中ノ二ツヅヽニヨリテ決定セラルヽ根軸ノ方程式ハ夫々

$$S_1-S_2=0,\quad S_2-S_3=0,\quad S_3-S_1=0$$

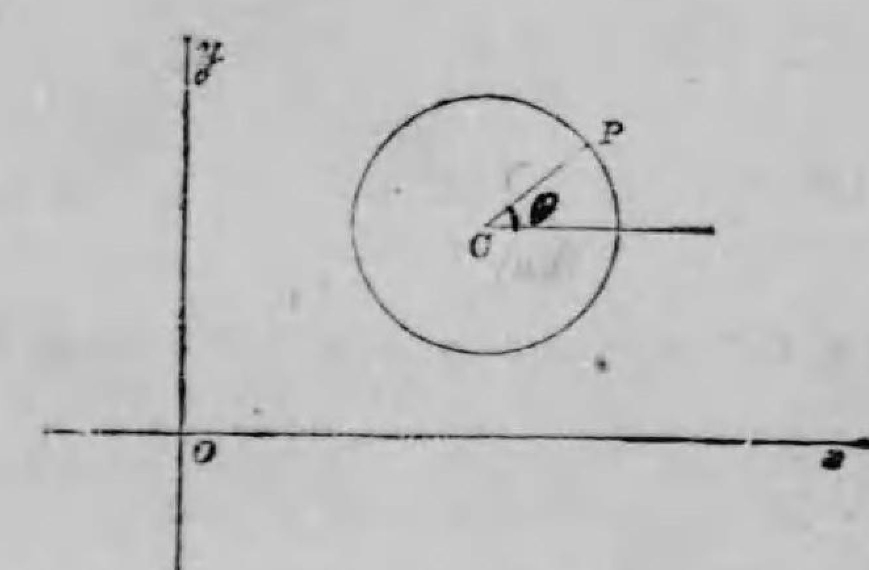
ナリ. コノ三式ヲソノマヽ相加フレバ左邊ハ恒等的ニ零トナル. 故ニ此三ツノ直線ハ一點ニ於テ相會スルカ,又ハ互ニ平行ナリ. 相會スルトキハ,ソノ點ヲ三ツノ圓ノ根心ト稱ス.

此性質ニヨリテ二圓 S_1, S_2 ノ根軸ヲ容易ニ求ムルコトヲ得. 即チ S_1 ト S_2 トガ相交ハルトキハ,交點ヲ結ビ付クル直線ガ根軸ナリ. 又相交ラザルトキハ, S_1, S_2 ト夫々二點ニ於テ交ハルベキ圓 S_3 及ビ S_4 ヲ作リ, $S_1S_2S_3$ ノ根心ト $S_1S_2S_4$ ノ根心トヲ結ビ付グレバ可ナリ.

38. 媒介變數.

圓ノ中心Cノ座標ガ(a, b)ニシテ,半徑ガrナルトキ,圓ノ上ニアル任意ノ一點$P(x, y)$トCトヲ結ビ付クル直線ガx軸トナス角ヲθトセバ,Pノ座標ハ

第四十三圖



$$\left.\begin{aligned}x&=a+r\cos\theta\\ y&=b+r\sin\theta\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

トナル,而シテθノ値ヲ種々ニ變ズルコトニヨリ,圓周上ノスベテノ點ヲアラハ

スコトヲ得ベシ. (1)ヨリ θ ヲ消去スルトキハ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad (2)$$

ナル方程式ヲ得. (1)ト(2)トハソノ内容ニ於テハ全ク同一ノモノナリト考フルコトヲ得ベシ. 斯クノ如ク一曲線上ノ任意ノ點ノ座標ヲ一ツノ變數ニヨリテ表ハシタルトキハ,ソノ變數ヲ **媒介變數** ト云フ. **(1)ハ即チ θ ナル媒介變數ニヨリテアラハサレタル圓ノ方程式ナリ.**

同一ノ曲線ヲアラハスニモ媒介變數ハ種々ニ選ブコトヲ得ベシ. 例ヘバ(1)ニ於テ更ニ

$$tan\frac{\theta}{2}=t$$

ト置キテ,之ヲ書キ直ストキハ

$$\left.\begin{aligned} x&=a+r\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y&=b+r\frac{2t}{1+t^2} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ヲ得. コヽニ t ガ媒介變數ニシテ,(3)ハ圓ノ上ノ一點ノ座標ヲ媒介變數ノ有理式トシテアラハシタルモノナリ.

【例】1. 圓(2)ノ上ニアル一點 $P(x_1, y_1)$ ニ於ケル,此圓ノ切線ハ

$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=r^2$$

ニヨリテ與ヘラルヽニヨリ,P ノ座標ヲ

$$x_1=a+r\cos\theta, \qquad y_1=b+r\sin\theta$$

ニテ表ハストキハ,P ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$(x-a)\cos\theta+(y-b)\sin\theta=r$$

トナル.

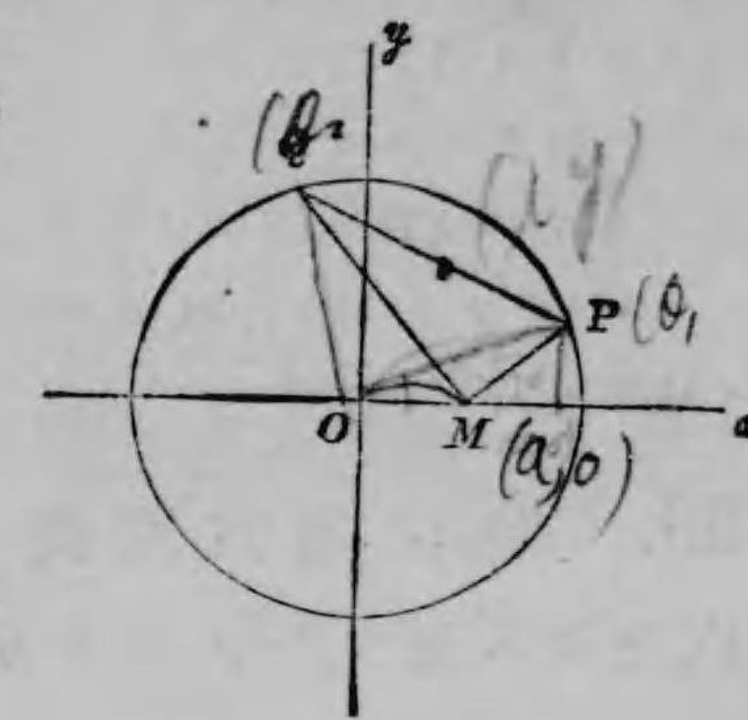
【例】2. 一定圓ノ弦ノ兩端ヲ一定點ト結ビ付ケタル二ツノ直線ガ相互ニ垂直ナルトキ,コノ弦ノ中點ノ軌跡ヲ求ム.

與ヘラレタル圓ノ中心ヲ原點トシ,一定點 M ヲ通ズル直線ヲ x 軸トシ,直交軸ヲ取リ, M ノ座標ヲ $(a, 0)$ トス. コヽニ於テ媒介變數 θ ヲ用フレバ圓ノ方程式ハ

$$x=r\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta$$

トナル. 弦 PQ ヲ題意ニ適スル一ツノ弦トシ,ソノ兩端 P 及ビ Q ニ相應スル θ ノ値ヲ夫々 θ_1, θ_2 トセヨ. 直線 PM ノ方程式ハ

第四十四圖



$$\frac{y}{x-a}=\frac{r\sin\theta_1}{r\cos\theta_1-a}$$

ニシテ, QM ノ方程式ハ

$$\frac{y}{x-a}=\frac{r\sin\theta_2}{r\cos\theta_2-a}$$

ナリ. 故ニコノ二直線ガ相互ニ垂直ナルタメノ條件ハ

$$\frac{r\sin\theta_1}{r\cos\theta_1-a}\cdot\frac{r\sin\theta_2}{r\cos\theta_2-a}=-1$$

即チ

$$r^2\cos(\theta_2-\theta_1)-ar(\cos\theta_1+\cos\theta_2)+a^2=0 \qquad (1)$$

ナリ. 扨 PQ ノ中點ノ座標ヲ (x, y) トスルトキハ

$$\begin{aligned} 2x&=r(\cos\theta_1+\cos\theta_2) \\ 2y&=r(\sin\theta_1+\sin\theta_2) \end{aligned} \qquad (2)$$

ナルヲ以テ,之ヲ自乘シテ相加フレバ

$$4(x^2+y^2)=2r^2\{1+\cos(\theta_2-\theta_1)\} \qquad (3)$$

ヲ得. (1), (2), (3) ヨリ θ_1 及ビ θ_2 ヲ消去シテ

$$2(x^2+y^2)-2ax+a^2-r^2=0 \qquad (4)$$

ヲ得ベシ. 此即チ圓ノ方程式ニシテ,中心ハ $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ 即チ OM ノ中點ニアリ,半徑ハ $\frac{1}{2}\sqrt{2r^2-a^2}$ ニ等シ. 而シテ題意ニ適スル點ハスベテ此

圓ノ上ニアルベキナリ. 此圓ハ $2r^2>a^2$ ナルトキニ限リ實圓トナル. 然ルトキハ明カニ $\frac{a}{2}<r$ ニシテ,且又

$$\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2r^2-a^2}<r$$

ナルヲ以テ,此圓ハ全體與ヘラレタル圓ノ内ニ在ルモノナリ.

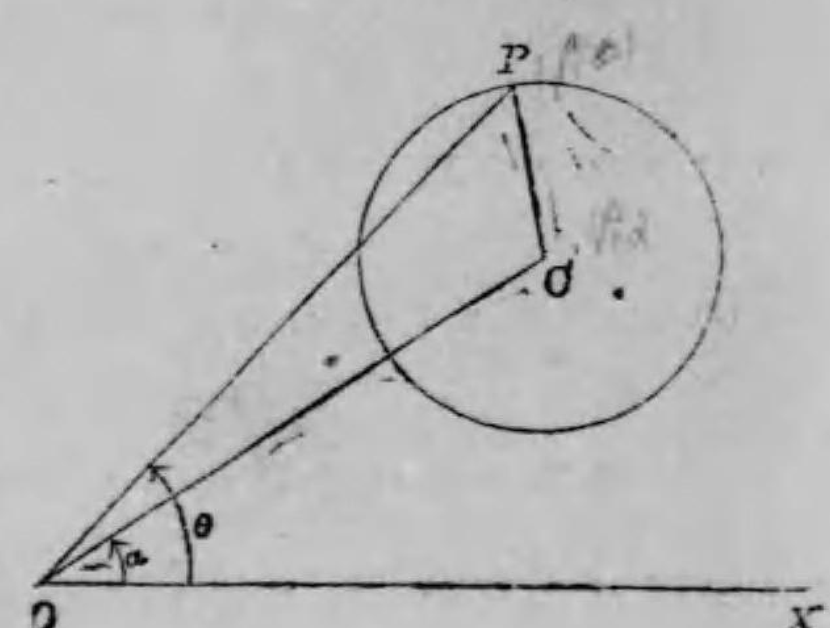
今圓(4)ガ實在スルモノトシ,ソノ上ノ一點 (x, y) ヲ取リ,之ヲ中點ニモツ弦 PQ ヲ引キタリトシ, P 及ビ Q ニ相應スル θ ノ値ヲ夫々 θ_1 及ビ θ_2 トスルトキハ,(2)ナル關係アルベシ. (2)ヨリ直チニ(3)ヲ得. (2),(3),(4)ヨリ溯リテ(1)ヲ得ベシ. 依テ PM, QM ハ互ニ垂直ナリ. 即チ (x, y) ハ軌跡上ノ一點ナラザル可ラズ.

故ニ求ムル軌跡ハ圓(4)ニシテ, $2r^2>a^2$ ナルトキニ限リ實圓トシテ存在ス. $2r^2=a^2$ ナルトキハ軌跡ハ唯一點 $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ トナル. $2r^2<a^2$ ナルトキハ軌跡ハ實在セズ.

39. 圓ノ極方程式.

直交軸ニ關シ,一ノ圓ノ方程式ガ與ヘラルヽトキハ,ソノ中ノ x, y ノ代リニ夫々 $\rho\cos\theta$, $\rho\sin\theta$ ト置クコトニヨリテ原點ヲ極トシ, x 軸ヲ原線トセル,同ジ圓ノ極方程式ヲ得ベシ. 然レドモマタ全然平行座標ノ助ケヲ藉ラズシテ次ノ如クニモソノ方程式ヲ作ルコトヲ得.

第四十五圖



圓ノ半徑ヲ r, 中心 C ノ極座標ヲ (ρ_1, α), コノ圓ノ上ニアル任意ノ一點 P ノ極座標ヲ (ρ, θ) トスルトキハ,求ムル處ノ圓ノ方程式ハ

$$\rho^2+\rho_1^2-2\rho\rho_1\cos(\theta-\alpha)=r^2 \qquad (1)$$

ナルコト明カナリ.

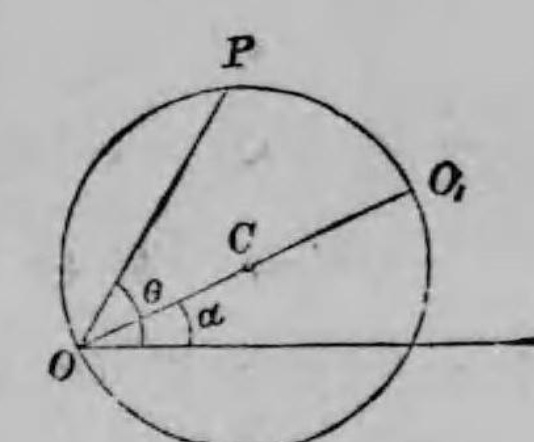
圓ノ中心ガ原線ノ上ニアルトキハ,(1)ニ於テ $\alpha=0$ トスベシ. モシ又中心ガ極ト相合スルトキハ $\rho_1=0$ ナルヲ以テ,(1)ハ單ニ $\rho=r$ トナル.

圓ガ極ヲ通ズルトキハ, $\rho_1=r$ ナリ. 從テ(1)ヨリ

$$\rho=2r\cos(\theta-\alpha) \qquad (2)$$

ヲ得. コノ場合ニ OC ヲ延長シテ圓ト再ビ交ハル點ヲ O_1 トスルナラバ,線分 OO_1 ノ長サハ $2r$ ナリ. 故ニ(2)ハ畢竟 OO_1 ノ直線 OP 上ニ作ル正射影ガ丁度線分 OP ニ等シキコトヲ示スモノナリ.

第四十六圖



方程式(1)ハ又

$$\rho^2-2\rho\rho_1(\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta)+\rho_1^2-r^2=0$$

トスルコトヲ得ルヲ以テ,圓ノ極方程式ハ一般ニ

$$\rho^2+2(a\cos\theta+b\sin\theta)\rho+c=0 \qquad (3)$$

ナル形ヲ有スト考ヘラル. 此形ニヨリテ式ガ與ヘラルル時ハ,ソノ圓ノ半徑及ビ中心ノ座標ハ

$$r=\sqrt{a^2+b^2-c}, \qquad \rho_1=\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\cos\alpha=\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\alpha=\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ニヨリテ決定セラル.

極座標ニ於テモ,圓周上ノ一點ニ於ケル切線,法線ノ方程式,任意ノ一點ノ極線ノ方程式等ハスベテソノ幾何學的意味ヨリシテ,直交軸ノ場合ト同様ノ手續キニヨリテ之ヲ求ムルコトヲ得レドモ,或ハ又既ニ直交軸ノ場合ニ於テ知ラレタル公式ヨリ,座標ノ變換ニヨリテ之ヲ導クコトヲモ得ベシ. 故ニ此處ニハ一々論ゼズ.

例ヘバ(1)ナル圓ノ上ノ一點 (ρ', θ') ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$\rho\rho'\cos(\theta-\theta')-\rho_1\rho\cos(\theta-\alpha)-\rho_1\rho'\cos(\theta'-\alpha)+\rho_1^2-r^2=0$$

トナリ,圓ガ(3)ニヨリテ與ヘラルルトキハ,切線ハ

$$\rho\rho'\cos(\theta-\theta')+a(\rho\cos\theta+\rho'\cos\theta')+b(\rho\sin\theta+\rho'\sin\theta')+c=0$$

トナル. モシ點 (ρ', θ') ガ圓ノ上ニアラザルトキハ,コレ等ノ方程式ハソノ點ノ極線ヲ表ハスベシ.

問　題

此處ニ掲グル問題ニ於テ座標軸ヲ明記セザルモノハスベテ直交軸ナリト考ヘテ解クベシ.

1. 原點ニ於テ x 軸又ハ y 軸ニ切シ,半徑 r ナル圓ノ方程式ヲ求ム.

2. x 軸ト y 軸トニ切シ,半徑 r ナル圓ノ方程式ヲ求ム.

3. 直線 $y=mx+n$ ニ平行ニシテ圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ切スル直線ノ方程式ヲ求ム.

4. 點 $(-3, 8)$ ヨリ圓 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ ニ引ケル二ツノ切線ノ方程式ヲ求ム.

5. x 軸ト $45°$ ノ角ヲナシ,圓 $(x-1)^2+(y-3)^2=18$ ニ切スル直線ノ方程式,及ビソノ切點ノ座標ヲ求ム.

6. 直線 $3x+4y-5=0$ ハ圓 $(x-2)^2+(y-6)^2=25$ ニ切スルコトヲ證明シ,且其切點ノ座標ヲ求メヨ.

7. 圓 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ノ上ニアル二點 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ヲ結ビ付クル直線ノ方程式ハ

$$(x-x_1)(x_1+x_2+2g)+(y-y_1)(y_1+y_2+2f)=0$$

又ハ

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=x^2+y^2+2gx+2fy+c$$

ニヨリテ表ハサルルコトヲ證明シ,之ヨリシテ P ニ於ケル切線ノ方程式ヲ導ケ.

8. 圓 $x^2+y^2-2x-6y+9=0$ ニ關シ,直線 $2x-2y+3=0$ ノ極ヲ求ム.

9*. 二ツノ圓ノ中心ヲ結ビ付クル直線上ニ一點ヲ取ルトキハ,コノ點ヲ通ジテ引ケル任意ノ直線ノ各ノ圓ニ關スル極ヲ結ビ付クル直線ハ常ニ一定點ヲ過ルカ又ハ一定直線ニ平行ナルコトヲ證明セヨ.

10. 二點 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ヲ直徑ノ兩端トスル圓ノ方程式ハ

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

ナルコトヲ示セ.

11. 二定點ヨリノ距離ノ比ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求ム.

12. 二ツノ圓 $x^2+y^2=10$, $x^2+y^2-5x+y+4=0$ ノ交點ト,點 $(2, 3)$ トヲ通ズル圓ノ方程式ヲ求ム.

13. 同ジ中心ヲ有スル圓ノ一群ニ關シ,與ヘラレタル直線ノ極ノ軌跡ヲ求ム.

14. 一ノ三角形ガモシ或ル圓ニ關スル極三角形ト見做シ得ルナラバ,ソノ圓ノ中心ハ三角形ノ垂心ナルベキコトヲ證明セヨ.

15. $x^2+y^2-2kx+c=0$ ニ於テ, c ヲ一定數トシ, k ヲ種々ノ値ニ變ズルトキ,此方程式ノアラハス圓ノ一群ハ悉ク或ル定レル二ツノ實又ハ虛ナル點ヲ過ルコトヲ示セ.

カクノ如ク二ツノ定レル實又ハ虛ナル點ヲ過ル圓ノ一群ヲ總稱シテ **圓束** ト云フ.

16. 正三角形 ABC ノ頂點 A ヲ原點ニ, AB ノ方向ヲ x 軸ノ正ノ方向ニトリタル直交軸ニ關シコノ三角形ノ外接圓ノ方程式ヲ求メヨ. (C ノ縱線ハ正トシテ計算セヨ)

17. 二ツノ圓 $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$, $(x-b)^2+(y-a)^2=c^2$ ノ共通弦ノ長サヲ求メヨ.

18. 二ツノ直線 $2x+2y-9=0$ ト $x+y-7=0$ トハ,圓 $(x-1)^2+(y-2)^2=3$ ニ關シテ共軛ナルコトヲ示セ.

19. O_1, O_2 ハ同心圓ニシテ, p ハ圓 O_1 ノ任意ノ切線ナリトス. 圓 O_2 ニ關シ p ノ極ノ軌跡ヲ求ム.

20. 一ノ直線上ノ一點ニ於テ之ニ切スル圓ノ一群アリ. 一定點ノコレラノ圓ニ關スル極線ヲ夫々作ルトキハ,ソレラノ極線ハ悉ク或ル一點ヲ過ルコトヲ證明セヨ.

21. 一定點 P ヲ通ズル任意ノ直線ガ,與ヘラレタル圓ト交ハル點ヲ A, B トス. 弦 AB ノ中點ノ軌跡ヲ求ム.

22. 三角形ノ底邊ノ大サ及ビ位置,及ビ頂角ノ大サガ與ヘラレタルトキ,ソノ頂點ノ軌跡如何.

23. 原點ヨリ圓 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ニ引ケル二ツノ切線ノ方程式ヲ求ム.

24. 極座標ニヨリテ表ハサレタル方程式

$$\rho^2-\rho a\cos 2\theta\sec\theta-2a^2=0$$

ハ如何ナル曲線ヲ示スカ.

25.* 三角形ノ三邊ニ,一點 P ヨリ下セル垂線ノ自乘ノ和ガ一定ナルトキ,コノ點ノ軌跡ガ一ノ圓トナルタメニハ,與ヘラレタル三角形ハ正三角形ナラザル可ラザルコトヲ證明セヨ.

26. 甲,乙ノ二圓アリ,一點 P ノ甲圓ニ關スル極線ガ乙圓ニ切スルトキ P ノ軌跡ガ圓トナルタメニハ二圓ノ位置ノ關係如何.

27.* A, B ハ圓ノ上ノ二定點ナリ. A 及ビ B ニ於ケル切線ニ,コノ圓上ノ任意ノ一點 P ヨリ下セル垂線ノ積ハ P ヨリ直線 AB ニ下セル垂線ノ自乘ニ等シキコトヲ證明セヨ.

28. P ニ於テ直交セル二直線 AB, CD ガ直交軸ノ x 軸及ビ y 軸ト交ハル點ヲ夫々 A,C; B,D トス. AC,BD ノ中點ガ變ゼザル樣ニ二直線ガ動クトキ P ノ軌跡如何.

29. 二定點 A, B ヲ通ル任意ノ圓ニ一定點 P ヨリ引キタル切線ノ切點ノ軌跡ガ圓トナルニハ P ノ位置如何.

30. 直線 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ ト圓

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

トノ二ツノ交點ヲ原點ト結ビ付クル直線ガ相互ニ垂直ナルタメノ條件ハ

$$2p^2+2p(g\cos\alpha+f\sin\alpha)+c=0$$

ナルコトヲ示セ.

31. P(x_1, y_1) ヲ通ジ,圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ切スル二ツノ直線ノ方程式ハ

$$(x_1y-y_1x)^2=r^2\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\}$$

ニヨリテ表ハシ得ルコトヲ示セ.

32. 二定點ヲ過ル任意ノ圓ト一定圓トノ交點ヲ P, Q トス. 直線 PQ ハ一定點ヲ通ズルコトヲ證明セヨ.

33. 二ツノ圓

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

及ビ
$$(x-a')^2+(y-b')^2=r'^2$$

ノ各ノ切線ノ方程式ヲ,媒介變數ヲ用ヒテ,ソレソレ

$$(x-a)\cos\theta+(y-b)\sin\theta=r$$

及ビ
$$(x-a')\cos\theta'+(y-b')\sin\theta'=r'$$

トス. 今此二ツノ切線ガ相一致シテ兩圓ノ共通切線トナルタメニハ,θ ハ次ノ方程式ヨリ定ムベキコトヲ示セ,

$$(a-a')\cos\theta+(b-b')\sin\theta+(r\pm r')=0.$$

34. $x^2+y^2-2x-6y+9=0$, $x^2+y^2+6x-2y+1=0$ ノ共通切線ノ方程式ヲ求ム.

35. 三ツノ圓

$$x^2+y^2-2a_ix-2b_iy+c_i=0, \qquad i=1,2,3$$

ノ根心ノ座標ヲ求ム.

36. 二ツノ圓

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$$

及ビ
$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$$

ノ中心ヲ夫々 O_1, O_2 トシ,交點ノ一ツヲ A トス. 角 O_1AO_2 ヲ ω トスルトキハ,$\cos\omega$ ノ値如何.

此角ヲ名ケテ二ツノ圓ノ **交角** トイフ. 交角ガ $0°$ ナルトキハ兩圓ハ互ニ **內切ス** トイヒ,交角ガ $180°$ ナルトキハ **外切ス** トイフ.

37. 二ツノ圓ヲ

$$x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0$$

及ビ
$$x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2=0$$

トシ,ソノ交角ヲ ω トスルトキハ

$$c_1+c_2+2r_1r_2\cos\omega-2a_1a_2-2b_1b_2=0$$

ナルコトヲ示セ. 但シ r_1, r_2 ハ兩圓ノ半徑トス

38. 三ツノ圓

$$x^2+y^2-2a_ix-2b_iy+c_i=0, \qquad i=1,2,3$$

ノ各ト直交スル圓ノ方程式ハ

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ c_1 & a_1 & b_1 & 1 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 1 \\ c_3 & a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

ナルコトヲ示セ.

39. 三ツノ圓
$$x^2+y^2+2x+3y-1=0$$
$$x^2+y^2-2x-3y+25=0$$
$$x^2+y^2+3x+y+3=0$$

ノ各ト直交スル圓ノ方程式ヲ求メヨ.

第六章

二次曲線ノ分類

40. 二次曲線ノ中心.

x 及ビ y ニツイテノ一般ナル二次方程式ヲ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \qquad (1)$$

トス. 此方程式ガ或場合ニ於テ二本ノ直線又ハ圓ヲアラハスコトハ既ニ之ヲ知レリ. 本章ニ於テハ最モ一般ナル場合ニ於テ,如何ナル曲線ヲ表ハスモノナルカヲ考究セントス.

モシ座標軸ガ斜交軸ナルトキハ,之ヲ直交軸ニ直ス變換ヲ行ヒテ矢張(1)ト同樣ノ形ノ二次式トナシ得可キヲ以テ,コヽニハ始メヨリ既ニ直交軸ナルモノトシテ考フベシ.

一定點ヲ通ジ任意ノ方向ニ引ケルーノ直線ト,與ヘラレタル二次曲線トハ一般ニ唯二ツノ點ニ於テ交ハルモノナリ. 之ヲ證明センニハ,先ヅ定點ハ座標ノ原點ナリト考ヘテ可ナリ,何トナレバ軸ノ平行移動ニヨリテ常ニ原點ヲソノ定點ニ移スコトヲ得レバナリ. サテ(1)ヲソ

ノ時ノ二次曲線ノ方程式トシ,原點ヲ通ズル直線ノ方程式ヲ

$$y=mx \qquad (2)$$

トセヨ. (1)ト(2)トノ交點ノ横線ハ

$$(a+2hm+bm^2)x^2+2(g+fm)x+c=0 \qquad (3)$$

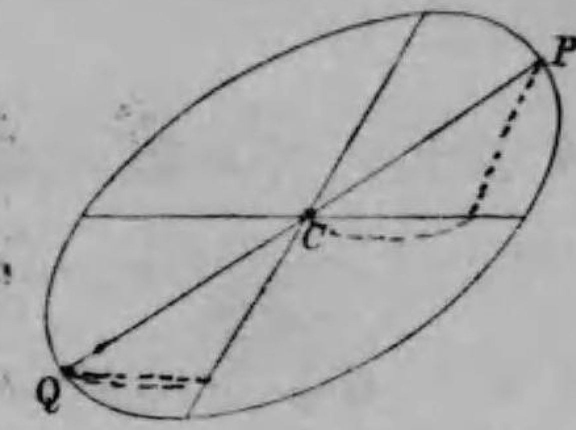
ナル二次方程式ノ二根ナリ. (1)ガ實際二次曲線ヲアラハストキニハ, a, h, b ハ同時ニ零トナルコトナキヲ以テ,(3)ニ於ケル x^2 ノ係數ハ, m ガ特別ナル値ヲ取ル時ノ他ハ決シテ零トナラズ. 故ニ(3)ニ適スル x ノ値ハ一般ニ二ツアリ,而シテ二ツニ限ル. 此實又ハ虛ナル二根ヲ x_1, x_2 トシ,之ヲ(2)ニ入レテ得ル y ノ値ヲ夫々 y_1, y_2 トスルナラバ,二點 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ハ即チ(1)ト(2)トノ交點ニシテ,實ニシテ相異ナルコトアリ,實ニシテ相合スルコトアリ,或ハ虛ナルコトアリ.

(3)ニ於テ x^2 ノ係數ガ零トナル如キ値ヲ m ガ取ルトキハ,(2)ハ曲線ト無究遠ニ於ケル一點モシクハ二點ニ於テ交ハルコトヽナル. 此場合ニツイテハ後ニ詳シク論ズベシ. (48;49節ヲ見ヨ)

今一定點Cヲ通ジ,與ヘラレタル二次曲線ト二點P, Qニ於テ交ハル直線ヲ引クトキ,ソノ方向ニ係ハラズ常ニCガPQノ中點ナルトキハ,C點ヲ此二次曲線ノ**中心**ト稱シ,中心ヲ通ル直線ヲ**直徑**ト云ヒ,曲線ト交ハル

二點ヲ直徑ノ端ト云フ.

第四十七圖



原點ガ曲線(1)ノ中心ナルガタメニハ, m ノ如何ニ關ラズ $x_1+x_2=0$ ナラザル可ラザルニヨリ,(3)ヨリシテ

$$g=0, \quad f=0 \qquad (4)$$

ナル條件ヲ得ベシ. 實際マタ g ト f トガ共ニ零ナラバ原點ガ中心ナルコトハ容易ニ知ラル.

コレヨリ,一般ニ與ヘラレタル二次曲線ガ中心ヲ有スルカ否カヲ決定スベシ. 先ヅ(1)ヲ任意ノ二次曲線トシモシ一點 $C(x_0, y_0)$ ガソノ中心ナリトスルトキハ,座標軸ノ平行移動ニヨリテ原點ヲCニ移スコトニヨリ,(1)ハ變ジテ

$$a(X+x_0)^2+2h(X+x_0)(Y+y_0)+b(Y+y_0)^2$$
$$+2g(X+x_0)+2f(Y+y_0)+c=0$$

即チ

$$aX^2+2hXY+bY^2+2(ax_0+hy_0+g)X+2(hx_0+by_0+f)Y$$
$$+(ax_0^2+2hx_0y_0+by_0^2+2gx_0+2fy_0+c)=0,$$

トナル. コヽニ於テ(4)ナル條件ヲ應用スルトキハ,Cガ中心ナルタメニハ

$$\left.\begin{array}{l} ax_0+hy_0+g=0 \\ hx_0+by_0+f=0 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

ナルコトガ必要ニシテ且十分ナリ. (5)ハ x_0 及ビ y_0 ニ關シテ聯立一次方程式ナルヲ以テ,係數ノ行列式

$$\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} = ab-h^2$$

ガ零ナラザル限リ,確定セル一組ノ根ヲ有ス. ソノ値ハ

$$x_0=\frac{hf-bg}{ab-h^2}, \qquad y_0=\frac{hg-af}{ab-h^2} \tag{6}$$

ナリ. モシ $ab-h^2$ ガ零ナル場合ニハ, $hf-bg$ 及ビ $hg-af$ ノ中少クモ何レカ一方ガ零ナラザルトキハ中心 C ハ有限ノ距離ニ存在セズ. モシ共ニ零ナルトキハ C ハ確定セズ. 此最後ノ場合ニハ,(5)ノ二ツノ式ハ實ハ同一方程式トナルヲ以テ,直線 $ax+hy+g=0$ 上ノ點ハ悉ク中心ト見做シ得ベシ.

コヽニ於テ二次曲線ヲ二種ニ分類シ, $ab-h^2 \neq 0$ ナルモノヲ **有心二次曲線** ト云ヒ, $ab-h^2=0$ ナルモノヲ **無心二次曲線** ト云フ. 無心トイフモ全ク中心ナキノ意ニアラズ,確定セル唯一ツノ中心ナキノ意ナリ.

有心二次曲線ニ於テハソノ中心ニ原點ヲ移ストキハ,(5)ニヨリ曲線ノ方程式ハ常ニ

$$ax^2+2hxy+by^2+c'=0 \tag{7}$$

ナル形ニスルコトヲ得ベシ. コヽニ c' ハ上ニ計算セル如ク

$$c'=ax_0^2+2hx_0y_0+by_0^2+2gx_0+2fy_0+c$$

ナリ. 此中ニ(5)及ビ(6)ヲ代入シテ變化スルナラバ

$$c'=(ax_0+hy_0+g)x_0+(hx_0+by_0+f)y_0+(gx_0+fy_0+c)$$

$$=gx_0+fy_0+c$$

$$=\frac{g(hf-bg)+f(hg-af)+c(ab-h^2)}{ab-h^2}$$

$$=\frac{1}{ab-h^2}\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=\frac{\Delta}{ab-h^2} \tag{8}$$

トナル. 但シ **實際 c' ヲ計算スルニハ gx_0+fy_0+c ニ於テ既知ノ x_0, y_0 ヲ代入スルヲ便トス.** 第23節ニ證明セル如ク $\Delta=0$ ナルトキ,(1)ハ二ツノ直線ヲ表ハストイフ結果ハ此處ヨリ容易ニ導キ出スコトヲ得ベシ.*

41. 有心二次曲線.

前節(7)ニヨリ,任意ノ與ヘラレタル有心二次曲線ノ方程式ハ,中心ヲ原點ニ取ルコトニヨリ,常ニ

$$ax^2+2hxy+by^2+c'=0 \tag{1}$$

ナルモノト考ヘラル. 今之ヲ更ニ簡單ナル形ニ化センガタメニ,座標軸ヲ直角ナルマヽ原點ノ回リニ θ ナル角丈回轉シテ見ルベシ. 此場合ニ於ケル變換ノ式ハ

$$x=X\cos\theta-Y\sin\theta$$
$$y=X\sin\theta+Y\cos\theta$$

ナルヲ以テ,(1)ハ

$$a'X^2+2h'XY+b'Y^2+c'=0 \tag{2}$$

*コヽ迄ハ斜交軸ノ場合ニモソノマヽ適用スルコトヲ得.

ナル形トナル,コヽニ

$$a'=a\cos^2\theta+2h\cos\theta\sin\theta+b\sin^2\theta$$

$$2h'=2h\cos2\theta-(a-b)\sin2\theta$$

$$b'=a\sin^2\theta-2h\sin\theta\cos\theta+b\cos^2\theta$$

ナリ. 從テコレラノ係數ノ間ニハマタ次ノ關係アリ.

$$a'+b'=a+b \tag{3}$$

$$a'-b'=(a-b)\cos2\theta+2h\sin2\theta,$$

故ニ $$4h'^2+(a'-b')^2=4h^2+(a-b)^2,$$

從テ又 $$4h'^2+(a'-b')^2-(a'+b')^2=4h^2+(a-b)^2-(a+b)^2$$

即チ $$h'^2-a'b'=h^2-ab \tag{4}$$

扨 θ ヲ任意ノ角トスルトキハ,(2)ハ必シモ(1)ヨリモ簡單ナリト云フヲ得ザレドモ,今 θ ヲ適當ニ選ビテ, $h'=0$ ナル如クニスルコトヲ得バ,(2)ハ

$$a'X^2+b'Y^2+c'=0 \tag{5}$$

ナル形トナリ,(1)ヨリモ更ニ簡單トナルベシ. $h'=0$ ナラシムル θ ノ値ハ

$$2h\cos2\theta-(a-b)\sin2\theta=0$$

即チ

$$\tan2\theta=\frac{2h}{a-b} \tag{6}$$

ヨリ定マル. (6)ヲ滿足スル θ ノ値ハ無數ニ多クアリ,相互ニ 90° ノ整數倍ダケノ差ヲ有ス. サレバソノ何レノ値ヲ取ルモ畢竟同ジ二直線ヲX軸及ビY軸トスルコト

ニ歸着スベク,唯ソノ何レノ直線ヲX軸トシ,何レヲY軸トスルカノ相違ニ過ギズ. 故ニ今 θ ノ値ハ(6)ヲ滿足スル中ノ最小ナル正角,又ハ 0° ヲ取ルコトヽ定ムベシ.

θ ノ値ガ斯クノ如ク定マリタリトシ,之ニ對スル a', b' ノ値ヲ求メンニハ,(3)及ビ(4)ヲ利用シテ次ノ如クスルコトヲ得. 即チ求メントスル二數ノ和ハ(3)ニヨリテ $a+b$ ニ等シク,積ハ,(4)ニ於テ $h'=0$ ナルニヨリ, $ab-h^2$ ニ等シ. 故ニ a', b' ハ二次方程式

$$z^2-(a+b)z+(ab-h^2)=0 \tag{7}$$

ノ二根ナリ.

此方程式ノ判別式ヲ作ルニ

$$(a+b)^2-4(ab-h^2)=(a-b)^2+4h^2$$

ナルヲ以テ,此二根ハ一般ニ實ニシテ相異ル. 唯 $a=b$, $h=0$ ナルトキニ限リ實ニシテ等根トナル. 此特別ノ場合ニハ(1)ハ圓ヲアラハスコトハ既ニ知レル處ナリ.

扨テ(7)ノ二根ノ中何レガ a', 何レガ b' ナルカヲ決定センガタメニ, $a'-b'$ ヲ考フルニ

$$a'-b'=(a-b)\cos2\theta+2h\sin2\theta,$$

コヽニ

$$2h=(a-b)\tan2\theta$$

ナル關係ヲ入ルルトキハ

$$2h(a'-b')=\{(a-b)^2+4h^2\}\sin2\theta \tag{8}$$

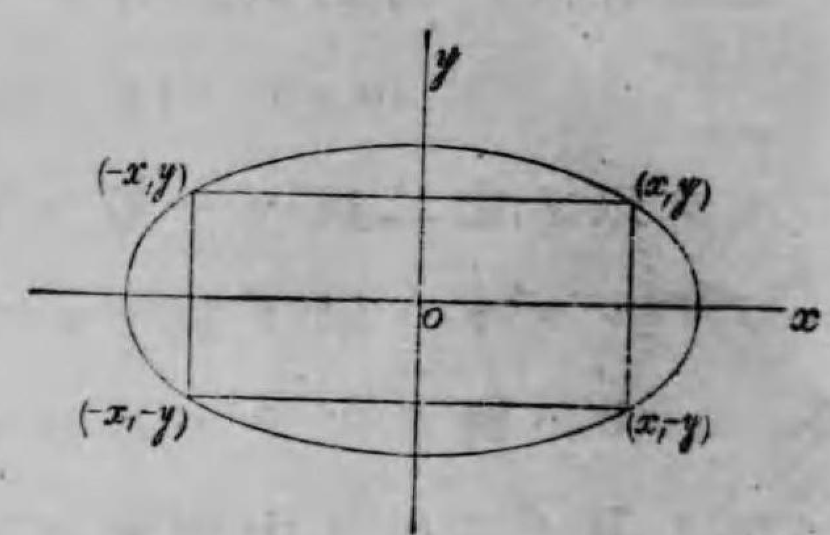
ヲ得. サテ $h=0$ ナル場合ハ考ヘズシテ可ナリ,何トナレバ此時ハ(1)ノマヽニテ既ニ(5)ノ形ヲ有スレバナリ. 依テ $h \neq 0$ トス. 假定ニヨリ θ ハ正ノ鋭角ナルヲ以テ $\sin 2\theta$ ハ常ニ正ニシテ,又 $(a-b)^2+4h^2$ モ常ニ正ナルガ故ニ $a'-b'$ ハ h ト同ジ符號ヲ有セザル可ラズ. 即チ **(7)ヲ解イテ得ル二根ノ中, $h>0$ ナルトキハ大ナル方ヲ a' トシ, $h<0$ ナルトキハ小ナル方ヲ a' トナス可シ.**

斯クシテ達シ得タル最後ノ形

$$a'x^2+b'y^2+c'=0 \qquad (9)$$

ヲ稱シテ有心二次曲線ノ方程式ノ **標準形** ト云フ.

第四十八圖



此形ニヨリテ見レバ,アル (x, y) ガ(9)ヲ滿足スルトキハ,同時ニ必ズ $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ 等モ亦(9)ヲ滿足セザル可ラザルヲ以テ,(9)ノアラハス曲線ハ原點ニ關シテ點對稱ナルノミナラズ,兩軸ニ關シテ各線對稱ナルベキモノナリ. 此位置ニ於ケル兩軸ヲ稱シテ單ニ此曲線ノ **軸** ト云フ.

今考ヘタル點 (x, y), $(-x, -y)$ ハ一ツノ直徑ノ兩端ニシテ $(-x, y)$, $(x, -y)$ ハ他ノ一ツノ直徑ノ兩端ナリ.

座標軸ヲ回轉セザリシ前ノ軸ニ關スル,曲線ノ軸ノ方

程式ハ明カニ

$$y=x\tan\theta, \qquad y=-x\cot\theta$$

ニシテ,コヽニ

$$\tan 2\theta=\frac{2h}{a-b}$$

ナルベシ. 此三式ノ間ニ θ ヲ消去シ,二本ノ軸ノ方程式ヲ一ツニマトムルトキハ,

$$(x\tan\theta-y)(x\cot\theta+y)=0$$

即チ

$$x^2-y^2-xy\cot\theta-\tan\theta)=0,$$

然ルニ

$$\cot\theta-\tan\theta=2\cot 2\theta=\frac{a-b}{h}$$

ナルヲ以テ,

$$h(x^2-y^2)-(a-b)xy=0 \qquad (10)$$

ヲ得.

扨コレヨリ(9)ノアラハス曲線ノ形狀ヲ一々吟味セントスルニ當リ, a', b' ガ同符號ナル場合ト然ラザル場合トヲ區別スルヲ便トス. a' 又ハ b' ガ零ナルコトハ決シテナシ,何トナレバ方程式(7)ニ於テ, $ab-h^2 \neq 0$ ナルヲ以テ, $z=0$ ナル根ヲ生ズルコトナケレバナリ.

a', b' ノ間ニハ $a'b'=ab-h^2$ ナル關係アルヲ以テ, a' ト b' トガ同符號ナルカ,否カハ直チニ原式(1)ノ係數ヲ見テ判定シ得ベシ. 今

(I). $ab-h^2>0$ ナリトス. 然ルトキハ a' ト b' トハ同符號ナリ. サレバ(9)ヲ

$$Px^2+Qy^2=R \qquad (11)$$

ナル形ニ書キ直シ,且ツP,Qハ共ニ正トスルコトヲ得ベシ. 玆ニ於テ更ニ三ツノ場合ヲ分ツ.

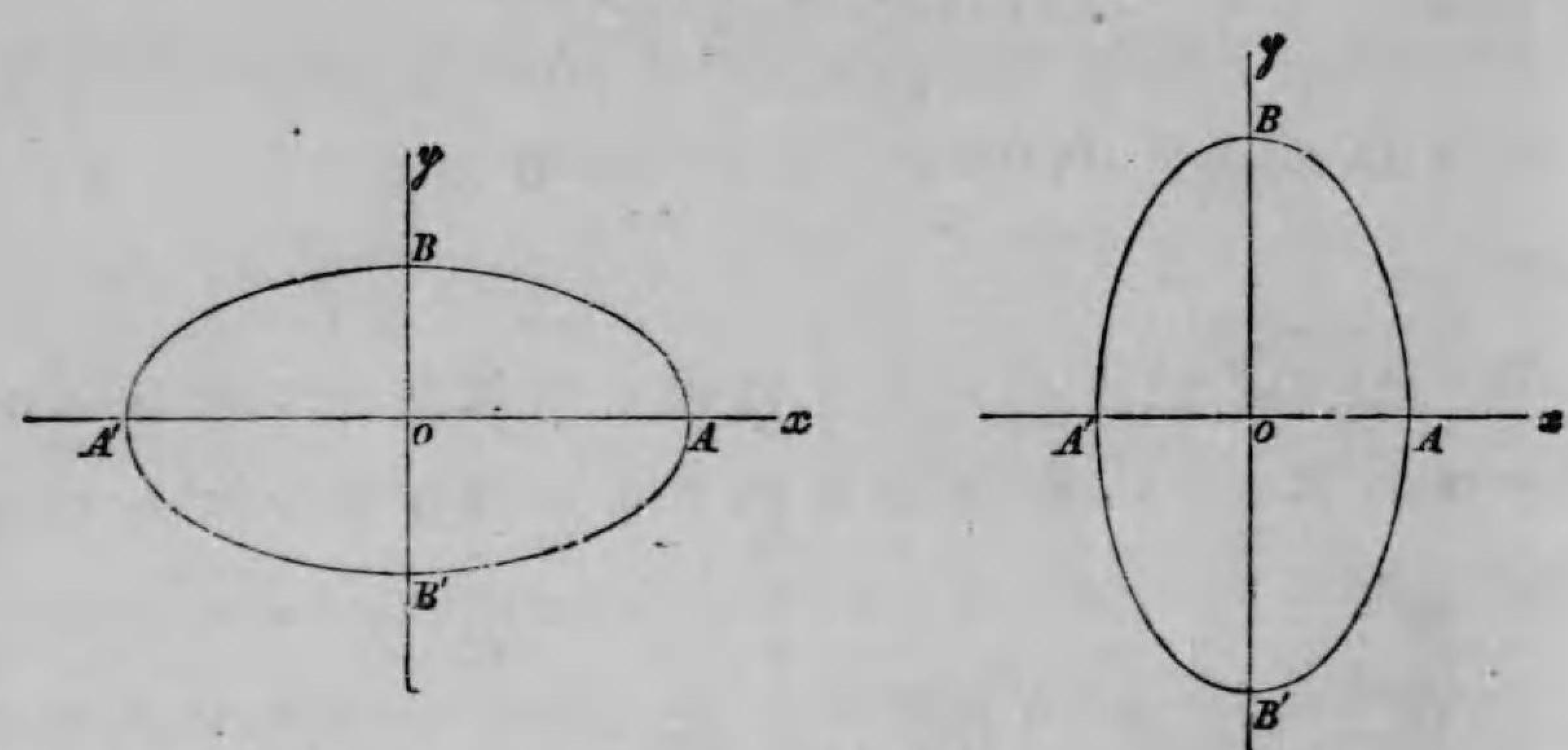
(i) **R>0,** 此時ハ兩邊ヲRニテ除シ,

$$\frac{R}{P}=a^2,\qquad \frac{R}{Q}=b^2$$

ト置クコトニヨリ,曲線ノ方程式ハ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

第四十九圖



トナル. コヽニa及ビbハ正ノ實數トス. 此曲線ヲ **楕圓** ト稱ス. 特ニ$a=b$ナルトキハ圓トナレドモ,一般ニハ第四十九圖ニ示スガ如キ形ノモノニシテ,x軸及ビy軸ヲ夫々$(\pm a, 0)$及ビ$(0, \pm b)$ナル二點ニテ截ル. 之ヲ夫々,A, A',及ビB, B'トスルナラバ,線分AA', BB'ノ中,大ナル方ヲ **長軸** 小ナル方ヲ **短軸** ト云ヒ,長軸ノ兩端

ヲ **頂點** ト云フ. 長軸及ビ短軸ヲ總稱シテ **主軸** ト稱ス.

(ii) **R=0,** 此時ハ(11)ヲ滿足スル點ハ原點ノミナレドモ,此ハ楕圓ノ兩主軸ガ共ニ零トナレル特別ノ場合ト考ヘラルヽヲ以テ之ヲ稱シテ **點楕圓** ト云フコトアリ. 或ハマタ原點ヲ過ル二本ノ虚直線

$$\sqrt{P}x\pm\sqrt{-Q}y=0$$

ヲアラハストモ見ルコトヲ得ベシ

(iii) **R<0,** 此時ニハ實點ニシテ(11)ヲ滿足スルモノナシ. 然レドモ此ハ楕圓ニ於ケルa, bガ虚トナレルモノト見做シ得ルヲ以テ,之ヲ稱シテ **虚楕圓** ト云フ.

次ニ

(II). $ab-h^2<0$ ナリトス. 然ラバ,a'トb'トハ相異レル符號ヲ有ス. 依テ(9)ヲ次ノ如クニ書キ直スコトヲ得.

$$Px^2-Qy^2=R, \qquad (12)$$

コヽニP及ビQハ正ナリトス. 更ニRノ符號ニヨリテ三ツノ場合ヲ分ツ.

(i) **R>0,** 此時ニハ(12)ノ兩邊ヲRニテ除シ,

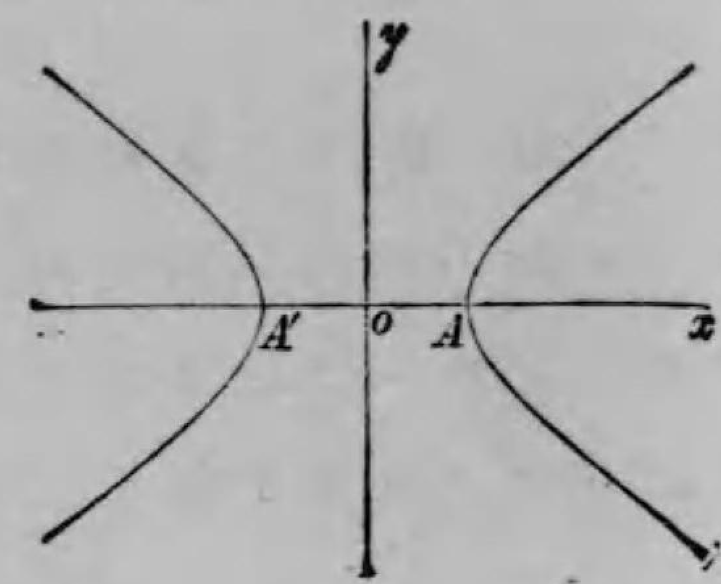
$$\frac{R}{P}=a^2,\qquad \frac{R}{Q}=b^2$$

ト置クコトニヨリ,(12)ハ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

トナル. コヽニ a 及ビ b ハ正ノ實數ナリトス. 此曲線ヲ **双曲線** ト稱ス. 其形狀ハ第五十圖ニ示スガ如ク, x 軸トハ二點 $(\pm a, 0)$ ニ於テ交レドモ, y 軸トハ交ラズ.

第五十圖



(ii) **R=0**, 此時ニハ(12)ハ原點ヲ過ル二本ノ實ナル直線

$$\sqrt{P}x\pm\sqrt{Q}y=0$$

ヲアラハス.

(iii) **R<0**, Rニテ兩邊ヲ除シテ,

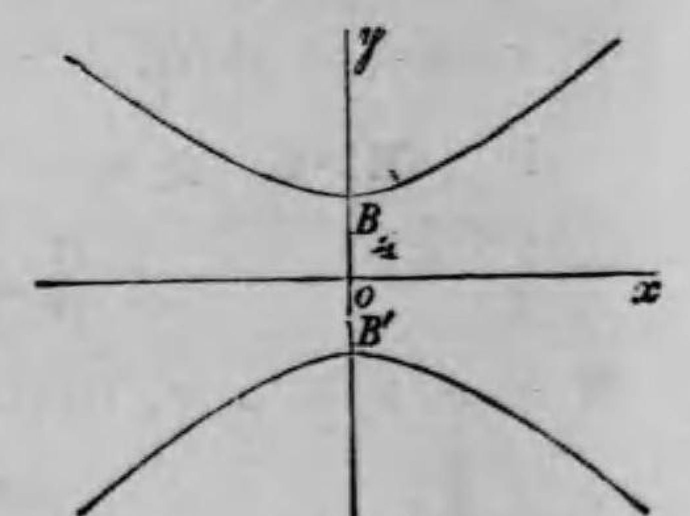
$$\frac{R}{P}=-a^2,\qquad \frac{R}{Q}=-b^2$$

ト置クトキハ,(12)ハ

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

トナル. 曲線ノ形狀ハ第五十一圖ニ示スガ如ク, R>0ナル場合ノ圖ト同種ノ曲線ニシテ, 唯 x 軸ト y 軸トヲ交換セルガ如キモノナリ. サレバ之ニ對シテ更ニ特殊ノ名ヲ命ゼズ,矢張双曲線ト稱ス.

第五十一圖

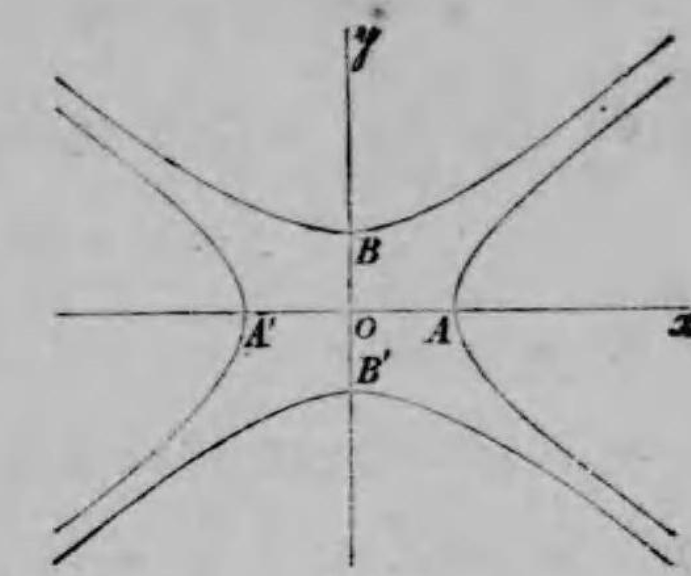


今同ジ a 及ビ b ノ値ニ對シテ二ツノ双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (13)\qquad\qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (14)$$

ヲ考ヘ,ソノ圖ヲ夫々畫クトキハ第五十二圖ノ如シ.

第五十二圖



A, A′ ノ座標ハ $(\pm a, 0)$ シニテ, B, B′ ノ座標ハ $(0, \pm b)$ ナリ. (13)ト(14)トヲ相互ニ **共軛ナル双曲線** ト稱シ,線分AA′, BB′ヲ夫夫(13)ノ **交軸** 及ビ **共軛軸** トイヒ, A 及ビ A′ ヲ(13)ノ **頂點** ト云フ. モシ(14)ニツイテ云ハバ, BB′ ガ交軸ニシテ, AA′ ガ共軛軸トナル,從ヒテ(14)ノ頂點ハ B, B′ ナリト知ルベシ. 何レニシテモ交軸,共軛軸ヲ總稱シテ **主軸** ト云フ.

以上ノ分類ニ於テハ $ab-h^2$ 及ビ R ノ符號ニヨリテ分チタルガ,モシ與ヘラレタル二次式

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ノ係數ヲ以テ同樣ノ分類ヲナサバ次ノ如クナルベシ.

先ヅ150頁(9)及ビ147頁(8)ニヨリ

$$a'x^2+b'y^2=-c'=\frac{-\Delta}{ab-h^2}.$$

而シテ $ab-h^2>0$ ナル場合ニ於テハ a' ト b' トハ同符號ナルヲ以テ, 148頁(3)ニヨリ a' ノ符號ハ $a+b$ ノ符號ト

同ジ然ルニ a ト b モ亦 $ab-h^2>0$ ナルガ故ニ同符號ナリ,

結局 a' ノ符號ハ a ノ符號ト同ジ,ヨツテ

$$aa'x^2+ab'y^2=\frac{-a\Delta}{ab-h^2}$$

ト書キ改ムルトキハ, aa' 及 ab' ハ共ニ正ナリ,サレバ

$$ab-h^2>0,\begin{cases}-a\Delta<0 \text{ 又ハ } -b\Delta<0 \text{ ナラバ,虛楕圓,}\\ -a\Delta>0 \text{ 又ハ } -b\Delta>0 \text{ ナラバ,實楕圓,}\\ \quad\Delta=0 \text{ ナラバ,點楕圓又ハ二ツノ虛直線}\end{cases}$$

ヲ表ハスモノナリ.

次ニ $ab-h^2<0$ ナルトキハ,R ガ零ナラザレバ常ニ双曲線ヲアラハスニヨリ,特ニ R ノ正負ヲ吟味スルヲ要セズ.單ニ c' ガ零ナルカ否カ,即チ Δ ガ零ナルカ否カヲ以テ場合ヲ分テバ可ナリ. 故ニ

$$ab-h^2<0,\begin{cases}\Delta\neq 0 \text{ ナラバ,双曲線,}\\ \Delta=0 \text{ ナラバ,二ツノ實直線}\end{cases}$$

ヲ表ハスモノナリ.

【例】1. $5x^2+2xy+5y^2-2x-10y-7=0$ ヲ標準形ニ直セ.

本文ニ於ケル記號ト對照スルトキハ

$$a=5,\ h=1,\ b=5,\ g=-1,\ f=-5,\ c=-7$$

ナリ. 故ニ $ab-h^2=24>0$ ニシテ (I) 〔151 頁〕ノ種類ニ屬ス.

中心ヲ求ムル方程式ハ $\quad 5x+y-1=0$

$$x+5y-5=0$$

之ヲ解イテ $\quad x_0=0,\quad y_0=1$

ヲ得. 原點ヲコヽニ移ストキハ,

$$c'=gx_0+fy_0+c=-1\times 0-5\times 1-7=-12$$

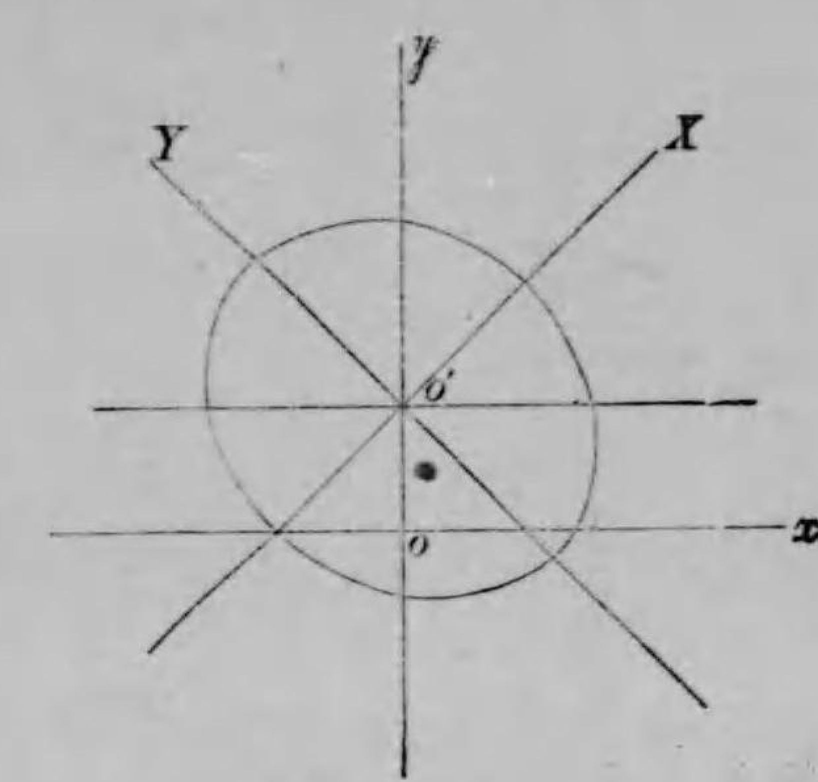
ナルヲ以テ,與ヘラレタル方程式ハ

$$5x^2+2xy+5y^2-12=0$$

トナル.

次ニ $\quad \tan 2\theta=\dfrac{2}{5-5}=\infty \quad$ [148頁(6)]

第五十三圖



ヨリ θ ヲ求ムレバ $\quad \theta=45°$

ヲ得. 方程式

$$z^2-10z+24=0$$

ノ根ハ $\quad z=4 \quad$ 又ハ 6

ニシテ,今 $h>0$ ナルヲ以テ

$$a'=6,\quad b'=4$$

トス. 故ニ軸ヲ 45° 回轉シタル後ノ方程式ハ

$$6x^2+4y^2-12=0$$

即チ $\quad \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$

ニシテ圖ノ如キ楕圓ヲアラハス.

【例】2. $x^2-4xy-2y^2+10x+4y=0$ ヲ標準形ニ直セ.

$$a=1,\ h=-2,\ b=-2,\ g=5,\ f=2,\ c=0.$$

故ニ $ab-h^2=-6<0$. 中心ヲ求ムル方程式ハ

$$x-2y+5=0$$

$$-2x-2y+2=0.$$

之ヲ解キテ $\quad x_0=-1,\quad y_0=2.$

從テ $\quad c'=5\times(-1)+2\times 2=-1.$

故ニ中心ヲ原點トセルトキノ方程式ハ

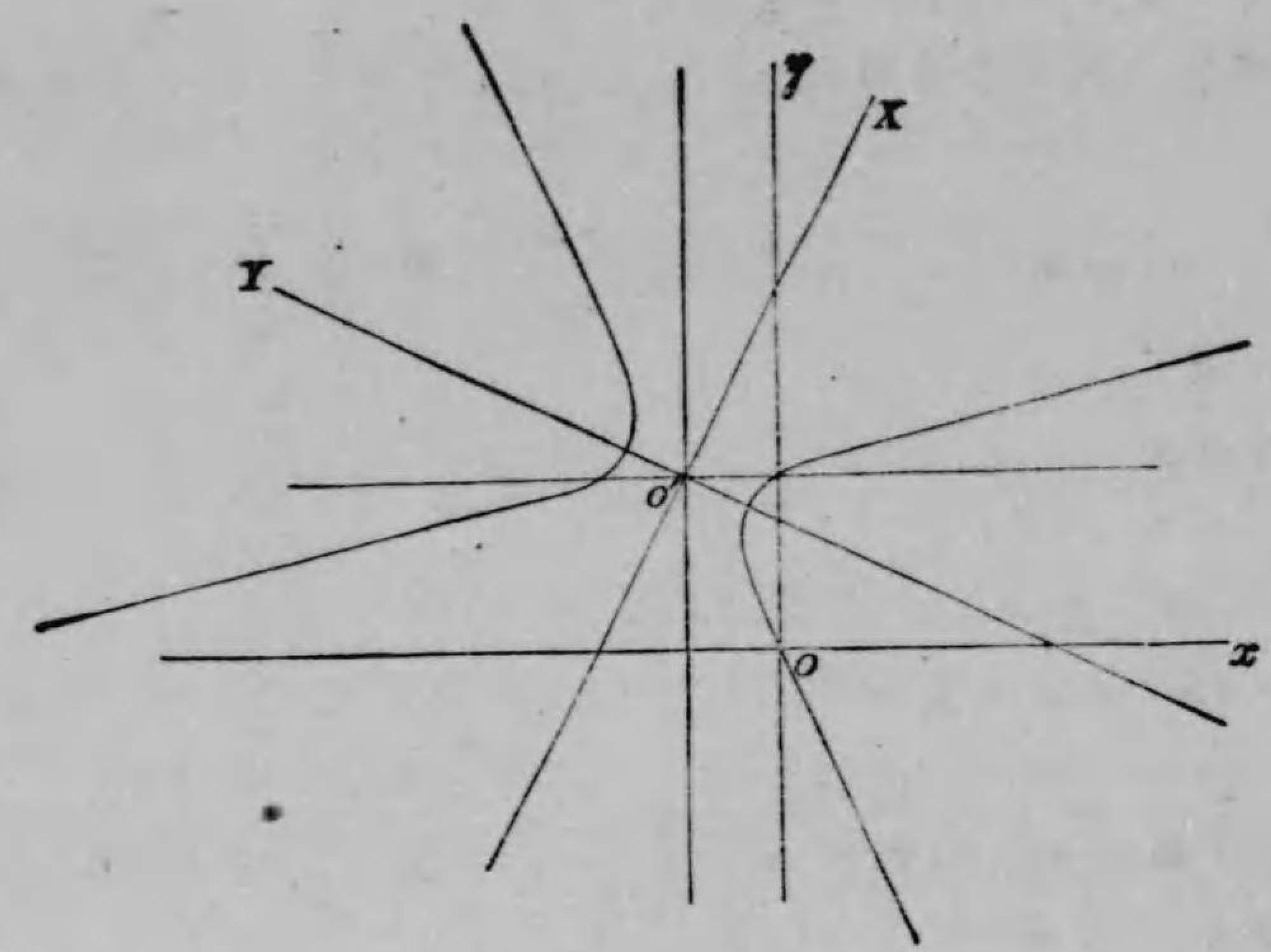
$$x^2-4xy-2y^2-1=0$$

ナリ. 次ニ $\quad \tan 2\theta=\dfrac{-4}{1+2}=-\dfrac{4}{3}$

ナル如キ正ノ鋭角 θ ヲ作圖シ,ソノ角丈軸ヲ回轉ス.* サテ

* 新 X 軸ノ方程式ハ $2x-y+4=0$. 151頁又ハ中川解析幾何270頁

第五十四圖



$$z^2+z-6=0$$

ヲ解キテ, $h<0$ ナルヲ以テ,

$$a'=-3,\quad b'=2$$

ヲ得. 故ニ求ムル方程式ハ

$$-3x^2+2y^2-1=0$$

即チ
$$-\frac{x^2}{\frac{1}{3}}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$$

ニシテ,上圖ノ如キ双曲線ヲアラハス.

【例】3. $x^2+4xy+3y^2-6x-10y+8=0$ ヲ標準形ニ直セ.

$$a=1,\ h=2,\ b=3,\ g=-3,\ f=-5,\ c=8.$$

故ニ $ab-h^2=-1<0$. 中心ハ

$$x+2y-3=0$$
$$2x+3y-5=0,$$

ヨリ,
$$x_0=1,\quad y_0=1,$$
$$c'=-3-5+8=0.$$

故ニ中心ヲ原點トセルトキノ方程式ハ

$$x^2+4xy+3y^2=0 \qquad (1)$$

ニシテ,原點ヲ過ル二直線ヲアラハスコトヲ知ルベシ. モシ更ニ軸ヲ回轉セント欲セバ,

$$\tan 2\theta=\frac{4}{1-3}=-2,$$

ヨリ θ ヲ決定スベシ,

$$z^2-4z-1=0,$$

且ツ $h>0$ ナルヲ以テ,

$$a'=2+\sqrt{5},\quad b'=2-\sqrt{5}.$$

依テ標準形ハ

$$(2+\sqrt{5})x^2-(\sqrt{5}-2)y^2=0$$

ナリ.

(1) ヲ因數ニ分解スレバ

$$(x+3y)(x+y)=0$$

ヲ得ベク,従テ原式ヲソノマヽ分解スレバ

$$\{(x-1)+3(y-1)\}\{(x-1)+(y-1)\}=0$$

即チ
$$(x+3y-4)(x+y-2)=0$$

ナルベキコトモ容易ニ推知セラル.

42. 無心二次曲線.

與ヘラレタル二次曲線

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \qquad (1)$$

ニ於テ $ab-h^2=0$ ナルトキハ,(1)ハ無心二次曲線ニシテ確定セル一ノ中心ヲ有セザルヲ以テ,此場合ニ(1)ヲ簡單ナル形ニ直スニハ,先ヅ最初ニ座標軸ヲ前節ニ於ケル如ク

$$\tan 2\theta=\frac{2h}{a-b}$$

ナル角 θ 丈回轉スベシ. 然ルトキハ,有心曲線ノ場合ト同ジク,變換ノ後ノ方程式ニ於テハ xy ノ項ノ係數ハ零トナルベシ. 此時 x^2 及ビ y^2 ノ係數ヲ夫々 a' 及ビ b' トセバ,前節 (4)〔148頁〕ニヨリ

$$-a'b'=h^2-ab$$

ナリ. 然ルニ今此右邊ハ零ニ等シキヲ以テ, a' 又ハ b' ノ中何レカ一方ハ零ナラザル可ラズ. 但シ兩方共ニ零ナルコトナシ,何トナレバ其場合ニハ變換後ノ式ハ一次式トナル可ケレバナリ. a' ト b' トノ中何レヲ零ナリト考フルモ,此ヨリ以後ノ論法ニハ格別ノ變化ナク,唯 x ト y トヲ交換シテ考フレバ可ナルヲ以テ,今假リニ $a'=0$, $b'\neq 0$ トスベシ. 然ルトキハ回轉ノ後ノ方程式ハ

$$b'y^2+2g'x+2f'y+c=0 \tag{2}$$

ナル形ヲ有ス. コヽニ

$$b'=a\sin^2\theta-2h\sin\theta\cos\theta+b\cos^2\theta$$

$$g'=g\cos\theta+f\sin\theta$$

$$f'=-g\sin\theta+f\cos\theta$$

ナリ.

次ニ平行移動ニヨリテ原點ヲ (x_1, y_1) ナル點ニ移ストキハ,(2) ハ

$$b'(y+y_1)^2+2g'(x+x_1)+2f'(y+y_1)+c=0$$

即チ

$$b'y^2+2g'x+2(b'y_1+f')y+b'y_1^2+2g'x_1+2f'y_1+c=0$$

トナル. コヽニ於テ x_1, y_1 ナルモノヲ次ノ如クニ取ルコトヽス,

$$b'y_1+f'=0$$

$$b'y_1^2+2g'x_1+2f'y_1+c=0.$$

即チ
$$y_1=-\frac{f'}{b'}, \qquad x_1=\frac{f'^2-b'c}{2b'g'}$$

ナラシムルトキハ,(2) ハツイニ

$$b'y^2+2g'x=0,$$

或ハ書キ直シテ,

$$y^2=px \tag{3}$$

ナル形トナルベシ,コヽニ p ハ一ノ常數ナリ.

既ニ假定セル處ニヨリ b' ハ零ナラズ. 然レドモ g' ハ或ハ零ナルコトアルベシ. 然ルトキハ上ノ如クシテ x_1 ヲ決定スルヲ得ズ. 然レドモ此場合ニハ (2) ヨリ直接ニ考フレバ,此式ハ

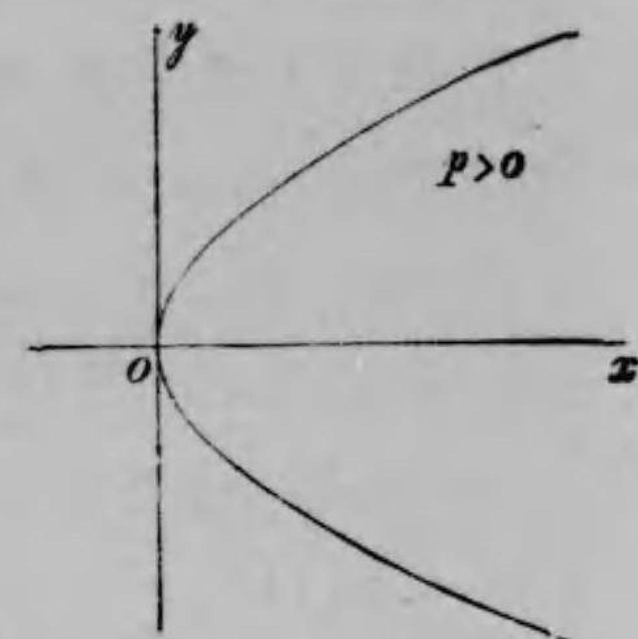
$$b'y^2+2f'y+c=0$$

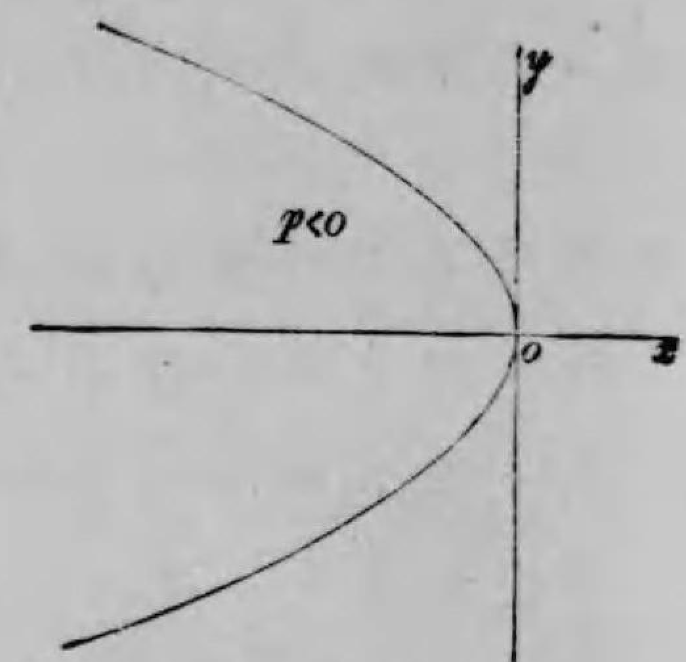
ニシテ,即チ x 軸ニ平行ナル二本ノ實又ハ虛ナル直線ヲアラハスモノナリ.

故ニ **無心二次曲線ナルモノハ,二本ノ平行ナル實又ハ虛直線トナルカ,然ラザレバ (3) ノ如キ式ニテアラハサルヽ一ノ曲線ナリ.** 此曲線ヲ **拋物線** ト云フ. ソノ形ハ圖ニ示スガ如キモノニシテ, x 軸ニ關シテ對稱ナリ. 此位置ニ於ケル x 軸ノ中, $p>0$ ナルトキハソノ正ノ部

分ノ半直線,又 $p<0$ ナルトキハ負ノ部分ノ半直線ヲ拋物線ノ主軸ト稱シ,ソノ端Oヲ**頂點**トイフ.

第五十五圖





第五十六圖

(3)ハ拋物線ノ式ノ標準形ナルガ,後ニ至テ明カナル如ク種種ノ研究ニ際シテハ特ニ之ヲ

$$y^2=4dx$$

ナル形ニ置クヲ便トスルコト多シ.

扨與ヘラレタル無心二次曲線(1)ガ二本ノ直線トナルカ或ハ拋物線トナルカハ,畢竟 g' ガ零ナルカ否カニヨリテ定マル. 今

$$a'=a\cos^2\theta+2h\cos\theta\sin\theta+b\sin^2\theta=0 \qquad \text{〔148 頁〕}$$

$$g'=g\cos\theta+f\sin\theta=0$$

ノ二式ヨリ θ ヲ消去スルトキハ

$$af^2-2fgh+bg^2=0 \qquad (4)$$

ヲ得. 然ルニ $ab-h^2=0$ ナルヲ以テ,(4)ハ結局

$$\Delta=c(ab-h^2)+2fgh-af^2-bg^2=0$$

ト同意味ナリ. 又逆ニ $\Delta=0$, $ab-h^2=0$ ナルトキハ,之ヨ

リ(4)ヲ得. 從テ(4)ト $a'=0$ トヨリ $g'=0$ ヲ得. 故ニ無心二次曲線ガ二本ノ直線トナルタメノ必要ニシテ且十分ナル條件ハ $\Delta=0$ ニシテ第23節ノ結果ト一致ス. 即チ

$$ab-h^2=0,\begin{cases}\Delta\neq0 & \text{ナラバ　拋物線,}\\ \Delta=0 & \text{ナラバ　二本ノ平行ナル直線}\end{cases}$$

ヲ表ハス.

與ヘラレタル無心二次曲線ノ方程式(1)ヲ標準形(3)ニ直スニ當リ,上ニ述ベタル通リノ手續キヲナサンニハ途中ノ計算ノ勞ヤヽ大ナレバ,實際ニハ次ノ如キ考ヘ方ニヨルヲ便トス.

今與ヘラレタル式ヲ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \qquad (5)$$

トシ,コヽニ $ab-h^2=0$ 及ビ $\Delta\neq0$ ト假定ス.

モシ a, b 共ニ零ナラバ,從テ h モ亦零トナルニヨリ,(5)ハ一次式トナル. 故ニ今 a, b ノ中一方ハ零ナラズト考フベシ. 假リニ $a\neq0$ トス.

(5)ノ兩邊ニ a ヲ乘ジ, $ab=h^2$ ナルコトヲ利用シテ,

$$(ax+hy)^2+2agx+2afy+ac=0$$

ヲ得. 更ニコヽニ任意ノ常數 k ヲ用ヒテ,

$$(ax+hy+k)^2+2(ag-ka)x+2(af-kh)y+(ac-k^2)=0 \qquad (6)$$

トスルコトヲ得. コヽニ於テ二ツノ直線

$$ax+hy+k=0 \qquad (7)$$

$$2(ag-ka)x+2(af-kh)y+(ac-k^2)=0 \qquad (8)$$

ヲ考ヘ,コレガ相互ニ垂直ナル様ニkノ値ヲ取ルコトヽス. 即チ

$$a(ag-ka)+h(af-kh)=0,$$

$$k=\frac{a(ag+hf)}{a^2+h^2}=\frac{ag+hf}{a+b} \qquad (9)$$

トスベシ. 此分母ハ零ナラザルヲ以テkノ値ハ常ニ決定セラル.

斯クノ如キkヲ(7),(8)ニ入レタルトキ,兩式ニ於ケルx及ビyノ係數ハ決シテ同時ニ零トナルコトナシ. 何トナレバ,(7)ニ於テハ既ニ假定セル處ニヨリxノ係數aハ零ナラズ. 又(8)ニ於テハyノ係數ハ確カニ零ナラズ,何トナレバ

$$af-kh=af-\frac{h(ag+hf)}{a+b}$$

$$=\frac{af(a+b)-h(ag+hf)}{a+b}$$

$$=\frac{a(af-hg)}{a+b}$$

ナルガ故ニ,モシ之ガ零ナラバ,

$$\Delta=(ab-h^2)c+(hf-bg)g-(af-hg)f$$

$$=(ab-h^2)c+\frac{h}{a}(af-hg)g-(af-hg)f$$

$$=0$$

即チ $\Delta=0$ トナリ,假定ニ反ス.

故ニ(7),(8)ハ常ニ確定セル二ツノ垂直ナル直線ヲ表ハスモノナリ. 依テ今(7)ヲ新シキX軸トシ,(8)ヲY軸トスルナラバ,舊座標ガ(x, y)ナリシ一點ノ新座標(X, Y)ハ夫夫下ノ如クナルベシ.

$$X=\pm\frac{2(ag-ka)x+2(af-kh)y+(ac-k^2)}{2\sqrt{(ag-ka)^2+(af-kh)^2}}$$

$$Y=\pm\frac{ax+hy+k}{\sqrt{a^2+h^2}},$$

コヽニkノ代リニ(9)ノ値ヲ入ルベキモノナリ. 故ニ此新シキ座標軸ニ關シテハ,(6)ナル方程式ハ

$$(a^2+h^2)Y^2\pm2\sqrt{(ag-ka)^2+(af-kh)^2}\,X=0 \qquad (10)$$

即チ

$$y^2=px$$

ナル形ヲ有スベシ. コレ即チ標準形ナリ.

(10)ニ於ケル複號ノ何レヲ取ルベキカハ,要スルニ直線(7)ノ何レノ方向ヲx軸ノ正ノ方向トスルカニヨリテ定マルベキモノニシテ,詳言スレバ,(7)ガ(8)ニヨリテ分タレタル半直線ノ中,(8)ニ對シテ舊原點ト同ジ側ニアル方ヲ正トスレバ此複號ハ$ac-k^2$ト同號ヲトルベク,然ラザルトキハ之ニ反スベシ. (第21節)

以上スベテ$a\neq0$トシテ論ジタルガ,モシ$b\neq0$ナラバ,先

ヅ全體ニ b ヲ乗ジ,スベテ同様ニ論ズルコトヲ得ベシ.
モシ又ハジメヨリ a ガアル完全平方數ナラバ,全體ニ a ヲ乗ズルコトヲ省クモ可ナリ. (次ノ例ヲ見ヨ)

【例】 $9x^2+24xy+16y^2-26x+7y-34=0$ ヲ標準形ニ直セ.

$$a=9,\quad h=12,\quad b=16,\quad g=-13,\quad f=\frac{7}{2},\quad c=-34,$$

ナルヲ以テ $ab-h^2=0$ ナリ.

與ヘラレタル方程式ヲ書キ直シテ

$$(3x+4y+k)^2-2(13+3k)x+2\left(\frac{7}{2}-4k\right)y-34-k^2=0$$

トシ,コヽニ k ヲ

$$-3(13+3k)+4\left(\frac{7}{2}-4k\right)=0$$

即チ

$$k=-1$$

ト取ルトキハ,

$$(3x+4y-1)^2-20x+15y-35=0$$

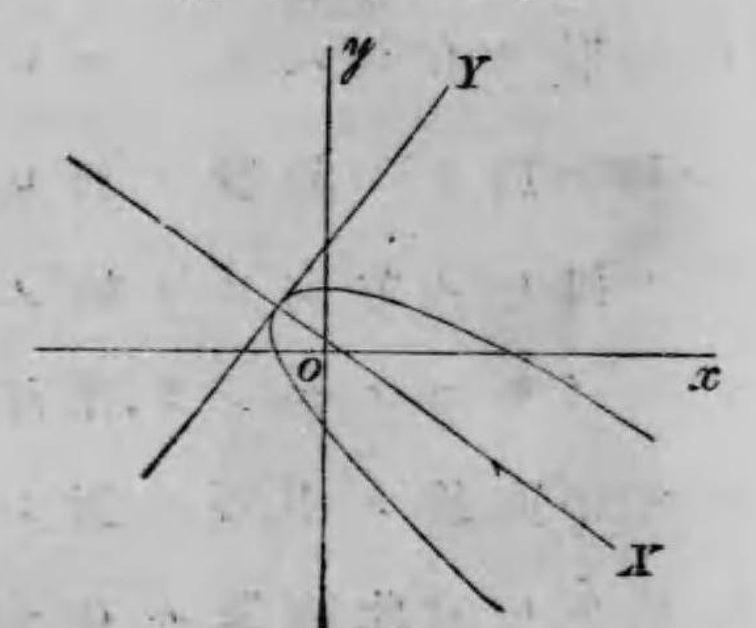
トナル. コヽニ於テ二ツノ直線

$$3x+4y-1=0,\qquad -20x+15y-35=0$$

ヲ夫々新シキ X 軸及ビ Y 軸トスレバ,與ヘラレタル曲線ノ方程式ハ

$$(3^2+4^2)Y^2\pm\sqrt{20^2+15^2}\,X=0$$

第五十七圖



即チ

$$Y^2\pm X=0$$

トナル, モシ X 軸ノ中, Y 軸ニ對シテ舊原點ト同ジ側ニアル部分ヲ正ノ方向トスレバ,此複號ハ負ヲトルベシ, 依テ標準形トシテ

$$y^2=x$$

ヲ得ベシ. 圖ニ畫ケバ第五十七圖ノ如シ

前節及ビ本節ノ研究ニヨリ,二次方程式ノアラハス軌跡ニシテ未ダ學バザリシ三種ノ曲線ヲ得タリ. 橢圓,双曲線,抛物線是レナリ. コノ三ツヲ總稱シテ **固有ノ二次曲線** トイフ. 二本ノ直線ニ分解スルモノヽ如キハ固有ノ二次曲線ニ非ズ.

43. 圓錐曲線.

一ノ圓ガ與ヘラレタリトシ,ソノ圓ノ平面外ニアル一定點 V ヲ通ジ,常ニ圓ト交ハル直線ヲ引クトキ,ソノ直線ガ空間ニ作ルトコロノ軌跡ハ一ノ曲面ニシテ,之ヲ **圓錐** ト云フ. 而シテソレラノ直線ヲ **母線**, 點 V ヲ **頂點** ト云フ.

圓錐ハ頂點 V ニ對シテ對稱ナル二ツノ部分ヨリナル. 若シ V ト圓ノ中心 O' トヲ結ブ直線ガ圓ノ平面ニ垂直ナルトキハ,ソノ圓錐ヲ **直圓錐** ト云ヒ,直線 VO' ヲソノ **軸** ト稱ス. 直圓錐ノ軸ト母線トガナス角ハ不變ナリ.

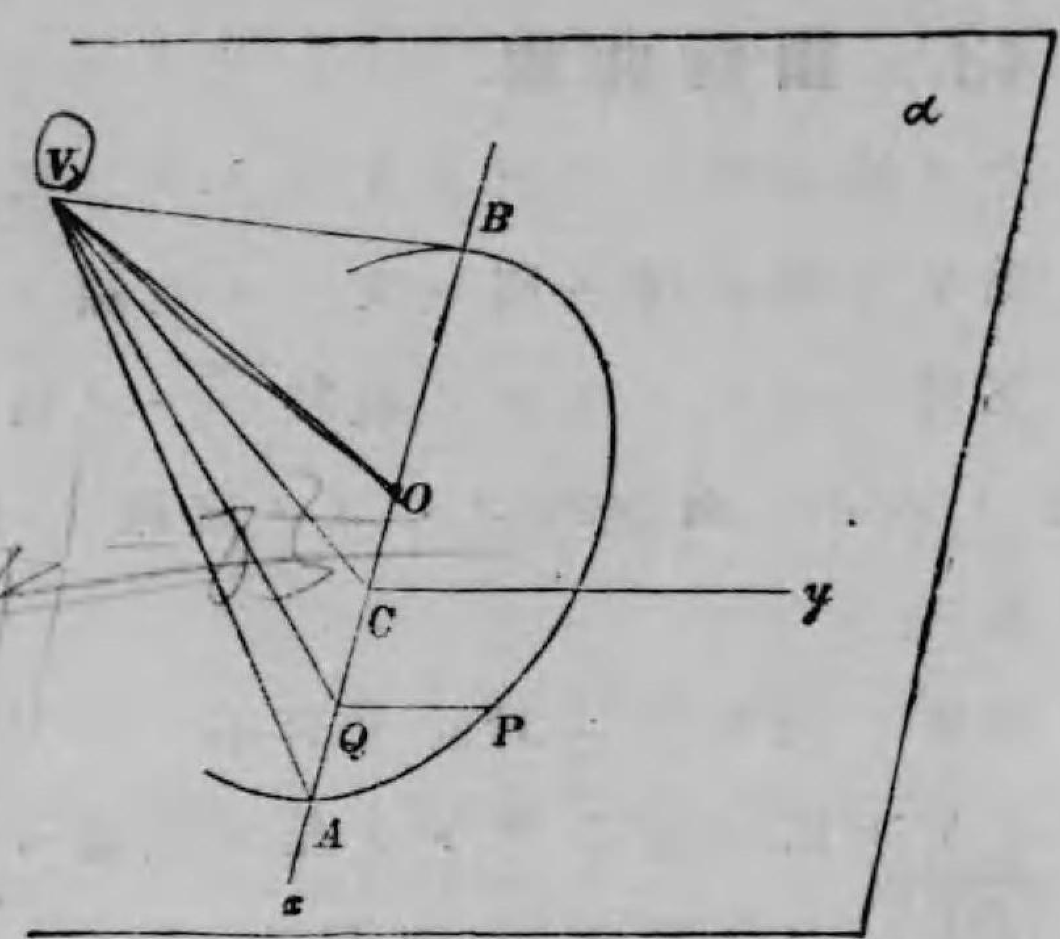
圓錐ヲ一ツノ平面ニヨリテ截リテ得ル曲線ヲ **圓錐曲線** ト稱ス. 二次曲線ト圓錐曲線トノ間ニハ次ノ關係アリ.

一ノ圓錐ヲ,ソノ頂點ヲ通ゼザル一ツノ平面ニヨリテ截ルトキハ,ソノ交線トシテ得ル圓錐曲線ハ必ズ固有ノ二次曲線,即チ橢圓,双曲線,抛物線ノ三種ノ中ノ何レカナリ. 又逆ニ任意ノ固有ノ二次曲線ハ必ズ一ノ圓錐ノ斷面ナリト見做スコトヲ得. 此關係アルニヨリ,圓錐曲線

トイフ名ヲ二次曲線ノ別名トシテ用フルコトアリ.

コノ關係ヲ十分ニ論ズルニハ立體解析幾何學ノ知識ヲ要スルニヨリ,コヽニハ單ニ直圓錐ノ場合ノミニツイテソノ證明ヲ試ミントス.

第五十八圖



Vヲ一ノ直圓錐ノ頂點トシ, VOヲ軸トス. 又VOト母線トノナス一定ノ角ヲθトス.

Vヲ通セザル一ノ平面αニテ此直圓錐ヲ截リタルトキ,αガ圓錐ノ軸ニ平行ナル場合ト,軸ニ交ハル場合トアリ.

今平面αガ軸ト交ハルトキニ,ソノ交點ヲOトシ,直線VOヲ含ミαニ垂直ナル平面AVBヲ考ヘ,ソノ平面内ニアル二ツノ母線ヲVA, VBトス. A及ビBハ此母線トαトノ交點ナリ. 又Vヨリαニ垂線(法線) VCヲ下シ,ソノ足ヲCトセバ, Cハ直線AB上ニアリ,

直線AB上ニ於テ, CガOト一致スルトキハ,斷面ノ曲線ハ明カニ圓ナリ. 若シ一致セザルトキハ, CハOニ對シテAト同ジ方向ニアリト假定シ, ∠VOCヲϕトシ,平面αノ上ニ於テ, OAヲx軸ノ正ノ方向ニ取リ, Cヲ通ジテ之ニ垂直ニy軸ヲ取ル.

任意ノ一ツノ母線VPガαト交ハル點ヲPトシ, Pノ座標ヲ(x, y)トス. サテVOノ長サヲpトスルトキハ,

$$VC=p\sin\phi, \qquad CO=p\cos\phi,$$
$$VP=\sqrt{VC^2+CP^2}=\sqrt{p^2\sin^2\phi+x^2+y^2},$$

$$PO^2=VO^2+VP^2-2VO.VP\cos\theta$$
$$=p^2+(p^2\sin^2\phi+x^2+y^2)-2p\sqrt{p^2\sin^2\phi+x^2+y^2}\cos\theta \quad (1)$$

ナリ. 又Pヨリx軸ニ垂線PQヲ下ストキハ,

$$OQ=p\cos\phi+x,$$
$$OP^2=(p\cos\phi+x)^2+y^2 \quad (2)$$

ナルヲ以テ,(1)ト(2)トヲ比較シテ

$$p^2+p^2\sin^2\phi+x^2+y^2-2p\cos\theta\sqrt{p^2\sin^2\phi+x^2+y^2}=p^2\cos^2\phi+2px\cos\phi+x^2+y^2$$

即チ
$$p\sin^2\phi-x\cos\phi=\cos\theta\sqrt{p^2\sin^2\phi+x^2+y^2}$$

ヲ得. 更ニ兩邊ヲ自乘スレバ

$$p^2\sin^4\phi-2px\sin^2\phi\cos\phi+x^2\cos^2\phi=p^2\sin^2\phi\cos^2\theta+x^2\cos^2\theta+y^2\cos^2\theta.$$

即チ

$$(\cos^2\theta-\cos^2\phi)x^2+y^2\cos^2\theta+2px\sin^2\phi\cos\phi+p^2\sin^2\phi(\cos^2\theta-\sin^2\phi)=0 \quad (3)$$

トナル.

是レ即チ斷面ノ曲線ノ方程式ニシテ,前節等ニ於ケル記號ト對照スルナラバ,

$$a=\cos^2\theta-\cos^2\phi, \qquad h=0, \qquad b=\cos^2\theta,$$
$$g=p\sin^2\phi\cos\phi, \qquad f=0, \qquad c=p^2\sin^2\phi(\cos^2\theta-\sin^2\phi),$$
$$ab-h^2=(\cos^2\theta-\cos^2\phi)\cos^2\theta,$$
$$\Delta=p^2\sin^2\phi\cos^2\theta(\cos^2\theta-\cos^2\phi)(\cos^2\theta-\sin^2\phi)-p^2\sin^4\phi\cos^2\phi\cos^2\theta$$
$$=-p^2\sin^2\theta\cos^4\theta\sin^2\phi.$$

而シテθトϕトハ共ニ正ノ鋭角ナルヲ以テ, Δハ常ニ負ニシテ零トナルコトナシ. 故ニ(3)ハ固有ノ二次曲線ヲアラハスモノニシテ,ソノ種類ハ$ab-h^2$ノ符號,即チ$\cos^2\theta-\cos^2\phi$ノ符號ニヨリテ決定セラル. 即チ, $\theta<\phi$ナルトキハ橢圓, $\theta=\phi$ナルトキハ抛物線, $\theta>\phi$ナルトキハ双曲線ナリ. 橢圓ナル場合ニ於テハ$a\Delta<0$トナルヲ以テ常ニ實ナル橢圓ナリ. モシVCノ長サヲqトシ角CVOヲϕ'トスルトキハ

$$\phi+\phi'=90^\circ, \qquad p\sin\phi=q$$

ナルガ故ニ(3)ハ次ノ如クニナル

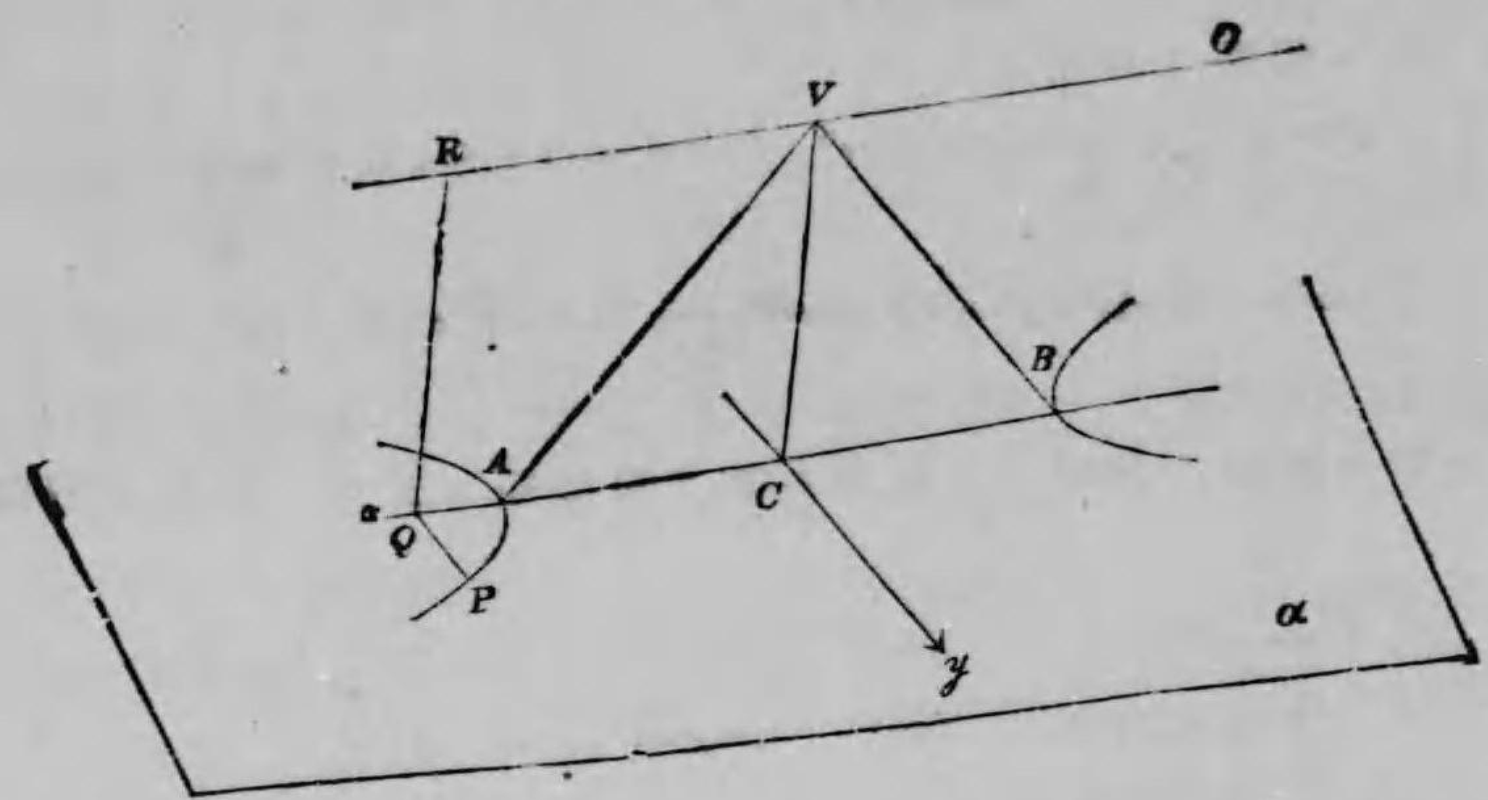
$$(\cos^2\theta-\sin^2\phi')x^2+\cos^2\theta\cdot y^2+2q\cdot x\sin\phi'\cos\phi'+q^2(\cos^2\theta-\cos^2\phi')=0 \quad (4)$$

q, θ, ϕ' ヲ適當ニ選ブコトニヨリテ,(4)ハ任意ノ形及ビ大サヲ有スル固有ノ二次曲線タラシムルコトヲ得ルモノナレドモ,ソノ證明ハ之ヲ略ス. (本章ノ問題7ヲ見ヨ)

次ニ平面 α ガ直圓錐ノ軸ニ平行ナル場合ヲ考フベシ.

頂點 V ヨリ α ニ垂線 VC ヲ下シ,ソノ足ヲ C トス. VC ト軸 VO トヲ含ム平面ヲ作ラバ,此平面ハ α ニ垂直ナリ. 兩平面ノ交リヲ AB トス.

第五十九圖



此垂直面内ニアル二ツノ母線ヲ VA, VB トシ, α トノ交點ヲ A, B トス. α ノ上ニ於テ,直線 BA ヲ x 軸トシ C ヲ通ジテ之ニ垂直ニ y 軸ヲ作ル. 任意ノ一ツノ母線 VP ト α トノ交點ヲ $P(x, y)$ トス. 又 P ヨリ, x 軸ニ垂線 PQ ヲ下シ,圓錐ノ軸 VO ニ垂線 PR ヲ下シ, VC ノ長サヲ q トスルトキハ,

$$\mathrm{RQ}=q, \qquad \mathrm{QP}=y, \qquad \mathrm{VR}=\mathrm{CQ}=x,$$

$$\mathrm{VP}^2=q^2+x^2+y^2,$$

又

$$\mathrm{PR}^2=\mathrm{PQ}^2+\mathrm{QR}^2=y^2+q^2,$$

$$\mathrm{PR}^2=\mathrm{VR}^2+\mathrm{VP}^2-2\mathrm{VR}.\mathrm{VP}\cos\theta,$$

$$=x^2+(q^2+x^2+y^2)-2x\sqrt{q^2+x^2+y^2}\cos\theta,$$

故ニ

$$y^2+q^2=x^2+q^2+x^2+y^2-2x\cos\theta\sqrt{q^2+x^2+y^2}.$$

即チ

$$x(\cos\theta\sqrt{q^2+x^2+y^2}-x)=0,$$

而シテ P ノ横線ハ一般ニ零ニアラズ. 故ニ P ノ軌跡ハ

$$\cos\theta\sqrt{q^2+x^2+y^2}-x=0$$

或ハ

$$\sin^2\theta x^2-\cos^2\theta y^2-q^2\cos^2\theta=0 \qquad (5)$$

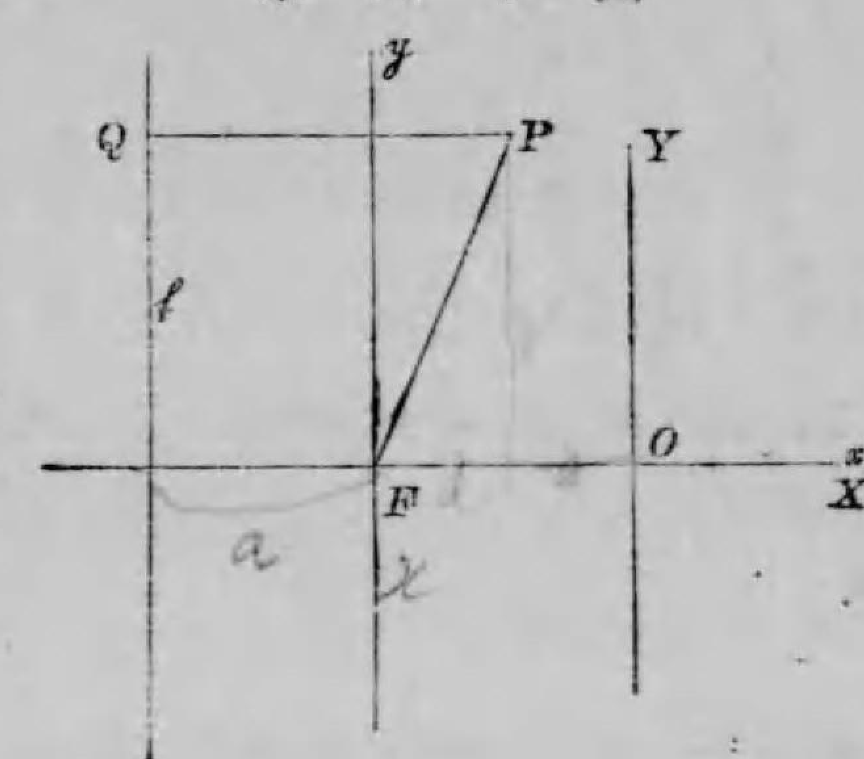
ニヨリテ表ハサルヽ双曲線ナリ. (5)ハ(4)ニ於テ $\phi'=90^\circ$ トスルコトニヨリテ得ラルルガ故ニ凡テノ場合ハ(4)ニヨリテ表ハサル.

44. 焦點及ビ準線.

固有ノ二次曲線ヲ純正幾何學的ニ定義スル方法ハ前節ノ如ク之ヲ一ノ圓錐ノ斷面曲線ナリトスル他ナホ種種アリ. コヽニ更ニソノ一ヲ擧ゲン.

一ノ與ヘラレタル點ヲ F トシ,F ヲ通ゼザル一ノ與ヘラレタル直線ヲ f トシ,今一點 P ヨリ F 及ビ f マデノ距離 $\overline{\mathrm{PF}}$, $\overline{\mathrm{PQ}}$ ノ比ガ與ヘラレタル正ノ常數 e ニ等シキ如キ P ノ軌跡ヲ求メントス.

第六十圖



F ヲ通ジ直線 f ニ垂直ナル直線ヲ x 軸トシ,F ニ於テ之ニ垂直ナル直線ヲ y 軸トシ,又 F ヨリ f マデノ距離ヲ a トシ, $x+a=0$ ヲ f ノ方程式トス,假定ニヨリ a ハ零ナ

ラザル常數ナリ.

Pノ座標ヲ (x, y) トスルトキハ,

$$PF=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$PQ=\pm(x+\alpha)$$

ナリ,故ニ求ムル軌跡ノ方程式ハ

$$x^2+y^2=e^2(x+\alpha)^2,$$

即チ $$x^2(1-e^2)+y^2-2\alpha e^2x-\alpha^2e^2=0 \qquad (1)$$

ニシテ,一ノ二次式トナル.

一般ノ記號ト對照スルトキハ

$$a=1-e^2, \quad h=0, \quad b=1,$$

$$g=-\alpha e^2, \quad f=0, \quad c=-\alpha^2e^2,$$

$$ab-h^2=1-e^2,$$

$$\Delta=-\alpha^2e^2,$$

ナルヲ以テ,此軌跡ハ $e<1$, $e=1$, $e>1$ ナルニ從テ夫々橢圓,拋物線,双曲線ナリ. Δ ハ決シテ零ナルコトナキヲ以テ,二本ノ直線トナルコトナク,又橢圓ナルトキハ

$$b\Delta=-\alpha^2e^2<0$$

ナルヲ以テ確カニ實橢圓ナリ.

何レノ場合ニ於テモ,Fヲソノ曲線ノ **焦點** ト云ヒ,直線 f ヲコノ焦點ニ相應スル **準線** ト云ヒ,又常數 e ヲ此曲線ノ **心差率** ト云フ.

$e \neq 1$ ナリトシテ, (1) ノ中心ヲ求ムルトキハ,ソノ座標

ハ

$$\left(\frac{\alpha e^2}{1-e^2}, \quad 0\right)$$

ニシテ,コヽニ原點ヲ移サバ,(1) ハ變ジテ

$$x^2(1-e^2)+y^2=\frac{\alpha^2e^2}{1-e^2} \qquad (2)$$

トナル. 之ヲ第41節ニ述ベタル標準形

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$$

ト比較スルトキハ,

$$a^2=\frac{\alpha^2e^2}{(1-e^2)^2}, \qquad \pm b^2=\frac{\alpha^2e^2}{1-e^2} \qquad (3)$$

ナル關係アルベキニヨリ,逆ニ (3) ヲ與ヘラレタリトシテ之ヨリ e 及ビ α ヲ求ムルトキハ,

$$e=\sqrt{1\mp\frac{b^2}{a^2}}, \qquad \alpha^2=\frac{b^4}{a^2\mp b^2}$$

ヲ得. 中心ヲ原點トスル新座標軸ニ關スルF點ノ座標ハ $\left(-\frac{\alpha e^2}{1-e^2}, 0\right)$ ナルヲ以テ, $e<1$, $\alpha>0$ ナルトキハ $(-ae, 0)$ ニシテ, $e>1$ ナルトキハ $(ae, 0)$ ナリ. 又直線 f ノ方程式ハ,Fヲ原點トセルトキ $x=-\alpha$ ナルヲ以テ,中心ヲ原點トセルトキハ

$$x=-\alpha-\frac{\alpha e^2}{1-e^2}=-\frac{\alpha}{1-e^2}$$

トナル. 即チ $e<1$ ナルトキハ $x=-\frac{a}{e}$ ニシテ, $e>1$ ナ

ルトキハ $x=\dfrac{a}{e}$ ナリ.

然ルニ楕圓及ビ双曲線ハ共ニ y 軸ニ關シテ對稱ナル形ヲ有スルモノナルニヨリ,上ニ述タルF及ビ f ト對稱ノ位置ニモ亦之ト全ク同樣ノ性質ヲ有スル點及ビ直線無カル可ラズ,之ヲ夫々F′及ビ f' トシ,之ヲ稱シテ矢張焦點及ビ準線トイフ. 依テ **與ヘラレタルーノ楕圓又ハ双曲線**

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$$

ニハ二ツノ焦點 $(ae, 0)$, $(-ae, 0)$ アリ,コノ各ニ對シテ一ツヅヽノ準線 $x=\dfrac{a}{e}$, $x=-\dfrac{a}{e}$ アリト云フコトヲ得. ココニ e ハ楕圓ニ於テハ

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

ニシテ,双曲線ニ於テハ

$$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

ナリ.

次ニ $e=1$ ナルトキハ,(1)ニ於ケル座標軸ヲ平行移動ニヨリテ變換シ,原點ヲ $\left(-\dfrac{a}{2},\ 0\right)$ ニ移サバ,方程式ハ

$$y^2=2ax$$

トナル. 之ヲ拋物線ノ方程式

$$y^2=4dx \qquad (3)$$

ト比較スルトキハ

$$a=2d$$

ナル關係アリ. 故ニ **(3)ヲ與ヘラレタルーノ拋物線ノ方程式トスルトキハ,ソノ焦點ハ $\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$ 即チ $(d, 0)$ ニアリ,準線ハ**

$$x=-a+\frac{a}{2}$$

即チ

$$x=-d$$

ナリト云フコトヲ得.

問　　題

1. 次ノ二次曲線ノ方程式ヲ標準形ニ直シ,依テソノ圖ヲ畫ケ(直交軸).

(1) $2x^2-8xy-4y^2-2=0$

(2) $6x^2+8xy+4x+8y+2=0$

(3) $x^2-4xy+4y^2+6x-2y+1=0$

(4) $3x^2-6xy-5y^2+12\ \ +4y+1=0$

$\boxed{(5)\quad 2x^2+4xy+5y^2-12x-18y+20=0}$

(6) $5x^2+2xy+5y^2-12x-12y+10=0$

(7) $7x^2+4xy+4y^2+18x+12y+14=0$

(8) $7x^2-8xy+y^2+2x+4y-6=0$

(9) $x^2+6xy+y^2+10x-2y+1=0$

(10) $3x^2-4xy+6y^2-8x-4y+3=0$

(11) $2y^2-3x-8y+17=0$

(12) $9x^2+24xy+16y^2-34x+38y-9=0$

2. 次ノ二次曲線ハ何ヲアラハスカ. (直交軸)

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{2xy}{ab}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{2x}{a}-\dfrac{2y}{b}+1=0$

(2) $x^2-6xy-7y^2+2ax+2ay=0$

(3) $by\left(1-\dfrac{y}{b}\right)+cx\left(1-\dfrac{x}{c}\right)-xy=0$

3. $(x^2-a^2)^2+(y^2-a^2)^2=a^4$ ハ二ツノ楕圓ヲアラハストイフ. ソノ各ノ方程式ヲ求メ,且之ヲ標準形ニ直セ(直交軸).

4. 三角形 ABC ノ邊 AB ノ上ニ一點 P ヲトリ, AC へ垂線 PQ ヲ下ストキ, BQ ト CP トノ交點ノ軌跡ヲ求ム.

5. $x^2+6xy-7y^2+2x+2y+k=0$ ノ標準形ガ $x^2-4y^2=1$ トナル樣ニ k ヲ定メヨ.

6. 平行移動ニヨリテ,一ノ二次式

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$$

ガ變ジテ

$$a'X^2+2h'XY+b'Y^2+2g'X+2f'Y+c'$$

トナルトキハ,

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a' & h' & g' \\ h' & b' & f' \\ g' & f' & c' \end{vmatrix}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

7.* 第43節(4)ヲ標準形ニ直シ,因テ q, θ, ϕ ヲ適當ニ選ブコトニヨリテ,任意ノ主軸又ハ心差率ヲ有セシメ得ルコトヲ示セ.

第七章

橢圓及ビ双曲線

45. 橢圓ノ形狀.

三種ノ固有ナル二次曲線ノ中ニテ橢圓及ビ双曲線ハ共ニ有心ニシテ又種々ノ性質ニ於テ相類似スルトコロ多キヲ以テ之ヲ併セテ本章ニ於テ論ゼントス.

先ヅ最初本節ニ於テハ橢圓ノ形狀ニ就テ考フベシ. 橢圓ノ方程式トシテハ通常直交軸ニ關シテ標準形

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

ヲ用ヒ,コヽニ a 及ビ b ハ共ニ正ナル實數トシ,且 $a>b$ ト考ヘテ可ナリ. 何トナレバ假令 $a<b$ ナリトスルモ x 軸ト y 軸トヲ交換シテ考フルコトニセバ,結局 $a>b$ ナル場合ト同様ニ論ジ得レバナリ.

(1)ヨリシテ直チニコノ曲線ガ x 軸及ビ y 軸ニ關シテ對稱ナルコト,及ビ x, y ノ絶對値ガ夫々 a, b ヨリ大ナル能ハザルコトヲ推知セラル. 更ニ之ヲ y ニツイテ解クトキハ

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \qquad (2)$$

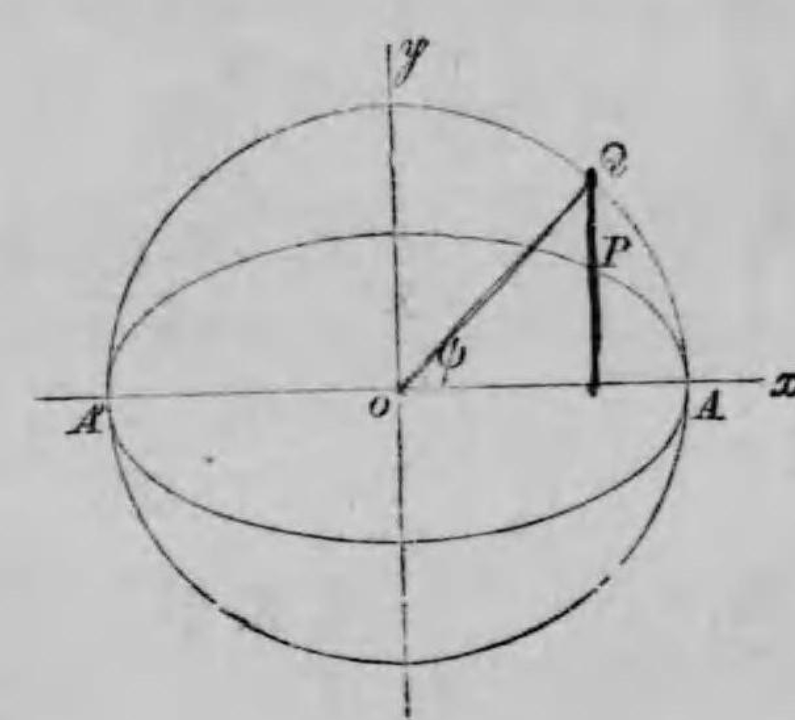
ヲ得. 因テ今 x ノ値ヲ $-a$ ヨリ始メテ漸次ニ增シ,零ヲ經テ a マデ變ゼシムルトキハ,之ニ對スル y ハ零ヨリ始マリテ,途中常ニ正負二ツノ値ヲ有シ,漸次ニ絶對値ヲ增シ,x ガ丁度零ナルトキ y ハ最大ノ絶對値 b ヲ取リ,ソレヨリマタ減ジテツイニ零ニ終ル.

又(2)ヲ半徑 a ナル圓ノ方程式

$$y=\pm\sqrt{a^2-x^2} \qquad (3)$$

ト比較スルニ,(2)ノ右邊ハ丁度(3)ノ右邊ノ $\frac{b}{a}$ 倍ニ當ル. 因テ橢圓ハ圓ノ上ノ各點ノ縱線ヲ悉ク一定ノ比ニ縮小セルガ如キ曲線ナリトモ考ヘラル. 橢圓ノ長軸 AA′ ヲ直徑トシテ畫ケル圓(3)ヲ此橢圓ノ **補助圓** ト稱ス.

第六十一圖



今橢圓上ノ一點 P(x, y) ヨリ長軸ニ垂線ヲ引キ,之ガ補助圓ト交ハル二ツノ點ノ中,長軸ニ對シテ P ト同ジ側ニアル一點ヲ Q トシ, Q ト中心 O トヲ結ビ,角 AOQ ヲ ϕ トス. 然ルトキハ

$$x=a\cos\phi$$

ニシテ,之ヲ(1)ニ入レテ

$$y=b\sin\phi$$

ヲ得. 即チ ϕ ハ之ニヨリテ橢圓上ノ一點ノ座標ヲアラハスタメノ媒介變數トナルモノニシテ,之ヲ名ケテP點ノ **心差角** 又ハ **偏角** トイフ.

最後ニ橢圓ノ極方程式ヲ求ムベシ. O ヲ極トシ, Ox ヲ原線トスル極座標ヲ用フレバ,

$$x=\rho\cos\theta,\qquad y=\rho\sin\theta$$

ナル關係アルニヨリ,(1)ヲ書キ直シテ次ノ如クスルヲ得ベシ.

$$\frac{\rho^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\rho^2\sin^2\theta}{b^2}=1,$$

故ニ

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}=\frac{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}{a^2b^2}$$

$$=\frac{a^2-(a^2-b^2)\cos^2\theta}{a^2b^2},$$

從テ

$$\rho^2=\frac{b^2}{1-e^2\cos^2\theta} \qquad (4)$$

ヲ得,コヽニ e ハ心差率ニシテ

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

ナリ. (4)ニ於テ θ ヲ 0° ヨリ 360° マデ漸次ニ變化セシ

メ,之ニ對スル ρ ヲ計算スルコトニヨリテ,更ニ橢圓ノ形狀ヲ研究スルコトヲ得ベシ.

橢圓ニ於テ, $a=b$ ナル特別ノ場合ニハ既ニ知レル如ク圓トナル. 此時心差率 e ハ零ナリ. a ト b トガ漸々差ヲ生ズルニ從テ, e ハ漸次ソノ値ヲ增シ,橢圓ノ形ハ漸次ニ扁平トナル. 然レドモ e ハ 1 ヨリ大ナルコト能ハズ. 橢圓ガ限リナク扁平トナリ,即チ b ガ a ニ比シテ限リナク小トナルトキニ於テ, e ハ漸ク 1 ナル極限値ニ近ヅク.

46. 双曲線ノ形狀.

直交軸ニ關スル双曲線ノ方程式ノ標準形ハ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

ニシテ,コヽニ a, b ハ正ナル實數トス.

(1)ヨリシテ曲線ガ兩軸ノ各ニ關シテ對稱ナルコト,及ビ x ノ絶對値ガ a ヨリ小ナル能ハザルコトハ容易ニ推知セラル. (1)ヲ y ニツイテ解クトキハ

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

トナル. コヽニ於テ x ヲ a ヨリ始メテ漸次限リナク增大セシムルトキハ,之ニ對スル y ハ零ヨリ始マリ,途中ハ常ニ正負ノ符號ノミ相異ナル二ツノ値ヲ有シ而シテソノ絶對値ハ x ト共ニ限リナク增大ス. x ヲ $-a$ ヨリ始

$e = \frac{a^2-b^2}{a}$

メテ漸次ニソノ絶對値ヲ増サシムルモ亦同様ノ結果ヲ得. 之ニヨリテ双曲線ノ形ヲ大體知ルコトヲ得.

ナホ前節ニ於ケルト同一ノ方法ニテ,(1)ヲ極座標ニ變換スルトキハ

$$\rho^2=\frac{b^2}{e^2\cos^2\theta-1} \qquad (2)$$

ヲ得. コヽニ $e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

ニシテ,双曲線ニ於テハ常ニ $e>1$ ナリ. (2)ニ於テ $\theta=0°$ トスルトキハ

$$\rho=\pm\frac{b}{\sqrt{e^2-1}}=\pm a$$

ニシテ,之ヨリ θ ヲ増サバ,ρ モ亦従テ増シ,ツイニ $\cos\theta=\dfrac{1}{e}$ ナル角 θ ニ至ツテ ρ ハ無限大トナル. 斯クノ如キ正ノ鋭角ヲ α トス,然ラバ θ ガ α ヲ越エテナホ増大スルトキハ ρ ハ虚トナリ,θ ガ $180°-\alpha$ ニ至リテ ρ ハ再ビ無限大トナリ,ソノ後ハ ρ ハ θ ノ増スニ従テ減小シ,ツイニ $\theta=180°$ ニ至ツテマタ $\rho=\pm a$ トナル. コレニ依テ曲線ノ形ヲ書クトキハ第六十二圖ノ如クナルベシ. コヽニ述ベタル,曲線ト無究遠ニ於テ交ハル二ツノ動徑ノ方程式ハ,元ノ直交軸ニ關シテ

$$y=\pm\tan\alpha . x$$

ニシテ,コヽニ $\cos\alpha=\dfrac{1}{e}$ ナルヲ以テ,更ニ書キ直ストキハ

$$y=\pm\frac{b}{a}x \qquad (3)$$

トナル. 此直線ニツイテハナホ後ニ漸近線ノ處ニ述ブルコトヽス.

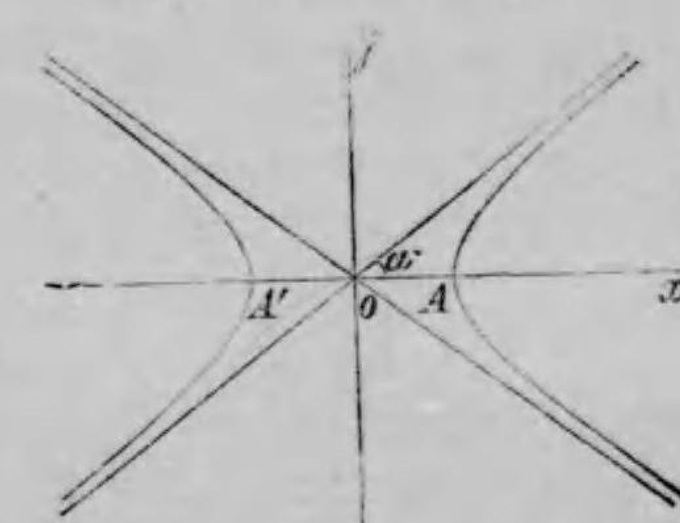
楕圓ニ於テハ $a=b$ ナル場合ニハ,既ニ熟知セル曲線即チ圓トナリタレドモ,双曲線ニ於テハタトヒ $a=b$ ナルトキニモ別ニ既知ノモノトハナラズ. 然レドモ此場合ニ於ケル双曲線ハ一般ノ双曲線中ニ於テ恰カモ圓ガ一般楕圓中ニ於ケルガ如ク特殊ノ地位ヲ占ムルモノト見ルヲ得ベク,カクノ如キ双曲線

$$x^2-y^2=a^2$$

ヲ稱シテ **直角双曲線** 又ハ **等邊双曲線** ト云フ. 之ニ對スル(3)ナル直線ハ丁度軸ノ間ノ角ノ二等分線トナリ,相互ニ垂直ナリ.

直角双曲線ニ於テハ $e=\sqrt{2}$ ナリ. e ノ値ガ之ヨリ漸次大トナルトキハ角 α ハ漸次 $90°$ ニ近ヅキ従テ双曲線ハ y 軸ニ沿ヒテ縦ニ延ビントスル傾向ヲ有シ狭長トナル. 之ニ反シテ e ノ値ガ $\sqrt{2}$ ヨリ漸次ニ減ジテ1ニ近ヅクトキハ角 α ハ漸々 $0°$ ニ近ヅキ,曲線ハ扁平トナリテ x 軸ニ一致セントスル傾向ヲ有スベシ.

第六十二圖

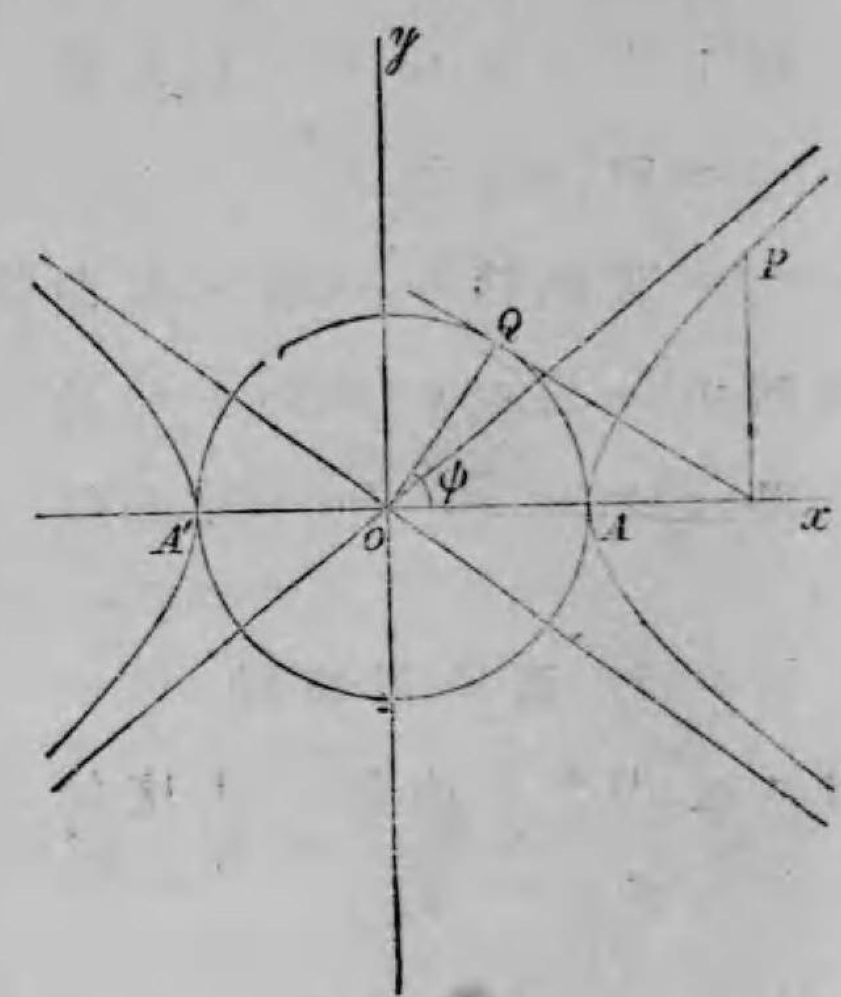


$e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{2}$

双曲線ニ於テモ亦心差角ナルモノヲ定義スルコトヲ得. 即チ次ノ如シ.

交軸 AA′ ヲ直徑トスル圓ヲ畫キ,之ヲ双曲線ノ補助圓トス. 今双曲線上ノ一點 P(x, y) ヨリ x 軸ニ垂線ヲ下シ,ソノ足ヨリ補助圓ニ切線ヲ引キ,ソノ二ツノ切點ノ中 x 軸ニ對シテPト同ジ側ニアルモノヲQトス. OQ ヲ結ビ,角 AOQ ヲ ϕ トスルトキハ,

第六十三圖



$$x=a\sec\phi$$

ニシテ,之ヲ(1)ニ入レテ

$$y=b\tan\phi$$

ヲ得. **ϕ ヲP點ノ心差角又ハ偏角ト稱ス.**

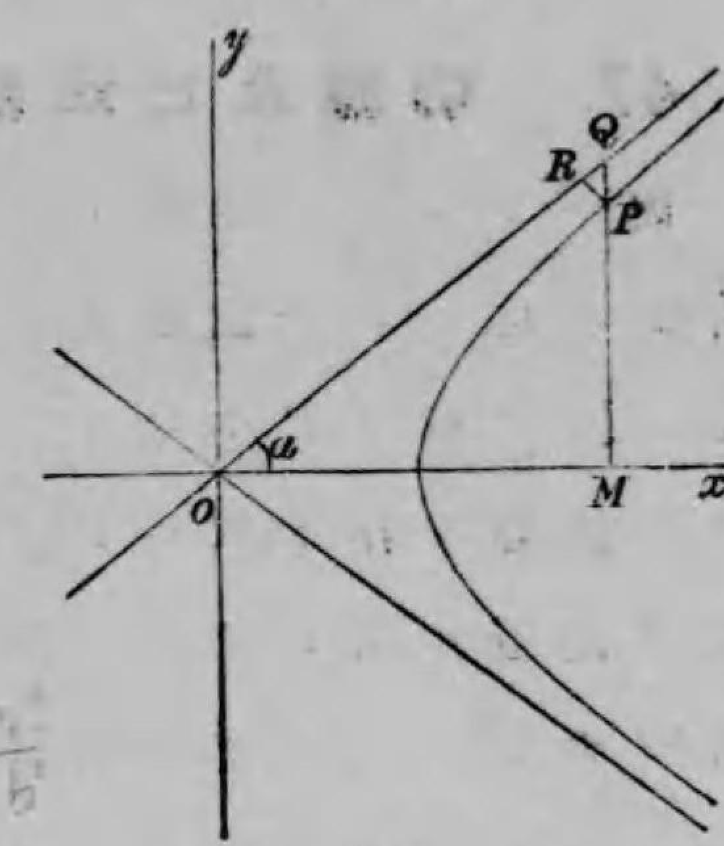
最後ニ(3)ナル直線ニツイテ更ニソノ性質ヲ調ブベシ. (3)ハ之ヲ一ツニマトメテ書キ直ストキハ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \qquad (4)$$

トナルベク,畢竟(1)ノ右邊ヲ零ト直セルモノナリ. 今曲線上ニ一點 P(x_1, y_1) ヲ取リ, Pヲ過リテ x 軸ニ垂線ヲ引キ,ソノ足ヲMトシ,(4)ト交ハル點ノ中,x 軸ニ對シテPト同ジ側ニアル點ヲQトス. 然ルトキハQノ座標ハ (x_1, y_2)

トスルヲ得ベシ,コヽニ y_2 ノ絶對値ハ即チ $\overline{QM}$ ノ長サナリ. (1)及ビ(4)ヨリ,

第六十四圖



$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=0$$

ヲ得. 邊々相減ズルトキハ,

$$\frac{y_2^2}{b^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

即チ

$$y_2-y_1=\frac{b^2}{y_1+y_2}$$

トナル. 今點Pヲ漸次ニ曲線上ニ於テ原點ヨリ遠ザクレバ y_1+y_2 ハ正又ハ負ノ無限大トナルニヨリ,y_2-y_1 ノ絶對値ハ限リナク減少スベシ. 即チP點ガ遠方ニ行クニ從ヒ線分 $\overline{PQ}$ ノ長サハ限リナク小トナル. 從テ又Pヨリ直線 OQ ニ下セル垂線 $\overline{PR}=\overline{PQ}\cos\alpha$ モ亦限リナク小トナル. 故ニ(4)ナル直線ハ,双曲線上ノ一點ヨリ之ニ至ル距離ガ,點ノ遠方ニ行クニ從テ,限リナク小ニナル如キ性質ヲ有スル直線ナリ. 依テ之ヲ名ケテ双曲線ノ **漸近線** ト云フ. 双曲線ノ式ガ標準形ニテ與ヘラレタルトキハソノ常數項ヲ零トスルコトニヨリ常ニ漸近線ノ式ヲ得. 從テ一ノ双曲線トソノ共軛双曲線トハ常ニ同