羅素叢書

羅素算理哲學

傅種孫 張邦銘同譯

共學社

共 學 社

羅 素 叢 書

羅素算理哲學

傅種孫 張邦銘譯

商務印書館發行

民國二十一年一月二十九日敝公司突遭國難總務處印刷所編譯所書棧房均被炸燬附設之涵芬樓東方圖書館尚公小學亦遭殃及盡付焚如三十五載之經營隳於一旦迭蒙各界慰問督望速圖恢復詞意懇摯銜感何窮敝館雖處境艱困不敢不勉爲其難因將需用較切各書先行覆印其他各書亦將次第出版惟是圖版裝製不能盡如原式事勢所限想荷鑒原謹布下忱統祈垂詧

上海商務印書館謹啓

中華民國十一年八月初版
民國廿二年一月印行國難後第一版

共學社叢書 羅素算理哲學一冊 (三一四一)

Introduction to Mathematical Philosophy

每冊定價大洋玖角
外埠酌加運費匯費

原著者 英國 B. Russell

譯述者 傅種孫 張邦銘

發行兼印刷者 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

二四四三上

著者原序

這本書的要旨是在做入門的引導,對於所研究的問題並不求論到詳盡無餘的地步. 有些結果,向來只有深通邏輯符號的人纔能利用的,改變形式來敍述,使初學者的困難減少至最低度,這好像並非妄想. 書中對於現今仍然大可懷疑的問題,努力求免武斷,就是論題的選擇也不免爲這努力所左右. 算理邏輯的前部不如以後各部明瞭確定,但哲學的興味至少是一樣的. 以下諸章所論多半不能正當地叫做哲學,雖然在科學未曾滿足地說明以前,他們都屬於哲學的範圍. 譬如無窮及連續兩樣的性質,從前屬於哲學的,現在却屬於算學了. 算理哲學照嚴格的意義講,大概不能如我們的主張包括像這種地方所得科學的結果:算學的哲學所論的問題,當然屬於知識的邊界其比較的確定,現今還不曾達到. 然而這種問題的探討,若非算學原理比較科學的部分已經熟悉大概不能有

多大的成蹟. 所以一本論這些部分的書,也可當算理哲學入門書之目,雖然除掉越出自己範圍以外的地方,這種書所論不足算做哲學之一部. 但所論的確也是一門自成體段的學問,並且這門學問在懂得的人眼中看,好像足以破壞古來哲學之大部,就是時下的哲學也有不少要因他失其效力. 算理邏輯與哲學的密切,於此可見,此外他還與哲學上未決的問題有些關係.

因爲這層緣故,並且所論的本身也很重要,所以我們將算理邏輯主要的結果,用一種形式簡短地敍述出來,使沒有算學知識且不通算學符號的人都可解可讀,未始不是一件有用的事. 但這裏也同旁處一樣,若從研究的前途着眼,方法較之結果尤爲重要;而照本書的結構,方法却不能詳細地解釋. 希望讀者之中有些感到充分的興趣,更進一步去研究方法,知道算理邏輯怎樣纔能有助於舊的哲學問題的研究. 這是本書所不曾論到的.

原書出版者的弁言

因爲算理哲學與算學之哲學有別而以爲本叢書不當收入此書的人,請他讀一讀著者自序中關於這層的議論.序中所暗示哲學範圍之改訂,所謂類,連續,無窮等問題應離開哲學歸入算學的,我們並不必同他抱一樣的見解,纔能看出以後那些界說和討論對於『舊哲學』(Traditional philosophy)的研究的關係.哲學家不願意將這些題目讓與任何科學,那麽,這些觀念既然在算學上占重要的位置,無論如何,他們應當知道算學所給這些觀念之精確的意義.就又一方面說,倘若有些算學家以爲這些界說和討論好像是就本來單純的東西無謂地探討,自取繁雜,那麽,從哲學方面看,他們應當知道這裏也同旁處一樣,看着是單純的,也許暗含着複雜之點,這複雜之點應當要有人解明,不管他是算學家也好,哲學家也好,或像著者以算學家而兼哲學家的也好.

目錄

羅素算理哲學

第一章

自然數纚

算學這門學問如果我們取其中頂普通頂熟悉的部分做出發點可以有兩個方向進行.那較著的一個方向,是建設的,是由單純漸趨複雜的:由整數而分數,而實數,而複素數;由加法,乘法,而微分,積分,而高等算學.他一方向,不很顯著,其方法是分析的,其抽象的程度,是愈進愈深的,其邏輯的單純,是愈進愈甚的:我們向這方向進行,不問從最初假定的出發點能界說或推論出些什麼來,却反轉去追究這個出發點,可以由那一些更普遍的觀念或原理界說或推論而出.算理哲學所以異於尋常算學而與之相反的地方,就在他從事這反對的方向.但讀者勿以辭害意,這區別全是研究者心理狀態上的區別,不在所研究的材料.古代希臘的幾何學者,由埃

及人測地經驗所得之法則,研究到可以證明這些法則的普遍命題,然後再研究到歐几里得(Euclid)的公理及公法.由前面的界說說起來,他們正是致力於算理哲學;迨公理公法既經達到之後他們的應用,如歐氏原本中所見的,那就屬於尋常算學的範圍了.算學與算理哲學之分,全視研究上所感之興趣及所經之途程何如,與其所研究的命題,是沒有關係的.

這個區別,還可以換一方法來說明.算學中最顯明最容易的東西,並不是依邏輯講居於最初的那些東西,而是依邏輯的眼光看立於中途的那些東西.頂容易領會的概念,是那些不甚單純(『單純』這字照邏輯的意義講)也不甚複雜的,正如頂顯而易見的東西,是那些不甚遠也不甚近,不甚大也不甚小的.為擴充我們視覺的能力,我們需要兩種器械,望遠鏡與顯微鏡;為擴充我們邏輯的能力,我們也需要兩種器械,一種使我們能進到高等算學,一種使我們反退轉來,

對於算學中事物我們意欲假定他的,却替他求得邏輯的基礎. 將尋常算學觀念分析起來,我們能得着新識見,新能力,並且經過這次回程之後,再向新的路線進行,可以有法研究到種種嶄新的算理論題. 本書目的,在將算理哲學加以簡單的非專門的說明,其疑難部分幾非粗淺之言所能論者概從簡略. 欲求完備的討論,請觀算學原理;(Principia Mathematica).(原注1)本書不過一個發凡起例的入門書罷了.

現今普通受過教育的人,大概都以為數學的起點,就是那整數之串.

1, 2, 3, 4, ……… etc.

或者有點算學知識的人纔以為數起於0,不起於1,今姑假定此為一般知識之程度,以

0, 1 ,2, 3, ………n, n+1, ………

這個數串為起點,以後我們講自然數纚(譯者註1)Series of natural numbers),便是指這個數串而言.

我們能夠採用這個數纚作起點,全因現今的

文明程度很高. 實在講起來,知道雞一對或狗一雙是數 2 的一個例,必很要些年代: 其中所含抽象的程度,絕不是可以容易達到的. 古人發見 1 是個數,一定也不容易. 至於 0,檢直是近世加進去的;希臘羅馬時代,並沒有這個數字. 倘若我們生當古代而從事算理哲學,那末我們的起點,必然比自然數纙抽象的程度減殺些,而自然數纙,却成爲我們回程上的一段驛站. 反過來說,到將來我們將算學之邏輯的基礎都已熟悉,我們的起點,必然比現在採用的起點還遼遠些,乃是我們現在分析工夫的一個後段驛站. 就目前論,自然數纙,似即代表算學中頂容易頂熟悉的部分了.

但雖熟悉,却不會被人眞正理解. 曾經給『數』或『0』或『1』定下界說的人,很少很少. 從 0 起所有自然數,皆可由迭次加 1 得來,這是很明白的; 但是『加 1』,『迭次』是什麼意思,也得下個界說纔行. 這個問題並不容易. 晚近以前的人,都相信算

術最初諸觀念中,必定不免有些太簡單太根本而不能界說的觀念非姑且承認不可的. 凡經過界說的名詞,無一不是用別的名詞界說的,由此可見人類知識,常須拿些名詞,姑且承認他們是無界說可明,然後界說別的名詞,纔有起點. 名詞中必定有些不能界說的,這一層,我們並不容易看出:也許我們界說的工夫做深一步,界說的界限便推遠一步,永無止境. 反過來說,如果我們的分析工夫做的充分了,也許可以達到一些實在很簡單的名詞,依邏輯不能下那種以分析爲界說的界說 這問題,我們無解決的必要;爲我們的目的起見,祇要知道人的知識有限,而我們所知道的界說,必需有個起點,這起點便是些名詞,這些名詞,雖不必是永遠不能界說,我們可暫且不界說.

所有古昔傳下的純正算學,連解析幾何在內,可以視爲全由自然數之命題組織而成. 換言之,其中名詞,都可由自然數界說之,其中命題,都

可由自然數之性質推出之，——再各加純正邏輯之命題及名詞.

凡古昔傳下的純正算學，都可由自然數誘導而出，這層雖然早經有人疑到，却直到近世方才發見. 派達哥拉斯(Pythagoras)相信不但是算學可由數推演而出，萬事萬物都可由數推演. 他算是在所謂『算學之算術表示』(Arithmetising of mathmeetics)上發見最重大的困難的一個人. 不可通約數之存在，是他發見的，他特別發見正方形邊與對角線之不可通約. 設正方形之邊爲1寸，則其對角線之寸數爲$\sqrt{2}$，數之中好像並無此數. 這個問題，直至今日，才確切的解決，其解決全借助於『歸算術於邏輯』(Geduction of Arithmetic to logic)的理論，其說俟以後諸章詳之. 現在只認『算學之算術表示法』(Arithmetisation of mathematics)爲眞確，將他置諸不論，雖然，他很爲重要.

將古昔傳下的純正算學已經都歸到自然數

的理論,邏輯的解析之第二步,就是將這理論,再歸到他可以由之而生之極少數的前提,及無界說的名詞. 這種工夫裴阿諾 (Peano) 氏已經做成功了. 他證明凡自然數的理論,都可以由三個根本觀念,五個根本的命題,再加上純正邏輯之名詞及命題,推求而出. 這樣說,這三個觀念及五個命題,好像就是古昔傳下的純正算學的保證了. 如果他們又能用別的名詞和命題去界說去證明,純正算學的全部,也一樣的可能. 他們在邏輯上的『重要』,(如果我們能這樣說)竟和一切由自然數理論推求出來之各種科學相等;五命題如果保證是眞確,其中所含純正邏輯的工具也毫無錯誤,這些科學也就保證是眞確. 經過裴氏這番工夫,分析算學遂異常省力.

裴阿諾的三根本觀念 (Peano's three Primitive ideas) 是:

0, 數, 繼數,

『繼數』指自然次序中之次數. (Next number)

例如 0 之繼數爲 1, 1 之繼數爲 2,…….『數』指自然數之『類』(原注 2). 他並沒假定自然數中之各項我們全都知道,他只以爲我們平常說『這是一數』或『那是一數』時的『數』所指的是什麼,我們是知道的;好像說『約翰是一人』,雖然全人類中的各個,我們並不盡知道,這句話中的『人』指的是什麼,我們是知道的.

裴阿諾的五根本命題 (Peano's five primitive propositions) 是:

(1) 0 是一數.

(2) 任何數之繼數是一數.

(3) 無兩數同一繼數者.

(4) 0 非任何數之繼數.

(5) 一種性質, 0 具有之,任何具此性質的數之繼數亦具有之,則凡數都具有之.

末條爲『算學歸納法』之原理. 算學歸納法,以後將另有詳論;現在只就他見於裴阿諾算術分析裏面的講一講.

我們試簡短的討論裴阿諾三根本觀念及五根本命題藉甚麼一種方法,結果便生出自然數理論.

首先界說『1』爲『0之繼數』,『2』爲『1之繼數』,諸如此類. 我們挨次界說過去,顯然是要多少可界說多少,因爲本(2),則如是所得之數,各有他的繼數,本(3),則此繼數不得爲前經界說之數,蓋如是則有二數同一繼數,本(4),則如是所得一串之繼數中無爲0者. 照這樣看起來,繼數之纙,是個見首不見尾的連續新數纙. 本(5),則凡數皆在這纙中,這纙起於0而漸次經過繼續之繼數:因(a) 0屬於此纙,(b)屬此纙之數之繼數,屬於此纙,故由算學歸納法,凡數都屬於此纙.

如果我們要界說二數之和. 取任意一數m,先界說 $m+0$ 就是m, $m+(n+1)$ 就是 $m+n$ 之繼數. 本(5),這就是m與n之和的界說,不管n是甚麼數. 仿此,二數之積也可以界說. 算術中尋常初等命題,都可用我們那五個前提證明,這是學者不

難自去試驗的,如有疑難,可參考裴阿諾氏原證.

我們現在可以進一步討論,從裴阿諾的立足點而進到弗雷格 (Frege) 的立足點了;裴氏是『算學之算術表示法』(Arithmetiseation of mathematics) 的完成者,弗氏却是從事於『算學之邏輯的表示』(Iogicising mathematics) 之首先成功者,他將前人認爲充分之算術觀念,改化到邏輯上去,從新泡製一次. 本章並不卽論到弗氏造的數與特別數之界說,但是裴氏的學說,何以似決定而實非決定,現在可以舉出些理由來.

9 第一,裴阿諾三根本觀念——卽『0』,『數』,『繼數』——可以有無窮的解釋,每種解釋,都合於五根本命題.舉例如下:

(1) 命其『0』指 100, 而其『數』指自然數纜中自 100 以上之數,則裴氏命題皆能適合, (4) 亦然,蓋 100 雖爲 99 之繼數,而 99 一數不在我們這裏所謂數之範圍以內. 本例之 100, 就是任意拿別數去替換,也明明是無所不可的.

(2) 命其『0』指尋常之 0,命其『數』指通常所謂偶數,『某數之繼數』指某數上加 2 之數. 則『1』乃指二,『2』乃指四,餘類推;『數』之串將為

0, 二, 四, 六, 八,………

照此解釋,仍能盡合裴氏五前提.

(3) 命『0』指 1,『繼數』指半數,而數之串為

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{10},\ \cdots\cdots\cdots$$

裴氏五公理仍無不眞.

像上面這樣的例,顯然是不勝枚舉. 實在講起來,任意一個串.

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots\cdots\cdots x_n,\cdots\cdots\cdots$$

祇要有首,無尾,無重複項,且在有限項數中無不可由首項以次相及之項,裴氏五公理.就可適用正式的證明,頗長而繁,但不證也很容易看出.命『0』指 x_0,『數』為纚中各項之通稱,x_n 之繼數為 x_{n+1} 則

(1)『0』是一數,卽是說『x_0 為該纚之一項』,

(2)『任何數之繼數是一數』,卽是說:『於纚中任

取一項 x_n, 則 x_{n+1} 亦在纙內.』

(3)『無兩數同一繼數者,』即是說:『設 x_n 與 x_m 爲纙中不同兩項,則 x_{n+1} 與 x_{m+1} 也不同;』這是纙中原設爲無重複項的結果.

(4)『0 非任何數之繼數』,即是,『纙中無在 x_0 之前的項.』

(5) 變爲:一種性質,x_0 具有之,若 x_n 具有之,則 x_{n+1} 亦具有之,則凡纙中之項皆具有之.

這是與數之性質互相對照推求出來的.

凡是一纙,其形爲

$$x_0,\quad x_1,\quad x_2,\cdots\cdots\cdots x_n,\cdots\cdots\cdots$$

有首項,每項都有一個繼項(所以就沒有末項),無重複項,無不可從首項起以次達到之項,就叫做『進級纙』或『前進鄰接纙』(progression (譯者註 1)).鄰接纙在算學原理中甚爲重要. 我們已經知道,凡鄰接纙都適合裴阿諾氏五公理. 反轉來,凡適合裴氏五公理之串,都是鄰接纙,這也是可以證明的. 所以裴氏五公理,可以拿來做鄰接

纚的界說:『鄰接纚』就是『適合裴氏五公理的纚』.任何進級纚,可以做純正算學的根基,其前項,我們可以叫做『0』,其全組各項,我們可叫做『數』,其中之次項,我們可以叫做『繼數』.進級纚不必定要數組織:如空間之點,時間之瞬刻,凡『取之不盡』的項,都可組成進級纚.每一不同的進級纚,給古昔傳下的純正算學上之一切命題一個不同的解釋;所有這些可能解釋,全都同樣的眞確.

裴阿諾的學說裏面,並沒有什麼足以叫我們能彀將他的三根本觀念上這些不同的解釋互相辨別.他假定我們知道『0』是指甚麼而言.他以爲我們不會將這符號當做一百,或是克流丕查女后的針,或是別的可以拿0指的東西.

『0』,『數』及『繼數』三個觀念,不能拿裴阿諾的五公理界說,必須獨立的了解認識,這點很爲重要.我們需要的數,不但是要證實算學公式就算完事,還得正當的應用到普通事物上去.我們有一鼻二目十指.我們需要一種『0』,『數』,『繼數』,能指

明我們的鼻,目,指之數. 如有一種系統,其中『1』指 100,『2』指 101,依此類推,在純正算學上或者一樣眞,在人生日用上,却不大合用. 我們原有一點知識(雖不十分淸晰)知道什麼叫做1, 2, 3,……,所以算術裏面用的數,須與這種知識符合. 我們不敢相信用裴阿諾方法能得這樣的結果;用他的方法,我們不過能說:我們雖然不能用更純的概念來解釋『0』,『數』,『繼數』的意義,我們却知道什麼是『0』,『數』,『繼數』. 這種話,(不能界說却知道的話)是當着不得已時必須說的,並且到頭我們大家都必須說的;說出來,也沒有什麼不合;但是算理哲學之目的,正在將這話擱起不講,能擱多久就擱多久. 倘若我們採用算術之邏輯的理論,的確還可以將這話擱得狠久狠久.

還有一層,有人或會提出,便是不把『0』,『數』,『繼數』看做是『知其意而不能定其義』的東西,而把他們看做是證實裴氏五公理之任三個名詞. 那一來,他們便不是有一定意義而不能界說的名

詞了:他們是『變動不居的東西』,他們是些名詞,關乎這些名詞,我們定了若干的假設,就是裴氏五公理中所說;但除此以外,這些名詞,仍毫無一定的意義. 採用這種方法,我們定理的證明,將不是指一組既經考究的纔所謂『自然數』的而言,乃指有某些性質之纔而言. 這種說法,並非詭辯,實在這種推廣手段,有些地方狠有價值. 但是還有兩點,足見他不能做算術之滿意的基礎. 第一,這種說法,不能使我們知道究竟有沒有那樣一組名詞可以證實裴氏五公理,也絲毫不曾暗示什麼方法,使我們可以知道有沒有這種名詞的組. 第二,就是我們前面所說的,我們需要的數,必須可以用來數普通物件的,因此我們的數,應當有『一定』的意義,不可祇有一些形式的性質. 這個一定的意義,卽在算術之邏輯的理論上來定.

(譯者註 1.)英文 Series 一字之原義,本係『纍纍然如貫珠』,『緜然相屬』之意; Progression 一字,有『一步進一步』,『按級

而上』之意;英文算學書,有時互用不分,中文算學書,通常並譯爲『級數』. 何魯君主張譯法文 Suite 爲『纑數』,取『纑然相屬』之意,譯 Series 爲『級數』,取規律階級之意,(見科學第五卷第三期 p243) 譯者甚以爲然. 惟本書用 Series 一字,取『纑然相屬』之嚴格的意義,不能視爲無規律之組. 且本書所謂 Series 不限於數量,故譯名不宜含數量的字樣. 因此譯 Series 爲『纑』,或爲『串』. 纑字不甚通俗,可用爲學術名詞,義有專屬. 『串』字較淺顯,可用作普通名字,義較廣泛. 數之纑稱爲『數纑』,點之纑稱爲『點纑』,一般之纑單稱爲『纑』. 又 Progression 一字,譯者主張平常宜譯爲『進級數』, Regression 譯爲『退級數』, 無分別進退之必要時 Progression 亦可譯爲『級數』,此就數量而言也. 本書不限於數量,可用『進級纑』,『退級纑』以代之. 惟本書 Progression 及 regression 與他種 Series 之區別,非如平常所謂規律不規律,而在(簡單之言)是否爲相鄰項組織而成;故兼用『鄰接纑』一名以表示其特性;遇必要時,加『前進』或『後退』字樣以分別 progression 或 regression. 又『自然數纑』乃依原文直譯者,其實係『進級纑』之一種.

(原註 1.) Cambridge University Press, vol. i., 1910; vol. ii., 1911; vol. iii., 1913. By Whitehead and Russell.

(原註 2.) 本章用『數』字,都是按着這個意義用. 以後用此字,却用他的廣義.

第二章

數之界說

『什麽是數?』這個問題雖常經提出,但是確切的答案却直到現今才有. 這個答案是1884年弗雷格給的,載在他的 Grundlagen der Arithmetik 裏.(原注1) 這本書雖然很短很淺而且很重要,但是沒有人注意他,其中數之界說,在1901年本書著者『羅素自稱』重新發見以前簡直可算沒有人知道.

吾人於求數之界說以前,有一件事要首先弄清楚,就是我們研究上的所謂文法. 許多哲學家想界說數却去界說團,其實數與團大不相同. 數是凡數之公性,好比**人**是凡人之公性. 團不是數的例,不過是某特殊數的例. 譬如三人團是3的一個例,3是數的一個例;但是三人團並不是數的一個例. 這點似乎很淺顯,沒有提論的價值;而哲學家(只有不多的例外)竟把他弄不

清楚.

一個特殊的數與如干項數組成之團不是完全一致的:譬如3這個數與含有柏郎,約翰,魯濱孫的三人團不是一件東西. 數3是凡三件團所公共的,拿來區別別種集合的團體(非三件團)故某數者所以表示有該件數之團之公性,以示異於有他件數之團者也.

以後說『團』時,常代以『類』,『班』,『組』,『串』,『集合』;間或也用『場』,『區域』,等字樣. 『類』俟後章專詳之 現在不深論. 不過有些與類有關的理論現在就要講一講.

界說類或團有兩個方法,乍見好像絕不相同.
(i)將類或團中各件一個一個舉出來,比如說,『我所講的團乃是柏郎,約翰,及魯濱孫三人』.
(ii)提出一種特性,比如說『人類』,『倫敦居民』.
枚舉的界說叫做外範界說,提示特性的界說叫做屬性界說。 兩種界說之中,屬性的界說,照邏輯講,是比較的根本些. 這可以從兩種觀察說

明:(1)外範界說常可以變成屬性界說,而(2)屬性界說往往雖在理論上都不能變成外範界說.請申論之於下:

(1)柏郎,約翰,魯濱孫三人都有一種性質,世界上除此三人以外無論什麼東西所沒有的,便是所以『爲柏郎或爲約翰或爲魯濱孫』的那性質.這性質就足以供屬性地界說柏郎,約翰魯濱孫組成之團之用.試就『x是柏郎,或x是約翰,或x是魯濱孫』這公式看.能使這公式眞的祇有三個x,就是柏郎,約翰,魯濱孫.就這一層看,這公式恰像一個含有三根的三次方程式.我們可以把這公式看做是所以指出一種性質爲該三人團中諸員所公有而他團各員所沒有的.其他已示外範的團體都可以照這樣論.

(2)我們對於一類往往雖不能枚舉其中的個體,却仍然可以很知道清楚.如人類,倫敦居民,雖沒有人能一個一個的全舉出來,但是對於其類仍然可以很知道.照這樣看起來,足見在我

們類之知識上外範的界說並非必要. 并且就無窮類而論,以吾人有窮之生命去枚舉其中無窮之個體雖在理論上都是不可能. 我們不能枚舉自然數:自然數是 0, 1, 2, 3, 等等. 我們到頭總非用『等等』這字樣來塞責不可. 我們不能枚舉分數之全體,或無盡數之全體,或其他無窮團中之各個體. 所以我們對於這種團的知識都祇能由屬性的界說去推求,不能用外範界說去摸索.

以上的理論,當我們尋求數之界說時,有三個地方有關係. 第一,數之自身就成一個無窮團,不能用枚舉法去定他的界說. 第二,項數一定之集合也可認做是組成無窮類:比如三件團,我們一定要認為世界上有無窮個,因為如果三件團有窮,那末世界上的東西也就有窮,這雖然可能,但似乎未必如此. 第三,我們總想用個方法來界說數,使數之無窮也是可能;我們對於一個無窮團之員數一定要能以說得出來,界說如此

之團一定要用屬性法,以該團諸員所公有而他團各員所無之性質界說之.

有許多地方類與其特性二者實際上可以互相替代. 類與特性二者不同的要點,祗在一定組之項所成之類祗有一個,而一定類之界說上可引用之特性常有甚多. 例如,人類可以界說作無羽毛的二足動物,或是理性動物,或用Swift寫Yahoos的那些特性來界說,還更確切. 這樣看來,類之所以有用就因他是唯一無二,而特性却不是唯一無二,否則我們旣有類中各員所公有且凡他類中各員所無之性質,也就足了.(原注2)『唯一無二』這一層若不關緊要,這些性質中任取其一以代其類,都沒有不可以的.

現在回到本題:數之界說. 數是概括一切項數相同之團體的方法,這是很明白的. 我們可以懸想將世界上所有的二件團都歸於一組,所有的三件團都歸於一組,諸如此類. 由是我們得了許多團之組,每組所含,爲一切有一定項數

之團.每組是一類,該類中之各員都是團也就是類;所以每組都算是類之類.例如含一切二件團之組就是個類之類:因為每個二件團是一個含有兩項的類,而全組是個含有無窮項的類,每項又是個含有兩項的類.

我們何以決定兩團可以歸於一組?自然會答說:『先看兩團各有多少項,項數相同即歸於一組』.但是這是預先假定我們已經界說了數,並且知道了求項數之方法.我們慣用數的方法,所以這種『預先假定』的弊病容易忽略過去.其實數的方法,我們雖很熟悉,照邏輯講,並是個很複雜的法子,並且用數來點一團之項數也非項數有窮不行.我們的數之界說決不可預先假定凡數皆有窮;無論如何我們用數來界說數總不免循環的弊病,因為數東西的時候就已經用了數的緣故.所以我們須得另求善法來決定兩團之項數相同與否.

就事實而論,決定兩團項數是否相同比求團

中究竟多少項,在邏輯上要簡單些. 此可說明如下. 假使世界上沒有多夫多妻兩種主義,那末無論何時生存的夫婦數目自然相同. 無容實際調查戶口去,也無須知道夫婦確數. 我們知道夫團婦團之數相同,因爲一夫只有一婦,一婦只有一夫. 這樣的夫婦關係乃是所謂『一對一』的關係.

若 x 對於 y 有一種關係,此外沒有別的 x′ 對於 y 有這種關係,且 x 對於別的 y′ 也沒有這種關係,這種關係叫做『一對一』的關係. 若僅第一條件成立,這種關係就叫做『一對多』的關係. 倘若僅第二條成立,這種關係就叫做『多對一』的關係.

上述各界說中並不曾用 1 這個數,請閱者注意.

耶教地方夫對於婦的關係是『一對一』的,回教地方是『一對多』的,西藏地方是『多對一』的. 父對於子的關係是『一對多』的;長子對於父的關係却

是『一對一』的. 設 n 爲任意一數, n 對於 $n+1$ 的關係是『一對一』的; n 對於 2 n 或 3 n 亦然. 若祇論正數, n 對 n^2 的關係是『一對一』的;如果負數也採用,那末 n 對 n^2 就是『二對一』的了(因 n 與 $-n$ 之平方都是 n^2). 由上面舉的這許多例,『一對一』,『一對多』,『多對一』三種關係的觀念總會明瞭了;這些關係在算學原理上很重要,除數之界說有關以外,別的地方應用也很不少.

若兩類之間有一對一的關係,將此類之各個一一與他類之各個結合像夫婦配偶似的,則該兩類名爲**相似**(Similar). 這界說要先預備幾個輔助界說纔可講得精確. 凡對於他物有某種關係之各項組成之類名爲該關係之**關係界**或**本方**(Domain): 如『父類』就是父對於子之關係的界,『子類』就是子對於父之關係的界,『夫類』是夫對於婦之關係的界,『婦類』是婦對於夫之關係的界,夫婦兩類合起來是伉儷關係的界.

夫對婦的關係是婦對夫的**逆關係**(Converse).

同理,『大於』是『小於』的逆,『較前』是『較後』的逆,餘可類推. 推而廣之,凡 x 對 y 有某種關係,則 y 對 x 爲該關係之逆. 某關係之逆之界名爲**被關係界**或**對方** (Converse domain): 例如婦類是夫對婦之關係的『被關係界』.

現在可以將相似的界說寫出來:

若兩類間有一對一的關係,此類爲關係界,彼類爲被關係界,則稱兩類相似.

有三件事很容易證明的:(1)任何類自行相似,(2)若 α 類與 β 類相似,則 β 與 α 相似,(3)若 α 與 β 相似,β 與 γ 相似,則 α 與 γ 相似. 這是就相似而論. 若就一般關係而論,凡具有性質 (1)者名曰**反身** (Reflexive) 關係,具有性質,(2)者名曰**對稱** (Symmetrical) 關係,具有性質 (3) 者名曰**傳遞** (Transitive) 關係. 凡對稱而且傳遞的關係顯然在他的界內處處有反身的關係. 備具上列諸性質之關係是一種很重要的關係,相似就是其中的一個,這是很可注意的.

拿常識看,兩有窮類如果相似,他們的個體數必然相同,否則不等,這是很明白的. 數,不過是令被數的物件與用以數物件之自然數(0不在內)中間有一對一的關係. 照平常觀念看來,數一個物就要用一個數,一羣物體有若干個,所用以數之之數也必有那些個. 我們又知道(就有窮類而論)從 1 至 n 恰好是 n 個數. 所以我們知道數一有窮類時最後所用之數就是該類之項數. 但是數,除祗能用於有窮類以外,並且必須依賴着還要假定着一種事實,便是,凡相似類之項數必然相等;比如我們數十件物體時的舉動不過是表明該羣物件與自1至10十個數兩類間之相似罷了. 所以相似的觀念,依邏輯講,在數的動作上是已經預先假定了. 並且這觀念依邏輯講,較爲簡單,雖然我們並不熟悉. 還有一層,數物時必使物件按順序排列,第一,第二,第三,……但順序並不是數的本質:照邏輯的眼光看,是無關係的,非必要的,贅疣的. 相似觀念

却不論順序：如夫類與婦類爲相似類，其數相同，但是不必去拘究他們的前後順序．相似觀念亦不限定相似類有窮：如自然數（0不在內）與分母爲1之各分數，照2與$\frac{1}{2}$，3與$\frac{1}{3}$，4與$\frac{1}{4}$，……這樣拼配起來，我們就可證明這兩個無窮類相似．

本章前面提出的那個問題，『如何決定兩團可以歸於一組』？現在可以用『相似』觀念來解決．設一組收納空團（無有項的）：是爲數0．設一組總括一切一件團，是爲數1．又設一組總括一切二件團，是爲數2，再設三件團之組，四件團之組，等等．任意指定一團，我們可以說他所隸屬之組，卽是凡與該團相似之團組成之類．例如一團中三件，則凡與此相似之團的類就是三件團的類．

一團之件不論若干，凡與之相似之團，其項數必與之相等（或有相等項數）．我們就可以用這話來做『項數相等』（或『有相等項數』）的界說．這

個界說的結果,就有窮類而論,顯然與我們平常的見解毫不違背.

我們以上的論調都是很文從理順的,從來沒有一毫似非而是的地方. 但是臨到要實際去界說數,這個似非而是的論調,雖然終究會明瞭,却不能不經過一次(雖然終能知其是却難免不經過一次懷疑). 我們自然而然會以爲『二件團之類』與『數 2』不像一件東西. 但是『二件團之類』這個觀念很明瞭,不難界說;『數 2』照任何旁的意義講,總是一個形而上的實體,既不能確知其存在,也不能一準捉摸得定. 所以我們與其求數 2 不着,存爲懸案,永遠不得解決,不如用有把握的二件團之類聊以自慰,比較還妥當些. 由是舉界說如下

一類之數者,『凡與該類相似之類』之類也.

(The number of a class is the class of all those classes that are similar to it).

例如,二件團的數就是『凡二件團』的類 其實

按我們的界說，二件團的類就是數2. 這種界說雖然稍微有點奇怪,但是意義確定而且無可懷疑;并且我們心目中所希冀凡數可以有的性質這樣界說的數也無一不有,這是不難證明的.

現在我們可以進一步將一般的數界說爲任何由相似關係而組成之『類之串』. 一個數就是一個『類之串』,串內之類各各相似,串外之類無與之相似者. 換言之,數(一般的)是一個集合,這集合就是其中任一員(亦是類)的數;約言之:

數者,爲一類之數者也 (A number is anything which is the number of some class).

此界說表面上看似乎有循環的語病,其實不然. 因爲我們界說『一類之數』時不曾用一般的數之觀念;所以我們可以用『類之數』來界說『一般的數』並不犯邏輯的誤謬.

此種界說很普通很常見. 譬如界說父,必先界說何謂爲人之父;然後說父就是凡爲人之父

者. 同理界說平方數,必先界說何謂一數爲他數之平方,然後說平方數就是凡爲他數之平方者. 這種辦法很普通,很正當,且往往必要;這層很有可注意的價値.

數之界說已經得了,他在有窮團很可用. 無窮團怎樣用這定義,還得考究考究. 但是必須先界說何謂有窮何謂無窮,這不是本章範圍以內可以詳論的,以後再講罷.

(原註 1)比較完備詳細的答案載在他的 Grundgesetze der Arithmetik Vol. i, 1893 裏。

(原註 2) 類亦可視爲邏輯的構像 (Logical fiction)由特性製造而成,以後當論釋之。 現在姑視爲實在之物,以求說明上之簡易。

第三章

有窮與算學歸納法

我們若知道什麼是『0』,『數』,『繼數』,自然數纔都可界說,第一章已經論到. 但是我們還可進一步來討論:我們若知道了『0』和『繼數』,自然數纔也就都可以界說. 研究這個界說方法,知道爲什麼這個方法祇能用於有窮,藉此我們便可明白有窮與無窮之分. 我們現在不管『0』和『繼數』該怎樣界說:暫且作爲已知其意義,看別的自然數怎樣由此便可得出.

隨便指定一數,譬如說 30000, 總可以次推及. 我們先說『1』是『0』的繼數次說『2』是『1』的繼數,一直界說下去. 凡隨便指定的數——即如 30000——像這樣逐步往下界說總可達到,如果我們不厭煩,直可用實驗法來證明:一步一步達到 30000 才能. 但是這個實驗法用在特定的自然數上固然行,用來證明『凡這種的數都可照樣達到』這普

遍命題是不行的:我們不能數數而實驗之,不能數數用這個從 0 起由一數而及其繼數以次推及的方法去證明. 那末,此外還有別的方法能證明沒有?

我們試用個曲折的方法來觀察這問題. 我們看,用『0』和『繼數』可達到的數是些甚麼數? 有沒有方法能界說這種數目的全類? 我們說,由 0 的繼數得 1;由 1 的繼數得 2;諸如此類. 『諸如此類』這話大渾涵,太不確定,我們應該用句話來替代他. 我們不免要說『諸如此類』的意思就是說這個由一數而及其繼數的方法可以用到有窮的次數;但是我們所從事的問題就是求『有窮數』之界說,那末,『有窮數』這觀念是我們定義裏所必不可用的. 我們的界說裏決不可假定我們知道什麼叫做有窮數.

解決這個問題的關鍵就是算學歸納法 (Mathematical induction). 第一章講自然數時我們曾經提到算學歸納法,那時作為第五根本命題.

該命題說:無論什麼性質祇要屬於 0 及有此性質之數之繼數,就屬於一切自然數. 這命題先是看作一種原理的,但是我們現在却作爲一種界說採用. 凡一串之項能服從算學歸納法的,就是那些能用由一項而及其次項的方法達到的數,這是不難明白的;但這層很重要,我們還不妨詳細的說明一番.

我們最妙先舉些界說,這些界說旁的地方也是有用的.

設有一種性質屬於 n 卽必屬於 n+1, 則此性質謂之自然數纚中之遺傳性(Hereditary property.) 仿此,設有一類, n 屬之則 n+1 亦必屬之,則此類謂之遺傳類(Hereditary class) 照此看來,可見(但還不曾自以爲知道)我們說某種性質是個遺傳性就等於說該性質是某數以上諸數之公性,例如, 100 以上諸數之公性,或 1000 以上諸數之公性,或檢直可說, 0 以上諸數(卽全體自然數)之公性.

遺傳性之屬於0者曰歸納性(Inductive property).

遺傳類之含0者曰歸納類(Inductive class).

設有一遺傳類其中0是一項,則1亦爲該類之一項,因遺傳類必含其各項之繼數,而1乃0之繼數故. 同理,設一遺傳類其中1爲一項,則2亦爲該類之一項;依此類推. 依此,我們可以用逐步推及的方法證明任舉一自然數——例如,30,000——必爲每一歸納類之一項.

某自然數『因前鄰關係而生之後裔』(The posterity of a given natural number with respect to the relation immediate predecessor)我們界說爲『凡含該數之遺傳類』所公含之一切數(前鄰乃繼數之逆關係). 那末,一數的後裔連該數及較該數大之諸數都包括在內,這是很明瞭的了;不過這層我們現在還不能公然就說是知道. (因爲大小還不曾講到)

由上面的界說,0之後裔就是屬於各歸納類的那些數了.

現在不難表明0之後裔這組數就是那可以從0起一步一步以次達到的一組數. 因第一,(照我們界說的意義講)兩組皆含0;第二,若兩組皆含n則兩組皆含n+1. 但有必需聲明的,便是我們現在所論並非可以精密證明的事,不過將一個較渾涵的觀念與一個較確定的觀念作一度對照罷了.『那可以從0起一步一步以次達到的一組數』這觀念雖然像有一定的意義,其實是渾涵曖昧;反之『0之後裔』呢,却比較的確切明瞭. 以此易彼,所謂『可以從0起一步一步以次達到的數目』之意義自然表現了.

現在將我們的界說寫下來:——

自然數者,0因前鄰關係而生之後裔也(前鄰乃繼數之逆關係.)

裴阿諾三根本觀念之中的一個用其餘的兩個界說了. 至於他的五根本命題其中有兩個——一個說0是一數,又一個是算學歸納法——都是我們的界說中應有的產物,無須另立爲命

題.『自然數之繼數亦爲自然數』那根本命題改做『每一自然數有一繼數』語氣軟弱些也就行了

『0』與『繼數』當然可以再用第二章所得『一般的數』的界說來界說. 數0是一個空無一項的類裏面的項數,換句話說,就是所謂空團(Null-class)的項數. 依『一般的數』的界說,空團之項數是凡與空團相似之團的類,就是單獨一個空團所成之類也就是以空團爲其惟一之項的類:(此類與空團不同,因此類有一項,便是空團,而空團却一項沒有. 獨項之類與其項決不是一件東西,以後類論中當詳論之), 故得純粹邏輯的界說如下:

0者以空團爲其惟一之項之類也.

0界說了,還得界說『繼數』. 設有一數n,命 α 爲含有n項之類,又命x爲 α 以外之一項. 則 α 與x共同組織之類有n+1項. 故得界說:——

α 類之項數之繼數即 α 與不屬於 α 之一項x合組而成之類之項數.

要想這個界說十分完全,自然還要加些精微的理論上去,但與本書宗旨無關故略而不論.(原注1) 第二章曾下了一類之數之邏輯的界說,說一類之數即與該類相似諸類之類,所以上述定義可以用得.

裴阿諾三根本觀念完全引入邏輯的觀念裏面去了:我們已經得了他們的界說,使他們的意義明瞭,不像以前可以有無限的解釋了,不像以前僅以五根本命題範圍他們了. 我們既不認他們是基本的,不能界說的,必須獨立領悟的東西;將他們界說了,無異爲算學增加了演繹的法門.

至於裴阿諾五根本命題,我們已經使其中兩個可由自然數之界說證明. 其餘三命題呢?『0非任何數之繼數』及『任何數有一繼數』兩命題很容易證明. 所難的就是其餘那一個,就是那第三命題,『無兩數同一繼數者』. 假使宇宙間之個體非有窮,這個命題便不難解決;因任意二數

m及n若都不是全宇宙之個體數,只要m不等於n, m+1與n+1自然不同. 苟宇宙個體數有窮,譬如說10,那末沒有一類能含有11個體,11便是個空類,(Null-class).(譯者註1)同理12也是個空類.這樣一來, 11=12; 10與11雖然不同,他們的繼數却是一樣了. 像這樣是有兩數同一繼數了. 但宇宙中之個體數倘非有窮,這第三命題也不會失效. 將來還要詳細討論,現在不深究了.(原注2)

設宇宙間個體非有窮,那末我們所已成就的不但是用邏輯的根本觀念及命題界說了裴阿諾三根本觀念,並且還證明了他的五根本命題.由是以推,純正算學既然都可由自然數理論推求而出,那末,純正算學完全是邏輯的引伸了.至於將此結果推展到那些近世非可由自然數理論推求出來的算學上也沒有什麼原則上的困難,著者曾於他書論之.(原注3)

算學歸納法,我們已經用以界說自然數,還可

以擴充起來. 我們界說自然數爲『0因前鄰關係而生之後裔』即 0 因『一數對其繼數的關係』而生之後裔. 一數對其繼數的關係若以 N 表之,則任何數 m 對於 m+1 有 N 關係. 若有一種性質,當 m 具有之則 m+1 亦具有之,則此性質謂之『藉 N 關係而遺傳』,或簡稱『N 遺傳』性. 若一數 m 所有之『N 遺傳』性他數 n 皆具有之,則稱 n 屬於 m 之『藉 N 而生之後裔』(或簡稱 m 之『N 後裔』). 此等界說不僅用於 N 關係,還可照樣用於任何關係. 設 R 爲任一關係,我們可以寫下面諸界說:——

(原注 4)

x 項對 y 有 R 關係,今有一性質,x 有之則 y 亦必有之,則此性質謂之『R 遺傳』性 ("R-hereditary" property).

類之特性爲『R 遺傳』性者曰『R 遺傳類』.

x 乃對他項或他項對之有 R 關係之項,若 x 所有之各『R 遺傳』性 y 皆有之,則 x 稱爲 y 之『R 先宗』.(此定義有不關緊要之例應當除外).

x之『R後裔』者x對之爲『R先宗』之一切項也.

我們設法構成以上各界說,使任何項如爲他項之先宗亦必爲自己之先宗;如爲他項之後裔亦必爲自己之後裔. 此僅爲便利計,並無他意.

若令R爲父母關係,則這裏所謂『先宗』『後裔』的意義,除一個人要算是自己的先宗及自己的後裔以外,與平常的意義沒有分別. 由此易見,先宗的關係完全可用父母的關係去界說,但是在<u>弗雷格</u>發揮他的算學歸納法之推廣說以前,並沒有人能用『父母』關係精確地界說『先宗』. 試就此點畧論之以見弗氏理論之重要. 人初遇着用父母關係界說先宗這問題,定然說若A與Z 2人之間有B, C, D, E,……若干人;A是B的父母,B是C的父母,各人都是次人的父母,末了一個人是Z的父母,則A是Z的先宗. 但這個界說不大妥當,除非加上一句『中間承繼之人數有窮纔行』. 請以下列數纖爲例

$$-1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \cdots\cdots\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1.$$

這裏是一個無尾的負數繼居前,一個無首的正數繼居後可否說$-\frac{1}{8}$是$\frac{1}{8}$的先宗? 照上面所舉初學者的界說定然答是,照我們所理想的界說就不然. 如求其然,居中之項數非有窮不可. 然而我們已經看出,有窮須由算學歸納法界說,而出手就一般的界說先宗關係,比之先就n對於n+1之關係特別界說,然後推之一般關係,實在要簡單些. 從最初起就拿一般情形而論,雖入手稍費思索,然而通盤計算,到底事半而功倍,應用廣而費力少,不但這裏是如此,旁的地方也常如此的.

古昔看算學歸納法用於論證有點神祕不可思議. 他是一個合理的證法,似乎無可懷疑,但爲甚麼合理却沒有人明白. 有人相信算學歸納法是邏輯上所謂歸納推理之一例. 濮因卡雷(Poincare)(原註5)說算學歸納法是一個最重要的原理. 用這個原理無窮三段論法可合爲一推測式. 這些議論全都錯了,算學歸納法是一個

界說不是原理. 數之中有能用算學歸納法的,也有不能用的(見第八章). 我們界說自然數說他們是那些能服從算學歸納法的數,即一切有歸納性之數. 那末自然數上能用這種歸納的證法,純是拿他當個用文字述出的命題,並不憑公理,也不藉原理,更用不着甚麼神祕的直覺.譬如我們界說獸是四足動物,那末,四足的動物自然便是獸;同理界說自然數是歸納的數,那末服從算學歸納法的數當然是自然數了.

以後我們用『歸納數』代替『自然數』為的是使我們記着這類數是用算學歸納法界說得來的.

算學歸納法還具有一種特有的性質,有窮與無窮藉此而分. 算學歸納法原則可照通俗的說法改為『凡能以次推及者即能由首而推及尾』這種的形式. 首尾之間其數有窮,這個原則就合;否則不合. 諸位不見火車初開麼? 起初車頭移動,每輛車藉車鈕拉動次車,各車以次而動,直到末了最後一車也動了. 如果全列車很長,

自然到末車開動的時間也很長. 如果全列車無窮的長,那末要費無窮個拉動,檢直可以說是沒有全體開動的時候. 但雖如此,假使車數不比全纚歸納數多(歸納數全纚是最小無窮類的一個實例,後章論之)機器又能耐久,那末雖則後方總有不曾開始運動的,遲早各車都要動起來的. 這個例可以使我們明瞭以次相及之觀念及其與有窮之關係. 我們將來論到無窮數,算學歸納法失了效用,然後我們不知不覺將算學歸納法用在有窮數上的緣故自然更加明瞭.

(原註 1) 參看 Principia Mathematica

(原註 2) 參看第八章

(原註 3) 純正幾何(非解析的)閱 Principles of Mathematics Part vi; 理論力學閱同書 Part vii.

(原註 4) 此等界說以及算學歸納法之推廣說,皆出弗雷格之手,早在 1879 年,見於氏之 Begriffschrift 中. 該書雖大有價值,然讀之者恐需推不佞爲第一人——距其出版已二十餘年矣.

(原註5) Science and Method, Chap. iv.

(譯者註1) 11本身是空類,0是空類之類,兩者不同.

第四章
順序之界說

我們對於自然數纚的分析工夫所已經做到的地步,乃是纚中之項(數),諸項全體所共組之類(歸納數),以及一數對其繼數之關係(繼數之逆關係),都下了邏輯的界說.現在應當論自然數的0,1,2,3,………這種『纚然相屬』(以後或簡稱『纚屬』)的特性.我們平常想到數,以為他們的順序就是如此;但是我們既要在已知的事件上做分析的工夫,就有一件不可少的要務,便是替『順序』(Order)或『纚』(Series)求一個用邏輯的名詞來表示的界說.

順序這觀念,在算學上非常重要.不但整數有所謂大小順序,就是有盡分數及一切實數也有大小順序,他們的算理的性質,也大率以此為要素.直綫上點之順序,在幾何中是要素;平面上過一點之直綫之順序,以及空間中過一直綫之平面之順序,雖然比較複雜些,也很重要.幾

何中所謂『進向』(Dimension),就生於順序. 做全部高等算學基礎的極限(Limit)觀念,也是一個纙之觀念. 算學中也有些部分不憑藉順序觀念的,但是比之憑藉者却少的多.

求順序之界說,第一要明白,一串事項,決不會有了一種順序,就排斥其餘各種順序. 他們能有多少順序就有多少順序. 有時候一串事項按某種順序排列,我們覺得很自然很習慣,就想說這是他們惟一的順序;但這是一種錯誤. 自然數——即歸納數——在人心中最易按大小順序排列;其實他們也可以有無窮的別種排列. 譬如說 我們可以先取一切奇數,後取一切偶數;或者首列1,次列一切偶數,次列一切3之奇倍數,次一切5的倍數之非2或3的倍數者,次列一切7的倍數之非2或3或5的倍數者,就一切素數之倍數依此排盡. 凡說如此如此排列,實在是句不精確的話: 其實我們何嘗排列,不過是注意到某某關係罷了,有了這某某關係,則某某

順序纔會生出.　我們不能排列自然數,猶如不能排列天上的星辰;然而我們仰觀天上的恆星,可以依其方位看,也可以依其光度看,自然數亦然,其間可觀察之關係甚多,我們注意在何種關係,他們就有何種順序,各種順序都一樣的合理.自然數如此,直綫上之點或時間之瞬刻等亦莫不如此:　一種順序或比較熟習,但其餘的也一樣眞實.　例如直綫上之點,我們可以先取其坐標為整數者,次取坐標為有盡數(非整)者,次又取其坐標為代數的無盡數者,諸如此類,愛怎麼排就怎麼排.　照這樣得的一個順序,乃是直綫上之點所本有的,不論我們注意與否,他總常常存在;在一組事項之各種不同的順序裏面,只有我們的注意,是個隨便的東西,至於事項本身所能有的各種順序,是無時不存在不可以意為之的.

由以上觀察之結果,可知一組事項之順序的界說,不可在全組之性質上求,因為一組可以有的順序很多,不祇一種.　順序不存在於事項之

『類』上,乃存在於各事項間之『關係』上,因此關係而事項有前後之分. 一類之所以有許多順序者,其原因在各事項間含有許多關係. 然則一種關係必須具有如何之性質纔能發生順序?

設有一關係,果能發生順序,則取所欲依順序排列之類,於其中任擇兩項,吾人必能言其何者『居前』何者『隨後』,以此爲準,凡能發生順序之關係,其特性皆可發見. 惟以後使用『居前』,『隨後』兩語,須如吾人了解此兩語之意義,故凡能生順序之關係,非備具三種性質不可.

(1)若 x 居 y 前,則 y 不居 x 前. 這是纚屬關係的一個很顯明的特性. 若 x 較小於 y,則 y 不較小於 x. 若 x 較早於 y,則 y 不較早於 x. 若 x 在 y 左,則 y 不在 x 左. 反之,關係之不能發生纚者,卽無此性. 若 x 爲 y 之兄弟或姊妹,則 y 爲 x 之兄弟或姊妹. 若 x 與 y 同高,則 y 與 x 同高. 若 x 與 y 不等高,則 y 與 x 不等高. 在這些例上,都是 x 對 y 有什麼關係,y 對 x 也有什麼關係. 纚屬關

係上,不會發生這種事. 關係之具此第一性質者,曰偏稱關係(Asymmetrical relation).

(2)若x居y前y居z前,則x居z前. 這仍可用前舉『較小』,『較早』,『在左』諸例來說明. 至於不具性質(1)之三例中,一個具性質(2),其餘則否. 若x爲y之兄弟或姊妹,y爲z之兄弟或姊妹,x不必爲z之兄弟或姊妹,因爲x與z也許是一個人. 『不等高』亦與此同,然『等高』關係雖無性質(1),却有性質(2). 『父』關係有性質(1)而無性質(2). 關係之具性質(2)者,曰傳遞關係(Transitive relation)

(3)於一個欲依順序排列之類中任取兩項,必定一個居前一個隨後. 例如任意兩整數,或兩分數,或兩無盡數,必一較大而一較小;惟兩複素數則不然. 時間之兩瞬刻必一較早而一較遲;然兩事之起,可以同時,就不能照這樣說了. 一直綫上兩點,必一點在他一點之左. 關係之具性質(3)者,曰結合關係(Connected relation)

若有一關係備具此三性質,則此關係卽係能發生順序者,具此關係之項,便可列成一種順序;反之,有一順序存在,則必可尋出一生此順序而備具三性之關係.

在說明此題之先,我們還得寫出幾條界說:

(1)不可施諸本身之關係,曰**示異關係**(Aliorelative or be contained in or imply diversity)(原註1)如『大於』,『寬不同』,『兄弟』,『夫』,『父』等,都是示異關係;而『等於』,『同父母所生』,『愛友』等關係,則未必示異.

(2)x對於y,y對於z皆有某關係,則x對z有其**平方關係**(Square of a relation).如『祖父』卽『父』之平方,『多2』卽『多1』之平方,諸如此類.

(3)關係之**本方**(The domain of a relation)(或云**關係界**)卽一切對於他項有此關係之項所組成之類,關係之**對方**(The converse domain)(或云**被關係界**)卽他項對之有此關係之一切項所組成之類.此二義前已言之,此處重敍,所以爲下一界說之豫備:——

(4) 關係之本方與對方,合之為**關係場**(The field of a relation).

(5)若有彼此兩關係,無論何時有此關係即必有彼關係,則稱此關係**包含**(Contain or be implied by)彼關係.

由以上各界說,可知偏稱關係,就是一個『**其平方示異**』的關係. 偏稱關係雖常示異,但示異關係卻往往並不偏稱. 譬如伉儷關係僅示異而不偏稱,因 x 是 y 的伉儷,則 y 也是 x 的伉儷. 然在傳遞關係中,則偏稱者固無不示異,示異者亦無不偏稱.

由界說,知傳遞關係,就是關係之包含其平方關係者. 祖宗之祖宗仍為祖宗,故祖宗為傳遞關係;父之父非父,故父非傳遞關係. 傳遞的示異關係,就是關係之包含平方且示異者;換言之,一關係之平方包含該關係且示異者,曰傳遞示異關係——因傳遞關係之示異,與偏稱效力相等.

在關係場內任取不同兩項 x 及 y, 若 x 對 y 或 y 對 x 有此關係, (在偏稱關係雖不能兩者均可成立,但對於對稱關係之兩者同時成立亦在所不禁)則稱該關係爲結合關係.

關係有示異且傳遞而不結合者,祖宗關係便是一例;因祖宗關係非結合,所以不足憑他來將人類列爲一纚.

關係有傳遞且結合而不示異或偏稱者,如『小於或等於』之關係之在數中便是.

關係有示異且結合而不傳遞者,如『大於或小於』在數纚中便是;因設 x 大於或小於 y,y 大於或小於 z,但 x 與 z 未嘗不可爲同一數.

由此看來,關係之三性,(1)示異,(2)傳遞,(3)結合,完全是獨立不相倚賴的,可任有其二而缺其一.

故舉纚屬關係之界說如下:

關係之示異,傳遞且結合者曰『纚屬關係』(Serial relation);或以相等之語表之曰: 關係之偏稱傳遞而且結合者曰纚屬關係.

纙(Series)卽纙屬關係(Serial relation).

或者有人以爲纙就是纙屬關係之場(Field),不是纙屬關係本身.這種思想,乃是一種錯誤.譬如

1,2,3; 1,3,2; 2,3,1; 2,1,3; 3,1,2; 3,2,1;六個不同的數纙,關係場是一樣的.假如場算做纙,那就同一場衹有一纙了.六纙之分,只在六種順序關係,每關係作成一纙.順序關係定,則場與纙皆定.故順序關係可取以爲纙,而場則否.

設P爲任意一纙屬關係,若x對於y有關係P,則稱在此關係上『x前於y』,或簡寫爲『x P y』. p爲纙屬關係,其所必須而且充分之三種性質是:

(1) xPx不能成立;卽任何項不能前於其本身.

(2) P^2包含P;卽x前於y, y前於z,則x前於z.

(3)若x, y爲場中任意兩項,則xPy或yPx;卽二者必一前一後也.

讀者不難相信,在順序關係裏如發見這三種性質,則我們心目中所希冀的纙屬性也必發見,

反之,發見纏之特性,也必發見這三種性質. 所以我們以上列三種性質做纏或順序的界說,並無不合. 並且這界說,是用純粹邏輯的名詞所定,也是可注意的.

有了一個纏,必定找得出一個傳遞,偏稱,而且結合的關係,但找得的關係,未必便是那一望而自然認定爲發生此纏之關係. 我們可拿自然數來說明. 我們看自然數時,心裏所認定的關係,只有那一個連一個的比鄰關係,換句話說,就是那比鄰兩整數間的關係. 這個關係,僅偏稱而不傳遞,亦不結合. 但從此關係,可用算學歸納法推出一個我們以前講過的『先宗』關係來. 這個先宗關係在歸納數內,和『等於或小於』關係是一樣的. 現在以發生自然數爲目的,但取『小於』不要『等於』. 『小於』就是當 m 爲 n 之先宗而與 n 不同時 m 對於 n 之關係,或以相等語表之,當 m 之繼數爲 n 之先宗時(先宗的意義仍如前,歸納數可爲自已之先宗) m 對於 n 之關係. 換

言之,則有以下之界說:——

若歸納數m之繼數所有之遺傳性,歸納數n皆有之,則稱m小於n.

由此易知且不難證明這樣界說的『小於』關係是偏稱的,傳遞的,結合的,並且是以歸納數爲其關係場的. 用這個關係,歸納數才有了與我們界說意義相同的順序,這順序,就是尋常所謂**自然順序**或**大小順序**.

由n對n+1這一類的關係以發生繩,是很普通的方法. 如英國累代帝王是一繩,是由每王對於嗣王的關係發生的. 拿這種方法推想繩之發生,只要可用,大概總是頂容易的了. 藉這方法,我們可以由一個而推及其次一個(祇要有次一個),或由一個而推及其前一個(祇要有前一個). 這種方法,須用那普遍一種的算學歸納法,然後我們在這樣生出的繩裏,纔能下『較前』以及『較後』的定義. 現在仿『眞分數』(不得爲整數)之義,另立『眞後裔』一名:『x對之有R關係之某

項』之R後裔,曰x因R關係而生之**眞後裔**.(某項之後裔一名,仍如前包括該項之本身,而眞後裔則否). 故界說曰:——

一項x因R而生之**眞後裔**(Proper prosterity)者,具有『x對之有R關係之各項』之各R遺傳性之項全體合組之類也.

所以必須這樣定界說者,為的是使他不但x祇對一項有R關係時可用,便是x對許多項有R關係時(例如父與子)也可用. 故又界說曰:—

若y屬於x因R而生之眞後裔,則稱x為y之**眞先宗**(Proper ancestor).

以後為便利計,往往用『R先宗』,『R後裔』,『眞R先宗』,『眞R後裔』等簡寫法.

現在再論以比鄰兩項間R關係發生纔這問題,可知要想這個方法可能,則『眞R先宗』那關係,必須示異,傳遞,而且結合. 但是在若何情形之下『眞R先宗』關係才能示異,傳遞,而且結合呢?這關係是無時不傳遞的: 無論R是一種什麼

關係『R先宗』與『眞R先宗』都常是傳遞的. 但只在某某條件之下,他纔能結合或是示異. 譬如十二人圍圓桌而坐,拿每人對於左鄰的關係算作R. 那末,一人的眞R後裔,乃是自右至左繞桌過去所能到達的人. 這把環桌的人全包在內,就是本人自己也在其內了,因爲走十二步就到了起點的緣故. 在這種地方,眞R先宗雖然是結合並且R本身也示異,我們不能得出纔來,因『眞R先宗』並不示異. 因爲這個緣故,所以我們不能說一個人在『在右』關係上,或是在由『在右』關係推出之『先宗』關係上,居於又一人之前.

以上舉了一個先宗關係結合而不示異的例. 至於示異而不結合的例,也可從『祖宗』一語尋常的意義上得出一個來. 若x爲y之祖宗,x與y誠然必非一人;然任舉二人,其間却未必卽有祖宗關係. 這不是示異而不結合麼?

在如何情形之下,由比鄰關係推出之先宗關係能發生纔,這個問題很重要. 現在略舉要緊

的例如下: 設R爲多對一的關係(如父母對於長子之關係),試專就某項x之『R後裔』範圍以內之項論之.這樣一限制,『眞R先宗』關係自然是結合的;至於求他是纏屬的關係,那便祇靠他能夠示異了.這是就上面圓桌的例推廣來說的.還有一個推廣說法:關係R是一對一的,所取之範圍,兼有x之先宗及後裔;那末,發生纏惟一的條件,也就祇是『眞R先宗』關係示異.

以比鄰關係發生纏,這方法在其本身範圍以內固很重要,但還不如以傳遞關係定順序的界說,其方法較爲普遍.往往有的纏,任擇兩項相距無論如何之近,中間仍有無窮項.試以按大小順序而排列之分數纏爲例.任意兩分數之間常有他分數——例如兩分數之算術均數,兩項間旣常有他項,所以纏中不能有比鄰項.我們如果定要靠比鄰關係界說順序,那末分數上的大小順序便不能界說.其實分數中較大及較小關係,本不需由比鄰關係而生,分數裏較大

及較小關係,本已備具偏稱,傳遞及結合三種性質. 在這些地方,必須用傳遞的關係界說順序,因為惟有傳遞關係,能越得過中間無窮的項.用比鄰關係的方法,也好像用數法求一團之數似的,只可備有窮項之用;有時候全纚項數雖無窮,而兩項間項數有窮,也用得着;但是這方法,總不可視為普遍. 不但這層,以前因認比鄰為通法而生的一切謬想,都要剗除盡淨. 否則遇着無相鄰項之纚,就困難糊塗了. 並且這種纚,在研究連續性,空間,時間,以及運動時,還非常重要.

發生纚的方法很多,但是都非尋出或構成一個偏稱,傳遞而且結合的關係不可. 就中有些方法很為重要. 現在拿一個『三項關係』(Three term relation)——『介乎』——來說明纚之發生. 這個方法,在幾何學很有用,並可以做論多項關係的引導;最妙即以淺近幾何為例來說明.

在尋常空間內一直綫上任取三點,必有一點介乎他兩點之間. 如果三點在一個圓或閉曲

綫上,這個『介乎』(Between)關係,不能存在,因爲我們可以從一點起,沿圓而行,達於他點,不經過第三點. 實在講,『介乎』這個觀念,完全是『開展綖』(Open series)——或是狹義綖——的特性,與『循環綖』(Cyclic series)(如前所論圓桌)的性質相反,循環綖上走若干路,終有回到起點之時. 這個『介乎』觀念,可用做尋常幾何之基礎觀念;但是我們現在僅論這觀念在一直綫及其在一直綫上點之順序之應用(原註2)任取兩點a,b,則直綫(a b)除含a及b外,含下列三部分:

(1)點之介乎a與b間者.

(2)諸x點,a介乎x與b間.

(3)諸y點,b介乎y與a間.

故直綫(a b),可以『介乎』關係界說之.

欲用『介乎』關係,將直綫上之點由左而右順次列之,需用下列諸假設(Assumptions):——

(1)若有介乎a與b之間者,則a與b不相同.

(2)介乎a與b間者,必介乎b與a間.

(3)介乎a與b間者,與a不相同.(由此及(2)推之,可知亦與b不同)

(4)若x介乎a與b間,則介乎a與x間者,亦介乎a與b間.

(5)若x介乎a與b間,而b介乎x與y間,則b介乎a與y間.

(6)若x及y皆介乎a與b間,則x或與y相同,或介乎a與y間,或介乎b與y間,(三者必居其一).

(7)若b介乎a與x間又介乎a與y間,則或x與y相同,或x介乎b與y間,或y介乎b與x間,(三者必居其一).

上列七性質,適合於尋常空間內一直綫上之點,這是很明白的. 凡能適用此七性質之三項關係,都能發生纙,看下面的界說自然知道. a,b,兩點可以說a在b左,或b在a左,爲求說明上固定起見,暫定a在b左. 由是組成(a b)直綫之點有五部分.(1)其本身與b之間有a存焉者—— 名

之曰在a左之點,(2) a,(3) 介乎a與b間者——名之曰在a右b左之點,(4) b,(5)其本身與a之間有b存焉者—— 名之曰在b右之點. 對於一直綫(a b)上二點x,y我們可以一般的界說其在左之關係: 有下列七種情形之一,則稱『x在y左』

(1)x及y皆在a左,而y介乎x與a間;

(2) x在a左,而y或爲a,或爲b,或介乎a與b間,或在b右;

(3)x爲a,而y介乎a與b間,或爲b,或在b右;

(4)x及y皆介乎a與b間,而y介乎x與b間;

(5)x介乎a與b間,而y爲b,或在b右;

(6)x爲b,而y在b右;

(7)x及y皆在b右,而x介乎b與y間.

由以上說法看起來,從我們所定三項關係『介乎』之七種性質,可以推斷所界說的『在左』關係,乃是合於我們纔之界說的一種繼屬關係. 還有一種很重要的事須注意的,我們的界說和論證,雖然用了『介乎』這個字,卻不必須有尋常空間裏

那種『介乎』的意義——隨便那一個三項關係,祗要有了那七個純粹形式的性質,都可以取而代之,并且是一樣的能達論證的目的.

循環順序,(例如圓上各點之順序)不能用三項關係發生.須另用一種『四項關係』名爲『雙雙離間』.(Separation of couples).試以環遊世界爲例論之.從英倫到新西蘭,打蘇彝士過也行,打舊金山過也行;但是不能說蘇彝士或舊金山介乎英倫與新西蘭之間.若有人周行世界,經這四處,那末不管他怎樣走法,他在英倫及新西蘭的時間,必爲在蘇彝士及舊金山的時間離間開了,在蘇彝士及舊金山的時間,也爲在英倫及新西蘭的時間隔開了.就一般言之,在一圓上取四點,用一定的方法分爲兩雙a與b,以及x與y,令由a至b必經過x或y,由x至y亦必經過a或b,像這種情形,我們就說(a,b)爲(x,y)『離間』.從這個『離間』關係,可以發生循環順序,也好像從『介乎』關係發生開展纔似的,不過比較繁瑣些罷了.(原註3)

本章後半之目的,在提一個論題,其名可以叫做『纚屬關係之發生』.(Generation of serial relations),纚屬關係有了界說之後,由別的僅具有纚屬性質一部分的關係而求出纚屬關係,其方法也很重要,在幾何哲學及物理哲學更重要. 但是在本書範圍以內,我們除令讀者知道有這個論題以外,不能作詳細的討論.

(原註1)這名詞是C.S. Pierce造的.

(原註2)參看Rivista di Matematica,iv pp. 53 ff.;Principles of Mathematics,p. 394(§375).

(原註3)參看Principles of Mathematics p.205(§194)以及同處所參引.

第五章

各種關係

算學之哲學,有一大部分研究『關係,』並且各種不同的關係有各種不同的用處. 同一性質,往往各種關係皆具有之,而只在某幾種關係上爲重要,在其餘則不重要;這種地方,讀者若非先知在那些關係上某一性質爲有用,遇見敍述該性質的命題,便不能知該命題價値若何. 因爲這種緣故,又因爲此種討論本身也有價值,所以我們最好先將算學上較爲合用的關係,在心裏粗粗立下一個表來.

上章我們已經講到一種非常重要的關係,叫做**纚屬關係**(Serial relations). 纚屬關係必定備具的三種性質——**偏稱性**(Asymmetry,)**傳遞性**(Transitiveness) **結合性**(Connexity)——各有各的獨立的重要. 現在先就這三種性質講一講.

偏稱性就是不可逆性,很重要而且很有趣味.

要知道他的功能,試多舉幾個例來說.『夫』,『婦』這兩關係都是偏稱的;若a爲b夫,則b不得爲a夫;『婦』亦然.『伉儷』關係却是對稱的;若a爲b之伉儷,則b亦爲a之伉儷.設有『伉儷』關係,我們要由他推出『夫』的關係來.夫就是『男性伉儷』或『女子的伉儷』;所以我們若將關係界限於男子或將被關係界限於女子,則『夫』的關係就可由『伉儷』關係推出來.從這例可以知道,若有了一個對稱關係,我們有時可以不憑藉別種關係的幫助,將他分做兩個偏稱關係.但是可用這分法的例不多,並且都是些特別的:必須關係場可以劃分爲無公用項的兩類,如α及β,每兩項間有該關係時,必一項屬於此類α,一項屬於彼類β——例如二人有伉儷關係,必一屬於男類,一屬於女類.在這種地方,關係界限於α被關係界限於β的關係,便是一種偏稱關係,關係界限於β被關係界限於α者亦然.但是這種例,與我們研究多於兩項的纙的時候所遇見的例是不同的;

因爲纏中除首末兩項(如其有之)以外各項都可算屬於發生此纏之關係界,也可算屬於被關係界,所以像『夫』的關係其關係界與被關係界不相搭雜的,不可拿來與這種纏相提並論.

有的關係具一種很有用的性質,有的關係僅具有這性質的初形(還沒有成). 怎麼樣用一個僅具某性質初形之關係,加以推演,造成一個具此性質之關係,也是一個很要研究的問題. 傳遞性及結合性,在許多地方原設的關係雖不具之,却很容易構成:設R是已知之關係,不管R傳遞不傳遞,那個由R用普遍歸納法推出來的先宗關係,總是傳遞的;並且祇要R是多對一的,就某項之後裔範圍以內而論,那個先宗關係總是結合的. 但是構成偏稱關係,却難的多了. 上段所說由對稱關係『伉儷』推出偏稱關係『夫』那個方法,在『較大』,『居前』,『在右』等關係上,其關係界與被關係界互相搭雜,是不能用的. 在這些地方,我們固然可將每關係及其逆關係加起來構成

一個對稱關係,但是不借助其他偏稱關係,便不能從這構成的對稱關係重新回到原來的偏稱關係 拿『較大』做個例罷:『較大或較小』—— 即『不等』——是一個對稱關係,但是這個關係本身上絕沒有什麼可以顯明他是兩偏稱關係(『較大』及『較小』)之和. 試把這種關係當作『形狀不同』看待. 這也不是任何偏稱關係及其逆關係之和,因爲形狀不能作成纚;却是將他與『數量不同』比較着看,若不是先知道數量有較大及較小的關係,檢直沒有理由說『形狀不同』與『數量不同』有什麼區別. 這就足以說明偏稱做一種關係的性質其基本性是怎樣了.

從關係的分類看起來,偏稱性比之示異性重要的多. 偏稱關係必示異,示異關係未必偏稱. 例如『不等』就是一個示異而不偏稱的關係. 泛言之,我們要力求將一個關係的命題(如某對某有某種關係)變做一個用謂語敍述主詞的命題(如有某關係之兩項爲如何之兩項),這種事在

對稱關係範圍以內,我們總可以說是能夠做得成功的:對稱關係不示異的,如果傳遞,我們便可看做是敍述公共的謂語;對稱關係示異的,如果傳遞,我們便可看做是敍述不相容的謂語. 試以『兩類之相似』,我們前章藉他界說數的,為例來說. 這關係對稱,傳遞而不示異. 一類之數可以看做是該類的一個謂語,不過其方法不如我們所用的簡易罷了:兩個相似的類,就是兩個同有一數的類,兩個不相似的類,就是兩個不同有一數的類. 這樣將關係變為謂語的方法,雖然往往不很便利,只要所研究的是對稱關係,總是形式上可能的事. 但在關係偏稱時,便形式的不可能,因為謂語等與謂語不等,兩者都是對稱的緣故(如『a較大於b』這偏稱關係,謂語用『等』或『不等』都不行,因為他們都是對稱的). 照這樣看起來,偏稱關係算是各種關係中關係性最大的,哲學家想研究關係之究竟的邏輯的本性,這關係最為重要.

此外還有一種用處最大的關係,就是**一對多**的關係(One-many relations),即對於一定被關係項祇有一關係項之關係(包括一對一的關係).例如父,母,夫(除西藏地方),平方,正弦,等等都是.親(父,母),平方根,等不是一對多的.無論什麽關係,想法子變成一對多的關係,乃是形式上可能的事.試以歸納數間『較小』關係爲例來說.設有一數n大於1,那末較n小的數固然不祇一個,但我們却能將凡小於n的數歸成一類.這類對於n之關係任何他類都不能有.我們可仍用算學歸納法裏所用『先宗』及『後裔』兩字的意義,將小於n之數之『類』叫做n之『眞先宗』.每一數n祇有一個惟一的類做他的『眞先宗』,所以眞先宗是一對多的關係(以後講『一對多』常包含『一對一』而言).那末,『較……小』這個關係就變成『爲……之眞先宗中一項』了.照這樣,一個一對多的關係其關係者是個類的,與該類之項合起來,常可以正式的替代一個非一對多的關係.裴阿諾因

爲某種緣故,好把關係看做是一對多,遇着非一對多的,他便用上法變成一對多. 將各種關係變成一對多的關係,雖然形式上是可能的,却並不是學術上一件化複雜爲單純的事,況且我們對於類必須看做是『邏輯的構象』,更可見這種事决不可算是哲學的分析. 所以以後我們仍把一對多的關係看做是關係的一種.

一對多的關係常常隱伏於『這一個「…之…」』詞語裏面.『這一個「英格蘭之王」』,『這一個「蘇格拉底之妻」』,『這一個「密爾之父」』,等,都是摹述對於一定項有一對多關係之某人的. 一個人不會有許多父親,所以『這一個「密爾之父」』縱然不知道是誰,但必定摹述『一』個人是無疑的. 關於摹述,很有許多須要詳論,但現在我們所研究的是『關係』,『摹述』與我們相關的地方,只在他將一對多的關係的用處給我們一點例證. 所有算學的從元 (Function) 都是由一對多的關係而生,這是應當注意的:『x之對數』,『x之餘弦』,等,與『x之父』

都一樣的是用對於一項(x)之關係(對數,餘弦,等)來摹述某項. 從元(Function)這觀念不必限於數,其用處也不必以算學所已令我們習慣的爲限. 我們可以將他推廣到任何一對多的關係上去,如『x之父』與『x之對數』可以一視同仁的看做是以x爲主元(Argument)的從元. 照這種意義的從元,名爲**摹述從元**(譯者注1)(Descriptive function). 以後將論從元中倘有尤爲普遍尤爲根本的一種,叫做命題**從元**(Propositional function); 但是現在說的從元專指摹述從元,其形爲『這一個對於x有R關係的項』,或簡寫爲『x之R』其中的R乃是任何一對多的關係.

若『x之R』摹述某一定項,則(I)必有對x有R關係者,(II)對x有R關係之項不得多於一. 譬如x是亞當夏哇以外任一人,我們都可以說『x之父』這句話;但若x是桌,椅,等無父的東西,我們就不能說『x之父』了. 若恰有一項,對於x有R關係,我們就可說『x之R』存在. 若R爲一對多的

關係,而x屬於R之被關係界,則『x之R』一定存在;否則不存在. 又『x之R』既看做從元,我們借用算學之名詞更推廣其意義,稱x爲該從元之『主元』(Argument),又若y對x有R關係換言之,若y爲x之R,則y便爲該從元之『值』(Value). 若R爲一對多的關係,則所有該從元能有的主元組成一類,就是R之被關係界;所有該從元能有的值亦組成一類,就是R之關係界. 例如從元『x之父』,所能有的一切主元,就是一切有父者,也就是『父』關係之被關係界,此從元所能有之一切值,乃是一切爲人父者,也就是該關係之關係界.

『關係』的邏輯裏有許多頂緊要的觀念是摹述的從元,例如:逆關係,關係界,被關係界,關係場,都是. 旁的例見後.

在一對多的關係之中,又要數**一對一的關係**(One-one relations)特別重要. 以前我們界說數時,曾得着機會論及一對一的關係,不過他非常重要,我們須將他的觀念弄熟習些,不可祇知道他

的形式的界說．他的形式的界說可以從一對多的關係的界說推出來：一對一的關係，就是本身是一對多的且其逆關係也是一對多的之關係，即既爲一對多又爲多對一的一種關係．一對多的關係原可以界說做：如有一項 x 對 y 有某關係，則必無別項 x' 對 y 能有此關係．又可界說如下：設有兩項 x 與 x' 及關係 R，若 x 對之有 R 關係之項所組成之類與 x' 對之有 R 關係之項所組成之類無公共之項，則 R 謂之一對多的關係．還可界說之如下：一關係 R 與其逆關係之『相對積』(Relative product) 有全同性(即表示與本身之關係) (Implies identity) 者，曰一對多的關係，此處所謂兩關係 R 與 S 之相對積 R S，亦爲一種關係；若 x 對 y 有關係 R，y 對 z 有關係 S，則 x 對 z 有其相對積 R S 關係(此與 S R 有不同處)．譬如 R 爲父對於子之關係，假如 x 與 z 之間另有一項 y，x 爲 y 之父，y 爲 z 之子，則 x 對 z 之關係即 x 對 y 與 y 對 z 兩關係之相對積；x 與 z 必定是同一個人，

這是顯而易見的. 至若R爲父母對於子女的關係既不是一對多的,那末,x爲y之父母,y爲z之子女,我們不能說x與z是同一個人,因爲也許一個是父,一個是母. 以上說明一關係與其逆關係之相對積有全同性是一對多的關係之特徵. 在一對一的關係,除具此特性之外,還有一個特性,就是其逆關係與該關係之相對積亦具有全同性. 設有一關係R,x對於y有R關係,我們爲便利計可以說,y可由x順『R方向』而達到,同樣,x可由y順『反R方向』而達到. 由是一對多的關係之特性,又可用這個語法來表明,說他是順R而往順反R而返仍至原處的關係. 別種關係是沒有這個特性的;例如R爲子女對於父母之關係,則此關係與其逆關係之相對積爲『自已或兄弟或姊妹』,若R爲孫子女對於祖父母之關係,則此關係與其逆關係之相對積爲『自已或兄弟或姊妹或堂表兄弟姊妹』. 兩關係之相對積不一定是『可交換的』(Commutative),即R與S之相

對積與S與R之相對積兩種關係未必相同．例如『父母』與『兄弟』之相對積為『父母』，『兄弟』與『父母』之相對積為『叔伯或舅』(譯者註)

一對一的關係，又能供給兩類間之『關聯』，(Correlation)一個對一個，此類中之項各有一個相關聯的項(Correlate)在他一類中．這種關聯當兩類無公共項時，如夫之類與婦之類，我們最易了解；因為在這種地方，關係場內任取一項，我們立時知道他到底是關聯關係R之所從而生還是R之所及．為便利起見那關係所從而生之一項可叫做『生關係者』，關係所及之一項可叫做『被關係者』．設若x為夫y為妻，就『夫』關係而論x為生關係者，y為被關係者；但就『妻』關係而論則x為被關係者，y為生關係者．關係與其逆關係，可以說是互為反對『方向』；如從x到y之關係與從y到x之關係其方向相反．關係之有方向，是一種根本的事實，有適當之關係何以便能發生纔，這也是其中一部分的理由．一關係之可能的生

關係者組成之類,就是關係界,其可能的被關係者組成之類,就是被關係界.

一對一的關係界與被關係界互相搭雜,這是極常見的事. 例如起首十個整數(除0在外),各加以1,則變爲

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

十數,除前頭去掉了1後面新加上11以外,與原十數完全一樣. 前者是十整數,後者也是十整數:其間有一個關聯關係,即 n 對於 n + 1 之關係,這關係是一對一的. 又將前者各數倍之,亦得十整數.

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20.

其中仍有原十數中之五數,2,4,6,8,10. 這回的關聯關係,是一數對於其數之二倍之關係,也是一對一的. 又若將前者各數平方之,亦得十整數

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 其中還有原來的三數 1, 4, 9. 這種關聯法,可有無窮之多.

這種情形裏面有一個很堪注意的事實,卽作關聯之一對一的關係,其被關係界爲關係界之一部分而非其全體. 上面這些例,若將起首十整數換做全體的歸納數,就可以看得出這個情形來. 我們可將所研究的數排爲上下兩列,令每數之下爲其所關聯之數. 如令關聯關係(Correlator)爲一數n對於n+1之關係,則得以下兩列:

1, 2, 3, 4, 5,………n………

2, 3, 4, 5, 6, ………n+1………

若關聯關係爲一數n對於其倍數2n之關係則得兩列:

1, 2, 3, 4, 5, ………n………

2, 4, 6, 8, 10,………2n ………

若關聯關係爲一數n對於其平方n^2之關係,則得兩列:

1, 2, 3, 4, 5, ………n………

1, 4, 9, 16, 25, ………n^2………

在以上諸例,上列是歸納數之全體,下列却僅是一部分.

像這種例,被關係界爲關係界之『眞部分』的(Proper part)(非全體),將來在研究『無窮』之時還須再論. 現在不過要大家知道有這種例且這種例有研究之必要罷了.

還有一種關聯,有時很重要,就是尋常說的錯列(Permutations),其關係界與被關係界全然是一樣的. 試看下列三文字之六個可能的排法;

a, b, c

a, c, b

b, c, a

b, a, c

c, a, b

c, b, a

每個都可從其餘任一個藉一種關聯法得來. 試以首末兩種(a,b,c)與(c,b,a)爲例. a與c關聯,b與自己關聯,c與a關聯. 兩個錯列合起來還是

一個錯列,換言之,一定類之一切錯列做成一『羣』(Group (,羣論中專門語).

以上各種不同的關聯各有各的重要用處;一對一的關聯 (One-one correlation) 之一般的觀念,在算理哲學上有無限的重要,我們已經稍稍知道,以後繼續研究下去,格外可以十分明白. 次章就要論到他的一種用處.

譯者註 1. Function 一字,尋常算學多譯爲『函數』,惟本書不僅用於數量,似不宜帶數量字樣.今譯Function爲從元,Argument 爲主元,(i)一主一從,因應之義未渝;(ii)元字泛指,則主元從元之義廣;(iii)算學書亦有稱未知量爲元者,主元從元用之於算學,亦無扞格不通之處.

譯者註 2. 原文云『父母與兄弟之相對積爲叔伯或舅,兄弟與父母之相對積爲父母』,與界說不合,故改正之.

第六章

關係之相似

第二章我們曾經說過,兩類『相似』,則其項數相同,換言之,若有一一對一的關係存在,其關係界爲兩類中之一類,而其被關係界爲其餘一類,則兩類項數相同. 這種地方,我們說兩類間有一個『一對一的關聯』(One-one correlation).

本章要界說諸關係間之一種關係,這種關係用於諸關係間,和相似性(Similarity)用於諸類間的情形很相做. 這種關係,叫做『諸關係之相似性』Similarity of relations),或者爲與諸類間之相似區別,要另用一個不同的名詞,就叫做『相彷』(Likeness).相彷怎麼界說呢?

我們還要應用『關聯』(Correlation)之觀念: 設有兩關係,一關係之關係界可與他關係之關係界關聯,被關係界可與被關係界關聯;但這還不足界說我們所要界說的兩關係間之相似性.

我們希望的是,無論什麼時候此一關係存在於任意兩項間,則他一關係必存在於該兩項之關聯項間. 地圖是一個頂淺顯的例. 若甲地在乙地之南,則其在地圖上之位置必在乙下;若甲地在乙地之東,則其在地圖上之位置必在乙右;諸如此類. 地圖之構造與其所表之輿地之構造互相對應. 地圖上之空間關係(Space-relation)與其所表之輿地上之空間關係『相倣』. 我們所要界說的關係之關係,就是這種的關係.

為便利計,我們立論不妨先有點限制. 我們界說兩關係相倣,限定兩關係各有關係場,即限定關係界與被關係界能合成一單純的類. 關係界與被關係界不常能組成一單純的類. 試以一關係之『關係界』對於該關係之關係,做一個例. 因為任何類可做一關係之關係界,所以『關係界』之關係界就是一切的類;又因任何關係總有一個關係界,所以『關係界』之被關係界就是一切的關係. 但是類與關係不能加起來組成一

個新的單純的類,因為他們邏輯的『範疇』(Logical types)不同.『範疇』是很難論的,我們不須討這種麻煩,但『範疇』也非不能討論,我們不論他,乃是有意的避開,這也是應當自知的. 我們可以不管根據怎樣,只說能有『關係場』的關係,必定是『同疇的』(Homogeneous)關係,換言之,其關係界與被關係界邏輯的範疇必然相同;所謂『範疇』的意義可以極粗淺的話解釋: 個體,個體之類,個體間之關係,類間之關係,個體與類之關係,等,範疇各不相同. 不同疇諸關係間之相倣性不很重要;所以我們界說『相倣』,為簡便計,專限於有關係場之關係. 這樣一限制,界說不免失了普遍性,但是實際上倒不關緊要. 這一層申明了,以後便無庸再提. 我們界說兩關係P與Q相似,或P與Q之間有相倣性,說(i)必須有一個一對一的關係S存在,其關係界為P之關係場而被關係界為Q之關係場(ii)若一項對於他一項有P關係,則該項之S關聯項對於他項之S關聯項必有Q關係.

反之,若一項對於他一項有Q關係,則該項之S關聯項與他一項之S關聯項必有P關係.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "P"] \arrow[d, "S"'] & y \arrow[d, "S"] \\ z \arrow[r, "Q"'] & w \end{tikzcd}$$

試以左圖明之. 設x與y兩項之間有P關係　另有z, w, 兩項. x對於z, y對w各有S關係,(一對一的)而z對w有Q關係. 如果有一雙像x與y的項,便發生上面這種情形,並且每有一雙像z與w的項,便發生上面情形的逆,(z對w有Q關係, z對x, w對y各有S關係之逆,x對y有P關係)那麼,顯然是有一個P的實例便有一個對應的Q的實例,反之,有一個Q的實例也必有一個對應的P的實例;這就是我們想用界說來定的意義了. 以上是我們界說的雛形,其中尚有可删的費辭,其實有了上面的情形,P就是S, Q,與S之逆,三種關係的相對積,換言之,依P方向由x而至y,與先依S方向由x至z,次依Q方向由z至w,再依反S方向由w至y,是一樣的. 所以得下列兩界說:—

設有P,Q,S三關係,S爲一對一的,S之關係界爲P之關係場,而其被關係界爲Q之關係場,且P爲S與Q與「S之逆關係」之相對積,則S謂之P與Q兩關係之**一對一的關聯關係**(譯者註)(One-one correlator)或**一對一的順序關聯關係**(One-one ordinal correlator).

若兩關係P與Q之間至少有一『一對一的關聯關係』S,則稱P與Q**相似**(Similar)或有**相仿性**(Likeness).

觀此界說,可知以上我們所斷定以爲必要的,其中已應有盡有了.

由相仿性的界說,可知當兩關係相似時,除與各關係場中那些實在的項有關的性質以外,兩關係之性質無不相同. 倘若一個示異則其餘一個也示異,一個傳遞,則餘一個也傳遞,一個結合,則餘一個也結合. 故一個是纚屬的,則餘一個也是纚屬的. 又若一個是一對多的,餘一個亦是一對多的,諸如此類,(與實際項無關的)各

種性質都是一樣的. 卽或一句敍述關係的話其中含了關係場中實在的項,用到相似的關係上便不能眞,然而總可化成一句很相彷彿的話,使之能眞. 此種討論將我們引到一個問題上去,這個問題在算理哲學上很重要,却向來不曾有人加以適當的體認. 該問題如下;

設有一種語言,我們知道他的文法句法,却不識他的字,用這語言說出一句話來,其可能的意義爲何,並且那些我們不認識而足令這話爲眞的字,其意義如何?

此問題所以重要的緣故,是因爲他將我們對於自然界之知識是甚麼性質,表示得很爲切近,出乎常人揣想以外. 我們知道,某某科學的命題——在高等科學,常以算學符號表示——多少總含有幾分眞理,但是我們對於這些命題中的名辭應當如何解釋,我們是茫無把握. 我們對於自然界『形式』(現在暫用『形式』『實質』這一對舊名辭)之知識,比較對於自然界『實質』之知識多

的多. 所以我們述一個自然界之定律,所實在知道的不過是: 這定律裏的名詞,大概作某種解釋,纔能使該定律近於眞理. 所以下一問題很爲重要: 一個定律,若用一些我們知其文法句法而不知其本意之名辭來表示,這定律可能的意義是些什麼? 這就是我們前頭提出的問題哪.

這個普遍的問題,以後還須研究,現在暫且擱下;『相仿』這個題目,還得再加研究.

若兩個關係相似,則其性質(除非其性質有賴於其關係中之實在項,兩關係場非卽以此諸實在項組織不可)完全一樣,所以與某關係相似之各關係,不可不立一專名,使之有所歸屬. 仿照與一類相似之一切類組成之類定名爲該類之『數』那個說法,與一關係相似之一切關係組成之類也可定名爲該關係之『數』. 爲與用於類之『數』區別,用於關係時另名之曰『關係數』. 其界說如下:

一關係之關係數(Relation-number)者,與該關係相似之一切關係所組成之類也.

關係數(Relation-number)者,關係之『類』也,類中各關係之關係數相同(卽各關係互相似)諸關係數(Relation-numbers)者,一切的『關係之類』所組成之串,串中之『關係之類』各爲一關係之關係數.

若同時用數(用於類者)及關係數,須求其不相混,則將用於類的數叫做『基數』故基數者,特用於『類』之數也. 基數包含一切平常日用之數(Ordinary numbers)(有窮的)及某種無窮數而言,(這些無窮數以後再講). 以後如遇單用『數』一字而無形容詞時,可作基數解. 基數之界說,前已說過,玆重述如下:

一類之基數(Cardinal number)者,與該類相似諸類所組之類也.

關係數最顯明重大的應用就在纚. 若兩纚(注意纚卽纚屬關係)之關係數相同,則兩纚可以說是同一長度(Length).兩有窮纚若項數相同,其

關係數必同,否則不同. 如一個15項纚,與任何15項纚,關係數相同,但與任何非15項纚關係數不同,與任何非纚點的關係之關係數亦不同.故就有窮纚這種特例而論,關係數與基數並行不悖. 關係數可用於纚者,名為纚屬數(Serial numbers)「通常稱為序數(Ordinal numbers 亦簡寫為 Ordinals)者,係纚屬數之一部分」;故在有窮纚若其場中項之基數(有窮)為已知,則纚之纚屬數即為已定. 設n為有窮基數,則稱n項之纚之關係數為序數n(此外尚有無窮序數,俟後論之.)若纚場中之項之基數無窮,則纚之序數不能僅靠該基數來定;實在講起來,一個無窮基數對應着有無窮個無窮序數,這是以後研究無窮纚時還要論到的. 若纚無窮,則纚之長度即關係數可變,而其基數不隨之而變. 纚有窮者,無此情形.

關係數之加法及乘法,我們也可定其界說,與基數同,由此不難發展出一部關係數之算術.其界說之方法如何,觀纚可知. 譬如兩不相搭

雜之纈之和,我們須設法界說,使其和之關係數即兩纈之關係數之和.第一,兩纈顯然含有一個順序:一前一後.設P與Q為發生兩纈之關係,使P置Q前,則在兩纈之和(亦為纈)中,P之關係場內各項,必都在Q之關係場內各項之前.故所謂P與Q之和,那個纈屬關係,必非『P或Q』而為P,或Q,或P場中任何項對於Q場中任何項之關係』.若P與Q不相混搭,則此關係必為纈屬關係,但『P或Q』非纈屬關係,因為P場中一項與Q場中一項其間無『P或Q』關係.以上界說的兩纈和,正可供給我們界說兩關係數和之用.照此略為改頭換面,乘積及乘方,也可界說.由此結果所生之算術,不適用交換律(Commutative law).兩關係數之和及積,常因兩數前後次序不同而不同.這種算術却適用結合律(Associative law),一種分配律(Distributive law),及二種乘方律(Formal laws for powers).不但纈屬數如此,一般的關係數都如此.關係算術(Relation-arithmetic)雖至近

世纔發達,却也是算學中很精美的一門.

讀者勿因『相仿』觀念在纚上有頂顯明的應用,就以爲此外沒有別的重要用處. 以前曾舉地圖爲例,現在可將這種思想擴充到幾何上去.設有一系關係,適用於一串項間,是爲一種幾何學;若舉與此系關係相仿之諸關係適用於另一串項間,又爲一種幾何;拿算學的眼光,看兩種幾何,無從區別的,換言之,兩幾何之命題,除了說這些命題用於這串項那些命題用於那串項以外,是完全一樣的. 我們可以拿第四章所論之三項關係『介乎』來說明. 第四章已經論過,一個三項關係,若具有若干形式的邏輯的性質,則能發生纚,該關係可以叫做『介乎關係』. 指定兩點a及b,我們就能用『介乎關係』界說a及b所定之直綫;此直綫,含與a,b兩點互有介乎關係之一切點. 韋卜倫O. Veblen (原註1) 曾經證明我們的空間,可以看做是三項關係『介乎』之關係場,我們的幾何,可用『介乎關係』之性質界說之. 二項關

係之『相仿』固容易界說,三項關係之『相仿』也不難界說. 設B與B'各爲三項關係,命『x B(y, z)』表示『x在B關係上介乎y與z之間』,若S爲一一對一的關係,其關係界爲B之關係場,而被關係界爲B'之關係場,且必x, y, z之S關聯項間有B'關係,x, y, z始有B關係,則稱S爲B與B'之一對一的關聯關係. 若B與B'之間至少有一一對一的關聯關係如S,則稱B與B'相似或相仿. 讀者不難相信若B與B'是照這種意義相似,則由B發生之幾何,與由B'發生之幾何,便無可分別.

從這樣看來,算學家無須關心於其點,綫,面之特殊的實在,或內部的本質,就是以實用算學家自期,也不必如此. 我們固然可說幾何中不是從事於界說的部分,其近於眞實,確可賴經驗而自明. 但是究竟什麼是『點』,却不能賴經驗而自明. 點必須極合我們的公理,却不必『很小』或『不占空間』. 我們祇須他能合公理,他『很小』與否,『占空間』與否,是不關緊要的. 倘若我們能力做

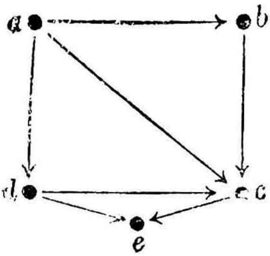
得到,從經驗的材料造出一個邏輯的實體,不管他如何複雜,祇要他能滿足我們幾何的公理,我們便可堂堂正正的叫他做『點』. 我們必不可說除此之外便沒有別的東西可以堂堂正正的叫做『點』;我們只可說:『我們造的那個東西儘合幾何家的用了;此外也許有許多別的東西合幾何家的用,但是我們大可不管,因爲只就幾何中不是從事於界說的部分而論,我們造的東西,已經足夠保證幾何的經驗的眞實了』. 以上不過說明數學上重要的東西,不是名詞本身的性質,而是他們中間相互的關係(Inter relation)之邏輯的性質,這是一個一般的原則,不特在數學爲然,在物理的科學亦大都然的.

若兩關係相似,我們就說兩關係同一樣的格式或構造(Structure). 爲達算學的目的,(爲達純正哲學之目的雖不然)關係之惟一的重要,只在他所能存在之場合,而不在關係之本性, 兩關係概念雖不同,但此關係所能適用之『實例』與彼

關係所能適用之『實例』可以同一外範,好像一類可用種類不同而外範相同之概念——如『人』與『無羽二足動物』——界說似的. 所謂一關係適用之一『實例』,就是一個項耦(Ordered couple of terms)耦中兩項有一定次序,一前一後,前者對於後者有該關係. 就『父』關係而論: 當 x 爲 y 之父,則序列耦(x, y)爲一『父』關係之『實例』,一切序列耦組成之類,可以叫做『父』關係之『外範』. 以算學的眼光看,該『父』關係之惟一的重要東西,就是他這個『外範』. 外範之一般的界說如下:

一關係之外範(Extension)者,各序列耦(x,y)組成之類也,序列耦者,耦中前項(x)對於後項(y)有該關係者也.

這種抽象的方法,我們還可更進一步,看我們說的『格式』是什麼意義. 隨意指定一個關係,倘若很簡單,我們總可以畫一個圖來表示他. 請舉一關係做例,此關係之外範即下列七耦: ab, ac, ad, bc, ce, dc, be 其中 a, b, c, b, e 是任五項不必



管他們是什麼. 在一平面上取五點表五項a, b, c, d, e,又以箭號表示各項耦間之關係,如左圖. 這圖所表示的就是該關係之『格式』或『構造』. 關係之格式,並不倚賴其關係場中之實在項,這是很顯明的. 場變動,其格式可不變,格式變動,其場亦可不變——例如加 a e 耦進去,格式變了,場却仍舊不變. 倘若兩關係能用同一個圖表示,或以相同之語表之,彼此能互為表示圖(因為關係也可做自己的表示圖)我們就說兩關係之『格式』相同. 我們稍一深思,便可見以前所謂『相仿性』,與此正是一樣,換言之,若兩關係有相仿性,或關係數相同,則格式相同. 由這樣看來,以前界說的關係數,是隱隱含在『格式』這語中了,——『格式』這語,雖很重要,以前用他的人,(據我所知的)沒有人給他定過很精密的界說.

古來哲學裏面,有很多的理論,倘若格式(或構

造)之重要,及其背景之難明,早經覺察,這種理論是很可不發生的. 例如空間和時間,往往有人說他們是主觀的,不過他們總有客觀的對應本體,(Counterparts);或者說現象是主觀的,但現象之下,仍有東西為發生現象之原因,這些東西上,必有相互的差異,正與其所發生之現象間,相互差異對應. 凡有立此假設的地方,無非以為我們對於客觀的本體能知道的事很少很少. 倘若這個假設確實不錯,那麼,客觀的本體造成之世界,與現象世界,檢直是一樣格式一樣構造,並且使我們能從現象推及本體,那些能用抽象的詞語述說的命題,如果徵之現象為眞,在本體界亦必眞. 倘若現象世界有三度 (Three deminsions) 現象後面之世界也有三度;倘若現象世界是歐几里得的(Euclidean),本體世界也是歐几里得的;餘類推. 總而言之: 意義可以通達的命題,必然在兩世界都眞,或在兩世界都不眞,兩世界惟一不同之點,就在那不可以語言文字傳達形容

的個體之實質,然卽因其不可以言語文字傳達形容,所以科學上無注意之必要. 哲學家所以輕視現象而斷其無用者,無非爲要自己及他人,相信實在世界與現象世界大不相同罷了. 這個命題,我們也跟他們表同情,很願意證明,但我們不能恭賀他們的成功. 固然有些哲學家,不主張現象的背面有什麼客觀的對應本體,像上面的議論,他們便避去了. 至於主張現象背面有客觀對應本體的,總不敢放膽討論,大概因爲他們不由自主的覺得這種議論追究過深,恐怕實在世界與現象世界便弄得相近太甚了. 如果他們眞去探討,他們大概總免不掉我們已提出的結論. 格式或關係數的觀念,其重要於此可見,並且在許多別的討論上也可見的.

(原註1)此說不合於橢圓空間,只合於其中直綫爲開展綴之空間. 參看 Modern Mathematics, edited by G.W A.Young p. 3 51(monograph by O. Veblen on The Foundations of Geometry)

譯者註1. 按原文無"One-one",今擅加之,其理由如下:

(一)不用『一對一的』,則當S非一對一的關係時,不宜稱為P與Q之關聯關係;然第七章之末,實曾用之於一對多的關係.為免除衝突起見,故當S為一對一的關係時,特稱為『一對一的關聯關係』.(二)此S所以溝通聯繫P與Q二關係者也.S非一對一的,亦未嘗不可溝通聯繫P與Q,觀第十一章末R之於Q與S自明.故當S為非一對一的關係,其於P與Q之功能,亦宜留定名餘地.依譯文,可通稱為P與Q之關聯關係.(三)用"One-one"形容"Correlator"雖係譯者杜撰,然用"One-one"形容"Correlion原書曾於第五章之末及第六章之首兩次用之,或亦不至大不通.

第七章

有盡數,實數,及複素數

我們已經知道如何界說基數,又知道如何界說關係數,平常所謂序數乃是關係數中之一特種.這兩種數可以有窮,也可以無窮.但兩種數都不能照尋常所謂數之觀念之推廣那種說法,推廣之爲負數,命分數,無盡數,及複素數.本章目的,在簡短的討論,以求出這各種廣義數的邏輯界說.

由來關於數之觀念有種種謬誤,其最足爲發現各種廣義數確切界說之阻礙者,乃是那普通觀念,以爲數每經一次推廣,以前之數仍包括於其中爲其特例.論正負數,則以爲正數與原來不帶符號之數相一致.論分數,則以爲分母爲1之分數與整數相一致.論無盡數,如2之平方根等,則往往於有盡數中求之,以爲一個無盡數就是較某些有盡數小而較其餘多之數,所以

有盡數與無盡數可以合成一類名曰實數(Real numbers). 迨至數之觀念推廣至於虛素數(Complex numbers), 卽含 -1 之平方根之數,則以爲實數就是虛素數其虛數部分(卽 -1 之平方根之倍數)爲 0 者. 所有這些臆說,無一不是謬誤,如果界說非求其正確不可,這些臆說,皆當在排斥之列,這是我們一經研究便知道的.

請先論正負數(Positive and negative integers). 我們略加思索,便知道 $+1$ 及 -1 都不過是一種關係,且實係互相爲逆. 其明瞭充分的界說就是, $+1$ 爲 $n+1$ 對於 n 之關係,而 -1 爲 n 對於 $n+1$ 之關係. 就一般說,設 m 爲任何歸納數,則 $+m$ 爲 $n+m$ 對於 n(無論 n 爲何數)之關係, $-m$ 爲 n 對於 $n+m$ 之關係. 按這個界說,祇要 n 是基數(不拘有窮或無窮), m 是歸納數, $+m$ 及 $-m$ 都是一對一的關係. $+m$ 是關係, m 是一類之類,並非關係,那麼,無論如何, m 與 $+m$, 決不能看做是一樣的東西. $+m$ 與 m 大有區別,正和 $-m$ 與 m 大有

區別是一樣的.

分數 (Fractions) 較之正負整數更有趣味. 我們需要分數的地方很多,最顯明的或者就在量法. 我的朋友與我共同著書的懷特赫 A. N. Whitehead 博士曾創立一說,使分數特別適於測量的應用,Principia Mathematica(原註1)中論的狠詳細. 如果我們只求將含有純粹算學必要的性質的東西定一界說,這種目的,還可拿我們所用較簡的方法去達. 分數$\frac{m}{n}$就是當兩歸納數x與y合於xn=ym這條件時x對於y之關係. 這樣界說,足使我們能以證明$\frac{m}{n}$是個一對一的關係,只要m或n不是零. $\frac{m}{n}$當然也就是$\frac{n}{m}$的逆關係.

從上界說觀之,分數$\frac{m}{1}$乃是兩整數x與y當x=my時x對於y之關係. 這種關係,和+m一樣,決不能與歸納的基數m相一致,因爲關係與類之類是絕不同的兩種.(原註2) 無論n是什麼歸納數$\frac{0}{n}$是個一成不變的關係;簡言之,他就是0對於任何別的歸納數之關係. 這關係可叫

做』有盡數之0』(The Zero of rational numbers);與基數之0當然不同. 反之,無論m爲何歸納數, $\frac{m}{0}$ 也是個一成不變的關係. 歸納的基數裏,沒有與這 $\frac{m}{0}$ 關係相當的數. 所以我們可以叫 $\frac{m}{0}$ 做『有盡數之無窮』(The infinity of rationals). 這是算學中慣見的無窮之一種,常以『∞』記之. 但與下章講的眞正鏗託兒無窮數(Cantorian infinite)却不同. 有盡數之無窮,其界說及應用,都不需要無窮類或無窮整數之觀念. 有盡數之無窮,實是無關緊要的東西,若我們有廢之之目的,簡直可廢. 反之,鏗托兒無窮,却是最重要最基本,理解這種無窮,可在算學及哲學上,別闢新領土. (俟下章專論之).

由此可見『比率』(Ratios 卽分數,以後分數與比率互用不分)之中,非一對一的關係者,僅有盡數之零與有盡數之無窮兩比率. 有盡數之零,是一對多的關係,有盡數之無窮,是多對1的關係.

比率(卽分數)之較大及較小也易界說. 設有

$\frac{m}{n}$及$\frac{p}{q}$兩比率,若mq小於pn,則稱$\frac{m}{n}$小於$\frac{p}{q}$. 這樣界說的『較小』,不難證明他是繼屬關係,所以一切比率按大小順序成爲一繼. 這繼裏面零是最小項,無窮是最大項. 倘若將零與無窮都略去不要,那麼比率繼中就沒有了最小項和最大項了;因爲設$\frac{m}{n}$爲任何比率(非零亦非無窮). 則$\frac{m}{2n}$常較小於$\frac{m}{n}$而$2\frac{m}{n}$常較大於$\frac{m}{n}$,(雖然$\frac{m}{2n}$及$\frac{2m}{n}$都不是零或無窮)所以$\frac{m}{n}$不能是最小項,也不能是最大項,所以將零及無窮略去之後,繼中就沒有了最小項和最大項了. 同理,我們可證明兩分數無論如何相近,其間總還有別的分數. 設$\frac{m}{n}$及$\frac{p}{q}$爲二分數,$\frac{p}{q}$較大. 則$\frac{(m+p)}{(n+q)}$這個分數,我們容易知道(或容易證明)是較$\frac{m}{n}$大,却較$\frac{p}{q}$小. 故比率之繼中,無兩項相鄰者,任兩項中,常有別項. 兩項中旣然常有別項,那麼不論兩項如何接近,其間項數無窮,是顯而易見的了.(原註3) 凡一繼,其中任意兩項之間,常有他項,無相鄰之項的,就叫做密接繼(Compact series). 比率按大小順

序排列,就是一個密接纙.這種密接纙,狠有些重要性質,並且密接纙之發生有純靠邏輯的,比率纙就是一個例,無須靠時間或空間或其他經驗的事項(Datum),這也是狠要注意的.

正負比率 (Positive and negative ratios)可仿照界說正負整數之方法界說之.先界說$\frac{m}{n}$與$\frac{p}{q}$兩比率之和爲$\frac{(mq+nq)}{nq}$然後說$\frac{+p}{q}$就是$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$對於$\frac{m}{n}$之關係,$\frac{-p}{q}$就是$\frac{+p}{q}$之逆關係.界說正負比率之方法,自然還可有別個,不過我們爲與以前界說正負整數之方法相似起見,以卽用此法爲便.

現在我們論數之觀念一種更有趣的推廣,推廣到實數 (real number), 而其中卽包括無盡數(Irrational Numbers).第一章已經提到不可通約數及其爲派達哥拉斯所發現.無盡數,定然濫觴於不可通約數,換言之,卽濫觴於幾何.每邊長一寸之正方形,其對角線之長之寸數爲2之平方根.分數中沒有這個東西,古人也早發覺.

歐几里得幾何原本第十編中曾有證明. 歐氏幾何原本以前用爲學校教科書,有數編學校生徒幸其已失,第十編就是其中之一. $\sqrt{2}$不是分數,歐氏原證極其簡單. 假如分數中可有2之平方根,令$\frac{m}{n}$爲2之平方根,則$\frac{m^2}{n^2}=2$即$m^2=2n^2$. 由是m^2必爲偶數,故m亦必爲偶數,(因奇數之平方不能爲偶數). m既爲偶數,m^2必可以4除盡,因若$m=2p$,則$m^2=4p^2$. 故得$4p^2=2n^2$,則$2p^2=n^2$,而$\frac{n}{p}$亦爲2之平方根. 但n^2既等於$2p^2$,則又可得$\frac{p}{q}$爲2之平方根,其p爲m之半,q爲n之半. 由此以往,我們可以得着一纚分數,每分數之子母各爲前分數之子母之半. 這明明是不可能的;因爲無論是什麼偶數,拿2除他,除了又除,除過有窮次,必然要得出奇數來. 我們的論證,還可簡單一點,假定最初所用的$\frac{m}{n}$已經約爲最低項,則m與n不能皆爲偶數;但若$\frac{m^2}{n^2}=2$, m及n皆必爲偶數,故不合理. 故沒有分數能爲2之平方根.

照這樣看起來,沒有分數能恰恰代表每邊長一寸之正方形對角線之長度. 這好像自然界故意與算術爲難似的. 無論算術家如何誇張數之能力,(派達哥拉斯即其一人)自然界一提出這個沒有分數可以表示的長度,就可以叫他們啞口無言. 但是這個問題,並不曾長留在這種幾何的形勢裏. 待至代數發明了,解方程式時又發生同樣的問題,但其形式愈加廣闊,因爲其中更牽涉着虛素數.

平方爲 2 之分數雖沒有,而平方與 2 狠相近之分數總可找到. 我們可以將平方較 2 小之分數列爲遞昇纚,纚中各項,其平方皆小於 2,但項漸遠,則所小者漸少,早遲必可找得一項,其後諸項之平方,與 2 相差,小於任設之一數. 申言之,任意設一小數,譬如十萬分之一,該纚中必有一項,其後諸項之平方小於十萬分之一. 倘若我們設一更小之數,那一項—— 其後諸項之平方與 2 之差小於所設更小之數之項—— 自然

又更在後些,但是終當找得着. 倘若我們用算術的方法去求2的平方根,則必得一無盡之小數,求到若干位之後,其與2之差也是很少,與上面情形一樣. 又平方較2大之分數,可列成遞降纚,纚中各項之平方皆大於2,然項漸遠則所大者漸少,早遲必可找得一項,其平方與2之差,小於任設之一數. 這樣做去,好像用索子將2的平方根綑住,說他總能逃脫,我們狠難相信. 但是說也奇怪,我們用這個法子,無論怎樣,總不能得着2之平方根.

倘若將一切的比率分爲兩類,平方較2大者爲一類,較2小者另爲一類. 那麼平方較2小的那類中,無上臨界項(卽最大項),平方較2大的那類中,無下臨界項(卽最小項). 平方較2略大之數與平方較2略小之數,其相差無0以外之下限(Lower limit). 總而言之,我們可以將一切分數分爲兩類,此類中各項常小於彼類中各項,此類無上臨界項(最大項),彼類無下臨界項(最小

項). 界乎兩類之間,應當歸$\sqrt{2}$佔的地方,却是什麼也沒有. 那麼我們的帶子雖然結的緊,却套在空的地方,以致不曾把$\sqrt{2}$捉得.

上面說的將一纚之項分爲兩類,使此類之項都在彼類前,這樣的分法,經迪德鏗(Dedekind)研究後,纔惹人注意,(原註 4)故世稱爲迪德鏗截痕(Dedekindian cut). 其截點所在的地方有怎樣情形,我們有四種的可能. (1)下節(Lower section 有『上臨界』(Maximum)(卽最後項)而上節(Upper section)有『下臨界』(Minimum)(卽最初項), (2)下節有上臨界而上節無下臨界, (3)下節無上臨界而上節有下臨界, (4)上節無下臨界而下節無上臨界. 第一種情形,可以任何有相鄰項之纚說明之: 例如整數纚,可令自 n 以下各整數爲下節, n+1 以上各整數爲上節. 第二種,可以分數纚說明之,令自某分數以下各分數爲下節,大於該分數者爲上節. 第三種,亦可以分數纚說明之,令小於某分數者爲下節,自該分數以上爲上節.

第四種,可以前段說的分法來說明,即於分數纙中,令平方小於2之分數爲下節,平方大於2之平數爲上節.

以上四種之中,第一種僅限於有相鄰項之纙,可略而不論. 在第二種,我們說下節之上臨界,就是上節之下限 (Lower limit), 也就是上節中任意一串『但上節內任何項不能在該串中一切項之前』之下限. 在第三種,我們說上節之下臨界就是下節之上限(Upper limit), 也就是下節中任意一串『但下節內任何項不能在該串中一切項之後』者之上限. 在第四種,我們說有一個『裂縫』(Gap): 上下兩節既無極界又無極限. 遇着這種情形,我們也可說一個『無盡的截痕』(Irrational cut), 因爲分數纙中無盡數(Irrationals)相當之處有『裂縫』的緣故.

無盡數之理論所以不能達於眞確者,實由一種誤信,以爲『分數纙必有極限』. 極限之觀念極其重要,今先界說之以便往下研究.

設有一項x…關係P一類α,若(1)就P關係而論,α中無上界,(譯者註1)(2)α之中之任何項,其屬於P關係場者,皆在x之前,且(3)P關係場中之任何項,其在x之前,者必在α中之一項之前,(此處『在……前』就是『對於……有P關係』的意思,)則稱x為『α類對於P關係之上極限』(Upper limit或簡稱『上限』.)

界說中已先用『上界』二字,茲舉『上界』之界說:—

設一項x,既屬於一類α又屬於一關係P之關係場,且x對於α中任何項無P關係,則稱x為『α類對於關係P之一上臨界』(Maximum,或簡稱『上界』).

此二界說所可應用之項,並不一定要有數量.(譯者注2)例如,時間之瞬刻,若按早遲排列為繼,則其上界(如其有之)即最後之項;若按遲早排列為繼,則其上界(如其有之)即最初之項.

一類對於一關係之下臨界(Miximum,或簡稱下界)即該類對於該關係之逆之『上臨界』;一類對

於一關係之下極限(Lower limit, 或簡稱下限)即該類對於該關係之逆之『上極限』

以上所界說之『臨界』與『極限』之觀念,其可應用之關係,並無需乎繼屬,非繼屬之關係亦可用之,不過除繼屬關係及『似繼屬關係』(Quasiserial relations)以外,他們的用處却不多. 還有一個往往狠重要的觀念,就是『上界或上限』,我們特別給他取個名叫做上界限(Upper boundary). 例如由一繼中取出一串之項,串中如有末項,則該項即稱爲該串之『上界限』;若串中無末項,串以後之項中如有一首項,則該首項即稱爲該串之上界限. 若既無上臨界,又無上極限,則無上界限. 下界限(Lower boundary)即下臨界或下極限.

再看四種迪德鏗節,其前三種各有界限(或上或下各因其情形而不同),第四種則上下界限皆無之. 無論何時,上節有下界限,則下節定有上界限. 在第二種與第三種,上節之下界限與下節之上界限相合;在第一種,兩界限爲鄰項.

凡一纚無論如何割分,其上節必有下界限下節必有上界限者,稱爲迪德鏗纚 (Dedekindian series).

我們已經知道,分數纚按大小順序排列,就不是迪德鏗的.

常人思想,慣受空間時間的想像之影響,故以爲纚無論在什麼地方總是有極限的,倘若沒有,必覺很是奇怪. 在分數纚中,平方小於 2 之分數,既無相當之有盡的極限 (Rational limit), 他們於是放膽『假設』(Poslulate 卽 Assume) 一個無盡的極限 (Irrational limit), 用他去填那迪德鏗的『裂縫』. 迪德鏗於前述書中,定一公理,說裂縫常可填充,任何節皆有界限. 因此合於他這公理的纚,便叫做迪德鏗纚. 然不合於他這公理的纚,却有無窮之多.

將我們所需要的『算是公理』,這個方法,非常方便,正好像盜賊偸別人血汗得來的東西似的 這種方便,我們讓別人貪圖去,我們自己還是出

血汗去研究罷.

無盡的迪德鏗截痕,有足以『表示』無盡數的地方,這是顯而易見的. 無盡數這東西,初初遇着他,本是一個糊塗觀念,倘要拿來應用,就不得不想個法兒替他定一個正確的界說;要想下界說,又不能不破除我們心裏『無盡數定是一串分數之極限』之謬見. 較無盡數大或小之有盡數,或以無盡數爲極限之有盡數,與分數不相一致,正如分母爲 1 之分數與整數之不相一致. 我們必須界說的,是另外一種的數,叫做實數 (Real numbers), 其中有些是『有盡數』有些是『無盡數』. 那些有盡的與分數相『對應』,好像分數$\frac{n}{1}$與 n 相對應,$\frac{n}{1}$與 n 不同,有盡數與其對應之分數也不同. 要明白他們究竟是什麽,我們先要看清楚,無盡數是用無盡的截痕表示的,無盡的截痕又是用其對應的下節(Lower section)表示的. 我們試專就無上界的下節講,這種下節,我們叫做段(Segment). 那麽,與一分數對應之段,就是較該

分數小之各分數組成之串,該分數就是他們的『界限』; 這個段,便表示一個有盡數. 倘若沒有『界限』, 這段便表示一個無盡數. 凡是『段』不管有界限無界限,就同一纚而論,任取兩『段』,必一段全含其餘一段;故可藉他們的『部分對於全體』之關係,使他們列成一纚. 一纚之中若有迪德鏗『裂縫』, 或無界限之段,其所發生的段數,必較其項數多,因爲每項都有一個對應的段,而無界限之段,却沒有對應的項.

講到這個地步,我們可以定實數,有盡數及無盡數的界說了.

一實數 (A real number) 者,分數按大小順序排列成之纚之一段也.

一有盡數 (A relational number) 者,即分數纚中一有界限之段也.

一無盡數 (A irrational number) 者,分數纚中一無界限之段也.

由此看來,凡一有盡數,必包含較某分數少之

一切分數,也就是與該分數對應之實數. 例如有理數 1,就是各眞分數所組之類.

現在看這兩個對應的纒,一個是分數纒,一個是新造的段纒,分數纒中每一分數,有一對應段在段纒中,段纒中每段,有一對應之分數或無盡截痕在分數纒中.以前我們假定凡無盡數都是一串分數之極限,其實就是那對應的一串有盡數(在段纒中)之極限. 例如$\sqrt{2}$就是分數纒中與『平方小於 2 之一切分數』對應一串之段之上限.約而言之,$\sqrt{2}$就是平方小於 2 之一切分數組成之一段.

任何纒之段之纒是迪德鏗的纒,這是不難證明的. 因爲每一串之段之界限,爲各段之『邏輯的和』;換言之,凡項至少屬於該串中之一段者,悉聚合之爲一類,該類即該串之界限.(原註 5)

上述實數之界說,乃『構成法』(Construction)之一種,『構成法』與『公理法』(Postulation) 正相反對. 前述基數之界說,亦係用構成法. 構成法絕大的

便利,就是不需新假設(Assumption),而使我們能從最初之邏輯的工具,以演繹的方法向前研究.

如上界說之實數,其加法乘法不難界說.設有兩實數 u 及 v,每個都是一類分數,於兩類中各取一分數,按分數加法加合求其和. 變更取法,一一求其和,將各種和組成一類. 這是一個新分數類,並且顯然就是分數續中之一段. 這個類,我們就叫做是 u 與 v 之和. 簡言之如下:—

兩實數之算術和(Arithmetical sum),卽於兩實數中儘可能的取法任意各取一項相加之算術和組成之類.

兩實數之『算術積』(Arithmetic product),亦可同樣界說之. 於兩實數中儘其可能的取法各取一項而相乘,以求其積,則此等積組成之類,卽兩實數之積. (以上各界說中所用之分數續,係將0與無窮除外者)

要將實數之定義,擴充到正負實數及正負實數之和及積上去,也狠容易.

無盡數,實數都界說過了,現在界說虛素數(譯者註3)(Complex numbers).

虛素數雖能有幾何的說法,但幾何學需要他,不如需要無盡數之般.『虛素數』就是含負數(不論爲整爲分爲實數)之平方根之數.負數之平方爲正,那麽,平方爲負的數,一定另是一種的數.-1之平方根(即虛素)若以i表之,則凡數之含負數之平方根者,皆可化爲$x+yi$之形狀,其x與y皆爲實數.yi名爲該虛素數之虛部分,x名爲實部分.(所以有『實數』一名,大概就是要與『虛數』相對)算學家運用虛素數,歷時已久,相習已慣,竟不管他沒有正確的界說.由來算學界對於虛素數,只假定他能服從算術的法則,並且實用上這樣假定狠有好處.幾何學用虛素數,不如代數學及解析算學用的多.譬如我們對於二次方程式自然希望他有二根,三次方程式有三根,這都非有虛素數不可.若根之值限於實數,則方程式$x^2+1=0$便沒有根,方程式$x^3-1=0$便

僅有一根,不能如我們的希望. 所以我們想擴充數之範圍至於虛素數. 數每次擴充,其動機皆原於一些問題之需要: 如負數是減法需要的,因爲沒有負數,則當 a 小於 b 時,a−b 就不可能,要想減法常常可能,非有負數不可;分數是爲除法常常可能之需要而設的;虛素數是爲開方與解方程式之可能之需要而設的. 數之擴充,其動機固然如此,但是嚴格講起來,數之擴充,不是僅僅因爲有這種需要就可造成,他們是要拿界說造成的. 所以我們還是轉而論虛素數之界說.

一虛素數可簡單界說做一個序列的實數耦(An ordered couple of real numbers). 虛素數也與別的名詞一樣,可以有許多的界說. 祇要所定的界說有他應有的性質,那個界說就行. 虛素數,若界說之爲序列的實數耦,則其必要的性質就都有了幾種: 如決定一虛素數,需用兩實數,兩實數可以前後字樣區別之,兩虛素數一致時,

必其前實數與前實數一致,後實數與後實數一致. 此外一切應有之性質,定出加與乘之法則以後,亦可求得. 我們需要.

$$(x+yi)+(x'+y'i)=(x+x')+(y+y')i$$

$$(x+yi)(x'+y'i)=(xx'+yy')+(xy'+x'y)i.$$

我們的加與乘之界說是: 設兩序列的實數耦爲 (x,y) 及 (x',y'), 則其和爲 $(x+x',y+y')$ 一耦,其積爲 $(xx'-yy',xy'+x'y)$ 一耦. 例如, $(0,y)$ 與 $(0,y')$ 兩耦之積,按上法,則爲 $(yy',0)$ 一耦. 又如 $(0,1)$ 耦之平方爲 $(-1,0)$ 一耦. 耦之後項爲 0,照通常的術語說,是虛數部分等於零;倘若用 $x+yi$ 這種寫法,他們應當寫做 $x+0i$, 尋常就簡寫爲 x. 猶如分母爲 1 之分數,我們自然而然(但是錯了)看做與實數一樣,虛數部分爲零之虛素數,我們自然而然(但是錯了)看做與實數一樣. 這個辦法雖然誤謬,但實際却狠便利; $x+0i$ 直可以 x 代之,只要記清 x 不是實數,而是一特殊的虛素數. 當 y 等於 1 時, yi 亦可直以 i 代之. 故 $(0,1)$ 這

耦簡直可以 i 代表,(−1,0) 這耦可以 −1 代表.按相乘法則,求得 (0,1) 之平方爲 (−1,0) 其意卽謂 i 之平方爲 −1. 這就是我們所想求而得之的了. 所以我們的界說,能供一切必要的用處.

在平面幾何學上,給虛素數一種幾何的解釋,也很容易. 這個論題,克里佛 W. K. Clifford 在他的 Common Sense of the Exact Sciences 書中,已經滿意的解釋過了,該書是本大有價值的書,著的時候,世人尙不實在知道純粹邏輯的界說之重要.

『高級複素數』(Complex numbers of a higher order) 雖然不如我們已經界說過的那一種用處廣,但他們在幾何學的應用,也不爲不重要,(看懷德赫博士著的 Unversal Algebra 就可以知道). 求 n 級複素數之界說,僅將前界說稍爲推廣就行. 我們說 n 級複素數,就是一個一對多的關係,其關係界爲一些實數,其被關係界卽由 1 至 n 各整數.(原註 6)這複素數,就是尋常以 $(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n)$

記號表示的數,其中每個副碼 r,卽表示實數 x_r 與整數 r 之關聯;這個關聯是一對多的,因爲卽使 r 與 S 不相等,x_s 與 x_r 還可以相等. 這種界說,再配上一個相當的加法及乘法法則,便可供複素數一切必要的用處.

廣義數之界說,均已審定,但皆就有窮數而論.無窮的下章再論.

(原註 1) 第三册 * 300 以下,特別參看 303.

(原註 2) 實際上我們固然還是說某分數小於 1 或大於 1, 實在的意思,却是說該分數小於 $\frac{1}{1}$ 或大於 $\frac{1}{1}$. 只要默認基數 1 與分數 $\frac{1}{1}$ 不同,便不必時常拘拘的分別他們.

(原註 3) 嚴格說起來,本段自這句以下的話,都牽涉着所謂『無窮公理』,俟第十三章再論.

(原註 4) Stetigkeit and irrationale Zahlen 第二版, Brunswick, 1892. (W. W. Beman 英譯 Dedekind's Theory of Numbers 第一篇, 1909. 譯者曾據之譯爲漢文,載北京高等師範學校數理雜誌第三卷第一期,1921 — 譯者.)

(原註 5) 欲知段與迪德鏗關係之詳細的理論,可參觀 Principia Mathematica, Vol. ii, * 210－214. 欲知實數之詳細理論,可參看同書 Vol. iii * 310 ff, 及 Principles of Mathematics, chs. xxxiii 及 xxxiv.

(原註 6) 比較 Principles of Mathematics, § 360, p. 379.

譯者註 1. 因此 Maximum 不譯爲極大而譯爲上界, Minimum 不譯爲極小而譯爲下界. 極限與臨界之分別,爲前者在範圍以外,後者在範圍以內. 界及限通稱爲界限 (boundary).

譯者註 2. Complex number 或有譯『複虛數』者, 近來亦有譯『複素數』者. 譯『複素數』能表示其含多數原數如 1, i 等等,於高級 Complex number 最洽. 譯『虛素數』表示其含 i, 以合於虛數之觀念,亦頗便利,惟不宜於高級者. 今存二名,所以分別其原素之多少也.

第八章
無窮基數

第二章所定基數之界說,第三章應用於有窮數,卽尋常自然數. 這些數的特性,是在他們從0起,皆服從算學歸納法,所以他們叫做『歸納數』. 我們還不曾硏究過別種的類其項數不是歸納數的,也不曾追究這種類是否可以說他有所謂數(項數). 這是個很古的問題,到現今纔算解決. 解決這問題最有力的,須推鏗托兒(Georg Cantor) 本章將闡發『無窮基數』(Infinite cardinal numbers) 或『超窮的基數』(Transfinite cardinal numbers) 之理論,就是把他的發明和弗雷格的『數之邏輯的理論』參合起來的結果.

我們不能決然的說世界上眞有『無窮類』. 我們只假定其有,這個假定就是所謂**無窮公理**(Axiom of infinity). 有種種方法,使我們可以希望藉以證明無窮公理,但我們很有理由怕那些方法都是些詭辯,並且我們絕無斷定的邏輯的理由

可以相信無窮公理是眞. 然而我們也沒有邏輯的理可以否定無窮類之存在,所以照邏輯講,我們就依着『無窮類存在』這假設來研究研究,也無不合. 我們爲合目前之用起見,拿這個假設實用的形式來說,就是:『若 n 爲歸納數,則 n 不等於 n+1.』這假定與『無窮類存在』那假定何以形異而實同其中很有可細辨之處,但玆姑不論,俟後專論無窮公理時再說. 目前我們祗假定若 n 爲歸納數,則 n 不等於 n+1. 這假定已經含在裴阿諾的假設『無兩數同一繼數者』裏面;因爲若 n =n+1, 則 n−1 與 n 同一繼數 n. 所以除裴阿諾五根本命題之外,我們並不曾假設什麼.

我們試就全體歸納數這個類來論. 他是一個界說分明的類. 第一,基數之界說就是一串之類,串內之類互相似而不另與串外之類相似. 第二,歸納數就是一切按 n 對於 n + 1 之關係而屬於 o 之後裔之基數;換言之,歸納數者基數之一部,凡性質爲 o 所有且爲具此性質之數之繼

數所有者,此等基數,亦具有之.(n之繼數卽指n+1).所以歸納數是箇意義十分確定的類. 按我們基數的普遍界說,全體歸納數所組之類之項數,就是『一切與歸納數之類相似之類』所組之一類.——換言之,這一組相似的類,就是歸納數之數.

我們不難知道這個數不是一個歸納數. 若n是個歸納數,則從o至n其歸納數之個數爲n+1;所以無論n是什麼歸納數,歸納數之數總比n大. 我們若將歸納數按大小順序列爲一纚,這纚便沒有末項;但設n爲一歸納數,則凡n項之纚,皆有一末項. 這種差異,隨意卽可舉出.所以歸納數之個數是個新的數,與各歸納數都不同,不具一切歸納性. o之性質,縱使若n有之則n+1亦有之,這個新數却也許沒有. 無窮數理論之所以有阻礙而不能早闡明的原因,多半由於一種武斷,說歸納性至少總有一部分必爲『凡』數所皆有;並且以爲若說這些性質不爲『凡』數所皆有,必定發生矛盾. 我們想理解無窮數,

首先要知道這種意見的誤謬.

此新數與歸納數有最顯著最新奇的差別,就是以1加之,以1減之,倍之,半之,或以任何演算施之,在我們以為他必因而增多或減少,實際上他却絲毫不變.以1加之而不變,這一層事實,鏗托兒拿來界說他所叫做『超窮基數』(Transfinite cardinal numbers);但是我們根據種種理由(其中有些我們以後就要論到),以為『無窮基數』(Infinite cardinal number)最好是界說做無歸納性的基數,卽基數之非歸納數者.但以1加之而不變,也是個很重要的性質,須得詳論一下.

『一類之數以1加之而不變』與『一類與其外一項x合成一新類,原類對於新類可以有一對一的關係』這兩句話是一而二二而一的.因為如照第二句話,則一類與『該類及另外一項x相加之和』相似;卽與另涵一外項之類相似;設該類之數為n,則另涵一外項之類之數為n+1,而n=n+1.如其如此,我們還可得n=n−1;卽有一種一對一

的關係存在,其關係界爲一類全體,而其被關係界就是全類中短去一項. 概括起來說,就是一部分(非全體)可與全體有一對一的關係. 在這種場合,我們可以說,這個一對一的關聯關係,將全類『反射』於其一部分;因此,我們便稱此種類爲『反身類』

反身類(Reflexive class)者,全體與其一『眞部分』相似之類也. (眞部分(Proper part)者,部分而非全體者也).

反身基數(Reflexive cardinal number)者,反身類之基數也.

我們現在必須研究這種反身的性質.

頂顯明的反身的例,就是羅埃斯(Royce)之地圖說:他懸想在英格蘭地上面畫一個英格蘭的地圖. 凡地圖畫得精密的,與原本必有一對一的對應;那麼,我們的地圖本係一部分的,却與全體有了一對一的關係,一部分所含之點數,必與全體的點數相同,所以這數定是個反身的數.

羅埃斯還覺着一層事實很有興味,就是如果地圖畫的十分精確,地圖裏面當可有一個地圖之圖,這地圖之圖,更含地圖之圖之圖,循此以往,沒有窮極.這一層誠然很有趣味,但此刻我們還不必論他.我們不如離開地圖的譬喻,去求一個十分確定的說法,要達這個目的,最好就拿自然數纔本身來論.

n對於n+1的關係,在歸納數範圍以內,是一對一的,其關係界爲歸納數全體,其被關係界爲o以外之各歸納數.所以歸納數全體略去o後,仍與全體相似.所以按我們的界說講起來,歸納數纔是個反身類,其項數爲反身數.又就歸納數範圍以內而論,n對於2n之關係,也是一對一的,其關係界爲歸納數全體,而被關係界爲耦數全體.所以歸納數之總共個數與耦數之總共個數是一樣的.來本之 (Leibniz) (還有許多別的人)據此證明無窮數之不可能;他以爲『部分等於全體』是自相矛盾.其實『部分等於全體』這

話涵混之中大有精義:『等』字的解釋很多,若當做我們所謂『相似』解,就沒有什麼矛盾的地方,因爲無窮類的確能够一部分與全體相似. 否認這層事實的人,大都不知不覺的將一些性質歸之於一般的數.其實那些性質只能以歸納法去證明,只因我們與他們相習已深,遂誤認他們在有窮範圍以外也能眞確.

無論何時,若能將一類『反射』之於其一部分,同時該部必按同一關係亦『反射』於其自身一更小之部分,依此下推,永無窮極. 例如,歸納數可反射到耦數;同時耦數按同一關係(n 對於 2n 之關係)反射到 4 之倍數,4 之倍數反射到 8 之倍數,等等,這很像羅埃斯地圖問答的形式. 耦數算是歸納數之圖;4 之倍數算是圖之圖,8 之倍數算是圖之圖之圖,等等. 若以同法用於 n 對 n+1 之關係,那末,我們的圖包含 1 以上各歸納數,圖之圖包含 2 以上各歸納數,圖之圖之圖包含 3 以上各歸納數,餘類推. 以上許多說明,主要的

目的,不過是要將『反身』類之觀念清楚熟習,使那些乍看生疑的算術命題,可改用『反身』與『類』等名詞來表示,以減少足以令人懷疑的語調.

給歸納基數之數定個界說,研究上未嘗無益.因此我們先要給與歸納數纚(按大小順序排列)同類的纚定一界說.這類的纚,叫做『進級纚』或『前進鄰接纚』第一章已經論到.進級纚就是可以相鄰關係產出之纚:纚中每項有一繼項(即後鄰),而無前鄰之項只有一個,纚中各項,皆按『前鄰』關係,屬於此一項之後裔.將這些特性總合起來,可得下界說:——(原註1)

進級纚(Progression 平常稱為級數)即一一對一的關係,其關係界中只有一項不屬於被關係界,且關係界與此項之後裔完全一致.

我們不難知道這樣界說的進級纚,仍令裴阿諾五根本公理.其屬於關係界而不屬於被關係界之項,即裴氏之所謂『o』;某項對之有該一對一關係之項,即裴氏之所謂『繼數』;該一對一關係

之關係界,即裴氏之所謂『數』. 試將裴氏五根本公理,逐一改之如下:——

(1)『o為一數』變為『該屬於關係界而不屬於被關係界之項為關係界之一項』. 這不過是說有如是之一項存在,其實界說中已含此語. 此項名曰『首項』

(2)『任何數之繼數為一數』變為:『關係界中某項對之有該一對一關係之項亦屬於關係界』. 此可證明如下:由界說,關係界中各項皆為首項之後裔中之一項;故關係界各項之繼項,必屬於首項之後裔.(因按後裔一般的界說,一項之後裔須包含該項之繼項),即必屬於關係界,因依界說首項之後裔就是關係界.

(3)『無二數同一繼數者』就是說本關係是一對多,因依界說,該關係是一對一,而一對一即一對多之一特例故.

(4)『o非任何數之繼數』變為:『首項不屬於被關係界』,這不過是界說的一種直接結果.

(5) 算學歸納法,變爲;『關係界中任何項爲首項之後裔之一項』,此乃界說之一部分.

由此看來,裴阿諾用以推求算術之五種形式的性質,我們所界說的進級纚都具有了. 並且我們還不難證明,按第六章關係相似之意義,兩進級纚必定相似. 從界說進級纚的那個一對一的關係,我們可以推求出一個纚屬關係來:推求的方法,就是第四章的方法,所得之關係,就是一項對其因原關係而生之眞後裔中任一項之關係.

此發生進級纚的兩個傳遞偏稱的關係是相似的,他們相似,與原來兩個一對一的關係(前鄰)相似,是一樣的理由. 此等發生進級纚之關係,都是相似的關係,按第六章關係之意義,他們組成一類,就是一個纚屬數,這關係數,乃是無窮關係數中之最小者,鏗托兒叫他做 ω, 經他定名以後,這數遂大爲顯著.

但我們現在要研究的是基數,與 ω 不相干.

兩進級纚既然是相似關係,那末,兩進級纚之關係界,(或關係場,因爲進級纚之關係界與關係場全然一致)當然是相似類. 一切進級纚之關係界合組爲一基數;因爲凡與進級纚關係界相似之類,我們可以證明他們自己也是進級纚之關係界. 這個基數是無窮基數中之最小者;就是鏗托兒用希伯來亞力夫(Aleph)而附以副碼0,『$\aleph_0$』,所表示的那個數,其副碼0,所以與更大的無窮基數中用亞力夫而附以其他副碼1,2,…表示者區別. 所以最小無窮基數的名稱就是$\aleph_0$。

說『一類有$\aleph_0$項』就等於說『該類爲$\aleph_0$之一項』也等於說『該類之項可排成一進級纚』. 從一個進級纚內隨便拿去有窮個項,或每隔一項都拿去,或除第十第廿第卅等項以外都拿去,或除第百第二百第三百等項以外都拿去,諸如此類,原進級纚雖然變稀疎了,但仍不失其爲進級纚. 那末像這樣辦法,都不曾使進級纚的項數減少;

原來是 $\aleph_0$,結果還是 $\aleph_0$. 實在講起來,從進級纚中任意挑選些項,祇要沒有末項,無論項之配布如何稀薄,總成一個進級纚. 例如 n^n 或 n^{n^n} 形狀之歸納數,都是進級纚. 像這些數目,雖然數愈大相距愈遠,但其個數仍不減於 $\aleph_0$.

倒過來說,我們也能加若干項於歸納數而不變其項數. 試以分數類爲例. 乍提整數與分數之個數問題,我們一定以爲整數與分母爲 1 之分數一一對應,整數比之分數全體,一定是無限的少,却不料分數的個數與歸納數的個數,實際上竟是一樣的多,都是 $\aleph_0$. 我們將各分數按下法排列起來,便容易知道:若此分數子母之和小於彼分數子母之和,則此置彼前;若兩分數子母和相同,則置分子小者於前. 這樣一排,就成一纚.

1, 1/2, 2/1, 1/3, 3, 1/4, 2/3, 3/2, 4, 1/5, ... 這是一個進級纚,一切分數早遲總可以排到裏面去. 所以分數可以排成進級纚,而

其個數就是$\aleph_0$.

無窮類項數爲$\aleph_0$的固然很多,但不能說一切無窮類之項數皆爲$\aleph_0$.例如,實數之個數爲$2^{\aleph_0}$,卽大於$\aleph_0$.(譯者註2.) 當n有窮,2^n大於n固然容易證明,當n無窮,也容易證明. 證明的方法最容易的,是先證明一類之項數若爲n,則該類含有2^n個副類(Sub-Classes)——換言之,任取若干項(全取或全不取皆可)爲一組合(Combination)其組合總數爲2^n; 第二步證明一類之副類數常大於其項數. 這兩命題中,第一個當n有窮時,是人很知道的,並且不難推之於無窮. (譯者註1.) 第二命題之證法,非常簡單,並可以啓發心思,玆述之如下.

一類(設爲α)中所含副類之個數,至少必與其項數相同(因每一項皆可獨自成一副類),故所謂一對一的關聯,必是全體之項各與一部分之副類一一關聯. 倘若副類數不等於項數,則必大於項數. (譯者註3.) 副類數之不等

於項數,並不難證明,試設有任何一對一的關係,其關係界爲全體之項,其被關係界含於一切副類所成之串範圍以內,而證明至少必有一副類不屬於被關係界. 證法如下:（原註2） 設 α 類各項與一部分之副類中間有一個一對一的關聯關係R,那末,α 中每一項 x 所關聯的副類或含 x 或不含 x. 將凡不爲關聯之副類包含之項歸爲一類,名之曰 β,其餘都是爲關聯副類包含之項. β 也是 α 之一副類,但是不與 α 中任何項關聯. 先就以內之項講,按 β 之界說,其中各項所關聯之副類不含該項,故此等項不與 β 關聯. 再就 β 以外之項講,按 β 之界說,β 以外各項所關聯之副類必含該項,故 β 以外之項,亦必不與 β 關聯. 故 α 中無與 β 關聯之項. R 爲任意的一對一的關聯關係,故由以上結果,知 α 之各項,非與一切副類爲一對一的關聯. 即 β 中無一項,於以上證法亦無妨害: 蓋 β 中既無一項,則不與 α 中各項關聯之類也有

一個就是空類(Null Class). 故無論如何,副類數必不等於項數,且由前之說,必多於項數. 將這個命題與『若項數爲 n, 則副類數爲 2^n』合之,得知 2^n 常常大於 n, n 無窮時亦然.

無論 n 如何大, 2^n 終比 n 還大,所以無窮數是沒有上臨界(Maximum)的. 無窮數之算術,我們不與之相習的時候,總難免覺着他奇怪. 例如

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0,$$

$\aleph_0 + n = \aleph_0$, 此 n 爲任何歸納數.

$$\aleph_0^2 = \aleph_0$$

(這是由分數那個例得來的,因爲每一分數是兩歸納數拼成的,那末,分數之總數明明就是歸納數之總數之平方卽 $\aleph_0^2$; 又據以前的說法,分數之總數與歸納數之總數是一樣的,故得

$$\aleph_0^2 = \aleph_0\text{)}$$

$\aleph_0^n = \aleph_0$, 此 n 爲任何歸納數.

(旣 $\aleph_0^2 = \aleph_0$, 且若 $\aleph_0^n = \aleph_0$, 則 $\aleph_0^{n+1} = \aleph_0^2 = \aleph_0$.

故由算學歸納法得上結果.)

然 $$2^{\aleph_0} > \aleph_0.$$

$2^{\aleph_0}$ 是一個很重的數,有『鏗托兒連續性』(Cantorian Continuity)的纙之項數就是他.(譯者註2)假定空間的連續及時間的連續是鏗托兒所謂的連續,(解析幾何及運動學上都這樣假定)那末,空間之點數或時間之瞬刻數就是他;即空間(無論爲綫爲面爲體都是一樣的)之一有限部分之點數也是他. 所以無窮基數之中除了 $\aleph_0$ 就算 $2^{\aleph_0}$ 最重要最有趣.

無窮基數之加法乘法雖屬可能,然減法除法之結果是無定的,所以減法及除法不可像尋常算術那樣應用. 先就減法而論:減數有窮,結果一定;被減數有窮時,結果一定自不必說,被減數無窮則減後不變. 故若n有窮,則 $\aleph_0 - n = \aleph_0$,常常是對的. 但若從 $\aleph_0$ 裏面減 $\aleph_0$,其較數便自 0 至 $\aleph_0$ 沒有一定. 玆舉例以明之. 從歸納數減去:——

(1)全體歸納數——餘,零.

(2)n以上全體歸納數——餘,0至$n-1$共n個歸納數.

(3)全體奇數——餘,全體偶數,個數爲$\aleph_0$

以上都是從$\aleph_0$減去$\aleph_0$,因所減之方法不同,結果亦異.

除法與減亦相仿,$\aleph_0$若以2或3或任何歸納數或$\aleph_0$乘之仍爲$\aleph_0$;故若以$\aleph_0$除$\aleph_0$,所得之商自1至$\aleph_0$沒有一定.

因減法及除法所生之結果無定之故,無窮數遂無所謂正數,負數,或分數.　無窮數加法,乘法,自乘法,都很順手,而他一方面的演算——減法,除法,求方根法——却都得不着一定的結果,所以有關於減除求根等算法之觀念,研究到無窮數上去,一概都不能用.

我們所藉以定有窮之特徵的,就是算學歸納法,換言之,我們界說有窮數,說他是從0起服從算學歸納法之數,界說有窮類,說他是項數有窮

之類. 此界說之結果,乃是界說所當有的結果,換言之,有窮數都在 0, 1, 2, 3, 4, ……那尋常數纙裏面. 然本章所論之無窮數不僅是『非歸納的』(Non-inductive)而已:並且是『反身的』(Reflexive). 鏗托兒以反身(Reflexiveness)界說無窮數,他相信凡類或基數不歸納就必反身,不反身就必歸納. 這是或者可以眞確的,並且是或者很可以證明的;但是就過去而論,鏗托兒及其他學者(著者早年也在內)所給的證法,却都詭辯不可靠.其理由俟後論『相乘公理』(Multiplicative-axiom)時再談. 究竟有沒有既不反射又不是歸納之類和基數,至今我們還是不知道. 假如有這麼樣的一個數 n, 則我們便不能得 $n+1=n$, 但 n 便不是自然數,歸納性他便有所欠缺. 現在已經知道的無窮類及無窮基數都是反身的;但是或者還有別的類及基數,既非反身又非歸納,爲現在所不知道的,這個問題,我們最好暫且闕疑. 現在暫定界說如下:——

有窮類者歸納類也,有窮基數者,歸納基數也. 無窮類者非歸納之類也,無窮基數者,非歸納之基數也.

凡反身類及反身基數,都是無窮的;但是現在還不知道凡無窮類及無窮基數,是否都是反身. 第十二章我們還須討論這個題目.

(原註1)比較 Principia Mathematica, vol. ii. * 123.

(原註2)此證本於 Canton, 而稍加刪削:參看 Jahresbericht derdeutschen Mathematiker-Vereinigung, i. (1892), p. 77.

譯者註1. $2^{\aleph_0}$一數可按第十二章之意義界說之.

設有

$X_1, \quad X_2, \quad X_3, \quad \cdots X_n \cdots$

$Y_1, \quad Y_2, \quad Y_3, \quad \cdots Y_r, \cdots$

兩進級織,項數各爲$\aleph_0$. 今於每豎行各取一項組成一選班(班內共含$\aleph_0$項),則一切可能選班之總數,按第十二章之界說,係爲$2^{\aleph_0}$. 惟每選班所含上排之項,爲上排之一副類(即組合),而上排中每一副類與下排中

一切不與該副類同豎行之項組成之副類,合之卽爲一選班. 故全體選班與上排之全體副類一一對應,而其數同爲$2^{\aleph_0}$. 卽任何$\aleph_0$項類其副類數常爲$2^{\aleph_0}$. 同理可證任何無窮類若其項數爲ν則其副類數必爲2^{ν}.

譯者註2. 數之進法本可更迭. 今試採用二進法以代十進法,則用十進法表示之基數與用二進法表示之基數一一對應,用十進法表示之分數與用二進法表示之分數一一對應,這是顯而易見的. 試就

$\cdots\ 2^n,\ \cdots\ 2^3,\ 2^2,\ 2,\ 1,\ 1/2,\ 1/2^2,\ \cdots\ 1/2^n,\ \cdots$ 一纏而論,退級纏在前,進級纏在後,其項數爲$\aleph_0$,其副類數當然爲$2^{\aleph_0}$. 將每副類中之一切項用算術方法加之,其和必爲一實數;且每實數各可視爲一副類中一切項之算術和. 故全體副類與全體實數有一對一的關聯,其數同爲$2^{\aleph_0}$.

上述證法,曾假定一切無盡數,皆可以不可通約小數表之,位數無窮,無窮位之小數,皆爲實數. 若此假定成立,則若n與m爲有窮基

數,藉更迭數之進法,可以證明 $m^{\aleph_0} = n^{\aleph_0}$.

譯者註3. 兩無窮類之項數是否相等,卽以兩類間有無一對一的關聯定之. 然此無窮類之項數是否大於彼無窮類之項數,如何決定,原書未嘗標出明白之界說.(小於亦然)——有窮數孰大孰小之界說,在無窮數不能適用.那是顯而易見的. 看原書所用證明『一類之項數小於同類之副類數』之證法,『大於』,『小於』似應界說之如下:

『若此類與彼類之任一副類(全體或一部份)無一對一的關聯,則稱此類之項數大於彼類之項數,彼類之項數小於此類之項數.』

若此界說可用,則應用『兩數之間必有「等於」或「小於」或「大於」之關係』一命題,『實數之個數爲 $2^{\aleph_0}$』易爲證明. 由第七章實數之界說,每一實數爲分數纇之一下節,每下節爲分數類之一副纇;而分數之個數爲 $\aleph_0$,副類數爲 $2^{\aleph_0}$;故實數之個數不大於 $2^{\aleph_0}$

但就進級纇

$1/10,\quad 1/10^2,\quad 1/10^3,\cdots$

而論,其中每一副類中一切項之算術和爲一實數;故實數之個數不小於$2^{\aleph_0}$. 由是知實數之個數必爲$2^{\aleph_0}$.

第九章
無窮纚及無窮序數

『無窮纚』(Infinite series)可界說做關係場為無窮類之纚(注意,纚也是關係). 我們已經研究過一種無窮纚,就是進級纚. 本章目的在研究一般的無窮纚.

無窮纚最可注意的特性,乃是將纚中之項換一個排法,可以變更他的纚屬數. 就這一層論,基數與關係數有一種正相反對的地方. 反身類(即無窮類)其項增加時其基數可以不變;纚則其項雖不加不減,僅變動其排法,而纚屬數可因之而變. 然無窮纚亦可增其項數而不變其纚屬數,與無窮類無異:舉凡這些纚屬數變不變的問題,都要看項的增加其方法如何.

要想說明,頂好舉幾個例. 先看以下由歸納數逐漸變動排法所得各種之纚. 先論

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots\cdots n,\ \cdots\cdots,$$

這纚,以前說過,這纚的關係數是無窮纚屬數

(Infinite Serial Numbers)中之最小的,鏗托兒叫做 ω. 我們試將起首的耦數一步一步的移到末尾去. 我們以次得以下各纔:

$$1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots\ n,\ \cdots\ 2;$$

$$1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ \cdots\ n+1,\ \cdots\ 2,\ 4;$$

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8,\ \cdots\ n+2,\ \cdots\ 2,\ 4,\ 6;$$

等等. 我們懸想這個方法永遠行過去,最後便得了一纔.

$$1, 3, 5, 7, \cdots 2n+1, \cdots 2, 4, 6, 8, \cdots 2n, \cdots$$

奇數的全部在前,耦數的全部在後.

以上各纔之纔屬數順次為 ω, $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, $\cdots$ 2ω; 各數都大於其前之數. 纔屬數大小之義如下:

設有兩纔屬數,若有此數之纔能含一個有彼數之副纔,而有彼數之纔不能含一個有此數之副纔,則稱此數大於彼數.

試比較

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\ n,\ \cdots,$$

$$1,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\ n+1.\ \cdots\ 2,$$

兩纙,後者略去 2 所餘副纙與前纙相似,故纙屬數亦相同;而前纙無副纙與後纙相似者.(這是一見而知的,卽欲證明亦無難事.)故後纙之纙屬數大於前纙之纙屬數,按該兩數定義,得 $\omega+1$ 大於 ω. 然若不加項於進級纙之後而加之於前,則結果仍爲一進級纙. 故 $1+\omega=\omega$. 卽 $1+\omega$ 不等於 $\omega+1$. 由此可以窺見『關係算術』(Relation-arithmetic) 之一般的特性:設 υ 與 ν 爲任意兩關係數,則通例 $\upsilon+\nu$ 必不等於 $\nu+\upsilon$. 在有窮序數,他們能以相等,乃是十分的例外.

以上最後所得的那個纙,奇數的全體在前,偶數的全體在後,其纙屬數爲 2ω. 此數較 ω 大,較 $\omega+n$ (n 爲有窮也大. 以上那些整數的排法,按照順序之界說,個個皆需看做是由一定之關係而生,這是應當注意的. 例如移 2 於後方所得的那個纙,可以拿『x 與 y 爲兩有窮基數,或 x 非 2 而 y 爲 2. 或 x 與 y 皆非 2 而 x 小於 y』

這個 x 對於 y 的關係界說他. 奇數的全體在前耦數的全體在後的那個纜,可以拿『x 與 y 爲兩有窮數,或 x 爲奇而 y 爲耦,或 x 與 y 皆爲奇而 x 小於 y,或 x 與 y 皆爲耦而 x 小於 y』這個 x 對於 y 的關係界說他. 以後我們雖不必不憚煩的一個個給他立出這種公式;但是公式之可以立,這一層事實却不可少.

兩進級纜連接而成之纜之纜屬數,我們叫他做 2ω,有時候也叫做 $\omega . 2$. 纜屬數之乘法,同他的加法一樣,因數之次序不同,則乘積因之而異. 譬如進級耦(卽耦之進級纜)列爲一纜

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \cdots\cdots x_n, y_n, \cdots\cdots$$

仍然成一進級纜,而進級纜之耦之長,則爲一進級纜之長之二倍. 所以 2ω 與 $\omega . 2$ 應當有區別. 符號之慣例本不一律;我們用 2ω 表示進級纜之耦之纜屬數,而 $\omega . 2$ 表示耦之進級纜之纜屬數. 由此可以窺見我們對於『$\alpha . \beta$』一般的解釋,其 α 與 β 皆是關係數:設有 α 個關係,

每關係之關係場各含β項,則由此等關係構成之適當的和(不相搭雜也)其關係數爲$\alpha.\ \beta$。

以上說的那個移項的方法,可以無限制的做過去. 例如最初置奇數,次置奇數之二倍,次其四倍,等等. 由是得

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots;\ 2,\ 6,\ 10,\ 14,\ \cdots;$$
$$4,\ 12,\ 20,\ 28,\ \cdots,$$
$$8,\ 24,\ 40,\ 48,\ \cdots,\ \cdots$$

這個纚的纚屬數就是ω^2,即$\omega.\ \omega$,因爲他是個進級纚之進級纚. 此纚中各進級纚還可仿照前法弄稀疎起來.(譯者註1.) 逐次所得序數爲ω^3, ω^4, $\cdots$ ω^{ω}等等,無論所達數目如何大,我們仍可使之增大,永無窮極.

以上說的將一進級纚弄稀薄後另排的方法很多,由這些方法所得各纚之序數若列爲一纚,這個纚比之那些由進級纚變換排法得來的纚都長(這並不難證明.) 這些序數全體組成的類(譯者註2) 之基數,可以證明他大於$\aleph_0$,他就是

鏗托兒叫做 $\aleph_1$ 的那個數. 這些序數,若按大小順序列為一纙,此纙之序數,可以證明比這些序數都大,名為 ω_1 所以纙之序數若為 ω_1,其關係場之基數必為 $\aleph_1$.

順着由 ω 及 $\aleph_0$ 進而至於 ω_1 及 $\aleph_1$ 那條道路,我們還可以由 ω_1 及 $\aleph_1$ 進而至於 ω_2 及 $\aleph_2$. 由此以往,前途康莊通行無阻;所得新基數及新序數亦無限量. 但是這些基數(用亞力夫 $\aleph$ 副以 2, 3, 4, … 表示者)之中究竟有沒有與 $2^{\aleph_0}$ 相等的,有沒有與 $2^{\aleph_0}$ 可比較大小的,我們現在還都不知道,也許與我們的知識相反,既無等於 $2^{\aleph_0}$ 的,又無大於或小於他的. 這個問題,與『相乘公理』(Multiplicative axiom) 有關,以後再論.

本章所已經研究過的纙,都是所謂『順列纙』(Wellordered Series.) 順列纙有三種特性,(一)有首項,(二)有鄰項,(三)任意指定一部(即副纙),其後若有他項,則該指定部必有繼項(即指定部之後部之首項). 纙也有不順列的,例如(一)無首

之緟,(二)密接緟,無鄰項,(三)緟中含有無首項之副緟者. 負數按大小順序列成一緟,(即退級緟),有末項 -1 而無首項,非順列緟;「若將此順序倒轉過來,以 -1 爲首項,則成爲順列緟.」又如第三章所舉 $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \cdots\cdots \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$ 緟,前部爲進級緟而後部爲退級緟,不是順列緟;同理,凡緟其中含有一部分爲退級緟者,即非順列緟,因其前部無繼項也. 故界說曰:——

緟中任何副緟(空緟不算)皆有首項者曰順列緟(Well Ordered Series,)順列緟之關係數曰序數(Ordinal Number). 故序數乃緟數之一種.

順列緟可以應用一種廣義的算學歸納(即算學歸法之推廣的形式). 一種性質若屬於緟中任意一部時,則屬於該部(若有繼項)之繼項(即該部之後部之首項),這種性質叫做『超窮的遺傳性』(Transfinitely hereditary Property). 在順列緟,凡屬於首項之『超窮的遺傳性』必屬於緟中各項. 有許多在順列緟爲眞在他種緟不爲眞的

命題,藉此可以證明.

我們很容易將全體歸納數排列成一非順列的纔,即或要排成密接纔也不難. 例如,將.1至1各小數(.1在內,1在外)按大小順序列爲一纔,其任意兩小數之間有無窮多個小數,所以是密接纔. 將小數點除去,則得歸納數排成一密接纔,除10之倍數以外,一切有窮整數,都包涵在內.

倘若我們要想將10之倍數也包括進去,這也不難;除用.1至1各小數以外,更用小於.1之各小數,當小數點取消時,所有數目字前之0號都移置於數目字後,於是原來小於.1之各小數就都變成10之倍數. 暫且放下這些10之倍數(即將較.1小之小數去小數點移各0於末尾所成之數)來講非10之倍數(即將.1以上各小數去0號所得之數)之排法,其排法如下:兩整數首碼不同時,置首碼小者於前;兩整數首碼相同而第二碼不同時,置第二碼小者於前,而無第二碼者置於最前;以此類推. 概言之,兩整數當首n碼彼

此兩兩相同時,將第$(n+1)$碼小者置於前,無第$(n+1)$碼者置於最前. 按照如此排法,所有不能以10除盡之整數,便排成一個密接纚;這是學者不難相信的;就是要連那些可以10除盡的數目加進去也不難. 照這例看,可見構成一密接纚,其項數爲$\aleph_0$是可能的事. 我們以前見過一個$\aleph_0$項的密接纚,卽按大小順序排列之分數纚,現在這是第二個例了. 下章還要重論此題.

尋常加法乘法及乘羃法上形式的定律,都適用於『超窮基數』(卽無窮基數),却祇有一部分適用於『超窮序數』;這些適用於超窮序數的,却都適用於任何關係數. 所謂尋常形式的定律,係指以下各種:——

I. 交換定律 (The Commutative Law):

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha \text{ 及 } \alpha\times\beta=\beta\times\alpha.$$

II. 結合定律 (The Associative Law):

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma) \text{ 及}$$

$$(\alpha\times\beta)\times\gamma=\alpha\times(\beta\times\gamma)$$

III. 分配定律 (The Distributive Laws):

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma \text{ 及}$$

$$(\beta+\gamma)\alpha=\beta\alpha+\gamma\alpha.$$

當交換定律不適用時,上兩形式卽有區別.在無窮序數,此兩形式一合一否.

IV. 乘冪定律 (The Laws of Exponentiation):

$$\alpha^{\beta}.\alpha^{\gamma}=\alpha^{\beta+\gamma},\ \alpha^{\gamma}.\beta^{\gamma}=(\alpha\beta)^{\gamma},$$

$$(\alpha^{\beta})^{\gamma}=\alpha^{\beta\gamma}$$

以上各定律,在基數無論有窮或無窮皆適用,在序數有窮時亦適用. 在無窮序數,或關係數,則此等定律有合用者有不合用者. 交換律不合;結合律合;分配律照我們以上所採用關於因數次序之慣例)形式為

$$(\beta+\gamma)\alpha=\beta\alpha+\gamma\alpha$$

者合,而形式為

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$$

者不合;乘冪律

$$\alpha^{\beta}.\alpha^{\gamma}=\alpha^{\beta+\gamma} \text{ 及 } (\alpha^{\beta})^{\gamma}=\alpha^{\beta\gamma}$$

兩者合,而

$$\alpha^{\gamma}\beta^{\gamma}=(\alpha\beta)^{\gamma}$$

則不合,因爲他與乘法之交換律有連帶關係.

以上各命題中所提之乘法及乘冪法,其界說比較繁雜.讀者倘想知道此等界說及上述各定律之證,須讀 Principia Mathematica 第二册 *172 – 176

鏗托兒發明『序數的超窮算術』(Ordinal Transfinite Arithmetic)較『基數的超窮算術』(Cardinal Transfinite Arithmetic)爲早,蓋序數的超窮算術,在算學上有種種專門的用處,故先經他手成立.然就算理哲學眼光觀之,超窮序數之理論,較超窮基數之理論,其重要及基本實遜一籌.

基數實較序數爲單純;而發達沿革適得其反,基數初發現時,特視爲序數之抽象物,其後始漸見獨立之研究.弗熱稽著作對於基數,無論有窮或超窮,皆獨立研究,不與序數相涉,似與上說不合;然使世人知有此種算術者,乃鏗托兒之著

作,弗熱稽之著作,人多未之知,殆其標號之不易解有以致之. 觀念之較複雜(邏輯的)者易於運用,其較單純邏輯的)者難於領會,算學家亦與常人同也.基數在算理哲學上眞正之重要,所以不能早爲人所共認,實由於此. 序數之重要雖不謂小,較之基數則遠有不及,且多爲較普遍之序數觀念所掩.

(譯者註1.) 以上是以基數2爲標準. 第二次就第一次所得之纇,與3互爲質數者居前,次此等數之3倍,次9倍,次27倍,等等;第三次以5爲標準;第四次以7爲標準等等,……

(譯者註2.) 這些序數鏗托兒叫他們做『第二級序數』(Ordinals of the Second Class). 詳言之,從1至ω(1在內ω在外)一切序數,鏗托兒叫做第一級,從ω至ω_1(ω在內ω_1在外)叫做第二級,從ω_1至ω_2(ω_1在內ω_2在外)叫做第三級,餘類推.

第十章
極限及連續

『極限』(Limit)觀念在算學上的重要,一天高一天,非以前意料所及. 微積分學及其他高等算學幾乎處處須憑藉極限. 以前以爲無窮小量(Infinitesimals)就含在這些學問的基礎裏,但是魏斯特勞司氏(Weierstrass)證明這是一種錯誤:因爲無論什麼時候我們設想有無窮小數量,而實際表現的並非無窮小數量,只是一串以零爲極限的有窮數. 尋常以爲『極限』是個數量的觀念,——許多數量對於某數量愈過愈近,其中有些較該數相差可以小於任意一量,該數就是他們的極限. 其實『極限』純是一個順序的觀念,通常不含數量的意義(除非所研究的纚偶然是數量的). 一直綫上任意一點都可以算是此綫上一串點的極限,無須牽入坐標或距離或任何有數量的東西. 有窮基數以數量的觀察點看,無論他如何大,沒有一個能與基數$\aleph_0$很相近的,每

數與$\aleph_0$之差都是固定的是無窮的,但是$\aleph_0$却是歸納數1 2,3,4,……n……(按大小順序排列)的極限. $\aleph_0$所以能爲有窮數的極限,無非因爲他在基數纚中緊跟在他們後面,這是順序的事實,不是數量的事實.

『極限』觀念可表現出各種的形式,愈出愈見其複雜. 那最單純最根本其他各種可以由之而推出的形式(關係纚屬的)我們已經界說過了;現在我們還要將誘導極限觀念的這些界說,推廣之爲普遍的形式,使其不限於纚屬關係. 界說如下:——

一類α關於一關係P之**諸上界**(Maxima)卽α與P關係場(如其有場)之諸公共項對於α中之項無P關係者.

一類α關於一關係P之**諸下界**(Minima)卽α關於P之逆關係之諸上界.

一類α關於一關係P之**諸後鄰**(Sequents)卽α之『諸後項』之諸下界,所謂α之『諸後項』者,P場中

之項α與P場中一切公共項對之皆有P關係者也.

一類α關於一關係P之諸前鄰(Precedents)卽α關於P之逆關係之諸後鄰.

一類α關於一關係P之諸上限(Upper limits)卽當α關於P無上臨界時之諸後鄰;若α有上臨界則α無上限.

一類α關於一關係P之諸下限(Lower limits)卽α關於P之逆關係之諸上限.

若P爲結合關係,則一類最多祇有一上臨界,一下臨界,一後鄰項,餘類推. 在這種場合,祇要有上限,實際上我們便可說『這一個上限』,因爲他實在祇有一個.

倘若P是纏屬關係,以上所定上限之界說還可單簡一點. P爲纏屬關係,則可先界說α類之『上界限』(Upper boundary)——上界或上限——然後分別在甚麼地方上界限乃是上界,又在甚麼地方上界限乃是上限. 要達這個目的,最好是

用『段』(Segment)的觀念.

『關係P之場中一類α可定之段』(The segment P defined by a class α)卽對於α之一項或多項有P關係之一切項所組之類. 此與第七章所界說的『段』之意義相同;第七章的段雖無『某類α所定』字樣,其實也是一類所定的. 若P爲纏屬關係,則一類α所定之段卽α之某項以前之一切項. 若α有上臨界,則α所定之段卽該上臨界以前之一切項. 若α無上臨界,則α中任意一項之後常有他項,故α中之項悉屬於α所定之段中. 例如

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{8},\ \frac{15}{16},\cdots\left(1-\frac{1}{2}\right),\cdots\cdots\cdots$$

這個分數纏沒有上界,若拿全體分數按大小順序排成之纏當作P,則在P中上舉一纏所定之段就是一切眞分數(小於$^1/_1$者)所組之類.

又如全體基數有窮無窮都在內)按大小順序排成一纏若當作P,則就其中質數(Prime)而論,質數所定之段卽一切有窮整數.

假定P是繼屬關係,一類α之『上界限』(如其有之)(Upper boundary)即緊接α所定之段之一項,該項以前諸項即α所定之段.

α之上界(Maximum)即α之上界限屬於α以內者.

α之上限(Upper limit)即α之上界限不屬於α以內者.

若α無上界限,則α無上界亦無上限,『無盡』迪德鏗截痕或所謂『裂縫』就有這種情形.

將上面說的『類』看做是許多α項集成的串,那麼,一串α項之『上限』即緊接在這些α項以後的一項(如其有之),在這項以前的任何項,其後必有些α項.

一串項之『諸上限點』也可界說為: 由該串項中任意選出諸小串,其一切『小串之上限』即β之『諸上限點』(Upper limiting points). 『諸上限點』當然需與『諸下限點』(Lower limiting points)分別. 請舉例以明之. 在序數纚$1, 2, 3, \cdots\omega, \omega+1, \cdots 2\omega,$

$2\omega+1\cdots3\omega,\ \cdots\omega^2,\ \cdots\omega^3,\ \cdots,$

其『諸上限點』就是下列那些沒有前鄰項的項

$$1,\ \omega,\ 2\omega,\ 3\omega,\ \cdots\omega^2,\ \omega^2+\omega,\ \cdots2\omega^2,\ \cdots\omega^3\cdots\cdots$$

這個新纚的『諸上限點』又是

$$1,\ \omega^2,\ 2\alpha^2,\ \cdots\omega^3,\ \omega^3+\omega^2,\cdots\cdots$$

序數纚——凡順列纚皆然——有『諸上限點』沒有『諸下限點』因為纚中除末項外沒有無後鄰的項. 若就分數纚而論,每項都是相當副串的上限點同時又是相當副串的下限點. 又若就實數纚而論,則其中有盡數之串之『諸上限點』及『諸下限點』就是一切實數. 一串項之『諸極限點』稱為該串之『第一推出從元』(First derivative),第一推出從元之『諸極限點』稱為該串之『第二推出從元』(Second derivative),餘類推.

從『極限』着眼來研究『連續』,我們可將一個纚的『連續』分出各種等級. 『連續』這字由來甚古,但在迪德鏗及鏗托兒兩氏以前,從來沒有精確的界說. 兩氏各給『連續』這名詞一個精確的意

義,鏗托兒的界說較之迪德鏗的更爲精密:有鏗托兒連續性的纚,定有迪德鏗連續性,有迪德鏗連續性的纚,却未必有鏗托兒連續性.

凡人初求『連續纚』精密之界說,第一個自然來到心上的界說,必定是說連續纚就是那我們叫做密接的纚,即任意兩項中間尚有無窮項的纚.但是這並非圓滿的說法,因爲他也許密接纚中有裂縫存在,例如分數纚就是.第七章曾經說過,分數纚可以用無窮多的方法區分爲兩部,一部在前,一部在後,前部無末項,後部無首項.這種事好像與我們平常對於『連續』之特徵所抱的渾涵的觀念相反背,並且還有一層,像分數纚這種的纚,算學上何以需用不多,由此也可證明.譬如以幾何爲例,我們希望兩直綫相越時有一公共點,假如直綫上的點纚與分數纚相似,兩直綫相越時就許在『裂縫』裏過去,沒有什麼公共點了.這是個粗淺的例,其他的例證,表明『密接』不足算『連續』之算學的界說的還很多.

迪德鏗連續性之起源不止一處,幾何學上的需要也是其一. 凡纚中任何副纚都有界限的,我們叫做迪德鏗纚,這是我們已定的界說,閱者想必記得.(若上界限常常存在,下界限定然常常存在;下界限常常存在,上界限也定然常常存在. 所以祇假定常常有上界限或祇假定常常有下界限存在就行.) 換言之,沒有裂縫之纚就叫做迪德鏗纚 纚中之項均有後鄰項者必不發生裂縫纚之無臨界而有極限者亦不發生裂縫. 故有窮纚及順列纚是迪德鏗的,實數纚也是迪德鏗的. 前項迪德鏗纚未嘗加以『密接』之限制,不能認爲連續纚;迪德鏗纚若更加以密接之限制恰好是連續纚(在許多地方可以這樣說). 由是界說曰:

凡纚是迪德鏗的并且是密接的,即有迪德鏗連續性(Dedekindian Continuity).

迪德鏗這個界說還太覺廣泛,有許多地方不適用. 譬如幾何的空間,我們想給以若干性質

使其中之點之坐標皆是實數: 這是專憑迪德鏗的連續性不能確實求得的. 欲求不可以有盡數坐標表示之點能爲可以有盡數坐標表示之進級點纙或前進鄰接點纙(Progression of points)之極限,這種性質,係另是一種,以我們的界說推求不出的.

所以我們對於纙之極限須爲更精密之研究. 這個研究,鏗托兒已經做過,他的連續性之界說就以此爲基礎,但從他的界說最單純的形式上並不大看出他這界說是幾經研究而得. 所以我們要先論他的一些觀念一步步進到他的精密的界說上去.

設有一纙,纙中各點(即項)都是極限點,而各極限點都屬於纙內,這種纙鏗托兒叫做『完滿纙』(Perfect series). 這個界說驟視之不易明其意之所在,我們還得申說一番. 第一性質說纙中一切的點都是極限點,意義就不大確定. 假如限定一切的點都是上限點或都是下限點,那就

是密接纜獨有的特性,非密接纜是沒有的. 假如僅僅說一切的點都是極限點,沒有別的限制,那末,就許一些點是上限點,他一些點是下限點,這種纜就未必是密接的了,——例如,小數纜若視其中末位爲循環9之小數與其對應小數(如.31$\dot{9}$與.32)爲前後鄰接之兩項,就不是密接纜.像這種纜雖不是密接纜,却與密接纜很相近,其中密接項很多却是間常有兩兩鄰接的,每逢鄰接兩項,則前者無前鄰,後者無後鄰. 除這種纜以外,凡纜中各點都是極限點的,其纜必爲密接纜,無論曾否敍明各點爲上限點(或敍明爲下限點),這句話總一樣的眞實.

極限點原可用最小副纜界說的,因最小副纜性質(前進或後退)之不同,極限點亦有上下之別,鏗托兒雖不注意及此,我們還是加以分別的好. 鏗托兒假定極限點須拿進級纜(Progression)或退級纜〔即後退鄰接纜(Regression)〕界說. 倘若纜中各項都是進級纜之極限或都是退級纜

之極限,鏗托兒就叫他做內部緟密(或簡稱緟密,德文 Insichdicht 英文 Condensed in itself).

『完滿』之第二性質,鏗托兒叫做封閉(德文 Abgreschlossen) 英文 Closed). 凡纚之一切極限點都屬於纚內者,這種性質稱為封閉. 這話確切有意義之惟一場合是我們所研究的纚包含於一更大之纚中(例如由實數纚挑選出來的纚),所謂極限點乃就大纚關係而論. 否則僅就一纚之本身而論,其諸極限點未有不含於纚中者. 這裏鏗托兒說的話與他的本意不全相合;鏗托兒在別處的話與此微有不同,却實在足以表現他的本意. 他實在的本意是說,凡副纚可望其有極限者皆有極限在原纚內;即凡副纚之無臨界者皆有極限;即凡副纚皆有界限. 但是鏗托兒說的却不是任何副纚而是進級纚及退級纚. (譯者註1.) 這種限制是應當有的,但鏗托兒對於此層所見到的達於若何程度,我們却不大知道)最後得所求界說如下:——

凡纚所含之任何進級纚及退級纚之極限皆含於原纚中者曰**封閉纚**(Closed series).

纚之縝密而且封閉者曰**完滿纚**;換言之,完滿纚者,纚中各項皆爲進級纚或皆爲退級纚之極限,而纚中各進級纚或退級纚之極限皆爲纚中之項者也.

鏗托兒求『連續』之界說,總想找出一個界說,能用之於實數纚及與實數纚相似之各纚,而不能用之於他種纚. 要達這個目的,還得另加一種性質. 實數中有的是有盡數,有的是無盡數,無盡數雖然比有盡數多的多,却是隨便那兩個實數(不拘如何相近)中間還是有許多有盡數. 以前曾經說過,有盡數之個數爲 $\aleph_0$。由此另得一種性質恰好表示連續之特性充足無遺,就是: 纚中含有一副類,項數爲 $\aleph_0$, 纚中任意兩項(不論如何接近)之間常有許多屬於該副類之項存在.

有了這個性質,再加上完滿性,足够界說一類與實數纚相似之纚,並且這個類實在就是一個纚

屬數. 鏗托兒所謂連續纚的就是這些纚.

我們可以將他的界說弄簡潔一點. 先界說一纚之彌綻類(Median class)爲纚場中之一副類纚場中每兩項(無論如何接近)之間常有該副類之許多項存在.

例如有盡數就是實數纚中之一彌綻類. 非密接纚顯然決不能含有彌綻類.

由是鏗托兒連續之界說卽等於下一界說:—

凡纚(1)是迪德鏗的(2)且含有$\aleph_0$項的彌綻纚者曰連續纚(Continuous series).

爲免相混起見,特稱此爲鏗托兒連續性以與迪德鏗連續性區別. 前者包含後者,後者不能包含前者. 有鏗托兒連續性之纚皆互爲相似,而有迪德鏗連續性之纚則未必相似.

以上界說的『極限』觀念及『連續』觀念,與當主元逼近於某値時『從元之極限』或在其主元鄰近『從元連續』等觀念,絕不可以相混. 他們與前二者不同,却可由前二者推出,他們也很複雜. 運動

之連續(假定運動是連續的)是從元連續的一個實例;而空間時間之連續(假定空間時間是連續的)却是纔連續的一個實例,申言之,這種連續可以用算學的適當方法變成纔之連續. 因運動有應用算學上有根本的重要及其他理由,我們對於從元之極限及連續,亦不能不約略討論討論;但以另闢一章為宜

以上所論連續之界說,即迪德鏗與鏗托兒兩氏之界說,其意義與俗人或哲學家心中所存此字渾涵之意義並不相切近. 他們以為連續便是『無區劃』,像烟霧朦朧時那種的混沌氣象. 烟霧使人感覺一種無分無合的巨觀. 形而上學者所謂連續就是指這種東西而言,他說他的精神生活以及小孩與動物的精神生活都有此種特性,其所言也很近乎眞理.

『連續』這字做這樣用的時候所表示的普通觀念,或"Flux"一字(綿綿不斷)所表之意義,皆與我們所界說的意思絕不相同. 試以實數纔為例

來說．纔中各數的特性,確定而不可遷就,其由一數到又一數,並非不知不覺緩緩變化,各數皆是剛性的互相隔離的個體,其與一切其他個體之距離皆係有窮,然這距離也可使其小於預先指定任一有窮之量．這種實數當中存在的連續性與我們在某時間中看見的東西所顯示的連續性是何關係,乃是個疑難複雜的問題．

我們決不可說兩種連續性只是一種,但自著者看,以上所論的算學觀念,很可說他是供給一種抽象的邏輯的規律,經驗上的材料必定可藉適當的方法引入這規律之中,倘若這經驗上的材料一定要說是有連續性並且所謂連續必須有可界說的意義．本書爲篇幅所限不得詳論．讀者對此若欲研究,可觀 1914－15 之 Monist 及 Our knowledge of the External World (人類對於外界之知識) 一書,著者於其中嘗各有所辯證．今但舉此以告讀者,本題雖極有興味,不得不暫止於此,以便重新研究與算學較有密切關係之

論題.

(譯者註1.) 譬如全體第二級序數繼〔參觀第九章(譯者註2.)〕是封閉繼,因第二級序數組成之任何進級繼之上限仍爲第二級序數;但是不能說其中任何副繼之上限皆爲第二級序數,因第二級序數之上限(對全體序數繼而論)爲ω即非第二級序數.

第十一章
從元之極限及連續

本章所研究的問題是兩個界說,一個是何謂當主元漸漸逼近於某值時『從元之極限』,一個是何謂『連續從元』. 這兩個都是很涉專門的觀念,算理哲學入門書中並無論之之必要;不過關於兩觀念有一種謬見特因尋常微分學而起,此種謬見存在哲學專家心裏很是根深蒂固,我們爲闢謬起見不能不有多大的努力. 自來本之(Leibnitz)以來世人總以爲微分學及積分學需用無限小數 (Infinitesimals). 算學家曾經證明這種見解的錯誤〔魏斯特勞司 (Weisrstrass) 證之尤力〕;然謬見固結於人心(例如赫克爾所發關於算學的議論)更正不易,哲學家對於魏斯特勞司一流的算學家之所爲竟熟視無覩.

尋常算學書界說從元之極限及連續,常含着數的觀念. 照懷特赫(原註1)的說明,這是不必須的. 我們可先提出尋常教科書的界說,然

後研究一個推廣方法,使之能應用於一切的繼而不僅限於數量的繼或可以數量測度的繼.

試就極普通的算學從元 fx 而論,其 x 與 fx 都是實數,併且 fx 是一值從元——卽當 x 之值一定時 fx 祇有一值. x 稱爲『主元』(Argument), fx 稱爲『主元爲 x 時從元之值』. 倘若從元是『連續的』(Continuous),那末, x 之小小變動恰與 fx 之小小變動對應,若 x 之變動非常之小其對應的 fx 之變動亦必非常之小,若 x 之變動極小則 fx 之變動卽可小於任設之數: 這就是我們所要想替他求出精密意義的粗淺觀念. 從元旣然是連續的,決不會(我們這樣想)一步步的驟然跳躍,換言之,當 x 之值變動甚小時 fx 之變動決不致超過某有限大之數. 普通的算學從元就有這性質: 例如 x^2, x^3, ⋯⋯ log x, sin x, 等, 都是. 但是不連續的從元也非常之多. 試舉一個非算學的例: 『生存於時刻 t 年齡最小之人之誕生地』. 這是以 t 爲主元之從元; 當某人旣生(而

未死)還沒有生別人的時間以內,這個從元的值是不變的,迨別一人誕生,從元的值忽然由前一人誕生地跳到後一人誕生地去.(倘若後生者死,則從元之值忽又由後生者誕生地跳到前生者誕生地去.) 再舉一個相仿的算學的例: x為實數時『x後之第一整數』,這是x的從元;當x由一整數漸漸增大至次整數時從元之值總不變動,直到末了才忽然一躍而變. 可見連續從元在我們雖然很熟悉,究竟算是例外: 不連續的從元比之連續從元簡直是無窮之多.

從元也有在主元取某值或某些值時連續而此外不連續的. $\sin {}^1/_x$ 就是一個例. 我們知道當 θ 每由 $-{}^\pi/_2$ 變至 ${}^\pi/_2$ 或由 ${}^\pi/_2$ 變至 ${}^{3\pi}/_2$ 或由 $(2n-1)\ {}^\pi/_2$ 變至 $(2n+1)\ {}^\pi/_2$ 時(n 為整數可正可負可零), 從元 $\sin\theta$ 取盡由 -1 變至 1 之一切實數以為值. 令 $\theta={}^1/_x$, 當x甚小時 ${}^1/_x$ 甚大,此時x若漸漸減小,則 ${}^1/_x$ 之增大甚速,其經過 ${}^\pi/_2$ 之一倍數至次倍數必愈過愈快. 所以從元 $\sin {}^1/_x$

之値由 -1 至 1 由 1 至 -1 往復上下也愈變愈速. 今於 0 之近處由 $-\epsilon$ 至 $+\epsilon$ (ϵ 爲甚小之數)取一小範圍,在此小範圍之內 $\sin {}^1/_x$ 上下振動次數無窮之多,雖範圍縮小而振動次數不少減. 所以這個從元在 0 之附近是不連續的. 製造一個從元,使他有無窮個處所不連續,或有 $\aleph_0$ 處不連續,或在在皆不連續,也不是難事. 尋常從元論 (Theory of founctions) 裏面主元爲實數時這樣的例很不少.

『若主元及値都是實數,當某主元時從元是連續的』這句話是什麼意思? 我們要求這個界說,可以先界說一數 x 之『近區』(Neighborhood). 設 ϵ 爲極小之數,凡 x 近旁由 $x-\epsilon$ 至 $x+\epsilon$ 一切之數總起來叫做 x 之近區. 所謂從元在某點是連續的,顯然就是說在該點近區(無論如何之小)是連續的;換言之,若主元在某點任何小之近區是連續的就是說從元在該點是連續的. 再說,設以 a 爲主元,我們希望當主元爲 a 時從元連續,

我們須先界說當主元爲 a 時從元值 fa 之近區 α. 所謂當主元爲a時從元是連續的就是: 無論 α 如何之小,我們一定可以將 a 之近區充分縮小,使當主元取該近區內一切之值時從元之值常在 α 以內. 換言之,倘若我們不願意 fx 與 fa 之差大過某微小之數,我們定然可以找着一串以a爲中心之實數,凡以該串中之數爲主元 x時 fx 與 fa 之差不致大於該微小數. 不論微小之數選的如何小,這話須無時不眞. 故界說如下:——

設有一從元 f(x), 一主元 a, 一正數 σ, 無論 σ 如何小祇要不是零,若常有一正數 ϵ (不是 0) 存在當 σ 之絕對值小於 ϵ 時(原註2)可使 $f(a+\sigma)-f(a)$ 之差之絕對值常小於 σ, 則稱當主元 a 時從元 f(x) 連續 (Continuous for the argument a).

在這界說裏面, σ 一數首先就把 f(a) 之近區由 $f(a)-\sigma$ 至 $f(a)+\sigma$ 限定了. 所以我們的界說祇須說『我們能夠(用 ϵ)找到一個 a 之近區,即

由 $a-\epsilon$ 至 $a+\epsilon$ 之各數,在該區內各主元之對應從元値定然在由 $f(a)-\sigma$ 至 $f(a)+\sigma$ 近區以內;無論 σ 如何之小,祇要上面的話辦得到,當主元 a 時從元定然連續』.

以上還不曾界說到當某主元時從元之極限.

倘若我們先界說了極限,那末,從元之連續性又可以換一個方法來界說: 若從元由上及由下逼近某點,其値之極限皆與從元在該點之値相同,則稱從元在該點連續. 像這樣的從元,當主元逼近某點時其値有一定極限,是很好的,可是不很經見. 通常從元多不絕的顫動,並且無論主元之近區範圍如何之小,其對應的從元往往能取一串很不相近(卽相差不小)的値. 所以我們要先從一般的情形來論.

任意指定一値 a, 主元可由小而大漸漸逼近(以後簡稱上昇逼近)於 a, 亦可由大而小漸漸逼近(以後簡稱下降逼近)於 a. 今先就主元上昇逼近於 a 論之. 設 ϵ 爲一小數(要非常之小),

試看當主元在 $a-\epsilon$ 至 a 範圍以內時情形如何.

當主元在由 $a-\epsilon$ 至 a(a 在外)範圍以內,從元之值是一串實數,所有不大於(即小於或等於)這些值的一切實數組成一節,名爲與該值等對應之下節. 通常 ϵ 變則下節隨之而變. 在節內任取指定一數,與由 $a-\epsilon$ 至 a 範圍以內之主元對應之值必有許多不小於該數者,即當主元與 a 甚相近(若 ϵ 甚小)時從元之值必有不小於該數者. 今選取一切可能的 ϵ,而得一切可能的對應下節. 所有各下節之公共部分名之曰當主元上昇逼近 a 時之終極下節(Ultimate lower section). 所謂一數 z 屬於終極下節者,即謂無論 ϵ 如何小,與由 $a-\epsilon$ 至 a 範圍內主元對應之值中必有不小於 z 者.

以上所論的是下節,即某點以下之節;仿此還可應用於上節即某點以上之節. 當主元在由 $a-\epsilon$ 至 a(在外)範圍以內,從元之值是一串實數,所有不小於(即大於或等於)這些值的一切實數

組成一節,名之爲上節. 通常 ϵ 變則上節隨之而變. 今選取一切可能的 ϵ,而得一切可能的對應上節. 所有各上節之公共部分名之曰當主元上昇逼近 a 時之**終極上節**(Ultimate upper section). 所謂一數 z 屬於終極上節者,即謂無論 ϵ 如何小,與由 $a-\epsilon$ 至 a 範圍內主元對應之值中必有不大於 2 者.

當主元上昇逼近於 a 時其終極上節與終極下節之公共部分稱爲『當主元上昇逼近於 a 時之**終極顫部**』(Ultimate oscillation). 凡謂一數 z 屬於終極顫部,即謂 z 屬於終極下節又屬於終極上節也. 終極顫部可以從元 $\sin {}^1/_x$ 爲例說明之. 當主元 x 之值由負數漸漸上昇而逼近於 0 時 $\sin {}^1/_x$ 之終極顫部存在.

先就終極下節而論. 無論 ϵ 如何之小,主元在 $-\epsilon$ 至 0 範圍內,從元之值必有達於 1 者但必不大於 1. 故終極下節包含 1 以下各實數,即負實數全體,零,由零而上至 1 各正實數(1 在內).

同理,終極上節包含 −1 以上各實數,即正實數全體,零,由零而下至 −1 各負實數(−1 在內).

所以終極顫部盡含由 −1 至 1 各實數(−1 及 1 亦在內).

故所謂當主元上昇逼近於 a 時從元之終極顫部,就是一些數目 x 組織而成,這些 x 有一種特性,無論我們如何迫近於 a,從元常有值不比 x 大,且常有值不比 x 小.

終極顫部也許無項,也許只有一項,也許有許多項. 在前兩場合,當主元上昇逼近於某值時從元有一定極限. 終極顫部若僅僅一項,那一項就是極限 終極顫部若空無所有,則終極上節之下界限與終極下節之上界限相同,這界限就可以叫做極限. 倘若終極顫部含有許多項,則當主元上昇逼近於 a 時從元就沒有一定的極限. 在這種場合,終極顫部之上下界限(即終極下節之上界限及終極上節之下界限)可以定名為『當主元上昇逼近於 a 時從元終極諸值之

上下界限』. 同樣,又得『當主元下降逼近於 a 時從元終極諸值之上下界限』. 所以就一般情形而論,主元逼近於 a 時,常有四個極限. 這四極限如果是合而爲一,這個公共值就叫做『主元逼近於 a 時從元之極限值』;若不合而爲一則無一定極限. 四極限之公共值倘若與主元爲 a 時從元之值一致(通常未必一致),則稱主元爲 a 時從元連續. 這也可以拿來做連續性的界說,與以前的界說是一樣的. (譯者註 1).

當主元逼近於 a 時從元之極限,還可以用別的方法界說他(祇要有他),不必經過顚部及四極限. 這個界說法正與連續性之界說相倣. 今先界說主元上昇逼近於 a 時從元之極限. 主元上昇逼近於 a 時從元有一定極限,其必須而且充分之條件是: 任取一正數 σ 無論 σ 如何之小,取兩主元(皆小於 a)使之充分接近於 a 則其對應兩從元值之差必小於 σ; 即使 ϵ 充分微小與由 $a-\epsilon$ 至 a 範圍內兩主元對應之兩值之

差必小於σ. 假如無論σ如何小這個條件都行,則當主元上昇逼近於a時從元有一定極限.

同樣可以界說當主元下降逼近於a時從元之極限. 此兩極限縱使同時存在未必便相同(譯者註2);縱使相同也未必就與當主元爲a時從元之值一致(譯者註3). 必定三者一致,我們纔可說當主元爲a時從元連續.

連續從元(Continuous function)者當任何主元時皆連續之從元也.

此外還有一個稍爲不同的方法可以界說連續性:——

設有一類α(數之類),若有一實數a,當主元爲a或較a大時從元之值常包含於α以內,則稱該從元『終極收斂於α類內』(Ultimately converges into a class α). 同樣,設x爲一定主元,若此外有一實數y小於x,當主元在由x至y範圍(y在內,x在外)以內時從元之值常含在一類α以內,則稱『當主元上昇逼近x時從元終極收斂於α內』. 今

採用以前界說,凡小於某數之實數稱爲該數之前數,大於某數之實數稱爲該數之後數. 則當主元a時欲從元連續,其必須而且充分之條件爲下列四條:——

(1) 任取一小於fa之實數,當主元上昇逼近於a時從元之值終極收斂於該數之諸後數內.

(2) 任取一大於fa之實數,當主元上昇逼近於a時從元之值終極收斂於該數之諸前數內.

(3)及(4)是主元下降逼近於a時用的,與(1)(2)兩條正相倣.

這樣的界說法便利的地方就在將連續性的條件分析爲四項,將主元與界說有連續性處之主元比較大小,從元值與界說有連續性處之從元值比較大小,實覺眉目清醒.

以前所討論的連續性及極限之界說是爲數的纚而說的. 但是這種界說還可推廣到一般的非數的纚,或不知能否以數量測度的纚. 運動正好拿來做例證. 韋爾斯(H. G. Wells)做過一

段故事,從運動方面看,可以引來說明當某主元時從元之極限未必與其值相同. 這故事中的人說是不知不覺有實現他的志願的神力,想要怎麼樣便能怎麼樣. 他被一個警察追逼,口叫一聲『到——裏去』(譯者註4)警察就不見了. 設當時刻 t 時警察所在地位爲 $f(t)$,叫的時刻爲 t_0. 那末當將叫而未叫的時候,卽當主元 t 上昇逼近於 t_0 時,警察所在地位之極限是與故事中的主人緊相接觸,而主元爲 t_0 時(卽叫時)警察的地位却是——(卽叫他去的那個地方). 這種情形在實在世界總覺的是罕見的,實在世界通常假定一切運動都是連續的,(但並無適當的證據)換言之,設 $f(t)$ 爲 t 時任意一物所在之地位,$f(t)$ 是 t 的連續從元. 這些話語裏面所謂連續正是我們現在所要簡單界說的東西.

以上各界說從元與主元都是實數,現在再將這個限制取消就可用於一般的關係.

設 P 與 Q 爲任意兩關係. (雖不限定是繼關

關係,但爲便利起見可懸想他們是纚屬關係.)

又設R爲一個一對多的關係,其關係界含於P關係場而被關係界含於Q關係場. 這個R關係可以看做是一個(廣義的)從元,其主元屬於Q關係場而值屬於P關係場. 例如我們要研究一個質點在直線上的運動: 命Q爲時間的纚,P爲直線上之點纚(從左而右),R爲當時刻a時質點所在位置對於時刻a之關係,那末,這時刻質點之位置就可以『a之R』表示之. 我們討論的雖是一般的從元,但無妨以運動爲例,將上面的說明牢牢記住.

設a爲一主元(卽Q纚之一項),若任意於P纚中取含『a之R』的一範圍α,Q纚中有一含a的範圍(a非兩端之項)盡此範圍內之項以爲主元,其對應的從元值常在α以內,則稱『當主元爲a時從元連續』. (此處所謂範圍是指介乎任意兩項之間的一切項;若x及y爲P場中兩項,其間有若干項Z,x對Z有P關係Z對y亦有P關

係,則一切Z項合成一範圍名曰『x至y之P範圍』——也有時候特別聲明x或y亦在內).

『終極下節』及『終極顫部』也很容易界說. 設a爲一定主元,y爲任意一前於a之主元(對於a有Q關係),則介乎a與y間之各主元對應着許多從元值都是P關係場中之項,這些值在P關係場內定了一個下節,爲與其中某值一致或早於其中某值之一切項所組成. 掄選所有前於a的項y,作成所有對應的下節,而取其公共部分;這就是『終極下節』. 同樣可以界說『終極上節』. 至於『終極顫部』界說法全然與以前一樣.

『收斂』(Convergence)之界說及用收斂界說連續性之方法要想推廣到一般去,也沒有什麼困難.

設α爲一類,若Q場中有一項y屬於從元R之被關係界,與y及後於y之各主元(y對之有Q關係者)對應之從元值悉屬於α,則稱『從元

R終極依Q而收斂於α內』. 同樣,設有一定主元a若此外尚有一主元y屬於R之被關係界而對於a有Q關係,在由y至a之Q範圍(y在內a在外)以內各主元對應之從元值悉屬於α,則稱『當主元逼近a時從元終極依Q而收斂於α內』.

當主元爲a時從元連續其必須而且充分之四條件中第一條(命『a之R』爲b)是:

任意指定對於b有R關係之一項,當主元上昇逼近於a時從元終極依Q而收斂於b之諸後項(b對之有P關係者)內.

將第一條件之P換做P之逆關係就得第二條件. 將一二兩條之『上昇』換做『下降』就得三四兩條.

由是可見從元之極限及從元之連續觀念便沒有什麽非用數不可的地方. 他們的界說都可以擴充,關於他們的命題也有許多可以應用於任意兩纜(一爲主元纜,一爲從元纜). 這些界

說之中沒有含無窮小(Infinitesimals)的觀念．他們所含的是範圍觀念，這些範圍都是無窮類(項數無窮之多)，雖然一範圍小於一範圍沒有大於0的極限，但是並不是無窮小．譬如一寸之木割去其半，再去餘木之半，又去餘木之半，雖然沒有止境的做去，也不能得着無窮 ：割過n次之後還剩$\frac{1}{2^n}$，祇要n有窮$\frac{1}{2}$總歸有 ．因爲這種割法是一次復一次的(卽割法自成進級續)，決不會達到無窮次．所以用這個法子割剩的木頭決不會無窮小．無窮小這個觀念弄不清楚，很足使無窮及連續性之硏究發生困難．

(原註1) 參看 Principia Mathematica, vol ii * 230－234

(原註2) 某數絕對值小於ϵ者，該數位於$-\epsilon$與$+\epsilon$之間之謂也。

(譯者註1) 此節名詞太多，僅$\sin\frac{1}{x}$一例恐不易顯明各名之變化。特另舉數例如下表

$f(x)$		$\sin\frac{1}{x}$	$x+\sin\frac{1}{x}$	$-x+\sin\frac{1}{x}$	$(1+x^2)\sin\frac{1}{x}$	$\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\sin\frac{1}{x}$
當x由$-\epsilon$漸變逼近於0	對應上節	不變	變	不變	變	不變
	終極上節	自-1以上	自-1以上	-1以上	自-1以上	-2以上
	對應下節	不變	不變	變	變	不變
	終極下節	自$+1$以上	$+1$以上	自$+1$以下	自$+1$以下	$+2$以下
	終極顫部	自-1及至$+1$	自-1至$+1$	-1及至$+1$	自-1及至$+1$	-2至$+2$
當x由$+\epsilon$漸變逼近於0	對應上節	不變	不變	變	變	變
	終極上節	自-1以上	-1以上	自-1以上	自-1以上	自-1以上
	對應下節	不變	變	不變	變	變
	終極下節	自$+1$以上	自$+1$以下	$+1$以下	自$+1$以下	自$+1$以下
	終極顫部	自-1及至$+1$	-1及至$+1$	自-1至$+1$	自-1及至$+1$	自-1及至$+1$

上表中：　『y以上』＝『由y以上（y在外）』；

『自y以上』＝『由y以上（y在內）』；

『y至z』＝『由y至z（y，z在外）』；

『自y至z』＝『由y至z（y在內，z在外）』；

『y及至z』＝『由y至z（y在外，z在內）』；

『自y及至z』＝『由y至z（y，z在內）』；

（譯者註2.）（註1）表中所列各從元，卽主元上昇下降逼近於0時從元兩無極限之例。有而不相同者如 $f(x) = e^{\frac{1}{x}} / (1 + e^{\frac{1}{x}})$。當主元上昇逼近於0時從元值之極限爲0，當主元下降逼近於0時從元值之極限爲1。

（譯者註3.）設 $f(x) = x^2 + \frac{x^2}{(1+x^2)} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \cdots\cdots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \cdots\cdots$ x上昇或下降逼近於0時從元之極限同爲1，但當主元爲0時從元之值爲 $f(0) = 0$。

（譯者註 4.）『——』是『地獄』的無音代名詞，因爲是英文駡人的話，所以著者沒有寫出來，令讀者自己揣摩其意。

第十二章
掄選法及相乘公理

本章要研究一個公理,這公理可以宣示而不能以邏輯證明,他在算學裏面很有便利地方但不是必須的. 算學各門中,有許多有趣的命題,我們覺得認他們眞實很出乎自然,却不憑藉這公理不能證明,足見假定這公理很多便利;但是沒有那些命題,各門算學雖然形式上殘闕不完却是依然成立,可見這公理又不是少不得的了.

在提出相乘公理以前,我們要先闡明掄選理論,及乘法之一般的界說(因數個數可以無窮).

界說算術上的演算唯一正當的方法,就是求一個實在的類(若爲關係數則造一實在的關係)其項數爲所求之數. 求這種類固然有時很費心思,然要證明所界說的數存在實非此不可. 試拿加法做個最簡單的例. 假如有基數μ,及項數爲μ之類α. 我們如何界說$\mu+\mu$?界說$\mu+\mu$需要兩個不相搭雜而各含μ項之類. 要專從

α着手造一個含$\mu+\mu$項的類方法很多,現在舉一個頂簡單的:先造一串序列耦,每耦前項爲α中一項後項爲空類;又造一串序列耦,每耦前項爲空類後項爲α中一項.兩串無公同項其邏輯的和爲$\mu+\mu$項.設有兩類,α之項數爲μ,β之項數爲ν,同樣可以界說$\mu+\nu$.

求這種界說祇是方法適當的問題,沒有別的難處.但是論到乘法,其因數可以無窮之多,界說上就要發生許多重要問題.

因數有窮,乘法不生難題.設有α及β兩類,α含μ項,β含ν項,所有取α中一項爲前項β中一項爲後項之耦之個數可稱爲$\mu\times\nu$.α與β也不需不相搭雜,就是完全一致都未嘗不可.例如α爲含x_1, x_2, x_3三項之類,我們用以界說$\mu\times\mu$的類卽下列各耦之類:

$$(x_1,x_1),\ (x_1,x_2),\ (x_1,x_3);\ (x_2,x_1),\ (x_2,x_2),\ (x_2,x_3);$$
$$(x_3,x_1),\quad (x_3,x_2),\quad (x_3,x_3).$$

上述界說,當μ或ν無窮或μ與ν皆無窮時都

可用;且可順次推廣爲三個,四個,五個,六個或任何有窮個因數. 總而言之因數個數不是無窮用這個界說決不發生難題.

假如因數個數可以無窮,乘法之界說纔發生問題. 設有一類 κ 爲許多類組織而成,每類之項數已知;我們如何界說這些數之連乘積?要想我們的界說普遍,定須無論 κ 有窮無窮皆能通用才是. 讀者應當注意我們說的是 κ 爲無窮類,不問 κ 中之類員是否爲無窮類. 倘若 κ 非無窮類,就是其中各類員爲無窮類,上述界說法還頂可用得. 倘若 κ 爲無窮類,縱使其中各類員爲有窮類,上述界說也發生問題,須得另找一個界說.

下述一般的界說乘法之方法是懷德赫(Whitehead)博士發明的. Principia Mathematica, Vol. 1. *80 ff 及 Vol. ii. *114 闡論很詳盡.

設有一類,類中包含許多類不相搭雜——例如一國之各選舉區然,若非複選制度,則每區爲

一選民之類,一國爲選民之類之類. 今仿照選舉法每區選一人(假定必選一人,祇選一人,且被選者必爲選民)爲代議以組織議會之法,於每類中選出一項爲『代表』. 由是我們得了一類代表,他們合起來組織一個議會,每個都是一選區之一選民. 現在要問選一個議會共可有多少不同的方法?每選區內各選民個個可以當選,假如某區有 μ 個選民,就該區而論就有 μ 個選法. 各選區之選法原係各自獨立不相倚賴的,所以選區數若有窮,總共不同的掄選議會方法之數顯然就是各區選民數連乘之積. 假如我們不知道選區數究竟有窮還是無窮,我們可以掄選議會方法之總數來界說各區選民數連乘之積.

這就是界說無窮積(因數個數無窮)之方法. 現在丟開譬喻來講精確的說法.

設 κ 爲一類,其中各類員皆爲類,並暫且假定各類不相搭雜,(卽若 α 及 β 爲 κ 中不同類,則 α 與 β 無公共項). 今於 κ 中每類選出一項組

成一類μ,——卽μ之各項皆屬於κ中各類,且κ中任何類α與μ有一公共項且僅有一公共項——此類μ卽稱爲『κ之一**選班**』(A selection from κ). 總合κ之一切選班稱爲『κ界相乘類』(Multiplicative class of κ). κ之相乘類之項數,卽κ之選班總數,謂之κ中各類之數之『積』(Product). 這個界說不論κ有窮無窮皆能合用.

要想這個界說十分美滿,須將κ中各類不相搭雜之制限設法取消. 爲要取消這個制限,我們先不界說那個『選班』(類),先界說一個『揄法』(關係). 設有一關係R,κ中每類各遵此關係而選去一項充當該類之『代表』,換言之,若α爲κ中一類,必恰有一項x屬於 而對α有R關係;若R之作用卽止於此,則稱R爲『κ之一揄法』(A selector from κ). 嚴格之界說如下:

設κ爲類之類,R爲一對多的關係,R之被關係界爲K,且當x對α有R關係時x必爲α之一項,則稱R爲κ之一**揄法**(Selector).

設R為κ之一掄法，α為κ中一類，x為對於α有R關係之項，則稱x為『關於R關係，α之**代表**』(Representative).

κ之一掄法之關係場稱為『κ之一**選班**(Selection)』；總合各選班而成一類稱為κ之**相乘類**(Multiplicative class).

當κ中各類互相搭雜，則掄法總數可以比選班總數多；蓋若x屬於κ中α及β兩類，則x可兩次當選，一次代表α，一次代表β，此時掄法雖異(譯者註1)選班則同．所以界說乘法與其用選班不如用掄法．故界說曰：

一類(類之類)κ之掄法總數稱為該類κ中各類之數之**積**.

仿此更可界說乘冪．例如μ^{ν}可以界說為各含μ項之ν個類之掄法總數．不過其中還有可以非難的地方，因為採用這個界說要應用相乘公理(即刻就要講到)，而相乘公理在本題中並不是必須的．茲另代以下法：——

設α爲一類內含μ項,β爲一類內含ν項.設y爲β中一項,以y爲第二項,α中任一項爲第一項,作成一類之序列耦.因α中任意一項皆可選爲耦之第一項,而α共有μ項,故每指定一y則此類中之耦共有μ個.今復就y而更迭之,則此種序列耦之類共有ν個;因β中每一項皆可選爲y,而β中共有ν項也.此ν個類中每類各含μ個耦,此等耦之前項爲α中之各項而後項爲β中之一定項.我們現在就界說μ^ν爲此等類(耦之類)之全體之掄法總數,即界說爲其選班總數亦無不可,蓋因諸類中之耦各不相同,故掄法數與選班數相等.此等選班各爲一串之序列耦,其中各有(亦僅有)一耦以β中一指定項爲第二項,以α中一項爲第一項.以此等各含μ個耦之ν個類界說μ^ν比從前用那各含μ項之ν個類強些,因爲此等耦之類之組織不同容易標識.其與相乘公理相關之處以後自然知道.

以上用於乘羃之法也可用之於乘積. 我們可以界說『$\mu\times\nu$』爲『各含μ項之ν個類之數之總和』,但是我們寧願將他界說爲『從μ項類α中取一項爲前項,ν項類β中取一項爲後項,所得之耦之總數』. 用這個界說可以免得假定相乘公理.

用以前所述各界說我們可以證明乘積及乘羃之普通形式的定律. 但還有一層不能證明:我們不能證明『必因數有等於零時乘積始等於零』. 當因數個數有窮固然可以證明,但是因數個數無窮就沒有方法證明了. 換言之,我們不能證明『設有一羣類,都不是空類,則從該羣必有可取的掄法』,或是說『設有一羣不互相搭雜之類,則至少必有一類爲從原有各類每類恰選一項組織而成』. 這些話都是不能證明的;雖然乍見的時候他們好像不證可明,但一經思索便疑竇叢生,到後來只得權且假定着往下推論,好像假定平行公理似的,不管其眞僞是否在吾人知

識能力以內.　這種假定,以非嚴密的言辭表出來,是:選班與掄法,我們指望其存在,他們便存在.

此外尚有許多嚴格的說法(都是相等的)可以表示這公理.　今先舉一種如下:——

『設有一羣不相混搭之類,其中無一空類,則至少必有一類爲從原有諸類中各選一項組織而成』.

這個命題就叫做『**相乘公理**』(Multiplicative axiom).(原註1)現在先說出他幾個相等的形式,然後再論他們的眞或假在算學上的關係.

相乘公理也等於這命題:『乘積惟當因數至少有一等於零時爲零』或『若干基數相乘,若無零在內,則乘積不能爲零』.

相乘公理又等於這命題:『設有一類 κ, 一關係 R, 若 κ 含於 R 之被關係界, 則至少必有一個一對多的關係包含 R 而以 κ 爲其被關係界』.

相乘公理又等於這命題:『設有一類 α, 除空類以外, 其中所有副類組成一類 κ, 則 κ 必有一

掄法』. 這個形式,最初由綏梅羅 Zermelo 引起學術界的注意,他在他的『Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann』(原註 2)中用過這公理. 綏梅羅以為這命題的眞確是無可疑問.綏梅羅未將這公理表彰以前,算學家用這個公理都是持深信不疑的態度;大概他們都沒有自覺罷了.

綏梅羅首將這個公理表彰出來,使世人都注意,這誠然是他的功勞,但是與該公理之眞假絕無關係.

綏梅羅在上述證法中曾經證明乘法公理等於這命題,『任何類必可順列之』卽『任何類可排為一纚,纚中每副纚皆有首項』(空類當然除外). 詳細的證法雖然很繁,其所應用之重要原理不難洞悉. 他所用的原理,我們叫做『綏梅羅公理』,卽假定:設有一類 α, 最少必有一個一對多的關係 R 存在,以 α 中一切存在的副類為被關係界,且若 x 對於 ξ 有 R 關係, x 卽為 ξ 中之一項. 用這種關係 R 可以從 α 之各副類中各

選出一代表;不過兩副類也許往往同一代表.

綏梅羅的目的就在用R關係及超窮歸納法將α之項一個一個順次提出來.先提出α之代表(因α也是α的副類)來,叫他做x_1.又從那個含α之其餘各項(惟x_1不在內)的副類中提出一個代表來,叫他做x_2. x_2與x_1必不同,因為x_2所代表的副類中沒有x_1.照這個法子行過去,首先就得了一個進級纚$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n, \cdots\cdots$(假定$\alpha$是無窮類).拿去了這些,假如$\alpha$還剩下有些項,還可做照以前辦法$x_\omega, x_{\omega+1}, \cdots\cdots$一個一個提出來.這樣魚貫而出的代表恰成一順列纚,包含全α之項.(以上不過是證法的一斑).這個命題就叫做『綏梅羅定理』.

相乘公理又等於這假定:『兩基數若不相等必一大一小』假如這個公理不成立,那末,或者就有兩數μ及ν, μ也不小於也不等於也不大於ν.以前說的$\aleph_1$與$2^{\aleph_0}$就可做一對好例.

相乘公理別樣的形式還很多,並不難再舉,不

過在現今所知道的各種形式之中,以上幾種算是頂重要的了. 至於這個公理或其相等形式之眞不眞,現今還不知道,祇得闕疑.

有賴於相乘公理的命題,雖不知道是否即等於這公理,但是很多而且很重要. 今先就加法與乘法之相通關係說明之. 設有 ν 個不相搭雜之類,每類含 μ 項,我們一定以爲這 ν 類項數總和是 $\mu\times\nu$. 當 ν 有窮固然可以證明. 但當 ν 無窮,則沒有相乘公理便不能證明,除非遇着特殊情境『掄法的存在』可以獨立的證出. 設有兩串類,每串各有 ν 個不相搭雜之類,每類各有 μ 項,我們想要證明兩串總共項數彼此相等. 要想證明這層,非在兩串間立出一個一對一的關係不可. 因爲兩串之類數相同,所以兩串類之間有一個一對一的關係;但是我們所求的關係不在此『類與類間之一對一的關係』而在『項與項間之一對一的關係』. 假如類與類間之一對一的關係爲 S; 此等類之串一爲 κ, 一爲 γ; α 爲 κ

中一類，則λ中必有一類β為α（關於S）之關聯類．又α與β同為μ項之類，彼此應當相似．所以α與β之間應有一組一對一的關聯，並且此組共有許多個關聯法．正因其多，所以就發生繁難．我們要想求得κ與λ中(項與項)一個一對一的關聯R，先要尋出一個班選從各組關聯(其中一組是α與β之許多關聯)中每組選出一個關聯充當代表，總合諸代表才能成R．若κ與λ是無窮類，——其時關聯組無窮之多——這種選班是否存在，那又不能不憑藉相乘公理的眞實了．所以平常加法與乘法之相通觀念是否正確又是問題．

由這事實很發生了些新奇結果．我們知道$\aleph_0^2=\aleph_0\times\aleph_0=\aleph_0$．因此就說，若每類含$\aleph_0$項，則合$\aleph_0$個類之項數總和定是$\aleph_0$，但是這話靠不住，因為此$\aleph_0$個類之項數總和是否為$\aleph_0\times\aleph_0$還不知道，更何由知道是$\aleph_0$呢?這個問題與超窮序數之理論也很有影響．假如有一個序數，他前面還有$\aleph_0$

個前數(小於他的序數),他定然是鏗托兒所謂第二級序數之一,換言之,以此序數爲纚屬數的纚其埸中項數必爲$\aleph_0$. 今試從第二級中任意取出一個進級序數纚來,這個進級纚之極限之前數(小於該極限之一切序數)最多不過組成$\aleph_0$個類每類各有$\aleph_0$項. 所以說——若非假定相乘公理,這說話又是詭辨——該極限之前數總計不過$\aleph_0\times\aleph_0=\aleph_0$個,那末,這個極限也是第二級序數之一了.換言之,這是假定第二級序數組成之任何進級纚之極限也是第二級之一序數.這個命題與由此推出之命題『ω_1(第三級序數之最小者)非第二級序數組成之任何進級纚之極限』在第二級序數之理論中佔重要位置.就他們隱含相乘公理看起來,都不能視爲已經證明. 他們可眞可假,究竟是眞是假現在還不能斷定. 所以第二級序數理論大部分應當看做是未曾證明的.

此外還有一個說明,可以使這層(指$\mu\times\nu$那段)

更加明瞭.我們知道$2\times\aleph_0=\aleph_0$.我們自然想着$\aleph_0$耦之總和必爲$\aleph_0$項.這話有時候是眞的,但是我們不能證明常常是眞的,除非假定相乘公理纔行.我們可以舉一個例來說明.譬如有一個富豪,每逢買一雙鞋就買一雙襪,不買鞋也就不買襪,直到後來總計買了$\aleph_0$雙鞋和$\aleph_0$雙襪纔罷.現在的問題就是:到底他共有多少隻鞋,有多少隻襪?我們自然而然的這樣想,鞋之隻數爲雙數之兩倍,襪之隻數亦爲雙數之兩倍,因爲$\aleph_0$是以二倍之而不變的,所以每樣各有$\aleph_0$隻.但是這是那個『ν個μ項類(不相搭雜)項數總和與$\mu\times\nu$可否相通』問題的一個例.有時候可以,有時候不可以.就上例而論,鞋可而襪則否.其理由如下:鞋有左右之分,我們可以於每雙中選其左者或選其右者;襪無左右之分,沒有一般的法則可爲標準,若非假定相乘公理,我們不能知道的確從每雙襪中選出一隻來組成選班是可能的.所以是問題哪.

這個問題還可用別法顯明．要證明一類有$\aleph_0$項，其必須而充分的方法是找出一個關係將類中之項排成一進級繩．上例說的鞋子不難排成進級繩．因爲他們的雙數既然是$\aleph_0$，自然就是進級繩的場．現在保存各雙之相對順序不使淩亂，僅將每雙中左鞋置前右鞋置後；則就隻而論亦復成爲進級繩，隻數當然是$\aleph_0$．至於襪子，每雙兩隻孰前孰後是隨便的；在這無窮個隨便之中要選出一個排法來是不可能的．若非另有別的選擇方法，即掄法，我們連一個選班都不知道是否在理論上爲可能．不過就空間之實物，——如襪之類——我們總還可以找出一個掄法來．譬如，就襪之質量中心而論：空間中必有一點p與各雙中兩襪之重心之距離皆不相同；我們就可將每雙中重心之較近於p者選出來．但是這種選法沒有理論的理由可以斷定常常是可能的，或者竟不可能也未可知，讀者可從襪子的例去推想．

假如我們沒有方法可以從每雙襪中選出一襪來,那末,自然不能一隻一隻排成進級纚,也就不能證明襪子的隻數是$\aleph_0$了. 可見若μ爲無窮數,則此μ雙中總共項數也許與彼μ雙中總共項數不同;因爲$\aleph_0$雙鞋之總共隻數雖然是$\aleph_0$,而$\aleph_0$雙襪之總共隻數,若不假定相乘公理或找出一種選法(如上述之幾何法),就許不是$\aleph_0$.

此外憑藉相乘公理的一個很重要問題就是反身(Reflexiveness)與非歸納(Non-inductiveness)之關係.閱者想必還記得,我們在第八章末曾經提過,凡數是反身的必然是歸納的,但是(據現在所知道的)假如不假定相乘公理就不能證明非歸納的數一定就是反身數. 其理由如下:——

我們容易證明,一個反身類即是一個『含有$\aleph_0$項的副類』的類.(原數也許本身含有$\aleph_0$項). 所以假設我們能力做得到,我們祇消證明『從任何非歸納類中必可以選出一個進級纚來』就足彀了.

我們容易證明,一個非歸納類所含項數必較

任何歸納數大,換言之,設 α 為一非歸納類,ν 為一歸納數,則 α 中必有許多副類其項數各有 ν.

所以我們能彀從 α 中選出許多串的有窮副類來:第一,空類;第二,一項類(其數與 α 之項數相同);第三,二項類;等等. 這些串副類做成一個進級纚,每串含盡一切有某項數之副類. 以上我們都未曾憑藉相乘公理,但所曾證明者不過各副類之組合數是反身數能了,換言之,設 μ 為 α 之項數,則 α 之副類數為 2^{μ}, α 之副類之組合數為 $2^{2^{\mu}}$, 今 μ 為非歸納數,故 $2^{2^{\mu}}$ 為反身數. 但是這離我們所着手要證的論點還遠着呢.

再要前進非應用相乘公理不可. 今從每副類串(僅含空類者除外)中各選出一項. 這就是說,選一個一項副類 α_1, 選一個二項副類 α_2, 選一個三項副類 α_3, 等等. (假定相乘法公理,則選法可能;否則不知是否時常可能.) 由是我們得了一個進級纚 α_1, α_2, α_3, …… 恰可代替那個副類串之進級纚;這算是離要證明的論點又近

一步了. 所以我們知道,若假定相乘公理,則2^μ(此μ為非歸納數)必為反身數.

再進一步則需注意副類之進級纙$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots$中各副類雖不能說每副類都含有新項為其前諸副類所未有,但是隔過一定距離其中定然不免有含着新項的副類. 此可說明之如下. α_1首先含着一個新項,命之為x_1. α_2也許含x_1也許不含x_1;假如他含了x_1,還得另含一新項x_2;假如他不含x_1就得含另兩項x_2, x_3. 就後面這個場合而論,α_3也許不含新項祇含x_1, x_2, x_3,那末,α_4定然要含另一新項了. 推而廣之,起首ν個副類最多能含$1+2+3+\cdots\nu$項,卽$\nu(\nu+1)/2$項;假如這ν個副類沒有互相搭雜的,那末,從第$\nu+1$副類至第$\nu(\nu+1)/2$副類可以盡含着重複項,沒有一個新項. 但是到了第$\nu(\nu+1)/2+1$副類以前的舊項不彀了,定然又要發現新項. 所以在副類之進級纙$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$裏面若將那些不含新項之副類(所含之項皆以前諸副

類所有者略去,剩下來的副類必仍然成一進級繼. 設此繼爲 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots$ ($\beta_1=\alpha_1, \beta_2=\alpha_2$, 因爲 α_1 及 α_2 都含有新項. 至於 β_3 也許是 α_3 也許是 α_4; 總而言之,每一個 β_μ 一定是一個 α_ν, 其中 ν 不小於 μ. (譯者註3)) 這些 β 每個含有一些新項爲以前各 β 所沒有的. 命 β_μ 中一切新項組成之部分爲 γ_μ. 我們又可得一個隣接繼 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \cdots\cdots$ ($\gamma_1=\beta_1=\alpha_1$; 若 α_2 不含 α_1 中之項則 $\gamma_2=\beta_2=\alpha_2$; 若 α_2 含 α_1 中項則 γ_2 含 α_2 中他一項.) 這些 γ 各不相搭雜. 所以就他們裏面各選出一項來又是一個進級繼;如 x_1 爲 γ_1 之項, x_2 爲 γ_2 中一項, x_3 爲 γ_3 中一項,等等; 則得進級繼 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots$ 合起來還是 α 之一副類. 若假定相乘公理,這個選法是可能的. 故設使相乘公理眞確,我們用他兩次,就可以證明非歸納的基數是反身數. 此外還可應用綏梅羅的定理證明,因相乘公理成立,則任何類可以順列;而順列繼場中之項數不是有窮的就是反身的.

不憑藉綏梅羅的定理而用上述直接論證有一種便利就是爲證明本題無須乎相乘公理普遍的眞確,祇要當一串類數爲$\aleph_0$時他能成立就行. 祇有$\aleph_0$個類時相乘公理眞確,類數太多了就不眞確,也許有的事. 因爲有這個理由,所以我們可以使用相乘公理之狹義的形式. 上述論證所須要的假設是『$\aleph_0$個因數相乘,若其中無零,則其積必不等於零』. 還可以用別的形式表明之:『$\aleph_0$是一個可乘數(Multipicable number)』,所謂ν爲『可乘數』,卽ν個因數相乘,若其中無零,則其積必不等於零. 我們能彀證明凡有窮數都是可乘的,但是不能證明凡無窮數都是可乘的. 相乘公理是假設凡基數都是可乘的. 但是我們倘若祇求使非歸納數與反身數相一致,或求解決鞋襪問題,或求證第二級序數排成之任何進級纙其極限必仍爲第二級序數之一,有這個較小的假設『$\aleph_0$是可乘數』已足彀用.

本章所討論的這個題目,如果細心研究過去,

一定有很好的發現. 有些場合,看來似乎顯含着相乘公理,而實際研究起來却可不用相乘公理證明. 還有可注意的,相乘公理之普遍的形式或可證明其非眞. 由這一點着想,我們對於綏梅羅的定理有一個很好的希望:假如我們可以證明連續纚或更密的纚不能將其中之項順列,那末,藉綏梅羅的定理,馬上就可以推翻相乘公理. 不過現在却還沒有方法能彀產生出那種結果來,所以這個題目還是幽玄莫測.

(原註1)　參看 Principia Mathemotica, Vol. i * 88 及 Vol. iii * 257–258.

(原註2)　Mathematische Annalen, Vol. Lix. pp. 514–6. 在這種形式裏我們叫做綏梅羅的公理.

(譯者註1)　有時 κ 中各類雖互相搭雜而選班數仍與掄法數相同. 例如,若 κ 中僅 α 與 β

有惟一之公共項 x，則 x 代表 α 時之選班與 x 代表 β 時之選班不同。推而廣之，凡若干類僅僅蟬聯地搭雜，如 α 與 β 共有 x，β 與 γ 共有 y，則選班數與掄法數常同；然若若干類循迴地搭雜，例如 α 與 β 共有 x，β 與 γ 共有 y，γ 與 α 共有 x，則選班數視掄法數常少。註此以顯明掄法與選班之區別。

譯者註2.）將 $\aleph_0$ 項類用任何方法排列所得順列纇之序數稱爲第二級序數，卽第九章所謂將一進級纇稀疏之所得任何序數也。（參觀第十章（譯者註1.））

（譯者註3.）原文爲『ν 大於 μ』，恐是錯誤。蓋若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_n$ 各副類各含有新項，明明 $\alpha_\nu=\beta_\mu$ 之公式，卽 $\nu=\mu$ 之公式，自 1 至 n 皆可通用。$\nu>\mu$ 之公式，必在 α_1, α_2, α_3

……這副類纔中某不含新項之副類以後始能用;假如絕無不含新項之副類,則此公式竟永無適用之機會.

第十三章

無窮公理及邏輯的範疇

無窮公理是一個假設,可以述之如下:——

『若 n 爲任一歸納基數,最少必有一含 n 個體之類存在.』

假定這個公理眞,結果含 n 項個體的類便不但有一個並且有許多,宇宙間個體總數便不是一個歸納數. 因爲設 n 爲任一歸納的基數,則 n+1 亦爲一歸納的基數,根據這個公理,最少有一含 n+1 項的類;結果含 n 項個體的類就不祇一個并且 n 不是個體的總數. 因爲 n 是任意一歸納數,所以(倘若無窮公理眞)個體總數必定大於任何歸納的基數,而是非歸納的基數. 前章我們說過,基數『可以』既不是歸納的也不是反身的,倘若我們不假定相乘公理,縱使假定無窮公理,也不能斷定宇宙間最少有 $\aleph_0$ 個個體.(換言之,個體總數縱是非歸納的,但未必便是反身的)

但是我們却能斷定『類之類』最少也有 $\aleph_0$ 個,因爲每一歸納基數是個類之類,根據無窮公理我們知道這些歸納的基數組成功一個進級纔,項數爲 $\aleph_0$. 無窮公理的需要是怎樣,我們可以說明如下:—— 裴阿諾第三根本問題說無兩歸納的基數同一繼數者,換言之設 m 與 n 爲歸納的基數,若不是 $m=n$,決不至 $m+1=n+1$. 第八章中我們也曾提到一個與裴阿諾這假定實在相同的假定,即『設 n 爲歸納的基數,n 必與 $n+1$ 不同』. 有人或者以爲這命題可以證明.『若 α 爲歸納類且 n 爲 α 之項數,則 n 不等於 $n+1$,』這個命題誠然可以證明. 這命題用歸納法很易證明,並且有人會以爲他暗含着前一命題(即 $n \neq n+1$). 但其實並不曾含着,因爲像 α 那種的類也許並不存在.這命題實在隱含的不過是:『若 n 爲一歸納的基數(有條件的)並且宇宙間最少有一類其項數爲 n,則 n 不等於 $n+1$.』無窮公理使我們確認(姑無論其眞不眞)『有許多類其項數爲 n』,並且

使我們能以由此斷定n不等於$n+1$. 倘若沒有無窮公理,那末,n與$n+1$同是空團便是可能的事了.

這個可能可以舉例說明如下:——

假定宇宙間恰有九個體,也不多也不少.(究竟什麼是個體,請讀者且耐煩稍待.)0至9這十個數確是我們心目中的歸納基數, 10(其界說是$9+1$)却是一個空團. 讀者想還記得,$n+1$也可這樣界說:$n+1$是一團的類,團中每類去一項x後項數爲n.將此界說用在上面假定的場合上,$9+1$既是個沒有類的類,自然就是空團了.同理$9+2$也是空團. 推而廣之,祇要n是歸納的基數不是0,$9+n$就是空團. 所以從9起以後各歸納的基數都是空團,彼此全等. 如其如此,歸納數便不能成一進級纜,不同的兩基數之繼數也未必不同,因爲9與10的繼數同是空團(10本身也是空團). 要想免除算術上這種不幸的現象非用無窮公理不可.

倘若我們祇從事研究有窮整數算術,不提到什麼無窮整數,無窮類,有窮整數纇,或分數纇,縱使沒有無窮公理,也可以得出一切美滿的結果來. 換句話說,我們能研究有窮整數或分數之加法乘法及乘方法,但是無從研究無窮整數或無盡數之加乘等法. 這樣一來,所有超窮數及實數之理論都等於無用了. 請說明其所以然於後:

假設宇宙之個體數爲 n,個體之類數(卽組合數)自然是 2^n. 這是應用第八章的普遍命題,一類之項數若爲 n,則副類數爲 2^n. 2^n 是常大於 n 的. 所以宇宙間類之數常大於個體之數. 倘若宇宙間個體如上面所設其數爲 9,則個體之類數爲 2^9 卽 512. 我們的數若只用以計算個體,那末,我們的算術就止於 9 了;若用以計算個體之類,要到 512 才完:第一個成空團的數乃是 513. 若進一步求類之類,總數爲 2^{512},這個數有 153 位,一行寫不下,範圍更擴大了. 若更進一

步求類之類之類,總數爲 2 之 2^{512} 方,約爲 3×10^{152} 位之數,在近日缺紙的時代眞可不必把他寫出. 倘若還不以爲足,依法前進,大數正不可限量. 隨便指定一個歸納的基數,在這邏輯的階級(類之數,類之類之數等等)裏面經過若干階級以後,必然可以使該數不是空團. (原註 1) (如設有 m 大於 2^{99} 而小於 2^{999},則 m 視爲類之團,或類之類之團,或類之類之類之團,都是空團,但視爲類之類之類之類之團却不是空團.)

再看分數,也有同樣的情形. 若 μ/v 這分數我們求他有所希望的性質,那末,必須有夠我們計算的東西做我們的保障,使空團不會遽然發生來做障礙. 但這種保障不必定要假定無窮公理,只在前面說的那邏輯的階級上經過充分的階級就行. 計算個體不成功,就計算類,再不成功就計算類之類,類之類之類,等等.無論宇宙間個體數如何之少,按級而上,其數定能大於任意一歸納的基數 μ. 縱使宇宙間沒有個體,這

個說法還是對的,因為個體之類有一個(即空團)類之類有兩個(一為空團,一為類之類其中惟一的項是個體之空團),類之類之類有四個,次一級便有十六個,再次65536個,餘類推. 照這樣看起來,求任一有定歸納的基數或分數並不必需無窮公理這類的假設.

但是我們如果要研究全類或全纚歸納的基數或分數,無窮公理就非用不可. 我們需要全類歸納數為的是解決$\aleph_0$的存在,需要歸納數全纚為的是解決進級纚的存在: 要想達這些目的,必須歸納數全體能夠做成一個類或纚其中沒有成空的歸納基數. 我們需要全體分數按大小排列之纚為的是要用他的『段』界說實數: 假如他不是密接纚,這個界說就不能得圓滿的結果;如果我們所討論的分數個數有窮,他自然不是密接纚.

有人定然以為——著者早年也曾作如是想——採用像我們所論的那種構造法,無窮公理

必可證明．怎麼說呢?假令宇宙間個體數爲 n (縱或 n 爲 0 於論證亦無妨礙),所有個體,類,類之類,等等,全都加合起來貫爲一串,這串的項數自然是

$$n+2^n+2^{2^n}+\cdots\cdots\text{以至無窮}$$

這就是 $\aleph_0$ 了．所以如果將各種的東西都薈集起來,不必拘拘於一種範疇,自然就會得着無窮類,並且無窮公理等於無用．這種說法誠然難免．

在批評這種論證以前,我們可以注意的是其中有一些幻術的論調:教我們想到幻術家從帽子變出東西來．觀者拿帽子給幻術家時自信帽內無兔,回頭帽內出來一個小兔,遂大爲失驚．讀者如果對於『實在』有穩健的見識知道無中不會生有,對於上面的構造法雖不明其黑幕所在,最少也覺得從有窮數個體中生出無窮集合來是不可能的事．這種奇幻的感覺,同別的感情一樣,不宜過於注意去論他,他容易引人入於歧

途. 不過激起這種感覺的論斷,我們若要去細細考察,這種感覺的確可做考察上最初的根據. 依著者看,上面那個論斷,一經考察,必然發見謬誤,不過這謬誤不容易追尋,並且我們也不容易常常免掉.

以上論斷中所含的謬點可以叫做『範疇混亂』. 要想詳細說明『範疇,』(Types)非另著專書不可;并且本書爲初學便利計,那些艱深的近於空辨的部分必須免去. 所要論的,只是那些與算學上既經論定的眞理相合的東西. 範疇的理論並不屬於算理哲學完美的確定的部分:其大部分纔在萌芽中,沒有十分明瞭完備. 但是範疇的理論應取如何精確的形式,雖尚無定論,至於這理論的必要,是無疑的;在無窮公理上這種理論之必要更是顯而易見.

範疇說的必要從『最大基數之矛盾』就可以看出來. 第八章曾經講過,一數中之副類數常大於其原類之項數,所以我們斷定沒有最大的基

數. 若如以上構造法所論,將凡有的個體,類,類之類,等等,不分皂白的混合起來,結果所成的類其副類都是該類的分子. 凡有想得到數得着的東西,不論那一種,如果可以混爲一類,這類的基數就可以說是最大基數了. 既然一切副類皆是分子.那末,副類之數便不能多於項數了. 所以生出一種矛盾.

當 1901 年著者想到這個矛盾時,想設法去發現鏗托兒『無最大基數』說(見第八章)的闕點. 將這證法用在『凡有想得着的東西』組成之類上,却生出一個新的較單純的矛盾:——

我們剛才所說的那個博大的類既然包羅萬有,必須將他自己也做一項包括在內. 換言之,如果有『包羅萬有的類』,這個『包羅萬有的類』也是萬有之一,也就是『包羅萬有的類』之一分子. 但是依正理講,一類決不會是自己的一個分子. 譬如人類不是一人,獸類不是一獸.現在將凡『自己不是自己的分子』的類合爲一組. 這組又是

一類：他究竟是不是他自己的一分子？倘若他是自己的分子，那就是一個『自己不是自己的分子』的類了．倘若他不是自己的分子，那他就不是一個『自己不是自己的分子』的類了．這兩個設想——是或不是自己的分子——都各自相矛盾．這又是一個矛盾．

這種矛盾無限的多，隨便可以製造．這種矛盾問題的解決方法須藉範疇的理論，Principia Mathematica (原註 2) 中有詳備的論述，著者另有短論載在 American Journal of Mathematics (原註 3) 及 Revue de Metaphysique et de Morale (原註 4) 兩雜誌中．現在摘其大綱就彀了．

其謬誤之點在其所組成者乃我們所可叫做『不純』的類，卽範疇上不純的類．後章還要另論，類乃邏輯的構象，平常一句話形式上似卽關乎一類的，其實非改爲另一句話其中絕不含該類之字樣不能有絲毫的意義．由是平常似實而虛的類之名稱其意義所在遂有一定的限制：一

句話或一組符號其中這種虛造的名稱之運用方法有不正當之處.該句話或該組符號未嘗不眞,不過嚴格說起來却毫無意義. 懸想一類是否爲其自己之一分子,其懸想是無意義的,也正是這樣. 概言之,凡懸想此個體之類是否爲他個體之類之分子,所懸想的皆是毫無意義;將不屬同一邏輯階級的原素以符號構爲一類,則所使用之符號便不復有所表徵.

設或宇宙間個體數爲n,類數爲2^n,我們不能够將全體個體與全體類混合起來成爲一類包含$n+2^n$項,所以要想不用無窮公理到此終歸失敗. 我並不以爲範疇的理論已經闡明,我只以爲範疇論的需要上面已述其大概. 我之目的是在藉此說明用那種幻術家的方法——構造法——不能證明無窮數或無窮類的存在. 但此外也還有別的證法不可不加以論述.

證明無窮類的存在有種種的方法, Principles of Mathematics 中(§339, p. 357)引論很多. 這些論

證法都假定『若n爲歸納基數,則n不等於n+1』,這層我們上面已經論過. 有一種論證是根據柏拉圖的Parmenides當中一部分學說發生出來的:倘若有數1,那末1就有他的『有』(Being)了;1與『有』原不是一事,所以1與『有』便是2了,2與1又成3了,諸如此類. 他實在是詭辨,『有』原不是有一定意義的名詞,況且即使我們替他定出意義來了,也許『數』無所謂『有』——數是邏輯的構像,第十七章論類之界說時再講.

還有一種論證,說從0至n共有基數n+1個,這種論證完全憑藉『從0至n沒有一數與其繼數相同』這假設;我們以前論過,倘若無窮公理不眞,這種假設未必常眞. 讀者應當知道n=n+1這個方程式,當n超過宇宙間個體總數時就是眞的,當n表示反身數時也是眞的,但是兩種用法卻有大大的分別. 當n爲反身數時,n=n+1不過表示含n項的類與此類中一切項及類外一項組成之n+1項類相似. 當n超過宇宙間個

體數時,n在實在世界是太大了,n=n+1不過表示實在世界沒有含n項的類,也沒有含n+1項的類罷了;他並不是表示:如果我們在範疇的階級上上昇到够高的範疇,有够多的基數,(個體數不足n,類數許足n,類數不足類之類許足……)我們定然可以找着一個n項類與一個n+1項類相似;因爲倘若n是歸納的數,無論無窮公理是眞是假,n項類決不會與n+1項類相似.

此外還有一種論證,巴散拿 Balzano (原註5) 和迪得鏗(原註6) (Dedekind) 都曾用以證明反身類的存在.玆述其概略如下:——

一事物和這事物的觀念(Idea)是不同的,一事物必有一觀念(至少在實在世界是如此). 事物與觀念的關係是一對一的,一切觀念不過是一切事物之一部分(因每一觀念自身是一事物). 所以『某事物之觀念』這個關係可以將全體事物反射於一部分事物(觀念). 所以事物類與觀念類都是無窮的. 這個論證很有意思,不但是本

身值得研究,他的謬誤(或者說著者認為謬誤)也是一種很有研究價值的謬誤. 其主要的錯誤就在假定有一事物必有一觀念. 實在說起來,究竟什麼是『觀念』之確定的意義,這是很難知道的. 現在姑且假定知道. 試從蘇格拉底着手,有蘇氏就有蘇氏之觀念,復有蘇氏之觀念之觀念,由此以往,無有限止. 這些觀念未見得都經驗地存在於人心之中. 到第三級第四級而後,簡直是玄渺不可思議. 倘若這種論證不錯,其中所謂觀念除非是柏拉圖的觀念,天上容或有之,人世間未見得存在. 那末,這種觀念究竟有沒有不能令人無疑. 如我們必定知道他們有,那必須有邏輯理論的根據證明一事物恰有一觀念. 但這種結果我們從經驗上實不能得着,縱然有了,也不能像迪德鏗應用之於"Meine Gedankenwelt"—— 我的思想世界.

如果我們認真細究事物與觀念中間的關係,將要牽動一些心理的及邏輯的問題,與本書主

要的目的無關. 但有幾層無妨略示. 『觀念』如其必按邏輯的意義講,就可以與事物一致,或是事物的摹述(摹述的意義如後章). 由前之說,觀念與事物既然一致,那藉觀念與事物不同而證明反身數存在的論證便失敗了. 由後之說,觀念既是事物的摹述,同一事物有各種不同的摹述,——例如蘇格拉底摹述爲『柏拉圖之師』, 或『長壽的哲學家』,或『Xantippe 之夫』,均無不可——事物與觀念的關係不是一對一的,那個論證也失敗了. 再說,假定觀念是心理的,心理的觀念更無一定,沒有一個固定的實體可以說是某事物的唯一觀念: 心理的觀念多因時因人而不同, (信仰及心理態度尤多如此) 我的蘇格拉底的觀念與你的不同,我現在的蘇格拉底的觀念與過去的不同, 並且沒有什麼中心的實體, (除非蘇格拉底自己)可以荟萃這些『蘇格拉底的觀念』. 那麼,觀念比之事物竟太多了,其間沒有一對一的關係如何能叫他們相似呢?况且宇宙間

事物我們對於他有觀念的(無論『觀念』這字的意義怎樣推廣)照心理講只占一小部分.(不是有一事物便有一觀念) 因爲這些理由,上面那種論證,辯護反身類之邏輯的存在的,終當在排斥之列.

或者有人這樣想:姑無論邏輯的論證如何,由時間,空間,色差 (Diversity of Colours) ,等等得來的經驗的論證足以證明無窮個體之實際的存在.著者却不敢相信. 因爲除了武斷而外沒有理由可以使我們相信空間時間等之無限伸張不是算學的玄想而是物理的事實. 我們認空間時間是連續的,最少也認他們是密接的;但是仍不失爲武斷. 近今物理學有所謂 Quanta 學說,姑無論是眞是假,的確表明了物理學雖不能斷定連續性的不可證明,却實在不能供給連續性的證明. 人類感官精密的程度實不足以分別『連續的運動』(Continuous motion) 或『頻仍繼進的運動』(Rapid discrete seccession),看電影的自會明白

這句話. 設使有一世界一切的運動都是連續的,另一世界一切運動都是一纔極小的有窮的衝擡,二者定難從經驗去區別. 要圓滿闡明這些大題目,須占很多的篇幅;現在不過提到使讀者注意罷了. 假如這種學說是對的,那末,固然沒有經驗的理由可以相信個體數無窮,也決不能有這種理由;並且現在也沒有經驗的理由可以相信數之有窮,雖然就理論說將來或有一日發見證據縱不確定數之有窮却很有對着數之有窮的傾向.

『無窮』不是自相矛盾的,也不能邏輯地證明的所以我們的結論說,宇宙間個體之數是有窮抑或是無窮我們不能用先天的(自因推果的)方法知道. 這個結論,如果採用來本之的說法,可以說,有些可能的世界是有窮的,有些是無窮的,至於我們這個實在的世界究竟屬於前者抑屬於後者却沒有方法來判斷. 無窮公理在一些可能的世界是眞,在別一些可能的世界是僞;他在

我們這個世界究竟是眞是僞我們却說不了.

『個體』(Particular 或 Individual)的字樣充滿了本章,從沒有解釋過. 在本書範圍以內要想不細講範疇的理論而將這字解釋得十分圓滿誠然是不可能,但是爲減少糊塗朦混起見也可以約略提一提.

在平常的話語裏面表示品德或關係的云謂字(Verbs)與表示品德或關係之主體的實字(Substantives)很容易分辨. 『凱撒生存』是寫凱撒的品德;『布熱達斯殺凱撒』是表示布熱達斯與凱撒的關係. 『主詞』(Subject)一語若用爲廣義,布熱達斯與凱撒都可稱爲該命題中之主詞:文法上視布熱達斯爲主詞,凱撒爲賓詞,邏輯上是不關緊要的,因爲原句若改做『凱撒見殺於布熱達斯』所表的關係相同,凱撒却移到主詞的地位了. 所以最簡單的命題不過是寫一或多主詞的品德或表示二或多主詞間之關係. (關係不限於二項,如『A 將 B 給 C』就是一個三項關係.) 有時候

表面上的主詞,實際上不是主詞還可分析;但這分析的結果也不過將新主詞替代舊主詞罷了.有時候按文法講起來云謂字也可以取主詞的位置:如『殺是布熱達斯與凱撒間的關係』但是這種地方文法往往引起誤會,所以按照哲學的文法在率了當句語中,布熱達斯及凱撒還是看做主詞,殺還是看做動詞.

那末在命題中祇居主詞地位而永不居云謂地位的詞(Term)大略的觀念我們有了.這種觀念屬於經典學派所謂實質(Substance)的一部分;不過實質觀念中有所謂永存性(Persistence through time)却與我們的觀念無關.我們以後界說『專用名詞』爲凡在命題中祇居主詞(廣義的)地位的詞.凡可以專用名詞名之的東西我們叫做『個體』(Particular或Individual).「直接界說個體是比先界說個體的記號(即名字)好些;但是要直接界說非深考形而上學不可,此處實有所不必.」此處所謂個體也許還可以經無底的分析:表面上

是個體也許一經考察其實是個體之類,類之類,或其他複雜的東西.誠然如此,無窮公理就眞了.縱或不然,理論上一定可以分而又分終究達到最後的主體,所謂『個體』的意義就在這些最後的主體上.無窮公理所關之個體正是這些個體.無窮公理對於這些個體倘若眞,那末對於他們的類,類之類諸階級亦無不眞;反之,若對於他們假,那末對於這些階級亦無不假.所以在個體上論無窮公理,比之在別的範疇的階級上論無窮公理,要自然些.但是這公理究竟是眞是假,現在好像還沒有已知的方法去發現他.

(原註 1)關於歸納基數的參考 Principia Mathematica, vol. ii * 120 以後.關於比率的參考同書 Vol. iii * 303 以後.

(原註 2)第一册緒論第二章 * 12 及 20;第二册小引.

(原註 3)以範疇論爲據之算理哲學, Vol. XXX, 1908, pp. 222–262.

(原註 4)"Les paradoxes de la logique," 1906, pp. 627–650.

(原註 5) Bolzano, Paradoxien des Unendlichen, 13.

(原註 6) Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? No. 66. (英文譯本有 W. W. Beman 所譯 Dedekind's Essays on the Theory of Numbers, 查 p. 64; 中文譯本有傅種孫所譯數之性質及其意義,查北京高師數理雜誌第四期 (1920), p. 30,——譯者註)

第十四章

不兩立性及演繹法理論

算學之哲學所有無須精細考察類之觀念之部分,我們都已匆匆的加以探討了.直到前章屢次遇着與類之觀念有關的問題,纔見得關於類之考察工夫萬不可少.在着手於這種工夫以前,須先研究算學之哲學之另外幾部分(以前不曾研究的)以爲預備.若在綜合的論述裏,這幾部分較之我們以前所已研究的尤爲根本,本應首先討論.在研究類之理論以前有三個題目應當研究:

(1)演繹法理論,(2)命題從元,(3)摹述法.摹述法,在類之理論中並非邏輯的必要的預備,不過從事於類之研究必須有一種理論,摹述的確是這種理論的一個較單純的好例.本章所研究的是第一題目演繹法理論.

算學是一門演繹的科學:根據一些前提,應

用嚴密的演繹方法,而得許多定理以造成算學.

以前算學未臻完善,算學的演繹往往大欠嚴密;但十分的嚴密大概也是不可到達的一種理想. 然雖如此,算學的證法假如有欠嚴正之處,這證法究竟不算完善;若說『常識認其結果正確』這句話也不足以辨護,因爲我們如果倚賴常識,那末,就將論證完全廢除好了,何必去拿詭辯做常識的後盾呢?所以在算學裏面,前提規定之後,除了精確的演繹法之外,不應當需用常識,直覺,或任何的補助.

以前康德看見他同時的幾何學者不能無所憑依而證明他們的定理,必須借助於圖,因而發爲一種關於算學推理的學說,按照這種學說,算學的推理絕不得嚴密的合乎邏輯,常須倚賴所謂『直覺』的幫助. 近世算學之全體的傾向,以及其日趨於嚴密,正與這種康德說相反. 在康德那時候,所謂算學不能證明的東西,就是不可知的—— 如平行公理. 凡算學上藉算學方法可

知的東西,都是能夠由純粹邏輯推論的東西.至於其他屬於人類知識的須用別的方法去考察——用經驗,由感覺,或由別種的經驗法,決不得用由因及果的方法(A priori.) 欲知這種議論積極的根據可參考 Principia Mathematica 各章,關於辨駁的材料可參考 Principles of Mathematics.本書求簡約求速成,不能像該二書詳細陳述.現在姑先假定全部算學都是演繹的,然後進考演繹法之內容.

凡演繹法,都是先有一個或多個命題,叫做前提 (Premisses), 從此推出一個命題來, 叫做斷案 (Conclusion). 為立論便利起見,遇着所根據的前提不止一個,也無妨想法拼成一個命題,以後說前提,斷案,都是各指一個而言. 所以我們可以看演繹是由某一命題(前提)的知識推到另一某命題(斷案)的知識之方法. 倘若這方法正確,卽若前提與斷案之間有一種關係,藉此我們可以確信只要前提眞則斷案必眞,我們就可叫他做

邏輯的演繹法;否則不可濫用這種名稱. 邏輯的演繹論上最重要的東西就是這種前提與斷案間的關係.

凡想正確的推論一命題的眞實必須知道另一命題的眞實,並且二命題間有一種關係叫做『包含』,即前提包含斷案.(包含關係,即刻就要界說.) 或者兩命題中間有一種關係,叫做『選立』(Disjunction),由這個的假可以推斷那個眞. 又或有時我們的目的不在推論某命題的眞而在求其假;那末,假使他與另一命題之間有『不兩立』(Incompatibility)之關係,就可由彼命題之眞去推斷此命題之假,也有時候此命題之假須從彼命題之假推知,正如從彼命題之眞推此命題之眞似的;當 q (原註1) 包含 p 可由 p 之假推知 q 之假. 凡此四者都是推測. 當我們着意在推測的時候,四者之中似乎要算『包含』是最基本的關係,因為如果我們可以由 p 之眞(Truth)推測 q 之眞則 p 與 q 之間必有的關係就是這種. 但因

種種學術上的理由,這還不能選做最根本的觀念. 要知道那是根本的觀念,那是根本的界說,請先看上述各關係所暗表的各種『命題之從元』(Functions of propositions).

這種命題之從元中最簡單的是『否定式』(Negation) 或『不 p』. 這是 p 的從元,當 p 眞他就假, p 假他就眞. 爲便利起見命題之眞或假都叫做該命題之『眞僞價』(Truth-value), (原註 2) 眞命題之『眞僞價』爲眞,假命題之『眞僞價』爲假. 『不 p』與 p 其眞僞價正相反對.

次爲選立式(Disjunction)『p 或 q』. 這是 p 及 q 之從元,當 p 或 q 有一眞時其眞僞價爲眞,當 p 與 q 皆假時其眞僞價始爲假.

又次爲聯立式(Conjunction)『p 且 q』 這也是 p 及 q 之從元,當 p 與 q 皆眞時其眞僞價爲眞,當 p 或 q 有一假時其眞僞價卽假.

又次爲不兩立式(Incompatibility)『p 及 q 不皆眞』這個從元是聯立式之否定式卽『不「p 且 q」』; 又

是否定式之選立式,即『不 p 或不 q』 當 p 或 q 有一假時其眞僞價爲眞,當 p 及 q 皆眞時其眞僞價爲假.

又次爲包含式(Implication),『p 包含 q』,即『若 p,則 q』. 這裏所謂包含是廣義的,若 p 爲眞即可藉以推測 q 之眞. 所以更解釋一下,可以說:『p 若不假,則 q 眞』,或『p 假,q 眞二者必居其一』.(此外固然還有別的解釋,但爲我們研究便利起見,有此已足.) 故『p 包含 q』其意就是『不 p,或 q』:若 p 假,則其眞僞價爲眞;若 q 眞,則其眞僞價亦眞;若 p 眞而 q 假,則其眞僞價爲假.

以上命題之從元共計五種(譯者註 1):否定式,選立式,聯立式,不兩立式,包含式,此外不難另加別種,例如『不 p 且不 q』(此稱爲聯否定式,與聯立式之否定式不同,)但有以上五種已儘夠用. 否定式與其餘從元不同地方,就是否定式是一命題的從元,而其餘四者是二命題的從元. 至於藉其主元(命題)之眞僞價以定眞假,五者却都是

一樣的. p, 或 p 及 q 之眞僞價知道了(需一個用一個,需兩個用兩個),我們就可以推測否定,選立,聯立,不兩立,包含,各從元之眞僞.凡命題之從元有以上這種性質的謂之『眞僞從元』(Truth-founction).

『眞僞從元』爲眞爲假之條件一經述出,則其意義已盡,無可再言. 例如『不 p』純是 p 的從元, p 眞則假, p 假則眞: 此外別無可加之意義. 『p 或 q』及其餘各從元亦然. 所以設有兩眞僞從元,無論主元所取之值爲何,其眞僞價常常相同,則這兩從元便是一致沒有分別. 例如『不 p 或不 q』之否定式與『p 且 q』是一致的,『p 且 q』之否定式與『不 p 或不 q』是一致的;所以彼此可以否定式互相界說. 眞僞從元,除了在某條件下眞某條件下假以外,沒有別的意思.

上述五眞僞從元不是獨立不相依賴的. 任舉一個都可用餘者去界說. 就是將五個減爲兩個也不大難; Principia Mathematica 中用的是否

定式及選立式兩種.準此,則『包含式』可以『不p,或q』界說之;『不兩立式』可以『不p或不q』界說之,『聯立式』可以『不兩立式之否定』界說之. 歇浮 Sheffer (原註3) 更進一步,證明可以僅用一根本觀念以誘導五者;尼谷 Nicod (原註4) 并且說由是吾人可將演繹法理論所需之一切的根本命題都變做兩個『非形式的』(Non-formal)及一個『形式的』(Formal)原理. 爲達這個目的起見,可以『不兩立式』或『聯否定式』(譯者註2) (Joint falsehood 爲不可界說的觀念;現在我們用前者.

現在我們的根本觀念就是一個眞僞從元叫做『不兩立式』,以 p/q 表示之. 一命題之否定式可以界說爲自己與自己之不兩立式,換句話說『不 p』即『p/p』. 選立式爲不p與不q之不兩立式,即 $(p/p)/(q/q)$. 包含式是 p 與『非 q』之不兩立式,即 $p/(q/q)$. 聯立式爲不兩立式之否定式,可以 $(p/q)/(p/q)$ 表示之. 照這樣其餘四命題都用不兩立式界說了.

眞僞從元之製造原無限制,多引入些主元,或將主元頻頻重複,眞僞從元之數就可增多. 我們所要研究的是本題與推測法之關聯,於此不必深究.

若我們知道 p 是眞且 p 包含 q, 我們就可以從而斷言 q. 但推測上常不可免有心理的事實存在: 推測是一種方法我們用此可以得着新知識,推測時所憑藉而分眞假之關係不是心理的;但是從斷言 p 遂到斷言 q 其間實際的經過却是心理的,不能用純粹地邏輯的名詞去表示.

在算學上,我們每逢推測,必定先有了某命題式其中涵有許多變命題,如 p 及 q,憑藉他的形式我們知道當 p 及 q 取任何值時這式是眞的,此外還另有一式是前式的一部分我們也知道當 p 及 q 取任何值,這式是眞的;由是應用推測原理,我們能丟去原式的這部分去斷言所餘的部分. 這種抽象的話舉幾個例就可淸楚.

演繹法之五形式的原理, Principia Mathematica 所舉的,我們現在假定爲已知. (尼谷 M. Nicod 曾將五個變做一個,但因這一個是個很複雜的命題所以我們起首還是用五個.)五命題如下:——

(1)『p 或 p』包含 p——卽,若 p 眞或 p 眞,則 p 眞.

(2) q 包含『p 或 q』——卽,當 p 及 q 有一眞時則選立式『p 或 q』眞.

(3)『p 或 q』包含『q 或 p』. 倘若有很完善的記法,這層直可不要,因爲我們對於選立式的概念本沒有次序的觀念夾雜其間. 但是現今用的記號總免不掉次序的形式,所以需用一個相當的假設來表明次序可以顚倒.

(4) 若 p 與『q 或 r』有一眞,則 q 與『p 或 r』必有一眞. (這個顚倒置換的方法很能增加演繹的力量.)

(5) 若 q 包含 r, 則『p 或 q』包含『p 或 r』.

以上是 Principia Mathematica 中用的五個形式演繹的原理　每個都有雙料的用處,我們引這

五命題的意思就在顯明這種用處.一種用處是用做推測的前提,一種是用來決定前提包含斷案的事實.當我們從事推測,是先知道了一命題 p,又知道一命題『p 包含 q』,從而推測 q.現在我們研究的是演繹原理,我們的五根本命題是一工具,這工具既需能生出 p 還需能生出『p 包含 q』.換言之,演繹法之原理不僅當他們做法則,用來決定『p 包含 q』,並且還當他們做實質的前提,做推測式之 p.譬如我們要證明『設 p 包含 q,則若 q 包含 r 則 p 包含 r.』這是一個三命題的關係,三命題都是包含式.命

$$p_1 = p \text{ 包含 } q,\ p_2 = q \text{ 包含 } r,\ p_3 = p \text{ 包含 } r.$$

我們所要證明的是 p_1 包含『p_2 包含 p_3.』今取第五原理,而以不 p 代其 p,更據界說知『不 p 或 q』與『p 包含 q』同.故第五原理變爲:

『若 q 包含 r,則「p 包含 q」包含「p 包含 r」.』,卽『p_2 包含「p_1 包含 p_3」』.命此爲命題 A.

又若以不 p 及不 q 代第四原理之 p 及 q,依

包含之界說,第四原理變爲:

『若 p 包含「q 包含 r」,則 q 包含「p 包含 r」』 以 p_2 代 p, p_1 代 q, p_3 代 r, 此命題變爲

『若 p_2 包含「p_1 包含 p_3」,則 p_1 包含『p_2 包含 p_3』』.

命此爲命題 B.

我們已經用第五原理證明了『p_2 包含「p_1 包含 p_3」』, 這命題我們叫做 A. 所以我們得了一個推測式其中 A 就是推測式之 p, B 就是『p 包含 q』. 由此推測到 q, 卽

『p_1 包含「p_2 包含 p_3」』,

爲我們所求證的命題. 在這個證法裏面,我們將第五原理略加變通而得 A,做爲實質的前提;將第四原理略加變通而得 B,用來供給推測式之形式. 前提之實質的及形式的兩種應用在演繹法理論裏原是互相纏結的,我們知道他們理論上有分別,實際上不把他們分開,也並不要緊.

昔時由前提得新結果的方法,很像上面所述

的演繹法,但是以前那方法並不配稱為演繹法.

凡根本命題(不管是什麼)本是用來斷言其中變命題p,q,r任取何值該命題無不眞的. 所以其中的變命題,例如p,我們可任代以一個其值常為命題的式,例如『不p』,『s包含t』,等. 這種代替法所獲得的結果不過是原命題的一些特例,但從實用的觀點看來却算是新的命題 這種代替法之合理需用一種非形式的推測原理來保障. (原註5)

尼谷將五根本原理變成的一個形式的原理,現在可以講了. 未講此原理,先須說明一些眞僞從元怎樣用不兩立式去定界說. 我們已經知道

p/(q/q)的意思就是『p包含q』.

現在由p/q表示p與q不兩立可見

p/(q r)的意思就是『p包含q及r』.

因為這式的意思就是『p與「q與r不兩立」不兩立』,即『p包含「q與r之非不兩立」』,即『p包含「q且

r』』,——因為q與r之聯立式是他們的不兩立式之否定式. 又由$p/(q/q)$表示『p包含q』可見

$$t/(t/t)\text{的意思就是『t包含他自己』.}$$

設以$\overline{p}$表示p之否定式;則$\overline{p/s}$表示p/s之否定式,即表示p與s之聯立式. 由是

$$(s/q)/\overline{p/s}$$

表示s/q與『p及s之聯立式』不兩立;換言之,若p及s皆眞,則s/q假,即s及q皆眞;簡言之,p與s之聯立式包含q與s之聯立式.

$$\text{今命 } P=p/(q/r),$$

$$\pi=t/(t/t),$$

$$Q=(s/q)/\overline{p/s}.$$

尼谷之唯一的形式的原理可以表示之如下

$$P/(\pi/Q)$$

即謂P包含π及Q.

尼谷除用這個形式的原理之外,還用了一個屬於範疇理論範圍之非形式的原理(與本章無關),和一個與『已知p,又知p包含q,我們可以推

知q』對應之原理．以記號表示之如下：

『若 p/(p/q) 眞，且 p 眞，則 q 眞．』

有了這個工具，一切的演繹法之理論，除掉那些與『命題從元』之存在或其普遍的眞確有關的都可推出．命題從元俟下章再論．

對於命題間之關係——推測式藉以確立的——有些著作家鬧不清楚(假定我的話是不錯)．實在講起來，從 p 推測 q 要想不謬，祇要命題 p 眞且命題『不 p，或 q』眞就够了．無論什麼時候，有這兩層情形，顯然 q 一定是眞的．但是推測之眞正發生必須『不 p 或 q』是用別的方法知道，不是藉知道不 p 或知道 q 而知道．倘若 p 假，『不 p 或 q』當然眞，但於我們的推測絕然無用，因爲我們的推測需要 p 眞．倘若我們預先知道 q 眞，『不 p 或 q』之眞固然也知道，但於我們的推測也無用，因爲 q 之眞既然預先知道，就用不着推測了．所以惟有當『不 p 或 q』可以知道，但不是藉對於組成此選立式之兩命題(不 p 及 q)之

知識而知道,推測的事纔眞正發生;否則推測就等於無用. 故推測之發生有一定的條件,p與q間形式之關係就存在這條件中. 譬如我們知道若q包含s之否定式,則s包含r之否定式. 介乎『r包含「不s」』及『s包含「不r」』之間有一形式的關係足使我們知道前者包含後者,雖然我們並未預先知道前者假或後者眞. 包含之關係在推測上能有實際的用處,所需的條件就是這種

但是我們需要這個形式的關係不過是用以知道前提假斷案眞二者必居其一. 推測之正確所需要的是『不p或q』之眞;此外所須要的僅僅是求推測之『實際的有效』. 陸易C. I. Lewis (原註6) 教授曾特別研究狹義的形式的關係,我們可以叫他那關係做『形式的可演繹性』(Formal deducibility). 他以為那個廣義的關係,用『不p或q』表示的,不宜叫做『包含式』. 這還是字的問題,用的字若前後一致,我們怎樣界說他們並無大關

係。我所持的理論與陸易所持的理論實際不同之點是：他主張,當一命題q『形式地可由p演繹出來』的時候,我們所發見p與q間之關係可以叫做『嚴切的包含式』(Strict implication),這與『不p,或q』所表示的關係不同,其意義較狹,祇當p與q間有某些形式的關聯時這關係才會發生。我主張,姑無論有沒有如他所說的那種關係,縱使有,算學可以不要他,所以爲省事起見,不應當收納這種關係到基本的觀念裏去;且無論何時兩命題有所謂『形式的可以演繹』之關係存在,那種場合我們必定可以見到第一命題假或第二命題眞,此外並沒有別的什麼東西必須收納到前提裏去;還有一層陸易教授所持以反對我所辨護的理論之詳細理由都不難詳細答覆,並且那些理由都不知不覺暗暗假定着一種論點,那論點是我所不取的。所以我最後結論,說無論何種不能做眞僞從元表示的包含式無採用做根本觀念之必要.

(原註 1)以後用p,q,r,s,t,等字母表『變命題』(Variable proposition).

(原註 2)這名詞是弗雷格首先用的.

(原註 3)Trans. Am. Math. Soc., Vol. xiv. pp. 481—488.

(原註 4)Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. xix., i., January 1917,

(原註 5)這原理Principia Mathematica及尼谷論文中皆未載. 似係闕漏.

(原註 6)參看Mind, Vol. xxi., 1912, pp. 522—531, 及Vol xxiii., 1914, pp. 240—247.

(譯者註 1.) 五眞僞從元各有記號以表之. 今將羅素先生在北京大學講演所用記號錄之於下.
(Principia Mathematica所用記號亦與此相同.)

p之否定式: $\bar{p}=p/p$.

p與q之不兩立式: $p/q=p/q$.

p與q之選立式: $p\cup q=(p/p)/(q/q)$.

p與q之聯立式: $p.q=(p/q)/(p/q)$.

p包含q: $p\supset q=p/(q/q)$.

「$p\cup q$」稱爲p與q之邏輯的和,「$p.q$」稱爲p與q之邏輯的積. 包含之符號$\supset$, 是意大利數學家Peano創立的,用他非常之便利.

(譯者註 2.) p與q之聯否定式,卽「不p且不q」,試以「$p\bar{\cup}p$」表之,則五眞僞從元可以界說之如下:

$$\bar{p}=p\bar{\cup}p;$$

$$p.q=(p\bar{\cup}p)\bar{\cup}(q\bar{\cup}q);$$

$$p\cup q=(p\bar{\cup}q)\bar{\cup}(p\bar{\cup}q);$$

$$p/q=[(p\bar{\cup}q)\bar{\cup}(q\bar{\cup}q)]\bar{\cup}[(p\bar{\cup}p)\bar{\cup}(q\bar{\cup}q)];$$

$$p\supset q=[(p\bar{\cup}p)\bar{\cup}q]\bar{\cup}[(p\bar{\cup}p)\bar{\cup}q].$$

第十五章

命題從元

前章討論命題時我們不曾替『命題』(Proposition)這字求一界說. 這字固然不能夠嚴密地界說,但關於他的意義也要稍爲說說,以免一種很普通的混淆弊病,將『命題』與『命題從元』(Propositional Founction)相混,而本章的論題就是『命題從元』.

我們用『命題』這字原意是指表示事物之眞假的一組文字而言. 我說『原意』因爲我不願意『命題』除不光是些語言的符號或光是有符號的性質的思想以外,還有別的限制. 我以爲『命題』這字第一層限制應當在一種狹義的符號,第二層限制應當在足以表示眞僞的符號. 譬如『二加二爲四』及『二加二爲五』都是命題,『蘇格拉底是人』及『蘇格拉底不是人』也都是命題. 『不論a及b是什麼數, $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$』這句話是命題;但是光光一個公式『$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$』却不是命

題，因為我們若不說明或設想 a 及 b 可以是任何數值或是某某等數值，那公式並不曾陳述什麼確定的話也就無所謂眞假．前者(例如 a, b 是任何數值在算學的公式裏通常是默認的，所以算學公式便是命題；但若沒有這種假設，那就是命題從元了．命題從元其實就是一個語句，其中含有一個或多個未決定的成分，倘若給這些成分以一定的值，這語句就變成命題．換言之，命題從元是一種從元其值為命題．後一界說用時須要謹愼．摹述從元，如『某氏算學書中最難之命題』，其值雖然也是一命題，但這從元不是命題從元．這種從元的值是摹述一個命題：而命題從元之値是實在陳述一個命題．

要找命題從元之例很容易，譬如『x 是人』就是一命題從元；當 x 沒有決定的時候這話也不眞也不假，一指定了 x 的値，這話就成為眞的命題或假的命題了．算學方程式都是命題從元．當其中變數還沒有定值時，方程式祇是一句待

決的話,未決的決了以後纔有眞假可言. 僅含一變數之方程,當變數取該方程式之根以爲値時,爲眞命題,否則爲假命題;恆等式無論其變數所取之値是甚麼總是眞命題. 表示平面曲綫或空間曲面之方程式爲命題從元,當變數取該綫或面上之點之坐標以爲値時,爲眞命題,否則爲假命題. 普通邏輯書中如『凡A是B』的語式也是命題從元: 要知此語眞假,A及B還得先決定是什麼類.

『場合』或『實例』這種觀念,皆須用命題從元來解釋. 譬如所謂『推廣』其所示的一種方法試拿『閃電之後雷聲繼之』這種粗淺的例來說. 這話有許多實例,就是許多像『這是一個閃電,其後雷聲繼之』這樣的命題. 這些事實是什麼的實例呢? 就是命題從元『若x是閃電,x之後雷聲繼之』的實例. 這種推廣方法(其適當與否我們幸而可以不管)就是由命題從元『若x爲閃電,x之後雷聲繼之』之若干實例之眞確因而推及其普遍的

眞確。同樣我們可以知道凡說『實例』或『場合』，其中卽牽含著命題從元。

我們不須問也不須求答，下一問題『命題從元是什麽?』。命題從元自己原沒有什麽預定的意義，不過是『意義』的一種格式，好像儲藏處，收容所，要拿東西塡入才發生意義。我們必須研究命題從元的方面，大畧有二：第一，牽涉於『在一切場合眞』及『在某些場合眞』兩觀念者；第二，牽涉於類及關係之理論者。第二方面待下章論之，現在就第一方面討論。

我們如果說某事某物『常眞』或『在一切場合皆眞』，那末所謂『某事某物』明明不是命題了。一命題眞就是眞假就是假，此外沒有活動的餘地。譬如『蘇格拉底是人』及『拿破崙死在聖黑冷哪』並無所謂場合或實例。這都是命題，如果說他們『在一切場合皆眞』那種話簡直沒有意義。所以『在一切場合皆眞』這仂語祇有在命題從元用得着。譬如當我們討論因果的時候，往往說

『在一切場合, A之後B繼之』. (我們現在所研究的不是話之眞僞乃是話之邏輯的分析)倘若A是有實例的,那末A一定是若干不相同的個體x_1, x_2, x_3, 等等之一般的概念,我們對於他們可以說『x_1是A』,『x_2是A』,『x_3是A』,等. 前面所舉的例正與此相合. 我們說『閃電(A)之後雷聲(B)繼之』. 這裏各個的閃光是個體,不相同的,但是有一公同的性質,他們都是『閃電』. 所以一般地表示共同性質之惟一方法是說: 若干事物之公共性質是一個命題從元,當主元以該事物爲值時該命題從元之値是眞命題. 所有這些事物都是該命題從元之眞的實例——因爲一個命題從元,本身雖不能是眞也不能是假,却必在某些實例是眞或在某些實例是假,倘若他不是常眞或不是常假. 我們說『在任何實例, A之後B繼之』的時候,我們的意思是『不拘x是什麼,祇要x是A, x之後B繼之』;換言之,我們是斷言某命題從元『常眞』.

語句裏而含有『凡』,『一切』,『任何』,『一』,『這一個』,『某些』,『一些』等字樣的皆須用命題從元來解釋.

命題從元以何因緣而與尋常這種句語有關,試以上面那些字裏的『一切』(或『凡』)及『一些』來說明.

分析到最後的時候,我們對於命題從元祇有兩種語式須待研究: 一種是說,該命題從元在一切場合眞;一種是說,該命題從元在一些場合眞(這裏用的一些,不限定是多數). 命題從元一切旁的用法都可以化爲以上兩種形式. 我們如果說某命題『在一切場合』眞,或『常常』眞(常常與一切場合,以後互用不分常常不必指時候言),意思就是說該命題之一切值都眞. 設『ϕx』爲從元,a爲可做ϕx的主元之事物,那末,不論我們怎麼挑選a,『ϕa』是眞的. 譬如『若a是人,a是有死的』這個命題不論a是人不是人常常是眞的;實在講起來凡取這種形式的命題無一不眞. 所以命題從元『若x是人,x是有死的』是

『在一切場合』眞或『常常』眞. 又如『沒有獨角獸』這句話與『命題從元「x不是獨角獸」在一切場合眞』一樣. 前章關於命題的語句,如『「p或q」包含「q或p」』,也就是陳述某某命題從元常常眞的話. 因爲這原理所說的,不是指這個特殊的p或q,也不是指那個特殊的p或q,是指任何『關於這原理「有意義」(Significant)』的p或q. 所謂『一從元對於某主元必有意義』這種條件與『這從元以該主元爲主元時必有一值,或眞或假』完全一樣. 研究『有意義』(Significance)之條件屬於範疇理論之範圍,範疇理論前章畧畧講了一點,不深究了.

不但演繹法之原理,卽邏輯之一切基本命題無不是『某某命題從元常常眞確』這類的陳述. 設或不然,那末,所謂基本的命題僅僅是對於特殊事物或概念——蘇格拉底,紅,東,西,等——說法,不是爲一般的事物或概念說法,這豈是邏輯的職務?邏輯學之界說之一部分(不是界說之全

體)明明說他的命題都是十分普遍的,就是說其中的命題都是陳述『某某不含定項(定項即不變項)之命題從元常常眞確』. 不含定項之命題從元待最後一章再論. 現在進論關於命題從元之又一方面,即『某命題從元有時候眞或至少有一實例眞』這種陳述.

我們說『有人』,意思就是說命題從元『x是人』有時候眞. 又如說『有些人是希臘人』,意思就是說命題從元『x是人且是希臘人』有時候眞. 又如說『食人之人還存在於非洲』,意思就是命題從元『x是食人之人,現在非洲』有時候眞. 又如說『宇宙間最少有n個個體』就猶如說命題從元『α是個體之類且是基數n之一原素』有時候眞,或也可說,這命題從元當α取某某值時是眞.

這種語法很是便利,因爲我們有時必須知道是什麼變的成分我們取爲本命題從元之主元. 例如上舉之命題從元若簡寫爲『α爲n個體之類』則α與n兩個變的成分,不知何者爲主元.

無窮公理,用命題從元之語法表之就是:『命題從元「若 n 爲一歸納的基數,則所謂 α 爲 n 個個體之類云云對於 α 之某些值爲眞」對 n 一切可能之値爲眞』. 這裏面含有一個小從元『α 爲 n 個個體之類』,這小從元對於 α,有時候眞;大從元,『若 n 爲歸納數則該小從元必有時爲眞』對於 n,常常爲眞.

『命題從元 ϕx 常常眞』是『「不 ϕx」有時候眞』之否定式,『ϕx 有時候眞』又是『「不 ϕx」常常眞』之否定式. 譬如『凡人是有死的』這句話就是『命題從元「x 是不死的人」有時候眞』之否定式. 又如『有獨角獸』這句話是『命題從元「x 不是獨角獸」常常眞』之否定式.

(原註1). 倘若『不 ϕx』常常眞,我們就可以說 ϕx『常常假』或『無時眞』. 所以我們可以就『常常』及『有時』二者之中選定一個做根本的觀念,而用其否定式做其餘一個的界說. 譬如我們倘若用『有時』做根本的觀念,那末,『ϕx 常

常眞』就可以『「不 ϕx 有時眞」是假的』界說之(原註2). 但是就範疇理論上的理由看來,似乎應當將『常常』及『有時』兩者都用做根本觀念,而用以界說含着他們的命題之否定式. 換言之, x 所屬的範疇之命題之否定式,我們假定預先界說了(或是採用爲根本觀念了),我們就界說: 『常常 ϕx)是『有時「不 $\phi(x)$ 」』之否定,『有時 ϕx 』是『常常「不 ϕx 」』之否定. 應用關於『不含「似變項」(Apparent Variable)的命題』之界說及根本觀念,所有關於『含似變項的命題』之選立式及其他眞僞從元也可以同樣界說.不含似變項的命題叫做『初等命題』(Elementary Proposition).用這種方法,拾級而上,所有應用於含一,二,三,…n(有窮個)變項的命題之眞僞從元之理論一樣可以探究.

尋常形式的邏輯所採用最單純的命題形式,其實並非最單純,都是關於某複合的命題從元之一切値或一些値之陳述. 試先就『凡 S 是 P』

來說．今以命題從元ϕx定S，命題從元ψx定P，其定之之法可以例明之．設S是人，ϕx就是『x是人』；設P是有死，ψx就是『有一個時候x死』．『凡S是P』意思就是說：『「ϕx包含ψx」是常常眞』．一定要注意的是：『凡S是P』不是僅僅爲那些眞是S的說法，就是對於那些非S的也可一樣的說．譬如我們有了一個x，不知道他是S還是非S，『凡S是P』這句話還仍然對我們陳述一點關於x的事實：若x是S則x是P．這種事實x是S時固然眞卽在x非S的時候也一樣是眞．倘若不然，那反證法(Reductio ada bsurdum)就等於無用了；因爲反證論法的要旨只在將包含式用在假的前提上（隨後纔轉過去）．我們還可以用別的方法來說明．要理解『凡S是P』這個語式，並無須能以枚舉一切是S的項；祇要知道『是S』及『是P』的意義，縱使對於是S及是P的實例知道很少，我們仍然能完全理解『凡S是P』的意義．由這樣

看來,可見不但實在是S的項纔與『凡S是P』這句話有關,一切『說他是S,即發生意義』的項都與這句話有關,換言之,一切是S及一切不是S的項或一切同此特殊邏輯範疇的項都與該句話有關。以上是論關於『一切』的話,同論也可用在關於『一些』的話上。如『有人』的意思就是『x是人』這話對於x之某些值爲眞.這話裏面,x之一切值(即能使『x是人』一語發生意義的——不論是眞是假——一切值)都有關係,不但是那些實在是人的項.(這種話的僞怎樣證法?我們就此着想,則需x一切值的緣故自然明白.)所以任何含有『一切』或『一些』字樣的語式(即命題從元)不但牽涉着一切『能使從元眞』之主元,并且牽涉着一切『能使從元發生意義』之主元(即兼含使從元眞與使從元假兩者)。

現在可進一步,將尋常形式邏輯之通用的幾個語式加以解釋。設S爲能使 ϕx 眞之一切項,P爲能使 ψx 眞之一切項。(所謂類其實就是

這樣從命題從元誘導出來的概念,看後章就明白.) 各語式之解釋如下:——

『一切S是P』意爲『「ϕx 包含 ψx」常常眞』.

『一些S是P』意爲『「ϕx 且 ψx」有時眞』.

『沒有S是P』意爲『「ϕx 包含不 ψx」常常眞』.

『一些S是非P』意爲『「ϕx 且不 ψx」有時眞』.

這裏所謂有時眞或常常眞的命題從元顯然不是 ϕx 及 ψx 本身,而是 ϕx 及 ψx 之眞僞從元.其主元x是同一的. 要明白這種事,須不從一般的形式 ϕx 及 ψx 着手,而從特殊的形式 ϕa 及 ψa —— a是常項 —— 着手. 譬如我們要考究一切『人是有死的』,先從

『蘇格拉底是人,則蘇格拉底是有死的』

着手,然後有蘇格拉底的地方都做爲拿x代了,結果就是『若x是人,則x是有死的』. 我們的目的是在表明 x 雖是變項,沒有固定的值,但是 ϕx 與 ψx 之值當我們說『ϕx 包含 ψx』時,必須相同. 所以我們與其從 ϕx 及 ψx 兩個分立的命

題從元着手，倒不如從以『ϕa 包含 ψa』爲值之從元着手格外穩妥；因爲倘若從 ϕx 及 ψx 兩個分立的從元着手，x 旣然是不定的，就難保他的值準是相同了.

爲簡便起見，以後用『ϕx 常常包含 ψx』代替『「ϕx 包含 ψx」常常眞』. 像『ϕx 常常包含 ψx』這樣的命題稱爲『形式的包含式』(Formal implication)；含有許多變項的命題，像這種形式的，也一樣的稱呼他.

由以上的界說，可見尋常邏輯所用爲起點的命題，如『凡 S 是 P』離最單純的形式還遠着呢.

尋常邏輯把『凡 S 是 P』與『x 是 P』看做同形式的命題去研究，卽此可見其分析工夫的缺乏——例如，『凡人是有死的』與『蘇格拉底是有死的』尋常的邏輯都看做同樣的命題. 在我們看來，前者屬於『ϕx 常常包含 ψx』一種，後者屬於『ψx』一種，相差太遠了. 以上二種形式的分別，由裴阿諾和弗雷格兩人辨明，乃是符號的

邏輯上一個要緊的進步.

『一切S是P』與『沒有S是P』,除以『不 ψx 』代替 ψx 之外,形式上直沒有什麼分別. 『一些S是P』與『一些S是非P』也是這樣. 以前說過,『一切S是P』這個命題的原義並不包括S的存在,換言之,『一切S是P』並不必定要有眞是S的東西,從這方面着眼(這是學術上唯一可取的見解),尋常所用的逆證法則,如『一切S是P,故一些P是S』,就難免有謬點了. 由上面界說結果,倘若 ϕx 常常是假的(卽若沒有S),則『一切S是P』與『沒有S是P』兩者皆眞,不拘P是什麼. 因爲根據前章的界說,『 ϕx 包含 ψx 』的意思就是『非 ϕx, 或 ψx 』,當『非 ϕx 』眞時上命題常常眞. 讀者初看到這裏一定想說法另外定一個界說,但實際稍爲經驗就知道任何別的界說都不便於應用,倒反將主要的觀念淹沒了. 『 ϕx 常常包含 ψx, 且 ϕx 有時眞』這個命題旣很複雜,且用他做『一切S是P』的界說非常棘手,

因爲那麼一來『ϕx 常常包含 ψx』就沒有話去表示，我們用『ϕx 常常包含 ψx』的時候又比用『一切S是P』的時候多的多。從我們的界說，『一切S是P』並不包含『一些S是P』，因爲在前者S可不存在，在後者S非存在不可，所以像『一切S是P，做一些P是S』這樣的逆證法不合理，並且有些推測式例如『一切M是S，一切M是P，所以一些S是P』(這種推測式，當M不存在時就發生錯誤)，也靠不住了。

『存在』(Existence)這個觀念有好幾種的形式，其中一形式待下章再講；但是最基本的形式是由『有時眞』這觀念直接誘導出來的，現在可以講講。設有一命題從元 ϕx，一主元 a，倘若 ϕa 眞我們就說『a 合該從元 ϕx』；這『合』(Satisfy)字的意義與平常說的一方程式之根『能合』該方程式是一樣的。今設 ϕx 有時眞，我們就可以說『能使 ϕx 眞確』的 x 是有的，或是說『合 ϕx 之主元**存在**』。這就是存在的基本意義。至於別種意

義不是由這個誘導出來的,便是牽強附會的思想. 『人存在』這話本來是很對的,其原意是『x是人』有時眞. 倘若由此演一個冒牌的推測式:『人存在,蘇格拉底是人,所以蘇格拉底存在』,那就是信口亂說了,因爲『蘇格拉底』是一個定主元,不像『人』僅僅是一個命題從元的未定主元. 這種推測式的誤謬同下面的誤謬是一樣的:『人繁多,蘇格拉底是人,所以蘇格拉底繁多』 後者的誤謬很容易看出,前者關於『存在』的却不甚明顯,其原因後章還要詳論. 現在要注意的是,『人存在』這話雖然很確實,若用以推論能合此從元之特殊的主元之存在却是不確實,或者簡直說是絕無意義. 總而言之,『能合 ϕx 的項存在』意思就是『ϕx 有時眞』,而『a存在』(a是能合 ϕx 的一項)這句話說起來儘管有聲,寫出來儘管有形,却是缺乏意義. 這種頂簡單的誤謬倘若記得眞,古代哲學關於『存在』的意義之許多難題也就不難迎刃而解了.

此外，哲學不曾將命題和命題從元分別清楚因而陷於淆亂不可收拾之地位的就是必然 (necessary) 可能 (Possible 或 Contingent 或 Assertoric) 不可能 (Impossible) 這些關於『語氣』(Modality) 的觀念。在尋常的眼光看來，眞命題之中有的是必然的，其餘都僅僅是容或有之或姑斷言之的；假命題之中有些是不可能的(卽其矛盾點是必然的)，其餘不過是偶爾不眞的。其實『必然』這觀念對於『眞確』並沒有什麼明顯的補益。就命題從元而論，其分三層，很爲明顯。設『ϕx』爲一命題從元之未定値，若此命題從元常常眞，ϕx 是必然的；若從元有時眞，ϕx 是可能的；若從元無時眞，ϕx 是不可能的。這種情形當研究『或然率』(Probability) 時是常常遇着的。譬如，袋內有若干球，從中取出一球 x 來：若袋裏的球全是白的，『x 是白的』是必然的；若球中有些是白的，『x 是白的』是可能的；若球無一白的，『x 是白的』是不可能的。當這時候，我們對於 x 的知

識,不過就是x能合命題從元『x是袋中的球』罷了. 這種情形在或然率問題裏最普通,在實際生活上也不罕見——譬如有人來訪,除了他帶來我們某友人之介紹書以外我們對於他絕不知道什麼;那末,我們要想對於這位知道一點什麼,就得就某友人之友僚之全體着想了. 凡在這種場合,就一般語氣而論,命題從元是最合用不過的. 從各方面講,要想我們的思想清晰,最要是養成習慣,能嚴格地區別命題與命題從元;早前哲學界於此未嘗致力,實已貽了哲學之羞.

(原註1) 推演的方法見Principia Mathematica vol.i.*9.

(原註2) 文字上求免單數與多數兩種語意,往往與其說『φx有時』或『φx是有時眞』不如說『φx不常假』較爲便利

第十六章
摹述

前章我們詳細討論了『一切』(all)及『一些』(some)兩仂語;本章研究『這』(the)字的單數,下章再研究『這』字的多數.爲一『這』字費兩章去討論似乎太過了,但是這字對於哲學的數學家非常之重要:著者好像勃郎甯(Browning)詩裏面的文法家研究接尾字δε一樣,很想此字之義得以闡明,就是『腰股以下都如槁木』也所不顧,何況僅做獄中囚呢.

前章我們曾提到『摹述從元』(Descriptive function),就是『這一個「x之父」』『這一個「x之正弦」』,這類的詞語.要界說摹述從元先得界說『摹述』(Decription).

『摹述』就是『如此如此』,『如彼如彼』,『某某』(以後用最後一種代表)這類的仂語.如『文王之父』,『文王之子』,『當今英王』,『史記之作者』,『45°之正弦』都是摹述一個(定的或不定的)個體.摹述可分

『專指』與『泛指』兩種. 像『這一個某某』(the so-and-so)這樣的仂語叫做『**專指的摹述**』或『**確定的摹述**』(Definite description),像『一個某某』(a so-and-so)這樣的仂語叫做『**泛指的摹述**』或『**不確定的摹述**』(Ambiguous or indefinite description). (就中國文法表面上看,『文王之父』與『文王之子』似乎沒有分別;其實,『文王之父』祇有一個,沒有第二個,是專指的;『文王之子』不止一個,是泛指的. 爲分別專指與泛指起見,不得不用『這一個』或『一個』加在『某某』前;——例如:『這一個「文王之父」』,『一個「文王之子」』,『這一個「當今英王」』,『這一個「史記作者」』,『這一個「45° 之正弦」』,——將這種冠詞加上去,雖嫌不雅潔,爲保持邏輯的分析精神實不得不如此.)現在先就泛指的摹述講.

『你遇着誰?』『我遇着一個人.』這是很不確定的摹述. 我說『我遇着一人』,究竟說的是什麼?現在暫且假定我的話是真的,并且我實在遇着杜威. 但是我說的並不是『我遇着杜威』,這是很明

白的. 我可以說『我遇着一人,却不是杜威』;單憑這話,我雖然是撒謊,我的話語並沒有矛盾的地方,除非我口裏說『我遇着一人』心裏的眞意是『我遇着杜威』,那才矛盾呢. 聽我這話的人,卽使不聞杜威的名,一定可以明白我的話怎講.

我們還可以進一步說:『我遇着一人』,不但這人不是杜威,簡直話裏並沒有什麼實在的人. 這層道理,倘若我的話是假的,便顯而易見,因爲我所說的話不眞,那麼,不但杜威不能做話中之人,無論誰也不能做話中之人. 縱使世界上絕無人類,『我遇着一人』這話眞雖不能够眞,表意(Significant)却還是表意的. 祇要知道什麼是『獨角獸』,什麼是『海蛇』,或是知道這些東西的界說,『我遇着一獨角獸』及『我遇着一海蛇』也確切是表意的話. 所以像這類命題所含的只有所謂概念. 就『獨角獸』而論,世界上只有他的概念:此外並沒有什麼冥渺難測的,『不實在的』(Unreal)東西可以叫做『一獨角獸』.『我遇着一獨角獸』這

話(雖然是假的)實在是表意的話,所以正當分析起來,他雖然含有『獨角獸』這個概念,却不曾含『一獨角獸』當做成分.

這裏所引起的『不實在』(Unreality)的問題,很為重要. 大多數的邏輯家,研究這問題的,都為文法所誤走入歧途了. 他們以為拿文法的形式做標準很靠得住,其實不然,他們也不知道文法形式上甚麼區別是重要. 『我遇着杜威』與『我遇着一人』文法看做是一樣的形式,邏輯家也就因襲着看做是一樣的形式,其實二者形式正不相同:前者指定了一個實在的人,杜威;後者是含了一個命題從元,明白表示出來,就是說『命題從元「我遇着 x 且 x 是人」有時眞』. (我們用『有時』照慣例一次就可,不必多次,請閱者留心)這個命題顯然與『我遇着 x』形式不同,由此可以明白雖沒有東西可以叫做『一獨角獸』,而命題『我遇着一獨角獸』能够存在,是甚麼緣故了.

許多邏輯家,因為缺乏命題從元這個利器,過

不得已而認定『有不實在的東西』. 譬如依梅囊(Meinong)(原註1)的主張,我們說話可以說到『金山』,『圓方』,等;以這些名詞爲主詞可以造出許多眞的命題;所以他們一定另有一種邏輯的『實在』,不然,以他們爲主詞的命題那就無意義了. 這種學說,在我看起來,是由缺乏『實在』的知覺而起,這種知覺雖在極抽象的研究,也應當保持着的. 我主張,邏輯也同動物學一樣不能承認有什麽『獨角獸』;因爲邏輯所研究的雖然較之動物學抽象些,普遍些,而其爲實在世界之學正與動物學一樣. 說獨角獸在紋章學上,或文學上,或想像上,有他的存在,實在是很可憐可笑的遁辭. 存在於紋章學上的獨角獸並不是肉與血做成的,並不是能自身動作呼吸的. 所存在的只是一個畫圖或一段文字的摹述. 又如,主張罕雷特Hamlet存在於他自己的世界——卽莎氏想像之世界——猶如拿破崙存在於實在世界一樣眞確,這種主張不是有意惑人之言,便是不可思

議的糊塗話. 其實世界原祇有一個,就是『實在』世界: 涉氏的想像是實在世界之一部分,他描寫罕雷特時所有的思想是實在的. 就是讀這戲劇的人的思想也是實在的. 惟有作者及讀者之思想及感情等是實在的,此外沒有什麼客觀的罕雷特可以加進去: 這正是小說的要旨,否則便不成其爲小說了. 就拿破崙而論,倘若你腦筋裏面縈繞着作史者及讀史者因拿破崙而生之一切思想,感情,等等,你還沒觸覺着眞拿破崙;就罕雷特而論,你却祇能與那些思想接觸,此外沒有可以接觸的了. 倘若沒人想到罕雷特,就無所謂罕雷特;但是若沒有人想到拿破崙,拿破崙却自己曾想到拿破崙. 對於『實在』的見解於研究邏輯非常重要,固執罕雷特有別種實在的人可謂對於思想加以危害. 我們對於含有『獨角獸』,『金山』,『圓方』等妄想的東西之命題,要想精密分析,必須對於『實在』有穩健的見解.

人類本有『實在』的知覺,爲順從此種知覺,我們

主張命題之分析不許有『不實在的』(Unreal)東西加入. 但是,假如沒有『不實在的』東西,那末,我們就可以問,從何而有『不實在的』東西加入呢?我們的答案是: 我們從事於命題之研究,原是從記號着手,命題中有非表意的記號羣,倘若我們貿然認爲表意,那就是認他們代表所摹述的東西,便陷於加入不實在的東西之誤謬了. 譬如『我遇着一獨角獸』其中七字成一個表意的命題,『獨角獸』三字自己也是表意的,猶如『人』字似的. 但是『一獨角獸』四字卻不是自能表意的字羣. 倘若我們拿意義加到這四字上去,那我們便要爲『一獨角獸』四字所窘,難以解決『無獨角獸的世界上怎麽會有獨角獸?』這問題了. 『一獨角獸』是一個泛指摹述,不曾摹述着東西;不是摹述『不實在的』東西之泛指摹述. 所謂『實在』『不實在』是形容摹述的字樣,所摹述的東西無所謂『不實在』,果然摹述着東西了,那被摹述的東西就是實在的,摹述本身也就是實在的了. 換言之,『x是不實在

的』這樣的命題祇是當 x 代表專指或泛指摹述時是表意的;且祇當 x 代表『不曾摹述着東西的摹述』時他才是眞. 不論『x』這摹述摹述着東西也好,不曾摹述着東西也好,總而言之他不是含有 x 的命題之成分;譬如『一獨角獸』不算是『我遇着一獨角獸』這命題中自能表意的字羣. 因爲若『x』是一摹述,則『x 是不實在的』或『x 不存在』這種命題常常表意,不但常常表意幷且還有時候爲眞.

現在我們可以定含有泛指摹述之命題之意義了. 設如我們要說『一某某』如何如何,『某某』代表有性質 ϕ 的個體,卽當命題從元 ϕx 眞時之 x. (例如以『一人』爲『一某某』之實例,則『x 是人』就是 ϕx 之實例.) 設如我們想陳述『一某某』有性質 ψ, 換言之,要陳述『一某某』有一種性質那性質是當 ψx 眞時 x 所有的. (譬如想陳述『我遇着一人』,相當的 ψx 就是『我遇着x』.) 『一某某有性質 ψ』這命題與 ψx (=『x 有性質 ψ』)這命題形式不同. 假如

是相同的,那末,『一個某某』就定要與一個適當的x一致了,這雖然有時如此(在某種意義之下),但是像『一獨角獸』這種場合却一定不行.因爲『一某某有性質 ψ』與 ψx 形式不同,所以『一某某』在一種清晰可界說的意義上,可以『不實在』界說如下:——

『一個「有性質 ϕ 的東西」有性質 ψ,』這話的意思是:『ϕx 及 ψx 之聯立式不常假.

就邏輯的眼光看,上述界說與『一些 ϕ 是 ψ』這命題是一樣的;但依修辭的眼光看,却有不同處,因爲一個是單數,一個是多數.然而這並不是重要之點.重要之點是:命題在文字上是說『一某某』的,眞正分析起來,並不含該仂語所表示之物爲成分.這種命題當沒有『一某某』這樣東西的時候仍然能有意義,其理由也就在此.

『存在』(Existence)之界說,應用於泛指摹述的,由前章之末所論可以推出.若命題從元『x是人』有時眞,我們就可以說『人存在』,或說『一人存在』;

同理,若命題從元『x是一某某』有時眞,我們就可以說『一某某存在』. 命題『蘇格拉底是人』等價(Equivalent)於『蘇格拉底是一人』自然無疑;但不是很相同的命題.『蘇格拉底是人』的『是』是表示主詞與賓詞之關係的;『蘇格拉底是一人』的『是』是表示『一致』的. 用一個『是』字表示兩種全然不同的觀念,實在是人類的遺憾——這種遺憾記號的邏輯當然可免.『蘇格拉底是一人』是表示所名的東西(此處認定『蘇格拉底』是名字,這種認定是有限制的,以後再講)與所摹述的東西之一致.若這種的命題,卽『x是一某某』(此『x』是專名)這樣的命題,最少有一個眞,那泛指摹述的東西就存在. 泛指摹述的特性(與專指摹述相反的)就在這類的眞命題可以有許多,——蘇格拉底是一人,柏拉圖是一人,等等.『一人存在』之眞可以由蘇格拉底,柏拉圖,或任何他人推得. 至於專指摹述,對應的命題『x是這一個某某』(這裏的『x』是專名)最多祇有一次眞,卽能使此命題眞之x之

值不多於一個. 由此我們可以進論到專指摹述,其界說方法多與泛指摹述相似,不過更加繁雜罷了.

現在論到本章的主題,『這』(單數)字的界說了.以上論『一個某某』時有一重要之點也可以應用於『這一個某某』. 我們須得尋求的是含有仂語『這一個某某』的命題之界說,不是光光這仂語自身的界說. 就『一個某某』而論,這是顯而易見的: 無論何人不能認定『一個某某』是確定的東西,可以就其本身去定界說. 蘇格拉底是一人,亞里士多德是一人,柏拉圖是一人,但是我們不能說『一人』之意義與蘇格拉底相同又與亞里士多德相同又與柏拉圖相同,因爲這三個專名的意義彼此原不相同. 雖然如此,倘若將世界上的人一個一個都數盡了,那末,我們就沒的說了,我們就不能再說『呀,這是一人,不但如此,并且就是這「一人」,是一個純粹的實體,是一個不確定的人,不與任何個人一致』. 其實世界上的東西,

祇要有的,明明是確定的: 倘若是一人,就是一個特定的人,不會是別人. 所以世界上找不到與特定的人不同的『一人』這麼一個實體. 由是可見我們不能界說『一人』本身,祇能界說含有『一人』的命題.

就『這一個某某』而論,上面的道理也是對的,不過乍看起來不大明顯. 我們要證明這道理,可先考究專名(Name)與專指摹述(Definite description)之區別. 拿『司馬遷是這一個作史記者』命題做例. 這裏有一個專名,『司馬遷』,一個專指摹述,『這一個作史記者』,代表同一個人. 專名與其他各種記號之區別可以闡明之如下:——

一專名是一單純的記號,祇能當主詞用,換言之,就是第十三章所界說的『個體』一類的東西. 『單純』記號不含獨立能成記號的部分.(縱然外表看來似乎有獨立能成記號的部分,但原記號之意義與這些部分的意義無關). 譬如『司馬遷』就不能分為幾部分使各部分仍成為記號(司,馬,

遷,三字外表看來似乎是有意義的記號,但『司馬遷』這記號的意義不是由他們的意義合成功的)

反之,『這一個作史記者』就不是單純的記號,是由許多記號(即,『這一個』,『史記』,『作者』)拼合成功的記號,那些分記號原有一定的意義,『這一個作史記者』的意義就是由這些意義湊合而成的.

有時候外表看來好像是『個體』,而實在可再加以分析,我們不得不暫視之爲個體,這種個體叫做『相對的個體』(Relative individual),這種名詞可以通篇用之不加分析,且只做主詞用不做別用.在這種地方我們又不得不有代表『相對的個體』的記號叫做『相對的專名』(Relative name).我們現在的問題是求摹述之界說,至於所用的專名究竟是絕對的還是相對的,這個問題牽動範疇階級之異同,不是三言兩語可以說清的,我們無妨從略;我們祇想比較一專名及與之相當的(用於同一個體的)專指摹述(如『司馬遷』與『這一個史記作者』),並不致牽到範疇的問題.所以我們可以

暫且假定我們所用的名都是絕對的專名;雖然我們以下所說並不依賴這假定,然有這假定文字便簡單些了.

我們要比較的兩種東西是:(1)專名,他是單純的記號,直接表示一個體,其當有惟一的意義就是這個體,不憑藉其他記號之意義;(2)專指摹述,含有幾個記號,各記號各有其原有的一定意義,摹述之一切意義都從這許多意義而生.

含有摹述的命題與將專名替代摹述而產生的命題不同,縱使專名所名的與摹述所摹述的同是一個東西,兩命題也不是完全一致的. 譬如『司馬遷是這一個作史記者』與『司馬遷是司馬遷』顯然並不一致: 前者是文人學士纔知道的,後者是婦孺皆知的. 并且,倘若不用『司馬遷』而用別的專名去替代『這一個作史記者』,得出來的命題就是假的了. 或者有人要說,我們的命題不是與『司馬遷是太史公』(此兩專名所名的是同一個人)一樣的麼?我們可以答覆之如下. 倘若

『司馬遷是太史公』實意是說『名爲「司馬遷」的人就是名爲「太史公」的人』,那末,這兩專名是當摹述用了: 換句話說,該個體不用其名名之,而用『這一個名爲某某之人』摹述之了. 專名實際的用法往往如此,並且就文字上看也往往看不出究竟是當專名用還是當摹述用. 一專名倘若祇是直接地表示我們所說的東西,那末,我們說的話是事實也與他無干,說的話是假的也與他無干: 他祇是我們用以表示思想之若干記號的一部分. 我們想表明出來的事件必須要不受所用的文字(卽記號)之束縛,(譬如說罷,要可以譯件外國文;)文字(卽記號)不過是媒介物,與我們表明的事件無關. 反而言之,倘若我們對於『這一個名爲「司馬遷」的人』有所陳述,做成命題,那『司馬遷』這專名不但是見於話語之中,並且深入於我們所說的意思之中. 所以我們如果拿『這一個名爲太史公的人』去替代『司馬遷是太史公』裏面的『太史公』,所得的新命題便不同了. 但是

祇要專名直當專名用,不拘叫『司馬遷』也好,叫『太史公』也好,與我們所說的話不生影響,猶如用英文說與用法文說同是表一樣的意思. 所以祇要專名直當專名用,『司馬遷是太史公』與『司馬遷是司馬遷』同是一個很無意味的命題. 由是『司馬遷是這一個作史記者』這命題與用任一專名替代其中之『這一個作史記者』而得之命題兩不相同,算是完全證明了.

當我們用一變項述一命題從元如 ϕx 時,(假定 ϕ 是以個體作主元的從元)想由普遍的場合而應用於特殊場合,所用的方法是以一專名替代變項 x,遂使命題從元變爲命題. 譬如設 ϕx『常眞』,命 ϕx 爲『恆同律』$x=x$. 我們任意選一專名去替代這 x,就一定得着一個眞命題. 今假定『蘇格拉底』,『柏拉圖』,『亞里士多德』都是專名(很輕率的假定),那末,本『恆同律』我們可以說蘇格拉底是蘇格拉底,柏拉圖是柏拉圖,亞里士多得是亞里士多得. 但若我們,不憑藉別的前提,孟

浪地說『這一個作史記者是這一個作史記者』,那就難免陷於誤謬了. 這是因為上段所證,用一專名去替代一命題裏面的『這一個作史記者』所得的另是一個不同的命題. 既然如此,可見:若『x』是一專名,則不論『x』是那一專名『x＝x』與『這一個作史記者是這一個作史記者』定然是不一樣的命題. 所以從『x＝x』這命題的常眞,我們不能毫無疑慮的推『這一個作史記者是這一個作史記者』,實在說起來,『這一個某某是這一個某某』這種形式的命題不是常常眞的: 要想眞,必須這一個某某**存在**(此二字下面再說明). 像『這一個當今法蘭西國王是這一個當今法蘭西國王』及『這一個圓方形是這一個圓方形』這類的命題就不眞了. 所以常常眞的命題從元,我們將一個摹述去替代專名,若這摹述不曾摹述着什麼東西,我們所得的命題倒是假的了. 這並沒有什麼可怪異的,因為用摹述去代專名所得的結果,依上節所論證的道理,並不是原命題從元之

值.

我們現在可以進而界說含有『這一個某某』的命題了.『這一個某某』惟一與『一個某某』不同的地方就在具有獨一性.我們不能說『這一個「倫敦居民」』(卽謂不能說是專指的),因爲倫敦居民不是獨一無二的.我們也不能說『這一個當今法蘭西王』,因爲當今法蘭西王是沒有的;『這一個當今英王』却可以說.所以敍述『這一個某某』的命題,常含着敍述『一個某某』的命題,並且附帶一個條件,便是『某某只有一個.』『司馬遷是這一個作史記者這個命題,倘若史記不曾著作或作史記者不祇一人,這命題就不眞;沒有這兩條件,任何命題從元以『這一個作史記者』代替其中的x,必不能眞.我們可以說『這一個作史記者』就是『這一個當「x作史記」眞時x之值』.由是『這一個作史記者是漢人』這命題包括三層:

(1)『x作史記』不常常假;

(2)『若x及y作史記,則x與y一致』常常眞;

(3)『若 x 作史記,則 x 是漢人』常常眞.

這三命題可用尋常通用的語言譯之如下:

(1) 最少有一人作史記;

(2) 最多祇有一人作史記;

(3) 任何作史記的人是漢人.

這三層全爲『這一個作史記者是漢人』一命題所包含. 反之,三層合起來(祇兩層無論如何不夠)也包含了『這一個作史記者是漢人』. 所以將三層合起來可用爲命題『這一個作史記者是漢人』之界說.

以上三命題還可以稍化簡單一點. 一二兩命題拼合起來等價於:『有一項 c, 當 x 是 c 則「x 作史記」眞,當 x 不是 c 則「x 作史記」假』. 換言之:『有一項 c,「x 作史記」常常等價於「x 是 c」』. (兩命題同眞同假者稱爲等價.) 這裏第一步,是有兩個 x 的命題從元,『x 作史記』及『x 是 c』;第二步,就兩命題從元之等價(無論 x 爲何値,兩從元等價)做成一個 c 之命題從元;最後說此 c 之命題從元

『有時』眞,卽最少c有一值能使此從元眞.(至於c之值能使此命題從元眞的不能多於一,那是顯而易見的.)這兩條件併合所得的結果恰好供給『這一個作史記者存在』之界說.

這祇是特殊的例,現在我們進而論一般的形式,定『這一個能合從元ϕx之項存在』之意義.『這一個作史記者』就是『這一個能合從元「x作史記」之項』.推而廣之,凡『這一個某某』這類的語常暗涉着一個命題從元,某事物得爲一個某某,必有一定之性質,此性質卽由該命題從元定之.所求得界說如下:——

『這一個能合從元ϕx之項存在』

意思就是:

『有一項c,ϕx常常等價於「x是c」』.

要界說『這一個作史記者是漢人』,祇消將前述第三命題『作史記的人是漢人』加進去就行.換言之,認定我們所說的c是漢人就是夠了.故『這一個作史記者是漢人』意思就是:

『有一項 c,(1)「x 作史記」常常等價於「x 是 c」,
(2) c 是漢人』.

就一般言之:

『這一個能合 ϕx 的項能合 ψx』

意思就是:

『有一項 c,(1) ϕx 常常等價於「x 是 c」,(2) ψc 眞』

這就是含有專指摹述的命題之界說.

關於所摹述的事項可以得許多知識,不必定要先知道所摹述的是什麼;換言之,『x 是這一個某某』(x 代表專名)這樣的命題我們雖一個也不知道,但是關於『這一個某某』之別樣的命題我們却可以知道許多. 偵探小說中,起初薈萃許多關於『這一個幹這勾當的人』之許多材料(命題),希望最後能斷定『這一個幹這勾當的人是某甲.』我們簡直可進一步講,凡能以文字——如這個(this),那個(that),以及幾個別的字,其意義因場合而變者不在內——表示之知識中,嚴格講來,並沒有眞正的專名在裏面,所有貌似專名的項都

實在是些摹述. 譬如問『究竟老子存在不存在?』這問題祇要老子是專指摹述,問的就有意思.若老子是專名,問的就沒有意思了.『這一個某某存在』這樣的命題,不論是眞是假,常常是有意思的,但若a是這一個某某(此a爲一專名),說『a存在』那就沒有意思了. 存在云云用於摹述——專指或泛指——纔表意,用於專名就不表意;因爲a旣是專名,必然有所名的事物:若無所名之事物自然不是專名,若把他當專名用他便是沒有意義的記號,至於摹述就不然,縱然不曾摹述着東西,也未嘗不可表意,如『這一個當今法蘭西王』僅僅表意,却沒有這麼一個人. 所以然的道理就因摹述是複合記號(Complex symbol),其意義是由其中各個分記號湊成的. 當我們問『老子是否存在?』時,若『老子』當簡寫的摹述用,是表意的:將『這一個作道德經者』去替代『老子』就明白了.其他形似專名而實非專名的別種用法都可照這樣論.

一摹述見於一命題之中,必須分別『初見』(Primary occurence) 與『次見』(Secondary occurence),抽象的異點如下. 一摹述所居之命題若是由用該摹述替代一命題從元 ϕx 之 x 得來的,那摹述的地位算是『初見』,若用該摹述替代 ϕx 之 x 所得的命題僅是原命題之一部分,那摹述的地位就算是『次見』. 舉一個例就明白了. 就『這一個當今法蘭西王是賢者』而論,『這一個當今法蘭西王』的地位是『初見』,並且這命題是假的. 凡一命題中之摹述不曾摹述着東西且在該命題之地位是『初見』者,則該命題爲假. 但是就『這一個當今法蘭西王不是賢者』而論,解釋就活動了. 若先取命題從元『x 是賢者』,用『這一個當今法蘭西王』替代 x,然後將這結果加以否定,結果所得的命題是眞的,而『這一個當今法蘭西王』所處的地位是『再見』;但若先取命題從元『x 不是賢者』,以『這一個當今法蘭西王』去替代『x』,則『這一個當今法蘭西王』所處的地位是『初見』,所得的命題是假的.

與摹述有關之推理,將『初見』與『次見』相混也是誤謬容易發生的一個根源,不可不注意.

摹述之見於算學者僅摹述的從元(Descriptive function)一種形式,即『這一個對於y有R關係的項』或『這一個「y之R」』,凡與『這一個「y之父」』相似的仂語都是. 說『這一個「y之父」是富人』就是說:c之命題從元『c是富人,且「x生y」常常等價於「x是c」』有時眞,即最少對c之一値是眞. 至於這命題不能對c之許多値是眞,那是顯而易見的.

(此『生』字與『太王生王季』『王季生昌』之『生』同一意義,不許作『母生子』之『生』字解.)

摹述之理論對於邏輯及知識論兩者都有絕大的重要,本章僅僅提綱舉要地講了些大概. 本書以闡明算學爲目的,故大部分哲學的理論與此無關的概行略而不論;僅摘論與算學相關切之理論如上.

(原註 1) Untersuchungen zur Gegenstandstheorie und Psychologie, 1904

第十七章
類

本章論『這』字的多數;『這些個「倫敦的居民」』,『這些個「富人的兒子」』,等等的話. 換句話說,我們將研究類. 我們在第二章看出基數須界說做類的類,又在第三章看出『1』須界說做一切獨項類的類即一切只有一項的類所組之類;後一說法有循環的語病,我們不用他. 『1』旣界說做一切獨項類的類,獨項類的界說裏當然不得假定我們已知『一』字之意義;他獨項類)的界說法實和摹述上所用的界說法差不多:一類 α 謂之獨項類,若命題從元『「x 是一個 α 」常等價於「x 是 c 」』(這命題從元當做 c 的從元看待)不常假,換句平常的話說,就是,若有一項 c, x 是 c 則 x 是 α 之一項, x 不是 c 則 x 不是 α 之一項,有此情形, α 謂之獨項類. 假如我們已經知道類的一般意義,這就可以算是獨項類的界說了.

前此論算術時我們將『類』看做一個基本的觀

念. 但是不講旁的理由,只看第十三章所舉,我們便不能承認『類』爲基本觀念. 我們須照摹述的界說同一方針求一個類之界說,所得之界說須將一切命題其文字或記號中夾有似係代表類之文字或記號者賦與以一種意義,使該種命題經過一番正當之分析,便完全消滅一切『類』之字樣. 於是我們便可以說類之記號不過是些便利品,並不代表什麼東西名叫做『類』,並且類,其實和摹述差不多,都是邏輯的構象,或(照我們講)『不完全的記號』.

類之理論沒有摹述之理論那麼完全,並且本章所提出的類之界說我們因爲有種種的理由(其大概見後)須認爲沒到最後的滿足. 該界說欠精細之處似乎不免;然而他是近於正確並且他的方針也不曾錯誤,其中的理由却甚爲充足,我們又不能不相信他.

我們第一須知道類何以不能看做是世界上『終極的物件』(Ultimate furniture)之一部. 這句話

很難精密的解釋,但是看這句話所含的一個結論,意義也可因而明白. 假使我們有一組完備的文字記號,可界說的東西都有界說,不可界說的東西都有無界說的記號做代表,那麽,這無界說的記號所代表的便是我所謂『世界上終極的物件』. 我以爲無論代表一般的類之記號或代表特殊的類之記號皆不得在這無界說的記號之中. 就又一方面論,世界上一切特殊的東西(個體)皆須各有各的專名,這些專名必屬於這無界說的記號以內. 這種斷案,我們可使用着摹述去試試看能免不能免. 試以『凱撒(Cæsar)未死時最後所見之物』爲例. 這是一個個體的摹述,我們可以用他做(照一種十分合理的意義)那個個體的界說. 但是該個體的名字如其是『a』,那末,(照前章所見)含『a』的命題與那以『凱撒未死時最後所見之物』代a所得之又一命題不是完全一致的. 若我們的文字記號裏沒有『a』這專名或是別的用爲該個體之名的專名,那麽,

我們便沒有方法表示我們用『a』表示的命題以與那個用摹述表示的命題相對了. 所以摹述不足使一組完備的文字記號能以廢除個體的專名. 就這一層論,我們以爲類是與個體不同,不需拿無界說的記號做他的代表. 我們第一樁事是說出這種見解的理由.

我們已經知道類不能看做是一種個體,一層因爲拿類當個體就會生出『自己不是自己之分子』的類却又是『自己是自己之分子』的類那種矛盾來(解釋見十三章);二層因爲我們能夠證明類之數大於個體之數,部分多於全體是沒有的道理.

我們不能用那純粹的外範的方法看待類,只拿他當做堆積或聚集起來的東西. 假如我們想這麼辦,我們便不能明白怎麼會有空類那種的類,空類沒有項,不能看做是堆積起來的東西;並且我們還很難明白只有一項的類怎麼會與那一項不是一件東西. 我並無意於斷定或是

否定『堆積』這種東西的存在. 我是算理的邏輯家,對於這點並沒有發表意見的必要. 我所主張的只是:假定有『堆積』這種的東西,由『堆積』的成分組成之類我們不能說他與『堆積』是一件東西.

我們若將類與命題從元視為一致,我們的理論雖尚未臻滿足却也就很近於滿足的地步了.

第二章曾經解釋過,每一類皆是一個命題從元所定,該命題從元對該類之各項為眞,對別的事物為假. 但是一類可由一個命題從元來定,也一樣的可由任何別的命題從元來定,只要這別的命題從元與那一個命題從元是眞則同眞假則同假. 因為這層理由,我們不能說這類與這命題從元一致而不與任何別的等價的從元一致——並且每設一個命題從元必常有許多別的從元與他同眞同假. 有這種情形的時候,我們說兩命題從元是形式地等價(Formally equivalent). 兩個命題同眞或同假時謂之『等價』;兩

命題從元 ϕx 與 ψx 常常等價時謂之『形式地等價』. 任設一命題從元,此外常有別的命題從元與他形式地等價,(譯者註1)類之不能與一命題從元視爲同物,就由於這層事實;因爲我們總想兩個不同的類其分子必不全然相同,類既是這樣的東西,那麼,兩個形式地等價的命題從元所定的類便不得不同是一個了.

我們既然決定類既不是與他們的分子爲同一種的東西,又不僅僅是些『堆積』或『聚集』,也不能夠與命題從元完全一致,那麼,他們如不僅僅乎是些記號的搆象,他們能是什麼,便難知道了.

並且我們如果有方法將他們做記號的搆象看待,我們的地位便增加了邏輯的保障,因爲那麼一來,我們便免得『假定類之存在同時不可逼着去假定類之不存在』的必要. 我們不過避開同時做兩種假定. 這是俄考姆的快刀(Occam's razor)的一個例,俄考姆的快刀說,『實體非過必要時不得增加之』. 然而我們不肯斷言類之存

在,却決不是武斷類之不存在,這也是必需聲明的. 我們對於『類』自安於不知罷了:同拉普拉司Laplace一樣,我們可以說,『我沒有要這假設的必要』"Je n'ai pas besoin de cette hypothèse".

一個記號要想拿他當做類,非合幾種條件不可,現在來舉這幾種條件. 我以爲以下所舉的條件算是必需的而且充分的了:——

(1)每一命題從元必須定一個類,該類之分子就是這命題從元對之爲眞之一切主元. 設有一命題(或眞或假),例如說蘇格拉底的命題,我們可以懸想蘇格拉底用柏拉圖,或用亞里士多德,或用猩猩,或用月球中的人,或用宇宙間任何別的個體,去代替. 就一般言之,這些代替有的生出眞命題有的生出假命題. 所定之類就是由所有那些生出眞命題的代替者組織而成. 所謂『所有那些…………』是什麼意義,當然我們還要另外決定. 現在所講的不過是:一類可以用一命題從元定之,並且每一命題從元祇定一

相當之類.

(2)兩個形式地等價的命題從元所定的類必是同一個,(譯者註 2.)兩個非形式地等價的命題從元所定的類必非同一個. 這就是說,一類定於他的分子,兩個不同的類的分子,不能完全相同. (設一類爲一從元 ϕx 所定,若 ϕa 爲眞,我們說 a 爲該類之分子).

(3)我們不但要有方法界說類,還得有方法界說類的類. 我們在第二章看出基數須界說做類的類. 尋常初等算學上的例語如『n 個物體每次取 m 個的一切組合』就代表一個類的類,就是,從一個含 n 項的類所能取出的 m 項類之全體所組之類. 假如沒有記號的方法去處置類的類,算理邏輯便要解體了.

(4)無論在如何情形之下說一類是他自己的分子或不是他自己的分子都是無意義的(『無意義』與『假』不同)話. 這是由第十三章我們所論的一個矛盾點推出的結果.

(5)最後一條——這是頂難合的條件——關於一切由個體組成的類,或關於一切由同一任何邏輯範疇的東西所組成的類必須也能做出命題. 若這種命題爲不可能,類的用處便有許多要成迷夢了——算學歸納法便是一例. 替一定項的後裔定界說的時候我們必須能說該後裔中之項屬於原項所屬之一切遺傳類,這就非有上面所講的那種歸總的說法不可了. 這條件所以難合的理由是因爲能有某範疇的主元的命題從元我們不能說關於他們全體的話,(即不能說:一切「主元屬於某範疇」的命題從元如何如何)並且這種不可能是我們所能證明.

這最後一條以及他所引起的問題我們先置諸不論之列. 第一第二兩條可以合併. 兩條合起來說每有一組形式地等價的命題從元必有一個相當的類,也不多也不少;例如人類必與無羽毛的二足動物類,或理性動物類或 Yahoos 的類或是有別種人性的類完全相同. 我們說

『兩個形式地等價的命題從元雖然同定一類却不必完全一致』,這句話的眞實是可以證明的,只看同一敍述在這從元爲眞的在他從元可以爲假便可知道;例如『我相信一切人是有死的』這句敍述可以眞,『我相信一切理性動物是有死的』這句話却可以假,因爲我也許誤信着鳳凰是個不死的理性動物. 所以我們由此要論關於從元之敍述(Statements about functions)或(更確當一點地說)從元之從元(Functions of functions)

關於一從元的敍述有些可以看做是敍述着該從元所定之類,有些不能 『凡人有死』這句敍述包含『x是人』及『x有死』兩從元;如我們有意,也可說這句敍述包含『人』及『有死者』兩類. 這句敍述隨便用前一種解釋也可用後一種解釋也可,因爲『x是人』或『x有死』任以一形式地等價的從元來代替,這句敍述的眞僞價是不變的. 但是如剛纔所說,我『相信凡人有死』這句敍述却不能看做是關於『x是人』或『x有死』兩命題

從元所定之類的敍述,因爲這句敍述所含的『x是人』或『x有死』若拿別的形式地等價的從元來代替,這句敍述的眞僞價也許改變.(代替以後,類還是不變.) 含有命題從元 ϕx 的敍述若果是同『凡人有死』一樣的,我們叫他做從元 ϕx 的『外範從元』.換句話說,敍述裏的從元 ϕx 用形式地等價的從元代替而敍述之眞僞價不變時,該敍述謂之 ϕx 的『外範從元』(Extensional function);如果一個從元的從元不是外範的,我們便叫他做『屬性從元』(Intensional function),所以『我相信凡人有死』是『x是人』或『x有死』的屬性從元. 所以一從元 ϕx 的諸外範從元實際可以看做是 ϕx 所定之類的從元, ϕx 的屬性從元却不能這樣看待.

這裏有一層必得注意,便是在算理邏輯上我們所有機會引入的一切比較的(Specific)從元之從元都是外範的. 舉例來說,算理邏輯裏兩個根本的從元之從元乃是:『ϕx 常眞』及『ϕx 有時

眞』. 兩從元裏的 ϕx 若任用一形式地等價的從元代替,兩從元之眞僞價並不改變. 在類的說法裏,若 α 是 ϕx 所定之類,『ϕx 常眞就等價於『凡物是 α 之分子』,『ϕx 有時眞』就等價於『α 有分子』或(說得更好一點)『α 至少有一個分子』. 再拿前章所論『這一個合於 ϕx 之項』之存在的條件來論. 該條件是有一項 c 而 ϕx 常等價於『x 是 c』. 這明明也是外範的. 這條件就等於說: ϕx 所定之類是一個獨項類,即含有一項的類; 換言之,該類是 1 之一項. (1 是獨項類的類所以獨項類是 1 之一項.)

設有一從元之從元,他也許是外範的也許不是外範的,但是我們總能由他推出一個與他相關聯並且眞是同一從元的外範從元來,其法如下:命原有『從元之從元』陳述 ϕx 具有性質 f; 試看『有一從元具有性質 f 且與 ϕx 爲形式地等價』這句話. 這是 ϕx 的一個外範從元;原來的敍述眞則這外範的從元也眞,并且倘若原來的從元之

從元是外範的,這新得的從元之從元定然與 ϕx 原來的從元形式地等價;即或原來的從元是屬性的,這新得的從元之從元比之舊有的眞的時候還要多些. 譬如再看『我相信凡人有死』這句話,做爲他是『x是人』的一個從元. 推出的外範從元是:『有一個與「x是人」爲形式地等價的從元並凡我相信凡合於這從元的都有死.』這從元若用『x是理性動物』代『x是人』其眞不變,縱然我誤信着鳳凰是有理性且長生也不妨.

像上面這樣構成的從元我們給他個名字叫做**推出外範從元**(Derived extensional function),其一般的形式是:『有一從元具含性質 f 且與 ϕx 爲形式地等價』,其對應的原『從元的從元』是『從元 ϕx 有性質 f』.

這『ϕx 之推出外範從元』我們可作爲是以 ϕx 所定之類爲主元,並可以看做是陳述該類有性質 f. 這可以作爲『關於一類之命題』的界說. 換言之,我們可以界說如下:

所謂『ϕx所定之類有性質f』云者ϕx合於由f推出之外範從元之謂也.

凡關於一類的陳述,能對於一從元爲有意義的,得此界說遂有了意義;並且由此而生的結果也就是『學術上所需以使理論能彀有符號的滿足』的結果. (原註1)

以上關於類之界說的理論已能充分地滿足我們的前四條件了. 至於他(界說)能合第三第四兩條的所以然,換句話說,類的類之所以可能,並且類看做是自己的分子之所以不可能,說起來很涉於專門; Principia Mathematica裏有解釋,這裏可以不論. 由是除第五條件以外我們的努力可算已經完全了. 但第五條件——既是最要又是最難——絕不是拿我們已論的話可以滿足的. 其困難所在與範疇的理論有關,必須略加討論. (原註2)

我們在第十三章論到邏輯的範疇有一個階級,若將屬於這一疇的事物拿屬於別一疇的事

物來代替,結果便是誤謬. 且以一定事物a爲主元的各種從元不全屬於同一範疇,這也是不難證明的. 這些從元我們叫做『a主從元』(a — functions). 先將其中不關涉任何『從元之團體』(Collection of functions)的取出,我們叫他做『賓辭的a主從元』(Predicative a-functions).如果我們現在進一步到關涉於『若干賓辭的a主從元之全體』(the totality of predicative a-functions)的從元,把這種從元與賓辭的a主從元看做同一範疇,結果便是誤謬. 試拿一句平常的話如『A是一個模範的法國人』來論. 『一個模範的法國人』我們怎樣界說?我們可以界說他做『具有大多數法國人所具的一切性質』的人.但是我們如果不把『一切性質』限於那些不關涉於『若干性質之全體』(Totality of qualities)的性質,結果我們便非得要說大多數法國人按照上面的意義不是模範的法國人,那麽,由界說『不是模範的法國人』就是模範的法國人的不可少的性質了. 這種

矛盾並不是邏輯的矛盾.因爲法國人何以應當有所謂模範的,並無理由可言;但就此可以曉得關涉於『若干性質之全體』的性質與不關涉於『若干性質之全體』的性質有分別之必要.

無論何時,某變項所能取的值即(能使含該項之從元有意義之一切值)我們就其『一切』或就其『一些』值立論,我們便造了一個新的東西,這個新的東西必定不得屬於該變項所能取之值,因爲如果屬於那些值,那麼,該變項所能取之值之團體(含一切值或一些值)只能拿自己界說自己,我們便陷於循環的誤謬了.舉例來講,我說『拿破崙具有一切所以成其爲大將的性質,』我的『性質』的界說裏決不可將我現在說的也包括在內做性質之一,換句話說,『具有一切所以成其爲大將的性質』我們不得以同一意義作爲他也是一個性質.這是顯而易見的道理,有了這原理,纔生出範疇的理論來,以免掉似是而非的循環語病.就 a 主從元而論,我們可以說『性

質』就是『賓辭的從元』. 那麼,我說『拿破崙有一切某某性質』的時候,我的意思是『拿破崙合於一切某某賓辭從元』. 這句敘述給了拿破崙一個性質却不是給他一個賓辭的性質;這樣一來,循環的弊病便能免掉. 無論何時見了『一切某某從元』這種的話,要想免掉循環的語病,總非將話裏的從元限於某一範疇不可;並且拿破崙和模範的法國人這兩例已經表明了,這個範疇並不是靠主元的範疇去定的. 這一點要想詳細闡明非更加詳論不可,但所已論的已足表明能有某主元之從元不僅屬於一個範疇而屬於無窮級的範疇. 我們可用種種專門的計畫構成一個變項叫他通過這些範疇的前 n 級,其 n 爲有窮數,但我們總不能構成一個變項通過這些範疇的全部;假如說能,就立時生出一個新範疇來了,這新範疇的從元之主元仍舊不變,那麼一來,我們又非從頭去構造變項不可了.

賓辭的 a 主從元我們叫做『第一疇的 a 主從

元』(the first type of a-functions);關涉於若干『第一疇的a主從元』之全部的a主從元我們叫做『第二疇的a主從元』(the second type of a-functions);依此類推．凡可變的a主從元沒有能通過這些疇的全體的:到了某一定點就必停止．

以上這些議論與我們的推出外範從元之界說有關．我們界說推出外範從元時說『一個從元與ϕx是形式地等價』．這從元的範疇必須決定．不管怎樣的決定都行,總之非有所決定不可．所懸想形式地等價的從元,我們命他做ψ．那麽ψ顯然是個變項,一定屬於一個有定的範疇．關於ϕ之範疇我們所必然知道的不過是ϕ之主元屬於某一範疇——譬如說,他是個a主從元．但這一層照我們剛纔所論並不能定ϕ所屬之範疇．如果(照第五條件)我們對於一切『與a同範疇之項組成之類』必須能彀論述(能彀做出命題),那麽,我們非得能彀用屬於某一範疇的從元去定這種的類的全體不可;換

句話說，a 主從元必須有一疇，譬如說第 n 疇，任何 a 主從元對於第 n 疇的 a 主從元皆爲形式地等價　（譯者註 3.）　如其如此，任何外範從元，能合第 n 疇之一切 a 主從元的，一定合於任何 a 主從元. 類之所以有用就因他可做一種專門的憑藉，立出一種假定，由這假定就得上述的結果　這假定叫做**可變公理**"Axiom of reducibility，"可述之如下：

α 主從元，有這麼樣的一疇（譬如說 τ），任取一 α 主從元必與該疇中某一 α 主從元爲形式地等價.

假定了這公理我們便可用着這一疇的從元來定關聯的外範從元的界說——按照以前的說法，設 ϕx 爲一 a 主從元，則『ϕx 所定之類有性質 f』云者卽謂『有一 a 主從元 ψ 形式地等價於 ϕx 且有性質 f』，現在我們可以說：…云者卽謂『有一屬於 τ 疇的 a 主從元 ψ 形式地等價於 ϕ 且有性質 f.』由是關於一切『a-類』(a-class)

(卽a主從元所定之一切類)之敍述總可變爲關於一切『τ疇的a主從元』之敍述. 只要所關涉者是從元之外範的從元,由此便可得實際的結果,此種結果如用別的方法去求,是非用那不可能的觀念『一切a主從元』不可的. 這種方法的重要有一個特殊的所在,便是算學歸納.

可變公理包含了類之理論眞正之要義. 所以我們須得考察這公理有沒有可以視之爲眞的理由.

這公理同相乘公理一樣,在幾種結果爲必要,却但論演繹的推理之存在,這公理並不必要. 演繹理論,如第十四章所解釋的,以及含『一切』同『一些』字樣的命題之法則,皆屬於算學推理本身的構造:沒有他們,或沒有他們一類的東西,我們便不但不能得同一的結果;簡直什麼結果都不能得. 我們不能拿他們做是假設而用他們去求假言的斷案,因爲他們不但是前提並且還是演繹的法則. 他們必須是絕對地眞,否則我

們依着他們而演繹的,便不能由前提而自然地推得了. 至於可變公理却同以前的兩個算學公理(相乘公理及無窮公理)一樣用着他的時候很可拿他當做假設,不必假定他是實在地眞.由他推出來的結論也可看做是假言斷定. 照假言斷定的方法,我們能假定他眞以推出結論,也能假定他假以求反對方面的結論. 所以這公理不過是便利的,並不是必要的. 我們看着範疇理論很是複雜而且除他的幾個最普遍的原理以外一概沒有定論,所以現在還不能說有沒有方法可以盡廢這可變公理. 但是假定上面的概論爲正確,我們便要問,關於這公理的眞僞有何可言呢?

我們可以說,這公理是來本之(Leibniz)『不可辨別性之一致』的 Identity of indiscernibles 一個的普遍形式. 本來之假定兩個不同的主詞其賓詞必然不同,拿這假定做一個邏輯的原理. 但是賓辭不過是我們叫做『賓辭的從元』的一

部分,賓辭從元裏另外含着對於某某定項的關係以及種種不能做爲賓辭的性質. 由此看來,來本之的假定較之我們的假定要嚴格狹隘多了. (按照他的邏輯,當然並不嚴格狹隘,他的邏輯以爲一切命題都可變爲主賓辭的形式(Subject predicate form.) 但就我所見而論,他的形式我們沒有好的理由可以相信,若照我們所用『賓辭』這字的狹義來講. 兩個不同事物其賓辭照我們所用的狹義全然相同,很是抽象的邏輯上一樁大爲可能的事,我們如果出了這狹義的賓辭範圍以外,可變公理便怎樣呢?在實在的世界裏可變公理對於個體的眞實是沒有法子可懷疑的,因爲不同的個體之時間空間是有分別相的:沒有兩個體對於其他一切個體的時間空間的關係是完全相同的. 但這好像不過是偶然的事實,這不過是關於我們所偶然生於其中的世界的事實. 純正邏輯和純正數學(兩者是二而一的),照來本之的說法,以在一切可能世界中

能以眞實爲目的,不但要在這機會困人雜亂不常的世界爲眞. 有一種尊嚴的態度邏輯家應當保持:邏輯家不可自失身分去由他四圍所見的事物推求論證.

從這種嚴格的邏輯論點着想,我看不出有什麽理由可以相信可變公理是邏輯地必要,所謂『是邏輯的必要』就猶如說『在一切可能的世界爲眞』是一樣的意思. 所以一個邏輯的系統裏收進這公理實是一層遺憾,雖然這公理是經驗地眞實. 因爲這層理由所以類之理論不能視爲與摹述之理論同一完善. 範疇的理論上還須再加研究方可希望達到一種,不需要這種曖昧的假定的,類之學說. 但本章的概論我們說他大體不錯也不爲過,所謂大體的,就是名義上關於類的命題變爲關於類之所由以定之命題從元之命題. 用這種方法免得拿類當做一種實在的東西,好像原理上並無不穩的地方,雖然詳細處還得加以修整. 因爲這層似乎無可疑

慮,所以我們的本願雖然是將足以引起嚴重的懷疑的東西竭力排斥不容加入,而本書仍收納類之理論.

類之理論,如上面所論的大概,總起來不過一個公理和一個界說. 爲確定起見重述如下.

公理是:

有這麼樣的一個範疇τ,若ϕ是個能以α爲主元的從元,則必有一從元ψ屬於疇範τ而與ϕ爲形式地等價.

界說是:

若ϕ是個能以α爲主元的從元,τ是上條公理所說的範疇,那麼,說『ϕ所定之類有性質f』就等於說『有一個從元屬於範疇τ,形式地等價於ϕ,且有性質f』.

(譯者註1.) 設ϕx爲任一命題從元,則『ϕx且ϕx』及『ϕx或ϕx』一類的從元都與ϕx常常等價.

(譯若註2.) 第二三章往往說:『ι是空類之類此類之

惟一分子就是空類.』這明明說世上的空類祇有一個,似乎與我們平常的觀念不合。我們平常用『空無所有的』地方很多,似乎空類有很多。其實這是夾了有堆積集合的觀念,倘若認爲類是由一組常常等價的命題從元定的,那末,一切『常常假』的命題從元當然全體常常等價,他們共同定下的類,就是空類,其『非常常假』的命題從元所定的類是有分子的,當然不是空類。由是可見世界上的空類是獨一無二的了。(以上係就同一邏輯的範疇而論。)

(譯者註3.) 既然要說一切與a同疇之項組成之類如何如何必需說一切定此等類的a主從元如何如何,但這些a主從元不是同範疇的,那末,後話就無意義了。所以必須挑選些同疇的a主從元哪。

(原註1.) 參考 Principia Mathematica, vol. 1. pp. 75—84 及 * 20.

(原註2.) 閱者於此如欲求完全的討論可參考 Principia Mathematica, Introduction, Chap. ii.; 及 * 12.

第十八章
算學與邏輯

算學與邏輯,就歷史說,向來是兩門全不相同的學問. 算學與科學有關,邏輯與希臘文有關. 但兩門學問到近世都發達了:邏輯變得近於算學,算學變得近於邏輯. 結果要想在兩者之間畫出界綫遂全然不可能;實在講,兩門學問只是一門. 他們不同的地方猶如小孩之與成人:邏輯是算學的幼年,算學是邏輯的成年 這種見解是有些邏輯家所深惡痛絕的,他們花費光陰鑽研古籍不能從事一片符號的推理;並且也是有些算學家所深惡痛絕的,他們學了一門專門學從來不曾費心去追究這專門學的意義或合理與否. 這兩種人所幸現在都日見其少了.

近世算學的研究多明明是在邏輯的邊界上,近世的邏輯也多是記號的且形式的,所以邏輯與算學的密切關係凡受過教育的學者都看得顯而易見. 證明兩者之一致當然要一番細密

工夫:從人人所承認屬於邏輯的前提入手,用演繹的方法,推得明明屬於算學範圍的結果,我們纔知道沒有這麼一點通過他能彀畫一根清楚的綫,將邏輯與算學分開,一個在左,一個在右.倘若還有人不承認邏輯與算學的一致,請他在 Principia Mathematica 裏順着那些界說和演繹去看,試問那一點是邏輯的終點且是算學的起點.然後他自然見得任何答案都是十分武斷毫無理由.

在本書前幾章,從自然數入手,我們先界說『基數』,並且論數之觀念怎樣推廣,然後分析該界說中所含的觀念,直到後來我們纔論邏輯的基本事項.若在綜合的演繹的論述裏,這些基本事項還得首先研究,經過長途的研究纔得到自然數.那種論述法雖然比之我們所採用的形式上更爲正當,却使讀者更難了解,因爲終極的邏輯概念及命題比起自然數來我們和他要疎遠些不熟悉些.並且他們所代表的乃是現在

知識的邊境,過此便是未知的境界;人類知識對於他們的統治權現今也還不曾穩固.

尋常總說算學是一門數量(Quantity)的科學.數量是個意思含混的字,爲論證便利起見我們可以拿『數』來代替.『算學是數的科學』,這句話有兩層不對.一層因爲算學中有幾門(人所共認是屬於算學範圍的)與數毫不相干——例如一切不用坐標及測量的幾何學便是:投影幾何及圖法幾何,在加入坐標以前,與數毫不相干,就是與有『大』『小』的意義的數量也不相干.二層因爲從基數的界說,從歸納法與先宗關係的理論,從纚之一般的理論,並且從算術演算的界說,向來證明只與數有關的東西多半可加以推廣.結果於是從前做算術上單獨研究的,現在分爲多個各別的研究,沒有一個特別與數有關.最初步的數之性質是研究一對一的關係及類之相似.加法所論是構成不互相搭雜之類,此不相搭雜之類各與一組不知其是否不相搭雜之

類相似．乘法歸入『選班』之理論,『選班』乃是一對多的關係之一種．『有窮』歸入先宗關係之一般的研究,全部算術歸納法之理論就由這種研究而生．各種數纚的順序性,以及從元之連續與從元之極限的理論的要旨,都可加以推廣,使之不必對於數有不可少之關涉．極力地推廣是一切形式推理一個原則,因爲我們由此纔能斷定某一演繹的過程必有較廣地應用的結果;所以我們這樣將算術的推理加以推廣不過是按照規例行事,這規例在算學上是無人不承認的．

並且這樣推廣着我們實在創造了一組新的演繹系統,在這些系統裏尋常算術都融解了放大了;至於這些系統任舉一個——好比選班之理論——必定說他屬於邏輯還是屬於算術,那是十分隨便不能有合理的決斷的．

由是我們生出一個問題:這是一門什麼學問,他叫做算學或叫做邏輯都不關緊要?有沒有方法定他的界說?

這門學問有幾種特性不難看出. 第一,我們在這學問裏,不研究特殊的事物或特殊的性質:我們從形式上研究關於任何事物或任何性質的東西. 我們可說一加一是二,却不說蘇格拉底加柏拉圖是二,因爲在邏輯家或純粹算學家的地位上我們從來不聞蘇格拉底和柏拉圖之名. 沒有這麼兩個個體的世界仍不失爲其中一加一爲二之世界. 做純粹算學家或邏輯家的人什麼個體都不可提,因爲如果提了,我們便加入了無關緊要而且非形式的東西. 我們要闡明這層道理,可把他應用到三段論法去說. 尋常邏輯說:『凡人有死,蘇格拉底是人,故蘇格拉底有死』. 這裏我們所要斷定的只是前提包含斷案,並非前提與斷案都實在是眞實;就是最陳舊的邏輯都聲明前提實在的眞實在邏輯上不關緊要. 所以上面所舉的舊三段論法中第一要更改的是把他述爲以下的形式:『若凡人有死且蘇格拉底是人則蘇格拉底有死』. 改了

以後我們便可說這句話所要表的意思是說這推理之有效全靠他的形式不靠他裏面的特定名詞. 若我們前提中略去了『蘇格拉底是人』我們便得了一個非形式的推理,只有蘇格拉底實在是個人的時候纔能承認他不錯;像這樣推理的形式便不能推廣了. 但是形式的推理如上面所舉的却絕不倚賴其中的名詞. 我們可拿α代『人』,β代『有死的』,x代蘇格拉底,α同β是任何類,x是任何個體. 於是我們得了這句敍述:『無論α,β,與x能有甚麼值,只要凡α是β且x是α則x是β』;換句話說,『命題從元「若凡α是β且x是α則x是β」常眞』. 這纔是一個眞正邏輯的命題——舊式三段論法關於『蘇格拉底』,『人』,及『有死者』的不過暗中點示這種形式的推理罷了.

如果我們的目的在形式的推理,那麼,顯然我們最後總會得着上面這種的敍述,其中絕不提到任何實在的事物或性質;只要我們想不白費

工夫在一個特例上去證可以一般地證明的東西,總可有此結果.若在蘇格拉底身上作了很長的推理,然後又在柏拉圖身上去作同一樣的推理,那眞是可笑了.若果我們的推理是合於凡人的,我們就可在x上證明這推理,先設『x是一個人』.有了這假設我們的推理總可保持他的假言的效力,縱然x非人也不妨.到了這地步我們又要見得我們的推理就是不先設x是個人而先設他是個猴子,是個鵝,或是個內閣總理,仍不失其效力.所以我們不必耗費工夫拿『x是個人』做我們的前提,簡直以『x是個α』做前提,其中的α是個任何個體的類,或以ϕx爲前提,其中的ϕ是個任何命題從元屬於某一指定的範疇.所以邏輯或純粹算學上絕不提特定的事物或特定的性質,是因這種學問,照我們說是形式的,必然有此結果.

說到這裏,我們生出一個問題,此問題容易提出却難以解決.問題是『邏輯的命題有些甚麼

成分?』我不知道答案,但這問題如何而起我却要解釋解釋.

試拿『蘇格拉底是早於亞里士多德』這句話來論. 這裏明明是一個兩項間的關係,這命題的成分(相當的事實之成分亦復如此)就是兩個項和一個關係——『蘇格拉底』,『亞里士多德』以及『早於』. (蘇格拉底及亞里士多德不是單純的,這一層我並不管;外表他們是名字實在却是斷片的摹述,這一層我也不管. 這兩層與本論無關) 我們可以把這種命題用『x R y』表示他的普遍的形式,『x R y』可讀做『x 對 y 有 R 關係』. 這種普遍的形式可以入邏輯的命題,他的任何實例却不能. 我們可以由此說這普遍的形式本身也是那種邏輯的命題成分之一麽?

設有一命題,譬如『蘇格拉底是早於亞里士多德』,我們便有若干一定的成分並且也有一個一定的形式. 但這形式的本身並不是個新成分;假如是的,我們便須另有一種新的形式包括

這形式以及別的成分. 實在講起來,一個命題的一切成分我們可以都改爲變項,同時命題的形式仍保存不變. 我們使用『xRy』的時候,就是做這樣的事情,『xRy』代表某一類的命題之任一個,這類的命題皆是斷定兩項間的關係.

我們由此可以進到普遍的斷定上去,譬如『xRy』有時眞——這就是說,有些場合發生兩項關係. 這斷定照我們用這字的意義是屬於邏輯(或算學)的. 這斷定裏我們絕不提及特定的事物或特定的關係;沒有特定的事物或關係能彀加入純粹邏輯的命題. 只剩了純粹的形式做邏輯命題唯一可能的成分.

我並無意於肯定地斷言純粹的形式——例如『xRy』——眞正入於我們現在所論的這種命題. 這些命題的分析是個疑難的問題,正反兩面都含着相衝突的理論. 現在我們不能着手這問題,卻可以容納一種見解作爲一種最初近眞的議論,說形式的確也是加入命題做成分

的東西.甚麼叫做命題之形式,現在解釋(雖然並不正式地界說)如下:——

命題之『形式』者命題中各成分以其他成分代替之後而仍不變者也.

例如『蘇格拉底是早於亞里士多德』與『拿破崙是大於惠靈吞』形式相同,雖然兩命題的成分各不相同.

邏輯或算學的命題有一種必要的(雖然不是充分的)特性:他們是一種命題可以由不含變項(即不含『一切』『一些』『一個』『這』這些字樣)的命題用下法得之:將其中成分盡改爲變項,而斷定其常眞或有時眞;或先斷言其一部分對於某些變項常眞或有時眞,而後斷言上語對於其餘變項常眞或有時眞;或加以任何相類之斷語 換句話說,邏輯(或算學)祇研究形式,且其研究形式只就形式之常眞或有時眞着想——『常』與『有時』兩字能怎樣錯列就怎樣錯列.

各種語言皆有若干之字他們的惟一功用只

在表示形式. 這些字大概講起來,都是語言中最普通而且形變最少的. 試拿『蘇格拉底是人』來論. 這句話裏的『是』字不是命題的成分,不過表示主賓辭的形式. 同樣,『蘇格拉底是早於亞里士多德』裏的『是』字和『於』字只表示形式;這命題與『蘇格拉底在亞里士多德之前』相同,在『蘇格拉底在亞里士多德之前』裏沒有『是』『於』兩字,命題的形式是用別的方法表示的; 形式,除用比較字 (Specific words) 表示之外大概總可有別法表示:字之順序可以表示一大半. 但這條原則不可固執. 例如命題的原式(Molecular forms of propositions 就是我們所謂『眞僞從元』)怎樣表示纔便利,要是一個字不用,我們便難以知道. 我們在第十四章看出有一個字(或符號)便可以達這目的,有一個表示『不兩立性』的字(或符號)便行. 但若一個字沒有我們便要發生困難了. 然這一層在本論還不關緊要. 這裏重要的事是注意縱然一個普遍命題裏沒有表示形式的字

或符號,形式仍是該命題的唯一要件. 若我們想說關於形式本身的話,我們一定要有個字來表示他;但如像在算學上我們想說的話是關於一切具有該形式的命題,那麼,表示形式的字通常看起來不為必要;大概就理論上說絕不必要.

假定——我想我們可以假定——命題的形式可由『命題所由以表示之形式』為其代表不必用表示形式的特殊字,我們就會得出一種語言其中凡是形式的東西都屬於句法不屬於字.拿這種語言我們能彀表示一切算學的命題,縱然我們對於這語言一個字不識也不妨. 算理邏輯的語言若達於完善大約就是這種的語言.

我們有表示變項的符號,譬如『x』,『R』,和『y』,照各樣的方法排列;其排列法就表示所說之話對於變項的一切值或一些值為眞. 我們無需識字,因為字之需要不過在定變項的值,那是應用算學家的事不是純粹算學家或邏輯家的事.

邏輯的命題特點之一就在:有一適當的語言,

這種命題就可拿他陳述,我們只要知道他的句法就行無庸識他的字.

然而究竟總還有表示形式的字,如像『是』『於』等等. 古來已經發明的算理邏輯的符號其中總含着一些符號他們的形式的意義是常久不變的. 我們可以拿那構成眞僞從元時所用以表示不兩立式的符號為例. 那種的字或符號是可以入邏輯的. 我們需得怎樣界說他們呢?

這種的字或符號所表示的東西叫做『邏輯常項』(Logical constants). 邏輯常項可以照界說『形式』的方法一樣地去界說;實在講起來,兩者是二而一的. 一個根本的邏輯常項就是若干命題所公共的東西,於這些命題中任取其一以他一命題之項代此命題之項即得他一命題. 例如『拿破崙是大於惠靈吞』就由『蘇格拉底是早於亞里士多德』用『拿破崙』代『蘇格拉底』,『惠靈吞』代『亞里士多德』,『大』代『早』而得. 有些命題能照這樣以『蘇格拉底是早於亞里士多德』為範本

而得,也有些不能;那些能的都屬於『xRy』這形式,都是表的兩項關係. 我們不能用一項對一項的代替法由上面這範本得出『蘇格拉底是人』或『雅典人給毒草與蘇格拉底』一類的命題,因爲前者屬於主賓辭的形式,後者表示一個三項間的關係. 倘若我們純粹邏輯的語言裏必定要有些字,他們必是表示『邏輯常項』的字,『邏輯常項』不外是一組命題——一組可用一項代替一項互相推求的命題——的公共的東西,或是由這樣一組命題的公共的東西,推出來的東西. 這公共的東西就是我們所謂『形式』.

照這意義講凡純粹數學裏的『常項』都是『邏輯常項』. 好比數1就是一些命題的推出物(Derivative),那些命題的形式是:『有這麼樣的一項c,當x是c時且只當x是c時ϕx纔眞.』 這是ϕ的一個從元,與ϕ以種種不同之値則得種種不同之命題. 我們可以(略去與此處之目的無關的幾個中間的程序)就拿上面這個ϕ的從元做爲

是表示『ϕ所定之類是一個獨項類』或『ϕ所定之類是1的一項』的意義(1是個類的類). 像這樣,命題中有1的其意義就是由某一不變的邏輯形式推出來的. 凡算學常項都可見得是如此的:凡算學常項都是邏輯常項,或用符號表示的簡文這簡文在一個正當的上下文裏的用處全用邏輯的常項去界說.

雖然一切邏輯的(或算學的)命題可全以邏輯常項帶着變項去表示,然倒過來說『一切能用這方法表示的命題都是邏輯的命題』便不對了. 到此我們總算求得算學命題的一個必要的準則 (Criterion) 但是這準則還不充分. 我們已經充分地界說了一些根本觀念的性質,一切算學觀念都可用這些根本觀念來界說;但一切算學命題所可由之而推出的根本命題我們却不曾充分地界說. 這是一件較難的事,關於這事的完備答案是甚麼,現在還不知道.

有些命題可用邏輯的名詞表述却不能由邏

輯斷定他是眞,無窮公理就可以做個例. 一切邏輯的命題都有一種特性,要想表示這種特性人總說邏輯的命題是分析的(Analytic)或說他們的相反提案(Contradictory)是自相矛盾. 但這樣的話不滿足. 矛盾律(Law of contradiction)不過是邏輯的命題之一;他並沒有特別的超越性;證明某一命題的相反提案是自相矛盾也許除矛盾律之外還需用別的演繹原則. 然而我們所求邏輯命題的這種特性在那些以爲他就是『可從矛盾律推論性』(Deducibility from the law of contradiction)的人也曾感到並有意於界說. 這種特性我們姑且叫做『套脫邏輯』(Tautology),他顯然是這句敘述『不管n是甚麼數宇宙間個體的數是n』所沒有. 若非範疇差異的緣故我們本可邏輯地證明世界上有n項的類, n是任何有窮整數;就是$\aleph_0$項類的存在也可證明. 但就因爲範疇的緣故這種證法照第十三章所論是謬誤. 我們只得乞靈於經驗的觀察以決定

世界上個體之數爲n. 在『可能的』世界中,依來本之的意義講,有些世界有一個個體,有些有兩個,有些有三個,……. 就是一個個體的存在,好像也沒有邏輯的必要(原註1)——更進一步說,世界的存在也沒有邏輯的必要. 實體學(Ontology)證明神之存在,倘若所證的有效,那麽,一個個體存在的邏輯必要算是成立了. 但那證法通常人總認爲無效,並且他根據着一個關於存在的謬誤見解——這證法不曾知道存在只能在摹述的東西上講不能在名稱的東西上講,所以由『這是這一個某某』(this is the so-and-so)及『這一個某某存在』(the so-and-so exists)去推論『這存在』(this exists)是毫無意義的. 若我們不承認實體學的推論,我們便好像要被逼着斷定世界的存在是一個偶然的事了——世界的存在不是邏輯的必要了. 如其如此,邏輯的原則必不能斷言『存在』,除非先有假設;換句話說,邏輯的原則絕不能有『命題從元如此如此有時眞』

這種形式的命題,這樣的命題見於邏輯中的時候,或做假設或做假言的斷案,必不做全然斷定的命題. 邏輯上全然斷定的命題必是那些肯定『某命題從元常眞』一類的命題. 例如『「若p包含q且q包含r則p包含r」常眞』,或『「凡α是β且x是α則x是β」常眞』,都是. 這種命題可入邏輯,他們的眞實並不倚賴宇宙的存在. 我們可以說:若沒有宇宙則普遍的命題無一不是常眞;因爲一個普遍命題的相反提案(照第十五章所論)必是一個斷定宇宙存在的命題,若宇宙不存在,這命題當然就不眞了.

邏輯的命題乃是可以先天地(A priori)認識無須研究實在世界的命題. 我們研究經驗的事實不過知道蘇格拉底實際是人,但不必乞靈於經驗我們便知那三段論法在他的抽象的形式(就是用變項表示的形式)裏是正確. 這種特性不在於邏輯命題的本身而在我們所由而認識邏輯命題的方法. 但這特性與這問題『邏輯

命題的本性是甚麼?』有點關係,因爲也有種種的命題很難說是我們能以不藉經驗而知道.

要求『邏輯』或『算學』的界說顯然先要替『分析的命題』這舊觀念求一個新界說不可.『邏輯的命題就是可由矛盾律導出的命題』,這種界說我們雖然不滿意,我們却能以承認並且必須承認有一類的命題與那些由經驗而知道的命題全不相同. 這類命題總有那我們剛纔所叫做套脫邏輯的那種特性. 這一件,再加上他們可以全用變項及邏輯常項表示那一層事實(邏輯常項是命題中雖然一切成分都變而他仍不變的東西)——就可做邏輯或算學的界說. 暫時我不知道套脫邏輯怎樣界說.(原註2)求一個暫時好像滿足的界說並不難;但我總沒見着一個我可覺得滿足的界說,雖然我對於這還缺着一個界說的特性很爲熟悉. 到了這一點我們求算學的邏輯基礎所走的回程總算暫時達於知識的邊界無可再走了.

算理哲學提剛挈領的引論現在已到終點了.

算理哲學上的觀念不用符號是不能正確表示的. 我們要表示的東西尋常語言上並沒有可以自然表示的字,所以我們不拋棄尋常的話言就非將所用的牽強到些不尋常的意義上去不可;讀者最初雖不至於,然經過一些時候必不免於以尋常意義加於我們所用之字,於是,對於我們所要說的意思,便不免有錯誤的觀念了. 況且尋常文法句法又非常的惑人. 例如就數而論,就是如此;『十人』就文法講與『白人』同一形式所以『10』可以做一形容『人』的形容詞. 無論何時牽涉着命題從元普通語言也必惑人,尤甚的是關於存在及摹述. 因爲語言惑人,也因爲語言用於邏輯支蔓不事精確,(語言絕不是爲邏輯設的)所以算理哲學要想論得精密透澈,邏輯的符號(Logical symbolism)有絕對的必要. 讀者願意精研算學的原理的想必不怕(我希望)努力求通這種符號——人以爲這種符號難通其

實並不甚難. 由以上匆匆的討論可知算理哲學中未解決的問題尚有無數,該做的事還有不少: 學者倘若由這小書進而爲算理邏輯重大的研究,這麼,本書著作的主要目的就算達了.

(原註 1.) Principia Mathematica 中根本命題認定『最少有一個體存在』. 我現在看來殊失了邏輯的純粹.

(原註 2.) 『套脫邏輯』對於算學之界說之重要,余門人維氏 (Ludwig Whittgenstein) 頗研究之,余蓋因維氏而思及也. 其後維氏是否將此問題解決不得而知,且生死亦未卜.