算 學 叢 書

初等幾何學作圖不能問題

林 鶴 一 著

陳 懷 書
任 　 誠 譯
趙 仁 壽

商 務 印 書 館 發 行

中華民國廿四年六月廿八日校對

目　次

初等幾何學作圖不能問題

第一章

緒論

(1) 幾何學作圖問題,有性質雖似初等,若可屬於初等範圍中者,而究其解法,困難實甚.古來幾多數學家從事探討者,有下之三題:

I. 立方倍積問題,

求作立方體之一邊,使其體積爲所與立方體之二倍(此題亦名戴羅斯(Delos)問題);

II. 三等分任意角問題;

III. 改圓爲方問題,

求作正方形之一邊,使其面積等於所與之圓之面積.

上列三問題,數千年間之學者絞其腦汁以研究解法,其正當之答案.最近時代始求得之.夫學者何以爲此奮勉不休之研求乎?則以其性質類似初等,以爲其

解法亦屬於初等之範圍,而不知其實際不如是之簡單也.據最近研究之結果,已證明此等問題斷非囿於初等範圍所可得其解答者.其證明須借助於代數,是則古代學者所想像不及者矣.

(2) 余於述此等問題之解釋之先,不得不說明求作幾何圖形時所許用之公法 (Postulate).自歐幾里得 (Euclid) 以來,所許爲作圖公法者,不外次之二項:

第一. 過二點得引一直線;

第二. 以任意一點爲中心,任意之長爲半徑,得畫一圓.

有多數幾何學教科書中,以此等作圖公法列爲三項:

第一. 自任意一點得引直線至他點;

第二. 有限直線得任意延長之;

第三. 以任意一點爲中心,任意之長爲半徑,得畫一圓.

此第三項與前舉之第二項同,第一及第二兩項包含於前之第一項中,余所著新撰幾何學教科書,亦係如此.

如此規定,實予吾人以一種之束縛.所謂不能作圖

之問題,乃在此限制下不能作圖之謂.若一旦取消限制,則不能者無不能矣.即任意角之三等分,亦甚易事也.且應用此種公法,亦非可適用至無限次數;因次數至於無限,則解釋失其精密,作圖仍未見其可能也

此後本書所謂能否作圖,悉從此限制以立論.故若漠視此限制而漫然主張作圖之可能,其立足點已大異乎吾人,固可不必置辯.即於此限制下,凡已經證明不能作圖之問題,猶欲強索其解答,且不能指摘吾人不能作圖之證明爲非者,實亦可笑之至也.

第 二 章

幾何學之作用與代數學之運算

(3) 玆先揭一題,以示用代數的方法解釋幾何問題之例.

例題. 延長已知直線,自 A 向 B,於其上作 M 點.

令 $$BM^2=AM\cdot AB.$$

假定 M 已經求得,以 x 表 BM,以 a 表 AB,則 x 必滿足於次方程式

$$x^2=(a+x)a,\ 即\ x^2-ax-a^2=0.$$

解之得 $$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}.$$

根號前之負號,將使 x 為負數,故可棄而不用.

依此表明 x 之值之代數式,得為 BM 之幾何的作圖如次:

自 A 引 $AC\perp AB$,令 AC 等於 AB 之半,聯結 BC,則

$$BC=\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}.$$

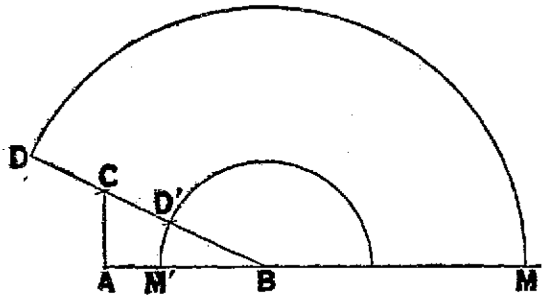

圖 1

延長BC,於其上求D點,使$CD=\frac{a}{2}$,則$BD=x$爲所求之長,故以B爲中心,以BD爲半徑作圓,與直線AB交於B側之點,即所求之M也.

(注意) 設取複符號中之負號,則M當落於B之他側,其法當於CD線上C之他側求D',令$CD'=CD$,然後以B爲中心,BD'爲半徑作圓,與AB相交,則於BA之間得M'點.由此得定理如下:

定理　　於一般二次方程式

$$x^2-ax\pm b^2=0$$

中,a,b及x皆表明線分之長,且$\frac{a^2}{4}\mp b^2\geqq 0$,則適合於此方程式之$x$,即$\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}\mp b^2}$可以作圖

(4) 一切幾何學上所處理之量,不外線,面及體三種;即不外線分之長,面積及體積三種.廣濶之面,既由若干面單位所積成,而所謂面單位者,實即以線單位爲一邊之正方形耳;故線爲一次元,面爲二次元.同理知體爲三次元,而於幾何的量與量之間所有代數的關係,皆可作線分之長之代數的關係觀.

以代數式表明線分之長之關係時,其各項之元數卽以組成各項之線單位之數而定;例如 a,b 及 c 皆表線分之長,則 a^3 及 ab^2 皆爲三次元,而 $\frac{a^2b}{c}$ 則爲二次元.若代數式中有 $\frac{a^5b^3}{c^6}$ 項,分母子分別言之,毫不含有幾何的意味;然論其全體,則大有意味存焉.如 $\frac{a^3}{c^3}\cdot\frac{b^3}{c^3}\cdot a^2$ 項中,前二因子所表僅爲 a^3 與 c^3 或 b^3 與 c^3 之比,可作一種單純之數論,而 a^2 則表明面積;故 $\frac{a^3}{c^3}\cdot\frac{b^3}{c^3}\cdot a^2$ 爲二次元.總之,代數式所有各項不必一一皆含有幾何的意義;但注意其項爲若干線單位組合而成,則該項爲某次元自可確定.於是有次揭之重要定理:

定理 線分之長之關係,苟具有代數式之形,式中各項若不皆爲同次元,則此代數式不含有幾何學的

意味.

此定理本身已甚明瞭,毋庸另行證明.

例如方程式　$x^2-ax+b^2=0$中,所有文字a,b及x所表皆爲線分之長,其各項皆爲二次,故此式具有幾何的意義;但方程式若爲$x^2-ax+c=0$,則a,b及x雖所表皆爲線分之長,其式則毫無意義之可言也.

代數式爲同次各項所組成,其式卽謂之同次式;如$\frac{a^2}{4}-b^2$之兩項,同爲二次元,故其式爲二次式.

(注意)　計算某項爲某次元時,於不名數不生關係.

於是復有次述之定理,

定理.　由一個或二個以上已知線分之長,依幾何的方法所可求得之量,卽由作圖所可求得之量,以線分之長,面積及體積爲限.

卽除二次元及三次元外,一切皆不能作圖也.

所謂求作一線分之長x適合於二次方程式者,設a爲n次,則b必爲$n+1$次,c必爲$n+2$次,因必滿足此條件,$\frac{b}{a}$始可爲一次元,$\frac{c}{a}$始可爲二次元.由此

$$x=\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$$

始得備具幾何的意味,故又得定理如次:

定理. 設$\frac{b}{a}$爲一次元,$\frac{c}{a}$爲二次元,而均得以其他一個或二個以上已知線分之長作成者,則適合於二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之 x, 亦得以最初所知一個或二個以上線分之長作出.

(注意) a,b 及 c 三者雖不能個別作圖,但求$\frac{b}{a}$及$\frac{c}{a}$能作圖即得.

幾何學問題僅由幾何學的狀態移轉於代數學的狀態而未受代數學的變化時,各項固必同次,且不可高至四次以上,因四次以上之項全無幾何的意味也.

但自幾何的狀態移轉於代數的狀態後,因欲去分母或根號而施行代數的變化時,常發生四次以上之項,蓋因受非幾何的代數變化不得不然.然無論如何變化,其式既由同次項所組成,結果必仍爲同次,雖高至四次以上,所表仍不失幾何的意味也.

(5) 解一切作圖問題時,欲決定所求之圖形,須求得適合於此圖形之點,而點之位置,則由線分之長所決定者.

例如三等分 AOB 角時,但求得分線中一點,C 與 OA 之距離 CM 及 C 點與 A 之距離即得.故由幾何的狀態

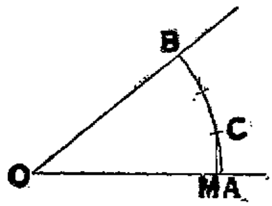

圖 2

變爲代數的狀態時,其中未知數所表明者卽用以決定此點之線分之長;而以幾何的方法決定某點云云者,卽決定此點必需之線分之長已經決定之謂也.

吾人今後決定作圖問題之能否,恆着眼於以決定某點所要線分之長爲根之代數方程式;因以幾何的方法解各種作圖問題時,從無一般之法則.故欲以幾何的手段決定作圖之能不能,目的實難達到,而一經變爲代數的狀態之後,則研究之方便自較普通也.

如前所述幾何的作圖,不外以引直線及畫圓決定某點,故第一可以研究者,以此項幾何的作用變爲代數的狀態時究屬如何;換言之,由若干直線與圓決定某點時所必要之線分之長與旣知之線分之長,究有若何關係,爲亟須研究者也.

(6)　今假設一直線以代數的方法表明其位置時,則得方程式如次

$$Ax+By+C=0,\cdots\cdots\cdots(1)$$

x及y爲直線上任意之點之坐標.

所謂此直線可以作圖者,即其中某某二點可以決定之謂;故A,B及C非已知線分之長,即得以已知線分之長作出者,而A與B同為一次元,C則須較高一次.

更假設一直線

$$A'x+B'y+C'=0,\cdots\cdots(2)$$

兩直線交點之坐標,同時滿足(1)(2);故以(1)(2)為聯立方程式解之,即得交點之坐標.此實不外一次聯立方程式之解法實施,得結果如次:

$$x=\frac{BC'-B'C}{AB'-A'B},\qquad y=\frac{CA'-C'A}{AB'-A'B}.$$

以上二式均為一次方程式,其右邊分數之形不含有幾何的意義;但如改書如次,則幾何的意義自明.

$$x=\frac{\dfrac{C'}{B'}-\dfrac{C}{B}}{\dfrac{A}{B}-\dfrac{A'}{B'}},\qquad y=\frac{\dfrac{C}{A}-\dfrac{C'}{A'}}{\dfrac{B'}{A'}-\dfrac{B}{A}}.$$

由此得定理如次:

定理. 凡點得以二直線交點決定者,則決定此點時所要線分之長,恆為以既知線分之長或由其間接作成者為係數之一次方程式之根.

(7) 今又假設二圓,其方程式為

$$A(x^2+y^2)+2Gx+2Fy+C=0, \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$A'(x^2+y^2)+2G'x+2F'y+C'=0. \cdots\cdots\cdots(2)$$

但A比G及F須較低一次,比C項較低二次.A', G', F',及C'亦同.

設此二圓相交,則其交點爲此二圓中之任何一圓[例如(1)]與次之一直線之交點,

$$2(GA'-G'A)x+2(FA'-F'A)y+(A'C-AC')=0. \cdots\cdots(3)$$

爲便利計,令(3)爲

$$Px+Qy+R=0; \cdots\cdots\cdots(4)$$

由(1)與(4)消去y,則得x之二次方程式

$$A(P^2+Q^2)x^2+2(APR+GQ^2-FPQ)x$$
$$+AR^2-2FQR+CQ^2=0. \cdots\cdots\cdots(5)$$

同樣,得關於y之二次方程式

$$A(P^2+Q^2)y^2+2(AQR+FP^2-GPQ)y$$
$$+AR^2-2GPR+CP^2=0 \cdots\cdots\cdots(6).$$

於是(1)與(4)之交點,卽由(5)及(6)之根而定矣.由是得次之定理:

定理. 凡點得以二圓或一圓與一直線之交點決定者,則決定此點時所要線分之長恆爲以已知線分

之長,或由其間接作成者,爲係數之二次方程式之根.

(注意) 因一次方程式爲二次方程式之特殊形式,故今後對於一次方程式除遇特別必要外,均以二次方程式論.

(8) 通常解作圖問題時最後所要之圖形,往往不直接決定而以所與之點及線分之長爲基礎,或引直線,或畫圓,藉以決定若干點或若干線分之長,更以所決定者爲依據,施行同樣之手續,以次達到最後之目的.

今以與點或線分之長爲基礎所作成之圖形謂之第一階作圖,以次遞推於第二階,第三階及第四階;則第一階所得之點,其位置必決定於以所與線分之長爲係數之二次方程式之根所表明者,此爲第一階之長.而第二階求得之點,又必決定於另一二次方程式之根,其係數即等於第一階之長.由此類推,以至若干階,均同是理.

因二次方程式之根,得於其係數施以有理運算及開方一次而求之,故作圖至最終之段階所用以決定圖形之線,必爲所與線分之長經若干次有理運算及開平方之結果.逆言之,於所與線分之長施以若干次

有理運算及開方之手續所求得之長,以第8節所示方法反復應用之;必可作圖也.故得定理如次:

定理. 某點能否作圖,必要而且充分之條件,視用以決定此點之線分之長能否於所與線分之長施行有限次有理運算及開平方而求得之爲斷.

於所與線分之長,施行有限次有理運算及開平方所得之結果,命爲x;則化此x爲有理時可得高次之方程式,其係數卽所與線分之長經若干次有理運算者.故此高次方程式所有各根中,凡能表明線分之長者,均能作圖.故上述之定理,又可重述之如次:

定理. 某線分之長,能否以一線或二線爲基礎而作圖之必要且充分之條件,視所求線分之長能否爲代數方程式之根爲斷(其係數卽於所與線分之長經過若干次有理運算之結果,且可於係數施行有限次有理運算及開平方而算出其根者).

此定理爲決定作圖能否之基本定理,而研究此種方程式,實爲本書主要之目的;惟研究此項問題,須明瞭一般代數的有理整函數之性質,於次章詳言之.今先揭例題二三,以示上述定理之應用;但欲說明例題,須先述次之定理.

(9) 定理. 凡以所知線分之長之一或二爲基礎,卽可作成之二次曲線與另一直線之交點,得不畫出此二次曲線,逕以圓與直線之作圖決定之.

設 $$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

爲二次曲線方程式,

$$Ax+By+C=0$$

爲直線方程式,其交點必同時滿足此兩方程式.而同時滿足此兩方程式之x,y之值,可作爲二次方程式之根以求之;卽於a, b, c, f, g, h及A, B, C施行有理運算及開平方之手續以求之卽得,故不必另畫曲線也.

(10) 例題. 有一定點及一定直線,於他一定直線上求一點,使自該點至此點與此定直線之距離之比爲一定.

A爲定點,a爲定直線,l爲他一定直線,求於l上定一點P,令$\frac{PA}{PM}$等於定值k.

此P點爲與A點及直線a距離之比等於定值k之點之軌跡與定直線l之交點,而此點之軌跡乃二次曲線.試過A點作a之垂直線,以之爲x軸(圖4).以a爲y軸,

令A與原點O之距離等於p,則

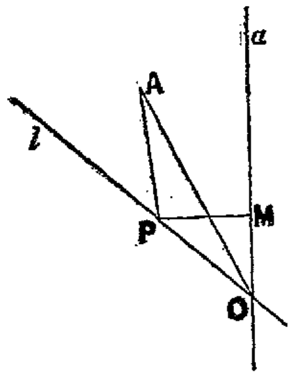

圖 3

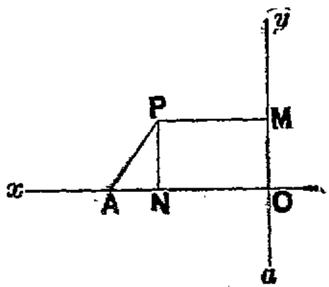

圖 4

$$PA=\sqrt{y^2+(p-x)^2},$$

$$PM=x.$$

因 $$\frac{PA}{PM}=k,$$

∴ $$\frac{\sqrt{y^2+(p-x)^2}}{x}=k;$$

即 $$(1-k^2)x^2+y^2-2px+p^2=0.$$

此方程式在$k<1$時表橢圓,$k=1$時表拋物線,$k>1$時表雙曲線.

P點之軌跡旣爲二次曲線,則與l之交點有二次.就

普通幾何學之範圍內作圖,述之如下

設 a 與 l 之交點為 O (圖 5),

$$\frac{PA}{PM}=k, \qquad \frac{PM}{OP}=k',$$

但 k' 為定數,

$$\frac{PA}{PM}\cdot\frac{PM}{OP}=\frac{PA}{OP}=kk'.$$

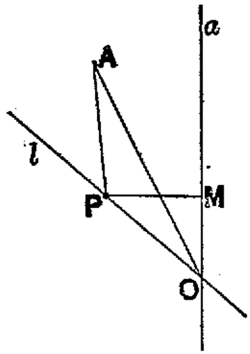

圖 5

O, A 俱為定點,故 P 點與 O, A 距離之比等於 kk'. 作阿勃羅紐斯 (Apollonius) 軌跡,求此軌跡與定直線 l 之交點,即所求之點,而其交點有二.

(注意) 若此問題稍事變更,不於定直線上求 P 點,而於定圓上求 P 點;則 P 可由普通幾何學求得之(參照第 32 節).

(11) 例題. 有二定點,試於定直線上求一點,令此點與二定點距離之和或差等於定值.

A 及 B 為二定點, l 為定直線,欲於 l 上求 P 點,令 $AP+BP=k$, 或 $AP\sim BP=k$.

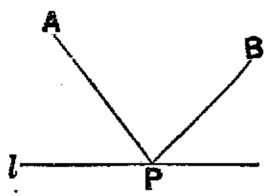

圖 6

與二定點距離之和爲一定之點之軌跡,係以二定點爲焦點之橢圓,若其差爲一定,則其軌跡係二定點爲焦點之雙曲線;故P點乃橢圓或雙曲線與l之交點.故適於此條件之點有二.

此題若就普通幾何學作圖如次:

以A爲中心,以與其和或差相等之長爲半徑,畫圓.

若$AP+BP=k$,而$k \geqq AB$;則B在此圓上或圓內(圖7).又若$AP \sim BP=k$,而$k \leqq AB$;則B在此圓上或圓外(圖8).

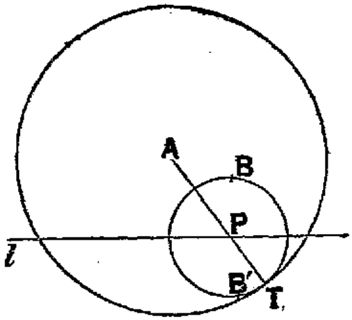

圖 7

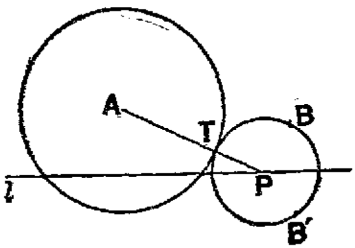

圖 8

求B對於l之對稱點B'.過B及B'作圓,與A圓相切,其切點爲T. AT之延長線與l之交點即所求之P點.

因B, B'爲關於l之對稱點,故l爲BB'之中垂線,故BTB'圓之中心在l上,即P

爲 BTB' 之中心,故 $PA+PB=k$,或 $PA\sim PB=k$. 但過 B, B' 而與 A 相切之圓有二,故有二解.

第 三 章

既約及未約代數的有理整函數

(12) 設n次整函數

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

之各項係數$a_0,a_1,a_2\cdots a_n$,皆爲整數,因之a_0非0;故求$f(x)=0$之根時,得以a_0等於1.因以a_0^{n-1}乘上式之兩邊,則得

$$a_0^{n-1}f(x)=(a_0x)^n+a_1(a_0x)^{n-1}+a_2a_0(a_0x)^{n-2}+\cdots$$
$$+a_{n-1}a_0^{n-2}(a_0x)+a_na_0^{n-1}.$$

故若以$y=a_0x$, $b_1=a_1$, $b_2=a_2a_0$, $b_3=a_3a_0^2,\cdots\cdots$, $b_{n-1}=a_{n-1}a_0^{n-2}$, $b_n=a_na_0^{n-1}$;則

$$\phi(y)=y^n+b_1y^{n-1}+b_2y^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-1}y+b_n.$$

但$b_1,b_2,b_3\cdots\cdots b_n$皆爲整數.由此求得$\phi(y)=0$之根後,以$a_0$除之,則得$f(x)=0$之根.故吾人欲解$f(x)=0$,恆以$a_0=1$而解之,即改作首項係數爲1之方程式而解之也.

今假定$\phi(y)=0$之一根爲有理數,且命其値爲$\frac{p}{q}$(但p

與q互為素數,且q為正值).以此值代入$\phi(y)=0$而去其分母,則得

$$p^n+b_1p^{n-1}q+b_2p^{n-2}q^2+\cdots+b_{n-1}pq^{n-1}+b_nq^n=0.$$

此式除首項外,各項皆能以q除盡;然首項p^n既不為q之倍數,則等式何由成立?故q不得不為1.由是得次之定理:

定理. 各項係數及絕對項皆為整數,而最高次項之係數又等於1之代數方程式之有理根,即包含於絕對項所有約數加以正負號之各值之內,若以之置換於原方程式而不能滿足之,則此方程式無有理根.

$\phi(y)=0$之有理根之一若為p,則$\phi(y)$能以$y-p$除盡.實行除法,由

$$\phi(y)=(y-p)\phi_1(y)$$

求得$\phi_1(y)$,則

$$\phi_1(y)=y^{n-1}+c_1y^{n-2}+c_2y^{n-3}+\cdots+c_{n-2}y+c_{n-1},$$

但　$c_1=b_1+p,\ c_2=b_2+c_1p,\ c_3=b_3+c_2p,\cdots\cdots,c_{n-1}=b_{n-1}+c_{n-2}p,\ 0=b_n+c_{n-1}p$,皆為整數;故$\phi(y)$與$\phi_1(y)$有同一之形式.

(13) 定義. 以整數或有理數為係數之整函數

$f(x)$，若能分解於二個整函數(其係數亦爲有理數)，即$f(x)$若能分解於$f_1(x)$及$f_2(x)$，則$f(x)$謂之未約代數整函數；否則謂之既約.

判別一整函數爲既約或爲未約，猶之判別一整數爲素數或爲非素數，向無一般之方法；惟就其整係數之形而加以識辨耳.

(注意)　以研究整函數之根之形狀爲目的之時，一切有理係數均可認爲整數.

(14)　高司(Gauss)嘗證明次之定理：

設係數爲整數之整函數，

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

能分解於次之二個整函數，

$$\left.\begin{aligned}\phi(x)&=x^\mu+b_1x^{\mu-1}+b_2x^{\mu-2}+\cdots\cdots+b_{\mu-1}x+b_\mu\\ \psi(x)&=x^\nu+c_1x^{\nu-1}+c_2x^{\nu-2}+\cdots\cdots+c_{\nu-1}x+c_\nu\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

$$(n=\mu+\nu)$$

則有理係數b_i及c_i皆爲整數.

實行$\phi(x)$與$\psi(x)$之乘法，以之與$f(x)$相比較，可得次之關係：

$$\left.\begin{aligned}
a_1&=b_1+c_1,\\
a_2&=b_2+c_1b_1+c_2,\\
a_3&=b_3+c_1b_2+c_2b_1+c_3,\\
a_4&=b_4+c_1b_3+c_2b_2+c_3b_1+c_4,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

以上諸式,右邊各項之添數各與其左邊之添數相等今於 $b_1, b_2\cdots\cdots b_\mu$ 中假定有非整數者,此等係數可表之如下:

$$b_1=\frac{B_1}{B_0},\ b_2=\frac{B_2}{B_0},\ b_3=\frac{B_3}{B_0}\cdots\cdots b_\mu=\frac{B_\mu}{B_0},$$

$$c_1=\frac{C_1}{C_0},\ c_2=\frac{C_2}{C_0},\ c_3=\frac{C_3}{C_0}\cdots\cdots c_\nu=\frac{C_\nu}{C_0}$$

其中 $B_0, B_1, B_2, B_3,\cdots\cdots B_\mu$ 及 $C_0, C_1, C_2, C_3,\cdots\cdots C_\nu$ 皆爲整數,而又不含有全體公共之因數,且假設 $B_0>1$ 但 C_0 或可爲1,因 $c_1, c_2, c_3,\cdots\cdots c_\nu$ 等悉爲整數,亦未可知也.

試於 B_0 之素因數中取其一,命爲 p (若 B_0 爲素數,則 p 卽 B_0 之本身),此 p 不能約盡一切如 B 之數,亦不能約盡一切如 C 之數.於此令 B_h $(h\neq0)$ 爲 p 所不能約盡之 B 之一列中最初之一值,令 C_k 爲 p 所不能約盡之 C 之列

中最初之一値.卽$B_0, B_1, B_2, B_3, \cdots\cdots B_{h-1}$雖皆可爲$p$所約盡,而$B_h$則否,$C_0, C_1, C_2, C_3 \cdots\cdots C_{k-1}$雖皆可爲$p$所約盡而$C_k$則否.而(3)之第$h+k$式

$$a_{h+k}=b_{h+k}+c_1b_{h+k-1}+c_2b_{h+k-2}+c_3b_{h+k-3}+\cdots+c_{k-1}b_{h+1}$$
$$+c_kb_h+c_{k+1}b_{h-1}+\cdots+c_{h+k}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

之諸項之順序,改書之可如次式:

$$a_{h+k}=b_hc_k+b_{h-1}c_{k+1}+b_{h-2}c_{k+2}+\cdots+c_{h+k}+b_{h+1}c_{k-1}$$
$$+b_{h+2}c_{k-2}+b_{h+3}c_{k-3}+\cdots+b_{h+k}.\cdots\cdots(5)$$

(5)之兩邊各乘以B_0C_0,則得

$$B_0C_0a_{h+k}=B_hC_k+B_{h-1}C_{k+1}+B_{h-2}C_{k+2}+\cdots+B_0C_{h+k}$$
$$+B_{h+1}C_{k-1}+B_{h+2}C_{k-2}+\cdots+B_{h+k}C_0$$

此式之左邊之a_{h+k}及C_0皆爲整數,B_0又爲p可除盡之整數;其右邊第一列除最初之項B_hC_k外,皆爲p可除盡之整數;故B_hC_k亦必爲p可除盡者.然p爲素數,無論B_h或C_k皆不能以p單獨除盡.今乃欲除盡B_hC_k,是明爲不可能之事實.如欲其能,必與假定相反,故$b_1, b_2, b_3, \cdots b_\mu$等一切皆爲整數.

(15) 以上述定理爲基礎,愛森因太(Eisentein)又嘗證明一定理如次.此實決定整函數爲既約或未約時最重要之定理.

定理. 設n次整函數

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之係數$a_1,a_2,a_3,\cdots a_{n-1},a_n$能以素數$p$除盡,而$a_n$不能以$p^2$除盡;則$f(x)$爲既約.

(注意) 0亦作p可除盡論.

假定$f(x)$能分解於$\phi(x)$及$\psi(x)$,卽

$$f(x)=\phi(x)\cdot\psi(x).$$

但
$$\left.\begin{aligned}\phi(x)&=x^\mu+b_1x^{\mu-1}+b_2x^{\mu-2}+\cdots\cdots+b_{\mu-1}x+b_\mu\\ \psi(x)&=x^\nu+c_1x^{\nu-1}+c_2x^{\nu-2}+\cdots\cdots+c_{\nu-1}x+c_\nu\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

$$(\mu+\nu=n)$$

依高斯定理b及c皆爲整數.實行乘法,比較係數,得次之一組關係式:

$$\left.\begin{aligned}a_n&=b_\mu c_\nu,\\ a_{n-1}&=b_\mu c_{\nu-1}+b_{\mu-1}c_\nu,\\ a_{n-2}&=b_\mu c_{\nu-2}+b_{\mu-1}c_{\mu-1}+b_{\mu-2}c_\nu,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_\nu&=b_\mu c_{\nu-\mu}+b_{\mu-1}c_{\nu-\mu+1}+\cdots\cdots+b_1c_{\nu-1}+c_\nu\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(3)$$

以上諸式,係以$\nu>\mu$作成者;但卽有時$\nu\leqq\mu$,祇須設

c_0 爲 1, 而以添數爲負者, 亦概作 0 觀, 則上之等式均成立.

由定理之前提, 知 a_n 能爲 p 除盡, 不能爲 p^2 除盡, 而 p 又爲素數; 故 (3) 之第一等式 b_μ 與 c_ν 二者之中, 必有其一能爲 p 除盡而其他則否者. 今假定 b_μ 能爲 p 除盡而 c_ν 則否, 更依定理, 前提 a_{n-1} 能爲 p 除盡, 故於第二等式中, 知 $b_{\mu-1}$ 亦必爲 p 所除盡. 如此逐式推論, 可知 b_μ $b_{\mu-1}$, $b_{\mu-2}$,……, b_1 必皆爲 p 所除盡. 然依定理之前提, c_ν 亦能爲 p 所除盡; 故於 (3) 之最後一式, 知 c_ν 亦必爲 p 所除盡. 此則與上之假定相反, 故知 (2) 之分解爲不可能, 即假定 c_ν 能爲 p 所除盡, b_μ 不能爲 p 所除盡. 其結論亦同, 故知 $f(x)$ 爲既約整函數.

例如 x^5-4x-2, 可望而知爲既約函數.

(16) 奈脫 (Netto) 復擴張前節定理, 作種種定理, 今揭其一二如次.

定理. 具有整係數之 n 次整函數

$$f(x)=x^n+\gamma_1px^{n-1}+\gamma_2px^{n-2}+\cdots\cdots+\gamma^0_{n-k-1}px^{k+1}$$
$$+\gamma_{n-k}p^2x^k+\gamma_{n-k+1}p^2x^{k-1}+\cdots\cdots+\gamma_n{}^0p^2(2k<n)\cdots\cdots(1)$$

不含有低於 $k+1$ 次之因子. 但 p 爲素數, γ^0 表示 p 不能除盡之意, 換言之, 設 $f(x)$ 之最高次係數爲 1, 自第二項

至第$n-k$項，係數皆能以p除盡，但第$n-k$項不能以p^2除盡；自第$n-k+1$項至末項，皆能以p^2除盡，惟末項不能以p^3除盡；如是則$f(x)$不含有低於$k+1$次之因子。

先設$f(x)$分解於次之二因子：

$$\left.\begin{aligned}\phi(x)&=a_0x^{\mu}+a_1x^{\mu-1}+\cdots\cdots+a_{\mu-1}x+a_{\mu},\ a_0=1\\ \psi(x)&=b_0x^{\nu}+b_1x^{\nu-1}+\cdots\cdots+b_{\nu-1}x+b_{\nu},\ b_0=1\end{aligned}\ \mu+\nu=n\right\}\cdots\cdots(2)$$

而證明 $a_{\mu}=\alpha^0{}_{\mu}p$ 及 $b_{\nu}=\beta^0{}_{\nu}p$.

依假定，$f(x)=\phi(x)\cdot\psi(x)$.

比較此式兩邊之係數，得次之關係：

$$\left.\begin{aligned}
\gamma^0{}_np^2&=a_{\mu}b_{\nu},\\
\gamma_{n-1}p^2&=a_{\mu}b_{\nu-1}+a_{\mu-1}b_{\nu},\\
\gamma_{n-2}p^2&=a_{\mu}b_{\nu-2}+a_{\mu-1}b_{\nu-1}+a_{\mu-2}b_{\nu},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
\gamma_{n-k}p^2&=a_{\mu}b_{\nu-k}+a_{\mu-1}b_{\nu-k+1}+\cdots\cdots+a_{\mu-k}b_{\nu},\\
\gamma^0{}_{n-k-1}p&=a_{\mu}b_{\nu-k-1}+a_{\mu-1}b_{\nu-k}+\cdots\cdots+a_{\mu-k-1}b_{\nu},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
\gamma_1p&=a_1b_0+a_0b_1,\\
1&=a_0b_0
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3)$$

但式中具有零之添數者,其值均作爲0.

觀察(3)之第一式,知a_μ與b_ν二者之中,非其一能以p^2除盡而其他不能以p除盡,則此二者俱祇能一度以p除盡而不可除至兩度以上.

今先假定a_μ可以p^2除盡,b_ν不可以p除盡,即

$$a_\mu=\alpha_\mu^0\cdot p^2$$
$$b_\nu=\beta_\nu^0.$$

於是因(3)之第二式之左邊及其右邊第一項均能以p^2除盡,則右邊第二項亦必能以p^2除盡之矣;然b_ν不能以p除盡,故$a_{\mu-1}$必能以p^2除盡.再觀(3)之第三式,因其左邊及右邊之第一第二兩項均能以p^2除盡,則第三項亦必能以p^2除盡之矣;然b_ν不能以p除盡,故$a_{\mu-2}$必能以p^2除盡.如是順次推論,於$\mu\leqq k$時,$a_\mu, a_{\mu-1}, a_{\mu-2}, \cdots\cdots a_1, a_0$皆必能以$p^2$除盡;否則由$a_\mu$至$a_{\mu-k}$皆能以$p^2$除盡,以下則能以$p$除盡.故無論如何,結果一切$a$之值必至少有一度能以$p$除盡;然$a_0$爲1不能以$p$除盡,故此種結論爲不合理.

依同樣之推論,即假定b_ν能以p^2除盡,a_μ不能以p除盡,亦得證明其結果爲不合理,故知此種假定爲誤謬

故知a_μ與b_ν俱各能以p除盡,即

$$a_\mu=\alpha_\mu{}^0\cdot p,$$

$$b_\nu=\beta_\nu{}^0\cdot p.$$

再設$f(x)$之二因子$\phi(x)$及$\psi(x)$之係數中,自末項倒數至$\lambda+1$項皆能以p除盡時,即

$$\left.\begin{aligned}&a_\mu=\alpha_\mu{}^0.p,a_{\mu-1}=\alpha_{\mu-1}.p,a_{\mu-2}=\alpha_{\mu-2}.p,\cdots,a_{\mu-\lambda}=\alpha_{\mu-\lambda}.p\\&b_\nu=\beta_\nu{}^0.p,b_{\nu-1}=\beta_{\nu-1}.p,b_{\nu-2}=\beta_{\nu-2}.p\cdots,b_{\nu-\lambda}=\beta_{\nu-\lambda}.p\end{aligned}\right\}\lambda\geqq0$$

諸式成立時,λ若不超過某種一定之界限,則其次之係數(即自末項至$\lambda+2$項之係數$a_{\mu-\lambda-1}$及$b_{\nu-\lambda-1}$)亦得以p除盡.

試證明其理如下:

於$f(x)$中,λ若不超過某種一定之界限,$x^{\lambda+1}$之係數得以p^2除盡,$x^{2\lambda+2}$之係數得以p除盡.

今於此種界限內,所謂$f(x)$之$x^{\lambda+1}$及$x^{2\lambda+2}$之係數者,即於(3)之中以$\lambda+1$及$2\lambda+2$與k置換而得之值.即

$$a_\mu b_{\nu-\lambda-1}+(a_{\mu-1}b_{\nu-\lambda}+\cdots+a_{\mu-\lambda}b_{\nu-1})+a_{\mu-\lambda-1}b_\nu\cdots(4)$$

及 $$(a_\mu b_{\nu-2\lambda-2}+\cdots+a_{\mu-\lambda}b_{\nu-\lambda-2})+a_{\mu-\lambda-1}b_{\nu-\lambda-1}$$
$$+(a_{\mu-\lambda-2}b_{\nu-\lambda}+\cdots+a_{\mu-2\lambda-2}b_\nu)\cdots\cdots(5)$$

而前者能以p^2除盡,後者能以p除盡.

(3)式若寫如(4),(5);則(4)之括弧內之a及b依假定皆能以p除盡.故括弧內所有各項皆能以p^2除盡.故括弧外各項,卽

$$a_\mu b_{\nu-\lambda-1}+a_{\mu-\lambda-1}b_\nu \cdots\cdots(6)$$

亦必能以p^2除盡.又(5)之第一括弧內之a及第二括弧內之b,依假定皆能以p除盡.故括弧外之項,卽

$$a_{\mu-\lambda-1}b_{\nu-\lambda-1} \cdots\cdots(7)$$

亦必能以p除盡.

今以p除(6),得$\alpha_\mu^0 b_{\nu-\lambda-1}+\beta_\nu^0 a_{\mu-\lambda-1}\cdots\cdots(8)$

又以$\alpha_\mu^0\beta_\nu^0$乘(7),得$(\alpha_\mu^0 b_{\nu-\lambda-1})(\beta_\nu^0 a_{\mu-\lambda-1})\cdots\cdots(9)$.

(8)與(9)均能以p除盡,而(8)爲二數之和(9)爲其積.凡二數之和與積均能以p除者,其二數亦得各以p除盡;故$b_{\nu-\lambda-1}$及$a_{\mu-\lambda-1}$各得以p除盡.

然則所謂λ之界限,究何以決定乎?

因$f(x)$之係數中,自末項至$\gamma_{n-k}p^2$項,一切皆能以p^2除盡,故苟能滿足以下條件

$$\begin{cases}\lambda+1\leqq k,\text{ 或 }\lambda\leqq k-1,\\ 2\lambda+2<n,\end{cases}$$

則上述之事項成立.但後之條件可由前之條件及$2k$

$<n$ 滿足之,故 λ 祗須不超過 $k-1$ 之界限,則假設自 a_μ 至 $a_{\mu-\lambda}$ 及自 b_ν 至 $b_{\nu-\lambda}$,一切皆能以 p 除盡時,$a_{\mu-\lambda-1}$ 及 $b_{\nu-\lambda-1}$ 亦必能以 p 除盡.然 a_μ 及 b_ν 業經證明能以 p 除盡,故自 a_μ 至 $a_{\mu-k}$ 及自 b_ν 至 $b_{\nu-k}$ 必皆能以 p 除盡,即以下各式無不可以成立.

$$a_\mu=\alpha_\mu{}^0\cdot p, a_{\mu-1}=\alpha_{\mu-1}\cdot p, a_{\mu-2}=\alpha_{\mu-2}\cdot p, \cdots a_{\mu-k}=\alpha_{\mu-k}p,$$

$b_\nu=\beta_\nu{}^0\cdot p, b_{\nu-1}=\beta_{\nu-1}\cdot p, b_{\nu-4}=\beta_{\nu-2}\cdot p, \cdots b_{\nu-k}=\beta_{\nu-k}\cdot p$, 但此不許含有 a_0 及 b_0,故下列兩條件必須成立.

$$\left.\begin{array}{l}\mu-k\geqq1\\ \nu-k\geqq1\end{array}\right\}\text{即}\left.\begin{array}{l}\mu\geqq k+1\\ \nu\geqq k+1\end{array}\right\}$$

本定理於是乎完全證明.

若 $n=2k+1$,則除 k 次及較低於 k 次數之因數外,一切不能存在,故 $f(x)$ 爲既約.且 $n=2k+2$ 時,則以 $f(x)$ 爲未約而分解之,其兩因數之次數即爲 $k+1$,故又得定理如次:

定理. $$f(x)=x^{2k+1}+\gamma_1px^{2k}+\cdots\cdots+\gamma_k{}^0px^{k+1}+\gamma_{k+1}p^2x^k+\gamma_{k+2}p^2x^{k-1}+\cdots\cdots+\gamma^0{}_{2k+1}p^2$$

爲既約函數.

又　$f(x)=x^{2k+2}+\gamma_1 px^{2k+1}+\cdots\cdots+\gamma^0{}_{k+1}px^{k+1}$

$$+\gamma_{k+2}p^2x^k+\cdots\cdots+\gamma^0{}_{2k+2}p^2$$

設為未約時,其二因數為$k+1$次,其形為

$$x^{k+1}+\alpha_1 px^k+\cdots\cdots+\alpha^0{}_{k+1}p,$$

$$x^{k+1}+\beta_1 px^k+\cdots\cdots+\beta^0{}_{k+1}p,$$

而皆為既約,因愛賽因太定理固已如是云云也.

奈脫更進一步,證明次事:

設整函數　$x^n+\gamma_1 px^{n-1}+\cdots\cdots+\gamma_{n-2k-2}px^{2k+2}$

$$+\gamma_{n-2k-1}p^2x^{2k+1}+\cdots\cdots+\gamma_{n-k-1}p^2x^{k+1}$$

$$+\gamma_{n-k}p^3x^k+\cdots\cdots+\gamma_{n-1}p^3x+\gamma_n{}^0p^3,$$

$$n>3k,$$

為未約時,其一因數之次數不小於$k+1$,他一因數之次數不小於$2k+2$.

應用此理,可知於$n=3k+1$及$n=3k+2$時,此整函數均為既約.反之,則於$n=3k+3$時,此整函數為未約,其一因數為$k+1$,他一因數為$2k+2$次,其形得書之如

$$x^{k+1}+\beta_1 px^k+\cdots\cdots+\beta_k px+\beta_{k+1}{}^0p,$$

及　$x^{2k+2}+\alpha_1 px^{2k+1}+\cdots\cdots+\alpha_{k+1}{}^0px^{k+1}$

$$+\alpha_{k+2}p^2x^k+\cdots\cdots+\alpha^0{}_{2k+2}p^2.$$

依愛賽因太定理,知前一因數為既約;至後一因數

若爲未約,則又可分解爲二因數,其次數爲$k+1$,且均爲既約.

依此得順次擴張之,固不以上述者爲限也.奈脫又由其他見地,擴張愛賽因太定理,另得定理若干.柯尼斯拜格(Königsberger)亦有同樣之工作,茲均無暇述及矣.

(17)　二個具有整係數之整函數$f(x)$及$F(x)$之最大公約數,依高司定理,其係數爲整數;故$f(x)$若爲既約,則$F(x)$得以$f(x)$除盡,或$F(x)$與$f(x)$互爲素數,即兩者之間無共通根.由是得次之定理:

定理.　設既約整函數$f(x)$與$F(x)$有共通之根一,則$F(x)$得以$f(x)$除盡,而$f(x)$一切之根均得爲$F(x)$之根.

(18)　上文所謂既約及未約兩名詞,均含有最普通之意味.然即於此種最普通解釋之下,處理既約整函數;詳言之,處理不能分解於具有有理係數之二個或三個以上因數(因數均爲整函數)之整函數,其因數之係數設不必定爲有理,則亦可以分解之也.例如x^2+1,在普通範圍內固爲既約,然若許應用$i=\sqrt{-1}$,則亦可以分解如次:

$$x^2+1=(x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1}).$$

故若許用 i, 則 x^2+1 爲未約施有理運算於有理數時,其結果恆爲有理數.同樣,施有理運算於有理數及 i,其結果亦恆爲有理數及 i 之有理數倍之和;且不論用何方法,有理運算之結果無不如是.

又如 x^2-2, 於普通意味之下,雖爲既約;然若許用 $\sqrt{2}$,則亦可分解如次:

$$x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}).$$

故 x^2-2 爲未約,凡施有理運算於有理數與 $\sqrt{2}$ 時,其結果恆爲有理數與 $\sqrt{2}$ 之有理數倍之和, 即除 $\sqrt{-1}$ 及 $\sqrt{2}$ 而以 $\sqrt[3]{5}$ 或其他無理數代用之,其結果亦相同.

如此於任意規定之數之範圍內,用任何方法實施有理運算.結果仍不出該數範圍,則該數範圍謂之有理範圍(Domain of rationality).例如僅於有理數施以有理運算時,其結果恆爲有理數;故有理數自成一有理範圍.又於有理數及 $\sqrt{-1}$ 施以有理運算時,其結果恆爲有理數及 $\sqrt{-1}$ 之有理數倍之和;故有理數與 $\sqrt{-1}$ 亦形成一有理範圍.推之有理數與 $\sqrt{2}$ 或其他無理數,無不如是.

如此於一定有理範圍內,加入一數(例如無理數等)

而另成一有理範圍,此之謂某數之"添加"(Adjunction).

函數x^4-8x^3-8x-8於有理數之有理範圍內為既約;然因$\sqrt{3}$之添加,則為未約.即

$$x^4-8x^3-8x-8=[x^2-4x-2+2\sqrt{3}(x+1)][x^2-4x-2-2\sqrt{3}(x+1)].$$

又整函數x^2-2於有理數及$\sqrt{2}$之有理範圍內為未約.其理亦同.

又如整函數x^4-2x^2+2,於有理範圍內為既約,即添加$\sqrt{2}$仍為既約,然若有$\sqrt{2+2\sqrt{2}}$,則為未約矣;即

$$x^4-2x^2+2=(x^2-\sqrt{2+2\sqrt{2}}\cdot x+\sqrt{2})(x^2+\sqrt{2+2\sqrt{2}}\cdot x+\sqrt{2})$$

觀此例,可知所添加者不僅限於一無理數,且可添加無理數至一個以上;如上例,以有理數及$\sqrt{2}$及$\sqrt{2+2\sqrt{2}}$三者合成一有理範圍,亦無不可.於如此定義下,得次之定理:

定理. 設整函數$f(x)$及$F(x)$之係數屬於同一之有理範圍,$f(x)$其範圍內為既約,且$f(x)$與$F(x)$有一共通根,則$F(x)$得以$f(x)$除盡.

此卽前述定理之一般形式,依歐几里得(Euclidian)之最大公約數求法(卽互除法),可以證明此理.

(19) 關於可以作圖之線分之長,於第8節所得結果加入有理範圍之名詞,得改述之如次:

定理. 凡表示線分之長之可以作圖者,必爲於已知數(表已知線分之長之數)範圍內順次添加某一列平方根數所得有理範圍中之一數.

試設一有理範圍於此,而添加一平方根數如$\sqrt{\theta}$者,另作一有理範圍時,則屬於後者之數x必具有$\dfrac{a+b\sqrt{\theta}}{c+d\sqrt{\theta}}$之形;但$a,b,c$及$d$均屬於$\sqrt{\theta}$未曾添加之,有理範圍之數.設以此分母有理化之,則

$$x=y+z\sqrt{\theta},$$

此時

$$y=\frac{ac+bd\theta}{c^2-d^2\theta},$$

$$z=\frac{bc-ad}{c^2-d^2\theta}.$$

換言之,y與z均屬於$\sqrt{\theta}$未曾添加之有理範圍之數,而$c^2-d^2\theta\neq 0$. 因$c^2-d^2\theta$若等於0,則$\sqrt{\theta}=\sqrt{\dfrac{c^2}{d^2}}=\dfrac{c}{d}$將

理範圍,與假定相反;故$c^2-d^2\theta$不等於0.

最後設可以作圖之數x爲二次方程式

$$f(x)=x^2-2yx+(y^2-\theta z^2)=0$$

之根(任何二次方程式皆可書作此形,因二次方程式之根必爲$y\pm z\sqrt{\theta}$也),但y,z及θ皆由既定可以作圖之數所結合而成,更設y,z及θ所屬有理範圍爲於其前一有理範圍中添加$\sqrt{\theta_1}$而得者,則

$$f(x)=\phi(x)+\sqrt{\theta_1}\psi(x)=0.$$

上式$\phi(x)$爲x之二次式,$\psi(x)$爲x之一次式,而$\phi(x)$及$\psi(x)$之係數則屬於y,z及θ所屬有理範圍之前之有理範圍內者.此方程式之兩邊乘以$\phi(x)-\sqrt{\theta_1}\phi(x)$而有理化之,則得

$$f_1(x)=[\phi(x)]^2-\theta_1[\psi(x)]^2=0.$$

此關於x之四次方程式,其中不含有$\sqrt{\theta_1}$;然在添加$\sqrt{\theta_1}$之前,已有$\sqrt{\theta_2}$之添加含於其內,故

$$f_1(x)=\phi_1(x)+\sqrt{\theta_2}\psi_1(x)=0.$$

此式$\phi_1(x)$爲x之四次式,$\psi_1(x)$爲x之三次或二次以下之式.更於此方程式兩邊乘以$\phi_1(x)-\sqrt{\theta_2}\psi_1(x)$而有理化之,則得

$$f_2(x)=[\phi_1(x)]^2-\theta_2[\psi_1(x))]^2=0.$$

此爲八次方程式,其中已不含有$\sqrt{\theta_2}$矣.

如此循序進行,以所添加之平方根數逐漸有理化之,可達到次述之定理:

定理. 凡表示可以作圖之數x,必爲以曾施有理運算於已知數所得結果爲係數之方程式之根,而此代數方程式之次數爲2之冪數.

(注意)此定理之逆,未必恆能成立.

第四章

既約三次方程式及其幾何的意味

(20) 今於本章內仍適用普通意義解釋既約及未約兩名詞,因以證明既約三次方程式不屬於第8節或第 9 節所論方程式之一類(卽不屬於能以施有限回之有理運算於方程式係數之結果,因而算出其根者之一類),并示其幾何的應用爲何如.

一切三次方程式可不用開平方手續使之變形如下:

$$x^3+ax=b.$$

具有此形之既約三次方程式,雖施以有限回之有理運算而仍不可解,倘能證明之,則得矣.

設 x_1, x_2, x_3 爲上述三次方程式之三根,則

$$x_1+x_2+x_3=0.$$

於此三根,任定一根(假定爲 x_1)爲對於方程式之係數僅僅施以有理運算及開平方而得者,則最後添加之平方根數 $\sqrt{\theta}$ 可以次式表之:

$$x_1=y+z\sqrt{\theta},\quad z\neq 0$$

但y及z為$\sqrt{\theta}$未曾添加以前之有理範圍內所有之數.以此x_1之值代入三次方程式,則方程式可改書如次:

$$A+B\sqrt{\theta}=0;$$

但 $$A=y^3+3yz^2\theta+ay-b,$$

$$B=3y^2z+z^3\theta+az,$$

而A與B必皆為0.

若更以$y-z\sqrt{\theta}$代入原方程式,則其形為

$$A-B\sqrt{\theta}=0.$$

故$y-z\sqrt{\theta}$為三次方程式之又一根,不為x_2,必為x_3,姑以x_2名之.

即 $$x_2=y-z\sqrt{\theta}.$$

由是得 $$x_1+x_2=2y,$$

故 $$x_3=-2y.$$

然既約三次方程式無有理之根,故x_3不為有理數,即x_3中必已含有$\sqrt{\theta}$未曾添加以前之無理數,設為$\sqrt{\theta_1}$,

則 $$x_3=y_1+z_1\sqrt{\theta_1}.$$

但y_1及z_1均屬於$\sqrt{\theta_1}$未曾添加之有理範圍之數.今再以x_3代入三次方程式而吟味之,所得結果必與前

同，即 x_1 及 x_2 之中，必有一數具有 $y_1-z_1\sqrt{\theta_1}$ 之形，而他一數則爲 $-2y_1$. 此中既不含有 $\sqrt{\theta}$ 亦不含有 $\sqrt{\theta_1}$，此已與假定反背矣. 故得定理如次：

定理. 具有有理係數之三次方程式不含有有理根時，不得僅僅以有理運算及開平方之結果而解之.

試以此定理應用於幾何問題如次：

(21) 立方倍積問題

以 a 表立方體一邊之長，求作二倍此體積之立方體.

所求立方體一邊之長以 x 表之，則得方程式

$$x^3=2a^3.$$

求 x 能適合於此方程式與否，即可決定作圖之能否；而欲決定此方程式能以有理運算及開平方能否，即由此三次方程式爲既約與否決定之足矣.

方程式之兩邊以 a^3 約之，且令 $z=\dfrac{x}{a}$，則得

$$z^3=2.$$

然由愛賽因太定理，知此方程式爲既約，故 z 不能由作圖得之，則 x 亦不能作圖也明矣.

(22) 圓周七等分及九等分之不能.

圓周之 $\dfrac{1}{7}$ 之弧所對之中心角爲 $\dfrac{2}{7}\pi$. 若能作其角，則

能作 $\cos\frac{2}{7}\pi$. 逆而言之,若能作 $\cos\frac{2}{7}\pi$, 則能作 $\frac{2}{7}\pi$ 之角. 故 $\frac{2}{7}\pi$ 角之能作與否,即可定圓周七等分之能否. 故若以 $\cos\frac{2}{7}\pi$ 爲根而得既約三次方程式,則本問題爲不能

令方程式 (1) $x^7-1=0$ 之七根爲

$$\cos\frac{2\pi}{7}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{7},\qquad \cos\frac{4\pi}{7}+i\cdot\sin\frac{4\pi}{7},$$

$$\cos\frac{6\pi}{7}+i\cdot\sin\frac{6\pi}{7},\qquad \cos\frac{8\pi}{7}+i\cdot\sin\frac{8\pi}{7},$$

$$\cos\frac{10\pi}{7}+i\cdot\sin\frac{10\pi}{7},\qquad \cos\frac{12\pi}{7}+i\cdot\sin\frac{12\pi}{7},$$

$$\cos\frac{14\pi}{7}+i\cdot\sin\frac{14\pi}{7}.$$

[此係德摩氏定理 (De moivre's theorem) 之應用.]

因 (1) 之左邊 x^6 之係數爲 0, 故七根之和爲 0. 又因實數等於實數,虛數等於虛數,故

$$0=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}$$
$$+\cos\frac{14\pi}{7};$$

但

$$\cos\frac{4\pi}{7}=-\cos\frac{3\pi}{7},\quad \cos\frac{6\pi}{7}=-\cos\frac{\pi}{7},$$

$$\cos\frac{8\pi}{7}=-\cos\frac{\pi}{7},\quad \cos\frac{10\pi}{7}=-\cos\frac{3\pi}{7},$$

$$\cos\frac{12\pi}{7}=-\cos\frac{5\pi}{7}=\cos\frac{2\pi}{7},\quad \cos\frac{14\pi}{7}=1,$$

$$\therefore\quad 0=2\cos\frac{2\pi}{7}-2\cos\frac{3\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}+1.$$

故
$$\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}=-\frac{1}{2}.$$

又
$$\left(-\cos\frac{3\pi}{7}\right)\left(-\cos\frac{\pi}{7}\right)+\left(-\cos\frac{\pi}{7}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{7}\right)+\left(\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(-\cos\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}-2\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{5\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{2\pi}{7}-2\cos\frac{3\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

又
$$\left(\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(-\cos\frac{3\pi}{7}\right)\left(-\cos\frac{\pi}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)\left(\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+1\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+1\right)$$

$$=\frac{1}{8}.$$

故 $\cos\frac{2\pi}{7}$, $-\cos\frac{3\pi}{7}$, $-\cos\frac{\pi}{7}$ 爲三次方程式

$$y^3+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}=0$$

卽

$$8y^3+4y^2-4y-1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

之根. 令 $x=2y$, 則 (2) 化爲

$$x^3+x^2-2x-1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3) 爲既約方程式,何則? (3) 苟爲未約方程式,則其因數之一必爲一次式,而其係數皆爲整數. 故 (3) 若有有理根,必爲 -1 之因數. 而 -1 之因數 -1 及 $+1$,均不能滿足此方程式,故 (3) 爲既約方程式,故 $\cos\frac{2\pi}{7}$ 不能作圖,故圓周七等分爲不能.

同樣,得證 $2\cos\frac{2\pi}{9}$, $2\cos\frac{4\pi}{9}$ 及 $-2\cos\frac{\pi}{9}$ 爲方程式

$$x^3-3x+1=0$$

之根,故圓周九等分亦爲不能.

(23) 三等分任意角之不能.

設任意角爲 AOB, 以 θ 表之. 以 O 爲中心,以長度單位

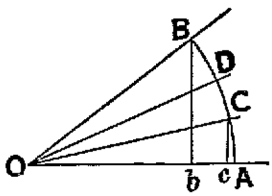

圖 9

爲半徑,畫圓,交角之兩邊於 A 及 B. 設 AB 弧之三等分點爲 C 及 D. 自 B 及 C 至 OA 作垂線,其足爲 b 及 c, 若能定 C 點,則能定 c 點.逆言之,能定 c 點,即能定 C 點.故 C 之能定與否,視 c 之能定與否而定.

因 $Ob=\cos\theta$, 其長已知.

又 $Oc=\cos\frac{\theta}{3}$, 其長未知.

然 $\cos\theta=4\cos^3\frac{\theta}{3}-3\cos\frac{\theta}{3}$,

令 $Ob=a,\ Oc=x$, 則上之方程式爲

$$a=4x^3-3x.\qquad\cdots\cdots(1)$$

與 a 以特別之值,則 (1) 可爲未約;例如,

$$a=0,\quad 即\quad \theta=90°,$$

則 $$x(4x^2-3)=0,$$

而 $$x\neq 0,$$

故 $$4x^2-3=0.$$

是爲二次方程式,故得作其圖.

然使(1)式爲既約,方程式之 a 之值有無數存在,不必其皆能作圖也.試詳論如下:

(1) 之兩邊以2乘之, $2a=8x^3-6x$ ……………………(2),

令 $y=2x$, 則 $2a=y^3-3y$ ……………………(3).

若(3)爲既約方程式,則(2)亦爲既約方程式.

令 $a=\dfrac{m}{n}$, m 與 n 爲無公約數之正整數,且 n 祇有奇素數因數,而無自乘之因數,

代入(3),得
$$2m=ny^3-3ny,$$
$$2mn^2=(ny)^3-3n^2(ny).$$

令 $z=ny$, 則 $2mn^2=z^3-3n^2z.$ ……………………………(4)

若(4)爲既約方程式,則(3)爲既約,(2)亦爲既約.然此三次方程式中,z^3之係數爲1,若爲未約方程式,則必有整數根.換言之,z之整數值能適合於此方程式.

由假設,知 $n=n^0p$, 但 p 爲奇素數.

故
$$2m(n^0)^2p^2=z[z^2-3(n^0)^2p^2].$$

故若爲未約,則z或 $z^2-3(n^0)^2p^2$ 必能以p除盡.若
$$z^2-3(n^0)^2p^2$$
能以p除盡,則z^2能以p除盡,z亦能以p除盡.因之,方程式之右邊能以p^3除盡.然m及z不若有p,故其左邊不能以p^3除盡.故適合於方程式之z之整數值,不能存在.即使此方程式爲既約之值實有無數存在.凡此皆不可以作圖也明矣.

(24) 證明某問題不能作圖之時,當以何線之長爲未知數,純無一定之選擇,且可任意設之;但務期方程式能簡單而已.因若以甲之長爲未知數而證明其不能,則以乙之長爲未知數亦當爲不能.能證明後者之不爲不能,則前者之未知數亦可間接而知其可以作圖也.

(25) 凡可以歸入於旣經證明爲不能作圖問題之一類者,該問題亦當然斷定爲不能,今揭例如次.

例題 AB 爲 O 圓之直徑,P 爲圓上定點,求過 P,引 PR 弦,與 AB 交於 Q,與 O 圓交於 R,而使 QR 等於半徑.

設 $$\angle AOP=\alpha,$$
$$\angle ORP=\angle OPR=\theta;$$

但 α 爲已知之角,θ 爲未知之角,連接 OR.

因 $$QR=OR,$$

$\therefore$ $$\angle RQO=\angle ROQ.$$

然 $$\angle RQO=\alpha+\theta,$$

故 $$(\alpha+\theta)+(\alpha+\theta)+\theta=\pi,$$

故 $$\theta=\frac{\pi-2\alpha}{3}.$$

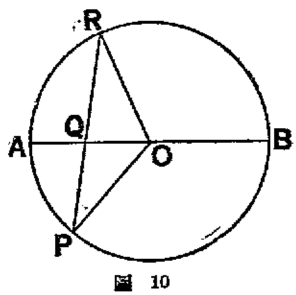

圖 10

故此題若能解答,必能三等分任意角 $\pi-2\alpha$ 而後可;然三等分任意角爲不可能

之事,故此題亦無解法也.

P在圓上既不能作圖矣,若P在圓內或圓外則何如?試進而證明之如次:

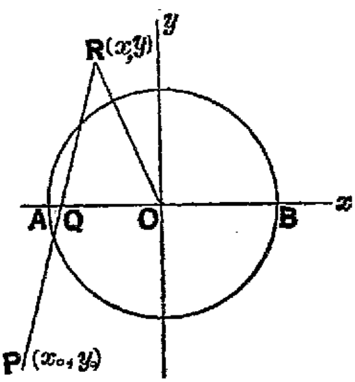

圖 11

過P,引任意直線PQ,則於直線上必有一點如R者,可使$QR=OR$.

今先求R之軌跡,而以此軌跡與圓之交點決定R.

以AB爲x軸,過O點作直線垂直於AB爲y軸.P之坐標爲(x_0, y_0).Q之坐標爲(a, o).

則PQ之方程式爲 $\dfrac{x_0-a}{y_0}=\dfrac{a-x}{-y}$,

故
$$a=\frac{xy_0-x_0y}{y_0-y}.$$

故R之軌跡得以方程式

$$\left(x-\frac{xy_0-x_0y}{y_0-y}\right)^2+y^2=x^2+y^2,$$

即
$$x-\frac{xy_0-x_0y}{y_0-y}=\pm x,$$

即 $$-xy+x_0y=\pm x(y_0-y)\cdots\cdots(1)$$

表之.於右邊複號中,取其+號,則

$$-xy+x_0y=xy_0-xy$$

即 $$x_0y=xy_0;\cdots\cdots(2)$$

是爲連結原點O與P點之直線之方程式.此直線上之點能滿足於上之條件,固不待言;即此直線與圓之交點能適合於本題也亦甚明瞭.

次於複號中取其一號,則

$$x_0y=-xy_0+2xy,$$

即 $$2xy=x_0y+xy_0;\cdots\cdots(3)$$

是爲通過原點之雙曲線方程式.而圓之方程式爲

$$x^2+y^2=r^2.\cdots\cdots(4)$$

自(3)(4)兩方程式消去y,得

$$x^2+\left(\frac{xy_0}{2x-x_0}\right)^2=r^2\cdots\cdots(5)$$

是爲x之四次方程式.四次方程式之根能否作圖,容俟後章再論.

例題.已知一圓及其一直徑與一切線,求作其他一切線與定直徑及定切線相交,而二交點之距離適平分於此線之切點.

此問題之歸宿,亦關於三等分角之問題.

設O爲所與之圓,AO爲其直徑,BC爲切線,求引APB切線而使AP等於PB.

假定作圖已成,則$\triangle OAB$爲二等邊三角形.

$\angle AOP=\angle BOP,$

然　$\angle BOP=\angle BOC;$

故　$\angle AOP=\angle BOP=\angle BOC.$

由此知$\angle AOC$爲OP, OB所三等分,故此問題爲不能.

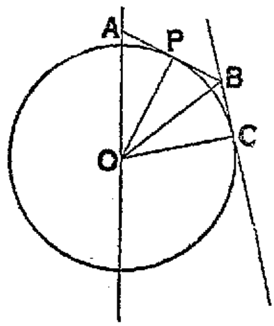

圖 12

[注意]　凡與一圓及二直線,求引此圓之切線而令二直線間之部分適爲切點所平分,亦爲不能之問題也.

(26)　例題.　已知三角形之三角之二等分線之長,求作其形.

設ABC爲三角形,三角之二等分線爲α, β, γ;

則
$$\left.\begin{aligned}\alpha^2&=bc\left\{1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right\}\\ \beta^2&=ac\left\{1-\left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right\}\\ \gamma^2&=ab\left\{1-\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right\}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)$$

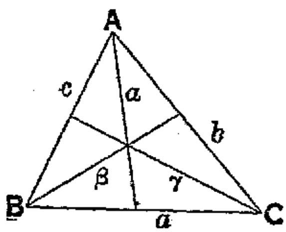

圖 13

此題若證明在特別情形之下，如 $\beta=\gamma$ 時不能作圖，則在一般情形之下，亦可知其爲不能矣．

然 $\beta=\gamma$，則 $b=c$，

故

$$\left.\begin{aligned} a^2&=b^2\left(1-\frac{a^2}{4b^2}\right)\\ \beta^2&=ab\frac{a^2+2ab}{(a+b)^2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

自 (2) 消去 a，得

$$\{8b^2(b^2-a^2)-\beta^2(5b^2-4a^2)\}^2$$
$$=16b^2(b^2-a^2)\{2(b^2-a^2)-\beta^2\}^2\cdots\cdots\cdots(3)$$

令 $x=b^2$，$p=a^2$，$q=\beta^2$，則上式爲

$$16(q-4p)x^3+(128p^2-16pq-9q^2)x^2$$
$$+8p(3q^2-8p^2)x-16p^2q^2=0\cdots\cdots\cdots(4)$$

爲求達吾人之目的，若得適宜選擇 p 與 q 之值，則此方程式或非既約．

假令 $p=1,\quad q=8,$

則 (4) 化爲 $x^3-9x^2+23x-16=0.\cdots\cdots\cdots(5)$

若 (5) 非既約方程式，其根必爲 -16 之因數，而 -16 之因數不外乎

$$\pm1,\quad \pm2,\quad \pm4,\quad \pm8,\quad \pm16$$

諸數．其中任何一數不能滿足方程式 (5)，故 (5) 爲既約

方程式.然方程式(5)至少有一正實根,故知以(5)所表之三角形必可存在,特此題不能作圖耳.

(27) 例題. 已知a, $b\sim c$, $A\sim C$, 求作三角形.設$b-c=l$, $\angle C=\theta$, $\angle C-\angle A=\alpha$, 則$\angle A=\theta-\alpha$.

於CA中取D點,令CD等於l,連結BD,則

$$\angle ADB=\angle ABD=\frac{\pi-(\theta-\alpha)}{2},$$

故 $$\angle CDB=\pi-\frac{\pi-(\theta-\alpha)}{2}$$

$$=\frac{\pi+\theta-\alpha}{2}.$$

又 $$\angle CBD=\angle ADB-\angle ACB$$

$$=\frac{\pi-(\theta-\alpha)}{2}-\theta$$

$$=\frac{\pi-3\theta+\alpha}{2},$$

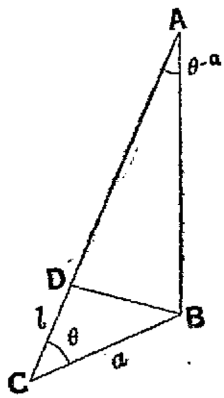

圖 14

故自三角形邊與角之關係得方程式

$$\frac{l}{\sin\frac{\pi-3\theta+\alpha}{2}}=\frac{a}{\sin\frac{\pi+\theta-\alpha}{2}},$$

化之, $$\frac{l}{\cos\frac{3\theta-\alpha}{2}}=\frac{a}{\cos\frac{\theta-\alpha}{2}},$$

卽 $(a+l)\tan^3\frac{\theta}{2}+(3a+l)\cot\frac{\alpha}{2}\tan^2\frac{\theta}{2}-(3a-l)\tan\frac{\theta}{2}$

$$-(a-l)\cot\frac{\alpha}{2}=0.$$

為便利計,令 $\tan\frac{\theta}{2}=x$,則得三次方程式

$$(a+l)x^3+(3a+l)\cot\frac{\alpha}{2}x^2-(3a-l)x-(a-l)\cot\frac{\alpha}{2}=0\cdots\cdots(1)$$

而 a, l, α, θ 須滿足次之條件,

$$\left.\begin{array}{l} l<a \\ \theta<\pi-(2\theta-\alpha),\ \text{卽}\ 3\theta<\pi+\alpha. \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

逆言之,滿足(1)及(2) a, l, α, θ 之值若能存在,則三角形可以成立.

故今所欲證明者,滿足(2)之條件而又使(1)為既約方程式之 a, l, α,及 θ 之值可以存在之事也.

設 $a=2l$,則能滿足(2)之中第一條件.再令 $\cot\frac{\alpha}{2}=5$,卽 $\alpha>22°20'$,則(1)變為次形:

$$3x^3+35x^2-5x-5=0.\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

以9乘之,且令 $y=3x$,則得

$$y^3+35y^2-15y-45=0.\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

係數35,15,45皆為5之倍數,而45非25之倍數,故自愛賽因太定理,知(4)為既約方程式.因之知(3)為既約方

程式，而(4)之左邊在 $y=0$ 時爲負，$y=1.5$ 時爲正，故 $y<1.5$，$x<\frac{1.5}{3}$，卽 $\tan\frac{\theta}{2}<\frac{1.5}{3}$ 卽 $\theta<53°20'$. 此值滿足(2)之中第二條件，故本問題得以證明.

(28) 已知內心，外心及垂心之位置，求作三角形. 設 I, O 及 H 爲內心，外心及垂心，N 爲九點圓之中心，a, b, c 爲三邊之長，R, r 爲外接圓及內切圓之半徑；

則 $$HN=NO,\quad NI=\tfrac{1}{2}R-r,$$

又 $$OH^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2).\cdots\cdots(1)$$

$$OI^2=R^2-2Rr.\cdots\cdots(2)$$

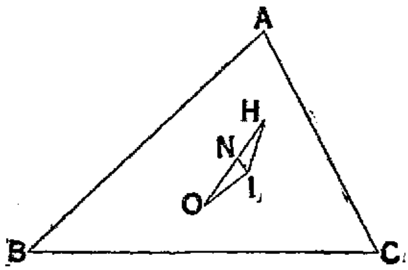

圖 15

由是知內心，外心及垂心之位置爲一定時，苟能作圖，必先解決已知 $R, r, a^2+b^2+c^2$ 時能否作圖，故欲解決本題當先證明次題之不能作圖.

已知 $R, r, a^2+b^2+c^2$，求作三角形.

令Δ爲三角形之面積,則

$$R=\frac{abc}{4\Delta},\cdots\cdots(3)$$

$$r=\frac{\Delta}{s};\cdots\cdots(4)$$

但 $$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c),$$

(3)與(4)相乘,

$$Rr=\frac{abc}{4s},$$

故 $$4Rr=\frac{abc}{s}.\cdots\cdots(5)$$

又 $$r^2=\frac{\Delta^2}{s^2}=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$$

$$=-s^2+(bc+ca+ab)-\frac{abc}{s},\cdots\cdots(6)$$

(5)(6)相加,

$$4Rr+r^2=-s^2+(bc+ca+ab).\cdots\cdots(7)$$

次令 $a^2+b^2+c^2=k^2$

$$k^2=(2s)^2-2(bc+ca+ab)$$

$$=4s^2-2(bc+ca+ab),\cdots\cdots(8)$$

自(7)與(8)得

$$\frac{16Rr+4r^2+k^2}{2}=bc+ca+ab,\cdots\cdots(9)$$

及 $$8Rr+2r^2+k^2=2s^2,$$

故得 $$\sqrt{\frac{8Rr+2r^2+k^2}{2}}=s. \cdots\cdots\cdots(10)$$

又自(5),得

$$4Rrs=abc,$$

故 $$4Rr\sqrt{\frac{8Rr+2r^2+k^2}{2}}=abc. \cdots\cdots\cdots(11)$$

故用(9),(10),(11)知a, b, c為三次方程式

$$x^3-\sqrt{16Rr+4r^2+2k^2}\cdot x^2+\frac{16Rr+4r^2+k^2}{2}x$$

$$-2Rr\sqrt{16Rr+4r^2+2k^2}=0 \cdots\cdots\cdots(12)$$

之三根.

設與R, r, k^2以任意之值而證明其根不能作圖,則此題之不能解也明甚.

今設 $$R=\frac{71}{13}\sqrt{\frac{13}{43}},\ r=\sqrt{\frac{43}{52}},\ k^2=61,$$

則(12)變為

$$x^3-13x^2+54x-71=0,$$

即 $$(x-3)(x-4)(x-6)+1=0 \cdots\cdots\cdots(13)$$

吾予x之值以自0至6之正整數,則此方程左邊之符號變更如次:

x為0時為負,

x為1時為負,

x為2時為負,

x為3時為正,

x為4時為正,

x為5時為負,

x為6時為正.

故此方程式之根若為α,β,γ,且令$\alpha<\beta\lessgtr\gamma$,

則 $$2<\alpha<3,\ 4<\beta<5,\ 5<\gamma<6;$$

故α,β,γ絕非整數,故自20節定理,知此三次方程式為既約,故不能作圖.

[注意] 此三次方程式之三根皆為實數,其中二根之和大於其他一根,故由上述之事項,知三角形確可成立,惟不能作圖耳.

例題 求切於相交三直線之最小球面之半徑及中心之位置.

此問題屬於立體幾何學,其不能作圖之故,今姑省略,讀者試自求之.

(29) 所求線分之長,如為四次方程式之根,則不得以方程式之既約與否遽斷其長爲能否作圖(參照第

19節).今試述關於此種問題,判定其能否作圖之必要定理一二如次:

定理. 設具有整係數四次方程式之根均非有理數,但有一根表可以作圖之線分之長,則其他各根所表亦均爲可以作圖之數.

設具有整係數四次方程式

$$ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

所有諸根中,表可以作圖之數者爲 x_1,并假定其形式爲

$$y+z\sqrt{\theta},$$

但 y, z 及 θ 均屬於無理數 $\sqrt{\theta}$ 未曾添加以前之有理範圍(參照第19節).

以此 x_1 之值代入(1),可得次形:

$$A+B\sqrt{\theta}=0,$$

由此知

$$A=0,\quad B=0.$$

故依據20節所論之理,知 $y-z\sqrt{\theta}$ 亦爲(1)之一根,即於(1)之其他三根中可任擇其一使之等於 $y-z\sqrt{\theta}$.設命其值爲 x_2,則

$$x_2=y-z\sqrt{\theta},$$

故(1)之左邊當有如次之因數

$$(x-y-z\sqrt{\theta})(x-y+z\sqrt{\theta}),$$

即

$$x^2-2yx+y^2-\theta z^2.$$

從(1)之左邊去此因數，則可得二次方程式如次：

$$Lx^2+Mx+N=0,$$

且 L, M, N 係與上述之 y, z, θ 屬於同一有理範圍之數，故於此範圍內更添加一平方根另作一有理範圍，則其他二根 x_3 及 x_4 必為屬於此有理範圍之共軛數，故知 x_2, x_3, x_4 均得為可以作圖之線分之長.

定理. 設具有整係數四次方程式之根均非有理數，且其誘導三次方程式(Reducing cubic)為既約，則此四次方程式之根無可以作圖者.

設四次方程式為

$$ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=0,\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

其誘導三次方程式為

$$4a^3t^3-a(ae-4bd+3c^2)t+(ace+2bcd-ad^2-eb^2-c^3)=0,\cdots(2)$$

則(1)之左邊可分解如次

$$\{ax^2+2(b-M)x+c+2at-N\}$$
$$\{ax^2+2(b+M)x+c+2at+N\}=0;$$

但
$$\left.\begin{aligned} M^2&=b^2-ac+a^2t,\\ MN&=bc-ad+2abt,\\ N^2&=(c+2at)^2-ae.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

今於(1)之諸根中,令適合於方程式

$$ax^2+2(b-M)x+c+2at-N=0$$

之二根爲x_1, x_2. 倘x_1可以作圖,則x_2亦可作圖,故

$$x_1+x_2=-\frac{2}{a}(b-M)$$

亦可作圖,從可知M亦必爲可以作圖者.然由(3),得

$$t=\frac{M^2-b^2+ac}{a^2},$$

故t亦必同爲可以作圖之數,然t爲誘導三次方程式(2)之根,(2)已假定爲既約,依第20節t爲不可作圖,此與以上所論相矛盾,故知x_1所表爲不可以作圖之數.同理知x_2, x_3, x_4無不皆然,故所設四次方程式之任何一根均不可以作圖.

(30) 例題. 一平面上有相交於直角之二直線,自其角之二等分線上一點P引一直線,令所交於二直線間之分部等於定長.

此問題名朴普斯(Pappus)問題,在普通幾何學範圍以內可以作圖.

然P若不在二直線交角之二等分線上,二直線雖成直角,仍不能作圖,證之如次:

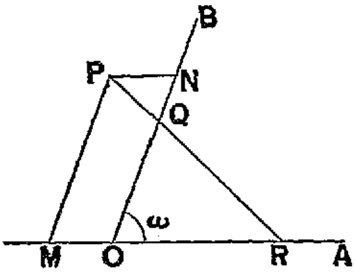

圖 16

OA及OB為所與二直線,其交角為ω, PQR為適於本題條件之一直線, QR等於定長a.

若可引此直線,則OQ及OR之長亦定. OQ及OR之長以y及x表之. PM及PN順序平行於OB及OA,其長以m及n表之.

因 $$\overline{QR}^2=\overline{OQ}^2+\overline{OR}^2-2\overline{OQ}\cdot\overline{OR}\cos\omega,$$

即 $$a^2=x^2+y^2-2xy\cos\omega.\cdots\cdots(1)$$

又 $$MR:PM=OR:OQ,$$

即 $$x+n:m=x:y.\cdots\cdots(2)$$

由(1)及(2)消去x,得四次方程式

$$y^4-2(m-n\cos\omega)y^3+(m^2+n^2+2mn\cos\omega-a^2)y^2$$
$$+2a^2my-a^2m^2=0.\cdots\cdots(3)$$

此四次方程式若得作圖,則在特殊情形時亦可作圖.設 $\omega=90^\circ$, 則方程式(3)化爲

$$y^4-2my^3+(m^2+n^2-a^2)y^2+2a^2my-a^2m^2=0.\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

又令 $m=2,\ n^2=2$, 則得

$$y^4-4y^3+(6-a^2)y^2+4a^2y-4a^2=0.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

又令 $a^2=6$, 則得

$$y^4-4y^3+24y-24=0.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

若此四次方程式有有理根,其根必爲整數而爲絕對項24之因數,卽在

$$\pm1,\quad \pm2,\quad \pm3,\quad \pm4,\quad \pm6,\quad \pm8,\quad \pm12,\quad \pm24$$

之中;然以諸數中任何一數代四次方程式中之 x, 皆不能適合,故此四次方程式無有理根.

其誘導三次方程式爲

$$t^3-3t^2+3t-4=0,$$

欲檢此三次方程式爲既約與否,亦必以絕對項4之因數,卽

$$\pm1,\quad \pm2,\quad \pm4$$

代此三次式中之 t, 視其等於0與否以試之.然任何一數不能令其爲0,故此誘導三次方程式爲既約三次方程式,故四次方程式(6)之根所表,非可以作圖之數.

故此問題爲不能.

(31) 例題. 自三角形 ABC 之頂點 A 至 BC 作垂線 h_a, 自 B 至 CA 作垂線 h_b, 又知 A 角之二等分線 ω_a, 求作三角形 ABC.

如圖　$AD=h_a$,

$BE=h_b$,

$AH=\omega_a$.

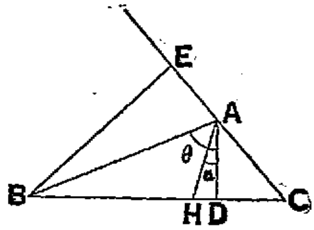

圖 17

因 AHD 爲直角三角形,已知兩邊爲 h_a, ω_a, 故可求得 $\angle HAD$.

令　$$\angle HAD=\alpha,\quad \angle BAD=\theta,$$

因　$$AB=\frac{AD}{\cos\theta},$$

又　$$\angle BAC=2\angle BAH=2(\theta-\alpha),$$

而　$$BE=AB\cdot\sin(2\theta-2\alpha),$$

故　$$BE=\frac{AD}{\cos\theta}\cdot\sin(2\theta-2\alpha). \qquad\cdots\cdots(1)$$

若就特殊情形論之,而令

$$AD=1,\quad BE=2,\quad AH=\frac{\sqrt{5}}{2},$$

則　$$\tan\alpha=\frac{1}{2},$$

由(1),得　$\sin(2\theta-2\alpha)=2\cos\theta,$

卽　$\sin(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha)=\cos\theta.$

兩邊自乘,右邊又以 $\cos^2\theta+\sin^2\theta$ 卽 1 乘之,

$$(\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha)^2(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)^2$$
$$=\cos^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta).$$

兩邊以 $\cos^4\theta\cos^4\alpha$ 除之,

$$(\tan\theta-\tan\alpha)^2(1+\tan\theta\tan\alpha)^2=\frac{1}{\cos^4\alpha}(1+\tan^2\theta).$$

因　$\tan\alpha=\frac{1}{2},$　故 $\cos\alpha=\sqrt{\frac{4}{5}}.$

若令 $\tan\theta=x$,則得四次方程式

$$(2x-1)^2(2+x)^2=25(1+x^2),$$
$$(2x^2+3x-2)^2=25(1+x^2).\text{......}(2)$$

於兩邊各加 $2m(2x^2+3x-2)+m^2$ 而以右邊所得之

$$(25+4m)x^2+6mx+m^2-4m+25$$

爲關於 x 之完全平方數,以確定 m 之值.如是,因 m 適合於等式

$$9m^2-(25+4m)(m^2-4m+25)=0,\text{......}(3)$$

則可得 m 之三值如次:

$$\frac{-5}{2}\sqrt[3]{10},\quad \omega\frac{-5}{2}\sqrt[3]{10},\quad \omega^2\frac{-5}{2}\sqrt[3]{10},$$

但ω爲1之立方虛根.

四次方程式(2)無有理根,因假令$2x=t$,則(2)爲

$$(t^2+3t-2)^2-25(4+t^2)=0,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

故(4)之根若爲有理數,必爲整數而爲其絕對項96之因數,且$4+t^2$應爲完全平方.然適合於不定方程式$4+t^2=s^2$之t與s之值不能存在,故(2)無有理根.然則上所認爲(2)之誘導三次方程式如(3)之左邊者,其爲既約也明甚.

故此問題不能作圖

第五章

關於代數方程式(得以有限回有理運算及開平方而解之之方程式)派脫生之研究及其幾何學的應用

(32) 吾人於第二章及第三章既求得某線分之長能否作圖之必要而又充分之條件,於前章復證明既約三次方程式之根不可作圖以示特例.今將以一般之理解推論以施行有限回有理運算及開平方而解得之代數方程式應備具何種性質,因而從他一方面考究由作圖所決定之點應爲何點.至第 33, 34, 35 各節則大致根據於派脫生(Petersen)之著作而由余加以修正者.

(33) 於茲有

$$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

之數,其外觀雖含有三個平方根數,實則所含爲$\sqrt{2}$及

$\sqrt{3}$二者而已;因$\sqrt{6}$爲$\sqrt{2}$與$\sqrt{3}$之積,對於$\sqrt{2}$及$\sqrt{3}$無獨立之資格.如斯一式中含有若干平方根數,有互爲獨立與否之不同;但所謂互爲獨立者,雖施行有理運算(即加,減,乘,除)及羃法而不能由其一以誘導其他之謂,否則此種有理之關係必存在於其間也.

假定x式中有n個互爲獨立之平方根數.設於此n個平方根數各與以正負兩號,則連同原式共得2^n個之式,命其名爲

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots\cdots\cdots\cdots x_{2^n}$$

此等2^n個之式之值,是否必不相同,殊難猝斷,例如次式

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}$$

中,有$\sqrt{b}$, $\sqrt{a+\sqrt{b}}$及$\sqrt{a-\sqrt{b}}$三個互爲獨立之平方根數,而此式中$\sqrt{b}$前之符號即令變更該式之數值亦毫無所異,故知上式依其兩項根號前所有符號之不同,發生相異之數值祇有四個.

依此例之所示,每有一$\sqrt{b}$得兩個不同數值,可知相異之全數爲2^n個,而此2^n個者,實互爲共軛之數也.

今以此等數$x_1, x_2, x_3,\cdots\cdots x_{2^n}$爲根之函數,設爲$\phi(x)$.

$$\phi(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots\cdots(x-x_{2^n}).$$

即變更其中所有根號之符號，$\phi(x)$ 之全體仍無變化，故 $\phi(x)$ 之係數中無根號之存在，即 $\phi(x)$ 爲具有有理係數之函數.且 $\phi(x)$ 不得不爲既約，因若爲未約，則以其中若干個因數相乘必得有理係數之整函數；然而決無其事也.故得定理如次：

定理. 表可以作圖之線分之長之數爲以2之冪數爲指數之既約方程式之根，且以 2^n 爲指數之既約方程式之一根，若能作圖，則其他諸實根均能作圖，而其根中所有互爲獨立之平方根數不少於 n.

故又得次之定理：

定理. 表所求線分之長之數若爲不以2之冪數爲指數之既約方程式之根，則其長不能作圖.

然則表所求線分之長若爲以2之冪數爲指數之方程式之根，其方程式雖爲既約，有時可以作圖，有時則否，固難以一言而決也.

(34) 設於互爲共軛 2^n 個之數可以作圖時，命 $\sqrt{k}$ 爲最初添加於有理數之有理範圍之平方根數，則 2^n 個之共軛數中皆含有 $\sqrt{k}$，而其半含有 $+\sqrt{k}$，他半含有 $-\sqrt{k}$. 故試取含有 $+\sqrt{k}$ 之數爲根，作整函數，

其形當如次：

$$x^{\frac{\nu}{2}}+(a_1+b_1\sqrt{k})x^{\frac{\nu}{2}-1}+(a_2+b_2\sqrt{k})x^{\frac{\nu}{2}-2}+\cdots\cdots$$

$$+(a_{\frac{\nu}{2}}+b_{\frac{\nu}{2}}\sqrt{k}),$$

但 $\nu=2^n$;

且 $a_1,\ a_2,\cdots\cdots a_{\frac{\nu}{2}}$ 及 $b_1,\ b_2,\cdots\cdots b_{\frac{\nu}{2}}$ 皆爲有理數.更取含有 $-\sqrt{k}$ 之數爲根,作整函數,其形當如次：

$$x^{\frac{\nu}{2}}+(a_1-b_1\sqrt{k})x^{\frac{\nu}{2}-1}+(a_2-b_2\sqrt{k})x^{\frac{\nu}{2}-2}+\cdots\cdots$$

$$+(a_{\frac{\nu}{2}}-b_{\frac{\nu}{2}}\sqrt{k}).$$

故以 ν 卽 2^n 個之數爲根之整函數設爲 $\phi(x)$, 則

$$\phi(x)=(x^{\frac{\nu}{2}}+a_1x^{\frac{\nu}{2}-1}+a_2x^{\frac{\nu}{2}-2}+\cdots\cdots+a_{\frac{\nu}{2}})^2$$

$$-k(b_1x^{\frac{\nu}{2}-1}+b_2x^{\frac{\nu}{2}-2}+\cdots\cdots+b_{\frac{\nu}{2}})^2.$$

此處應注意者,上式第一括弧中之整函數比第二括弧中整函數較高一次.

(35) 通過一點之一羣直線,謂之直線束.各該直線謂之射線,其點謂之頂點.

今將決定與任意直線束中任意之射線相交而可以作其交點者應爲何種之代數曲線,但直線束之頂點不在此曲線上,且假定射線及曲線方程式之係數皆爲整數.

所求曲線之次數必爲 2^n, 已無待言.設直線束之頂點爲坐標之原點,由直角坐標變於極坐標,於方程式中以 $r\cos\theta$, $r\sin\theta$ 代 x, y, 則不拘 θ 之值爲何,所欲決定者卽 r 所表適爲何以作圖之數耳.

令 $$\cos\theta=\frac{m}{p},\qquad \sin\theta=\frac{n}{p};$$

但 p, m, n 表某某整數.以此等分數值代入方程式中之 $\cos\theta$ 及 $\sin\theta$ 而化其係數中所有分數之分母,則方程式可如次形:

$$a+br+cr^2+dr^3+\cdots\cdots+lr^\nu=0,\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但 $\nu=2^n$, 且 $a, b, c, d,\cdots\cdots l$ 皆爲整數而又爲關於 m, n 之 $0, 1, 2, 3,\cdots\cdots\nu$ 次同次式.

此方程式之根 r, 不拘 m, n 之值爲何,所表恆爲能作圖之長,故方程式可改書如次:

$$(A+Br+Cr^2+\cdots\cdots)^2=k(A_1+B_1r+C_1r^2+\cdots\cdots)^2,\cdots\cdots(2)$$

但式中 $A, B, C,\cdots\cdots$ 及 $A_1, B_1, C_1,\cdots\cdots k$ 所表皆整數,且

k 之中必含有 m 及 n. 因 k 之中若不含有 m 及 n, 則曲線不能分解爲二個曲線也. 又 A, B, C,……及 A_1, B_1, C_1,……必順次爲關於 m 及 n 之 0, 1, 2,……次同次式,因非然者,改 (2) 於直角坐標時,將不成爲 2^n 次方程式矣. 然 (1) 與 (2) 不必其完全相同,卽有不含 r 之某因數加入,亦無不可,今命其因數爲 λ, 則

$$\lambda=\frac{A^2-kA_1^2}{a},\ \text{卽}\ a\lambda=A^2-kA_1^2.$$

(2) 又可書之如次:

$$\{(A+\sqrt{k}A_1)+(B+\sqrt{k}B_1)r+(C+\sqrt{k}C_1)r^2+\cdots\}\{(A-\sqrt{k}A_1)+(B-\sqrt{k}B_1)r+(C-\sqrt{k}C_1)r^2+\cdots\cdots\}=0. \quad\cdots\cdots(3)$$

以 $A^2-kA_1^2$ 乘此方程式(以 $A-\sqrt{k}A_1$ 乘前第一因數,以 $A+\sqrt{k}A_1$ 乘第二因數),則

$$\{a\lambda+(M+N\sqrt{k})r+(M_1+N_1\sqrt{k})r^2+\cdots\cdots\}\{a\lambda+(M-N\sqrt{k})r+(M_1-N_1\sqrt{k})r^2+\cdots\cdots\}=0,$$

改書之,當如次:

$$(a\lambda+Mr+M_1r^2+\cdots\cdots)^2=k(Nr+N_1r^2+\cdots\cdots)^2\cdots\cdots(4)$$

此卽 (1) 式以 $a\lambda^2$ 乘得之結果.

比較 (4) 式與 (2) 式, (4) 之右邊括弧內無不含 r 之項,

(2)則不然;故(4)之右邊得以r^2除盡,故含有m及n之k為關於m及n之同次函數,其次數至低亦必為2.

若選擇m及n之值適可使k為零者,(4)之左邊括弧內整式之次數為$\frac{2^n}{2}$,則射線與曲線之交點兩兩相合,於是射線與曲線相切於$\frac{2^n}{2}$點.

故所求之曲線於直線束中至少有兩射線與之切於$\frac{2^n}{2}$點,故頂點之位置若為任意的,則欲作如此二射線,必曲線與任意之直線祇交於二點而後可,故得定理如次:

定理. 除二次曲線外,凡與任意之直線相交,而其交點可以作圖之代數曲數,決不存在.

但代數曲線至二次以上者,苟其方程式之係數與直線之係數有特別關係,其交點亦有時可以作圖;例如三次曲線

$$(Ax+By)^3+ax+by+c=0$$

與直線

$$Ax+By+C=0$$

之交點,可以認為

$$-C^3+ax+by+c=0$$

及 $$Ax+By+C=0$$

之交點,但其交點僅有一個.

(36) 依前述之定理證明次之定理,甚易事也.

定理. 與任意之圓相交,而其交點可以作圖之代數曲線,不爲圓則爲直線.

何則?於任意圓周上任意定一點,依任意之反形率作此圓之反形,則此圓成爲直線.故所求代數曲線之反形設非較二次猶低之代數曲線,則根據前述定理,其交點不能作圖,而凡反形爲二次曲線之代數曲線,不爲圓則爲直線,故所求之曲線不外乎圓與直線也.

(37) 例題. 求作定圓之內接三角形,使其三邊通過三定點.

此爲卡斯鐵龍 (Castillon) 之問題,茲揭其作圖法如次:

A, B, C 爲所與之三點, $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ 爲此三點關於定圓之極線.連結 AA', BB', CC',此三直線必通過一點 O,斯固容易證明者也.

又設 AA' 與 $B'C'$, BB' 與 $C'A'$, CC' 與 $A'B'$ 之交點順序爲 L, M, N. 延長三角形 LMN 之三邊,與圓相交,得 PP', QQ', RR', 則三角形 PQR, 及 $P'Q'R'$ 爲所求之三

角形.

何則?因 QA 適過 R. 若謂不然,設直線 QA 與圓之交點爲 R_1' 且 QA 與 $B'C'$ 之交點爲 Y, 則成調和束線

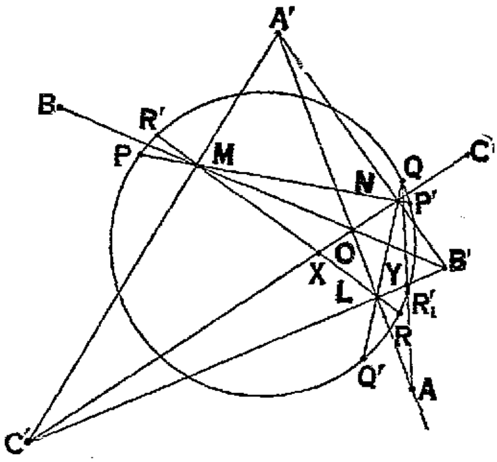

圖 18

$L(QARY)$. 因設 LM 與 CC' 之交點爲 X, 則 $L(QARY)$ $=L(NOXC')$, 而完全四邊形 $MOLC'$ 之對角線 $NOXC'$ 爲調和列點也.

又因 $B'C'$ 爲 A 之極線,

$$\therefore \quad L(QARY)=L(QAR_1'Y).$$

故 R 與 R_1' 一致. 同理,得證明 RP, PQ 通過 B, C 點.三角形 $P'Q'R'$ 得同樣證明之.

今擴張此問題如下:

例題. 求作定圓之內接三角形,令其三邊與三定圓相切.

此題不能作圖,證明如下:

設內接三角形之圓爲 S, 與三角形三邊相切之圓爲 A, B, C, 且設 C 圓在特殊之位置而與 S 圓同心;若併此而不能作圖,則誠不能矣.

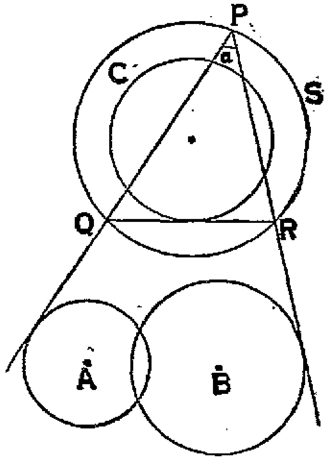

圖 19

假定作圖已成,所求之三角形爲 PQR, 則 QR 邊之長爲一定,角 QPR 亦爲一定,命之爲 α, 故 P 爲二邊切於 A 圓及 B 圓而其大適等於 α 之角之頂點之軌跡與 S 圓之交點,然此軌跡固三次以上之曲線也.

命 PQ 切 A 圓於 V, PR 切 B 圓於 W, 以 AB 爲弦作 $\angle AOB$, 令等於 α 之補角,而定適合於次式之 O 點:

$$AO : BO = AV : BW$$

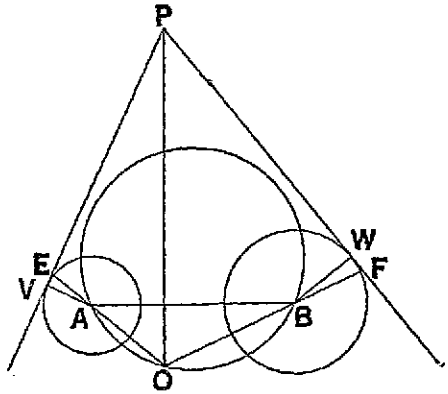

圖 20

延長 OA, OB 交 PV, PW 於 E, F, 連結 EF. 因 O, E, P, F, 爲共圓點,

$$\angle AEV = \angle BFW.$$

又 $$\angle AVE = \angle BWF = \text{直角},$$

故 $$\triangle AEV \backsim \triangle BFW,$$

$\therefore$ $$AE : BF = AV : BW.$$

然由作圖 $$AO : BO = AE : BF,$$

故 $$EF \parallel AB,$$

故 $$\angle OEF = \angle OAB.$$

而 $$\angle OPF = \angle OEF,$$

故 $$\angle OPF = \angle OAB,$$

故 $\angle OPF$ 爲一定,命之爲 β.

次以 O 爲極坐標之原點, OF 爲原線,又令 $OB=a$, $BW=p$, $OP=\rho$, $\angle FOP=\theta$, 則 P 之軌跡可由

$$\frac{\rho\sin\beta}{p}=1+\frac{a}{p}\sin(\theta+\beta) \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

表之.今取 ρ_1 而令 $\rho\rho_1=k^2$, 但 k^2 爲任意之反形率,則

(1) 爲 $$\frac{k^2\sin\beta}{p\rho_1}=1+\frac{a}{p}\sin(\theta+\beta) \cdots\cdots\cdots\cdots (2).$$

此卽以 (ρ_1, θ) 爲坐標之點之軌跡,得表之如次:

$$\frac{l}{\rho_1}=1+\frac{a}{p}\sin(\theta+\beta) \cdots\cdots\cdots\cdots (3).$$

但 $l=\dfrac{k^2\sin\beta}{p}$. (3) 表圓錐曲線而 O 爲其一焦點.故 P 點之軌跡係以圓錐曲線之焦點爲反形之中心,而以 k^2 爲反形率之圓錐曲線之反形.此反形爲四次曲線,不難證明,故不能決定與 S 圓之交點.

(38) 第 36 節派脫生定理所示,全爲任意圓周與任意二次以上曲線(除圓周)之交點不可作圖之事項,若二次曲線方程式係數之間有特殊之關係成立,則曲線縱爲高次,其交點亦得而決定之也.觀於次例可知.

例題. 已知四邊形四角之大及二對角線之長,求作其形.

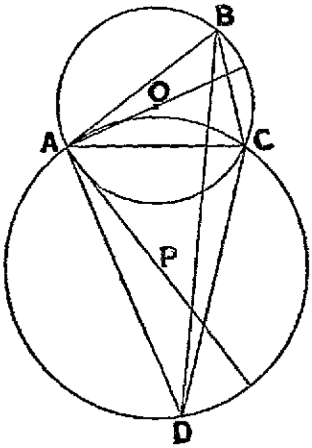

圖 21

設 $ABCD$ 爲所求之四邊形.旣知對角線 AC 及 $\angle B$ 之大,故得作三角形 ABC 之外接圓,其中心爲 O.同理得作三角形 ADC 之外接圓,其中心爲 P.故 $\angle OAP$ 爲定角.命之爲 α.

再令 $AB=\rho$,

$\angle OAB=\theta$,

$AO=a$;

則
$$2a\cos\theta=\rho.\quad\cdots\cdots(1)$$

次令 $AD=\rho'$, $\angle PAD=\theta'$, $AP=b$,

則
$$2b\cos\theta'=\rho'.$$

然
$$\theta+\alpha+\theta'=A,\ \text{即}\ \theta'=A-\alpha-\theta,$$

故
$$\rho'=2b\cos(A-\alpha-\theta).\quad\cdots\cdots(2)$$

又令 $BD=d$, 則

$$d^2=\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos A.$$

由(2)得

$$d^2=\rho^2+\{2b\cos(A-\alpha-\theta)\}^2$$
$$-2\rho\, 2b\cos(A-\alpha-\theta)\cos A \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

若能自方程式(1)與(3)決定ρ, θ則B之位置可定;但(1)爲圓,(3)爲四次曲線,故若係數間無特殊之關係存在,斯B點不可得而定.然此則特殊之關係不存在,欲定B點,當如次圖.

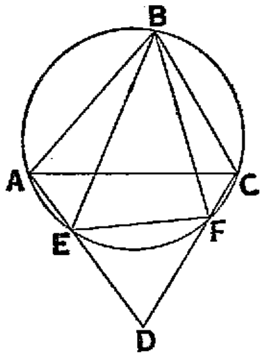

圖 22

以AD, CD與三角形ABC之外接圓之交點爲E及F,則因圓ABC之大爲一定且已知角A之大,故其所對之弦之長亦爲一定.又已知角C之大,故BF之長亦爲一定.

連結CE,則角BCE一定,故$\angle ECF$亦定.由此知EF之長亦爲一定,卽三角形BEF之三邊爲一定,因之得作三角形BEF.既作此三角形後,以EF爲弦作弧,令所函之角等於$\angle D$,此弧與B爲中心BD爲半徑之圓之交點卽D點,連結DE, DF,與圓BEF之交點爲A及C,連結BA, BC,則$ABCD$爲所求之四邊形.

第六章

圓周之等分問題及圓積問題

(89) 何種正多角形可以作圖,即圓周可分為若干等分之問題,在昔早有研究,凡圓周可以分為 2 之冪數及 3, 5 與其若干倍數等分,久為吾人所熟知之事.高斯擴張適於此題之整數範圍,證明圓周可以分於 n 等分之必要而又充分之條件為 n 須以具有 2^m+1 形之素數為因數,且如此之素數不可含有二個以上者.試研究之如次.

研究圓周能否分於 n 等分, n 之範圍可以素數 p 及其冪數 p^α 為限.因 n 若不限於此範圍,則可分解於互為素數之因數.今以此因數為 μ 及 ν,則滿足於次式之整數 a 及 b 恆可求得:

$$1=a\mu-b\nu.$$

故
$$\frac{1}{n}=\frac{1}{\mu\nu}=\frac{a}{\nu}-\frac{b}{\mu}.$$

然則所謂 n 等分者,實卽由 μ 等分與 ν 等分之手續結合而成也.又若 ν 及 μ 不爲素數,可更分解之如前,終必歸於素數或素數之羃數等分之一途;例如 $n=15$, 則因

$$\frac{1}{15}=\frac{2}{3}-\frac{3}{5},$$

故所謂15等分者,實卽 3 等分與 5 等分而已.

又分圓周於 p^{α} 等分之前,必先分之於 p 等分,故僅就 n 爲素數時研究之而已足.研究此事,須先明夫也羅邁(Fermat)之整數定理.

(40) 夫也羅邁定理. 設 p 爲素數, a 爲 p 所不能整除之數,則 $a^{p-1}-1$ 恆可以 p 整除之.

設 μ_1 爲 $1\cdot a$ 能以 p 除盡時之商, ρ_1 爲其餘數; μ_2 爲 $2\cdot a$ 能以 p 除盡時之商, ρ_2 爲其餘數;……則可得次之一列之等式:

$$\begin{gathered}1\cdot a=\mu_1 p+\rho_1\\ 2\cdot a=\mu_2 p+\rho_2\\ 3\cdot a=\mu_3 p+\rho_3\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (p-1)a=\mu_{p-1}p+\rho_{p-1}\end{gathered}$$

以此等諸式邊邊相乘,則爲

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(p-1)a^{p-1}=Mp+\rho_1\rho_2\rho_3\cdots\cdots\rho_{p-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$\rho_1, \rho_2, \rho_3\cdots\cdots, \rho_{p-1}$ 皆大於 0, 小於 p. 今證明此 $p-1$ 個之 ρ 各不相等.

若　$\rho_s=\rho_t,\quad s>t,$

則　$sa-ta=(\mu_s-\mu_t)p,$

卽　$(s-t)a=(\mu_s-\mu_t)p.$

故 p 能除盡 $(s-t)a$. 然 a 不能以 p 除盡,故 p 非除盡 $s-t$ 不可.然無論 s 或 t 皆比 p 小,故 $s-t$ 尤比 p 小,絕不能爲 p 除盡,故 $\rho_s\neq\rho_t$, 故一切之 ρ 皆不相等.

0 與 p 之間,有 $p-1$ 個之整數,而 ρ 之値卽介於 0 與 p 之間,且其數有 $p-1$ 個而又各不相同,則所謂 ρ 者非盡與 $1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots p-1$ 相一致不可.故

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3\cdots\cdots\rho_{p-1}=1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(p-1).\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

故由(1),得

$$\{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(p-1)\}(a^{p-1}-1)=Mp.$$

然 p 爲素數,故 $1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(p-1)$ 不能以 p 除盡,故 p 必除盡 $a^{p-1}-1$, 而夫也羅邁定理,於以證明.

若 $A-B$ 能以 p 除盡,則以 p 除 A 之所餘必與以 p 除 B 之所餘相等,通常以次式表之:

$$A\equiv B(\text{mod. } p).$$

此式謂之等餘式, p 爲等餘式之率. 高司始用此形以表明如斯性質.以此式表上述之定理,當如

$$a^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod.}\ p).$$

(41) 定理. 設滿足等餘式 $a^s\equiv 1(\mathrm{mod.}\ p)$ 之 s 小於 $p-1$, 且爲滿足此等餘式之諸值中最小之一值,則 s 必爲 $p-1$ 之因數.

設 s 不爲 $p-1$ 之因數,則

$$p-1=\sigma s+\rho,\quad 0<\rho<s.$$

由此得 $$a^{p-1}=a^{\sigma s}\times a^{\rho}.$$

然 $$a^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod.}\ p),$$

故 $$a^{\sigma s}\times a^{\rho}\equiv 1(\mathrm{mod.}\ p).$$

又依假設知 $$a^{s}\equiv 1(\mathrm{mod.}\ p),$$

故 $$a^{\rho}\equiv 1(\mathrm{mod.}\ p).$$

然 $\rho<s$, 此則與假定相反,故 s 必爲 $p-1$ 之因數.

定理. 設素數 p 具有 2^h+1 之形, 則

$$h=2^{\mu}.$$

設 s 爲滿足等餘式

$$2^s\equiv 1(\mathrm{mod.}\ p=2^h+1)$$

之最小正整數,因 p 必爲奇數,故與 2 互爲素數. 依前之定理,知 s 必爲 $p-1$ 之因數.

又因 $$p=2^h+1,$$

故 $$2^h<p.$$

又 $$2^s>p,$$

故 $$2^s>2^h,$$

故 $$s>h.$$

又因 $$p=2^h+1,$$

故 h 爲滿足等餘式

$$2^h\equiv-1(\mathrm{mod}.\ p)$$

之最小正整數.

又 $$2^s\equiv1(\mathrm{mod}.\ p),$$

卽 $$2^h2^{s-h}\equiv1(\mathrm{mod}.\ p).$$

然因 $$2^h\equiv-1(\mathrm{mod}.\ p),$$

故 $$2^{s-h}\equiv-1(\mathrm{mod}.\ p).$$

而 h 爲最小之值,故

$$s-h\geqq h,$$

卽 $$s\geqq 2h. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又因 $$2^h\equiv-1(\mathrm{mod}.\ p),$$

故 $$2^h2^h\equiv1(\mathrm{mod}.\ p),$$

卽 $$2^{2h}\equiv1(\mathrm{mod}.\ p).$$

然 s 爲滿足等餘式 $2^s\equiv1$ 之最小值,故

$$2h \geqq s. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)與(2)如欲共同成立,非

$$2h=s$$

不可,卽 h 必為 s 之因數.然 s 為 $p-1$ 卽 2^h 之因數,故 h 為 2^h 之因數,故

$$h=2^\mu.$$

別法. 上述定理得以次之方法簡單證明之:

設 h 為某一奇數可以除盡之數,卽令

$$h=h'(2n+1).$$

則不論 x 之值如何,次式得一般成立:

$$x^{2n+1}=(x+1)(x^{2n}-x^{2n-1}+\cdots\cdots+1).$$

故設 $\qquad x=2^{h'},$

則 $2^{h'(2n+1)}+1$ 卽 2^h+1 必能以 $2^{h'}+1$ 除盡,故 2^h+1 不得為素數,故 h 不得以奇數為因數,故 h 為 2 之羃數.

(42) 應用上述定理解決圓周等分問題如次:

欲研究圓周 p 等分之事項非研究以 $\cos\frac{2\pi}{p}$ 為根之代數方程式不可.

1 之 p 乘根得表之如次:

$$\cos\frac{2k\pi}{p}+i\sin\frac{2k\pi}{p}[k=0,1,2,3\cdots\cdots,p-1],$$

而此等之根之和必等於零,即

$$\sum_{k=0}^{k=p-1}\left[\cos\frac{2k\pi}{p}+i\sin\frac{2k\pi}{p}\right]=0.$$

故
$$\sum_{k=1}^{k=p-1}\left[\cos\frac{2k\pi}{p}+i\sin\frac{2k\pi}{p}\right]=-\left[\cos\frac{2k\pi}{p}+i\sin\frac{2k\pi}{p}\right]k=0$$
$$=-1.\qquad\cdots\cdots\cdots(1)$$

又因
$$\cos\frac{2k\pi}{p}+i\sin\frac{2k\pi}{p}=\cos\left(2\pi-\frac{2k\pi}{p}\right)-i\sin\left(2\pi-\frac{2k\pi}{p}\right)$$
$$=\cos\frac{2\pi(p-k)}{p}-i\sin\frac{2\pi(p-k)}{p}$$
$$=\frac{1}{\cos\frac{2\pi(p-k)}{p}+i\sin\frac{2\pi(p-k)}{p}},$$

1之p乘根之中除去$k=0$外,其初與其後等距離各項互爲逆數.

故設
$$\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}=\epsilon,$$

則1之p乘根之虛數部分得表之如次:

$$\epsilon,\ \epsilon^2,\ \epsilon^3,\cdots\cdots\epsilon^{\frac{p-1}{2}},\ \epsilon^{-\frac{p-1}{2}},\cdots\cdots\epsilon^{-3},\ \epsilon^{-2},\ \epsilon^{-1};$$

但$p-1$爲偶數.

故由(1)得

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}}(\epsilon^k+\epsilon^{-k})=-1,$$

即 $$\left(\epsilon+\frac{1}{\epsilon}\right)+\left(\epsilon^2+\frac{1}{\epsilon^2}\right)+\left(\epsilon^3+\frac{1}{\epsilon^3}\right)+\cdots\cdots$$

$$+\left(\epsilon^{\frac{p-1}{2}}+\epsilon^{\frac{1}{\frac{p-1}{2}}}\right)=-1. \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

今以 $\epsilon+\frac{1}{\epsilon}=y$, 則 $\epsilon^k+\frac{1}{\epsilon^k}$ 所表爲關於 y 之 k 次整函數,故 (2) 爲關於 y 之 $\frac{p-1}{2}$ 次代數方程式.

又 $$y=\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}+\frac{1}{\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}}$$

$$=\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}+\cos\frac{2\pi}{p}-i\sin\frac{2\pi}{p}$$

$$=2\cos\frac{2\pi}{p}.$$

故以 $2\cos\frac{2\pi}{p}$ 爲根之代數方程式之次數爲 $\frac{p-1}{2}$.

故欲作 $2\cos\frac{2\pi}{p}$, 依第 8 節及第 19 節定理, $\frac{p-1}{2}$ 必爲 2 之冪數,即 p 必等於 $p=2^{\lambda+1}+1$. 然 p 爲素數,故由前節之定理, p 必適合於次式:

$$p=2^{2^\mu}+1.$$

由是得定理如次:

定理. 欲分圓周於素數p等分,非$p=2^{2^\mu}+1$不可.此定理仍須有逆之證明,然過使本篇延長,姑且從略.

今於$p=2^{2^\mu}+1$式內,設

$\mu=0$	則	$p=3$	素數
$\mu=1$		$p=5$	素數
$\mu=2$		$p=17$	素數
$\mu=3$		$p=257$	素數
$\mu=4$		$p=65537$	素數

μ等於5, 6及7時,雖已決定p爲非素數;若μ等於8,則p是否爲素數,尚未能決.

自高司以來,對於正十七角形雖已有種種作圖方法,若至二百五十七角形以上,則尚有待於發明也.

(43) 余於本書卷首曾提出三大問題,并於第四章中應用既約三次方程式之性質,證明立方倍積問題及角之三等分問題俱不可能;惟最後問題,即求作正方形之一邊使其面積等於所與圓面積之能否問題,尚未論及,茲特說明此題之解決方法,藉以終結是篇.

設所與圓之直徑爲$d=2r$,其圓周之長爲n,則

$$n=\pi d.$$

更設其面積爲A,則

$$A=\frac{1}{4}\pi d^2=\frac{1}{2}rn,$$

即此圓之面積適與以 n 爲底以 r 爲高之三角形之面積相等,故 n 即 πd. 如能作圖,則問題不難解決.

今若以 d 爲單位,則問題可歸於求作一直線其長適爲含有此單位之 π 倍者,故此題若能解,則 π 必爲以 2 之羃數爲指數之既約代數方程式之根,而其次數則無論如何必先爲代數方程式之根.然 π 不爲代數方程式之根,即爲超越數而非代數的數,業經多數學者證明,故本問題不得以丁字板及圓規得其解決,即任用何種代數曲線均不得而解決之也.

茲特介紹高登 (Gordon) 之 π 爲超越數之證明如次:

(44) 欲證明 π 爲超越數,當先證明 e 爲超越數,故不得不先行證明次之定理:

海密特 (Hermite) 定理.

方程式 $C_0+C_1e+C_2e^2+\cdots\cdots+C_{n-1}e^{n-1}+C_ne^n=0$

不能成立,但 C 皆爲整數.

通常以 $r!$ 爲 r 之階乘,今爲便利計,以 h^r 表之.更令 p 爲素數,而設

$$f(x)=\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\{(1-x)(2-x)\cdots\cdots(n-x)\}^p,$$

展開此式於累乘級數,則得

$$f(x)=\sum_{r=p-1}^{r=np+p-1} c_r x^r$$

$$=\frac{c'x^{p-1}}{(p-1)!}+\frac{c''x^p}{(p-1)!}+\cdots\cdots\pm\frac{x^{np+p-1}}{(p-1)!},$$

故對於一定之 x 及 n, 因使 p 值漸大,則 $f(x)$ 之值漸趨於零,且其眞值級數(以各項絕對值爲項之級數) $\Sigma|c_r x^r|$ 亦必漸趨於零.

設以 h 代 x, 則

$$f(h)=\sum_{r=p-1}^{r=np+p-1} c_r h^r$$

$$=\sum_{r=p-1}^{r=np+p-1} c_r r!$$

而 c_r 之公分母爲 $(p-1)!$, 其分子爲整數.故 r 之值大於 $p-1$ 時, $c_r r!$ 皆爲整數,而 $c_{p-1}(p-1)!$ 之外,一切皆能以 p 除盡.然

$$c_{p-1}(p-1)!=\frac{(n!)^p(p-1)!}{(p-1)!}=(n!)^p,$$

故於 $p>n$ 時,因 p 爲素數,故 $c_{p-1}(p-1)!$ 不能以 p 除盡,由此知 $f(h)$ 亦不能以 p 除盡.

次再以 $k+h$ 代 x, 則

$$f(k+h)=\sum_r c_r(k+h)^r$$

$$=\sum_r c_r' h^r$$

$$=\sum_r c_r' r!$$

又因

$$f(k+h)=(k+h)^{p-1}\cdot\frac{[(1-k-h)(2-k-h)\cdots\cdots(n-k-h)]^p}{(p-1)!},$$

故 k 於 $1, 2, 3, \cdots\cdots n$ 諸值中等於任何一值,則括弧中必有一因數爲 $-h$,故若以上式展開於 h 之級數,其最低次數爲 p. 因此知

$$f(k+h)=\sum_{r=p}^{r=np+p-1} c_r' r!.$$

而 c_r' 之公分母爲 $(p-1)!$, 其分子爲整數,故 r 之值於 p 及 $np+p-1$ 之間變化時, $c_r'\cdot r!$ 必爲能以 p 除盡之整數.故 $f(k+h)$ 於 k 爲 $1, 2, 3\cdots\cdots n$ 中任何一值時,得以 p 除之使盡.

依以上兩重準備,遂得證明 e 爲超越數如次:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots,$$

變方乘以 h^r 卽 $r!$, 因次式

$$h^r = r(r-1)\cdots\cdots(r-i+1)h^{r-i}$$

恆能成立,故

$$h^r e^x = h^r + \frac{rh^{r-1}x}{1!} + \frac{r(r-1)h^{r-2}x^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{rhx^{r-1}}{1!} + x^r$$

$$+ x^r\left[\frac{x}{r+1} + \frac{x^2}{r+1\cdot r+2} + \cdots\cdots\right].$$

故設以 $\quad u_r = \frac{x}{r+1} + \frac{x^2}{r+1\cdot r+2} + \cdots\cdots,$

則 $\quad h^r e^x = (h+x)^r + x^r u_r.$

次令 $\quad \xi = |x|,$

則 $\quad |u_r| < e^{\xi},$

卽 $\quad u_r = q_r e^{\xi}, \qquad |q_r| < 1.$

由是得 $\quad h^r e^x = (x+h)^r + x^r q_r e^{\xi}.$

故設以 c_r 爲任意之整數,則可得方程式如次:

$$e^x \sum_{r=s}^{r=t} c_r h^r = \sum_{r=s}^{r=t} c_r (x+h)^r + e^{\xi} \sum_{r=s}^{r=t} c_r q_r x^r,$$

卽設以 $\quad f(x) = \sum_{r=s}^{r=t} c_r x^r,$

$$\phi(x) = \sum_{r=s}^{r=t} c_r q_r x^r,$$

則 $$e^x f(h)=f(x+h)+e^{\xi}\phi(x).$$

由此假定整係數方程式爲

$$C_0+C_1e+C_2e^2+\cdots\cdots+C_ne^n=0,$$

卽 $$\sum_{k=0}^{k=n}C_ke^k=0,\qquad C_0\neq 0,$$

卽得方程式如次:

$$0=\sum_{k=0}^{k=n}C_k\,f(k+h)+\sum_{k=0}^{k=n}C_k\phi(k)e^k.$$

由此知 $f(x)$ 若等於次式

$$f(x)=\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\{(1-x)(2-x)\cdots\cdots(n-x)\}^p,$$

則因 $f(k+h)$ 爲整數,

$$\sum_{k=0}^{k=n}C_k\,f(k+h).$$

亦必爲整數.然依據前述之理由,若使 p 漸次增大時,

則 $$\sum_{k=0}^{k=n}C_k\phi(k)e^k$$

必漸趨於零.故 p 若大於某值時,則此式不得不爲眞分數,故由上之方程式,可知 p 若大於某值時,則次式必成立

$$\sum_{k=0}^{k=n} C_k f(k+h)=0.$$

然在前業經說明 k 於 1, 2, 3……n 諸值中任取一值，$f(k+h)$ 雖可以 p 除盡，而 $f(x)$ 則不能，故 p 若漸次增大乃至大於 $|C_0|$ 時，僅此最後方程式之初項不可以 p 除盡，而他項則皆可以 p 除盡；但此爲不合理之結論，故上文假定方程式

$$\sum_{k=0}^{k=n} C_k e^k=0$$

不能成立，故 e 爲超越數.

(45) 復次證明林代門(Lindemann)定理，因而證明 π 爲超越數.

林代門定理. 設 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots\cdots \alpha_a$ 爲 a 次有理係數既約方程式

$$A_0\alpha^a+A_1\alpha^{a-1}+\cdots\cdots+A_a=0$$

之根，$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \cdots\cdots \beta_b$ 爲 b 次有理係數既約方程式

$$B_0\beta^b+B_1\beta^{b-1}+\cdots\cdots+B_b=0$$

之根，如此次第假設乃至以 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \cdots\cdots \lambda_l$ 爲 l 次有理係數既約方程式

$$L_0\lambda^l+L_1\lambda^{l-1}+\cdots\cdots+L_l=0$$

之根,更以 C_0, C_1, C_2……C_n 爲整數,則方程式

$$C_0+C_1(e^{\alpha_1}+e^{\alpha_2}+\cdots\cdots+e^{\alpha_a})+C_2(e^{\beta_1}+e^{\beta_2}+\cdots\cdots+e^{\beta_b})$$
$$+\cdots\cdots+C_n(e^{\lambda_1}+e^{\lambda_2}+\cdots\cdots+e^{\lambda_l})=0$$

決不成立.

(A, B,……L 等係數即均假定爲整數亦無不可.)

今欲證明此理,當先有次之準備.

設 p 爲一素數,且命其價較大於 $|C_0|$, $|A_0|$, $|B_0|$,……$|L_0|$,幷較大於 $|A_a|$, $|B_b|$,……$|L_l|$ 各數,更令

$$f(x)=\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\left\{\begin{array}{l} A_0^{a+b+c+\cdots\cdots+l}(\alpha_1-x)(\alpha_2-x)\cdots\cdots(\alpha_a-x) \\ B_0^{a+b+c+\cdots\cdots+l}(\beta_1-x)(\beta_2-x)\cdots\cdots(\beta_b-x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_0^{a+b+c+\cdots\cdots+l}(\lambda_1-x)(\lambda_2-x)\cdots\cdots(\lambda_l-x) \end{array}\right\}^p$$

則與 x 以一定之值而增大 p 之值時,$f(x)$ 可漸趨於零,故展開 $f(x)$ 於累乘級數而設

$$f(x)=\sum_r c_r x^r,$$

則 $\sum_r c_r x^r$ 及 $\sum_r |c_r x^r|$ 亦得因 p 之增大而漸趨於零.

以 h 代 x, 則

$$f(h)=\sum_{r=p-1}^{r=(a+b+c+\cdots\cdots+l)p+p-1} c_r h^r$$

$$= \sum_{r=p-1}^{r=(a+b+c+\cdots\cdots+l)p+p-1} c_r r!.$$

而 c_r 有 $(p-1)!$ 公分母,其分子則為整數,故除第一項外所有各項皆為能以 p 除盡之整數.然其第一項 $c_{p-1}(p-1)!$ 為

$$\frac{1}{(p-1)!}\left\{\begin{array}{l}(A_0\alpha_1\cdot A_0\alpha_2\cdots\cdots A_0\alpha_a)\,A_0^{b+c+\cdots\cdots+l} \\ (B_0\beta_1\cdot B_0\beta_2\cdots\cdots B_0\beta_b)B_0^{a+c+\cdots\cdots+l} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (L_0\lambda_1\cdot L_0\lambda_2\cdots\cdots L_0\lambda_l)\,L^{a+b+c+\cdots\cdots+k}\end{array}\right\}^{p}(p-1)!$$

即

$$\left\{\begin{array}{l}(A_aA_0^{a-1})\,A_0^{b+c+\cdots\cdots+l} \\ (B_bB_0^{b-1})B_0^{a+c+\cdots\cdots+l} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (L_lL_0^{l-1})\,L_0^{a+b+\cdots\cdots+k}\end{array}\right\}$$

不待證而自明.但 p 為一素數,且較 $|A_0|, |B_0|,\cdots\cdots|L_0|$ 為大,又較大於 $|A_a|, |B_b|,\cdots\cdots|L_l|$, 故 $c_{p-1}(p-1)!$ 不能以 p 除盡,由此知 $f(h)$ 為不能以 p 除盡之整數

更進而考究 $f(a_\nu+h)$.

設

$$f(a_\nu+h)=\sum_r c_r(a_\nu+h)^r$$

$$=\sum_r c_r'a_\nu h^r$$

$$=\sum_r c_r' r!.$$

則關於 r 之和之界限得決定之如次:

因 $$f(\alpha_\nu+h)=\frac{(\alpha_\nu+h)^{p+1}}{(p-1)!}\left\{\begin{array}{l}(A_0B_0\cdots\cdots L_0)^{a+b+c+\cdots\cdots+l}\\ (\alpha_1-\alpha_\nu-h)(\alpha_2-\alpha_\nu-h)\cdots\cdots\\ \quad(\alpha_a-\alpha_\nu-h)\\ (\beta_1-\alpha_\nu-h)(\beta_2-\alpha_\nu-h)\cdots\cdots\\ \quad(\beta_b-\alpha_\nu-h)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (\lambda_1-\alpha_\nu-h)(\lambda_2-\alpha_\nu-h)\cdots\cdots\\ \quad(\lambda_l-\alpha_\nu-h)\end{array}\right\}^p$$

故於 1, 2,……a 中任以其一爲 ν 之值,則連乘積

$$(\alpha_1-\alpha_\nu-h)(\alpha_2-\alpha_\nu-h)\cdots\cdots(\alpha_a-\alpha_\nu-h)$$

中之第 ν 因數爲 $-h$. 由此得 $f(\alpha_\nu+h)$ 之展開式(關於 h 之累乘級數)之最低次數爲 p, 故

$$f(\alpha_\nu+h)=\sum_{r=p}^{r=(a+b+c+\cdots\cdots l)p+p-1} c_r' r!.$$

而 c_r' 有 $(p-1)!$ 公分母,故 $f(\alpha_\nu+h)$ 爲能以 p 除盡之整數.由此又知 $$\sum_{\nu=1}^{\nu=a} f(\alpha_\nu+h)$$

亦爲能以 p 除盡之整數.同理,又可知

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=b} f(\beta_\nu+h)$$
$$\vdots$$
$$\sum_{\nu=1}^{\nu=l} f(\lambda_\nu+h)$$

等亦皆爲能以 p 除盡之整數.

由以上之準備,得證明林代門之定理如次.依前節所論,知
$$e^x f(h)=f(x+h)+e^\xi \phi(x).$$

故假設方程式

$$C_0+C_1(e^{\alpha_1}+e^{\alpha_2}+\cdots\cdots+e^{\alpha_a})+C_2(e^{\beta_1}+e^{\beta_2}+\cdots\cdots+e^{\beta_b})$$
$$+\cdots\cdots+C_n(e^{\lambda_1}+e^{\lambda_2}+\cdots\cdots+e^{\lambda_l})=0$$

可以成立,則以 0 及 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_a, \beta_1, \beta_2, \cdots\cdots \beta_b \cdots\cdots \lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots \lambda_l$ 之值爲 x, 幷適宜求 $C_0, C_1 \cdots\cdots C_n$ 之積而相加之,因 $\xi=|x|$, 故得方程式

$$0=C_0 f(h)+C_1\sum_{\nu=1}^{a} f(\alpha_\nu+h)+C_2\sum_{\nu=1}^{b} f(\beta_\nu+h)+\cdots\cdots$$
$$+C_n\sum_{\nu=1}^{l} f(\lambda_\nu+h)+C_1\sum_{\nu=1}^{a}\phi(\alpha_\nu)e^{|\alpha_\nu|}$$
$$+C_2\sum_{\nu=1}^{b}\phi(\beta_\nu)e^{|\beta_\nu|}+\cdots\cdots+C_n\sum_{\nu=1}^{l}\phi(\lambda_\nu)e^{|\lambda_\nu|}.$$

更設 $$\Delta=C_1\sum_{\nu=1}^{a}\phi(\alpha_\nu)e^{|\alpha_\nu|}+C_2\sum_{\nu=1}^{b}\phi(\beta_\nu)e^{|\beta_\nu|}+\cdots\cdots$$

$$+C_n\sum_{\nu=1}^{l}\phi(\lambda_\nu)e^{|\lambda_\nu|}=C_1\sum_{\nu}\sum_{r}e^{|\alpha_\nu|}c_rq_r^{(\alpha)}\alpha_\nu^r$$

$$+C_2\sum_{\nu}\sum_{r}e^{|\beta_\nu|}c_rq_r^{(\beta)}\beta_\nu^r+\cdots\cdots$$

$$+C_r\sum_{\nu}\sum_{r}e^{|\lambda_\nu|}c_rq_r^{(\lambda)}\lambda_\nu^r.$$

則 $|q_r^{(\alpha)}|, |q_r^{(\beta)}|,\cdots\cdots|q_r^{(\lambda)}|$ 一切皆小於 1, 如前所述, p 之值增大時, $\sum_r|c_r\alpha_\nu^r|, \sum_r|c_r\beta_\nu^r|,\cdots\cdots\sum_r|c_r\lambda_\nu^r|$ 等均漸趨於零, 故 $\sum_r c_rq_r^{(\alpha)}\alpha_\nu^r, \sum_r c_rq_r^{(\beta)}\beta_\nu^r,\cdots\cdots\sum_r c_rq_r^{(\lambda)}\lambda_\nu^r$ 等亦均漸趨於零, 故以 $e^{|\alpha_\nu|}, e^{|\beta_\nu|},\cdots\cdots e^{|\lambda_\nu|}$ 乘以上各個之結果, 亦均漸趨於零, 故其終結 $\sum_\nu\sum_r$ 皆各自漸趨於零. 故 Δ 亦於 p 值增大時漸趨於零(因各總和之項數皆爲有限之故). 故 p 若充分增大, 則 Δ 爲真分數. 由此知 p 若大於某值, 則

$$0=C_0f(h)+C_1\sum_{\nu=1}^{a}f(\alpha_\nu+h)+C_2\sum_{\nu=1}^{b}f(\beta_\nu+h)+\cdots\cdots$$

$$+C_n\sum_{\nu=1}^{l}f(\lambda_\nu+h)$$

不得不成立,然此方程式右邊第二項及其下各項皆可以 p 除盡,而第一項中之 $f(h)$ 則不可以 p 除盡,且 $p>|C_0|$.故第一項全體不可以 p 除盡,故此最後之方程式不能成立,故前所假定之方程式亦斷無成立之理,則林代門之定理於是乎可以證明.

此定理既經證明,則 π 爲超越數可以其特別之場合而知之.因尤拉 (Euler) 之公式已明示吾人以下之關係矣.

$$1+e^{i\pi}=0.$$

附錄第一

作圖不能問題例解增補

1　例題.

已知三角形之一邊 a, 其對角 A, 他一角之二等分線 W_b, 求作三角形 ABC.

先以 $\angle A=\alpha$, $\angle B=\theta$, 則

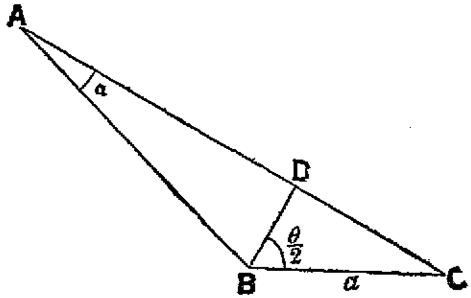

圖 23

$$\angle BDC=\alpha+\frac{\theta}{2},$$

$$\angle C=\pi-\alpha-\theta,$$

故於三角形BDC有下之關係,

$$\frac{a}{\sin\left(\alpha+\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{W_b}{\sin(\pi-\alpha-\theta)}.$$

變其形則為

$$a\sin(\alpha+\theta)=W_b\sin\left(\alpha+\frac{\theta}{2}\right).$$

即 $a(\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta)=W_b\left(\sin\alpha\cos\frac{\theta}{2}+\cos\alpha\sin\frac{\theta}{2}\right),$

即
$$a\left[\sin\alpha\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)+2\cos\alpha\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]$$
$$=W_b\left(\sin\alpha\cos\frac{\theta}{2}+\cos\alpha\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

以 $\sin\alpha\cos^2\frac{\theta}{2}$ 除兩邊,則

$$a\left[\left(2-\sec^2\frac{\theta}{2}\right)+2\cot\alpha\tan\frac{\theta}{2}\right]=W_b\left(\sec\frac{\theta}{2}+\cot\alpha\tan\frac{\theta}{2}\sec\frac{\theta}{2}\right).$$

即
$$a\left[\left\{2-\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)\right\}+2\cot\alpha\tan\frac{\theta}{2}\right]$$
$$=W_b\left(\sqrt{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}+\cot\alpha\tan\frac{\theta}{2}\sqrt{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)$$

便宜起見,置 $\tan\frac{\theta}{2}=x$, 則得下之無理方程式,

*此增補係佐藤先氏之手而成者也

$$-a[x^2-2\cot\alpha\cdot x-1]=W_b(1+\cot\alpha\cdot x)\sqrt{1+x^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

自乘兩邊,則

$$a^2[x^4-4\cot\alpha\cdot x^3+2(2\cot^2\alpha-1)x^2+4\cot\alpha\cdot x+1]$$
$$=W_b{}^2(\cot^2\alpha\cdot x^2+2\cot\alpha\cdot x+1)(1+x^2).$$

$$(a^2-W_b{}^2\cot^2\alpha)x^4-2\cot\alpha(2a^2+W_b{}^2)x^3$$
$$+\{(4a^2-W_b{}^2)\cot^2\alpha-(2a^2+W_b{}^2)\}x^2$$
$$+2\cot\alpha(2a^2-W_b{}^2)x+(a^2-W_b{}^2)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

於是置 $a=W_b=1,\ \cot\alpha=3.$

則爲

$$8x^4+18x^3-24x^2-6x=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

然若 $x=0$, 則三角形不能成立,故 $x\neq0$. 以 x 除 (3) 之左邊,則

$$8x^3+18x^2-24x-6=0,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

以 8 乘此兩邊,且置 $4x=y$, 則得

$$y^3+9y^2-48y-48=0.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

而此方程式最高次項之係數爲1,其他項之係數及絕對項皆以素數3爲因數,且絕對項不以3^2爲因數,故由愛塞因太定理,此方程式爲既約.故 (4) 之根不得作圖.

次對於如斯 a, W_b 及 α 之值方程式 (1) 有根與否,應加

研究.先(4)之左邊在$x=0$,則爲負.而在$x=2$,則爲正.故方程式(4)於0及2之間至少有一根.因$\tan 63°30'=2.006$,故在$0°$及$63°30'$之間,使滿足方程式(4)之$\frac{\theta}{2}$之值至少有一個.而因於此範圍內.$\sec\frac{\theta}{2}$爲正.故(1)右邊之平方根應取正號$a<90°$則(1)之右邊爲正甚明.

次置$\cot\alpha=3$,則(1)之左邊爲

$$-a(x^2-6x-1) \text{ 即 } -a\{(x-3)^2-10\}.$$

因$a>0$,故x在於0及2之間常爲正.

故在0及2之間,方程式(4)之根,卽方程式(1)之根也.

因$\cot 18°30'=2.9887$,故$\alpha<18°30'$而$\theta<127°$,

故 $$\alpha+\theta<180°,$$

故對此θ三角形成立.然其作圖爲不能.

2. 例題.

已知底邊a,二邊之和$b+c$,及由底之一端至垂心之距離BH.求作三角形ABC,

若所要之三角形已經作得,則CH乃得作之長也.故於證明本問題爲不能,轉而證明長CH不得作圖足矣.

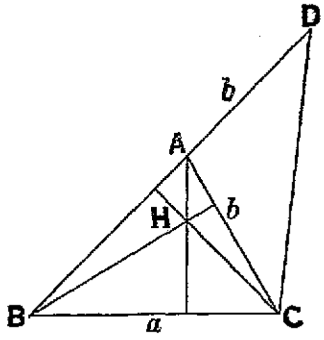

圖 24

今以 $CH=x$, $b+c=l$, $BH=d$. 於 BA 之延長線上取 D 點,使 AD 等於 AC, 則

$$BD=l.$$

$$\angle BCD=\frac{A}{2}+C.$$

故於三角形 BDC

$$\frac{a}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{l}{\sin\left(\frac{A}{2}+C\right)}.$$

故有次之關係

$$\sin\left(\frac{A}{2}+C\right)=\frac{l}{a}\sin\frac{A}{2}.\qquad\cdots\cdots(1)$$

又於三角形 BHC 有次之關係·

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{d}{\cos B}=\frac{x}{\cos C}.$$

而因 $\angle B=\pi-A-C$. 故此式爲

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{d}{-\cos(A+C)}=\frac{x}{\cos C}.$$

故
$$\frac{a}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{x+d}{\sin\left(\frac{A}{2}+C\right)\sin\frac{A}{2}}$$

故
$$\sin\left(\frac{A}{2}+C\right)=\frac{x+d}{a}\cos\frac{A}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)及(2)

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{x+d}{l}$$

故
$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+d}{l}\right)^2}=\frac{l^2}{l^2+(x+d)^2}$$

然又由三角形 BHC

$$a^2=x^2+d^2-2dx\cos BHC$$

$$=x^2+d^2+2\,dx\cos A$$

$$=x^2+d^2+2\,dx\left(2\cos^2\frac{A}{2}-1\right).$$

故得
$$a^2=x^2+d^2+2\,dx\left(\frac{2l^2}{l^2+(x+d)^2}-1\right).$$

變其形,得四次方程式

$$x^4+(l^2-a^2-2d^2)x^2+2d(l^2-a^2)x+(d^2-a^2)(l^2+d^2)=0 \cdots (3)$$

但於茲應注意者應爲$l=b+c>a$.

於此方程式置

$$a=\sqrt{2}, d=1, l=\sqrt{10}.$$

則 $$x^4+6x^2+16x-11=0 \cdots\cdots (4)$$

此方程式若有有理根,則應爲11之約數,即± 1, ± 11中之一.然是等之數,不能滿足此方程式.故方程式(4)無有理根.

又(4)之誘歸三次方程式爲

$$4t^3+8t-28=0. \cdots\cdots (5)$$

故乘以2,置$2t=y$,則得

$$y^3+8y-56=0. \cdots\cdots (6)$$

此方程式若有有理根,則應爲56之約數,而$y<0$及$y\geqq 4$時,此方程式左邊常爲負及正.故其根應爲1,2中之一,然是等之數非其根.故此方程式爲既約.然$x=0$時,(5)之左邊爲負$x>2$時爲正.故三角形成立.而其作圖不能.

3. 例題.

有一定直線a,其上之一定點0,及此直線外之一點

A 求於直線 a 上之一點 M, 使矩形 $OM \cdot AM$ 等於所設之值 l^2.

由 A 點引垂線 AB 至 a 線. 以其長爲 b. 且以 OB 爲 d.

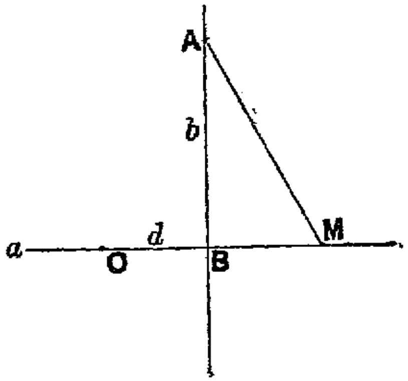

圖 25

以 OA 及 OB 爲坐標軸, 則 A 之坐標爲 $(0,b)$. 故 M 之坐標爲 (x,O).

則 $$OM \cdot AM = (d+x)\sqrt{x^2+b^2} = l^2 \quad \cdots\cdots(1)$$

兩邊,自乘則

$$(x^2+2dx+d^2)(x^2+b^2)=l^4.$$

即 $$x^4+2dx^3+(b^2+d^2)x^2+2b^2dx+b^2d^2-l^4=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

於此式置 $b=\sqrt{2}, d=2, l^4=10$, 則得

$$x^4+4x^3+6x^2+8x-2=0.\cdots\cdots(3)$$

由愛賽因太定理,此方程式爲既約.

而其誘歸三次方程式爲

$$4t^3+7t-1=0.\cdots\cdots(4)$$

以2乘兩邊,且置$2t=y$,則得

$$y^3+7y-2=0\cdots\cdots(5)$$

若此方程有有理根,則應爲 ±1, ±2中之一 然±1, ±2非其根也.故此方程式爲既約,因之方程式(4)爲既約,故方程式(3)之根乃不得作圖之長也.

4. 例題.

有定直線l及不在其上之二點A, B.求其上之一點P,作AP與l所成之角,爲BP與l所成之角之三倍.

由A及B引垂線至l,以其足各爲C及D,以$AC=a$, $BD=b$, $CD=d$.

若已求得P點,以$PD=x$,則$PC=d-x$.

又以$\angle BPD=\theta$,則

$$\tan\theta=\frac{b}{x}.$$

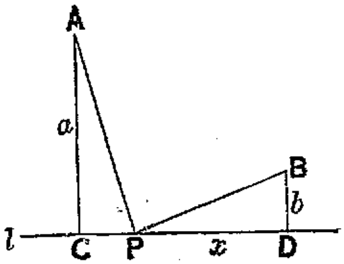

圖 26

然 $$a=(d-x)\tan 3\theta=(d-x)\cdot\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}.$$

由此二式消去$\tan\theta$,則得三次方程式

$$(a+3b)x^3-3bdx^2-b^2(3a+b)x+b^3d=0.$$

於此式置$a=3$, $b=1$,$d=5$,則得

$$6x^3-15x^2-10x+5=0.\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

以6^2乘兩邊,且置$6x=y$,則得

$$y^3-15y^2-60y+180=0.\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

此方程式最高次項之係數爲1,其他項之係數及絕對項皆能以素數5除盡,而絕對項不能以5^2除盡,故由愛森因太定理,此方程式爲旣約.因之方程式(1)爲旣約.故其根不得作圖.

5. 例題.

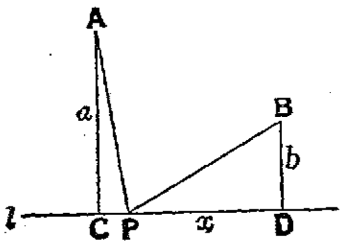

圖 27

有直線l,及不在其上之二點A,B,求在l上之一點P,作AP與l所成之角,爲BP與l所成之角之四倍.

由A及B引二垂線至l,以其足各爲C及D.而以

$AC=a$, $BD=b$, $CD=d$, $PD=x$, $\angle BPD=\theta$, 則

$$\tan\theta=\frac{b}{x}.$$

然 $$a=(d-x)\tan 4\theta=(d-x)\frac{4\tan\theta\ (1-\tan^2\theta)}{1-6\tan^2\theta+\tan^4\theta}.$$

由此二式消去 $\tan\theta$, 則得四次方程式

$$(a+4b)\,x^4-4bdx^3-2b^2\,(3a+2b)\,x^2+4b^3dx+ab^4=0.$$

取其極特別之情形

$$a=b=d=1,$$

則得

$$5x^4-4x^3-10x^2+4x+1=0.\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

於此以 $x=\dfrac{1}{y}$, 則得

$$y^4+4y^3-10y^2-4y+5=0.\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

若 (1) 之根能得作圖, 則 (2) 之根亦得作圖. 故於證明本問題之不能, 可證明 (2) 之根不得作圖.

方程式 (2) 若有有理根, 則應爲 5 之因數, 卽 ±1 ±5 中之一. 然其中之任一數, 不能滿足方程式 (2), 故方程式 (2) 無有理根.

次其誘歸三次方程式

$$108t^3-468t-172=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

以2乘此方程式之兩邊,且置$6t=z$,則得

$$z^3-156z-344=0.\cdots\cdots(4)$$

若此方程式有有理根,則應爲344之因數.而因方程式(4)之左邊爲

$$z(z^2-156)-344.$$

故$z<-12$及$0<z<12$則常爲負,故方程式(4)之有理根爲344之因數,應在-12及0之間或大於12.如斯之數爲

$$-8,-4,-2,-1\text{ 及 }+43,+86,+172,+344.$$

然諸數無一滿足方程式(4)者,故方程式(4)無有理根.故爲既約.

因之方程式(2)之根不得作圖.

6. 例題.

已知底邊a,二邊之差$b-c$,及自底之一端B至頂角A之外角之二等分線之垂線BD.求作三角形ABC.

先 $$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2\sin^2\frac{A}{2}+(b-c)^2\cos^2\frac{A}{2},$$

故以$BD=d$,則因$\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{d}{c}$,

故 $$a^2=(b+c)^2\left(1-\frac{d^2}{c^2}\right)+(b-c)^2\cdot\frac{d^2}{c^2}$$

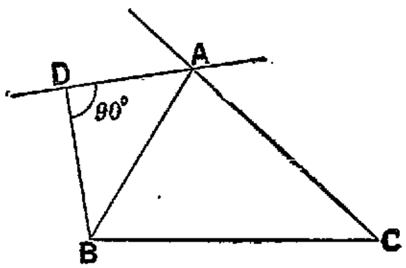

圖 28

於此置$b-c=l$, $c=x$,則得

$$a^2=(l+2x)^2\left(1-\frac{d^2}{x^2}\right)+l^2\cdot\frac{d^2}{x^2}.$$

變其形,得三次方程式

$$4x^3+4lx^2+(l^2-4d^2-a^2)x-4d^2l=0.\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但玆應注意者爲$l<a$.

於(1)置$l=3,d=2,a=\sqrt{11}$,則得

$$4x^3+12x^2-18x-48=0.\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以2乘兩邊,且置$2x=y$,則得

$$y^3+6y^2-18y-96=0.$$

此三次方程式最高次項之係數爲1,其他項之係數及絕對項皆能以素數3除盡,而絕對項不能以3^2除盡,故此方程式爲旣約.因之方程式(2)爲旣約.故x不得作

圖。

7. 例題.

已知底邊a,二邊之和$b+c$,及自底之一端B至頂角A之二等分線之垂線BD.求作三角形ABC.

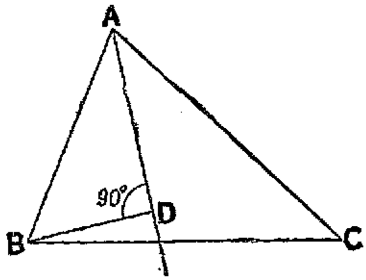

圖 29

由同前例題之方法得$a^2=(b+c)^2\sin^2\frac{A}{2}+(b-c)^2\cos^2\frac{A}{2}$.

以垂線BC之長爲d,則

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{d}{c}.$$

故 $$a^2=(b+c)^2\frac{d^2}{c^2}+(b-c)^2\left(1-\frac{d^2}{c^2}\right).$$

於此方程式置$b+c=l$, $c=x$,則得

$$a^2=l^2\frac{d^2}{x^2}+(l-2x)^2\left(1-\frac{d^2}{x^2}\right).$$

因此係於前例題以 $-x$ 代 x 者,故即得方程式爲

$$4x^3-4lx^2+(l^2-4d^2-a^2)x+4d^2l=0. \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但在此情形應爲 $l>a$,

今以 $l=3, d=1, a=\sqrt{2}$,則得

$$4x^3-12x^2+3x+12=0. \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以 2 乘兩邊,且置 $2x=y$,則得

$$y^3-6y^2+3y+24=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由愛賽因太定理,此方程式亦爲既約.因之方程式(2)爲既約,故 x 不得作圖.

8. 例題.

已知底邊 a,一底角 B,及頂角 A 之二等分線 W_a 求作三角形 ABC.

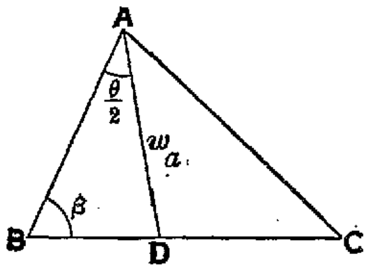

圖 30

先以 $\angle A=\theta, \angle B=\beta$,則 $\angle C=\pi-\beta-\theta$.以 W_a 與 a 之交

點爲D,則得

$$BD=\frac{W_a\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\beta},\quad DC=\frac{W_a\sin\frac{\theta}{2}}{\sin(\pi-\beta-\theta)}.$$

以此二等式各邊相加,則得

$$a=W_a\sin\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin(\pi-\beta-\theta)}\right).$$

故　$$W_a\sin\frac{\theta}{2}\{\sin\beta+\sin(\beta+\theta)\}=a\sin\beta\sin(\beta+\theta).$$

即　$$W_a\sin\frac{\theta}{2}(\sin\beta+\sin\beta\cos\theta+\cos\beta\sin\theta)$$
$$=a\sin\beta(\sin\beta\cos\theta+\cos\beta\sin\theta).$$

以$a\sin^2\beta$除兩邊,且置$\frac{W_a}{a}=m$,則得

$$m\sin\frac{\theta}{2}\operatorname{cosec}\beta(1+\cos\theta+\cot\beta\sin\theta)=(\cos\theta+\cot\beta\sin\theta).$$

而$\sin\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$, $\cos\theta=\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$, $\sin\frac{\theta}{2}=\dfrac{\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}$

故得

$$m\operatorname{cosec}\beta\tan\frac{\theta}{2}\left(2+2\cot\beta\tan\frac{\theta}{2}\right)=\left(1+2\cot\beta\tan\frac{\theta}{2}-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$
$$\times\sqrt{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

便宜起見,置 $\tan\frac{\theta}{2}=x$,則得

$$2m\operatorname{cosec}\beta\cdot x,(1+\cot\beta\cdot x)=(1+2\cot\beta\cdot x-x^2)\sqrt{1+x^2}\cdots\cdots(1)$$

自乘此方程式之兩邊,且因 $\operatorname{cosec}^2\beta=1+\tan^2\beta$,故得六次方程式

$$\begin{aligned}x^6-4\cot\beta\cdot x^5+[(4\cot^2\beta-1)-4m^2\cot^2\beta(1+\cot^2\beta)]x^4\\ -8m^2\cot\beta(1+\cot^2\beta)x^3+[(4\cot^2\beta-1)\\ -4m^2(1+\cot^2\beta)]x^2+4\cot\beta\cdot x+1=0\cdots\cdots(2)\end{aligned}$$

於此以 $\cot\beta=1,m=2$,則得

$$x^6-4x^5-29x^4-64x^3-29x^2+4x+1=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

此方程式若有有理根,則應爲絕對項之因數卽 ±1 中之一,然以之代 x 方程式之左邊不爲零.故此方程式無有理根.

因此方程式爲六次,若爲未約.則應得分解爲一次與五次,或二次與四次,或三次與三次之兩因子.

然不能分解爲一次與五次之二因數.何則?因若能分解,則此方程式應有有理根矣.

次將證明不能分解爲二次與四次之二因數.

以 $f(x)$ 表 (3) 之左邊.以 $\phi(x),\psi(x)$ 表其各因數,則

$$f(x)=\phi(x)\cdot\psi(x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

以
$$\phi(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx\pm1,$$
$$\psi(x)=x^2+px\pm1.$$

但上二式之複號,乃同時取正或負.比較(4)兩邊 x, x^2, x^3, x^4, x^5 之係數,則得次之一羣等式.

$$\left.\begin{aligned} 4&=c+p,\\ -29&=b+pc+1,\\ -64&=a+pb+c,\\ -29&=1+pa+b,\\ -4&=p+a.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\text{(I)}$$

或

$$\left.\begin{aligned} 4&=-c-p,\\ -29&=-b+pc-1,\\ -64&=-a+pb+c,\\ -29&=-1+pa+b,\\ -4&=p+a.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\text{(II)}$$

第一 (I)之情形.

於此情形,以第二及第四等式各邊相減,則得

$$0=p(c-a).$$

然以第一及第五等式各邊相減,則得

$$8=c-a$$

而$c-a$不爲零,故p應爲0,然若$p=0$,則由第一等式得$c=4$.由第五等式得$a=-4$.故第三等式不能成立.

第二. (II)之情形.

於此情形以第二及第四等式各邊相減,則得

$$0=p(c-a)-2b.$$

然以第一及第五等式各邊相加,則得

$$c-a=0.\text{ 因之 }c=a.$$

故由前方程式得$b=0$.故第三等式不能成立,故$f(x)$不能分解爲二次與四次之兩因數.

最後若(3)之左邊能分解爲二個三次因數.則各因數不可不爲既約.何則?因若其一爲未約,則必有一次因數.因之方程式(3)之左邊有一次因數.因之此方程式應有有理根.如前所證明,此乃不合理.

由以上所論,得次之結果.

方程式(3)爲既約,或能分解爲二個既約三次因數,而於任何情形,其根不得作圖.

最後在上述條件之下,本題之三角形成立與否,應加研究.方程式(3)之左邊當$x=0$,則爲正,$x=1$爲負.故於0及1之間,至少有一根.取對於其根之θ之值,則

$$0<\frac{\theta}{2}<45^\circ.\text{ 即 }0<\theta<90^\circ.$$

故對此 θ 之值,方程式 (1) 之根號應取正號,而因以 $\beta=45°$. 則方程式 (1) 之兩邊皆爲正,故在 0 及 1 之間,方程式 (3) 之根應卽爲方程式 (1) 之根也. 且又因明爲 $\theta+\beta<180°$, 故所與之三角形成立.

9. 例題.

有一圓及在此圓外之二點.求在此圓周上之一點,使由所設二點至此點距離之和爲極小.

以二點各爲 A 及 B. 以圓之中心爲 O, 今可證明雖於 $\angle AOB=90°$ 之特別情形,其作圖亦爲不能.

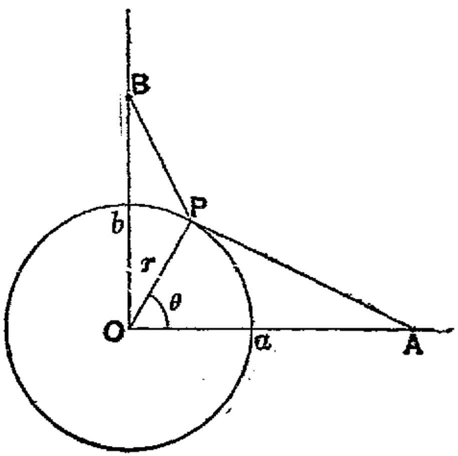

圖 31

若以P點為已求得之點.則PA及PB與切於P之切線成相等之角.因之與半徑OP亦成相等之角.此易得證明者也.

以$OA=a$, $OB=b$, $\angle AOP=\theta$, $OP=r$, 則

$$\frac{a}{\sin OPA}=\frac{PA}{\sin\theta}.$$

及
$$\frac{b}{\sin OPB}=\frac{PB}{\cos\theta}$$

然如上所述,因 $\sin OPB=\sin OPB$, 故

$$\frac{PA}{PB}=\frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}.\qquad\cdots\cdots(1)$$

又
$$PA^2=r^2+a^2-2ar\cos\theta,$$

及
$$PB^2=r^2+b^2-2br\sin\theta,$$

故
$$\frac{PA^2}{PB^2}=\frac{r^2+a^2-2ar\cos\theta}{r^2+b^2-2br\sin\theta}.\qquad\cdots\cdots(2)$$

由(1)及(2)

$$\frac{a^2\sin^2\theta}{b^2\cos^2\theta}=\frac{r^2+a^2-2ar\cos\theta}{r^2+b^2-2br\sin\theta}.$$

然
$$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}},\text{及}\sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}.$$

故置 $\tan\frac{\theta}{2}=x$, 則得六次方程式.

$$b^2(r+a)^2x^6-\{b^2(r^2+6ar+a^2)+4a^2(r^2+b^2)\}x^4$$
$$+16a^2brx^3-\{b^2(r^2-6ar+a^2)+4a^2(r^2+b^2)\}x^2$$
$$+b^2(r-a)^2=0.$$

若此六次方程式對於 a,b,r 之特殊之值爲旣約，則得決定此例題於一般爲不能.如斯特殊之值有否，讀者可檢查之.

今僅變此題之形而爲次例.得解與否，余將示之.

10. 例題.

使平行光線由球面鏡反射，照於所設之定點求照

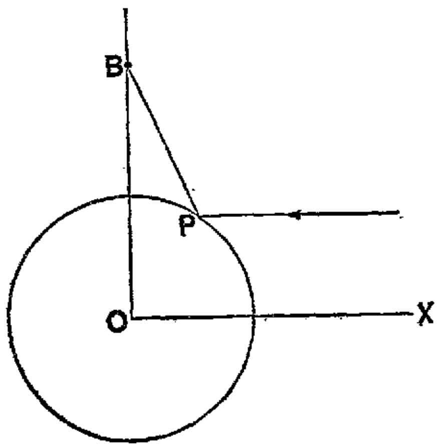

圖 32

於此點之光線射於球面上之點.

所求之點應存在於通過球面鏡之中心及所設之定點平行於投射光線之平面上.

以球面鏡之中心爲 O,所照之點爲 B,光線之方向爲 XO,所求球面上之點爲 P.

由光線反射法則,投射光線及反射光線均在以 OB 及 OX 所定之平面中.故取 OX 與 OB 互爲垂直之特別情形,則本例畢竟不過爲於前例使 a 爲無限大之極限之情形.故於前例所得之方程式

$$b^2(r+a)^2x^6-\{b^2(r^2+6ar+a^2)+4a^2(r^2+b^2)\}x^4+16a^2brx^3$$
$$-\{b^2(r^2-6ar+a^2)+4a^2(r^2+b^2)\}x^2+b^2(r-a)^2=0.$$

以 a^2 除其兩邊,而使 a 大至無限,則得

$$b^2x^6-(5b^2+4r^4)x^4+16brx^3-(5b^2+4r^2)x^2+b^2=0.$$

此相反方程式也.故改爲

$$b^2\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-(5b^2+4r^2)\left(x+\frac{1}{x}\right)+16br=0.$$

且置 $x+\frac{1}{x}=y$,因之 $x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$,則得

$$b^2(y^3-3y)-4(2b^2+r^2)y+16br=0.$$

以 b 乘之,以 $by=z$,則得

$$z^3-4(2b^2+r^2)z+16b^2r=0,$$

即

$$(z-2r)(z^2+2rz-8b^2)=0.$$

故 z 即 by, 因之 y 能得作圖, 而所求之長 x 爲二次方程式

$$x^2-yx+1=0$$

之根.故此問題得解.讀者應考究其作圖之方法.

附錄第二

正十七角形之作圖法

11. 余既述高司氏之一般研究,並謂正十七角形乃能得作圖者也.茲先說一證明方法,係非依高司氏之一般研究特用於正十七角形者,然後敍述作圖之方法.仿證明正七角形作圖不能時所說,以證明正十七角形作圖非屬不能.

以$2\cos\frac{2\pi}{17}$爲表能得作圖之長之數,顯然可能.

1之十七次方根有17個,其一爲1,自不待論.其他乃以

$$\cos\frac{2k\pi}{17}+i\sin\frac{2k\pi}{17} \qquad [k=1, 2, 3\cdots\cdots16]$$

所表之虛數也.

以ϵ表$\cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{7}$,則此十六個虛數以

$$\epsilon, \epsilon^2, \epsilon^3\cdots\cdots\epsilon^8, \epsilon^{-8}, \epsilon^{-7}, \epsilon^{-6}\cdots\cdots\epsilon^{-3}, \epsilon^{-2}, \epsilon^{-1}$$

表之,今以

$$\epsilon+\epsilon^2+\epsilon^4+\epsilon^8+\epsilon^{-1}+\epsilon^{-2}+\epsilon^{-4}+\epsilon^{-8}=\eta,$$

$$\epsilon^3+\epsilon^6+\epsilon^{-5}+\epsilon^7+\epsilon^{-3}+\epsilon^{-6}+\epsilon^5+\epsilon^{-7}=\eta_1,$$

則明爲

$$\eta+\eta_1=-1.$$

次由實際之乘法知

$$\eta\eta_1=4(\eta+\eta_1)=-4.$$

故 $$\eta=\frac{-1+\sqrt{17}}{2},\quad \eta_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\cdots\cdots\cdots(1)$$

次以 $$z=\epsilon+\epsilon^4+\epsilon^{-1}+\epsilon^{-4}=2\cos\frac{2\pi}{17}+2\cos\frac{8\pi}{17},$$

$$z_1=\epsilon^2+\epsilon^8+\epsilon^{-2}+\epsilon^{-8}=2\cos\frac{4\pi}{17}-2\cos\frac{\pi}{17},$$

$$z_2=\epsilon^3+\epsilon^{-5}+\epsilon^{-3}+\epsilon^5=2\cos\frac{6\pi}{17}-2\cos\frac{7\pi}{17},$$

$$z_3=\epsilon^6+\epsilon^7+\epsilon^{-6}+\epsilon^{-7}=-2\cos\frac{5\pi}{17}-2\cos\frac{3\pi}{17},$$

則爲 $$z+z_1=\eta,\quad zz_1=-1.$$

及 $$z_2+z_3=\eta,\quad z_2z_3=-1.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{故}\quad z=\dfrac{\eta+\sqrt{\eta^2+4}}{2} & z_1=\dfrac{\eta-\sqrt{\eta^2+4}}{2}\\ \text{及}\quad z_2=\dfrac{\eta_1+\sqrt{\eta_1^2+4}}{2}, & z_3=\dfrac{\eta_1-\sqrt{\eta_1^2+4}}{2}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(2)$$

最後以 $$y=\epsilon+\epsilon^{-1}=2\cos\frac{2\pi}{17},$$

$$y_1=\epsilon^4+\epsilon^{-4}=2\cos\frac{8\pi}{17},$$

則爲 $$y+y_1=z,\quad yy_1=z_2.$$

故 $$y=\frac{z+\sqrt{z^2-4z_2}}{2},\quad y_1=\frac{z-\sqrt{z^2-4z_2}}{2}\dots\dots\dots\dots(3)$$

然由(1)知η及η_1表得作圖之長,因之由(2)知z, z_1, z_2, z_3表得作圖之長,又因之由(3)知y及y_1表得作圖之長.而y卽表$2\cos\frac{2\pi}{17}$.故正十七角形能得作圖.卽順次解次之一組之二次方程式.

$$\begin{cases}
x^2+x-4=0, \ \text{其根}\ \eta,\eta_1=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{17}. \\
\qquad\qquad \eta>0,\quad \eta_1<0. \\
x^2-\eta x-1=0, \ \text{其根}\ z,z_1=\frac{\eta}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\eta^2+4}. \\
\qquad\qquad z>0,\quad z_1<0. \\
x^2-\eta\, x-1=0, \ \text{其根}\ z_2,z_3=\frac{\eta_1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\eta_1{}^2+4}. \\
\qquad\qquad z_2>0,\quad z_3<0. \\
x^2-zx+z_2=0, \ \text{其根}\ y,y_1=\frac{z}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{z^2-4z_2}.
\end{cases}$$

$$y>y_1.$$

茲順序求出之y_1,如y之應於正十七角形,乃應於正三十四角形者也.

12. 今述正十七角形之作圖法於次.

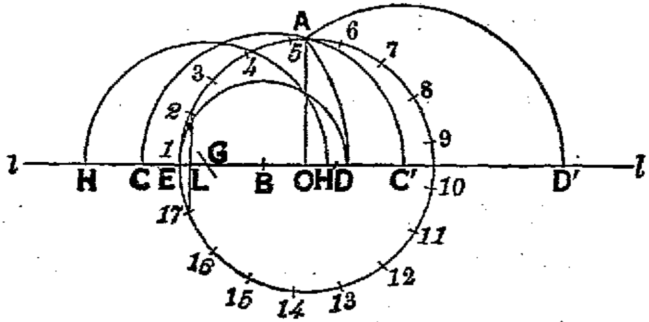

圖 33

引無限直線ll,過其中任意之一點O,引垂線OA,OA之長等於線單位.以O爲中心,OA爲半徑畫圓.將十七等分此圓之周.

若以 $$OB=-\frac{1}{4}.$$

則 $$BA=\frac{1}{4}\sqrt{17}.$$

以B爲中心,BA爲半徑畫半圓CAC',則

$$OC=OB+BC=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{17}=\frac{\eta_1}{2},$$

$$OC'=OB+BC'=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{17}=\frac{\eta}{2}.$$

次以C爲中心,CA爲半徑畫圓弧AD,又以C'爲中

心，$C'A$ 爲半徑畫圓弧 AD'，則

$$OD'=OC'+C'D'=\frac{\eta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2+1}=z.$$

$$OD=OC+CD=\frac{\eta_1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2+1}=z_2.$$

次以 $$OE=-1.$$

以 ED 爲直徑，畫半圓 EFD，其與 OA 之交點爲 F. 以 F 爲中心，以等於 $\frac{1}{2}OD'$ 爲半徑畫圓弧. O 其與 OE 之交點爲 G. 以 G 爲中心，GF 爲半徑畫半圓 HFH'，則

$$-OH+OH'=HH'=2GH'=OD'=z,$$

$$-OH\cdot OH'=\overline{OF}^2=-OE\cdot OD=OD=z_2$$

故 $$-OH=\frac{z+\sqrt{z^2-4z_2}}{2},\quad OH'=\frac{z-\sqrt{z^2-4z}}{2}.$$

故 OH 之長等於 $2y$.(OH' 之長等於 $2y_1$)

故以 OH 之中點爲 L，過 L 引垂線，則得二個分點 2 及 17.(圖 33) E 當然爲分點 1，因之得他各分點.

此作圖之方法稱爲史雷 (Serret) 及巴合門 (Bochmann) 之方法. 乃最易理解之方法也.當有其他各種之方法，例如高司之方法，馮司道特 (Von Staudt) 之方法，秀博兒特 (Schubert) 之方法等.

13. 次將示僅用圓規而得作圖之方法.

此法乃順序作次一組之數所表之長.

$$\frac{\eta}{2}=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4},$$

$$\frac{\eta_1}{2}=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4},$$

$$z=\frac{\eta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2+1},$$

$$z_2=\frac{\eta_1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2+1},$$

$$y=\frac{z}{2}+\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2-z_2}.$$

先畫以O爲中心之圓$ABCD$,將十七等分之,而視其半徑爲線單位1.

於此圓周上取任意一點A,以

$$AB=BC=CD=1.$$

而順次言定三點B, C, D,則AOD爲直徑.

以A爲中心,AC爲半徑畫圓弧,又以D爲中心,DB爲半徑畫圓弧.兩圓弧之交點爲E,則

$$OE=\sqrt{2}.$$

以D爲中心,OE即$\sqrt{2}$爲半徑畫弧,使與所與之圓周交於F, F',則FOF'爲垂直於AOD之直徑也.

以A爲中心，AD爲半徑所作之圓弧，及以D爲中心，DB爲半徑所作之圓弧，其交點爲G, G'。以G爲中心，GD爲半徑之圓弧，及以G'爲中心，$G'D$爲半徑之圓弧，其交點爲H。則

$$OH=HA.$$

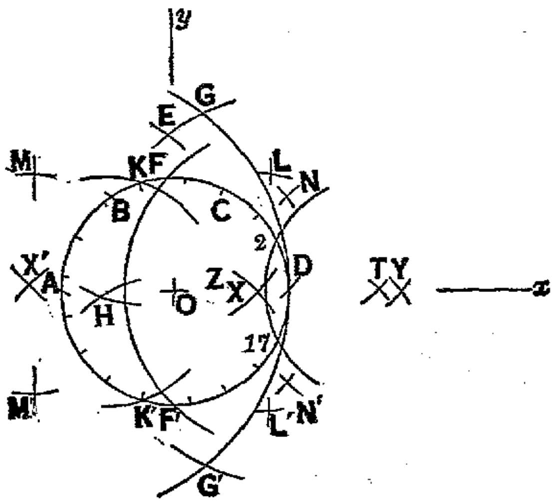

圖 34

以H爲中心，OA卽1爲半徑畫圓弧，與所與之圓周交於KK'。

今以直線AOD視作x軸，直線$F'OF$視作y軸，則K之坐標爲

$$-\frac{1}{4},\ \sqrt{1-\frac{1}{16}}.$$

各以K及K'爲中心,以OE即$\sqrt{2}$爲半徑之二圓弧,其交點爲X及X',則此二交點皆在X軸上.

直線KK'與點X之距離爲$\frac{1}{4}\sqrt{17}$.此由直角三角形之邊之關係易得知之.而

$$OX=\frac{1}{4}\sqrt{17}-\frac{1}{4}=\frac{\eta}{2}.$$

同樣 $$OX_1=\frac{\eta_1}{2}.$$

各以F及F'爲中心,OX爲半徑畫圓弧,又以X爲中心,OA爲半徑畫圓弧.以其交點爲L及L',則此二點之橫坐標爲$\frac{\eta}{2}$,而其縱坐標各爲±1.

次定適合於次之關係之Y點.

$$LY=L'Y=XE.$$

此點在X軸上,則

$$OY=\frac{\eta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2+1}=z.$$

何則?以 $$XE=\sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2+2}$$

及 $$XY=\sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2+1}.$$

次各以F及F'爲中心,OX_1爲半徑畫圓弧,又以X_1爲中心,OA爲半徑畫圓弧.以其交點爲M及M',則此

二點之橫坐標爲$\frac{\eta_1}{2}$，而縱坐標各爲± 1.

而定適合於次之關係之Z點，

$$MZ=M'Z=X_1E.$$

則
$$OZ=z_2.$$

何則?以
$$X_1E=\sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2+2}.$$

因之
$$OZ=\frac{\eta_1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2+1}.$$

但須注意η_1爲負.

最後吾人將作y.

定適合於次之關係之二點N及N'.

$$ON=ON'=NY=N'Y=AZ.$$

則此二點之橫坐標皆爲$\frac{z}{2}$，而其縱坐標各爲

$$\pm\sqrt{(1+z_1)^2-\frac{z^2}{4}}.$$

此亦由直角三角形之邊之關係易得知之.

次定適合於關係

$$NT=N'T=ZB$$

之點T，則

$$OT=y.$$

何則?以 B 之坐標爲 $\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$,而 Z 之坐標爲 $(Z_2, 0)$.

故 $$BZ=\sqrt{1+Z_2+Z_2^2}.$$

故得 $$OT=\frac{Z}{2}+\sqrt{\left(\frac{Z}{2}\right)^2-Z_2}=y=2\cos\frac{2\pi}{17}.$$

以 T 爲中心,以 OA 即1爲半徑畫圓弧,使與所與之圓交於二點,則此即所要之二分點2及17也(圖34),而 D 爲分點1.

此方法稱爲紀勒兒之方法.其他僅以圓規作圖之方法,亦有多種.要之,若有併用直尺及圓規之作圖方法,由用適當確定之反心及反形率,而作其圖形之反形.僅用圓規作圖之方法能得推出直線之反形爲圓周也.

附錄第三

圓周及角之近似的等分法

14. 於本文第42節嘗述等分圓周,及因之而作正多角形,於吾人應守制限之下,一般言之,爲不可能.唯合於高司氏所定之特別情形者方可.然等分圓周及等分任意之角,乃日常應用中實際常遇者也.故雖爲近似的等分法,亦有研究之必要.但此乃近似之解法,讀者應注意之.

15. 第一萊納埃或比屋因方法

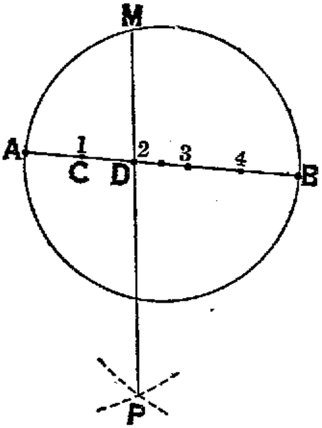

圖 35

等分所設圓周之直徑爲 n 分,以 C, D, E……等表之.求與 A 及 B 有距離等於 AB 之點 P.連結 P 及自 AB 之一端 A 之第二分點 D.延

長之,使於圓周交於M點,則弧AM殆爲圓周n分之一.

此法至爲簡單,故誤差少時,甚爲便利.雖然n稍大時,其誤差不小.若n小時,其誤差則概甚小.尤其當n爲7或9,即作正七角形或正九角形(參照本文第22節)時,殆無誤差.於作正五角形,其一邊之長爲圓周半徑之1.176倍.由此法所得爲1.175倍,僅有0.001倍之誤差耳.

此法在巴比奈書中稱爲比屋因方法,在賀夫邁書中稱爲萊納幾方法,豈兩者獨立發明者乎?

16. 第二. 託因皮也方法

此法亦載於巴比奈書中.其方法如次.

等分所設圓周之直徑AB爲n分.求與直徑兩端A及B有距離等於直徑之點P.次於直徑上由中心O取等於直徑n分之2之長OL.連結PO及PL.延長之,與圓周交於M及C,則弧CM殆爲圓周n分之一.

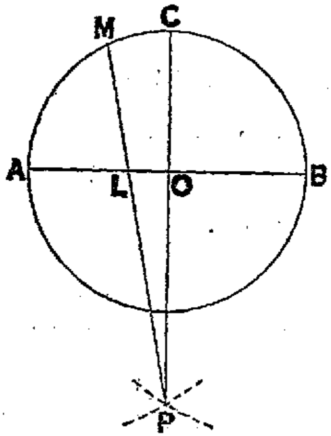

圖 36

n小於8時,用此方法較

用比屋因方法生大誤差;然當 n 大於 8 時用之,其所得結果,遠優於用比屋因方法.

17. 第三. 擺因豪特方法

此法載於柯因棲或斯拔克書中.方法如次:

等分所設圓周之直徑 AB 爲 n 分.延長半徑 OA 及垂直於 AB 之半徑 OC. 於各延長線上取 E 點及 F 點.使 AE 及 CF 各等於直徑之 n 分之一.連結 EF, 使與圓周相交,其近於 A 方之交點爲 G. 在直徑 AB 上近於 A 點之第三分點爲 H. 連結 GH, 則 GH 殆爲內接正 n 角形之一邊.卽等於圓周 n 分之一之弧所對之弦.

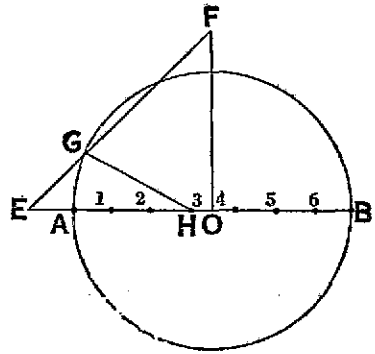

圖 37

依此方法所得對等於 GH 之弦之圓心角,與對眞確正 n 角形一邊之圓心角,可比較如下:

正七角形	51°24′40″	51°25′43″
正九角形	39°56′20″	40°
正十九角形	18°56′20″	18°50′50.5″

前之度數乃依擺因豪特方法而得者,後之度數爲眞正之數.

注意. 圓周之近似的等分法,非僅限於上述三種.

18. 等分任意之角爲n分,較等分圓周,稍加困難.茲述其二三方法.

第一. 西欲洛方法

先可假定n爲奇數.何則?以n爲偶數,則爲

$$n=2^{\alpha}\cdot n',$$

但n'爲奇數.而分所設之角爲2^{α}等分,極爲容易.故必得分其一分爲奇數n'等分,則此即相當於所設之角之n等分之一.

n爲奇數,則$n+1$爲偶數,然則以

$$n+1=2^{\beta}\cdot n'',$$

但n''爲奇數.

顯然的 $$n''<n.$$

故若於等分所設之角爲奇數n分,用等分爲偶數$n+1$分所生者,即可使之歸着於等分小於n之奇數n''分者.

而於等分爲n''分,復可歸於等分小於n''之奇數分.如是重複同一之方法,至達三等分某角爲止.或不然,則爲等分某角爲2之冪數分.

然於此須十分注意者,在所設等分n分歸着於等分$n+1$分.嚴密言之,實爲不能.所謂歸着,不過爲近似的,換言之,用等分爲$n+1$分,則等分爲n分者不過謂得近似的成功也.

其方法如次.

以$\angle AOB$爲將等分n分之角,以α表之.

以O爲中心,以任意之半徑r畫圓$ABDE$,以其二直徑爲AOD, BOE.

$$\angle AOB=\angle DOE=\alpha.$$

等分$\angle DOE$之二倍爲$n+1$分,以等於其一分之弧爲EH.

$$\text{弧 } EH=\frac{2\text{弧}DE}{n+1}.$$

即 $$\angle EOH=\frac{2\alpha}{n+1}.$$

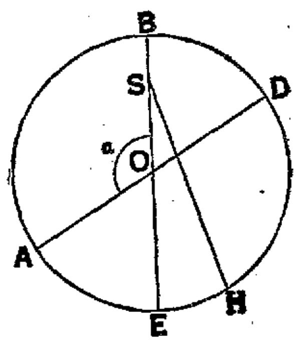

圖 33

次等分直徑BE爲$n+1$,以等於其一分之長爲BS.

$$BS=\frac{2r}{n+1}.$$

引SH,則殆爲

$$\angle ESH=\frac{\alpha}{n}.$$

若爲欲三等分$\angle AOB$,則因$n=3$,故可二等分$\angle EOD$,S爲BO之中點.於此情形α爲各種角度時,所生之誤差如次:

α	10°	20°	30°	60°	90°	120°	180°
誤差	1.″7	13″	46″	6′14″	21′40″	53′38″	3°26′6″

由此法所得之角,常大於真確等分n分之角,且其誤差因α之大亦大.故於α不大時,此法有效.

19. 第二. 凱里方法

亦如前法以n爲奇數,用等分爲$n+1$分以達近似的等分爲n分.

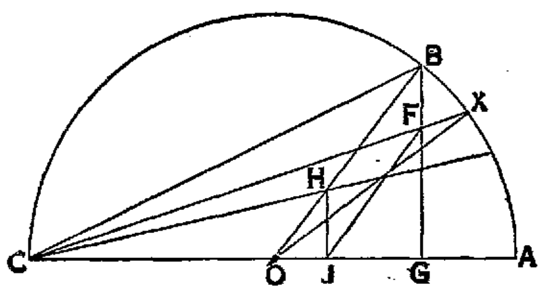

圖 39

以$\angle AOB$爲欲等分爲n分之角,以α表之.

以O爲中心,以任意之半徑畫半圓周ABC,以AC爲其直徑.引直線CH,則

$$\angle OCH=\frac{\alpha}{n+1}.$$

過H及B,各引垂直於OB之直線HJ及BG.過J引平行於OB於直線JF.其與BG之交點為F.引CF,其與圓周之交點為X,則殆為

$$\angle BOX=\frac{\alpha}{n}.$$

20. 第三. 德國某測量家之方法.

發見此法者之名雖無由知之.前之二法,皆以歸着等分n分者於等分$n+1$為其主眼,然此第三法得逕達等分n分,故甚簡便.換言之,不問n為奇為偶,故此法甚優.

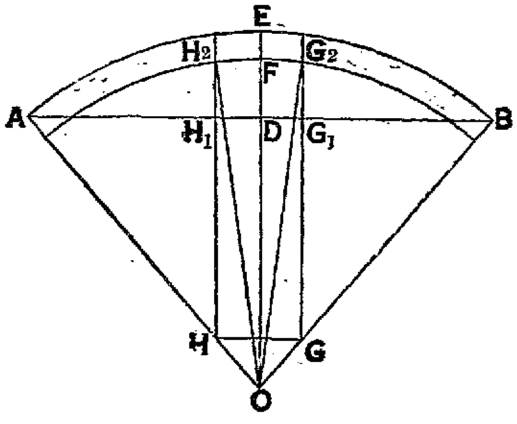

圖 40

以$\angle AOB$爲欲等分爲n分之角，以α表之．以O爲中心，以任意之半徑r畫圓弧AED．引弦AB．又引角AOB之二等分線OE．其與弦AB及弧AB之交點各爲D, E．等分DE爲三分，以近於E之分點爲F．卽爲

$$DF=\frac{2}{3}DE,\quad FE=\frac{1}{3}DE.$$

以O爲中心，以OF爲半徑，畫同心之圓弧．等分半徑OA爲n分．以其分點中最近於O者爲H．過H引平行於AB之直線HG．使與OB交於G．卽爲

$$OH=\frac{r}{n}=OG.$$

以HG投射於AB上之正射影爲H_1G_1，以HH_1及GG_1之延長線與以OF爲半徑之圓弧相交之點各爲H_2及G_2，則殆爲

$$\angle H_2OG_2=\frac{\alpha}{n}=\frac{1}{n}\angle AOB.$$

此法所生之誤差，亦復甚小．

附錄第四

用直線及圓以外之曲線以解所謂三大問題之方法

21. 立方倍積問題,即求有所與立方體二倍體積之立方體之一邊是也.以 a 表所與立方體之一邊,以 x 表所求立方體之一邊,則本題歸於方程式

$$x^3=2a^3$$

之解法,已述於本文第21節矣.

茲將示此問題得先行次之變形.

於一直線之長及其二倍之長間,插入二比例中項.

今於立方倍積問題,以 a 表所與立方體一邊之長,若於 a 及 $2a$ 之間,已插入二比例中項,則得

$$a:x=x:y=y:2a.$$

故 $$x^2=ay,$$

及 $$xy=2a^2.$$

此二式各邊相乘,則為

$$x^3=2a^3.$$

故插入之二比例中項之中,前者卽相當於所求立方體一邊之長.

此問題之變形,稱為海拍克辣戴斯(Hippocrates)之步驟.

22. 第一. 阿開托斯(Archytas)方法.

此法卽以前述之變形問題為主眼.

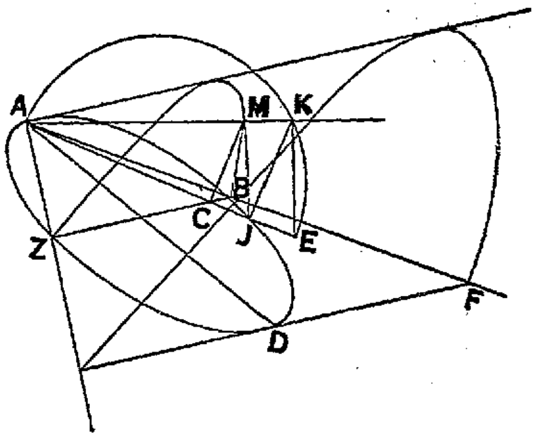

圖 41

AD 等於 $2a$, 以之為直徑畫圓.弦 AB 等於 a. 以此圓周 ABD 為底面,作直圓柱.更於與此圓周 ABD 之平面

垂直之平面中,以 AD 爲直徑,作半圓周.固定 A 點.回轉此半圓周,且其直徑常在圓周 ABD 之平面中,則由此半圓所作之一種曲面,與前所作直圓柱之側面交成一種曲線.

過 D 點,引垂直於直徑 AD 之直線 DF. 延長弦 AB. 作直角三角形 ADF. 以邊 AD 爲軸,回轉此直角三角形,則斜邊 AF 作成直圓錐之側面.此直圓錐之側面,與前之直圓柱之側面相交,又與前作之一種曲線亦相交,命與此曲線之交點爲 K.

則 K 點當然在此直圓柱之側面上.故其投射於圓周 ABD 之平面上之正射影,在圓周 ABD 之上,以之爲 J, 則直線 AJ 爲所求立方體之一邊.

今將證之.

當直線 AF 作直圓錐之側面時 F 點及直線 AF 中一切之點,皆畫半圓周.其平面爲平行且垂直於平面 ABD. 以 B 點所畫之半圓周爲 BMZ, 則因平面 AKJ 垂直於平面 ABD, M 點在直線 AK 中,故 M 點投射於平面 ABD 上之正射影,與 AJ 及 BZ 之交點 C, 應相合.故

$$MC^2=BC\cdot CZ.$$

然

$$BC\cdot CZ=AC\cdot CJ.$$

故 $$MC^2=AC\cdot CJ.$$

而 $\angle MCA$ 爲直角,故 $\angle AMJ$ 亦爲直角.

延長直線 AJ, 取 AE 等於 AD, 則因以 AE 爲直徑之圓周,必通過 K 點,故 $\angle AKE$ 亦爲直角,故 MJ 與 KE 平行.

故 $$AM:AJ=AK:AF,$$

然以 $\triangle AMJ$ 與 $\triangle AJK$ 亦相似,

故 $$AM:AJ=AJ:AK.$$

故連書此二比例式,則爲

$$AM:AJ=AJ:AK=AK:AF.$$

而因 $AM=AB=a,\quad AE=AD=2a,$

故以 x 表 AJ, y 表 AK, 則爲

$$a:x=x:y=y:2a.$$

故 AJ 爲所求立方體一邊之長.

23. 第二 勃洛特方法.*

二直角三角形 AXY 及 BYX 有公共邊 XY, 他二邊 AX 及 BY 互相平行, 斜邊 AY 及 BX 相交於 C 點, 則

$$CA:CX=CX:CY=CY:CB.$$

何則?以 $\triangle ACX$ 與 $\triangle XCY$ 相似, CX 爲 CA 及 CY 之比例

* 不明示此法所用之曲線者,爲求揭載之便宜.

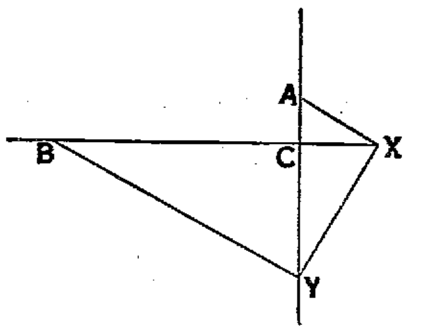

圖 42

中項,即 $$CA:CX=CX:CY.$$

又 $\triangle XCY$ 與 $\triangle YCB$ 亦相似, CY 為 CX 及 CB 之比例中項,即 $$CX:CY=CY:CB.$$

故連書此二比例式,則為

$$CA:CX=CX:CY=CY:CB.$$

故以 CA 等於 a, CB 等於 $2a$, 則 CX 即為所求立方體一邊之長.

然而二直角三角形如適於前述之條件者,乃不能作.若許用二個無刻度二曲尺,或二個直角三角板,即得畫適於此條件之直角三角形.何則?因引交成直角之直線 BX 及 AY, 以 C 為其交點,使 $CB=2CA$. 一曲尺之一邊必使通過 A 點;其直角之頂點使移動於 BX 線

上.他曲尺之一邊必使通過 B 點,其直角之頂點使移動於 AY,則當同時移動二曲尺時,兩曲尺之不通過 A 及 B 之邊,得成一致.此時兩曲尺直角頂點之地位,各爲 X 及 Y,則 CX 爲所求之長.

24. 第三. 用二拋物線之邁奈克麥斯 (Menæchmus) 方法.

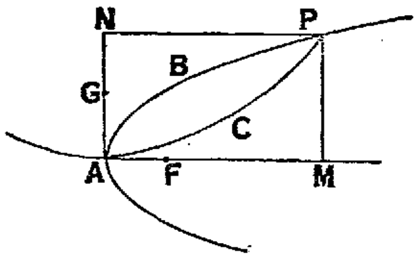

圖 43

作有互成直角之軸且有共同頂點之二拋物線,以一爲 ABP,他一爲 ACP,共同之頂點爲 A,二軸爲 AM, AN, $\angle MAN$ 爲直角.又以兩拋物線之交點爲 P.使甲拋物線頂點與焦點之距離,等於所與立方體一邊之四分之一.乙拋物線頂點與交點之距離,爲其二分之一.

則由 P 點向甲拋物線之軸 AM 引下之垂線 PM,即爲所求之長.

今證明之.

以由 P 點向乙拋物線之軸 AN 引下之垂線爲 PN, 且以兩拋物線之焦點各爲 F, G, 則

$$PM^2=4AF\cdot AM,$$

$$PN^2=4AG\cdot AN,$$

然 $$PM=AN, \qquad PN=AM,$$

故於表長之數值上

$$\begin{aligned} PM^4&=16AF^2\cdot AM^2\\ &=16AF^2\cdot 4AG\cdot AN\\ &=4^3AF^2\cdot AG\cdot PM. \end{aligned}$$

故 $$PM^3=4^3AF^2\cdot AG.$$

然 $$AG=2AF,$$

故 $$\begin{aligned} PM^3&=2(4AF)^3\\ &=2a^3. \end{aligned}$$

注意.此法相當於求二拋物線

$$y^2=ax, \qquad x^2=2ay$$

之交點之坐標.

25. 第四. 用拋物線及雙曲線之邁奈克麥斯方法.

作有通徑等於所與立方體一邊之拋物線,以此拋物線之軸及切於其頂點之切線爲幾近線,而作實軸

等於所與立方體一邊之四倍長之直角雙曲線,則由此兩曲線之交點向拋物線軸引下之垂線之長,爲所求立方體之一邊.

其證明與前述第三法略同,故略之.

注意.此法相當於求次之拋物線及雙曲線

$$y^2=ax, \qquad xy=2a^2$$

之交點之坐標.

26. 第五 阿物羅紐斯方法.*

此法之主眼亦在求插入二所與直線之長間之比例中項.

作一矩形 $ABHC$,其相鄰二邊 AB 及 AC 各等於所與之二直線.以此矩形對角線交點 G 爲中心畫圓周,與 AB 及 AC 之延長線各交於 D 及 E. 若 D, H, E 三點成一直線,則得

$$AB:CE=CE:BD=BD:AC.$$

今證之於次:

自 G 點向 AC 及 AB 各引垂線 GK 及 GL,則

$$KE^2-KC^2=(KE+KC)(KE-KC)=AE\cdot CE$$

故 $$AE\cdot CE+KC^2=KE^2.$$

* 此法亦如前述勃洛特方法不明示用曲線.

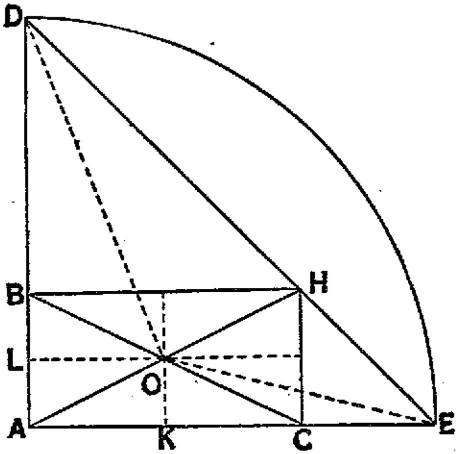

圖 44

加GK^2於兩邊,則

$$AE\cdot CE+GC^2=GE^2.$$

同樣 $$AD\cdot BD+GB^2=GD^2.$$

然 $$GC=GB,\quad GE=GD,$$

故 $$AE\cdot CE=AD\cdot BD.$$

故 $$AE:AD=BD:CE.$$

然又 $$AE:AD=CE:CH=BH:BD,$$

故 $$BH:BD=BD:CE=CE:CH.$$

故使BH等於所與立方體一邊,CH等於其二倍,則

BD 等於所求立方體之一邊.

27. 第六. 尼柯米代斯(Nicomedes)方法.

此法亦以求二所與直線間之比例中項爲主眼.以 AB 及 BC 等於此二所與直線之長,作成矩形 $ABCL$. 二等分 AB 及 BC 於 D 及 E. 延長 LD, 使與 BC 之延長線交於 G 點.於 E 點引垂直於 BC 之直線 EF. 取 CF 等於

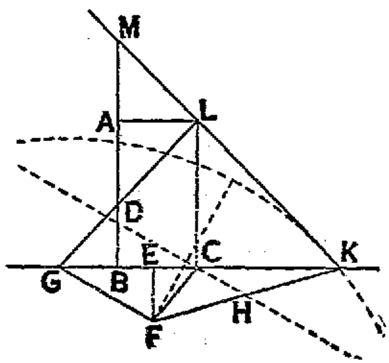

圖 45

AD. 連結 FG. 過 C 點,引平行於 FG 之直線 CH. 次過 F 點,引一直線與 CH 交於 H 點,與 BC 之延長線交於 K 點,且使 HK 等於 AD. 最後引直線 KLM, 則 AM 與 CK 爲所求之比例中項.

即 $$AB : CK = CK : AM = AM : BC.$$

今證明之.

因二三角形 MAL 與 LCK 相似,故

$$AM:LC=AL:CK.$$

然 $$LC=AB \text{ 及 } AL=BC,$$

故 $$AM:AB=BC:CK.$$

而 $$AB=2AD \text{ 及 } BC=\tfrac{1}{2}GC.$$

故 $$AM:2AD=\tfrac{1}{2}GC:CK.$$

故 $$AM:AD=GC:CK.$$

然以 CH 與 GF 互相平行,故

$$GC:CK=FH:HK.$$

故 $$AM:AD=FH:HK.$$

故 $$AM+AD:AD=FH+HK:HK$$

即 $$MD:AD=FH:HK.$$

然由作圖 $$HK=AD.$$

故 $$MD=FK.$$

因之 $$MD^2=FK^2.$$

然以 D 為 AB 之中點,故

$$BM\cdot MA+DA^2=MD^2 \quad\cdots\cdots(1)$$

同樣以 E 為 BC 中點,故

$$BK\cdot CK+CE^2=EK^2.$$

加 EF^2 於兩邊,則

$$BK \cdot CK + CE^2 = EK^2.$$

然由作圖 $CF = AD,$

又已證明 $FK = MD,$

故 $BK \cdot CK + AD^2 = MD^2.$

卽 $BK \cdot CK = MD^2 - AD^2.$

然由 (1) $BM \cdot MA = MD^2 - AD^2,$

故 $BM \cdot MA = BK \cdot CK.$

因之 $BM : BK = CK : MA$ ....(2)

然以二三角形 BMK 與 CLK 相似,故

$$BM : BK = CL : CK.$$

然以 $CL = AB$, 故

$$BM : BK = AB : CK. \quad \text{............(3)}$$

由 (2) 及 (3)

$$AB : CK = CK : MA. \quad \text{............(4)}$$

又以二三角形 LCK 與 AML 相似,故

$$CL : CK = AM : AL.$$

然以 $CL = AB$ 及 $AL = BC$, 故

$$AB : CK = AM : BC. \quad \text{............(5)}$$

故連書 (4) 及 (5), 則

$$AB : CK = CK : AM = AM : BC$$

是卽欲證之比例式.

然於此法中,過 F 點引直線 FHK, 而使 HK 等於 AD, 乃於初等幾何學範圍之內不能解者.尼柯米代斯爲欲引此直線,嘗用其所發明之曲線,卽蚌線 (Conchoid), 此曲線之性質述於次.

取互成直角之二直線 AB 及 BC. 過 AB 延長線上之

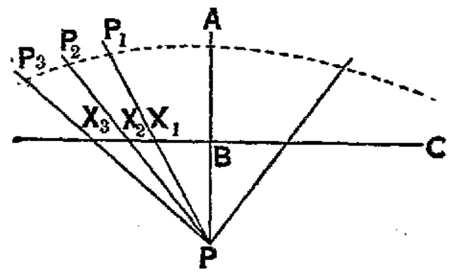

圖 46

一點 P, 引多數直線與 BC 相交,使其延長線 X_1P_1, X_2P_2, X_3P_3 等各等於一定長 AB, 則 P_1, P_2, P_3 等之軌跡,卽成所謂螺獅線或蚌線之曲線,而用直角坐標軸表此曲線之方程式爲

$$y^2(x-a)^2 = x^2(b+a-x)(b-a+x)$$

此乃四次曲線之一種.

28. 第七 稽屋克萊斯之法.

此法亦以求在二所與直線間之比例中項之主眼. 以等於所與一直線之長爲半徑,畫圓周 $AHEG$, 其中心爲 C. 引垂直於直徑 ACE 之直徑 HCG. 於其上取 CM, 等於所與他直線之長. 引直線 AM, 並延長之過 E 點,引

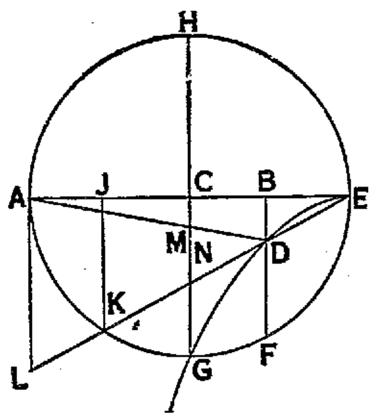

圖 47

一直線 EL, 使與直線 AM, 直徑 HCG, 及圓周 $AHEG$, 各交於 D, N 及 K. 使二線分 KN 與 ND 相等. 引直線 BDF, 使通過 D 點,且垂直於直徑 ACE, 以其足爲 B, 又以其與圓周之交點爲 F. 次由 K 向直線 ACE 引垂線 KJ, 其足爲 J. 則顯然 $JC=CB$,

因之 $AB=JE$ 及 $JK=BF$.

然 $JE:JK=BE:BD$,

又 $JE:JK=JK:AJ$,

故 $JK:AJ=BE:BD$.

故 $JF:JK=JK:AJ=BE:BD$.

即 $AB:BF=BF:BE=BE:BD$.

而以 $AB:BD=AC:CM$,

故若 $AB=k\cdot AC$,

則 $BD=k\cdot CM$.

故 $$AC:\frac{BF}{k}=\frac{BF}{k}:\frac{BE}{k}=\frac{BE}{k}:CM.$$

故 $\frac{BF}{k}$ 及 $\frac{BE}{k}$ 爲所求 AC 及 CM 間之比例中項.若 $AC=2CM$,則 $\frac{BE}{k}$ 卽相當於有一邊爲 AC 長之立方體體積二倍之立方體之一邊.

然此方法中,欲引直線 EL,乃出於吾人之作圖制限之事.稽屋克萊斯氏於引直線 EL 使二線分 KN 及 ND 相等,嘗用其所發明之曲線,卽蔓葉線(Cissoid),* 次述此曲線之性質.

以 AB 爲直徑畫圓周.引切線切於 B.由此切線上

* 以其似常春藤之葉形故名.

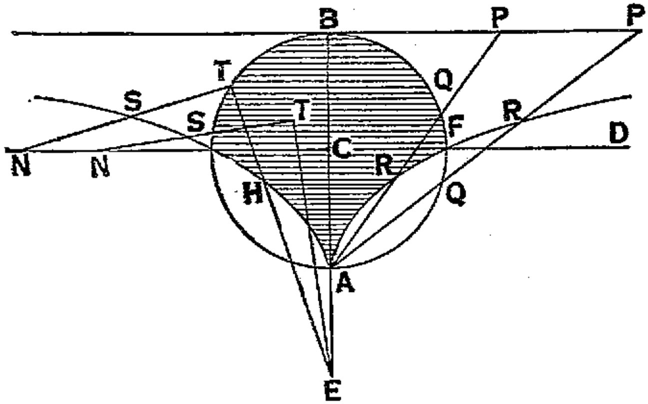

圖 48

任意一點 P 連至直徑他端 A 點,交圓周於 Q. 於此直線上自 P 往 A 之方向,取一點 R, 使 PR 等於 AQ, 則此點 R 之軌跡爲蔓葉線. 而以直角坐標軸表此曲線之方程式爲

$$x^3=(a-x)y^2,$$

此乃三次曲線也.

29. 第八. 佛也大方法.

此法亦以插入二直線間之比例中項爲目的. 以所與二直線中之大者爲直徑畫圓周. 其中心爲 O, 於此圓周引弦 AB, 使其長等於二直線中之小者. 延長 AB, 使 $BE=AB$. 引直線 AF, 使通過 A 點且平行於 OE. 過 O

點引直線 $DOCFG$, 與圓周交於 D 及 C, 與直線 AF 交於 F, 與直線 BA 之延長線交於 G, 而使

$$GF=OA=OC.$$

則 GC 及 GA 爲插入於 AB 及 CD 之二比例中項.

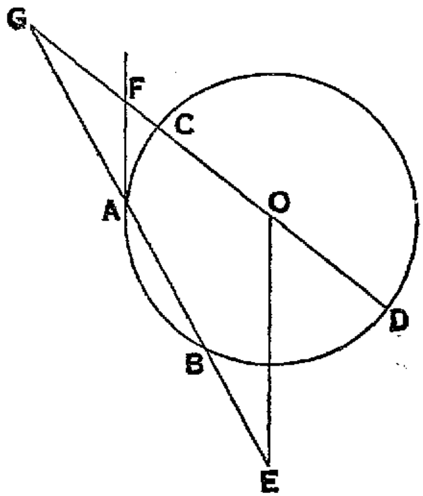

圖 49

何則?以 $$GA:GF=EA:OF,$$

然 $$GF=OC \text{ 及 } OF=GC,$$

又 $$EA=2AB,$$

故 $$GA:OC=2AB:GC.$$

故 $$GA:2OC=AB:GC.$$

即 $$GA:CD=AB:GC.$$

即 $$AB:GC=GA:CD \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

故 $$AB:GA=GC:CD.$$

故 $$GB:GD=GA:CD.$$

然 $$GB\cdot CA=GD\cdot GC.$$

故 $$GB:GD=GC:GA.$$

故 $$GC:GA=GA:CD \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

連書(1)及(2),則

$$AB:GC=GC:GA=GA:CD.$$

然而欲引直線 $DOCFG$,乃脫離吾人之作圖制限之事,於此不可不研究他一種之曲線也.

30. 第九. 戴卡特方法.

此法之主眼,在由一圓周及一拋物線之交點,而定二比例中項.此兩曲線之方程式為

$$x^2+y^2=ay+bx,$$

$$x^2=ay.$$

若其交點之坐標為 α, β,則為

$$a:\alpha=\alpha:\beta=\beta:b.$$

此法頗類似邁奈克麥斯方法.

31. 第十. 古萊谷利方法.

以一矩形之二邊為漸近線.由通過他二邊交點之直角雙曲線與此矩形外接圓之交點,向漸近線引下垂線,其長為可插入於矩形兩邊間之二比例中項.表此兩曲線之代數方程式為

$$xy=ab,$$

$$x^2+y^2=ay+bx.$$

若其交點之坐標為 α,β, 則為

$$a:\alpha=\alpha:\beta=\beta:b.$$

32. 第十一. 牛頓方法.

引直線 OA, 使等於二所與直線中之大者,二等分之

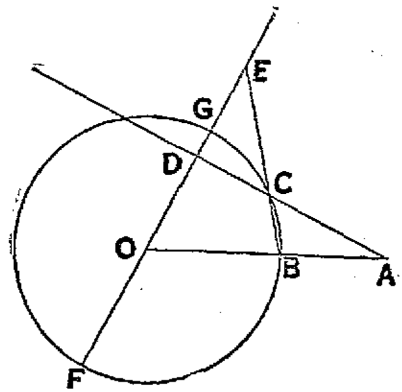

圖 50

於B，以O爲中心，OB爲半徑畫圓周．引弦CB爲等於二所與直線中之小者．引通過O點之直線$FODGE$，使與圓周交於F及G，與AC之延長線交於D，又與BC之延長線交於E，而使DE等於OB，則OD及CE爲所求之比例中項．

今證明之．

因直線ACD截三角形OBE之三邊，由邁奈勞斯定理，

$$OA\cdot BC\cdot ED=BA\cdot EC\cdot OD.$$

故 $$2BC\cdot ED=EC\cdot OD.$$

卽 $$BC\cdot 2ED=CE\cdot OD.$$

然 $$ED=OB,$$

故 $$BC\cdot OA=CE\cdot OD.$$

故 $$BC:OD=CE:OA \quad\cdots\cdots(1)$$

故 $$BC:CE=OD:OA.$$

故 $$BC+CE:CE=OD+OA:OA.$$

故 $$BE:CE=GE+FG:OA=FE:OA.$$

因之 $$BE:FE=CE:OA.$$

然 $$BE:CE=FE:GE$$

故 $$GE:CE=BE:FE=CE:OA.$$

故 $$OD:CE=CE:OA \quad\cdots\cdots(2)$$

連書(1)及(2),則爲

$$BC:OD=OD:CE=CE:OA.$$

此法引直線 $FODGE$,乃需吾人作圖範圍外即直線及圓以外之曲線者也.

上述者外,當有種種之方法,今省略之.

33. 余於次將易以解角之三等分問題之方法.

第一. 海佩阿斯(Hippias)方法.

海佩阿斯嘗發明一種超越曲線,即非代數的曲線,詳言之,即無代數的方程式之曲線.此曲線更用於後節所示之圓積問題,故名爲圓積線,今述其性質.

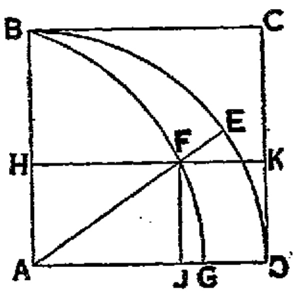

圖 51

有正方形 $ABCD$ 設想有等於邊 AB 之一直線,以 A 爲定點,由邊 AB 之地位,回轉之,至邊 AD 之地位.且同時以恆平行於邊 BC 之一直線,由 BC 之地位,移動至邊 AD 之地位,則此二直線之交點畫成一曲線,但須兩直線進行之速度相同.此曲線稱爲圓積線.

以一直線之地位爲 AE,他直線之地位爲 HK,其交

點為 F,則顯然為

$$\text{弧 } BED : \text{弧 } BE = BA : BH.$$

故以 AB 等於長之單位,則

$$\frac{\pi}{2} : \text{弧 } BH = 1 : BH.$$

故　$$\text{弧 } BE = \frac{\pi}{2} BH.$$

故弧 BE 正比例於 BH.

以角 BAE 為欲三等分之任意之角,引圓積線 BF. 自 F 向 AB 引垂線 FH. 三等分 BH. 過各分點,引垂直於 AB 之直線.求與圓積線相交之點. 再以之與角之頂點 A 連結卽得.

注意. 此法適用於等分任意之角為 n 分甚明.

34. 第二. 尼柯米代斯方法.

尼柯米代斯以其所發明之曲線,卽蚌線,用於立方倍積問題,(參照第27節)又用此曲線於角之三等分問題.

以角 BAC 為欲三等分之任意之角,作矩形 $ABCD$. 於邊 DC 之延長線上求 F 點,引直線 AGF,使 GF 等於 AC 之二倍. 則 $\angle AFC$,卽 $\angle BAG$,成為 $\angle BAC$ 之三分一(此乃初等幾何學教科書中屢見之問題). 今 A 為定點,

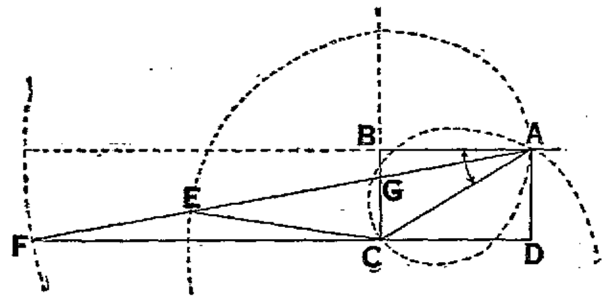

圖 52

AC 爲定長,故等於 AC 二倍之 GF, 其 F 點之軌跡,卽爲蚌線.故求此蚌線與 DC 之延長之交點卽得.

35. 第三. 用巴斯開之蝸線*方法

於前述之第二方法,以 A 爲極坐標之極, AC 爲主線.以 a 表 AC, 作巴斯開之蝸線,則其方程式爲

$$r=2a\cos\theta+a.$$

而
$$r=2a\cos\theta$$

以 C 爲中心, CA 爲半徑之圓之方程式.而通過 E 點.故此蝸線通過 F 點.故此蝸線與直線 DC 之交點,卽爲 F 點.

注意. 巴斯開蝸線一般者,有下方程式

$$r=b\cos\theta+a,$$

* 形似蝸殼故名.

今不過用其特殊者.而此特殊者,因用於解角之三等分問題,故有三等分線之名.唯若單稱三等分線,雖多指蝸線.然可利用於角三等分之曲線,廣稱三等分線,而如此之曲線,已發見者不遑枚舉.例如馬克陸利因(Maclaurin)之三等分線,迦特洛因之三等分線,隆西雅之三等分線等.雖然用此等曲線之方法,今皆略之.唯將述一余最近所見之方法.然後列舉用二次曲線之二三方法.

36. 第四. 布洛翁方法.

此法乃用所謂角線*之曲線者.

今有一直線,通過所與圓之中心 O,與此圓周交於 H 點.且與所與直線 LL' 交於 K,而求 HK 中點 P 之軌跡.

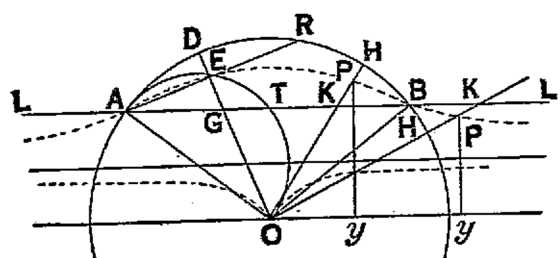

圖 53

* 似角一對故名.

以O爲坐標原點,平行於LL'之直線及與之垂直之直線之坐標軸,以d表自O至LL'之距離,n表PH及PK,且以r表圓之半徑,則

$$\frac{y}{d}=\frac{r+n}{r+2n},$$

而
$$n=\sqrt{x^2+y^2}-r.$$

故此軌跡之方程式爲

$$\frac{y^2}{d^2}\{2\sqrt{x^2+y^2}-r\}^2=x^2+y^2.$$

變化此式,則爲

$$y^2\{2\sqrt{x^2+y^2}-r-d\}\{2\sqrt{x^2+y^2}-r+d\}=d^2x^2.$$

此曲線有二枝線,且以下之直線爲其漸近線.

$$y=\frac{1}{2}d.$$

用此曲線以三等分任意之角之方法如次.

以角AOB爲欲三等分之任意之角,以AO爲直徑畫半圓ATO,與角線之交點爲E,則爲

$$\angle AOE=\frac{1}{3}\angle AOB.$$

何則?以E點在角線中,故

$$DE=GE.$$

而 $\angle AEO$ 爲直角,故

$$\angle DAE = \angle GAE.$$

故 弧 AD = 弧 DR = 弧 RB.

故 $$\angle AOD = \frac{1}{3}\angle AOB.$$

第五. 朴普斯記載之方法.

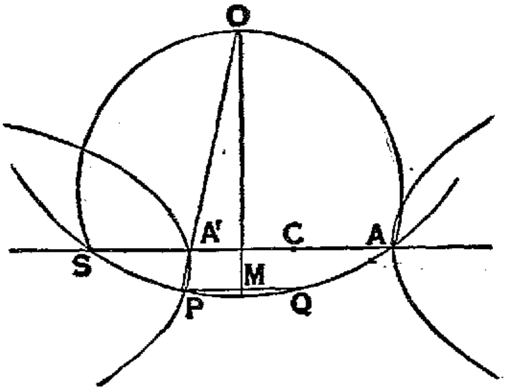

圖 54

畫離心率等於 2 之一雙曲線,其中心爲 C, 其二頂點爲 A, A' 延長 CA' 至 S, 使 $A'S = CA'$. 於 AS 上畫一圓弧,使其所含之角等於欲三等分之角.以 AS 之垂直二等分線與此圓弧之交點爲 O. 以 O 爲中心,以 OA 即 OS 爲半徑畫圓,與以 A' 爲頂點之雙曲線之枝線交於

P,則 $\angle SOP$ 爲 $\angle SOA$ 之三分之一.

何則?以離心率等於 2,故 S 爲此雙曲線之焦點. AS 之垂直二等分線爲準線,而自 P 至此垂直二等分線距離 PM 之二倍等於 PS. 以 PM 之延長線與圓弧 APS 之交點爲 Q,則 PQ 爲 PM 之二倍,AQ 等於 SP 甚明.故

$$SP=PQ=QA.$$

故 $$\angle SOP=\angle POQ=\angle QOA.$$

37. 第六. 戴卡特的方法.

取二直角坐標軸,引一拋物線及一圓周,其方程式各爲

$$y^2=\frac{1}{4}x \text{ 及 } x^2+y^2-\frac{13}{4}x+4ay=0,$$

但 a 等於欲三等分之角之正弦,則此二曲線交點之縱坐標適合於方程式

$$a=3y-4y^3.$$

故取以 a 爲正弦之角之三分之一,由三角術公式 y 卽爲此三分之一之角之正弦.故決定此交點,卽得三等分所與之角.

38. 第七 牛頓方法.

畫離心率等於 2 之一雙曲線,以一枝線之頂點爲 A,他枝線之焦點爲 S,(見第五法之圖)畫圓弧 APS 於

AS 上,使所含之角等於所與角之補角.(畫弧 APS 方法與第五法不同)其與以 S 爲焦點爲枝線之交點爲 P,則 $\angle PAS$ 爲所與之角之三分之一.

何則?以 $\angle APS$ 等於所與角之補角, $\angle PAS+\angle PSA$ 等於所與之角.同於第五法之證明得

$$2\text{弧}\,PS=\text{弧}\,AP,$$

故 $$2\angle PAS=\angle ASP$$

故 $\angle PAS$ 之三倍等於所與之角.

39. 第八. 苦萊依羅方法.

以 $\angle AOB$ 爲欲三等分之任意之角,使 $OA=OB$. 以 O 爲中心; OA 爲半徑畫圓.三等分直線 AB 於 H, K 以 $\angle AOB$ 之二等分線 OC 與直線 AB 之交點爲 L, 則 $AH=2HL$. 以 A 爲焦點, H 爲頂點, OC 爲準線畫雙曲線.以此雙曲線之 H 爲頂點之枝線與前畫之圓周之交點爲 P, 引垂直於 OC 之直線 PM. 以其延長線與圓周之交點爲 Q, 則以

$$AP:PM=AH:HL=2:1.$$

故 $$AP=2PM=PQ.$$

故 $$AP=PQ=QR.$$

故 $$\angle AOP=\angle POQ=\angle QOR.$$

注意. 此法雖稱爲吉萊依羅方法,與第五法所述朴普斯方法,實歸屬於同一之事,僅陳述之方法不同,而此種方法,最多重複之發見,如郁依羅耳之書,愛因利克斯之書,又近出之布洛翁論文等,均有揭載.

40. 第九. 希稚耳方法.

以 $\angle AOB$ 爲欲三等分之任意之角,使 $OA=OB$. 以 O 爲中心, OA 爲半徑畫圓.

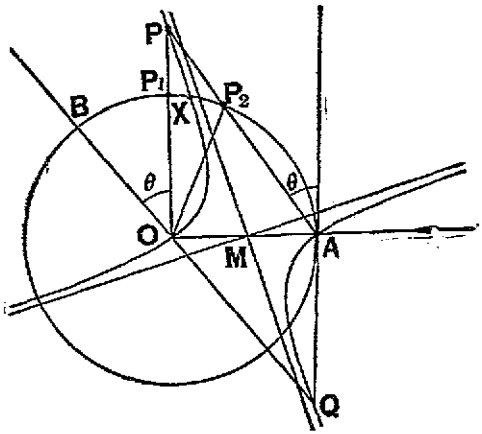

圖 55

於 OB 之一側作有任意之大之角 θ. 又於切圓於 A 之切線之一側(在與前反對方向)亦作 θ. 以此二角一邊之交點爲 P. 變角 θ 之大,則 P 點畫一直角雙曲線.

而其雙曲線通過以OA爲半徑,且切圓於A之切線與BO之延長線之交點Q. 以OP及AP與圓周之交點各爲P_1及P_2, 則

$$\angle AOP_2=2\theta=2\angle BOP_1,$$

故以此雙曲線與圓周之交點爲x, 則以其與P_1, P_2爲一致之情形,

$$\angle AOX=2\angle BOX.$$

故X點乃三等分弧AB之一點也.

41. 最後余將述同圓積線以解圓積問題之方法.

如本文第43節說明,以所與圓之直徑之長爲$d=2r$, 以其圓周之長爲n, 則

$$n=\pi d.$$

又以其面積之大爲A, 則

$$A=\frac{1}{4}\pi d^2=\frac{1}{2}rn.$$

故若得面積等於A之正方形之一邊,則應得長等於n之直線.

參看附錄第四之第33節之圖.

$$弧\,BED : 弧\,BE=BA : BH,$$

故以r表半徑AB, 以x表AH, y表HF,

則 $$\frac{y}{x}=\tan BAE$$

$$=\tan\left(\frac{弧\,BE}{BA}\right)$$

$$=\tan\left(\frac{弧\,BED}{BA}\cdot\frac{BH}{BA}\right)$$

$$=\tan\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{r-x}{r}\right)$$

$$=\cot\frac{\pi x}{2r}.$$

故 $$y=x\cot\frac{\pi x}{2r}.$$

是卽圓積綫之方程式.

使 x 十分接近於 O, 則得 AG 之長,卽

$$AG=\lim_{x=0}x\cot\frac{\pi x}{2r}$$

$$=\lim_{x=0}\frac{x}{\sin\frac{\pi x}{2r}}$$

$$=\frac{2r}{\pi}.$$

故 $$\pi=\frac{2r}{AG}.$$

然 $$n=\pi d=2\pi r.$$

故
$$\pi=\frac{n}{2r}.$$

故
$$AG:2r=2r:n.$$

故若得畫圓積線,換言之,容許使用此曲線,則因得知 AG. 求 AG 與 $2r$, 即 AB 之第三比例項,則此即所求之 n 也.

附錄第五

求等於圓周之直線之近似的解法

42. 於附錄第四之末節已述用圓積線以求等於圓周之直線之方法.今不用此種曲線,而立於所設作圖制限之下,換言之,僅以有限回作直線與圓周近似的解此問題.茲述二三方法於下:

第一.

先引任意之有限直線,延長之至等於其三倍之長,次七等分爲有限直線,添其一部分於前之長,其全長爲有限直線之$3\frac{1}{7}$倍.故此長爲以此有限直線爲直徑之圓周之長.若依通例近似的爲

$$\pi=3\frac{1}{7},$$

是乃此問題之近似的解法.若當欲

$$\pi=3.1416,$$

更應由此所得之長,減此有限直線之八百分之一,然

此畢竟不便實行.

43. 第二. 斯派赫特(Specht)方法

以O爲中心,r爲半徑畫圓周.引切於半徑一端A之切線,於其中定二點B及C,使爲

$$AB=\frac{11}{5}r,$$

$$BC=\frac{2}{5}r,$$

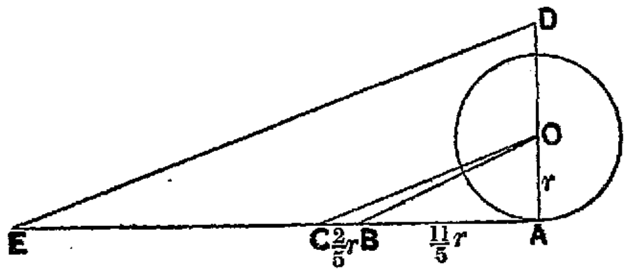

圖 56

次延長AO至D點,使AD與OB相等.過D引平行於OC之直線DE,則AE殆等於此圓周之長.

何則?以 $$OB=\frac{r}{5}\sqrt{146}.$$

$$AC=\frac{13}{5}r,$$

故 $$AE=\frac{13r}{25}\sqrt{146}$$

$$=r(6.283184)$$

$$=2r(3.141592),$$

而 $$\pi=3.141592\cdots\cdots.$$

44. 第三. 阿獨萊爾記載之方法.

以 O 爲中心, r 爲半徑畫圓周. 引切於直徑 AOB 一端之切線.定 C 點, 使

$$\angle COA=30^\circ.$$

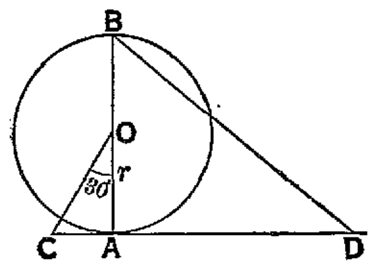

圖 57

次求在 C 之反對一側之 D 點, 使

$$CD=3r,$$

則 BD 殆等於此圓周之半.

何則?以 $$AC=\frac{r}{3}\sqrt{3}.$$

故 $$AD=3r-\frac{r}{3}\sqrt{3}.$$

故 $$BD=r\sqrt{4+\frac{(9-\sqrt{3})^2}{9}}$$

$$=\frac{r}{3}\sqrt{120-18\sqrt{3}}$$

$$=r(3.141533).$$

而 $$\pi=3.141592\cdots\cdots$$

45. 第四. 卜來爾方法.

以 r 爲所與圓周之半徑,先作 r 之 $\frac{5}{4}$ 倍之長.次作以 r 之5倍及 r 之2倍爲二邊之直角三角形之斜邊,更作此斜邊之 $\frac{1}{8}$ 倍之直線.此二直線之和,即等於所與圓周之半.

何則?以此長爲 r 之

$$\frac{5}{4}+\frac{1}{8}\sqrt{15^2+2^2}\text{倍},$$

即 $$\frac{10+\sqrt{229}}{8}\text{倍},$$

即等於3.1415932……倍.

而 $\pi=3.141592\cdots\cdots$.

附錄第六

π 之值

46. 求 π 精密值之方法自來採用者,大別之可得二種.

第一.於所與圓周內作內接及外切正多角形,圓周在此兩多角形周圍中間漸次2倍其邊數,而求此兩多角形周圍之極限.

第二.發見表 π 之值之解析式,如無限級數,無限乘積,無限連分數等,用之以達目的.

第一種可稱爲幾何學的方法,第二種可稱爲解析的方法,又或可稱前者爲古代法,後者爲近世法.

由古代法,極其粗約定 π 之值爲

$$3\text{ 或 }3.16$$

者,爲巴比侖人,埃及人等.

歐几里得嘗以

$$3<\pi<4,$$

然未克與以更精密之值.

亞基米台斯(Archimedes)嘗由作正96角形而得

$$3\frac{1}{7}>\pi>3\frac{10}{71}$$

自有以π之近似值爲$\frac{22}{7}$

脫萊米(Ptolemy)嘗以

$$\pi=3\frac{17}{120}.$$

羅馬人嘗用3或4或$3\frac{1}{8}$.

印度數學者嘗用$\frac{49}{16}$或$\frac{62832}{20000}$或$\sqrt{10}$. 其中如巴斯卡洛嘗由作正384角形而得$\frac{3927}{1250}$及$\frac{754}{240}$.

亞拉伯人亦嘗用$\frac{22}{7}$, $\sqrt{10}$及$\frac{62832}{20000}$.

由西曆第十三世紀至第十五世紀之間,歐洲人嘗用$1440/458\frac{1}{3}$或$62832/20000$或$\frac{3}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{6})$.

至第十六世記,布愛特由作正6×2^{16}角形而決定爲

$$3.1415926535<\pi<3.1415926537.$$

布氏又得下之公式

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}\cdot\frac{2}{\sqrt{\{2+\sqrt{(2+\sqrt{2})}\}}}\cdot$$

於同世紀阿獨利安邁斐斯之父嘗與 355/113, 而阿獨利安嘗親自由作正 1073741824 (卽 2^{30}) 角形, 正確算得 π 之値至小數第十五位.

又於同世紀之末, 魯道夫, 巴因, 席奈因嘗由作正 60×2^{33} 角形, 正確算得 π 之値至小數第二十位. 又作正 2^{62} 卽 4611686018427387904 角形, 算至小數第三十二位其死後嘗刻 π 之値至第三十五位於其墓石上.

斯奈爾又古利因擺爾蓋爾亦嘗致力於此.

於第十七世紀中頃, 瓦利斯嘗於其著作中揭載下列公式之證明

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdots\cdots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdots}$$

又數年以前嘗揭載布洛因克發見之公式

$$\frac{\pi}{4}=1\div\frac{1^2}{2+}\frac{3^2}{2+}\frac{5^2}{2+}\cdots\cdots.$$

然此等公式並未使用於算 π 之値.

47. 以幾何學的方法精密決定 π 之値, 勢非增大正多角形之邊數不可, 上述學者已充分使之增大矣. 由

邊數n之一邊之長,以求邊數$2n$之一邊之長,其公式雖屬簡單,然重覆運用,不僅緊瑣,且計算之際誤差重出,欲得正確解答,實至困難.上述諸氏,可謂能勝此困難者矣.然戰此困難,終非近世學者所堪,卒乃尋得算出π之值之武器,即無限級數是也.

於西歷千六百七十一年,克萊谷利證明θ合於

$$-\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq+\frac{\pi}{4}$$

時,有 $\theta=\tan\theta-\frac{1}{3}\tan^3\theta+\frac{1}{5}\tan^5\theta-\cdots\cdots+\cdots\cdots.$

因之 $$\tan^{-1}x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-+\cdots\cdots.$$

此級數通常稱為克萊谷利級數.

於此級數若

$$\theta=\frac{\pi}{4},\text{因之 }x=1,$$

則為

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdots\cdots.$$

取此右邊之數項,$\frac{\pi}{4}$之值,因之π之值,可以算得.然此級數乃所謂遲緩收斂級數,故若項數取用不多即難

算得π精密之值.

於千六百九十九年夏浦因鶴萊之指示,於克萊谷利級數以

$$\theta=\frac{\pi}{6},\text{因之}x=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

乃得

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots\right).$$

由是算至小數第七十二位,而其結果至第七十一位皆屬正確.

於千七百六年之前,邁琴算至第百位,其所用公式爲

$$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239},$$

即以二個克萊谷利級數併用之.

於千七百十九年,獨洛克尼用與夏浦同樣方法,進至第百二十七位,但其中至百十二位皆正確.

於千七百七十六年,哈同氏,千七百七十九年,敖來爾氏曾示下之公式爲有效者.

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}$$

又 $$\frac{\pi}{4}=5\tan^{-1}\frac{1}{7}+2\tan\frac{3}{79}.$$

然未用之以完成計算.

至第十九世紀之用公式

$$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{70}+\tan^{-1}\frac{1}{99}$$

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}$$

$$\frac{\pi}{4}=2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$$

等,正確計算至百五十二位,或二百位,或二百四十八位,

及千八百五十三年羅撒夫特算至四百四十位.夏因克斯算至五百三十位.同年夏因克斯復算至六百七位.終於千八百七十年達七百七位.而此等計算由前述邁琴採用之公式而成.及今雖未見進至夏因克斯之結果以上者,然如是以求,實亦徒勞無益之事也.

48. 至在日本所用之值,古代嘗用3或3.16.即傳於西歷紀元前七百年,我國周代商高所著之周髀算經及九章算術中,其值爲3,故日本學者亦襲用之.於日本寬永四年(西歷千六百二十七年)日人吉田光由之塵刼記中載有3.16.

日人村松茂清於日本寬文三年(西歷千六百六十年)所著之算俎,由作正 2^{15} 即 32768 角形,算至小數第二十一位,但至其小數第七位結果正確.

日人關孝和於其遺稿大成算經載有算至小數第二十四位之正確值.關氏生於寬永十九年至寶永五年間(西歷千六百四十二年至千七百八年)爲當時最有名學者.

日本享保七年(西歷千七百二十二年)日人建部賢弘於其稿不休綴術中達第四十一位.

後日人松永良弼於日本文元四年(西歷千七百三十九年)正確算至第五十位.此爲日本算家到達最精密之值.載於其著作方圓算經中.

關氏以後,多用無限級數算之,當然非以所謂角術即決定正多角形之邊之術之不壓.

關氏高足荒木村英之弟子大高由昌著括要算法,寶永六年即西歷千七百九年出版)中有 355/113 之值,恐自關氏之時已用之,而 $\frac{22}{7}$ 一值謂爲我國宋朝祖沖之之約率,355/133 一值則爲其密率.

上述之外,於日本及我國所用 π 之值甚多,今從略焉.

中華民國二十四年二月初版

(53820·1)

算學叢書 初等幾何學作圖不能問題一冊

每冊定價大洋壹元叁角

外埠酌加運費匯費

原著者 林鶴一

譯述者 陳懷書 任誠 趙仁壽

發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

(本書校對者胡達聰)

B六一五四

周

二